Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

SOLUÇÕES POSITIVAS PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS COM OPERADORES FRACIONÁRIOS

Diana Yovani Rodriguez Villena

Orientador: Francisco Odair Vieira de Paiva

São Carlos
Março de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Soluções Positivas para Equações Elípticas com Operadores Fracionários

Diana Yovani Rodriguez Villena

Bolsista Capes

Orientador: Francisco Odair Vieira de Paiva

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos

Março de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Diana Yovani Rodriguez Villena, realizada em 18/03/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva (UFSCar)

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFSCar)

Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi (UFSCar)

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (UFPB)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros (UFPB)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

À minha família.

dedico.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por me conceder a graça de concluir mais esta etapa, por ter me fortalecido nos momentos difíceis e pelas pessoas que colocou no meu caminho.

Aos meus amados pais, pela excelente educação e por serem os exemplos da minha vida, pessoas que eu me orgulho e admiro muito por tudo que são e representam para mim.

Às minhas irmãs que, com amor, me apoiam, incentivam e sempre estão presentes em todos os momentos da minha vida.

À minha avó e às minhas tias, que sempre estiveram ao meu lado me apoiando e me incentivando em todas as minhas decisões.

Ao Professor Francisco Odair, pela confiança, pela paciência e exigência necessárias, pelos valiosos conhecimentos transmitidos e, principalmente, pela importante ajuda para tornar este trabalho realidade.

Aos professores da banca Everaldo Souto de Medeiros, João Marcos Bezerra do Ó, Olimpio Hiroshi Miyagaki e Rafael Fernando Barostichi, pelas correções e valiosas sugestões.

A Marco pelo amor e companheirismo.

Agradeço a todos os amigos do doutorado que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos resultados de existência, não existência e multiplicidade de soluções positivas de problemas elípticos envolvendo o operador p-Laplaciano fracionário e o Laplaciano fracionário no caso crítico, por meio de métodos variacionais, sub-super solução e Teorema do Passo da Montanha.

Palavras chave: p-Laplaciano fracionário, Laplaciano fracionário, método de sub-supersolução, métodos variacionais, expoente crítico.

Abstract

In this work, we present results of existence, non-existence and multiplicity of positive solutions to elliptic problems involving the fractional p-Laplacian operator and the fractional Laplacian in the critical case, through variational methods, sub-super solutions and Mountain Pass Theorem.

Keywords: Fractional p-Laplacian, fractional Laplacian, sub-supersolution method, variational methods, critical exponent.

Notações

Ω	Representa um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave.
Ω^+	$\{x \in \Omega : a(x) > 0\}$.
Ω^-	$\{x \in \Omega : a(x) < 0\}$.
$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$	Denota o espaço das funções suaves com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$.
$\lvert u\rvert_p$	Denota a norma em L^p.
$[u]_{s,p}$	Representa a seminorma de Gagliardo.
$H^s(\mathbb{R}^N)$	Denota o espaço de Sobolev fracionário com $p = 2$.
$W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$	É espaço de Sobolev fracionário.
$\lVert u\rVert_{s,p}$	Denota a norma do espaço de Sobolev fracionário
$X_p^s(\Omega)$	É o subespaço de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ das funções com suporte em Ω.
$X_0^s(\Omega)$	Denota o subespaço de $H^s(\mathbb{R}^N)$ das funções com suporte em Ω.
$\lvert\lvert u\rvert\rvert$	Denota a norma do espaço $X_p^s(\Omega)$.
p_s^*	Denota o expoente de Sobolev crítico fracionário.

Conteúdo

Introdução

Nosso objetivo neste trabalho é estudar existência, não existência e multiplicidade de soluções positivas para equações elípticas envolvendo o operador p-Laplaciano fracionário $(-\Delta_p)^s$. O operador p-Laplaciano fracionário é um operador não-linear, não-local definido sobre funções suaves por

$$(-\Delta_p)^s\varphi(x) = 2\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B\varepsilon(x)} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^{p-2}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dy, \qquad x\in\mathbb{R}^N$$

sendo $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < \varepsilon\}$ e $s \in (0,1)$. Está definição é consistente, a menos de uma constante normalizada dependendo de N e s, com o operador Laplaciano fracionário linear $(-\Delta_p)^s$ no caso $p = 2$. Para as motivações que levam ao estudo de tais operadores ver [34] e [27].

O p-Laplaciano fracionário é um operador que aparece em muitas aplicações, tais como: fase de transição, processamento de imagens, mecânica contínua, teoria dos jogos, entre outros, ver Andreu-Mazón-Rossi-Toledo [2] e suas referências.

Nesta tese, primeiramente, estudamos a seguinte equação

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u = \lambda|u|^{p-2}u + a(x)u^{q-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N\setminus\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $1 < p < q < p_s^*, N > sp$, $a : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua que muda de sinal e

$$p_s^* = \frac{pN}{N-sp},$$

é o expoente de Sobolev crítico fracionário.

O segundo problema que abordamos é o seguinte

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda |u|^{p-2}u + a(x)|u|^{q-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, suave com $1 < p < q < p_s^*$, $s \in (0,1)$, λ é um parâmetro real, $a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que muda de sinal e $V \in L^r(\Omega)$ com $r > N/(ps)$.

O terceiro problema que estudamos envolve o operador Laplaciano fracionário no caso crítico

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u = \lambda u + a(x)u^{2_s^*-1} & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $N > 2s$, $V \in L^r(\Omega)$ com $r > \frac{N}{2s}$, a é uma função contínua que muda de sinal em $\overline{\Omega}$ e

$$2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$$

é o expoente de Sobolev crítico fracionário, λ é um parâmetro real.

O espaço de funções em que procuramos soluções é o subespaço linear fechado do espaço de Sobolev frácionario, a saber

$$X_p^s(\Omega) = \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : u = 0 \ \text{ a.e em } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \right\}.$$

Este tipo de problemas tem sido objeto de estudo por diversos pesquisadores. O problema de p-autovalores fracionário para (0.1) foi estudado nos artigos Brasco-Parini [9], Franzina-Palatucci [21] e Lindgren-Linqvist [32]. Del Pezzo, Fernández e López estudaram o problema de autovalores para os problemas (0.2) e (0.3). Os resultados de regularidade foram obtidos por Di Castro-Kuusi-Palatucci em [11], Iannizzotto-Mosconi-Squassina [26], Kuusi-Mingione-Sire [30] e Lindgre [31]. Resultados da existência e multiplicidade para problemas quasilineares com p-Laplaciano fracionário foi investigado por Iannizzotto-Liu-Perera-Squassina [27], Perera-Squassina-Yang [37] e Xiang-Zhang-Radulescu [43].

Problemas elípticos superlineares com non-linearidades indefinidas no caso não coercivo tem sido extensamente estudados. O problema (0.1) com $s = 1$ e $p = 2$, ou seja, no caso do Laplaciano, foi estudado em [1, 4, 5, 35]. O caso envolvendo o operador p-Laplaciano, i.e. $s = 1$ em (0.1), foi estudado em [6, 28, 17]. Para $\Omega = \mathbb{R}^N$ o problema (0.1) com p-Laplaciano foi estudado em [19] e para a equação de quarta ordem no artigo [13].

Em [25], Goyal e Sreenadh estudaram a existência e multiplicidade de soluções positivas do problema

$$\begin{cases} -2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)-u(x)|^{p-2}(u(y)-u(x))}{|x-y|^{n+ps}}dy = \lambda|u|^{p-2}u + a(x)|u|^{q-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{0.4}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $N > ps$, $p \geq 2$, $\lambda > 0$, $p < q < p_s^*$ e $a : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que muda de sinal. Os autores usaram análise da aplicação fibração e variedade de Nehari para obter resultados locais, mostraram a existência de duas soluções positivas para a equação (0.4) quando $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \delta$, para algum $\delta > 0$.

Um resultado de existência no caso semilinear $p = 2$, foi obtido por Fu-Li em [23]. Em [23], os autores provaram que existe $\lambda' > \lambda_1$ tal que (0.1) tem uma solução positiva para $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda'$ e não tem soluções positivas para $\lambda > \lambda'$. Resultados sobre existência e multiplicidade de soluções não negativas não triviais para o problema (0.2) com $s = 1$ e $V \in L^\infty(\Omega)$ nos casos sub-crítico e crítico, foi obtido por I. Birindelli e F. Demengel em [6]. A equação (0.3) com $s = 1$ e $p = 2$ foi estudado em [5], os autores utilizaram métodos variacionais para obter resultados de existência de soluções.

Nossa motivação para o estudo do problema (0.1) foi partir dos resultados de Fu-Li em [23], neste trabalho estendemos e melhoramos esses resultados obtendo uma segunda solução para este problema. O estudo de existência e multiplicidade de soluções para os problemas (0.2) e (0.3) visa estender alguns resultados obtidos em [6] e [5].

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos os conceitos preliminares sobre os espaços de Sobolev fracionário, definições dos operadores p-Laplaciano fracionário e Laplaciano fracionário, destacamos alguns teoremas tais como de imersão, regularidade, densidade e o teorema de sub-super solução.

O Capítulo 2 é destinado ao estudo do problema (0.1), neste capítulo provamos os resultados de existência e não existência de soluções para a equação (0.1). Aplicamos a desigualdade de Picone, baseado nas ideias dos artigos [1], [6] e [16]; e usamos o método de sub-super solução com o Teorema do Passo da Montanha para obter resultados de multiplicidade. A prova deste resultado segue argumentos similares aos feitos em [1].

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo do problema (0.2). Demonstramos resultados de existência e não existência de soluções por meio do método de sub-super solução. Em seguida apresentamos resultados de multiplicidade, obtemos soluções da equação (0.2) como os mínimos dos problemas variacionais

$$\alpha_{\lambda,q} = \inf_{u\in X_p^s(\Omega)} \left\{ \|u\|^p + \int_\Omega (V-\lambda)|u|^p : \int_\Omega a\,|u|^q = -1 \right\}$$

e

$$\beta_{\lambda,q} = \inf_{u\in X_p^s(\Omega)} \left\{ \|u\|^p + \int_\Omega (V-\lambda)|u|^p : \int_\Omega a\,|u|^q = 1 \right\}.$$

As técnicas variacionais utilizadas em [6] serviram de fonte de inspiração para o estudo do problema (0.2) neste capítulo.

No Capítulo 4, primeiramente demonstramos condições necessárias para a existência de soluções utilizando uma desigualdade similar à desigualdade de Picone para o Laplaciano fracionário. Uma das principais dificuldades no estudo deste problema é a perda de compacidade, ou seja, a condição de Palais-Smale não se satisfaz. Para superar essa dificuldade usamos o Princípio de Concentração e Compacidade estabelecido por P.L. Lions em [33]. Provamos resultados de multiplicidade de soluções do problema (0.3) por meio de métodos variacionais, mais precisamente, consideramos os seguintes problemas de minimização

$$\alpha_\lambda = \inf_{u \in X_0^s(\Omega)} \left\{ \|u\|^2 + \int_\Omega (V - \lambda)|u|^2 : \int_\Omega a\,|u|^{2_s^*} = -1 \right\}$$

e

$$\beta_\lambda = \inf_{u \in X_0^s(\Omega)} \left\{ \|u\|^2 + \int_\Omega (V - \lambda)|u|^2 : \int_\Omega a\,|u|^{2_s^*} = 1 \right\},$$

e mostramos que as soluções da equação (0.3) são obtidas como os mínimos de α_λ e β_λ; a prova deste resultado foi baseada sobre as ideias de [6].

Finalmente no Apêndice listamos alguns resultados auxiliares utilizados ao longo deste trabalho.

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo relatamos alguns resultados de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Faremos uma breve revisão de alguns tópicos relacionados com os espaços de Sobolev fracionários, método de sub-super solução, definimos o operador Laplaciano e p-Laplaciano fracionário e apresentamos algumas de suas propriedades.

1.1 Espaços de Sobolev fracionários

Para qualquer função mensurável $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $1 < p < \infty$ definimos a seminorma de Gagliardo por

$$[u]_{s,p} = \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, para $p = 2$, temos

$$[u]_s = [u]_{s,2} = \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy \right)^{1/2}.$$

Definição 1.1.1. *Seja $s \in (0,1)$ e $p \in [1, \infty)$. Definimos o espaço de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ como*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N) : [u]_{s,p} < \infty \right\}.$$

Em particular, para $p = 2$, definimos o espaço de Sobolev fracionário como

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : [u]_s < \infty \right\}.$$

Teorema 1.1.2. *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$. O espaço de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ munido com a norma*

$$\|u\|_{s,p} = \left(|u|_p^p + [u]_{s,p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1}$$

onde $|.|_p$ denota a norma em $L^p(\mathbb{R}^N)$, é um espaço de Banach.

Prova. Ver [18, Proposição 4.24].

Proposição 1.1.3. *Seja $p \in [1,\infty)$, $0 < s \leq s' < 1$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, então*

$$\|u\|_{s,p} \leq C\|u\|_{s',p},$$

para alguma constante adequada $C = C(N,s,p) \geq 1$. Em particular

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$$

Prova. Ver [34, Proposição 2.1].

Teorema 1.1.4. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [0,\infty)$ tal que $sp < n$. Se Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, então existe uma constante positiva $C = C(n,p,q,s,\Omega)$ tal que para toda $w \in W^{s,p}(\Omega)$ temos*

$$|u|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

para todo $q \in [1,p_s^*]$, ou seja, $W^{s,p}(\Omega)$ estão continuamente imersos em $L^q(\Omega)$, com $q \in [1,p_s^*]$ e é uma imersão compacta para $q \in [1,p_s^*)$.

Prova. Ver [34, Teorema 6.7 e Corolário 7.2].

Assim como no caso clássico em que se s é um número inteiro, toda função no espaço de Sobolev fracionário pode ser aproximada por uma sequência de funções infinitamente diferenciáveis.

Proposição 1.1.5. *Para todo $s \in (0,1)$, o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções suaves com suporte compacto é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Prova. A demonstração se pode encontrar em [18, Proposição 4.27].

Seja $W_0^{s,p}(\Omega)$ denotando o fecho das funções $C_c^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{s,p}$ definida em (1.1). Da Proposição 1.1.5, segue que $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Porém em geral, para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$W_0^{s,p}(\Omega) \neq W^{s,p}(\Omega),$$

ou seja, o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ não é denso em $W^{s,p}(\Omega)$.

Os problemas a serem considerados neste trabalho envolvem Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e condição de fronteira de Dirichlet. A seguir introduziremos o subespaço linear fechado do espaço de Sobolev frácionario $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$X_p^s(\Omega) = \left\{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : u = 0 \ \text{ a.e em } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\right\},$$

com a norma $\|\,.\,\| = [\,.\,]_{s,p}$. Em particular, para $s = 2$ definimos

$$X_0^s(\Omega) = \left\{u \in H^s(\mathbb{R}^N) : u = 0 \ \text{ a.e em } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\right\},$$

dotado com a norma

$$\|\,.\,\| = [\,.\,]_s.$$

Teorema 1.1.6. *O espaço $X_p^s(\Omega) = (X_p^s(\Omega), \|\,.\,\|)$ é um espaço de Banach uniformemente convexo. Em particular, $X_p^s(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Seja $1 < p < \infty$. Pelo Teorema 7.1 em [34], temos que $X_p^s(\Omega)$ é um espaço de Banach. A seguir provaremos que $X_p^s(\Omega)$ é uniformemente convexo. Considere a função

$$F : X_p^s(\Omega) \to L^p(\mathbb{R}^{2N})$$

para cada $w \in X_p^s(\Omega)$ e $x, y \in \mathbb{R}^{2N}$, definida como

$$F(w)(x,y) = \frac{w(x) - w(y)}{|x-y|^{n+sp}}.$$

Note que, F é uma isometria linear, pois

$$\begin{aligned} |F(w)|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} &= \left(\frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\right)^{1/p} \\ &= \|w\|_{X_p^s(\Omega)} \quad \text{para cada} \ \ w \in X_p^s(\Omega). \end{aligned}$$

Afirmação 1. *$F(X_p^s(\Omega))$ é uniformemente convexo.*

De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $f, g \in F(X_p^s(\Omega))$, tais que

$$\begin{aligned} |f|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} &\leq 1 \\ |g|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} &\leq 1 \ \text{ e} \\ |f-g|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} &> \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $F(X_p^s(\Omega)) \subset L^p(\mathbb{R}^{2N})$, então $f, g \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$ e já que $L^p(\mathbb{R}^{2N})$ é uniformemente convexo, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} < 1 - \delta.$$

Logo, $F(X_p^s(\Omega))$ é uniformemente convexo.
Finalmente, provaremos que $X_p^s(\Omega)$ é uniformemente convexo. De fato, consideremos que $\varepsilon > 0$ e $w, v \in X_p^s(\Omega)$ satisfazendo

$$\|w\| \leq 1, \ \|v\| \leq 1 \ \text{ e } \ \|w - v\| > \varepsilon.$$

Como F é uma isometria, seque que

$$\|F(w)\| \leq 1, \ \ \|F(v)\| \leq 1.$$

Como F é linear, então

$$\begin{aligned} |F(w) - F(v)| &= |F(w - v)| \\ &= \|w - v\| > \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, pela convexidade uniforme de $F(X_p^s(\Omega))$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{F(w) - F(v)}{2} \right|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} < 1 - \delta,$$

e pela isometria, temos

$$\left| \frac{F(w) - F(v)}{2} \right|_{L^p(\mathbb{R}^{2N})} = \left\| \frac{w - v}{2} \right\|.$$

Portanto, $X_p^s(\Omega)$ é uniformemente convexo. □

A seguir apresentamos os Teoremas de imersão dos espaços $X_p^s(\Omega)$ nos espaços de Lebesgue. Lembramos que o expoente crítico de Sobolev fracionário p_s^* é dado por

$$p_s^* = \frac{Np}{N - sp}.$$

Como $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto limitado com fronteira suave, temos que o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $X_0^s(\Omega)$:

Teorema 1.1.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto com fronteira contínua. Então para todo $u \in X_0^s(\Omega)$ existe uma sequência $\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|\rho_\varepsilon - u\| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, ou seja, $C_0^\infty(\Omega)$ é um subespaço denso de $X_0^s(\Omega)$.*

Prova. Ver [20, Teorema 6].

Teorema 1.1.8. *A imersão $X_p^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua se $q \in [1, p_s^*]$ e é uma imersão compacta se $q \in [1, p_s^*)$. Em particular, existe uma constante $C > 0$ que depende só de N e s, tal que para todo $v \in X_0^s(\Omega)$*

$$|v|_{2_s^*}^2 \leq C\|v\|^2.$$

Prova. Ver [34], Teorema 6.5 e Teorema 7.1.

Lema 1.1.9. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $X_p^s(\Omega)$, então existe $u \in X_p^s(\Omega)$ e uma subsequência (u_{n_k}) a qual denotamos por (u_n), tal que valem as seguintes convergências:*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \ \text{ em } \ X_p^s(\Omega), \\ u_n &\to u \quad \text{em} \ \ L^p(\Omega), \ \ \text{para } 1 \leq q < p_s^*, \\ u_n(x) &\to u(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega. \end{aligned}$$

Prova. Como (u_n) é uma sequência limitada e $X_p^s(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, pelo Teorema 5.0.8, existe uma subsequência na qual denotaremos por (u_n) e $u \in X_p^s(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $X_p^s(\Omega)$. Logo pela imersão compacta de $X_p^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, segue que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema 4.9 em [10], concluímos que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω. □

1.2 O operador p-Lapaciano fracionário

Seja $p \in (1, +\infty)$, $s \in (0,1)$, $N > sp$, o operador p-Laplaciano fracionário $(-\Delta_p)^s$ é um operador não-linear, não-local definido sob funções suaves por

$$(-\Delta_p)^s \varphi(x) = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B\varepsilon(x)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^{p-2}(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}} dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Está definição é consistente, até uma constante normalizada dependendo de N e s, com o operador Laplaciano fracionário linear $(-\Delta_p)^s$ no caso $p = 2$. Para as motivações que levam ao estudo de tais operadores ver [34] e [27]. Devido ao caráter não-local do operador é natural trabalhar no espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e expressar a condição de Dirichlet em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ ao invés de $\partial\Omega$. Definimos variacionalmente o p-Laplaciano fracionário como o operador não-linear $(-\Delta_p)^s : X_p^s(\Omega) \to (X_p^s(\Omega))^*$, onde $(X_p^s(\Omega))^*$ o espaço dual de $X_p^s(\Omega)$, dado por:

$$\langle (-\Delta_p)^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy,$$

para $u, v \in X_p^s(\Omega)$. Além disso,

$$\langle (-\Delta_p)^s u, u\rangle = \|u\|^p, \quad \forall\, u \in X_p^s(\Omega).$$

O próximo lema nos será útil no Capítulo 2, para mostrarmos que o funcional J_λ satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale, a demonstração pode ser encontrada em [[22], Lema 2.1].

Lema 1.2.1. *O operador $(-\Delta_p)^s : X_p^s(\Omega) \to (X_p^s(\Omega))^*$ é monótono, contínuo e um $(S)_+$operador, ou seja Se $u_n \rightharpoonup u$ em $X_p^s(\Omega)$ e*

$$\limsup_{n\to\infty} \langle (-\Delta_p)^s u_n, u_n - u\rangle \leq 0,$$

então $u_n \to u$ em $X_p^s(\Omega)$.

Teorema 1.2.2. *O espaço $X_0^s(\Omega) = (X_0^s(\Omega), \|\,.\,\|)$ é um espaço de Hilbert com produto interno*

$$\langle (-\Delta)^s u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))\,(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2S}} dxdy.$$

Prova. Ver [7, Lema 1.29].

1.3 Problemas quase-lineares

Este operador leva naturalmente ao estudo do problema quase-linear

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde f é uma função de Carathéodory sobre $\Omega \times \mathbb{R}$ satisfazendo uma condição de crescimento

$$|f(x,t)| \leq C\left(|t|^{r-1} + 1\right) \quad \forall\ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

para alguma constante $C > 0$ e $r \in (1, p_s^*]$. Seja $I : X_p^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional associado ao problema (1.2), dado por

$$I(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

para todo $u \in X_p^s(\Omega)$, onde $F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt$.

Definição 1.3.1. *Dizemos que $u \in X_p^s(\Omega)$ é uma solução fraca de* (1.2)*, se $I'(u)\varphi = 0$ para todo $\varphi \in X_p^s(\Omega)$.*

O seguinte resultado mostra que as soluções fracas do problema (1.2) são limitadas em $L^\infty(\Omega)$ e a demonstração pode ser encontrada em [[27], Teorema 3.1].

Teorema 1.3.2. *Se f satisfaz a condição* (1.3) *e $u \in X_p^s(\Omega)$ é uma solução fraca da equação* (1.2)*, então $u \in L^\infty(\Omega)$.*

Para a demonstração do Teorema acima no caso $p = 2$, ver [[26], Teorema 3.2].

1.4 Método de sub-supersolução

Definição 1.4.1. *Dizemos que $u \in X_p^s(\Omega)$ é uma supersolução (subsolução) fraca de* (1.2) *se $u \geq 0$ a.e em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e satisfaz a seguinte desigualdade para todo $v \in X_p^s(\Omega)$*

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \geq (\leq) \int_\Omega fvdx.$$

É claro que, $u \in X_p^s(\Omega)$ é uma solução fraca da equação (1.2) se ao mesmo tempo é uma subsolução e uma supersolução fraca.

A seguir, fornecemos o seguinte resultado de sub-supersolução correspondentes ao problema (1.2), a prova es adaptada da Proposição 3.1 em [15] que lida com a equação elíptica (1.2) com p-Laplaciano.

Lema 1.4.2. *Suponha que $\underline{u}$ e $\overline{u}$ são subsolução e supersolução da equação* (1.2)*, respetivamente. Então*

$$\inf_{u \in M} I(u), \quad M = \{u \in X_p^s(\Omega) : \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \text{ a.e. } x \in \Omega\},$$

é alcançado em uma solução de (1.2).

Demonstração. Note que, $X_p^s(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e M é fechado e convexo, assim M é fracamente fechado. Como I é um funcional coercivo em M e fracamente semicontínuo inferiormente, então o ínfimo de I sob M é alcançado em algum u.

A seguir, provaremos que u é uma solução fraca da equação (1.2). Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ e defina

$$v_\varepsilon := \min\{\overline{u}, \max\{\underline{u}, u + \varepsilon\phi\}\} = u + \varepsilon\phi - \phi^\varepsilon + \phi_\varepsilon,$$

onde

$$\phi^\varepsilon := \max\{0, u + \varepsilon\phi - \overline{u}\}$$

e

$$\phi^\varepsilon := -\min\{0, u + \varepsilon\phi - \underline{u}\}.$$

Desde que M é convexo, segue que $(1-t)u + tv_\varepsilon \in M$. Além disso, como u minimiza I sobre M, tem-se

$$I(u) \leq I\left((1-t)u + tv_\varepsilon\right),$$

então

$$I\left(u + t(v_\varepsilon - u)\right) - I(u) \geq 0,$$

I é diferenciavél na direção $v_\varepsilon - u$ e tomando $t > 0$, obtemos que

$$I'(u) \cdot (v_\varepsilon - u) = \lim_{t \to 0^+} \frac{I\left(u + t(v_\varepsilon - u)\right) - I(u)}{t} \geq 0.$$

Logo, segue que

$$0 \leq \langle I'(u), v_\varepsilon - u\rangle = \langle I'(u), \varepsilon\phi - \phi^\varepsilon + \phi_\varepsilon\rangle = \varepsilon\,\langle I'(u), \phi\rangle - \langle I'(u), \phi^\varepsilon\rangle + \langle I'(u), \phi_\varepsilon\rangle\,.$$

Daí, concluímos que

$$\langle I'(u), \phi\rangle \geq \frac{\langle I'(u), \phi^\varepsilon\rangle - \langle I'(u), \phi_\varepsilon\rangle}{\varepsilon}. \tag{1.4}$$

Como $\overline{u}$ é uma supersolução da equação (1.2), temos

$$\begin{aligned}
\langle I'(u), \phi^{\varepsilon}\rangle &= \langle I'(\overline{u}) + I'(u) - I'(\overline{u}), \phi^{\varepsilon}\rangle \\
&= \langle I'(\overline{u}), \phi^{\varepsilon}\rangle + \langle I'(u) - I'(\overline{u}), \phi^{\varepsilon}\rangle \\
&\geq \langle I'(u) - I'(\overline{u}), \phi^{\varepsilon}\rangle \\
&= \langle (-\Delta_p)^s u - (-\Delta_p)^s \overline{u}, \phi^{\varepsilon}\rangle_{X_p^s(\Omega)} - \int_{\Omega} [f(x,u) - f(x,\overline{u})]\, \phi^{\varepsilon}\, dx \\
&= \langle (-\Delta_p)^s u - (-\Delta_p)^s \overline{u}, \phi^{\varepsilon}\rangle_{X_p^s(\Omega_\varepsilon)} - \int_{\Omega_\varepsilon} [f(x,u) - f(x,\overline{u})]\, \phi^{\varepsilon}\, dx \\
&\geq \langle (-\Delta_p)^s u - (-\Delta_p)^s \overline{u}, u + \varepsilon\phi - \overline{u}\rangle_{X_p^s(\Omega_\varepsilon)} - \int_{\Omega_\varepsilon} [|f(x,u) - f(x,\overline{u})|]\,(u + \varepsilon\phi - \overline{u}) dx \\
&\geq \langle (-\Delta_p)^s u - (-\Delta_p)^s \overline{u}, \varepsilon\phi\rangle_{X_p^s(\Omega_\varepsilon)} + \langle (-\Delta_p)^s u - (-\Delta_p)^s \overline{u}, u - \overline{u}\rangle - \\
&\quad \int_{\Omega_\varepsilon} [|f(x,u) - f(x,\overline{u})||\varepsilon\phi| - |f(x,u) - f(x,\overline{u})||u - \overline{u}|]\, dx \\
&\geq \varepsilon \langle (-\Delta_p)^s u - (-\Delta_p)^s \overline{u}, \phi\rangle_{X_p^s(\Omega_\varepsilon)} - \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} [|f(x,u) - f(x,\overline{u})|]\, |\phi| dx
\end{aligned}$$

onde $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : u(x) + \varepsilon\phi(x) \geq \overline{u}(x) > u(x)\}$. Note que $|\Omega_\varepsilon| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Daí pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue, segue que

$$\langle I'(u), \phi^{\varepsilon}\rangle \geq o(\varepsilon), \ \text{ as } \ \varepsilon \to 0.$$

De maneira similar obtemos que $\langle I'(u), \phi_\varepsilon\rangle \leq o(\varepsilon)$, e de (1.4) podemos concluir que

$$\langle I'(u), \phi\rangle \geq 0.$$

Invertendo o sinal de ϕ, tem-se

$$\langle I'(u), -\phi\rangle = -\langle I'(u), \phi\rangle \geq 0.$$

Portanto,

$$\langle I'(u), \phi\rangle = 0, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Já que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $X_p^s(\Omega)$, segue que $I'(u) = 0$. Daí, conclui-se que u resolve (1.2).

$\blacksquare$

A seguir apresentamos um resultado do Principio do Máximo Forte para $(-\Delta_p)^s$:

Teorema 1.4.3. *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Seja $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ e $u \in X_p^s(\Omega)$ uma super-solução fraca de (1.2) tal que $u \geq 0$ em Ω e suponha que $u \not\equiv 0$. Então $u > 0$ a.e em Ω.*

Ver demonstração em [[39], Teorema 1.2].

Seja $u \in X_p^s(\Omega)$ uma solução fraca do problema $(-\Delta_p)^s u = f(x,u^+)$, ou seja,

$$\langle(-\Delta_p)^s u, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x,u^+)\varphi dx, \quad \text{para toda } \varphi \in X_p^s(\Omega).$$

Como estamos interessados em soluções positivas do problema (P_λ), então consideremos uma solução fraca de $(-\Delta_p)^s u = f(x,u^+)$ e fazendo $\varphi = u^-$, provaremos que $u^- = 0$. De fato, desde que u é uma solução fraca, temos que

$$I'(u)\varphi = \left\langle(-\Delta_p)^s u, u^-\right\rangle - \int_\Omega f(x,u^+)u^- dx = 0.$$

Assim, $\langle(-\Delta_p)^s u, u^-\rangle = 0$. Como

$$\left\langle(-\Delta_p)^s u, u^-\right\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(u^-(x)-u^-(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = 0.$$

$a)$ Para $p = 2$

$$\begin{aligned}
(u(x)-u(y))(u^-(x)-u^-(y)) &= (u^+(x)-u^-(x)-u^+(y)+u^-(y))(u^-(x)-u^-(y)) \\
&= [(u^+(x)-u^+(y))-(u^-(x)+u^-(y)](u^-(x)-u^-(y)) \\
&= (u^+(x)-u^+(y))(u^-(x)-u^-(y))-(u^-(x)-u^-(y)^2,
\end{aligned}$$

integrando, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u^+(x)-u^+(y))(u^-(x)-u^-(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u^-(x)-u^-(y))^2}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = 0, \qquad (1.5)$$

como

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u^+(x) - u^+(y))(u^-(x) - u^-(y))}{|x-y|^{N+sp}} = -\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y) + u^+(y)u^-(x)}{|x-y|^{N+sp}} = -C < 0,$$

segue que, $C \geq 0$. Por outro lado, de (1.5) temos que $-C - \|u^-\|^2 = 0$, logo

$$-C = \|u^-\|^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; C \leq 0.$$

Assim, $C = 0$. Portanto, $\|u^-\|^2 = 0$, daí concluímos que $u^- = 0$.

$b)$ Para $p > 2$,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(u^-(x)-u^-(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&= -\int \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u^+(x)u^-(y)+u^+(y)u^-(x))}{|x-y|^{N+sp}} - \int \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u^-(x)-u^-(y))^2}{|x-y|^{N+sp}} \\
&= -I - \int \frac{\left(|u(x)-u(y)|^{p-2} - |u^-(x)-u^-(y)|^{p-2} + |u^-(x)-u^-(y)|^{p-2}\right)(u^-(x)-u^-(y))^2}{|x-y|^{N+sp}} \\
&= -I - \int \frac{(|u(x)-u(y)|^{p-2} - |u^-(x)-u^-(y)|^{p-2})(u^-(x)-u^-(y))^2}{|x-y|^{N+sp}} \\
&\quad - \int \frac{|u^-(x)-u^-(y)|^{p-2}(u^-(x)-u^-(y))^2}{|x-y|^{N+sp}} \\
&= -I - \int \frac{\left(|u(x)-u(y)|^{p-2} - |u^-(x)-u^-(y)|^{p-2}\right)(u^-(x)-u^-(y))^2}{|x-y|^{N+sp}} - \| u^-\|^p.
\end{aligned}$$

Como $|u(x)-u(y)|^{p-2} > |u^-(x)-u^-(y)|^{p-2}$, então

$$\|u^-\|^p = 0.$$

Daí, $u^- = 0$. Logo, segue que $u \geq 0$ em Ω, pelo Teorema do Principio do Máximo 1.4.3, temos que $u > 0$ em Ω, ou seja, todas as soluções para $(-\Delta_p)^s u = f(x, u^+)$ serão positivas.

Capítulo

2

Multiplicidade, existência e não existência para $(-\Delta_p)^s$

Neste capítulo, focaremos nossa atenção a problemas fracionários não locais. Para ser mais preciso, cosideramos o seguinte problema subcrítico não linear:

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u = \lambda |u|^{p-2}u + a(x)u^{q-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{P$_\lambda$}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $1 < p < q < p_s^*, N > sp$, $s \in (0,1)$, $a : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função Hölder contínua que muda de sinal,

$$p_s^* = \frac{pN}{N - sp}$$

é o expoente de Sobolev crítico fracionário.

Definimos λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta_p)^s$ em Ω como:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in X_p^s(\Omega)} \left\{ \|u\|^p : |u|_p = 1 \right\}. \tag{2.1}$$

e φ_1 a primeira autofunção associada a λ_1, na qual atinge o ínfimo em (2.1) ver ([21], Teorema 4.1) , ou seja $\varphi_1 \in X_p^s(\Omega)$ satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s \varphi_1 = \lambda_1 |\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 & \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_1 = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

λ_1 é simples, isolado e tem uma única autofunção positiva $\varphi_1 \in X_p^s(\Omega)$ tal que $|\varphi_1|_p = 1$.

Neste capítulo estudaremos as soluções positivas do problema (P_λ) no caso não coercivo, ou seja, $\lambda > \lambda_1$.

Defina

$$\Lambda = \{\, \lambda : \lambda > \lambda_1 \ \text{ e } \ (\mathrm{P}_\lambda) \, \text{tem uma solução} \,\}$$

e $\lambda^* = \sup \Lambda$. No decorrer do texto consideramos

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : a(x) > 0\}$$

$$\Omega^- = \{x \in \Omega : a(x) < 0\}$$

conjuntos abertos e não vazios de Ω.

Nosso resultado principal para este capítulo é o seguinte:

Teorema 2.0.1. *Suponha que* $2 \le p < q < p_s^*$, $\Omega^+ \neq 0$ *e*

$$\int_\Omega a(x)\varphi_1^q < 0$$

Então existe $\lambda^* > \lambda_1$ *tal que* (P_λ) *tem pelo menos duas soluções se* $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$. *Para* $\lambda = \lambda^*$ *o problema* (P_λ) *possui pelo menos uma solução. Além disso, se* $\lambda > \lambda^*$, *então o problema* (P_λ) *não tem soluções.*

Note que, o caso $\lambda = \lambda_1$ o problema (P_λ) tem uma solução e foi provado por Fu-Li em [23].

A prova é baseada sobre as ideias dos artigos [1], [6] e [16] e outras referências citadas. Primeiro, provamos o resultado de existência e não existência de soluções como em [6]. Logo, usamos o método de sub-super solução com o Teorema do Passo da Montanha para obter resultados de multiplicidade.

2.1 Formulação variacional

Nosso objetivo é encontrar soluções fracas para problema (P_λ), ou seja, determinar funções $u \in X_p^s(\Omega)$ que para toda $v \in X_p^s(\Omega)$ satisfazem

$$\langle (-\Delta_p)^s u, v\rangle - \lambda \int_\Omega (u^+)^{p-1} v dx - \int_\Omega a(x)(u^+)^{q-1} v dx = 0$$

Ao problema (P_λ) está associado o funcional de Euler-Lagrange $J : X_p^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p} \parallel u \parallel^p - \frac{\lambda}{p} \int_\Omega (u^+)^p dx - \frac{1}{q} \int_\Omega a(x)(u^+)^q, \quad u \in X_p^s(\Omega).$$

Pela desigualdade de Sobolev fracionário e como $a(x)$ é uma função Hölder contínua, temos que $J_\lambda \in C^1(X_p^s(\Omega), \mathbb{R})$ e com derivada dada por

$$\langle J_\lambda'(u), v\rangle = \langle (-\Delta_p)^s u, v\rangle - \lambda \int_\Omega (u^+)^{p-1} v dx - \int_\Omega a(x)(u^+)^{q-1} v dx$$

para toda $u, v \in X_p^s(\Omega)$. Dessa forma as soluções fracas de (P_λ) são os pontos críticos do funcional J_λ.

2.2 Desigualdade de Picone e não existência de Soluções

Apresentamos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento deste capítulo. Pela Proposição 4.2 em [8] e com $p = q$, temos:

Proposição 2.2.1 (Desigualdade de Picone). *Seja $1 < p < \infty$, u e v duas funções mensuráveis com $v \geq 0$ e $u > 0$, então*

$$|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) \left(\frac{v(x)^p}{u(x)^{p-1}} - \frac{v(y)^p}{u(y)^{p-1}} \right) \leq |v(x) - v(y)|^p. \tag{2.3}$$

Dividindo a equação (2.3) por $|x - y|^{N+sp}$, temos

$$\frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) \left(\frac{v(x)^p}{u(x)^{p-1}} - \frac{v(y)^p}{u(y)^{p-1}} \right)}{|x - y|^{N+sp}} \leq \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}}.$$

Agora integrando sobre $\mathbb{R}^{2N}$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\left(u(x)-u(y)\right)\left(\frac{v(x)^p}{u(x)^{p-1}}-\frac{v(y)^p}{u(y)^{p-1}}\right)}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy.$$

Portanto, segue que

$$\left\langle (-\Delta_p)^s u, \frac{v^p}{u^{p-1}} \right\rangle \leq \|v\|^p. \tag{2.4}$$

Lema 2.2.2. *O problema* (P$_\lambda$) *não tem soluções positivas para* $\lambda > 0$ *suficientemente grande.*

Demonstração. Seja Ω^* uma componente conexa de $\Omega \setminus \overline{\Omega^-}$ e φ_* a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(\Omega^*)$ de $(-\Delta_p)^s$ em Ω^*. Seja u é uma solução positiva de (P$_\lambda$), pela Desigualdade de Picone (2.3), tem-se

$$\left\langle (-\Delta_p)^s u, \frac{\varphi_*^p}{u^{p-1}} \right\rangle \leq \|\varphi_*\|^p,$$

usando (P$_\lambda$), segue que

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Omega^*)\int \varphi_*^p \ &\geq\ \lambda \int |u|^{p-2}u\left(\frac{\varphi_*^p}{u^{p-1}}\right) + \int a(x)|u|^{q-2}u\left(\frac{\varphi_*^p}{u^{p-1}}\right) \\ &=\ \lambda \int \varphi_*^p + \int a(x)u^{q-p}\varphi_*^p. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int a(x)u^{q-p}\varphi_*^p \ \leq\ (\lambda_1(\Omega^*)-\lambda)\int \varphi_*^p,$$

então $\lambda_1(\Omega^*) > \lambda$. Portanto, $\lambda_1(\Omega^*)$ é um límite superior para λ tal que (P$_\lambda$) tem uma solução positiva. □

2.3 Existência de soluções

Seja E_λ o funcional definido sobre $X_p^s(\Omega)$ como

$$E_\lambda(u) = \|u\|^p - \int_\Omega \lambda |u|^p, \quad \text{para todo } u \in X_p^s(\Omega).$$

O funcional E_λ é um funcional fracamente semi-contínuo inferiormente. Além disso, E_λ é coercivo se, somente se, $\lambda < \lambda_1$. Consideramos

$$\alpha = \min_{u \in X_p^s(\Omega)} \left\{ E_{\lambda_1}(u) : \int_\Omega a(x)|u|^q = 0 \ \text{ e } \ |u|_p = 1 \right\}.$$

Lema 2.3.1. *Se* $\int_\Omega a(x)\varphi_1^q < 0$, *então* $\alpha > 0$.

Demonstração. Por definição $\alpha \geq 0$, uma vez que $E_{\lambda_1}(u) \geq 0$ para todo $u \in X_p^s(\Omega)$. Agora, suponhamos por contradição que $\alpha = 0$. Seja (u_n) uma sequência minimizante. Como $\|u_n\|$ é limitada, podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $X_p^s(\Omega)$ com $|u_0| = 1$ e

$$\int_\Omega a(x)|u_0|^q = 0.$$

Além disso, pela semicontinuidade, segue que

$$E_{\lambda_1}(u_0) = \|u_0\|^p - \lambda_1 |u_0|_p^p \leq \alpha = 0.$$

Consequentemente, $\|u_0\|^p - \lambda_1 |u_0|_p^p = 0$, então u_0 é uma autofunção associada a λ_1. Portanto, u_0 é proporcional a φ_1 o que contradiz a nossa suposição $\square$

Proposição 2.3.2. *Se* $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \alpha$ *e* $\int_\Omega a(x)\varphi_1^q < 0$, *então* (P_λ) *tem pelo menos uma solução.*

Prova. Considere o seguinte ínfimo

$$c_\lambda = \inf \left\{ E_\lambda(u) : \int_\Omega a(x)|u|^q = 1 \right\}.$$

Provaremos que esse ínfimo é atingido. Além disso, provaremos que $c_\lambda > 0$ deste modo os mínimos associados correspondem a soluções positivas de (P_λ).

Passo 1: Provaremos que c_λ está bem definido, ou seja, $c_\lambda > -\infty$.

Suponhamos por contradição que existe uma sequência de funções (u_n) tal que

$$\int_\Omega a(x)|u_n|^q = 1 \ \text{ e } \ E_\lambda(u_n) = \|u_n\|^p - \lambda \int_\Omega |u_n|^p \to -\infty.$$

Segue que, $\displaystyle\int_\Omega |u_n|^p \to \infty$. Seja $w_n = \frac{u_n}{|u_n|_p}$, temos

$$\int_\Omega a(x)|w_n|^q \to 0 \text{ e } \int_\Omega |w_n|^p = 1.$$

Além disso, para n grande

$$\|w_n\|^p - \lambda |w_n|_p^p = E_\lambda(w_n) \leq 0.$$

Portanto, $\|w_n\|$ é limitada. Passando a uma subsequência, podemos assumir que $w_n \rightharpoonup w$ em $X_p^s(\Omega)$. Daí, temos que

$$\int_\Omega a(x)|w|^q = 0, \quad \int_\Omega |w|^p = 1 \text{ e } E_\lambda(w) \leq 0.$$

Em particular, $\|w\|^p \leq \lambda$. Por outro lado,

$$\alpha \leq E_{\lambda_1}(w) = \|w\|^p - \lambda_1.$$

Dessa forma, concluímos que $\alpha + \lambda_1 < \lambda$, o que é uma contradição. Portanto, $c_\lambda > -\infty$.

Passo 2: c_λ é alcançado.

Seja (u_n) uma seguência de funções minimizante, ou seja,

$$\int_\Omega a(x)|u_n|^q = 1 \quad \text{e} \quad E_\lambda(u_n) \to c_\lambda.$$

Podemos assumir que $u_n \geq 0$. Afirmamos que $\|u_n\|$ é limitada. Suponhamos por contradição que $\|u_n\| \to \infty$. De $E_\lambda(u_n) \to c_\lambda$, temos que $|u_n|_p \to \infty$. Definimos $w_n = \frac{u_n}{|u_n|_p}$, para n suficientemente grande, tem-se

$$\|w_n\|^p - \lambda \leq o(1).$$

Portanto, $\|w_n\|$ é limitada e como $X_p^s(\Omega)$ é reflexivo, então $w_n \rightharpoonup w$ em $X_p^s(\Omega)$. Deste modo

$$\int_\Omega a(x)|w|^q = 0, \quad \int_\Omega |w|^p = 1 \ \text{ e } \ E_\lambda(w) \leq 0$$

De modo análogo, como no Passo 1, obtemos uma contradição com $\alpha > 0$. Dessa maneira, (u_n) é uma sequência limitada. Daí, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u$ em $X_p^s(\Omega)$, assim

$$\int_\Omega a(x)|u|^q = 1$$

e

$$c_\lambda \leq E_\lambda(u) \leq \liminf E_\lambda(u_n) = c_\lambda.$$

Portanto, u é um minimizante para c_λ. □

2.4 Multiplicidade de Soluções

Para provar o Teorema 2.0.1, seguimos uma abordagem variacional. Pela Proposição 2.3.2, temos que $\Lambda \neq \emptyset$ e $\lambda^* > \lambda_1$. Além disso, como consequencia do Lema 2.2.2, λ^* é finito.

2.4.1 Existência de um mínimo local

Proposição 2.4.1. *O funcional J_λ tem um mínimo local para todo $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$.*

Prova. Seja λ tal que $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$ e escolhemos $\overline{\lambda} > \lambda$ com $\overline{\lambda} \in \Lambda$. Seja uma $\overline{u}$ uma solução positiva de $(P_{\overline{\lambda}})$. Então

$$\begin{aligned}(-\Delta_p)^s\overline{u} &= \overline{\lambda}|\overline{u}|^{p-2}\overline{u} + a(x)\overline{u}^{q-2}\overline{u} \\ &\geq \lambda|\overline{u}|^{p-2}\overline{u} + a(x)\overline{u}^{q-2}\overline{u},\end{aligned}$$

então $\overline{u}$ é uma supersolução de (P_λ). Agora considere

$$M = \{u \in X_p^s(\Omega) : 0 \leq u \leq \overline{u}\}.$$

Seja $u_1 \in M$ tal que $J_\lambda(u_1) = \inf_{u\in M} J_\lambda(u)$, pelo Lemma 1.4.2, obtemos que u_1 é uma solução de (P_λ). A seguir provaremos que u_1 é não trivial. Como $\lambda_1 < \lambda$, podemos escolher $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω, tal que

$$\frac{\|\phi\|^p}{\displaystyle\int |\phi|^p} < \lambda. \tag{2.5}$$

Existe $t_0 > 0$ tal que $t\phi \leq \overline{u}$ para $t \in (0, t_0)$. Por (2.5) temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\phi) &= \frac{1}{p}\|t\phi\|^p - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega (t\phi)^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)(t\phi)^q dx \\ &= \frac{t^p}{p}\|\phi\|^p - \frac{\lambda t^p}{p}\int_\Omega \phi^p dx - \frac{t^q}{q}\int_\Omega a(x)(\phi)^q dx \\ &= \frac{t^p}{p}\left[\|\phi\|^p - \lambda\int_\Omega \phi^p dx - \frac{pt^{q-p}}{q}\int_\Omega a(x)\phi^q dx\right] \\ &< 0, \end{aligned}$$

se $t > 0$ é suficientemente pequeno. Portanto, $J_\lambda(u_1) < 0$ e assim u_1 é uma solução não trivial.

Afirmamos que u_1 pode ser considerado um mínimo local de J_λ em $X_p^s(\Omega)$. Definimos $\delta > 1$ tal que

$$\left(\delta^{q-p} - 1\right) a(x)\overline{u}^{q-p} < \overline{\lambda} - \lambda' \tag{2.6}$$

onde $\lambda' = \dfrac{\lambda + \overline{\lambda}}{2}$. Multiplicando (2.6) por $\delta^{p-1}\overline{u}^{p-1}$, obtem-se

$$\delta^{p-1}\overline{\lambda}\overline{u}^{p-1} + \delta^{p-1}a(x)\overline{u}^{q-1} \geq \lambda'(\delta\overline{u})^{p-1} + a(x)(\delta\overline{u})^{q-1}.$$

Também temos que

$$(-\Delta_p)^s(\delta\overline{u}) = \delta^{p-1}(-\Delta_p)^s\overline{u} = \delta^{p-1}\left(\overline{\lambda}\,\overline{u}^{p-1} + a(x)\,\overline{u}^{q-1}\right).$$

Portanto,

$$(-\Delta_p)^s(\delta\overline{u}) \geq \lambda'(\delta\,\overline{u})^{p-1} + a(x)\,(\delta\overline{u})^{q-1}$$

Em particular, $\delta\overline{u}$ é uma supersolução para (P_λ), desde que $\lambda' > \lambda$. Além disso $u_1 < \delta\overline{u}$

a.e em Ω. Sem perda de generalidade podemos assumir que

$$J_\lambda(u_1) = \min\{\, J_\lambda(u) : 0 \leq u(x) \leq \delta\, \overline{u}(x) \text{ a.e } x \in \Omega\,\}$$

Pelo Lema 2.4.2, segue que u_1 é um mínimo local de J_λ em $X_p^s(\Omega)$. $\square$

Denotaremos por $\overline{w} := \delta\overline{u}$. A prova do seguinte Lema é baseado de [[41], Teorema II.12.9] na qual lidaremos com o caso semilinear.

Lema 2.4.2. *Assumimos que $p \geq 2$. Suponha que u_1 é o único mínimo de J_λ restrito a $M = \{u \in X_p^s(\Omega) : 0 \leq u(x) \leq \overline{w}(x)$ a.e. $x \in \Omega\}$. Então u_1 é um mínimo local de J_λ em $X_p^s(\Omega)$.*

Prova. Considere o conjunto

$$M_n = \left\{ u \in X_p^s(\Omega) : dist(u, M) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Se verifica que M_n é fracamente fechado e J_λ é coercivo e fracamente semi-contínuo inferiormente sobre M_n com respeito à norma de $X_p^s(\Omega)$. Por [[41], Teorema I.1.2], existe $u_n \in M_n$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \min_{M_n} J_\lambda.$$

Segue que,

$$\left\langle J'_\lambda(u_n), (u_n - \overline{w})^+ \right\rangle \leq 0,$$

ou seja,

$$\left\langle (-\Delta_p)^s u_n, (u_n - \overline{w})^+ \right\rangle \leq \lambda \int u_n^{p-1}(u_n - \overline{w})^+ + \int a(x) u_n^{q-1}(u_n - \overline{w})^+ \tag{2.7}$$

Além disso, temos que

$$\left\langle (-\Delta_p)^s \overline{w}, (u_n - \overline{w})^+ \right\rangle \geq \lambda' \int \overline{w}^{p-1}(u_n - \overline{w})^+ + \int a(x) \overline{w}^{q-1}(u_n - \overline{w})^+. \tag{2.8}$$

Fixando $\varepsilon > 0$ tal que

$$\lambda' \geq (1+\varepsilon)\lambda + \varepsilon a(x)\overline{w}^{q-p}$$

multiplicando esta desigualdade por $\overline{w}^{p-1}$, temos

$$\lambda' \overline{w}^{p-1} \geq \lambda(1+\varepsilon)\overline{w}^{p-1} + \varepsilon a(x)\overline{w}^{q-1},$$

então

$$\lambda' \int \overline{w}^{p-1}(u_n - \overline{w})^+ \geq \lambda \int (1+\varepsilon)\overline{w}^{p-1}(u_n - \overline{w})^+ + \int \varepsilon a(x)\overline{w}^{q-1}(u_n - \overline{w})^+.$$

Substituindo a desigualdade acima em (2.8), obtemos

$$\left\langle (-\Delta_p)^s \overline{w}, (u_n - \overline{w})^+ \right\rangle \geq \lambda \int (1+\varepsilon)\overline{w}^{p-1}(u_n - \overline{w})^+ + \int (1+\varepsilon) a(x)\overline{w}^{q-1}(u_n - \overline{w})^+.$$

Observe que para $p \geq 2$, temos a seguinte desigualdade

$$|\xi - \eta|^p \leq c\left(|\xi^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta|\right)(\xi - \eta)$$

onde $c(p) > 0$ e $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}$. Em particular, $|\,(\xi-\eta)^+\,|^p \leq c\,(|\xi^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta|)\,(\xi-\eta)^+$. Aplicando esta desigualdade com $\xi = u_n(x) - u_n(y)$ e $\eta = \overline{w}(x) - \overline{w}(y)$, obtém-se

$$\|(u_n - \overline{w})^+\|^p \leq \left\langle (-\Delta_p)^s u_n, (u_n - \overline{w})^+ \right\rangle - \left\langle (-\Delta_p)^s \overline{w}, (u_n - \overline{w})^+ \right\rangle.$$

Subtraindo (2.8) de (2.7) e usando desigualdade acima, tem-se

$$\begin{aligned} \|(u_n - \overline{w})^+\|^p \quad &\leq \quad \lambda \int (u_n^{p-1} - \overline{w}^{p-1} - \varepsilon\overline{w}^{p-1})(u_n - \overline{w})^+ \\ &\quad + \int a(x)(u_n^{q-1} - \overline{w}^{q-1} - \varepsilon\overline{w}^{q-1})(u_n - \overline{w})^+. \end{aligned}$$

Agora, a fim de estimar a expressão acima, usaremos a seguinte desigualdade: existe uma constante $c = c(\varepsilon, a) > 0$ tal que, para $a > b \geq 0$,

$$a^s - b^s - \varepsilon b^s \leq c(a-b)^s, \quad (s = p-1 \text{ e } s = q-1).$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\|(u_n - \overline{w})^+\|^p &\leq \lambda c \int [(u_n - \overline{w})^+]^p + c \int a(x)[(u_n - \overline{w})^+]^q \\
&\leq |\{x : u_n(x) > \overline{w}(x)\}|^{\frac{p}{N}} \|(u_n - \overline{w})^+\|^p + c\|(u_n - \overline{w})^+\|^{q-p}\|(u_n - \overline{w})^+\|^p.
\end{aligned}$$

Note que, u_n converge para um mínimo de J_λ em M, e da unicidade de u_0 segue que,

$$\|u_n - u_0\| \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Além disso, como $u_0 < \overline{w}$, temos que $|\{x : u_n(x) > \overline{w}(x)\}|^{\frac{p}{N}} \to 0$ e $\|(u_n - \overline{w})^+\|^{q-p} \to 0$, quando $n \to \infty$. Desta maneira,

$$\|(u_n - \overline{w})^+\|^p \leq o(1)\|(u_n - \overline{w})^+\|^p, \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Portanto, existe n_0 tal que $(u_n - \overline{w})^+ = 0$ para $n \geq n_0$, então $u_n \leq \overline{w}$. Como consequência temos que $u_n^+ \in M$ e também $J_\lambda(u_n^+) \geq J_\lambda(u_1)$. Agora se $n \geq n_0$, então

$$J_\lambda(u_1) \geq J_\lambda(u_n) = \frac{1}{p}\|u_n^-\|^p + J_\lambda(u_n^+) \geq \frac{1}{p}\|u_n^-\|^p + J_\lambda(u_1^+).$$

Assim, $u_n^- = 0$, o que implica que $u_n \in M$ para $n \geq n_0$. Portanto, u_1 é um mínimo local de J_λ em $X_p^s(\Omega)$. □

2.4.2 Condição (PS)

Lema 2.4.3. *O funcional J_λ satisfaz a condição (PS) se $\lambda < \lambda^*$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em $X_p^s(\Omega)$ tal que $(J_\lambda(u_n))$ é limitado em $\mathbb{R}$ e $J'_\lambda(u_n) \to 0$, assim

$$\left| \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)(u_n^+)^q \right| = |J(u_n)| \leq C,$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}\|u_n\|^p - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \leq C + \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)(u_n^+)^q.$$

Multiplicando por q, obtemos

$$\frac{q}{p}\|u_n\|^p - \frac{\lambda q}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \leq C + \int_\Omega a(x)(u_n^+)^q. \tag{2.9}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, deduzimos que

$$|\langle J_\lambda'(u_n), u_n\rangle| \leq \|J_\lambda'(u_n)\|\,\|u_n\| = o(1)\|u_n\|$$

$$\left|\|u_n\|^p - \lambda\int_\Omega (u_n^+)^p dx - \int_\Omega a(x)(u_n^+)^q dx\right| \leq o(1)\|u_n\|.$$

Podemos reescrever como

$$\int_\Omega a(x)(u_n^+)^q dx \leq o(1)\|u_n\| + \|u_n\|^p - \lambda\int_\Omega (u_n^+)^p dx. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.10) em (2.9), obtemos

$$\frac{q}{p}\|u_n\|^p - \frac{\lambda q}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \leq C + \left(o(1)\|u_n\| + \|u_n\|^p - \lambda\int_\Omega (u_n^+)^p dx\right),$$

i.e.,

$$\left(\frac{q-p}{p}\right)\|u_n\|^p - \left(\frac{q-p}{p}\right)\lambda\int_\Omega (u_n^+)^p dx \leq C + o(1)\|u_n\|.$$

Logo, segue que

$$\|u_n\|^p - \lambda|u_n^+|_p^p \leq C + o(1)\|u_n\|. \tag{2.11}$$

Nós precisamos provar que (u_n) possui uma subsequência convergente. Como $q < p_s^*$ é suficiente provar que (u_n) é limitada em $X_p^s(\Omega)$. Mas de (2.11) só falta mostrar a seguinte afirmação.

Afirmação 2. *(u_n) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$.*

De fato, suponha por cantradição que $|u_n|_p \to \infty$ quando $n \to \infty$. Defina

$$v_n = \frac{u_n}{|u_n|_p}$$

dividendo (2.11) por $|u_n|_p^p$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\|u_n\|^p}{|u_n|_p^p} - \lambda\frac{|u_n^+|_p^p}{|u_n|_p^p} \leq \frac{C}{|u_n|_p^p} + \frac{o(1)\|u_n\|}{|u_n|_p^p} \\ \|v_n\|^p - \lambda \leq \frac{C}{|u_n|_p^p} + \frac{o(1)}{|u_n|_p^{p-1}}\|v_n\| \end{aligned},$$

como $|u_n|_p \to \infty$, então

$$\|v_n\|^p \leq \lambda + C\|v_n\|.$$

Portanto, (v_n) é uma sequência limitada em $X_s^p(\Omega)$ e como $X_s^p(\Omega)$ é reflexivo, então (v_n) possui uma subsequência fracamente convergente, ou seja

$$\begin{aligned} &v_n \rightharpoonup v_0 \quad \text{em} \quad X_s^p(\Omega), \text{ com } |v_0|_p = 1, \\ &v_n \to v_0 \quad \text{em} \quad L^r(\Omega), \text{ com } r \in [1, p_s^*), \\ &v_n \to v_0 \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Para qualquer $w \in X_p^s(\Omega)$, sabemos que $J'_\lambda(u_n)w \to 0$, quando $n \to 0$. Em particular

$$\langle(-\Delta_p)^s u_n, w\rangle - \lambda\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n w - \int_\Omega a(x)|u_n|^{q-1}w = o(1). \tag{2.13}$$

Dividendo (2.13) por $|u_n|_p^{p-1}$, temos

$$\begin{aligned} &\frac{\langle(-\Delta_p)^s u_n, w\rangle}{|u_n|_p^{p-1}} - \lambda\int_\Omega \frac{|u_n|^{p-2}u_n w}{|u_n|_p^{p-1}} - \int_\Omega \frac{a(x)|u_n|^{q-1}w}{|u_n|_p^{p-1}} = o(1) \\ &\left\langle \frac{(-\Delta_p)^s u_n}{|u_n|_p}, w\right\rangle - \lambda\int_\Omega \frac{|u_n|^{p-2}}{|u_n|_p^{p-2}}\frac{u_n}{|u_n|_p}w - |u_n|_p^{(q-1)-(p-1)}\int_\Omega a(x)\frac{|u_n|^{q-1}}{|u_n|_p^{q-1}}w = o(1) \\ &\langle(-\Delta_p)^s v_n, w\rangle - \lambda\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n w - |u_n|_p^{(q-1)-(p-1)}\int_\Omega a(x)v_n^{q-1}w = o(1). \end{aligned}$$

De (2.12), temos que

$$|u_n|_p^{(q-1)-(p-1)}\int_\Omega a(x)v_0^{q-1}w = \langle(-\Delta_p)^s v_0, w\rangle - \lambda\int_\Omega |v_0|^{p-2}v_0 w.$$

Como $p < q$ e $|u_n|_p \to \infty$, então

$$\int_\Omega a(x)v_0^{q-1}w = 0, \quad \forall\, w \in X_s^p(\Omega). \tag{2.14}$$

Se $\Omega_0 = \Omega \setminus (\overline{\Omega^+ \cup \Omega^-})$ é vazio, então por (2.14) temos que $v_0 = 0$ em $\Omega^+ \cup \Omega^-$, mas isto é uma contradição pois $|v_0|_p = 1$.

Por outro lado, se $\Omega_0 \neq \emptyset$, então por (2.14) $v_0 \in X_p^s(\Omega_0)$. Ademais por (2.13) e pela convergência fraca de v_n a v_0, deduzimos que

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(\langle(-\Delta_p)^s v_n, w\rangle - \lambda\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n w\right) = \langle(-\Delta_p)^s v_0, w\rangle - \lambda\int_\Omega |v_0|^{p-2}v_0 w,$$

para todo $w \in X_p^s(\Omega_0) \subset X_p^s(\Omega)$. Portanto, $v_0 \in X_p^s(\Omega_0)$ é uma solução de

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s v_0 &= \lambda|v_0|^{p-2}v_0, \quad \text{em } \Omega_0,\\ \qquad v_0 &= 0 \qquad\qquad\quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega_0,\end{cases}$$

e assim $v_0 \geq 0$ e $\lambda \geq \lambda_1(\Omega_0)$ desde que $|v_0|_p = 1$.

Por hipótese $\lambda^* > \lambda > \lambda_1$ e sabemos que $X_p^s(\Omega_0) \subset X_p^s(\Omega)$. Seja $\Omega^* = \Omega \setminus \overline{\Omega^-}$ e seja φ_* a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(\Omega^*)$ de $(-\Delta_p)^s$. Pela Desigualdade de Picone (2.4),

$$\left\langle (-\Delta_p)^s u, \frac{\varphi_*^p}{u^{p-1}} \right\rangle \leq \|\varphi_*\|^p,$$

e usando a equação (P_λ), tem-se

$$\begin{aligned} \int \lambda|u|^{p-2}u\left(\frac{\varphi_*^p}{u^{p-1}}\right) + \int a(x)|u|^{q-2}u\left(\frac{\varphi_*^p}{u^{p-1}}\right) &\leq \lambda_1(\Omega^*)\int \varphi_*^p\\ \lambda\int \varphi_*^p + \int a(x)u^{q-p}\varphi_*^p &\leq \lambda_1(\Omega^*)\int \varphi_*^p\\ 0 < \int a(x)u^{q-p}\varphi_*^p &\leq (\lambda_1(\Omega^*) - \lambda)\int \varphi_*^p, \end{aligned}$$

então $\lambda_1(\Omega^*) > \lambda$. Assim, $\lambda_1(\Omega^*)$ é um límite superior para Λ, ou seja, $\lambda^* \leq \lambda_1(\Omega^*)$. Como $\Omega_0 \subset \Omega^*$, então $\lambda_1(\Omega_0) \geq \lambda_1(\Omega^*) = \lambda_1^*$. Mas $\lambda^* \leq \lambda_1(\Omega^*) \leq \lambda_1(\Omega_0) = \lambda$, isto é uma contradição pois $\lambda < \lambda^*$. Portanto, (u_n) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$. $\square$

2.4.3 Prova do Teorema (2.0.1)

Aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha para obter a segunda solução não trivial do problema (P_λ). Considere o funcional

$$I(u) = \frac{1}{p}\|u_1 + u\|^p - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega ((u_1+u)^+)^p + \frac{\lambda}{p}\int_\Omega u_1^p - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)((u_1+u)^+)^q + \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)u_1^q$$

Claro que se u é um ponto crítico de I, então $u_1 + u \geq 0$, assim $u_1 + u$ é uma solução de (P_λ) diferente de u_1.

Como u_1 é um mínimo local de J_λ e $I(u) = J_\lambda(u_1+u) - J_\lambda(u_1) + \frac{1}{p}\|u_1\|^p$, segue que existe $r > 0$ tal que

$$I(u) > I(0), \ \forall\, u \in X_p^s(\Omega), \ \|u\| \leq r.$$

Fixando $0 \leq v \in X_p^s(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega a(x)v^q > 0.$$

Segue que

$$\begin{aligned} I(tv) &= \frac{1}{p}\|tv + u_1\|^p - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega (tv+u_1)^p + \frac{\lambda}{p}\int_\Omega u_1^p - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)(tv+u_1)^q + \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)u_1^q \\ &= \frac{t^p}{p}\|v + \frac{u_1}{t}\|^p - \frac{\lambda t^p}{p}\int_\Omega (v+\frac{u_1}{t})^p + \frac{\lambda}{p}\int_\Omega u_1^p - \frac{t^q}{q}\int_\Omega a(x)(v+\frac{u_1}{t})^q + \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)u_1^q \\ &\to -\infty \ \text{ quando } t \to \infty. \end{aligned}$$

Finalmente, se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I, então $(u_1 + u_n)$ é uma sequência $(PS)_{c+J_\lambda(u_1)+\|u_1\|^p}$ para J_λ. Portanto I satisfaz a condição (PS) desde que J_λ satisfaz a condição (PS) se $\lambda < \lambda^*$, ver Lema 2.4.3. Logo, podemos aplicar a versão clássica do Teorema do passo da montanha para garantir que I tem um ponto crítico não-trivial, e assim (P_λ) possui uma segunda solução positiva. $\blacksquare$

A seguir provaremos o Teorema 2.0.1, para o caso $\lambda = \lambda^*$. De fato, para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$, pela Proposição 2.4.1 sabemos que existe u_1 uma solução do problema (P_λ) com

$$0 < u_1 < u_\lambda \text{ em } \Omega,$$

$$\text{e } J_\lambda(u_1) < 0.$$

Escolhemos uma sequência (λ_n) tal que $\lambda_1 < \lambda_n < \lambda^*$ e

$$\lambda_n \to \lambda^*, \text{ quando } n \to \infty.$$

Denotamos as soluções correspondentes a λ_n por u_{λ_n}, satisfazendo

$$\begin{aligned} J_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) &< 0, \\ J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}\|u_{\lambda_n}\|^p - \frac{\lambda_n}{p}\int_\Omega |u_{\lambda_n}|^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)|u_{\lambda_n}|^q < 0,$$

$$J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})u_{\lambda_n} = \|u_{\lambda_n}\|^p - \lambda_n \int_\Omega |u_{\lambda_n}|^p dx - \int_\Omega a(x)|u_{\lambda_n}|^q = 0.$$

Daí,

$$\int_\Omega a(x)|u_{\lambda_n}|^q dx = \|u_{\lambda_n}\|^p - \lambda_n \int_\Omega |u_{\lambda_n}|^p dx.$$

Logo,

$$\frac{q}{p}\|u_{\lambda_n}\|^p - \frac{q\lambda_n}{p}\int_\Omega |u_{\lambda_n}|^p dx < \int_\Omega a(x)|u_{\lambda_n}|^q dx = \|u_{\lambda_n}\|^p - \lambda_n \int_\Omega |u_{\lambda_n}|^p dx,$$

$$\frac{q-p}{p}\|u_{\lambda_n}\|^p \leq \frac{(q-p)\lambda_n}{p}\int_\Omega |u_{\lambda_n}|^p dx.$$

Pela Afirmação 2, segue que (u_{λ_n}) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_{\lambda_n}\| < C.$$

Então existe $u_{\lambda^*} \in X_p^s(\Omega)$ tal que a menos de subsequência se satisfaz

$$\begin{aligned} u_{\lambda_n} \rightharpoonup u_{\lambda^*} \quad & \text{em} \quad X_p^s(\Omega), \text{ com,} \\ u_{\lambda_n} \to u_{\lambda^*} \quad & \text{em} \quad L^r(\Omega), \quad \text{com} \quad r \in [1, p_s^*), \\ u_{\lambda_n}(x) \to u_{\lambda^*}(x) \quad & \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Como $u_{\lambda_n}(x) \to u_{\lambda^*}(x)$ q.t.p em Ω, então pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\int_\Omega |u_{\lambda_n}|^{p-1} \varphi dx \longrightarrow \int_\Omega |u_{\lambda^*}|^{p-1} \varphi dx,$$

$$\int_\Omega a(x)|u_{\lambda_n}|^{q-1} \varphi dx \longrightarrow \int_\Omega a(x)|u_{\lambda^*}|^{q-1} \varphi dx$$

Por hipótese $\lambda_n \to \lambda^*$, então

$$\lambda_n \int_\Omega |u_{\lambda_n}|^{p-1} \varphi dx \longrightarrow \lambda^* \int_\Omega |u_{\lambda^*}|^{p-1} \varphi dx.$$

Como u_{λ_n} é solução do problema (P_λ) e aplicando a desigualdade de Hölder, tem-se

$$\begin{aligned} & \langle (-\Delta_p)^s u_{\lambda_n}, u_{\lambda_n} - u_{\lambda^*} \rangle \\ = \;& \lambda_n \int_\Omega |u_{\lambda_n}|^{p-1}(u_{\lambda_n} - u_{\lambda^*}) dx + \int_\Omega a(x)|u_{\lambda_n}|^{q-1}(u_{\lambda_n} - u_{\lambda^*}) dx \\ \leq \;& \lambda_n \left(\int_\Omega |u_{\lambda_n}|^p \right)^{(p-1)/p} \left(\int_\Omega |u_{\lambda_n} - u_{\lambda^*}|^p \right)^{1/p} + \\ & |a(x)|_\infty \left(\int_\Omega |u_{\lambda_n}|^{q-1} \right)^{(q-1)/q} \left(\int_\Omega |u_{\lambda_n} - u_{\lambda^*}|^q \right)^{1/q} \\ \leq \;& \lambda_n \left(\int_\Omega |u_{\lambda_n}|^p \right)^{(p-1)/p} |u_{\lambda_n} - u_{\lambda^*}|_p + |a(x)|_\infty \left(\int_\Omega |u_{\lambda_n}|^{q-1} \right)^{(q-1)/q} |u_{\lambda_n} - u_{\lambda^*}|_q. \end{aligned}$$

Como $\lambda_n |u_{\lambda_n}|_p \longrightarrow \lambda^* |u_{\lambda^*}|_p$. e pela imersão compacta de Sobolev $X_p^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, segue que $|u_{\lambda_n} - u_{\lambda^*}|_r \to 0$ em $L^r(\Omega)$. Daí,

$$\limsup_{\lambda_n \to \lambda^*} \langle (-\Delta_p)^s u_{\lambda_n}, u_{\lambda_n} - u_{\lambda^*} \rangle = \lim_{\lambda_n \to \lambda^*} \langle (-\Delta_p)^s u_{\lambda_n}, u_{\lambda_n} - u_{\lambda^*} \rangle \leq 0,$$

pelo Lema 1.2.1 $(-\Delta_p)^s$ é um $(S)_+$-operador, então $u_{\lambda_n} \to u_{\lambda^*}$ em $X_p^s(\Omega)$. Portanto,

$$\langle J'_{\lambda^*}(u_{\lambda^*}), \varphi \rangle = 0,$$

ou seja, u_{λ^*} é uma solução de (P_λ) com $u_{\lambda^*} > u_\lambda$. $\square$

Capítulo

3

Multiplicidade, existência e não existência para $(-\Delta_p)^s + V$

Neste capítulo estudamos a questão de existência e multiplicidade de soluções positivas para um problema envolvendo o operador p-Laplaciano fracionário em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Consideramos o seguinte problema não linear, não local:

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda |u|^{p-2}u + a(x)|u|^{q-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $1 < p < q < p_s^*, N > ps,\ s \in (0,1)$ e λ é um parâmetro real. Assumimos que $a : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua que muda de sinal e $V \in L^r(\Omega)$ com $r > N/(ps)$.

Seja λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta)^s + V$ em Ω, ou seja,

$$\lambda_1 := \inf_{u \in X_0^s(\Omega)} \left\{ \|u\|^p + \int_\Omega V|u|^p : |u|_p = 1 \right\}. \tag{3.2}$$

Existe $\varphi_1 \geq 0$ na qual atinge-se o infímo em (3.2) e é chamada a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1. Em particular, φ_1 satisfaz a seguinte equação

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s \varphi_1 + V(x)|\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 = \lambda_1 |\varphi_1|^{p-2}\varphi_1 & \text{in} \quad \Omega, \\ \varphi_1 = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

pela Seção 3.2, segue que $\varphi_1 > 0$ em Ω.

Assim, o principal resultado a ser provado, que trata da multiplicidades de soluções do problema (3.1), é o seguinte:

Teorema 3.0.1. *Suponha que* $\Omega^+ \neq \emptyset$, $1 < p < \infty$ *e*

$$\int_\Omega a(x)\varphi_1^q(x)dx < 0.$$

Então existe $\delta > 0$ *tal que para* $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ *o problema* (3.1) *tem pelo menos duas soluções não triviais. Para* $\lambda = \lambda_1$ *existe pelo menos uma solução de* (3.1) *não trivial.*

A prova é baseada sobre as ideias dos artigos [6], [23] e outras referências citadas.

Neste Capítulo primeiramente estudamos o problema de autovalores como no artigo [38]. Logo, mediante sub-super solução mostramos resultados de existência e não existência de soluções como em [23]. Finalmente, usamos métodos variacionais para obter resultados de multiplicidade.

3.1 Preliminares

O funcional associado ao problema (3.1) é $J_\lambda : X_p^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p + \frac{1}{p}\int_\Omega (V-\lambda)(u^+)^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)(u^+)^q, \quad u \in X_p^s(\Omega).$$

Uma solução fraca para a equação (3.1) é uma função $u \in X_p^s(\Omega)$ que satisfaz

$$\langle(-\Delta_p)^s u, v\rangle = \int_\Omega (-V+\lambda)(u^+)^{p-1}vdx + \int_\Omega a(x)(u^+)^{q-1}vdx$$

para toda $v \in X_p^s(\Omega)$.

O seguinte lema nos permitirá provar que a sequência (u_n) é limitada em $X_p^s(\Omega)$, a demonstração pode ser encontrada em [[38], Lema 3.3].

Lema 3.1.1. *Seja* Ω *um domínio de extensão limitado de* $\mathbb{R}^N$. *Então dado* $\varepsilon > 0$ *existe*

C_ε tal que

$$\left|\int_\Omega V|u|^p\right| \le \varepsilon\|u\|^p + C_\varepsilon\left(\int_\Omega |V|^r\right)^{1/r}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\right)^{1/p},$$

para todo $u \in X_p^s(\Omega)$.

3.2 Problema de Autovalores

Os seguintes resultados do problema de autovalores podem ser encontrados no artigo [38]. Considere

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u + V(x)|u|^{p-2}u = \lambda|u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $V \in L^r(\Omega)$ com $r > N/sp$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor se existe $u \in X_p^s(\Omega)$ uma solução fraca não trivial de (3.4). Seja

$$\lambda_1 = \inf\{\|u\|^p + \int V|u|^p : |u|_p = 1\}.$$

O seguinte resultado prova que as autofunções são limitadas

Lema 3.2.1. *Seja Ω um domínio de extensão limitado de $\mathbb{R}^N$ e $V \in L^r(\Omega)$ com $r \in (1,\infty) \cap (\frac{N}{sp},\infty)$. Se u é uma autofunção associada a λ, então $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

A demonstração pode ser encontrada no Lema A.1 de [38].

Teorema 3.2.2. *Temos que $\lambda_1 > -\infty$ é o primeiro autovalor de (3.4). Além disso, λ_1 é simples, isolado e a autofunção associada φ_1 satisfaz $|\varphi_1| > 0$ em Ω.*

Prova. A demonstração será dividida em três Passos:

Passo 1: A primeira autofunção φ_1 satisfaz $|\varphi_1| > 0$ em Ω.

Como $||\varphi_1(x)| - |\varphi_1(y)|| \le |\varphi_1(x) - \varphi_1(y)|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, então $\||\varphi_1|\| \le \|\varphi_1\|$. Logo

$$\||\varphi_1|\|^p + \int_\Omega V(x)|\varphi_1|^p dx \le \|\varphi_1\|^p + \int_\Omega V(x)|\varphi_1|^p dx.$$

Assim

$$\lambda_1 \le \||\varphi_1|\|^p + \int_\Omega V(x)|\varphi_1|^p dx \le \|\varphi_1\|^p + \int_\Omega V(x)|\varphi_1|^p dx = \lambda_1.$$

Portanto, $|\varphi_1|$ é uma autofunção associada a λ_1. Como $V \in L^r(\Omega)$ com $r > \frac{N}{sp}$, pelo Lema 3.2.1, segue que $|\varphi_1| \in L^\infty(\Omega)$. Logo, pelo Teorema do Principio do Máximo 1.4.3, tem-se $|\varphi_1| > 0$ q.t.p em Ω.

Passo 2: Provaremos que λ_1 é simple. Seja u uma autofunção associada ao primeiro autovalor e v uma autofunção não negativa associada a $\lambda > 0$, pelo Lema 1.4.3, segue que $v > 0$ q.t.p em Ω. Para $m \in \mathbb{N}$ defina $v_m = v + \frac{1}{m}$. Primeiro provaremos que

$$w_m = \frac{u^p}{v_m^{p-1}} \in X_p^s(\Omega).$$

Observe que $w_m = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, como $w_m \in L^\infty(\Omega)$, então $w_m \in L^p(\Omega)$. Para $x, y \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned}
|w_m(x) - w_m(y)| &= \left| \frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v_m^{p-1}(y)} \right| \\
&= \left| \frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v_m^{p-1}(x)} + \frac{u^p(y)}{v_m^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v_m^{p-1}(y)} \right| \\
&\le \frac{1}{|v_m(x)|^{p-1}} |u^p(x) - u^p(y)| + \frac{u^p(y) v_m^{p-1}(y) - u^p(y) v_m^{p-1}(x)}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)} \\
&\le m^{p-1} |u^p(x) - u^p(y)| + |u(y)|^p \frac{v_m^{p-1}(y) - v_m^{p-1}(x)}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)}.
\end{aligned}$$

Como $u \in L^\infty(\Omega)$ e pela desigualdade (5.2), segue que

$$\begin{aligned}
&|w_m(x) - w_m(y)| \le m^{p-1} |u^p(x) - u^p(y)| + |u|_\infty^p \frac{|v_m^{p-1}(y) - v_m^{p-1}(x)|}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)} \\
&\le m^{p-1} c_p (u(x) + u(y))^{p-1} |u(x) - u(y)| + |u|_\infty^p C_p \frac{(v_m(y) + v_m(x))^{p-2} |v_m(y) - v_m(x)|}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)} \\
&\le p m^{p-1} (u^{p-1}(x) + u^{p-1}(y)) |u(x) - u(y)| + (p-1) |u|_\infty^p \frac{(v_m^{p-2}(y) + v_m^{p-2}(x)) |v(y) - v(x)|}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)} \\
&\le 2p m^{p-1} |u|_\infty^{p-1} |u(x) - u(y)| + (p-1) |u|_\infty^p \left(\frac{1}{v_m^{p-1}(x) v_m(y)} + \frac{1}{v_m(x) v_m^{p-1}(y)} \right) |v(y) - v(x)|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|w_m(x) - w_m(y)| \le C(m, p, |u|_\infty) \left(|u(x) - u(y)| + |v(y) - v(x)| \right).$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
|w_m(x)-w_m(y)|^p &\leq c(m,p,|u|_\infty)\left(|u(x)-u(y)|+|v(y)-v(x)|\right)^p \\
&\leq pc(m,p,|u|_\infty)\left(|u(x)-u(y)|^p+|v(y)-v(x)|^p\right).
\end{aligned}
$$

Integrando sobre Ω

$$
\int_\Omega \frac{|w_m(x)-w_m(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \leq pc(m,p,|u|_\infty)\left(\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p|^p}{|x-y|^{N+sp}}+\int_\Omega \frac{|v(y)-v(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\right).
$$

Como $u, v \in X_p^s(\Omega)$, então $w_m \in X_p^s(\Omega)$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Pela Desigualdade de Picone (2.4) (tomando $v=u$ e $u=v_m$), temos

$$
0 \leq \|u\|^p - \left\langle (-\Delta_p)^s v_m, \frac{u^p}{v_m^{p-1}} \right\rangle . \tag{3.5}
$$

Logo, como u é uma autofunção associada a λ_1 e v uma autofunção associada a λ, segue-se

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \|u\|^p - \left\langle (-\Delta_p)^s v, \frac{u^p}{v_m^{p-1}} \right\rangle \\
&\leq \lambda_1 \int_\Omega |u(x)|^p - \int_\Omega V(x)|u(x)|^p - \lambda \int_\Omega v^{p-1}(x)\frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} + \int_\Omega V(x)v^{p-1}(x)\frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} \\
&\leq \lambda \int_\Omega |u(x)|^p - \int_\Omega V(x)|u(x)|^p - \lambda \int_\Omega v^{p-1}(x)\frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} + \int_\Omega V(x)v^{p-1}(x)\frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)},
\end{aligned}
$$

pois $\lambda_1 < \lambda$. Tomando $m \to \infty$,

$$
\left| v^{p-1}\frac{u^p}{v_m^{p-1}} \right| = \left| \frac{v}{v_m} \right|^{p-1} |u|^p \leq |u|^p, \text{ q.t.p em } \Omega.
$$

Note que, $v_m(x) \to v(x)$ q.t.p em Ω, então

$$
v^{p-1}(x)\frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} \to v^{p-1}(x)\frac{u^p(x)}{v^{p-1}(x)} = u^p(x), \text{ q.t.p em } \Omega.
$$

Desde que $u \in L^p(\Omega)$ e Pelo Teorema da Convergência Dominada 5.0.10, temos

$$
\int_\Omega v^{p-1}(x)\frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} \to \int_\Omega u^p.
$$

Portanto,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\|u\|^p - \left\langle (-\Delta_p)^s v_m, \frac{u^p}{v_m^{p-1}}\right\rangle\right) = 0.$$

Logo, pelo Lema de Fatou 5.0.9, segue que

$$0 \leq \|u\|^p - \left\langle (-\Delta_p)^s v, \frac{u^p}{v^{p-1}}\right\rangle \leq \liminf_{m\to\infty}\left(\|u\|^p - \left\langle (-\Delta_p)^s v_m, \frac{u^p}{v_m^{p-1}}\right\rangle\right) = 0.$$

Assim,

$$\|u\|^p = \left\langle (-\Delta_p)^s v, \frac{u^p}{v^{p-1}}\right\rangle,$$

isto implica que, $u = kv$ para alguma constante $k > 0$. Portanto, λ_1 é simples e existe uma única autofunção positiva $\varphi_1 \in X_p^s(\Omega)$ associada a λ_1 tal que $|\varphi_1|_p = 1$.

Passo 3: λ_1 é isolado.

De fato, por definição λ_1 é isolado pela esquerda. Para demonstrar que λ_1 é isolado pela direita, argumentamos por contradição. Suponha que existe uma sequência de autovalores (λ_k) tal que $\lambda_k \to \lambda_1$ quando $k \to \infty$. Seja u_k a autofunção associada ao autovalor λ_k com $|u_k|_p = 1$. Pelo Lema 3.1.1, (u_k) é uma sequência limitada, então assumimos que a menos de subsequência existe $u \in X_p^s(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ em $X_p^s(\Omega)$,

$$\begin{aligned} u_k &\to u \text{ em } L^{pq'}(\mathbb{R}^N) \\ u_k &\to u \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \|u\|^p \leq \liminf_{k\to\infty}\|u_k\|^p &= \liminf_{k\to\infty}\left(\lambda_k \int_{\mathbb{R}^N}|u_k(x)|^p - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_k(x)|^p\right) \\ &= \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^p - \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(x)|^p. \end{aligned}$$

Portanto, u é uma autofunção associada a λ_1. Daí, segue que $u > 0$. Logo, pelo Lema 3.9 em [38], temos

$$(C(|\lambda_k| + 1 + |V|_r))^{-\frac{q}{q-p}} \leq |\{x \in \mathbb{R}^N : u_k(x) < 0\}|.$$

Usando o Teorema de Egorov's para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto $U_\varepsilon \subset \Omega$ tal que $|U_\varepsilon| < \varepsilon$ e a sequência $u_k \to u$ converge uniformemente em $\Omega \setminus U_\varepsilon$, tem-se

$$0 < (C(|\lambda_1| + 1 + |V|_r))^{-\frac{q}{q-p}} = \lim_{k\to\infty} (C(|\lambda_k| + 1 + |V|_r))^{-\frac{q}{q-p}} \leq 0,$$

onde $q \in (pr', p_s^*)$. Isto é uma contradição. $\square$

3.3 Existência e não existência de soluções

Proposição 3.3.1. *O funcional J_λ tem um mínimo local para todo $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$.*

Prova. Seja λ tal que $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$ e escolhemos $\overline{\lambda} > \lambda$ com $\overline{\lambda} \in \Lambda$. Seja $\overline{u}$ uma solução positiva de $(P_{\overline{\lambda}})$. Então

$$\begin{aligned} (-\Delta_p)^s \overline{u} &= (-V + \overline{\lambda})|\overline{u}|^{p-2}\overline{u} + a(x)\overline{u}^{q-2}\overline{u} \\ &\geq (V + \lambda)|\overline{u}|^{p-2}\overline{u} + a(x)\overline{u}^{q-2}\overline{u}, \end{aligned}$$

então $\overline{u}$ é uma supersolução de (3.1) Considere

$$M = \{u \in X_p^s(\Omega) : 0 \leq u \leq \overline{u}\}$$

Seja $u_1 \in M$ tal que $J(u_1) = \inf_M J_\lambda$, pelo Lemma 1.4.2, obtemos que u_1 é uma solução de (3.1). Provaremos que u_1 é uma solução não trivial. Como $\lambda_1 < \lambda$, podemos escolher $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω, tal que

$$\frac{\|\varphi\|^p + \displaystyle\int V|\varphi|^p}{\int |\varphi|^p} < \lambda. \tag{3.6}$$

Existe $t_0 > 0$ tal que $t\phi \leq \overline{u}$ para $t \in (0, t_0)$. Usando (3.6), tem-se

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\varphi) &= \frac{1}{p}\|t\varphi\|^p + \frac{1}{p}\int_\Omega (V-\lambda)(t\varphi)^p dx - \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)(t\varphi)^q dx \\ &= \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p + \frac{t^p}{p}\int_\Omega V(\varphi)^p dx - \frac{\lambda t^p}{p}\int_\Omega \varphi^p dx - \frac{t^q}{q}\int_\Omega a(x)\varphi^q dx \\ &= \frac{t^p}{p}\left(\|\varphi\|^p + \int_\Omega V\varphi^p - \lambda\int_\Omega \varphi^p dx\right) - \frac{t^q}{q}\int_\Omega a(x)\varphi^q dx \\ &< 0, \end{aligned}$$

se $t > 0$ é suficientemente pequeno. Portanto, $J_\lambda(u_1) < 0$ e assim u_1 é uma solução não trivial.

Afirmamos que u_1 pode ser considerado um mínimo local de J_λ em $X_p^s(\Omega)$. Definimos $\delta > 1$ tal que

$$\left(\delta^{q-p} - 1\right) a(x)\overline{u}^{q-p} < \overline{\lambda} - \lambda' \tag{3.7}$$

onde $\lambda' = \dfrac{\lambda + \overline{\lambda}}{2}$. Multiplicando (3.7) por $\delta^{p-1}\overline{u}^{p-1}$, obtem-se

$$\overline{\lambda}\delta^{p-1}\overline{u}^{p-1} + \delta^{p-1}a(x)\overline{u}^{q-1} \geq \lambda'(\delta\overline{u})^{p-1} + a(x)(\delta\overline{u})^{q-1} \tag{3.8}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (-\Delta_p)^s(\delta\overline{u}) &= \delta^{p-1}(-\Delta_p)^s\overline{u} = \delta^{p-1}\left((-V+\overline{\lambda})\,\overline{u}^{p-1} + a(x)\,\overline{u}^{q-1}\right) \\ &= -V\delta^{p-1}\overline{u}^{p-1} + \overline{\lambda}\delta^{p-1}\overline{u}^{p-1} + a(x)\,\delta^{p-1}\overline{u}^{q-1} \\ &\geq (-V+\lambda')(\delta\overline{u})^{p-1} + a(x)(\delta\overline{u})^{q-1}. \end{aligned}$$

Portanto, $\delta\overline{u}$ é uma supersolução para (3.1), desde que $\lambda' > \lambda$. Além disso $u_1 < \delta\overline{u}$ a.e em Ω. Sem perda de generalidade podemos assumir que

$$J_\lambda(u_1) = \min\{\, J_\lambda(u) : \, 0 \leq u(x) \leq \delta\,\overline{u}(x) \text{ a.e } x \in \Omega\,\}.$$

Pelo Lema 2.4.2, segue que u_1 é um mínimo local de J_λ em $X_p^s(\Omega)$. □

Teorema 3.3.2. *Suponha que existe $\overline{\lambda} > \lambda_1$ tal que o problema* (3.1) *possui uma solução. Então* (3.1) *tem uma solução para todo $\lambda \in (\lambda_1, \overline{\lambda})$.*

Demonstração. Seja $\overline{u}$ uma solução do problema (3.1) para $\overline{\lambda}$. Para $\lambda \in (\lambda_1, \overline{\lambda})$, $\overline{u}$ satisfaz

$$(-\Delta_p)^s\overline{u} + (V - \lambda)\,\overline{u}^{p-1} \geq (-\Delta_p)^s\overline{u} + \left(V - \overline{\lambda}\right)\overline{u}^{p-1} \geq a\overline{u}^{q-1},$$

então

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u + (V-\lambda)\overline{u}^{p-1} & \geq \; a(x)\,\overline{u}^{q-1} \quad \text{em } \Omega, \\ \overline{u} & = \; 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.9}$$

Portanto, $\overline{u}$ é uma supersolução fraca do problema (3.1) para λ. Por outro lado, se φ_1 definido como em (3.3) e ε suficientemente pequeno, então $\varepsilon\varphi$ é uma subsolução fraca de (3.1)

$$(-\Delta_p)^s(\varepsilon\varphi_1) + (V - \lambda)\,(\varepsilon\varphi_1)^{p-1} = (\lambda_1 - \lambda)(\varepsilon\varphi_1)^{p-1} \leq a(\varepsilon\varphi_1)^{q-1}.$$

Além disso, para ε suficientemente pequeno, tem-se $\overline{u} \geq \varepsilon\varphi_1$. Pelo Lema (1.4.2), segue que existe uma solução positiva $u \in X_0^s(\Omega)$ de (3.1) para $\lambda \in (\lambda_1, \overline{\lambda})$. □

Teorema 3.3.3. *O problema* (3.1) *não tem soluções positivas para* $\lambda > 0$ *suficientemente grande.*

Demonstração. Seja $x_0 \in \Omega^+$ e $r > 0$ tal que $B = B(x_0, r) \subset \Omega^+$. Seja φ_* a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1^* de $(-\Delta)^s$ em B. Seja u é uma solução positiva do problema (3.1) para λ, tal que

$$\lambda_1^* + R < \lambda,$$

onde $|V|_r = R$. Pela Desigualdade de Picone (2.3), tem-se

$$\left\langle (-\Delta_p)^s u, \frac{\varphi_*^p}{u^{p-1}} \right\rangle \leq \|\varphi_*\|^p,$$

usando (3.1), segue que

$$\begin{aligned} \lambda_1^* \int_B \varphi_*^p \; & \geq \; \lambda \int_B |u|^{p-1} \left(\frac{\varphi_*^p}{u^{p-1}}\right) - \int_B V|u|^{p-1}\left(\frac{\varphi_*^p}{u^{p-1}}\right) + \int_B a(x)|u|^{q-1}\left(\frac{\varphi_*^p}{u^{p-1}}\right) \\ & = \; \lambda \int_B \varphi_*^p - \int_B V\varphi_*^p + \int_B a(x)u^{q-p}\varphi_*^p. \end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_B a(x)u^{q-p}\varphi_*^p &\leq (\lambda_1^* - \lambda)\int_B \varphi_*^p + \int_B V\varphi_*^p \\
&\leq (\lambda_1^* - \lambda)\left(\int_B 1^r\right)^{1/r}\left(\int_B |\varphi_*^p|^{r'}\right)^{1/r'} + \left(\int_B |V|^r\right)^{1/r}\left(\int_B |\varphi_*^p|^{r'}\right)^{1/r'} \\
&\leq (\lambda_1^* - \lambda)|\Omega^*|\left(\int_B |\varphi_*^p|^{r'}\right)^{1/r'} + |V|_r\left(\int_B |\varphi_*^p|^{r'}\right)^{1/r'} \\
&\leq (\lambda_1^* - \lambda)C\left(\int_B |\varphi_*^p|^{r'}\right)^{1/r'} + C|V|_r\left(\int_B |\varphi_*^p|^{r'}\right)^{1/r'} \\
&= (\lambda_1^* + R - \lambda)C\left(\int_B |\varphi_*^p|^{r'}\right)^{1/r'}
\end{aligned}
$$

Como $a(x) \geq 0$ em B, $\varphi > 0$ e $u > 0$ então $\lambda_1^* + R \geq \lambda$ o que contradiz a escolha de λ. Portanto, não existe soluções positivas do problema (3.1) para λ suficientemente grande. □

3.4 Multiplicidade de Soluções

Seja o funcional $E_\lambda : X_p^s(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$E_\lambda(u) = \|u\|^p + \int_\Omega (V - \lambda)|u|^p$$

Observe que E_λ é um funcional fracamente semi-contínuo inferiormente. Além disso, E_λ é coercivo se, somente se $\lambda < \lambda_1$.

Suponha que $q < p_s^*$. Defina

$$\lambda_q^* = \inf_{u \in X_p^s(\Omega)} \left\{ E_{\lambda_1}(u) : \int_\Omega a u^q = 0,\ |u|_p = 1 \right\}$$

Para provar os resultados de multiplicidade de soluções consideramos os seguintes problemas variacionais

$$\alpha_{\lambda,q} = \inf_{u \in X_p^s(\Omega)} \left\{ E_\lambda(u) : \int_\Omega a\,|u|^q = -1 \right\}$$

e

$$\beta_{\lambda,q} = \inf_{u \in X_p^s(\Omega)} \left\{ E_\lambda(u) : \int_\Omega a\,|u|^q = 1 \right\}.$$

As soluções da equação (3.1) são obtidas como os mínimos de $\alpha_{\lambda,q}$ e $\beta_{\lambda,q}$, ou seja, se u atinge $\alpha_{\lambda,q}$ (respectivamente $\beta_{\lambda,q}$), podemos ver que u satisfaz

$$(-\Delta_p)^s u + (V-\lambda)\,|u|^{p-2}u = -\alpha_{\lambda,q} a\,|u|^{q-2}u, \tag{3.10}$$

respectivamente

$$(-\Delta_p)^s u + (V-\lambda)\,|u|^{p-2}u = \beta_{\lambda,q} a\,|u|^{q-2}u. \tag{3.11}$$

Multiplicando (3.11) por c^{p-1}, segue que

$$\begin{aligned} c^{p-1}\left[(-\Delta_p)^s u + (V-\lambda)\,|u|^{p-2}u\right] &= c^{p-1}\beta_{\lambda,q} a\,|u|^{q-2}u \\ (-\Delta_p)^s cu + (V-\lambda)\,|c\,u|^{p-2}c\,u &= \beta_{\lambda,q}\frac{c^{p-1}}{c^{q-1}} a\,|c\,u|^{q-2}c\,u. \end{aligned}$$

Então $u_1 = cu$ é uma solução de (3.1) com

$$c = \left(\frac{1}{\beta_{\lambda,q}}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

De maneira similar, multiplicando (3.10) por $\widetilde{c}^{p-1}$, obtemos que $u_2 = \widetilde{c}u$ é uma solução do problema (3.1) com

$$\widetilde{c} = \left(\frac{1}{\alpha_{\lambda,q}}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

3.4.1 Demonstração do Teorema 3.0.1

Provaremos os seguintes fatos:

i) $\lambda_q^* > 0$

i) $\alpha_{\lambda,q}$ é alcançado para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda^*)$ e $\alpha_{\lambda,q} < 0$.

ii) $\beta_{\lambda,q} \neq 0$ é bem definido e alcançado para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda^*)$.

iii) $\beta_{\lambda_1,q} > 0$ para $\lambda_1 = \lambda$,

Prova de (i): Por definição $\lambda_q^* \geq 0$, uma vez que $E_{\lambda_1}(u) \geq 0$. Suponha por contradição que $\lambda_q^* = 0$. Seja (u_n) uma sequência minimizante, tal que

$$|u_n|_p = 1 \;\text{ e }\; E_\lambda(u_n) = \|u_n\|^p + \int_\Omega (V - \lambda_1)|u_n|^p \to 0.$$

Pelo Lema 3.1.1, dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^p &+ \int_\Omega (V - \lambda_1)|u_n|^p = o(1) \\
\|u_n\|^p &= o(1) - \int_\Omega V|u_n|^p + \int_\Omega \lambda_1 |u_n|^p \\
&\leq o(1) + \left|\int_\Omega V|u_n|^p\right| + \int_\Omega \lambda_1 |u_n|^p \\
&\leq o(1) + \varepsilon\|u_n\|^p + C_\varepsilon |V|_r |u_n|_p^p + \lambda_1 |u_n|_p^p.
\end{aligned}$$

Como $|u_n|_p = 1$, segue

$$(1 - \varepsilon)\|u_n\|^p \leq o(1) + C_\varepsilon |V|_r + \lambda_1,$$

fixando $\varepsilon < 1$, obtém-se

$$\|u_n\|^p \leq \frac{C + C_\varepsilon |V|_r}{1 - \varepsilon}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo $\|u_n\|$ é limitada, então a menos de subsequência existe $u_0 \in X_p^s(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $X_p^s(\Omega)$ com

$$|u_0|_p = 1 \;\text{ e }\; \int_\Omega a(x)|u_0|^q = 0.$$

Além disso,

$$E_{\lambda_1}(u_0) = \|u_0\|^p + \int_\Omega (V - \lambda_1)|u_0|^p \leq \lambda^* = 0.$$

Assim,

$$\|u_0\|^p + \int_\Omega (V - \lambda_1)|u_0|^p = 0.$$

Daí u_0 é uma autofunção associada a λ_1, ou seja, u_0 é múltiplo de φ_1. O qual contradiz a hipótese pois $\int_\Omega a(x)\varphi_1^q dx < 0$. Portanto $\lambda_q^* > 0$.

Prova de (ii): A seguir provaremos que $\alpha_{\lambda,q} < 0$ para $\lambda > \lambda_1$. Seja w definido por

$$w = \frac{\varphi_1}{\left(-\int_\Omega a\varphi_1^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

então, $\int_\Omega aw^q = -1$. Assim,

$$E_\lambda(w) = \frac{E_\lambda(\varphi_1)}{\left(-\int_\Omega a\varphi_1^q\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\|\varphi_1\|^p + \int (V-\lambda)\varphi_1^p}{\left(-\int_\Omega a\varphi_1^q\right)^{\frac{p}{q}}},$$

como $\lambda > \lambda_1$, temos

$$\alpha_{\lambda,q} \leq E_\lambda(w) = \frac{E_\lambda(\varphi_1)}{\left(-\int_\Omega a\varphi_1^q\right)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\left(-\int_\Omega a\varphi_1^q\right)^{\frac{p}{q}}} < 0$$

Portanto, $\alpha_{\lambda,q} < 0$.

Provaremos que $\alpha_{\lambda,q}$ está bem definida, ou seja, $\alpha_{\lambda,q} > -\infty$. Demonstraremos por contradição. Suponha que existe uma sequência (u_n) de funções tal que

$$\int_\Omega a\,|u_n|^q = -1 \ \text{ e } \ E_\lambda(u_n) = \|u_n\|^p + \int_\Omega (V-\lambda)|u_n|^p \to -\infty.$$

Segue que, $\int_\Omega \lambda |u_n|^p \to \infty$. Definimos w_n por

$$w_n = \frac{u_n}{\left(\int_\Omega |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}},$$

assim, $\int_\Omega a|w_n|^q \to 0$ e $\int_\Omega |w_n|^p = 1$. Além disso, para n grande

$$\begin{aligned}
\|w_n\|^p + \int_\Omega (V-\lambda)|w_n|^p &= E_\lambda(w_n) \\
\|w_n\|^p + \int_\Omega (V-\lambda)|w_n|^p &= \frac{E_\lambda(u_n)}{\int_\Omega |u_n|^p} \leq 0.
\end{aligned}$$

Daí, pelo Lema 3.1.1, segue que para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$(1-\varepsilon)\|w_n\|^p - C_\varepsilon |V|_r - \lambda |w_n|^p \leq \|w_n\|^p + \int_\Omega V|w_n|^p - \lambda \int_\Omega |w_n|^p \leq o(1).$$

Fixando, $\varepsilon < 1$, temos

$$\|w_n\|^p \leq \frac{C + C_\varepsilon |V|_r}{1-\varepsilon}.$$

Assim, $\|w_n\|$ é limitada. Como $X_p^s(\Omega)$ é reflexivo existe uma subsequência fracamente convergente, ou seja, $w_n \rightharpoonup w$ em $X_p^s(\Omega)$ e assim,

$$\int_\Omega a|w|^q = 0, \quad \int_\Omega |w|^p = 1 \ \text{ e } \ E_\lambda(w) \leq 0.$$

Isto é uma contradição com $\lambda_q^* > 0$. Portanto, $\alpha_{\lambda,q} > -\infty$.

Agora provaremos que $\alpha_{\lambda,q}$ é alcançado. Seja u_n uma sequência de funções minimizadora para $\alpha_{\lambda,q}$, ou seja,

$$\int_\Omega a|u_n|^q = -1 \quad \text{e} \quad E_\lambda(u_n) \to \alpha_{\lambda,q}.$$

Afirmamos que $\|u_n\|$ é limitada. De fato, por contradição, suponha que $\|u_n\| \to \infty$. De

$$E_\lambda(u_n) = \|u_n\|^p + \int_\Omega (V-\lambda)|u_n|^p \to \alpha_{\lambda,q}.$$

Temos que $\displaystyle\int_\Omega |u_n|^p \to \infty$. Definimos w_n por

$$w_n = \frac{u_n}{|u_n|_p}$$

então

$$\int_\Omega a|w_n|^q \to 0 \ \text{ e } \ |w_n|_p = \int_\Omega |w_n|^p = 1.$$

Além disso,

$$\|w_n\|^p + \int_\Omega (V-\lambda)|w_n|^p = E_\lambda(w_n) \leq \frac{E_\lambda(u_n)}{\displaystyle\int_\Omega |u_n|^p} \leq o(1).$$

Daí, pelo Lema 3.1.1 e tomando $\varepsilon < 1$, obtém-se

$$\|w_n\|^p \leq \frac{C + C_\varepsilon |V|_r}{1-\varepsilon}.$$

Assim $\|w_n\|$ é limitada. Então existe $w \in X_p^s(\Omega)$ tal que a menos de subsequência $w_n \rightharpoonup w$ em $X_p^s(\Omega)$. Deste modo

$$\int_\Omega a\,|w|^q = 0, \quad |w|_p^p = 1 \ \text{ e } \ E_\lambda(w) = 0.$$

Logo, $\lambda_q^* \leq \lambda - \lambda_1$, o qual é uma contradição, pois $\lambda < \lambda_1 + \lambda_q^*$. Portanto (u_n) é uma sequência limitada. Podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ em $X_p^s(\Omega)$, assim

$$\int_\Omega a(x)|u|^q dx = -1 \ \text{ e}$$

$$\alpha_{\lambda,q} \leq E_\lambda(u) \leq \liminf E_\lambda(u_n) = \alpha_{\lambda,q}.$$

Portanto, u é um mínimo para $\alpha_{\lambda,q}$, ou seja, u é uma solução não trivial de

$$(-\Delta)^s u + (V-\lambda)\,|u|^{p-2}u = -\alpha_{\lambda,q} a\,|u|^{q-2}u.$$

Prova de (iii): Provaremos que $\beta_{\lambda,q}$ está bem definida, ou seja, $\beta_{\lambda,q} > -\infty$. Suponha que existe uma sequência (u_n) de funções tal que

$$\int_\Omega a\,|u_n|^q = 1 \ \text{ e } \ E_\lambda(u_n) = \|u_n\|^p + \int_\Omega (V-\lambda)|u_n|^p \to -\infty.$$

Segue que, $\displaystyle\int_\Omega \lambda |u_n|^p \to +\infty$. Definimos w_n por

$$w_n = \frac{u_n}{|u_n|_p},$$

assim, $\displaystyle\int_\Omega a|w_n|^q \to 0$ e $|w_n|_p = 1$. Além disso, para n grande

$$\|w_n\|^p + \int_\Omega (V-\lambda)|w_n|^p = E_\lambda(w_n) \leq \frac{E_\lambda(u_n)}{|u_n|_p^p} \leq 0.$$

Pelo Lema 3.1.1, segue que dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$(1-\varepsilon)\|w_n\|^p \leq C_\varepsilon |V|_r + \lambda,$$

para $\varepsilon < 1$, temos que $\|w_n\|$ é limitada, então existe $w \in X_p^s(\Omega)$ tal que

$$\begin{array}{lll} w_n \rightharpoonup w & \text{em} & X_p^s(\Omega) \\ w_n \to w & \text{em} & L^p(\Omega) \\ w_n \to w & \text{em} & L^{r'p}(\Omega). \end{array}$$

Em particular

$$\int_\Omega a|w|^q = 0, \quad |w|_p = 1 \text{ e } E_\lambda(w) \leq 0.$$

Por conseguinte

$$\|w\|^p \leq \lambda - \int_\Omega V|w|^p.$$

Assim, segue que

$$\lambda_q^* \leq E_{\lambda_1}(w) = \|w\|^p + \int_\Omega (V-\lambda_1)|w|^p \leq \lambda - \lambda_1,$$

o que é uma contradição, pois $\lambda < \lambda_1 + \lambda_q^*$. Portanto, $\beta_{\lambda,q}$ esta bem definido.

A seguir provaremos que $\beta_{\lambda,q}$ é alcançado. Seja (u_n) uma sequência de funções minimizante de $\beta_{\lambda,q}$, ou seja,

$$\int_\Omega a|u_n|^q = 1 \quad \text{e} \quad E_\lambda(u_n) \to \beta_{\lambda,q}.$$

Afirmamos que $\|u_n\|$ é limitada. Suponhamos por contradição que $\|u_n\| \to \infty$. De

$E_\lambda(u_n) \to \beta_{\lambda,q}$, temos que $|u_n|_p \to \infty$. Definimos

$$w_n = \frac{u_n}{|u_n|_p}.$$

Assim,

$$|w_n|_p = 1, \ \int_\Omega a|w_n|^q \to 0 \ \text{ e}$$

$$E_\lambda(w_n) = \|w_n\|^p + \int (V-\lambda)|w_n|^p = \frac{E_\lambda(u_n)}{|u_n|_p^p} \leq o(1).$$

Como na prova para $\alpha_{\lambda,q}$ em ii), temos que $\|w_n\|$ é limitada. Passando para uma subsequência, podemos assumir que existe $w \in X_p^s(\Omega)$ tal que

$$w_n \rightharpoonup w \ \text{ em } \ X_p^s(\Omega),$$

com

$$\int_\Omega a|w|^q = 0 \ \text{ e } \quad E_\lambda(w) = \|w\|^p + \int (V-\lambda)w^p \leq 0,$$

isto contradiz o fato que $\lambda_q^* > 0$. Portanto, (u_n) é uma sequencia limitada. Como $X_p^s(\Omega)$ é reflexivo, então existe uma subsequencia (u_n) tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $X_p^s(\Omega)$, assim

$$\int_\Omega a(x)|u|^q dx = 1 \ \text{ e}$$

$$\beta_{\lambda,q} \leq E_\lambda(u) \leq \liminf E_\lambda(u_n) = \beta_{\lambda,q}.$$

Portanto, $\beta_{\lambda,q}$ é alcançado.

Agora provaremos que $\beta_{\lambda,q} \neq 0$ para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \lambda_q^*$. Suponha por contradição que $\beta_{\lambda,q} = 0$. Seja u uma solução positiva de (3.1) que alcança $\beta_{\lambda,q}$. Daí

$$(-\Delta_p)^s u + (V-\lambda)\, u^{p-1} = \beta_{\lambda,q} a\, u^{q-1}.$$

Logo,

$$(-\Delta_p)^s u + (V-\lambda)\, u^{p-1} = 0.$$

Mas o problema acima não tem soluções positivas, pois λ não é um autovalor. Portanto,

$\beta_{\lambda,q} \neq 0$.

Prova de (iv): Para $\lambda = \lambda_1$. Como $\beta_{\lambda_1,q} \geq 0$, desde que $E_{\lambda_1}(u) \geq 0$. Por contradição, suponha que $\beta_{\lambda_1,q} = 0$. Como $\beta_{\lambda_1,q}$ é alcançado, então

$$(-\Delta_p)^s u + (V - \lambda_1)\, u^{p-1} = \beta_{\lambda_1,q} a\, u^{q-1}.$$

ou seja, u é uma autofunção associada a λ_1 com

$$\int_{\Omega} a(x) u^q dx = 1,$$

na qual contradiz a hipótese. Portanto, $\beta_{\lambda_1,q} > 0$.

$\blacksquare$

Capítulo

4

Multiplicidade, Existência e não Existência para $(-\Delta)^s + V$ no caso crítico

Neste Capítulo, estudamos a existência e multiplicidade de soluções positivas do problema (4.1) no caso crítico envolvendo o operador Laplaciano fracionário

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u & = \lambda\, u + a(x)u^{2_s^*-1} \quad \text{em } \Omega, \\ u & > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde Ω um domínio suave de $\mathbb{R}^N, N > 2s,\ s \in (0,1)$. Assumimos que $V \in L^r(\Omega)$ com $r > N/2s,\ a : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que muda de sinal em Ω e

$$2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$$

é o expoente de Sobolev crítico fracionário, λ é um parâmetro real e $(-\Delta)^s$ é o operador Laplaciano fracionário definido por

$$(-\Delta)^s u(x) := C(N,s) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $C(N,s)$ é uma constante de normalização positiva adequada. Seja λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta)^s + V$ em Ω, ou equivalentemente

$$\lambda_1 := \inf_{u \in X_0^s(\Omega)} \left\{ \|u\|^2 + \int_\Omega V(x)|u|^2 : \, |u|_2 = 1 \right\}. \tag{4.2}$$

Seja $\phi_1 \geq 0$ a função que atinge o infímo em (4.2) e é chamada a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 com $|\phi_1|_2 = 1$. Em particular ϕ_1 satisfaz

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u & = \lambda_1 \, u \quad \text{em } \Omega, \\ u & > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Considere

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : a(x) > 0\}$$
$$\Omega^- = \{x \in \Omega : a(x) < 0\}.$$

conjuntos abertos e não vazios de Ω. Definimos os problemas variacionais para o problema (4.1) no caso crítico

$$\alpha_\lambda = \inf_{u \in X_0^s(\Omega)} \left\{ \|u\|^2 + \int_\Omega (V - \lambda)|u|^2 : \int_\Omega a \, |u|^{2_s^*} = -1 \right\}$$

e

$$\beta_\lambda = \inf_{u \in X_0^s(\Omega)} \left\{ \|u\|^2 + \int_\Omega (V - \lambda)|u|^2 : \int_\Omega a \, |u|^{2_s^*} = 1 \right\}.$$

Nosso principal objetivo é demonstrar o seguinte Teorema:

Teorema 4.0.1. *Suponha que* $\Omega^+ \neq \emptyset$, $\Omega^- \neq \emptyset$, $\lambda > \lambda_1$ *e*

$$\int_\Omega a(x)\phi_1^{2_s^*}(x)dx < 0.$$

Então existe $\delta > 0$ *tal que se* $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$*, existe pelo menos uma solução do problema*

(4.1). *Além disso, se*

$$\beta_\lambda < K(N,2)^{-2} \sup |a|^{\frac{-2}{2_s^*}},$$

então existe pelo menos duas solucões não triviais de (4.1).

Este Capítulo, está organizado em 3 Seções. Na primeira Seção, provamos as condições necessárias para a existência de soluções. Na Seção 4.2, apresentamos os problemas variacionais respeito ao problema (4.1) e mostramos alguns propriedades que serão utilizados para provar nosso resultado principal. Finalmente na Seção 4.3, demonstramos o Teorema 4.0.1, usando métodos variacionais e o Princípio de Concentração e Compacidade na qual nos permite superar a falta de compacidade, a prova é baseada nas ideias do artigo [6].

4.1 Condições Necessárias para a existência de soluções

A seguir apresentamos condições necessárias para a existencia de soluções do problema (4.1).

Teorema 4.1.1. *Suponha que o problema* (4.1) *tem uma solução. Então*

i) $\displaystyle\int_\Omega a(x)\phi_1^{2_s^*}(x)dx < 0$ *se* $\lambda > \lambda_1$.

ii) $\Omega^+ \neq \emptyset$ *se* $\lambda < \lambda_1$.

iii) $\Omega^+ \neq \emptyset$ *e* $\Omega^- \neq \emptyset$ *se* $\lambda = \lambda_1$.

Demonstração. Seja ϕ_1 é a primeira autofunção associada a λ_1, pelo Teorema 3.2.2, $\phi_1 > 0$ em Ω, então pelo Lema 2.5 em [23], temos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\phi_1 \geq c d^s$$

onde $d^s = dist(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Como u é uma solução não negativa de (4.1) e pelo Lema 3.2.1 $u \in L^\infty(\Omega)$, então pelo Lema 2.4 em [23], temos que existe $C > 0$ tal que

$$u \leq C d^s.$$

Portanto, obtemos que existe $t > 0$ tal que

$$tu \leq \phi_1.$$

A seguir vamos multiplicar a equação (4.1) por $\dfrac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma}$

$$(-\Delta)^s u \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma} + (V - \lambda) \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}} = a(x) \, u^{2_s^*-1} \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma}. \tag{4.4}$$

Multiplicamos a equação (4.3) por $\dfrac{\phi_1^\gamma}{u^{\gamma-1}}$

$$(-\Delta)^s \phi_1 \, \frac{\phi_1^\gamma}{u^{\gamma-1}} + (V - \lambda_1) \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}} = 0,$$

então

$$V \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}} = -(-\Delta)^s \phi \, \frac{\phi_1^\gamma}{u^{\gamma-1}} + \lambda_1 \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}. \tag{4.5}$$

De (4.4) e (4.5), tem-se

$$(-\Delta)^s u \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma} - (-\Delta)^s \phi_1 \, \frac{\phi_1^\gamma}{u^{\gamma-1}} + \lambda_1 \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}} - \lambda \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}} = a(x) \, u^{2_s^*-1} \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma}$$

$$(-\Delta)^s u \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma} - (-\Delta)^s \phi_1 \, \frac{\phi_1^\gamma}{u^{\gamma-1}} = a(x) \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-2_s^*+1}} + \lambda \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}} - \lambda_1 \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}},$$

integrando

$$\int_\Omega (-\Delta)^s u \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma} - \int_\Omega (-\Delta)^s \phi_1 \, \frac{\phi_1^\gamma}{u^{\gamma-1}} = \int_\Omega a(x) \, \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-2_s^*+1}} + \int_\Omega (\lambda - \lambda_1) \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}. \tag{4.6}$$

Pela definição do Laplaciano fracionário, o lado esquerdo da equação acima é

$$\int \frac{(u(x) - u(y)) \left(\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma}(x) - \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma}(y) \right)}{|x-y|^{n+2s}} - \int \frac{(\phi_1(x) - \phi_1(y)) \left(\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}(x) - \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}(y) \right)}{|x-y|^{n+2s}} =$$

$$\int \frac{(u(x) - u(y)) \left(\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma}(x) - \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma}(y) \right) - (\phi_1(x) - \phi_1(y)) \left(\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}(x) - \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}(y) \right)}{|x-y|^{n+2s}}.$$

Agora

$$
\begin{aligned}
&(u(x)-u(y))\left(\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma}(x)-\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma}(y)\right)-(\phi_1(x)-\phi_1(y))\left(\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}(x)-\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}(y)\right)\\
=\;&\left(\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}\right)(x)-\left(\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^\gamma}\right)(y)\,u(x)-\left(\frac{\phi^{1+\gamma}}{u^\gamma}\right)(x)\,u(y)+\left(\frac{\phi^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}\right)(y)-\\
&\left[\left(\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}\right)(x)-\left(\frac{\phi_1^{\gamma}}{u^{\gamma-1}}\right)(y)\,\phi_1(x)-\left(\frac{\phi_1^{\gamma}}{u^{\gamma-1}}\right)(x)\,\phi_1(y)+\left(\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}\right)(y)\right]\\
=\;&\left(\frac{\phi_1^{\gamma}}{u^\gamma}\right)(x)u(x)\phi_1(y)+\left(\frac{\phi_1^{\gamma}}{u^\gamma}\right)(y)\,u(y)\,\phi_1(x)-\left(\frac{\phi_1^{\gamma}}{u^\gamma}\right)(y)\phi_1(y)u(x)-\left(\frac{\phi_1^{\gamma}}{u^\gamma}\right)(x)\phi_1(x)\,u(y).
\end{aligned}
$$

Afirmação 3.

$$
\frac{\phi_1^\gamma(x)}{u^\gamma(x)}u(x)\phi_1(y)+\frac{\phi_1^\gamma(y)}{u^\gamma(y)}u(y)\phi_1(x)-\frac{\phi_1^\gamma(y)}{u^\gamma(y)}\phi_1(y)u(x)-\frac{\phi_1^\gamma(x)}{u^\gamma(x)}\phi_1(x)u(y)\leq 0. \tag{4.7}
$$

De fato, multiplicando (4.7) por $u^\gamma(x)u^\gamma(y)$, segue que

$$
\phi_1^\gamma(x)u^\gamma(y)u(x)\phi_1(y)+\phi_1^\gamma(y)u^\gamma(x)u(y)\phi_1(x)-\phi_1^\gamma(y)u^\gamma(x)u(x)\phi_1(y)-\phi_1^\gamma(x)u^\gamma(y)u(y)\phi_1(x)
$$

$$
=\phi_1^\gamma(x)\,u^\gamma(y)\,u(x)\,\phi_1(y)+\phi_1^\gamma(y)\,u^\gamma(x)\,u(y)\,\phi_1(x)-\phi_1^{\gamma+1}(y)\,u^{\gamma+1}(x)-\phi_1^{\gamma+1}(x)\,u^{\gamma+1}(y)
$$

Pelo Lemma 4.1.2 abaixo, segue a Afirmação.

Da equação (4.6) e da Afirmação 3, tem-se

$$
\int_\Omega a(x)\,\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-2_s^*+1}}+\int_\Omega(\lambda-\lambda_1)\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}\leq 0,
$$

ou seja,

$$
\int_\Omega a(x)\,\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-2_s^*+1}}\leq-(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}. \tag{4.8}
$$

Escolhendo $\gamma=2_s^*-1$. Como $\lambda>\lambda_1$ e da equação (4.8), obtemos

$$
\int_\Omega a(x)\,\phi_1^{2_s^*}(x)dx<0.
$$

Logo, $i)$ é válido. Para provar o item $ii)$, escolhemos que $\gamma = 0$ na equação (4.6),

$$\int_\Omega a\, u^{2_s^*-1}\phi_1 + (\lambda - \lambda_1)\int_\Omega u\,\phi_1 = \int_\Omega (-\Delta)^s u\,\phi_1 - \int_\Omega (-\Delta)^s \phi_1\, u,$$

como $(-\Delta)^s$ é simétrico, tem-se

$$\int_\Omega a(x)\, u^{2_s^*-1}\phi_1 + (\lambda - \lambda_1)\int_\Omega u\,\phi_1 = 0.$$

Por outro lado, $\lambda - \lambda_1 < 0$ e u, $\phi_1 > 0$ em Ω, então

$$\int_\Omega a(x)\, u^{2_s^*-1}\phi_1 = -(\lambda - \lambda_1)\int_\Omega u\,\phi_1 > 0.$$

Daí $a^+(x) \neq 0$. Portanto, $\Omega^+ \neq \emptyset$. Finalmente provaremos o item $iii)$. Suponha por contradição que $\Omega^- = \emptyset$, então $a(x) \geq 0$ em Ω e $a \neq 0$. Na desigualdade (4.8), tomando $\gamma = 2_s^* - 1$ e $\lambda = \lambda_1$, temos

$$\int_\Omega a(x)\, \phi_1^{2_s^*}(x)dx \leq 0.$$

Suponhamos que

$$\int_\Omega a(x)\, \phi_1^{2_s^*}(x)dx = 0,$$

isto implica que $a(x)\phi_1^{2_s^*}(x) = 0$, q.t.p em Ω, desde que $\phi_1 > 0$, então $a(x) = 0$ q.t.p em Ω, o que contradiz a hipótese que a é diferente de 0. Assim,

$$\int_\Omega a(x)\, \phi_1^{2_s^*}(x)dx < 0.$$

Portanto, $\Omega^- \neq \emptyset$. Para provar que $\Omega^+ \neq \emptyset$ para $\lambda = \lambda_1$, suponha que $\Omega^+ = \emptyset$, então $a(x) \leq 0$ em Ω. Multiplicando a equação (4.1) por ϕ_1, tem-se

$$(-\Delta)^s u\,\phi_1 + V(x)u\phi_1 = \lambda_1 u\phi_1 + a(x)\, u^{2_s^*-1}\phi_1,$$

integrando,

$$\int (-\Delta)^s \phi_1\, u + \int (V - \lambda_1)\phi_1\, u = \int (-\Delta)^s u\,\phi_1 + \int (V - \lambda_1)u\,\phi_1 = \int a(x)\, u^{2_s^*-1}\phi_1,$$

pela equação (4.3), temos que

$$\int a(x)\, u^{2_s^*-1}\phi_1 = 0,$$

Por outro lado, como $a^-(x) \neq 0$, $u > 0$ e $\phi_1 > 0$ implica que $a(x)\, u^{2_s^*-1}\phi_1 < 0$. Pela monotonia da integral, segue que

$$\int a(x)\, u^{2_s^*-1}\phi_1 < 0,$$

isto é uma contradição. Portanto, $\Omega^+ \neq \emptyset$. □

Lema 4.1.2. *Seja $a, b > 0$, então*

$$a^\gamma\, b + b^\gamma\, a - a^{\gamma+1} - b^{\gamma+1} \leq 0.$$

Prova. Pela Desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned} a^\gamma\, b &\leq \frac{\gamma}{\gamma+1} a^{\frac{\gamma+1}{\gamma}\gamma} + \frac{1}{\gamma+1} b^{\gamma+1} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma+1} a^{\gamma+1} + \frac{1}{\gamma+1} b^{\gamma+1}, \end{aligned}$$

de igual maneira utilizando a Desigualdade de Young para $b^\gamma\, a$, temos

$$b^\gamma\, a \leq \frac{\gamma}{\gamma+1} b^{\gamma+1} + \frac{1}{\gamma+1} a^{\gamma+1},$$

somando, tem-se

$$\begin{aligned} a^\gamma\, b + b^\gamma\, a &\leq \frac{\gamma}{\gamma+1} a^{\gamma+1} + \frac{1}{\gamma+1} b^{\gamma+1} + \frac{\gamma}{\gamma+1} b^{\gamma+1} + \frac{1}{\gamma+1} a^{\gamma+1} \\ &= \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{1}{\gamma+1}\right) a^{\gamma+1} + \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{1}{\gamma+1}\right) b^{\gamma+1} \\ &= \frac{\gamma+1}{\gamma+1} a^{\gamma+1} + \frac{\gamma+1}{\gamma+1} b^{\gamma+1} \\ &= a^{\gamma+1} + b^{\gamma+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a^\gamma\, b + b^\gamma\, a \leq a^{\gamma+1} + b^{\gamma+1}.$$

$\square$

4.2 Resultados variacionais

Iniciamos esta Seção definindo o funcional $E_\lambda : X_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$E_\lambda(u) = \|u\|^2 + \int_\Omega (V - \lambda)|u|^2.$$

o funcional E_λ é fracamente semi-contínuo inferiormente. Considere a equação (4.1) no caso sub-crítico

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u & = \lambda\, u + a(x)|u|^{q-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.9}$$

onde $2 < q < 2_s^*$ com os seus respectivos problemas variacionais

$$\alpha_{\lambda,q} = \inf_{u \in X_0^s(\Omega)} \left\{ E_\lambda(u) : \int_\Omega a\,|u|^q = -1 \right\}$$

e

$$\beta_{\lambda,q} = \inf_{u \in X_0^s(\Omega)} \left\{ E_\lambda(u) : \int_\Omega a\,|u|^q = 1 \right\}.$$

Defina

$$\lambda_q^* = \inf_{u \in X_0^s(\Omega)} \left\{ E_{\lambda_1}(u) : \int_\Omega a\,|u|^q = 0, |u|_2 = 1 \right\}.$$

Pelo Capítulo 3, temos que $\alpha_{\lambda,q}$ e $\beta_{\lambda,q}$ são bem definidos e alcançados. Além disso, $\alpha_{\lambda,q} < 0$ para $\lambda > \lambda_1$, $\beta_{\lambda_1,q} > 0$ e $\lambda_q^* > 0$.

Lema 4.2.1. $\beta_{\lambda,q} > 0$ *para* $\lambda > \lambda_1$.

De fato, como $\beta_{\lambda,q}$ é alcançado, então suponha que $u \geq 0$ é uma função que alcança o mínimo em $\beta_{\lambda,q}$, ou seja,

$$(-\Delta)^s u + (V - \lambda)\, u = \beta_{\lambda,q} a(x)\, u^{q-1}.$$

Usando a desigualdade (4.8), para o caso sub-crítico, temos

$$\int_\Omega a(x)\,\frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-q+1}} \leq -(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega \frac{\phi_1^{1+\gamma}}{u^{\gamma-1}}. \tag{4.10}$$

Tomando $\gamma = q-1$, obtém-se

$$\beta_{\lambda,q}\int_\Omega a(x)\phi^q(x)dx \leq -(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega u^{2-q}(x)\phi_1^q(x)dx,$$

por hipóteses, sabemos que $\displaystyle\int_\Omega a(x)\phi_1^q(x)dx < 0$ e $\lambda-\lambda_1>0$. Portanto, $\beta_{\lambda,q}>0$. $\square$

Seja

$$\lambda^*_{2^*_s} = \inf_{u\in X_0^s(\Omega)}\left\{E_{\lambda_1}(u) : \int_\Omega a\,|u|^{2^*_s} = 0,\ |u|_2 = 1\right\}.$$

Agora mostraremos que β_λ e α_λ são bem definidos, $\beta_\lambda \geq 0$ e $\lambda^*_{2^*_s} > 0$.

Proposição 4.2.2.

a) $\lambda^*_{2^*_s} \geq \limsup\limits_{q\to 2^*_s}\lambda^*_q \geq \liminf\limits_{q\to 2^*_s}\lambda^*_q := \lambda^* > 0.$

b) α_λ *é bem definido, para* λ *próximo a* λ_1.

c) β_λ *é bem definido. Para* $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_1+\lambda^*$, *temos*

$$0 \leq \liminf_{q\to 2^*_s}\beta_{\lambda,q} \leq \limsup_{q\to 2^*_s}\beta_{\lambda,q} \leq \beta_\lambda.$$

Demonstração.

a): A seguir provaremos que $\liminf\limits_{q\to 2^*_s}\lambda^*_q > 0$. Seja u_q uma função que alcança λ^*_q, ou seja,

$$E_{\lambda_1}(u_q) = \|u_q\|^2 + \int_\Omega (V-\lambda_1)|u_q|^2 = \lambda^*_q$$

com $|u_q|_2 = 1$ e $\displaystyle\int_\Omega a(x)|u_q|^q = 0$. Suponha por contradição que $\liminf\limits_{q\to 2^*_s}\lambda^*_q = 0$. Então

$$E_{\lambda_1}(u_q) = \|u_q\|^2 + \int_\Omega (V-\lambda_1)|u_q|^2 \to 0.$$

Logo, $\|u_q\|^2 + \displaystyle\int_\Omega (V - \lambda_1)|u_q|^2 \leq o(1)$. Pelo Lema 3.1.1 e tomando $\varepsilon < 1$, obtém-se

$$\|u_q\|^2 \leq \frac{C + C_\varepsilon |V|_r}{1 - \varepsilon}.$$

Portanto, $\|u_q\|$ é limitada, então existe $u_q \in X_0^s(\Omega)$ tal que a menos de subsequência $u_q \rightharpoonup u$ em $X_0^s(\Omega)$, quando $q \to 2_s^*$ com

$$|u|_2 = 1 \text{ e } E_{\lambda_1}(u) \leq 0.$$

Deste modo, $E_{\lambda_1}(u) = 0$, pois $E_{\lambda_1}(u) \geq 0$. Observe que,

$$\int_\Omega (V - \lambda_1)|u_q|^2 \to \int_\Omega (V - \lambda_1)|u|^2.$$

Daí, segue que $u_q \to u$ em $X_0^s(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq \liminf_{q \to 2_s^*} \|u_q\|^2 \leq \lim_{q \to 2_s^*} \int_\Omega (\lambda_1 - V)|u_q|^2 \\ &= \int_\Omega (\lambda_1 - V)|u|^2 = \|u\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_\Omega a(x) u^{2_s^*} = \lim_{q \to 2_s^*} \int_\Omega a(x) u_q^q = 0$$

e como $E_{\lambda_1}(u) = 0$, então u é uma autofunção associada a λ_1, ou seja, u é múltiplo de ϕ_1, a qual contradiz a hipótese, pois $\displaystyle\int_\Omega a(x)\phi_1^{2_s^*} < 0$. Portanto, $\lambda^* > 0$.

Agora provaremos que, $\lambda^* \leq \lambda_{2_s^*}^*$. De fato, seja $u \in C^1(\Omega)$ com $u \geq 0$ tal que

$$|u|_2 = 1, \int_\Omega a(x) u^{2_s^*} = 0 \text{ e } E_{\lambda_1}(u) \leq \lambda_{2_s^*}^* + \varepsilon.$$

Se existe uma sequência infinita $q \to 2_s^*$ tal que $\displaystyle\int_\Omega a(x) u^q = 0$, segue que $\lambda^* \leq \lambda_{2_s^*}^*$. Se não, existe uma sequência infinita $q \to 2_s^*$ tal que

$$\text{ou} \quad \int_\Omega a(x)u^q > 0, \ \forall\, q \tag{4.11}$$

$$\text{ou} \quad \int_\Omega a(x)u^q < 0, \ \forall\, q. \tag{4.12}$$

Suponha que (4.11) se satisfaz. Defina

$$\alpha(q) = \frac{\displaystyle\int_\Omega a(x)u^q}{\displaystyle\int_\Omega a(x)u^q - \int_\Omega a(x)\phi_1^q}.$$

Então $\alpha(q) \in [0,1]$ e $\alpha(q) \to 0$, quando $q \to 2_s^*$. Seja

$$v_q = \left(\alpha(q)\phi_1 + (1-\alpha(q))u^q\right)^{1/q}.$$

Como $\phi_1, u \in X_0^s(\Omega)$, segue que $v_q \in X_0^s(\Omega)$, $v_q \geq 0$ e

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_q^q &= \int_\Omega a\left(\alpha(q)\phi_1 + (1-\alpha(q))u^q\right) \\
&= -\int_\Omega \alpha(q)(au^q - a\phi_1^q) + \int_\Omega au^q \\
&= -\int_\Omega au^q + \int_\Omega au^q = 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $v_q \to u$, quando $q \to 2_s^*$. Como consequência, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_q^*(1+o(1)) &\leq \lambda_q^*\left(\int v_q^2\right) \leq \|v_q\|^2 + \int (V-\lambda_1)|v_q|^2 \\
&\leq \lambda_{2_s^*}^* + \varepsilon + o(1), \ \text{quando } q \to 2_s^*.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda^* \leq \lambda_{2_s^*}^*$. Agora suponha que (4.12) ocorre, então que existe uma sequência $q \to 2_s^*$ tal que $\displaystyle\int_\Omega a(x)u^q < 0$. Seja $u_0 \geq 0$ em $C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\int_\Omega a(x)u^q > 0.$$

Defina

$$v_q = (\alpha(q)u_0 + (1-\alpha(q))u^q)^{1/q}$$

onde

$$\alpha(q) = \frac{\displaystyle\int_\Omega a(x)u^q}{\displaystyle\int_\Omega a(x)u^q - \int_\Omega a(x)u_0^q}.$$

Como no caso anterior, concluímos que $\lambda^* \leq \lambda^*_{2^*_s}$.

b): α_λ é bem definido, ou seja, $\alpha_\lambda > -\infty$. Por contradição, suponha que existe uma sequência $\lambda_n \to \lambda_1$ e uma sequência de funções (u_n) com $u_n \geq 0$ tal que

$$\int_\Omega a\, u_n^{2^*_s} = -1 \ \text{ e } \ E_{\lambda_n}(u_n) = \|u_n\|^2 + \int_\Omega (V-\lambda_n)|u_n|^2 \to -\infty.$$

Daí, $\displaystyle\int_\Omega \lambda_n u_n^2 \to \infty$. Definimos

$$w_n = \frac{u_n}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

assim, $\displaystyle\int_\Omega a w_n^q \to 0$ e $|w_n|_2 = 1$. Além disso, para n grande

$$\begin{aligned}
\|w_n\|^2 + \int_\Omega (V-\lambda_n)|w_n|^2 &= E_{\lambda_n}(w_n)\\
\|w_n\|^2 + \int_\Omega (V-\lambda_n)|w_n|^2 &= \frac{E_\lambda(u_n)}{\displaystyle\int_\Omega u_n^2} \leq 0.
\end{aligned}$$

Daí, pelo Lema 3.1.1, segue

$$(1-\varepsilon)\|w_n\|^2 - C_\varepsilon|V|_r - \lambda_1|w_n|^2 \leq \|w_n\|^2 + \int_\Omega V|w_n|^2 - \lambda_1\int_\Omega |w_n|^2 \leq o(1).$$

Fixando, $\varepsilon < 1$, temos

$$\|w_n\|^2 \leq \frac{C + C_\varepsilon|V|_r}{1-\varepsilon}.$$

Assim, $\|w_n\|$ é limitada. Como $X_0^s(\Omega)$ é reflexivo existe uma subsequência fracamente convergente, ou seja, $w_n \rightharpoonup w$ em $X_0^s(\Omega)$ com $w \geq 0$. Como $\lambda_n \to \lambda_1$, então

$$|w|_2 = 1, \quad \text{e} \ E_{\lambda_1}(w) \leq 0.$$

Assim, $E_{\lambda_1}(w) = 0$, desde $E_{\lambda_1}(w) \geq 0$. Concluímos que, $w_n \to w$ em $X_0^s(\Omega)$, então

$$\int_\Omega a w^{2_s^*} = 0.$$

Como $E_{\lambda_1}(w) = 0$, segue que w é uma autofunção associada a λ_1, ou seja, w é múltiplo de ϕ_1, a qual é uma contradição, pois $\displaystyle\int_\Omega a\phi_1^{2_s^*} < 0$. Portanto, $\alpha_\lambda > -\infty$.

c): Podemos provar que $\beta_\lambda > -\infty$, como fizemos em *(b)*. Dado $\varepsilon > 0$, e $u \geq 0$ tal que

$$\int_\Omega a u^{2_s^*} = 1 \ \text{ e } \ E_\lambda(u) \leq \beta_\lambda + \varepsilon.$$

Então $\displaystyle\int_\Omega a u^q > \frac{1}{2}$, para q próximo a 2_s^*. Tomando,

$$v_q = \frac{u}{\left(\displaystyle\int_\Omega a u^q\right)^{1/q}}.$$

Para q suficientemente próximo a 2_s^*, tem-se

$$\beta_{\lambda,q} \leq E_\lambda(v_q) \leq \frac{E_\lambda(u)}{\left(\displaystyle\int_\Omega a u^q\right)^{2/q}} \leq \beta_\lambda + 2\varepsilon$$

Como $\beta_{\lambda,q} > 0$, segue

$$0 \leq \liminf_{q \to 2_s^*} \beta_{\lambda,q} \leq \limsup_{q \to 2_s^*} \beta_{\lambda,q} \leq \beta_\lambda.$$

□

Agora vamos provar alguns resultados concernentes aos problemas variacionais $\alpha_{\lambda,q}$ e $\beta_{\lambda,q}$.

Proposição 4.2.3. *As seguintes convergências são válidas:*

i) $\displaystyle\lim_{\lambda \to \lambda_1} \alpha_{\lambda,q} = \alpha_{\lambda_1,q} = 0$, *para* $2 \leq q \leq 2_s^*$

ii) $\lim_{\lambda \to \lambda_1} \beta_{\lambda,q} = \beta_{\lambda_1,q}$, *para* $2 \leq q < 2_s^*$

Prova.

item i): Suponha por contradição que o item i) não se satisfaz, ou seja, existe $\alpha < 0$ e uma sequência (u_λ) em $X_0^s(\Omega)$ de $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \to \lambda_1$, tal que

$$E_\lambda(u_\lambda) = \|u_\lambda\|^2 + \int_\Omega (V - \lambda) u_\lambda^2 \leq \alpha$$

e $u_\lambda \geq 0$. Se (u_λ) é uma sequência limitada e como $X_0^s(\Omega)$ é uma espaço reflexivo, então existe uma subsequência de (u_λ) tal que

$$u_\lambda \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad X_0^s(\Omega).$$

Assim,

$$E_{\lambda_1}(u) = \|u\|^2 + \int_\Omega (V - \lambda_1) u^2 \leq \alpha < 0$$

na qual é absurdo, pois $E_{\lambda_1}(u) \geq 0$. Por outro lado, se $|u_\lambda|_2 \to \infty$. Defina

$$w_\lambda = \frac{u_\lambda}{|u_\lambda|_2},$$

então $|w_\lambda|_2^2 = 1$ e $\displaystyle\int a\, w_\lambda^q = \frac{-1}{|u_\lambda|_2^q} \to 0$. Também

$$\begin{aligned} \|w_\lambda\|^2 + \int (V - \lambda_1) w_\lambda^2 &= E_\lambda(w_\lambda) \\ \|w_\lambda\|^2 + \int V w_\lambda^2 - \lambda_1 \int w_\lambda^2 &= \frac{E_\lambda(u_\lambda)}{|u_\lambda|_2^2} \leq o(1). \end{aligned}$$

Daí, pelo Lema 3.1.1 e tomando $\varepsilon < 1$, obtém-se

$$\|w_\lambda\|^2 \leq \frac{C + C_\varepsilon |V|_r}{1 - \varepsilon}.$$

Portanto, $\|w_\lambda\|$ é limitada, então existe $w \in X_0^s(\Omega)$ tal que a menos de subsequência $w_\lambda \rightharpoonup w$ em $X_0^s(\Omega)$ com

$$|w|_2^2 = 1 \quad \text{e} \quad E_{\lambda_1}(w) \leq 0.$$

Assim, $E_{\lambda_1}(w) = 0$, desde que $E_{\lambda_1}(w) \geq 0$. Note que,

$$\int (V - \lambda_1) w_\lambda^2 \to \int (V - \lambda_1) w^2,$$

daí, segue que $w_\lambda \to w$ em $X_0^s(\Omega)$, então

$$\int a\, w^q = 0.$$

Logo, w é uma autofunção associado a λ_1, ou seja, w é múltiplo de ϕ_1, o qual é uma contradição desde que $\displaystyle\int a\, \phi_1^q < 0$.

item ii). Defina

$$\overline{\beta} = \limsup_{\lambda \to \lambda_1} \beta_{\lambda,q},$$

Como $\lambda > \lambda_1$, segue que $\overline{\beta} \leq \beta_{\lambda_1,q}$. Seja u_λ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (-\Delta)^s u_\lambda + (V - \lambda)\, u_\lambda & = & \beta_\lambda\, a\, u_\lambda^{q-1}, \\ \displaystyle\int a u_\lambda^q & = & 1. \end{array} \right. \tag{4.13}$$

Como na demonstração da primeira parte, obtém-se que (u_λ) é uma sequência limitada $X_0^s(\Omega)$. Daí, existe uma subsequência de (u_λ) tal que $u_\lambda \rightharpoonup u$ em $X_0^s(\Omega)$. Tomando límite quando $\lambda \to \lambda_1$, temos

$$\beta_{\lambda_1,q} \leq \|u\|^2 + \int (V - \lambda_1) u^2 \leq \overline{\beta}$$

com $u \geq 0$ e $\displaystyle\int a u^q = 1$, logo, segue que $\overline{\beta} \geq \beta_{\lambda_1,q}$. Daí, desde que $\overline{\beta} \leq \beta_{\lambda_1,q}$, segue que

$$\limsup_{\lambda \to \lambda_1} \beta_{\lambda,q} = \beta_{\lambda_1,q}.$$

Assim,

$$\beta_{\lambda_1,q} \leq E_{\lambda_1}(u) \leq \liminf_{\lambda \to \lambda_1} \beta_{\lambda,q} \leq \limsup_{\lambda \to \lambda_1} \beta_{\lambda,q} = \beta_{\lambda_1,q}.$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1} \beta_{\lambda,q} = \beta_{\lambda_1,q}.$$

□

A seguir apresentamos o seguinte resultado que será útil na demonstração do Teorema (4.0.1), cuja demonstração pode ser encontrada em [36, Lema 6].

Teorema 4.2.4. *Seja uma função* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. *Então o operador commutador* $\left[\varphi, (-\Delta)^{\frac{s}{2}}\right] \to L^2(\mathbb{R}^N)$ *é compacto, ou seja,*

$$\varphi\left((-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n\right) - (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi_n u \to 0 \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N)$$

sempre que $u_n \rightharpoonup 0$ *em* $X_0^s(\Omega)$, *quando* $n \to \infty$.

4.3 Multiplicidade de Soluções

Uma das principais dificuldades para provar o Teorema 4.0.1 se deve à perda de compacidade da imersão $X_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ por isso em geral, a condição de Palais-Smale não se verifica. Para superar essa dificuldade usamos o Princípio de Concentração e Compacidade estabelecido por P.L. Lions em [33].

Lema 4.3.1 (ver [40]). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um subconjunto aberto, e seja* (u_n) *uma sequência fracamente convergente a* u *em* $X_0^s(\Omega)$ *quando* $n \to \infty$ *e tal que*

$$|(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 \rightharpoonup \mu \quad e \quad |u_n|^{2_s^*} \rightharpoonup \nu,$$

onde μ *e* ν *são medidas não negativas. Então, ou* $u_n \to u$ *em* $L_{loc}^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$ *ou existe uma sequência de pontos* $(x_j)_{j\in I}$ *em* $\overline{\Omega}$ *e uma sequência de números positivos* $(\nu_j)_{j\in I}$ *tal que*

$$\nu = |u|^{2_s^*} + \sum_{j\in I} \delta_{x_j} \nu_j, \quad \nu_j > 0.$$

Além disso, existe uma medida positiva $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ *com* $\sup \tilde{\mu} \subseteq \overline{\Omega}$ *e uma sequência de números positivos* $(\mu_j)_{j\in I}$ *tal que*

$$\mu = |(-\Delta)^{s/2} u|^2 + \tilde{\mu} + \sum_{j\in I} \delta_{x_j} \mu_j, \quad \mu_j > 0,$$

e

$$\nu_j^{\frac{2}{2_s^*}} \leq K(N,2)^2 \mu_j$$

onde K *é melhor constante de Sobolev, ou seja*

$$K(N,2) = \inf_{u \in X_0^s(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} dx},$$

$x_j \in \mathbb{R}^N$, δ_{x_j} *são medidas de Dirac em* x_j, μ_j *e* ν_j *são constantes.*

4.3.1 Demonstração de Teorema 4.0.1

Nosso objetivo nesta seção é provar o Teorema 4.0.1, aplicaremos a Proposição 4.2.3, Lema 4.3.1 com metódos variacionais, ou seja, se u atinge α_λ (respectivamente β_λ), u satisfaz

$$(-\Delta)^s u + (V - \lambda)\, u = -\alpha_\lambda a\, u^{2_s^*-1},$$

respectivamente

$$(-\Delta)^s u + (V - \lambda)\, u = \beta_\lambda a\, u^{2_s^*-1}.$$

Dai, $u_1 = cu$ é solução do problema (4.1) ou $u_2 = \widetilde{c}u$ é uma solução do problema (4.1), para algum c e $\widetilde{c}$ respectivamente.

Prova. [Demonstração do Teorema 4.0.1] A prova do Teorema será dividida em duas partes.

Primeira Parte: Provaremos a existência de soluções para α_λ com λ suficientemente próximo a λ_1. Pela Proposição 4.2.3, temos

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1} \alpha_\lambda = 0.$$

Tomamos λ suficientemente próximo a λ_1 para obter

$$-\alpha_\lambda < K(N,2)^{-2} \left(\sup |a|\right)^{-2/2_s^*}$$

$$\text{e} \quad \lambda < \lambda_1 + \lambda^*.$$

Seja (u_q) uma sequência tal que $u_q \geq 0$ é uma solução do problema (4.1) definido para $\alpha_{\lambda,q}$, ou seja,

$$(-\Delta)^s u_q + (V - \lambda)\, u_q = -\alpha_{\lambda,q}\, a(x)\, u_q^{q-1}.$$

A seguir provaremos que (u_q) é uma sequência limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Suponha por contradição que $|u_q|_2 \to \infty$. Defina

$$w_q = \frac{u_q}{|u_q|_2}$$

com $w_q \geq 0$, $|w_q|_2 = 1$ e

$$E_\lambda(w_q) = \|w_q\|^2 + \int (V - \lambda) w_q^2 = \frac{E_\lambda(u_q)}{|u_q|_2^2} \leq o(1). \tag{4.14}$$

Daí, segue que $\|w_q\|$ é limitada, assumimos que

$$w_q \rightharpoonup w \quad \text{em} \quad X_0^s(\Omega)$$

com

$$w \geq 0, \ |w|_2 = 1 \ \text{ e } \ E_\lambda(w) \leq 0.$$

Se $\displaystyle\int_\Omega a w^{2_s^*} = 0$, então $\lambda^* \leq 0$, isto é uma contradição pois $\lambda^* > 0$. Agora se $\displaystyle\int_\Omega a w^{2_s^*} > 0$. Defina

$$u = \frac{w}{\left(\displaystyle\int_\Omega a w^{2_s^*}\right)^{1/2_s^*}}.$$

Assim, $\displaystyle\int_\Omega a u^{2_s^*} = 1$ e

$$\beta_\lambda \leq E_\lambda(u) = \frac{E_\lambda(w)}{\left(\displaystyle\int_\Omega a w^{2_s^*}\right)^{2/2_s^*}},$$

então

$$\beta_\lambda \left(\int_\Omega a w^{2_s^*}\right)^{2/2_s^*} \leq E_\lambda(w) \leq 0.$$

Pelo Lema 4.2.1, $\beta_\lambda \geq 0$, logo segue que

$$\beta_\lambda = 0 = E_\lambda(w).$$

Como E_λ é fracamente semi-contínuo inferiormente, tem-se

$$E_\lambda(w) = 0 \leq \liminf_{q \to 2_s^*} E_\lambda(w_q) \leq 0.$$

Portanto,

$$E_\lambda(w) = \lim_{q \to 2_s^*} E_\lambda(w_q).$$

Daí,

$$\int_\Omega a|w|^{2_s^*} = \lim_{q \to 2_s^*} \int_\Omega a|w_q|^q = 0,$$

isto é uma contradição, pois $\displaystyle\int_\Omega aw^{2_s^*} > 0$. Finalmente suponha que $\displaystyle\int_\Omega aw^{2_s^*} < 0$. Como $w_q \rightharpoonup w$ em $X_0^s(\Omega)$ e pela imersão continua de $X_0^s \hookrightarrow L^{2_s^*}$, tem-se

$$w_q \rightharpoonup w \ \text{ em } \ L^{2_s^*}(\Omega).$$

Logo, como o Laplaciano fracionário é um operador que mantém a convergência fraca, segue que

$$|(-\Delta)^{s/2} w_q|^2 \rightharpoonup \mu$$
$$\text{e} \quad |w_q|^{2_s^*} \rightharpoonup \nu$$

com μ e ν medidas. Aplicando o Principio de Concentração e Compactação Lema 4.3.1, temos que existe um conjunto finito de pontos $x_1, \cdots, x_k \in \overline{\Omega}$ e números positivos $\mu_1, \cdots, \mu_k$ e $\nu_1, \cdots, \nu_k$ tal que

$$|(-\Delta)^{s/2} w_q|^2 \ \rightharpoonup \ \mu \ \geq \ |(-\Delta)^{s/2} w|^2 + \sum_{j \in I} \mu_j \delta_{x_j}, \tag{4.15}$$

$$|w_q|^{2_s^*} \ \rightharpoonup \ \nu \ = \ |w|^{2_s^*} + \sum_{j \in I} \nu_j \delta_{x_j}. \tag{4.16}$$

Como $\displaystyle\int_\Omega a w_q^q = \frac{-1}{|u_q|_2^q}$ e usando (4.15) e (4.16), obtemos

$$E_\lambda(w_q) \to \int \mu + \int (V-\lambda)w^2 \geq \int |(-\Delta)^{s/2} w|^2 + \sum_{j\in I} \mu_j + \int (V-\lambda)w^2.$$

De (4.14) e como $E_\lambda(w_q) \to E_\lambda(w)$, segue

$$E_\lambda(w) \leq -\sum_{j\in I} \mu_j,$$

e pela unicidade do limite, obtém-se

$$\int a w^{2_s^*} + \sum_{j\in I} \nu_j a(x_i) = 0. \tag{4.17}$$

Por outro lado, defina

$$u = \frac{w}{\left(-\displaystyle\int_\Omega a w^{2_s^*}\right)^{1/2_s^*}}.$$

Como $\displaystyle\int_\Omega a w^{2_s^*} < 0$, temos

$$\alpha_\lambda \leq E_\lambda(u) = \frac{E_\lambda(w)}{\left(-\displaystyle\int_\Omega a w^{2_s^*}\right)^{2/2_s^*}}$$

então

$$\alpha_\lambda \left(-\int_\Omega a w^{2_s^*}\right)^{2/2_s^*} \leq E_\lambda(w) \leq -\sum_{j\in I} \mu_j$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I} \mu_j &\leq -\alpha_\lambda \left(-\int_\Omega a w^{2_s^*}\right)^{2/2_s^*} \\
&\leq -\alpha_\lambda \left(\sum \nu_i a(x_i)\right)^{2/2_s^*} \\
&\leq -\alpha_\lambda \sum (\nu_i a(x_i))^{2/2_s^*} \\
&\leq -\alpha_\lambda \sup |a|^{2/2_s^*} K(N,2)^2 \sum_i \mu_i \\
&\leq \delta \sum_i \mu_i,
\end{aligned}$$

para algum $\delta < 1$. Obtemos que $\mu_i = 0$, então $\nu_i = 0$. De (4.17), deduzimos que

$$\int a w^{2_s^*} = 0,$$

na qual contradiz a hipótesse. Portanto, (u_q) é uma sequência limitada em $L^2(\Omega)$. Além disso, como

$$\alpha_{\lambda,q} \geq (\lambda_1 - \lambda) \int_\Omega |u_q|^2$$

a sequência $\alpha_{\lambda,q}$ é também limitada, então existe uma subsequência de $\alpha_{\lambda,q}$ tal que

$$\alpha_{\lambda,q} \to \overline{\alpha} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

É claro que, $\overline{\alpha} \leq \alpha_\lambda$. Como (u_q) é uma sequência limitada em $L(\Omega)$ e $X_0^s(\Omega)$ é reflexivo, então existe uma subsequência de (u_q) tal que

$$u_q \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad X_0^s(\Omega)$$

e u_q satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (-\Delta)^s u_q + (V - \lambda)\, u_q & = & -\alpha_{\lambda,q}\, a\, u_q^{q-1}, \\ \displaystyle\int a u_q^q & = & -1, \end{array} \right. \tag{4.18}$$

passando ao limite quando $q \to 2_s^*$, temos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (-\Delta)^s u + (V - \lambda)\, u & = & -\overline{\alpha}\, a\, u^{2_s^*-1}, \\ \displaystyle\int a u^{2_s^*} & = & -1. \end{array} \right. \tag{4.19}$$

Multiplicando a equação (4.18) por $u_q\varphi$ onde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{array}{rcl} (-\Delta)^s u_q u_q \varphi + (V - \lambda)\, u_q^2 \varphi & = & -\alpha_{\lambda,q}\, a\, u_q^q \varphi, \\ \displaystyle\int (-\Delta)^s u_q u_q \varphi + \int (V - \lambda)\, u_q^2 \varphi & = & \displaystyle -\int \alpha_{\lambda,q}\, a\, u_q^q \varphi \\ \displaystyle\int |(-\Delta)^{s/2} u_q||(-\Delta)^{s/2} u_q \varphi| + \int (V - \lambda)\, u_q^2 \varphi & = & \displaystyle -\alpha_{\lambda,q} \int a\, u_q^q \varphi \end{array}$$

Usando o Teorema 4.2.4, implica que

$$\int |(-\Delta)^{s/2}u_q||(-\Delta)^{s/2}u_q|\varphi + o(1) + \int (V-\lambda)\, u_q^2\varphi = -\alpha_{\lambda,q}\int a\, u_q^q\varphi$$

$$\int |(-\Delta)^{s/2}u_q|^2\varphi + o(1) + \int (V-\lambda)\, u_q^2\varphi = -\alpha_{\lambda,q}\int a\, u_q^q\varphi. \tag{4.20}$$

Passando ao limite a equação (4.20), quando $q \to 2_s^*$ e usando o Lema de Concentração e Compacidade 4.3.1, existem duas medidas positivas μ e ν compactamente soportadas em $\overline{\Omega}$, um conjunto enumerável de pontos x_i em $\overline{\Omega}$ e uma sequência de números não negativos ν_i e μ_i tal que

$$\begin{aligned} |(-\Delta)^{s/2}u_q|^2 &\rightharpoonup \mu \ \geq\ |(-\Delta)^{s/2}u|^2 + \sum_{j\in I}\mu_j\delta_{x_j},\\ |u_q|^{2_s^*} &\rightharpoonup \nu \ =\ |u|^{2_s^*} + \sum_{j\in I}\nu_j\delta_{x_j}, \end{aligned}$$

então

$$\int \mu\varphi + o(1) + \int (V-\lambda)\, u^2\varphi = -\overline{\alpha}\left(\int a\,\left(u^{2_s^*} + \sum \nu_i\delta_{x_i}\right)\varphi\right),$$

$$\int \mu\varphi + o(1) + \int (V-\lambda)\, u^2\varphi = -\overline{\alpha}\left(\int a\, u^{2_s^*}\varphi + \sum \nu_i a(x_i)\varphi(x_i)\right). \tag{4.21}$$

Multiplicando a equação (4.19) por $u\varphi$ onde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, obtém-se

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s uu\varphi + (V-\lambda)\, u^2\varphi &= -\overline{\alpha}\, a\, u^{2_s^*}\varphi\\ \int (-\Delta)^s uu\varphi + \int (V-\lambda)\, u^2\varphi &= -\overline{\alpha}\int a\, u^{2_s^*}\varphi\\ \int |(-\Delta)^{s/2}u||(-\Delta)^{s/2}u\varphi| + \int (V-\lambda)\, u^2\varphi &= -\overline{\alpha}\int a\, u^{2_s^*}\varphi, \end{aligned}$$

pelo Teorema 4.2.4, temos

$$\int |(-\Delta)^{s/2}u|^2\varphi + o(1) + \int (V-\lambda)\, u^2\varphi = -\overline{\alpha}\int a\, u^{2_s^*}\varphi,$$

$$\int (V-\lambda)\, u^2\varphi = -\int |(-\Delta)^{s/2}u|^2\varphi - \overline{\alpha}\int a\, u^{2_s^*}\varphi - o(1). \tag{4.22}$$

Substituindo (4.22) na equação (4.21), deduzimos que

$$\int \mu\varphi - \int |(-\Delta)^{s/2}u|^2\varphi - \overline{\alpha}\int a\,u^{2_s^*}\varphi = -\overline{\alpha}\left(\int a\,u^{2_s^*}\varphi + \sum \nu_i a(x_i)\varphi(x_i)\right),$$

assim,

$$\int \mu\varphi - \int |(-\Delta)^{s/2}u|^2\varphi = -\overline{\alpha}\sum \nu_i a(x_i)\varphi(x_i). \tag{4.23}$$

Usando a Decomposição do Teorema de Radon-Nikodym de $\mu = \mu^{ac} + \mu^s$, onde μ^{ac} é a parte absolutamente contínua de μ e μ^s é a parte singular de μ, tem-se

$$\mu^{ac} = |(-\Delta)^{s/2}u|^2, \tag{4.24}$$

$$\sum \mu_i\delta_{x_i} = \mu^s = -\overline{\alpha}\,\nu_i\,a(x_i)\delta_{x_i}. \tag{4.25}$$

Primeiro suponha que x_i é tal que $a(x_i) \leq 0$, então $\mu_i = \nu_i = 0$.

Por outro lado, multiplicando a equação (4.18) por u_q e passando ao limite, quando $q \to 2_s^*$, segue que

$$\|u\|^2 + \int (V-\lambda)\,u^2 = -\overline{\alpha}\left(\int a\,u^{2_s^*} + \sum \nu_i a(x_i)\right),$$

e já que funcional E_λ é fracamente semi-contínuo inferiormente , então

$$E_\lambda(u) \leq \overline{\alpha} \leq 0.$$

Se $\displaystyle\int_\Omega a\,u^{2_s^*} = 0$, isto contradiz o fato que $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda^*)$. Se $\displaystyle\int_\Omega a\,u^{2_s^*} > 0$, obtemos uma contradição, desde que

$$0 \leq \beta_\lambda\left(\int_\Omega a\,u^{2_s^*}\right)^{2/2_s^*} \leq E_\lambda(u).$$

Suponha que $\displaystyle\int_\Omega a\,u^{2_s^*} < 0$, usando (4.22) e (4.24), temos

$$\alpha_\lambda\left(-\int_\Omega a\,u^{2_s^*}\right)^{2/2_s^*} \leq E_\lambda(u) \leq -\overline{\alpha}\int_\Omega a\,u^{2_s^*} \leq -\alpha_\lambda\int_\Omega a\,u^{2_s^*}.$$

De isto, obtemos que
$$-\int_\Omega a\,u^{2_s^*} \leq 1.$$

Por outro lado, da identidade

$$\int_\Omega a\,u^{2_s^*} + \sum_i \nu_i\, a(x_i) = -1,$$

implica que $\sum_i \nu_i\, a(x_i) \leq 0$, e já que $a(x_i) \geq 0$, então $\nu_i a(x_i) = 0$ para todo i. Usando (4.25), obtemos
$$\int_\Omega a\,u^{2_s^*} = -1 \quad \text{e} \quad \mu_i = 0.$$

Assim,

$$\alpha_\lambda \leq \|u\|^2 + \int (V-\lambda)u^2 = \int |(-\Delta)^{s/2}u|^2 + \int (V-\lambda)u^2 = \overline{\alpha} \leq \alpha_\lambda.$$

Assim, $\overline{\alpha} = \alpha_\lambda$ e u_q converge fortemente em $X_0^s(\Omega)$. Portanto, α_λ é alcançado.

Segunda Parte: Como
$$\lim_{\lambda\to\lambda_1} \alpha_\lambda = \alpha_{\lambda_1} = 0,$$

podemos escolher λ suficientemente próximo a λ_1, para obter:

$$\alpha_\lambda > -\left(\sup |a|^{2/2_s^*} K(N,2)^2\right).$$

Seja u_q uma função tal que $\beta_{\lambda,q}$ é atingido.

Afirmação: (u_q) é limitado em L^2, quando $q \to 2_s^*$. Seja (u_q) uma sequência de funções tal que
$$\int_\Omega a\,u_q^{2_s^*} = 1 \quad \text{e} \quad E_\lambda(u_q) = \beta_{\lambda,q}.$$

Suponha por contradição que $|u_q| \to \infty$. Defina

$$w_q = \frac{u_q}{|u_q|_2}.$$

Como na Primeira Parte, temos que existe $w \in X_0^s(\Omega)$ e uma subsequência de (w_q) tal que $w_q \rightharpoonup w$ em $X_0^s(\Omega)$ com $w \geq 0$, $|w|_2 = 1$ e

$$\|w\|^2 + \sum_i \mu_i + \int (V - \lambda) w^2 \leq 0,$$

$$\int_\Omega a\, w^{2_s^*} + \sum_i \nu_i\, a(x_i) = 0 \tag{4.26}$$

onde (μ_i) e (ν_i) são sequências como no Lema 4.3.1.

Suponha primeiro que $\displaystyle\int_\Omega a\, w^{2_s^*} = 0$. Como

$$E_\lambda(w) = \|w\|^2 + \int (V - \lambda) w^2 \leq 0,$$

então tem uma contradição com $\lambda^* > 0$. Suponha que $\displaystyle\int_\Omega a\, w^{2_s^*} > 0$, então pela definição de β_λ, conseguiríamos que

$$\beta_\lambda \left(\int_\Omega a\, w^{2_s^*} \right)^{2/2_s^*} \leq \|w\|^2 + \int (V - \lambda) w^2 \leq 0,$$

desde que $\beta_\lambda \geq 0$, então $\beta_\lambda = 0$ e também $E_\lambda(w) = 0$. Pela semi-contiuidade da $\|.\|$, temos

$$E_\lambda(w) = 0 \leq \liminf_{q \to 2_s^*} E_\lambda(w_q) \leq 0,$$

ou seja, $E_\lambda(w_q) \to E_\lambda(w)$ e assim a convergência forte se satisfaz. Daí

$$\int_\Omega a\, w^{2_s^*} = \lim_{q \to 2_s^*} \int_\Omega a\, w_q^q = 0,$$

a qual é uma contradição pois $\displaystyle\int_\Omega a\, w^{2_s^*} > 0$. Finalmente suponha que $\displaystyle\int_\Omega a\, w^{2_s^*} < 0$, podemos escrever

$$\alpha_\lambda \left(- \int_\Omega a\, w^{2_s^*} \right)^{2/2_s^*} \leq \|w\|^2 + \int (V - \lambda) w^2 \leq - \sum_i \mu_i$$

$$
\begin{aligned}
\sum_i \mu_i &\leq -\alpha_\lambda \left(\sum_i \nu_i |a(x_i)|\right)^{2/2_s^*} \\
&\leq -\alpha_\lambda \sum_i \nu_i^{2/2_s^*} |a(x_i)|^{2/2_s^*} \\
&\leq -\alpha_\lambda \sup |a|^{2/2_s^*} K(N,2)^2 \sum_i \mu_i \\
&\leq \delta \sum_i \mu_i,
\end{aligned}
$$

para algum $\delta < 1$. Então $\mu_i = 0$ para todo i, assim $\nu_i = 0$. Da equação (4.26), obtemos

$$\int_\Omega a\, w^{2_s^*} = 0,$$

o que é absurdo. Portanto, (u_q) é limitada em L^2.

Seja

$$\theta = \frac{1}{2}\left(K(N,2)^{-2} \sup |a|^{-2/2_s^*} - \beta_{\lambda_1}\right)$$

e suponha que λ é suficientemente próximo a λ_1 para garantir que

$$|\alpha_\lambda| < \theta.$$

Seja (u_q) uma sequência de funções minimizante para $\beta_{\lambda,q}$. Então

$$
\left\{
\begin{aligned}
(-\Delta)^s u_q + (V - \lambda)\, u_q &= \beta_{\lambda,q}\, a\, u_q^{q-1}, \\
\int a u_q^q &= 1,
\end{aligned}
\right.
\tag{4.27}
$$

como (u_q) é limitada em L^2 e $(\beta_{\lambda,q})$ é também limitada, então de fato (u_q) é limitada em $X_0^s(\Omega)$, então existe u, γ tal que

$$
\begin{aligned}
u_q \rightharpoonup u \quad &\text{em} \quad X_0^s(\Omega) \quad \text{e} \\
\beta_{\lambda,q} \to \gamma \quad &\text{em} \quad \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

além disso,

$$\gamma \leq \beta_\lambda \leq \beta_{\lambda_1}.$$

Passando ao limite a equação (4.27) quando $p \to 2_s^*$, temos

$$(-\Delta)^s u + (V - \lambda)\, u = \gamma\, a\, u^{2_s^*-1}. \tag{4.28}$$

Multiplicando (4.27) por $u_q\varphi$ e (4.28) por $u\varphi$, onde $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, e seguindo o mesmo procedimento da primeira parte, obtém-se

$$\int \left(\mu + (-\Delta)^{s/2}u\right)\varphi = \gamma\left(\sum_i \nu_i a(x_i)\varphi(x_i)\right),$$

onde μ e ν são medidas positivas dadas no Lema 4.3.1, pela Decomposição do Teorema de Radon-Nikodym de

$$\mu = \mu^{ac} + \mu^s,$$

onde μ^{ac} é a parte absolutamente contínua de μ e μ^s é a parte singular de μ, segue

$$\mu^{ac} = |(-\Delta)^{s/2}u|^2, \tag{4.29}$$

$$\sum \mu_i\delta_{x_i} = \mu^s = \gamma\sum_i \nu_i\, a(x_i)\,\delta_{x_i}. \tag{4.30}$$

Daí, $\gamma \neq 0$, pois se γ for 0, então $\mu_i = 0$, assim $\nu_i = 0$, também teríamos que

$$\|u\|^2 + \int (V - \lambda)u^2 = 0$$

e

$$\int a\, u^{2_s^*} = 1,$$

isto é absurdo, por exemplo podemos supor que λ não é um autovalor, então $\gamma > 0$. Além disso, se x_i é tal que $a(x_i) < 0$, obtemos que $\mu_i = 0$, então $\nu_i = 0$. Como $\mu^{ac} = |(-\Delta)^{s/2}u|^2$ e integrando (4.28), temos

$$\|u\|^2 + \int (V - \lambda)u^2 = \int |(-\Delta)^{s/2}u|^2 + \int (V - \lambda)u^2 = \gamma\int a\, u^{2_s^*}.$$

Por outro lado, da identidade

$$\int a\,u^{2_s^*} + \sum_i \nu_i a(x_i) = 1.$$

Temos que se $\displaystyle\int a\,u^{2_s^*} \geq 0$, implica que $\displaystyle\sum_i \nu_i a(x_i) \leq 1$. Agora, suponha que $\displaystyle\int a\,u^{2_s^*} < 0$, então

$$\nu_a = \sum_i \nu_i a(x_i) > 1.$$

e também

$$\alpha_\lambda \left(-\int a\,u^{2_s^*}\right)^{2/2_s^*} \leq \|u\|^2 + \int (V-\lambda)u^2 = \gamma \int a\,u^{2_s^*}.$$

Como $\displaystyle\int a\,u^{2_s^*} = 1 - \nu_a$, segue-se

$$\begin{aligned}
\alpha_\lambda \left(-\int a\,u^{2_s^*}\right)^{2/2_s^*} &\leq -\gamma \left(-\int a\,u^{2_s^*}\right) \\
\left(-\int a\,u^{2_s^*}\right)^{\frac{2}{2_s^*}-1} &\leq -\frac{\gamma}{\alpha_\lambda} \\
(1-\nu_a)^{\frac{2-2_s^*}{2_s^*}} &\leq -\frac{\gamma}{\alpha_\lambda},
\end{aligned}$$

daí

$$1 - \nu_a \leq \left(-\frac{\gamma}{\alpha_\lambda}\right)^{\frac{2_s^*}{2-2_s^*}} = \left(-\frac{\alpha_\lambda}{\gamma}\right)^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}},$$

então

$$\nu_a \leq 1 + \left(-\frac{\alpha_\lambda}{\gamma}\right)^{1/1-\frac{2}{2_s^*}}. \tag{4.31}$$

Se $a(x_i) < 0$, então $\mu_i = 0$, assim $\nu_i = 0$. Se $a(x_i) \geq 0$, pela desigualdade (4.31), segue que

$$\nu_i\, a(x_i) \leq 1 + \left(\frac{-\alpha_\lambda}{\gamma}\right)^{1/1-\frac{2}{2_s^*}}, \quad \text{para todo } i.$$

Finalmente, desde que $\mu_i = \gamma(\nu_i a(x_i))$, tem-se

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \gamma\left(\frac{\nu_i a(x_i)}{1+\left(\frac{-\alpha_\lambda}{\gamma}\right)^{1/1-\frac{2}{2_s^*}}}\right)\left(1+\left(\frac{-\alpha_\lambda}{\gamma}\right)^{1/1-\frac{2}{2_s^*}}\right)\\
&= \gamma\left(\frac{\nu_i a(x_i)}{1+\left(\frac{-\alpha_\lambda}{\gamma}\right)^{1/1-\frac{2}{2_s^*}}}\right)^{1-\frac{2}{2_s^*}}\left(\frac{\nu_i a(x_i)}{1+\left(\frac{-\alpha_\lambda}{\gamma}\right)^{1/1-\frac{2}{2_s^*}}}\right)^{\frac{2}{2_s^*}}\left(1+\left(\frac{-\alpha_\lambda}{\gamma}\right)^{1/1-\frac{2}{2_s^*}}\right)\\
&\leq \gamma\left(1+\left(\frac{-\alpha_\lambda}{\gamma}\right)^{1/1-\frac{2}{2_s^*}}\right)^{1-\frac{2}{2_s^*}} K(N,2)^2 \sup|a|^{\frac{2}{2_s^*}}\mu_i\\
&\leq \gamma\left(1+\frac{-\alpha_\lambda}{\gamma}\right)K(N,2)^2 \sup|a|^{\frac{2}{2_s^*}}\mu_i\\
&\leq K(N,2)^2 \sup|a|^{\frac{2}{2_s^*}}\mu_i\,(\gamma-\alpha_\lambda)\\
&\leq \delta\mu_i, \quad \text{para algum } \delta<1,
\end{aligned}$$

assim $\mu_i = 0$ e $\nu_i = 0$. Portanto,

$$\int a\,u^{2_s^*} = 1.$$

Logo,

$$\gamma \leq \beta_\lambda \leq \|u\|^2 + \int (V-\lambda)u^2 = \int |(-\Delta)^{s/2}u|^2 + \int (V-\lambda)u^2 \leq \gamma,$$

então $\beta_\lambda = \gamma$. Portanto, u é um mínimo para β_λ. ∎

Capítulo

5

Apêndice

Neste apêndice, enunciaremos alguns resultados importantes utilizados ao longo de nosso trabalho.

Definição 5.0.1. *Seja* $1 \leq p < \infty$. *O espaço de Lebesgue* $L^p(\Omega)$, *é o conjunto de todas funções mensuráveis* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que* $\|f\|_p < \infty$, *onde*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.1}$$

Para $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ *é o conjunto de todas funções mensuráveis,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que* $\|f\|_\infty < \infty$, *em que*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} ess|f(x)| = \inf \{ B > 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > B\}) = 0 \}.$$

Denotaremos a norma de $f \in L^p(\Omega)$ por

$$|f|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Lema 5.0.2 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $a \geq 0$, $b \geq 0$ *e* p, q *conjugados com* $p \in (1, +\infty)$. *Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova. Se $a = 0$ ou $b = 0$ a desigualdade se satisfaz. Se $a > 0$, $b > 0$ e como a função logaritmo natural é côncava em $(0, +\infty)$, temos

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln(a\,b),$$

já que a função logaritmo natural é crescente, obtemos

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

□

Lema 5.0.3. *Se $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$, então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}\left(a^p + b^p\right).$$

Prova. Ver [3, Lema 15.2].

Para demonstração dos seguintes resultados ver Lema 2.1 em [14].

Proposição 5.0.4. *Para $p \geq 2$, existem constantes positivas $C_p, c(p)$ tal que, para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, se satisfaz*

a)

$$|\xi - \eta|^p \leq c(p)\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right)(\xi - \eta).$$

b)

$$\left||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right| \leq C_p\left(|\xi| + |\eta|\right)^{p-2}|\xi - \eta|. \tag{5.2}$$

Lema 5.0.5. *Seja $p \geq 1$ e $\varepsilon \in (0, 1]$. Então*

$$|a|^p \leq |b|^p + c_p\varepsilon|b|^p + (1 + c_p\varepsilon)\varepsilon^{1-p}|a - b|^p$$

$a, b \in \mathbb{R}^N$, $c_p = (p-1)\gamma(\max\{\,p-2\})$ onde γ é a função gamma.

Ver domonstração em [12], Lema 3.1.

Proposição 5.0.6 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$. *Se* $1 \leq p, q \leq \infty$, p *e* q *são conjugados, então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int fg d\mu \leq |f|_p |g|_q.$$

Prova. Ver [10] Teorema 4.6, pág. 92.

Corolário 5.0.7. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto. Então* $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$ *para qualquer* $1 \leq p < \infty$.

Prova. Ver [10] Corolário 4.23, pág. 109.

Teorema 5.0.8. *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* X. *Então existe uma subsequência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge fracamente em* X.

Prova. Ver [10] Teorema 3.18, pág. 69.

Teorema 5.0.9 (Lema de Fatou). *Seja* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço de medida.*

i) Se $u_n : X \to [0, \infty)$ *é uma sequência de funções mensuráveis, então*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} u_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu.$$

ii) Se $u_n : X \to [0, \infty)$ *é uma sequência de funções mensuráveis tais que* $u_n \leq v$, *para alguma função mensurável* $v : X \to [0, \infty)$ *tal que* $\displaystyle\int_X v d\mu < \infty$, *então*

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} u_n d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu.$$

Prova. ver [24] pág. 516.

Teorema 5.0.10 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço de medida e* $u_n : X \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções mensuráveis tais que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x), \;\; \mu\text{-}q.t.p. \;\; x \in X.$$

Se existe uma função integrável g tal que

$$|u(x)| \leq g(x), \quad \mu\text{-}q.t.p.\ x \in X$$

e para todo $n \in \mathbb{N}$, então u é Lebesgue integrável e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu = \int_X u d\mu.$$

Prova. Ver [24] pág. 518.

Definição 5.0.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e $0 < \alpha \leq 1$. Dizemos que uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente α, se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \ \ \text{para todo } x, y \in \Omega.$$

Definimos o espaço $C^{0,\alpha}(\Omega)$ como sendo o espaço de todas as funções limitadas que são Hölder contínuas com expoente α. Se Ω é limitado, $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é o espaço das funções uniformemente Hölder contínuas com expoente α em Ω.

O espaço $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad \forall\, u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Defina

$$\begin{aligned} \delta : \overline{\Omega} \ &\to \ \mathbb{R}^+ \\ x \ &\mapsto \ \delta(x) = dist(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega). \end{aligned}$$

Seja $0 < \alpha < 1$. Definimos os espaços

$$C^0_\delta(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}) : \frac{u}{\delta^\alpha} \text{ tem uma extensão contínua em } \overline{\Omega} \right\};$$

com a norma

$$\|u\|_{0,\delta} = \left\| \frac{u}{\delta^\alpha} \right\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

$$C^{0,\alpha}_\delta(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}) : \frac{u}{\delta^\alpha} \text{ tem uma extensão } \alpha\text{-Hölder contínua em } \overline{\Omega} \right\};$$

dotado com a norma

$$\|u\|_{\alpha,\delta} = \|u\|_{0,\delta} + \sup_{\substack{x,y\,\in\,\Omega \\ x\neq y}} \frac{u(x)/\delta(x)^\alpha - u(y)/\delta(x)^\alpha}{|x-y|^\alpha}.$$

Definição 5.0.12. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é uma função de Carathéodory se*

i) $f(\cdot, t)$ é mensurável em Ω para todo $t \in \mathbb{R}$ fixado;

ii) $f(x, \cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para quase todo $x \in \Omega$.

Definição 5.0.13. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados. Dizemos que o espaço X está imerso em Y se existe $I : X \to Y$ um operador linear, contínuo e injetivo e uma constante $C > 0$ tal que.*

$$\|I(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall\, x \in X.$$

Denotamos a imersão por

$$X \hookrightarrow Y.$$

Dizemos que X está compactamente imerso no espaço Y, se $I : X \to Y$ é linear, contínuo, compacto e injetivo.

5.1 Teoremas Variacionais

Definição 5.1.1. *Sejam X, Y espaços de Banach e $U \subset X$ um aberto. Dizemos que um operador $F : U \to \mathbb{R}$ é Fréchet diferenciável em $u \in U$, com derivada $dF(u) \in \mathcal{L}(X, Y)$, se*

$$F(u+h) - F(u) = dF(u)[h] + R(h),$$

onde $R(h) = o(\|h\|)$, *ou seja,* $\dfrac{R(h)}{\|h\|} \to 0$ *quando* $h \to 0$. F *é diferenciável em* U *se* F *é diferenciável em todo ponto* $u \in U$.

Dizemos que $u \in U$ é um ponto crítico de F se a derivada de Fréchet de F em u é nula, ou seja, $dF(u) = 0$ em X^*.

O método direto do cálculo variacional consiste em obter a existência de solução para a equação de Euler-Lagrange através da demonstração da existência de uma função que minimiza o funcional de energia associado.

Definição 5.1.2. *Seja* X *um espaço métrico. Um funcional* $J : X \to \mathbb{R}$ *é semicontínuo inferiormente (l.s.c.) em* x *se para cada sequência* (x_n) *em* X *tal que* $x_n \to x$, *temos*

$$J(x) \leq \liminf_{n\to\infty} J(x_n).$$

Dizemos que o funcional J *sob* X *é l.s.c. em* X *se é l.s.c. em todos os pontos de* X.

Definição 5.1.3. *Seja* X *um espaço de Banach e* $\Omega \subset X$ *um subespaço. Dizemos que* $J : \Omega \to \mathbb{R}$ *é fracamente sequencialmente l.s.c. se para qualquer sequência* $(x_n) \subset \Omega$ *tal que* $x_n \rightharpoonup x$ *em* Ω, *temos*

$$J(x) \leq \liminf_{n\to\infty} J(x_n).$$

Definição 5.1.4. *Seja* X *um espaço de Banach separable. Um funcional* $J : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *é chamado coercivo se*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} J(x) = \infty$$

Uma vez que faremos uso de métodos variacionais em nosso trabalho, precisamos definir o que são sequências de Palais-Smale (PS) e a condição de Palais-Smale.

Definição 5.1.5 (Sequência de Palais-Smale)**.** *Seja* X *um espaço de Banach e* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Dizemos que uma sequência* (u_n) *em* X *é uma sequência Palais-Smale* (PS) *para* J *se*

$$J(u_n) \to c \quad \text{e} \quad J'(u_n) \to 0, \quad \text{quando} \;\; n \to \infty.$$

Definição 5.1.6 (Condição de Palais-Smale)**.** *Dizemos que* J *satisfaz a condição* (PS) *se qualquer sequência* (PS) *tem uma subsequência convergente em* X.

A seguir apresentamos o Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti-Rabinowitz. Este Teorema é um dos mais importantes da Análise Funcional não Linear, sendo de grande utilidade quando se estuda certos tipos de problemas elípticos

Teorema 5.1.7. *Sejam X um espaço de Banach e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $J(0) = 0$ tal que satisfaz as seguintes condições*

a) existem $\beta, r > 0$ tais que $J(u) \geq \beta$, para todo $u \in X$ com $\|u\| = r$

b) existe $e \in X$ tal que $\|e\| > r$ e $J(e) < 0$.

Então, existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$J(u_n) \to c \quad e \quad J'(u_n) \to 0,$$

quando $n \to \infty$, sendo

$$0 < c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0, \, \gamma(1) = e\}.$$

Em particular, se J satisfaz a condição (PS), então c é um valor crítico de J.

Prova. Ver [42] Teorema 1.55, pág. 12 e Teorema 1.17, pág 13.

O seguinte resultado é sobre pontos críticos que minimizam o funcional J quando é limitado inferiormente.

Teorema 5.1.8. *Seja X um espaço de Banach. Se $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS) e é limitado inferiormente, então*

$$c = \inf_{x \in X} J(x)$$

é atingido e é um ponto crítico de J.

Prova. Ver [29] Proposição 5.3.1, pág. 143.

Bibliografia

[1] S. Alama and G. Tarantello. On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities. *Calc. Var. Partial Differential Equation*, 1(4):439–475, (1993).

[2] F. Andreu, J. M. Mazón, J. D. Rossi, and J. Toledo. *Nonlocal Diffusion Problems*, volume 165 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, 2010.

[3] R. Bass and F. Bass. *Real Analysis for Graduate Students: Measure and Integration Theory.* Copyright, 2011.

[4] H. Berestycki, I. Capuzzo-Dolcetta, and L. Nirenberg. Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problem. *Nonlinear Differential Equations Appl.*, 2:553–572, (1995).

[5] I. Birindelli and F. Demengel. On some partial differential equation for non coercive functional and critical Sobolev exponent. *Differential Integral Equations*, 15: 823–837, (2002).

[6] I. Birindelli and F. Demengel. Existence of solutions for semilinear equations involving the p-Laplacian: the non coercive case. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 20:343–366, (2004).

[7] G. M. Bisci, V. Radulescu, and R. Servadei. *Variational Methods for Nonlocal Fractional Problems*, volume 162 of *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[8] L. Brasco and G. Franzina. Convexity Properties of Dirichlet integrals and Picone-type inequalities. *Kodai Math. J.*, 37: 769–799, (2014).

[9] L. Brasco and E. Parini. The second eigenvalue of the fractional p-laplacian. *Adv. Calc. Var.*, 9:323–355, (2016).

[10] H. Brezis. *Funtional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2010.

[11] A. D. Castro, T. Kuusi, and G. Palatucci. Nonlocal Harnack inequalities. *J. Funct. Anal.*, pages 1807–1836, (2014).

[12] A. D. Castro, T. Kuusi, and G. Palatucci. Local behavior of fractional p-minimizers. *Ann. I. H. Poincaré*, 33:1279–1299, (2016).

[13] J. Chabrowski and J. M. do Ó. On some fourth-order semilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Anal*, 49, (2002).

[14] L. Damascelli. Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results. *Ann. Inst. Henri Poincaré.*, 15:493–516, (1998).

[15] D. de Figueiredo, J. Gossez, and P. Ubilla. Local "superlinearity" and "sublinearity" for the p-Laplacian. *J. Funct. Anal.*, 257:721–752, (2009).

[16] F. de Paiva. Nonnegative solutions for indefinite sublinear elliptic problems. *Commun. Contemp. Math.*, 14(3):1250021, 20 pp, (2012).

[17] F. de Paiva and H. Quoirin. A superlinear type problem for a p-laplacian perturbation. *Matemática contemporânea*, 40:131–148, (2011).

[18] F. Demengel and G. Demengel. *Functional Spaces for the Theory of Elliptic partial differential equations.* Springer, New York, 2012.

[19] P. Drabek and Y. Huang. Multiple positive solutions of quasilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Anal.*, 37:457–466, (1999).

[20] A. Fiscella, R. Servadei, and E. Valdinoci. Density properties for fractional Sobolev spaces. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Math.*, 40(1):235–253, (2015).

[21] G. Franzina and G. Palatucci. Fractional p-eigenvalues. *Riv. Mat. Univ. Parma*, pages 315–328, (2014).

[22] S. Frassu and A. Iannizzotto. Extremal constant sign solutions and nodal solutions for the fractional p-Laplacian. *J. Math. Anal. Appl.*, 501:art. 124205, (2021).

[23] Y. Fu and B. Li. On fractional Laplacian problems with indefinite nonlinearity. *Applicable Analysis*, 16:2852–2858, (2016).

[24] L. Giovanni. *A first course in Sobolev spaces*, volume 105. American Mathematical Society Providence, 2009.

[25] S. Goyal and K. Sreenadhh. Existence of multiple solutions of p-fractional laplace operator with sign-changing weight function. *Adv. Nonlinear Anal.*, 4:37 – 58, (2015).

[26] A. Iannizzotto, S. Mosconi, and M. Squassina. H^s versus C^0-weighted minimizers. *Nonlinear Differ Eq. Appl.*, 22:477–497, (2014).

[27] A. Iannizzotto, K. P. S. Liu, and M. Squassina. Existence results for fractional p-Laplacian problems via Morse theory. *Adv. Calc. Var.*, (2014).

[28] Y. Il'yasov. On positive solutions of indefinite elliptic equations. *C.R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math.*, 333:533–538, (2001).

[29] S. Kesavan. *Nonlinear functional analysis.* Hindustan Book Agency, New Dehli, 1993.

[30] T. Kuusi, G. Mingione, and Y. Sire. Nonlocal equations with measure data. *Comm. Math. Phys.*, 337:1317–1368, (2015).

[31] E. Lindgren. Hölder estimates for viscosity solutions of equations of fractional p-Laplace type. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 23(55):1–18, (2016).

[32] E. Lindgren and P. Lindqvist. Fractional eigenvalues. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 49(49):795–826, (2014).

[33] P. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part I. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(1):145–201, (1985).

[34] E. D. Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci. Hitchhiker's guide to the fractional sobolev spaces. *Bull. Sci. Math.*, 136:512–573, (2012).

[35] T. Ouyang. On the positive solutions of semilinear equations $\Delta u + \lambda u - hu^p = 0$ on the compact manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33:503–527, (1992).

[36] G. Palatucci and A. Pisante. Improved sobolev embeddings, profile decomposition, and concentration compactness for fractional sobolev spaces. *Calc. Var. Partial Diff. Equations*, 50:799–829, (2014).

[37] K. Perera, M. Squassina, and Y. Yang. Bifurcation and multiplicity results for critical fractional p-laplacian problems. *Math. Nachr.*, 289:332–342, (2016).

[38] L. D. Pezzo, J. Bonder, and L. RÃos. An optimization problem for the first eigenvalue of the p-fractional Laplacian. *Mathematische Nachrichten*, 291:632–651, (2018).

[39] L. D. Pezzo and A. Quaas. A Hopf's lemma and a strong minimum principle for the fractional p-Laplacian. *Journal of Differential Equations*, 263:765–778, (2017).

[40] Z. Piao, C. Zhou, and S. Liang. Solutions of stationary kirchhoff equations involving nonlocal operators with critical nonlinearity in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Analysis*, 22:614–635, (2017).

[41] M. Struwe. *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonial Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[42] M. Willem. *Minimax theorems*, volume 24. Progress in nonlinear differential equations and their applications, Birkhäuser, 1996.

[43] M. Xiang, B. Zhang, and V. Radulescu. Existence of solutions for perturbed fractional p-laplacian equations. *J. Differ. Equ.*, 260:1392–1413, (2016).