

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATEUS RODRIGO PAFUME

POLIEDROS REGULARES E SEMIRREGULARES

SÃO CARLOS - SP
2022

MATEUS RODRIGO PAFUME

POLIEDROS REGULARES E SEMIRREGULARES

Monografia apresentada ao Curso de
Licenciatura em Matemática da Universidade
Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS
2022



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 1/2022/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

MATEUS RODRIGO PAFUME

POLIEDROS REGULARES E SEMIRREGULARES.

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 28 de abril de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	João Carlos Vieira Sampaio
Membro da Banca 1	Guillermo Lobos
Membro da Banca 2	Tomas Edson Barros



Documento assinado eletronicamente por **Guillermo Antonio Lobos Villagra, Professor(a) do Magistério Superior**, em 17/05/2022, às 17:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tomas Edson Barros, Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/05/2022, às 06:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joao Carlos Vieira Sampaio, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/05/2022, às 17:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0684867** e o código CRC **499391EC**.

Dedicado aos meus pais, minha irmã e meus sobrinhos. O apoio da minha família foi essencial em todas as etapas da minha graduação e, sem eles, este momento não seria possível.

RESUMO

O tema deste trabalho é uma releitura das Etapas I e II do livro-texto “Matem@tica na Pr@tica, Geometria espacial: módulo 2”, por Cláudio Carlos Dias, João Carlos Vieira Sampaio, Marlusa Benedetti da Rosa, Tomás Edson Barros. Estes módulos tratam de Poliedros Regulares e Semirregulares (ou arquimedianos), que são sólidos obtidos através das operações de truncamento e snubificação. O principal objetivo deste estudo é produzir um material teórico, com elementos históricos e filosóficos acerca dos Poliedros Regulares e Semirregulares, que poderá ser utilizado por alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Poliedros. Poliedros Regulares. Poliedros Semirregulares.

ABSTRACT

The subject of this study is a retelling of the Steps I and II of the book “Matemática na Prática, Geometria espacial: módulo 2”, by Cláudio Carlos Dias, João Carlos Vieira Sampaio, Marlusa Benedetti da Rosa, Tomás Edson Barros. These modules are about Regular or Semi-regular (archimedean) polyhedra, which are solids obtained through the techniques of truncation or snub. The main objective of this study is to produce a theoretical material, with historical and philosophical elements about Regular and Semi-regular polyhedra, so it can be used for undergraduate students in Mathematics.

Keywords: Polyhedra. Regular Polyhedra. Semi-regular Polyhedra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Exemplos de linhas poligonais.....	12
Figura 2.2. Exemplos de linhas poligonais.....	13
Figura 2.3. Tracejado de uma linha poligonal de uma face a qualquer outra face, sem passar por nenhum vértice.....	13
Figura 4.1. Os cinco poliedros de Platão.....	20
Figura 4.2. Rotação completa de um cubo truncado.....	22
Figura 4.3. Rotação completa de um tetraedro truncado.....	23
Figura 4.4. Cubo Snub.....	23
Figura 4.5. Diferentes configurações de vértices em um poliedro de padrão 3, l, m.....	24
Figura 4.6. Diferentes configurações de vértices em um poliedro de padrão 5, l, m.....	25
Figura 4.7. Prisma triangular.....	27
Figura 4.8. Tetraedro truncado.....	28
Figura 4.9. Cubo truncado.....	28
Figura 4.10. Dodecaedro truncado.....	28
Figura 4.11. Icosaedro truncado.....	30
Figura 4.12. Prisma pentagonal.....	30
Figura 4.13. Prisma heptagonal.....	31
Figura 4.14. Da esquerda para a direita, os três poliedros arquimedianos, citados anteriormente, respectivamente.....	32
Figura 4.15. Esquema de triângulos representando poliedros de padrão (k,l,m,n).....	34
Figura 4.16. Representação de um antiprisma quadrado.....	35
Figura 4.17. Cubo-octaedro ou cuboctaedro.....	35
Figura 4.18. Rombicubotaedro.....	36
Figura 4.19. Rombicosidodecaedro.....	36
Figura 4.20. Icosidodecaedro.....	37
Figura 4.21. Cubo snub.....	38
Figura 4.22. Dodecaedro snub.....	37

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1. Resultados obtidos.....	20
Tabela 4.2. Polígonos regulares e seus respectivos ângulos internos.....	27

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	CONDIÇÕES PRELIMINARES	11
2.1	POLÍGONO	11
2.2	POLIEDRO	12
3	ASPECTOS HISTÓRICOS E FILOSÓFICOS DOS POLIEDROS	15
4	CLASSIFICAÇÃO DOS POLIEDROS	17
4.1	POLIEDROS REGULARES.....	17
4.2	SEMIRREGULARES	20
4.2.1	Poliedros de Padrão (k,l,m)	24
4.2.2	Poliedros de Padrão $(3,l,m)$	26
4.2.3	Poliedros de Padrão $(5,l,m)$	29
4.2.4	Poliedros de Padrões $(7,l,m)$, $(9,l,m)$, $(11,l,m)$ etc.	30
4.2.5	Poliedros de Padrão (k,l,m,n)	33
4.2.6	Poliedros de Padrão (k,l,m,n,p)	37
5	CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
	REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

Em nosso dia-a-dia nos deparamos com poliedros incontáveis vezes e, em sua maioria, não nos damos conta de que essas figuras geométricas compõem o mundo matemático. É evidente que alguns poliedros são conhecidos pelas pessoas, com, por exemplo, o cubo. Mas, existem outros inúmeros outros que completam esta lista.

Estes, podem ser classificados como Regulares, Semirregulares ou até mesmo Irregulares. Neste trabalho, iremos focar no estudo dos dois primeiros casos.

Este tema é antigo e vem sendo estudado por matemáticos e filósofos ao longo dos anos, como, por exemplo Platão (428 a.C. – 348 a.C.) e Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.).

Para o entendimento deste tema, faz-se necessário a revisão de algumas condições preliminares de polígonos e, até mesmo, linhas poligonais, uma vez que estes estarão presentes em algumas definições no momento em que formos classificar e entender os poliedros, sejam estes regulares ou semirregulares. Desta forma, no Capítulo 2 deste estudo, definimos polígono e, em seguida, definimos linha poligonal utilizando fontes como PATERLINI, 2010. Ainda no Capítulo 2, iniciamos o tratamento do nosso tema principal, poliedros, e seus principais elementos geométricos, como Face, Aresta e Vértice, utilizando referenciais teóricos consolidados, como (DIAS; SAMPAIO, 2013).

A partir deste momento, foi feita uma utilização massiva do texto de Cláudio Carlos Dias, João Carlos Vieira Sampaio, Marlusa Benedetti da Rosa e Tomas Edson Barros, uma vez que, nossa proposta é uma releitura deste material, já existente e consolidado.

Após algumas definições iniciais, damos início ao Capítulo 3, que contém alguns resgates e reflexões não só históricas, mas, também, filosóficas. É neste capítulo que grandes nomes como Platão, Arquimedes e Kepler estão presentes, por terem sido de extrema importância para o modo que conhecemos os poliedros atualmente.

Sucedendo o momento de contextualização histórica, adentramos ao Capítulo 4, que pode ser considerado o mais importante deste trabalho, visto que este capítulo irá tratar a classificação dos poliedros em Regulares e Semirregulares, tema central deste estudo. Ao classificarmos os poliedros Regulares, chamados de Poliedros de

Platão (ou platônicos) faremos a demonstração da existência de apenas 5 (cinco) destes, sendo eles: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro. Neste momento é apresentada, também, a Relação de Euler e sua respectiva demonstração, mostrando que esta é válida para todos os poliedros regulares existentes.

Ainda no Capítulo 4, seguimos com a classificação de poliedros, e, desta vez, partimos para os Poliedros Semirregulares, ditos poliedros arquimedianos. Existem apenas 13 (treze) destes poliedros – sem considerarmos prismas e anti-prismas. É mostrado que os poliedros arquimedianos são obtidos através de operações aplicadas nos Poliedros Regulares, introduzindo o conceito de truncamento, onde são obtidos 11 (onze) dos poliedros arquimedianos e snubificação, onde obtemos os outros 2 (dois).

O capítulo segue, agora, com a classificação dos poliedros arquimedianos em alguns padrões, sendo eles (k,l,m) , (k,l,m,n) e (k,l,m,n,p) .

2 CONDIÇÕES PRELIMINARES

Neste estudo, faremos a caracterização e classificação de poliedros regulares e semirregulares. Para isso, é indispensável ter uma compreensão ampla sobre polígonos, visto que este não é o foco principal deste trabalho, portanto, a apresentação deste tema se dará de forma breve e superficial, onde o foco estará voltado para os poliedros, de fato.

Neste capítulo, serão tratados conceitos básicos sobre essa figura geométrica e, também, sobre condições para que um poliedro seja classificado como regular ou semiregular. Para tal, fez-se o uso de referências como Paterlini (2010).

2.1 POLÍGONO

Definição 2.1. NASCIMENTO (2021) define polígono, em seu Trabalho de Conclusão de Curso, da seguinte maneira:

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n , n pontos distintos do plano, com $n \geq 3$. Suponhamos que os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) Se dois dos segmentos se interseccionam, o fazem apenas em uma extremidade comum;
- (ii) Dois segmentos com extremidade comum não estão contidos na mesma reta.

A união desses segmentos chama-se polígono de n lados, denotado por $A_1A_2A_3\dots A_n$. Os pontos A_i , com $i \in \{1, \dots, n\}$, são os vértices do polígono e os segmentos que o definem são seus lados. Um segmento que liga vértices não consecutivos de um polígono é denominado diagonal.

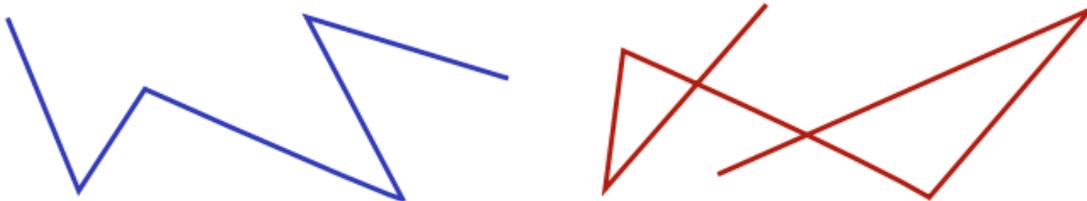
Ou seja, em outras palavras, podemos dizer que os polígonos são linhas poligonais fechadas ($A_{n+1} = A_1$) e sem auto intersecções.

Os polígonos podem ser classificados de acordo com vários critérios, como, por exemplo, convexidade, número de lados, lados e/ou ângulos congruentes, dentre outros. Porém, não discutiremos nenhuma classificação de polígonos neste trabalho, pois nosso foco central serão os poliedros.

Definição 2.2. Também, por NASCIMENTO (2021), temos que:

Sejam $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) uma sequência de n pontos distintos do plano, tais que três pontos consecutivos não são colineares. A reunião de segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ é uma linha poligonal. Os pontos A_i , com $i \in \{1, \dots, n\}$, são os vértices da linha poligonal.

Figura 2.1. Exemplos de linhas poligonais.



Fonte: (PATERLINI, 2010, p.225)

2.2 POLIEDRO

No âmbito matemático, é sabido que, antes de qualquer dedução, é preciso assegurar propriedades básicas dos objetos que estão sendo estudados. Ou seja, o que significa cada uma de suas características, quais são os autores e pensadores por traz destes significados, dentre outros.

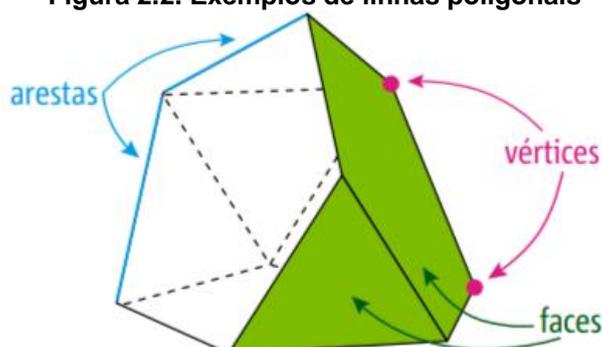
Desta forma, é necessário definir o que são esses objetos de acordo com seus atributos.

Os principais elementos geométricos de um poliedro são:

- Face: toda região poligonal de um poliedro;
- Aresta: lado comum entre duas faces;
- Vértice: pontos onde as arestas se encontram.

Um poliedro (ou superfície poliédrica) é uma reunião de várias regiões poligonais planas no espaço, chamadas faces do poliedro, satisfazendo algumas condições[...]. Cada face, sendo uma região poligonal plana, tem arestas como lados, que serão também arestas do poliedro. As duas extremidades de cada aresta, que são vértices da face poligonal, são também vértices do poliedro. (DIAS; SAMPAIO, 2013, p. 16).

Figura 2.2. Exemplos de linhas poligonais



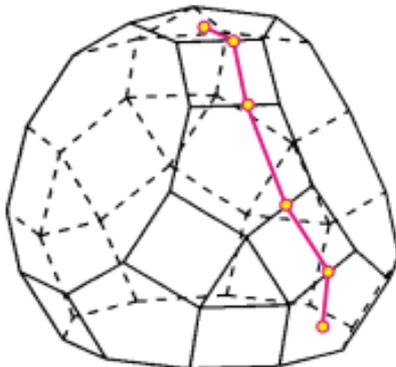
Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p.16)

Para frisarmos e melhor entendermos a visualização do que estamos considerando ao usar o nome *poliedro*, existem três condições que precisam ser consideradas. Vamos chamá-las de condições C_1 , C_2 e C_3 .

- C_1 – Duas faces com uma aresta em comum, nunca estarão no mesmo plano.
- C_2 – Cada lado de uma face do poliedro, ou seja, cada aresta, é comum à duas faces do poliedro, exatamente.
- C_3 – Cada aresta de um poliedro tem duas extremidades, denominadas vértices. Para duas faces quaisquer de um poliedro, conseguimos traçar um *caminho poligonal*, o qual estará completamente contido na superfície deste poliedro e que ligará uma face à outra face, sem a necessidade de passar por nenhum dos vértices do poliedro. Por caminho poligonal, entendemos que, uma figura, no espaço, é constituída por uma sequência de segmentos de retas. Cada um destes segmentos consecutivos desta sequência, têm apenas uma extremidade em comum.

A figura a seguir, nos ajuda a visualizar melhor a condição C_3 , supracitada.

Figura 2.3. Traçado de uma linha poligonal de uma face a qualquer outra face, sem passar por nenhum vértice.



Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p.18)

Mesmo que, a priori, esta C3 pareça um pouco complexa – ou até mesmo confusa – o que ela nos diz é que, em qualquer poliedro, podemos ir de uma face qualquer até uma outra face qualquer, “caminhando” em sua superfície poliédrica, sem a necessidade de passar por nenhum vértice do poliedro.

3 ASPECTOS HISTÓRICOS E FILOSÓFICOS DOS POLIEDROS

Quando pensamos em aspectos históricos, nosso pensamento rapidamente viaja até a Grécia Antiga, berço de grandes filósofos, como, por exemplo, Platão.

Durante este período, tais filósofos debatiam sobre assuntos variados, dentre eles, a constituição do universo. Os gregos acreditavam que os quatro elementos que compõem o universo eram diretamente relacionados a um determinado poliedro regular. Da seguinte forma

- O **cubo**, poliedro de seis faces quadradas, era associado à *Terra*;
- O **tetraedro**, poliedro de quatro faces triangulares, era associado ao *Fogo*;
- O **octaedro**, poliedro de oito faces triangulares, era associado ao *Ar*;
- O **icosaedro**, poliedro de vinte faces triangulares, era associado à *Água*.

Além dos quatro poliedros regulares supracitados, Platão, líder do grupo de filósofos, propôs a existência de outro poliedro regular, o dodecaedro, poliedro de doze faces pentagonais, que seria associado ao *Cosmos*.

Desta forma, o interessante é que, uma das mais antigas discussões que se tem registro acerca dos poliedros se deu no âmbito da Filosofia. Em seu livro *Polyhedra*, (CROMWELL, 1997) nos relata isso. Segundo o autor, quando os filósofos discutiam a estrutura do universo, os poliedros apareciam como elementos da estrutura da matéria.

As filosofias que cercam os poliedros continuam em outros momentos da história. Uma outra associação dos quatro elementos aos poliedros foi dada por Johannes Kepler (1571 d.C – 1630 d.C), que foi um astrônomo e matemático do século XVI. De acordo com Kepler, o cubo representa a estabilidade – atributo do elemento terra. O tetraedro, desta vez, com menor número de faces, representa a ‘secura’ do fogo. O icosaedro, por ser quase esférico com suas vinte faces, representa a umidade da água. Por fim, o octaedro representa o ar, por ser ‘suspenso’ por dois vértices opostos.

Através de leituras aprofundadas sobre as ciências de Platão (428 a.C. – 348 a.C.) e Kepler (1571 d.C – 1630 d.C), conseguimos evidenciar que ambos procuravam por questões filosóficas sobre a configuração do mundo e não apenas ordens científicas.

Desta forma, neste estudo, continuaremos estudando de maneira detalhada os

poliedros, que sempre se mostraram figuras – literalmente – importantes para nossa definição de mundo.

4 CLASSIFICAÇÃO DOS POLIEDROS

Agora que já passamos por algumas definições acerca dos poliedros, entendemos que suas faces, então, delimitam uma região euclidiana. De acordo com DIAS; SAMPAIO (2013) A esta região espacial, damos o nome de poliedro sólido e a reunião das faces de um poliedro é denominada superfície poliédrica.

Como exemplo temos o cubo sólido, que é um sólido delimitado pela superfície poliédrica do cubo.

Neste estudo, levaremos em consideração somente a geometria das faces de um sólido e não o que existe em seu interior.

4.1 POLIEDROS REGULARES

É sabido que a classificação dos poliedros não foi algo que aconteceu de uma hora para outra, mas se deu ao longo da história. Existem fontes históricas que relatam que, por volta do século VI a.C., só se tinha conhecimento de três poliedros regulares. Sendo eles o *cubo*, o *tetraedro regular* e o *dodecaedro*.

Platão foi o primeiro a escrever sobre os *cinco poliedros regulares* que conhecemos atualmente, por isso, estes são chamados de *poliedros de Platão*.

Dito anteriormente sobre um pouco da história destes sólidos, vamos agora definir, formalmente, o que é um poliedro de Platão.

Definição 4.1. Um poliedro é considerado um poliedro de Platão se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

- i) O poliedro é regular – quando suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados, onde todo vértice converge para o mesmo número de arestas.
- ii) O poliedro é convexo – quando está inteiramente contido em um dos dois semiespaços determinados por qualquer uma de suas faces. Desta forma, quando existe ao menos uma face que determina dois semiespaços onde existam partes do poliedro, este não será convexo.
- iii) Tem todas as suas faces com o mesmo número de arestas.

Ao todo, existem cinco os poliedros regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Apesar de existirem polígonos regulares com qualquer número de lados, o Teorema dos Elementos de Euclides (séc. III a.C.) demonstra que existem apenas cinco poliedros regulares. Esta demonstração é baseada no fato de que, em um poliedro convexo, os ângulos que concorrem em cada um dos vértices têm a soma inferior à 360° .

Teorema 4.2. *Existem apenas cinco sólidos de Platão.*

Demonstração: Seja n o número de arestas de cada face de um poliedro. Seja m o número de arestas que concorrem a cada vértice. Seja F o número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas do poliedro.

Estabelecendo algumas relações, primeiramente, temos que:

- (a) É sabido que cada face tem n arestas ($n \geq 3$). Por definição, cada aresta está em duas faces. Então, temos:

$$n \cdot F = 2A \rightarrow F = \frac{2A}{n} \quad (4.1)$$

- (b) Como cada um dos vértices tem m arestas concorrentes ($m \geq 3$), por definição, temos que cada aresta contém dois vértices. Então

$$m \cdot V = 2A \rightarrow V = 2A/m \quad (4.2)$$

Como dito anteriormente, os poliedros de Platão são convexos, ou seja, aqui vale o Teorema de Euler.

Teorema 4.3. (Teorema de Euler). De acordo com (NEVES, 2017), em todo poliedro P convexo e de A arestas, V vértices e F faces, a relação: $V - A + F = 2$ é satisfeita.

Não iremos detalhar a demonstração deste teorema, porém ela pode ser encontrada em (NEVES, 2017)

Substituindo 4.1 e 4.2 na relação de Euler, obtemos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \quad (4.3)$$

Agora, dividindo toda a equação por $2A$, obtemos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \quad (4.4)$$

Pelas relações estabelecidas anteriormente, sabemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. Assim, temos que, caso n e m sejam simultaneamente maiores que 3

$$\begin{cases} m > 3 \rightarrow m \geq 4 \rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n > 3 \rightarrow n \geq 4 \rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Do sistema acima, é possível obter que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$, ou seja, divergindo do resultado obtido anteriormente em 4.4, uma vez que, como A é positivo, isto implica que $\frac{1}{A} > 0$.

Sendo assim, sabemos, então, que ou $n = 3$ ou $m = 3$. Vamos analisar cada um destes dois casos.

1º Caso: Substituímos $n = 3$ em 4.4, temos

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \rightarrow m < 6$$

Daí, temos que, ou $m = 3$ ou $m = 4$ ou $m = 5$.

2º Caso: Desta vez, substituímos $m = 3$ em 4.4. Assim, temos

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \rightarrow n < 6$$

Daí, temos que, ou $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 5$.

Assim, é possível concluirmos que os poliedros de Platão são então formados pelos pares (n,m) abaixo:

n	m
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Com isso, fica evidente que existem, no máximo, cinco poliedros de Platão, e, através dos pares formados acima, podemos realizar a construção de cada um deles.

Logo, substituímos os referidos pares (n,m) na equação 4.4 para obtermos o número de arestas. Assim, conseguimos descobrir o número de faces e vértices

através das equações 4.1 e 4.2.

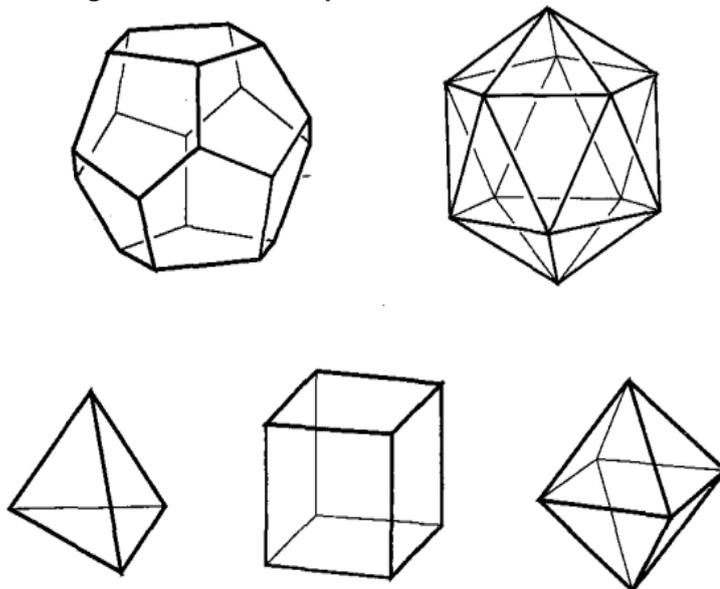
A Tabela 4.1 a seguir nos mostra que os resultados obtidos serão os cinco poliedros de Platão.

Tabela 4.1. Resultados obtidos.

Nome	n	m	A (Arestas)	V (Vértices)	F (Faces)
Tetraedro	3	3	6	4	4
Octaedro	3	4	12	6	8
Icosaedro	3	5	30	12	20
Hexaedro	4	3	12	8	6
Dodecaedro	5	3	30	20	12

Como queríamos demonstrar.

Figura 4.1. Os cinco poliedros de Platão.



Fonte: (Lima et al., 1998, p. 242)

4.2 SEMIRREGULARES

Em relação aos poliedros semirregulares, sua divulgação científica ocorreu através do matemático grego *Pappus* (290 d.C – 350 d.C). No quinto livro de sua coleção matemática, Pappus atribuiu a Arquimedes a descoberta de 13 poliedros semirregulares que passaram a ser chamados de *poliedros arquimedianos*.

De acordo com Pappus, estes seriam poliedros cujas faces são polígonos regulares, ou seja, são convexos, possuem todos os lados de mesma medida e todos

os ângulos internos são congruentes.

Estes poliedros seguem as mesmas premissas de um poliedro regular. O que os difere é que os polígonos que formam os poliedros semirregulares não são todos iguais entre si. Ou seja, agora não temos a exigência de que todas as faces sejam o mesmo polígono. Contando que sejam regulares, já satisfaz.

Mais um aspecto importante nesses poliedros é que, em cada um dos vértices, deve haver a mesma combinação de polígonos. Esta é uma das exigências para que o poliedro seja arquimediano.

Definição 4.4. Um poliedro é semirregular quando satisfaz, simultaneamente, às seguintes condições:

- i) O poliedro é convexo;
- ii) As faces do poliedro são polígonos regulares, mas não todos de um único tipo, e todas as arestas do poliedro têm o mesmo comprimento;
- iii) A configuração cíclica de polígonos regulares (as faces), em torno de cada um dos vértices, é sempre a mesma para todos os vértices do poliedro. Então, todos os vértices são de um único tipo.

Dito isso, temos que existem somente 13 poliedros arquimedianos em que cada uma de suas faces são polígonos regulares e em cada vértice temos a mesma configuração de faces.

Todos estes 13 poliedros arquimedianos são obtidos de transformações dos sólidos de Platão. Uma delas é o truncamento, que é consistido em dividir as arestas do poliedro em partes iguais, construindo nestes pontos novos vértices.

De todos os 13 poliedros arquimedianos, 11 deles são obtidos através de truncamento dos poliedros platônicos: tetraedro truncado, cubo truncado, cuboctaedro, rombicuboctaedro, cuboctaedro truncado, octaedro truncado, icosaedro truncado, dodecaedro truncado, icosidodecaedro, rombicoidodecaedro e o icosidodecaedro truncado.

Os 2 poliedros arquimedianos restantes são obtidos através de snubificação, que consiste em afastar as faces de um poliedro e preencher os espaços vazios com outros polígonos – em alguns casos é necessário rotacionar estas faces.

Resgatando uma informação trazida no capítulo 4.1, temos que, por serem convexos, todos os sólidos arquimedianos também satisfazem a relação de Euler de $V + F - A = 2$.

Antes de seguirmos com a classificação dos 13 poliedros arquimedianos, vamos observar alguns deles de acordo com as transformações citadas anteriormente: truncamento e snubificação.

Cubo Truncado

Possui a configuração (3,8,8) em cada vértice, ou seja, em cada vértice temos duas faces octogonais e uma triangular.

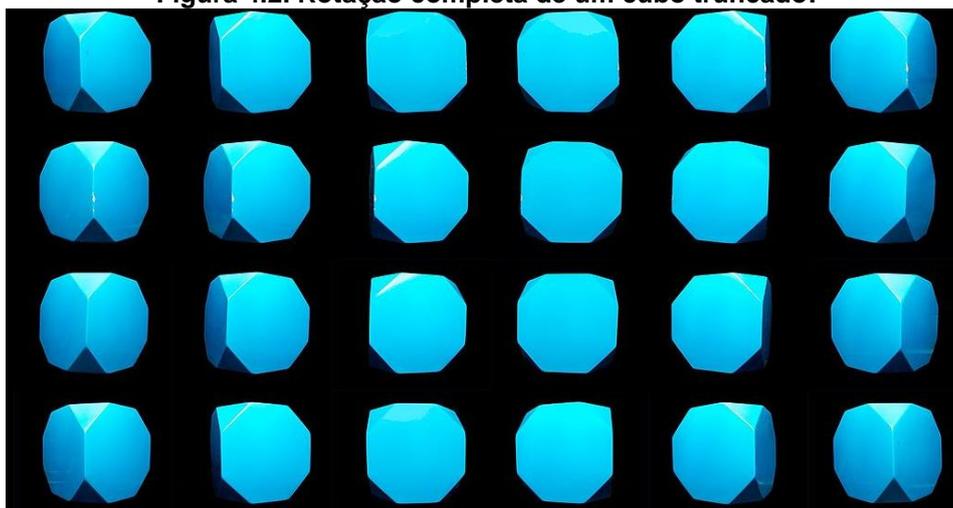
Composição: 8 triângulos equiláteros e 6 octógonos regulares

Faces: 14

Arestas: 36

Vértices: 24

Figura 4.2. Rotação completa de um cubo truncado.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Cubo_truncado

Tetraedro Truncado

Possui a configuração (3,6,6) em cada vértice, ou seja, em cada vértice temos uma face triangular e duas hexagonais.

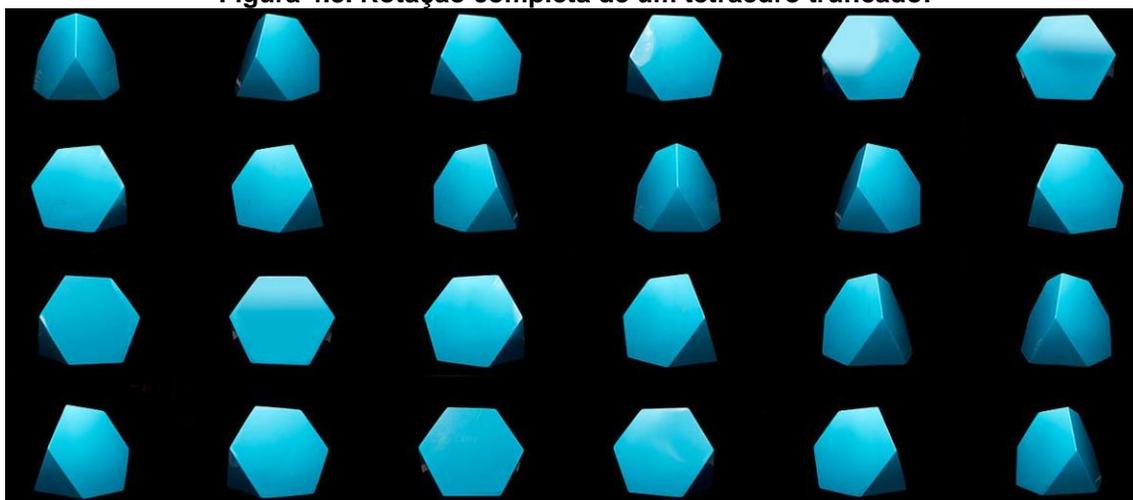
Composição: 4 triângulos equiláteros e 4 hexágonos regulares

Faces: 8

Arestas: 18

Vértices: 12

Figura 4.3. Rotação completa de um tetraedro truncado.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tetraedro_truncado

Cubo Snub

Possui a configuração $(3,3,3,3,4)$ em cada vértice, ou seja, em cada vértice temos uma face quadrada e quatro faces triangulares.

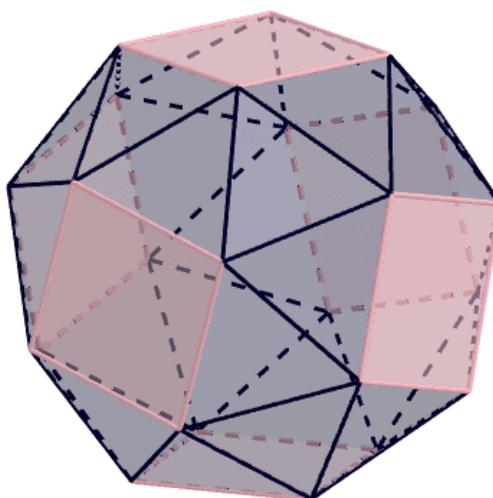
Composição: 6 quadrados e 32 triângulos equiláteros

Faces: 38

Arestas: 60

Vértices: 24

Figura 4.4. Cubo Snub.



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/hhjajs3k>

A partir deste momento, vamos mostrar que existem apenas 13 poliedros arquimedianos, como dito anteriormente – desconsiderando os prismas e anti-prismas, por ora.

4.2.1 Poliedros de Padrão (k,l,m) .

Vamos dividir o estudo dos poliedros semirregulares de padrão $k.l.m$ em dois casos:

- 1º Caso: Um dos valores k , l e m é ímpar;
- 2º Caso: k , l e m são todos inteiros e maiores que 2.

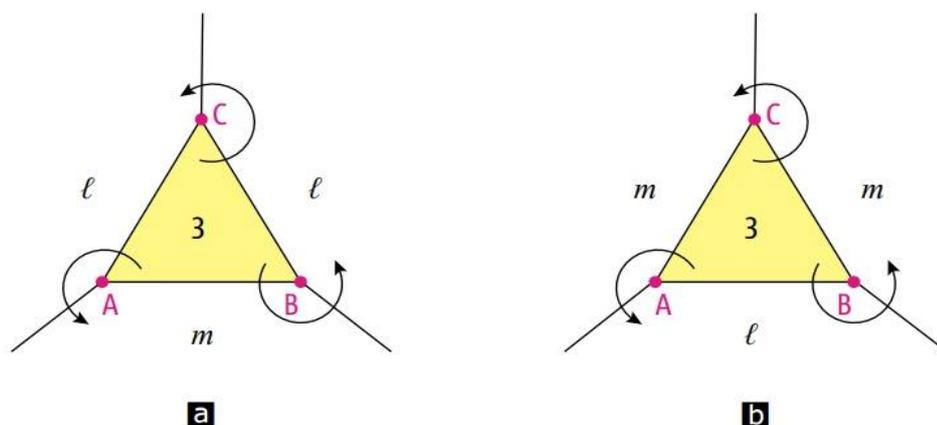
Vamos, então, ao 1º Caso:

Iniciamos supondo que o número ímpar em questão é o menor número de lados de um polígono regular, no caso, 3.

Consideremos um poliedro arquimediano de padrão k, l, m , $k = 3$.

$(3, l, m)$

Figura 4.5. Diferentes configurações de vértices em um poliedro de padrão 3, l , m .



Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p. 63)

Vamos chamar de A, B e C os vértices de uma face deste poliedro triangular, como ilustrado acima. Adjacente ao vértice A, temos um triângulo, um polígono de l lados regular e um polígono de m lados, também regular.

Agora, vamos supor que o polígono de l lados esteja colado ao lado AC, da figura (a). Desta forma, para caracterizarmos os vértices como sendo do tipo que estamos estudando no momento, ou seja, $(3, l, m)$, devemos ter um polígono de m lados colado, também, à aresta AB.

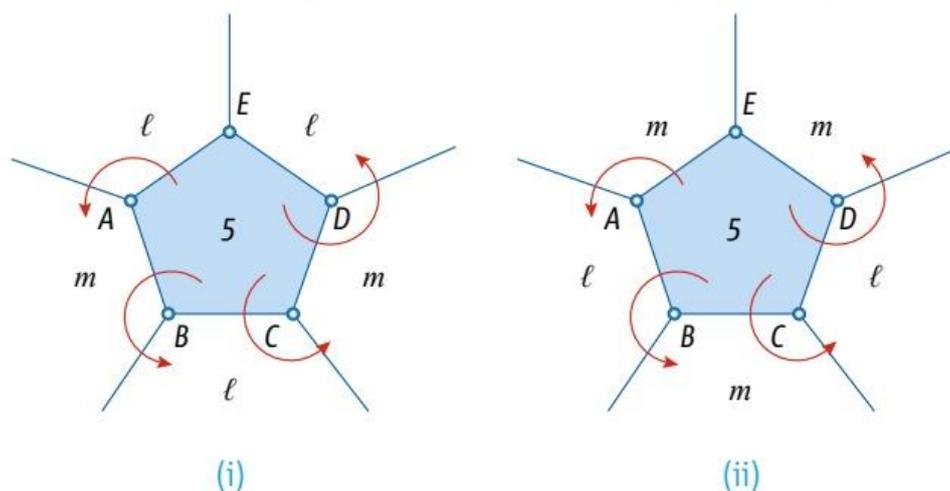
Com isso, temos que o vértice A seja do tipo $(3, l, m)$, e o vértice B seja do tipo $(3, m, l)$. Na figura (a), o vértice C é do tipo $(3, l, l)$, isso nos diz que a única

situação em que os três vértices são equivalentes neste padrão de poliedros é aquela situação no qual os três polígonos adjacentes ao triângulo são iguais. Portanto, $l = m$. De maneira análoga, é possível chegarmos à esta mesma conclusão se levarmos em conta que temos um polígono de m lados colado ao lado AC , ilustrado na figura (b) acima. Neste caso, o vértice C terá o tipo $(3, m, m)$.

De maneira semelhante, caso $l = 3$, o poliedro terá padrão $(k, 3, m)$, isto é, $(3, m, k)$. Se aplicarmos aqui o raciocínio anterior, chegaremos à conclusão que necessariamente $m = k$. E mais, se $m = 3$, então $k = l$.

Em mais um caso de poliedro de padrão (k, l, m) em que um dos valores de k , l ou m seja ímpar, consideremos $k = 5$. Temos estas novas figuras:

Figura 4.6. Diferentes configurações de vértices em um poliedro de padrão $5, l, m$.



Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p. 64)

Como este poliedro tem o padrão $(5, l, m)$ sempre teremos um pentágono no entorno de cada vértice, um polígono de l lados e um de m lados.

Sejam A, B, C, D e E os cinco vértices de uma face pentagonal deste poliedro e fazendo um percurso circular em torno dos quatro primeiros vértices – no sentido anti-horário, é possível identificarmos como tendo os tipos $(5, l, m)$, $(5, m, l)$ e $(5, m, l)$ novamente.

Assim, o vértice E deverá ter o tipo $(5, l, l)$, conforme a figura 4.6 (i), ou o tipo $(5, m, m)$, conforme a figura 4.6 (ii).

É sabido que esse poliedro é semirregular, então, o vértice E precisa ter o mesmo tipo dos demais vértices. Então, só é possível concluir que, necessariamente,

$l = m$.

Com o resultado anterior, conseguimos estabelecer que, se um poliedro arquimediano tem padrão $(5, l, m)$, então $l = m$.

Analogamente, se $l = 5$, então o poliedro tem padrão $(k, 5, m)$. Ou seja, $(5, m, k)$. Utilizando o mesmo raciocínio anterior, temos que $m = k$. E mais, se $m = 5$, então $k = l$.

De acordo com DIAS e SAMPAIO (2013), existe uma estratégia importante que precisa ser levada em consideração:

Há um fato estratégico a ser levado em conta aqui. Como vimos, se um poliedro tem padrão (k, l, m) e um dos valores k , l e m é ímpar, então, os outros dois são coincidentes. Portanto, se um poliedro é semirregular, de padrão (k, l, m) , e um dos três valores k , l e m é ímpar, os outros dois valores são pares e iguais. (DIAS; SAMPAIO, 2013, p. 66).

Isso nos leva à próxima etapa da nossa classificação.

4.2.2 Poliedros de Padrão $(3, l, m)$

É possível dizer que os poliedros arquimedianos de padrão (k, l, m) que contenham faces triangulares são, então, de padrão $(3, l, l)$ e que l é um número par. Fica claro que, $l \geq 4$, ao considerarmos que o polígono regular com menor número par de lados é o quadrado.

Fica fácil descobrirmos, desta forma, qual a face poligonal regular de l lados, sendo l par, que compõe um poliedro de padrão $(3, l, l)$

Sabemos que a soma dos ângulos internos, adjacentes a cada vértice de um poliedro $(3, l, l)$ devem ter soma menor que 360° . Assim:

$$\alpha_3 + \alpha_l + \alpha_l < 360^\circ$$

Isto é, como $\alpha_3 = 60^\circ$

$$60^\circ + 2\alpha_l < 360^\circ$$

Nos levando a:

$$\alpha_l < 150^\circ$$

Agora, considere a Tabela a seguir, com os ângulos internos de polígonos regulares:

Tabela 4.2. Polígonos regulares e seus respectivos ângulos internos.

Polígono regular	Número de lados (n)	Medida do ângulo interno: $\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$
Triângulo	3	60°
Quadrado	4	90°
Pentágono	5	108°
Hexágono	6	120°
Heptágono	7	128,57°
Octógono	8	135°
Eneágono	9	140°
Decágono	10	144°
Undecágono	11	147,27°
Dodecágono	12	150°

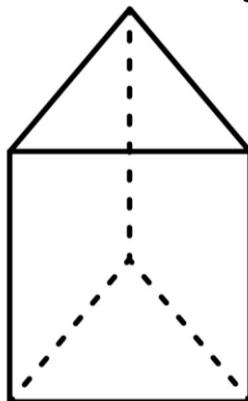
Fonte: Elaborado pelo autor

Ao analisarmos os dados desta tabela, é possível vermos que, como l é par e $\alpha_l < 150^\circ$, existem, então, apenas as possibilidades: l é 4, 6, 8, ou 10.

Vamos, agora, ilustrar os poliedros cada um destes valores de l .

Se $l = 4$, ou seja, poliedro com padrão (3,4,4), o equivalente a um prisma triangular, ilustrado abaixo. Porém, vale lembrar que este não faz parte da lista dos arquimedianos, apesar de ser semirregular, uma vez que a lista dos referidos poliedros não inclui os prismas.

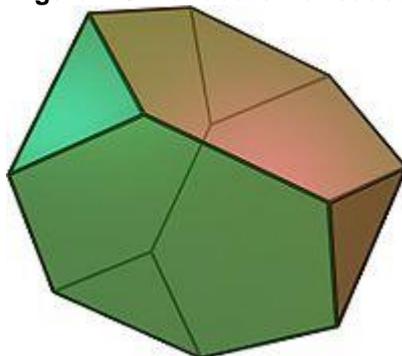
Figura 4.7. Prisma triangular.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Se $l = 6$, ou seja, o poliedro tem padrão (3,6,6), ilustrado abaixo:

Figura 4.8. Tetraedro truncado.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tetraedro_truncado

Se $l = 8$, o poliedro tem padrão (3,8,8), ilustrado abaixo:

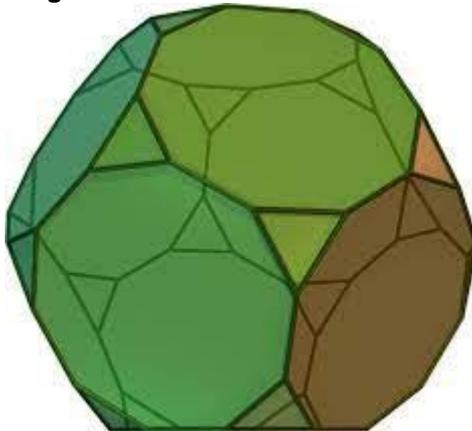
Figura 4.9. Cubo truncado.



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/tyfnjr6q>

Finalmente, para $l = 10$, o poliedro semirregular terá um padrão (3,10,10), ilustrado abaixo:

Figura 4.10. Dodecaedro truncado.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Dodecaedro_truncado

Em suma, os únicos poliedros semirregulares de padrão $(3,l,m)$ têm $l = m$, sendo l e m pares são:

- O prisma triangular semirregular $(3,4,4)$
- O tetraedro truncado $(3,6,6)$
- O cubo truncado $(3,8,8)$
- O dodecaedro truncado $(3,10,10)$

4.2.3 Poliedros de Padrão $(5,l,m)$

Já concluímos anteriormente que poliedros semirregulares de padrão $(5,l,m)$, isto é, aqueles que contenham faces pentagonais, são de padrão $(5,l,l)$, onde l é um número par maior que 4.

Outra vez, é preciso investigarmos qual é a face poligonal regular de l lados que compõe este poliedro de padrão $(5,l,l)$.

Semelhante ao caso anterior, os ângulos planos adjacentes de cada vértice destes poliedros devem ter soma menor que 360° . Assim:

$$\alpha_5 + \alpha_l + \alpha_l < 360^\circ$$

Isto é:

$$108^\circ + 2\alpha_l < 360^\circ$$

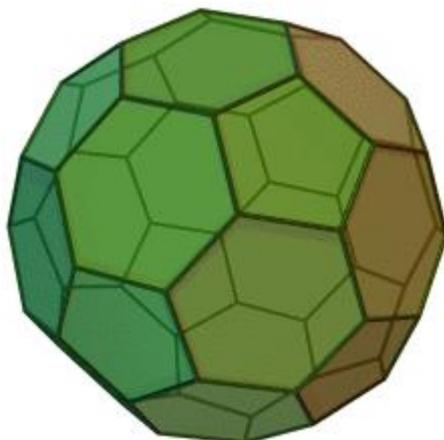
Novamente, isto nos leva a:

$$\alpha_l < 126^\circ$$

Voltemos a examinar a Tabela 1, dos polígonos regulares e seus ângulos internos. Na referida tabela, constam apenas quatro polígonos regulares que possuem ângulos internos menores que 126° . Destes quatro, os que possuem números pares de lados são apenas o quadrado e o hexágono regular. Isso nos implica que, as únicas possibilidades para l são $l = 4$ ou $l = 6$. Nestes casos, os padrões de poliedros encontrados serão $(5,4,4)$ e $(5,6,6)$.

De fato, esses padrões de poliedros são conhecidos e realmente existem. O de padrão $(5,4,4)$ corresponde ao prisma pentagonal, e o poliedro de padrão $(5,6,6)$ é o icosaedro truncado. A seguir, temos uma ilustração deste último, para facilitar nossa visualização:

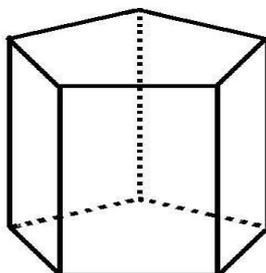
Figura 4.11. Icosaedro truncado.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Icosaedro_truncado

Já a outra possibilidade que encontramos, o poliedro de padrão (5,4,4) corresponde a um prisma pentagonal. Porém, sabemos que prismas não são classificados como poliedros arquimedianos.

Figura 4.12. Prisma pentagonal.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

4.2.4 Poliedros de Padrões (7,l,m), (9,l,m), (11,l,m) etc.

Como já visto, quando um poliedro semirregular tem padrão (k,l,m) , sendo k ímpar, necessariamente teremos $l = m$, onde l e m são pares.

Como $\alpha_k + \alpha_l + \alpha_m < 360^\circ$ e $l = m$, teremos:

$$\alpha_k + 2\alpha_l < 360^\circ$$

O que é equivalente à:

$$\alpha_l < 180^\circ - \frac{\alpha_k}{2}$$

Para k sendo ímpar, e que satisfaça $k \geq 7$, teremos $\alpha_k > 128^\circ$ (conforme a

Tabela 1). Desta forma, $\frac{\alpha_k}{2} > 64^\circ$. Então, $-\frac{\alpha_k}{2} < -64^\circ$.

Assim,

$$\alpha_l < 180^\circ - \frac{\alpha_k}{2} < 180^\circ - 64^\circ$$

Ou seja:

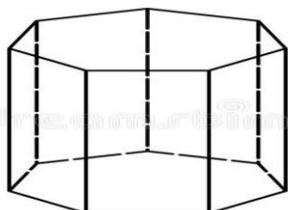
$$\alpha_l < 116^\circ$$

Considerando os polígonos regulares de l lados, sendo l par, o único que irá satisfazer essa condição é o quadrado, com o número de lados $l = 4$.

Assim, temos que os poliedros semirregulares de padrões $(7,l,m)$, $(9,l,m)$ e $(11,l,m)$, etc. são os de padrões $(7,4,4)$, $(9,4,4)$, $(11,4,4)$ e assim sucessivamente. Isso significa que eles compõem uma lista infinita de prismas, portanto, nenhum recebe a classificação de poliedro arquimediano.

O texto de referência define o prisma como sendo um poliedro semirregular de padrão $(k,4,4)$.

Figura 4.13. Prisma heptagonal.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A partir de agora, vamos para o **2º Caso**, onde k , l e m são todos inteiros e maiores que 2.

Já vimos que quando um poliedro semirregular tem padrão (k,l,m) e um dos três valores é ímpar, então, os outros dois valores serão necessariamente iguais.

Desta vez, iremos classificar os poliedros semirregulares, ainda de padrão (k,l,m) sendo k , l e m todos pares.

Esse estudo será dividido em três casos, onde estes garantem todas as possibilidades que podem ser estudadas. São estes:

1. Poliedros de padrão (k,l,m) que não fazem utilização de quadrados;
2. Poliedros de padrão (k,l,m) que possuem apenas um quadrado no entorno de cada vértice;
3. Poliedros de padrão (k,l,m) que possuem exatamente dois quadros em torno

de cada um de seus vértices.

A ordem dos casos a serem estudados será: primeiro o caso 3, depois o caso 2 e, por fim, o caso 1.

Caso 3: Se um poliedro regular de padrão (k,l,m) apresenta exatamente dois quadrados no entorno de cada vértice, então ele tem um padrão da forma $(k,4,4)$. Este padrão é sempre possível quando k é um inteiro par. Isto ocorre independentemente do valor de k .

Verificando que $\alpha_k + 2\alpha_4 < 360^\circ$ é possível independente do valor de k , para $k \geq 3$, temos:

Poliedros com padrões $(k,4,4)$, sendo k um inteiro par e maior que 4, irão formar uma lista infinita de prismas. Sendo o $(4,4,4)$ um cubo, por exemplo, e o $(6,4,4)$ um prisma hexagonal, e assim por diante.

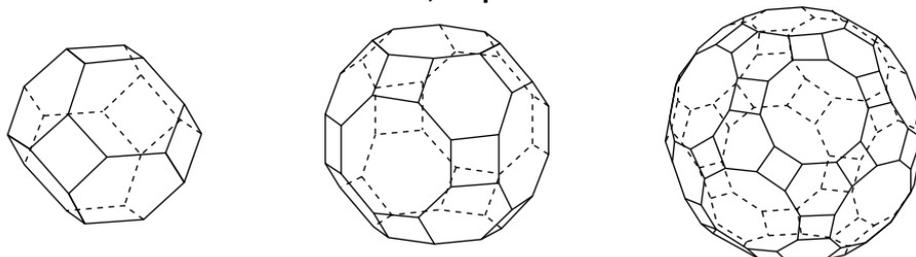
Caso 2: Para quando apenas um dos valores de k,l,m (todos pares) seja igual a 4. Suponhamos que k é igual a 4. Neste caso, as únicas possibilidades (satisfazendo que a soma dos ângulos internos seja menor que 360°) são $(4,6,6)$, $(4,6,8)$ e $(4,6,10)$, pois, se $k = 4$ e somente um dos valores é igual a 4, não poderemos ter l e m ambos maiores que 6. Suponhamos, então, que $l = 6$. Deduziremos que os únicos valores possíveis para m serão 6, 8 e 10.

Caso 1: Este caso é impossível para poliedros, pois, se um poliedro é de padrão (k,l,m) , sendo k, l e m todos pares maiores que quatro e satisfazendo que a soma dos ângulos internos adjacentes a cada vértice é 360° ou maior, verificamos que não pode acontecer em um poliedro convexo.

Estes poliedros irregulares não são tão fáceis de serem visualizados na imaginação. São eles: *octaedro truncado*, *grande rombicubooctaedro* e *grande rombicoidodecaedro*.

Figura 4.14. Da esquerda para a direita, os três poliedros arquimedianos, citados

anteriormente, respectivamente.



Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p. 76)

4.2.5 Poliedros de Padrão (k,l,m,n)

Vimos anteriormente que, além dos prismas de padrão $(k,4,4)$ existem outros sete poliedros arquimedianos de padrão (k,l,m) . Veremos que, quanto maior for o número de faces em torno de cada vértice, menos será o número de padrões existentes, facilitando, assim, suas descobertas.

Desta vez, veremos que existem quatro poliedros arquimedianos com o padrão (k,l,m,n) e apenas dois de padrão (k,l,m,n,p) , encerrando a lista dos 13 poliedros de Arquimedes.

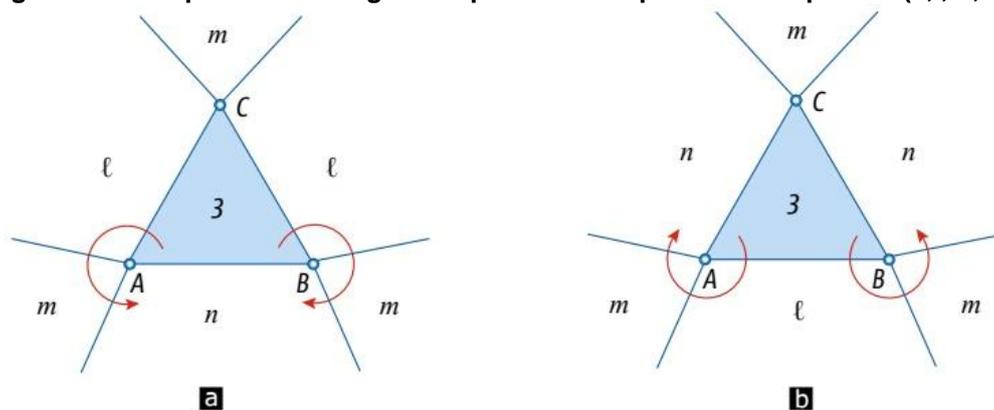
Nestes padrões, além, obviamente, dos poliedros arquimedianos, iremos identificar antiprismas semirregulares, que são aqueles que têm padrão da forma $(k,3,3,3)$ e, mais uma vez, consistem uma nova coleção infinita de poliedros que não são classificados como arquimedianos.

Um poliedro com este padrão (k,l,m,n) tem que fazer uso de triângulos. Se nenhum dos valores k, l, m, n for igual a 3, teríamos:

$$\begin{aligned}\alpha_k + \alpha_l + \alpha_m + \alpha_n &\geq \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 \\ &= 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ \\ &= 360^\circ\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha_k + \alpha_l + \alpha_m + \alpha_n \geq 360^\circ$. Isso não é permitido, uma vez que o poliedro é convexo. Já que vimos que um dos valores k, l, m, n é igual a 3, vamos supor então que $k = 3$. Vamos utilizar a atividade no texto de DIAS; SAMPAIO (2013), da página 80, para visualizarmos a afirmação acima.

Figura 4.15. Esquema de triângulos representando poliedros de padrão (k,l,m,n) .



Fonte: (DIAS; SAMPAIO, 2013, p. 76)

Se um poliedro é de padrão (k,l,m,n) e $k = 3$, então $l = n$, isto é, o poliedro tem um padrão $(3,l,m,l)$.

Se fizermos pequenos percursos circulares em torno dos vértices A e B, em ambas as figuras, é possível identificar ambos os vértices como tendo o tipo $(3,l,m,l)$.

Observando a figura (a), é possível notarmos que o vértice C pode ser do tipo $(3,l,m,l)$. Observando a figura (b), notamos que o vértice C pode ser do tipo $(3,n,m,n)$. Sabemos que o vértice C precisa ser do mesmo tipo dos vértices A e B, para atender à terceira condição de 'bom comportamento', só é possível concluir que $l = n$.

Se um poliedro semirregular, então, tem o padrão $(3,l,m,n)$, então $l = n$, isto é, o poliedro semirregular tem padrão da forma $(3,l,m,l)$. Assim, não existe nenhum poliedro semirregular de padrão $(3,l,m,n)$ para quando $l \neq n$.

Através do estudo acima, podemos deduzir que todo poliedro que seja do padrão (k,l,m,n) tem, na verdade, um padrão $(3,l,m,l)$.

Desta forma, a condição para a existência desse poliedro passa a ser:

$$\alpha_3 + 2\alpha_l + \alpha_m < 360^\circ$$

Tendo em mente que o ângulo interno do triângulo equilátero, α_3 , é igual a 60 graus:

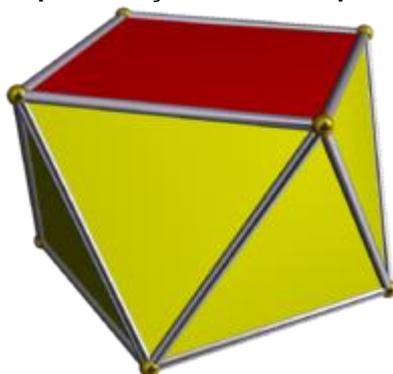
$$2\alpha_l + \alpha_m < 300^\circ$$

Vamos assumir, diretamente, que os únicos possíveis valores para l são $l = 3$, $l = 4$, e $l = 5$ e resolver a inequação $2\alpha_l + \alpha_m < 300^\circ$ para cada caso. Se $l = 3$, então $\alpha_m < 180^\circ$. Essa desigualdade é satisfeita para todo inteiro $m \geq 3$.

Os poliedros semirregulares com estes padrões, ou seja, $(3,3,m,3)$ são os chamados *antiprismas m-gonais*. Como dito anteriormente, os antiprismas não são

considerados poliedros arquimedianos.

Figura 4.16. Representação de um antiprisma quadrado.



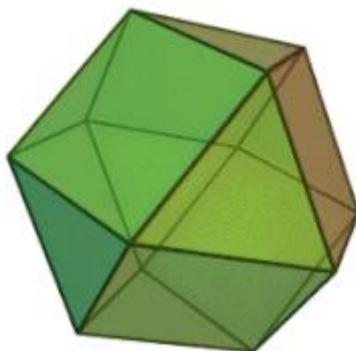
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Antiprisma_quadrado

Se $l = 4$, da desigualdade $2\alpha_l + \alpha_m < 300^\circ$ deduzimos $\alpha_m < 120^\circ$. Neste caso, os valores possíveis de m serão 3, 4 e 5.

Neste caso, os poliedros de padrões $(3,l,m,l)$ encontrados serão $(3,4,3,4)$, $(3,4,4,4)$ e $(3,4,5,4)$, que correspondem aos seguintes poliedros arquimedianos:

- Poliedro de padrão $(3,4,3,4)$: cubo-octaedro ou cuboctaedro. Foi assim chamado por Kepler por possuir seis faces quadradas, assim como o cubo, e oito faces triangulares, como o octaedro.

Figura 4.17. Cubo-octaedro ou cuboctaedro.



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Cuboctaedro>

- Poliedro de padrão $(3,4,4,4)$ corresponde ao rombicuboctaedro.

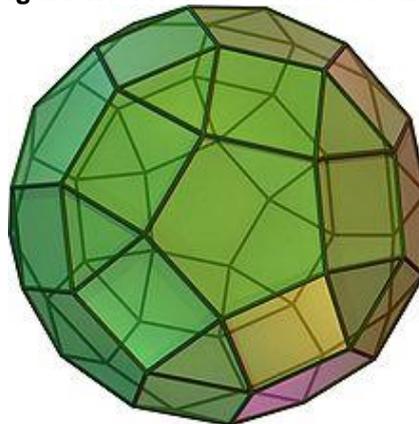
Figura 4.18. Rombicubotaedro.



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Rombicuboctaedro>

- Poliedro de padrão (3,4,5,4) é chamado de rombosidodecaedro.

Figura 4.19. Rombosidodecaedro.

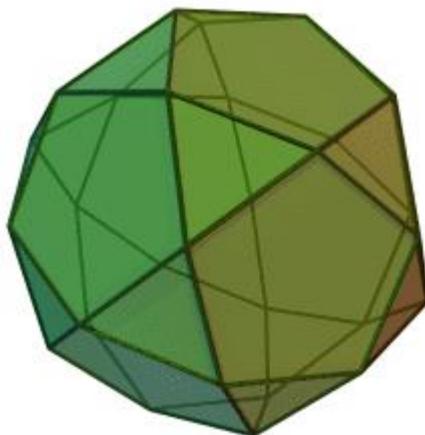


Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Rombosidodecaedro>

Finalmente, se $l = 5$, da desigualdade $2\alpha_l + \alpha_m < 300^\circ$ é possível encontrarmos $\alpha_m < 84^\circ$ com solução única sendo $m = 3$.

Assim, o padrão deste poliedro (3,l,m,l) fica (3,5,3,5), que representa o poliedro arquimediano icosidodecaedro. Este possui 20 faces triangulares, como o icosaedro, e 12 faces pentagonais, igual ao dodecaedro.

Figura 4.20. Icosidodecaedro.



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Icosidodecaedro>

4.2.6 Poliedros de Padrão (k,l,m,n,p)

A primeira observação importante que o livro-texto nos traz acerca dos poliedros de padrão (k,l,m,n,p) é que pelo menos três dos valores para k , l , m , n e p precisam ser iguais a 3.

Caso apenas um destes valores fosse igual a 3, teríamos que a soma dos ângulos internos seria, no mínimo, igual à soma do ângulo interno de um triângulo equilátero e a soma de quatro ângulos internos de quatro quadrados. Ou seja:

$$\begin{aligned} & \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 \\ &= 60^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 390^\circ \end{aligned}$$

E, sabemos que isso não é possível para um poliedro convexo.

Agora, caso apenas dois dos valores para k , l , m , n e p forem iguais a 3, esta soma seria:

$$\begin{aligned} & \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 \\ &= 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ \end{aligned}$$

Isto também não seria possível, uma vez que a soma dos ângulos deve ser sempre menor que 360° .

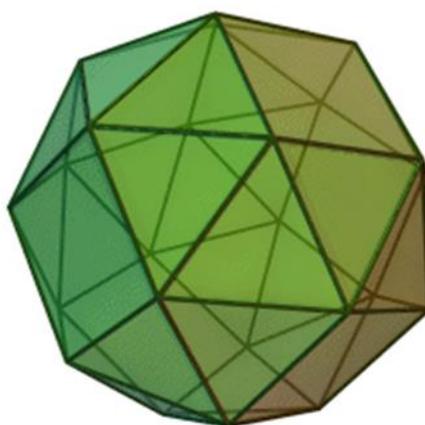
Para seguirmos com nosso estudo de que pelo menos três dos valores de k , l , m , n e p sejam iguais a 3, vamos inicialmente supor que $k = 3$. Portanto, se um poliedro tem o padrão (k,l,m,n,p) o seu padrão é da forma $(3,l,m,n,l)$. Isso foi retomado no texto referente ao módulo de ladrilhamentos semirregulares, onde os autores nos mostram

que se um poliedro tem todos seus vértices do tipo (k,l,m,n,p) , sendo $k = 3$, então, necessariamente, $l = p$.

Assumindo, então, que pelo menos três valores entre k , l , m , n e p precisam ser iguais a 3, o texto nos traz os dois últimos padrões de poliedros arquimedianos faltantes em nossos estudos:

- O de padrão $(3,3,3,4,3)$ que representa um cubo snub – ou cubo achatado – ilustrado a seguir.

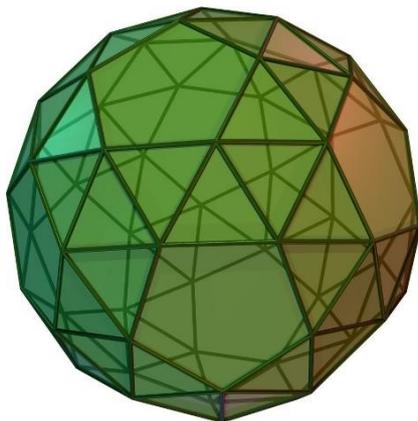
Figura 4.21. Cubo snub.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Cubo_snub

- O de padrão $(3,3,3,5,3)$ que representa um dodecaedro snub, representado a seguir:

Figura 4.22. Dodecaedro snub.



Fonte: https://stringfixer.com/pt/Snub_dodecahedron

5 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, é possível concluir que todo o estudo que envolva a classificação de poliedros em regulares e semirregulares requer um conhecimento prévio, bem como uma possível revisão, acerca de polígonos regulares e seus ângulos internos.

Outro ponto importante que precisa ser considerado é que o estudo referente aos poliedros nos mostra e faz nos fazer questionar sobre estruturas e padrões que, inicialmente, parecem serem difíceis de se imaginar, mas que são poliedros que, de fato, existem e podem ser construídos.

Quando falamos em poliedros regulares ou platônicos, demonstramos que, de fato, existem apenas cinco deles: *Tetraedro*, *Octaedro*, *Icosaedro*, *Hexaedro* e *Dodecaedro*.

Agora, quando estamos considerando os poliedros semirregulares, ou poliedros arquimedianos, foi possível concluir que em torno de cada vértice temos sempre, no mínimo três e no máximo cinco faces.

Vimos que existem, no total, treze poliedros chamados de arquimedianos. Alguns com três polígonos em torno de cada vértice (k,l,m) , alguns com quatro polígonos em torno de cada vértice (k,l,m,n) e outros com cinco polígonos em torno de cada um de seus vértices (k,l,m,n,p) . Seus respectivos padrões são, então: $(3,6,6)$, $(3,8,8)$, $(3,10,10)$, $(4,6,6)$, $(4,6,8)$, $(4,6,10)$, $(5,6,6)$, $(3,4,3,4)$, $(3,4,4,4)$, $(3,4,5,4)$, $(3,5,3,5)$, $(3,3,3,3,4)$ e $(3,3,3,3,5)$.

Foi possível concluirmos que existem, também, listas infinitas de poliedros semirregulares de padrão $(k,4,4)$, chamados de prismas semirregulares e de padrão $(k,3,3,3)$, chamados de antiprismas semirregulares que não considerados poliedros arquimedianos. Portanto, não fizeram parte deste estudo.

Tendo em vista tudo isso, esse estudo contribuiu para a compreensão de aplicação de alguns conceitos matemáticos que tangem poliedros e suas respectivas classificações.

REFERÊNCIAS

CROMWELL, Peter. **Polyhedra**. Cambridge, U.K: Cambridge University Press, 1997.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática** – 6º ano. São Paulo: Ática, 2005

DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. V. **Desafio geométrico: módulo 1**. Cuiabá: Central de Texto, 2013.

DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. V.; ROSA, M. B.; BARROS, T. E. **Matem@tica na Pr@tica. Geometria Espacial: módulo 2**. Cuiabá: Central de Texto, 2013.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. v. 2.

NASCIMENTO, Larissa L. **Ladrilhamentos regulares e semirregulares do plano**. Orientador: João Carlos Vieira Sampaio. 2021. TCC (Graduação) – Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. 2021. Disponível em: URL. Acesso em:

NEVES, José Ribamar de Souza. **Poliedros arquimedianos**. 2017. 99 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT)) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. Disponível em <<http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7893>>. Acesso em abril de 2022.

PATERLINI, R. R. **Geometria elementar, gênese e desenvolvimento**. São Carlos: Departamento de Matemática, 2010. Disponível em <https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/geometria_Paterlini_27_01_2020.pdf>. Acesso em abril de 2022.

CUBO truncado. **Wikipédia**, 2019. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Cubo_truncado>. Acesso em março de 2022.

TETRAEDRO truncado. **Wikipédia**, 2019. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Tetraedro_truncado>. Acesso em março de 2022.

CUBO snub. **Geogebra**, 2019. Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/hhjajs3k>>. Acesso em abril de 2022.

TETRAEDRO truncado. **Wikipédia**, 2019. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Tetraedro_truncado>. Acesso em abril de 2022.

CUBO truncado. **Geogebra**, 2019. Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/tyfnjr6q>>. Acesso em abril de 2022.

DODECAEDRO truncado. **Wikipédia**, 2021. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Dodecaedro_truncado>. Acesso em abril de 2022.

- ICOSAEDRO truncado. **Wikipédia**, 2021. Disponível em
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Icosaedro_truncado>. Acesso em abril de 2022.
- ANTIPRISMA quadrado. **Wikipédia**, 2017. Disponível em
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Antiprisma_quadrado>. Acesso em abril de 2022.
- CUBOCTAEDRO. **Wikipédia**, 2019. Disponível em
<<https://pt.wikipedia.org/wiki/Cuboctaedro>>. Acesso em abril de 2022.
- ROMBICUBOCTAEDRO. **Wikipédia**, 2021. Disponível em
<<https://pt.wikipedia.org/wiki/Rombicuboctaedro>>. Acesso em abril de 2022.
- ROMBICOSIDODECAEDRO. **Wikipédia**, 2019. Disponível em
<<https://pt.wikipedia.org/wiki/Rombicosidodecaedro>>. Acesso em abril de 2022.
- ICOSIDODECAEDRO. **Wikipédia**, 2021. Disponível em
<<https://pt.wikipedia.org/wiki/Icosidodecaedro>>. Acesso em abril de 2022.
- CUBO snub. **Wikipédia**, 2021. Disponível em
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Cubo_snub>. Acesso em abril de 2022.
- DODECAEDRO snub. **Stringfixer**. Disponível em
<https://stringfixer.com/pt/Snub_dodecahedron>. Acesso em abril de 2022.