



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



GUILHERME MENDES LEMOS

ESTUDO DAS ENVOLVENTES DE CURVAS COM APLICAÇÕES NO GEOGEBRA

SÃO CARLOS
2022

GUILHERME MENDES LEMOS

ESTUDO DAS ENVOLVENTES DE CURVAS COM APLICAÇÕES NO GEOGEBRA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas

SÃO CARLOS
2022

Lemos, Guilherme Mendes

Estudo das envolventes de curvas com aplicações no
Geogebra / Guilherme Mendes Lemos -- 2022.
53f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Wladimir Seixas

Banca Examinadora: Wladimir Seixas, Rafael Fernando
Barostichi, João Carlos Vieira Sampaio

Bibliografia

1. Envolvente. 2. Curvas planas. 3. Geogebra. I. Lemos,
Guilherme Mendes. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 3/2022/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

GUILHERME MENDES LEMOS

ESTUDO DAS ENVOLVENTES DE CURVAS COM APLICAÇÕES NO GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 29 de abril de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Wladimir Seixas
Membro da Banca 1	Rafael Fernando Barostichi
Membro da Banca 2	João Carlos Vieira Sampaio



Documento assinado eletronicamente por **Wladimir Seixas, Professor(a) do Magistério Superior**, em 17/05/2022, às 17:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Fernando Barostichi, Professor(a) do Magistério Superior**, em 18/05/2022, às 12:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Carlos Vieira Sampaio, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/05/2022, às 17:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0686110** e o código CRC **26CEFD5B**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.012377/2022-63

SEI nº 0686110

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria das Graças e Milton, que me apoiaram durante todo o curso e se dedicaram para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter permitido que eu tivesse saúde, determinação e força durante essa empreitada tão desafiadora.

Agradeço a todos os colegas de curso que, de alguma maneira, me auxiliaram durante a caminhada e possibilitaram meu êxito até esse ponto.

Gratidão também a todos os integrantes e agregados da república *Fios de Elba*, meu lar durante os últimos anos, que me proporcionou muitas alegrias e aprendizados.

Agradeço a todos os familiares e amigos, por toda torcida e apoio que empregaram a mim durante a graduação.

E por fim, agradeço a todos os docentes e funcionários da Universidade, que dedicam o melhor de si para a promoção de um ensino público de qualidade. Em especial, agradeço ao meu orientador, professor Wladimir Seixas, pela disponibilidade, paciência e dedicação durante esses meses, fator determinante para a entrega deste trabalho.

“Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda”.

(FREIRE, 2000, p. 67).

RESUMO

Neste trabalho iremos estudar diversas famílias de curvas planas e suas envolventes. Apresentamos os métodos que possibilitam a obtenção das envolventes para curvas parametrizadas e para equações envolvendo parâmetros. Duas aplicações práticas (zona de tiro de canhão e zona de audibilidade) são também discutidas. Atividades didáticas com o uso do software Geogebra utilizando recursos da geometria dinâmica são apresentadas no trabalho para obter as diferentes envolventes.

Palavras-chave: Envolvente. Curvas planas. Geogebra.

ABSTRACT

In this work we will study several families of plane curves and their envelopes. We present the methods that make it possible to obtain the envelopes for parameterized curves and for equations involving parameters. Two practical applications (cannon firing zone and audibility zone) are also discussed. Didactic activities using the Geogebra software using dynamic geometry resources are presented in the work to obtain the different envelopes.

Keywords: Envelope. Plane curves. Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Aproximação de duas curvas de uma mesma família	16
Figura 3.2 – Família de circunferências de mesmo raio centradas no eixo das abcissas	17
Figura 3.3 – Envoltente de uma família de circunferências	18
Figura 3.4 – Família de curvas parametrizadas	19
Figura 3.5 – Família de circunferências tangentes aos eixos coordenados	22
Figura 3.6 – Envoltente de uma família de elipses	23
Figura 3.7 – Família de circunferências centradas em outra	24
Figura 4.1 – Envoltente de uma família de segmentos	31
Figura 4.2 – Envoltente de uma família de elipses	33
Figura 4.3 – Envoltente de uma família de retas	35
Figura 4.4 – Envoltente de uma família de retas	36
Figura 4.5 – Envoltente de uma família de circunferências	38
Figura 4.6 – Envoltentes de uma família de parábolas	39
Figura 4.7 – Envoltente de uma família de circunferências	40
Figura 4.8 – Propagação do ruído de um avião supersônico	41
Figura 4.9 – Envoltente de uma família de circunferências	42
Figura 4.10 – Trajetória de disparo de um canhão	43
Figura 4.11 – Envoltente de trajetórias em forma de parábolas	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	CURVAS PLANAS	13
3	ENVOLVENTES	16
3.1	INTERSEÇÃO DE CURVAS DE UMA FAMÍLIA	16
3.2	ENVOLVENTES DE CURVAS PARAMETRIZADAS	19
3.3	ENVOLVENTES DE FUNÇÕES COM PARÂMETROS	23
3.3.1	Diferenciação e a determinação das envolventes	25
4	EXEMPLOS E APLICAÇÕES	30
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	47
	REFERÊNCIAS	48
	APÊNDICE A ROTEIROS PARA ELABORAÇÃO DAS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA	49

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, com o avanço da tecnologia, os estudos matemáticos foram aprofundados em diversas áreas, inclusive na Geometria Diferencial. Dessa forma, tornou-se possível explorar em sala de aula assuntos tratados anteriormente de maneira superficial, como é o caso das envolventes de curvas planas. Este tema tem diversas relações com diferentes conceitos-chaves da matemática. Além disso, as envolventes estão presentes em diversas situações do cotidiano com nas áreas de física e engenharia.

Por este fato, se justifica a elaboração do presente trabalho, que tem por objetivo abordar a definição, as propriedades e a representação das envolventes de curvas planas com uso de uma ferramenta informatizada.

Dessa forma, torna-se relevante a formalização de teorias e exemplos que envolvam os conceitos ligados as envolventes. Para tal, será feito um panorama teórico com base nos trabalhos de [Alencar, Santos e Neto \(2020\)](#), [Boltianski \(1977\)](#), [Pogorelov \(1977\)](#), [Rodrigues \(1977\)](#) e [Gibson \(2001\)](#).

Também, será utilizado como ferramenta o software de geometria dinâmica Geogebra¹. Por meio dos recursos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, o aplicativo se apresenta como um dos principais elementos apoiadores da educação em ciência, tecnologia, engenharia e matemática, além de ser uma ferramenta relevante para inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo².

Esta monografia está dividida em cinco capítulos, que abordam desde o conceito de curvas, aos exemplos e passo a passo das construções.

O capítulo 2 apresenta os principais conceitos e resultados referentes as curvas planas, como sua definição, o conceito de curva fechada e simples, a ideia da parametrização e a definição implícita.

No capítulo 3 são apresentadas as ideias que estruturam o conceito de envolventes, como a definição das famílias de curvas, a ideia de interseção de elementos de uma mesma família e, a partir daí, são expostos métodos que possibilitam a obtenção das envolventes para curvas parametrizadas e também para equações envolvendo parâmetros.

No capítulo 4 são Uma aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, sendo $I = [a, b]$, é denominada fechada e simples se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e para quaisquer $t, s \in [a, b]$, $t \neq s$, $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, ou seja, os únicos pontos coincidentes de γ são seus pontos inicial e final.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA GUILHERME MENDES LEMOS ESTUDO DAS ENVOLVENTES DE CURVAS COM APLICAÇÕES NO GEOGEBRA SÃO CARLOS 2022 GUILHERME MENDES LEMOS ESTUDO DAS ENVOLVENTES DE CURVAS COM APLICAÇÕES NO GEOGEBRA Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Uni-

¹ <<https://www.geogebra.org/>>

² <<https://www.geogebra.org/about>>. Acesso em: 10 abr. 2022.

versidade Federal de São Carlos. Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas SÃO CARLOS 2022
expostos, e solucionados, exemplos com determinadas famílias onde os conceitos vistos nos capítulos anteriores são aplicados, além de discutir as peculiaridades de cada caso. Além disso, duas situações práticas são apresentadas onde é possível observar a presença relevante das envolventes no cotidiano.

Por fim, nas considerações finais, é feito um resumo dos principais conceitos e resultados obtidos, junto a uma análise de demais possibilidades futuras. No Apêndice A apresenta-se o passo a passo de cada uma das construções que constam no trabalho.

2 CURVAS PLANAS

Para tratar da teoria que estrutura o conceito das envolventes, faz-se necessário recapitular algumas definições importantes da matemática, que são pilares do assunto em questão.

De modo geral, uma curva plana pode ser definida como a trajetória de um ponto no plano ou, mais formalmente, como uma deformação contínua de um intervalo da reta. Baseando-se na teoria da geometria analítica, uma curva em \mathbb{R}^2 consiste em um conjunto de pontos (x, y) do plano que satisfazem uma equação do tipo $F(x, y) = 0$ (ALENCAR; SANTOS; NETO, 2020, p. 2).

Do cálculo diferencial e integral, tem-se as seguintes definições (GUIDORIZZI, 2014):

Definição 2.1. Seja a função $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde A é um subconjunto de \mathbb{R} . Esta função associa a cada $t \in A$, um único vetor $F(t) \in \mathbb{R}^2$. F é definida como uma função de uma variável real a valores em \mathbb{R}^2 . Sendo A um intervalo ou uma reunião de intervalos, o conjunto $ImF = \{F(t) \in \mathbb{R}^2 | t \in A\}$ é dito a imagem de F . Ainda, a imagem de F é o lugar geométrico, em \mathbb{R}^2 , descrito por $F(t)$ quando t varia no domínio.

Desta forma, se pode definir o que é uma curva:

Definição 2.2. Seja I um intervalo em \mathbb{R} . Uma curva γ em \mathbb{R}^2 , definida em I é uma função $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, de uma variável real a valores em \mathbb{R}^2 .

Uma característica relevante das curvas é a possibilidade de parametrização:

Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $Im\gamma = A$. Denomina-se γ como uma parametrização do conjunto A . Dessa forma, toda curva pode ser vista como uma parametrização de sua imagem, sendo possível um mesmo conjunto admitir parametrizações distintas.

Além disso, é relevante enunciar a seguinte definição, evidenciada por Alencar, Santos e Neto (2020):

Definição 2.3. Uma aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, sendo $I = [a, b]$, é denominada fechada e simples se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e para quaisquer $t, s \in [a, b], t \neq s, \gamma(t) \neq \gamma(s)$, ou seja, os únicos pontos coincidentes de γ são seus pontos inicial e final.

Outro conceito importante é a definição implícita de curvas planas. Antes de enunciar esse resultado, é preciso lembrar o que é continuidade e diferenciabilidade, com base em Guidorizzi (2014):

Definição 2.4. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ com A aberto de \mathbb{R}^2 e $(x_0, y_0) \in A$. f se diz *diferenciável* em (x_0, y_0) se, e somente se, existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|}.$$

Partindo desta definição, segue o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Se uma função for diferenciável em um ponto (x_0, y_0) , então ela também é contínua nesse ponto.*

A demonstração desse teorema está em (GUIDORIZZI, 2014, p. 191).

Com isso, é possível definir os conceitos envolvendo a definição implícita de curvas planas, citados por Rodrigues (1977):

Teorema 2.2. *Seja a função $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, definida em um aberto V de \mathbb{R}^2 , $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2(x_0, y_0) \neq 0$ e $F(x_0, y_0) = 0$. Então, existe um aberto $v \subset V$ contendo (x_0, y_0) e uma curva regular $C: (x_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:*

a) $F(C(t)) = 0$ para $t \in (x_0 - \delta, y_0 + \delta)$;

b) Se $F(x, y) = 0$, com $(x, y) \in v$, então existe $t \in (x_0 - \delta, y_0 + \delta)$ tal que $C(t) = (x, y)$;

Ainda, a função F é biunívoca e o vetor normal da curva no ponto $C(t)$ é descrito como:

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{C(t)}}{\left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{C(t)}}. \quad (2.1)$$

Demonstração. Do teorema da função implícita, sabe-se da existência da função g , diferenciável, onde $C(t) = (t, g(t))$, com $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Logo, C é biunívoca e regular. Também, $F(C(t)) = 0$ implica que

$$\frac{d}{dt}(F(C(t))) = x'(t) \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{C(t)} + y'(t) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{C(t)} = 0.$$

Mas, $C'(t) = (x'(t), y'(t))$, assim,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{C(t)} = 0.$$

Portanto, o gradiente de F é perpendicular a $C(t)$. □

Corolário 2.1. *Se $F^{-1}(0)$ é compacto e conexo e para todo $(x, y) \in F^{-1}(0)$, temos que $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2(x_0, y_0) \neq 0$, então existe uma curva fechada simples $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $C([a, b]) = F^{-1}(0)$.*

Teorema 2.3 (Função implícita). *Se $F : v \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável definida num aberto v de \mathbb{R}^2 , com (x_0, y_0) em v , $F(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ diferente de zero, então existe $\delta > 0$ tal que:*

a) existe $g : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $F(x, g(x)) = 0$; e se $F(x, y) = 0$ com $(x, y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ então $y = g(x)$,

ou,

b) existe $g : (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $F(g(y), y) = 0$; e se $F(x, y) = 0$ com $(x, y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ então $x = g(y)$.

Demonstração. Supondo $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. (O caso em que $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ é análogo).

Considerando $G(x, y) = (x, F(x, y))$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial(x)}{\partial x} & \frac{\partial(x)}{\partial y} \\ \frac{\partial(F(x, y))}{\partial x} & \frac{\partial(F(x, y))}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} (x_0, y_0), \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema da função inversa (RODRIGUES, 1977, p. 119), existe $H = (H_1, H_2)$ diferenciável, tal que $G((H_1, H_2)) = (x, y)$, ou seja,

$$(H_1(x, y), F(H_1(x, y), H_2(x, y))) = (x, y).$$

Com isso, $(x, F(x, H_2(x, y))) = (x, y)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Definindo a função g como $g(t) = H_2(t, 0)$, com $x_0 - \delta < t < x_0 + \delta$, sabe-se que ela é diferenciável, pois é composta de funções diferenciáveis.

Tem-se que $(x, F(x, g(x))) = (x, F(x, H_2(x, 0))) = (x, 0)$, ou seja, $F(x, g(x)) = 0$.

Porém, se $F(x_1, y_1) = 0$ com $(x_1, y_1) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, então se tem que

$$H(x_1, F(x_1, y_1)) = H(G(x_1, y_1)) = (x_1, y_1).$$

Ou seja, $H(x_1, 0) = (x_1, y_1)$. Também, de acordo com a definição, $H(x_1, 0) = (x_1, g(x_1))$. Isto implica que $y_1 = g(x_1)$, pois H é biunívoca. \square

3 ENVOLVENTES

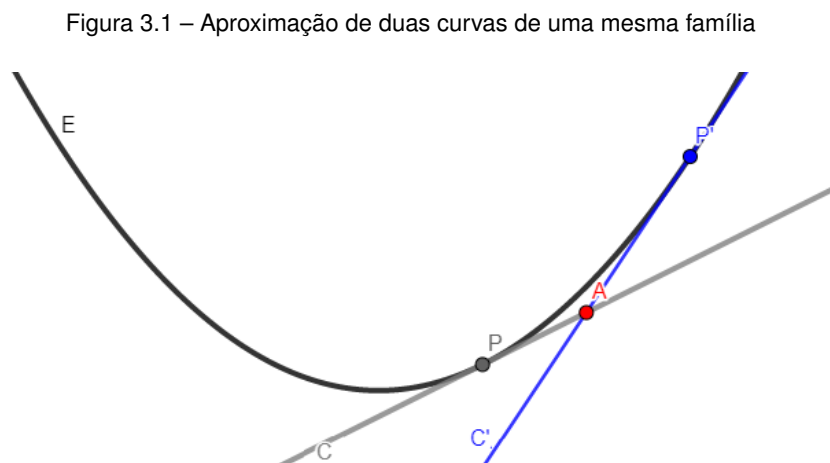
De maneira geral, a envolvente pode ser entendida como um envelope, uma curva que, em cada ponto, toca um dos integrantes de um determinado grupo de curvas, que são de mesma natureza. Antes da caracterização formal de uma envolvente, se torna indispensável definir quem é este grupo de curvas. De acordo com [Rodrigues \(1977, p. 123\)](#):

Definição 3.1 (Família de curvas). Seja $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável real definida no aberto V de \mathbb{R}^3 , tal que para todo $(x, y, \alpha) \in V$, $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2(x, y, \alpha) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2(x, y, \alpha) \neq 0$. A função $F_\alpha(x, y) = F(x, y, \alpha)$, obtida fixando o valor de α , satisfaz as condições do teorema 2.2, portanto pode ser determinada como uma curva D_α no plano cujos pontos p satisfazem $F(p, \alpha) = 0$. As curvas obtidas a partir da variação do parâmetro formam a família de curvas.

Desta maneira, tendo determinada família de curvas com certo parâmetro α , denomina-se envolvente da família uma curva suave que, em cada um de seus pontos, é tangente ao menos uma curva da família. Assim, qualquer segmento da mesma é tangente a um número infinito de elementos da família ([POGORELOV, 1977, p. 50](#)).

3.1 INTERSEÇÃO DE CURVAS DE UMA FAMÍLIA

Inicialmente supõe-se que uma curva E seja envolvente de uma determinada família de curvas. Ao escolher qualquer curva arbitrária C desta família, teremos um ponto P , onde a envolvente tangencia esta curva. Ao escolher P' um ponto qualquer, próximo a P , na envolvente, teremos outra curva da família que contém o ponto P' , que pode ser chamada de C' . Considerando que todas as curvas estão em um mesmo lado em relação a envolvente, como P é próximo de P' , conclui-se que C e C' se interceptam em um ponto A , conforme a figura 3.1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

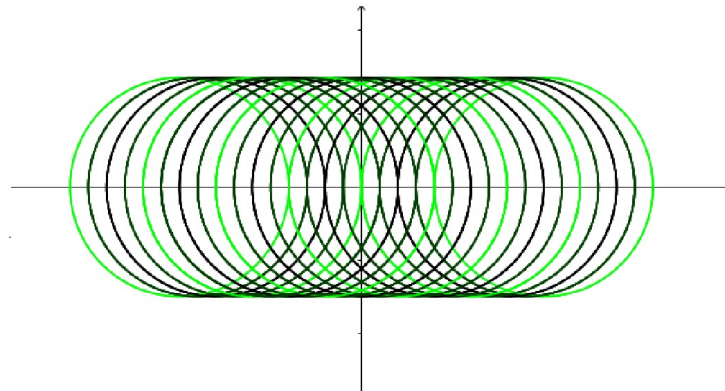
Quanto mais próxima de C estiver a curva C' , mas próximo P' estará de A . Ou seja, para encontrar em E o ponto A , basta examinar as curvas C' da família que são mais próximas de C , assim o ponto A se aproximará do ponto P . Desta maneira, pode-se dizer que todo ponto da envolvente é um ponto de interseção de duas curvas "infinitamente próximas" de uma determinada família (BOLTIANSKI, 1977).

Exemplo 3.1. Considere a família de circunferências de raio R e centro no eixo das abscissas. É possível determinar as abscissas do centro de cada uma das circunferências por α . Assim, a família é descrita como:

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2.$$

Ou seja, para cada valor de α na equação, se tem uma das curvas da família, especificamente, aquela com o centro de coordenada α no eixo das abscissas como mostra a figura 3.2 a seguir.

Figura 3.2 – Família de circunferências de mesmo raio centradas no eixo das abscissas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sejam C e C' duas circunferências da família, uma "próxima" da outra, e α o parâmetro correspondente a C , assim como α' se refere a C' , temos que α e α' são próximos, devido a escolha das circunferências. Este fato possibilita definir que $\alpha' = \alpha + \epsilon$, onde ϵ é um número infinitesimal. Desta forma, as circunferências C e C' podem ser descritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 2(\alpha + \epsilon)x + (\alpha + \epsilon)^2 - R^2 &= 0. \end{aligned}$$

Os pontos que satisfazem as duas equações acima são aqueles em que as circunferências se interceptam. Logo, para encontrá-los, basta resolver um sistema com as duas equações.

Substituindo a equação de (C') por $(C') - (C)$, obtém-se:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ -2\epsilon x + 2\alpha\epsilon + \epsilon^2 = 0. \end{cases}$$

Como ϵ é muito pequeno diferente de zero, por definição, pode-se dividir a segunda equação por ϵ , obtendo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ -2x + 2\alpha + \epsilon = 0. \end{cases}$$

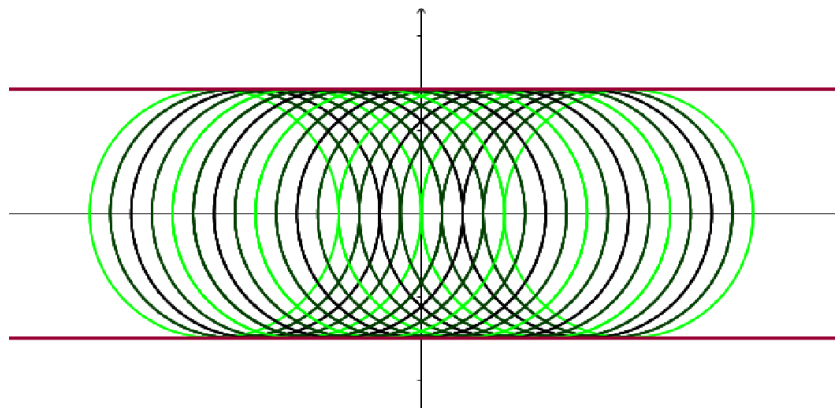
A resolução do sistema fornecerá os pontos onde C e C' se intersectam, porém o objetivo é aproximar as duas curvas e encontrar os pontos que se aproximam da interseção das duas circunferências. Para isso, considera-se que ϵ tende a zero. Fazendo o limite desse sistema, segue que:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ -2x + 2\alpha = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação, $\alpha = x$ e, conseqüentemente, da primeira equação $y^2 = R^2$. Dessa forma, o ponto em que a circunferência C toca a envolvente deve satisfazer a equação encontrada. Da mesma forma, para qualquer circunferência da família, cada ponto do envolvente deve satisfazer a equação obtida. Do outro lado, qualquer ponto que satisfaça a equação é considerado um ponto da envolvente.

Isolando y na relação encontrada, observa-se que ela se decompõe nas equações $y = R$ e $y = -R$, determinando duas retas paralelas ao eixo das abscissas, como na figura 3.3.

Figura 3.3 – Envolvente de uma família de circunferências

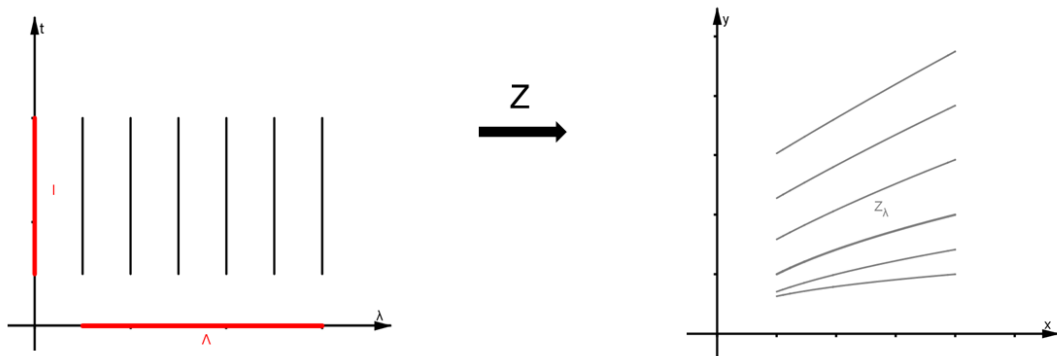


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 ENVOLVENTES DE CURVAS PARAMETRIZADAS

Definição 3.2. Uma família Z de curvas parametrizadas a um parâmetro λ pode ser representada como uma aplicação suave $Z : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde Λ e I são intervalos abertos em \mathbb{R} . $\Lambda \times I$ pode ser entendido como um subconjunto do plano. Assim, os membros da família são curvas parametrizadas $Z_\lambda : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ expressas pela fórmula $z_\lambda(t) = Z(\lambda, t)$. Logo, pode-se pensar em linhas verticais no plano parametrizadas como $t \mapsto (\lambda, t)$, e z_λ como o resultado da composição de Z com a curva parametrizada, conforme a figura 3.4.

Figura 3.4 – Família de curvas parametrizadas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 3.3. Uma curva E é dita envolvente de uma família se, para cada t existe um parâmetro $\alpha(t)$ tal que determinada curva C seja tangente a E no ponto $C(t)$, onde $\alpha(t)$ é diferenciável com $\alpha'(t) \neq 0$, para todo t .

Definição 3.4. Seja $Z : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de curvas parametrizadas, $e : U \rightarrow \Lambda \times I$ uma curva regular parametrizada com domínio U aberto. Denomina-se $e(u) = (\lambda(u), t(u))$ de pré-envolvente e $E(u) = Z(\lambda(u), t(u))$ de envolvente, se:

- A função λ não é constante em qualquer subintervalo não trivial de U (Condição de variabilidade);
- Para todo u a curva E é tangente em u à curva $z_{\lambda(u)}$ no parâmetro $t(u)$, indicando que os vetores $E'(u)$, $z'_{\lambda(u)}(t(u))$, tangentes, são linearmente dependentes (Condição de tangência).

Exemplo 3.2. Seja a família de curvas expressa como $z_{\lambda(t)} = Z(\lambda, t) = (\lambda + \lambda \cos(t), \lambda + \lambda \sin(t))$. Considerando $e_1(u) = (u, \pi)$, $e_2(u) = (u, 3\pi/2)$, $e_3(u) = (0, u)$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Os traços de e_1 , e_2 são

retas horizontais em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definidas por $t = \pi$, $t = 3\pi/2$ e o traço de e_3 é uma reta vertical em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $\lambda = 0$.

Agora, compondo Z com e_1 , e_2 e e_3 , obtém-se as curvas $E_1 = (0, u)$, $E_2 = (u, 0)$, $E_3 = (0, 0)$. Considerando $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ como as primeiras coordenadas de e_1, e_2, e_3 , respectivamente, e ainda, t_1, t_2, t_3 como as segundas coordenadas, se tem: $\lambda_1(u) = u$, $\lambda_2(u) = u$, $\lambda_3(u) = 0$.

Assim, somente $\lambda_3(u)$ não satisfaz a condição de variabilidade. Logo, E_3 não é uma envolvente. Resta analisar a condição de tangência para os demais valores: $Z'_\lambda(t) = (-\lambda \sin(t), \lambda \cos(t))$. Para qualquer u no domínio, $E'_1(u) = (0, 1)$ e $Z'_\lambda(\pi) = (0, -\lambda)$ são linearmente dependentes e o mesmo vale para $E'_2(u) = (1, 0)$ e $Z'_\lambda(3\pi/2) = (\lambda, 0)$.

Portanto, e_1 e e_2 são pré-envolventes e E_1 e E_2 são envolventes da família.

Apesar do exemplo 3.2 ter sido resolvido apenas com a análise da família de curvas, faz-se necessário um procedimento para obtenção de envolventes para qualquer curva parametrizada com um parâmetro, o que foi definido por Gibson (2001, p.140) e é exposto a seguir:

Definição 3.5 (Conjunto singular). Dada uma família de curvas parametrizadas $Z : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$, o conjunto singular é o subconjunto do domínio determinado pela equação $\det J(Z) = 0$, onde:

$$J(Z) = \begin{pmatrix} X_\lambda & Y_\lambda \\ X_t & Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X(\lambda, t)}{\partial(\lambda)} & \frac{\partial Y(\lambda, t)}{\partial(\lambda)} \\ \frac{\partial X(\lambda, t)}{\partial(t)} & \frac{\partial Y(\lambda, t)}{\partial(t)} \end{pmatrix}.$$

Sendo $Z_\lambda(t) = Z(\lambda, t) = (X(\lambda, t), Y(\lambda, t))$, isto é, o conjunto singular é o conjunto de pontos (λ, t) nos quais os vetores Z_λ e Z_t são definidos e linearmente dependentes.

Como resultado imediato, enuncia-se o seguinte resultado:

Teorema 3.1 (Teorema da envolvente). *Seja $Z : \Lambda \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de curvas parametrizadas, U um intervalo aberto e $e : U \rightarrow \Lambda \times I$ uma curva regular que satisfaz a condição de variabilidade. Então e é um pré-envolvente para Z (e E é um envolvente) se, e somente se, o traço de e está no conjunto singular de Z .*

Demonstração. Diferenciando as fórmulas de E e Z_λ tem-se:

$$E'(u) = \lambda'(u)Z_\lambda(\lambda(u), t(u)) + t'(u)Z_t(\lambda(u), t(u)),$$

$$Z'_{\lambda(u)}(t(u)) = Z_t(\lambda(u), t(u)).$$

Supondo inicialmente que $e(u) = (\lambda(u), t(u))$ esteja conjunto singular de Z , então os vetores Z_λ, Z_t são linearmente dependentes em $(\lambda(u), t(u))$. Das equações anteriores, segue que $E'(u), Z'_{\lambda(u)}(t(u))$ são linearmente dependentes, portanto, E é tangente em u à curva $Z_{\lambda(u)}$ em $t(u)$.

Por outro lado, se E é tangente em u a curva $Z_{\lambda(u)}$, em $t(u)$, então os vetores $E'(u)$ e $Z'_{\lambda(u)}$ são linearmente dependentes.

Assim, desde que $\lambda'(u) \neq 0$, os vetores Z_λ e Z_t são linearmente dependentes em $(\lambda(u), t(u))$ e, portanto, $e(u)$ está no conjunto singular de Z . Resta analisar os pontos $(\lambda(u), t(u))$ nos quais $\lambda'(u) = 0$.

Lembrando, do cálculo, que uma função é constante em um intervalo aberto se, e somente se, sua derivada se anula nesse intervalo. Como λ é assumido como não constante em qualquer subintervalo não trivial de U , sua derivada λ' não pode ser identicamente nula em qualquer subintervalo não trivial.

Assim, dado um parâmetro u tal que $\lambda'(u) = 0$, existe v arbitrariamente próximo de u , tal que $\lambda'(v) \neq 0$ e, portanto, $e(v) = (\lambda(v), t(v))$ está no conjunto singular de Z .

Como o conjunto singular é fechado, conclui-se que $e(u) = (\lambda(u), t(u))$ também faz parte dele. □

Sendo assim, o Teorema da envolvente pode ser interpretado como um dispositivo para determinar as envolventes de uma dada família de curvas $Z(\lambda, t)$. O método consiste em primeiro determinar o conjunto singular, por meio da equação $\det J(Z) = 0$. Ao obter os valores em questão, é preciso descartar os segmentos de reta "verticais" que aparecem no conjunto, em relação a \mathbb{R}^2 e então parametrizar as curvas restantes para obter as pré-envolventes e , que dão origem, cada uma, a uma envolvente E .

Exemplo 3.3. Analisando o conjunto singular da família de curvas do exemplo 3.2:

$$J(Z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda \cos(t)) & \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda + \lambda \sin(t)) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\lambda + \lambda \cos(t)) & \frac{\partial}{\partial t}(\lambda + \lambda \sin(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) & 1 + \sin(t) \\ -\lambda \sin(t) & \lambda \cos(t) \end{pmatrix}.$$

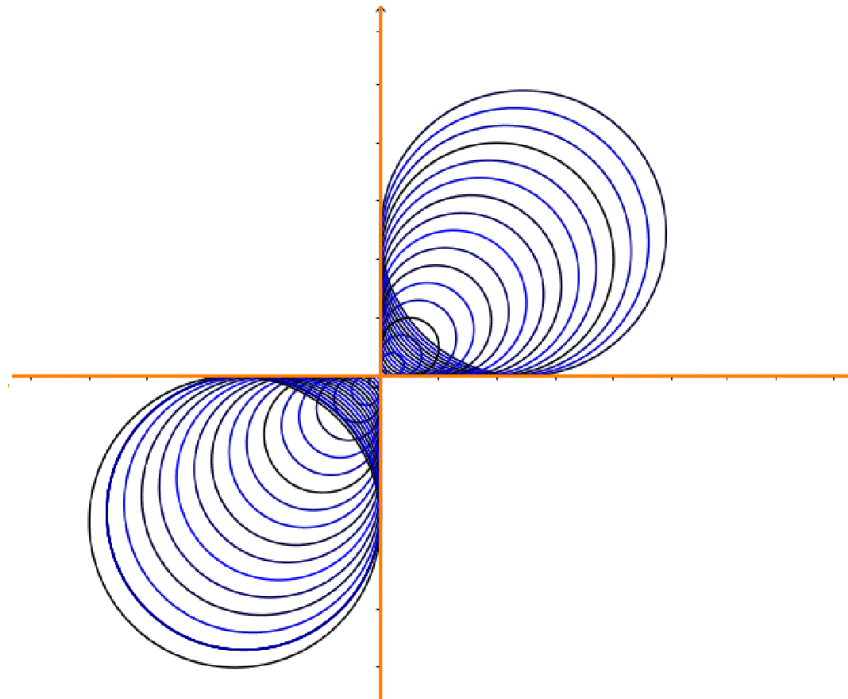
Logo, $\det J(Z) = \lambda(\sin(t) + \cos(t) + 1)$, que se anula se, e somente se, $\lambda = 0$ ou $\sin(t) + \cos(t) = -1$.

Caso $\lambda = 0$, define-se o eixo t no plano (λ, t) . De 3.4, descarta-se esse caso.

Já a segunda relação é satisfeita se $\sin(t) = 0$ e $\cos(t) = -1$ ou se $\sin(t) = -1$ e $\cos(t) = 0$. No primeiro caso $t = (2n-1)\pi$, e no outro $t = (2n-1/2)\pi$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Assim, o conjunto singular consiste na união do eixo t com duas famílias infinitas de linhas horizontais no plano (λ, t) . Agora resta calcular $Z(u, (2n-1)\pi) = (0, u)$ e $Z(u, (2n-1/2)\pi) = (u, 0)$, que são as envolventes da família, conforme representado na figura 3.5.

Figura 3.5 – Família de circunferências tangentes aos eixos coordenados



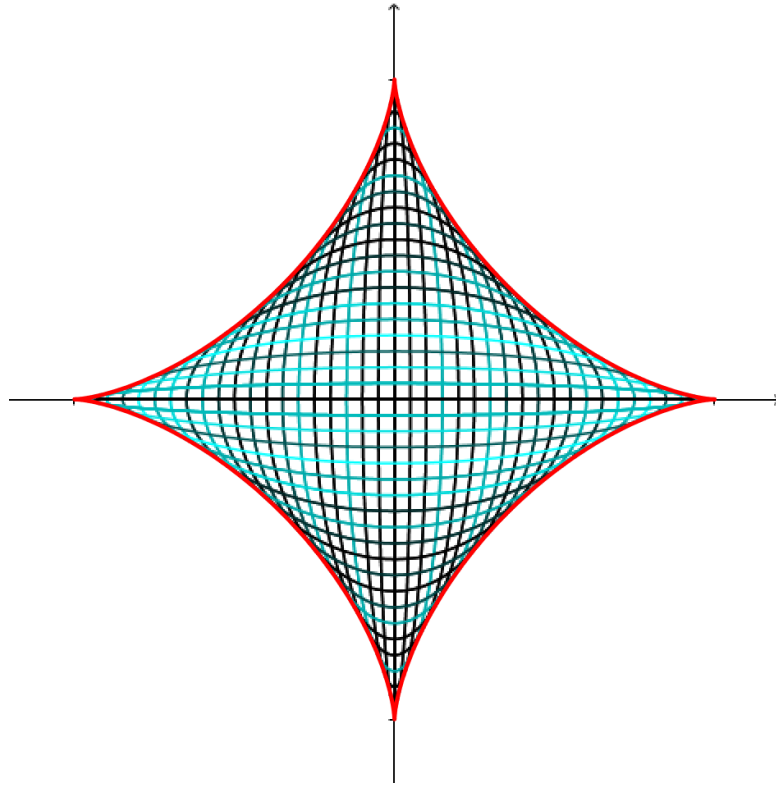
Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.4. Determinação da envolvente da família: $Z(\lambda, t) = (\lambda \cos(t), (1 - \lambda) \sin(t))$. O passo inicial é verificar quem é o conjunto singular:

$$J(Z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda \cos(t)) & \frac{\partial}{\partial \lambda}((1 - \lambda) \sin(t)) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\lambda \cos(t)) & \frac{\partial}{\partial t}((1 - \lambda) \sin(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ -\lambda \sin(t) & (1 - \lambda) \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Assim, $\det(J(Z)) = \cos^2(t) - \lambda$, que se anula se, e somente se, $\lambda = \cos^2(t)$. Logo, substituindo o valor na expressão da família, $Z(\cos^2(t), t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$, encontra-se a envolvente, um asteroide, representado na figura 3.6.

Figura 3.6 – Envoltente de uma família de elipses



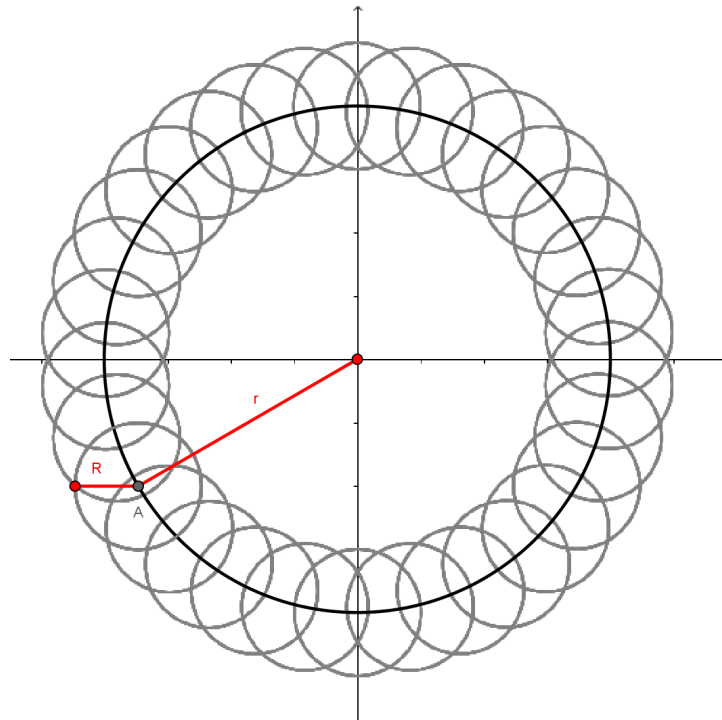
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 ENVOLVENTES DE FUNÇÕES COM PARÂMETROS

Uma família de curvas pode ser representada por uma equação em função de x , y , α , onde x e y são as coordenadas dos pontos e α é o parâmetro, que determina cada uma das curvas da família. Ou seja, a família de curvas pode ser descrita pela equação $f(x, y, \alpha) = 0$.

Exemplo 3.5. Uma família de circunferências com raio R , cujo os centros se encontram em uma circunferência dada, de raio r , com $r > R$ (como na figura 3.7):

Figura 3.7 – Família de circunferências centradas em outra



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere o ponto A na figura 3.7 que está na circunferência de raio r e centro na origem e que é o centro de cada uma das circunferências que constituem a família. Denotando suas coordenadas por α e β , isto é $A = (\alpha, \beta)$ segue que

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2. \quad (3.1)$$

A igualdade (3.1) garante que o ponto A está na circunferência de raio r e centro na origem. Já a circunferência de raio R com centro no ponto A , é descrita por meio da seguinte equação:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Expressando assim uma circunferência de raio R , com centro em um ponto qualquer sobre a circunferência maior. Dessa forma, as duas equações determinam a família de curvas em questão. Reorganizando os termos, podemos redefinir esta família de curvas pelas equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 = r^2. \end{cases}$$

Definição 3.6. Em geral, qualquer família de curvas pode ser expressa pela equação:

$$f(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0, \quad (3.2)$$

que, além de x e y , envolve os m parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, além de $m - 1$ relações entre os parâmetros:

$$\begin{cases} g_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0, \\ g_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0, \\ \vdots \\ g_{m-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

3.3.1 Diferenciação e a determinação das envolventes

Seja a família de curvas expressa por $f(x, y, \alpha) = 0$, escolhe-se duas curvas C e C' próximas nessa família. Seguindo o raciocínio elaborado na seção 3.1, defini-se por α e $\alpha + \epsilon$ os parâmetros de C e C' , respectivamente. Assim, é possível descrever as duas curvas por meio das equações:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, & (C) \\ f(x, y, \alpha + \epsilon) = 0. & (C') \end{cases}$$

Sabe-se que, para descobrir os pontos de interseção das curvas C e C' deve-se resolver o sistema. Seguindo os exemplos anteriormente vistos, é razoável simplificar o sistema de equações da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ \frac{f(x, y, \alpha + \epsilon) - f(x, y, \alpha)}{\epsilon} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

O objetivo é aproximar cada vez mais C' de C , o que, conseqüentemente, implica em tender o valor de ϵ a zero. Isso pode ser feito com o cálculo do limite na segunda equação. Daí, torna-se necessário saber qual será a equação obtida após o cálculo. Para isso, apresenta-se o seguinte resultado:

Lema 3.1. *Se $f(x, y, \alpha)$ é um polinômio, então é possível escrevê-lo em função das potências de α , isto é, $f(x, y, \alpha) = p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 + \dots$, onde os coeficientes p_0, p_1, p_2, \dots também são polinômios em função de x e y . Assim, a parte esquerda da segunda em (3.4) pode ser reescrita como:*

$$\frac{f(x, y, \alpha + \epsilon) - f(x, y, \alpha)}{\epsilon} = f'_\alpha(x, y, \alpha) + \dots, \quad (3.5)$$

onde $f'_\alpha(x, y, \alpha)$ representa a soma de todos os membros que não contém ϵ e as reticências representam a soma dos membros restantes, cada um como um fator de uma potência de ϵ . Logo, $f'_\alpha(x, y, \alpha) = p_1 + 2p_2\alpha + 3p_3\alpha^2 + \dots$.

Demonstração. Escrevendo:

$$\frac{f(x, y, \alpha + \epsilon) - f(x, y, \alpha)}{\epsilon} = \frac{p_0 + p_1(\alpha + \epsilon) + p_2(\alpha + \epsilon)^2 + \dots - [p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 + \dots]}{\epsilon}.$$

É possível fazer a seguinte simplificação:

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y, \alpha + \epsilon) - f(x, y, \alpha)}{\epsilon} &= p_1 \frac{(\alpha + \epsilon) - \alpha}{\epsilon} + p_2 \frac{(\alpha + \epsilon)^2 - \alpha^2}{\epsilon} + p_3 \frac{(\alpha + \epsilon)^3 - \alpha^3}{\epsilon} + \dots \\ &= p_1 + p_2(2\alpha + \epsilon) + p_3(3\alpha^2 + 3\alpha\epsilon + \epsilon^2) + \dots \\ &= (p_1 + 2p_2\alpha + 3p_3\alpha^2 + \dots) + (p_2\epsilon + p_3\epsilon^2 + \dots). \end{aligned}$$

□

O lema 3.1 demonstrado anteriormente permite que o sistema em (3.4) seja substituído por:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f'(x, y, \alpha) + \dots = 0. \end{cases}$$

Onde as reticências indicam os demais termos que são fatores de ϵ . Como o objetivo é aproximar as duas curvas, o valor de ϵ tenderá a zero nas duas equações. Portanto, se tem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f'(x, y, \alpha) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Sendo o polinômio $f'_\alpha(x, y, \alpha)$ a derivada de $f(x, y, \alpha)$ em relação a α . Dessa forma, qualquer que seja a curva da família, o ponto em que ela toca a envolvente deve satisfazer o sistema acima. Agora, ao descobrir o valor de α em uma equação e o substituindo na outra, tem-se uma equação somente em função de x e y , que todo ponto da envolvente deve satisfazer.

Com isso, segue o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Todos os pontos de uma envolvente devem satisfazer o sistema (3.6) sem o parâmetro α .*

Agora, também se torna relevante estabelecer uma relação entre as equações de famílias de curvas com mais de um parâmetro:

Teorema 3.3. *Seja uma família de curvas com dois parâmetros α e β . Então, cada um dos pontos da envolvente da família deve satisfazer o sistema a seguir, omitindo os dois parâmetros:*

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha, \beta) = 0, \\ f'_\alpha \cdot g'_\beta - g'_\alpha \cdot f'_\beta = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Sendo $f'_\alpha = f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta)$ e $f'_\beta = f'_\beta(x, y, \alpha, \beta)$.

Demonstração. Afim de simplificar o sistema acima, vamos examinar novamente o caso de duas curvas bem próximas C e C' da mesma família, tendo dois parâmetros. Dessa forma, pode-se supor que C possui os parâmetros α e β e C' os parâmetros $\alpha + \epsilon_1$ e $\beta + \epsilon_2$. Ou seja, ao exibir as expressões de C e C' se tem:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ f(x, y, \alpha + \epsilon_1, \beta + \epsilon_2) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Sabe-se também que os parâmetros possuem uma relação, dessa forma origina-se mais duas equações:

$$\begin{cases} g(\alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha + \epsilon_1, \beta + \epsilon_2) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Agora, subtraindo a primeira equação da segunda, tanto em (3.8) como em (3.9), se obtém as seguintes equações:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ f(x, y, \alpha + \epsilon_1, \beta + \epsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha + \epsilon_1, \beta + \epsilon_2) - g(\alpha, \beta) = 0. \end{cases}$$

Que equivalem a:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ [f(x, y, \alpha + \epsilon_1, \beta + \epsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta + \epsilon_2)] + [f(x, y, \alpha, \beta + \epsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta)] = 0, \\ g(\alpha, \beta) = 0, \\ [g(\alpha + \epsilon_1, \beta + \epsilon_2) - g(\alpha, \beta + \epsilon_2)] + [g(\alpha, \beta + \epsilon_2) - g(\alpha, \beta)] = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

As duas primeiras relações, que estão em função de x e y , determinam a interseção

entre C e C' . Seguindo o que foi estabelecido em (3.5):

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha + \epsilon_1, \beta + \epsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta + \epsilon_2) &= \epsilon_1(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \epsilon_2) + \dots), \\ f(x, y, \alpha, \beta + \epsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta) &= \epsilon_2(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \dots), \\ g(\alpha + \epsilon_1, \beta + \epsilon_2) - g(\alpha, \beta_2) &= \epsilon_1(g'_\alpha(\alpha, \beta + \epsilon_2) + \dots), \\ g(\alpha, \beta + \epsilon_2) - g(\alpha, \beta) &= \epsilon_2(g'_\beta(\alpha, \beta) + \dots). \end{aligned}$$

Com isso, a relação (3.10) pode ser simplificada como:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ \epsilon_1(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \epsilon_2) + \dots) + \epsilon_2(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \dots) = 0, \\ g(\alpha, \beta) = 0, \\ \epsilon_1(g'_\alpha(\alpha, \beta + \epsilon_2) + \dots) + \epsilon_2(g'_\beta(\alpha, \beta) + \dots) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Salientando que as reticências equivalem aos termos que são fatores de ϵ_1 ou de ϵ_2 . Agora, multiplicando a segunda equação de (3.11) por $\epsilon_1(g'_\beta(\alpha + \beta) + \dots) - \epsilon_2(g'_\alpha(\alpha, \beta + \epsilon_2) + \dots)$, a quarta por $-\epsilon_1(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \dots) + \epsilon_2(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \epsilon_2) + \dots)$, somando as duas, simplificando e agrupando os termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) [(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \epsilon_2) + \dots) \cdot (g'_\beta(\alpha, \beta) + \dots) \\ - (g'_\alpha(\alpha, \beta + \epsilon_2 + \dots) \cdot (f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \dots))] = 0. \end{aligned}$$

Analisando a equação acima, conclui-se que $\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 \neq 0$ pois isso só aconteceria se $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ o que contrária a hipótese que C e C' são distintas. Dessa forma, é necessário analisar os valores que satisfazem a relação:

$$f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \epsilon_2) + \dots \cdot (g'_\beta(\alpha, \beta) + \dots) - (g'_\alpha(\alpha, \beta + \epsilon_2 + \dots) \cdot (f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \dots)) = 0. \quad (3.12)$$

Uma vez que C deve estar cada vez mais próxima de C' , ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero, sendo possível aplicar o limite na equação (3.12) e reescreve-la como:

$$f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta) \cdot g'_\beta(\alpha, \beta) - g'_\alpha(\alpha, \beta) \cdot f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) = 0.$$

Portanto, juntando este resultado a primeira e a terceira equações de (3.11), encontra-se o sistema exposto em (3.7). O ponto onde C toca a envolvente deve satisfazer o sistema mas, como C pode ser qualquer uma das curvas da família, qualquer ponto da envolvente deve satisfazer o sistema (para determinados valores de α e β), como determina o teorema. \square

De maneira geral, se a família é definida pelas equações (3.2) e (3.3), qualquer ponto da

envolvente dessa família satisfaz, além das relações mencionadas, a seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} f'_{\alpha_1} & f'_{\alpha_2} & \dots & f'_{\alpha_m} \\ (g_1)'_{\alpha_1} & (g_1)'_{\alpha_2} & \dots & (g_1)'_{\alpha_m} \\ (g_2)'_{\alpha_1} & (g_2)'_{\alpha_2} & \dots & (g_2)'_{\alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_{m-1})'_{\alpha_1} & (g_{m-1})'_{\alpha_2} & \dots & (g_{m-1})'_{\alpha_m} \end{vmatrix} = 0.$$

Eliminando do sistema de equações os parâmetros $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Os teoremas 3.2 e 3.3 são, respectivamente, casos particulares para $m = 1$ e $m = 2$.

4 EXEMPLOS E APLICAÇÕES

Neste capítulo serão exibidas envolventes de diversas famílias, nas suas diferentes formas, com um ou dois parâmetros. Os exemplos tem como objetivo consolidar os procedimentos vistos anteriormente e exibir as representações das envolventes. Alguns itens foram inspirados em trechos dos trabalhos de (BOLTIANSKI, 1977), (GIBSON, 2001) e no site *Math24*¹.

Exemplo 4.1. Seja a família de segmentos de mesmo comprimento s , cujos extremos A e B estão sobre os eixos coordenados. Suponha-se α como a coordenada de A no eixo x e β como a coordenada de B sobre o eixo y , então é possível concluir que os segmentos da origem até o ponto A , da origem até o ponto B e o próprio segmento AB formam o triângulo AOB , definido pela relação $\alpha^2 + \beta^2 = s^2$.

Partindo das relações trigonométricas, sabe-se que $\tan(\widehat{OAB}) = \frac{\beta}{\alpha}$. Assim, o coeficiente angular da reta $AB = \tan(\widehat{XAB})$, sendo X um ponto no eixo das abscissas, é igual a $-\frac{\beta}{\alpha}$. Portanto, a reta AB pode ser expressa pela equação:

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta.$$

Que multiplicada por α , resulta em:

$$\alpha y + \beta x - \beta\alpha = 0.$$

Agora, descrevendo essa família de curvas de acordo com (3.2) e (3.3), tem-se:

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha, \beta) &= \alpha y + \beta x - \beta\alpha, \\ g(\alpha, \beta) &= \alpha^2 + \beta^2 - s^2. \end{aligned}$$

Sendo necessário, agora, calcular:

$$f'_\alpha \cdot g'_\beta - g'_\alpha \cdot f'_\beta = [(y - \beta) \cdot (2\beta)] - [(2\alpha) \cdot (x - \alpha)] = 2[\beta y - \beta^2 - \alpha x + \alpha^2].$$

Que se anula somente se:

$$\beta y - \beta^2 - \alpha x + \alpha^2 = 0.$$

Assim, os pontos da envolvente dessa família de curvas satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 = s^2, \\ \beta y - \beta^2 - \alpha x + \alpha^2 = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

¹ <<https://math24.net/envelope-family-curves.html>> Acesso em: 12 abr. 2022.

Nesse ponto, a envolvente vai ser exposta com a eliminação dos parâmetros α e β no sistema. Para isso, multiplica-se a primeira equação de (4.1) por α , a terceira por β e soma-se as duas, obtendo a equação $(\alpha^2 + \beta^2)y = \beta^3$. Logo, da segunda equação em (4.1):

$$\begin{aligned}\beta^3 &= (s^2) \cdot y, \\ \beta &= [(s^2) \cdot y]^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação de (4.1) por β e a terceira equação do mesmo sistema por $-\alpha$, e somando-as logo em seguida, obtém-se $(\alpha^2 + \beta^2)x = \alpha^3$. Utilizando novamente a segunda equação em (4.1), defini-se:

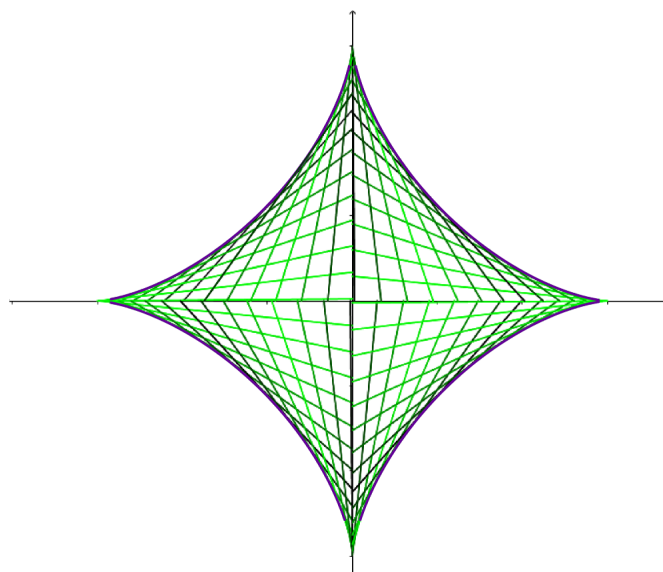
$$\begin{aligned}\alpha^3 &= (s^2) \cdot x, \\ \alpha &= [(s^2) \cdot x]^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Por fim, pode-se substituir os valores de α e β na segunda relação em (4.1), chegando a seguinte equação:

$$\begin{aligned}s^2 &= [(s^2) \cdot y]^{\frac{2}{3}} + [(s^2) \cdot x]^{\frac{2}{3}}, \\ s^{\frac{2}{3}} &= y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Assim, se elimina os parâmetros e chega-se a equação da envolvente da família, um astroide, conforme a figura 4.1.

Figura 4.1 – Envolvente de uma família de segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 4.2. Seja a família de elipses definidas pela equação $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, com $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Nesse caso, $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$. Dessa forma é possível expressar a família como:

$$f(x, y, \alpha) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{1 - \alpha^2} - 1.$$

Agora, é relevante calcular:

$$\begin{aligned} f'(x, y, \alpha) &= \frac{-2x^2}{\alpha^3} + \frac{2y^2\alpha}{(1 - \alpha^2)^2}, \\ &= \frac{-x^2}{\alpha^3} + \frac{y^2\alpha}{(1 - \alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Assim, os pontos da envolvente da família devem satisfazer o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{1 - \alpha^2} - 1 = 0, \\ \frac{-x^2}{\alpha^3} + \frac{y^2\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Da segunda equação em (4.2) se tem:

$$y^2\alpha^4 = x^2(1 - \alpha^2)^2.$$

Ao extrair a raiz quadrada de ambos os lados, obtém-se:

$$\begin{aligned} |y|\alpha^2 &= |x|(1 - \alpha^2), \\ |y|\alpha^2 &= |x| - |x|\alpha^2, \\ \alpha^2 &= \frac{|x|}{|x| + |y|}. \end{aligned}$$

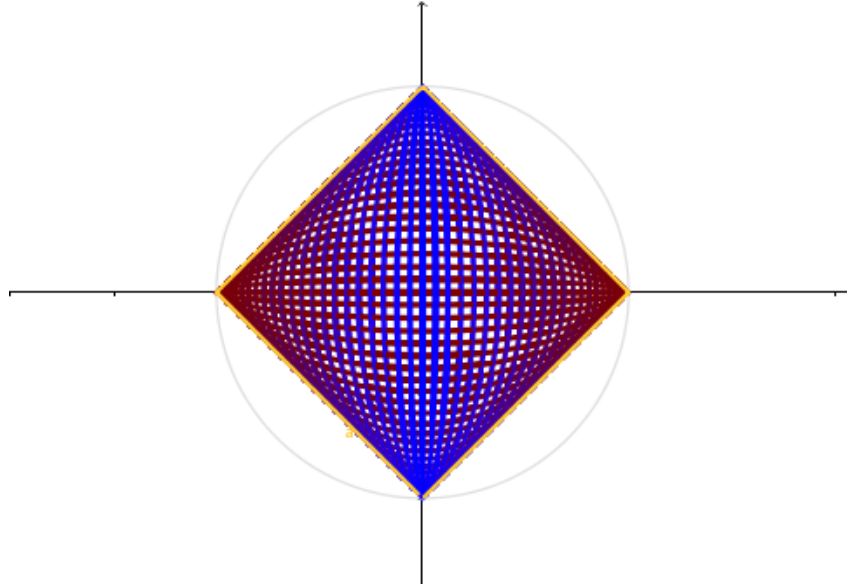
Substituir o valor encontrado na primeira equação em (4.2) resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\frac{|x|}{|x| + |y|}} + \frac{y^2}{1 - \frac{|x|}{|x| + |y|}} - 1 &= 0, \\ \frac{x^2(|x| + |y|)}{|x|} + \frac{y^2(|x| + |y|)}{|y|} &= 1, \\ |x|(|x| + |y|) + |y|(|x| + |y|) &= 1, \\ (|x| + |y|)^2 &= 1, \\ |x| + |y| &= \pm 1. \end{aligned}$$

Portanto, considerando as propriedades modulares, conclui-se que a envolvente da família

é descrita como $|x| + |y| = 1$, representada na figura 4.2.

Figura 4.2 – Envoltiva de uma família de elipses



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 4.3. Seja a família de retas perpendiculares a reta AB , onde A está sob uma circunferência centrada na origem com raio r e B está sobre o eixo das abscissas, há uma distancia s da origem, com $s > r$.

Considere o ponto $A = (\alpha, \beta)$. Assim, $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$. O ponto B tem coordenadas $(s, 0)$ e, pelas definições da geometria analítica, sabe-se que a equação da reta em questão é:

$$(\alpha - s)x + \beta y - (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha s = 0.$$

Dessa forma, a família de curvas é definida por:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha x + \beta y - \alpha^2 - \beta^2 + \alpha s - xs, \\ g(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2 - r^2. \end{cases}$$

Resta expressar a equação a seguir para definir a envoltiva da família:

$$f'_\alpha \cdot g'_\beta - g'_\alpha \cdot f'_\beta = [(x - 2\alpha + s) \cdot (2\beta)] - [(2\alpha) \cdot (y - 2\beta)] = 2\beta x + 2\beta s - 2\alpha y.$$

Assim, a envoltiva da família é composta pelos pontos de satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y - (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha - x)s = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0, \\ \beta x + \beta s - \alpha y = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

É possível exibir a equação da envolvente eliminando os parâmetros α e β . Para isso multiplica-se a primeira equação em (4.3) por β , a terceira por $-\alpha$ e soma-se as duas. Segue que:

$$\beta = \frac{yr^2}{r^2 + xs}.$$

Substituindo o valor de β na última equação de (4.3), obtêm-se:

$$\alpha = \frac{r^2(x + s)}{r^2 + sx}.$$

Assim, substituindo os valores obtidos na segunda igualdade em (4.3), chega-se a equação:

$$\left(\frac{yr^2}{r^2 + xs}\right)^2 + \left(\frac{r^2(x + s)}{r^2 + xs}\right)^2 = r^2.$$

Equivalentemente,

$$y^2 r^4 + r^4 (x + s)^2 = r^2 (r^2 + xs)^2.$$

Expandindo e agrupando os termos em x e y segue que:

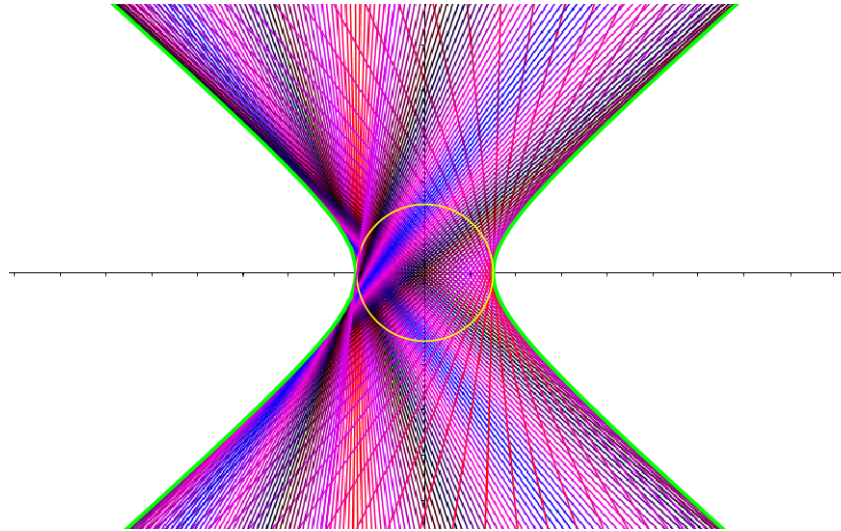
$$y^2 r^4 + r^2 (r^2 - s^2) x^2 = r^4 (r^2 - s^2).$$

Ou seja,

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - s^2} = 1.$$

Que irá descrever uma hipérbole (figura 4.3), a envolvente da família de curvas, de acordo com os valores fixos de r e s , lembrando que $r^2 - s^2 < 0$.

Figura 4.3 – Envoltiva de uma família de retas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 4.4. Seja a família de retas definida pela equação $x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) = 1$. É possível expressar a família em questão por $f(x, y, \alpha) = x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) - 1$. Derivando esta equação em relação a α segue que:

$$f'(x, y, \alpha) = -x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha).$$

Logo, os pontos da envoltiva da família satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) - 1 = 0, \\ -x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Da segunda equação em (4.4), tem-se:

$$x \sin(\alpha) = y \cos(\alpha) \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{y}{x}.$$

Também, das relações trigonométricas, sabe-se que:

$$\sin(\alpha) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}, \quad \cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}.$$

Assim, substituindo o valor de $\tan(\alpha)$ encontrado, é possível definir:

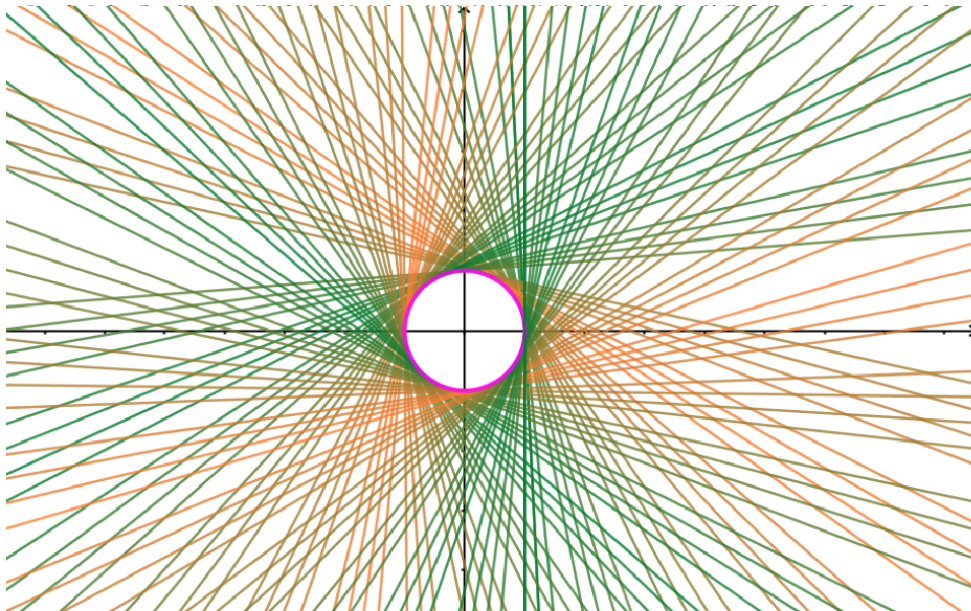
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha) &= \pm \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \pm \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}} = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \operatorname{cos}(\alpha) &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}} = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\end{aligned}$$

Desta forma, a primeira relação de (4.4) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}x \left(\pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + y \left(\pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - 1 &= 0, \\ \pm \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 1, \\ \pm \sqrt{x^2 + y^2} &= 1, \\ x^2 + y^2 &= 1.\end{aligned}$$

Exibindo-se a equação de uma circunferência de raio 1, a envolvente da família, representada na figura 4.4.

Figura 4.4 – Envolvente de uma família de retas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 4.5. Seja a família de circunferências centradas em A com raio AB , onde A é um ponto de uma circunferência centrada na origem com raio r e B tem coordenadas $(r, 0)$.

Considerando $A = (\alpha, \beta)$, tem-se que $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$. Ainda, $B = (r, 0)$ e o segmento AB tem comprimento $\sqrt{(r - \alpha)^2 + \beta^2}$. Dessa forma, é possível exibir a equação das circunferências:

$$f(x, y, \alpha) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (r - \alpha)^2 + \beta^2.$$

Resta agora definir a terceira equação que determina a envolvente da família:

$$f'_\alpha \cdot g'_\beta - g'_\alpha \cdot f'_\beta = [(2r - 2x) \cdot (2\beta)] - [(2\alpha) \cdot (-2y)] = 4\beta r - 4\beta x + 4\alpha y.$$

Com isso, os pontos que satisfazem o sistema a seguir, eliminando-se os parâmetros, determinam a envolvente:

$$\begin{cases} (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (r - \alpha)^2 - \beta^2 = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0, \\ \beta r - \beta x + \alpha y = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Para exibir a envolvente da família, expande-se a primeira igualdade em (4.5), multiplicando em seguida por β e somando com a terceira equação multiplicada por -2α . Com o resultado dessa operação, pode-se concluir que:

$$\beta = \frac{2yr^2}{x^2 + y^2 - r^2}.$$

Ainda, por substituição na terceira igualdade em (4.5):

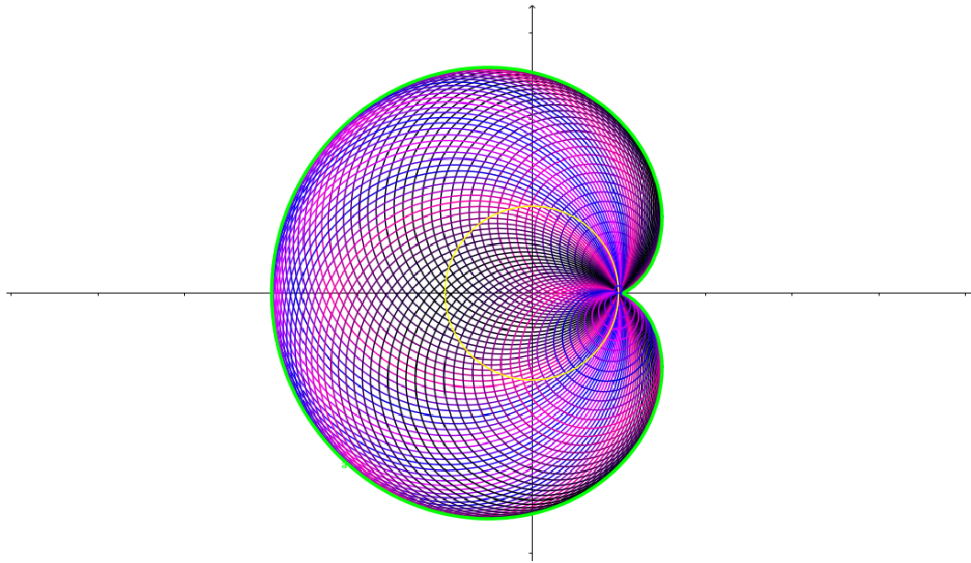
$$\alpha = \frac{2r^2(x - r)}{x^2 + y^2 - r^2}.$$

Portanto, reescrevendo a segunda relação em (4.5) e fazendo algumas simplificações, se obtém a seguinte igualdade, em função de x , y e r :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2yr^2}{x^2 + y^2 - r^2} \right)^2 + \left(\frac{2r^2(x - r)}{x^2 + y^2 - r^2} \right)^2 &= r^2, \\ 4y^2r^4 + 4r^4(x - r)^2 &= r^2(x^2 + y^2 - r^2)^2, \\ 4r^2((x - r)^2 + y^2) &= ((x - r)^2 + y^2 + 2r(x - r))^2. \end{aligned}$$

Equação que descreve a envolvente da família, um cardioide, conforme a figura 4.5.

Figura 4.5 – Envoltente de uma família de circunferências



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 4.6. Seja a família de curvas expressa por $Z = (\lambda, t) = (t, \lambda(t - \lambda)^2)$. Nesse caso é necessário, inicialmente, definir qual é o conjunto singular.

$$J(Z) = \begin{pmatrix} 0 & (t - \lambda)(t - 3\lambda) \\ 1 & 2\lambda(t - \lambda) \end{pmatrix}.$$

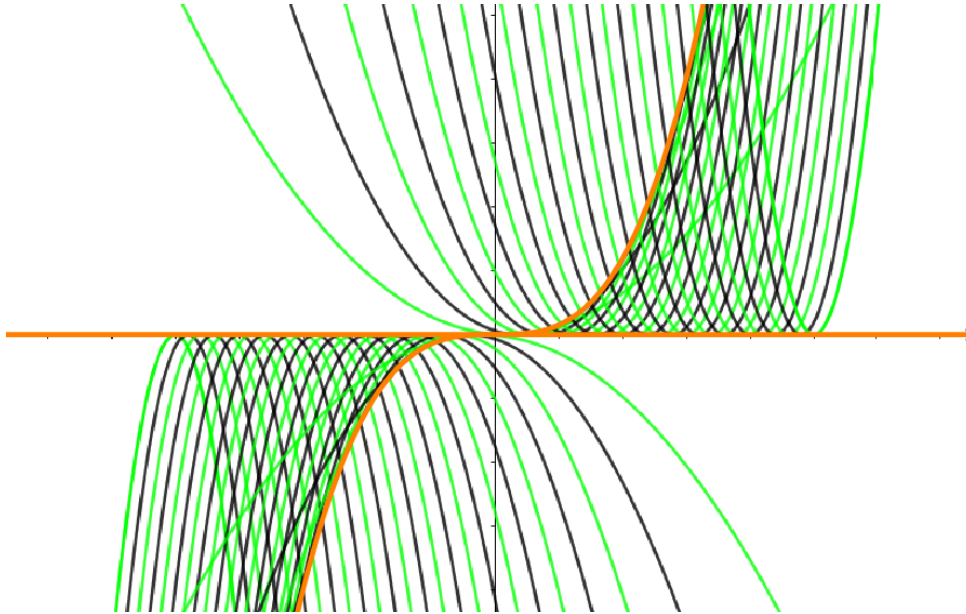
Logo, $\det(J(Z)) = 0$ se, e somente se, $-t^2 + 4\lambda t - 3\lambda^2 = 0$. Ou seja, $\lambda = t$ ou $\lambda = \frac{t}{3}$. No primeiro caso, $Z(t, t) = (t, 0)$, e no segundo $Z\left(\frac{t}{3}, t\right) = \left(t, \frac{t}{3} \left(t - \frac{t}{3}\right)^2\right) = \left(t, \frac{4t^3}{27}\right)$.

Assim, exibem-se as duas envoltentes da família:

$$(x, y) = (t, 0), \quad (x, y) = \left(t, \frac{4t^3}{27}\right).$$

Representadas na figura 4.6.

Figura 4.6 – Envoltentes de uma família de parábolas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 4.7. Envoltente da família de circunferências de raio 1 centradas em uma parábola. Definindo $C = (\lambda^2, \lambda)$ como o centro das circunferências, a família pode ser parametrizada como $Z(\lambda, t) = (\lambda^2 + \cos(t), \lambda + \sin(t))$.

Assim, para estabelecer a envoltente é preciso definir o conjunto singular:

$$J(Z) = \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, $J(Z) = 0$ se, e somente se, $2\lambda \cos(t) + \sin(t) = 0$. Utilizando as identidades trigonométricas, é possível concluir que o determinante se anula quando $t = \arctan(-2\lambda) + n\pi$, ou seja, $\lambda = \frac{-\tan(t - n\pi)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}$, que é o conjunto singular.

Aplicando o valor encontrado na equação da família segue que:

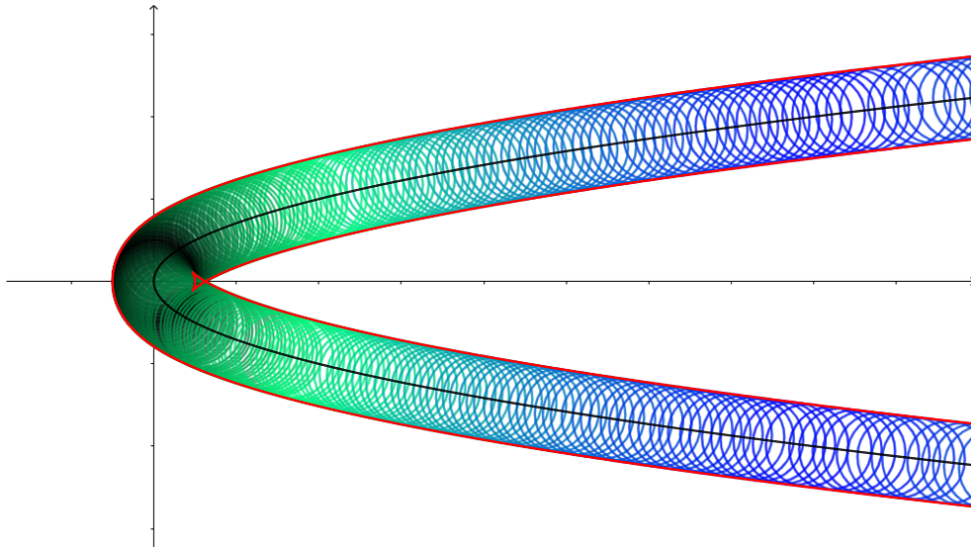
$$Z\left(\frac{-\tan(t - n\pi)}{2}, t\right) = \left(\left(\frac{-\tan(t - n\pi)}{2}\right)^2 + \cos(t), \frac{-\tan(t - n\pi)}{2} + \sin(t)\right).$$

Simplificando segundo as identidades trigonométricas, obtém-se:

$$(x, y) = \left(\frac{\tan^2(t)}{4} + \cos(t), \frac{-\tan(t)}{2} + \sin(t)\right).$$

Que descreve a envoltente da família, conforme a figura 4.7.

Figura 4.7 – Envoltória de uma família de circunferências



Fonte: Elaborada pelo autor.

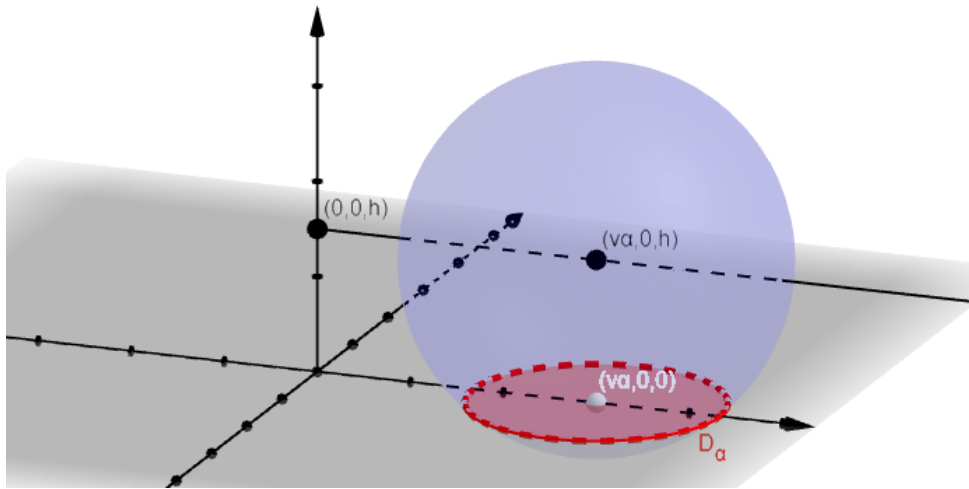
Exemplo 4.8 (Zona de ruído de um avião). Considere um avião supersônico que se desloca a uma velocidade v constante, maior que a velocidade do som μ , e em linha reta, com altitude h . Qual é a região da terra que foi atingida pelo barulho de um avião Concorde quando o mesmo encontra-se em um ponto P da terra?

Para analisar a situação, pode-se definir que o avião voa, localmente, sobre o plano $z = 0$ e que o ponto P é a origem do sistema de coordenadas deste plano. Supondo que o avião se desloca da direita para a esquerda sobre o eixo das abcissas, se o avião se encontra sobre o ponto $(0, 0, h)$ neste instante, a α horas ele encontrava-se no ponto $(v\alpha, 0, h)$ em \mathbb{R}^3 (medindo a velocidade em km/h e o tempo em horas).

Da física, sabe-se que o som se propaga por meio de esferas concêntricas a partir do ponto em que o ruído se origina. Assim, o barulho feito pelo avião quando se encontrava em $(v\alpha, 0, h)$ pode ser ouvido até agora dentro de uma esfera com raio $\mu\alpha$ centrada no ponto em questão. Tal situação pode ser representada como $\{q \in \mathbb{R}^3 : d(q, (v\alpha, 0, h)) \leq \mu\alpha\}$.

Quando $\mu\alpha \geq h$, o som já tocou a superfície do plano $z = 0$, dando origem a uma circunferência D_α centrada em $(v\alpha, 0)$ e com raio igual a $\sqrt{(\mu\alpha)^2 - h^2}$ conforme mostra a figura 4.8 a seguir.

Figura 4.8 – Propagação do ruído de um avião supersônico



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, as circunferências D_α , sendo α o parâmetro, podem ser descritas como $(x - v\alpha)^2 + y^2 = (\mu\alpha)^2 - h^2$. Para saber quais são os pontos atingidos pelo ruído do avião, basta expressar a envolvente da família de circunferências. Tem-se que:

$$f(x, y, \alpha) = (x - v\alpha)^2 + y^2 - (\mu\alpha)^2 + h^2.$$

Agora, como definido em 3.2, é necessário calcular:

$$f'(x, y, \alpha) = -2xv + 2\alpha v^2 - 2\alpha\mu^2.$$

Assim, os pontos da envolvente da família satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (x - v\alpha)^2 + y^2 - (\mu\alpha)^2 + h^2 = 0, \\ -xv + \alpha v^2 - \alpha\mu^2 = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Da segunda igualdade em (4.6), sabe-se que:

$$\alpha = \frac{xv}{v^2 - \mu^2}.$$

Portanto, simplificando a primeira relação em (4.6) e substituindo o valor de α nela,

obtem-se:

$$x^2 - 2xv \left(\frac{xv}{x^2 - \mu^2} \right) + v^2 \left(\frac{xv}{x^2 - \mu^2} \right)^2 + y^2 - \mu^2 \left(\frac{xv}{x^2 - \mu^2} \right)^2 + h^2 = 0,$$

$$x^2 \left(\frac{(v^2 - \mu^2)^2 - 2v^2(v^2 - \mu^2) + v^4 - \mu^2 v^2}{(v^2 - \mu^2)^2} \right) + y^2 = -h^2,$$

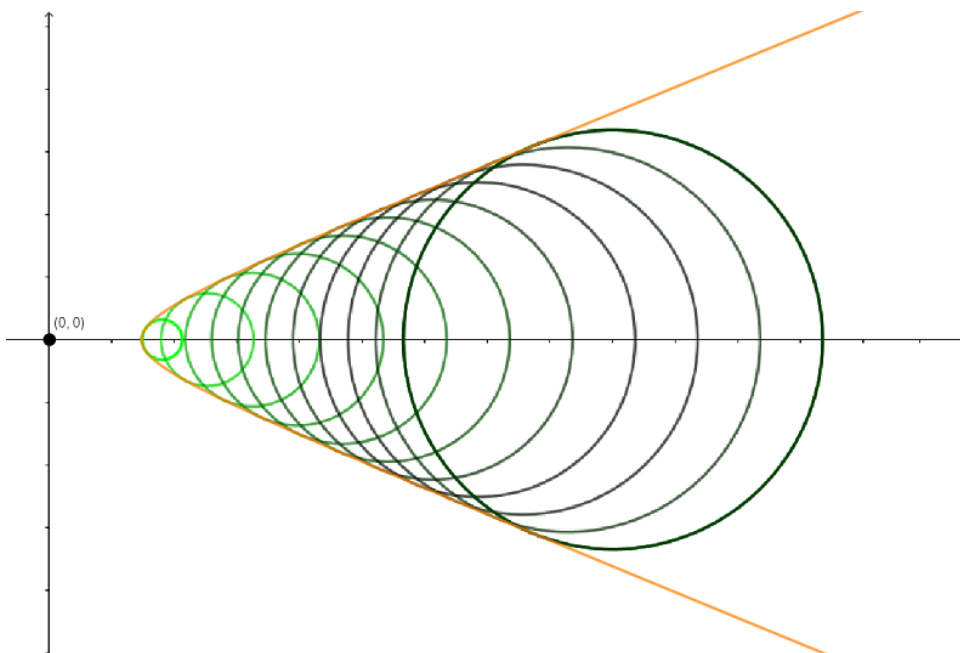
$$x^2 \left(\frac{\mu^4 - \mu^2 v^2}{(v^2 - \mu^2)^2} \right) + y^2 = -h^2.$$

Desta forma, simplificando a equação anterior, chega-se a expressão da envolvente da família de circunferências no eixo $z = 0$:

$$x^2 \frac{\mu^2}{v^2 - \mu^2} - y^2 = h^2.$$

A envolvente é dada por uma hipérbole. Considerando $x \geq 0$ tem-se que os pontos do plano atingidos pelo ruído do avião são aqueles que estão na região interna da envolvente, a denominada zona de audibilidade conforme mostra a figura 4.9 a seguir.

Figura 4.9 – Envolvente de uma família de circunferências

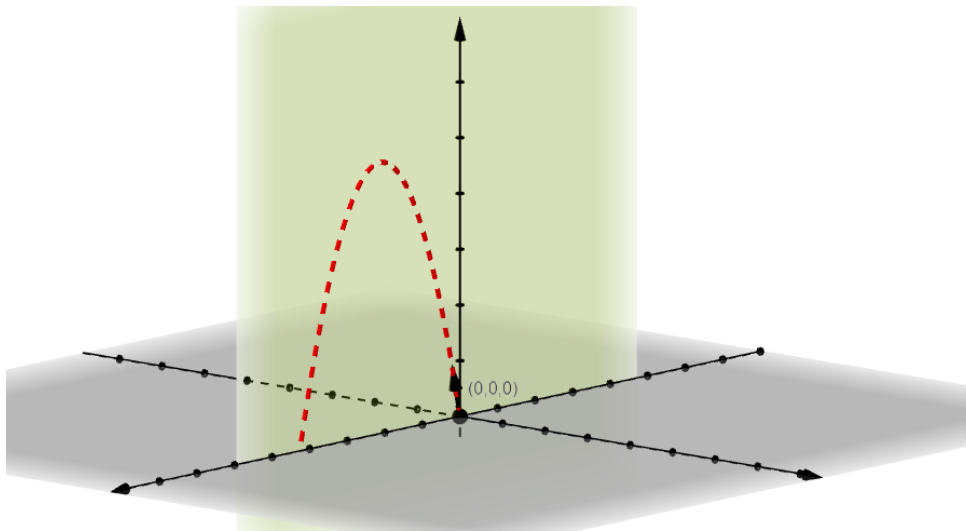


Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 4.9 (Zona de tiro de um canhão). Considere um canhão localizado em certo ponto, podendo disparar em qualquer direção em um plano perpendicular a Terra. Deseja-se determinar a região nesse plano cuja fronteira irá delimitar todos os disparos do canhão, ou seja, a zona de tiro.

Considere a superfície terrestre localmente dada pelo plano $z = 0$ em \mathbb{R}^3 , sendo o céu representado pela parte positiva do eixo z , e o canhão localizado no ponto $(0,0,0)$. As trajetórias dos disparos possíveis estão contidas no plano $y = 0$, conforme a figura 4.10. Ainda, independentemente da direção, todos os disparos terão mesma velocidade.

Figura 4.10 – Trajetória de disparo de um canhão



Fonte: Elaborada pelo autor.

O objetivo é exibir a envolvente de uma família de curvas, composta pelas trajetórias dos disparos, sendo a zona de tiro a região delimitada entre o eixo x e a envolvente encontrada.

Inicialmente, é preciso descrever essas trajetórias. Considerando v como o vetor direção do canhão, este pode ser definido como $v = (\beta, 0, \alpha)$ em \mathbb{R}^3 , ou como (β, α) quando a referência for o plano $y = 0$. Como a potência do canhão é a mesma em todas as direções, a norma de v é constante, assim $\alpha^2 + \beta^2 = |v|^2 = c^2$, com $\beta > 0$. O vetor v representa a velocidade inicial da curva.

No aspecto da física, considerando uma curva $C(t)$, com t denotando o tempo, a velocidade de um projétil é dada pelo vetor $C'(t)$ a cada instante. Já a aceleração, é igual a $C''(t)$. Desconsiderando a resistência do ar, o único fator atuante sobre a trajetória é a força da gravidade g , atuando verticalmente com direção paralela ao eixo $z = 0$.

Agora, se T_α representa a curva oriunda da trajetória quando o canhão aponta para $v = (\beta, \alpha)$ segue que $T''_\alpha(t) = (0, -g)$. Além disso, $T_\alpha(0) = (0, 0)$ para todas as trajetórias, que diferem pois $T'_\alpha(0) = (\beta, \alpha)$.

Dessa forma, se tem que:

$$\int_0^t T''_{\alpha}(s) ds = T'_{\alpha}(t) - T'_{\alpha}(0),$$

$$T'_{\alpha}(t) = T'_{\alpha}(0) + \int_0^t T''_{\alpha}(s) ds,$$

$$T'_{\alpha}(t) = (\beta, \alpha) + (0, -gt) = (\beta, \alpha - gt).$$

Assim,

$$\int_0^t T'_{\alpha}(s) ds = T_{\alpha}(t) - T_{\alpha}(0),$$

$$T_{\alpha}(t) = T_{\alpha}(0) + \int_0^t T'_{\alpha}(s) ds,$$

$$T_{\alpha}(t) = T_{\alpha}(0) + \int_0^t (\beta, \alpha - gs) ds,$$

$$T_{\alpha}(t) = (0, 0) + \left(\beta t, \alpha t - \frac{gt^2}{2} \right),$$

$$T_{\alpha}(t) = \left(\beta t, \alpha t - \frac{gt^2}{2} \right).$$

Levando em conta que $\beta = \sqrt{c^2 - \alpha^2}$, se tem:

$$T_{\alpha}(t) = \left(\sqrt{c^2 - \alpha^2} t, \alpha t - \frac{gt^2}{2} \right).$$

Agora estão descritos os pontos da curva D_{α} , que satisfazem a equação:

$$y = \frac{\sqrt{c^2 - \alpha^2}}{\alpha} x - \frac{g}{2\alpha^2} x^2.$$

Que pode ser simplificada e reescrita como:

$$gx^2 - 2\alpha\sqrt{c^2 - \alpha^2}x + 2\alpha^2y = 0.$$

Considera-se que o plano xy contém as trajetórias oriundas do canhão. Assim:

$$f(x, y, \alpha) = gx^2 - 2\alpha\sqrt{c^2 - \alpha^2}x + 2\alpha^2y.$$

Assim, resta calcular a derivada em função de α :

$$\begin{aligned} f'(x, y, \alpha) &= -2\sqrt{c^2 - \alpha^2}x + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{c^2 - \alpha^2}}x + 4\alpha y, \\ &= -2(c^2 - \alpha^2)x + 2\alpha^2x + 4\alpha\sqrt{c^2 - \alpha^2}y, \\ &= (2\alpha^2 - c^2)x + 2\alpha\sqrt{c^2 - \alpha^2}y. \end{aligned}$$

Logo, a envolvente da família em questão é composta pelos pontos que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} gx^2 - 2\alpha\sqrt{c^2 - \alpha^2}x + 2\alpha^2y = 0, \\ (2\alpha^2 - c^2)x + 2\alpha\sqrt{c^2 - \alpha^2}y = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

O próximo passo consiste em eliminar o parâmetro das relações acima. Para isso multiplica-se a primeira equação de (4.7) por $\sqrt{c^2 - \alpha^2}$, somando com a segunda equação multiplicada por $-\alpha$:

$$-2\alpha^3x + c^2\alpha x - 2\alpha^2\sqrt{c^2 - \alpha^2}y + gx^2\sqrt{c^2 - \alpha^2} - 2\alpha(c^2 - \alpha^2)x + 2\alpha^2\sqrt{c^2 - \alpha^2}y = 0.$$

Que, simplificada, resulta em:

$$gx^2\sqrt{c^2 - \alpha^2} - \alpha c^2x = 0.$$

Assim, pode-se expressar o parâmetro α como:

$$\alpha = \frac{gx\sqrt{c^2 - \alpha^2}}{c^2}.$$

Reescrevendo a segunda igualdade em (4.7) como $[\alpha^2 - (c^2 - \alpha^2)]x + 2\alpha\sqrt{c^2 - \alpha^2}y = 0$ e adicionando o valor encontrado acima, de forma que a equação fique somente em função de $(c^2 - \alpha^2)$, resulta em:

$$\left[\left(\frac{gx\sqrt{c^2 - \alpha^2}}{c^2} \right)^2 - (c^2 - \alpha^2) \right] x + 2 \left(\frac{gx\sqrt{c^2 - \alpha^2}}{c^2} \right) \sqrt{c^2 - \alpha^2} y = 0.$$

Que é o mesmo que:

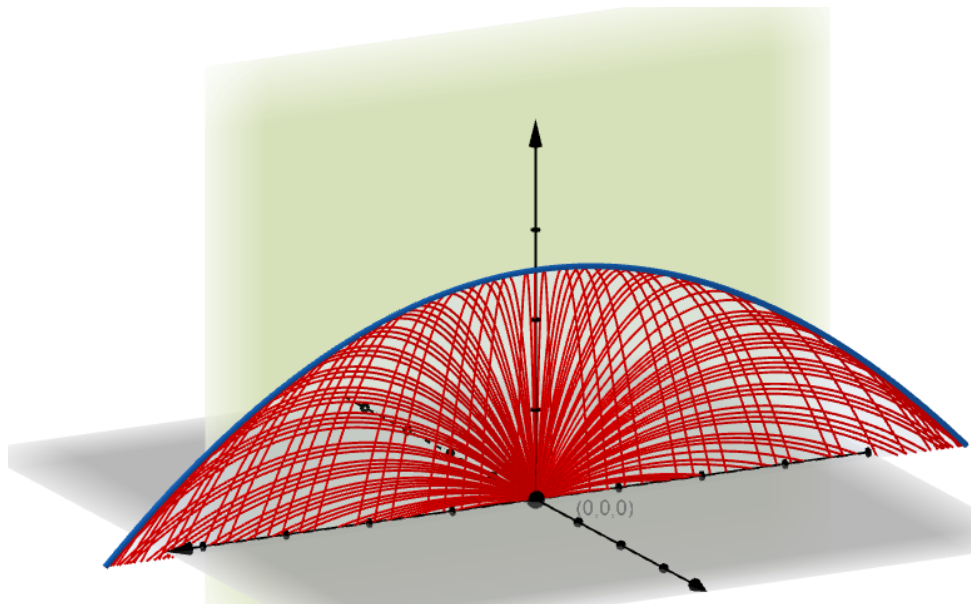
$$(c^2 - \alpha^2)x \left[\frac{g^2x^2}{c^4} - 1 + \frac{2gy}{c^2} \right] = 0.$$

Dividindo ambos os lados por $(c^2 - \alpha^2)x$ e simplificando a igualdade, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{2gy - c^2}{c^2} &= \frac{-g^2x^2}{c^4}, \\ 2gy &= \frac{-g^2x^2}{c^2} + c^2, \\ y &= \frac{-gx^2}{2c^2} + \frac{c^2}{2g}.\end{aligned}$$

Enfim, é exibida uma relação somente em função de x , y , g e c , a equação da envolvente da família, conhecida como a parábola de segurança, que determina a zona de tiro do canhão e é representada na figura 4.11 a seguir.

Figura 4.11 – Envolvente de trajetórias em forma de parábolas



Fonte: Elaborada pelo autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de todo o conteúdo exposto, foi possível definir o conceito de curva envolvente, analisar sua relação com a respectiva família de curvas e entender a sua aplicabilidade.

A teoria abordada determinou os conceitos base para a discussão, possibilitando a definição de cada método para a obtenção da envolvente, que foram aplicados de acordo com as características da família de curvas, o que também ficou evidente nas resoluções feitas durante todo o trabalho.

A aplicação dos conceitos no software matemático Geogebra possibilitou um maior entendimento das propriedades relacionadas as envolventes e se mostrou uma ferramenta promissora para o avanço dos estudos na área.

O capítulo de exemplos e aplicações trouxe à tona uma diversidade de casos, sendo expostas uma mesma envolvente para famílias de curvas distintas, envolventes que delimitavam a respectiva família e também o caso contrário, onde as curvas delimitavam a envolvente. Além disso, demonstrou-se o caso em que apenas a condição de tangência era observada. Ainda, o método de resolução de um sistema por meio da equação com parâmetros, e sua derivada, se apresentou como um procedimento conveniente e prático de se expressar uma envolvente na maioria dos casos.

Com isso, todo o estudo apresentado durante o texto demonstra que a teoria das envolventes pode ser utilizada como uma aplicação das derivadas durante seu processo de ensino nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, além da abordagem feita na área da Geometria Diferencial, tendo nas aplicações informatizadas um recurso de aprendizagem.

Além do mais, é possível concluir que a ideia intuitiva da envolvente pode ser explorada em diferentes situações e níveis de ensino, com a devida ponderação da carga teórica. Assim, o assunto se apresenta como uma relevante ferramenta para a promoção da interdisciplinaridade no campo da matemática e das ciências exatas.

Dentre as possibilidades de continuidade do estudo, está a disponibilização das construções prontas na plataforma do software matemático, junto a teoria e a respectiva resolução, além da abordagem de outros assuntos da Geometria Diferencial similares às envolventes, como as evolutas e involutas, e também o desenvolvimento do raciocínio análogo ao apresentado para curvas em \mathbb{R}^3 .

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. S. **Geometria Diferencial das Curvas no \mathbb{R}^2** . Rio de Janeiro: SBM, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 13.
- BOLTIANSKI, V. G. **La Envolvente**. Tradução: V. Ilanos mas. [S.l.]: Editora MIR Moscú, 1977. (Lecciones Populares de Matemáticas). Citado 3 vezes nas páginas 11, 17 e 30.
- FREIRE, P. **Pedagogia da Indignação: cartas pedagógicas e outros escritos**. São Paulo: Editora Unesp, 2000. Citado na página 6.
- GIBSON, C. G. Envelopes. In: _____. **Elementary Geometry of Differentiable Curves: An Undergraduate Introduction**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. p. 137–150. Citado 3 vezes nas páginas 11, 20 e 30.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. [S.l.]: LTC, 2014. (Volume 2). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- POGORELOV, A. **Geometria Diferencial**. [S.l.]: Editoria Mir Moscú, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 16.
- RODRIGUES, L. **Introdução à geometria diferencial**. Poços de Caldas: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 1977. (11o. Colóquio Brasileiro de Matemática). Citado 4 vezes nas páginas 11, 14, 15 e 16.

APÊNDICE A – ROTEIROS PARA ELABORAÇÃO DAS CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

Aqui estão descritas as etapas para a elaboração das construções representadas no texto com base nos códigos do software Geogebra, exceto a programação envolvendo a variação das cores, com base na versão Clássica 5 ¹.

A .1 FAMÍLIA DE CIRCUNFERÊNCIAS CENTRADAS NO EIXO X COM MESMO RAIOS

Para a construção, similar a figura 3.2, é necessário criar os seguintes objetos na calculadora gráfica:

- a) $\alpha = \text{ControleDeslizante}(-5, 5, 0.1)$;
- b) $c : (x - \alpha)^2 + y^2 = 1$ (o valor do raio pode ser alterado);
- c) $y = 1$;
- d) $y = -1$;
- e) Ativar o rastro de c ;
- f) Animar α .

A .2 FAMÍLIA DE CIRCUNFERÊNCIAS TANGENTES AOS EIXOS COORDENADOS

Esta construção é baseada na figura 3.5 e pode ser elaborada com a criação dos seguintes objetos na calculadora gráfica:

- a) $\lambda = \text{ControleDeslizante}(-5, 5, 0.1)$;
- b) $X = (\lambda + \lambda \cos(t), \lambda + \lambda \sin(t))$;
- c) $f = (t, 0)$;
- d) $g = (0, t)$;
- e) Ativar o rastro de X ;
- f) Animar λ .

¹ Disponível em <<https://www.geogebra.org/download>>.

A .3 ASTROIDE COMO ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE ELIPSES

Para a construção, similar a 3.6, é necessário criar os seguinte objetos na calculadora gráfica:

- a) $\lambda = \text{ControleDeslizante}(0, 1, 0.05)$;
- b) $a : \text{Curva}[(\lambda \cos(t), (1 - \lambda) \sin(t)), t, 0, 2\pi]$;
- c) $b : \text{Curva}[(\cos(t)^3, \sin(t)^3), t, 0, 2\pi]$;
- d) Ativar o rastro de a ;
- e) Animar λ .

A .4 FAMÍLIA DE CIRCUNFERÊNCIAS DE RAIOS R , CENTRADAS EM OUTRA DE RAIOS r , COM $r > R$

Para a construção, próxima a apresentada na figura 3.7, é preciso adicionar os seguintes comandos na calculadora gráfica:

- a) $c : x^2 + y^2 = 16$ (circunferência centrada na origem com raio r);
- b) $A = \text{Ponto}(c)$;
- c) $d : (x - x(A))^2 + (y - y(A))^2 = 1$ (circunferência raio R);
- d) Ativar o rastro de d ;
- e) Animar o ponto A .

A .5 ASTROIDE COMO ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE SEGMENTOS

Para esta construção, baseada na figura 4.1, é preciso criar os seguintes objetos na calculadora gráfica:

- a) $c : x^2 + y^2 = 9$ (circunferência com raio s);
- b) $A = \text{Ponto}(c)$;
- c) $f : y = (-y(A)x)/x(A) + y(A)$;
- d) $B = \text{Interseção}[f, x = 0]$;
- e) $C = \text{Interseção}[f, y = 0]$;

- f) $g = \text{Segmento}[B, C]$;
- g) $a : x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}$ (de acordo com o valor de s);
- h) Ativar o rastro de g ;
- i) Animar o ponto A .

A .6 ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE ELIPSES COM SEMI-EIXO α , $0 < \alpha < 1$

Neste caso, a construção é semelhante a figura 4.2 e pode ser elaborada com a criação dos objetos a seguir, na calculadora gráfica:

- a) $c : x^2 + y^2 = 1$;
- b) $A = \text{Ponto}(c)$;
- c) $d : x^2/x(A)^2 + y^2/(1 - x(A)^2) = 1$;
- d) $a : |x| + |y| = 1$;
- e) Ativar o rastro de d ;
- f) Animar o ponto A .

A .7 HIPÉRBOLE COMO ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE RETAS

Para a construção, baseada na figura 4.3, é preciso criar os seguintes objetos na calculadora gráfica:

- a) $c : x^2 + y^2 = 9$ (circunferência com raio r);
- b) $A = \text{Ponto}(c)$;
- c) $B = (4, 0)$ (de acordo com valor de s , sendo $s > r$);
- d) $f = \text{Perpendicular}[A, \text{Reta}[A, B]]$;
- e) $b : ((9y)/(9 + 4x))^2 + ((9(x + 4))/(9 + 4x))^2 = 9$;
- f) Ativar o rastro de f ;
- g) Animar o ponto A .

A.8 CIRCUNFERÊNCIA COMO ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE RETAS

Para esta construção, similar a figura 4.4, se deve inserir os seguintes códigos na calculadora gráfica:

a) $\alpha = \text{ControleDeslizante}(0, 2\pi);$

b) $eq1 : x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) = 1;$

c) $eq2 : x^2 + y^2 = 1;$

d) Ativar o rastro de $eq1$;

e) Animar α .

A.9 CARDIOIDE COMO ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE CIRCUNFERÊNCIAS

Para a construção, como na figura 4.5, é preciso criar os seguinte objetos na calculadora gráfica:

a) $c : x^2 + y^2 = 4$ (circunferência com raio r);

b) $A = \text{Ponto}(c);$

c) $B = (2, 0)$ (de acordo com o valor de r);

d) $d = \text{Círculo}[A, \text{Segmento}[A, B]];$

e) $a : ((8y)/(x^2 + y^2 - 4))^2 + ((8(x - 2))/(x^2 + y^2 - 4))^2 = 4;$

f) Ativar o rastro de d ;

g) Animar o ponto A .

A.10 ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE PARÁBOLAS

Para essa construção, similar a figura 4.6, é necessário criar os seguinte objetos na calculadora gráfica do Geogebra:

a) $\lambda = \text{ControleDeslizante}(-5, 5);$

b) $eq1 : X = (t, \lambda(t - \lambda)^2);$

c) $eq2 : X = (t, 0);$

- d) $f : \text{Curva}[(t, (4t^3)/27), t, -10, 10]$;
- e) Ativar o rastro de $eq1$;
- f) Animar λ .

A .11 ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE CIRCUNFERÊNCIAS UNITÁRIAS CENTRADAS EM UMA PARÁBOLA

Nesse caso, representado na figura 4.7, a construção pode ser realizada com a criação, na calculadora gráfica, dos seguinte objetos:

- a) $\lambda = \text{ControleDeslizante}(-5, 5, 0.1)$;
- b) $eq1 : (x - \lambda^2)^2 + (y - \lambda)^2 = 1$
- c) $a : \text{Curva}[(\tan(t)^2/4 + \cos(t), (-\tan(t))/2 + \sin(t)), t, 0, 2\pi]$
- d) Ativar o rastro de $eq1$;
- e) Animar λ .

A .12 HIPÉRBOLE COMO ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE CIRCUNFERÊNCIAS

Para a construção, similar a figura 4.9, é necessário criar os seguinte objetos na calculadora gráfica:

- a) $\alpha = \text{ControleDeslizante}(0, 5, 0.4)$;
- b) $c : (x - 9\alpha)^2 + y^2 - (3, 4\alpha)^2 = -9$ (de acordo com os valores de v e μ);
- c) $d : (x^2(3.4)^2)/(81 - 3.4^2) - y^2 = 9$ (de acordo com os valores de v e μ);
- d) Ativar o rastro de c ;
- e) Animar α .

A .13 PARÁBOLA COMO ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE PARÁBOLAS

Nesse caso, a construção ilustrada na figura 4.11 deve ser feita na calculadora 3D, com a criação dos seguintes comandos:

- a) $f : y = 0$;

- b) $\alpha = \text{ControleDeslizante}(-10, 10, 0.5);$
- c) $g : z = \sqrt{100 - \alpha^2}/\alpha x - 9.8/(2\alpha^2)x^2$ (de acordo com o valor de g e c);
- d) $c : \text{IntersecaoGeométrica}(y = 0, f);$
- e) $h : z = (-9.8x^2)/200 + 100/(19.8)$ (de acordo com o valor de g e c);
- f) $\text{IntersecaoGeométrica}(y = 0, g);$
- g) Ocultar g e h ;
- h) Ativar o rastro de g ;
- i) Animar α .

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil

