

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CAMPUS SOROCABA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE

DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Gustavo Henrique de França

**Estudo da correlação de fótons e controle óptico
a partir do fenômeno da transparência
eletromagneticamente induzida em cavidades
para um átomo de três níveis**

Sorocaba

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Gustavo Henrique de França

**Estudo da correlação de fótons e controle óptico a partir
do fenômeno da transparência eletromagneticamente
induzida em cavidades para um átomo de três níveis**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao curso de Licenciatura Plena em Física da
Universidade Federal de São Carlos, *Campus*
Sorocaba, para obtenção do título de Licenci-
ado em Física. Sorocaba, 29 de abril de 2022.

Orientador: Prof. Dr. James Alves de Souza

Sorocaba

2022

França, Gustavo Henrique de

Estudo da correlação de fótons e controle óptico a partir do fenômeno da transparência eletromagneticamente induzida em cavidades para um átomo de três níveis / Gustavo Henrique de França -- 2022.
86f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): James Alves de Souza
Banca Examinadora: Philippe Wilhelm Courteille,
Romain Pierre Marcel Bachelard
Bibliografia

1. Transparência eletromagneticamente induzida. 2. Eletrodinâmica quântica de cavidades. 3. Estatística de fótons. I. França, Gustavo Henrique de. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - *Campus* Sorocaba
Coordenação do Curso de Licenciatura em Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Folha de aprovação

Gustavo Henrique de França

**“ESTUDO DA CORRELAÇÃO DE FÓTONS E CONTROLE ÓPTICO A
PARTIR DO FENÔMENO DA TRANSPARÊNCIA
ELETROMAGNETICAMENTE INDUZIDA EM CAVIDADES PARA UM
ÁTOMO DE TRÊS NÍVEIS”**

Orientador James A. Souza
Prof. Dr. James Alves de Souza

Membro 1 Philippe Wilhelm Courteille
Prof. Dr. Philippe Wilhelm Courteille

Membro 2 Romain Pierre Marcel Bachelard
Prof. Dr. Romain Pierre Marcel Bachelard

Sorocaba, 29 de abril de 2022.

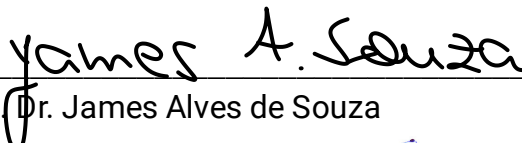


ATA DA DEFESA PÚBLICA


ATA Nº 01/2022

Aos vinte e nove dias do mês de abril de 2022, por videoconferência pela plataforma do Google Meet, realizou-se a defesa pública do trabalho de Conclusão de Curso do estudante **Gustavo Henrique de França** do Curso de Licenciatura em Física – Sorocaba, devidamente matriculado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, perante a Banca Examinadora, composta pelos Prof. Dr. James Alves de Souza, Prof. Dr. Philippe Wilhelm Courteille e Prof. Dr. Romain Pierre Marcel Bachelard segundo o estabelecido nas Normas para apresentação de Trabalho de Conclusão do Curso.


Após a apresentação e arguições, a Banca deliberou, segundo os critérios estabelecidos nas normas do TCC do curso:



Prof. Dr. James Alves de Souza Nota: **10 (DEZ)**



Prof. Dr. Philippe Wilhelm Courteille Nota: **10 (DEZ)**



Prof. Dr. Romain Pierre Marcel Bachelard Nota: **10 (DEZ)**

Com isso, o Trabalho foi considerado **APROVADO**, com nota final **10 (DEZ)**.

Sorocaba, 29 de abril de 2022.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Luciana Aparecida e Airton França, por todo apoio e presença durante esses cinco anos (e meio) de graduação. Sem vocês eu não teria chegado à metade do curso, não teria feito metade do que fiz e não seria metade do homem que sou.

Agradeço à minha companheira por todo amor, paciência, e por ser uma fonte de inspiração capaz de enxergar o melhor em mim em todos os momentos. Também agradeço aos meus amigos, os que estavam desde o início e aos que fiz durante esse processo, gostaria que soubessem o quão importante vocês foram durante essa jornada.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. James Alves de Souza por todo o ensinamento durante as iniciações científicas e a escrita desta monografia. Você não apenas abriu as portas para a minha carreira acadêmica, mas também abriu minha mente para conhecimentos que eu nunca imaginaria aprender. Tudo que eu conquistar como cientista, devo a você.

Por fim, agradeço a todos os professores que tive nos últimos anos, dos quais muitos adquiri um carinho enorme e uma relação de companheirismo, assim como também aos professores Dr. Philippe Courteille, Dr. Romain Bachelard e Dr. Gustavo Rigolin por aceitarem compor a banca examinadora, contribuindo para minha formação.

"A única luta que se perde é aquela que se abandona"

Carlos Marighella

"...e nós nunca, nunca abandonamos"

Don L

Resumo

FRANÇA. G. H. *Estudo da correlação de fótons e controle óptico a partir do fenômeno da transparência eletromagneticamente induzida em cavidades para um átomo de três níveis*. 2022. Trabalho de Conclusão de Graduação (Licenciatura em Física) – Universidade Federal de São Carlos, *campus* Sorocaba, Sorocaba, 2022.

A habilidade de produzir e controlar fótons individuais é hoje um dos fatores mais importantes na evolução tecnológica através da óptica quântica. Neste trabalho, apresentamos um estudo teórico sobre o fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida (EIT-*Electromagnetically Induced Transparency*) combinado com eletrodinâmica quântica de cavidades (CEIT) para explorar o controle das flutuações quânticas e estatística de fótons de um feixe de luz. Para isso consideramos um sistema composto por um único átomo de três níveis em configuração Λ acoplado fortemente a um único modo do campo quântico de uma cavidade óptica. As autoenergias e autoestados do sistema foram calculados analiticamente através da diagonalização do hamiltoniano de interação segundo o modelo de Jaynes-Cummings. Utilizando o formalismo da equação mestra para sistemas quânticos abertos obtemos a evolução temporal do valor esperado dos operadores atômicos e do campo da cavidade, o que nos permitiu calcular numericamente as propriedades do sistema no estado estacionário, como o seu espectro de transmissão, utilizando diferentes parâmetros. Para a análise da estatística de fótons e do estabelecimento dos requisitos básicos para a determinação da quantidade da luz transmitida pela cavidade, nós consideramos o cálculo numérico da função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$. Além do controle da estatística de fótons de sub-Poissoniana para super-Poissoniana, utilizando um parâmetro externo ao sistema dado pela frequência de Rabi de um campo clássico de controle, foi possível observar a geração de luz quântica no sistema CEIT como consequência do fenômeno de bloqueio de fótons para um e dois fótons. O controle quântico observado pode contribuir de maneira significativa para a implementação de fontes de fótons individuais ou fortemente correlacionados ou ainda dispositivos que possam atenuar ou amplificar as flutuações do campo.

Palavras-chave: Transparência eletromagneticamente induzida. Eletrodinâmica quântica de cavidades. Modelo de Jaynes-Cummings. Bloqueio de fótons. Estatística de fótons.

Abstract

FRANÇA. G. H. *Study of photon correlation and optical control using cavity electromagnetically induced transparency for a single three-level atom*. 2022. Graduation Final Work (Degree in Physics) – Federal University of São Carlos, *campus* Sorocaba, Sorocaba, 2022.

The ability to produce and control single photons is one of the outstanding goals of quantum optics to pave the way towards the implementation of quantum devices. In this work, we present a theoretical study on the phenomenon of electromagnetically induced transparency combined with cavity quantum electrodynamics (CEIT) to explore the control of quantum fluctuations and photon statistics of a light beam. For this purpose, we consider a system composed of a single three-level atom in Λ configuration strongly coupled to a single quantum mode of an optical cavity. The dressed states of the system and its respective energy eigenvalues were analytically calculated through the diagonalization of the interaction hamiltonian according to the Jaynes-Cummings model. Using the formalism of the master equation for open quantum systems, we obtain the temporal evolution of the expected value of the atomic and cavity field operators, which allowed us to numerically calculate the properties of the system in the steady state, such as the transmission spectrum of the system, using different parameters. The photon statistics and the quantumness of the light emitted from the cavity were featured by calculating the equal-time second-order intensity correlation function $g^{(2)}(0)$. Additionally to the photon statistics control, which can be optically tuned via the control field intensity, with $g^{(2)}(0)$ varying from sub-Poissonian to super-Poissonian behavior, the correlation function shows two well defined sub-Poissonian regions, resulting from a single-photon and a two-photon blockade. The achievable quantum control can significantly contribute to the implementation of individual or strongly correlated photon sources or devices which attenuates or amplifies the relative intensity noise of a light beam.

Keywords: Electromagnetically induced transparency. Cavity quantum electrodynamics. Jaynes-Cummings model. Photon blockade. Photon statistics.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Ilustração de possíveis transições que podem ser estimuladas por um campo externo de acordo com as regras de seleção de dipolo e o fenômeno de ressonância. A linha sólida representa a aproximação do sistema para dois níveis apenas, caso a respectiva transição seja estimulada ressonantemente por um campo externo de frequência $\omega_c \approx \omega_{01}$ 30
- Figura 2 – Representação da estrutura de um átomo de três níveis em configuração Λ . A transição $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ é acoplada por um único modo do campo quântico da cavidade de frequência ω_{cav} e a transição $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ é acoplada por um campo clássico de controle de frequência ω_c . Para estimular a dinâmica do sistema é utilizado um campo clássico de bombeio no modo do campo da cavidade, de frequência ω_p . As respectivas dessintonias são dadas por Δ_1 , Δ_2 e Δ 31
- Figura 3 – Ilustração da divisão do estado atômico $|3\rangle$ em um dubleto simétrico $|\pm\rangle$ devido ao acoplamento forte do campo de controle, de frequência ω_c , com a transição $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. O espaçamento entre os estados $|\pm\rangle$ é descrito pela frequência de Rabi do campo de controle Ω_c 38
- Figura 4 – Espectro de transmissão do sistema CEIT em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ , para os parâmetros $g_0 = 5,0\kappa$, $\Omega_c = 3,0\kappa$, $\varepsilon = 0,01\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ e $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, considerando o caso de perfeita ressonância entre o átomo e os campos $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ 43
- Figura 5 – Transmissão do sistema CEIT obtida utilizando os mesmos parâmetros apresentados na figura 4 e diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c . O aumento de Ω_c provoca o aumento da largura de banda da janela de transmissão, com o espectro do sistema tendendo ao espectro de uma cavidade vazia (linha tracejada na última figura). 44
- Figura 6 – Espectro de transmissão do sistema CEIT em escala logarítmica obtido no regime de acoplamento forte, $g_0 = 50,0\kappa$, $\Omega_c = 15$ e 40κ , $\varepsilon = \kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = \kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ e $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ 45

Figura 7 – Representação do interferômetro de Hambury-Brown Twiss mostrando que o campo transmitido pela cavidade é dividido em dois feixes, com estes sendo direcionados para dois detectores individuais.	46
Figura 8 – Função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ e transmissão relativa do sistema CEIT, para um único átomo, em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ . Os parâmetros utilizados são $g_0 = 50\kappa$, $\Omega_c = 40\kappa$, $\varepsilon = \kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = \kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ e $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$	53
Figura 9 – Função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ em função da frequência de Rabi do campo de controle normalizada Ω_c/κ , utilizando os mesmos parâmetros da figura 8 e para $\Delta_p = 80\kappa$	55
Figura 10 – Ilustração do diagrama de energia dos estados vestidos do sistema CEIT considerado, mostrando os processos de transição de um e dois fótons. O espaçamento entre os níveis de energia é dado por $2g_{ef}^{(n)} = 2\sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2}$	56
Figura 11 – Função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ em função da frequência de Rabi do campo de controle normalizada Ω_c/κ para diferentes valores de Δ_p	57
Figura 12 – (a) Representação em três dimensões da função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ do sistema CEIT, para um único átomo no regime de acoplamento forte $g_0 = 50 \kappa$, em função da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c/κ e da dessintonia prova-cavidade Δ_p/κ normalizadas. Em (b) apresentamos a vista superior do mesmo gráfico.	58

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	FORMALISMO MATEMÁTICO PARA O ESTUDO DE SISTEMAS QUÂNTICOS	15
2.1	A função de onda e a equação de Schrödinger	15
2.2	O espaço de Hilbert e a notação Bra-Ket	16
2.3	Operadores lineares	18
2.4	Representação matricial	20
2.5	Operador densidade $\hat{\rho}$	21
3	ELETRODINÂMICA QUÂNTICA DE CAVIDADES	24
3.1	Quantização do campo eletromagnético e o Hamiltoniano da cavidade	24
3.2	Hamiltoniano atômico	29
3.3	Hamiltoniano de interação	32
3.4	Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	34
4	TRANSMISSÃO ELETROMAGNETICAMENTE INDUZIDA EM CAVIDADES	36
4.1	Autoestados e autoenergias do sistema CEIT	37
4.2	Método da equação mestra e obtenção do espectro de transmissão do sistema CEIT	40
5	CARACTERIZANDO A NATUREZA QUÂNTICA DA LUZ	46
5.1	Função de Correlação	47
5.2	<i>Photon bunching e antibunching</i>	50
5.3	Controle da Coerência do Campo de Prova com o Sistema CEIT	53
6	CONCLUSÕES	59
	REFERÊNCIAS	61

APÊNDICES	64
APÊNDICE A – OBTENÇÃO DO HAMILTONIANO DO SISTEMA CEIT INDEPENDENTE DO TEMPO	65
APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA EVOLUÇÃO TEMPORAL DA MÉ- DIA DOS OPERADORES DO SISTEMA CEIT .	72

1 Introdução

Desde a proposta da quantização da radiação conduzida por Max Planck em 1900 até o atual desenvolvimento de tecnologias quânticas, o interesse na compreensão do comportamento da luz e a sua interação com a matéria tem sido fundamental para o progresso no campo da mecânica quântica. As leis que regem a física no nível de partículas individuais de radiação e matéria vêm sendo aplicadas de forma satisfatória em um amplo espectro de sistemas, fornecendo previsões e explicações essenciais para a compreensão de fenômenos físicos que não são intuitivos do ponto de vista macroscópico, tais como a dualidade onda partícula, o conceito de emaranhamento e a natureza probabilística na medição de propriedades físicas (ZUBAIRY, 2020).

A óptica quântica é uma área da Física formada pela junção da teoria quântica de campos com a óptica, tendo como principal objeto de pesquisa a aplicação da mecânica quântica aos fenômenos que envolvem a luz e como esta interage com a matéria em seu nível mais fundamental. Do ponto de vista teórico, a óptica quântica fornece um conjunto de questões primordiais que atingem diretamente os fundamentos da física quântica e da filosofia, tais como o conceito de complementaridade e superposição de estados quânticos. Experimentalmente, esta área tem contribuído significativamente para o avanço tanto da ciência quanto da tecnologia. Como exemplo, podemos citar o desenvolvimento do laser gerado a partir de apenas um átomo (AN; FELD, 1997) ou a produção de laser sem inversão de população (MOMPART; CORBALÁN, 2000). Tais avanços têm sido essenciais para o estabelecimento de protocolos para o desenvolvimento de novas tecnologias relacionadas principalmente à interação radiação-matéria, sendo promissores para a expansão das potencialidades dos atuais computadores e avançar nos estudos do processamento e transmissão de informação quântica (SCULLY; ZUBAIRY, 1997).

A outra área da Física que é dominante para a descrição da interação entre luz e matéria é a Eletrodinâmica Quântica, QED, do inglês *Quantum Electrodynamics*. Nesta, tanto a matéria quanto a radiação são consideradas em uma abordagem puramente quântica, de maneira que processos e interações são descritos em termos de quanta de luz, conhecidos como fótons. Desde a década de 1950 várias explicações e predições teóricas precisas tem sido realizadas para diversos fenômenos, as quais vem sendo confirmadas

experimentalmente ao longo dos anos, como o desvio de Lamb (BARUT; KRAUS, 1983), o efeito Stark (STROUD, 1971) e o efeito Casimir (PETERSON; HANSSON; JOHNSON, 1982). As teorias da QED também permitiram a compreensão da correlação entre fótons, que produz efeitos estritamente quânticos como o bloqueio e o antiagrupamento de fótons, do inglês *photon blockade* e *photon antibunching*, respectivamente. No primeiro fenômeno a presença de um único fóton em uma cavidade óptica contendo um átomo aprisionado bloqueia a entrada de um segundo fóton. O segundo fenômeno é consequência do primeiro e evidencia que a luz transmitida por esta mesma cavidade apresenta um comportamento não clássico.

O estudo destes fenômenos revelaram a possibilidade de produção de fótons individuais. Este procedimento é fundamental para o estudo de sistemas ópticos não lineares (HARRIS; HAU, 1999) e para o desenvolvimento tecnológico relacionado ao processamento de informação quântica, simulações quânticas (WITZEL, 2010), criptografia quântica (SCARANI, 2009), metrologia quântica (MOTES, 2015) e diversas outras aplicações.

Neste trabalho estudamos teoricamente o controle da quanticidade da luz através da combinação do fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida, EIT, do inglês *Electromagnetically Induced Transparency*, com eletrodinâmica quântica de cavidades (CEIT). A EIT é um fenômeno quântico de interferência capaz de tornar transparente um meio atômico inicialmente opaco. Este tem sido amplamente estudado desde a sua observação na década de 1990 (HARRIS; FIELD; IMAMOGLU, 1990; HARRIS, 1997; FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005). A não linearidade característica do sistema EIT pode ser melhor explorada com o sistema no interior de uma cavidade óptica, pois esta possibilita otimizar a interação de um único átomo com um único modo quântico do campo da cavidade em um regime de acoplamento átomo-campo forte (SOUZA, 2013).

Para demonstrar o controle da estatística de fótons do campo emitido pela cavidade nós utilizamos exatamente estas condições, considerando um único átomo de três níveis na configuração Λ fortemente acoplado a um único modo do campo da cavidade. A partir do cálculo da função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$, mostramos que a estatística do campo pode variar de sub-Poissoniana, com a observação do bloqueio de um e de dois fótons, caracterizando o fenômeno de antiagrupamento de fótons e o comportamento quântico da luz, para uma estatística super-Poissoniana, usualmente observada para luz clássica. A vantagem do sistema CEIT em relação a outros sistemas atômicos, reside no

fato do mesmo permitir que o controle seja feito pela variação de um parâmetro externo ao sistema, dado pela frequência de Rabi de um campo clássico de controle. O controle quântico observado neste sistema pode contribuir com os estudos e experimentos já citados para a produção de fótons individuais e implementação de dispositivos que possam atenuar ou amplificar as flutuações do campo.

Para melhor orientar o leitor no entendimento do estudo desenvolvido, este trabalho foi dividido em 6 capítulos. Nos capítulos 2 e 3 fornecemos os elementos básicos sobre os conceitos matemáticos da física quântica e os hamiltonianos utilizados para a modelagem do nosso sistema. No capítulo 4 os estados vestidos e as respectivas autoenergias do sistema CEIT são calculados analiticamente para melhor explicar o espectro de transmissão do mesmo obtido numericamente. No capítulo 5 apresentamos a função de correlação $g^{(2)}(0)$ e como esta pode ser utilizada para caracterizar a estatística do campo transmitido pelo sistema átomo-cavidade. Neste mesmo capítulo mostramos como o controle dessa estatística é estabelecido pela variação dos parâmetros do sistema e no capítulo 6 finalizamos com as nossas conclusões e futuros estudos que serão conduzidos neste tema.

2 Formalismo matemático para o estudo de sistemas quânticos

No livro *Lectures on Physics Vol. 1* (p. 389, 1963), Richard Feynman, um dos pioneiros no estudo da QED (PLEITEZ, 2018), fala sobre a relação entre matemática e a física com a afirmação de que "*na física teórica descobrimos que todas as nossas leis podem ser escritas em forma matemática; e isso tem uma certa simplicidade e beleza*", com o intuito de discutir a importância desta metodologia no desenvolvimento da Física. O progresso da ciência, como no caso da Física, é marcado pela evolução de seus métodos. A evolução da matemática, com a invenção do cálculo e da álgebra, contribuiu significativamente para a formulação de uma das teorias mais importantes da Física, a mecânica quântica. Devido a isso, apresentamos neste capítulo, de maneira introdutória, a fundamentação e o formalismo matemático necessários para facilitar o entendimento do que é apresentado nos próximos capítulos.

2.1 A função de onda e a equação de Schrödinger

Na física quântica, a evolução do estado de uma partícula de massa m é descrita pela equação de Schrödinger, dada em uma dimensão por (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOE, 1991):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

em que $V(x)$ é o potencial de interação do sistema e $\hbar = h/2\pi$ é a constante de Planck reduzida, também conhecida como constante de Dirac.

A equação (2.1) é caracterizada pela função complexa $\Psi(x, t)$, conhecida como função de onda, a qual contém informações sobre a posição e o momento da partícula em um instante de tempo t . Conhecendo-se $\Psi(x, t)$, podemos calcular $|\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)$, sendo $\Psi^*(x, t)$ o complexo conjugado de $\Psi(x, t)$. Este resultado é interpretado como a densidade de probabilidade de se encontrar uma partícula na posição x no instante t . Se considerarmos a existência de uma partícula no espaço, tem-se a condição de normalização

dada por,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1, \quad (2.2)$$

a qual é satisfeita para todas as funções de onda.

Como estamos trabalhando com uma densidade de probabilidades, a equação de Schrödinger nos permite calcular a média de qualquer propriedade física do sistema, também conhecida como observável O , através da relação:

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{A} \Psi(x, t) dx. \quad (2.3)$$

Nesta representação, o observável físico é descrito pelo operador \hat{A} .

Neste trabalho consideramos a dinâmica de um elétron em um átomo. Nesta situação dizemos que o elétron está em um estado ligado. A energia utilizada para estimular este elétron é proveniente de um campo laser externo. Tanto os fótons que compõem o campo quanto o átomo em que o elétron está ligado, estão sujeitos às condições de contorno impostas por uma cavidade óptica, composta por dois espelhos. Neste caso, resolvemos a equação de Schrödinger numericamente para obtenção das funções de onda dos estados estacionários do sistema átomo-campo para analisar o seu respectivo espectro de energia.

2.2 O espaço de Hilbert e a notação Bra-Ket

O primeiro postulado da mecânica quântica diz que o estado quântico de qualquer partícula ou sistema físico é caracterizado por um vetor de estado, pertencente a um espaço abstrato, definido a partir de suas características (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1991).

O espaço que representa tal estado em mecânica quântica possui dimensões infinitas e deve possuir um produto interno completo, para que o produto escalar $|\Psi(x, t)|^2$ seja válido para qualquer estado. Este é classificado como um espaço de Hilbert (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1991). Para ser mais específico, nos referimos a um subespaço do espaço de Hilbert constituído apenas por funções de quadrado integráveis, de forma que a equação (2.2) seja válida para qualquer vetor de estado neste espaço. Como apenas este conjunto possui significado físico, ele será referido neste trabalho apenas como espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Os vetores pertencentes ao espaço \mathcal{H} na notação de Dirac são denominados *kets* e representados pelo símbolo $|\ \rangle$. Dessa forma, podemos representar o estado descrito pela função de onda Ψ como o vetor $|\Psi\rangle$ (GRIFFITHS, 2005). Os *kets*, similarmente aos vetores no espaço euclidiano, estão sujeitos a operações de soma vetorial e multiplicação por escalar. Se considerarmos os *kets* $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle, |\varphi\rangle\} \in \mathcal{H}$ e os números $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{C}$ tem-se que:

$$|\psi\rangle + |\phi\rangle = |\varphi\rangle, \quad (2.4)$$

$$\alpha|\psi\rangle = |\varphi\rangle, \quad (2.5)$$

além de também possuírem as propriedades de comutatividade, associatividade e distributiva:

$$|\psi\rangle + |\phi\rangle = |\phi\rangle + |\psi\rangle, \quad (2.6)$$

$$|\psi\rangle + (|\phi\rangle + |\varphi\rangle) = (|\psi\rangle + |\phi\rangle) + |\varphi\rangle, \quad (2.7)$$

$$\alpha(\beta|\psi\rangle) = (\alpha\beta)|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle\beta, \quad (2.8)$$

$$a(|\psi\rangle + |\phi\rangle) = a|\psi\rangle + a|\phi\rangle. \quad (2.9)$$

Analogamente ao vetor nulo no espaço euclidiano, no espaço de Hilbert existe o *ket* nulo definido por $|0\rangle = 0|\psi\rangle$.

Podemos associar o espaço vetorial dos *kets* a um espaço dual, chamado espaço dos *bras*, os quais são representados por $\langle \ |$. Para entender este espaço dual é necessária uma breve recapitulação de álgebra. Em álgebra, um corpo é definido como um anel comutativo com a especificidade de que todo elemento diferente de 0 possui um elemento inverso com relação à multiplicação. Isto é, para cada elemento x de um anel comutativo F e que não seja 0, existe um elemento y , que também pertence à F , de forma que $y = x^{-1}$, e portanto, $xy = 1$. Um anel é um conjunto com propriedades bem específicas de somatória e multiplicação. Para maiores informações veja a referência (DOMINGUES; IEZZI, 1982).

Formalmente, a definição acima é descrita por:

$$(\forall x \in F \setminus \{0\})(\exists y \in F) : xy = 1. \quad (2.10)$$

Para um espaço vetorial \mathcal{V} que esteja sobre um corpo \mathbb{K} , existe uma função f cujo domínio é \mathcal{V} e a imagem \mathbb{K} , ou seja, $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}$. Esta função f é denominada funcional. No

nosso caso, o espaço vetorial é o espaço de Hilbert \mathcal{H} que está sobre o corpo dos números complexos \mathbb{C} . Assim sendo, existe um funcional F que associa um número complexo para cada ket no espaço de Hilbert, ou seja, $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$. O conjunto formado por todos os funcionais definidos sobre os kets $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ também é um espaço vetorial, denominado espaço dual de \mathcal{H} , simbolizado por \mathcal{H}^* (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1991).

Dessa forma, para cada ket $|\psi\rangle$ no espaço de Hilbert existe um bra $\langle\psi|$ correspondente no espaço dual, de maneira que o produto escalar, ou interno, neste espaço é definido pela operação de um bra $\langle\psi|$ sobre um ket $|\phi\rangle$, cujo resultado é o número complexo $\langle\psi|\phi\rangle$.

A correspondência entre ket $|\psi\rangle$ e $\langle\psi|$ é antilinear, isto é, sendo α um número complexo e α^* o seu complexo conjugado, tem-se

$$\alpha|\psi\rangle \Leftrightarrow \alpha^*\langle\psi|. \quad (2.11)$$

As propriedades do produto escalar na notação de Dirac são descritas por:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*, \quad (2.12)$$

$$\langle\psi|\alpha\phi + \beta\varphi\rangle = \alpha\langle\psi|\phi\rangle + \beta\langle\psi|\varphi\rangle, \quad (2.13)$$

$$\langle\alpha\psi + \beta\phi|\varphi\rangle = \alpha^*\langle\psi|\varphi\rangle + \beta^*\langle\phi|\varphi\rangle, \quad (2.14)$$

$$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0, \quad (2.15)$$

em que a igualdade da equação (2.15) é possível apenas se $|\psi\rangle = 0$.

2.3 Operadores lineares

Um operador linear \hat{A} , por definição, é uma entidade matemática que associa cada ket $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ com um outro ket $|\psi'\rangle \in \mathcal{H}$ cuja correspondência é linear, ou seja:

$$|\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle, \quad (2.16)$$

$$\hat{A}(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \alpha\hat{A}|\psi\rangle + \beta\hat{A}|\phi\rangle. \quad (2.17)$$

Assim como os bras, os operadores irão operar em um ket sempre pela esquerda (GRIFFITHS, 2005). O produto de dois operadores lineares, $\hat{A}\hat{B}$, age sobre um ket conforme a ordem:

$$(\hat{A}\hat{B})|\psi\rangle = \hat{A}(\hat{B}|\psi\rangle), \quad (2.18)$$

ou seja, \hat{B} opera no ket $|\psi\rangle$, resultando em um outro ket ($\hat{B}|\psi\rangle$) e o operador \hat{A} então age sobre o ket $\hat{B}|\psi\rangle$. Essa ordem é significativa porque, em geral, $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$, e uma forma de representar essa propriedade dos operadores é através do comutador $[\hat{A}, \hat{B}]$, definido por (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOE, 1991):

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0, \quad (2.19)$$

para a maioria dos operadores.

A partir dos conceitos de álgebra linear, podemos definir um ket $|\psi\rangle$ como um autovetor (ou autoestado) se este obedecer a seguinte relação:

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, \quad (2.20)$$

sendo λ um número complexo que representa os autovalores (ou autoenergias) de \hat{A} . No caso da equação de Schrödinger independente do tempo tem-se $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, sendo \hat{H} o operador hamiltoniano do sistema e E seu autovalor de energia ou autoenergia. Essa notação é utilizada para representar diversos sistemas quânticos, reduzindo-os assim à um problema de autovalores e autovetores (GRIFFITHS, 2005).

Como é possível notar, a representação de Dirac, ao mesmo tempo que simplifica a notação, também exige uma ordem que deve ser respeitada. Um exemplo dessa importância é que o produto interno de um ket normalizado resulta em 1, isto é, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, ao passo que se invertermos a ordem, $|\psi\rangle\langle\psi|$, temos um operador, e não um número, que é denominado projetor $\hat{\sigma}_{\psi\psi}$, que pode ser aplicado a um ket arbitrário $|\phi\rangle$ resultando em:

$$\hat{\sigma}_{\psi\psi}|\phi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle. \quad (2.21)$$

Como já mencionado, o produto interno $\langle\psi|\phi\rangle$ resulta em um número complexo, portanto, o operador projetor $|\psi\rangle\langle\psi|$ gera em um ket proporcional à $|\psi\rangle$, um resultado totalmente diferente da ordem inversa $\langle\psi|\psi\rangle$.

Um operador linear que age em um ket, assim como para os bras, irá resultar em outro ket. E da mesma forma como existe um bra com correspondência antilinear para cada ket, também pode ser provado de forma análoga que para cada operador \hat{A} existe um operador associado \hat{A}^\dagger chamado operador adjunto. Essa correspondência entre kets e bras permite definir como o operador adjunto age sobre os vetores:

$$|\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle \Rightarrow \langle\psi'| = \langle\psi|\hat{A}^\dagger, \quad (2.22)$$

$$\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle^*. \quad (2.23)$$

Cohen-Tannoudji, Dui e Laloe (1991) resumem as propriedades para se obter o adjunto de qualquer expressão composta por constantes, kets, bras e operadores em 5 passos. Deve-se substituir: (1) constantes pelo complexo conjugado, (2) os kets pelos bras correspondentes, (3) os bras pelos kets correspondentes, (4) os operadores pelos seus adjuntos e, por fim, (5) inverter a ordem dos fatores, como foi feito na Equação (2.23).

O símbolo \dagger nos operadores adjuntos significa transposto conjugado, e os operadores que são iguais aos seus adjuntos, $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, são classificados como hermitianos. Esses operadores são fundamentais na mecânica quântica pois possuem autovalores reais e representam quantidades físicas que podem ser medidas, e por isso são chamados de observáveis. As suas propriedades e classificações podem ficar mais claras quando utilizamos a representação matricial.

2.4 Representação matricial

Uma base no espaço de Hilbert é constituída por um conjunto discreto de vetores $\{|e_i\rangle\}$ que obedecem a relação de ortonormalidade:

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (2.24)$$

em que δ_{ij} é a delta de Kronecker, que possui o valor 1 quando $i = j$ e 0 quando $i \neq j$. Esta relação garante que os elementos da base são ortogonais entre si e normalizados. Além disso, o conjunto também obedece à relação de completeza

$$\sum_i^n |e_i\rangle\langle e_i| = \hat{1}, \quad (2.25)$$

sendo $\hat{1}$ o operador identidade. Com estas propriedades podemos definir qualquer ket $|\psi\rangle$ neste espaço vetorial como uma combinação linear dos elementos desta base:

$$|\psi\rangle = \sum_i^n c_i |e_i\rangle, \quad (2.26)$$

em que c_i representam coeficientes $\langle e_j | \psi \rangle$ (GRIFFITHS, 2005). Na notação matricial o ket é representado por um vetor coluna,

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

e o bra correspondente por um vetor linha, cujas componentes são os respectivos conjugados dos elementos do ket $\langle\psi|e_i\rangle$, ou seja,

$$\langle\psi| = \begin{bmatrix} c_1^* & c_2^* & \cdots & c_n^* \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Portanto, o produto escalar $\langle\psi|\phi\rangle$ é descrito pela multiplicação de uma matriz linha por uma matriz coluna (GRIFFITHS, 2005).

Os operadores são responsáveis por realizar uma transformação de base, de forma que são representados por uma matriz quadrada composta por elementos definidos por $A_{ij} = \langle e_i|\hat{A}|e_j\rangle$:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Como o operador adjunto \hat{A}^\dagger é o conjugado transposto de \hat{A} , este é representado pela matriz transposta de \hat{A} , tomando o complexo conjugado de cada elemento desta matriz (GRIFFITHS, 2005), ou seja,

$$\hat{A}^\dagger = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \cdots & A_{m1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \cdots & A_{m2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \cdots & A_{nm}^* \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Esta representação nos permite verificar algumas propriedades do operador Hermitiano $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, como por exemplo, os elementos simétricos em relação à diagonal principal serem conjugados complexos uns dos outros, $A_{ij} = A_{ji}^*$ e os elementos desta mesma diagonal serem iguais ao seu próprio complexo conjugado $A_{ii} = A_{ii}^*$, ou seja, são descritos por números reais. Como as medidas realizadas em um sistema físico são representadas por números reais, isso justifica o fato de grandezas físicas serem representadas por operadores Hermitianos (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOE, 1991).

2.5 Operador densidade $\hat{\rho}$

Na mecânica quântica, por diversas vezes, são considerados sistemas com estados muito bem definidos, os quais permitem uma previsão probabilística do resultado de uma

série de medições. Na prática, porém, o estado do sistema pode não ser bem definido, de maneira que precisamos utilizar um método que incorpore essa informação incompleta para que nossos cálculos resultem em predições que utilizem o máximo possível da informação parcial que possuímos. Isso pode ser feito através do operador densidade $\hat{\rho}$ (COHEN-TANNOUDI; DIU; LALOE, 1991).

O operador densidade pode ser utilizado para o cálculo de diversas propriedades físicas de sistemas quânticos. Por exemplo, conforme a equação (2.26), um vetor de estado em um instante t é dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i^n c_i(t)|e_i\rangle, \quad (2.31)$$

com o conjunto $\{e_i\}$ formando uma base ortonormal. Os coeficientes $c_i(t)$ satisfazem a relação de normalidade:

$$\sum_i^n |c_i(t)|^2 = 1. \quad (2.32)$$

O valor médio de um observável \hat{A} , equação (2.3), cujos elementos são $A_{ij} = \langle e_i|\hat{A}|e_j\rangle$, é representado na notação de Dirac pelo produto escalar:

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \sum_{i,j} c_i^* c_j A_{ij}, \quad (2.33)$$

em que $c_i^* c_j$ pode ser obtido a partir da definição do vetor de estado dada na equação (2.31):

$$\langle e_j|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|e_i\rangle = \langle e_i|c_i^*|e_i\rangle \langle e_j|c_j|e_j\rangle = c_i^* c_j. \quad (2.34)$$

Logo, podemos introduzir o operador densidade $\hat{\rho}(t)$ como o operador projetor $|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ e o utilizarmos para reescrever todas estas últimas equações. A equação (2.34) torna-se

$$c_i^* c_j = \langle e_j|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|e_i\rangle = \langle e_j|\hat{\rho}(t)|e_i\rangle = \rho_{ij}(t), \quad (2.35)$$

e a equação (2.32) é reescrita como o somatório dos elementos da diagonal principal,

$$\sum_i^n |c_i(t)|^2 = \sum_i^n c_i^* c_i = \sum_i^n \langle e_i|\hat{\rho}(t)|e_i\rangle = \sum_i^n \rho_{ii}(t) = Tr(\hat{\rho}(t)) = 1, \quad (2.36)$$

sendo $Tr(\hat{\rho}(t))$ o traço da matriz densidade $\hat{\rho}(t)$, dado pela soma dos elementos da diagonal principal.

Com esta definição, podemos reescrever a média de um observável, dada pela equação (2.33), como:

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \sum_{i,j} c_i^* c_j A_{ij} = \sum_{i,j} \langle e_j | \hat{\rho}(t) | e_i \rangle \langle e_i | \hat{A} | e_j \rangle = \sum_{i,j} \langle e_j | \hat{\rho}(t) \hat{A} | e_j \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}(t) \hat{A}). \quad (2.37)$$

Dessa forma, o operador densidade pode ser utilizado para calcular diversas previsões físicas obtidas para o estado $|\psi(t)\rangle$ (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOE, 1991).

Adicionalmente, a partir da própria definição do operador densidade podemos concluir que este é hermitiano, $\hat{\rho}^\dagger(t) = \hat{\rho}(t)$, de maneira que o produto dos operadores no traço da equação (2.37) comutam, ou seja,

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \text{Tr}(\hat{\rho}(t) \hat{A}) = \text{Tr}(\hat{A} \hat{\rho}(t)). \quad (2.38)$$

A equação (2.38) evidencia a propriedade cíclica do traço do produto de operadores, isto é:

$$\text{Tr}(\hat{A} \hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B} \hat{A}), \quad (2.39)$$

$$\text{Tr}(\hat{A} \hat{B} \hat{C}) = \text{Tr}(\hat{C} \hat{A} \hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B} \hat{C} \hat{A}). \quad (2.40)$$

Para a análise do sistema átomo-cavidade discutido nesta monografia, utilizamos o formalismo e as propriedades matemáticas apresentados neste capítulo.

3 Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

Com o advento da mecânica quântica (MQ) foi possível aprofundar nosso conhecimento sobre a estrutura da matéria em nível atômico, trazendo à tona conceitos contraintuitivos cientificamente bem consolidados atualmente. Concomitantemente, as ideias fundamentais da MQ forneceram a base para a explicação de fenômenos que antes não podiam ser entendidos, como no caso do efeito fotoelétrico (WENTZEL, 1926) e da emissão espontânea (NESBET, 1971). A definição de quantização da energia por Max Planck, estendida por Albert Einstein, evoluiu até a quantização do campo eletromagnético, dos níveis de energia dos átomos e de sistemas compostos, como o sistema átomo-campo que apresentamos neste trabalho, dando origem à eletrodinâmica quântica. Esta foi formulada principalmente por Feynman, Dirac, Tomonaga, entre outros, na segunda metade do século XX.

Para estudarmos o sistema composto por um átomo de três níveis acoplado a um único modo do campo quântico de uma cavidade óptica é necessário conhecer cada parte desse sistema separadamente, ou seja, além da interação entre eles, também precisamos descrever e entender o sistema atômico de três níveis e o campo eletromagnético quantizado da cavidade separadamente.

3.1 Quantização do campo eletromagnético e o Hamiltoniano da cavidade

A luz sempre ocupou um lugar de destaque em nossas tentativas de descrever a natureza classicamente e quanticamente. Até o final do século XVIII a descrição clássica corpuscular para a luz dada por Newton predominava. Com a evolução dos experimentos realizados com a luz, devido principalmente a Thomas Young e Augustin Fresnel, a teoria clássica ondulatória da luz, que já era defendida por Christiaan Huygens desde o século XVII, é retomada e aceita por praticamente todos os estudiosos da época até metade do século XIX (OLIVEIRA; MARTINS; SILVA, 2019). A teoria clássica ondulatória da luz é consolidada por Maxwell ao mostrar claramente que a luz é descrita por uma onda na unificação da eletricidade com o magnetismo no ano de 1860 (SCULLY; ZUBAIRY, 1997).

No século XX, com a catástrofe do ultravioleta associada à radiação de corpo negro de um lado e o efeito fotoelétrico do outro, são dados os primeiros passos para a descrição da luz quanticamente. Estes experimentos foram explicados teoricamente por Max Planck e Albert Einstein, que introduziu o conceito de fóton. A teoria quântica da radiação eletromagnética é estabelecida por Dirac em 1927 (SCULLY; ZUBAIRY, 1997).

Nesta seção discutimos brevemente os conceitos associados à quantização do campo eletromagnético no interior de uma cavidade óptica, essencial para a descrição do hamiltoniano do único modo do campo eletromagnético quântico da cavidade nua (isolada), que acopla o sistema atômico de três níveis considerado em nosso trabalho.

Considerando um campo eletromagnético em uma cavidade óptica de comprimento L linearmente polarizada na direção do eixo- x (direção do campo elétrico), podemos descrever a componente elétrica como uma expansão infinita dos modos normais do campo da cavidade (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$E(z, t) = \sum_i A_i q_i(t) \text{sen}(k_i z), \quad (3.1)$$

sendo q_i a amplitude do i -ésimo modo normal, $k_i = i\pi/L$ com $i = 1, 2, 3, \dots$ e

$$A_i = \left(\frac{2\omega_i^2 m_i}{V\epsilon_0} \right), \quad (3.2)$$

com ω_i sendo a frequência natural da cavidade, m_i uma constante com dimensão de massa, V o volume da cavidade e ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo. A componente magnética do campo eletromagnético é descrita de maneira similar como,

$$B(z, t) = \sum_i A_i \left(\frac{\dot{q}_i(t)\epsilon_0}{k_i} \right) \text{cos}(k_i z). \quad (3.3)$$

O hamiltoniano clássico desse campo é obtido pela integração dos componentes elétrico e magnético do mesmo no volume da cavidade,

$$H = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 B^2) dV', \quad (3.4)$$

sendo μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo. Substituindo as Equações (3.1) e (3.3) em (3.4), e calculando a integral, obtém-se o hamiltoniano em função das variáveis canônicas da posição q e do momento p de cada modo:

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i \omega_i^2 q_i^2 + \frac{p_i^2}{m_i} \right). \quad (3.5)$$

Note que a equação (3.5) é a soma das energias de infinitos osciladores mecânicos clássicos. Isso significa que cada modo do campo eletromagnético da cavidade é dinamicamente equivalente a um oscilador harmônico.

A quantização do campo eletromagnético consiste em substituir as variáveis canônicas q e p pelos seus respectivos operadores de posição e momento, \hat{q} e \hat{p} , os quais obedecem a relação de comutação $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ (GRYNBERG; ASPECT; FABRE, 2010).

O hamiltoniano da equação (3.5) pode ser escrito em função dos operadores de aniquilação \hat{a} e criação \hat{a}^\dagger , a partir da seguinte transformação canônica:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_i\omega_i}}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger), \quad (3.6)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m_i\omega_i}{2}}(\hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger), \quad (3.7)$$

de maneira que:

$$\hat{H} = \sum_i \hbar\omega_i \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right). \quad (3.8)$$

A equação (3.8) mostra que a substituição das variáveis clássicas, canonicamente conjugadas, de posição e momento na equação (3.5) por seus respectivos operadores quânticos, equivale a substituir a descrição do campo na cavidade por um conjunto de osciladores clássicos de frequência ω_i por um conjunto equivalente de osciladores quânticos de mesma frequência.

Os operadores de aniquilação e criação obedecem à relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ e o operador $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n}$, chamado de operador número, decreve o número médio de fótons no interior da cavidade (SCULLY; ZUBAIRY, 1997). A terminologia “aniquilação” e “criação” é estabelecida porque estes operadores descrevem, respectivamente, a aniquilação e a criação de fótons no modo do campo considerado, quando aplicados ao estado de Fock, ou de número, do campo $|n\rangle$.

Neste trabalho consideramos apenas um modo do campo da cavidade, de maneira que se E_n é a autoenergia correspondente do estado $|n\rangle$, tem-se a partir da equação (3.8),

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (3.9)$$

sendo as autoenergias do sistema neste caso dadas por $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Este resultado é obtido a partir da equação de autovalores para o operador número $\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$, em que o número de fótons n na cavidade é autovalor de $\hat{a}^\dagger \hat{a}$.

Uma vez que $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ é uma constante aditiva, referente à energia das flutuações do vácuo, o hamiltoniano para o modo do campo quântico da cavidade utilizado em nossos cálculos é descrito apenas por:

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad (3.10)$$

que pode ser considerado sem perda de generalidade.

Para melhor visualizarmos o efeito dos operadores de aniquilação e criação no estado de Fock $|n\rangle$ vamos considerar a aplicação do operador de aniquilação \hat{a} , por exemplo, na equação de Schrödinger independente do tempo $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ da seguinte forma,

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle = \hbar\omega\hat{a}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1 + \frac{1}{2}\right)\hat{a}|n\rangle, \quad (3.11)$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}|n\rangle, \quad (3.12)$$

em que utilizamos a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ e a propriedade cíclica dos operadores apresentada no capítulo 2.

Pela equação (3.12) nota-se que o operador de aniquilação reduz o valor da autoenergia do sistema por $\hbar\omega$, equivalente à energia de um fóton de frequência ω . Dessa forma, podemos concluir que o estado resultante com um fóton a menos é dado por,

$$|n-1\rangle = \frac{\hat{a}}{\alpha}|n\rangle, \quad (3.13)$$

sendo α uma constante de normalização, que garante que $\langle n-1|n-1\rangle = 1$. Uma vez que $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$ podemos escrever,

$$\langle n-1|n-1\rangle = \frac{\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle}{|\alpha^*\alpha|} = \frac{n}{|\alpha|^2}\langle n|n\rangle = \frac{n}{|\alpha|^2} = 1, \quad (3.14)$$

o que fornece $\alpha = \sqrt{n}$. Logo, a equação (3.13) pode ser reescrita como

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (3.15)$$

O resultado da equação (3.15) mostra que o operador de aniquilação altera o estado do campo da cavidade subtraindo um fóton do mesmo, conforme discutido anteriormente. Se procedermos de maneira análoga com o operador de criação \hat{a}^\dagger tem-se (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (3.16)$$

mostrando que este operador altera o estado do campo da cavidade adicionando um quantum de energia no mesmo.

Nós acabamos de discutir como o campo eletromagnético pode ser quantizado, quando sujeito às condições de contorno impostas pela cavidade para ondas estacionárias. Apesar do procedimento utilizado, o campo também pode ser quantizado no espaço livre. Para isso é necessário considerar a propagação das ondas eletromagnéticas, sujeitas às condições de contorno periódicas, expandindo os campos elétrico e magnético em termos de ondas planas (SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c.c., \quad (3.17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c.c., \quad (3.18)$$

em que a somatória é feita sobre um conjunto infinito e discreto de valores do vetor de onda $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. O versor de polarização do campo é dado por $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$, $\alpha_{\mathbf{k}}$ é uma amplitude adimensional, *c.c.* é o complexo conjugado e

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2}. \quad (3.19)$$

Analogamente ao caso estacionário, o campo eletromagnético no espaço livre é quantizado identificando-se $\alpha_{\mathbf{k}}$ e $\bar{\alpha}_{\mathbf{k}}^*$ com os operadores de aniquilação $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ e criação $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$, respectivamente, de maneira que a relação de comutação $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] = 1$ seja satisfeita. Dessa forma, as equações (3.16) e (3.17) para os campos elétrico e magnético, respectivamente, são descritas quanticamente como (SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + H.c., \quad (3.20)$$

$$\hat{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + H.c., \quad (3.21)$$

sendo *H.c.* o hermitiano conjugado.

Usualmente estes operadores são escritos separadamente, com um termo contendo o operador de aniquilação e o outro contendo o seu hermitiano conjugado, dado pelo operador de criação. Para o campo elétrico, por exemplo, tem-se (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (3.22)$$

sendo $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ e $\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Essa forma possui uma formalidade matemática útil que utilizaremos para estudar a detecção de fótons no capítulo 5.

3.2 Hamiltoniano atômico

Para que possamos compreender a dinâmica do sistema átomo-campo, além do hamiltoniano do campo quântico da cavidade, também é necessária a descrição do hamiltoniano atômico. Em nosso modelo consideramos um átomo com um único elétron em sua última camada de valência, como o Rubídio e o Césio, por exemplo. Este elétron pode ser estimulado e transicionar entre diferentes níveis ou estados de energia dependendo da energia $\hbar\omega$ fornecida pelo campo.

Um átomo real possui inúmeros níveis de energia com uma estrutura muito complexa. Para aproximarmos o mesmo para um sistema de apenas 3 níveis de energia, como o proposto, é preciso considerar dois fatores: o fenômeno de ressonância e as regras de seleção (SOUZA, 2013).

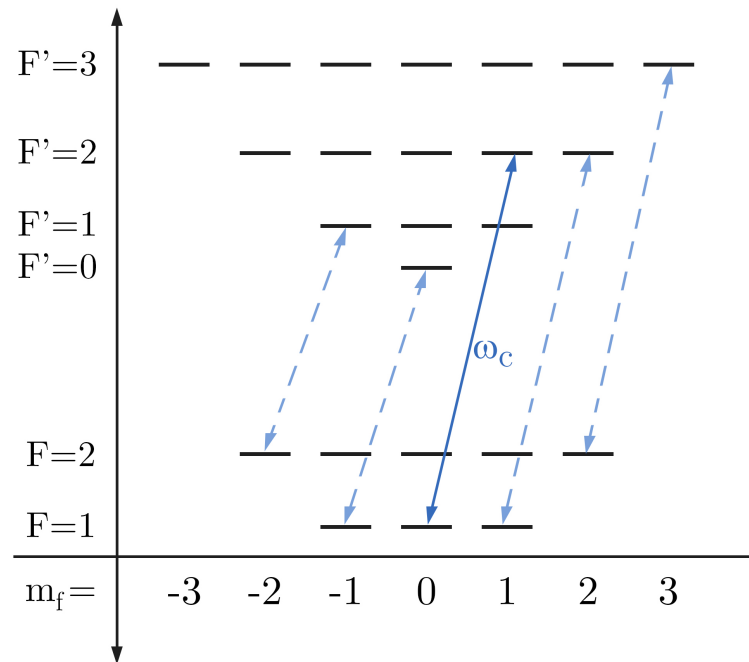
Se o elétron estiver em seu estado fundamental, de menor energia, a absorção de um fóton com energia $\hbar\omega$ pode fazer com que o mesmo seja estimulado para um estado excitado, descrito por um nível de maior energia. Este processo só ocorre se a energia absorvida pelo elétron é compatível com a energia da respectiva transição, pois os níveis de energia do elétron são quantizados. Como o estado excitado é instável, o elétron decai emitindo um fóton, de maneira que o sistema pode voltar ao mesmo estado inicial antes da absorção do fóton ou decair para um estado diferente. Este processo é chamado de *espalhamento*.

A eficiência do espalhamento varia em função da diferença entre a frequência ω do fóton incidente e a frequência ω_0 de ressonância da transição atômica. Nos casos em que a frequência do campo eletromagnético incidente é menor do que a transição atômica, tem-se o espalhamento de Rayleigh e na situação em que é maior, é observado o espalhamento Thomson. Para a frequência ressonante $\omega \approx \omega_0$ a eficiência do espalhamento é máxima. Neste caso a distribuição de frequências da luz espalhada é dada por uma função Lorentziana. Quando o elétron emite um fóton com frequência diferente daquela do fóton absorvido tem-se o espalhamento Raman (GRYNBERG; ASPECT; FABRE, 2010). No nosso modelo consideramos as frequências dos campos que acoplam as transições atômicas próximas de suas frequências de ressonância, de maneira que a eficiência do espalhamento seja máxima. Como utilizamos apenas dois campos de acoplamento, o átomo pode ser aproximado para três níveis de energia, o que nos permite analisar duas transições, uma

para cada campo.

O segundo fator a se considerar são as regras de seleção de dipolo, pois são elas que ditam quais transições entre os subníveis de energia são ou não possíveis. Os estados fundamentais são representados pelos números quânticos de momento angular total F . Cada subnível é degenerado em m_f possíveis estados, sendo $m_f = [-F, F]$. As possíveis transições, considerando que o fóton possui momento angular igual à $1\hbar$, são entre estados F e F' cuja diferença é de $\Delta F = (F' - F) = \pm 1$, e a variação de m_f , $\Delta m_f = 0, \pm 1$. Na Figura 1 apresentamos alguns exemplos de transições permitidas pelas regras de seleção para a linha D_2 do átomo de Rubídio-87, $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$ (STECK, 2003). Se estimularmos ressonantemente a transição $|F = 1; m_f = 0\rangle \rightarrow |F' = 2; m'_f = 1\rangle$ de frequência ω_{01} , representada pela linha sólida, com fótons de frequência $\omega_c \approx \omega_{01}$, é possível selecionar apenas esta transição, de maneira que podemos aproximar o sistema para um átomo de apenas dois níveis de energia.

Figura 1 – Ilustração de possíveis transições que podem ser estimuladas por um campo externo de acordo com as regras de seleção de dipolo e o fenômeno de ressonância. A linha sólida representa a aproximação do sistema para dois níveis apenas, caso a respectiva transição seja estimulada ressonantemente por um campo externo de frequência $\omega_c \approx \omega_{01}$.

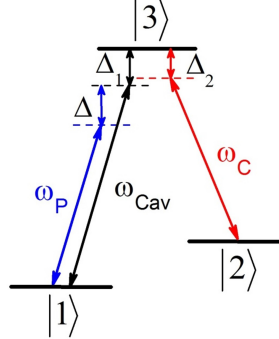


Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste trabalho consideramos um átomo de três níveis em configuração Λ , com dois

estados fundamentais $|1\rangle$, $|2\rangle$ e um estado excitado $|3\rangle$. A disposição destes níveis remete ao formato da letra grega Λ , como mostrado na figura 2. Para que a aproximação de três níveis seja válida são necessários pelo menos dois campos selecionando as transições atômicas permitidas. Neste caso, temos o campo eletromagnético quântico da cavidade, de frequência ω_{cav} , acoplando a transição $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ e um campo clássico de controle, dado por um laser de frequência ω_c , acoplando a transição $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Como a cavidade óptica é um ressonador eletromagnético, a frequência ω_{cav} é definida pela configuração geométrica da mesma. Note que na figura 2 é apresentada uma terceira frequência, dada por ω_p . Esta é a frequência de um campo clássico de bombeio, ou de prova, utilizado para injetar energia no modo do campo da cavidade e induzir a dinâmica do sistema átomo-campo.

Figura 2 – Representação da estrutura de um átomo de três níveis em configuração Λ . A transição $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ é acoplada por um único modo do campo quântico da cavidade de frequência ω_{cav} e a transição $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ é acoplada por um campo clássico de controle de frequência ω_c . Para estimular a dinâmica do sistema é utilizado um campo clássico de bombeio no modo do campo da cavidade, de frequência ω_p . As respectivas dessintonias são dadas por Δ_1 , Δ_2 e Δ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

O hamiltoniano atômico é obtido a partir da quantização dos níveis de energia do átomo. Pela equação de Schrödinger $\hat{H}_{\text{átomo}}|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle$, para $i = 1, 2, \dots$, em que E_i são as autoenergias dos autoestados correspondentes $|\psi_i\rangle$. Por definição $\{|\psi_i\rangle\}$ forma uma base ortonormal que satisfaz a relação de completude $\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \hat{1}$, de maneira que:

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = \sum_{i,j} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|H|\psi_j\rangle\langle\psi_j|, \quad (3.23)$$

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = \sum_{i,j} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|E_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \sum_{i,j} E_j|\psi_j\rangle\delta_{ij}\langle\psi_j|, \quad (3.24)$$

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = \sum_i E_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (3.25)$$

sendo δ_{ij} a delta de Kronecker. Como os estados atômicos representados na Figura 2 formam a base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, tem-se pela equação 3.25 que:

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| + E_3|3\rangle\langle 3|. \quad (3.26)$$

Os operadores $|1\rangle\langle 1| = \hat{\sigma}_{11}$, $|2\rangle\langle 2| = \hat{\sigma}_{22}$ e $|3\rangle\langle 3| = \hat{\sigma}_{33}$ são denominados operadores de população e indicam a quantidade de elétrons nos respectivos estados. Considerando que o estado $|1\rangle$ possui energia 0 e que ω_{ba} representa a frequência da transição $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$, podemos reescrever o hamiltoniano atômico (3.26), sem perda de generalidade, como (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = \hbar\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \hbar\omega_{31}\hat{\sigma}_{33}. \quad (3.27)$$

3.3 Hamiltoniano de interação

O hamiltoniano de interação entre o átomo e o campo utilizado neste trabalho pode ser obtido formalmente a partir do hamiltoniano de interação entre um elétron de carga e e massa m e um campo eletromagnético externo, dado por (SCULLY; ZUBAIRY, 1997; GRYNBERG; ASPECT; FABRE, 2010):

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t))^2 + eU(\hat{\mathbf{r}}, t) + V(\hat{\mathbf{r}}), \quad (3.28)$$

em que $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ e $\hat{\mathbf{r}}$ são os operadores de momento e posição do elétron, respectivamente, $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{r}}, t)$ e $U(\hat{\mathbf{r}}, t)$ são os potenciais vetor e escalar do campo externo, respectivamente, e $V(\hat{\mathbf{r}})$ é o potencial eletrostático de Coulomb, o qual mantém o elétron em um estado ligado no átomo.

Após muita manipulação matemática é possível mostrar que a parte do hamiltoniano (3.28) que descreve a interação entre o átomo e o campo externo é dada por (SCULLY; ZUBAIRY, 1997; GRYNBERG; ASPECT; FABRE, 2010):

$$\hat{H}_{Int} = -\hat{\mu} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0, t), \quad (3.29)$$

sendo $\hat{\mu}$ o operador de dipolo elétrico e $\hat{\mathbf{E}}$ o campo elétrico. O resultado (3.29) é obtido com a utilização da aproximação de dipolo, que consiste em considerar o átomo como um dipolo simples, uma vez que a amplitude do campo eletromagnético é constante em toda a extensão do átomo. Isso é observado no caso do Rubídio-87, com a transição ilustrada na

figura 1 sendo estabelecida pela absorção e emissão de fótons com comprimento de onda de 780 nm e o raio atômico é dado por 0,24 nm (STECK, 2003).

O operador de dipolo elétrico pode ainda ser escrito em função da base dos operadores de população e transição $\{\sigma_{ij}\}$, com $i, j = 1, 2, 3, \dots$, de maneira que:

$$\hat{\mu} = \mu_{11}\hat{\sigma}_{11} + \mu_{22}\hat{\sigma}_{22} + \mu_{33}\hat{\sigma}_{33} + \mu_{31}\hat{\sigma}_{31} + \mu_{13}\hat{\sigma}_{13} + \mu_{32}\hat{\sigma}_{32} + \mu_{23}\hat{\sigma}_{23}, \quad (3.30)$$

sendo que a transição $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ é proibida na configuração Λ (SOUZA, 2013). Considerando a simetria entre os estados, temos para os componentes centrossimétricos $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = 0$, e $\mu_{13} = \mu_{31}$ e $\mu_{23} = \mu_{32}$. Conseqüentemente, o operador de dipolo elétrico reduz-se a,

$$\hat{\mu} = \mu_{31}(\hat{\sigma}_{31} + \hat{\sigma}_{13}) + \mu_{32}(\hat{\sigma}_{32} + \hat{\sigma}_{23}). \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.31) no hamiltoniano de interação (3.29) tem-se:

$$\hat{H}_{Int} = [\mu_{31}(\hat{\sigma}_{31} + \hat{\sigma}_{13}) + \mu_{32}(\hat{\sigma}_{32} + \hat{\sigma}_{23})] \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0, t). \quad (3.32)$$

Considerando o campo total $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)$ do nosso sistema, descrito pelo campo da cavidade acoplado a transição $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ e o campo de controle acoplado a transição $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, e a aproximação de onda girante, ou RWA, do inglês *Rotating Wave Approximation* (SCULLY; ZUBAIRY, 1997), o hamiltoniano de interação é reduzido à forma,

$$\hat{H}_{Int} = \hbar g_0(\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{13}) + \hbar\Omega_c(\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + \hat{\sigma}_{23}e^{-i\omega_c t}), \quad (3.33)$$

$$\hat{H}_{Int} = \hbar g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \hbar\Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + h.c. \quad (3.34)$$

sendo $h.c.$ o hermitiano conjugado.

A RWA consiste basicamente em desconsiderar os termos que não conservam o número de excitações do sistema, como a aniquilação de um fóton no modo do campo ao mesmo tempo que ocorre o decaimento do átomo, $\hat{a}\hat{\sigma}_{13}$ e a criação de um fóton ao mesmo tempo que o átomo é excitado, $\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{31}$.

Note que o hamiltoniano de interação (3.34) foi reescrito em função dos parâmetros g_0 e Ω_c . Estes são, respectivamente, as frequências de Rabi do vácuo e do campo de controle. O parâmetro g_0 também é conhecido como acoplamento átomo-campo e fornece a taxa com que o átomo, confinado no volume V da cavidade, troca energia com o modo

do campo quântico da cavidade. A frequência de Rabi Ω de um campo é definida de forma geral como (GRYNBERG; ASPECT; FABRE, 2010):

$$\Omega = \frac{\mu \cdot \mathcal{E}}{\hbar} = \mu \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0 V}}. \quad (3.35)$$

sendo $\Omega = \mu \sqrt{\omega/2\hbar\epsilon_0 V}$ a frequência de Rabi do respectivo campo. A equação (3.35) mostra que o acoplamento átomo-campo $\Omega = g_0$ pode ser aumentado pela diminuição do volume da cavidade. Se a cavidade for composta por dois espelhos paralelos, isso pode ser feito pela diminuição da distância entre os espelhos ou do seu raio de curvatura.

3.4 Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

Nas seções anteriores descrevemos os hamiltonianos independentes de um único modo do campo quântico da cavidade, de um átomo de três níveis em configuração Λ e da interação entre estes dois sistemas, considerando adicionalmente o campo de controle acoplando uma das transições atômicas. A soma destes três hamiltonianos, obtidos a partir das aproximações de dipolo e de onda girante, fornece o hamiltoniano total para a descrição do nosso sistema e é chamado de hamiltoniano de Jaynes-Cummings (JAYNES; CUMMINGS, 1963):

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \hbar\omega_{31}\hat{\sigma}_{33} + (\hbar g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \hbar\Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + h.c.). \quad (3.36)$$

O hamiltoniano (3.36) é uma extensão do modelo desenvolvido por Jaynes e Cummings em 1963 para um sistema atômico de dois níveis e tem sido utilizado extensivamente para a descrição do fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida em cavidades, CEIT, do inglês *Cavity Electromagnetically Induced Transparency* (FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005), o qual será discutido em maiores detalhes no próximo capítulo.

Mostramos mais adiante como é possível diagonalizar o hamiltoniano (3.36) para obtenção das autoenergias e autoestados do sistema estudado e a partir destes, verificar as condições para observação das principais características do fenômeno da CEIT. Adicionalmente, mostramos como tais características podem ser manipuladas para controlar a estatística do campo transmitido produzindo bloqueio de um único fóton e de dois fótons.

Para induzir a interação no sistema átomo-cavidade e analisar a estatística do campo transmitido pela cavidade é necessário injetar energia no sistema átomo-cavidade

através de um campo clássico coerente de bombeio, usualmente chamado de campo de prova. Este bombeio ocorre no modo quântico da cavidade e é modelado teoricamente através do hamiltoniano H_P , descrito por:

$$\hat{H}_P = \hbar\varepsilon(\hat{a}e^{i\omega_p t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_p t}). \quad (3.37)$$

De maneira análoga ao que foi descrito para o campo clássico de controle interagindo com o átomo através do acoplamento com a transição $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ na equação (3.34), tem-se na equação (3.37) a interação do campo clássico de prova, de frequência ω_p e força ε , com o modo quântico da cavidade, descrito pelos operadores de aniquilação e criação.

Considerando $\hbar = 1$, por simplicidade, o hamiltoniano total \hat{H} que descreve o acoplamento átomo-campo do nosso sistema é dado pelo hamiltoniano de Jaynes-Cummings com bombeio,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_{JC} + \hat{H}_P, \\ \hat{H} &= \omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33} + (g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + \varepsilon\hat{a}e^{i\omega_p t} + h.c.). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para simplificar os cálculos para obtenção do estado estacionário do sistema, eliminamos a dependência temporal do hamiltoniano total (3.38) através de uma transformação unitária, o que equivale a mudar o referencial do sistema para outro, conhecido como referencial girante. Os cálculos são apresentados no Apêndice A desta monografia. O hamiltoniano independente do tempo é dado por:

$$\hat{H} = \Delta_p\hat{a}^\dagger\hat{a} - \Delta_p\hat{\sigma}_{11} + (\Delta_1 - \Delta_2)\hat{\sigma}_{22} + \Delta_1\hat{\sigma}_{33} + (g_0\hat{\sigma}_{31}\hat{a} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32} + \varepsilon\hat{a} + h.c.). \quad (3.39)$$

sendo $\Delta_p = \omega_p - \omega_{cav}$, $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega_{cav}$ e $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$ as respectivas dessintonias obtidas no referencial girante. Todas as propriedades do sistema foram obtidas numericamente através do hamiltoniano (3.39).

4 Transmissão Eletromagneticamente Induzida em Cavidades

A Transmissão Eletromagneticamente Induzida (EIT - *Electromagnetically Induced Transparency*) é um fenômeno de interferência quântica responsável pelo cancelamento da absorção de um campo laser de prova fraco pela aplicação de um campo eletromagnético forte de controle no mesmo meio (FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005). Desde a década de 90, quando foi formulada teoricamente por Harris, Field, e Imamoglu (1990), a EIT tem sido utilizada para diversas aplicações, como o retardamento de pulsos luminosos (HAU et al., 1999; KASH et al., 1999; LIU et al., 2001), interações ópticas de fótons e átomos individuais (KIMBLE, 2008; LVOVSKY; SANDERS; TITTEL, 2009a; CHANELIÈRE et al., 2005) e, mais recentemente, no desenvolvimento de biosensores a partir de sistemas com fenomenologias semelhantes (ZHANG et al., 2021; NOURINOVIN; ALOMAINY, 2021; YAN et al., 2019).

Considerando sua configuração mais simples no espaço livre, dois campos eletromagnéticos excitam uma amostra atômica de três níveis em configuração Λ , e a resposta óptica do meio pela aplicação do campo de prova é dada pela polarizabilidade atômica $\mathcal{P}(r, \omega) = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \mathcal{E}(r, \omega)$, em que a susceptibilidade elétrica complexa de primeira ordem $\chi^{(1)}(\omega)$ fornece as propriedades ópticas do meio. Sua parte real $Re[\chi^{(1)}(\omega)]$ está relacionada ao índice de refração do meio e é caracterizada por uma região de dispersão anômala, conduzindo à velocidades de grupo muito pequenas (HAU et al., 1999). A janela de transmissão, ou zero absorção, que caracteriza a transparência induzida no sistema, é descrita pela parte imaginária $Im[\chi^{(1)}(\omega)]$.

O fenômeno da EIT ocorre quando a população do sistema é preparada inicialmente no estado $|1\rangle$ e o estado de zero absorção, referido como estado escuro, é observado como consequência da superposição dos estados atômicos fundamentais $|1\rangle$ e $|2\rangle$, induzida pelos campos de acoplamento. Isso conduz a interferências entre as frequências das transições, eliminando assim, as probabilidades de absorção e de refração do campo de prova (FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005). Visando fornecer um melhor entendimento sobre os mecanismos deste fenômeno, uma analogia clássica geral para a

EIT e sistemas relacionados é fornecida por Souza e colaboradores (2015). Eles mostraram que, quando as condições para a observação da EIT são bem estabelecidas, átomos e modos de uma cavidade óptica comportam-se como dipolos oscilantes, de maneira que a fenomenologia da EIT referente a todos os processos dissipativos e coerentes do sistema átomo-campo pode ser reproduzida por sistemas descritos por osciladores harmônicos amortecidos acoplados.

Para explorar o fenômeno da EIT em seu nível mais fundamental, a eletrodinâmica quântica em cavidades fornece o cenário ideal, pois esta permite estabelecer protocolos para analisar a interação entre um único átomo e quanta de luz. Nas próximas seções apresentamos o desenvolvimento teórico para demonstrar como a estatística do campo de prova pode ser opticamente controlada pela combinação do fenômeno da EIT para um átomo individual situado em uma cavidade de alta-finesse. Este sistema é usualmente conhecido como CEIT, do inglês *Cavity EIT*.

4.1 Autoestados e autoenergias do sistema CEIT

Para demonstrar matematicamente a relação entre a janela de transmissão e a coerência entre os estados do sistema CEIT é necessário calcular as autoenergias e autoestados do mesmo através da diagonalização do hamiltoniano obtido na equação (3.39). Para facilitar os cálculos é interessante reescrever o hamiltoniano em uma base mais conveniente, dada por $\{|1\rangle, |-\rangle, |+\rangle\}$, sendo $|\pm\rangle = (|2\rangle \pm |3\rangle)/\sqrt{2}$.

O acoplamento forte da transição atômica $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ com o campo de controle faz com que o estado $|3\rangle$ seja dividido em um par de estados simétricos $|\pm\rangle$ com espaçamento proporcional à frequência de Rabi Ω_c do campo considerado, como ilustrado na figura 3. Esta divisão está intimamente relacionada ao efeito Autler-Townes, de maneira que os estados simétricos do sistema átomo-campo $|\Psi_{\pm}\rangle$ são usualmente chamados de Autler-Townes ou do tipo Autler-Townes (GRYNBERG; ASPECT; FABRE, 2010).

O hamiltoniano (3.39) escrito na base $\{|1\rangle, |-\rangle, |+\rangle\}$ torna-se:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \Delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} - \Delta_p \hat{\sigma}_{11} - 2\Delta_1 (\hat{\sigma}_{++} + \hat{\sigma}_{--}) - \Delta_2 (\hat{\sigma}_{++} + \hat{\sigma}_{+-} + \hat{\sigma}_{-+} + \hat{\sigma}_{--}) \\ & + \frac{g_0}{\sqrt{2}} [(\hat{\sigma}_{+1} - \hat{\sigma}_{-1})\hat{a} + (\hat{\sigma}_{1+} - \hat{\sigma}_{1-})\hat{a}^\dagger] + \Omega_c (\hat{\sigma}_{++} - \hat{\sigma}_{--}) + \varepsilon (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (4.1)$$

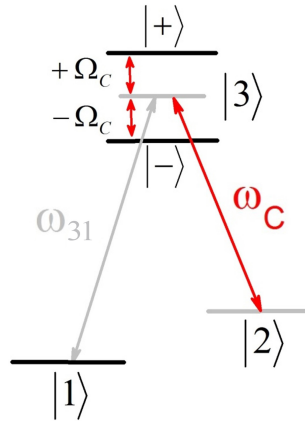
Considerando o caso de perfeita ressonância $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ e na ausência do campo de bombeio, Δ_p e ε nulos, pois este é utilizado apenas para injetar energia no sistema

átomo-cavidade, tem-se:

$$\hat{H} = \Delta_+ \sigma_{++} + \frac{g_0}{\sqrt{2}} (\hat{a} \hat{\sigma}_{+1} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{1+}) + \Delta_- \sigma_{--} - \frac{g_0}{\sqrt{2}} (\hat{a} \hat{\sigma}_{-1} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{1-}), \quad (4.2)$$

sendo $\sigma_\pm = |\pm\rangle\langle\pm|$ e $\sigma_{\pm 1} = |\pm\rangle\langle 1|$ os operadores atômicos na nova base e $\Delta_\pm = \pm\Omega_c$ as dessintonias dos estados $|\pm\rangle$ em relação ao estado $|3\rangle$, conforme figura 3. Note que os dois termos com as dessintonias Δ_\pm descrevem o átomo nu na nova base e os dois termos com o acoplamento g_0 representam os acoplamentos do modo quântico do campo da cavidade com as transições $|1\rangle \leftrightarrow |\pm\rangle$. Ou seja, o hamiltoniano total (4.2) pode ser considerado como dois hamiltonianos de Jaynes-Cummings não ressonantes, pois a ressonância do modo do campo da cavidade é dada no acoplamento com a transição $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ e não nas transições $|1\rangle \leftrightarrow |\pm\rangle$, descritas na nova base.

Figura 3 – Ilustração da divisão do estado atômico $|3\rangle$ em um dubleto simétrico $|\pm\rangle$ devido ao acoplamento forte do campo de controle, de frequência ω_c , com a transição $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. O espaçamento entre os estados $|\pm\rangle$ é descrito pela frequência de Rabi do campo de controle Ω_c .



Fonte: Elaborado pelo autor.

A diagonalização do hamiltoniano total (4.2) é feita considerando a base total do sistema átomo-campo $\{|1, n\rangle, |+, n-1\rangle, |-, n-1\rangle\}$ (SOUZA, 2013). Reescrevendo o mesmo na forma matricial utilizando esta base, equivalente a calcular cada componente da matriz $\langle i|\hat{H}|j\rangle$, com i e j sendo os termos que compõe a base, obtemos

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g_0}{\sqrt{2}}\sqrt{n} & -\frac{g_0}{\sqrt{2}}\sqrt{n} \\ \frac{g_0}{\sqrt{2}}\sqrt{n} & \Omega_c & 0 \\ -\frac{g_0}{\sqrt{2}}\sqrt{n} & 0 & -\Omega_c \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

As autoenergias do sistema CEIT são calculadas a partir do determinante $|\hat{H} - E\hat{1}| = 0$, o que fornece:

$$E_n^{(-)} = -\sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2}, \quad (4.4)$$

$$E_n^{(0)} = 0, \quad (4.5)$$

$$E_n^{(+)} = \sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2}. \quad (4.6)$$

Os respectivos autoestados do sistema átomo-campo, também conhecidos por estados vestidos, são obtidos considerando $(\hat{H} - E_j\hat{1})|\Psi_j\rangle = 0$, de maneira que:

$$|\Psi_n^{(-)}\rangle = N_n^{(+)} [|1, n\rangle + \alpha_- |+, n-1\rangle - \beta_- |-, n-1\rangle], \quad (4.7)$$

$$|\Psi_n^{(0)}\rangle = N_n^{(0)} [|1, n\rangle - \eta(|+, n-1\rangle + |-, n-1\rangle)], \quad (4.8)$$

$$|\Psi_n^{(+)}\rangle = N_n^{(-)} [|1, n\rangle + \alpha_+ |+, n-1\rangle - \beta_+ |-, n-1\rangle], \quad (4.9)$$

sendo $N_n^{(0)}$ e $N_n^{(\pm)}$ constantes de normalização e

$$\eta = \frac{g_0\sqrt{n/2}}{\Omega_c}, \quad \alpha_{\pm} = \frac{g_0\sqrt{n/2}}{E^{\pm} - \Omega_c}, \quad \beta_{\pm} = \frac{g_0\sqrt{n/2}}{E^{\pm} + \Omega_c}. \quad (4.10)$$

Note que os estados vestidos, dados pelas equações (4.7) a (4.9), são superposições dos estados atômicos $|1\rangle$ e $|\pm\rangle$ com os estados do campo $|n\rangle$, como se o campo da cavidade vestisse os átomos. Isso significa que o sistema átomo-campo é um sistema diferente do átomo e do campo nus, não podendo ser mais caracterizado por estes independentemente. Os estados vestidos não possuem um análogo clássico.

Os autoestados $|\Psi_n^{(0)}\rangle$, para $n = 1, 2, 3, \dots$, ou qualquer combinação destes, são os estados escuros do sistema CEIT e possuem autoenergias $E_n^{(0)} = 0$. Estes são responsáveis pela formação de uma janela de transmissão, do tipo cavidade vazia, no espectro de transmissão do sistema. Pela equação (4.8) é possível notar que os estados $|\Psi_n^{(0)}\rangle$ são descritos pelo termo $\eta(|+, n-1\rangle + |-, n-1\rangle)$, de maneira que se este for reescrito na base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, pela relação $|\pm\rangle = (|2\rangle \pm |3\rangle)/\sqrt{2}$, teremos uma superposição dos estados atômicos fundamentais $|1\rangle$ e $|2\rangle$ apenas, sem qualquer contribuição do estado excitado $|3\rangle$. Isto significa que se o elétron do átomo estiver no estado $|\Psi_n^{(0)}\rangle$, a probabilidade de absorção de um fóton do campo para elevar o sistema para o estado excitado será nula, de modo que o campo elétrico passa pelo átomo como se o mesmo fosse transparente à luz. É por esta razão que este estado é denominado de estado escuro (*dark state*) (FLEISCHHAUER; IMAMOGLU; MARANGOS, 2005).

Os estados simétricos do tipo Autler-Townes $|\Psi_n^{(\pm)}\rangle$, com autoenergias $E_n^{(\pm)}$, descrevem o compartilhamento de n excitações no sistema átomo-campo CEIT, sendo por isso chamados usualmente de estados brilhantes (*bright states*). Estes formam uma estrutura anarmônica de níveis deslocados por $E_n^{(+)} - E_n^{(-)} = 2\sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2}$ e podem ser estimulados ajustando-se a dessintonia entre o campo de prova e a cavidade por $\Delta_p = \sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2}/n$, conforme demonstrado por Souza e colaboradores (2013).

Agora que conhecemos o espectro de energia do sistema CEIT, podemos monitorar e analisar o mesmo utilizando o campo de bombeio (prova), através do cálculo numérico da transmissão do sistema. Para isso, consideramos o formalismo da equação mestra.

4.2 Método da equação mestra e obtenção do espectro de transmissão do sistema CEIT

Uma equação mestra é um conjunto de equações diferenciais que descreve a evolução temporal da probabilidade de um sistema ser observado em um determinado estado. Ou seja, esta fornece uma descrição quântica da evolução do sistema através de derivadas do operador densidade, conforme descrito na seção 2.5.

Para obtermos o resultado da transmissão do sistema átomo-cavidade de maneira mais realista, precisamos considerar uma equação que descreva um sistema aberto, ou seja, que possui interações dissipativas com o meio. Para isso, utilizamos a equação de Lindblad, que é a forma mais geral de uma equação mestra Markoviana. Esta considera que a probabilidade do sistema estar em um estado no instante $t + \Delta t$ depende somente do estado em que o mesmo estava no instante t anterior. Este método é importante para o tratamento de processos irreversíveis e não unitários, tais como a dissipação e a decoerência que consideramos no nosso sistema (BRASIL; FANCHINI; NAPOLITANO, 2013).

Omitindo o símbolo ($\hat{\ }$) para os operadores, para evitar uma notação carregada, a equação mestra tem a seguinte forma:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_j \alpha_j \mathcal{L}_j \rho. \quad (4.11)$$

O primeiro termo da equação (4.11) se refere a equação de Liouville-von Neumann, que descreve a evolução unitária do operador densidade, e o segundo termo, de Lindblad,

surge quando calculamos o traço de operadores com o grau de liberdade definidos, no nosso caso, pela interação com o meio (BRASIL; FANCHINI; NAPOLITANO, 2013). Os coeficientes α_j representam os processos de relaxação do sistema e \mathcal{L} um super operador de Lindblad que pode ser expandido como $\mathcal{L}_j\rho = 2L_j\rho L_j^\dagger - \{L_j^\dagger L_j, \rho\}$. O operador de Lindblad L está diretamente relacionado com a base ortonormal utilizada e a dimensão do espaço de Hilbert definida e os parênteses $\{ \}$ representam um anticomutador, definido por $\{a, b\} = ab + ba$.

Dessa forma, considerando os três coeficientes de relaxação do nosso sistema, dados pelo decaimento da cavidade κ , relacionado aos operadores do modo do campo quântico da cavidade a e a^\dagger , a emissão espontânea do átomo Γ_{ab} , devido ao processo de transição σ_{ab} e a taxa de defasagem atômica γ_a , relacionada à perda de população σ_{aa} do estado $|a\rangle$, a equação mestra para o nosso sistema átomo-cavidade é descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i[H, \rho] + \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) \\ & + \Gamma_{31}(2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33}) + \Gamma_{32}(2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33}) \\ & + \gamma_2(2\sigma_{22}\rho\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho - \rho\sigma_{22}) + \gamma_3(2\sigma_{33}\rho\sigma_{33} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para obtenção da evolução temporal de um observável do sistema, utilizamos a equação (2.38), em que $\langle A \rangle = Tr(A\rho)$, cuja derivada temporal é dada por $\langle \dot{A} \rangle = Tr(A\dot{\rho})$. Considerando os operadores do átomo e do campo do sistema CEIT, a evolução temporal da média de cada operador é descrita por um conjunto infinito de equações acopladas denominadas de valores médios de Heisenberg:

$$\langle \dot{a} \rangle = i(\Delta_P + i\kappa)\langle a \rangle - i\varepsilon - ig_0\langle \sigma_{13} \rangle, \quad (4.13)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{12} \rangle = i(\Delta_P + \Delta_2 - \Delta_1 + i\gamma_2)\langle \sigma_{12} \rangle - i\Omega_c\langle \sigma_{13} \rangle + ig_0\langle a\sigma_{32} \rangle, \quad (4.14)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{13} \rangle = i[\Delta_P - \Delta_1 + i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3)]\langle \sigma_{13} \rangle - ig_0(\langle a\sigma_{11} \rangle - \langle a\sigma_{33} \rangle) - i\Omega_c\langle \sigma_{12} \rangle, \quad (4.15)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{23} \rangle = i[-\Delta_2 + i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_2 + \gamma_3)]\langle \sigma_{23} \rangle - ig_0\langle a\sigma_{21} \rangle - i\Omega_c(\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{33} \rangle), \quad (4.16)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{11} \rangle = ig_0(\langle a^\dagger\sigma_{13} \rangle + \langle a\sigma_{31} \rangle) + 2\Gamma_{31}\langle \sigma_{33} \rangle, \quad (4.17)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{22} \rangle = i\Omega_c(\langle \sigma_{32} \rangle - \langle \sigma_{23} \rangle) + 2\Gamma_{32}\langle \sigma_{33} \rangle, \quad (4.18)$$

$$\langle \dot{\sigma}_{33} \rangle = ig_0(\langle a^\dagger\sigma_{13} \rangle - \langle a\sigma_{31} \rangle) + i\Omega_c(\langle \sigma_{23} \rangle - \langle \sigma_{32} \rangle) - 2(\Gamma_{31} + \Gamma_{32})\langle \sigma_{33} \rangle. \quad (4.19)$$

Estas são todas demonstradas em detalhes no Apêndice B deste trabalho.

Para a análise das propriedades do sistema CEIT, os valores esperados dos operadores do átomo e do campo são obtidos no estado estacionário, o qual é descrito por

$\langle \dot{a} \rangle = \langle \dot{\sigma}_{ab} \rangle = \langle \dot{\sigma}_{aa} \rangle = 0$. A partir disso, podemos calcular a transmissão da cavidade $\langle a^\dagger a \rangle$ no estado estacionário. Para o caso em que a cavidade está vazia, obtida para $g_0 = 0$ nas equações de Heisenberg, teremos a transmissão máxima da mesma, pois não há átomos para absorver a luz bombeada no modo do campo da cavidade. Isso pode ser verificado analiticamente a partir da equação (4.13) fazendo-se $g_0 = 0$, o que fornece,

$$\begin{aligned}\langle \dot{a} \rangle &= i(\Delta_P + i\kappa)\langle a \rangle - i\varepsilon = 0, \\ \langle a \rangle &= \frac{\varepsilon}{\Delta_P + i\kappa}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Tomando o hermiteano conjugado da equação (4.20), o número médio de fótons no interior da cavidade é descrito por:

$$\langle a^\dagger a \rangle = \frac{|\varepsilon|^2}{\Delta_p^2 + \kappa^2}.\quad (4.21)$$

Este resultado mostra que a condição de transmissão máxima é obtida quando o campo de prova bombeia ressonantemente a cavidade $\omega_p = \omega_{cav}$, ou seja, $\Delta_p = 0$, fornecendo $\langle a^\dagger a \rangle_{Max} = |\varepsilon|^2/\kappa^2$. Para o cálculo da transmissão relativa $T(\%)$ do sistema CEIT, $\langle a^\dagger a \rangle_{Max}$ é utilizado como um fator de normalização, ou seja,

$$T(\%) = \frac{\langle a^\dagger a \rangle}{|\varepsilon|^2/\kappa^2}.\quad (4.22)$$

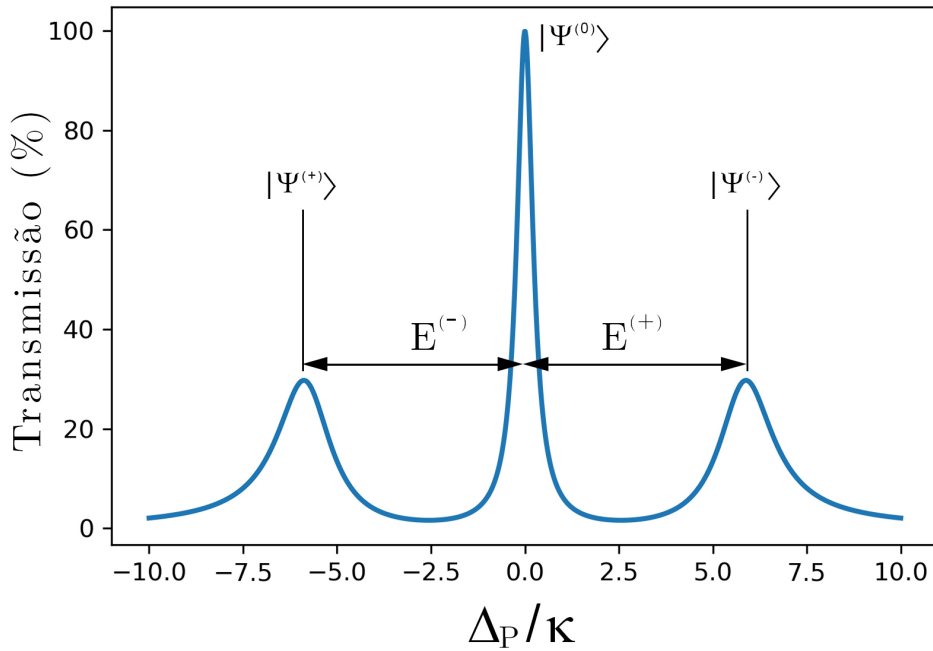
Dessa forma, quando tivermos uma transmissão relativa de 100% no sistema CEIT, significa que o átomo está no estado escuro, caracterizado pela janela de transmissão do tipo cavidade vazia. Isso pode ser verificado na figura 4 para $\Delta_p = 0$, em que é apresentado o gráfico da transmissão relativa do sistema em função da dessintonia prova-cavidade normalizada pela taxa de decaimento da cavidade Δ_p/κ . Todos os parâmetros utilizados em nossas simulações são descritos em função de κ . Para obtenção deste resultado utilizamos $g_0 = 5,0\kappa$, $\Omega_c = 3,0\kappa$, $\varepsilon = 0,01\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ e $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, considerando o caso de perfeita ressonância $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

Todos os nossos cálculos foram conduzidos numericamente a partir de algoritmos próprios escritos em Python ¹, com o auxílio da biblioteca QuTiP, a qual é amplamente utilizada pela comunidade de óptica quântica para simular a dinâmica de sistemas quânticos abertos (JOHANSSON; NATION; NORI, 2012).

¹ https://github.com/guhfr/3level_atom_in_cavity

A transmissão relativa apresentada na figura 4 fornece o espectro de energia do sistema. A superposição dos estados escuros e os estados brilhantes, para $n = 1$, são identificados no gráfico, assim como o espaçamento entre os estados brilhantes dado por $E^{(+)} - E^{(-)} = 2\sqrt{g_0^2 + \Omega_c^2}$, conforme demonstrado anteriormente.

Figura 4 – Espectro de transmissão do sistema CEIT em função da dessintonia provocada normalizada Δ_p/κ , para os parâmetros $g_0 = 5,0\kappa$, $\Omega_c = 3,0\kappa$, $\varepsilon = 0,01\kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = 0,5\kappa$ e $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, considerando o caso de perfeita ressonância entre o átomo e os campos $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

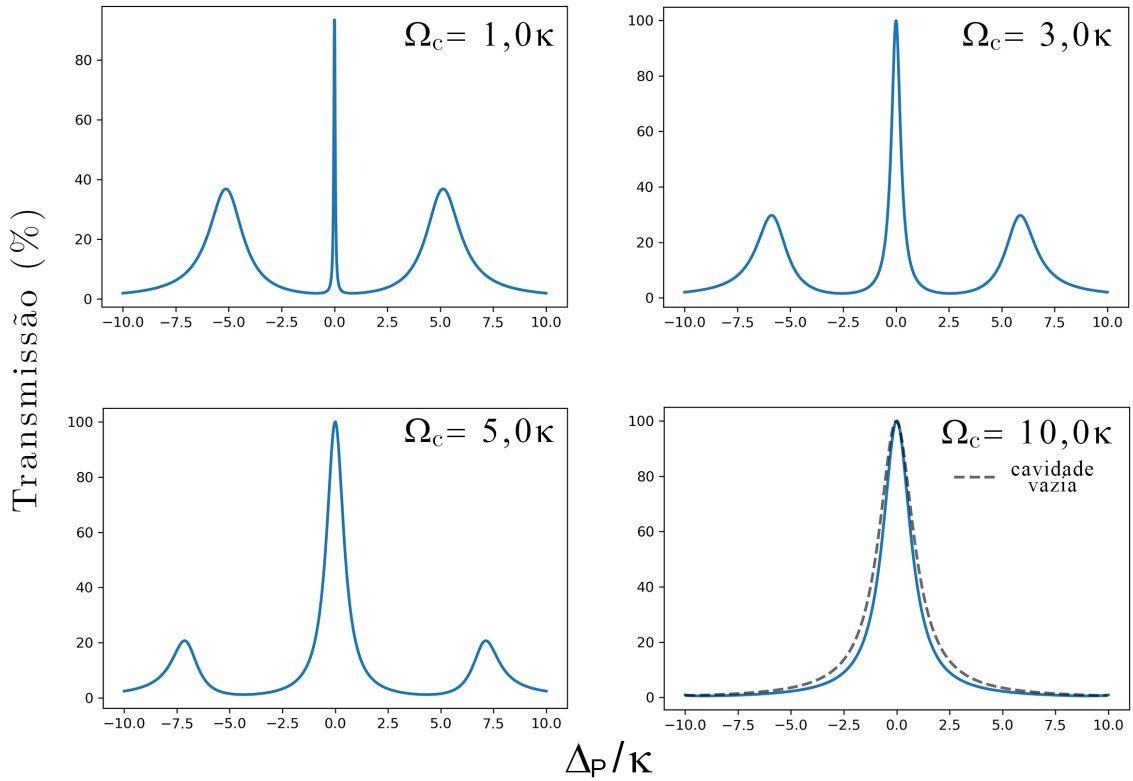


Fonte: Elaborado pelo autor.

Segundo Murr (2003) e Souza (2015) a condição para observação do fenômeno da CEIT é obtida quando a frequência de Rabi do campo de controle Ω_c é muito maior do que a frequência de Rabi da cavidade, dada por $g_0 \langle a \rangle_{Max}$, sendo $\langle a \rangle_{Max} = \varepsilon / (\Delta_p + i\kappa)$, ou seja, $\Omega_c \gg g_0 \langle a \rangle_{Max}$. Na Figura 5 é apresentado o espectro de transmissão para o sistema CEIT para diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle Ω_C , considerando os mesmos parâmetros utilizados na figura 4. Em todos os casos a condição para observação da CEIT é satisfeita. Contudo, é interessante notar que o aumento da frequência de Rabi do campo de controle provoca o alargamento da janela de transmissão da CEIT, caracterizada pelos estados escuros, e uma diminuição na intensidade dos picos ressonantes. Isso ocorre porque o aumento de Ω_C faz com que a dessintonia entre os níveis de energia do sistema átomo-campo também aumente. Conseqüentemente, o sistema passa

a ser estimulado muito fora da ressonância, de maneira que o átomo passa a não interagir com o campo, fazendo com que a transmissão do sistema passe a ser do tipo cavidade vazia.

Figura 5 – Transmissão do sistema CEIT obtida utilizando os mesmos parâmetros apresentados na figura 4 e diferentes valores da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c . O aumento de Ω_c provoca o aumento da largura de banda da janela de transmissão, com o espectro do sistema tendendo ao espectro de uma cavidade vazia (linha tracejada na última figura).



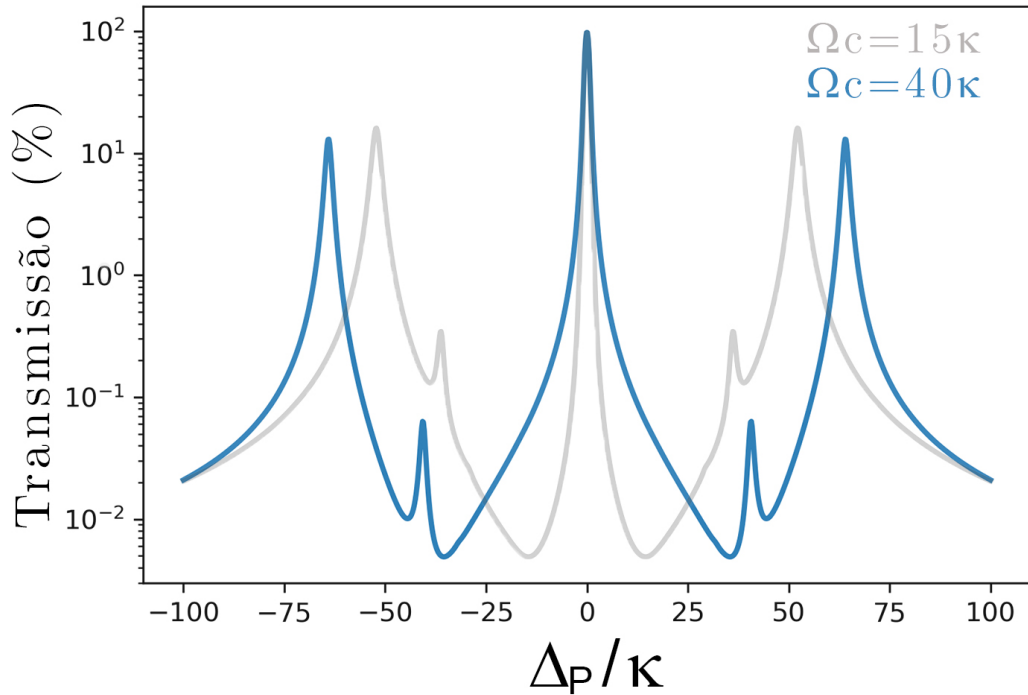
Fonte: Elaborado pelo autor.

Outra observação interessante neste sistema ocorre quando consideramos o sistema átomo-cavidade no regime de acoplamento forte $g_0 > (\kappa, \Gamma_{ij})$. Neste regime é possível observar transições de dois fótons ou mais identificadas por picos adicionais no espectro de transmissão CEIT. Estas transições são estimuladas quando Δ_p é ajustado em $\Delta_p^{(n)} = \pm \sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2/n}$ (SOUZA, 2013). Para uma transição de um fóton, $n = 1$, tem-se $\Delta_p^{(1)} = \pm \sqrt{g_0^2 + \Omega_c^2}$, enquanto que para uma transição de dois fótons, $\Delta_p^{(2)} = \pm \sqrt{2g_0^2 + \Omega_c^2/2}$, ou seja, $\Delta_p^{(1)} > \Delta_p^{(2)}$. Logo, os picos do espectro de transmissão CEIT que identificam as transições multifóton são observados para valores de Δ_p menores.

Isso é mostrado no gráfico da figura 6, em que consideramos o regime de acoplamento

forte $g_0 = 50 \kappa$ para dois valores de Ω_c . Como o pico que identifica a transição de dois fótons possui uma intensidade muito pequena, o gráfico é apresentado em escala logarítmica. Se o sistema não for considerado no regime de acoplamento forte os picos multifótons são todos sobrepostos pelos picos que identificam o estado para uma única excitação $n = 1$. Uma vez que o espaçamento entre os níveis de energia também depende do valor da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c , pois $\Delta_p^{(n)} = \pm \sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2/n}$, é possível controlar a distância entre os níveis de energia do sistema, de maneira que é possível resolver outras transições de fótons. Essa peculiaridade do sistema CEIT é essencial para obtermos o controle da estatística do campo de prova a partir de um parâmetro externo. Esse assunto é descrito em maiores detalhes na próxima seção.

Figura 6 – Espectro de transmissão do sistema CEIT em escala logarítmica obtido no regime de acoplamento forte, $g_0 = 50, 0\kappa$, $\Omega_c = 15$ e 40κ , $\varepsilon = \kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = \kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ e $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

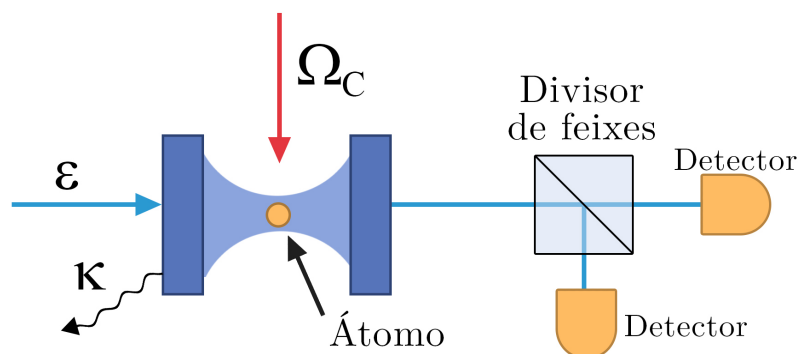
5 Caracterizando a Natureza Quântica da Luz

Nesta seção mostramos como é possível modificar coerentemente a estatística de fótons do campo transmitido pela cavidade utilizando o sistema CEIT, com o objetivo principal de identificar a natureza quântica da luz.

Para isso exploramos teorias de fotodeteção e correlação baseadas em um interferômetro de Hambury-Brown Twiss. A essência deste interferômetro consiste em utilizar um divisor de feixes e dois detectores de fótons dispostos em posições diferentes, como ilustrado na figura 7. A interferência entre os fótons detectados é analisada pela quantificação da diferença de fase entre os mesmos ou pelo intervalo de tempo observado entre a detecção dos fótons. Neste trabalho analisamos a segunda possibilidade.

Glauber (1963) desenvolveu métodos estatísticos para a investigação destes efeitos e mostrou que a definição clássica de coerência não é suficiente para a descrição quântica da luz. Ele definiu a coerência como uma sucessão de funções de correlação de n -ésima ordem para os vetores de estado do campo eletromagnético. Para que um campo apresente coerência completa, as funções de correlação do mesmo precisam satisfazer uma sucessão infinita de condições de coerência.

Figura 7 – Representação do interferômetro de Hambury-Brown Twiss mostrando que o campo transmitido pela cavidade é dividido em dois feixes, com estes sendo direcionados para dois detectores individuais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1 Função de Correlação

Para o estudo teórico da correlação vamos considerar o operador do campo elétrico descrito como uma soma de operadores, conforme descrito na equação (3.22),

$$E(\mathbf{r}, t) = E^{(+)}(\mathbf{r}, t) + E^{(-)}(\mathbf{r}, t),$$

em que cada componente contém um operador do campo, $E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ e $E^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

A probabilidade de transição w_1 para um detector absorver um fóton do campo na posição \mathbf{r} e no tempo t é dada por (SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$w_1(\mathbf{r}, t) = |\langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2, \quad (5.1)$$

sendo $|i\rangle$ o estado inicial do campo, antes da detecção, e $|f\rangle$ o seu estado final, após o processo de detecção. Note que apenas o operador positivo do campo é considerado, porque a absorção do fóton no detector é um processo destrutivo, de maneira que é necessário considerar o operador de aniquilação descrito por $E^{(+)}$. Por ser um processo destrutivo, o estado final do campo não é medido, somente a taxa de contagem total. Para obter a mesma somamos sobre todos os estados do campo que podem ser obtidos a partir do estado inicial por um processo de absorção. Estendendo a soma sobre o conjunto completo de estados finais, a taxa total de contagem ou intensidade média do campo é dada por,

$$\begin{aligned} I^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \sum_f w_1 = \sum_f |\langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2, \\ &= \sum_f \langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle^{\dagger} \langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle = \sum_f \langle i | E^{(-)}(\mathbf{r}, t) | f \rangle \langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle, \\ &= \langle i | E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle, \end{aligned} \quad (5.2)$$

em que utilizamos a relação de completeza $\sum_f |f\rangle \langle f| = 1$.

Considerando uma mistura estatística de estados iniciais, cada um com probabilidade P_i de ocorrência, o resultado (5.2) descrito para um estado inicial puro $|i\rangle$ do campo, pode ser generalizado como,

$$I^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_i P_i \langle i | E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle. \quad (5.3)$$

Uma vez que o operador densidade é dado por $\rho = \sum_i P_i |i\rangle \langle i|$, conforme discutido na seção 2.5, a equação (5.3) pode ser escrita como,

$$I^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \text{Tr}[\rho E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t)]. \quad (5.4)$$

A função de correlação de primeira ordem $G^{(1)}$ entre o campo na posição \mathbf{r} em um instante t_1 e o campo na mesma posição, dada pelo detector, em um instante posterior t_2 , é definida por (SCULLY; ZUBAIRY, 1997)

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, t_1; \mathbf{r}, t_2) = Tr[\rho E^{(-)}(\mathbf{r}, t_1) E^{(+)}(\mathbf{r}, t_2)] = \langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t_1) E^{(+)}(\mathbf{r}, t_2) \rangle, \quad (5.5)$$

de maneira que esta depende dos tempos t_1 e t_2 somente através do intervalo de tempo entre uma detecção e outra $\tau = t_2 - t_1$, ou seja, $G^{(1)}(\mathbf{r}, t_1; \mathbf{r}, t_2) \equiv G^{(1)}(\mathbf{r}, \tau)$.

A função de correlação de primeira ordem do campo pode ser utilizada para descrever experimentos de interferência clássica. Para a descrição de experimentos como o de Hanbury-Brown e Twiss, com o objetivo de detectar a natureza quântica da luz, é necessário definir correlações de ordem superior.

Para o caso de dois detectores de fótons, como ilustrado na figura 7, posicionados em \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , a probabilidade de transição w_2 para os detectores absorverem fótons nestas posições e nos respectivos tempos t_1 e t_2 é descrita por (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$w_2(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = |\langle f | E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle|^2. \quad (5.6)$$

A intensidade média do campo $I^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \sum_f w_2$ é obtida de maneira análoga ao procedimento realizado para um único detector, de maneira que,

$$I^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = Tr[\rho E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)], \quad (5.7)$$

Dessa forma, a probabilidade conjunta de detecção de fótons realizada pelos dois detectores é descrita pela função de correlação de segunda ordem $G^{(2)}$, definida por (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) &= Tr[\rho E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)] \\ &= \langle E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) E^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle. \end{aligned} \quad (5.8)$$

É interessante notar que os operadores do campo nas funções de correlação quântica aparecem em ordem normal, a qual é descrita considerando todos os operadores de aniquilação à direita de todos os operadores de criação, diferentemente da equação de intensidade de um campo descrito classicamente, em que as intensidades são multiplicadas de maneira ordinária. Isso ocorre porque os detectores funcionam pela absorção dos fótons.

Podemos escrever as funções de correlação quântica em função do tempo τ entre duas detecções. Considerando que o tempo de chegada de um fóton no detector é dado por $t_1 = t$ e a chegada de outro se dá no tempo $t_2 = t + \tau$, as equações (5.5) e (5.8) podem ser reescritas como:

$$G^{(1)}(\tau) = \langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t + \tau) \rangle \quad (5.9)$$

$$G^{(2)}(\tau) = \langle E^{(-)}(t)E^{(-)}(t + \tau)E^{(+)}(t + \tau)E^{(+)}(t) \rangle. \quad (5.10)$$

Para analisar a estatística do campo transmitido pela cavidade neste trabalho, utilizamos a função de correlação de segunda ordem normalizada, definida por (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{G^{(2)}(\tau)}{|G^{(1)}(0)|^2}. \quad (5.11)$$

Como os nossos resultados foram obtidos para o estado estacionário do sistema, podemos fazer $t = 0$ nas equações (5.9) e (5.10). Considerando a expansão de $E^{(+)}$ e $E^{(-)}$ para o modo quântico da cavidade, a maioria dos termos irão se cancelar de maneira que podemos escrever a equação (5.11) como

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger(\tau)a(\tau)a \rangle}{|\langle a^\dagger a \rangle|^2} = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger(\tau)a(\tau)a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2}. \quad (5.12)$$

Observe que para intervalos de tempo muito longos ($\tau \rightarrow \infty$), as correlações entre os fótons desaparecem, de modo que $g^{(2)}(\tau \rightarrow \infty) = 1$. Neste caso os fótons chegam nos detectores aleatoriamente. O laser é um exemplo de fonte de luz que apresenta esse comportamento. Para um intervalo de tempo tendendo a zero ($\tau \rightarrow 0$), tem-se:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle a^\dagger (a a^\dagger - 1) a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle a^\dagger a a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2}, \quad (5.13)$$

em que utilizamos $[a, a^\dagger] = a a^\dagger - a^\dagger a = 1$.

Uma vez que o operador número é dado por $a^\dagger a = n$, com $\langle a^\dagger a \rangle = \langle n \rangle$ indicando o número médio de fótons no interior da cavidade do sistema CEIT, podemos somar e subtrair $\langle n \rangle^2$ no numerador da equação (5.13) e reescrevê-la como,

$$\begin{aligned} g^{(2)}(0) &= \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2} = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2}, \\ g^{(2)}(0) &= \frac{\langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2} + \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2} = 1 + \frac{V(n) - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

sendo $V(n) = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ a variância do número de fótons. Pela Equação (5.14) é possível notar que a correlação de segunda ordem é avaliada a partir do princípio de que o campo possui coerência de primeira ordem igual a 1, somada ao termo das flutuações do campo correspondente à correlação de segunda ordem. Com esta equação é possível quantificar a natureza quântica do campo detectado.

5.2 Photon bunching e antibunching

Para campos clássicos os operadores do campo são substituídos por amplitudes complexas. Nestes casos, a partir da desigualdade de Schwarz $|\langle a^*b \rangle|^2 \leq \langle |a|^2 \rangle \langle |b|^2 \rangle$, podemos escrever de forma geral (SCULLY; ZUBAIRY, 1997),

$$|\langle \mathbf{I}(\mathbf{r}, t) \mathbf{I}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{I}^2(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \mathbf{I}^2(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle. \quad (5.15)$$

Como discutido anteriormente, para escrevermos equações quânticas para a intensidade dos campos é necessário considerar a ordem normal entre os operadores do campo, com todos os operadores de aniquilação à direita dos operadores de criação. Representando essa ordem por $(: :)$, a equação quântica correspondente à desigualdade (5.15) é dada por:

$$|\langle : I(\mathbf{r}, t) I(\mathbf{r}, t + \tau) : \rangle|^2 \leq \langle : I^2(\mathbf{r}, t) : \rangle \langle : I^2(\mathbf{r}, t + \tau) : \rangle, \quad (5.16)$$

sendo $\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \rangle$.

Expandindo a equação (5.16) em termos de $E^{(+)}$ e $E^{(-)}$ e fazendo $t = 0$ obtém-se,

$$\langle a^\dagger a^\dagger(\tau) a(\tau) a \rangle \leq \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle. \quad (5.17)$$

Dividindo ambos os lados da equação (5.17) por $\langle a^\dagger a \rangle^2$ e utilizando os resultados das equações (5.12) e (5.13) obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\langle a^\dagger a^\dagger(\tau) a(\tau) a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} &\leq \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2}, \\ \therefore g^{(2)}(\tau) &\leq g^{(2)}(0). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Quando o campo satisfaz a desigualdade $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$ para um tempo de correlação $\tau < \tau_c$, os fótons detectados exibem um excesso de correlação para tempos menores do que τ_c . Neste caso é observado um fenômeno conhecido como *photon bunching*, em que a distribuição de fótons se dá preferencialmente em agrupamentos. Em alguns

sistemas ópticos quânticos, como o que estamos estudando, essa desigualdade é violada, de forma que é possível observar $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ (SOUZA, 2013). Neste caso observa-se que os fótons são detectados em intervalos de tempo mais espaçados e, portanto, menos agrupados, dando origem ao fenômeno conhecido como *photon antibunching*. Este fenômeno configura uma assinatura quântica da luz e é consequência direta do bloqueio de fótons, que ocorre quando, devido à absorção de um fóton, a transmissão de um segundo fóton é bloqueada até que este primeiro seja emitido.

Outra desigualdade que caracteriza a natureza quântica do campo é $g^{(2)}(0) < 1$. Este resultado não pode ser previsto por uma análise clássica, pois o campo sempre exhibe *photon antibunching* para alguma escala de tempo. Os campos clássicos são sempre caracterizados por $g^{(2)}(0) \geq 1$ (SCULLY; ZUBAIRY, 1997; GRYNBERG; ASPECT; FABRE, 2010).

Para entender o porquê, podemos reescrever a desigualdade $g^{(2)}(0) < 1$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} &< 1 \\ \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle &< \langle a^\dagger a \rangle^2 \\ \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2 &< 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

A desigualdade (5.19) implica em algumas inconsistências do ponto de vista clássico. Utilizamos a representação P (P -representation) para verificar isso. Esta também é conhecida como representação de estados coerentes $|\alpha\rangle$, os quais são autoestados do operador a , ou seja, para um número complexo α tem-se $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Nesta representação o operador densidade ρ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\rho = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (5.20)$$

sendo $P(\alpha, \alpha^*)$ uma função distribuição real de quasi-probabilidade. Esta é uma forma conveniente de escrever o operador densidade para um conjunto de operadores normalmente ordenados e sua dedução pode ser encontrada na referência (SCULLY; ZUBAIRY, 1997). Podemos utilizar a representação P para escrever o valor médio de um operador arbitrário $\langle O \rangle = Tr(O\rho)$ da seguinte forma,

$$\langle O \rangle = \int P(\alpha, \alpha^*) \langle \alpha|O|\alpha \rangle d^2\alpha. \quad (5.21)$$

Dessa forma os valores médios $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$ e $\langle a^\dagger a \rangle$ apresentados na desigualdade (5.19) podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}\langle a^\dagger a \rangle &= \int P(\alpha, \alpha^*) \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle d^2\alpha = \int P(\alpha, \alpha^*) \langle \alpha | \alpha^* \alpha | \alpha \rangle d^2\alpha, \\ \langle a^\dagger a \rangle &= \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha|^2 d^2\alpha = E[\alpha^2],\end{aligned}\tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle &= \int P(\alpha, \alpha^*) \langle \alpha | a^\dagger a^\dagger a a | \alpha \rangle d^2\alpha = \int P(\alpha, \alpha^*) \langle \alpha | \alpha^* \alpha^* \alpha \alpha | \alpha \rangle d^2\alpha, \\ \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle &= \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha|^4 d^2\alpha = E[\alpha^4].\end{aligned}\tag{5.23}$$

Utilizando a notação $E[X]$ a variância pode ser escrita como (BUSSAB; MORETTIN, 2010):

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[(X - E[X])^2],\tag{5.24}$$

de maneira que para $X = \alpha^2$, tem-se:

$$\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2 = E[\alpha^4] - E[\alpha^2]^2 = E[(\alpha^2 - E[\alpha^2])^2],\tag{5.25}$$

$$\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2 = \int P(\alpha, \alpha^*) (\alpha^2 - \langle a^\dagger a \rangle)^2 d^2\alpha < 0.\tag{5.26}$$

Como $(\alpha^2 - \langle a^\dagger a \rangle)^2$ é sempre positivo, para que a desigualdade (5.26) ocorra é necessário que $P(\alpha, \alpha^*)$ seja negativo para alguns valores de α , e, portanto, não satisfaz as propriedades de uma função distribuição clássica.

A distribuição de fótons em um experimento de contagem de fótons, em que estes chegam em um detector em um determinado intervalo de tempo, fornece a estatística do campo. Para fótons chegando independentemente, de maneira aleatória, a estatística é *Poissoniana*. Esta é a estatística de um campo laser e é caracterizada por $g^{(2)}(0) = 1$. No caso da luz proveniente de uma lâmpada incandescente, por exemplo, a distribuição de fótons é *Super-Poissoniana*. Por ser uma luz clássica observa-se $g^{(2)}(0) > 1$ e o fenômeno de *photon bunching*. É possível também observar uma estatística *Sub-Poissoniana* para a luz, caracterizada por $g^{(2)}(0) < 1$ e a observação do fenômeno de *antibunching*. Neste caso, a intensidade das flutuações do campo é reduzida para valores abaixo de um campo laser, sendo uma evidência direta de que a luz é quântica.

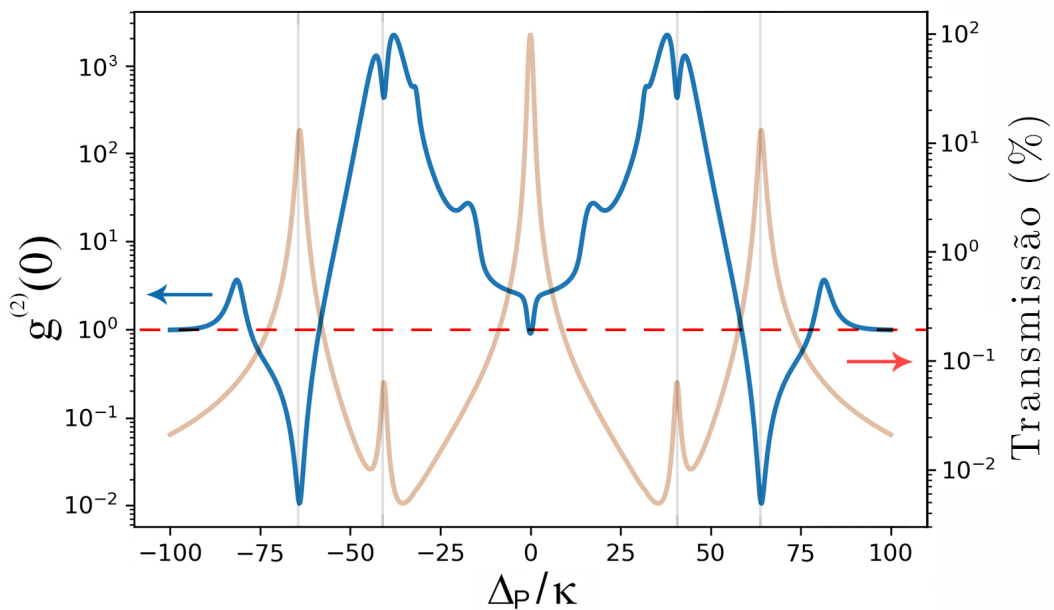
Na próxima seção mostramos como a estatística do campo de prova, e consequentemente sua quanticidade, pode ser controlada a partir do sistema CEIT utilizando um parâmetro externo de controle.

5.3 Controle da Coerência do Campo de Prova com o Sistema CEIT

Neste trabalho utilizamos a função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ para observar o controle da estatística do campo transmitido pela cavidade. Para isso utilizamos como referência um campo de luz coerente, o qual fornece $g^{(2)}(0) = 1$ e possui distribuição Poissoniana. O campo de prova possui tal comportamento antes de entrar na cavidade. Este resultado pode ser verificado calculando-se o valor de $g^{(2)}(0)$ para a cavidade vazia. Após interagir com o sistema CEIT com um único átomo no regime de acoplamento forte, a estatística do campo de prova pode ser modificada, e até controlada, para sub-Poissoniana ou super-Poissoniana, dependendo do conjunto de parâmetros utilizado.

Na figura 8 apresentamos a função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ para o acoplamento átomo-campo $g_0 = 50 \kappa$ e $\Omega_c = 40 \kappa$, considerando os mesmos parâmetros utilizados para o cálculo da transmissão apresentada na figura 6. A linha tracejada vermelha em $g^{(2)}(0) = 1$ indica a referência do sistema para a estatística Poissoniana do campo coerente de prova.

Figura 8 – Função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ e transmissão relativa do sistema CEIT, para um único átomo, em função da dessintonia prova-cavidade normalizada Δ_p/κ . Os parâmetros utilizados são $g_0 = 50\kappa$, $\Omega_c = 40\kappa$, $\varepsilon = \kappa$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = \kappa$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ e $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelo espectro de transmissão do sistema é possível notar que os picos que caracterizam os estados brilhantes para as transições de um e dois fótons, linhas verticais do gráfico, podem ser também identificados por mínimos na função de correlação $g^{(2)}(0)$. Este resultado mostra que a única região em que a luz apresenta estatística sub-Poissoniana $g^{(2)}(0) < 1$, é aquela em que ocorre a transição de um único fóton, caracterizando também a região em que é possível observar o fenômeno de bloqueio de um único foton (*photon blockade*), e conseqüentemente, o estabelecimento do comportamento quântico do campo de prova.

A estatística super-Poissoniana $g^{(2)}(0) > 1$, caracterizando o comportamento clássico do campo de prova, pode ser observada para vários valores de Δ_p , com a função de correlação chegando a valores maiores que 10^3 .

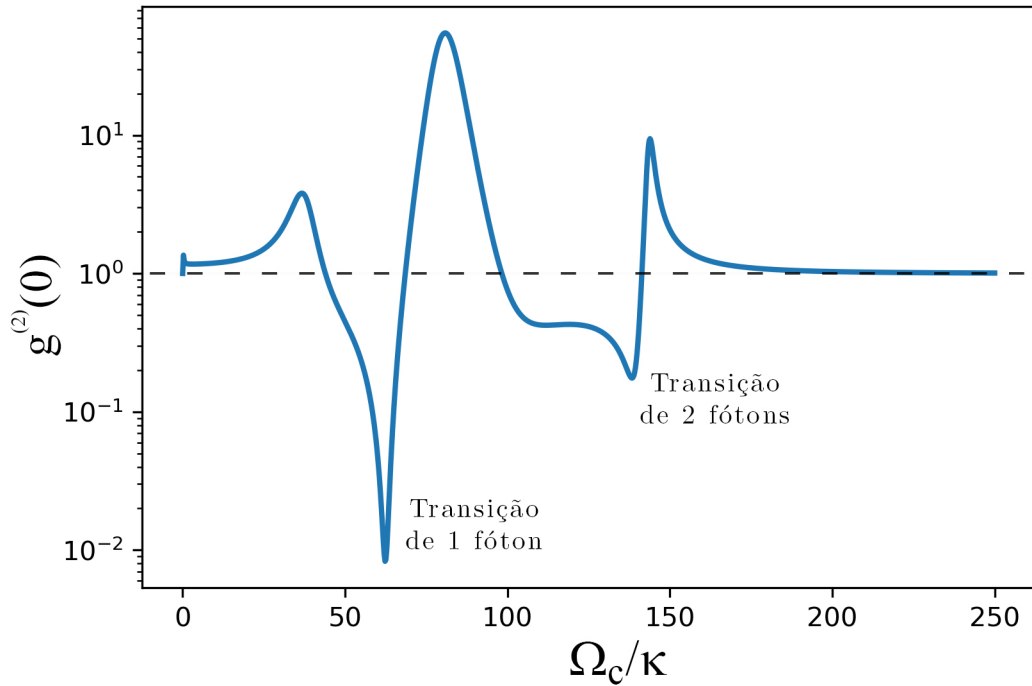
Teoricamente, a análise da estatística de fótons pode ser realizada, a princípio, em função de qualquer parâmetro do sistema. Contudo, nem todos os parâmetros são simples de serem modificados experimentalmente, de maneira que a investigação de protocolos que permitam analisar o comportamento do sistema em função de parâmetros externos pode ser muito promissora para aplicações tecnológicas. Neste contexto, a CEIT é muito interessante, pois podemos verificar o comportamento do sistema em função dos parâmetros do campo de controle. Na figura 8 o par simétrico de estados brilhantes é observado para $\Delta_p = \pm 65\kappa$. Como já mencionado, os valores mínimos da função de correlação $g^{(2)}(0)$ são observados quando o sistema átomo-campo é estimulado ressonantemente a partir do estado fundamental nas transições de 1 ou mais fótons. Como o espaçamento destas transições podem ser modificadas através da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c , é possível verificar as conseqüências da variação de Ω_c para o fenômeno de bloqueio de fótons, por exemplo, para um valor fixo de Δ_p .

Na figura 9 apresentamos a função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ em função da frequência de Rabi do campo de controle normalizada Ω_c/κ para o mesmo sistema CEIT considerado na figura 8, com $\Delta_p = 80\kappa$. Note que o campo transmitido pela cavidade apresenta estatística sub-Poissoniana em duas regiões bem definidas, com valores mínimos obtidos nos estados em que as transições de um ($|\Psi_1^{(\pm)}\rangle$) e dois ($|\Psi_2^{(\pm)}\rangle$) fótons são estimuladas ressonantemente. Para ilustrar melhor tais processos, apresentamos na figura 10 o diagrama de energia dos estados vestidos do sistema CEIT considerado, mostrando que o espaçamento entre estes podem ser modificados tanto por g_0 quanto por

Ω_c através da relação $\sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2}$.

O segundo mínimo que aparece no gráfico da figura 9 está associado especificamente ao bloqueio de dois fótons que ocorre quando a transição $|\Psi_0^{(0)}\rangle \leftrightarrow |\Psi_2^{(+)}\rangle$ é estimulada. Este bloqueio não é tão eficiente quanto o bloqueio de um único fóton, caracterizado pela transição $|\Psi_0^{(0)}\rangle \leftrightarrow |\Psi_1^{(+)}\rangle$, pelo fato dos estados $|\Psi_1^{(\pm)}\rangle$ ainda serem populados significativamente, mesmo que estes não estejam sendo estimulados ressonantemente (SOUZA, 2013).

Figura 9 – Função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ em função da frequência de Rabi do campo de controle normalizada Ω_c/κ , utilizando os mesmos parâmetros da figura 8 e para $\Delta_p = 80\kappa$.



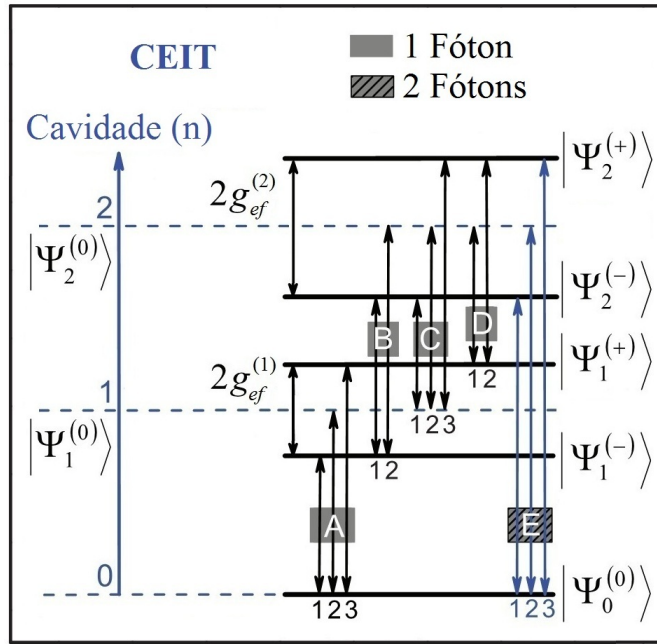
Fonte: Elaborado pelo autor.

O controle óptico apresentado na figura 9 mostra também a formação de um platô sub-Poissoniano entre a transição de um e dois fótons. A região deste platô pode ser significativamente diminuída ou aumentada pela variação proporcional da dessintonia Δ_p , conforme apresentado na figura 11.

A formação do platô ocorre à medida que o estado escuro $|\Psi_1^{(0)}\rangle$, que produz luz coerente $g^{(2)}(0) = 1$, torna-se mais populado do que o estado $|\Psi_1^{(+)}\rangle$, conforme explicado por Souza (2013). A principal relevância desse resultado reside no fato de que o campo de controle fornece parâmetros externos ao sistema, podendo ser modificados experimentalmente

sem alterar a configuração do mesmo. Simulações, como as conduzidas neste trabalho, permitem definir, por exemplo, os melhores parâmetros possíveis do sistema CEIT para gerar luz quântica em uma região de trabalho mais ampla e acessível experimentalmente para o campo de controle utilizado.

Figura 10 – Ilustração do diagrama de energia dos estados vestidos do sistema CEIT considerado, mostrando os processos de transição de um e dois fótons. O espaçamento entre os níveis de energia é dado por $2g_{ef}^{(n)} = 2\sqrt{ng_0^2 + \Omega_c^2}$.



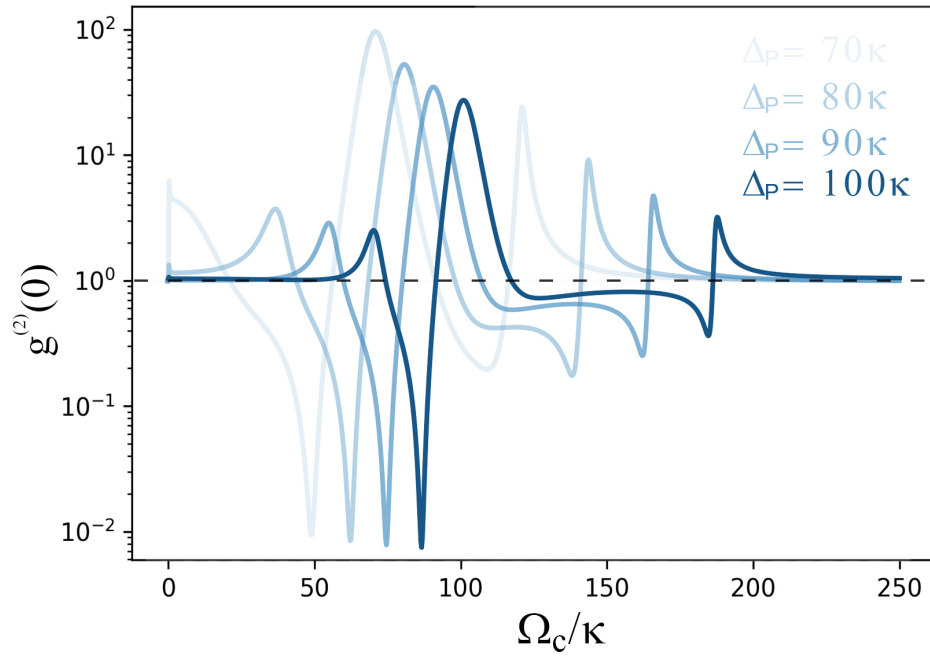
Fonte: Figura extraída de Souza (p. 98, 2013).

Para visualizar de maneira geral como a função de correlação pode ser modificada, apresentamos na figura 12 (a) um gráfico em três dimensões com gradiente de cores de $g^{(2)}(0)$ considerando a variação de Δ_p e Ω_c . As áreas tendendo para o azul, abaixo do plano onde $g^{(2)}(0) = 1$ (em verde), são as regiões onde o campo transmitido pela cavidade apresenta comportamento quântico. Na figura 12 (b) apresentamos o mesmo gráfico visto de cima. Neste é possível ver nitidamente a região de bloqueio de um único fóton, dada pela linha azul escura inferior, e o surgimento do bloqueio de dois fótons (linha azul superior), referente à transição $|\Psi_0^{(0)}\rangle \leftrightarrow |\Psi_2^{(\pm)}\rangle$, surgindo para valores acima de $\Delta_p = \pm 60 \kappa$ e $\Omega_c = 100 \kappa$.

Estudos futuros serão conduzidos para analisar a função de correlação $g^{(2)}(\tau)$ para classificar e caracterizar a ocorrência dos fenômenos de *photon bunching* e *antibunching*, pois nos casos em que é observado a estatística super-Poissoniana $g^{(2)}(0) > 1$, a princípio

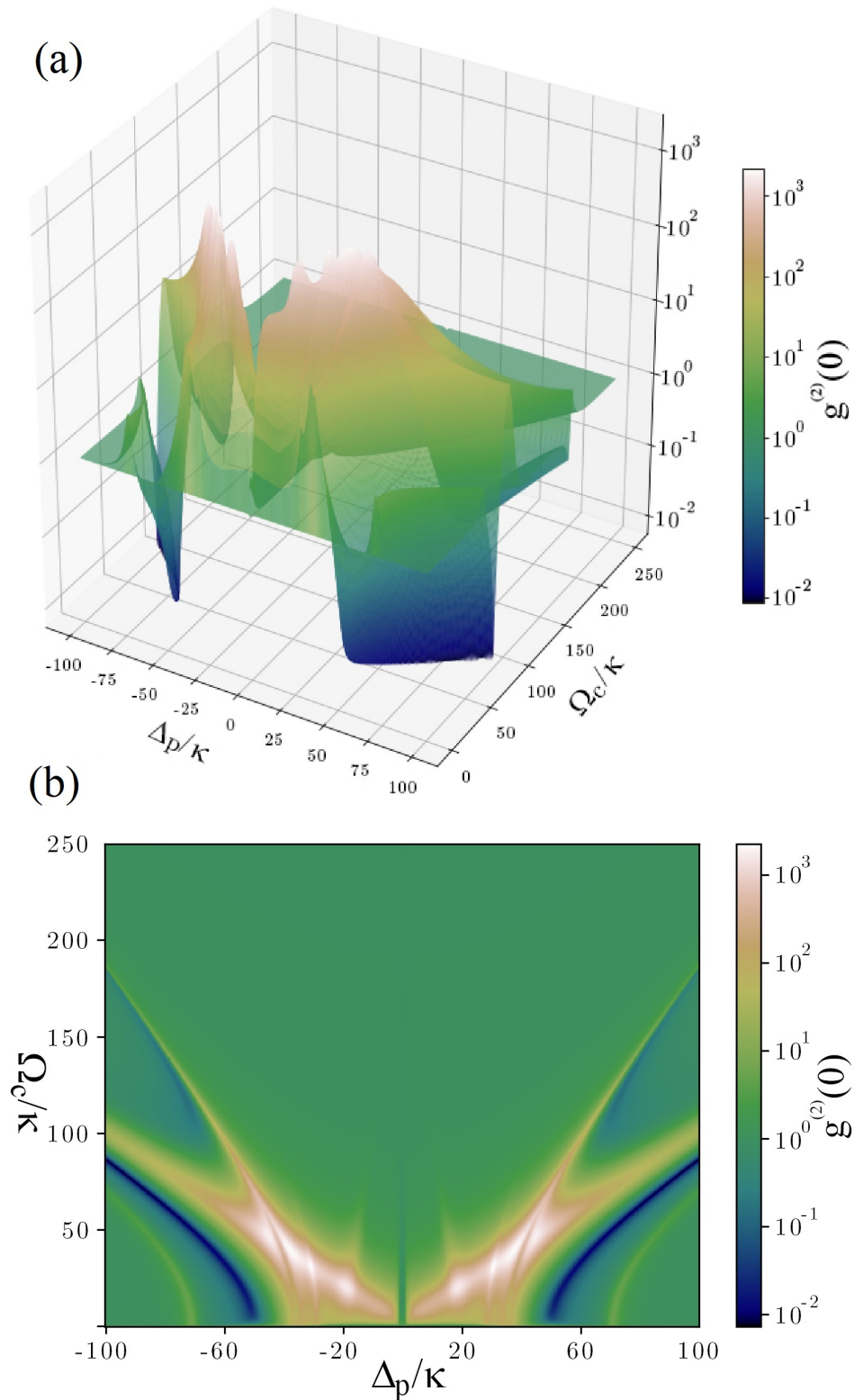
para luz clássica, é possível ocorrer o fenômeno de *antibunching*, conforme demonstrado por Souza (2013).

Figura 11 – Função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ em função da frequência de Rabi do campo de controle normalizada Ω_c/κ para diferentes valores de Δ_p .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – (a) Representação em três dimensões da função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$ do sistema CEIT, para um único átomo no regime de acoplamento forte $g_0 = 50 \kappa$, em função da frequência de Rabi do campo de controle Ω_c/κ e da dessintonia prova-cavidade Δ_p/κ normalizadas. Em (b) apresentamos a vista superior do mesmo gráfico.



Fonte: Elaborado pelo autor.

6 Conclusões

Em Janeiro de 2021, Sarah Thomas e Pascale Senellart publicaram na revista *Nature* um artigo intitulado *The race for the ideal single-photon source is on* (THOMAS; SENELLART, 2021), ou seja, “A busca pela fonte ideal de fótons individuais começou”. Neste trabalho os autores discutem inúmeras contribuições realizadas nas últimas décadas que mostram a necessidade de produção de fótons individuais para o desenvolvimento e estabelecimento de tecnologias quânticas. Isso ocorre de maneira geral, porque utilizar fótons individuais implica na diminuição de ruídos, e, conseqüentemente, na diminuição de erros no transporte e processamento de informação quântica. No desenvolvimento da criptografia quântica, por exemplo, quanto menor a quantidade de fótons em um pulso, maior a segurança da transmissão de chaves quânticas (XU et al., 2020). Em metrologia, utilizar fontes de fótons com menos ruído permite obter medições ópticas de maior resolução (HELVERSEN et al., 2019). Para se utilizar fótons como qubits ou como geradores de números aleatórios, é necessário a produção de fótons individuais (LIU et al., 2018), além de uma infinidade de outras aplicações tecnológicas (GIBNEY, 2019).

Além da geração de fótons individuais, a própria produção de campos quânticos possui sua relevância, em especial para a informação e comunicação quânticas. Parte da arquitetura da computação quântica consiste em armazenar estados quânticos em memórias quânticas, e uma das propostas atuais para o hardware consiste em utilizar a fotônica, sendo que o principal desafio é superar a presença de ruídos nos processos (LVOVSKY; SANDERS; TITTEL, 2009b). Logo, a utilização de campos que apresentam estatística sub-Poissoniana, pode ser uma forma de superar o impacto dos ruídos na transmissão de informações.

Diante do exposto, nota-se a importância do nosso trabalho, pois um dos principais objetivos na área de óptica quântica é o estabelecimento de protocolos que possibilitem controlar as não linearidades de sistemas no nível mais fundamental de quanta de matéria e luz individuais. Através da combinação do fenômeno de transparência eletromagneticamente induzida com eletrodinâmica quântica de cavidades (CEIT), nós exploramos a estatística de fótons do campo emitido pela cavidade através do cálculo da função de correlação de segunda ordem $g^{(2)}(0)$. A partir da variação de um parâmetro externo ao sistema,

dado pela frequência de Rabi do campo de controle Ω_c , foi possível demonstrar uma rica estrutura para obtenção de luz quântica, com $g^{(2)}(0)$ variando de uma estatística de fótons sub-Poissoniana $g^{(2)}(0) \approx 0$ para super-Poissoniana $g^{(2)}(0) \approx 100$. No regime de acoplamento átomo-campo forte, $g_0 = 50 \kappa$, o sistema CEIT exibe duas regiões bem definidas para a produção de luz quântica, como resultado do fenômeno de bloqueio de fótons para um único fóton e dois fótons. O controle quântico observado neste sistema pode auxiliar significativamente na implementação de dispositivos que possam atenuar ou amplificar as flutuações de um campo laser ou ainda dispositivos que possam produzir fótons individuais e fortemente correlacionados.

Estudos adicionais estão sendo conduzidos para verificar como a estatística do campo transmitido pela cavidade pode ser modificada com o aumento do número de átomos no sistema CEIT, utilizando uma abordagem puramente quântica.

Referências

- AN, K.; FELD, M. S. Semiclassical four-level single-atom laser. *Physical Review A*, v. 56, n. 1, p. 56–63, 1997.
- BARUT, A.; KRAUS, D. K. Nonperturbative quantum electrodynamics: The lamb shift. *Foundation of Physics*, v. 13, n. 1, p. 189–194, 1983.
- BRASIL, C. A.; FANCHINI, F. F.; NAPOLITANO, R. J. A simple derivation of the lindblad equation. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 35, n. 1, p. 1303–1–1303–9, 2013.
- BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística Básica*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.
- CHANELIÈRE, T. et al. Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories. *Nature*, v. 438, p. 833–836, 2005.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics*. 1. ed. [S.l.]: Wiley, 1991. 914 p.
- DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 2. ed. São Paulo: Atual, 1982.
- FEYNMAN, R.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics*. 50. ed. [S.l.]: Baisc Books, 1963.
- FLEISCHHAUER, M.; IMAMOGLU, A.; MARANGOS, J. P. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Review of Modern Physics*, v. 77, n. 2, p. 633–672, 2005.
- GIBNEY, E. Quantum gold rush: the private funding pouring into quantum start-ups. *Nature*, v. 574, p. 22–24, 2019.
- GLAUBER, R. Photon correlations. *Physical Review Letters*, v. 10, n. 3, p. 84–86, 1963.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2. ed. [S.l.]: Pearson Education,, 2005.
- GRYNBERG, G.; ASPECT, A.; FABRE, C. *Introduction to Quantum Optics From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- HARRIS, S. E. Electromagnetically induced transparency. *Physics Today*, v. 50, n. 7, p. 36–42, 1997.
- HARRIS, S. E.; FIELD, J. E.; IMAMOGLU, A. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. *Physical Review Letters*, v. 64, n. 10, p. 1107–1110, 1990.
- HARRIS, S. E.; HAU, L. V. Nonlinear optics at low light levels. *Physcal Review Letter*, v. 82, n. 23, p. 4611, 1999.

- HAU, L. et al. Light speed reduction to 17 meters per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, v. 397, p. 594–598, 1999.
- HELVERSEN, M. et al. Quantum metrology of solid-state single-photon sources using photon-number-resolving detectors. *New Journal of Physics*, v. 21, 2019.
- JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963.
- JOHANSSON, J. R.; NATION, P. D.; NORI, F. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, v. 186, n. 8, p. 1760–1772, 2012.
- KASH, M. M. et al. Ultraslow group velocity and enhanced nonlinear optical effects in a coherently driven hot atomic gas. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 26, p. 5229–5232, 1999.
- KIMBLE, H. J. The quantum internet. *Nature*, v. 453, p. 1023–1030, 2008.
- LIU, C. et al. Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses. *Nature*, v. 409, p. 490–493, 2001.
- LIU, Y. et al. Device-independent quantum random-number generation. *Nature*, v. 562, p. 548–551, 2018.
- LVOVSKY, A.; SANDERS, B.; TITTEL, W. Optical quantum memory. *Nature Photonics*, v. 3, p. 706–714, 2009.
- LVOVSKY, A. L.; SANDERS, B. C.; TITTEL, W. Optical quantum memory. *Nature Photonics*, v. 3, p. 706–714, 2009.
- MOMPART, J.; CORBALÁN, R. Lasing without inversion. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, v. 2, n. 3, p. R7–R24, 2000.
- MOTES, K. R. e. a. Linear optical quantum metrology with single photons: Exploiting spontaneously generated entanglement to beat the shot-noise limit. *Physical Review Letters*, v. 114, n. 17, 2015.
- MURR, K. On the suppression of the diffusion and the quantum nature of a cavity mode. optical bistability: forces and friction in driven cavities. *Journal of Physics B*, v. 36, n. 12, 2003.
- NESBET, R. K. Spontaneous emission in semiclassical radiation theory. *Physical Review A*, v. 4, n. 1, p. 259–264, 1971.
- NOURINOVIN, S.; ALOMAINY, A. *A Terahertz Electromagnetically Induced Transparency-Like Metamaterial for Biosensing*. [S.l.]: 15th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), 2021.
- PETERSON, C.; HANSSON, T. H.; JOHNSON, K. Loop diagrams in boxes. *Physical Review D*, v. 26, n. 2, p. 415–428, 1982.
- PLEITEZ, V. Richard feynman e a qed. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, n. 4, 2018.

- SCARANI, V. e. a. The security of practical quantum key distribution. *Reviews of Modern Physics*, v. 81, n. 3, 2009.
- SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- SOUZA, J. A. et al. electromagnetically-induced-transparency-related phenomena and their mechanical analogs. *Physical Review A*, v. 92, p. 1–18, 2015.
- SOUZA, J. A. d. *Controle das propriedades estatísticas do campo e biestabilidade óptica em eletrodinâmica quântica de cavidades*. Tese (Doutorado em física) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Abril 2013.
- STECK, D. A. Rubidium 87 d line data. Los Alamos, p. 29, Set. 2003. Disponível em: <<https://steck.us/alkalidata/>>. Acesso em: 17 de junho de 2019.
- STROUD, C. R. Quantum-electrodynamic treatment of spontaneous emission in the presence of an applied field. *Physical Review A*, v. 3, n. 3, p. 1033, 1971.
- THOMAS, S.; SENELLART, P. The race for the ideal single-photon source is on. *Nature Nanotechnology*, v. 16, n. 4, p. 367–368, 2021.
- WENTZEL, G. Zur theorie des photoelektrischen effekts. *Zeitschrift Für Physik*, v. 40, p. 574–589, 1926.
- WITZEL, W. M. e. a. Quantum simulation of multiple-exciton generation in a nanocrystal by a single photon. *Physical Review Letters*, v. 105, n. 13, 2010.
- XU, F. et al. Secure quantum key distribution with realistic devices. *Reviews of Modern Physics*, v. 92, n. 2, p. 025002–1–005002–60, 2020.
- YAN, X. et al. The terahertz electromagnetically induced transparency-like metamaterials for sensitive biosensors in the detection of cancer cells. *Biosensors and Bioelectronics*, v. 126, n. 1, p. 485–492, 2019.
- ZHANG, J. et al. Highly sensitive detection of malignant glioma cells using metamaterial-inspired thz biosensor based on electromagnetically induced transparency. *Biosensors and Bioelectronics*, v. 185, n. 113241, 2021.
- ZUBAIRY, M. S. *Quantum Mechanics for Beginners with application to quantum communication and quantum computing*. 1. ed. New York: Oxford University Press, 2020.

Apêndices

APÊNDICE A – Obtenção do hamiltoniano do sistema CEIT independente do tempo

O hamiltoniano de Jaynes-Cummings com bombeio do sistema CEIT, que descreve a interação de um único átomo de 3 níveis na configuração Λ com um único modo do campo quântico de uma cavidade óptica, acoplando a transição $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$, e um campo clássico de controle, acoplando a transição $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, é dado por:

$$\hat{H} = \omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33} + (g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + \varepsilon\hat{a}e^{i\omega_p t} + h.c.) \quad (\text{A.1})$$

Este foi obtido utilizando as aproximações de dipolo elétrico e de onda girante (RWA), conforme discutido no capítulo 3.

O hamiltoniano (A.1) é descrito na *representação de Schrödinger*, cuja evolução temporal é caracterizada pela evolução das amplitudes dos estados enquanto que os operadores permanecem constantes. No caso em que a evolução do sistema se dá através da evolução temporal dos operadores, com as amplitudes dos estados sendo tratadas independentemente do tempo, temos a *representação de Heisenberg*. Neste apêndice utilizamos a *representação de Dirac*, também conhecida como *representação de Interação*, para eliminar a dependência temporal do hamiltoniano (A.1). Nesta representação a evolução temporal do sistema é feita entre as representações de Schrödinger e de Heisenberg.

Para isso vamos escrever o hamiltoniano da Equação (A.1) separadamente como:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I(t), \quad (\text{A.2})$$

com o primeiro termo descrevendo o modo quântico do campo da cavidade e o átomo individualmente $\hat{H}_0 = \omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33}$, e o segundo descrevendo a interação átomo-campo $\hat{H}_I = g_0\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\omega_c t} + \varepsilon\hat{a}e^{i\omega_p t} + h.c.$

O operador unitário que transforma o estado da representação de Schrödinger para a representação de Dirac é dado pela exponencial:

$$\hat{U}_0^\dagger(t, t_0) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}. \quad (\text{A.3})$$

A relação do operador hamiltoniano na representação de Dirac \hat{H}' com o mesmo na representação de Schrödinger \hat{H} é:

$$\hat{H}' = \hat{U}_0^\dagger \hat{H} \hat{U}_0 = \hat{U}_0^\dagger (\hat{H}_0 + \hat{H}_I) \hat{U}_0 \quad (\text{A.4})$$

Pela equação (A.3) tem-se que o hamiltoniano \hat{H}_0 é o mesmo nas duas representações, ou seja, $\hat{H}'_0 = \hat{H}_0$. Portanto precisamos apenas calcular o hamiltoniano de interação \hat{H}'_I na representação de Dirac.

Cálculo de \hat{H}'_I

Considerando cada termo de \hat{H}'_I e a relação de Campbell-Baker-Hausdorff, dada por $e^{\hat{B}} \hat{A} e^{-\hat{B}} = \hat{A} + [\hat{B}, \hat{A}] + \frac{1}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \frac{1}{3!} [\hat{B}, [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]] + \dots$, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{H}'_I(t) &= \hat{U}_0^\dagger \hat{H}_I \hat{U}_0 = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)} \hat{H}_I e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}, \\ \hat{H}'_I(t) &= e^{i\hat{H}_0 t} \left[g_0 \hat{a} \hat{\sigma}_{31} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{i\omega_c t} + \varepsilon \hat{a} e^{i\omega_p t} + h.c. \right] e^{-i\hat{H}_0 t}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

em que substituímos \hat{H}_0 e \hat{H}_I , conforme equação (A.2), e consideramos $t_0 = 0$.

Para organizar melhor os cálculos, consideramos os três primeiros termos da equação (A.5) separadamente, de maneira que:

$$(I) = e^{i(\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t} (g_0 \hat{a} \hat{\sigma}_{31}) e^{-i(\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t} \quad (\text{A.6})$$

$$(II) = e^{i(\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t} \left(\Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{i\omega_c t} \right) e^{-i(\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t} \quad (\text{A.7})$$

$$(III) = e^{i(\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t} \left(\varepsilon \hat{a} e^{i\omega_p t} \right) e^{-i(\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t} \quad (\text{A.8})$$

Podemos reescrever estas equações separando os operadores do átomo e do campo, pois estes são independentes. A equação (A.6) torna-se:

$$(I) = g_0 \left[e^{i(\omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t} (\hat{\sigma}_{31}) e^{-i(\omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t} \right] \left[e^{i\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} t} (\hat{a}) e^{-i\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \right] \quad (\text{A.9})$$

Expandindo cada termo da relação de Campbell-Baker-Hausdorff para a equação (A.9), obtemos para o operador atômico $\hat{\sigma}_{31}$,

$$\hat{\sigma}_{31} = (i\omega_{31} t)^0 \hat{\sigma}_{31}, \quad (\text{A.10})$$

$$[i(\omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{31}] = (i\omega_{31} t)^1 \hat{\sigma}_{31}, \quad (\text{A.11})$$

$$[i(\omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t, [i(\omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{31}]] = (i\omega_{31} t)^2 \hat{\sigma}_{31}, \quad (\text{A.12})$$

$$[i(\omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t, \dots [i(\omega_{32} \hat{\sigma}_{22} + \omega_{31} \hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{31}]] = (i\omega_{31} t)^n \hat{\sigma}_{31}, \quad (\text{A.13})$$

e para o operador do campo da cavidade \hat{a} , considerando a relação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$,

$$\hat{a} = (-i\omega_{cav}t)^0 \hat{a}, \quad (\text{A.14})$$

$$[i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t, \hat{a}] = (-i\omega_{cav}t)^1 \hat{a}, \quad (\text{A.15})$$

$$[i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t, [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t, \hat{a}]] = (-i\omega_{cav}t)^2 \hat{a}, \quad (\text{A.16})$$

$$[i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t, \dots [i\omega_{cav}\hat{a}^\dagger\hat{a}t, \hat{a}]] = (-i\omega_{cav}t)^n \hat{a}. \quad (\text{A.17})$$

Pela relações obtidas em (A.10) até (A.18), podemos reescrever a equação (A.9) como:

$$(I) = g_0 \left[\hat{\sigma}_{31} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega_{31}t)^n}{n!} \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega_{cav}t)^n}{n!} \right]. \quad (\text{A.18})$$

Os somatórios obtidos na equação (A.18) correspondem às expansões em série de Taylor da função exponencial e^x , de maneira que,

$$(I) = g_0 \hat{\sigma}_{31} e^{i\omega_{31}t} \hat{a} e^{-i\omega_{cav}t} = g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} e^{i(\omega_{31}-\omega_{cav})t}. \quad (\text{A.19})$$

Tomando o hermitiano conjugado de (A.19) obtemos o termo correspondente para (I) em *h.c.* na equação (A.5), ou seja,

$$(I)^\dagger = g_0^* \hat{\sigma}_{13} \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_{31}-\omega_{cav})t}. \quad (\text{A.20})$$

Reescrevendo o termo (II), dado pela equação (A.7),

$$(II) = \Omega_c e^{i\omega_c t} \left[e^{i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} (\hat{\sigma}_{32}) e^{-i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t} \right], \quad (\text{A.21})$$

e adotando um procedimento análogo obtemos:

$$\hat{\sigma}_{32} = [i(\omega_{31} - \omega_{32})t]^0 \hat{\sigma}_{32}, \quad (\text{A.22})$$

$$[i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{32}] = [i(\omega_{31} - \omega_{32})t]^1 \hat{\sigma}_{32}, \quad (\text{A.23})$$

$$[i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{32}]] = [i(\omega_{31} - \omega_{32})t]^2 \hat{\sigma}_{32}, \quad (\text{A.24})$$

$$[i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \dots [i(\omega_{32}\hat{\sigma}_{22} + \omega_{31}\hat{\sigma}_{33})t, \hat{\sigma}_{32}]] = [i(\omega_{31} - \omega_{32})t]^n \hat{\sigma}_{32}, \quad (\text{A.25})$$

o que fornece:

$$(II) = \Omega_c e^{i\omega_c t} \left[\hat{\sigma}_{32} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[i(\omega_{31} - \omega_{32})t]^n}{n!} \right] = \Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{i(\omega_{31}-\omega_{32}+\omega_c)t}, \quad (\text{A.26})$$

$$(II)^\dagger = \Omega_c^* \hat{\sigma}_{23} e^{-i(\omega_{31}-\omega_{32}+\omega_c)t}. \quad (\text{A.27})$$

Resolvendo para o termo (III), dado pela equação (A.8),

$$(III) = \varepsilon e^{i\omega_p t} \left[e^{i\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} t} (\hat{a}) e^{-i\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \right], \quad (A.28)$$

utilizando a relação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, tem-se:

$$\hat{a} = (-i\omega_{cav} t)^0 \hat{a}, \quad (A.29)$$

$$[i\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} t, \hat{a}] = (-i\omega_{cav} t)^1 \hat{a}, \quad (A.30)$$

$$[i\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} t, [i\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} t, \hat{a}]] = (-i\omega_{cav} t)^2 \hat{a}, \quad (A.31)$$

$$[i\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} t, \dots [i\omega_{cav} \hat{a}^\dagger \hat{a} t, \hat{a}]] = (-i\omega_{cav} t)^n \hat{a}, \quad (A.32)$$

o que fornece,

$$(III) = \varepsilon e^{i\omega_p t} \left[\hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega_{cav} t)^n}{n!} \right] = \varepsilon \hat{a} e^{i(\omega_p - \omega_{cav})t}, \quad (A.33)$$

$$(III)^\dagger = \varepsilon^* \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_p - \omega_{cav})t}. \quad (A.34)$$

Considerando todos os termos, a parte de interação do hamiltoniano do sistema, dado pela equação (A.5), na representação de Dirac torna-se:

$$\hat{H}'_I(t) = g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav})t} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{i(\omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c)t} + \varepsilon \hat{a} e^{i(\omega_p - \omega_{cav})t} + h.c. \quad (A.35)$$

Hamiltoniano independente do tempo

Agora que o hamiltoniano está escrito na representação de Dirac, a dependência temporal do mesmo pode ser eliminada se encontrarmos um operador unitário da forma,

$$\hat{U}_1 = e^{i\hat{A}t}, \quad (A.36)$$

sendo \hat{A} um operador genérico relacionando o hamiltoniano do átomo e do campo da cavidade independentemente, ou seja, $\hat{A} = \Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}$. Os valores para os Δ_j serão determinados de maneira que $e^{i\Delta_j t} = 1$.

A parte de interação do hamiltoniano independente do tempo na representação de Dirac é dada então por:

$$\hat{H}_{int} = \hat{U}_1 \hat{H}'_I(t) \hat{U}_1 = e^{i\hat{A}t} \hat{H}'_I(t) e^{-i\hat{A}t} \quad (A.37)$$

Considerando novamente a separação dos cálculos em três termos tem-se:

$$(I) = e^{i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t} (g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav})t}) e^{-i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t}, \quad (A.38)$$

$$(II) = e^{i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t} (\Omega_c \hat{\sigma}_{32} e^{i(\omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c)t}) e^{-i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t}, \quad (A.39)$$

$$(III) = e^{i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t} (\varepsilon \hat{a} e^{i(\omega_p - \omega_{cav})t}) e^{-i(\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} + \Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t}. \quad (A.40)$$

Reescrevendo a equação (A.38) para separar os operadores do átomo e do campo tem-se:

$$(I) = g_0 e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav})t} \left[e^{i(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t} (\hat{\sigma}_{31}) e^{-i(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t} \right] \left[e^{i\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} t} (\hat{a}) e^{-i\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \right]. \quad (\text{A.41})$$

Utilizando a relação de Campbell-Baker-Hausdorff e $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ obtemos:

$$\hat{\sigma}_{31} = (\Delta_\delta - \Delta_\beta)^0 \hat{\sigma}_{31}, \quad (\text{A.42})$$

$$[(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \hat{\sigma}_{31}] = (\Delta_\delta - \Delta_\beta)^1 \hat{\sigma}_{31}, \quad (\text{A.43})$$

$$[(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \dots, [(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \hat{\sigma}_{31}]] = (\Delta_\delta - \Delta_\beta)^n \hat{\sigma}_{31}. \quad (\text{A.44})$$

$$\hat{a} = (-\Delta_\alpha)^0 \hat{a}, \quad (\text{A.45})$$

$$[\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = (-\Delta_\alpha)^1 \hat{a}, \quad (\text{A.46})$$

$$[\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}, \dots, [\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}]] = (-\Delta_\alpha)^n \hat{a}. \quad (\text{A.47})$$

Analogamente ao que foi feito anteriormente, a equação (A.41) e o termo hermitiano conjugado corresponde são descritos por:

$$(I) = g_0 e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav})t} \left[\hat{\sigma}_{31} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(\Delta_\delta - \Delta_\beta)t)^n}{n!} \hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\Delta_\alpha t)^n}{n!} \right], \quad (\text{A.48})$$

$$(I) = g_0 e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav})t} \hat{\sigma}_{31} e^{i(\Delta_\delta - \Delta_\beta)t} \hat{a} e^{-i\Delta_\alpha t}, \quad (\text{A.49})$$

$$(I) = g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} e^{i(\omega_{31} - \omega_{cav} + \Delta_\delta - \Delta_\beta + \Delta_\alpha)t}, \quad (\text{A.50})$$

$$(I)^\dagger = g_0^* \hat{\sigma}_{13} \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_{31} - \omega_{cav} + \Delta_\delta - \Delta_\beta + \Delta_\alpha)t}. \quad (\text{A.51})$$

Aplicando a condição $e^{i\Delta_j} = 1$ para a eliminação da dependência temporal da equação (A.51), obtemos a relação:

$$\omega_{31} - \omega_{cav} + \Delta_\delta - \Delta_\beta + \Delta_\alpha = 0. \quad (\text{A.52})$$

Procedendo de maneira similar para o termo (II), dado pela equação (A.39),

$$(II) = \Omega_c e^{i(\omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c)t} \left[e^{i(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t} (\hat{\sigma}_{32}) e^{-i(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33})t} \right], \quad (\text{A.53})$$

de maneira que:

$$\hat{\sigma}_{32} = (\Delta_\delta - \Delta_\gamma)^0 \hat{\sigma}_{32}, \quad (\text{A.54})$$

$$[(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \hat{\sigma}_{32}] = (\Delta_\delta - \Delta_\gamma)^1 \hat{\sigma}_{32}, \quad (\text{A.55})$$

$$[(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \dots, [(\Delta_\beta \hat{\sigma}_{11} + \Delta_\gamma \hat{\sigma}_{22} + \Delta_\delta \hat{\sigma}_{33}), \hat{\sigma}_{32}]] = (\Delta_\delta - \Delta_\gamma)^n \hat{\sigma}_{32}, \quad (\text{A.56})$$

o que fornece,

$$(II) = \Omega_c e^{i(\omega_{31}-\omega_{32}+\omega_c)t} \left[\hat{\sigma}_{32} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i(\Delta_\delta - \Delta_\gamma)t)^n}{n!} \right], \quad (A.57)$$

$$(II) = \Omega_c e^{i(\omega_{31}-\omega_{32}+\omega_c)t} \sigma_{32} e^{i(\Delta_\delta - \Delta_\gamma)t}, \quad (A.58)$$

$$(II) = \Omega_c \sigma_{32} e^{i(\omega_{31}-\omega_{32}+\omega_c+\Delta_\delta - \Delta_\gamma)t}, \quad (A.59)$$

$$(II)^\dagger = \Omega_c^* \sigma_{23} e^{-i(\omega_{31}-\omega_{32}+\omega_c+\Delta_\delta - \Delta_\gamma)t}. \quad (A.60)$$

Considerando a condição para a independência temporal do hamiltoniano:

$$\omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c + \Delta_\delta - \Delta_\gamma = 0 \quad (A.61)$$

Para o termo (III), dado pela equação (A.40),

$$(III) = \varepsilon e^{i(\omega_p - \omega_{cav})t} \left[e^{i\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} t} (\hat{a}) e^{-i\Delta_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \right], \quad (A.62)$$

obtemos,

$$(III) = \varepsilon e^{i(\omega_p - \omega_{cav})t} \left[\hat{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\Delta_\alpha t)^n}{n!} \right], \quad (A.63)$$

$$(III) = \varepsilon \hat{a} e^{i(\omega_p - \omega_{cav} - \Delta_\alpha)t}, \quad (A.64)$$

$$(III)^\dagger = \varepsilon^* \hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_p - \omega_{cav} - \Delta_\alpha)t}, \quad (A.65)$$

fornecendo a relação:

$$\omega_p - \omega_{cav} + \Delta_\alpha = 0 \quad (A.66)$$

Considerando as equações (A.52), (A.61) e (A.66), tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} \omega_{31} - \omega_{cav} + \Delta_\delta - \Delta_\beta + \Delta_\alpha = 0, \\ \omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c + \Delta_\delta - \Delta_\gamma = 0, \\ \omega_p - \omega_{cav} + \Delta_\alpha = 0, \end{cases} \quad (A.67)$$

que possui uma possível solução em que:

$$-\Delta_\alpha = \Delta_\beta = \omega_p - \omega_{cav}, \quad (A.68)$$

$$\Delta_\delta = \omega_{31} - \omega_{cav}, \quad (A.69)$$

$$\Delta_\gamma - \Delta_\delta = \omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c \quad (A.70)$$

Na notação que utilizamos no capítulo 3, consideramos $\Delta_\alpha = \Delta_p$, $\Delta_\delta = \Delta_1$ e $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$, de maneira que a equação (A.70) pode ser escrita como $\Delta_\gamma = \Delta_1 - \Delta_2$.

Como consideramos o zero de energia do nosso sistema atômico no nível $|1\rangle$ e a frequência de transição do nível $|2\rangle$ para o nível $|3\rangle$ como sendo ω_{32} , a dessintonia entre a transição $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ e o campo de controle pode ser equivalentemente escrita como $\Delta_2 = \omega_{31} - \omega_{32} + \omega_c$ ou $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$.

Logo, o hamiltoniano independente do tempo $\hat{H} = \hat{A} + \hat{U}_1 \hat{H}' \hat{U}_1$ do sistema átomo-campo com bombeio é descrito na notação de Dirac por:

$$\hat{H} = \Delta_p \hat{a}^\dagger \hat{a} - \Delta_p \hat{\sigma}_{11} + (\Delta_1 - \Delta_2) \hat{\sigma}_{22} + \Delta_1 \hat{\sigma}_{33} + (g_0 \hat{\sigma}_{31} \hat{a} + \Omega_c \hat{\sigma}_{32} + \varepsilon \hat{a} + h.c.), \quad (\text{A.71})$$

conforme apresentado na equação (3.39) do capítulo 3.

APÊNDICE B – Dedução da evolução temporal da média dos operadores do sistema CEIT

Como apresentado na seção 4, a equação mestra do sistema CEIT é descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i[H, \rho] + \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + \\ & \Gamma_{31}(2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33}) + \Gamma_{32}(2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33}) \\ & + \gamma_2(2\sigma_{22}\rho\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho - \rho\sigma_{22}) + \gamma_3(2\sigma_{33}\rho\sigma_{33} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33}), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

sendo o hamiltoniano H correspondente,

$$\hat{H} = \Delta_P\sigma_{11} + (\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22} + \Delta_1\sigma_{33} - \Delta_P a^\dagger a + (g_0 a\sigma_{31} + \Omega_c\sigma_{32} + \varepsilon a + h.c.) \quad (\text{B.2})$$

A seguir apresentamos todos os detalhes para obtenção da evolução temporal dos operadores do átomo e do campo.

Obtendo $\langle \dot{a} \rangle$.

Para obter $\langle \dot{a} \rangle$ precisamos multiplicar a equação mestra (B.1) por a e calcular o traço do produto destes operadores a partir de $\langle \dot{a} \rangle = Tr(\dot{\rho}a)$. Utilizando a propriedade cíclica do traço dessa operação, apresentada na seção 2, vamos calcular cada termo da equação total separadamente.

Termo γ_3 :

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_3(2\sigma_{33}\rho\sigma_{33} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})a] &= \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\rho\sigma_{33}a - \sigma_{33}\rho a - \rho\sigma_{33}a] = \\ &= \gamma_3 Tr[2a\sigma_{33}\sigma_{33}\rho - a\sigma_{33}\rho - a\sigma_{33}\rho] = \gamma_3 Tr[2a\sigma_{33}\rho - 2a\sigma_{33}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Termo γ_2 :

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_2(2\sigma_{22}\rho\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho - \rho\sigma_{22})a] &= \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\rho\sigma_{22}a - \sigma_{22}\rho a - \rho\sigma_{22}a] = \\ &= \gamma_2 Tr[2a\sigma_{22}\sigma_{22}\rho - a\sigma_{22}\rho - a\sigma_{22}\rho] = \gamma_2 Tr[2a\sigma_{22}\rho - 2a\sigma_{22}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Termo Γ_{32} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})a] &= \Gamma_{32} Tr[2\sigma_{23}\rho\sigma_{32}a - \sigma_{33}\rho a - \rho\sigma_{33}a] = \\ &= \Gamma_{32} Tr[2a\sigma_{32}\sigma_{23}\rho - a\sigma_{33}\rho - a\sigma_{33}\rho] = \Gamma_{32} Tr[2a\sigma_{33}\rho - 2a\sigma_{33}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Termo Γ_{31} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})a] &= \Gamma_{31} Tr[2\sigma_{13}\rho\sigma_{31}a - \sigma_{33}\rho a - \rho\sigma_{33}a] = \\ &= \Gamma_{31} Tr[2a\sigma_{31}\sigma_{13}\rho - a\sigma_{33}\rho - a\sigma_{33}\rho] = \Gamma_{32} Tr[2a\sigma_{33}\rho - 2a\sigma_{33}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Termo κ :

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a)a] &= \kappa Tr[2a\rho a^\dagger a - a^\dagger a\rho a - \rho a^\dagger a a] = \\ \kappa Tr[2a^\dagger a a\rho - a a^\dagger a\rho - a^\dagger a a\rho] &= \kappa Tr[2a^\dagger a a\rho - (1 + a^\dagger a)a\rho - a^\dagger a a\rho] = \\ &= \kappa Tr[2a^\dagger a a\rho - a\rho - a^\dagger a a\rho - a^\dagger a a\rho] = \kappa Tr[-a\rho] = -\kappa\langle a \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Considerando os termos do hamiltoniano.

Termo ε :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)\rho - \rho(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)]a\} &= -iTr[\varepsilon a\rho a + \varepsilon^* a^\dagger \rho a - \rho\varepsilon a a - \rho\varepsilon^* a^\dagger a] = \\ &= -iTr[\varepsilon a a\rho + \varepsilon^* a a^\dagger \rho - \varepsilon a a\rho - \varepsilon^* a^\dagger a\rho] = -iTr[\varepsilon^* a a^\dagger \rho - \varepsilon^* a^\dagger a\rho] = \\ &= -i\varepsilon^* Tr[(a a^\dagger - a^\dagger a)\rho] = -i\varepsilon^* Tr[\rho] = -i\varepsilon^* \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Termo Ω_c :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})\rho - \rho(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})]a\} &= \\ -i Tr[\Omega_c\sigma_{32}\rho a + \Omega_c^*\sigma_{23}\rho a - \rho\Omega_c\sigma_{32}a - \rho\Omega_c^*\sigma_{23}a] &= \\ -i Tr[\Omega_c a\sigma_{32}\rho + \Omega_c^* a\sigma_{23}\rho - \Omega_c a\sigma_{32}\rho - \Omega_c^* a\sigma_{23}\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Termo g_0 :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(g_0 a\sigma_{31} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13})\rho - \rho(g_0 a\sigma_{31} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13})]a\} &= \\ -i Tr[g_0 a\sigma_{31}\rho a + g_0^* a^\dagger \sigma_{13}\rho a - \rho g_0 a\sigma_{31}a - \rho g_0^* a^\dagger \sigma_{13}a] &= \\ -i Tr[g_0 a a\sigma_{31}\rho + g_0^* a a^\dagger \sigma_{13}\rho - g_0 a a\sigma_{31}\rho - g_0^* a^\dagger a\sigma_{13}\rho] &= \\ -i Tr[g_0^* a a^\dagger \sigma_{13}\rho - g_0^* a^\dagger a\sigma_{13}\rho] &= -ig_0^* Tr[(a a^\dagger - a^\dagger a)\sigma_{13}\rho] = \\ &= -ig_0^* Tr[\sigma_{13}\rho] = -ig_0^* \langle \sigma_{13} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Termo Δ_P :

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)\rho - \rho\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)]a\} = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{11}\rho a - a^\dagger a\rho a - \rho\sigma_{11}a + \rho a^\dagger a a] = \\
 & -i\Delta_P Tr[a\sigma_{11}\rho - a a^\dagger a\rho - a\sigma_{11}\rho + a^\dagger a a\rho] = \\
 & -i\Delta_P Tr[-a a^\dagger a\rho + a^\dagger a a\rho] = -i\Delta_P Tr[-(1 + a^\dagger a)a\rho + a^\dagger a a\rho] = \\
 & -i\Delta_P Tr[-a\rho - a^\dagger a a\rho + a^\dagger a a\rho] = -i\Delta_P Tr[-a\rho] = i\Delta_P \langle a \rangle
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Termo Δ_1 :

$$\begin{aligned}
 Tr[-i(\Delta_1\sigma_{33}\rho - \rho\Delta_1\sigma_{33})a] &= -i\Delta_1 Tr[\sigma_{33}\rho a - \rho\sigma_{33}a] = \\
 -i\Delta_1 Tr[a\sigma_{33}\rho - a\sigma_{33}\rho] &= 0
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Termo $(\Delta_1 - \Delta_2)$:

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}]a\} = \\
 -i(\Delta_1 - \Delta_2)Tr[\sigma_{22}\rho a - \rho\sigma_{22}a] &= -i(\Delta_1 - \Delta_2)Tr[a\sigma_{22}\rho - a\sigma_{22}\rho] = 0
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Considerando todos os termos, a equação total para a evolução temporal do operador do campo é dada por:

$$\begin{aligned}
 Tr(\dot{\rho}a) = \langle \dot{a} \rangle &= -\kappa \langle a \rangle - i\varepsilon^* - ig_0^* \langle \sigma_{13} \rangle + i\Delta_P \langle a \rangle \\
 \langle \dot{a} \rangle &= i(\Delta_P + i\kappa) \langle a \rangle - i\varepsilon^* - ig_0^* \langle \sigma_{13} \rangle,
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

e o complexo conjugado correspondente,

$$\langle \dot{a}^\dagger \rangle = -i(\Delta_P - i\kappa) \langle a^\dagger \rangle + i\varepsilon + ig_0 \langle \sigma_{31} \rangle. \tag{B.15}$$

Obtendo $\langle \dot{\sigma}_{12} \rangle$.

Termo γ_3 :

$$\begin{aligned}
 Tr[\gamma_3(2\sigma_{33}\rho\sigma_{33} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{12}] &= \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\rho\sigma_{33}\sigma_{12} - \sigma_{33}\rho\sigma_{12} - \rho\sigma_{33}\sigma_{12}] = \\
 \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\sigma_{12}\sigma_{33}\rho - \sigma_{12}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{12}\rho] &= 0
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Termo γ_2 :

$$\begin{aligned}
 Tr[\gamma_2(2\sigma_{22}\rho\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho - \rho\sigma_{22})\sigma_{12}] &= \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\rho\sigma_{22}\sigma_{12} - \sigma_{22}\rho\sigma_{12} - \rho\sigma_{22}\sigma_{12}] = \\
 \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\sigma_{12}\sigma_{22}\rho - \sigma_{12}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{12}\rho] &= \gamma_2 Tr[-\sigma_{12}\rho] = -\gamma_2 \langle \sigma_{12} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Termo Γ_{32} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{12}] &= \Gamma_{32}Tr[2\sigma_{23}\rho\sigma_{32}\sigma_{12} - \sigma_{33}\rho\sigma_{12} - \rho\sigma_{33}\sigma_{12}] = \\ &= \Gamma_{32}Tr[2\sigma_{32}\sigma_{12}\sigma_{23}\rho - \sigma_{12}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{12}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Termo Γ_{31} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{12}] &= \Gamma_{31}Tr[2\sigma_{13}\rho\sigma_{31}\sigma_{12} - \sigma_{33}\rho\sigma_{12} - \rho\sigma_{33}\sigma_{12}] = \\ &= \Gamma_{31}Tr[2\sigma_{31}\sigma_{12}\sigma_{13}\rho - \sigma_{12}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{12}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Termo κ :

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a)\sigma_{12}] &= \kappa Tr[2a\rho a^\dagger\sigma_{12} - a^\dagger a\rho\sigma_{12} - \rho a^\dagger a\sigma_{12}] = \\ &= \kappa Tr[2a^\dagger a\sigma_{12}\rho - a^\dagger a\sigma_{12}\rho - a^\dagger a\sigma_{12}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Considerando os termos do hamiltoniano.

Termo ε :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)\rho - \rho(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)]\sigma_{12}\} &= \\ -iTr[\varepsilon a\rho\sigma_{12} + \varepsilon^* a^\dagger\rho\sigma_{12} - \rho\varepsilon a\sigma_{12} - \rho\varepsilon^* a^\dagger\sigma_{12}] &= \\ -iTr[\varepsilon a\sigma_{12}\rho + \varepsilon^* a^\dagger\sigma_{12}\rho - \varepsilon a\sigma_{12}\rho - \varepsilon^* a^\dagger\sigma_{12}\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Termo Ω_c :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})\rho - \rho(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})]\sigma_{12}\} &= \\ -iTr[\Omega_c\sigma_{32}\rho\sigma_{12} + \Omega_c^*\sigma_{23}\rho\sigma_{12} - \rho\Omega_c\sigma_{32}\sigma_{12} - \rho\Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{12}] &= \\ -iTr[\Omega_c\sigma_{12}\sigma_{32}\rho + \Omega_c^*\sigma_{12}\sigma_{23}\rho - \Omega_c\sigma_{32}\sigma_{12}\rho - \Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{12}\rho] &= \\ -iTr[\Omega_c^*\sigma_{13}\rho] &= -i\Omega_c^*\langle\sigma_{13}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Termo g_0 :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(g_0 a\sigma_{31} + g_0^* a^\dagger\sigma_{13})\rho - \rho(g_0 a\sigma_{31} + g_0^* a^\dagger\sigma_{13})]\sigma_{12}\} &= \\ -iTr[g_0 a\sigma_{31}\rho\sigma_{12} + g_0^* a^\dagger\sigma_{13}\rho\sigma_{12} - \rho g_0 a\sigma_{31}\sigma_{12} - \rho g_0^* a^\dagger\sigma_{13}\sigma_{12}] &= \\ -iTr[g_0 a\sigma_{12}\sigma_{31}\rho + g_0^* a^\dagger\sigma_{12}\sigma_{13}\rho - g_0 a\sigma_{31}\sigma_{12}\rho - g_0^* a^\dagger\sigma_{13}\sigma_{12}\rho] &= \\ -iTr[-g_0 a\sigma_{32}\rho] &= ig_0\langle a\sigma_{32}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Termo Δ_P :

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)\rho - \rho\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)]\sigma_{12}\} = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{11}\rho\sigma_{12} - a^\dagger a\rho\sigma_{12} - \rho\sigma_{11}\sigma_{12} + \rho a^\dagger a\sigma_{12}] = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{12}\sigma_{11}\rho - a^\dagger a\sigma_{12}\rho - \sigma_{11}\sigma_{12}\rho + a^\dagger a\sigma_{12}\rho] = \\
 & -i\Delta_P Tr[-\sigma_{12}\rho] = i\Delta_P\langle\sigma_{12}\rangle
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

Termo Δ_1 :

$$\begin{aligned}
 Tr[-i(\Delta_1\sigma_{33}\rho - \rho\Delta_1\sigma_{33})\sigma_{12}] &= -i\Delta_1 Tr[\sigma_{33}\rho\sigma_{12} - \rho\sigma_{33}\sigma_{12}] = \\
 -i\Delta_1 Tr[\sigma_{12}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{12}\rho] &= 0
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Termo $(\Delta_1 - \Delta_2)$:

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}]\sigma_{12}\} = \\
 -i(\Delta_1 - \Delta_2) Tr[\sigma_{22}\rho\sigma_{12} - \rho\sigma_{22}\sigma_{12}] &= i(\Delta_2 - \Delta_1) Tr[\sigma_{12}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{12}\rho] = \\
 i(\Delta_2 - \Delta_1) Tr[\sigma_{12}\rho] &= i(\Delta_2 - \Delta_1)\langle\sigma_{12}\rangle
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

Portanto, a equação total que descreve a evolução do operador σ_{12} é:

$$\begin{aligned}
 Tr(\dot{\rho}\sigma_{12}) &= -\gamma_2\langle\sigma_{12}\rangle - i\Omega_c^*\langle\sigma_{13}\rangle + ig_0\langle a\sigma_{32}\rangle + i\Delta_P\langle\sigma_{12}\rangle + i(\Delta_2 - \Delta_1)\langle\sigma_{12}\rangle \\
 \langle\dot{\sigma}_{12}\rangle &= [-\gamma_2 + i\Delta_P + i(\Delta_2 - \Delta_1)]\langle\sigma_{12}\rangle - i\Omega_c^*\langle\sigma_{13}\rangle + ig_0\langle a\sigma_{32}\rangle \\
 \langle\dot{\sigma}_{12}\rangle &= i(\Delta_P + \Delta_2 - \Delta_1 + i\gamma_2)\langle\sigma_{12}\rangle - i\Omega_c^*\langle\sigma_{13}\rangle + ig_0\langle a\sigma_{32}\rangle
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

de maneira que,

$$\langle\dot{\sigma}_{21}\rangle = -i(\Delta_P + \Delta_2 - \Delta_1 - i\gamma_2)\langle\sigma_{21}\rangle + i\Omega_c\langle\sigma_{31}\rangle - ig_0^*\langle a^\dagger\sigma_{23}\rangle \tag{B.28}$$

Obtendo $\langle\dot{\sigma}_{13}\rangle$.

Termo γ_3 :

$$\begin{aligned}
 Tr[\gamma_3(2\sigma_{33}\rho\sigma_{33} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{13}] &= \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\rho\sigma_{33}\sigma_{13} - \sigma_{33}\rho\sigma_{13} - \rho\sigma_{33}\sigma_{13}] = \\
 \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\sigma_{13}\sigma_{33}\rho - \sigma_{13}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{13}\rho] &= \gamma_3 Tr[-\sigma_{13}\rho] = -\gamma_3\langle\sigma_{13}\rangle
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

Termo γ_2 :

$$\begin{aligned}
 Tr[\gamma_2(2\sigma_{22}\rho\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho - \rho\sigma_{22})\sigma_{13}] &= \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\rho\sigma_{22}\sigma_{13} - \sigma_{22}\rho\sigma_{13} - \rho\sigma_{22}\sigma_{13}] = \\
 \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\sigma_{13}\sigma_{22}\rho - \sigma_{13}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{13}\rho] &= 0
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

Termo Γ_{32} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{13}] &= \Gamma_{32} Tr[2\sigma_{23}\rho\sigma_{32}\sigma_{13} - \sigma_{33}\rho\sigma_{13} - \rho\sigma_{33}\sigma_{13}] = \\ &\Gamma_{32} Tr[2\sigma_{32}\sigma_{13}\sigma_{23}\rho - \sigma_{13}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{13}\rho] = \Gamma_{32} Tr[-\sigma_{13}\rho] = -\Gamma_{32}\langle\sigma_{13}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Termo Γ_{31} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{13}] &= \Gamma_{31} Tr[2\sigma_{13}\rho\sigma_{31}\sigma_{13} - \sigma_{33}\rho\sigma_{13} - \rho\sigma_{33}\sigma_{13}] = \\ &\Gamma_{31} Tr[2\sigma_{31}\sigma_{13}\sigma_{13}\rho - \sigma_{13}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{13}\rho] = \Gamma_{31} Tr[-\sigma_{13}\rho] = -\Gamma_{31}\langle\sigma_{13}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Termo κ :

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a)\sigma_{13}] &= \kappa Tr[2a\rho a^\dagger\sigma_{13} - a^\dagger a\rho\sigma_{13} - \rho a^\dagger a\sigma_{13}] = \\ &\kappa Tr[2a^\dagger a\sigma_{13}\rho - a^\dagger a\sigma_{13}\rho - a^\dagger a\sigma_{13}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Para o hamiltoniano.

Termo ε :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)\rho - \rho(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)]\sigma_{13}\} &= \\ -iTr[\varepsilon a\rho\sigma_{13} + \varepsilon^* a^\dagger\rho\sigma_{13} - \rho\varepsilon a\sigma_{13} - \rho\varepsilon^* a^\dagger\sigma_{13}] &= \\ -iTr[\varepsilon a\sigma_{13}\rho + \varepsilon^* a^\dagger\sigma_{13}\rho - \varepsilon a\sigma_{13}\rho - \varepsilon^* a^\dagger\sigma_{13}\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Termo Ω_c :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})\rho - \rho(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})]\sigma_{13}\} &= \\ -i Tr[\Omega_c\sigma_{32}\rho\sigma_{13} + \Omega_c^*\sigma_{23}\rho\sigma_{13} - \rho\Omega_c\sigma_{32}\sigma_{13} - \rho\Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{13}] &= \\ -i Tr[\Omega_c\sigma_{13}\sigma_{32}\rho + \Omega_c^*\sigma_{13}\sigma_{23}\rho - \Omega_c\sigma_{32}\sigma_{13}\rho - \Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{13}\rho] &= \\ -i Tr[\Omega_c\sigma_{12}\rho] &= -i\Omega_c\langle\sigma_{12}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Termo g_0 :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(g_0 a\sigma_{31} + g_0^* a^\dagger\sigma_{13})\rho - \rho(g_0 a\sigma_{31} + g_0^* a^\dagger\sigma_{13})]\sigma_{13}\} &= \\ -i Tr[g_0 a\sigma_{31}\rho\sigma_{13} + g_0^* a^\dagger\sigma_{13}\rho\sigma_{13} - \rho g_0 a\sigma_{31}\sigma_{13} - \rho g_0^* a^\dagger\sigma_{13}\sigma_{13}] &= \\ -i Tr[g_0 a\sigma_{13}\sigma_{31}\rho + g_0^* a^\dagger\sigma_{13}\sigma_{13}\rho - g_0 a\sigma_{31}\sigma_{13}\rho - g_0^* a^\dagger\sigma_{13}\sigma_{13}\rho] &= \\ -i Tr[g_0 a\sigma_{11}\rho - g_0 a\sigma_{33}\rho] &= -ig_0 Tr[a\sigma_{11}\rho - a\sigma_{33}\rho] = -ig_0(\langle a\sigma_{11}\rangle - \langle a\sigma_{33}\rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Termo Δ_P :

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)\rho - \rho\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)]\sigma_{13}\} = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{11}\rho\sigma_{13} - a^\dagger a\rho\sigma_{13} - \rho\sigma_{11}\sigma_{13} + \rho a^\dagger a\sigma_{13}] = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{13}\sigma_{11}\rho - a^\dagger a\sigma_{13}\rho - \sigma_{11}\sigma_{13}\rho + a^\dagger a\sigma_{13}\rho] = \\
 & \qquad \qquad \qquad -i\Delta_P Tr[-\sigma_{13}\rho] = i\Delta_P \langle \sigma_{13} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.37}$$

Termo Δ_1 :

$$\begin{aligned}
 & Tr[-i(\Delta_1\sigma_{33}\rho - \rho\Delta_1\sigma_{33})\sigma_{13}] = -i\Delta_1 Tr[\sigma_{33}\rho\sigma_{13} - \rho\sigma_{33}\sigma_{13}] = \\
 & -i\Delta_1 Tr[\sigma_{13}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{13}\rho] = -i\Delta_1 Tr[\sigma_{13}\rho] = -i\Delta_1 \langle \sigma_{13} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.38}$$

Termo $(\Delta_1 - \Delta_2)$:

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}]\sigma_{13}\} = \\
 & -i(\Delta_1 - \Delta_2) Tr[\sigma_{22}\rho\sigma_{13} - \rho\sigma_{22}\sigma_{13}] = i(\Delta_2 - \Delta_1) Tr[\sigma_{13}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{13}\rho] = \\
 & \qquad \qquad \qquad i(\Delta_2 - \Delta_1) Tr[\sigma_{13}\rho] = 0
 \end{aligned} \tag{B.39}$$

Portanto, a equação total que descreve a evolução temporal de σ_{13} é dada por:

$$\begin{aligned}
 & Tr(\dot{\rho}\sigma_{13}) = \langle \dot{\sigma}_{13} \rangle = -\gamma_3 \langle \sigma_{13} \rangle - \Gamma_{32} \langle \sigma_{13} \rangle - \Gamma_{31} \langle \sigma_{13} \rangle - i\Omega_c \langle \sigma_{12} \rangle - \\
 & \qquad \qquad \qquad -ig_0(\langle a\sigma_{11} \rangle - \langle a\sigma_{33} \rangle) + i\Delta_P \langle \sigma_{13} \rangle - i\Delta_1 \langle \sigma_{13} \rangle \\
 & \langle \dot{\sigma}_{13} \rangle = (-\gamma_3 - \Gamma_{32} - \Gamma_{31} + i\Delta_P - i\Delta_1) \langle \sigma_{13} \rangle - i\Omega_c \langle \sigma_{12} \rangle - ig_0 \langle a\sigma_{11} \rangle + ig_0 \langle a\sigma_{33} \rangle \\
 & \langle \dot{\sigma}_{13} \rangle = i[\Delta_P - \Delta_1 + i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3)] \langle \sigma_{13} \rangle - ig_0 \langle a\sigma_{11} \rangle - i\Omega_c \langle \sigma_{12} \rangle + ig_0 \langle a\sigma_{33} \rangle,
 \end{aligned} \tag{B.40}$$

e o seu complexo conjugado,

$$\langle \dot{\sigma}_{31} \rangle = -i[\Delta_P - \Delta_1 - i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3)] \langle \sigma_{31} \rangle + ig_0^* \langle a^\dagger \sigma_{11} \rangle + i\Omega_c^* \langle \sigma_{21} \rangle - ig_0^* \langle a^\dagger \sigma_{33} \rangle. \tag{B.41}$$

Obtendo $\langle \dot{\sigma}_{23} \rangle$:

Termo γ_3 :

$$\begin{aligned}
 & Tr[\gamma_3(2\sigma_{33}\rho\sigma_{33} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{23}] = \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\rho\sigma_{33}\sigma_{23} - \sigma_{33}\rho\sigma_{23} - \rho\sigma_{33}\sigma_{23}] = \\
 & \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\sigma_{23}\sigma_{33}\rho - \sigma_{23}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{23}\rho] = \gamma_3 Tr[-\sigma_{23}\rho] = -\gamma_3 \langle \sigma_{23} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.42}$$

Termo γ_2 :

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_2(2\sigma_{22}\rho\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho - \rho\sigma_{22})\sigma_{23}] &= \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\rho\sigma_{22}\sigma_{23} - \sigma_{22}\rho\sigma_{23} - \rho\sigma_{22}\sigma_{23}] = \\ \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\sigma_{23}\sigma_{22}\rho - \sigma_{23}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{23}\rho] &= \gamma_2 Tr[-\sigma_{23}\rho] = -\gamma_2\langle\sigma_{23}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Termo Γ_{32} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{23}] &= \Gamma_{32} Tr[2\sigma_{23}\rho\sigma_{32}\sigma_{23} - \sigma_{33}\rho\sigma_{23} - \rho\sigma_{33}\sigma_{23}] = \\ \Gamma_{32} Tr[2\sigma_{32}\sigma_{23}\sigma_{23}\rho - \sigma_{23}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{23}\rho] &= \Gamma_{32} Tr[-\sigma_{23}\rho] = -\Gamma_{32}\langle\sigma_{23}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Termo Γ_{31} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{23}] &= \Gamma_{31} Tr[2\sigma_{13}\rho\sigma_{31}\sigma_{23} - \sigma_{33}\rho\sigma_{23} - \rho\sigma_{33}\sigma_{23}] = \\ \Gamma_{31} Tr[2\sigma_{31}\sigma_{23}\sigma_{13}\rho - \sigma_{23}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{23}\rho] &= \Gamma_{31} Tr[-\sigma_{23}\rho] = -\Gamma_{31}\langle\sigma_{23}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Termo κ :

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a)\sigma_{23}] &= \kappa Tr[2a\rho a^\dagger\sigma_{23} - a^\dagger a\rho\sigma_{23} - \rho a^\dagger a\sigma_{23}] = \\ \kappa Tr[2a^\dagger a\sigma_{23}\rho - a^\dagger a\sigma_{23}\rho - a^\dagger a\sigma_{23}\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Para os termos do hamiltoniano.

Termo ε :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)\rho - \rho(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)]\sigma_{23}\} &= \\ -iTr[\varepsilon a\rho\sigma_{23} + \varepsilon^* a^\dagger\rho\sigma_{23} - \rho\varepsilon a\sigma_{23} - \rho\varepsilon^* a^\dagger\sigma_{23}] &= \\ -iTr[\varepsilon a\sigma_{23}\rho + \varepsilon^* a^\dagger\sigma_{23}\rho - \varepsilon a\sigma_{23}\rho - \varepsilon^* a^\dagger\sigma_{23}\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Termo Ω_c :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})\rho - \rho(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})]\sigma_{23}\} &= \\ -iTr[\Omega_c\sigma_{32}\rho\sigma_{23} + \Omega_c^*\sigma_{23}\rho\sigma_{23} - \rho\Omega_c\sigma_{32}\sigma_{23} - \rho\Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{23}] &= \\ -iTr[\Omega_c\sigma_{23}\sigma_{32}\rho + \Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{23}\rho - \Omega_c\sigma_{32}\sigma_{23}\rho - \Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{23}\rho] &= \\ -iTr[\Omega_c\sigma_{22}\rho - \Omega_c\sigma_{33}\rho] &= -i\Omega_c Tr[\sigma_{22}\rho - \sigma_{33}\rho] = -i\Omega_c(\langle\sigma_{22}\rangle - \langle\sigma_{33}\rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Termo g_0 :

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[(g_0 a \sigma_{31} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13})\rho - \rho(g_0 a \sigma_{31} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13})]\sigma_{23}\} = \\
 & -i Tr[g_0 a \sigma_{31} \rho \sigma_{23} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13} \rho \sigma_{23} - \rho g_0 a \sigma_{31} \sigma_{23} - \rho g_0^* a^\dagger \sigma_{13} \sigma_{23}] = \\
 & -i Tr[g_0 a \sigma_{23} \sigma_{31} \rho + g_0^* a^\dagger \sigma_{23} \sigma_{13} \rho - g_0 a \sigma_{31} \sigma_{23} \rho - g_0^* a^\dagger \sigma_{13} \sigma_{23} \rho] = \\
 & -i Tr[g_0 a \sigma_{21} \rho] = -i g_0 \langle a \sigma_{21} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.49}$$

Termo Δ_P :

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)\rho - \rho\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)]\sigma_{23}\} = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{11}\rho\sigma_{23} - a^\dagger a \rho \sigma_{23} - \rho\sigma_{11}\sigma_{23} + \rho a^\dagger a \sigma_{23}] = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{23}\sigma_{11}\rho - a^\dagger a \sigma_{23}\rho - \sigma_{11}\sigma_{23}\rho + a^\dagger a \sigma_{23}\rho] = 0
 \end{aligned} \tag{B.50}$$

Termo Δ_1 :

$$\begin{aligned}
 & Tr[-i(\Delta_1 \sigma_{33} \rho - \rho \Delta_1 \sigma_{33})\sigma_{23}] = -i\Delta_1 Tr[\sigma_{33} \rho \sigma_{23} - \rho \sigma_{33} \sigma_{23}] = \\
 & -i\Delta_1 Tr[\sigma_{23} \sigma_{33} \rho - \sigma_{33} \sigma_{23} \rho] = -i\Delta_1 Tr[\sigma_{23} \rho] = -i\Delta_1 \langle \sigma_{23} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.51}$$

Termo $(\Delta_1 - \Delta_2)$:

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}]\sigma_{23}\} = \\
 & -i(\Delta_1 - \Delta_2) Tr[\sigma_{22}\rho\sigma_{23} - \rho\sigma_{22}\sigma_{23}] = \\
 & -i(\Delta_1 - \Delta_2) Tr[\sigma_{23}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{23}\rho] = \\
 & -i(\Delta_1 - \Delta_2) Tr[-\sigma_{23}\rho] = i(\Delta_1 - \Delta_2)\langle \sigma_{23} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.52}$$

Portanto, a equação total que descreve a evolução do operador σ_{23} é dada por:

$$\begin{aligned}
 Tr(\dot{\rho}\sigma_{23}) = \langle \dot{\sigma}_{23} \rangle &= -\gamma_3 \langle \sigma_{23} \rangle - \gamma_2 \langle \sigma_{23} \rangle - \Gamma_{32} \langle \sigma_{23} \rangle - \Gamma_{31} \langle \sigma_{23} \rangle - i\Delta_1 \langle \sigma_{23} \rangle \\
 & - i\Omega_c(\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{33} \rangle) - ig_0 \langle a \sigma_{21} \rangle + i(\Delta_1 - \Delta_2) \langle \sigma_{23} \rangle \\
 \langle \dot{\sigma}_{23} \rangle &= [-\gamma_3 - \gamma_2 - \Gamma_{32} - \Gamma_{31} - i\Delta_1 + i(\Delta_1 - \Delta_2)] \langle \sigma_{23} \rangle \\
 & - i\Omega_c(\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{33} \rangle) - ig_0 \langle a \sigma_{21} \rangle \\
 \langle \dot{\sigma}_{23} \rangle &= i[-\Delta_2 + i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_2 + \gamma_3)] \langle \sigma_{23} \rangle - ig_0 \langle a \sigma_{21} \rangle - i\Omega_c(\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{33} \rangle),
 \end{aligned} \tag{B.53}$$

cujo complexo conjugado é dado por,

$$\langle \dot{\sigma}_{32} \rangle = -i[-\Delta_2 - i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_2 + \gamma_3)] \langle \sigma_{32} \rangle + ig_0^* \langle a^\dagger \sigma_{12} \rangle + i\Omega_c^*(\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{33} \rangle). \tag{B.54}$$

Obtendo $\langle \dot{\sigma}_{11} \rangle$.

Termo γ_3 :

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_3(2\sigma_{33}\rho\sigma_{33} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{11}] &= \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\rho\sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{33}\rho\sigma_{11} - \rho\sigma_{33}\sigma_{11}] = \\ & \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\sigma_{11}\sigma_{33}\rho - \sigma_{11}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{11}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Termo γ_2 :

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_2(2\sigma_{22}\rho\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho - \rho\sigma_{22})\sigma_{11}] &= \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\rho\sigma_{22}\sigma_{11} - \sigma_{22}\rho\sigma_{11} - \rho\sigma_{22}\sigma_{11}] = \\ & \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\sigma_{11}\sigma_{22}\rho - \sigma_{11}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{11}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Termo Γ_{32} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{11}] &= \Gamma_{32} Tr[2\sigma_{23}\rho\sigma_{32}\sigma_{11} - \sigma_{33}\rho\sigma_{11} - \rho\sigma_{33}\sigma_{11}] = \\ & \Gamma_{32} Tr[2\sigma_{32}\sigma_{11}\sigma_{23}\rho - \sigma_{11}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{11}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Termo Γ_{31} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{11}] &= \Gamma_{31} Tr[2\sigma_{13}\rho\sigma_{31}\sigma_{11} - \sigma_{33}\rho\sigma_{11} - \rho\sigma_{33}\sigma_{11}] = \\ & \Gamma_{31} Tr[2\sigma_{31}\sigma_{11}\sigma_{13}\rho - \sigma_{11}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{11}\rho] = \Gamma_{31} Tr[2\sigma_{33}\rho] = 2\Gamma_{31}\langle \sigma_{33} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

Termo κ :

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a)\sigma_{11}] &= \kappa Tr[2a\rho a^\dagger\sigma_{11} - a^\dagger a\rho\sigma_{11} - \rho a^\dagger a\sigma_{11}] = \\ & \kappa Tr[2a^\dagger a\sigma_{1123}\rho - a^\dagger a\sigma_{11}\rho - a^\dagger a\sigma_{11}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Considerando os termos do hamiltoniano.

Termo ε :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)\rho - \rho(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)]\sigma_{11}\} &= \\ -iTr[\varepsilon a\rho\sigma_{11} + \varepsilon^* a^\dagger\rho\sigma_{11} - \rho\varepsilon a\sigma_{11} - \rho\varepsilon^* a^\dagger\sigma_{11}] &= \\ -iTr[\varepsilon a\sigma_{11}\rho + \varepsilon^* a^\dagger\sigma_{11}\rho - \varepsilon a\sigma_{11}\rho - \varepsilon^* a^\dagger\sigma_{11}\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Termo Ω_c :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})\rho - \rho(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})]\sigma_{11}\} &= \\ -iTr[\Omega_c\sigma_{32}\rho\sigma_{11} + \Omega_c^*\sigma_{23}\rho\sigma_{11} - \rho\Omega_c\sigma_{32}\sigma_{11} - \rho\Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{11}] &= \\ -iTr[\Omega_c\sigma_{11}\sigma_{32}\rho + \Omega_c^*\sigma_{11}\sigma_{23}\rho - \Omega_c\sigma_{32}\sigma_{11}\rho - \Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{11}\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

Termo g_0 :

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[(g_0 a \sigma_{31} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13})\rho - \rho(g_0 a \sigma_{31} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13})]\sigma_{11}\} = \\
 & -i Tr[g_0 a \sigma_{31} \rho \sigma_{11} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13} \rho \sigma_{11} - \rho g_0 a \sigma_{31} \sigma_{11} - \rho g_0^* a^\dagger \sigma_{13} \sigma_{11}] = \\
 & -i Tr[g_0 a \sigma_{11} \sigma_{31} \rho + g_0^* a^\dagger \sigma_{11} \sigma_{13} \rho - g_0 a \sigma_{31} \sigma_{11} \rho - g_0^* a^\dagger \sigma_{13} \sigma_{11} \rho] = \\
 & -i Tr[g_0^* a^\dagger \sigma_{13} \rho - g_0 a \sigma_{31} \rho] = -i g_0^* \langle a^\dagger \sigma_{13} \rangle + i g_0 \langle a \sigma_{31} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.62}$$

Termo Δ_P :

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)\rho - \rho\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)]\sigma_{11}\} = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{11}\rho\sigma_{11} - a^\dagger a \rho \sigma_{11} - \rho\sigma_{11}\sigma_{11} + \rho a^\dagger a \sigma_{11}] = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{11}\sigma_{11}\rho - a^\dagger a \sigma_{11}\rho - \sigma_{11}\sigma_{11}\rho + a^\dagger a \sigma_{11}\rho] = 0
 \end{aligned} \tag{B.63}$$

Termo Δ_1 :

$$\begin{aligned}
 & Tr[-i(\Delta_1 \sigma_{33} \rho - \rho \Delta_1 \sigma_{33})\sigma_{11}] = -i\Delta_1 Tr[\sigma_{33} \rho \sigma_{11} - \rho \sigma_{33} \sigma_{11}] = \\
 & -i\Delta_1 Tr[\sigma_{11} \sigma_{33} \rho - \sigma_{33} \sigma_{11} \rho] = 0
 \end{aligned} \tag{B.64}$$

Termo $(\Delta_1 - \Delta_2)$:

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}]\sigma_{11}\} = \\
 & -i(\Delta_1 - \Delta_2) Tr[\sigma_{22}\rho\sigma_{11} - \rho\sigma_{22}\sigma_{11}] = -i(\Delta_1 - \Delta_2) Tr[\sigma_{11}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{11}\rho] = 0
 \end{aligned} \tag{B.65}$$

Portanto, a equação total que descreve a evolução temporal do operador σ_{11} é descrita por:

$$\begin{aligned}
 Tr(\dot{\rho}\sigma_{11}) = \langle \dot{\sigma}_{11} \rangle &= 2\Gamma_{31} \langle \sigma_{33} \rangle - i g_0^* \langle a^\dagger \sigma_{13} \rangle + i g_0 \langle a \sigma_{31} \rangle \\
 \langle \dot{\sigma}_{11} \rangle &= -i g_0^* \langle a^\dagger \sigma_{13} \rangle + i g_0 \langle a \sigma_{31} \rangle + 2\Gamma_{31} \langle \sigma_{33} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.66}$$

Obtendo $\langle \dot{\sigma}_{22} \rangle$.

Termo γ_3 :

$$\begin{aligned}
 Tr[\gamma_3(2\sigma_{33}\rho\sigma_{33} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{22}] &= \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\rho\sigma_{33}\sigma_{22} - \sigma_{33}\rho\sigma_{22} - \rho\sigma_{33}\sigma_{22}] = \\
 \gamma_3 Tr[2\sigma_{33}\sigma_{22}\sigma_{33}\rho - \sigma_{22}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{22}\rho] &= 0
 \end{aligned} \tag{B.67}$$

Termo γ_2 :

$$\begin{aligned} Tr[\gamma_2(2\sigma_{22}\rho\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho - \rho\sigma_{22})\sigma_{22}] &= \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\rho\sigma_{22}\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho\sigma_{22} - \rho\sigma_{22}\sigma_{22}] = \\ &= \gamma_2 Tr[2\sigma_{22}\sigma_{22}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{22}\rho] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Termo Γ_{32} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{32}(2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{22}] &= \\ \Gamma_{32} Tr[2\sigma_{23}\rho\sigma_{32}\sigma_{22} - \sigma_{33}\rho\sigma_{22} - \rho\sigma_{33}\sigma_{22}] &= \\ \Gamma_{32} Tr[2\sigma_{32}\sigma_{22}\sigma_{23}\rho - \sigma_{22}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{22}\rho] &= \\ \Gamma_{32} Tr[2\sigma_{33}\rho] &= 2\Gamma_{32}\langle\sigma_{33}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

Termo Γ_{31} :

$$\begin{aligned} Tr[\Gamma_{31}(2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33})\sigma_{22}] &= \\ \Gamma_{31} Tr[2\sigma_{13}\rho\sigma_{31}\sigma_{22} - \sigma_{33}\rho\sigma_{22} - \rho\sigma_{33}\sigma_{22}] &= \\ \Gamma_{31} Tr[2\sigma_{31}\sigma_{22}\sigma_{13}\rho - \sigma_{22}\sigma_{33}\rho - \sigma_{33}\sigma_{22}\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

Termo κ :

$$\begin{aligned} Tr[\kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a)\sigma_{22}] &= \kappa Tr[2a\rho a^\dagger\sigma_{22} - a^\dagger a\rho\sigma_{22} - \rho a^\dagger a\sigma_{22}] = \\ \kappa Tr[2a^\dagger a\sigma_{1123}\rho - a^\dagger a\sigma_{22}\rho - a^\dagger a\sigma_{22}\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

Para os termos do hamiltoniano.

Termo ε :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)\rho - \rho(\varepsilon a + \varepsilon^* a^\dagger)]\sigma_{22}\} &= \\ -iTr[\varepsilon a\rho\sigma_{22} + \varepsilon^* a^\dagger\rho\sigma_{22} - \rho\varepsilon a\sigma_{22} - \rho\varepsilon^* a^\dagger\sigma_{22}] &= \\ -iTr[\varepsilon a\sigma_{22}\rho + \varepsilon^* a^\dagger\sigma_{22}\rho - \varepsilon a\sigma_{22}\rho - \varepsilon^* a^\dagger\sigma_{22}\rho] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

Termo Ω_c :

$$\begin{aligned} Tr\{-i[(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})\rho - \rho(\Omega_c\sigma_{32} + \Omega_c^*\sigma_{23})]\sigma_{22}\} &= \\ -i Tr[\Omega_c\sigma_{32}\rho\sigma_{22} + \Omega_c^*\sigma_{23}\rho\sigma_{22} - \rho\Omega_c\sigma_{32}\sigma_{22} - \rho\Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{22}] &= \\ -i Tr[\Omega_c\sigma_{22}\sigma_{32}\rho + \Omega_c^*\sigma_{22}\sigma_{23}\rho - \Omega_c\sigma_{32}\sigma_{22}\rho - \Omega_c^*\sigma_{23}\sigma_{22}\rho] &= \\ -i Tr[\Omega_c^*\sigma_{23}\rho - \Omega_c\sigma_{32}\rho] &= -i\Omega_c^*\langle\sigma_{23}\rangle + i\Omega_c\langle\sigma_{32}\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

Termo g_0 :

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[(g_0 a \sigma_{31} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13})\rho - \rho(g_0 a \sigma_{31} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13})]\sigma_{22}\} = \\
 & -i Tr[g_0 a \sigma_{31} \rho \sigma_{22} + g_0^* a^\dagger \sigma_{13} \rho \sigma_{22} - \rho g_0 a \sigma_{31} \sigma_{22} - \rho g_0^* a^\dagger \sigma_{13} \sigma_{22}] = \\
 & -i Tr[g_0 a \sigma_{22} \sigma_{31} \rho + g_0^* a^\dagger \sigma_{22} \sigma_{13} \rho - g_0 a \sigma_{31} \sigma_{22} \rho - g_0^* a^\dagger \sigma_{13} \sigma_{22} \rho] = 0
 \end{aligned} \tag{B.74}$$

Termo Δ_P :

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)\rho - \rho\Delta_P(\sigma_{11} - a^\dagger a)]\sigma_{22}\} = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{11}\rho\sigma_{22} - a^\dagger a \rho \sigma_{22} - \rho\sigma_{11}\sigma_{22} + \rho a^\dagger a \sigma_{22}] = \\
 & -i\Delta_P Tr[\sigma_{22}\sigma_{11}\rho - a^\dagger a \sigma_{22} \rho - \sigma_{11}\sigma_{22}\rho + a^\dagger a \sigma_{22} \rho] = 0
 \end{aligned} \tag{B.75}$$

Termo Δ_1 :

$$\begin{aligned}
 Tr[-i(\Delta_1 \sigma_{33} \rho - \rho \Delta_1 \sigma_{33})\sigma_{22}] &= -i\Delta_1 Tr[\sigma_{33} \rho \sigma_{22} - \rho \sigma_{33} \sigma_{22}] = \\
 & -i\Delta_1 Tr[\sigma_{22} \sigma_{33} \rho - \sigma_{33} \sigma_{22} \rho] = 0
 \end{aligned} \tag{B.76}$$

Termo $(\Delta_1 - \Delta_2)$:

$$\begin{aligned}
 & Tr\{-i[(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}\rho - \rho(\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}]\sigma_{22}\} = \\
 & -i(\Delta_1 - \Delta_2) Tr[\sigma_{22}\rho\sigma_{22} - \rho\sigma_{22}\sigma_{22}] = -i(\Delta_1 - \Delta_2) Tr[\sigma_{22}\sigma_{22}\rho - \sigma_{22}\sigma_{22}\rho] = 0
 \end{aligned} \tag{B.77}$$

Portanto, a equação total que descreve a evolução temporal do operador atômico σ_{22} é dada por:

$$\begin{aligned}
 Tr(\dot{\rho}\sigma_{22}) = \langle \dot{\sigma}_{22} \rangle &= 2\Gamma_{32}\langle \sigma_{33} \rangle - i\Omega_c^* \langle \sigma_{23} \rangle + i\Omega_c \langle \sigma_{32} \rangle \\
 \langle \dot{\sigma}_{22} \rangle &= -i\Omega_c^* \langle \sigma_{23} \rangle + i\Omega_c \langle \sigma_{32} \rangle + 2\Gamma_{32}\langle \sigma_{33} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.78}$$

Obtendo $\langle \dot{\sigma}_{33} \rangle = -\langle \dot{\sigma}_{11} \rangle - \langle \dot{\sigma}_{22} \rangle$:

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{\sigma}_{33} \rangle &= -(-ig_0^* \langle a^\dagger \sigma_{13} \rangle + ig_0 \langle a \sigma_{31} \rangle + 2\Gamma_{31} \langle \sigma_{33} \rangle) - (-i\Omega_c^* \langle \sigma_{23} \rangle + i\Omega_c \langle \sigma_{32} \rangle + 2\Gamma_{32} \langle \sigma_{33} \rangle) \\
 \langle \dot{\sigma}_{33} \rangle &= ig_0^* \langle a^\dagger \sigma_{13} \rangle - ig_0 \langle a \sigma_{31} \rangle + i\Omega_c^* \langle \sigma_{23} \rangle - i\Omega_c \langle \sigma_{32} \rangle - 2(\Gamma_{31} + \Gamma_{32}) \langle \sigma_{33} \rangle
 \end{aligned} \tag{B.79}$$

Síntese dos operadores

Como as frequências de Rabi do sistema são descritas por valores reais, de maneira que $g_0 = g_0^*$, $\varepsilon = \varepsilon^*$ e $\Omega_c = \Omega_c^*$, as equações de valores médios de Heisenberg, conforme apresentado na seção 4, são dadas por:

$$\langle \dot{a} \rangle = i(\Delta_P + i\kappa)\langle a \rangle - i\varepsilon - ig_0\langle \sigma_{13} \rangle, \quad (\text{B.80})$$

$$\langle \dot{\sigma}_{12} \rangle = i(\Delta_P + \Delta_2 - \Delta_1 + i\gamma_2)\langle \sigma_{12} \rangle - i\Omega_c\langle \sigma_{13} \rangle + ig_0\langle a\sigma_{32} \rangle, \quad (\text{B.81})$$

$$\langle \dot{\sigma}_{13} \rangle = i[\Delta_P - \Delta_1 + i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_3)]\langle \sigma_{13} \rangle - ig_0(\langle a\sigma_{11} \rangle - \langle a\sigma_{33} \rangle) - i\Omega_c\langle \sigma_{12} \rangle, \quad (\text{B.82})$$

$$\langle \dot{\sigma}_{23} \rangle = i[-\Delta_2 + i(\Gamma_{31} + \Gamma_{32} + \gamma_2 + \gamma_3)]\langle \sigma_{23} \rangle - ig_0\langle a\sigma_{21} \rangle - i\Omega_c(\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{33} \rangle), \quad (\text{B.83})$$

$$\langle \dot{\sigma}_{11} \rangle = ig_0(\langle a^\dagger\sigma_{13} \rangle + \langle a\sigma_{31} \rangle) + 2\Gamma_{31}\langle \sigma_{33} \rangle, \quad (\text{B.84})$$

$$\langle \dot{\sigma}_{22} \rangle = i\Omega_c(\langle \sigma_{32} \rangle - \langle \sigma_{23} \rangle) + 2\Gamma_{32}\langle \sigma_{33} \rangle, \quad (\text{B.85})$$

$$\langle \dot{\sigma}_{33} \rangle = ig_0(\langle a^\dagger\sigma_{13} \rangle - \langle a\sigma_{31} \rangle) + i\Omega_c(\langle \sigma_{23} \rangle - \langle \sigma_{32} \rangle) - 2(\Gamma_{31} + \Gamma_{32})\langle \sigma_{33} \rangle. \quad (\text{B.86})$$