UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAELA APARECIDA CAMARINHO ZANNI

# A construção dos números reais desenvolvida por Richard Dedekind

SÃO CARLOS -SP
Janeiro 2022

RAFAELA APARECIDA CAMARINHO ZANNI

A construção dos números reais desenvolvida por Richard Dedekind

Trabalho de conclusão de curso B apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de licenciada em matemática.

Orientador: João Carlos Vieira Sampaio

São Carlos-SP
2022

**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

**COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET**

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 4/2022/CCM/CCET

**Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso**

**Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)**

## FOLHA DE APROVAÇÃO

**RAFAELA APARECIDA CAMARINHO ZANNI**

**A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS DESENVOLVIDA POR RICHARD DEDEKIND.**

**Trabalho de Conclusão de Curso**

**Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos**

São Carlos, 25 de abril de 2022

**ASSINATURAS E CIÊNCIAS**

| Cargo/Função | Nome Completo |
|---|---|
| Orientador | João Carlos Vieira Sampaio |
| Membro da Banca 1 | Selma Helena de Jesus Nicola |
| Membro da Banca 2 | Alessandra Aparecida Verri |

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Selma Helena de Jesus Nicola**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/05/2022, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Alessandra Aparecida Verri**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/05/2022, às 13:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Joao Carlos Vieira Sampaio**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/05/2022, às 17:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

**DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho aos meus pais, Carlos e Zeni, que são responsáveis e apoiadores de toda minha trajetória. Dedico também ao meu companheiro Lucas por estar sempre ao meu lado e às minhas queridas amigas Francine, Gabriela, Nathalia, Thais e Vanessa.

## AGRADECIMENTO

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Carlos e Zeni, por todo amor, carinho e esforço dedicado a mim. Sem eles, jamais atingiria meus objetivos.

Agradeço ao meu noivo, companheiro de tantos anos e responsável por me apoiar em todos os momentos. Agradeço também às minhas grandes amigas, Francine, Gabriela, Nathalia, Thais e Vanessa por acompanharem e incentivarem toda a minha jornada.

Por fim, agradeço imensamente meus professores doutores, Denise Silva Vilela e João Carlos Vieira Sampaio por todo esforço, dedicação e comprometimento perante este trabalho e perante toda minha trajetória durante o curso de matemática. Possuo total admiração profissional e pessoal por esses docentes, responsáveis por me motivarem nessa caminhada. Agradeço também às professoras Alessandra Aparecida Verri e Selma Helena de Jesus Nicola por participarem da banca de defesa, acompanhando esse momento importante para mim.

**RESUMO**

Neste trabalho estudaremos o surgimento da incomensurabilidade durante a antiguidade clássica e entenderemos como essa descoberta foi importante para o desenvolvimento da teoria dos números reais durante o movimento de aritmetização da análise. Além disso, nosso foco principal será na teoria dos números reais de Richard Dedekind, estudando e compreendendo o conceito de “cortes” desenvolvido por ele. Por fim, estudaremos brevemente, de maneira resumida, a teoria de Weierstrass e Cantor-Heine.

**Palavras-chave**: **Números Reais, Richard Dedekind, História da Matemática**

**ABSTRACT**

In this work, we will study the emergence of incommensurability during classical antiquity and understand how this discovery was important for the development of real number theory during the arithmetic movement of analysis. Furthermore, our main focus will be on Richard Dedekind real number theory, studying and understanding the concept of “cuts” developed by him. Finally, we will briefly study, in a summarized way, the theory of Weierstrass and Cantor-Heine.

.

Keyword: Real Numbers, Richard Dedekind, History of Mathematics.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

# SUMÁRIO

## 1. Apresentação do problema de pesquisa

Durante a antiguidade clássica surgiu um impasse quando se percebeu que algumas grandezas não podiam ser medidas. Esse fato se deu por não conseguirem descrever algumas propriedades básicas, tais como, comparar a diagonal de um quadrado com o seu lado. Com isso notaram que, na geometria, os números naturais e suas razões eram insuficientes para demonstrar alguns resultados (MARTINS, 2004). Embora tenham percebido a existência do incomensurável, não havia nenhuma definição formal a respeito de números irracionais. Assim, os números reais eram conhecidos apenas de forma intuitiva.

Sentindo a necessidade de teorias mais rigorosas, foi a partir do século XIX que iniciou-se um movimento conhecido como aritmetização da análise, responsável por constituir a análise real que conhecemos hoje (BARONI; GARCIA, 2014).

Dentro deste cenário, no fim do século XIX, iniciou-se uma elaboração axiomática para os números reais, fato que não estava bem esclarecido (LOPES; SÁ, 2016).

Neste contexto de desenvolvimento da teoria dos números reais quatro grandes nomes de matemáticos envolvidos nesse projeto são frequentemente mencionados: o francês Charles Méray (1835 - 1911), os alemães Karl Weierstrass (1815 - 1897), Richard Dedekind (1831 - 1916) e George Cantor (1845 - 1918) (LOPES; SÁ, 2016).

Dentre os quatro nomes citados acima, destacaremos para este projeto, os estudos realizados pelo matemático Richard Dedekind sobre números reais.

De modo geral, a construção dos números reais será desenvolvida a partir de um conjunto previamente estabelecido por meio de um corpo de axiomas e, em seguida, analisar as propriedades das operações e compreender se, por algum motivo, aparecer uma nova operação no qual não é possível ser executada por pelo menos um elemento ou um par de elementos, será necessário desenvolver um novo elemento e, consequentemente, um novo conjunto a partir dessa nova operação. Dessa forma, os elementos deste novo conjunto e os elementos antigos deverão ser escritos através dessa nova operação (PONTES, 2014).

# 2. Objetivos e Metodologia

## 2.1 Objetivos

A pesquisa proposta tem como objetivo central compreender os aspectos históricos dos números reais a partir da contribuição de Richard Dedekind (1831 - 1916). Para este projeto, os seguintes objetivos específicos são propostos:

- Estudar o incomensurável e compreender sua importância na criação dos números reais;
- Compreender o movimento de aritmetização da análise;
- Estudar a bibliografia de Richard Dedekind;
- Estudar a construção dos números reais desenvolvida por Richard Dedekind;
- Realizar um breve contexto histórico dos matemáticos Georg Cantor, Karl Weierstrass e Richard Dedekind a respeito dos números reais.

## 2.2 Metodologia

A pesquisa aqui proposta se insere no campo da história da matemática que tem como base fontes bibliográficas.

O projeto será desenvolvido a partir de estudos feitos por meio de bibliografias levantadas.

Estudaremos a contribuição de Richard Dedekind no aspecto histórico dos números reais inicialmente por meio das seguintes obras:

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; GARCIA, Sílvio César Otero. **Aspectos da História da Análise Matemática:** De Cauchy a Lebesgue. [S. l.]: Cultura Acadêmica, 2014. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/126211/ISBN9788579836015.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 16 jan. 2022.

LOPES, Adrielle Cristine Mendello; DE SÁ, Pedro Franco. Números reais: Aspectos históricos. 9. ed. Universidade do Estado do Pará: **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, 2016. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/56/46. Acesso em: 07 jan. 2022.

MARTINS, Ana Patrícia de Morais da Fonseca. **As construções dos sistemas dos números reais:** Por Dedekind, Weierstrass e Méray. Tese (Mestrado em Ensino da Matemática). Departamento de Matemática Pura. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Março 2004. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1401/1/2004%20tese%20mestrado.pdf. Acesso em: 03 jan. 2022.

PONTES, Kerly Monroe. **Existência e Unicidade dos Números Reais via Cortes de Dedekind**. João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7505/2/arquivototal.pdf. Acesso em: 28 jan. 2022.

Outras referências foram levantadas no decorrer do estudo.

## 3. O incomensurável

Durante a antiguidade clássica, na escola Pitagórica, fundada em 530 a.C. por Pitágoras (582 - 497 a.C.) (Frazão, 2021), acreditava-se que tudo era número. Para os pitagóricos, os números que conheciam na época, seriam os princípios formadores, sendo os responsáveis por explicar todas as coisas existentes (Duarte; Gonçalves; Nóbrega, 2017). Eles tentavam entender toda a harmonia do mundo por meio da matemática, no qual acreditavam que tudo estava relacionado aos números.

Entretanto, começou a surgir necessidades do cotidiano que iam além da contagem de objetos individuais, como comprimento, peso e tempo.

Para suprir essa necessidade, precisava-se do desenvolvimento do conceito de frações. Definiu-se então um número racional como sendo o quociente $p/q$, com $q$ diferente de zero, de dois números inteiros, fato que seria suficiente para propósitos práticos de medições (Eves, 2011).

A interpretação geométrica dos números racionais era relativamente simples, então podemos explicá-la da seguinte forma: Tomando uma reta horizontal e marcamos dois pontos distintos: $O$ e $I$, sendo o ponto $I$ posicionado à direita do ponto $O$. Em seguida, tomaremos o segmento $OI$ como unidade de comprimento. Representaremos o ponto $O$ como sendo o número zero e o ponto $I$ o número 1. Com essas representações, podemos descrever os inteiros positivos e os inteiros negativos através de um conjunto de pontos, onde os números inteiros positivos situam-se à direita do ponto $O$ e os negativos à esquerda. Por fim, representamos as frações de denominador $q$ com os pontos que dividem cada intervalo unitário em $q$ partes. Dessa forma, haveria um ponto na reta para cada número racional. Esse modelo descrito era o formato em que os matemáticos da época achavam que todos os pontos seriam utilizados (Eves, 2011).

Entretanto, segundo Eves, foi um choque para os pitagóricos ao descobrir que haviam pontos nesta reta que não correspondiam a nenhum número racional. Para esse fato, tomemos um ponto $P$ na reta de forma que $OP$ seja igual à diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade, conforme mostrado na Figura 1. A partir deste modelo, perceberam que novos números deveriam ser inventados para serem associados a esses pontos e que não fossem racionais. Chamaram então de números irracionais (Eves, 2011).

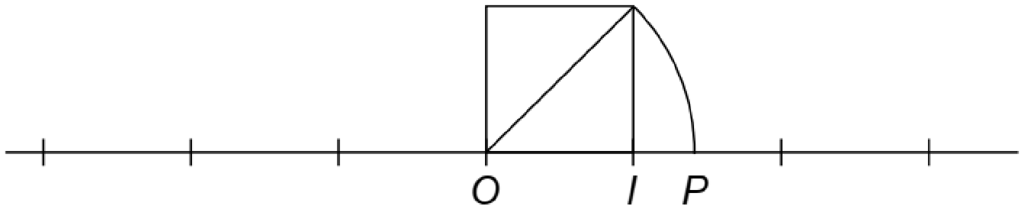


*Figura 1: Diagonal de um quadrado*.

Outro argumento utilizado na época foi: Se dados dois segmentos de reta AB e CD, vai ser sempre possível encontrar um terceiro segmento de reta EF contido um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD? (Pieterzack, 2000).

Com isso, temos que dois são comensuráveis quando encontram-se nas condições descritas, como podemos observar no Figura 2:

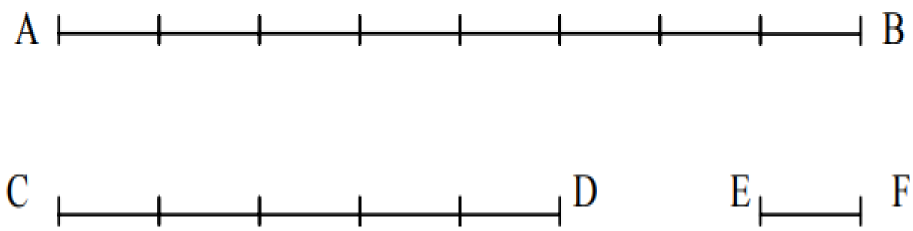


*Figura 2: Segmentos comensuráveis*

Entretanto, temos que existem segmentos AB e CD sem unidade EF em comum, que serão chamados de incomensuráveis (Pieterzack, 2000).

Esse fato contrariava a intuição geométrica. Ao que tudo indica, as grandezas incomensuráveis foram descobertas através de argumentos geométricas, como é o caso que será apresentado a seguir, onde notaram que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis, como ilustrado na Figura 3 (Pieterzack, 2000).

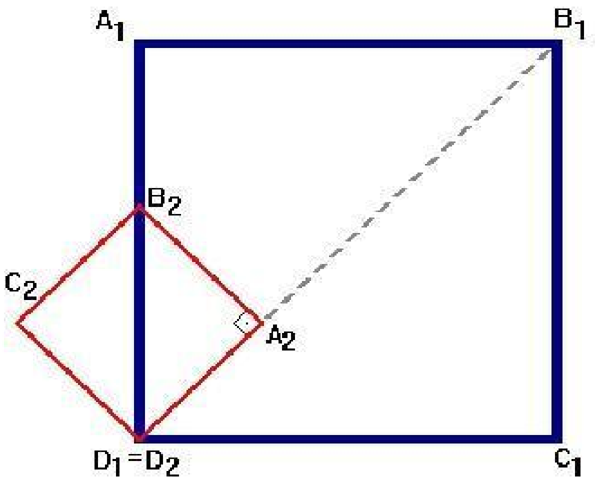


*Figura 3: O lado e a diagonal do quadrado são segmentos incomensuráveis*

Realizaremos juntos essa demonstração com base na demonstração realizada por Pieterzack, 2000. Tomando um quadrado com diagonal d = AB e lado l = AC, conforme mostra a Figura 4. Vamos supor que d e l sejam comensuráveis. Então, existirá um terceiro segmento, que chamaremos de s, que será submúltiplo comum de d e l.

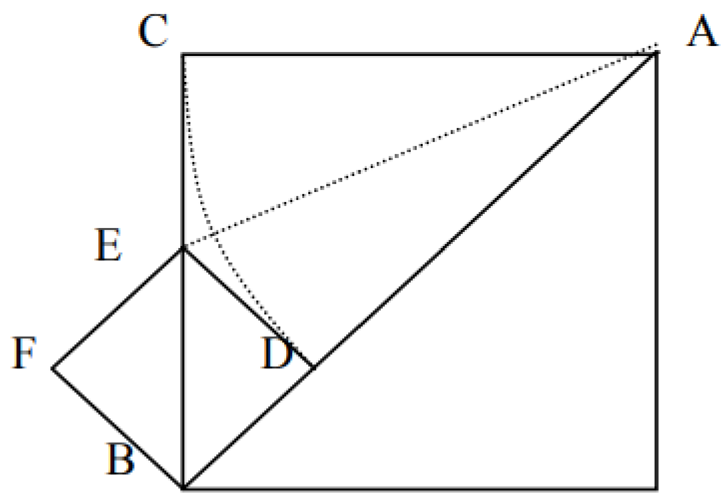


*Figura 4: Demonstração de segmento incomensurável*

Traçando agora um arco CD cujo centro esteja em A e com segmento ED tangente a esse arco em D. Por sorte, temos AD = AC.

Então, temos nos triângulos retângulos ADE e ACE que os catetos AC e AD são iguais e a respectiva hipotenusa de ambos são iguais (AE). Portanto, também são equivalentes os catetos CE e DE ( = BD). Logo:

d = AB = AD + BD = l + BD

l = BC = BE + EC = BE +BD

Ou seja,

d = l + BD (*)

l = BE + BD (**)

Visto que o segmento s é submúltiplo comum de d e l, temos por meio de (*) que é submúltiplo também de BD. Daqui e de (**) segue que s é submúltiplo de BE também.

Provamos então que, se houver um segmento s que é submúltiplo comum da diagonal (AB) e do lado (AC), temos que esse mesmo segmento será submúltiplo comum de BE e de BD, que correspondem à diagonal e ao lado do quadrado BDEF.

Esse mesmo procedimento construído, onde conseguimos passar do quadrado original para o quadrado BDEF, pode ser repetido com esse último com o intuito de chegar a um quadrado menor ainda. Com isso, mostramos que o segmento s deverá ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto quisermos, chegando então a uma conclusão absurda! (Pieterzack, 2000).

Logo, é necessário rejeitar a suposição feita inicialmente de que o lado AC e a diagonal AB do quadrado sejam comensuráveis.

Portanto, a conclusão tirada é que o lado e a diagonal de qualquer quadrado são grandezas incomensuráveis.

Com isso, a ideia de que tudo é número foi abalada.

Além disso, outro argumento geométrico foi o da determinação da diagonal $d$ de um quadrado, onde obtiveram como resultado um número cuja característica era desconhecida, sendo ele $d^2$= 2, número conhecido hoje como $\sqrt{2}$ (número irracional) (Fernandes, 2017).

Provemos que esse novo número encontrado, $\sqrt{2}$ , não é um racional e sim um irracional:

Vamos tomar um número $x$ inteiro positivo qualquer temos que $x^2$ é par ⇔ $x$ é par. Vamos supor que $\sqrt{2}$ é um racional, isso significa que $\sqrt{2}$ = $a/b$, onde $a$ e $b$ são primos entre si. Com isso:

$$a = b\sqrt{2},$$

ou

$$a^2 = 2\,b^2.$$

Analisando a expressão, temos que $a^2$ é equivalente ao dobro de um inteiro. Concluímos então que $a^2$ é par e por consequência, $a$ é par também.

Façamos então a substituição em que $a$ = 2 $c$. Então:

$$4\,c^2 = 2\,b^2,$$

ou

$$2\,c^2 = b^2.$$

Da mesma forma que concluímos sobre o termo $a^2$, podemos dizer que $b^2$ é par e por consequência, $b$ é par também.

Entretanto entramos em contradição visto que tomamos acima $a$ e $b$ sendo primos entre si. Com isso, a suposição de que $\sqrt{2}$ nos fez chegar a uma afirmação impossível. Logo essa suposição deve ser abandonada (Eves, 2011).

Podemos analisar também uma contrapartida geométrica no qual os pitagóricos não imaginavam que a partir de dois segmentos dados, era possível encontrar um terceiro segmento de reta extremamente pequeno que coubesse exatamente um número inteiro de vezes em cada um dos dois segmentos tomados. Então, vamos tomar como segmento o lado *s* de um quadrado e sua diagonal *d*. Com isso, teríamos as seguintes igualdades se existisse um terceiro segmento *t* que coubesse exatamente um número inteiro de vezes em *s* e em *d* (Eves, 2011):

$s = bt$ e $d = at$, $a$ e $b$ sendo inteiros positivos.

Mas por definição de diagonal temos:

$$d = s\sqrt{2}$$

Substituindo os valores de *d* e *s* pelas expressões, encontramos:

$$at = bt\sqrt{2}$$

Ou seja,

$$a = b\sqrt{2}$$

ou

$$\sqrt{2} = a/b$$

que é um número racional (Eves, 2011).

Portanto, ao contrário do que pensavam, existem segmentos de reta que são incomensuráveis, ou seja, segmentos pelo qual não há uma unidade de medida em comum (Eves, 2011).

A partir daí, conforme mencionado, perceberam que a definição de números que conheciam não era suficiente para explicar a natureza. Com isso, iniciava-se a primeira “crise” da matemática, na época sendo considerada um “escândalo lógico” (Lopes, 2016):

*Alogon*, o inexprimível, era como se chamavam tais irracionais, e os membros da ordem juravam não divulgar sua existência a estranhos. Tendo descoberto uma imperfeição inexplicável na obra do Arquiteto, era necessário mantê-la em segredo, senão sua raiva, por ter sido exposto, cairia sobre o homem. (DANTZIG, 1970)

De acordo com Lopes e com Sá, o termo “Alogon” citado acima, significava “sem razão”. A partir disso surgiu o termo “números irracionais”.

Esse escândalo foi tão grande para aquela época que os pitagóricos fizeram esforços para que essa crise mantivesse em sigilo total:

> “Conta uma lenda que o pitagórico Hipaso (ou talvez outro) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erigido um túmulo, como se estivesse morto”. (Eves; p.107, 2011)

Para Eves (2011), a descoberta deste novo número não perturbou apenas a crença de que “tudo é número", como também a definição pitagórica de proporção que assumia como comensurável duas grandezas similares, fazendo com que as proposições dessa teoria se limitasse apenas a grandezas comensuráveis.

## 4. Breve contexto sobre a aritmetização da análise

Carecendo de um entendimento de fundamentações lógicas sólidas, houve o impulsionamento de um movimento conhecido como aritmetização da análise, no qual buscavam-se fundamentar o conceito de número (Lopes; Sá, 2016).

De acordo com Eves:

> “o século XVII foi gasto em grande parte na exploração dos novos e poderosos métodos do cálculo, que o século XIX foi dedicado grandemente à tarefa de construir uma fundamentação lógica sólida para a enorme, porém débil, superestrutura construída no século precedente” (Eves, p. 462, p. 463, 2011).

Com isso, a matemática do século XIX estava passando por um processo de formalização, pois estavam tentando desvincular as intuições geométricas que haviam criado sob demonstrações em análise. (Lopes; Sá, 2016)

De acordo com Lopes e Sá, a partir da segunda metade do século XIX, sentiu-se a necessidade de colocar os números reais em uma base aritmética sólida, surgindo então a teoria dos números reais. Neste período, surgiram-se grandes nomes nomes contribuinte para essa teoria: Charles Méray ( 1835 - 1911), Karl Weierstrass ( 1815 - 1897), Georg Cantor (1845 - 1918) e Richard Dedekind (1831 - 1916).

## 5. Quem foi Richard Dedekind?

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), nascido em 5 de outubro de 1831 em Brunsvique, filho de Julius Levin Ulrich Dedekind que era professor, jurista e advogado corporativo de uma instituição pré-universitária; e de Caroline Henriette (Bernal, 2021).

Por volta de seus sete até dezesseis anos de idade, Dedekind direcionou seu interesse primeiramente por Física e Química, porém mudou de ideia e decidiu se concentrar na Matemática (Bernal, 2021).

Em 1848, aprendeu os elementos de Geometría Analítica, Álgebra, Cálculo e Mecânica. Em 1850 ingressou na Universidade de Gottingen. Entre 1850-1851, participou das aulas de Carl Friedrich Gauss a respeito do método dos mínimos quadrados e assistiu também às aulas de geodésia avançada. Sob orientação de Gauss, em 1852, completou seu trabalho de doutorado com uma dissertação sobre a teoria de integrais eulerianas. Entretanto, Dedekind não fez o suficiente para se qualificar para trabalhos de pós-graduação na Universidade de Gottingen e então precisou passar mais dois anos preenchendo algumas lacunas e conseguiu, por fim, qualificar-se como "privatdozent" (De acordo com Bernal (2021), privatdozent significava que a pessoa possuía o direito de dar aulas em universidades, porém sem remuneração. Entretanto, esses lecionadores podiam cobrar taxas dos alunos que atendiam em suas aulas). Mesmo estando formado, Dedekind permaneceu estudando e frequentando as aulas de Dirichlet em 1855 sobre teoria dos números, equações diferenciais parciais, integrais definidas e teoria potencial. Durante esse período, as aulas ministradas por Dedekind obtiveram uma grande notoriedade pois, segundo Bernal (2021), ele foi um dos primeiros (possivelmente) a dar aulas sobre teoria de Galois e, o conceito de corpo, conhecido na álgebra abstrata, teria sido introduzido neste curso. Por mais que atualmente sabemos da importância desses conceitos, na época, suas aulas eram pouco frequentadas (Bernal, 2021).

As contribuições de Dedekind foram inúmeras na matemática. As duas principais são devidos aos conceitos: o de ideal e o de corte, sendo esse último conceito aquele que caracterizou os números reais em um livro de 1872 (Iezzi, Murakami, s/d).

A partir de 1858, como professor de Cálculo, sentiu a necessidade de um embasamento teórico para o sistema dos números reais. De acordo com, Iezzi e Murakami (s/d), Dedekind exemplificava suas falas dizendo não haver demonstração para coisas corriqueiras tais como: $\sqrt{2}$ . $\sqrt{3}$ = $\sqrt{6}$, e, a questão central era como esclarecer a ideia de continuidade (Iezzi, Murakami, s/d).

Dedekind pendeu-se para a ideia de que poderia chegar ao conceito de continuidade por meio de convenientes partições em $\mathbb{Q}$. Com isso, definiu um corte em $\mathbb{Q}$ como sendo uma partição deste conjunto num par (A, B) de subconjuntos não vazios, de modo que todo elemento do primeiro é menor que todo elemento do segundo (Iezzi, Murakami, s/d).

**Exemplo 5.1:**

Para cada $a \in \mathbb{Q}$, tem um corte racional (A, B) associado, definido por $a$, onde A = { x $\in \mathbb{Q}$ | x ≤ $a$} e B = { x $\in \mathbb{Q}$ | x > $a$}. Entretanto, a recíproca não é válida: há cortes não racionais (Iezzi, Murakami, s/d).

Com isso, Dedekind conseguiu mostrar como operar com esses cortes e como compará-los. Dessa forma, cada corte passa a representar formalmente um número real e o conjunto desses cortes podia ser visualizado como o conjunto dos números reais. Como exemplo, o corte (A, B) do Exemplo 5.1 anterior, representa o número racional $a$; os cortes não racionais são os números irracionais da teoria de Dedekind (Iezzi, Murakami, s/d).

# 6. A teoria dos números reais de Richard Dedekind

## 6.1 Observação Geral

Para a teoria que será desenvolvida, partiremos da premissa de que o conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais já estão construídos e definidos.

Conforme citado, o século XIX foi um período importante para a chamada aritmetização da análise. Há algum tempo, já se lidava com as séries infinitas e, havia muita falta de confiança nas operações que eram executadas sobre essas séries. Além disso, outra preocupação era a falta de definição da expressão “número real” que estava no programa de aritmetização.

Para construir o conjunto dos números reais a partir dos racionais, existem duas formas distintas: classe de equivalência de sequências de Cauchy e cortes de Dedekind.Seguiremos com a proposta de Dedekind.

Definiremos primeiro a noção de corte. O conjunto dos cortes será chamado de conjunto de números reais, denotado por $\mathbb{R}$. Por último, vamos definir operações nos reais e mostrar que esse novo conjunto dos reais possuem as propriedades de $\mathbb{Q}$ e mais uma que o conjunto $\mathbb{Q}$ não possui (Pimentel, 2018).

## 6.2 - Cortes de Dedekind

Definiremos a seguir um resultado que nos mostre a existência de um corpo ordenado, indicado por $\mathbb{R}$, de forma que esse resultado englobe o conjunto dos números reais e solucione a barreira dos “buracos” encontrados na reta real.

Os elementos do conjunto $\mathbb{R}$ serão alguns subconjuntos de $\mathbb{Q}$, que vão ser denominados de cortes. Abaixo, a definição:

**Definição 6.2.1:** Cortes

Um conjunto α de números reais será um corte se satisfizer as condições:

*i)* $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$ (Pimentel, 2018).
*ii)* Tomando um numero $q \in \mathbb{Q}$. Se $p \in \alpha$ e $q < p$, então temos $q \in \alpha$ (Pimentel, 2018).
*iii)* Se $p \in \alpha$, então $p < r$, para algum $r \in \alpha$ (Pimentel, 2018).

Desta definição observamos:
Dada a primeira condição, notamos que o conjunto α contém pelo menos um racional mas não contém todos.
Dada a segunda condição, temos que, todo número racional que está contido no conjunto α será menor do que todo racional que não pertence ao conjunto α.
Dada a terceira condição, notamos que no conjunto α, não há racional máximo, ou seja, não há um elemento em α que seja maior ou igual a todos os outros elementos de α (Pimentel, 2018).

**Exemplo 6.2.2:** Tomando um número r racional qualquer, temos que esse número determina um corte α, que é o conjunto dos números racionais menores que r.

É evidente que α satisfaz as condições *i)* e *ii)* da Definição 6.2.1.
Para demonstrar o item *iii)*, basta observarmos que, qualquer que seja $p \in \alpha$, temos:

$$p < (p + r)/2 < r.$$

**Definição 6.2.3:** Cortes racionais e cortes não racionais.

Tomando $q \in \mathbb{Q}$, definiremos $q^*$ sendo escrito por $q^* = \{r \in \mathbb{Q}: r < q\}$.
$q^*$ é um corte chamado de corte racional. Chamaremos de cortes irracionais aqueles que não são racionais (Pimentel, 2018).

**Exemplo 6.2.4:**

$\sqrt{2}$ = {q ∈ $\mathbb{Q}$: $q^2$ < 2} U { q ∈ $\mathbb{Q}$: q < 0} é um corte irracional (Pimentel, 2018).

O Exemplo 6.2.2 citado é chamado de corte racional.
Vamos escrever α = r* com o intuito de indicar que um corte α é o corte racional que é relacionado a r.

Temos, da condição *ii)* da Definição 6.2.1, a seguinte propriedade:

**Teorema 6.2.5:**

Tomando p, q ∈ $\mathbb{Q}$ de forma que p ∈ α e q ∉ α, sendo α um corte. Então, temos que p < q (Pimentel, 2018).

*Demonstração:*

Por absurdo, vamos supor que q ≤ p. De ii), teríamos que q ∈ α, caindo em uma contradição. Logo, p < q.

Deste teorema, observamos que, se α é um corte e, r ∉ α e r < s, então temos que s ∉ α (Pimentel, 2018).

Definido o conceito de corte, vamos agora analisar o que é um corte menor que outros e, definir as operações e demonstrar propriedades de cortes com base em propriedades estabelecidas para os números racionais.

**Definição 6.2.6:** Igualdade e desigualdade de cortes.

Tomando os cortes α e β, então:
Sempre que tivermos p ∈ α e também p ∈ β e, da mesma forma, sempre que q ∈

$\beta$ tivermos também $q \in \alpha$ (ou seja, os dois conjuntos $\alpha$ e $\beta$ são idênticos), podemos escrever $\alpha = \beta$.
Caso essa condição não ocorra, $\alpha \neq \beta$ (Pimentel, 2018).

**Definição 6.2.7:** Relação de ordem no conjunto dos cortes.

Tomando os cortes $\alpha$ e $\beta$, então, podemos escrever $\alpha < \beta$ (ou $\beta > \alpha$) se $\alpha$ for um subconjunto próprio de $\beta$, ou seja, se houver um racional p de forma que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$ (Pimentel, 2018).

Para melhor compreensão da definição de relação de ordem, seguem abaixo três observações:

1) $\alpha \leq \beta$ significa que $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$;
2) $\alpha \geq \beta$ é o mesmo que $\beta \leq \alpha$;
3) Se $\alpha > 0^*$ temos que $\alpha$ é positivo. Se $\alpha \geq 0^*$, $\alpha$ é não negativo. Da mesma forma, temos que, se $\alpha < 0^*$, $\alpha$ é negativo. Se $\alpha \leq 0^*$, $\alpha$ é não positivo.

**Teorema 6.2.8:** Tricotomia para dois cortes quaisquer.

Tomando os cortes $\alpha$ e $\beta$, valerá uma e somente uma das condições abaixo (Pimentel, 2018):

i) $\alpha = \beta$
ii) $\alpha < \beta$
iii) $\beta < \alpha$

*Demonstração:*

De acordo com as Definições 6.2.6 e 6.2.7, se $\alpha = \beta$, então os itens ii) e iii) não valem. Mostraremos então que $\alpha < \beta$ e $\beta < \alpha$ são mutuamente excludentes. Para isso, vamos supor por absurdo que as duas relações são válidas.
Se $\alpha < \beta$, então há um racional p de forma que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Se $\beta < \alpha$, então existe um racional q de forma que $q \in \alpha$ e $q \notin \beta$. De acordo com o Teorema 6.2.5, de $p \in \beta$ e $q \notin \beta$ temos $q < p$, enquanto que de $q \in \alpha$ e $p \notin \alpha$ implica $q < p$, caindo em uma

contradição, pois não tem como ter $p < q$ e $q < p$ pela tricotomia dos números racionais. Com isso, provamos que, no máximo, uma das três relações é válida.

Suponhamos que $\alpha \neq \beta$, então ou há um racional $p$ em $\alpha$ mas não em $\beta$ e, neste caso teríamos $\beta < \alpha$, ou, existe um racional $q$ em $\beta$ mas não em $\alpha$ e, assim, nesse caso, teríamos $\alpha < \beta$ (Pimentel, 2018).

**Teorema 6.2.9:** Transitividade para (<).

Vamos tomar os cortes $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, temos que $\alpha < \gamma$ (Pimentel, 2018).

*Demonstração:*

Se $\alpha < \beta$, há um racional $p$ de forma que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$. Se $\beta < \gamma$, há um racional $q$ de forma que $q \in \gamma$ e $q \notin \beta$. Mas se $p \in \beta$ e $q \notin \beta$, então $p < q$. Como $p \notin \alpha$, então $q \notin \alpha$. Dessa forma, $q \in \gamma$ e $q \notin \alpha$, significando que $\alpha < \gamma$ (Pimentel, 2018).

**Teorema 6.2.10:** Adição

Tomando os cortes $\alpha$ e $\beta$, temos um conjunto $\gamma$ de todos racionais $r$ de forma que:

$$r = p + q,$$

com $p \in \alpha$ e e com $q \in \beta$. Com isso, temos que $\gamma$ é um corte (Pimentel, 2018).

Demonstração:

Para demonstrar esse teorema, precisamos provar que $\gamma$ satisfaz as três condições da Definição 6.2.1:

i) $\gamma$ é não vazio. Vamos considerar $s \notin \alpha$, $t \notin \beta$, com $s, t \in \mathbb{Q}$. Então, $s > p$ para todo $p \in \alpha$, e, $t > q$, para todo $q \in \beta$.
Assim, $s + t > p + q$ e $s + t \notin \gamma$. Portanto $\gamma$ não contém todos os racionais, isto é, $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

ii) Vamos supor que $r \in \gamma$, $s < r$, com $s \in \mathbb{Q}$. Dessa forma, $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e e com $q \in \beta$. Como temos que $s < r$, então $s - q < p$, assim, $s - q \in \alpha$ e $s = (s - q) + q \in \gamma$.

iii) Vamos supor que $r \in \gamma$. Então, $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Assim, existe um racional $s > p$ que forma que $s \in \alpha$. Portanto, temos $s + q > r$ e $r$ não é o maior racional em $\gamma$ (Pimentel, 2018).

**Definição 6.2.11**: Soma de cortes.

Tomando os cortes $\alpha$ e $\beta$, vamos ter um corte $\gamma$ chamado de soma de $\alpha$ e $\beta$ se:

$$\gamma = \alpha + \beta = \{r + s;\ r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\} \text{ (Pimentel, 2018).}$$

Definida a soma, vamos agora definir as propriedades da operação adição no conjunto dos cortes.

**Teorema 6.2.12:** Propriedades comutativa, associativa e elemento neutro.

Tomando os cortes $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, serão válidas as propriedades abaixo (Pimentel, 2018):

i) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
ii) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
iii) $\alpha + 0^* = \alpha$.

*Demonstração*

Para demonstrar tais propriedades, vamos considerar $\alpha + \beta$ como sendo o conjunto de todos os racionais escritos na forma $p + q$, de modo que $p \in \alpha$ e $q \in \beta$ e $\beta + \gamma$ o conjunto dos racionais da forma $q + t$, com $q \in \beta$ e $t \in \gamma$.

i) De acordo com a definição de $\beta + \alpha$, estamos considerando $q + p$ ao invés de $p + q$. Pela comutatividade dos racionais, sabemos que vale $p + q = q + p$. Com isso, chegamos que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

ii) Da mesma forma que a demonstração anterior, nosso resultado virá da propriedade associativa da adição de números racionais, no qual sabemos que vale $(p + q) + t = p + (q + t)$. Com isso, valerá a propriedade nos cortes $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

iii) Vamos tomar um $r \in \alpha + 0^*$. Com isso, podemos escrever $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in 0^*$ (ou seja, $q < 0$).

Então, temos que $p + q < p$, de forma que $p + q \in \alpha$ e $r \in \alpha$. Portanto, $\alpha + 0^* \subset \alpha$.

Da mesma forma, vamos supor que $r \in \alpha$ e vamos tomar $s \in \alpha$ com $s > r$. Temos então $r - s \in 0^*$ e $r = s + (r - s) \in \alpha + 0^*$.

Portanto $\alpha \subset \alpha + 0^*$, o que significa que $\alpha + 0^* = \alpha$.

**Teorema 6.2.13:** Unicidade do elemento oposto da adição de um corte qualquer.

Vamos tomar inicialmente o corte $\alpha$. Então, existirá um único corte $\beta$ de modo que $\alpha + \beta = 0^*$ (Pimentel, 2018).

*Demonstração*

Vamos chamar de $-\alpha$ o corte $\beta$. Com isso, temos:

$\alpha + (-\alpha) = 0^*$

Dado um elemento $x \in \alpha + (-\alpha)$, existe $a \in \alpha$ e $-b \in -\alpha$ de forma que:

$$x = a - b$$

Precisamos mostrar que o nosso x é menor que $0^*$. Para isso, temos que como $b \in$ cota superior, temos que $a < b$, então, $x = a - b < 0$ implicando que $x \in 0^*$.

Provando a volta:

Dado $x \in 0^*$, com $x \in \mathbb{Q}$, temos $x < 0$. Agora, temos que decompor x em: $\alpha + (-\alpha)$:

Então, existe $b \in$ cota superior de forma que $b + x \in \alpha$. Com isso, temos que

$x = (x + b) + (-b) \in \alpha + (-\alpha)$.

**Teorema 6.2.14:** Lei do cancelamento da adição e compatibilidade da ordem com a adição.

Tomando os cortes $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, então:

i) Se $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, temos que $\beta = \gamma$ (Pimentel, 2018).
ii) Se tivermos $\beta < \gamma$, então teremos que $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. Para o caso de $\beta = 0^*$, então, temos que $\alpha + \gamma > 0^*$ se $\alpha > 0^*$ e se $\gamma > 0^*$ (Pimentel, 2018).

*Demonstração:*

i) Vamos tomar o corte $\alpha'$ como sendo o corte oposto de $\alpha$. Então:

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$$
$$\alpha' + (\alpha + \beta) = \alpha' + (\alpha + \gamma)$$
$$(\alpha' + \alpha) + \beta = (\alpha' + \alpha) + \gamma$$
$$0^* + \beta = 0^* + \gamma$$

Logo $\beta = \gamma$

ii) Vamos supor que $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$.
De acordo com o item i) e sua demonstração, temos que nosso resultado é:
$\beta = \gamma$
Contradizendo com nosso enunciado.

Então ou $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ ou $\alpha + \beta > \alpha + \gamma$

Vamos provar que $\beta < \gamma$:
De acordo com a definição temos que há um racional p de modo que $p \in \gamma$ e $p \notin \beta$. Vamos tomar um $t \in \beta$. De acordo com a tricotomia dos racionais temos então que $t < p$. Vamos tomar s $\alpha \in$. Como estamos operando nos racionais vale a relação:
$t < p$
$s + t < s + p$

Isso implica que

$\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Como vimos na Teoria 6.2.8 vale apenas um dos casos da tricotomia. Com isso $\beta < \gamma$.

**Definição 6.2.15:**

Tomando os cortes $\alpha$ e $\beta$, existirá apenas um único corte $\gamma$ de forma que $\alpha + \gamma = \beta$ (Pimentel, 2018).

*Demonstração:*

De acordo com as condições enunciadas, temos que existe no máximo um corte $\gamma$. Isso é fácil ser visto pois, se $\gamma 1 \neq \gamma 2$, então $\alpha + \gamma 1 \neq \alpha + \gamma 2$. Com essa observação levantada, agora podemos demonstrar o que queríamos:

.

Tomando $\gamma = \beta + (- \alpha)$, temos:

$\alpha + \gamma$ (substituindo $\gamma$)

$= \alpha + [\beta + (- \alpha)]$ (aplicando a propriedade comutativa)

$= \alpha + [(- \alpha) + \beta]$ (aplicando a associatividade)

$= [\alpha + (- \alpha)] + \beta$

$= 0^* + \beta$

$= \beta$

Portanto, chegamos em $\alpha + \gamma = \beta$, como queríamos demonstrar (Pimentel, 2018).

A partir de agora, ao invés de escrever $\beta + (- \alpha)$, vamos escrever $\beta - \alpha$.

Definida a operação de soma nos cortes e suas propriedades, vamos enunciar agora a multiplicação neste conjunto dos cortes. Nele, vamos notar que obtemos um corpo.

**Teorema 6.2.16:** Multiplicação

Vamos tomar os cortes $\alpha$ e $\beta$ de modo que $\alpha \geq 0^*$ e também $\beta \geq 0^*$.

Tomemos também $\gamma$ como sendo o conjunto de todos os racionais r de forma que: $r = pq$, onde $p \in \alpha$ e $q \in \beta$, e, além disso, temos também que $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Com isso, temos que $\gamma$ é um corte (Pimentel, 2018).

**Definição 6.2.17:** Multiplicação

Chamaremos o corte $\gamma$ de produto de $\alpha$ e $\beta$. Vamos escrever esse produto na forma: $\alpha \,.\, \beta$.

Além disso, definiremos:

i) $\alpha \,.\, \beta = (-\alpha)(-\beta)$, se $\alpha,\beta < 0^*$ (Pimentel, 2018);
ii) $\alpha \,.\, \beta = -[(-\alpha)\beta]$, se $\alpha < 0^*$ e $\beta > 0^*$ (Pimentel, 2018);
iii) $\alpha \,.\, \beta = -[\alpha \,.\, (-\beta)]$, se $\alpha > 0^*$ e $\beta < 0^*$ (Pimentel, 2018).

**Teorema 6.2.18:** Propriedades da multiplicação

Vamos tomar os cortes $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, de forma que as propriedades abaixo sejam válidas: (Pimentel, 2018):

i) $\alpha \,.\, \beta = \beta \,.\, \alpha$;
ii) $(\alpha \,.\, \beta) \,.\, \gamma = \alpha \,.\, (\beta \,.\, \gamma)$;
iii) $\alpha \,.\, (\beta + \gamma) = \alpha \,.\, \beta + \alpha \,.\, \gamma$;
iv) $\alpha \,.\, 0^* = 0^*$;
v) $\alpha \,.\, \beta = 0^* \Leftrightarrow \alpha = 0^*$ ou $\beta = 0^*$;
vi) $\alpha \,.\, 1^* = \alpha$;
viii) $0^* < \alpha < \beta$ e $\gamma > 0^*$, então $\alpha \,.\, \gamma < \beta \,.\, \gamma$.

**Definição 6.2.19:**

Vamos tomar os cortes $\alpha$ e $\beta$, de forma que $\alpha \neq 0^*$. Então, existirá um único corte $\gamma$ de forma que $\alpha \cdot \gamma = \beta$ (Pimentel, 2018).

**Teorema 6.2.20:**

Tomando os cortes $\alpha$ e $\beta$, de forma que $\alpha < \beta$.
Haverá um corte racional $r^*$ de modo que $\alpha < r^* < \beta$ (Pimentel, 2018).

*Demonstração:*

Vamos tomar $\alpha < \beta$. Daqui, temos então que, haverá um número racional p de modo que $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$.
Vamos tomar um $r \in \beta$ de modo que $r > p$. Como esse número $r \in \beta$ e $r \notin r^*$, temos que o $r^* < \beta$. Além disso, como $p \in r^*$ e $p \notin \alpha$, temos então que $\alpha < r^*$ (Pimentel, 2018).

## 6.3. O corpo dos números reais

Iniciaremos essa nova seção definindo o conceito de corpo.

**Definição 6.3.1:** Corpo

Um corpo é um conjunto K não vazio no qual pode ser definida duas operações binárias, adição e multiplicação e podem ser definidas da seguinte forma (Sodré, s/d):

$$+ \quad : K \times K \to K \qquad \text{e} \qquad . : K \times K \to K$$
$$(x,y) \to x + y \qquad\qquad (x,y) \to x \,.\, y$$

Além disso, um corpo satisfaz as seguintes propriedades:

*i)* Associativa da adição: (x + y) + z = x + (y + z), para quaisquer x,y,z ∈ K (Pimentel, 2018);

*ii)* Comutativa da adição: x + y = y + x, para quaisquer x,y ∈ K (Pimentel, 2018);

*iii)* Elemento neutro da adição: Existe um 0 ∈ K de forma que x+0 = x, para qualquer x ∈ K (Pimentel, 2018);

*iv)* Elemento oposto da adição: Tomando um x ∈ K, há y ∈ K, onde y = -x, no qual x + y =0 (Pimentel, 2018);

*v)* Associativa da multiplicação: (x . y) . z = x . ( y . z), para quaisquer x,y,z ∈ K (Pimentel, 2018);

*vi)* Comutativa da multiplicação: x . y = y . x, para quaisquer x,y ∈ K (Pimentel, 2018);

*vii)* Elemento neutro da multiplicação: Existe 1 ∈ K de forma que x . 1 = x, para qualquer x ∈ K (Pimentel, 2018);

*viii)* Elemento inverso da multiplicação: Tomando um x ∈ K, com x ≠ 0, há y ∈ K, onde y = $\frac{1}{x}$, no qual x . y =1 (Pimentel, 2018);

*ix)* Distributiva da multiplicação: x . (y + z) = x . y + x . z, para quaisquer x,y,z ∈ K (Pimentel, 2018).

Com isso, como $\mathbb{Q}$ é munido das operações de adição e multiplicação (contendo as propriedades da adição e multiplicação: associativa, comutativa, elemento neutro, lei do cancelamento e, elemento oposto da adição e, distributiva da multiplicação e elemento inverso da multiplicação), $\mathbb{Q}$ é um corpo (Pimentel, 2018).

Da mesma forma, o conjunto dos corpos com as operações de adição e multiplicação também é um corpo. Este último, representaremos por $\mathbb{R}$, visto que será chamado de corpo dos números reais (Pimentel, 2018).

### 6.4. O conjunto $\mathbb{Q}$ não é completo. O conjunto $\mathbb{R}$ é completo.

Conforme estudado anteriormente, K será um corpo se for um conjunto qualquer não vazio com operações de adição e multiplicação que satisfazem as propriedades i) até ix). Além disso, se em K estiver definida uma relação de ordem total, de forma que a quádrupla (K, +, ., ≤) também contemple as propriedade de compatibilidade em relação à adição e a multiplicação, então podemos dizer que (K, +, ., ≤) é um corpo ordenado. Temos pré definido que ($\mathbb{Q}$, +, ., ≤) é um corpo ordenado. Entretanto, ($\mathbb{Z}$, +, ., ≤) não é um corpo ordenado com as operações de adição e multiplicação pois a propriedade viii) não se aplica.

Ainda, por definições já estabelecidas, temos que os números reais podem ser representados por pontos em um reta real, conforme mostra a figura 5 (Pimentel, 2018).

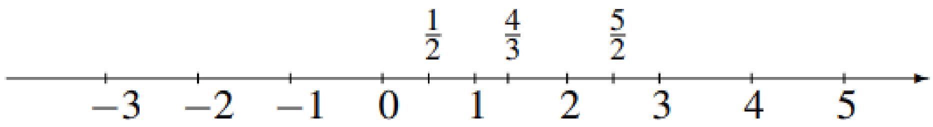


*Figura 5: representação dos números racionais na reta real.*

Se o ponto P for a representação de um número racional x, falaremos que x é a abscissa de P (Pimentel, 2018).

Nosso próximo passo agora é mostrar que nem todo ponto da reta real é racional.

Vamos tomar um quadrado de lado 1 e diagonal d. Através do Teorema de Pitágoras temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Vamos considerar P como sendo a interseção da reta real com a circunferência de raio d e centro 0, como mostra a figura 6.

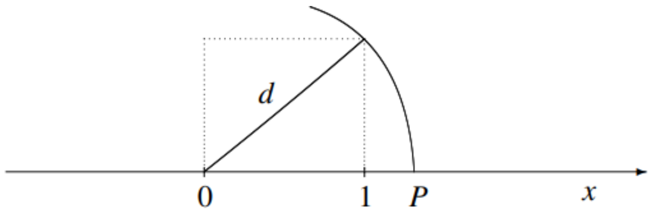


*Figura 6: Interseção do eixo x com a circunferência*

Vamos mostrar que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$. Para isso, tomaremos como base as proposições a seguir:

**Proposição 6.4.1:** Vamos tomar $a \in \mathbb{Z}$ de forma que as observações abaixo sejam válidas:

i) Se a for um número ímpar, então $a^2$ também é ímpar (Pimentel, 2018);

ii) Se $a^2$ for par, então a será um número par (Pimentel, 2018).

**Proposição 6.4.2:** A equação a seguir não admite solução em $\mathbb{Q}$ (Pimentel, 2018).

$$x^2 = 2.$$

*Demonstração:*

Vamos supor por absurdo que a equação $x^2 = 2$ tenha solução em $\mathbb{Q}$. Dessa forma, podemos tomar $x = \frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e também com $\frac{a}{b}$ sendo irredutível. Com isso,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

significando que $a^2 = 2b^2$ e, portanto, $a^2$ é par. Ainda, segue da proposição 3.1 item ii) que a é par também. Disso, segue que existe $t \in \mathbb{Z}$ de forma que $a = 2t$. Mas

$a^2 = 2b^2$

$\rightarrow 2b^2 = 4t^2 \rightarrow b^2 = 2t^2$

$a = 2t$

Portanto, $b^2$ é par e b é par também. Isso implica que $\frac{a}{b}$ é redutível visto que a e b são divisíveis por 2, caindo em um contradição.

Dessa forma, concluímos que não existe $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $(\frac{a}{b})^2 = 2$ (Pimentel, 2018).

**Definição 6.4.3:** Corpo ordenado completo e suas consequências

- Limitante superior: Um subconjunto A de um corpo ordenado (K, +, ., ≤) será limitado superiormente se houve um L ∈ K de forma que a ≤ L, para todo a ∈ A. Assim, L será limitante superior de A (Pimentel, 2018).

- Supremo: Se A for um conjunto limitado superiormente, existirá um número sup(A) ∈ K que será chamado de supremo de A caso seja o menor limitante superior de A. Isso significa que a ≤ sup(A), para todo a ∈ A, e se para f ∈ K f < sup (A), então haverá a ∈ A de forma que f < a (Pimentel, 2018).

- Corpo ordenado completo: É um corpo para o qual todo subconjunto limitado superiormente possui supremo (Pimentel, 2018).

**Observação:** Nem todo subconjunto de $\mathbb{Q}$ limitado superiormente terá supremo em ∈ $\mathbb{Q}$.

Exemplo: { x ∈ $\mathbb{Q}$ : $x^2 < 2$} é um conjunto limitado superiormente mas não possui seu supremo em $\mathbb{Q}$ (Pimentel, 2018).

Com isso, podemos notar que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado não completo. Entretanto, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo por construção e pelas propriedades vistas na seção anterior. Portanto, o teorema a seguir pode ser enunciado:

**Teorema 6.4.4:**

A quádrupla ($\mathbb{R}$ , +, ., ≤), munida das operações de adição, multiplicação e relação de ordem total (≤), é um corpo ordenado completo (Pimentel, 2018).

"Finalmente, a cada corte $\alpha \in \mathbb{R}$, associamos seu supremo, o qual também denotaremos por $\alpha$. Com esta identificação, em vez de considerarmos $\mathbb{R}$ como conjunto de cortes, os quais, por sua vez, são subconjuntos de $\mathbb{Q}$, consideramos $\mathbb{R}$ como o conjunto dos elementos que são supremos de cortes. Fazendo isso, temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito irracional (por exemplo, $\sqrt{2}$ é irracional, já que é supremo de um corte que não é um corte racional). Com isso, temos o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, como aprendemos do Ensino Médio, mas agora, com suas operações de adição e multiplicação (e também subtração, dada por $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, e divisão, dada por $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$) bem como suas propriedades, devidamente justificadas" (Pimentel, 2018, p. 43).

# 7. Breves Resumos Históricos: Weierstrass e Cantor-Heine

## 7.1.Teoria dos números reais de Weierstrass

Diferentemente da teoria de Dedekind, Weierstrass parte da noção mais geral de número para desenvolver sua teoria.

Não haviam registros dele, apenas anotações de seus alunos, o que faz com que perca um pouco a credibilidade de sua teoria.

Vários matemáticos tiveram a oportunidade de terem contato com as ideias desenvolvidas por Weierstrass, como por exemplo, Cantor.

Conforme mencionado, Weierstrass partiu da noção mais geral de número para construir sua teoria. Para ele, os números eram “ajuntamentos” ou “agregados” de certos elementos.

**Exemplo 7.1.1:**

Os inteiros positivos, se referem ao ajuntamento de coisas/elementos idênticos em pensamento.

Os racionais positivos se referem ao ajuntamento de unidades básicas, que eram denotadas por “1”, e das partes exatas dessas unidades, que era representada como $\frac{1}{a}$, com a $\in \mathbb{N}$.

As quantidades numéricas arbitrárias, conhecidas como irracionais, foram compreendidas de forma parecida com o ajuntamento infinito de elementos que são da mesma “espécie” (Baroni, Garcia, 2014).

A quantidade numérica citada no exemplo anterior, era representada por qualquer elemento de uma classe de ajuntamento a partir da relação de equivalência de igualdade (Baroni, Garcia, 2014). Com isso, foram considerados dois tipos de transformações de quantidades numéricas:

i) Quaisquer n elementos da forma $\frac{1}{n}$ pode ser substituída pela unidade principal (Dugac, 1976);

ii) Qualquer número pode ser substituído por suas partes exatas, ou seja, 1 pode ser substituído por $n. \frac{1}{n}$ (Dugac, 1976).

Uma quantidade numérica $a$' é considerada uma parte de $a$'' quando $a$' consistia de muitos elementos e podia ser transformada em algum $a$'' por meio de uma sequência finita de transformações i) e ii) citadas acima, de forma que, todos os elementos de $a$'' acontecem em $a$ o mesmo número de vezes que em $a$'', de tal modo que $a$ tenha outros elementos ou, até mesmo, um número maior desses mesmos elementos (Baroni, Garcia, 2014).

Dizemos que duas quantidades numéricas $a$ e *b* são iguais se, toda parte de $a$ pode ser uma parte de *b*, por meio de transformação e vice-versa.

Para o caso em que as partes de $a$ pode ser transformada em *b* mas o contrário não ocorre, ou seja, as partes de *b* não pode ser transformadas em partes de $a$, dizemos que *b* é maior que $a$ (Baroni, Garcia, 2014)

Dizemos que uma quantidade numérica $a$ é finita se houver quantidades c formadas de um número finito de elementos que são maiores do que $a$ (Baroni, Garcia, 2014).

Por meio de manipulações de unidades, Weierstrass define as operações adição e multiplicação da mesma forma em que definiu para os inteiro positivos. Ainda, o conceito de números negativos foi desenvolvido por ele através da introdução do conceito de “ajuntamento oposto” que, por meio dele, estipulou que o ajuntamento oposto e o ajuntamento igual se cancelavam entre si.

Por mais que estes argumentos descritos por Weierstrass precisassem ser olhados com uma certa cautela em questão de somas infinitas, eles permitiram que Weiestrass conseguisse apresentar provas de teoremas sobre limite de sequências de números e de funções:

> “Um desses teoremas é o que diz que todo conjunto infinito limitado de números reais tem pelo menos um ponto de acumulação, hoje conhecido por Teorema de Bolzano-Weierstrass. Outro é o teorema que diz que todo conjunto não vazio de números reias, limitado superiormente, possui supremo, que caracteriza a completude dos reais” (Baroni, Garcia, 2014, p. 132).

A abordagem desenvolvida por Weierstrass reduziu o conceito de quantidade ao conceito de número. Em questões nominais, Weierstrass continuou utilizando o termo “quantidade”, entretanto, fazia uma separação lógica como: “quantidade aritmética” ou “quantidade numérica” conforme o levasse mais para o sentido geométrico ou para o sentido físico (Baroni, Garcia, 2014).

## 7.2. Teoria dos números reais de Cantor-Heine

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, nascido em 3 de março de 1845, foi aluno dos matemáticos Weierstrass, Ernst Kummer e Leopold Kronecker, onde estabeleceu relações de natureza bastante distintas. Em 1869 foi contratado como professor na Universidade de Halle no qual permaneceu até sua morte. Nessa Universidade, Cantor realizou suas pesquisas em análise matemática e foi muito influenciado pelas ideias de Weierstrass, no qual era admirador. Se envolveu também com os métodos do infinito potencial, que eram utilizados desde os gregos antigos, definiu os números transfinitos e também elaborou a hipótese do “continuum”. De acordo com Baroni e Garcia (2014, p.139), a partir de 1884 sua saúde mental começou a ser deteriorada devido a frustrações que ele sentia devido a tentativas mal sucedidas de provar a hipótese do continuum. Por fim, suas ideias foram depois reconhecidas na sua devida importância graças à influência de Hilbert.

Ainda segundo Baroni e Garcia (2014, p.139), a principal contribuição de Cantor para a matemática foi a sistematização da ideia de infinito atual, que foi englobada em sua teoria dos conjuntos. Para o caso deste conjunto ser dos pontos na reta, Cantor foi o responsável por introduzir as ideias que se generalizaram para os espaços topológicos como conjunto derivado, ponto de acumulação entre outros. Daí, surgiu também a ideia de continuidade da reta e a definição de números reais, diferente da considerada por Dedekind.

Heine, colega de Cantor em Halle, publicou as ideias de Cantor em 1871, com algumas modificações. Nessa publicação, Heine inicia com referências a teoremas que formavam a base de Weierstrass e apontava algumas dúvidas, sendo uma delas, a definição dos números irracionais que não foi muito bem estabelecida. Para isso, escolheu uma abordagem formal com o intuito de “dissolver” o mistério dos irracionais, dizendo:

> “Suponha que eu não esteja satisfeito em ter apenas os racionais positivos. Respondo a questão “O que é um número?” não definindo número conceitualmente, nem introduzindo o irracional ou mesmo o limite cuja existência seria presumida. Adoto o ponto de vista puramente formal na definição, chamando certos símbolos tangíveis de números, para que a existência desses números não seja questionada. O foco deve ser colocado sobre a operação aritmética, e os numerais devem ser selecionados, ou ser equipados com um aparato, de forma que forneçam indicações sobre a definição das operações” (Heine, 1872, p. 173).

Heine, concordante com a abordagem de Cantor, partiu de sequências de números racionais que satisfaziam o atual critério de convergência de Cauchy e, os números reais foram introduzidos como símbolos associados a classes de equivalência de tais sequências.

Abaixo, descreveremos a ideia da construção dos números reais de Heine.

Vamos considerar dado o símbolo e o sistema de operações dos números racionais. Chamaremos uma sequência infinita de racionais $a_1$, $a_2$, …. de sequência numérica (atualmente, sequência de Cauchy), se, para todo número “N” (positivo, racional) dado, por menor que ele seja, existir um valor n de forma que, para todo inteiro positivo v, $|a_n - a_{n+v}|$ for menor do que N. Se $a_1$, $a_2$,... e $b_1$, $b_2$,.... são sequências numéricas, temos então que $a_1 \pm b_1$, $a_2 \pm b_2$, … também é. Uma sequência elementar é uma sequência numérica que converge para zero (Baroni, Garcia).

Duas sequências numéricas $a_1$, $a_2$,... e $b_1$, $b_2$,.... serão iguais se, e só se $a_1 - b_1$ , $a_2 - b_2$,... for uma sequência elementar. Com isso, temos que um símbolo é associado a cada sequência numérica. O símbolo associado a uma sequência numérica consistente de repetições constantes de um único número racionais é escolhido para ser esse número racional. Para uma sequência que for arbitrária, o símbolo escolhido vai ser a própria sequência, só que colocada entre colchetes, ou seja, será um símbolo do tipo [a, b, c,..]. Símbolos que são associados com sequências numéricas iguais, são considerados também iguais. 0 é o símbolo de sequência elementar. Esses números construídos são chamados de números irracionais de primeira ordem, mesmo se forem racionais em casos particulares (Baroni, Garcia).

As operações aritméticas são inseridas para os novos símbolos numéricos, através da aplicação dessas operações termo a termo. Para o caso da divisão, há um cuidado extra, onde o denominador não deverá ser uma sequência elementar e também não possua termos nulos. Da mesma forma, pode ser introduzida uma relação de ordem.

Dessa forma, com novos símbolos numéricos, há possibilidade de formas novas sequências numéricas (sequência de Cauchy) e “irracionais de segunda ordem”. Entretanto, para todo $m > 0$, vale o teorema:

**Teorema 7.2.1:**

“Os irracionais de ordem m+2 não são irracionais novos, mas coincidem com aqueles de primeira ordem” (Baroni, Garcia, 2014, p. 142).

Um ano após a publicação de Heine, Cantor faz suas postagens no artigo “Uber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen”, sendo ele bem semelhante à de Heine, porém com uma ênfase maior na possibilidade de obter o método interativo de formar sequências de Cauchy. Foi estabelecido por Cantor de maneira “informal” o teorema que garantia que todos os domínios de quantidades numéricas de espécie superior são equivalentes ao de primeira espécie (teorema citado no trabalho de Heine), porém insistia que nos sentidos diferentes dos quais os números de diferentes espécies eram dados. Da mesma forma que Dedekind, Cantor pensou sobre a relação entre suas quantidades numéricas e os pontos de uma reta e percebeu que havia uma necessidade em ligar essas ideias (Baroni, Garcia, 2014). O axioma a ser citado abaixo foi fundamental para Cantor compreender seus resultados acerca dos números reais como proposições sobre conjuntos de pontos da reta, levando-o a firmar o conceito de ponto limite, conhecido atualmente como ponto de acumulação e o conceito de conjunto derivado, conhecido como conjunto dos pontos de acumulação.

“A todo número [real] corresponde um ponto definido da reta [euclidiana], cuja coordenada é igual a esse número” (Cantor, 1872, p. 128 apud Baroni, Garcia, 2014, p. 143).

Nos anos seguintes, Cantor estava focado em buscar respostas para a questão de um continuum unidimensional, ou seja, conjunto dos números reais, ser enumerável. Em uma publicação feita por ele no ano de 1874, Cantor afirma que o conjunto dos reais não é enumerável. Veremos abaixo uma das provas apresentada por ele:

*Demonstração:*

Vamos tomar a sequência “*w*” infinita de números reais:

$$w = \{w_1, w_2, ...\}.$$

Temos então que, em todo intervalo aberto $(a, b)$ haverá algum *y* de forma que esse *y* não seja elemento de *w*. De fato, vamos supor que os dois primeiros elementos de *w* estejam em $(a, b)$, se eles existem vamos denotar por $a_1$, $b_1$, tomando $a_1 < b_1$. Da mesma forma, para todo n $\in \mathbb{N}$, vamos tomar $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ como sendo os dois primeiros elementos de *w* que estejam em $(a_n, b_n)$, se existem, tomemos novamente $a_{n+1} < b_{n+1}$. Com isso, um dos seguintes casos deve acontecer:

i) a sequência $(a_n, b_n)$ de intervalos é finita. Segue a afirmação:

ii) a sequência $(a_n, b_n)$ de intervalos é infinita. Então, temos que a sequência $\{a_k\}$, crescente e limitada, converge para um limite $a_\infty$ e da mesma forma, $b_\infty := lim_k\, b_k$ existe.

Se $a_\infty = b_\infty$, escolhemos *y* como $a_\infty$. Se $a_\infty < b_\infty$, então todo $y \in (a_\infty, b_\infty)$ e um número real não enumerado por *w* (Baroni, Garcia, 2014).

Os resultados apresentados por Cantor mostram que, se a sua construção dos números reais é válida (ou a de Dedekind ou a de Weierstrass), então há pelo menos dois tipos de conjuntos infinitos:

- um tipo dos naturais;
- um tipo do continuum.

Com isso, dois conjuntos vão representar diferentes tipos de infinito se, e só se, for impossível estabelecer uma correspondência biunívoca entre eles (Baroni, Garcia, 2014).

Por fim, entre os anos de 1879 e 1884, Cantor escreveu diversos artigos que conectaram de forma mais certeira as ideias acerca de sua teoria. Além disso, ele abriu um novo universo na matemática: os números transfinitos (Baroni, Garcia, 2014).

## 8. Conclusão

Foi durante a antiguidade clássica que notaram a ausência da definição de novos números. Porém apenas durante a época da aritmetização da análise que esses novos números foram consolidados através de matemáticos (como Dedekind, Weierstrass, entre outros) que retomaram esse assunto.

Embora não tenha conseguido uma carreira profissional tão marcante (visto que não conseguiu lecionar em universidades influentes), Richard Dedekind foi um grande matemático para o século XIX, pois suas publicações tiveram valores significativos. Ainda é possível compreender que seus os ensaios sobre números reais foram frutos do período em que viveu, como por exemplo: as universidades alemãs passavam por reformas, onde começaram a ter um foco maior em pesquisas; o diagnóstico de que havia necessidade de uma reestruturação para as bases da análise e, a aproximação de matemáticos alemães visando discussões de cunho filosófico. A junção de todos esses fatores levaram ao questionamento dos “números” existentes e à preocupação de Dedekind sobre os fundamentos da aritmética (Bernal, 2021).

Com isso, não foi por acaso que outros matemáticos (predominantemente alemães), discutiram também sobre essas questões neste período, como Cantor, Weierstrass e Peano. Comparado com esses autores, Dedekind não obteve tanto destaque com o passar do tempo. Em relação à teoria dos conjuntos, Cantor é mais reconhecido. Em relação aos números naturais, Peano é o maior nome. (Bernal. 2021). Comparando em termos de credibilidade, os ensinamentos de Dedekind foram mais relevantes do que os de Weierstrass, visto que Weierstrass não redigia seus ensinamento, com isso, todas as teorias desenvolvidas por Weierstrass são anotações de seus alunos, fazendo com que perca um pouco a qualidade de seus trabalhos. Ainda comentando sobre a comparação entre a teoria de Dedekind e Weierstrass, temos que, o segundo, parte da noção mais geral de número para descrever suas teorias, enquanto Dedekind se concentra mais a partir dos racionais.

Assim, com toda a teoria descrita, foi possível observar que Dedekind preparou sua definição dos números reais por meio dos cortes. Essa abordagem ainda é aceita como válida e utilizada, por meio de uma comparação intuitiva entre o conjunto dos números racionais e a linha reta. Ainda, sua motivação por trás dessa definição veio por meio de preocupações com o Cálculo Diferencial e Integral. Com isso, foi evidenciada a conhecida relação entre a aritmetização da análise com a reestruturação dos números (Bernal, 2021).

Desta forma, este trabalho mostrou a contribuição de Dedekind para os fundamentos da Aritmética e para a matemática e também, um valor dentro da história da matemática. Os trabalhos desenvolvidos por Dedekind sobre os conjuntos numéricos, fizeram parte de um contexto extremamente relevante em termos de desenvolvimentos inéditos no que se refere aos fundamentos da matemática, possibilitando várias investigações históricas que ainda podem ser realizadas. Além disso, foram apresentadas discussões valiosas para futuros professores, no qual é de suma importância que futuros docentes compreendam o caráter histórico da matemática, visto que os conceitos dessa área não surgem de repente. Novas teorias e novas abordagens matemáticas começam a ser estudadas por diversos motivos, como por deficiências notadas nas concepções anteriores ou por questões filosóficas, como notamos nas motivações de Dedekind (Bernal, 2021).

## 9. Referências bibliográficas

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; GARCIA, Sílvio César Otero. **Aspectos da História da Análise Matemática:** De Cauchy a Lebesgue. [S. l.]: Cultura Acadêmica, 2014. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/126211/ISBN9788579836015.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 26 ago. 2021.

BERNAL, Felipe Faust. **A formalização dedekindiana da aritmética**. Blumenau, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/228917/TCC_-_Felipe_Bernal.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 6 abr. 2022.

DUARTE, Carlos Lisboa; GONÇALVES, Hegildo Holanda; NÓBREGA , Nádia Pinheiro. **Tudo é número**: uma análise conceitual da ideia de número em Pitágoras. 33. ed. João Pessoa: Revista Principia, 2017. Disponível em: https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/viewFile/847/628. Acesso em: 3 nov. 2021.

DUGAC, PIERRE. **PROBLÈMES DE L'HISTOIRE DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE AU XIXème SIÈCLE**: CAS DE KARL WEIERSTRASS ET DE RICHARD DEDEKIND.. 3. ed. [*S. l.*]: UNIVERSITY OF PARIS, 1976.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

FERNANDES, Luiz Eduardo Gonçalves. **TEOREMA DE PITÁGORAS E A DESCOBERTA DA INCOMENSURABILIDADE**. [*S. l.*]: Colégio Afonso Andrade, 2017. Disponível em: https://www.afonsoandrade.com.br/single-post/2017/05/15/TEOREMA-DE-PIT%C3%81GORAS-E-A-DESCOBERTA-DA-INCOMENSURABILIDADE. Acesso em: 29 set. 2021.

FRAZÃO, Dilva. **Pitágoras**: Matemático grego. [*S. l.*], 2021. Disponível em: https://www.ebiografia.com/pitagoras/. Acesso em: 3 nov. 2021.

HEINE, E. **Element der Functionenlehre**. [*S. l.*], 1872. P. 173. Disponível em: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN243919689_0074?tify={%22pages%22:[177],%22panX%22:0.223,%22panY%22:0.394,%22view%22:%22info%22,%22zoom%22:0.454}. Acesso em: 5 abr. 2022.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Conjuntos. Funções. 7. ed. [*S. l.*], [S/D]. Disponível em: https://www.doraci.com.br/downloads/matematica/fund-mat-elem_01.pdf. Acesso em: 5 abr. 2022.

LOPES, Adrielle Cristine Mendello; DE SÁ, Pedro Franco. Números reais: Aspectos históricos. 9. ed. Universidade do Estado do Pará: **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, 2016. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/56/46. Acesso em: 27 ago. 2021.

MARTINS, Ana Patrícia de Morais da Fonseca. **As construções dos sistemas dos números reais:** Por Dedekind, Weierstrass e Méray. Tese (Mestrado em Ensino da Matemática). Departamento de Matemática Pura. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Março 2004. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/

bitstream/10400.19/1401/1/2004%20tese%20mestrado.pdf. Acesso em: 23 ago. 2021.

PIETERZACK, Mauricio Donizetti. **Números Reais**. 1. ed. Goiás: Revista da Olimpíada, 2000. Disponível em: https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/NumerosReais.pdf. Acesso em: 20 out. 2021.

PIMENTEL, Thiago Trindade. **Construção dos números reais via cortes de Dedekind**. São Carlos: Instituto de Ciências Matemáticas, 2018. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-18102018-164352/publico/ThiagoTrindadePimentel_revisada.pdf. Acesso em: 10 mar. 2022.

PONTES, Kerly Monroe. **Existência e Unicidade dos Números Reais via Cortes de Dedekind**. João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7505/2/arquivototal.pdf. Acesso em: 28 jan. 2022.

SODRÉ, Ulysses. **Álgebra**: Corpos. [*S. l.*], [S/D]. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/algebra/corpos.htm. Acesso em: 14 mar. 2022.