

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Estabilidade Assintótica Global para
Equações Diferenciais no Plano**



Magda da Silva Peixoto

S15.353
P379 e a

*Dissertação apresentada ao PPG-M da
UFSCar como parte dos requisitos para
a obtenção do título de Mestre em
Matemática*

São Carlos - SP
Maio - 1999



Orientador

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos

*"O correr da vida embrulha tudo,
A vida é assim
Esquenta e esfria
Aperta e afrouxa
Sossega e depois desinquieta
O que ela quer da gente é coragem."*

Guimarães Rosa

Aos meus pais

Albano e Haydée

que transformaram seus sonhos

em ver realizados os meus

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar, pois nada seria possível sem Sua ajuda e presença constante.

Aos meus pais Albano e Haydée, ao meu saudoso irmão Marcelo e a minha irmã Marilena, pelo carinho, estímulo, incansável compreensão e apoio incondicional em todos os momentos da minha caminhada, principalmente durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos, pela credibilidade, paciência, amizade e orientação segura dispensada na confecção deste trabalho.

Ao prof. Dr. Carlos Augusto Arteaga Mena, pelo incentivo, apoio e orientação quando da realização do meu exame de qualificação.

Ao prof. Dr. Marcos Montenegro, pela avaliação, dedicação dispensada e sugestões dadas no intuito de melhorar a qualidade deste trabalho.

Ao prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio, pela amizade e ajuda na realização das figuras.

À Célia, por sua eficiência e amizade.

Aos sempre amigos Andréia, Luís, André, Alessandro, Evandro, Paulinho e Juliana, pelo apoio e amizade, e saibam que vocês sempre foram presentes quando precisei.

Aos professores, colegas e funcionários do DM da UFSCar, pela atenção e amizade. Em especial aos professores Pedro Malagutti, Pedro Pergher, Adalberto Bergamasco e Arnaldo Nascimento.

À Universidade Federal de São Carlos, Instituição que possibilitou a realização deste mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela concessão de bolsa de estudo.

A todos que, sem dúvida e sem exceção, direta ou indiretamente colaboraram comigo e peço desculpas as pessoas que involuntariamente não foram citadas aqui.

Meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Dado $x' = f(x)$ um sistema de equações diferenciais no plano, onde f é de classe C^1 . O objetivo deste trabalho é apresentar condições suficientes que garantam que a bacia de atração de um ponto de equilíbrio do sistema é todo o plano. Esta monografia detalhará a contribuição dada por Gasull, Llibre e Sotomayor no problema acima. O referido trabalho é rico em técnicas para o problema geral.

Abstract

Let $x' = f(x)$ be a system of differential equations in the plane where f is C^1 . This work gives sufficient conditions which guarantee that the basin of attraction of an equilibrium point is the plane. This monograph reports the contribution given by Gasull, Llibre e Sotomayor to the problem. The above work presents some useful technics to the general problem.

Sumário

Introdução	2
1 Pré-requisitos	6
1.1 Conceitos Iniciais	6
1.2 Campos vetoriais e fluxos	10
1.3 A aplicação de Poincaré	23
1.4 O Teorema de Poincaré-Bendixson	26
1.5 P-matrizes	30
2 Teorema Principal	40
2.1 Enunciado do Teorema	40
2.2 $(P_4) \Rightarrow (PF)$	42
2.3 As outras implicações	52
3 Condições Suficientes Adicionais	56
3.1 O Problema Fundamental	56
3.2 Exemplo	68
Referências Bibliográficas	70

Introdução

Um sistema da forma $x' = f(x)$, onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e f é uma aplicação vetorial, é chamado um sistema autônomo de equações diferenciais. Muitas aplicações matemáticas, bem como inúmeras questões matemáticas também são formuladas em termos destes sistemas. Tais sistemas podem ser encontrados tanto em Matemática Pura ou Aplicada. As soluções de equilíbrio, isto é, soluções constantes, são de particular importância para a teoria qualitativa e quantitativa destes sistemas. O estudo assintótico das soluções perto de uma solução de equilíbrio é desejado. O conjunto de valores iniciais cujas soluções tendem para uma solução de equilíbrio é chamado a bacia de atração deste ponto de equilíbrio. Portanto, o problema de estabelecer as bacias de atração de pontos de equilíbrio é de elevada importância para aplicações na teoria de estabilidade.

São bem conhecidas as condições suficientes que garantem a existência de bacias locais de atração a saber: $\text{tr}L < 0$ e $\det L > 0$, onde L é a parte linear de um sistema no plano em um ponto de equilíbrio.

O objetivo do trabalho é apresentar condições suficientes que garantam que a bacia de atração de um ponto de equilíbrio de um sistema de classe C^1 no plano de um sistema autônomo é todo \mathbb{R}^2 (Problema Fundamental em Estabilidade Assintótica Global).

Nesta monografia descreveremos os resultados do artigo "Global

Asymptotic Stability of Differential Equations in the Plane" de Gasull, Llibre e Sotomayor, nossa referência [15].

Para isso, considera-se um sistema autônomo de equações diferenciais

$$x' = f(x) \quad (' = d/dt), \quad (S)$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$.

Seja \mathcal{F} a classe de aplicações C^1 , $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que

(i) a origem é um ponto de equilíbrio de (S), isto é, $f(0) = 0$,

(ii) $\text{tr } Df(x) < 0$ em \mathbb{R}^2 ,

(iii) $\det Df(x) > 0$ em \mathbb{R}^2 ,

onde $Df(x) = (\partial f_i / \partial x_j)$ é a matriz Jacobiana.

Problema Fundamental em Estabilidade Assintótica Global: Dado $f \in \mathcal{F}$ temos que $x \equiv 0$ é uma solução globalmente assintoticamente estável de (S)? Em outras palavras, toda curva solução de (S) converge para 0 quando $t \rightarrow \infty$; ou ainda a bacia de atração da origem é \mathbb{R}^2 ?

Alguns problemas estão relacionados com esta questão:

Problema 1: $f \in \mathcal{F}$ implica que a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é globalmente 1-1?

Problema 2: $f \in \mathcal{F}$ implica que existe um número natural k , tal que para cada $p \in \mathbb{R}^2$, o número de soluções de $f(x) = p$ é limitado por k ?

Problema 3: $f \in \mathcal{F}$ implica que existem duas constantes positivas ρ e r tal que $|f(x)| \geq \rho > 0$ para $|x| \geq r > 0$ (onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana)?

Problema 4: $f \in \mathcal{F}$ implica que

$$\int_0^{+\infty} [\min_{|x|=r} |f(x)|] dr = \infty?$$

O resultado principal deste trabalho é mostrar a equivalência entre as respostas afirmativas dos problemas enunciados acima.

O Problema Fundamental foi sugerido por Markus e Yamabe. Os autores solucionaram o problema sob a condição adicional que uma das derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i, j = 1, 2$) não se anulava em \mathbb{R}^2 . Hartman também encontrou resposta afirmativa para este problema assumindo que a matriz Jacobiana é negativa em \mathbb{R}^2 .

Afinal em 1995 provou-se que o Problema Fundamental tem sempre uma resposta afirmativa. Este resultado foi provado, independentemente, em "A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture" de Carlos Gutiérrez[6], "A proof of the two-dimensional Markus-Yamabe Stability conjecture and a generalization" de Robert Fessler[2], e "The asymptotic stability of the linearization of a vector field on the plane with a singular point implies global stability" de A. A. Glutsyuk[5], todos do ano de 1995.

Como provado em [15], com demonstração a ser detalhada nesta monografia, o Problema Fundamental é equivalente ao Problema 1. Os três autores provam a injetividade de f e daí a estabilidade global é obtida por equivalência.

Em 1995, foi apresentado por A. Cima, A. van den Essen, A. Gasull, E. Hubbers e F. Manosas, um contra-exemplo para a conjectura de Markus-Yamabe para dimensão 3, tomou-se

$$f(x, y, z) = (-x + z(x + yz)^2, -y - (x + yz)^2, -z)$$

Os autovalores de Df são todos constantes e iguais a -1 , enquanto o campo vetorial f admite uma trajetória não-limitada: $x(t) = 18e^t$, $y(t) = -12e^{2t}$, $z(t) = e^{-t}$.

Tal exemplo justifica um estudo detalhado do artigo [15]; pois prova em particular, que para dimensões maiores ou iguais a três a classe \mathcal{F} não é apropriada para obtermos Estabilidade Assintótica Global. E quem sabe \mathcal{F} não é a classe ideal para o caso bidimensional?

No Capítulo 1, apresentamos vários resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho. O Capítulo 2 é dedicado ao estudo de equivalências entre o Problema Fundamental e outros problemas aparentemente diferentes. No Capítulo 3, condições adicionais são discutidas.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos e resultados da Análise Matemática, necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Para alguns resultados não apresentamos demonstração, mas fornecemos fontes onde encontrá-los.

1.1 Conceitos Iniciais

Nesta seção recordaremos alguns resultados básicos, aproveitando então para propor notações que serão usadas a seguir. Para isso, tivemos como referência, basicamente, [10].

Consideremos uma aplicação $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, e sejam $U, V \subset \mathbb{R}^m$ abertos.

Definição 1.1.1 *A transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui uma representação matricial $n \times m$, em relação as bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , a qual é chamada de matriz Jacobiana de f no ponto a , e denotada por $Jf(a)$.*

Suas m colunas são os vetores

$$f'(a).e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right).$$

Assim,

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right),$$

onde $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de f . Cada uma das n linhas $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(a) \right)$ é, como sabemos, a matriz $1 \times m$ associada ao funcional linear $df_i(a) =$ diferencial da i -ésima função coordenada f_i . Para todo $v \in \mathbb{R}^m$, temos

$$f'(a).v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right) = (df_1(a).v, \dots, df_n(a).v)$$

Definição 1.1.2 Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(a+v) - f(a) = T.v + r(v), \quad \text{onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

Aqui, supõe-se tacitamente que $a+v \in U$, para que $f(a+v)$ tenha sentido. Como U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $|v| < \delta \Rightarrow a+v \in U$. A igualdade acima é a definição do "resto" $r(v)$. Uma vez dada T , a diferenciabilidade de f no ponto a tem sua essência na afirmação de que $r(v)$ é infinitésimo em relação a v , o que se exprime com $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$. Ou, em termos explícitos: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $0 < |v| < \delta \Rightarrow |r(v)| < \epsilon|v|$.

Teorema 1.1.3 *A aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in U$ se, e somente se, cada uma das funções coordenadas $f_1, f_2, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável nesse ponto.*

Teorema 1.1.4 *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial formado pelas transformações lineares de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n . As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *f é diferenciável e a aplicação derivada $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é contínua;*

(2) *As funções coordenadas $f_1, f_2, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ da aplicação f possuem derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$;*

(3) *Para cada $v \in \mathbb{R}^m$, existe a derivada direcional $\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x)$ em qualquer ponto $x \in U$ e a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.*

Definição 1.1.5 *Diz-se que a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, e escreve-se $f \in C^1$, para significar que f cumpre uma das (e portanto, todas as) condições do teorema anterior. Em particular, $f \in C^1$ se, e somente se, cada uma das suas funções coordenadas é de classe C^1 .*

Definição 1.1.6 *Um difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa é diferenciável. Em particular, f é um homeomorfismo entre U e V .*

Definição 1.1.7 Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, é um difeomorfismo local, quando para cada $x \in U$ existe um aberto V_x , com $x \in V_x \subset U$, tal que a restrição de f a V_x é um difeomorfismo sobre um aberto $W_x \subset \mathbb{R}^m$. Se $f \in C^k$, dizemos que f é difeomorfismo local de classe C^k . Neste caso, para cada $x \in U$, a aplicação inversa $(f|_{V_x})^{-1} : W_x \rightarrow V_x$ também é de classe C^k .

Definição 1.1.8 Sejam U e V abertos de \mathbb{R}^m , e $f : U \rightarrow V$ uma aplicação sobrejetora de classe C^r . Dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^r , se existe uma aplicação $g : V \rightarrow U$ de classe C^r tal que $f \circ g$ seja identidade em U .

Teorema 1.1.9 Teorema da Função Inversa: Suponha que $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é continuamente diferenciável num aberto contendo a , e $\det Jf(a) \neq 0$. Então, existe um aberto V contendo a e um aberto W contendo $f(a)$, tal que $f : V \rightarrow W$ tem inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$ diferenciável e para todo $y \in W$ temos

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1}$$

1.2 Campos vetoriais e fluxos

Nesta seção nos baseamos em [14] para recordar outros conceitos importantes.

Seja Δ um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 . Um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ em Δ é uma aplicação $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k . Ao campo vetorial f associamos a equação diferencial

$$x' = f(x) \quad ('= d/dt), \quad (S)$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$.

As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis $\gamma : I \rightarrow \Delta$ ($I =$ intervalo de reta) tal que

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = f(\gamma(t)) \quad (1.1)$$

para todo $t \in I$, são chamadas trajetórias ou curvas integrais de f ou da equação diferencial (S) .

Definição 1.2.1 *Um ponto $x \in \Delta$ é dito ponto singular de f se $f(x) = 0$ e ponto regular de f se $f(x) \neq 0$.*

Se x é um ponto singular, então $\gamma(t) = x$, $-\infty < t < \infty$ é solução de (S) . Reciprocamente, se $\gamma(t) = x$, $-\infty < t < \infty$ é solução de (S) , então x é ponto singular de f , pois

$$0 = \gamma'(t) = f(\gamma(t)) = f(x)$$

Definição 1.2.2 Uma curva integral $\varphi : I \rightarrow \Delta$ de f chama-se máxima se para toda curva integral $\psi : J \rightarrow \Delta$ tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \psi|_I$ então $I = J$ e consequentemente $\varphi = \psi$. Neste caso, I chama-se intervalo máximo.

A equação (S) (ou (1.1)) admite a seguinte interpretação geométrica: γ é uma curva integral de f se, e só se, seu vetor velocidade $\gamma'(t)$ em t coincide com o valor do campo f em $\gamma(t)$. Veja a Figura 1.1.



Figura 1.1

Definição 1.2.3 Uma equação diferencial do tipo (S) é chamada equação diferencial autônoma, isto é, independe de t .

Definição 1.2.4 A aplicação $\varphi : D \rightarrow \Delta$ dada por $\varphi(t, p)$ que associa a cada ponto (t, p) o ponto $\varphi(t, p) = \varphi_t(p)$ que é obtido através da solução $\varphi(t, p)$ avaliada em t chama-se fluxo gerado por f , onde $D = \{(t, x) : x \in \Delta \text{ e } t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} .

Definição 1.2.5 Um ponto $\bar{x} \in \Delta$ é chamado um ponto de equilíbrio de (S) se $f(\bar{x}) = 0$. Claramente, a função constante $x(t) \equiv \bar{x}$ é uma solução de (S) .

Definição 1.2.6 Um ponto singular x_0 de um sistema autônomo (S) é estável quando para toda vizinhança U de x_0 , existe uma vizinhança U_1 de x_0 tal que toda solução $\varphi(t)$ de (S) com $\varphi(0) \in U_1$ está definida em U para todo $t \geq 0$.

Definição 1.2.7 Um ponto singular x_0 de um sistema autônomo (S) é assintoticamente estável quando for estável e além disso $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = x_0$.

Definição 1.2.8 Dizemos que x_0 é um poço, se existe uma vizinhança U_{x_0} de x_0 tal que toda órbita de (S) que começa nesta vizinhança converge para x_0 quando $t \rightarrow +\infty$.

Observação: Em \mathcal{F} ponto assintoticamente estável (local ou global) pode também ser chamado de poço ou atrator (local ou global, respectivamente).

Teorema 1.2.9 As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) 0 é um poço para o sistema $x' = Ax$;
- (ii) todos os autovalores de A tem parte real negativa.

Demonstração:

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

Suponha por absurdo que A possui um autovalor λ com parte real não-negativa ($\lambda \geq 0$).

Consideremos o caso em que λ é real.

Seja v autovetor correspondente a λ . Sabemos que $\gamma(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução de $x' = Ax$.

Como $\lambda \geq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\lambda t}v| = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t}|v|$$

que se existir é diferente de zero, pois v é autovetor, o que contradiz a hipótese.

Agora, consideremos o caso em que $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, $\alpha \geq 0$.

Vamos ter que

$$\gamma(t) = e^{\lambda t}v$$

$$\bar{\gamma}(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}$$

são soluções complexas com $v = v_1 + iv_2$ e

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{2}[\gamma(t) + \bar{\gamma}(t)]$$

é solução real de $x' = Ax$.

Daí,

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \frac{1}{2}[e^{\lambda t}v + e^{\bar{\lambda}t}\bar{v}] = \\ &= \frac{1}{2}e^{\lambda t}v[v + e^{(\bar{\lambda}-\lambda)t}\bar{v}] \end{aligned}$$

Seja $t_n = \frac{1}{\beta}n\pi$. Logo,

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2}e^{t\alpha} |v + \underbrace{e^{-2i\beta t_n}}_1 \bar{v}| = \begin{cases} \infty, & \text{se } \alpha > 0 \\ \frac{1}{2}|v + \bar{v}|, & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Observemos ainda que se $v_1 \neq 0$

$$|v + \bar{v}| = 2v_1 \neq 0$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| \neq 0$$

contradizendo a hipótese.

Caso $v_1 = 0$, tome $\gamma_1(t) = \frac{1}{2i}[\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)]$.

(ii) \Rightarrow (i)

Suponhamos que os autovalores de A tem parte real negativa. Considerando as soluções complexas é suficiente mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda t} v = 0$$

onde λ é autovalor e v o autovetor correspondente.

Seja $\lambda = \alpha + i\beta$ com $\alpha = -a, a > 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{\lambda t} v| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{\alpha t} e^{i\beta t} v| = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{e^{at}} e^{i\beta t} v \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{at}} |v| = 0 \end{aligned}$$

■

Lema 1.2.10 Lema de Cálculo *Seja $\epsilon > 0$. Então para todo $k > 0$,*

$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-ct} t^k = 0$. Daí, para qualquer polinômio $p(t)$, $e^{-ct} p(t)$ é limitado para $t \geq 0$.

Demonstração:

Segue da regra de l'Hospital aplicada várias vezes a $\frac{s^{-k}}{e^{\frac{s}{s}}}$, obtida da função $e^{-ct}t^k$ após a mudança de variáveis $t = \frac{1}{s}$.

■

Embora, sem argumentos adicionais, o resultado abaixo é válido no \mathbb{R}^n , nos restringiremos ao caso do plano.

Teorema 1.2.11 *Seja*

$$x' = Ax + g(t, x) \quad (1.2)$$

onde A é uma matriz cujos autovalores tem parte real negativa. Seja g real, contínua para x em uma vizinhança da origem e $t \geq 0$, e suponha que

$$g(t, x) = o(|x|) \quad (|x| \rightarrow 0)$$

uniformemente para $t \geq 0$. Então, a solução identicamente nula é assintoticamente estável.

Demonstração:

Uma solução φ de (1.2) com $|\varphi(0)|$ pequeno pode ser continuada para valores maiores de t sempre que $|\varphi(t)|$ permaneça pequeno.

Daí,

$$(e^{-tA}\varphi(t))' = -Ae^{-tA}\varphi(t) + e^{-tA}\varphi'(t)$$

Por (1.2), temos que

$$\begin{aligned} (e^{-tA}\varphi(t))' &= -Ae^{-tA}\varphi(t) + e^{-tA}[A\varphi(t) + g(t, \varphi(t))] = \\ &= -Ae^{-tA}\varphi(t) + Ae^{-tA}\varphi(t) + e^{-tA}g(t, \varphi(t)) = \\ &= e^{-tA}g(t, \varphi(t)) \end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned}
 \int_0^t (e^{-sA}\varphi(s))' ds &= \int_0^t e^{-sA}g(s, \varphi(s)) ds \\
 e^{-tA}\varphi(t) - \varphi(0) &= \int_0^t e^{-sA}g(s, \varphi(s)) ds \\
 \varphi(t) - e^{tA}\varphi(0) &= e^{tA} \int_0^t e^{-sA}g(s, \varphi(s)) ds \\
 \varphi(t) - e^{tA}\varphi(0) &= \int_0^t e^{(t-s)A}g(s, \varphi(s)) ds \\
 \varphi(t) &= e^{tA}\varphi(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s, \varphi(s)) ds
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

desde que $\varphi(t)$ exista.

Sabemos que existe uma matriz complexa C , não singular, tal que $J = C^{-1}AC$, onde J é da forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ou

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

A matriz J chama-se forma canônica de Jordan de A .

Então, vamos dividir em dois casos:

1º caso: Assuma que

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Então,

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\|e^{tJ(\lambda)}\| = \max_{i=1,2} \{e^{Re\lambda_i t}\}$$

Para $\mu > 0$ suficientemente pequeno temos que $-\mu - Re(\lambda_i) > 0$, $\forall i$,

então

$$\|e^{tJ(\lambda)}\| \leq e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

Logo,

$$|e^{At}| \leq |(e^{J_1 t}; e^{J_2 t})| \leq e^{-t\mu} \quad (1.4)$$

2º caso: Suponha que

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Assim, temos

$$e^{tJ(\lambda)} = e^{t(\lambda_1 I + N)} = e^{\lambda_1 t} e^{tN} = e^{\lambda_1 t} [I + Nt]$$

Logo,

$$\|e^{tJ(\lambda)}\| \leq |e^{\lambda t}| \|I + Nt\|$$

Para $\mu > 0$ suficientemente pequeno temos que $\eta = -\mu - \text{Re}(\lambda_1) > 0$,

então

$$\|e^{tJ(\lambda_1)}\| \leq e^{-\mu t} e^{-\eta t} |a_0 + a_1|$$

onde $a_0 = \|I\| = 1$ e $a_1 = \|N\|$.

Pelo Lema 1.2.9, existe k tal que para todo $t \geq 0$,

$$e^{-\eta t} (1 + t) \leq k$$

Logo,

$$\|e^{tJ(\lambda)}\| \leq ke^{-t\mu}, \quad t \geq 0$$

Assim, temos

$$|e^{At}| \leq ke^{-\mu t} \quad (1.5)$$

Portanto, por (1.4) e (1.5) existem constantes positivas K e μ tal

que

$$|e^{At}| \leq Ke^{-\mu t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (1.6)$$

De (1.3) e (1.6),

$$|\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)|e^{-\mu t} + K \int_0^t e^{-\mu(t-s)} |g(s, \varphi(s))| ds$$

Dado $\epsilon > 0$, $\epsilon < \mu$, existe δ tal que $|g(t, x)| \leq \frac{\epsilon|x|}{K}$ para $|x| \leq \delta$. Logo, se $|\varphi(s)| < \delta$ para $0 \leq s \leq t$, segue que

$$\begin{aligned} e^{\mu t} |\varphi(t)| &\leq K|\varphi(0)| + K \frac{\epsilon}{K} \int_0^t e^{\mu s} |\varphi(s)| ds = \\ &= K|\varphi(0)| + \epsilon \int_0^t e^{\mu s} |\varphi(s)| ds \end{aligned}$$

Desta inequação resulta, por Gronwall,

$$e^{\mu t} |\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)| e^{\epsilon t}$$

ou

$$|\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)| e^{-(\mu-\epsilon)t} \quad \text{para } t \text{ pequeno} \quad (1.7)$$

Mas, $a = \mu - \epsilon > 0$, então (1.7) mostra que

$$|\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)| e^{-at}$$

E portanto, $|\varphi(t)| \leq \delta$, $\forall t \geq 0$ se $K|\varphi(0)| < \delta$. Além disso, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t)| = 0$, o que completa a prova do teorema.

■

Seja \mathcal{F} a classe de aplicações C^1 , $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que

- (i) a origem é um ponto de equilíbrio de (S) , isto é, $f(0) = 0$;
- (ii) $\text{tr } Df(x) < 0$ em \mathbb{R}^2 ;
- (iii) $\det Df(x) > 0$ em \mathbb{R}^2 ;

onde $Df(x) = (\partial f_i / \partial x_j)$ é a matriz Jacobiana.

Como f é de classe C^1 , tomemos o desenvolvimento de Taylor de f ,
ou seja,

$$f(x) = f(0) + Df(0)x + o(|x|)$$

isto é, $\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{o(|x|)}{|x|} = 0$.

Sendo $f(0) = 0$ e $A = Df(0)$, então

$$f(x) = Ax + o(|x|)$$

Corolário 1.2.12 *Assuma (i), (ii), e (iii) para o sistema (S), então a origem é um poço.*

Demonstração:

Seja $A = Df(0)$, chamado a parte linear de f em 0. O polinômio característico de A é

$$\lambda^2 - (trA)\lambda + detA = 0.$$

Logo, os autovalores próprios de A são

$$\frac{trA \pm \sqrt{(trA)^2 - 4detA}}{2}$$

Por (ii) $trA < 0$, e então consideremos dois casos:

$$(1) \operatorname{Re}((trA)^2 - 4detA) < 0$$

Neste caso, os autovalores de A tem parte real negativa.

$$(2) \operatorname{Re}((trA)^2 - 4detA) \geq 0$$

Se

$$|trA| \leq ((trA)^2 - 4detA)^{\frac{1}{2}}$$

$$(trA)^2 \leq ((trA)^2 - 4detA)$$

$$0 \leq -4\det A$$

$$0 \geq \det A$$

Por (iii), absurdo!!

Portanto, os autovalores de A tem parte real negativa, o que implica que 0 é um poço.

■

Exemplo:

Um exemplo físico simples de um poço (não-linear) é dado por um pêndulo movendo-se em um plano vertical. (Figura 1.2)

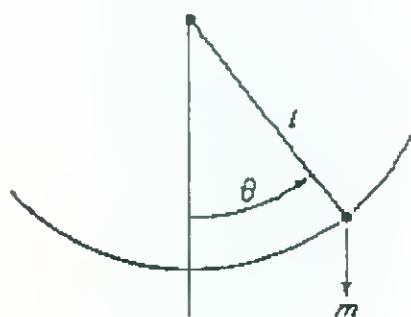


Figura 1.2: Pêndulo

Assumamos uma força gravitacional descendente constante para a massa m do pêndulo; nós desprezamos a massa da haste que está suportando o pêndulo. Nós assumimos que existe uma força de atrito resistindo ao movimento, proporcional a velocidade do pêndulo.

Seja l o comprimento constante da haste. O pêndulo move-se ao longo de um círculo de raio l . Se $\theta(t)$ é o ângulo no sentido anti-horário entre

a vertical e a haste no tempo t , então a velocidade angular do pêndulo é $\frac{d\theta}{dt}$ e a velocidade é $l\frac{d\theta}{dt}$. Portanto, a força de atrito é $\frac{-kl d\theta}{dt}$, onde k é uma constante não-negativa; esta força é tangente ao círculo.

A força gravitacional descendente m tem componente $-m\text{sen}\theta(t)$ tangente ao círculo; isto é, a força no pêndulo que produz movimento. Portanto, a força total tangente ao círculo no tempo t é

$$F = -\left(kl\frac{d\theta}{dt} + m\text{sen}\theta\right).$$

A aceleração do pêndulo tangente ao círculo é

$$a = \frac{ld^2\theta}{dt^2}$$

Então, da Lei de Newton $a = \frac{F}{M}$, nós temos

$$l\theta'' = \frac{-kl}{m}\theta' - \text{sen}\theta$$

ou

$$\theta'' = \frac{-k}{m}\theta' - \frac{1}{l}\text{sen}\theta$$

Introduzindo a nova variável

$$\omega = \theta'$$

(interpretada como velocidade angular), nós obtemos o sistema de equações de primeira ordem

$$(*) \begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -\frac{1}{l}\text{sen}\theta - \frac{k}{m}\omega \end{cases}$$

Logo, (*) tem pontos de equilíbrio

$$(\theta, \omega) = (n\pi, 0); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Consideremos o equilíbrio $(0,0)$. O campo vetorial definindo (*) é:

$$f(\theta, \omega) = \left(\omega, -\frac{1}{l}\text{sen}\theta - \frac{k}{m}\omega\right)$$

Derivando, temos

$$Df(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{l}\cos\theta & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}.$$

Então,

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

com autovalores

$$\frac{1}{2} \left\{ -\frac{k}{m} \pm \left[\left(\frac{k}{m} \right)^2 - \frac{4}{l} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

A parte real $-\frac{k}{2m}$ é negativa, já que $k, m > 0$. Portanto, o equilíbrio $\theta = \omega = 0$ é um poço.

Conclusão: para todo ângulo e velocidade suficientemente pequenos, o pêndulo tende para a posição de equilíbrio $(0, 0)$.

Definição 1.2.13 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio para o sistema (S) . A bacia de atração de $\{x_0\}$ é a união das órbitas $\gamma(t)$ de (S) tal que $\gamma(t) \rightarrow x_0$ se $t \rightarrow +\infty$.*

1.3 A aplicação de Poincaré

Tomamos [14] como referência básica para esta seção.

Definição 1.3.1 *Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^r , $r \geq 1$, $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. $\Sigma \subset \Delta$ é uma seção transversal local de X (de classe C^r) passando por p se existe uma aplicação diferenciável $f : A \rightarrow \Delta$ de classe C^r tal que $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida e $f : A \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo e $\forall a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $X(f(a))$ geram o espaço \mathbb{R}^n .*

Observação: Sejam $p \in \Delta$ não-singular e $\{v_1, \dots, v_{n-1}, X(p)\}$ uma base de \mathbb{R}^n . Seja $B(0, \delta)$ uma bola de \mathbb{R}^{n-1} com centro na origem e raio $\delta > 0$. Para δ suficientemente pequeno, $f : B(0, \delta) \rightarrow \Delta$ dada por $f(x_1, \dots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$ é uma seção transversal local de X em p .

Teorema 1.3.2 Teorema do Fluxo Tubular: *Seja p um ponto não-singular de $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r e $f : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de X de classe C^r com $f(0) = p$. Então, existe uma vizinhança V de p em Δ e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$ de classe C^r , onde $\epsilon > 0$ e B é uma bola aberta em \mathbb{R}^{n-1} de centro na origem $0 = f^{-1}(p)$ tal que*

$$(i) \ h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B;$$

(ii) h é uma C^r -conjugação entre $X|_V$ e o campo constante $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Observação: h ser C^r -conjugação significa que h é de classe C^r e se φ é o fluxo de X e $\bar{\varphi}$ é o fluxo de Y então, $h(\varphi(t, x)) = \bar{\varphi}(t, h(x))$. (Lembrar: $\bar{\varphi}(t, y) = y + t(1, 0, \dots, 0)$)

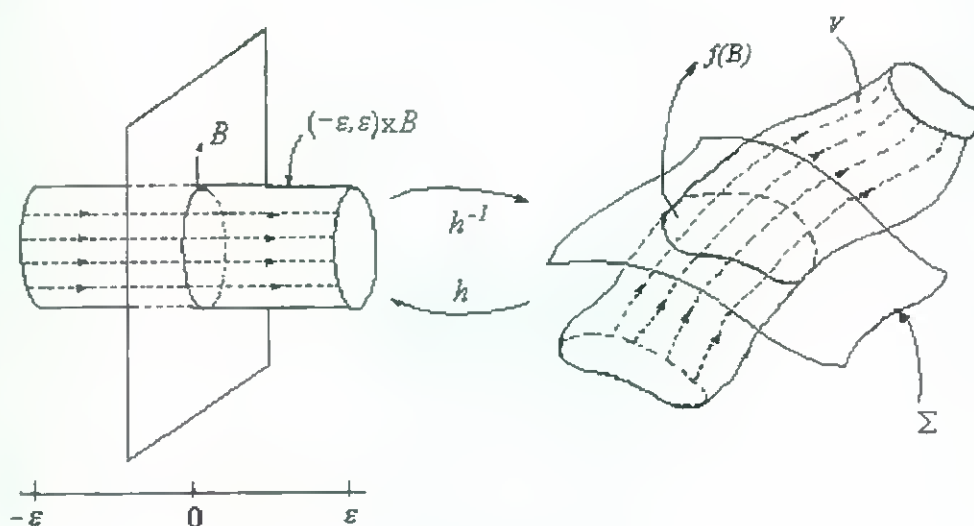


Figura 1.3

A aplicação de Poincaré associada a uma órbita fechada γ de um campo vetorial é um difeomorfismo π que definiremos a seguir. Esta transformação descreve o comportamento do campo em uma vizinhança de γ .

Seja então, $\gamma = \{\varphi(t, p); 0 \leq t \leq \tau_0\}$ uma órbita periódica de período τ_0 de um campo X de classe C^r , $r \geq 1$, definido em $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Seja Σ uma seção transversal a X em p . Em virtude da continuidade do fluxo φ de X , e pelo Teorema do Fluxo Tubular, para todo ponto $q \in \Sigma$ próximo de p a trajetória $\varphi(t, q)$ permanece próxima a γ , com t em um intervalo compacto pré-fixado, por exemplo, $[0, 2\tau_0]$. Define-se $\pi(q)$ como o primeiro ponto onde esta órbita intercepta Σ . Seja Σ_0 o domínio de π . Naturalmente, $p \in \Sigma_0$ e $\pi(p) = p$. (Figura 1.4)

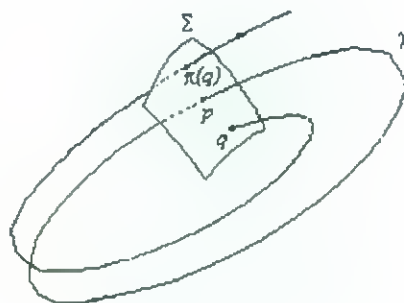


Figura 1.4

Muitas propriedades de X perto de γ se refletem em π . Por exemplo, as órbitas periódicas de X vizinhas de γ correspondem aos pontos periódicos de π , que são pontos $q \in \Sigma_0$ para os quais $\pi^n(q) = q$ para algum inteiro $n \geq 1$. O comportamento assintótico das órbitas de X perto de γ também é descrito por π . Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(q) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$$

Então, π é um sistema dinâmico discreto com ponto fixo 0.

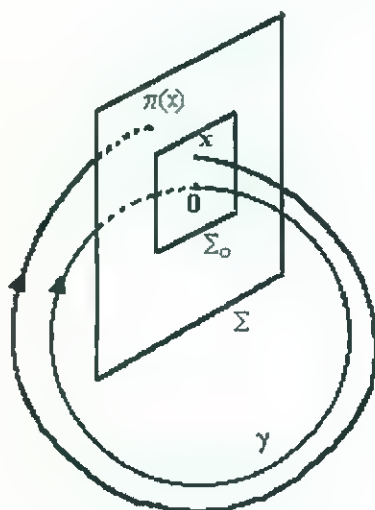


Figura 1.5

1.4 O Teorema de Poincaré-Bendixson

Informamos que a fonte básica para esta seção foi [14].

Sejam Δ um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n e $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$.

Seja $\varphi(t, p)$ a curva integral de X passando pelo ponto p , definida no seu intervalo máximo I_p , $I_p = (t_-(p), t_+(p))$. Define-se o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \Delta; \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow t_+(p) \text{ e } \varphi(t_n, p) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

Analogamente, define-se o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta; \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow t_-(p) \text{ e } \varphi(t_n, p) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados conjunto ω -limite e conjunto α -limite de p , respectivamente.

Exemplo:

Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo C^∞ dado por

$$X(x, y) = (x, -y)$$

As curvas integrais de X em \mathbb{R}^2 são representadas pela sela da Figura 1.6.

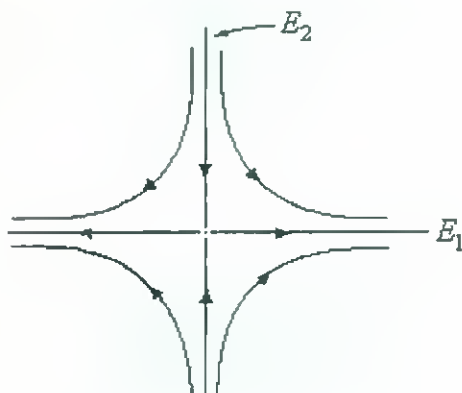


Figura 1.6

Se $p = 0$, $\alpha(p) = \omega(p) = \{0\}$.

Se $p \in E_1 - \{0\}$, $\omega(p) = \emptyset$ e $\alpha(p) = \{0\}$.

Se $p \in E_2 - \{0\}$, $\omega(p) = \{0\}$ e $\alpha(p) = \emptyset$.

Se $p \notin E_1 \cup E_2$, $\omega(p) = \alpha(p) = \emptyset$.

Observação: Se p é um ponto singular do campo X , então $\omega(p) = \{p\}$, pois neste caso $\varphi(t, p) = p$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Lema 1.4.1 *Se γ_p é uma órbita de um campo X passando por p e se $q \in \gamma_p$, então*

$$\omega(p) = \omega(q) \quad \text{e} \quad \alpha(p) = \alpha(q)$$

Demonstração:

É suficiente provarmos apenas o primeiro caso.

Seja $z \in \omega(p)$. Então, temos que $\exists t_n > 0$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_+$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p) = z$.

Como $p \in \gamma_q$, $\exists t_0$ tal que $\varphi(t_0, q) = p$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_0 + t_n, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, \varphi(t_0, q)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p) = z$$

Logo, $z \in \omega(q)$.

Portanto, $\omega(p) \subset \omega(q)$.

Analogamente, $\omega(q) \subset \omega(p)$.

Portanto, $\omega(q) = \omega(p)$.

■

Em virtude do lema, podemos definir:

Definição 1.4.2 O conjunto ω -limite de uma órbita γ é o conjunto $\omega(p)$, para qualquer $p \in \gamma$, denotamos por ω_γ . Analogamente, se define α -limite de uma órbita.

Lema 1.4.3 Seja γ uma órbita definida para $t \geq 0$. ω_γ é um subconjunto fechado de Δ .

Demonstração:

Vamos provar que $\omega_\gamma = \omega(p)$, $p \in \gamma$ é fechado.

Seja $q_n \in \omega(p)$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$.

Devemos mostrar que $q \in \omega(p)$.

Como $q_n \in \omega(p)$, temos que existe uma sequência $t_m^{(n)}$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m^{(n)} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m^{(n)}, p) = q_n$$

Escolhemos a sequência $t_n = t_{m(n)}^n > n$ tal que $d(\varphi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}$.

$$d(\varphi(t_n, p), q) \leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) \longrightarrow 0$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p) = q$$

Portanto, $q \in \omega(p)$. ■

Agora, vamos supor Δ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e X um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$ em Δ . Seja γ_p^+ a semi-órbita positiva de p

$$\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}.$$

Teorema 1.4.4 Teorema de Poincaré-Bendixon: *Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma curva integral de X , definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ esteja contida num compacto $K \subset \Delta$.*

Suponha que o campo X possua um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Têm-se as seguintes alternativas:

(a) Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.

(b) Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e também singulares, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \infty$.

(c) Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.

Exemplo:

Seja X um campo vetorial de classe C^1 em \mathbb{R}^2 tal que em $B_r = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq r\}$ não possui pontos singulares. Se X aponta para o interior de B_r em todo ponto da fronteira de B_r , então X tem uma órbita periódica em B_r . Isto pelo Teorema de Poincaré-Bendixon aplicado a qualquer semi-órbita positiva por um ponto de fronteira de B_r .

1.5 P-matrizes

Nesta seção nossas fontes são [4] e [7].

Definição 1.5.1 *Uma matriz real $n \times n$, $A = (a_{ij})$ é dita uma P-matriz, se todos os seus menores principais são positivos.*

Nós exporemos alguns resultados para P-matrizes, os quais podem ser também interessantes por si só.

Vamos usar a ordem parcial no n -espaço real \mathbb{R}^n . Para $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$, as seguintes notações são definidas:

$$x \underline{\geq} y \text{ se } x_i \geq y_i \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{)}$$

$$x \geq y \text{ se } x \underline{\geq} y \text{ e } x_i \neq y_i \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{)}$$

$$x > y \text{ se } x_i > y_i \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{)}$$

Um vetor x é dito não-negativo, se $x \underline{\geq} 0$.

Teorema 1.5.2 *Se A é uma P-matriz, então a desigualdade*

$$Ax \leq 0; \quad x \underline{\geq} 0$$

tem apenas a solução trivial $x = 0$.

Teorema 1.5.3 *A é uma P-matriz se, e só se, para todo $x \neq 0$ temos que $(Ax)_i \cdot x_i > 0$ para algum i .*

Definição 1.5.4 *Uma região é um conjunto aberto e conexo no \mathbb{R}^n , com ou sem fronteira. Uma região retangular aberta, ou simplesmente, um intervalo aberto é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : p < x < q\}$, para algum $p < q$, $p, q \in \bar{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\pm\infty\}$. Uma região retangular fechada é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : p \leq x \leq q\}$, onde $-\infty < p < q < +\infty$.*

Consideremos agora a aplicação diferenciável $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω uma região retangular fechada do \mathbb{R}^n , definida por $F(x) = (f_i(x))$, onde $f_i(x)$ são funções reais definidas na região Ω , e denotamos a matriz Jacobiana de F por $J(x) = (f_{ij}(x))$.

Teorema 1.5.5 *Assuma que a matriz Jacobiana $J(x)$ da aplicação F é uma P -matriz para todo $x \in \Omega$. Se para algum a e x em Ω as desigualdades*

$$F(x) \leq F(a), \quad x \geq a$$

ocorrem, então $x = a$.

Teorema 1.5.6 *Se a matriz Jacobiana $J(x)$ é uma P -matriz para todo $x \in \Omega$, então F é 1-1 em Ω .*

Demonstração:

Sejam $a, b \in \Omega$ tal que $F(a) = F(b)$. Nós devemos mostrar que $a = b$.

Denote $a = (\alpha_i)$ e $b = (\beta_i)$. Nós podemos supor, reordenando se necessário, que

$$\alpha_i \leq \beta_i \quad (i \leq k)$$

$$\alpha_i \geq \beta_i \quad (i > k)$$

Então, se $k = n$, nós observamos que $F(a) = F(b)$ e $a \leq b$, isto é, as hipóteses do teorema anterior estão satisfeitas. Então, pelo mesmo teorema, nós temos $a = b$.

O caso $k = 0$ é análogo, pois $\alpha_i \geq \beta_i$ para $i > 0$.

Se $0 < k < n$, definimos a aplicação $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$D(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, -x_{k+1}, \dots, -x_n).$$

Então, D é 1-1 em \mathbb{R}^n e $D^{-1} = D$.

Além disso, $D(\Omega)$ é uma região retangular fechada.

Seja $D(a) = a^*$ e $D(b) = b^*$. Finalmente, seja $H : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função composta dada por

$$H = D \circ F \circ D$$

Afirmção: $H(a^*) = H(b^*)$ e $a^* \leq b^*$.

De fato,

$$H(a^*) = D \circ F \circ D(a^*) = D \circ F \circ \overbrace{D(D(a))}^{I(a)} = D(F(a))$$

$$H(b^*) = D \circ F \circ D(b^*) = D \circ F \circ \underbrace{D(D(b))}_{I(b)} = D(F(b))$$

Por hipótese, $F(a) = F(b)$, então, $H(a^*) = H(b^*)$.

E,

$$a^* = D(a) = D(\alpha_i) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, -\alpha_{k+1}, \dots, -\alpha_n)$$

$$b^* = D(b) = D(\beta_i) = (\beta_1, \dots, \beta_k, -\beta_{k+1}, \dots, -\beta_n)$$

Como $\alpha_i \leq \beta_i$ ($i \leq k$) e $\alpha_i \geq \beta_i$ ($i > k$), então $\alpha_i \leq \beta_i$ ($i \leq k$) e $-\alpha_i \geq -\beta_i$ ($i > k$).

Portanto, $a^* \leq b^*$.

Observando que:

$$(1) (Ax)_i \cdot x_i = \sum a_{ij} x_j \cdot x_i = \langle (a_{i1}, \dots, a_{in}), (x_1, \dots, x_n) \rangle \cdot x_i;$$

(2) a i -ésima linha da matriz Jacobiana de $D \circ F \circ D$ é um múltiplo positivo da i -ésima linha da matriz Jacobiana de F , calculado, eventualmente, em pontos diferentes;

temos que $(Hx)_i \cdot x_i = (D \circ F \circ D(x))_i \cdot x_i > 0$, para $x \neq 0$.

Assim, pelo Teorema 1.5.3 a matriz Jacobiana de H é uma P -matriz.

Então, pelo Teorema 1.5.5, nós temos $a^* = b^*$, o que implica, $a = b$, como queríamos demonstrar. ■

Exemplo:

Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto. Defina $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$F(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right)$$

Assim,

$$JF(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

chamada matriz Hessiana de f no ponto a . A matriz $JF(a)$ é simétrica (por Schwarz).

Portanto, se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0$ e $\det JF(a) > 0$, $\forall a \in \Omega$, $JF(a)$ é uma P -matriz e pelo Teorema 1.5.6, F é 1-1 em Ω .

Definição 1.5.7 Uma matriz $n \times n$ A é dita ser positiva quase-definida se $\frac{1}{2}(A + A^T)$ é positiva definida. Neste caso, A , bem como $\frac{1}{2}(A + A^T)$, é uma P -matriz.

Teorema 1.5.8 Se $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável, onde Ω é uma região convexa (fechada ou não) de \mathbb{R}^n , tal que a matriz Jacobiana é uma P -matriz positiva (negativa) quase-definida em Ω , então F é 1-1 em Ω .

Demonstração:

Sejam $a, x \in \Omega$ e $x \neq a$. Seja, além disso,

$$x(t) = a + th, \quad \text{onde } x - a = h = (h_i)$$

Pela convexidade, nós temos $x(t) \in \Omega$ ($0 \leq t \leq 1$).

Defina a função $\Phi(t)$ por

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n h_i (f_i(x(t)) - f_i(a)), \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Então, pela diferenciabilidade e definição de quase-definida, temos

$$\Phi'(t) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}(x(t)) h_i h_j$$

é identicamente positiva ou identicamente negativa.

Além disso, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) \neq 0$ e então $f_i(x) - f_i(a) \neq 0$ para algum i .

Portanto a multivalência está descartada.

■

Exemplo:

Seja f uma função analítica (complexa) de uma variável complexa z numa região complexa Ω , tal que o imagem da derivada f' fica no semi-plano não contendo a origem em seu interior.

Primeiramente, mostraremos que é suficiente considerar o caso em que a parte real da derivada é positiva em Ω . De fato, seja $f(z) = u + iv$. Então, $f'(z) = u_x + iv_x$ e por hipótese, existem números reais p e q tal que $pu_x + qv_x > 0$ em Ω . Então, $h(z) = (p - iq)f(z)$ é analítica e $h'(z)$ tem parte real positiva em Ω .

Agora, nós podemos assumir que $Re(f'(z)) = u_x > 0$ em Ω , e examinando a matriz Jacobiana J da aplicação $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ é quase-definida positiva em Ω , já que

$$\frac{J + J^T}{2} = \begin{pmatrix} u_x & 0 \\ 0 & u_x \end{pmatrix}, \quad u_x > 0$$

em virtude das equações de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Portanto pelo Teorema 1.5.8, f é 1-1 em Ω .

Teorema 1.5.9 Teorema de Kronecker *Seja S^n um fluxo em uma curva de Jordan Γ tendo número de rotação α irracional. Então, S^n é ergódico (isto é, o conjunto ω -limite da semi-órbita positiva é igual a Γ), se e só se, S é topologicamente equivalente a uma rotação, isto é, se e só se, existe uma mudança de parâmetros preservando orientação $R : z = g(y)$ tal que $RSR^{-1} : z_1 = Z + \alpha$.*

Definição 1.5.10 Uma matriz A , $n \times n$, é dita ser uma P -matriz fraca, se $\det A > 0$ e todas as outras submatrizes principais, de ordem menor que n , tem determinante não-negativo também, A é dita quase-definida fracamente positiva, se $\det A > 0$ e $\frac{1}{2}(A + A^T)$ é positiva semi-definida. Uma matriz dita quase-definida fracamente negativa pode ser definida analogamente.

Teorema 1.5.11 Se $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde Ω é uma região retangular aberta de \mathbb{R}^n , é uma aplicação diferenciável tal que a matriz Jacobiana $J(x)$ é uma P -matriz fraca, para todo x em Ω , então F é 1-1 em Ω .

Teorema 1.5.12 Se uma aplicação diferenciável $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde Ω é uma região convexa aberta do \mathbb{R}^n , tem uma matriz Jacobiana que é uma matriz quase-definida fracamente positiva em Ω , então é 1-1 em Ω .

Demonstração:

No decorrer da prova devemos ter em mente que para uma subregião nós encontramos uma subregião retangular no Corolário 1.5.11 e uma subregião convexa no Teorema 1.5.12.

Sendo a um ponto arbitrário de Ω , nós devemos mostrar que $x \in \Omega$ e $F(x) = F(a)$ implica $x = a$. Para isso, é suficiente provar que não existe outra solução para $F(x) = F(a)$ além de $x = a$, em cada subregião fechada e limitada Δ^* de Ω , contendo a em seu interior. Agora tomemos alguma subregião fechada, ampla e limitada Δ^{**} de Ω , tal que o interior de Δ^{**} contém Δ^* . Como o Jacobiano é positivo em Ω , toda solução de $F(x) = F(a)$

é isolada, então existe um número finito de soluções de $F(x) = F(a)$ em Δ^{**} . Então, nós podemos escolher uma região aberta intermediária adequada Δ , cuja fronteira Γ não contém soluções de $F(x) = F(a)$. Γ é topologicamente equivalente a $(n - 1)$ -esfera, e pode ser considerado como um $(n - 1)$ -ciclo básico orientado $\partial\Delta$ adequadamente triangularizada. Nós denotamos este ciclo por $\tilde{\Gamma}$. Do mesmo modo, $F(\tilde{\Gamma})$ é imagem de ciclo, enquanto $F(\Gamma)$ denota a imagem de Γ como um conjunto de pontos.

Agora, como $F(a) \notin F(\tilde{\Gamma})$, a ordem de $F(a)$ relativa ao ciclo $F(\tilde{\Gamma})$ pode ser definida e denotada por $\omega(F(\tilde{\Gamma}), F(a))$.

Pelo Teorema de Kronecker em índices, $\omega(F(\tilde{\Gamma}), F(a))$ é igual a soma dos índices de todas as soluções de $F(x) = F(a)$ em Δ .

Além disso, como o Jacobiano é assumido ser identicamente positivo, o índice de todas as soluções de $F(x) = F(a)$ é igual a 1.

Por isso, nós temos

$$\omega(F(\tilde{\Gamma}), F(a)) = n^{\circ} \text{ de sol. de } F(x) = F(a) \text{ em } \Delta \quad (1.8)$$

Além disso, nós temos apenas que mostrar que $\omega(F(\tilde{\Gamma}), F(a)) = 1$.

Para este fim, nós primeiro provamos que

$$F(x) - F(a) \neq -\lambda(x - a) \quad \forall x \in \Omega \text{ com } x \neq a \text{ e } \lambda > 0$$

De fato, suponha que $F(x) - F(a) = -\lambda(x - a)$ para algum $b \in \Omega$ e $\lambda > 0$. Então,

$$\lambda a + F(a) = \lambda b + F(b) \quad (1.9)$$

Agora, consideremos a aplicação diferenciável $\bar{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\bar{F}(x) = \lambda x + F(x)$$

Além disso, a matriz Jacobiana J_λ desta nova aplicação é igual a $\lambda I + J$, onde I é a matriz identidade e J é a matriz Jacobiana de F . Seja K_λ uma submatriz principal arbitrária de J_λ . Então, $K_\lambda = \lambda I_k + K$, onde K é uma submatriz principal de J e I_k é a matriz identidade de ordem k correspondente.

É realmente visto que

$$|K_\lambda| = |\lambda I_k + K| = \lambda^k + \varphi(\lambda), \quad (1.10)$$

onde $\varphi(\lambda)$ é um polinômio de grau menor ou igual a $k - 1$ e cujos coeficientes são iguais a número da soma dos menores principais de K .

Como estes determinantes são assumidos não-negativos no Teorema 1.5.11, $\lambda > 0$ implica $|K_\lambda| > 0$ por (1.10).

Por outro lado, se J é quase-definida fracamente positiva como no Teorema 1.5.12, claramente $J_\lambda = \lambda I + J$ é quase-definida positiva, porque $\lambda > 0$. Além disso, o Jacobiano da aplicação \bar{F} é identicamente uma P -matriz ou uma matriz quase-definida positiva em Ω . Mas, (1.9) implica $\bar{F}(a) = \bar{F}(b)$ e então temos pelo Teorema 1.5.6 ou Teorema 1.5.8 que $a = b$.

Agora, como $F(x) - F(a) = -\lambda(x - a)$ para todo $x \neq a$ e $\lambda > 0$, a aplicação $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ é homotópica a aplicação $G(x) = F(a) + x - a : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n - \{F(a)\}$ pela homotopia

$$H(x, t) = (1 - t)F(x) + tG(x) \quad (x \in \Gamma, 0 \leq t \leq 1).$$

Então,

$$\omega(F(\tilde{\Gamma}), F(a)) = \omega(G(\tilde{\Gamma}), F(a)).$$

Mas, claramente $\omega(G(\tilde{\Gamma}), F(a)) = 1$, então por (1.8) temos que o número de soluções de $F(x) = F(a)$ em Δ é igual a 1.

Além disso, Δ^* não contém outra solução de $F(x) = F(a)$ tal que $x = a$, como queremos demonstrar. ■

Teorema 1.5.13 Teorema de Wintner *Dado $U(t, u)$ contínua para $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, $u \geq 0$, e assumamos que a solução máxima de $u' = U(t, u)$, $u(t_0) = u_0$, onde $u_0 \geq 0$, existe em $[t_0, t_0 + a]$ e que $U(t, u) \leq \psi(u)$, onde $\psi(u)$ é positiva, função contínua em $u \geq 0$, tal que*

$$\int^{\infty} \frac{du}{\psi(u)} = \infty$$

Seja $f(x, y)$ contínua na faixa $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, y arbitrário, e satisfaz

$$|f(t, y)| \leq U(t, |y|) \tag{1.11}$$

Então, o intervalo máximo de existência de soluções de

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

onde $|y_0| \leq u_0$, é $[t_0, t_0 + a]$.

Capítulo 2

Teorema Principal

2.1 Enunciado do Teorema

Neste capítulo estaremos preocupados com condições suficientes que garantam que a bacia de atração de um ponto de equilíbrio de um sistema C^1 de equações diferenciais do plano, $x' = f(x)$, é o plano inteiro.

Consideremos o sistema (S) e seja \mathcal{F} como no capítulo anterior.

Problema Fundamental em Estabilidade Assintótica Global: $f \in \mathcal{F}$ implica que $x \equiv 0$ é uma solução globalmente assintoticamente estável de (S) ? Em outras palavras, toda curva solução de (S) converge para 0 quando $t \rightarrow \infty$; ou ainda a bacia de atração da origem é \mathbb{R}^2 ?

Problema 1: $f \in \mathcal{F}$ implica que a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é globalmente 1-1?

Problema 2: $f \in \mathcal{F}$ implica que existe um número natural k , tal que para cada $p \in \mathbb{R}^2$, o número de soluções de $f(x) = p$ é limitado por k ?

Problema 3: $f \in \mathcal{F}$ implica que existem duas constantes positivas ρ e r tal que $|f(x)| \geq \rho > 0$ para $|x| \geq r > 0$ (onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana)?

Problema 4: $f \in \mathcal{F}$ implica que

$$\int_0^{+\infty} \left[\min_{|x|=r} |f(x)| \right] dr = \infty?$$

Teorema 2.1.1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(PF) *O problema fundamental tem uma resposta afirmativa para todo $f \in \mathcal{F}$;*

(P_i) *Problema i tem uma resposta afirmativa para todo $f \in \mathcal{F}$, onde $i \in$*

{1, 2, 3, 4}

2.2 $(P_4) \Rightarrow (PF)$

Demonstração:

Seja A o conjunto dos pontos de \mathbb{R}^2 , cujo conjunto ω -limite com respeito ao sistema (S) é a origem, ou seja

$$A = \{p \in \mathbb{R}^2 : \omega(p) = 0\},$$

isto é, A é a bacia de atração da origem em relação a (S) .

De (i), (ii), (iii), a origem é um poço (ver Corolário 1.2.11).

Afirmção 1: A é um conjunto aberto não-vazio.

Demonstração:

$A \neq \emptyset$, pois $\omega(0) = 0 \Rightarrow 0 \in A$.

Como 0 é um poço, então $\exists V_0$ vizinhança de 0 tal que, $\forall x \in V_0$, $\omega(x) = 0$. Portanto, $x \in A$. Logo, 0 é ponto interior de A .

Seja $p \in A$, vamos provar que existe uma vizinhança V de p tal que $\forall r \in V \Rightarrow \omega(r) = 0$.

Dado $q = \gamma_p(t_0)$, $t_0 > 0$, tal que, $q \in V_0$, temos que pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe vizinhança V_1 de p tal que: para todo $r \in V_1$, $\exists t_r > 0$ tal que, $\gamma_r(t_r) \in V_0$. Daí temos que $\omega(r) = 0$.

□

Para provar que o problema fundamental tem solução afirmativa para o sistema (S) , nós devemos mostrar que $A = \mathbb{R}^2$.

Já vimos que

$$A = \{p \in \mathbb{R}^2 : \omega(p) = 0\} \neq \emptyset$$

é aberto.

Provaremos sob a hipótese (P_4) que A é fechado.

Se for o caso, como com a topologia usual \mathbb{R}^2 é conexo, então $\mathbb{R}^2 = A \cup A^c$, com A^c também aberto. Daí, A^c é o conjunto vazio.

Suponha que A não seja fechado. Então, $\partial A \neq \emptyset$.

Dado $p \in \partial A$ a curva solução de (S), $\varphi_t(p)$, através de p , está contida em ∂A , para todo t no intervalo maximal (α, β) .

Afirmção 2: Existe um ponto $p \in \partial A$ tal que, a órbita maximal

$$L = \{\varphi_t(p); t \in (\alpha, \beta)\}$$

é um conjunto fechado.

Mais ainda, usando as técnicas de Olech (ver [12]) é possível provar que de (i), (ii), (iii) e (P_4) segue que α -limite e ω -limite desta curva são vazios.

Trabalharemos com o ω -limite, para o α -limite a demonstração é análoga.

Seja $p \in \partial A$, vamos aplicar o Teorema de Poincaré-Bendixson.

A única hipótese do Teorema de Poincaré-Bendixson (ver Teorema 1.4.4) que precisa ser verificada é que $\gamma_p^+ \subset \text{compacto}$, $\gamma_p^+ : [0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$. No nosso caso, é γ_p^+ limitado?

Caso não fosse

$$\exists \{t_n\}; \quad \|\gamma_p^+(t_n)\| \rightarrow \infty \quad t_n \rightarrow \beta \quad (2.1)$$

Afirmo que daí é possível modificar p de forma que γ_p^+ é fechado.

Pois, se não fosse fechado,

$$\exists s_n \rightarrow \beta; \quad \gamma_p^+(s_n) \rightarrow q \quad e \quad q \notin \gamma_p^+((0, \beta)) \quad (2.2)$$

Primeiramente, lembremos que do Lema 1.4.3, $\omega(p)$ é fechado, além disso $\omega(p) \subset \partial A$; se $\omega(p)$ tivesse órbita periódica, tome $p = p_0$ com p_0 um

ponto desta órbita. Caso contrário, $\omega(p) = \gamma_q$ e portanto temos que γ_q é fechado, pois é igual a $\omega(p)$. Mas, como $q \in \partial A$, substituindo p por q , segue a afirmação.

Daí, podemos assumir que γ_p^+ é limitado e portanto estamos sob as hipóteses do Teorema de Poincaré-Bendixon.

As alternativas (b) e (c) do Teorema de Poincaré-Bendixon (ver Teorema 1.4.4) implicam num absurdo. De fato, todo ponto crítico p de (S) é um poço por (i), (ii) e (iii) e daí como próximo de p temos pontos em A , então a trajetória que passa por um tal ponto teria ω -limite igual a 0 ou p . Absurdo!

Logo, pelo Teorema de Poincaré-Bendixon vale (a) e daí, ω_p é uma órbita fechada.

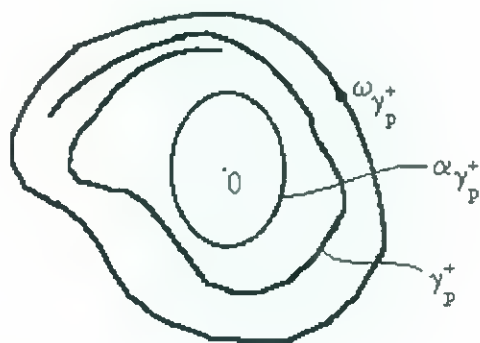


Figura 2.1

Agora modifique a escolha de p por um ponto q de $\omega(p)$ e daí $\gamma_q = \omega(p)$ é fechado, concluindo a prova da Afirmação 2.

Portanto, L é um conjunto fechado.

□

Considere o espaço $E = A \cup L$.

Denote por $l_{xy}(c)$ o f-comprimento de arco de uma curva $c: [a, b] \rightarrow E$, unindo x a y . Ou seja,

$$l_{xy}(c) = \int_a^b |f(c(s))| |c'(s)| ds$$

Então, assumindo $|x| \leq |y|$, nós temos

$$l_{xy}(c) \geq \int_{|x|}^{|y|} \left[\inf_{|u|=r} |f(u)| \right] dr. \quad (2.3)$$

De fato, tome $r = |c(s)|$. Tomemos

$$|c(s)| = \langle c(s), c(s) \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c_1^2(s) + c_2^2(s)}$$

e derivando, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{1}{2}(c_1^2(s) + c_2^2(s))^{-\frac{1}{2}} (2c_1(s)c_1'(s) + 2c_2(s)c_2'(s)) = \\ &= \frac{1}{(c_1^2(s) + c_2^2(s))^{\frac{1}{2}}} (c_1(s)c_1'(s) + c_2(s)c_2'(s)) = \\ &= \langle \frac{c(s)}{|c(s)|}, c'(s) \rangle \end{aligned}$$

onde \langle, \rangle denota o produto interno euclidiano.

Como $|c'(s)| = \langle c'(s), c'(s) \rangle^{\frac{1}{2}}$, então

$$|c'(s)| \geq \frac{dr}{ds}$$

Integrando, obtemos o resultado desejado:

$$\begin{aligned} l_{xy} &= \int_a^b |f(c(s))| |c'(s)| ds \\ &\geq \int_a^b |f(c(s))| \frac{dr}{ds} ds \stackrel{u=c(s)}{=} \\ &\stackrel{|x| \leq |y|}{=} \int_{|x|}^{|y|} \left[\inf_{|u|=r} |f(u)| \right] dr. \end{aligned}$$

As hipóteses sobre a integral em (P_4) , serão usadas para garantir que uma família de curvas, cujos extremos vão para ∞ , tem f-comprimento de arco ilimitado, como segue de (2.3).

De fato, por hipótese,

$$\int_0^{\infty} \left[\min_{|x|=r} |f(x)| \right] dr = \infty$$

Portanto, uma família de curvas cujos extremos vão para ∞ , tem f-comprimento de arco ilimitado.

Junto com (S), consideremos o sistema ortogonal

$$x' = f^\perp(x) \quad (S^\perp)$$

onde f^\perp é um entre $(-f_2, f_1)$ ou $(f_2, -f_1)$. A escolha apropriada é feita para assegurar que f^\perp , em L , aponta para dentro de A .

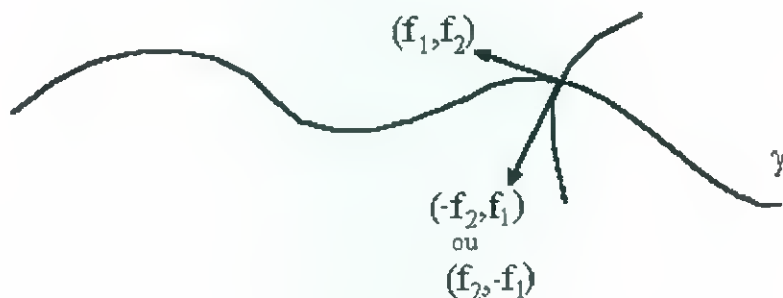


Figura 2.2

Sejam,

$\psi_s(q)$ uma curva solução de S^\perp através de q ;

$\gamma_t = \{\psi_s(\varphi_t(x)); s \in [0, \beta_t)\}$ a órbita maximal positiva de S^\perp passando por $\varphi_t(x)$.

Pelo Teorema do Fluxo Tubular, numa vizinhança V_0 de x_0 , γ_0 é uma transversal do fluxo de (S). Além disso, A é invariante pelo fluxo. Logo, órbitas passando por pontos de A que pertencem a vizinhança V_0 cortam γ_0 .

Dado $\delta = \int_0^{d(L,0)} [\inf_{|u|=r} f(u)] dr$; onde d é a distância euclidiana, tome $y \in \gamma_0 \cap E$, tal que o f-comprimento de arco de γ_0 entre x e y é menor ou igual a $\frac{\delta}{2}$ e escreva

$$M = \{\varphi_t(y), t \in [0, \infty)\}$$

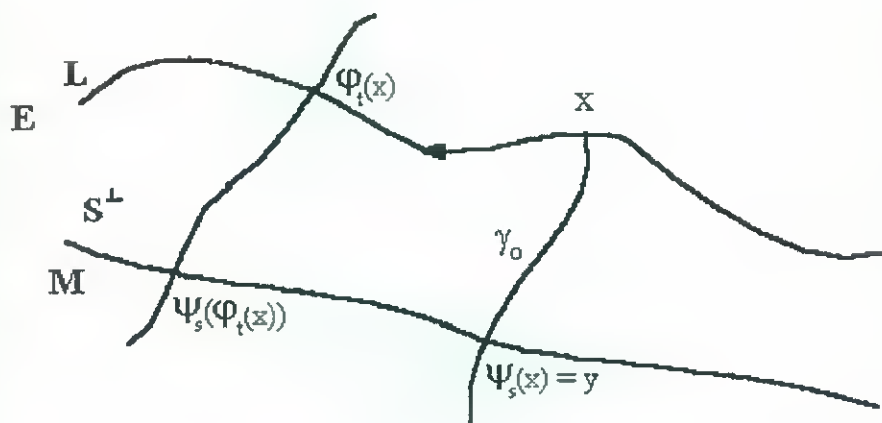


Figura 2.3

Os dois lemas seguintes, provados abaixo, levarão a uma contradição com a suposição que $\partial A \neq \emptyset$.

Lema 2.2.1 *Se γ_t corta M em um ponto y_t , então o f -comprimento de arco de γ_0 entre x e y é maior ou igual ao f -comprimento de arco de γ_t entre $\varphi_t(x)$ e y_t , ou seja,*

$$l_{xy}(\gamma_0) \geq l_{\varphi_t(x), y_t}(\gamma_t)$$

Lema 2.2.2 : *A curva γ_t corta M em um ponto denotado por $y_t = \varphi_{\tau(t)}(y)$ para todo $t \in [0, \beta)$. Além disso, $\tau(t) \uparrow \infty$ quando $t \uparrow \beta$.*

Concluimos do Lema 2.2.1, do Lema 2.2.2 e da escolha de y , temos que

$$\frac{\delta}{2} \geq l_{xy}(\gamma_0) \geq l_{\varphi_t(x), y_t}(\gamma_t)$$

$$\Rightarrow l_{\varphi_t(x), y_t}(\gamma_t) \leq \frac{\delta}{2}, \quad t \in [0, \beta)$$

Desde que $|y_t| \rightarrow 0$, quando $t \uparrow \beta$ e $\varphi_t(x) \in L$, nós temos de (2.3) e da escolha de δ que

$$\frac{3}{4}\delta \leq l_{\varphi_t(x), y_t}(\gamma_t), \quad \forall t \text{ perto de } \beta.$$

De fato, $d(L, 0) > 0, t \gg 1$ e

$$|l_{\varphi_t(x), y_t}(\gamma_t)| = \left| \int_a^b |f(c(s))||c'(s)||ds| \right|_{\substack{\gamma_t(a)=\varphi_t(x) \\ \gamma_t(b)=y_t}} \geq \int_{y_t}^{\varphi_t(x)} \inf_{|u|=r} |f(u)|dr$$

Agora, tomemos

$$t_0 > 0, \text{ tal que se } t \geq t_0 \Rightarrow |y_t| \leq |\varphi_t(x)|$$

e

ε_0 tal que

$$\int_{\varepsilon_0}^{d(L,0)} \inf_{|u|=r} |f(u)|dr \geq \frac{3}{4}\delta$$

Daí, tomemos $t_1 \geq t_0$ tal que se $t \geq t_1$, então $|y_t| \leq \varepsilon_0$.

Nestas hipóteses, como $|\varphi_t(x)| \geq d(0, L), \forall t$, então

$$l_{\varphi_t(x), y_t}(\gamma_t) \geq \int_{\varepsilon_0}^{d(0,L)} \inf_{|u|=r} |f(u)|dr \geq \frac{3}{4}\delta \quad t \geq t_1$$

Notemos que $\delta > 0$.

De fato, suponhamos $\delta = 0$. Então,

$$\int_0^{d(L,0)} \left[\inf_{|u|=r} |f(u)| \right] dr \Leftrightarrow \begin{cases} d(L, 0) = 0 \Rightarrow \exists \varphi \text{ tal que } \varphi \equiv 0 \\ \text{ou} \\ \inf_{|u|=r} |f(u)| = 0 \Rightarrow f(u) = 0 \end{cases}$$

Portanto, $A = \mathbb{R}^2$.

■

Demonstração do Lema 2.2.1:

Para todo $u \in \gamma_0$ entre x e y , a aplicação de Poincaré $\pi : \gamma_0 \rightarrow \gamma_t$ está definida pelo fluxo de (S) .

Pondo $\pi(u) = u_t$, a fórmula de Poincaré dá

$$\frac{ds_1}{ds_0} \Big|_{s_0=0} = \frac{|f(u)|}{|f(u_t)|} \exp \left[\int_0^{t(u)} \text{tr} Df(\varphi_t(u)) dt \right],$$

onde s_0 (respectivamente s_1) é o parâmetro do comprimento de arco em γ_0 (respectivamente γ_t), com origem em u (respectivamente u_t).

De (ii) segue que

$$\frac{ds_1}{ds_0} \Big|_{s_0=0} < \frac{|f(u)|}{|f(u_t)|} \Leftrightarrow \frac{|f(u_t)| ds_1}{|f(u)| ds_0} \Big|_{s_0=0} < 1$$

Integrando,

$$\int |f(u_t)| ds_1 \Big|_{s_0=0} < \int |f(u)| ds_0 \Big|_{s_0=0}$$

$$l_{\varphi_t(x), y_t}(\gamma_t) \leq l_{xy}(\gamma_0)$$

■

Demonstração do Lema 2.2.2:

Consideremos o seguinte subconjunto de $[0, \beta)$,

$$B = \{t \in [0, \beta), \gamma_t \cap M = y_t \text{ e } l_{\varphi_t(x), y_t}(\gamma_t) \leq \frac{\delta}{2}\}$$

Pela escolha de M , temos que $B \neq \emptyset$.

De fato, basta tomarmos $t = 0$, ou seja,

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_0 \cap M = y_0 \text{ e } l_{x,y}(\gamma_0) \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow 0 \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$$

Pela dependência contínua das soluções com respeito as condições iniciais e o Lema 2.2.1, segue que B é um conjunto aberto.

De fato, como $t_0 \in B$, devemos mostrar que $(a, b) \subset B$ onde $t_0 \in (a, b)$. Pela definição de B , temos:

$$t_0 \in B \Rightarrow \gamma_{t_0} \cap M = y_0 \quad \text{e} \quad l_{\varphi_{t_0}(x), y_{t_0}}(\gamma_{t_0}) \leq \frac{\delta}{2}$$

Pelo Lema 2.2.1,

$$l_{\varphi_t(x), y_t}(\gamma_t) \leq l_{xy}(\gamma_0) \leq \frac{\delta}{2} \quad \forall t \in [0, \beta)$$

em particular, $\forall t \in (a, b) \subset [0, \beta)$.

Portanto, B é aberto.

Para provar que B é fechado, consideremos a sequência $\{t_n\}$ em B , tal que $t_n \rightarrow \bar{t} < \beta \Rightarrow \varphi_{t_n}(x) \rightarrow \varphi_{\bar{t}}(x) = z$.

Se $\gamma_{\bar{t}}$ deixa $E (= A \cup L)$ ou tende para ∞ , está claro que $\gamma_{\bar{t}} \in B$, porque M deve interceptar $\gamma_{\bar{t}}$ para alcançar a origem.

Assim, nós podemos assumir que $\gamma_{\bar{t}} \subset E$ e está contido em um conjunto compacto. Daí, pelo Teorema de Poincaré-Bendixon, o conjunto ω -limite da curva solução de S^\perp através de z é a origem ou uma órbita periódica rodeando-o.

Em ambos os casos, por (2.3) e a definição de δ , nós podemos escolher \bar{s} tal que $l_{z, \psi_{\bar{s}}(z)}(\gamma_{\bar{s}}) \geq \frac{3}{4}\delta$.

De fato,

$$l_{z, \psi_{\bar{s}}(z)}(\gamma_{\bar{s}}) = l_{\varphi_{\bar{t}}(x), y}(\gamma_{\bar{s}}) \geq \frac{3}{4}\delta$$

*análogo ao anterior.

Logo, por continuidade com respeito as condições iniciais, segue que, para n grande, $\{\psi_s(\varphi_{t_n}(x)) : s \geq 0\}$ é uniformemente C^1 para

$$\{\psi_s(z); s \geq 0\}$$

nos arcos de f -comprimento igual a $\frac{3}{4}\delta$.

Portanto, M deve interceptar $\gamma_{\bar{t}}$.

Deste fato e pelo Lema 2.2.1, nós temos que $\bar{t} \in B$.

Então, $B = (0, \beta)$.

Para finalizar a prova é suficiente mostrar que $\tau(x) \uparrow \infty$ quando $t \rightarrow \beta$.

Por outro lado, deveríamos tomar $t_n \uparrow \beta$ tal que $\tau(t_n) \rightarrow T < \infty$ e construir curvas γ_{t_n} unindo pontos $\varphi_{t_n}(x) \in L$, as quais tendem para infinito, quando pontos $y_n \in M$, tendem para $\varphi_T(y)$.

Além disso, do Lema 2.2.1, o f -comprimento de arco destas curvas poderiam ser menores ou iguais a $\frac{\delta}{2}$, contradizendo a divergência da integral em (P_4) .

■

Observação: Note que uma inspeção nesta prova implica que $(P_4) \Rightarrow (PF)$, para cada $f \in \mathcal{F}$.

2.3 As outras implicações

$(P_3) \Rightarrow (P_4)$

Por hipótese, $\exists \rho, r$ tal que $|f(x)| \geq \rho > 0$ para $|x| \geq r > 0$, e seja

$$I = \int_0^{+\infty} \left[\min_{|x|=r} |f(x)| \right] dr$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &\geq \int_r^{+\infty} \left[\min_{|x|=r'} |f(x)| \right] dr' = \\ &= \int_r^{+\infty} \rho dr' = \\ &= \rho \int_r^{+\infty} dr' = \\ &= \infty \end{aligned}$$

■

$(PF) \Rightarrow (P_1)$

Suponha que f não seja globalmente 1-1 em \mathbb{R}^2 , ou seja $\exists x, y \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \neq y$ e $f(x) = f(y) = a$.

Agora vamos definir a função g abaixo:

$$g(x) = f(x + y) - a$$

Afirmção: g satisfaz (i), (ii), (iii).

De fato,

$$g(0) = f(y) - a = 0 \Rightarrow g(0) = 0$$

e

$$g(x - y) = f(x - y + y) - a = f(x) - a = 0$$

$$g'(x) = f'(x+y) \Rightarrow \begin{cases} \text{tr} Dg(x) = \text{tr} Df(x+y) < 0 \Rightarrow \text{tr} Dg(x) < 0 \\ e \\ \det Dg(x) = \det Df(x+y) > 0 \Rightarrow \det Dg(x) > 0 \end{cases}$$

Como g satisfaz todas as hipóteses de (PF) o sistema $x' = g(x)$ teria dois pontos de equilíbrio, isto implica uma contradição já que em particular (PF) implica que 0 é o único ponto de equilíbrio.

■

$(P_1) \Rightarrow (P_2)$

Por hipótese, f é globalmente 1-1, ou seja, $\forall y, z \in \mathbb{R}^2; f(y) = f(z) \Rightarrow y = z$. Então,

$$f(y) = p = f(z) \Rightarrow y = z$$

O que implica em existe uma única solução.

Portanto basta tomar $k = 1$.

■

$(P_2) \Rightarrow (P_3)$

Seja p um ponto no \mathbb{R}^2 para o qual $f(x) = p$ tenha um número máximo de k soluções.

Nós denotamos por $x_i, i = 1, 2, \dots, k$, as soluções de $f(x) = p$. Por (iii) e pelo Teorema da Função Inversa, temos que f é um difeomorfismo local. Portanto, existe um $\rho > 0$ e uma vizinhança aberta e limitada V_i de cada x_i tal que $f|_{V_i}$ é um difeomorfismo, $V_i \cap V_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e

$$f(V_i) = \{x : |x - p| < \rho\} = B \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \quad e \quad B = \text{bola}$$

Afirmção: $f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^k V_i$

De fato,

(\Leftarrow) Claramente $f^{-1}(B) \supset \bigcup_{i=1}^k V_i$

Já que

$$f\left(\bigcup_{i=1}^k V_i\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^k f(V_i) \subset B$$

E daí, aplicando f^{-1} , obtemos

$$\bigcup_{i=1}^k V_i \subset f^{-1}(B)$$

(\Rightarrow) Suponha que a inclusão no outro sentido não ocorra, ou seja, $\exists y \notin \bigcup_{i=1}^k V_i$ tal que $f(y) = z \in B$. Mas para cada $i = 1, 2, \dots, k$, existe um ponto $y_i \in V_i$ tal que $f(y_i) = z$ também.

Como $V_i \cap V_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então $y_i \neq y_j$ quando $i \neq j$.

Além disso, esses pontos y_i são todos diferentes de y . Logo, $f(x) = z$ tem $k + 1$ soluções distintas, o que implica numa contradição com a maximalidade de k .

$$\text{Portanto, } f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^k V_i$$

□

Nós podemos escolher agora $r' > 0$ tão grande que a bola de raio r' centrada na origem 0 , contenha $\bigcup_{i=1}^k V_i$ (relativamente compacto).

Para estes r' e ρ previamente escolhidos, nós temos que

$$|f(x) - p| \geq \rho > 0 \quad e \quad |x| \geq r' > 0 \quad (2.4)$$

Portanto, a função

$$g(x) = f(x + x_1) - p$$

satisfaz todas as hipóteses em (P_3) , com $r = r' + |x_1|$.

De fato,

$$g(x) \in B_\rho(0) \Leftrightarrow f(x + x_1) - p \in B_\rho(0)$$

$$\Rightarrow f(x + x_1) \in B_\rho(p)$$

$$\Rightarrow |x + x_1| \leq r'$$

$$\Rightarrow |x| \leq r' + |x_1|$$

$$\text{pois, } |x + x_1| \geq |x| - |x_1|.$$

Se existe x com $|f(x) - p| < \rho \Rightarrow f^{-1}(f(x)) \in UV_i \Rightarrow x \in UV_i$, o que é um absurdo, pois $UV_i \subset B_r(0)$ e daí $|x - 0| < r'$.

Já que

$$g(0) = f(x_1) - p = 0 \Rightarrow g(0) = 0$$

e

$$g'(x) = f'(x+x_1) \Rightarrow \begin{cases} \text{tr}Dg(x) = \text{tr}Df(x+x_1) < 0 \Rightarrow \text{tr}Dg(x) < 0 \\ e \\ \det Dg(x) = \det Df(x+x_1) > 0 \Rightarrow \det Dg(x) > 0 \end{cases}$$

E como observado antes que $(P_3) \Rightarrow (P_4) \Rightarrow (PF)$ para esta g , já que $g \in \mathcal{F}$.

Logo, a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável para o sistema $x' = g(x)$.

Consequentemente, este sistema não pode ter outros pontos de equilíbrio, ou seja, temos que $k = 1$, o que implica que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é globalmente 1-1.

Agora, basta tomarmos $p = 0$ e de (2.4), temos

$$|f(x)| \geq \rho > 0 \quad e \quad |x| \geq r' > 0$$

■

Capítulo 3

Condições Suficientes Adicionais

3.1 O Problema Fundamental

No capítulo anterior, vimos que sob condições adicionais, o Problema Fundamental tem resposta afirmativa em \mathcal{F} . Agora, neste capítulo, determinaremos quando para uma dada função satisfazendo (i), (ii), (iii), o Problema Fundamental é verdade para esta f .

Consideremos as seguintes condições:

$$(C_1) \int_0^\infty [\min_{|x|=r} |f(x)|] dr = \infty;$$

$$(C_2) f \text{ é globalmente 1-1};$$

$$(C_3) \exists \rho, r \text{ tal que}$$

$$|f(x)| \geq \rho > 0, \quad \text{para } |x| \geq r > 0;$$

(C₄) existe um inteiro positivo k , tal que para cada p em \mathbb{R}^2 , o número de soluções do sistema $f(x) = p$ é limitado por k ;

$$(C_5) \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \text{ e } \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \text{ não mudam de sinal};$$

$$(C_6) \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \text{ e } \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \text{ não mudam de sinal};$$

(C_7) existem alguns números reais p e q tal que $p(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}) + q(\frac{\partial f_2}{\partial x_1})$ e $p(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}) + q(\frac{\partial f_2}{\partial x_2})$ não mudam de sinal e uma delas não se anula;

(C_8) $\forall v \in \mathbb{R}^2, |v| = 1$ a solução do problema do valor inicial

$$x' = (Df(x))^{-1}v \quad (S_v)$$

$$x(0) = 0$$

está definido para todo $t \geq 0$.

Proposição 3.1.1 *Assuma que f satisfaça as propriedades (i), (ii), (iii), e a condição (C_1). Então, 0 é globalmente assintoticamente estável para $x' = f(x)$.*

Demonstração:

Pela observação feita após a prova de que (P_4) \Rightarrow (PF) (Capítulo 2), segue a proposição. ■

Proposição 3.1.2 *Se f satisfaz as hipóteses (i), (ii), (iii) e uma das seguintes condições (C_2) ou (C_3). Então, (C_1) ocorre e logo, 0 é globalmente assintoticamente estável para $x' = f(x)$.*

Demonstração:

Primeiramente, mostraremos que (C_2) \Rightarrow (C_3).

Como f é um difeomorfismo local, então existe V , vizinhança da origem, limitada, tal que $f(V)$ é vizinhança da origem e f é bijetora em V .

Tome $r_0 > 0$, $B_{r_0}(0) \supset V$ e $B_\rho(0) \subset f(V)$.

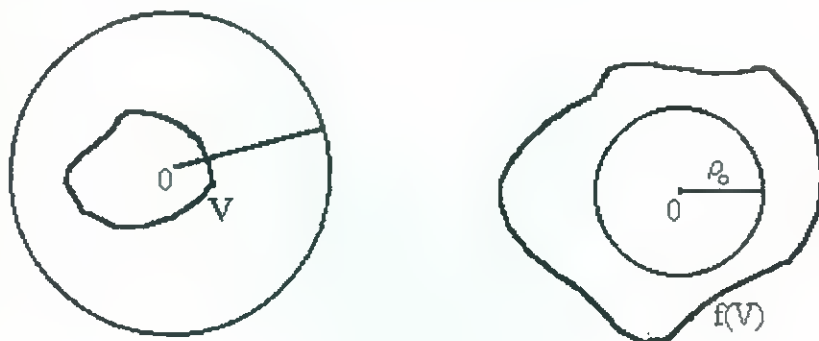


Figura 3.1

Daí, se $|x| = r > r_0$, $f(x) \notin f(V)$, pois f é 1-1 e portanto, $f(x) \notin B_\rho(0)$. Logo, $|f(x)| > \rho$ se $|x| = r > r_0$.

Agora, veremos que $(C_3) \Rightarrow (C_2)$. Seja

$$I = \int_0^{+\infty} [\min_{|x|=r} |f(x)|] dr.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &\geq \int_{r_0}^{+\infty} [\min_{|x|=r} |f(x)|] dr = \\ &= \int_{r_0}^{+\infty} \rho dr = \\ &= \rho \int_{r_0}^{+\infty} dr = \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Daí, pela Proposição anterior o resultado segue. ■

Existem várias condições que implicam que f é globalmente 1-1. Consideremos algumas delas no seguinte resultado.

Proposição 3.1.3 *Assuma que f satisfaz as hipóteses (i), (ii), (iii) e uma*

das condições (C_4) , (C_5) , (C_6) , (C_7) ou (C_8) . Então, f é globalmente 1-1.

Demonstração:

Suponhamos que f satisfaz (i), (ii), (iii) e (C_4) . Pela observação feita após o Teorema do Capítulo 2 e pela demonstração de $(P_2) \Rightarrow (P_3)$, o resultado segue. □

As demonstrações para (C_5) , (C_6) e (C_7) seguem do trabalho de [8]. Agora, detalharemos isto.

Vamos assumir que a condição (C_5) ocorre.

Como as entradas da matriz Jacobiana são contínuas, cada menor principal é sempre não-negativo ou sempre não-positivo. Nós podemos assumir que as entradas diagonais $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ são não-negativas.

De fato,

- (1) se $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \geq 0$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \leq 0$, tomemos $f^\# = (f_1^\#, f_2^\#) = (f_1, -f_2)$;
- (2) se $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \leq 0$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \geq 0$, tomemos $f^\# = (f_1^\#, f_2^\#) = (-f_1, f_2)$;
- (3) se $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \leq 0$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \leq 0$, tomemos $f^\# = (f_1^\#, f_2^\#) = (-f_1, -f_2)$.

Lembremos que

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Se o determinante da matriz Jacobiana é positivo, a matriz Jacobiana é uma P -matriz fraca e então, este é um caso especial do Teorema 1.5.11.

Agora, se o determinante da matriz Jacobiana é negativo, ou seja

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0$$

como $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \geq 0$, temos que $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0$, o que implica que $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0$ ou $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0$.

Vamos dividir em dois casos:

$$(1) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0$$

Neste caso, tomemos $\bar{f} = (g, f)$. Daí,

$$\begin{aligned} J\bar{f}(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \\ &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \\ &= -\det Jf > 0 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz Jacobiana de \bar{f} é uma P -matriz e daí pelo Teorema 1.5.6, \bar{f} é globalmente 1-1 e, portanto, f é globalmente 1-1.

$$(2) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0$$

Neste caso, tomemos $\bar{f} = (-g, -f)$. Daí,

$$\begin{aligned} J\bar{f}(x) &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \\ &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \\ &= -\det Jf > 0 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz Jacobiana de \bar{f} é uma P -matriz e daí pelo Teorema 1.5.6, \bar{f} é globalmente 1-1 e, portanto, f é globalmente 1-1.

□

Agora consideremos válida a condição (C_6) .

Basta tomarmos $\bar{f} = (-f_2, f_1)$ e daí a demonstração é análoga a anterior.

□

Vamos mostrar agora que caso (C_7) seja válida, então a conclusão da proposição se verifica.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $p\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + q\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)$ não de anula e que $p \neq 0$.

Também podemos assumir que $p\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + q\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) > 0$ (senão trocaríamos (p, q) por $(-p, -q)$).

Por outro lado, $p\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) + q\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)$ não troca de sinal. Suponhamos que $p\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) + q\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \geq 0$. Se $p\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + q\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) \leq 0$, basta tomar a aplicação

$$\bar{f}(x, y) = (pf_1 + qf_2, f_2)(x, -y)$$

Então, a aplicação f é 1-1 se, e somente se, $\bar{f} : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$ também o é.

Daí,

$$J\bar{f} = \begin{pmatrix} p\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + q\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & p\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + q\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det J\bar{f} &= \left(p\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + q\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \left(p\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + q\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \\ &= p\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + q\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - p\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - q\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \\ &= p\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) = \\ &= p \cdot \det Jf \end{aligned}$$

Portanto, o determinante da matriz Jacobiana de \bar{f} é igual ao determinante da matriz Jacobiana de f multiplicado por p .

Daí, nós finalmente podemos assumir que a aplicação original tem as seguintes propriedades: $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} > 0$ e $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \geq 0$ em Ω .

Agora, suponhamos que f não é globalmente 1-1, ou seja, que

$$f(a, b) = f(c, d) = (\alpha, \beta)$$

para dois pontos distintos $(a, b), (c, d) \in \Omega$.

Como $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} > 0$, claramente $b \neq d$. Podemos assumir $b < d$.

Escolha qualquer ponto y fixo, tal que $b \leq y \leq d$. Como $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \geq 0$ e $b \leq y$, então $\alpha = f_1(a, b) \leq f_1(a, y)$.

E similarmente, $\alpha = f_1(c, d) \geq f_1(c, y)$.

Pela continuidade de f_1 , $f_1(x, y) = \alpha$ para algum x entre a e c . Além disso, para um dado y este x é único, já que $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} > 0$.

Então, nós obtemos uma função implícita $x = \varphi(y)$ tal que $f_1(\varphi(y), y) = \alpha$ no intervalo fechado $[b, d]$. Neste caso, como $f(x, y)$ tem derivada contínua, φ é também continuamente diferenciável e a derivada é dada por

$$\varphi'(y) = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\varphi(y), y)}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\varphi(y), y)}$$

em $[b, d]$.

Seja,

$$g(y) = f_2(\varphi(y), y)$$

Então, g é continuamente diferenciável e $g' = \frac{|J|}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}$, calculado para $x = \varphi(y)$, onde $|J|$ denota o determinante da matriz Jacobiana. Como $|J| \neq 0$ e $|g|$ é contínua, então $g'(y)$ é sempre positiva ou sempre negativa, e daí $|g(y)|$ é estritamente monótona em $[b, d]$. Contradição!!! Pois, $g(b) = g(d) = \beta$, e, portanto, f é globalmente 1-1.

□

A condição (C_8) dá a função inversa de f

$$f^{-1}(y) = \varphi\left(|y|, \frac{y}{|y|}\right) \quad (3.1)$$

onde $\varphi(t, v)$ é solução de (S_v) tal que $\varphi(0, v) = 0$.

De fato, notemos que

$$\varphi\left(t, \frac{\lambda y}{|\lambda y|}\right) = \varphi\left(t, \frac{\lambda y}{\lambda |y|}\right) = \varphi\left(t, \frac{y}{|y|}\right), \quad \text{para } \lambda > 0,$$

ou seja, φ é homogênea de grau 0 em relação a segunda variável.

Portanto, basta mostrarmos que

$$D_y\left(\varphi\left(|y|, \frac{y}{|y|}\right)\right)(y) = |y|\varphi_t\left(|y|, \frac{y}{|y|}\right).$$

Vamos verificar:

$$\begin{aligned} D_y\left(\varphi\left(|y|, \frac{y}{|y|}\right)\right)(y) &= \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_{1t}\left(\frac{y_1}{|y|}\right) + \varphi_{1v_1}\left(\frac{y_1}{|y|}\right)y_1 + \varphi_{1v_2}\left(\frac{y_2}{|y|}\right)y_1 & \varphi_{1t}\left(\frac{y_2}{|y|}\right) + \varphi_{1v_1}\left(\frac{y_2}{|y|}\right)y_2 + \varphi_{1v_2}\left(\frac{y_2}{|y|}\right)y_2 \\ \varphi_{2t}\left(\frac{y_1}{|y|}\right) + \varphi_{2v_1}\left(\frac{y_1}{|y|}\right)y_1 + \varphi_{2v_2}\left(\frac{y_2}{|y|}\right)y_1 & \varphi_{2t}\left(\frac{y_2}{|y|}\right) + \varphi_{2v_1}\left(\frac{y_2}{|y|}\right)y_2 + \varphi_{2v_2}\left(\frac{y_2}{|y|}\right)y_2 \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_{1t}\left(\frac{y_1}{|y|}\right) & \varphi_{2t}\left(\frac{y_1}{|y|}\right) \\ \varphi_{1t}\left(\frac{y_2}{|y|}\right) & \varphi_{2t}\left(\frac{y_2}{|y|}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{1v_1}\frac{y_1^2}{|y|} + \varphi_{1v_2}\frac{y_2^2}{|y|} + \varphi_{1v_1}\frac{y_1y_2}{|y|} + \varphi_{1v_2}\frac{y_2^2}{|y|} \\ \varphi_{2v_1}\frac{y_1^2}{|y|} + \varphi_{2v_2}\frac{y_2^2}{|y|} + \varphi_{2v_1}\frac{y_1y_2}{|y|} + \varphi_{2v_2}\frac{y_2^2}{|y|} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_{1t}\left(\frac{y_1}{|y|}\right) & \varphi_{2t}\left(\frac{y_1}{|y|}\right) \\ \varphi_{1t}\left(\frac{y_2}{|y|}\right) & \varphi_{2t}\left(\frac{y_2}{|y|}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{1v_1}\frac{y_1^2}{|y|} - \varphi_{1v_2}\frac{y_2^2}{|y|} + \varphi_{1v_1}\frac{y_1y_2}{|y|} + \varphi_{1v_2}\frac{y_2^2}{|y|} \\ \varphi_{2v_1}\frac{y_1^2}{|y|} - \varphi_{2v_2}\frac{y_2^2}{|y|} + \varphi_{2v_1}\frac{y_1y_2}{|y|} + \varphi_{2v_2}\frac{y_2^2}{|y|} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_{1t}\left(\frac{y_1}{|y|}\right) & \varphi_{2t}\left(\frac{y_1}{|y|}\right) \\ \varphi_{1t}\left(\frac{y_2}{|y|}\right) & \varphi_{2t}\left(\frac{y_2}{|y|}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{1v_1}\frac{y_1^2}{|y|} + \varphi_{1v_1}\frac{y_1y_2}{|y|} \\ \varphi_{2v_1}\frac{y_1^2}{|y|} + \varphi_{2v_1}\frac{y_1y_2}{|y|} \end{pmatrix} = \\ &= |y|\varphi_t + \frac{y_1}{|y|} \begin{pmatrix} \varphi_{1v_1} \cdot y_1 + \varphi_{1v_1} \cdot y_2 \\ \varphi_{2v_1} \cdot y_1 + \varphi_{2v_1} \cdot y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pois,

$$\varphi_t\left[\left(\frac{y_1}{|y|}, \frac{y_2}{|y|}\right), (y_1, y_2)\right] = \varphi_t \frac{y_1^2 + y_2^2}{|y|} = \varphi_t \frac{|y|^2}{|y|} = |y|\varphi_t.$$

Mas, φ é homogênea de grau 0, como vimos, ou seja,

$$\varphi_{1v_1} \cdot y_1 + \varphi_{1v_1} \cdot y_2 = 0$$

e

$$\varphi_{2v_1} \cdot y_1 + \varphi_{2v_1} \cdot y_2 = 0$$

Portanto,

$$D_y \left(\varphi \left(|y|, \frac{y}{|y|} \right) \right) (y) = |y| \varphi_t \left(|y|, \frac{y}{|y|} \right)$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 3.1.4 *Se uma das seguintes condições valem, então o sistema (S_v) tem uma solução definida para todo $t \geq 0$.*

$$(C_9) \quad |(Df(x))^{-1}| \leq a|x| + b, \quad \text{para } a, b \in \mathbb{R}$$

$$(C_{10}) \quad \int_0^\infty \left[\inf_{|x|=r} \left[\inf_{|v|=1} |Df(x)v| \right] \right] dr = \infty.$$

Demonstração:

É claro que $(C_9) \Rightarrow (C_{10})$, porque

$$\begin{aligned} \inf_{|v|=1} |Df(x)v| &= |Df(x)| = \\ &= |((Df(x))^{-1})^{-1}| = \\ &= \left| \frac{1}{(Df(x))^{-1}} \right| = \\ &= \frac{1}{|(Df(x))^{-1}|} = \\ &= |(Df(x))^{-1}|^{-1} \geq \\ &\stackrel{(C_9)}{\geq} \frac{1}{a|x|+b} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\inf_{|x|=r} \left[\inf_{|v|=1} |Df(x)v| \right] \right] dr &\geq \int_0^\infty \left[\inf_{|x|=r} \left| \frac{1}{a|x|+b} \right| \right] dr = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{ar+b} dr = \infty \end{aligned}$$

Portanto, $(C_9) \Rightarrow (C_{10})$.

Pelo Teorema de Wintner, (C_{10}) implica que a solução de (S_v) está definida para todo $t \geq 0$. (ver Teorema 1.5.13).

O resultado da Proposição 3.1.4 também vale em \mathbb{R}^n , e (C_{10}) pode ser escrita na forma

$$\int_0^\infty \left[\inf_{|x|=r} \mu(x)^{\frac{1}{2}} \right] dr = \infty \quad (3.2)$$

onde $\mu(x)$ denota o menor autovalor de $(Df(x))(Df(x))^T$.

Corolário 3.1.5 Quando $n = 2$, a condição (C_{10}) pode ser escrita como

$$\int_0^\infty \inf_{|x|=r} \left\{ \frac{e(x) - [e^2(x) - 4(\det Df(x))^2]^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} dr = \infty,$$

onde $e(x) = |\nabla f_1(x)|^2 + |\nabla f_2(x)|^2$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} (Df(x))(Df(x))^T &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1, \nabla f_1 \rangle & \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle \\ \langle \nabla f_2, \nabla f_1 \rangle & \langle \nabla f_2, \nabla f_2 \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |\nabla f_1|^2 & \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle \\ \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle & |\nabla f_2|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vamos calcular agora os autovalores λ de $(Df(x))(Df(x))^T$:

$$\det \begin{pmatrix} |\nabla f_1|^2 - \lambda & \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle \\ \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle & |\nabla f_2|^2 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (|\nabla f_1|^2 - \lambda)(|\nabla f_2|^2 - \lambda) - \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle = \\
&= |\nabla f_1|^2 |\nabla f_2|^2 - \lambda |\nabla f_1|^2 - \lambda |\nabla f_2|^2 + \lambda^2 - \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle \\
&\quad \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle = \\
&= \lambda^2 - \lambda(|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2) - |\nabla f_1|^2 |\nabla f_2|^2 - \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle^2.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do 2º grau:

$$\Delta = (|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2)^2 - 4 \underbrace{|\nabla f_1|^2 \cdot |\nabla f_2|^2 \cdot \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle \cdot \langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle}_{\det(Df(x))(Df(x))^t = \det(Df(x))^2 = \det Df(x))^2}$$

$$\lambda = \frac{|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2 \pm \sqrt{|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2)^2 - 4(\det Df(x))^2}}{2}$$

Portanto, o menor autovalor é

$$\lambda = \frac{|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2 - \sqrt{|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2)^2 - 4(\det Df(x))^2}}{2}$$

Por (3.2), temos

$$\begin{aligned}
\infty &= \int_0^\infty \left[\inf_{|x|=r} \mu(x)^{\frac{1}{2}} \right] dr = \\
&= \int_0^\infty \inf_{|x|=r} \left\{ \frac{|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2 - \sqrt{|\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2)^2 - 4(\det Df(x))^2}}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} dr
\end{aligned}$$

Fazendo $e(x) = |\nabla f_1|^2 + |\nabla f_2|^2$, temos

$$\int_0^\infty \inf_{|x|=r} \left\{ \frac{e(x) - [e^2(x) - 4(\det Df(x))^2]^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} dr = \infty$$

■

Os resultados obtidos até agora, neste capítulo, podem ser sintetizados no seguinte teorema:

Teorema 3.1.6 *Assuma que f satisfaz as hipóteses (i), (ii), (iii) e uma das condições (C_1) a (C_{10}) ; então 0 é globalmente assintoticamente estável para $x' = f(x)$.*

3.2 Exemplo

Definição 3.2.1 Nós dizemos que a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função Khovansky plana, e escrevemos $f \in K_{m_1, m_2, n}$, se $f = (f_1, f_2)$ onde $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ são dois polinômios de graus m_1 e m_2 , $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $y_i = e^{\langle a_i, x \rangle}$ com $a_i \in \mathbb{R}^2$.

Note que quando $n = 0$, $K_{m_1, m_2, 0}$ é o conjunto das funções polinomiais no plano.

Teorema 3.2.2 Assuma que f é uma função Khovansky plana em $K_{m_1, m_2, n}$ satisfazendo (i), (ii) e (iii). Então, $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável para o sistema $x' = f(x)$.

Demonstração:

Por (iii), nós sabemos que todas as soluções do sistema $(f_1, f_2) = a$, para algum $a \in \mathbb{R}^2$ são não-degeneradas (pois, por (iii) $\det Df(x) \neq 0$, daí f é localmente inversível, então o sistema possui uma única solução).

Então, de [9] pelo Teorema 3, página 764 ou [13] pelo Teorema 2.1, página 90, nós obtemos que o número máximo de soluções deste sistema é finito e limitado por

$$K = m_1 m_2 (1 + m_1 + m_2)^n 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Pelo Teorema 3.1.6, 0 é globalmente assintoticamente estável. ■

Exemplo:

$$f(x) = (1 - e^x, 1 - e^y e^{-2x})$$

Pela definição temos:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 1 - e^{x_1} \\ f_2(x_1, x_2) = 1 - e^{x_2} e^{-2x_1} \end{cases}$$

Daí,

$$Df = \begin{pmatrix} -e^{x_1} & 0 \\ 0 & -e^{x_2} e^{-2x_1} \end{pmatrix}$$

Afirmção: f satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.2.

De fato,

$$(i) f(0) = (1 - e^0, 1 - e^0 e^0) = (1 - 1, 1 - 1) = 0$$

$$(ii) \operatorname{tr} Df = -e^{x_1} - e^{x_2} e^{-2x_1} = -(e^{x_1} + e^{x_2} e^{-2x_1}) < 0$$

$$(iii) \det Df = (-e^{x_1})(-e^{x_2} e^{-2x_1}) = e^{y-x} > 0$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] Coddington, Carl A., Levinson, Norman, Theory of Ordinary Differential Equations, Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited - (1972).
- [2] Fessler, Robert, A proof of the two-dimensional Markus-Yamabe stability conjecture and a generalization, *Ann. Polon. Math.* 62 (1995), no. 1, 45-74.
- [3] Fulton, William, Curvas Algebraicas, Barcelona: Reverte - (1971).
- [4] Gale, D. e Nikaidô, H. , The Jacobian Matrix and Global Univalence of Mappings, *Math. Ann.* (1965), 81-93.
- [5] Glutsyuk, A. A., The asymptotic stability oh the linearization of a vector field on the plane with a singular point implies global stability, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 29 (1995), no. 4, 17-30, 95; translation in *Funct. Anal. Appl.* 29 (1995), no. 4, 238-247 (1996).
- [6] Gutiérrez, Carlos, A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 12 (1995), no. 6, 627-671.
- [7] Hartman, Philip, Ordinary Differential Equations, J. Wiley, (1969).

- [8] Hirsch, Morris W. e Smale, Stephen, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press (1974).
- [9] Khovansky, On a Class of Systems of Trancendent Equations, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 4 (1980), 804-807.
- [10] Lima, Elon L., Curso de Análise - Vol. 2, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ - (1981).
- [11] Milnor, John W., Topology from the Differentiable Viewpoint, Charlottesville: The University Press of Virginia - (1978).
- [12] Olech, C., On the Global Stability Critea for Differential Systems, *Osaka J. Math.* 12 (1960), 389-400.
- [13] Risler, J. J., Complexité et Géométrie Réelle (d'après A. Khovansky), Exp. 637, pp. 89-100, *Astérisque, Sémin. Bourbaki*, 1984).
- [14] Sotomayor, Jorge, Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ - (1979).
- [15] Sotomayor, Jorge, Gasull, Armengol e Llibre, Jaume, Global Asymptotic Stability of Differential Equations in The Plane, *Journal of Differential Equations* (1991), 327-335.
- [16] Vainsencher, Israel, Introdução as Curvas Algébricas Planas, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ - (1979).

