



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fecho integral de módulos, multiplicidades e poliedros de Newton

Amanda Santos Araújo

São Carlos-SP
Agosto de 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fecho integral de módulos, multiplicidades e poliedros de Newton

Amanda Santos Araújo

Orientadora: Profa. Dra. Thaís Maria Dalbello

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Agosto de 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Amanda Santos Araújo, realizada em 03/08/2022.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Thais Maria Dalbello (UFSCar)

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira (UFPB)

Prof. Dr. Thiago Filipe da Silva (UFES)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

*Dedico este trabalho
aos meus pais e ao meu irmão,
que sempre me apoiaram.*

Agradecimentos

Agradeço imensamente a Deus, que com seu infinito amor, me deu forças para concluir essa etapa da minha vida. Tudo que sou e tudo que tenho, foi pela graça d'Ele.

Sou grata aos meus amados pais Alexson e Renilda e ao meu querido irmão Alexandre, que sempre acreditaram no meu potencial e me proporcionaram a tranquilidade e o conforto que tanto precisava para vencer esta etapa. Com certeza nada disso teria acontecido se eles não fossem tão atenciosos, jamais serei capaz de retribuir todo carinho, amor e incentivo que recebi de vocês.

À minha avó Maria Alves, que sempre demonstrou apoio e acompanhou a minha dedicação, sempre torcendo por mim. Agradeço também à minha cunhada Samila, pela amizade e apoio.

Ao tão querido Geovane, pela amizade incondicional e pelo carinho, apoio e incentivo demonstrado. Sou grata também ao Gabriel Monteiro, por todo apoio.

À minha orientadora Thaís pela atenção, disposição e valiosas contribuições dadas durante todo o processo.

Aos professores pela ajuda e pela paciência com a qual guiaram o meu aprendizado.

A Universidade Federal de São Carlos e ao seu corpo docente que demonstrou estar comprometido com a qualidade e excelência do ensino.

À Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o fecho integral de ideais, poliedros de Newton e ideais Newton não-degenerados. Além disso, apresentamos as generalizações desses conceitos para módulos e assim, estudamos a caracterização de submódulos Newton não-degenerados de \mathcal{O}_n^p . Para tal estudo, utilizamos a multiplicidade de Buchsbaum-Rim e as multiplicidades mistas de ideais. Estas multiplicidades, por sua vez, foram descritas no caso Newton não-degenerado por volumes de poliedros de Newton.

Palavras-chave: Submódulos Newton não-degenerado. Fecho integral. Poliedro de Newton. Multiplicidade de Buchsbaum-Rim.

Abstract

In this work, we study the integral closure of ideals, Newton polyhedra and Newton non-degenerate ideals. Moreover, we present generalizations of these concepts for modules then, we study the characterization of Newton non-degenerate submodules of \mathcal{O}_n^p . For this we use the Buchsbaum-Rim multiplicity and the mixed multiplicities of ideals. In the Newton non-degenerate case these multiplicities were described by volumes of Newton polyhedra.

Keywords: Newton non-degenerate submodules. Integral closure. Newton polyhedron. Buchsbaum-Rim multiplicity.

Sumário

Introdução	7
1 Preliminares	9
1.1 O anel dos germes de funções analíticas.	9
1.2 Módulos e módulos livres	10
1.3 Álgebra Tensorial e Simétrica de um módulo	14
2 Ideais Newton não-degenerados	17
2.1 Fecho integral de ideais	17
2.2 Poliedro de Newton	19
2.3 Ideais Newton não-degenerados	27
3 Módulos Newton não-degenerados	33
3.1 O fecho integral de módulos	33
3.2 Módulos Newton não-degenerados	40
4 Multiplicidades e submódulos Newton não-degenerados	51
4.1 Multiplicidade de Buchsbaum-Rim e multiplicidades mistas de ideais	51
4.2 Multiplicidade de Buchsbaum-Rim e submódulos Newton não-degenerados	57
5 Outras noções de não-degeneração	64
5.1 Filtração de Newton	64
5.2 Ideais e módulos não-degenerados	67
Referências Bibliográficas	72

Lista de Figuras

2.1	Poliedro de Newton de $P = \{(3, 0), (1, 1), (0, 4)\}$	20
2.2	Face de Γ_+	21
2.3	Poliedro de Newton de $g(x, y) = x^2y^3 + xy^3 + x^2y^2 + x^4y$	22
2.4	Poliedros $\Gamma_+(f) = \Gamma_+(g)$ e $\Gamma_+(h)$	23
2.5	Poliedro de Newton de $\langle x^8 + xy^5, y^8 + x^5y \rangle$	28
2.6	Poliedro de Newton de $I(f) = \langle x^3, y^2 \rangle$	29
3.1	Poliedro de Newton de $M_1 = \langle 4x^4 + xy, 4y^4 + xy \rangle$	47
3.2	Poliedro de Newton de $M_2 = \langle x^2, y^5 \rangle$	48
3.3	Poliedro de Newton de $\Gamma_+(M)$	48
3.4	Poliedros de Newton de $M_1 = \langle x^4 + xy, x^4, y^4 \rangle$ e $M_2 = \langle x^8 + y^8, x^2y^2, x^8 \rangle$	49
3.5	Poliedro de Newton de $\Gamma_+(M)$	49
4.1	Complementar dos Poliedros de Newton limitado e ilimitado, respectivamente.	58
5.1	Poliedros de Newton $\Gamma_+(M_1)$ e $\Gamma_+(M_2)$	68
5.2	Poliedro de Newton determinado por x^a, xy e y^a	69

Lista de Símbolos

\mathbb{N} : Conjunto dos números naturais;

\mathbb{Z} : Conjunto dos números inteiros;

\mathbb{C} : Corpo dos complexos;

\mathbb{R}_+ : Conjunto dos números reais não negativos;

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$: Anel de polinômios com coeficientes em \mathbb{K} ;

$\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$: Anel de séries de potências formais sobre o corpo \mathbb{K} ;

\mathcal{O}_n : Anel de germes de aplicações $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analíticas;

\mathcal{O}_n^p : \mathcal{O}_n -módulo livre de germes de funções $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ analíticas;

$e(M)$: Multiplicidade de Buchsbaum-Rim.

Introdução

O fecho integral de um ideal é um objeto algébrico que tem tido muitas aplicações em vários aspectos da Geometria Algébrica e da Álgebra Comutativa. Além disso, tem sido utilizado em problemas de Teoria de Singularidades, como por exemplo no estudo de Teissier [26] sobre a equisingularidade de famílias de germes de hipersuperfícies. Mais especificamente, Teissier caracterizou algebricamente a equisingularidade de famílias de hipersuperfícies complexas em termos do fecho integral de um ideal dependente da família de germes analíticos. Com isso, foi formulado uma caracterização completa do fecho integral de ideais .

Em Álgebra comutativa, o cálculo do fecho integral de um ideal é um problema desafiador. No entanto, existem alguns casos onde é possível calcular o fecho integral de forma simples. Por exemplo, quando I é um ideal gerado por monômios de $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ ou de \mathcal{O}_n , o fecho integral \bar{I} de I é gerado pelos monômios $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, cujos expoentes k pertencem ao poliedro de Newton de I . Esse resultado foi estendido por Saia [23], caracterizando a classe de ideais $I \subseteq \mathcal{O}_n$ com fecho integral monomial. Estes são chamados de ideais Newton não-degenerados.

A motivação para o resultado de Saia foi o resultado de Yoshinaga [29] sobre funções Newton não-degeneradas $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ no sentido de Kouchnirenko [17]. Dessa forma, o poliedro de Newton de um ideal $I \subseteq \mathcal{O}_n$ fornece informações úteis sobre \bar{I} e, em alguns casos, determina totalmente \bar{I} .

Em [22], Rees estendeu a noção de fecho integral aos módulos. Além disso, Buchsbaum e Rim generalizaram a multiplicidade de Samuel de um ideal $I \subseteq \mathcal{O}_n$ de co-comprimento finito para submódulos M de um módulo livre em [8]. Dessa maneira, a teoria resultante também tem sido aplicada à Teoria de Singularidades, como as notáveis contribuições de Gaffney [9, 10], para o estudo da equisingularidade de famílias de germes de interseção completa com singularidade isolada.

À vista disso, Bivià-Ausina [3] fez uma extensão dos trabalhos de Yoshinaga e Saia na caracterização de funções Newton não-degeneradas e ideais, respectivamente, para submódulos de \mathcal{O}_n^p .

O principal objetivo deste trabalho é estudar os resultados que compõem o artigo [3] de Bivià-Ausina mencionado acima. Neste trabalho o autor calcula o fecho integral e a multiplicidade de Buchsbaum-Rim de submódulos $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$, $p \geq 1$, *Newton não-degenerados*. Assim, o objetivo geral é caracterizar uma classe de submódulos $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ de modo que o fecho integral

\overline{M} de M e a multiplicidade de Buchsbaum-Rim $e(M)$ são facilmente computáveis, onde esses objetos algébricos serão expressos em termos de alguns poliedros de Newton relacionados a M . Frisamos que no artigo original, alguns detalhes das demonstrações são omitidos e aqui tomamos o cuidado de expandí-las.

O texto está organizado em cinco capítulos, que foram estruturados da seguinte forma.

O primeiro capítulo contém algumas noções preliminares que utilizamos ao longo do texto tais como o anel de germes de funções analíticas e algumas de suas características, módulos, álgebra Tensorial e Simétrica de um módulo, visando fornecer uma melhor compreensão dos próximos capítulos.

O segundo capítulo é dedicado a apresentação de alguns dos nossos objetos de estudo. Inicialmente, fazemos um estudo do fecho integral de ideais, e apresentamos alguns resultados importantes. Em seguida, definimos o conceito de Poliedro de Newton de um ideal e damos alguns exemplos. Assim, voltamos a nossa atenção a algumas definições e resultados sobre os ideais Newton não-degenerados. Vale destacar que este capítulo é uma motivação para a generalização desse conceito em relação aos módulos.

No terceiro capítulo, definimos o fecho integral de módulos e mostramos sua caracterização e assim, apresentamos a definição de módulos Newton não-degenerados. O objetivo principal deste capítulo é introduzir a classe de submódulos Newton não-degenerados de \mathcal{O}_n^p e sua caracterização, onde seu fecho integral é igual a uma soma direta de fechos integrais de ideais monomiais. Este resultado também pode ser aplicado para submódulos de \mathcal{A}_n^p , onde \mathcal{A}_n denota o anel de germes analíticos reais $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$.

No quarto capítulo, recordamos uma relação demonstrada em [16] entre as multiplicidades mistas de um conjunto de ideais $I_1, \dots, I_p \subseteq \mathcal{O}_n$ de comprimento finita e multiplicidade de Buchsbaum-Rim do submódulo $I_1 \oplus \dots \oplus I_p$ de \mathcal{O}_n^p . Abordamos de forma direta esta relação inspirada pelo trabalho de Verma [28]. Assim, a expressão resultante permite a caracterização os submódulos $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ cujo fecho integral é igual a uma soma direta de ideais. Além disso, abordamos uma descrição da multiplicidade de Buchsbaum-Rim de um submódulo Newton não-degenerado $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ em termos de covolumes mistos de poliedros de Newton. O resultado principal desse capítulo é a apresentação de um método eficaz para calcular o número $e(M)$, que denota a multiplicidade de Buchsbaum-Rim.

No quinto e último capítulo, comparamos a definição de um submódulo Newton não-degenerado com outras noções de não degeneração definidas para matrizes com entradas em \mathcal{O}_n^p .

Preliminares

Neste capítulo trataremos brevemente dos principais conceitos necessários para o bom desenvolvimento deste trabalho, tais como o anel dos germes de funções analíticas, álgebra Tensorial e Simétrica de um módulo. A discussão destas noções não será nosso foco principal, mas precisaremos tratá-las de forma rápida e objetiva. As principais referências para este capítulo são [11], [24], [18], [19] e [7].

1.1 O anel dos germes de funções analíticas.

Consideremos o conjunto das funções $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ analíticas em alguma vizinhança da origem de \mathbb{C} . Neste conjunto, definimos a relação de equivalência \sim da seguinte maneira:

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{existe uma vizinhança } U \text{ de } 0 \text{ tal que } f|_U = g|_U.$$

Definição 1.1. Chamamos de *germes de funções analíticas* as classes de equivalências de \sim e os denotamos por $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, f(0))$ ou simplesmente f . Assim, denotaremos \mathcal{O}_n como o conjunto de todos os germes de funções analíticas, isto é,

$$\mathcal{O}_n = \{f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, f(0)) : f \text{ é analítica numa vizinhança da origem de } \mathbb{C}\}.$$

Notemos que \mathcal{O}_n é um anel comutativo com respeito às operações induzidas da adição e multiplicação de funções. A unidade de \mathcal{O}_n é o germe da função constante 1.

Observemos que \mathcal{O}_n é um anel local, isto é, \mathcal{O}_n possui um único ideal maximal. De fato, consideremos o seguinte subconjunto de \mathcal{O}_n

$$\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\}.$$

Mostraremos que \mathcal{M}_n é um ideal de \mathcal{O}_n e é o conjunto dos elementos não-invertíveis de \mathcal{O}_n , pois isso garante que \mathcal{M}_n é o único ideal maximal. Primeiro, temos que $\mathcal{M}_n \neq \emptyset$, pois

$f \equiv 0 \in \mathcal{M}_n$. Sejam $f, g \in \mathcal{M}_n$ e $h \in \mathcal{O}_n$, temos

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 \text{ e } (hf)(0) = h(0)f(0) = h(0)0 = 0.$$

Logo, $f + g, hf \in \mathcal{M}_n$ e, portanto \mathcal{M}_n é um ideal. Agora, se $f \notin \mathcal{M}_n$ então $f(0) \neq 0$. Assim, existe uma vizinhança U de 0 em \mathbb{C}^n tal que $f(x) \neq 0, \forall x \in U$. Seja $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Segue que $g \in \mathcal{O}_n$ e $fg = 1$, ou seja, f é inversível. Dessa forma, concluímos que \mathcal{M}_n é o único ideal maximal de \mathcal{O}_n .

O próximo resultado mostra que $f \in \mathcal{O}_n$ pode ser representada por sua expansão da série de potência de centro em 0, ou seja, $f = \sum_k a_k x^k$, onde $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \in \mathbb{C}^n$.

Proposição 1.2. *O anel \mathcal{O}_n é isomorfo a $\mathbb{C}\{x\}$, onde $\mathbb{C}\{x\}$ é o anel de séries de potências formais convergentes em 0.*

Demonstração. Consideremos a aplicação $\varphi : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbb{C}\{x\}$ que associa um germe f a expansão em série de potência em 0 de um representante de f . Esta aplicação está bem definida, pois dois representantes do mesmo germe concordam em uma vizinhança aberta de 0. Assim, possuem a mesma expansão em série de potências em 0. Como uma série de potência $\sum_k a_k x^k$ convergente em um polidisco de centro 0 define uma função analítica, e assim, um germe de função analítica, temos que a aplicação φ é sobrejetora. Além disso, por conta deste fato, aplicação φ também é injetora. Podemos verificar facilmente que φ respeita as operações do anel, e portanto, φ é um isomorfismo. \square

Além disso, segue do Teorema da Base de Hilbert (ver [5, p.149]) que \mathcal{O}_n é um anel noetheriano, ou seja, todo ideal em \mathcal{O}_n é finitamente gerado.

Podemos também definir germes de aplicações. Consideremos o conjunto

$$\mathcal{O}_n^p = \{f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, f(0)); f \text{ germe de aplicação analítica numa vizinhança de } 0\}.$$

Notemos que cada representante f de um germe em \mathcal{O}_n^p é da forma $f = (f_1, \dots, f_p)$, onde $f_i \in \mathcal{O}_n$ para $i = 1, \dots, p$.

A seguir mostraremos que \mathcal{O}_n^p é um módulo livre sobre \mathcal{O}_n , mas primeiro definiremos os conceitos de módulo e módulo livre bem como importantes conceitos associados à módulos, como por exemplo a noção de comprimento.

1.2 Módulos e módulos livres

Para esta seção, utilizamos [12, 5].

Definição 1.3. Seja A um anel com unidade 1 e seja $(M, +)$ um grupo abeliano munido de uma “multiplicação escalar”

$$\begin{aligned} A \times M &\longrightarrow M \\ (a, m) &\longmapsto a \cdot m \end{aligned}$$

Chamamos M de A -módulo se, para todos $a, b \in A$ e $m, n \in M$, as propriedades a seguir são satisfeitas:

- (i) $1 \cdot m = m$
- (ii) $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$
- (iii) $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$
- (iv) $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$

Todo anel A é um A -módulo sobre si mesmo, em que a multiplicação escalar é dada pelo produto em A .

Exemplo 1.4. O anel dos germes de funções analíticas \mathcal{O}_n é um \mathcal{O}_n -módulo.

Definição 1.5. Um *submódulo* $N \subset M$ de um A -módulo M é um subconjunto que é fechado por combinações A -lineares, isto é:

$$\begin{cases} \forall x, y \in N \\ \forall a, b \in A \end{cases} \implies ax + by \in N$$

de modo que N também é um A -módulo, com soma e multiplicação escalar dadas pela restrição das operações em M .

Um A -submódulo de A é o mesmo que um ideal $I \subseteq A$. Em particular, o ideal nulo é um A -módulo, e o chamamos módulo trivial.

Se N e P são dois submódulos de um A -módulo M e $I \subseteq A$ é um ideal, podemos construir os seguintes submódulos de M :

- (i) a soma de N e P ,

$$N + P = \{n + p \in M \mid n \in N, p \in P\},$$

que é o “menor” submódulo de M que contém N e P ;

- (ii) a interseção $N \cap P$,

$$N \cap P = \{m \in M \mid m \in N \text{ e } m \in P\};$$

(iii) o produto com um ideal I :

$$IM = \{a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r \in M \mid r \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_r \in I, m_1, \dots, m_r \in M\}$$

que é o submódulo das combinações A -lineares de elementos de M com coeficientes em I .

Podemos também construir novos A -módulos a partir de uma família de A -módulos $\{M_j\}_{j \in J}$. A seguir apresentamos dois casos importantes:

- O produto direto $\prod_{j \in J} M_j$ que, como conjunto, é igual ao produto cartesiano dos M_j , sendo a soma e a produto por escalares realizada componente a componente.
- a soma direta $\bigoplus_{j \in J} M_j$ que é o submódulo do produto direto cujos elementos são as tuplas $(m_j)_{j \in J}$ “quase nulas”, isto é, com $m_j \neq 0$ apenas para um número finito de índices j .

Em particular, se o conjunto de índices J é finito, então $\prod_{j \in J} M_j = \bigoplus_{j \in J} M_j$.

Exemplo 1.6. Mostraremos que \mathcal{O}_n^p é um \mathcal{O}_n -módulo. De fato, como cada representante f de um germe em \mathcal{O}_n^p é da forma $f = (f_1, \dots, f_p)$, onde $f_i \in \mathcal{O}_n$ para $i = 1, \dots, p$, temos que o germe f pertence a

$$\underbrace{\mathcal{O}_n \times \cdots \times \mathcal{O}_n}_{p \text{ vezes}}.$$

Ou seja,

$$\mathcal{O}_n^p \subset \underbrace{\mathcal{O}_n \times \cdots \times \mathcal{O}_n}_{p \text{ vezes}}.$$

Agora, considere f_1, \dots, f_p funções analíticas nas vizinhanças U_1, \dots, U_p de $0 \in \mathbb{C}^n$, respectivamente. Temos que $f : \bigcap_{i=1}^p U_i \rightarrow \mathbb{C}^p$ definida por $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ é analítica na vizinhança $U = \bigcap_{i=1}^p U_i$ de $0 \in \mathbb{C}^n$. Logo, o germe de (f_1, \dots, f_p) é o germe de $f \in \mathcal{O}_n^p$ e, portanto, $\mathcal{O}_n \times \cdots \times \mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}_n^p$. Concluimos assim que $\mathcal{O}_n^p = \mathcal{O}_n \times \cdots \times \mathcal{O}_n$. Portanto, \mathcal{O}_n^p é um \mathcal{O}_n -módulo.

Definição 1.7. Um *morfismo* de A -módulos $\psi : M \rightarrow N$ é uma “transformação A -linear” entre M e N : para todo $a_1, a_2 \in A$ e $m_1, m_2 \in M$,

$$\psi(a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2) = a_1 \cdot \psi(m_1) + a_2 \cdot \psi(m_2)$$

Vários resultados sobre anéis e ideais podem ser facilmente generalizados para módulos; por exemplo, um morfismo de A -módulos $\psi : M \rightarrow N$ é injetor se, e somente se, o núcleo de ψ que por definição é o conjunto $\psi^{-1}(0)$ é trivial. Se N é um A -submódulo de M , podemos definir o A -módulo quociente M/N de maneira completamente análoga ao anel quociente, como o conjunto das classes de equivalência módulo N . O teorema do isomorfismo e o teorema de correspondência valem também no contexto de módulos.

Definição 1.8. Dizemos que um A -módulo M é *finitamente gerado* se existe um número finito de elementos m_1, m_2, \dots, m_r de M tais que:

$$M = Am_1 + Am_2 + \dots + Am_r$$

onde $r \in \mathbb{N}$ e $Am_i = \{am_i \mid a \in A\}$, para $i = 1, \dots, r$.

Chamaremos $\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ de conjunto de geradores do módulo M . Se o conjunto de geradores tem um único elemento, o módulo M é dito *cíclico*, isto é, se $M = Am$ para algum $m \in M$.

Exemplo 1.9. Seja A um anel com unidade 1, então A^n é um A -módulo. Notemos que todo elemento $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ pode ser escrito como combinação A -linear dos elementos $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. De fato,

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n) &= (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n) \\ &= (a_1 1, 0, \dots, 0) + (0, a_2 1, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n 1) \\ &= a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Neste caso, A^n é um A -módulo finitamente gerado por $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Definição 1.10. Sejam A um anel, M um A -módulo. Dizemos que os elementos $\{m_1, \dots, m_r\}$ de M são *A -linearmente independentes* se satisfazem a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^r a_i m_i = 0 \Rightarrow a_i = 0, i = 1, \dots, r.$$

onde $a_i \in A$.

Definição 1.11. Seja M um A -módulo. Um conjunto S é uma *base* se é um conjunto gerador de M cujos elementos são linearmente independentes. Equivalentemente, se todo elemento de M pode ser escrito unicamente como uma combinação linear finita de elementos de S com coeficientes em A .

Dizemos que um A -módulo é um *A -módulo livre* se admite uma base.

Exemplo 1.12. Vejamos que $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ é uma base de A -módulo A^n . De fato,

$$\begin{aligned} a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_i e_i &= (0, 0, \dots, 0) \\ a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n(0, 0, \dots, 1) &= (0, 0, \dots, 0) \\ (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n) &= (0, 0, \dots, 0) \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) &= (0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{i=1}^n a_i e_i = (0, 0, \dots, 0) \Rightarrow a_i = 0, i = 1, \dots, n$.

Proposição 1.13. *Seja $A \neq 0$ um anel e seja M um A -módulo livre. Então, quaisquer duas bases de M possuem a mesma cardinalidade (chamada de posto de M).*

Exemplo 1.14. O \mathcal{O}_n -módulo \mathcal{O}_n^p é um módulo livre de posto p .

A seguir apresentaremos a noção de comprimento de um módulo que é uma extensão da noção de dimensão de espaços vetoriais. Começaremos com algumas definições.

Definição 1.15. Seja A um anel e seja M um A -módulo.

1. M é dito *simples* ou *irredutível* se $M \neq 0$ e seus únicos submódulos são 0 e M .
2. uma *série de composição* de M de tamanho n é uma sequência de submódulos

$$M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq M_{n-2} \supsetneq \cdots \supsetneq M_1 \supsetneq M_0 = 0$$

tais que os quocientes consecutivos M_{i+1}/M_i são todos simples, isto é, não é possível acrescentar outro submódulo entre M_i e M_{i+1} .

3. o *comprimento* de M sobre A , denotado por $l_A(M)$, é o máximo entre todos os tamanhos das séries de composição de M ou ∞ se M não admite série de composição.

Exemplo 1.16. Seja \mathbb{K} um corpo. Um \mathbb{K} -espaço vetorial é irredutível se, e somente se, tem dimensão 1. Assim, uma série de composição para um espaço vetorial V é uma sequência de subespaços vetoriais

$$V = V_n \supsetneq V_{n-1} \supsetneq V_{n-2} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0 = 0$$

onde $\dim_{\mathbb{K}} V_i = i$. Assim, $l_{\mathbb{K}}(V) = n = \dim_{\mathbb{K}} V$.

Proposição 1.17. *Se M admite um submódulo de comprimento finito N tal que o módulo quociente M/N também é de comprimento finito, então M é de comprimento finito e temos*

$$l(M) = l(N) + l(M/N).$$

1.3 Álgebra Tensorial e Simétrica de um módulo

Iniciaremos esta seção relembrando a definição de anéis e módulos graduados.

Definição 1.18. Um *anel graduado* A é um anel com uma decomposição em soma direta de subgrupos aditivos de A , isto é, $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ satisfazendo $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$. Da mesma forma, um A -módulo graduado M é um A -módulo com uma decomposição de soma direta $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ satisfazendo $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$, onde M_i são submódulos de M .

Denominamos A_n como componente homogênea de grau n . Se A é um anel graduado, um elemento $a \in A$ é homogêneo se $a \in A_n$, para algum n e neste caso, n é chamado de grau de a . Da mesma forma, cada A -módulo M_i é denominado a i -ésima componente homogênea (ou graduada) de M , e um elemento x pertencente a M_n é chamado homogêneo de grau n .

Se $1 \in A_0$, então A_0 é subanel de A e cada A_n é um A_0 -módulo. Em particular, se A_0 é um corpo, cada A_n é um A_0 - espaço vetorial.

Analogamente, introduzimos a noção de *multigradação* em A , onde $A = \bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{n_i \in \mathbb{N}} A_{(n_1, \dots, n_m)}$. Denominamos $A_{(n_1, \dots, n_m)}$ sua componente homogênea de multigrado (n_1, \dots, n_m) .

Exemplo 1.19. Sejam \mathbb{K} um corpo e $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios sobre \mathbb{K} . Temos que $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ admite uma graduação

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_d,$$

onde o $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_d$ é o k -espaço vetorial de dimensão $\binom{n+d-1}{d}$ gerado pelos monômios $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$ de grau $d = e_1 + \cdots + e_n$, ou seja, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_d$ é o conjunto de todos os polinômios homogêneos de grau d . Portanto, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um anel graduado.

Definição 1.20. Seja A um anel graduado. Chamamos A de anel graduado *standard* se A é gerado por elementos de grau 1 com coeficientes em A_0 .

Observemos que $0 \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois A_n é subgrupo aditivo de A . Assim, 0 tem todos os graus.

Se $a \in A$ se escreve de modo único como $a = a_0 + \cdots + a_d$, onde $a_i \in A_i$ e $a_d \neq 0$, chamamos d de grau total de a .

Exemplo 1.21. Seja A um anel graduado. Então, o anel $A[x_1, \dots, x_n]$ pode ser tomado com a graduação standard.

Definição 1.22. Dizemos que um ideal I de A é *homogêneo* ou *graduado* se é gerado por elementos homogêneos. É fácil mostrar que $I \subseteq A$ é homogêneo se, e somente se, $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n$, onde $I_n = I \cap A_n$.

Observemos que se I é um ideal graduado, então $A/I \approx \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n/I_n$ é um anel graduado. Além disso, se $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é noetheriano e $I \subseteq A$ é ideal homogêneo, então $I = (a_1, \dots, a_m)$, com $a_i \in A_{d_i}$, $i = 1, \dots, m$. Usando os conceitos de anéis e módulos graduados podemos definir o conceito de álgebra tensorial da seguinte maneira:

Definição 1.23. Chamamos de *álgebra tensorial* o A -módulo M definido por

$$T_A(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n$$

onde $T^n = \underbrace{M \otimes M \otimes \cdots \otimes M}_n$.

Por convenção, $T^0 = A$ e $T^1 = M$. Para quaisquer $x \in T^n$ e $y \in T^m$, temos que $x \otimes y \in T^{n+m}$. Com isso, $T_A(M)$ é um anel \mathbb{N} -graduado que pode não ser comutativo.

Definição 1.24. Sejam um anel A , M um A -módulo e

$$\mathcal{I} = (x \otimes y - y \otimes x | x, y \in M) \subset T_A(M)$$

que é um ideal bilateral. Definimos a *Álgebra Simétrica* de M como o anel quociente

$$Sym_A(M) = T_A(M) / \mathcal{I}.$$

Esse anel é o maior quociente comutativo de $T_A(M)$ e possui elemento 1. Como \mathcal{I} é um ideal homogêneo, $Sym_A(M)$ é um anel \mathbb{N} -graduado, com graduação

$$Sym_n(M) = \frac{T^n(M)}{I \cap T^n(M)}, \text{ e } Sym_0 = A.$$

Se A_0 é um corpo, o A_0 -espaço vetorial $Sym_n(M)$ é denominado a n -ésima potência simétrica de M .

Dado um anel A e um A -módulo M , a álgebra $Sym_A(M)$ em conjunto com um homomorfismo $\pi : M \rightarrow Sym_A(M)$ de A -módulos satisfazem a seguinte propriedade universal: para uma A -álgebra B e qualquer homomorfismo $\varphi : M \rightarrow B$ de A -módulos existe um único homomorfismo $\phi : Sym_A(M) \rightarrow B$ de A -álgebras, tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow \pi & \searrow \phi & \\ Sym_A(M) & & \end{array}$$

Além disso, se existem uma A -álgebra C e $\lambda : M \rightarrow C$ um homomorfismo de A -módulos satisfazendo a propriedade universal da álgebra simétrica, então existe um único isomorfismo $\Phi : Sym_A(M) \rightarrow C$ tal que $\Phi(\pi(m)) = \lambda(m)$, para todo $m \in M$.

Proposição 1.25. Se M é um A -módulo livre de posto finito e igual a n , então a álgebra simétrica de M é isomorfo ao anel de polinômios $A[X_1, \dots, X_n]$.

Demonstração. Seja $\{m_1, \dots, m_n\}$ uma base de M e considere o homomorfismo $\pi : M \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]$ definido por $m_i \mapsto X_i$. Considere uma A -álgebra B e $\varphi : M \rightarrow B$, um homomorfismo de A -módulos. Defina

$$\begin{array}{ccc} \phi : A[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & B \\ f(X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & f(\varphi(m_1), \dots, \varphi(m_n)) \end{array}$$

Notemos que ϕ é um homomorfismo de A -álgebras. Dessa forma, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow \pi & \searrow \phi & \\ A[X_1, \dots, X_n] & & \end{array}$$

Pela propriedade universal da álgebra simétrica, temos que $Sym_A(M) = A[X_1, \dots, X_n]$. \square

Ideais Newton não-degenerados

2.1 Fecho integral de ideais

Seja A um anel comutativo com unidade e $I \subset A$ ideal de A . Dizemos que $h \in A$ é *integral sobre I* , se satisfizer uma relação de dependência integral da forma

$$h^k + a_1 h^{k-1} + \cdots + a_k = 0, \text{ com } a_i \in I^i.$$

Definição 2.1. O *fecho integral* de I , denotado por \bar{I} , é o conjunto de todos os elementos de A que são integrais sobre I . Se $I = \bar{I}$, dizemos que I é *integralmente fechado*.

Notemos que se $J \subseteq I$, então $J^i \subset I^i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, logo $\bar{J} \subseteq \bar{I}$.

Seja $A[T]$ o anel de polinômios a uma variável T com coeficientes em A . Denotamos por $\mathcal{P}(I)$ o subanel $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n T^n$ de $A[T]$. A proposição abaixo relaciona a noção de dependência inteira sobre um ideal com a noção de dependência inteira sobre um anel.

Proposição 2.2. *Sejam $h \in A$ e I um ideal de A . Então, $h \in \bar{I}$ se, e somente se, hT é integral sobre o anel $\mathcal{P}(I)$ no sentido usual.*

Demonstração. Se $h \in \bar{I}$, temos que

$$h^k + a_1 h^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

onde $a_i \in I^i$. Então, $(hT)^k + a_1 T(hT)^{k-1} + \cdots + a_k T^k = 0$. Ou seja, é uma relação de dependência inteira de hT sobre $\mathcal{P}(I)$.

Por outro lado, suponhamos que hT é integral sobre $\mathcal{P}(I)$. Assim, temos uma relação de dependência

$$(hT)^k + b_1 (hT)^{k-1} + \cdots + b_k T^k = 0, \tag{2.1}$$

onde $b_i \in \mathcal{P}(I)$. Observemos que

$$b_i = b_{i0} + b_{i1}T + \cdots + b_{in_i}T^{n_i} \quad (2.2)$$

com $b_{ij} \in I^j$. Assim, substituindo (2.2) em (2.1) e agrupando os termos segundo as potências de T , obtemos que o coeficiente de T^j é igual a zero, para $j \in \{1, \dots, k\}$. Nesse caso, temos que o coeficiente de T^k é igual a zero. Ou seja,

$$h^k + b_{11}h^{k-1} + b_{22}h^{k-2} + \cdots + b_{kk} = 0.$$

Portanto, h é integral sobre I . □

Proposição 2.3. *O fecho integral de $\mathcal{P}(I) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n T^n$ de $A[T]$ é $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \overline{I^n} T^n$.*

Demonstração. O fecho integral de $\mathcal{P}(I)$ em $A[T]$ é um subanel graduado $\overline{\mathcal{P}(I)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} J_n T^n$ de $A[T]$ (ver [6, p.321]). Então, é suficiente mostrar que $J_n = \overline{I^n}$.

Seja $h \in J_n$, então hT^n é integral sobre $\mathcal{P}(I)$. Pela Proposição 2.3, segue que $h \in \overline{I^n}$. Logo, $J_n \subset \overline{I^n}$.

Reciprocamente, se $h \in \overline{I^n}$, então $h^k + b_1 h^{k-1} + \cdots + b_k = 0$, com $b_s \in I^{ns}$. Daí,

$$(hT^n)^k + b_1 T^n (hT^n)^{k-1} + \cdots + b_k T^{nk} = 0 \text{ com } b_s T^{ns} \in I^{ns} T^{ns}.$$

Assim, $hT^n \in \overline{\mathcal{P}(I)}$. Como hT^n é homogêneo de grau n em $\mathcal{P}(I)$, $h \in J_n$. Logo, $\overline{I^n} \subset J_n$ e portanto, $\overline{\mathcal{P}(I)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \overline{I^n} T^n$. □

Corolário 2.4. *Seja I um ideal de A , temos:*

(i) \overline{I} é um ideal de A .

(ii) $(\overline{I})^n \subset \overline{I^n}$.

(iii) $\overline{\overline{I}} = \overline{I}$.

Demonstração. (i) Se $a \in A$ e $h \in \overline{I}$, existe uma relação de dependência inteira de h sobre I , dizemos

$$h^k + a_1 h^{k-1} + \cdots + a_k = 0,$$

onde $a_i \in I^i$.

Assim,

$$(ah)^k + a_1 a (ah)^{k-1} + \cdots + a_k a^k = a^k (h^k + a_1 h^{k-1} + \cdots + a_k) = a^k 0 = 0,$$

Como I^i é um ideal de A , segue que $a^k a_i \in I^i$ e, portanto $ah \in \overline{I}$.

Sejam $g, h \in \bar{I}$. Como $\overline{\mathcal{P}(\bar{I})}$ é um subanel de $A[T]$, temos que $(g + h)T = gT + hT \in \overline{\mathcal{P}(\bar{I})}$. Logo, usando a Proposição 2.2, $g + h \in \bar{I}$. Portanto, \bar{I} é um ideal.

(ii) Se $h \in (\bar{I})^n$, podemos escrever $h = \sum_{i=1}^r h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_n}$ com $h_{i_j} \in \bar{I}$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Logo,

$$h_{i_j} T \in \overline{\mathcal{P}(\bar{I})} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{I}^n T^n.$$

Como $h_{i_j} T$ é um elemento homogêneo de grau 1 de $\mathcal{P}(I)$, então $h_{i_j} T \in \bar{I}T$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Assim,

$$h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_n} T^n = h_{i_1} T \cdots h_{i_n} T \in \bar{I}T \cdots \bar{I}T \subset \bar{I}^n T^n.$$

Logo, $h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_n} \in \bar{I}^n$, pois $h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_n} T^n$ é um elemento homogêneo. Segue que $h \in \bar{I}^n$, pois o item (i) garante que \bar{I}^n é um ideal de A . Portanto, $(\bar{I})^n \subset \bar{I}^n$.

(iii) Seja $h \in \bar{I}$, então $hT \in \overline{\mathcal{P}(\bar{I})}$. Notemos que

$$\mathcal{P}(\bar{I}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (\bar{I})^n T^n \subset \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{I}^n T^n = \overline{\mathcal{P}(\bar{I})}.$$

A inclusão é válida, pois $(\bar{I})^n \subset \bar{I}^n$.

Daí, temos que $\overline{\mathcal{P}(\bar{I})} \subset \overline{\overline{\mathcal{P}(\bar{I})}} = \overline{\mathcal{P}(\bar{I})}$. Logo, $hT \in \overline{\mathcal{P}(\bar{I})}$ e, conseqüentemente, $h \in \bar{I}$. Concluimos que $\bar{I} \subset \overline{\bar{I}}$. A inclusão $\bar{I} \subset \overline{\bar{I}}$ é trivial. Portanto, temos que $\bar{I} = \overline{\bar{I}}$. \square

Em [26] as seguintes equivalências são provadas.

Proposição 2.5. *Suponhamos que I seja um ideal em \mathcal{O}_n . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $h \in \bar{I}$.
2. (Condição de crescimento) Para cada escolha de geradores (g_i) de I existe uma vizinhança U de 0 e uma constante $C > 0$ tal que $\|h(z)\| \leq C \sup_i \|g_i(z)\|$ para todo $z \in U$.
3. (Critério Valuativo) Para cada $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, $h \circ \varphi \in \mathcal{O}_1 \varphi^*(I)$.
4. Existe um módulo fiel L finito tal que $h \cdot I \subset I \cdot L$, onde um módulo é fiel quando seu aniquilador é o ideal nulo.

2.2 Poliedro de Newton

Um dos principais objetivos deste trabalho é apresentar condições sob as quais podemos descrever \bar{I} . O conceito essencial que utilizaremos para este fim é o *poliedro de Newton*, que definiremos a seguir.

Definição 2.6. Seja P um subconjunto de \mathbb{Z}_+^n . Definimos o *poliedro de Newton de P* como sendo o fecho convexo em \mathbb{R}_+^n do conjunto

$$\bigcup_{v \in \mathbb{R}_+^n} \{k + v : k \in P\}.$$

Em outras palavras, o poliedro de Newton de P é o menor conjunto convexo que contém $\bigcup_{v \in \mathbb{R}_+^n} \{k + v : k \in P\}$. Denotamos o poliedro de Newton de P por $\Gamma_+(P)$, ou simplesmente, Γ_+ .

Exemplo 2.7. Considere $P = \{(3, 0), (1, 1), (0, 4)\} \subset \mathbb{Z}_+^2$. O poliedro de Newton $\Gamma_+(P)$ é a parte ilimitada em \mathbb{R}_+^2 , a partir dos segmentos de reta que ligam $(0, 4)$ a $(1, 1)$ e $(1, 1)$ a $(3, 0)$, como mostra a Figura 2.1.

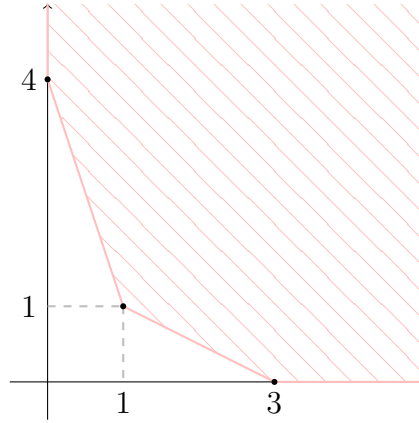


Figura 2.1: Poliedro de Newton de $P = \{(3, 0), (1, 1), (0, 4)\}$.

Sejam $\Gamma_+^1, \dots, \Gamma_+^p \subseteq \mathbb{R}_+^n$ poliedros de Newton, definimos a *soma de Minkowski* de $\Gamma_+^1, \dots, \Gamma_+^p$ como

$$\Gamma_+^1 + \dots + \Gamma_+^p = \{k_1 + \dots + k_p : k_i \in \Gamma_+^i, i = 1, \dots, p\}.$$

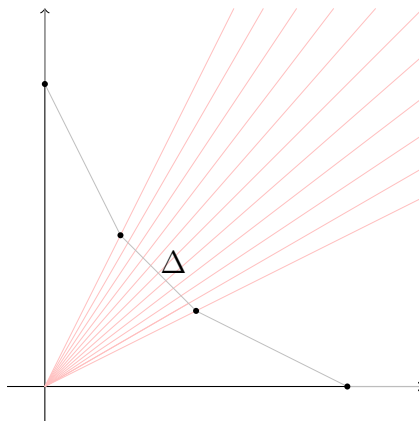
Se Γ_+ é um poliedro de Newton e $r > 0$, definimos $r\Gamma_+ = \{rk : k \in \Gamma_+\}$. Notemos que $r\Gamma_+$ é igual à soma de Minkowski $\Gamma_+ + \dots + \Gamma_+$, onde Γ_+ é repetido r vezes.

Definição 2.8. Sejam $\Gamma_+ \subseteq \mathbb{R}_+^n$ um poliedro de Newton e $v \in \mathbb{R}_+^n$. Definimos

$$l(v, \Gamma_+) = \min\{\langle k, v \rangle : k \in \Gamma_+\} \text{ e } \Delta(v, \Gamma_+) = \{k \in \Gamma_+ : \langle k, v \rangle = l(v, \Gamma_+)\}.$$

Um subconjunto $\Delta \subseteq \Gamma_+$ é chamado de *face* de Γ_+ quando existe algum $v \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $\Delta = \Delta(v, \Gamma_+)$. Denotamos por Γ a união das faces compactas de Γ_+ .

Se Δ é uma face compacta de Γ_+ , denotamos por $C(\Delta)$ o cone sobre Δ , ou seja, o fecho da união de todos os semi-raios que emanam da origem em \mathbb{R}^n e passam por um ponto de Δ .

Figura 2.2: Face de Γ_+

Lema 2.9. *Seja $\Gamma_+ \subseteq \mathbb{R}_+^n$ um poliedro de Newton. Então*

$$\Gamma_+ = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \langle x, v \rangle \geq l(v, \Gamma_+), \text{ para todo } v \in \mathbb{R}_+^n\}$$

Demonstração. Se $x \in \Gamma_+$, então $\langle x, v \rangle \geq l(v, \Gamma_+)$, para todo $v \in \mathbb{R}_+^n$, logo,

$$x \in \{x \in \mathbb{R}_+^n : \langle x, v \rangle \geq l(v, \Gamma_+), \text{ para todo } v \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

Por outro lado, se $x \in \{x \in \mathbb{R}_+^n : \langle x, v \rangle \geq l(v, \Gamma_+), \text{ para todo } v \in \mathbb{R}_+^n\}$ temos que $\langle x, v \rangle \geq l(v, \Gamma_+)$, para todo $v \in \mathbb{R}_+^n$. Como $l(v, \Gamma_+) = \min\{\langle k, v \rangle : k \in \Gamma_+\}$, existe $y \in \Gamma_+$ tal que $l(v, \Gamma_+) = \langle y, v \rangle$. Daí, $\langle x, v \rangle \geq \langle y, v \rangle$ ou equivalentemente

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n &\geq y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \\ (x_1 - y_1) v_1 + \cdots + (x_n - y_n) v_n &\geq 0 \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$. Como $v_i, y_i \in \mathbb{R}_+^n$, temos que $x_i - y_i \geq 0$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Ou seja, $x_i \geq y_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Isso garante que $x \in \Gamma_+$, pois $y \in \Gamma_+$.

Portanto, $\Gamma_+ = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \langle x, v \rangle \geq l(v, \Gamma_+), \text{ para todo } v \in \mathbb{R}_+^n\}$. \square

Agora, considerando o anel de germes de funções analíticas \mathcal{O}_n , definiremos o poliedro de Newton de $g \in \mathcal{O}_n$.

Definição 2.10. Sejam $g \in \mathcal{O}_n$ e $g = \sum_k a_k x^k$ a expansão de Taylor de g . O *suporte* de g é definido por $\text{supp}(g) = \{k \in \mathbb{Z}_+^n : a_k \neq 0\}$. Definimos o *poliedro de Newton* de g por $\Gamma_+(\text{supp}(g))$ e o denotamos por $\Gamma_+(g)$. Logo, $\Gamma_+(g)$ é o fecho convexo do conjunto $\{k + v : k \in \text{supp}(g), v \in \mathbb{R}_+^n\}$.

Exemplo 2.11. Seja $g \in \mathcal{O}_2$ definida por $g(x, y) = x^2 y^3 + x y^3 + x^2 y^2 + x^4 y$, temos que

$$\text{supp}(g) = \{(2, 3), (1, 3), (2, 2), (4, 1)\}$$

O poliedro de Newton de g é a parte ilimitada do \mathbb{R}_+^2 a partir dos segmentos de reta que ligam os pontos $(3, 1)$ a $(2, 2)$ e $(2, 2)$ a $(4, 1)$, como mostra a Figura 2.3.

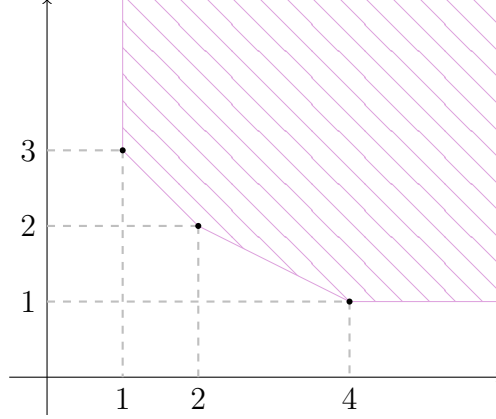


Figura 2.3: Poliedro de Newton de $g(x, y) = x^2y^3 + xy^3 + x^2y^2 + x^4y$.

Se $v \in \mathbb{R}_+^n$, também definimos $l(v, g) = l(v, \Gamma_+(g))$ e $\Delta(v, g) = \Delta(v, \Gamma_+(g))$. Se $g = \sum_k a_k x^k$ é a expansão de Taylor de g e $v \in \mathbb{R}_+^n$, denotamos por $p_v(g)$ o polinômio dado pela soma dos termos de g tal que os expoentes estão no conjunto $\Delta(v, g)$, ou seja,

$$p_v(g) = \sum_{k \in \Delta(v, g)} a_k x^k. \quad (2.3)$$

Caso $g = 0$, definimos $\text{supp}(g) = \Gamma_+(g) = \emptyset$, $l(v, g) = 0$ e $p_v(g) = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}_+^n$.

Definição 2.12. Seja $S \subseteq \mathcal{O}_n$. Definimos o *suporte* de S , que será denotado por $\text{supp}(S)$, como a união dos suportes dos elementos de S , ou seja, $\text{supp}(S) = \bigcup_{g \in S} \text{supp}(g)$. Assim, o *poliedro de Newton de S* é dado como $\Gamma_+(S) = \Gamma_+(\text{supp}(S))$, isto é, $\Gamma_+(S)$ é o fecho convexo da $\bigcup_{g \in S} \Gamma_+(g)$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos dos conceitos acima apresentados.

Exemplo 2.13. Sejam $f, g \in \mathcal{O}_2$ definidas por $f(x, y) = xy + 5y^2 - 7x$ e $g(x, y) = 8xy + \pi y^2 + \sqrt{3}x$. Notemos que $\Gamma_+(f) = \Gamma_+(g)$, assim, podemos perceber que o Poliedro de Newton de um polinômio não depende dos seus coeficientes.

Considere $h(x, y) = x^3 f(x, y) = x^4 y + 5x^3 y^2 - 7x^4$. Observemos que $\Gamma_+(h) \subset \Gamma_+(f)$.

Na verdade se considerarmos I o ideal gerado por f , então para qualquer $g \in I$, $\Gamma_+(g) \subset \Gamma_+(f)$. Como $\Gamma_+(I)$ é o fecho convexo de $\bigcup_{g \in I} \Gamma_+(g)$, segue que $\Gamma_+(I) = \Gamma_+(f)$.

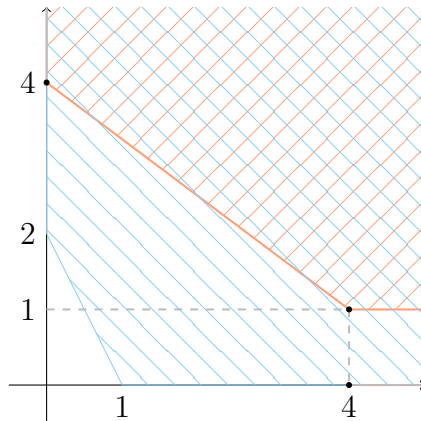


Figura 2.4: Poliedros $\Gamma_+(f) = \Gamma_+(g)$ e $\Gamma_+(h)$.

O exemplo acima é um caso particular do próximo resultado.

Proposição 2.14. *Se $I \subseteq \mathcal{O}_n$ é um ideal e S é um sistema de geradores de I , então $\Gamma_+(I) = \Gamma_+(S)$.*

Demonstração. Como \mathcal{O}_n é noetheriano e I é finitamente gerado, digamos $S = \{g_1, \dots, g_r\}$. É óbvio que $\Gamma_+(S) \subset \Gamma_+(I)$. Mostraremos que $\Gamma_+(I) \subset \Gamma_+(S)$.

Seja $v \in \Gamma_+(I) = \Gamma_+(\text{supp}(I))$. Como $\text{supp}(I) = \bigcup_{g \in I} \text{supp}(g)$, existe $g \in I$ tal que $v \in \Gamma_+(g)$. Observemos que $g = \sum_{i=1}^r p_i g_i$, onde $p_i \in \mathcal{O}_n$. Logo, $\Gamma_+(g) \subset \Gamma_+(S)$, e portanto, $v \in \Gamma_+(S)$. Concluímos que $\Gamma_+(I) = \Gamma_+(S)$. \square

Agora, definiremos função de ordem e valoração em um anel A e assim, apresentaremos uma valoração em \mathcal{O}_n que será necessária na demonstração do próximo resultado.

Definição 2.15. Sejam A um anel e $\mu : A \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ uma aplicação. Dizemos que μ é uma *função de ordem* quando satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\mu(x + y) \geq \inf\{\mu(x), \mu(y)\}$;
- (ii) $\mu(xy) \geq \mu(x) + \mu(y)$;
- (iii) $\mu(0) = \infty$ e $\mu(1) = 0$.

Quando vale a igualdade $\mu(xy) = \mu(x) + \mu(y)$, para todo $x, y \in A$, chamamos μ de valoração.

Exemplo 2.16. Seja $f(x) = \sum a_k x^k \in \mathcal{O}_n$. Considere aplicação $v : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definida por

$$v(f) = \min\{\Phi(k) : k \in \text{supp}(f)\}$$

onde $\Phi(k) = \Phi(k_1, \dots, k_n) = k_1 + \dots + k_n$ e $v(0) = \infty$.

Notemos que $v(1) = 0$ e v satisfaz as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} v(f+g) &= \min\{\Phi(k) : k \in \text{supp}(f+g)\} \\ &= \min\{\Phi(k) : k \in \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)\} \\ &\geq \min\{\min\{\Phi(k) : k \in \text{supp}(f)\}, \min\{\Phi(k) : k \in \text{supp}(g)\}\} \\ &= \min\{v(f), v(g)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(fg) &= \min\{\Phi(k) : k \in \text{supp}(fg)\} \\ &= \min\{\Phi(k) : k \in \text{supp}(f) + \text{supp}(g)\} \\ &= \min\{\Phi(k) : k \in \text{supp}(f)\} + \min\{\Phi(k) : k \in \text{supp}(g)\} \\ &= v(f) + v(g) \end{aligned}$$

Portanto, v é uma valoração.

Um ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ que é gerado por monômios é chamado de ideal monomial. Consideremos $I = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ um ideal monomial de \mathcal{O}_n com $g_i = x_1^{\alpha_{i1}} \cdots x_n^{\alpha_{in}}$, $i = \{1, \dots, k\}$. Os próximos resultados são a respeito do fecho integral desses ideais.

Teorema 2.17. [27] *Seja I um ideal monomial em \mathcal{O}_n . Se $h \in \bar{I}$, então todos os monômios que aparecem na expressão de h são representados em \mathbb{R}^n por pontos situados em $\Gamma_+(I)$, ou seja, $\Gamma_+(h) \subset \Gamma_+(I)$.*

Demonstração. Sejam $h = \sum a_k x^k \in \bar{I}$ e $b = (b_1, \dots, b_n) \in \text{supp}(h)$. Seja Δ uma face de $\Gamma_+(I)$. Assim, existem $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \eta \in \mathbb{R}$ tais que $\Delta = \{(k_1, \dots, k_n) \in \Gamma_+(I) : \gamma_1 k_1 + \cdots + \gamma_n k_n = \eta\}$. Consideremos $N = \gamma_1 b_1 + \cdots + \gamma_n b_n$. Mostraremos que $N \geq \eta$.

Seja φ uma curva analítica definida por $\varphi(t) = (c_1 t^{\gamma_1}, \dots, c_n t^{\gamma_n})$, temos que

$$\begin{aligned} h \circ \varphi(t) &= (a_{j1} x^{\alpha_{j1}}(c_1, \dots, c_n) + \cdots + a_{jl} x^{\alpha_{jl}}(c_1, \dots, c_n)) t^N + \sum_{m \neq N} q_m(c_1, \dots, c_n) t^m \\ &= (a_{j1} c_1^{\alpha_{j1}} \cdots c_n^{\alpha_{jn}} + \cdots + a_{jl} c_1^{\alpha_{jl}} \cdots c_n^{\alpha_{ln}}) t^N + \sum_{m \neq N} q_m(c_1, \dots, c_n) t^m \end{aligned}$$

Observemos que $p(c_1, \dots, c_n) = a_{j1} c_1^{\alpha_{j1}} \cdots c_n^{\alpha_{jn}} + \cdots + a_{jl} c_1^{\alpha_{jl}} \cdots c_n^{\alpha_{ln}}$ é um polinômio em c_1, \dots, c_n . Então, existem $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ tais que $p(d_1, \dots, d_n) \neq 0$.

Dessa forma, consideremos $\psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ dado por $\psi(t) = (d_1 t^{\gamma_1}, \dots, d_n t^{\gamma_n})$. Considerando v a valoração definida no Exemplo 2.16, temos que

$$v(x^b \circ \psi) = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n = N \geq \min\{\Phi(k) : k \in \text{supp}(h \circ \psi)\} = v(h \circ \psi).$$

Notemos que $v(h \circ \psi) \geq v(g \circ \psi)$, para todo $g \in I$. Com efeito, como $h \in \bar{I}$, pelo item (2) do Teorema 2.5 segue que $h \circ \psi \in \psi^*(I)\mathcal{O}_1$. Ou seja, $h \circ \psi = f_1(p_1 \circ \psi) + \cdots + f_r(p_r \circ \psi)$, onde

$p_1, \dots, p_r \in I$ e $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_1$. Assim,

$$\begin{aligned} v(h \circ \psi) &\geq \min \{v(f_i(p_i \circ \psi))\} = v(f_j(p_j \circ \psi)) \\ &\geq v(f_j) + v(p_j \circ \psi) \\ &\geq v(p_j \circ \psi) \\ &\geq v(g_i \circ \psi) \end{aligned}$$

onde $p_j \in I = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$.

Observemos que para um gerador $g_i(x) = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ de I tal que $(k_1, \dots, k_n) \in \Delta$, temos

$$N = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n = v(x^b \circ \psi) \geq v(g_i \circ \psi) = \gamma_1 k_1 + \dots + \gamma_n k_n = \eta.$$

Isto é, b está acima da face Δ , e portanto $b \in \Gamma_+(I)$. □

Seja I um ideal de \mathcal{O}_n . Definimos a codimensão de I em \mathcal{O}_n como $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I}$.

Proposição 2.18. [27] *Seja I um ideal monomial de codimensão finita em \mathcal{O}_n . Se o ponto $b = (b_1, \dots, b_n) \in \Gamma_+(I)$ representa o monômio $x^b = x^{b_1} \dots x^{b_n}$, então $x^b \in \bar{I}$.*

Demonstração. Suponhamos que $h = x^b = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n} \notin \bar{I}$. Então existe uma curva analítica $\varphi: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que

$$v(h \circ \varphi) < v(g_j \circ \varphi), \forall j = 1, \dots, k$$

onde g_1, \dots, g_k são geradores de I da forma $g_j = x_1^{a_{j1}} \dots x_n^{a_{jn}}$.

Considerando $\varphi_i(t) = t^{s_i} + \text{ord}(s_i)$, onde $\text{ord}(s_i)$ são os termos de ordem superior a s_i , temos que

$$v(h \circ \varphi) = v(\varphi_1^{b_1} \dots \varphi_n^{b_n}) = s_1 b_1 + \dots + s_n b_n,$$

$$v(g_j \circ \varphi) = v(\varphi_1^{a_{j1}} \dots \varphi_n^{a_{jn}}) = s_1 a_{j1} + \dots + s_n a_{jn}.$$

Agora, consideremos o hiperplano Λ_i definido pela equação $s_1 z_1 + \dots + s_n z_n = \eta_i$, como $v(h \circ \varphi) < v(g_j \circ \varphi)$, então $b = (b_1, \dots, b_n)$ está em um hiperplano situado abaixo do hiperplano Λ_j ao qual $a_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ pertence.

Sabemos que $\Gamma_+(I)$ é determinado por a_1, \dots, a_k e assim, o primeiro hiperplano Λ_s que intersecta $\Gamma_+(I)$ deve conter algum a_j , ou seja, $\Lambda_s = \Lambda_j$ para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Como $b \in \Lambda_{v(h \circ \varphi)}$ e $\Lambda_{v(h \circ \varphi)} \cap \Lambda_j = \emptyset$, temos que $\Lambda_{v(h \circ \varphi)}$ não intersecta $\Gamma_+(I)$. Logo, $b \notin \Gamma_+(I)$, o que é um absurdo. □

Teorema 2.19. [27] *Se I é um ideal monomial em \mathcal{O}_n , então $\bar{I} = \langle \{x^k : k \in \Gamma_+(I)\} \rangle$.*

Demonstração. Seja I um ideal monomial de \mathcal{O}_n gerado por g_1, \dots, g_k , onde $g_j = x_1^{a_{j1}}, \dots, x_n^{a_{jn}}$, para $j = 1, \dots, k$. Considere

$$E(I) = \bigcup_{k \in \text{supp}(I)} \{k + v : v \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

Como $(\Gamma_+(I) \setminus E(I)) \cap \mathbb{Z}^n$ é finito, podemos tomar $\{\beta_1, \dots, \beta_d\} = (\Gamma_+(I) \setminus E(I)) \cap \mathbb{Z}^n$.

Seja J o ideal de \mathcal{O}_n gerado por $\{x^s : s \in \{a_1, \dots, a_k, \beta_1, \dots, \beta_d\}\}$, onde $a_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ representa o gerador g_j de I . Mostraremos que $J = \bar{I}$.

Seja $x^s \in J$, temos que $s \in \Gamma_+(I)$. Pela Proposição 2.18, segue que $x^s \in \bar{I}$. Assim, $J \subset \bar{I}$. Suponhamos que exista $h \in \bar{I} \setminus J$. Dessa forma, podemos escrever

$$h(x) = x^{m_0} \sum_{m=m_0}^{\infty} c_m x^{m-m_0}$$

com $c_{m_0} \neq 0$. Como $h \notin J$, x^{m_0} não é múltiplo de x^{a_j} ou de x^{β_i} para quaisquer $j = 1, \dots, k$ e $i = 1, \dots, d$. Agora, considere $\beta_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{in})$ e $m_0 = (m_{01}, \dots, m_{0n})$. Assim, para cada $j = 1, \dots, k$ e $i = 1, \dots, d$, existem $s, l \in \{1, \dots, n\}$ tais que $m_{0s} < a_{js}$ e $m_{0l} < \beta_{il}$.

Notemos que $m_{0s} < a_{js}$ implica em $m_{0s} \notin a_j + \mathbb{R}_+^n$. Como isso ocorre para qualquer $j \in \{1, \dots, k\}$, temos que $m_0 \notin E(I)$. Temos também que $m_{0l} < \beta_{il}$ implica $m_0 \neq \beta_i$. Observemos que isso ocorre para qualquer $i \in \{1, \dots, n\}$ e $m_0 \in \mathbb{Z}^n$, concluímos que $m_0 \notin \Gamma_+(I)$. Mas, como $h \in \bar{I}$, entramos em contradição com o Teorema 2.17.

Portanto, $\bar{I} = \langle \{x^s : s \in \{a_1, \dots, a_k, \beta_1, \dots, \beta_d\}\} \rangle = \langle \{x^k : k \in \Gamma_+(I)\} \rangle$. \square

Seja I um ideal de \mathcal{O}_n , denotamos por I^0 o ideal de \mathcal{O}_n gerado pelos monômios x^k tais que $k \in \Gamma_+(I)$. Observemos que, $\Gamma_+(I^0) = \Gamma_+(I)$ e $I \subset I^0$.

Corolário 2.20. I^0 é integralmente fechado.

Demonstração. Como I^0 é monomial, segue do Teorema 2.19 que

$$\bar{I}^0 = \langle \{x^k : k \in \Gamma_+(I^0)\} \rangle = \langle \{x^k : k \in \Gamma_+(I)\} \rangle = I^0.$$

\square

Utilizando I^0 e o Corolário 2.20, provaremos o seguinte lema:

Lema 2.21. *Seja I um ideal de \mathcal{O}_n , então $\Gamma_+(I) = \Gamma_+(\bar{I})$.*

Demonstração. Considere $I^0 = \langle \{x^k : k \in \Gamma_+(I)\} \rangle$, segue do Corolário 2.20 que $\bar{I} \subset \bar{I}^0 = I^0$. Dessa forma, temos que

$$I \subset \bar{I} \subset I^0 \text{ e } \Gamma_+(I) \subset \Gamma_+(\bar{I}) \subset \Gamma_+(I^0) = \Gamma_+(I).$$

Portanto, $\Gamma_+(I) = \Gamma_+(\bar{I})$. \square

Definição 2.22. Seja I um ideal em \mathcal{O}_n , definimos o conjunto $C(\bar{I})$ como o fecho convexo em \mathbb{R}_+^n do conjunto

$$\bigcup \{m : x^m \in \bar{I}\}.$$

Ou seja, $C(\bar{I})$ é o poliedro de Newton do ideal K_I gerado por todos os monômios pertencente ao fecho integral de I .

O próximo resultado relaciona $C(\bar{I})$ com o poliedro de Newton de I . Podemos encontrar sua demonstração em [23].

Proposição 2.23. Se I é um ideal em \mathcal{O}_n , então $C(\bar{I}) \subset \Gamma_+(I)$.

2.3 Ideais Newton não-degenerados

Nessa seção apresentamos um dos conceitos centrais deste trabalho.

Sejam A um subconjunto compacto de \mathbb{R}_+^n e $g = \sum_k a_k x^k \in \mathcal{O}_n$. Definimos g_A como a soma dos termos $a_k x^k$ tal que $k \in A$, isto é,

$$g_A = \sum_{k \in A} a_k x^k.$$

Definimos $g_A = 0$ sempre que $A \cap \text{supp}(g) = \emptyset$, $g \in \mathcal{O}_n$.

Definição 2.24. Seja $S = \{g_1, \dots, g_r\} \subseteq \mathcal{O}_n$. Dizemos que S é *Newton não-degenerado* se, para qualquer face compacta Δ de $\Gamma_+(S)$, temos

$$\{x \in \mathbb{C}^n : (g_1)_\Delta(x) = \dots = (g_r)_\Delta(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}, \quad (2.4)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Dizemos que o ideal $I \subseteq \mathcal{O}_n$ é *Newton não-degenerado* quando I admite um sistema *Newton não-degenerado* de geradores.

Exemplo 2.25. Considere o ideal $I = \langle f, g \rangle = \langle x^8 + xy^5, y^8 + x^5y \rangle$. O suporte de I é

$$\text{supp}(I) = \{(8, 0), (1, 5), (0, 8), (5, 1)\}.$$

Assim, o poliedro $\Gamma_+(I)$ é dado pela parte ilimitada do \mathbb{R}_+^2 a partir dos segmentos de reta que ligam os pontos $(0, 8)$ a $(1, 5)$, $(1, 5)$ a $(5, 1)$ e $(5, 1)$ a $(8, 0)$.

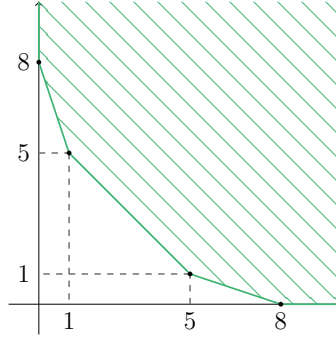


Figura 2.5: Poliedro de Newton de $\langle x^8 + xy^5, y^8 + x^5y \rangle$.

Sejam $\Delta_1 = \{(8, 0)\}$, $\Delta_2 = \{(1, 5)\}$, $\Delta_3 = \{(5, 1)\}$, $\Delta_4 = \{(0, 8)\}$, Δ_5 , Δ_6 e Δ_7 , onde Δ_5 , Δ_6 e Δ_7 são segmentos de retas de $(0, 8)$ a $(1, 5)$, $(1, 5)$ a $(5, 1)$ e $(5, 1)$ a $(8, 0)$, respectivamente.

Notemos que, para toda face compacta Δ_i

$$\{f_{\Delta_i}(x, y) = g_{\Delta_i}(x, y) = (0, 0)\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}.$$

Portanto, I é Newton não-degenerado.

Proposição 2.26. *Se $S, S' \subseteq \mathcal{O}_n$ são dois sistemas geradores finitos do mesmo ideal I de \mathcal{O}_n , então S é Newton não-degenerado se, e somente se, S' é Newton não-degenerado.*

Demonstração. Sejam $S = \{g_1, \dots, g_r\}$ e $S' = \{g'_1, \dots, g'_k\}$ sistemas geradores de I . Se S é Newton não-degenerado então

$$\{x \in \mathbb{C}^n : (g_1)_\Delta(x) = \dots = (g_r)_\Delta(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}$$

para qualquer face compacta $\Delta \subset \Gamma_+(S)$. Como $\Gamma_+(S) = \Gamma_+(I)$ e $\Gamma_+(I) = \Gamma_+(S')$, temos que $\Delta \subset \Gamma_+(S')$.

Notemos que $g'_i = p_{i_1}g_1 + \dots + p_{i_r}g_r$, onde $p_{i_j} \in \mathcal{O}_n$. Além disso, podemos escrever $p_{i_j} = c_{i_j} + \bar{p}_{i_j}$, onde \bar{p}_{i_j} são os termos dependentes e c_{i_j} determina o termo independente de p_{i_j} . Dessa forma, $(p_{i_j}g_j)_\Delta = (c_{i_j}g_j)_\Delta + (\bar{p}_{i_j}g_j)_\Delta$ e assim,

$$\begin{aligned} (g'_i)_\Delta &= (p_{i_1}g_1 + \dots + p_{i_r}g_r)_\Delta \\ &= (p_{i_1}g_1)_\Delta + \dots + (p_{i_r}g_r)_\Delta \\ &= (c_{i_1}g_1)_\Delta + (\bar{p}_{i_1}g_1)_\Delta + \dots + (c_{i_r}g_r)_\Delta + (\bar{p}_{i_r}g_r)_\Delta. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\mathcal{V}(S') = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{V}(g'_i) = \bigcap_{i=1}^k \left(\bigcap_{j=1}^r (\mathcal{V}(c_{i_j}g_j) \cap \mathcal{V}(\bar{p}_{i_j}g_j)) \right) \subseteq \bigcap_{j=1}^r \mathcal{V}(c_{i_j}g_j) = \bigcap_{j=1}^r \mathcal{V}(g_j) = \mathcal{V}(S)$$

onde \mathcal{V} denota o conjunto algébrico (isto é, o conjunto fechado da topologia de Zariski).

Isso garante que

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{C}^n : (g'_1)_\Delta(x) = \cdots = (g'_r)_\Delta(x) = 0\} &\subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : (g_1)_\Delta(x) = \cdots = (g_r)_\Delta(x) = 0\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\} \end{aligned}$$

Portanto, S' é Newton não-degenerado. De maneira análoga, vale a recíproca. \square

Definição 2.27. Seja $f \in \mathcal{O}_n$. Dizemos que f é uma função *Newton não-degenerada* se o ideal $I(f)$ de \mathcal{O}_n gerado por

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

é Newton não-degenerado. Isto é, $(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1})_\Delta, \cdots, (x_n \frac{\partial f}{\partial x_n})_\Delta$ não se anulam simultaneamente em $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, para qualquer face compacta Δ de $\Gamma_+(I(f))$.

Exemplo 2.28. Sejam $f(x, y) = y^2 - x^3 \in \mathcal{O}_n$ e

$$I(f) = \left\langle x \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle -3x^3, 2y^2 \rangle = \langle x^3, y^2 \rangle.$$

O poliedro de Newton $\Gamma_+(I(f))$ é dado pela parte ilimitada a partir do segmento de reta que liga $(3, 0)$ a $(0, 2)$.

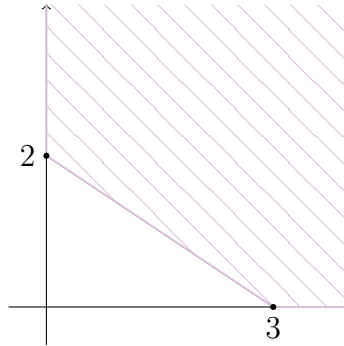


Figura 2.6: Poliedro de Newton de $I(f) = \langle x^3, y^2 \rangle$.

Para a face Δ_1 formada pelo vértice $(3, 0)$, temos que

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : \left(x \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\Delta_1} (x, y) = \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\Delta_1} (x, y) = 0 \right\} = \{(0, y) \in \mathbb{C}^2\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}.$$

Para a face Δ_2 formada pelo vértice $(0, 2)$, segue que

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : \left(x \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\Delta_2} (x, y) = \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\Delta_2} (x, y) = 0 \right\} = \{(x, 0) \in \mathbb{C}^2\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}.$$

E para a face Δ_3 formada pelo segmento de reta que liga os vértices $(0, 2)$ e $(3, 0)$, temos

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : \left(x \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\Delta_3} (x, y) = \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\Delta_3} (x, y) = 0 \right\} = \{(0, 0)\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}.$$

Portanto, f é uma função Newton não-degenerado.

Agora, consideremos o ideal I gerado por f e notemos que $\Gamma_+(I) = \Gamma_+(I(f))$. Como $(-1, i) \in \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f_{\Delta_3}(x, y) = 0\}$ e $(-1, i) \notin \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}$, segue que

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f_{\Delta_3}(x, y) = 0\} \not\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}.$$

Portanto, $I = \langle y^2 - x^3 \rangle$ não é Newton não-degenerado.

Com isso, temos que f é uma função Newton não-degenerada mas o ideal $I = \langle f \rangle$ não é Newton não-degenerado.

Yoshinaga provou em [29] que uma função f é Newton não-degenerada se, e somente se, o fecho integral de $I(f)$ é gerado pelos monômios x^k tais que $k \in \Gamma_+(f)$. E generalizando este resultado, Saia provou em [23], o seguinte resultado.

Teorema 2.29. [23] *Seja $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ um ideal de codimensão finita em \mathcal{O}_n . Então, I é Newton não-degenerado se, e somente se, $\Gamma_+(I) = C(\bar{I})$.*

Teorema 2.30. *Seja I um ideal em \mathcal{O}_n . Então, I é Newton não-degenerado se, e somente se, o fecho integral $\bar{I} = I^0$.*

Demonstração. Se I for Newton não-degenerado, o Teorema 2.29 garante que $\Gamma_+(I) = C(\bar{I})$. Assim, $I^0 = \langle \{x^k : k \in \Gamma_+(I)\} \rangle = \langle \{x^k : k \in C(\bar{I})\} \rangle$. Observemos que $x^k \in \bar{I}$, pois $k \in C(\bar{I})$ e \bar{I} é um ideal. Dessa forma, temos que $\{x^k : k \in C(\bar{I})\} \subset \bar{I}$, e assim, $I^0 \subset \bar{I}$. Como $I \subset I^0$ implica que $\bar{I} \subset \bar{I^0} = I^0$, concluímos que $\bar{I} = I^0$.

Por outro lado, se $\bar{I} = I^0$, então $C(\bar{I})$ é o poliedro de Newton do ideal gerado todos os monômios pertencente ao I^0 , ou seja, $C(\bar{I}) = \Gamma_+(I^0)$. Como o $\Gamma_+(I^0) = \Gamma_+(I)$, segue que $\Gamma_+(I) = C(\bar{I})$. Portanto, pelo Teorema 2.29, I é Newton não-degenerado. \square

Além disso, considerando I um ideal de \mathcal{O}_n de codimensão finita, isto é, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I} < \infty$. Nesse caso, a Newton não degeneração de I admite uma caracterização numérica, que foi apresentada por Bivià-Ausina, Fukui e Saia em [4]. Antes de enunciarmos este resultado, definiremos a multiplicidade de um ideal.

Definição 2.31. A *multiplicidade* de um ideal I de codimensão finita em \mathcal{O}_n é definido como

$$e(I) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n!}{k^n} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I^k}.$$

Um referência para a definição anterior é [19, p.109].

Proposição 2.32. *Sejam $I \subseteq J$ ideais em \mathcal{O}_n . Então, $e(I) \geq e(J)$.*

Demonstração. Sejam $I \subseteq J$ ideais em \mathcal{O}_n . Temos que $I^k \subset J^k$, para todo k . Dessa forma,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J^k} \leq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I^k},$$

para todo k . Segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n!}{k^n} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J^k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n!}{k^n} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I^k}.$$

Portanto, $e(I) \geq e(J)$. \square

A seguir enunciaremos um resultado do Teissier sobre a multiplicidade de ideais monomiais, cuja demonstração pode ser encontrada em [27, p.131], mas antes faremos a seguinte observação.

Observação 2.33. Observemos que se I é um ideal de \mathcal{O}_n gerado por monômios g^1, \dots, g^s , as seguintes condições são equivalentes:

- (1) O complemento de $E(I) = \bigcup_{k \in \text{supp}(I)} \{k + v : v \in \mathbb{R}_+^n\}$ em \mathbb{R}_+^n tem volume finito.
- (2) O espaço vetorial $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$ sobre \mathbb{C} é de dimensão finita, sendo igual ao número de pontos com coordenadas inteiras de $\mathbb{R}_+^n \setminus E(I)$.

Lema 2.34. [27] *Se I é um ideal de \mathcal{O}_n de codimensão finita que é gerado por monômios, então $e(I) = n!v(I)$, onde $v(I)$ é o volume n -dimensional de $\mathbb{R}_+^n \setminus \Gamma_+(I)$.*

Dados $J \subseteq I$ ideais de \mathcal{O}_n , então J é considerado uma redução de I quando existe algum inteiro $r > 0$ tal que $I^{r+1} = JI^r$.

Por [7, Lema 4.6.5] e pelo trabalho de Rees [20] temos que as noções de redução, fechamento integral e multiplicidade estão intimamente relacionados. Assim, o próximo resultado é uma caracterização das reduções em \mathcal{O}_n .

Teorema 2.35. *Seja $J \subseteq I$ um par de ideais de \mathcal{O}_n com I de codimensão finita. Então, as condições seguintes são equivalentes:*

- (i) J é uma redução de I ;
- (ii) $e(I) = e(J)$;
- (iii) $\bar{J} = \bar{I}$.

Teorema 2.36. [4] *Seja I um ideal de codimensão finita em \mathcal{O}_n . Então, I é Newton não-degenerado se, e somente se, $e(I) = n!v(I)$. Caso $I \subset \mathcal{O}_n$ não for Newton não-degenerado, então I satisfaz o desigualdade estrita $e(I) > n!v(I)$.*

Demonstração. Seja I um ideal de codimensão finita em \mathcal{O}_n . O Lema 2.34 garante que $e(I^0) = n!v(I^0)$. Como $\Gamma_+(I) = \Gamma_+(I^0)$, segue que $e(I^0) = n!v(I^0) = n!v(I)$. Daí,

$$e(I) \geq e(I^0) = n!v(I^0) = n!v(I),$$

pois $I \subseteq I^0$. Observe que se I for Newton não-degenerado, o Teorema 2.30 garante que $\bar{I} = I^0$. Pelo Teorema 2.35, segue que

$$e(\bar{I}) = e(I) = e(I^0) = n!v(I),$$

pois $\bar{\bar{I}} = \bar{I} = I^0 = \bar{I}^0$. □

No próximo capítulo apresentaremos extensões destes resultados para submódulos de \mathcal{O}_n^p .

Módulos Newton não-degenerados

No capítulo anterior, trabalhamos com ideais de \mathcal{O}_n . Para uma situação mais geral, definiremos o fecho integral \overline{M} do módulo $M \subset \mathcal{O}_n^p$ e apresentaremos uma classe de submódulos Newton não-degenerados de \mathcal{O}_n^p . Assim, caracterizaremos estes submódulos dizendo que seu fecho integral é igual a uma soma direta de ideais monomiais fechados.

3.1 O fecho integral de módulos

Sejam $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ uma aplicação analítica e $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathcal{O}_n^p$. Denotamos o elemento $(h_1 \circ \varphi, \dots, h_p \circ \varphi) \in \mathcal{O}_1^p$ por $h \circ \varphi$.

Antes de continuarmos, apenas lembremos que \mathcal{O}_n^p é um \mathcal{O}_n -módulo.

Definição 3.1. Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo. Dizemos que $h \in \mathcal{O}_n^p$ é *integral* sobre M quando, para qualquer caminho analítico $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, temos que

$$h \circ \varphi \in \mathcal{O}_1 \varphi^*(M)$$

onde $\mathcal{O}_1 \varphi^*(M)$ denota o \mathcal{O}_1 -submódulo de \mathcal{O}_1^p gerado por $\varphi^*(M) = \{m \circ \varphi : m \in M\}$.

O conjunto de elementos $h \in \mathcal{O}_n^p$ que são integrais sobre M é chamado de *fecho integral* de M e denotado por \overline{M} .

Proposição 3.2. *O fecho integral de M é um submódulo de \mathcal{O}_n^p .*

Demonstração. Sejam $h^1 = (h_1^1, \dots, h_p^1), h^2 = (h_1^2, \dots, h_p^2) \in \overline{M}$, temos que $h^1 \circ \varphi \in \mathcal{O}_1 \varphi^*(M)$ e $h^2 \circ \varphi \in \mathcal{O}_1 \varphi^*(M)$. Dessa forma,

$$h^1 \circ \varphi = \sum_{i=1}^k f_i(m^i \circ \varphi) \text{ e } h^2 \circ \varphi = \sum_{i=1}^k g_i(w^i \circ \varphi),$$

onde $f_i, g_i \in \mathcal{O}_1$ e $m^i, w^i \in M$.

Notemos que

$$(h^1 - h^2) \circ \varphi = (h^1 \circ \varphi) - (h^2 \circ \varphi) = \sum_{i=1}^n f_i(m^i \circ \varphi) - \sum_{i=1}^n g_i(w^i \circ \varphi) = \sum_{i=1}^n (f_i m^i - g_i w^i) \circ \varphi.$$

Como $f_i m^i - g_i w^i \in M$, segue que $(h^1 - h^2) \circ \varphi \in \mathcal{O}_1 \varphi^*(M)$ e, portanto, $h^1 - h^2 \in \overline{M}$. Assim, $(\overline{M}, +)$ é um subgrupo de \mathcal{O}_n^p .

Agora, observemos que para todo $F \in \mathcal{O}_n$ e para todo $h \in \overline{M}$, $Fh = (Fh_1, \dots, Fh_p) \in \overline{M}$. De fato, como $h \in \overline{M}$, temos que $h \circ \varphi \in \mathcal{O}_1 \varphi^*(M)$, ou seja,

$$h \circ \varphi = \sum_{i=1}^k f_i(m^i \circ \varphi),$$

onde $f_i \in \mathcal{O}_1$ e $m^i \in M$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} (Fh) \circ \varphi &= (Fh_1 \circ \varphi, \dots, Fh_p \circ \varphi) = F(h_1 \circ \varphi, \dots, h_p \circ \varphi) = F(h \circ \varphi) \\ &= F \sum_{i=1}^k f_i(m^i \circ \varphi) = \sum_{i=1}^k f_i(Fm^i \circ \varphi) \in \mathcal{O}_1 \varphi^*(M), \end{aligned}$$

pois $Fm^i \in M$. Logo, $Fh \in \overline{M}$. Portanto, \overline{M} é um submódulo de \mathcal{O}_n^p . \square

Se I for um ideal de \mathcal{O}_n , então o fecho integral de I , considerando I um submódulo de \mathcal{O}_n , coincide com a noção usual de fecho integral de um ideal, como podemos ver pelo item 3 da Proposição 2.5.

Consideremos uma matriz A de tamanho $p \times q$ com entradas em \mathcal{O}_n e um inteiro positivo r . $I_r(A)$ denotará o ideal de \mathcal{O}_n gerado pelos menores de ordem r de A quando $r \leq \min\{p, q\}$. Se $r > \min\{p, q\}$, então definiremos $I_r(A) = 0$. A matriz transposta de A será denotado por A^t . O posto de uma matriz A é r , quando A tem um menor de ordem r distinto de zero e todos os menores de ordem $r + 1$ são nulos. Em outras palavras, o posto de A é o maior inteiro r tal que $I_r(A) \neq 0$.

Sejam M um submódulo do módulo livre \mathcal{O}_n^p e u^1, \dots, u^s um sistema de geradores de M , onde $u^i = (u_1^i, \dots, u_p^i)$, $i = 1, \dots, s$. Podemos identificar M com a matriz

$$M = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_p^1 & \dots & u_p^s \end{pmatrix}_{p \times s}.$$

De fato, para todo $f = (f_1, \dots, f_p) \in M$, existem $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{O}_n$ tais que $f = u^1 g_1 + \dots + u^s g_s$. Isto é,

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_p^1 & \dots & u_p^s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix}.$$

O ideal $I_r(M)$ de \mathcal{O}_n é o ideal obtido a partir da matriz M .

Se $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathcal{O}_n^p$, escrevemos (M, h) para denotar a matriz de tamanho $p \times (s+1)$ formado pela justaposição de M e a coluna $(h_1 \ \cdots \ h_p)^t$.

$$(M, h) = \begin{pmatrix} u_1^1 & \cdots & u_1^s & h_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_p^1 & \cdots & u_p^s & h_p \end{pmatrix}_{p \times (s+1)} .$$

Se h' for outro elemento de \mathcal{O}_n^p , então a matriz (M, h, h') é definida analogamente.

O próximo lema é uma generalização da regra de Cramer e será útil para estabelecermos uma conexão entre \overline{M} e $\overline{I_r(M)}$.

Lema 3.3. [9] *Sejam $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo e $h \in \mathcal{O}_n^p$. Suponhamos $I_{r+1}((M, h)) = 0$ e que nenhum elemento de $I_r(M)$ é um divisor de zero em \mathcal{O}_n . Então, $I_r(M) \cdot h \subseteq M \cdot I_r((M, h))$.*

Demonstração. Seja A uma submatriz $r \times r$ de M obtida pela eliminação de $p-r$ linhas e $s-r$ colunas. Consideremos h_A a r -upla obtida pela eliminação dos elementos de h correspondente às linhas retirada de M para obtermos A .

Assim, o sistema linear $A \cdot x = (\det A) \cdot h_A$, pela regra de Cramer, tem como solução a seguinte r -upla de elementos de $I_r(h_A, A\mathcal{O}_n^r)$

$$x = (x_1, \dots, x_r) = (\det [A_1, h_A], \dots, \det [A_r, h_A])$$

onde $[A_j, h_A]$ é a matriz obtida pela substituição da j -ésima coluna de A por h_A .

Agora, consideremos B a submatriz $p \times r$ de M obtida pela eliminação das $s-r$ colunas de M para obter a matriz A . Definimos

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} - B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

Afirmamos que $g = 0$. Suponhamos, por absurdo, que $g_i \neq 0$ para algum i . Consideremos \tilde{g} uma r -upla obtida de g eliminando os mesmos elementos que nos deram h_A mas mantendo o i -ésimo termo e B_g a submatriz de B obtida pela eliminação das linhas correspondentes.

Como $I_{r+1}((M, h)) = 0$, temos que $\det(B_g, h) = (\pm g_i) \cdot \det A = 0$. Mas, $\det A$ não é divisor de zero. Logo, $g_i = 0$. Absurdo! Portanto, $g = 0$ e $(\det A) \cdot h = B \cdot x$. Dessa forma, concluímos que $I_r(M) \cdot h \subseteq M \cdot I_r((M, h))$. \square

Para o próximo teorema utilizaremos os seguintes resultados, dos quais suas demonstrações são encontradas em [19] e [11, p.102].

Lema 3.4. [19] *Seja (A, \mathfrak{m}) um anel local. Então, para M um A -módulo finito e $N \subseteq M$ um submódulo, temos*

$$\bigcap_{n>0} (N + \mathfrak{m}^n M) = N.$$

Lema 3.5. [19] *(Lema de Artin-Rees) Sejam A um anel noetheriano, M um A -módulo finito, $N \subset M$ um submódulo e I um ideal de A . Então, existe um inteiro positivo c tal que, para todo $n > c$, temos*

$$I^n M \cap N = I^{n-c} (I^c M \cap N).$$

Lema 3.6. [11] *(Lema de Nakayama) Sejam A um anel comutativo com um elemento de identidade 1, e seja \mathcal{M} um ideal em A com a propriedade de que $1+x$ é invertível em A para qualquer $x \in \mathcal{M}$. Além disso, seja M um A -módulo e seja N_1, N_2 A -submódulos com N_1 finitamente gerado. Se $N_1 \subseteq N_2 + \mathcal{M}A$, então $N_1 \subseteq N_2$.*

Lema 3.7. *Suponha que M é um submódulo livre de \mathcal{O}_n^p . Então, $I_r(\mathcal{O}_1\varphi^*(M)) = \mathcal{O}_1\varphi^*(I_r(M))$.*

Demonstração. Suponhamos que $\{u^1, \dots, u^s\}$ é o sistema de geradores de M , onde $u^j = (u_1^j, \dots, u_p^j) \in \mathcal{O}_n^p$, $j = 1, \dots, s$. Para todo $m^i \in M$, temos $m^i = \sum_{j=1}^s g_j^i u^j$, onde $g_j^i \in \mathcal{O}_n$.

Se $h \in \mathcal{O}_1\varphi^*(M) \subset \mathcal{O}_1^p$, podemos escrever

$$\begin{aligned} h &= \sum_{i=1}^k F_i(m^i \circ \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^k F_i \left(\sum_{j=1}^s g_j^i u^j \circ \varphi \right) \\ &= F_1 \left(\sum_{j=1}^s g_j^1 u^j \circ \varphi \right) + \dots + F_k \left(\sum_{j=1}^s g_j^k u^j \circ \varphi \right) \\ &= \sum_{j=1}^s F_1(g_j^1 u^j \circ \varphi) + \dots + \sum_{j=1}^s F_k(g_j^k u^j \circ \varphi) \\ &= \sum_{j=1}^s (F_1 g_j^1 u^j) \circ \varphi + \dots + \sum_{j=1}^s (F_k g_j^k u^j) \circ \varphi \\ &= \sum_{j=1}^s (F_1 g_j^1 \circ \varphi)(u^j \circ \varphi) + \dots + \sum_{j=1}^s (F_k g_j^k \circ \varphi)(u^j \circ \varphi) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k F_i g_1^i \circ \varphi \right) (u^1 \circ \varphi) + \dots + \left(\sum_{i=1}^k F_i g_s^i \circ \varphi \right) (u^s \circ \varphi) \end{aligned}$$

onde $F_i \in \mathcal{O}_1$. Dessa forma, $\{u^1 \circ \varphi, \dots, u^s \circ \varphi\}$ é um sistema de geradores de $\mathcal{O}_1\varphi^*(M)$ e assim, identificamos $\mathcal{O}_1\varphi^*(M)$ pela seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} u_1^1 \circ \varphi & \dots & u_1^s \circ \varphi \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_p^1 \circ \varphi & \dots & u_p^s \circ \varphi \end{pmatrix}.$$

Consideremos o conjunto H dos menores $r \times r$ da matriz acima. Como $H \subset \varphi^*(I_r(M))$ e $I_r(\mathcal{O}_1\varphi^*(M))$ é o ideal gerado por H , segue que $I_r(\mathcal{O}_1\varphi^*(M)) \subset \varphi^*(I_r(M))$. Logo, $I_r(\mathcal{O}_1\varphi^*(M)) \subset \mathcal{O}_1\varphi^*(I_r(M))$. Por outro lado, $\varphi^*(I_r(M)) \subset I_r(\mathcal{O}_1\varphi^*(M))$ e, portanto, $\mathcal{O}_1\varphi^*(I_r(M)) \subset I_r(\mathcal{O}_1\varphi^*(M))$, pois $I_r(\mathcal{O}_1\varphi^*(M))$ é um ideal de \mathcal{O}_1 .

□

Dada um fibrado vetorial E , denotamos por $\xi(E)$ as seções do fibrado vetorial E .

Teorema 3.8. [9] *Sejam $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo e $h \in \mathcal{O}_n^p$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) $h \in \overline{M}$.
- (2) $I_r(M, h) \subseteq \overline{I_r(M)}$, onde r é o maior inteiro tal que $I_r(M, h) \neq 0$.
- (3) Para cada escolha de geradores u^1, \dots, u^s de M , existe uma vizinhança U de 0 em \mathbb{C}^n e uma constante $C > 0$ tal que, para todo $\varphi \in \xi(\text{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}))$, temos

$$|\varphi(z) \cdot h(z)| \leq C \sup_i |\varphi(z) \cdot u^i(z)|, \text{ para todo } z \in U.$$

Demonstração. (1) \Rightarrow (2) Seja $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ uma aplicação analítica, temos que $\varphi^*(h) \in \varphi^*(M)$, pois $h \in \overline{M}$. Com isso, $I_r(\mathcal{O}_1(\varphi^*(h), \varphi^*(M))) = I_r(\mathcal{O}_1\varphi^*(M))$.

Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1\varphi^*(I_r(M, h)) &= I_r(\mathcal{O}_1\varphi^*(M, h)) \\ &= I_r(\mathcal{O}_1(\varphi^*(M), \varphi^*(h))) \\ &= I_r(\mathcal{O}_1\varphi^*(M)) \\ &= \mathcal{O}_1\varphi^*(I_r(M)) \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.5, temos que $\overline{I_r(M)} = \overline{I_r(M, h)}$ e, portanto, $I_r(M, h) \subseteq \overline{I_r(M, h)} = \overline{I_r(M)}$.

(2) \Rightarrow (1) Seja $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ uma aplicação analítica, então temos dois casos:

- (i) $\varphi(t)$ está num aberto de \mathbb{C}^n , onde o posto de (h, M) é r , para $t \neq 0$;
- (ii) $\text{Im}(\varphi) \subseteq V(I_r(M, h))$.

No caso (i), se o posto de (M, h) é r , então (M, h) possui uma submatriz A de ordem r com $\det A \neq 0$. Como $I_r(M, h)$ é o ideal de \mathcal{O}_n^p gerado pelos menores de ordem r de (M, h) , temos que $(\det A) \in \varphi^*(I_r(M, h))$.

Como $I_r(M) \subset I_r(M, h)$, temos que $\varphi^*(I_r(M)) \subset \varphi^*(I_r(M, h))$. Por hipótese, $I_r(M, h) \subseteq \overline{I_r(M)}$, segue que $\varphi^*(I_r(M)) = \varphi^*(I_r(M, h))$.

Assim, o Lema 3.3 garante que

$$I_r(\varphi^*(M)) \cdot (h \circ \varphi) \subseteq \varphi^*(M) \cdot I_r(\varphi^*(M), h \circ \varphi).$$

Pelo Lema 3.7, temos que

$$\varphi^*(I_r(M)) \cdot \varphi^*(h) \subseteq \mathcal{O}_1\varphi^*(M) \cdot \mathcal{O}_1\varphi^*(I_r(M, h)).$$

Como $\varphi^*(I_r(M)) = \varphi^*(I_r(M, h))$, segue que $\varphi^*(h) \subseteq \mathcal{O}_1\varphi^*(M)$, ou seja, $h \circ \varphi \in \mathcal{O}_1\varphi^*(M)$. Concluimos que $h \in \overline{M}$.

Façamos agora o caso (ii). Suponhamos que $h \circ \varphi \notin \varphi^*(M)$, ou seja, $\varphi^*(M) \subsetneq \varphi^*((M, h))$. Então, pelo Lema 3.4 existe n_0 tal que para todo $k > n_0$

$$\mathcal{O}_1\varphi^*((M, h)) \not\equiv \mathcal{O}_1\varphi^*(M) \pmod{\mathfrak{m}_1^k \mathcal{O}_1^p}$$

Caso contrário, pelo Lema de Artin-Rees 3.5, existe n_0 tal que, para $n_0 + 1 > n_0$,

$$\mathfrak{m}_1^l \mathcal{O}_1^p \cap \varphi^*(M, h) \mathcal{O}_1 = \mathfrak{m}_1^{n_0+1-n_0} (\mathfrak{m}_1^{n_0} \mathcal{O}_1^p \cap \varphi^*(M, h) \mathcal{O}_1) \quad (3.1)$$

$$= \mathfrak{m}_1 (\mathfrak{m}_1^{n_0} \mathcal{O}_1^p \cap \varphi^*(M, h) \mathcal{O}_1) \quad (3.2)$$

Como $\varphi^*((M, h)) \mathcal{O}_1 = \varphi^*(M) \mathcal{O}_1 \pmod{\mathfrak{m}_1^{n_0+1} \mathcal{O}_1^p}$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1\varphi^*(M, h) - \mathcal{O}_1\varphi^*(M) &\subset \mathfrak{m}_1^{n_0+1} \mathcal{O}_1 \\ &\subset \mathfrak{m}_1^{n_0+1} \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_1\varphi^*(M, h) \\ &= \mathfrak{m}_1 (\mathfrak{m}_1^{n_0} \mathcal{O}_1^p \cap \varphi^*(M, h) \mathcal{O}_1), \text{ por (3.1).} \end{aligned}$$

Em particular, $\mathcal{O}_1\varphi^*(M, h) - \mathcal{O}_1\varphi^*(M) \subset \mathfrak{m}_1 (\mathfrak{m}_1^{n_0} \mathcal{O}_1^p)$. Segue que

$$\mathcal{O}_1\varphi^*(M, h) \subset \mathfrak{m}_1 (\mathfrak{m}_1^{n_0} \mathcal{O}_1^p) + \mathcal{O}_1\varphi^*(M).$$

Pelo Lema de Nakayama 3.6, temos que $\mathcal{O}_1\varphi^*(M, h) \subset \mathcal{O}_1\varphi^*(M)$, o que é uma contradição.

Agora, trunque φ até o nível k para $k \gg n_0$ e altere φ adicionando termos de ordem superior de \mathfrak{m}_1^{k+1} para obter φ_1 de modo que $\varphi_1(t)$ não esteja em $V(I_r((M, h)))$ para $t \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1\varphi_1^*(M) &\equiv \mathcal{O}_1\varphi^*(M) \pmod{\mathfrak{m}_1^k \mathcal{O}_1^p} \\ \mathcal{O}_1\varphi_1^*(M, h) &\equiv \mathcal{O}_1\varphi^*(M, h) \pmod{\mathfrak{m}_1^k \mathcal{O}_1^p} \end{aligned}$$

Pelo caso (i), temos que $\varphi_1^*(M, h) = \varphi_1^*(M)\varphi_1^*(h) \subset \varphi_1^*(M)$. e portanto, $\varphi_1^*(M, h) = \varphi_1^*(M)$. Logo, $\mathcal{O}_1\varphi_1^*(M) \equiv \mathcal{O}_1\varphi_1^*(M, h) \pmod{\mathfrak{m}_1^k \mathcal{O}_1^p}$, o que é uma contradição. Concluimos que $\varphi^*(h) \subsetneq \varphi^*(M)$, isto é, $h \circ \varphi \in \mathcal{O}_1\varphi^*(M)$. Portanto, $h \in \overline{M}$.

(1) \Rightarrow (3) Notemos que um conjunto de geradores $\{u^i\}$ de M nos dá um conjunto de geradores $\{d_i\}$ de $I_r(M)$. Escolhemos uma vizinhança \mathcal{U} , $c > 0$ de 0 tal que

$$\|g(z)\| \leq c \sup_i \|d_i(z)\|, \forall z \in \mathcal{U} \quad (3.3)$$

se, e somente se, $g \in \overline{I_r(M)}$.

Suponhamos que $h \in \overline{M}$. Pelo Lema 3.3, para cada d_i gerador de $I_r(M)$, temos

$$d_i h = \sum_{k=1}^s u^k a_{ik}, \text{ com } a_{ik} \in I_r(M, h) \subseteq \overline{I_r(M)}.$$

Dessa forma,

$$\|\varphi(z) \cdot h(z)\| = \left\| \varphi(z) \cdot \sum_{k=1}^s u^k(z) \frac{a_{ik}(z)}{d_i(z)} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^s \frac{a_{ik}}{d_i} \varphi(z) \cdot u^k(z) \right\|.$$

Agora, consideremos $z \in \mathcal{U} - V(I_r(M))$ e $\|d_j(z)\| = \sup_i \|d_i(z)\|$. Então,

$$\begin{aligned} \|\varphi(z) \cdot h(z)\| &= \left\| \sum_{k=1}^s \frac{a_{jk}}{d_j} \varphi(z) \cdot u^k(z) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^s \frac{\|a_{jk}(z)\|}{\|d_j(z)\|} \|\varphi(z) \cdot u^k(z)\| \\ &\leq s \left(c \sup_k \|\varphi(z) \cdot u^k(z)\| \right) \\ &= C \sup_k \|\varphi(z) \cdot u^k(z)\| \quad (*) \end{aligned}$$

onde $C = sc > 0$.

Como todas as funções são contínuas em \mathcal{U} e (*) vale um aberto denso em \mathcal{U} , então é válida em todo o aberto \mathcal{U} .

(3) \Rightarrow (1)

Seja S_φ uma submatriz de ordem $r \times (r-1)$ de M . Para cada $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathcal{O}_n^p$, h_φ será obtida pela exclusão das mesmas linhas de h , que foram excluídas de M para obter S_φ . Definimos $\varphi \in \xi(\text{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}))$ da seguinte forma

$$\varphi(h) = \det(S_\varphi, h_\varphi),$$

onde (S_φ, h_φ) denota a matriz $r \times r$ cuja a última coluna é h_φ e o resto é a matriz S_φ .

Por hipótese, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi \cdot h(z)\| &\leq C \sup_i \|\varphi(z) \cdot u^i(z)\| \\ \|\det(S_\varphi, h_\varphi)(z)\| &\leq C \sup_i \|\det(S_\varphi, u_\varphi^i)(z)\| \leq C \sup_i \|d_i(z)\| \end{aligned}$$

onde $\{d_i\}$ é o conjunto de geradores de $I_r(M)$ e $\det(S_\varphi, h_\varphi)$ é um gerador arbitrário de $I_r(M, h)$. Pelo item (2) do Teorema 2.5, $I_r(M, h) \subseteq \overline{I_r(M)}$. Portanto, $h \in \overline{M}$. \square

Corolário 3.9. *Sejam $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo tal que $I_p(M) \neq 0$ e $h_1, \dots, h_r \in \overline{M}$. Então*

$$I_p(M, h_1, \dots, h_r) \subseteq \overline{I_p(M, h_1, \dots, h_{r-1})} \subseteq \dots \subseteq \overline{I_p(M, h_1)} \subseteq \dots \subseteq \overline{I_p(M)}.$$

Demonstração. A prova segue quando consideramos a formulação do fecho integral dado no item (2) do Teorema 3.8. Ou seja, temos que $I_p(M, h_1, \dots, h_r) \subseteq \overline{I_p(M, h_1, \dots, h_{r-1})}$. Como $\overline{I_p(M, h_1, \dots, h_{r-1})} = \overline{I_p(M, h_1, \dots, h_{r-2})} = \dots = \overline{I_p(M)}$, segue o resultado. \square

3.2 Módulos Newton não-degenerados

Considere a projeção $p_i : \mathcal{O}_n^p \rightarrow \mathcal{O}_n$ dada por $p_i(h_1, \dots, h_p) = h_i$, $i = 1, \dots, p$. Se M é um submódulo de \mathcal{O}_n^p , definimos M_i como o ideal de \mathcal{O}_n gerado por $\{p_i(m) : m \in M\}$.

Se $\{u^1, \dots, u^s\}$ é um sistema gerador de M , então M_i é gerado pelas i componentes de u^1, \dots, u^s . Para $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$, definimos o *Poliedro de Newton* de M como

$$\Gamma_+(M) = \Gamma_+(M_1) + \dots + \Gamma_+(M_p).$$

Denotamos por M_i^0 como o ideal de \mathcal{O}_n gerado pelos monômios x^k tal que $k \in \Gamma_+(M_i)$, $i = 1, \dots, p$.

Lema 3.10. *Sejam $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ e $\{u^1, \dots, u^s\}$ um sistema gerador de M . Então*

$$\overline{M} \subseteq M_1^0 \oplus \dots \oplus M_p^0 = \{(h_1, \dots, h_p) \in \mathcal{O}_n^p : \text{supp}(h_i) \subseteq \Gamma_+(M_i), \text{ para todo } i = 1, \dots, p\}$$

Demonstração. Se $h = (h_1, \dots, h_p) \in M$, então $h_i \in M_i$, para todo $i = 1, \dots, p$, pela Definição 3.1 e pelo item (3) da Proposição 2.5. No entanto, pelo Lema 2.21, $\Gamma_+(M_i) = \Gamma_+(\overline{M_i})$. Portanto, concluímos que $\text{supp}(h_i) \subseteq \Gamma_+(M_i)$, para todo $i = 1, \dots, p$. \square

O objetivo é caracterizar os submódulos $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ satisfazendo a relação $\overline{M} = M_1^0 \oplus \dots \oplus M_p^0$.

Para tanto utilizaremos o conceito de módulo Newton não-degenerado e para definir tal conceito precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.11. *Seja $S = \{g_1, \dots, g_r\} \subseteq \mathcal{O}_n$. Então S é Newton não-degenerado se, e somente se, para todo $v \in R_+^n \setminus \{0\}$, a seguinte inclusão é mantida.*

$$\{x \in \mathbb{C}^n : p_v^S(g_1)(x) = \dots = p_v^S(g_r)(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}$$

onde

$$p_v^S(g_i) = \begin{cases} p_v(g_i), & \text{se } l(v, g_i) = \min\{l(v, g_1), \dots, l(v, g_r)\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para todo $i = 1, \dots, r$.

Demonstração. Pela definição de $\Gamma_+(S)$, se $v \in \mathbb{R}_+^n$, então

$$l(v, \Gamma_+(S)) = \min\{l(v, g_1), \dots, l(v, g_r)\}.$$

Então, se $\Delta = \Delta(v, \Gamma_+(S))$, temos $p_v^S(g_i) = p_v(g_i) = (g_i)_\Delta$, para todo $i = 1, \dots, r$. Logo, S é Newton não-degenerado. Por outro lado, mostrar a ida é equivalente a mostrar que S é Newton não-degenerado apenas se

$$\{x \in \mathbb{C}^n : (g_1)_\Delta(x) = \dots = (g_r)_\Delta(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_r = 0\}$$

vale para qualquer face de $\Gamma_+(S)$ não necessariamente compacta.

Se S é Newton não-degenerado e Δ é qualquer face de $\Gamma_+(S)$, então o ideal gerado por $\{(g_1)_\Delta, \dots, (g_r)_\Delta\}$ é Newton não-degenerado. Por [23], o fecho integral de $\{(g_1)_\Delta, \dots, (g_r)_\Delta\}$ é um ideal monomial. Assim, a inclusão (2.4) da página 27 vale para a face Δ . \square

O lema acima é a motivação para as seguintes definições.

Sejam $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ e u^1, \dots, u^s um sistema de geradores de M . Suponhamos que $u^i = (u_1^i, \dots, u_p^i)$, para todos $i = 1, \dots, s$. Se $v \in \mathbb{R}_+^n$, definimos $m_j^v := \min\{l(v, u_j^1), \dots, l(v, u_j^s)\}$, $j = 1, \dots, p$ e

$$p_v^M(u_j^i) := \begin{cases} p_v(u_j^i), & \text{se } l(v, u_j^i) = m_j^v \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para todo $i = 1, \dots, s$ e $j = 1, \dots, p$, onde $p_v(u_j^i)$ é dado pela igualdade (2.3) da página 22.

Denotamos por $p(v, M)$ a matriz dada por

$$\begin{pmatrix} p_v^M(u_1^1) & \dots & p_v^M(u_1^s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_v^M(u_p^1) & \dots & p_v^M(u_p^s) \end{pmatrix}.$$

Lembremos que o posto de $p(v, M)$ é o maior inteiro r tal que $I_r(p(v, M)) \neq 0$.

Definição 3.12. Sejam $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo e $\{u^1, \dots, u^s\}$ um sistema de geradores de M , onde $s \geq p$. Dizemos que $\{u^1, \dots, u^s\}$ é um sistema de geradores *Newton não-degenerado* se e somente se, para cada $v \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$,

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(p(v, M)(x)) < p\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}. \quad (3.4)$$

Dizemos que um submódulo $M \subset \mathcal{O}_n^p$ é *Newton não-degenerado* quando M admite um sistema de geradores Newton não-degenerado.

Observemos que se $\{u^1, \dots, u^s\}$ e $\{v^1, \dots, v^t\}$ são dois sistemas geradores do submódulo $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$, então $\{u^1, \dots, u^s\}$ é Newton não-degenerado se e apenas se $\{v^1, \dots, v^t\}$ é Newton não-degenerado.

Proposição 3.13. *Seja $M \subset \mathcal{O}_n^p$ um submódulo tal que $I_p(M) \neq 0$. Então M é Newton não-degenerado se, e somente se, $I_p(M)$ for Newton não-degenerado e $\Gamma_+(I_p(M)) = \Gamma_+(M)$.*

Demonstração. Sejam $\{u^1, u^2, \dots, u^s\} \subset \mathcal{O}_n^p$ um sistema de geradores de M . Vamos identificar M com a matriz de ordem $p \times s$ definida por $\{u^1, u^2, \dots, u^s\}$, isto é

$$\begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^s \\ \vdots & & \vdots \\ u_p^1 & \dots & u_p^s \end{pmatrix}.$$

Seja $S = \{g_1, \dots, g_r\} \subseteq \mathcal{O}_n$ uma família de menores maximais de M . Observemos que $l(v, g_i) \geq m_1^v + \dots + m_p^v$, para todo $v \in \mathbb{R}_+^n, i = 1, \dots, r$. De fato, vejamos que

$$\begin{aligned} l(v, \Gamma_+(M)) &= \min\{\langle k, v \rangle : k \in \Gamma_+(M)\} \\ &= \min\{\langle k_1 + \dots + k_p, v \rangle : k_i \in \Gamma_+(M_i)\} \\ &= \min\{\langle k_1, v \rangle + \dots + \langle k_p, v \rangle : k_i \in \Gamma_+(M_i)\} \\ &= \min\{\langle k_1, v \rangle : k_1 \in \Gamma_+(M_1)\} + \dots + \min\{\langle k_p, v \rangle : k_p \in \Gamma_+(M_p)\} \\ &= l(v, \Gamma_+(M_1)) + \dots + l(v, \Gamma_+(M_p)) \\ &= m_1^v + \dots + m_p^v. \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato que $l(v, \Gamma_+(M_i)) = \min\{l(v, u_1^1), \dots, l(v, u_1^s)\} = m_i^v$. Daí, $l(v, g_i) \geq m_1^v + \dots + m_p^v$ pois $g_i \in \Gamma_+(M)$. Se $v \in \mathbb{R}_+^n, v \neq 0$, e M é Newton não-degenerado, então

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(p(v, M)(x)) < p\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}.$$

Logo, nem todos os menores de $p(v, M)$ são identicamente zeros. Seja h o menor de ordem p formado pelas colunas i_1, \dots, i_p de $p(v, M)$, onde $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq s$. Suponhamos que $h \neq 0$,

$$h = \begin{vmatrix} p_v^M(u_1^{i_1}) & \dots & p_v^M(u_1^{i_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ p_v^M(u_p^{i_1}) & \dots & p_v^M(u_p^{i_p}) \end{vmatrix}.$$

Se g é menor de M formado pelas colunas i_1, \dots, i_p de M , observamos que

$$l(v, g) = l(v, h) = m_1^v + \dots + m_p^v.$$

Como $h \neq 0$, pelo menos um $p_v^M(u_j^{i_j}) \neq 0$, onde $i_1 \leq i_j \leq i_p$ e $1 \leq j \leq p$. Isso acontece

quando $l(v, u_j^{ij}) = m_j^v$ pois $p_v^M(u_j^{ij}) = p_v(u_j^{ij}) = (u_j^{ij})_\Delta$. Logo,

$$\begin{aligned}
l(v, h) &= \min\{\langle k, v \rangle : k \in \Gamma_+(h) \subset \Gamma_+(M)\} \\
&= \langle \tilde{k}, v \rangle \\
&= \langle \tilde{k}_{i_1} + \cdots + \tilde{k}_{i_p}, v \rangle, \tilde{k}_{i_j} \in \Gamma_+(u_j^{ij}) \text{ e } \tilde{k}_{i_j} \in \Delta(v, u_j^{ij}) \\
&= \langle \tilde{k}_{i_1}, v \rangle + \cdots + \langle \tilde{k}_{i_p}, v \rangle \\
&= l(v, u_{i_1}^{i_1 j_1}) + \cdots + l(v, u_{i_p}^{i_p j_p}) \\
&= m_1^v + \cdots + m_p^v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l(v, g) &= \min\{\langle k, v \rangle : k \in \Gamma_+(g)\} \\
&= \langle k', v \rangle \\
&= \langle k'_1 + \cdots + k'_p, v \rangle \\
&= \langle k'_1, v \rangle + \cdots + \langle k'_p, v \rangle \text{ tal que } \langle k'_i, v \rangle = \min\{l(k, u_j^1), \dots, l(k, u_j^s)\} = m_j^v \\
&= m_1^v + \cdots + m_p^v.
\end{aligned}$$

Logo, $l(v, g) = m_1^v + \cdots + m_p^v = l(v, h)$ e portanto, $p_v(g) = (g)_{\Delta(v, g)} = h = p_v^S(g)$, pois

$$\Delta(v, g) = \{k \in \Gamma_+(g) : \langle k, v \rangle = l(v, g)\} = \{k \in \Gamma_+(g) : \langle k, v \rangle = l(v, h)\}.$$

Assim, obtemos a relação

$$\min\{l(v, g_1), \dots, l(v, g_r)\} = m_1^v + \cdots + m_p^v, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}_+^n \quad (3.5)$$

e como consequência, temos

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{C}^n : p_v^S(g_i)(x) = \cdots = p_v^S(g_r)(x) = 0\} &= \{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(p(v, M)(x)) < p\} \\
&\subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}
\end{aligned}$$

para todo $v \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.

Desse modo, $I_p(M)$ é Newton não-degenerado, pelo Lema 3.11.

Pelo Lema 2.9, temos que

$$\Gamma_+(I_p(M)) = \{k \in \mathbb{R}_+^n : \langle k, v \rangle \geq l(v, \Gamma_+(I_p(M)))\}.$$

Como $l(v, \Gamma_+(I_p(M))) = \min\{l(v, g_1), \dots, l(v, g_r)\} = m_1^v + \cdots + m_p^v = l(v, \Gamma_+(M))$ segue que $\Gamma_+(I_p(M)) = \Gamma_+(M)$.

Agora, provaremos a recíproca. Seja $G = \{u^1, \dots, u^s\} \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um sistema de geradores de M . Como antes, identificamos M com a matriz definida por G . Considere g o menor de ordem p de M e suponhamos que g é igual ao determinante da submatriz de M formada tomando as colunas i_1, \dots, i_p , onde $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq s$. Seja h o determinante da submatriz de $p(v, M)$

formada pelas colunas i_1, \dots, i_p . A igualdade $\Gamma_+(I_p(M)) = \Gamma_+(M)$ implica que a relação 3.5 é verdadeira para todo $v \in \mathbb{R}_+^n$.

Então, $p_v^S(g) \neq 0$ se, e somente se, $h \neq 0$. Nesse caso, temos que $p_v^S(g) = p_v(g) = g_\Delta$, onde $\Delta = \Delta(v, \Gamma_+(g))$. Portanto,

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(p(v, M)(x)) < p\} &= \{x \in \mathbb{C}^n : p_v^S(g_1)(x) = \dots = p_v^S(g_r)(x) = 0\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\} \end{aligned}$$

onde a última inclusão segue da suposição de que $I_p(M)$ é Newton não-degenerado. \square

Teorema 3.14. *Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo de \mathcal{O}_n^p de modo que $I_p(M) \neq 0$. Então M é Newton não-degenerado se, e somente se,*

$$\overline{M} = M_1^0 \oplus \dots \oplus M_p^0.$$

Demonstração. Suponhamos que M seja Newton não-degenerado e $\{u^1, \dots, u^s\}$ seja um sistema gerador de M .

Seja $h = (h_1, \dots, h_p) \in M_1^0 \oplus \dots \oplus M_p^0$, isto é, $h \in \mathcal{O}_n^p$ tal que $\text{supp}(h_i) \subseteq \Gamma_+(M_i)$, para todo $i = 1, \dots, p$. Em particular,

$$\begin{aligned} l(v, h_i) &= l(v, \Gamma_+(h_i)) \\ &= l(v, \Gamma_+(\text{supp}(h_i))) \\ &= \min\{\langle k, v \rangle : k \in \Gamma_+(\text{supp}(h_i))\} \\ &\geq \min\{\langle k, v \rangle : k \in \Gamma_+(M_i)\} \\ &= l(v, \Gamma_+(M_i)) \\ &= \min\{l(v, u_i^1), \dots, l(v, u_i^s)\} \\ &= m_i^v \end{aligned}$$

para todo $v \in \mathbb{R}_+^n$ e todo $i = 1, \dots, p$.

Seja f o determinante da matriz quadrada B de tamanho p cujas primeiras $p-1$ colunas são as primeiras $p-1$ colunas de M e cuja última coluna é formada pelas componentes de h .

$$B = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^{p-1} & h_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_p^1 & \dots & u_p^{p-1} & h_p \end{pmatrix}.$$

Então,

$$f = \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) u_{\sigma(1)}^1 u_{\sigma(2)}^2 \cdots u_{\sigma(p-1)}^{p-1} h_{\sigma(p)},$$

onde $\epsilon(\sigma) = 1$ se σ for par, $\epsilon(\sigma) = -1$ se σ for ímpar e S_p é o grupo de todas as permutações do conjunto $\{1, 2, \dots, p\}$.

Notemos que

$$\begin{aligned} l(v, u_{\sigma(1)}^1 u_{\sigma(2)}^2 \cdots u_{\sigma(p-1)}^{p-1} h_{\sigma(p)}) &= l(v, u_{\sigma(1)}^1) + \cdots + l(v, u_{\sigma(p-1)}^{p-1}) + l(v, h_{\sigma(p)}) \\ &\geq m_1^v + \cdots + m_p^v, \end{aligned}$$

para todo $\sigma \in S_p$ e $v \in \mathbb{R}_+^n$.

Então, $l(v, f) \geq m_1^v + \cdots + m_p^v$. O mesmo argumento mostra que $l(v, f') \geq m_1^v + \cdots + m_p^v$, para qualquer menor f' de ordem p da matriz (M, h) e todo $v \in \mathbb{R}_+^n$. Portanto, pelo Lema 2.9, $\Gamma_+(I_p(M, h)) \subseteq \Gamma_+(M)$. Pela Proposição 3.13, $I_p(M)$ é Newton não-degenerado e $\Gamma_+(M) = \Gamma_+(I_p(M))$.

Dessa forma, se $\tilde{f} \in I_p(M, h)$, temos que $\text{supp}(\tilde{f}) \subset \Gamma_+(I_p(M, h)) \subset \Gamma_+(M) = \Gamma_+(I_p(M))$. Pelo Teorema 2.29, $\Gamma_+(I_p(M)) = C(\overline{I_p(M)})$. Como $\overline{I_p(M)}$ é um ideal e $x^k \in \overline{I_p(M)}$, para todo $k \in \text{supp}(\tilde{f})$, segue que $\tilde{f} \in \overline{I_p(M)}$. Portanto, $I_p(M, h) \subseteq \overline{I_p(M)}$.

O Teorema 3.8 garante que $h \in \overline{M}$ e, portanto, $M_1^0 \oplus \cdots \oplus M_p^0 \subset \overline{M}$. Pelo Lema 3.10, $\overline{M} \subseteq M_1^0 \oplus \cdots \oplus M_p^0$. Assim, concluímos que $\overline{M} = M_1^0 \oplus \cdots \oplus M_p^0$.

Agora, suponhamos que $\overline{M} = M_1^0 \oplus \cdots \oplus M_p^0$. Seja $v \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ e, para cada $i = 1, \dots, p$, considere um monômio x^{q_i} tal que $\langle v, q_i \rangle = m_i^v$ e $q_i \in \Gamma_+(M_i)$. Por hipótese, os elementos

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (x^{q_1}, 0, \dots, 0) \\ \delta_2 &= (0, x^{q_2}, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \delta_p &= (0, \dots, 0, x^{q_p}) \end{aligned}$$

pertencem a \overline{M} . Pelo Corolário 3.9, temos $I_p(M, \delta_1, \dots, \delta_p) \subseteq \overline{I_p(M)}$. Então, $\det(\delta_1, \dots, \delta_p) = x^{q_1} x^{q_2} \cdots x^{q_p} \in \overline{I_p(M)}$, mas isso implica que $l(v, x^{q_1} x^{q_2} \cdots x^{q_p}) \geq \min\{l(v, g_1), \dots, l(v, g_r)\}$, onde $\{g_1, \dots, g_r\}$ é o sistema de geradores de $I_p(M)$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} m_1^v + \cdots + m_p^v = \langle v, q_1 \rangle + \cdots + \langle v, q_p \rangle &= l(v, x^{q_1} x^{q_2} \cdots x^{q_p}) \\ &\geq \min\{l(v, g_1), \dots, l(v, g_r)\} \\ &\geq m_1^v + \cdots + m_p^v \end{aligned}$$

Assim, $l(v, \Gamma_+(I_p(M))) = \min\{l(v, g_1), \dots, l(v, g_r)\} = m_1^v + \cdots + m_p^v = l(v, M)$. Pelo Lema 2.9, temos que $\Gamma_+(I_p(M)) = \Gamma_+(M)$. Então, se $k \in \mathbb{Z}_+^n$ é um vértice de $\Gamma_+(I_p(M))$, existe algum $w_i \in \Gamma_+(M_i)$, $i = 1, \dots, p$, tal que

$$k = w_1 + \cdots + w_p.$$

Então, por hipótese, os elementos de \mathcal{O}_n^p da forma

$$\begin{aligned}\theta_1 &= (x^{w_1}, 0, \dots, 0) \in \overline{M} \\ \theta_2 &= (0, x^{w_2}, \dots, 0) \in \overline{M} \\ &\vdots \\ \theta_p &= (0, 0, \dots, x^{w_p}) \in \overline{M}\end{aligned}$$

Pelo Corolário 3.9, $I_p(M, \theta_1, \dots, \theta_p) \subseteq \overline{I_p(M)}$. Daí, $x^k = x^{w_1}x^{w_2} \dots x^{w_p} \in \overline{I_p(M)}$. Portanto, provamos que cada vértice de $\Gamma_+(I_p(M))$ pertence ao fecho de $I_p(M)$.

Note que $x^k \in \overline{I_p(M)}$ se, e somente se, $k \in C(\overline{I_p(M)})$. Segue que $\Gamma_+(I_p(M)) \subset C(\overline{I_p(M)})$. Pela Proposição 2.23, $\Gamma_+(I_p(M)) = C(\overline{I_p(M)})$. Concluimos que $I_p(M)$ é Newton não-degenerado, pelo Teorema 2.29. Portanto, pela Proposição 3.13, temos que M é Newton não-degenerado. \square

Embora a definição de submódulo Newton não-degenerado $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ requer que a inclusão (3.4) seja satisfeita para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, podemos reduzir esta definição com uma coleção finita de condições, como veremos no próximo lema.

Se Δ é uma face de $\Gamma_+(M)$, então Δ admite uma única decomposição $\Delta = \Delta_1 + \dots + \Delta_p$, onde Δ_i é uma face de $\Gamma_+(M_i)$, para todo $i = 1, \dots, p$. Assim, definimos M_Δ como a matriz obtida pela substituição das entradas u_j^i de M por $(u_j^i)_{\Delta_j}$, para todo $i = 1, \dots, s$ e $j = 1, \dots, p$.

Lema 3.15. *Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo tal que $I_p(M) \neq 0$. O submódulo M é Newton não-degenerado se, e somente se, para qualquer face compacta $\Delta \subseteq \Gamma_+(M)$, temos*

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(M_\Delta(x)) < p\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \dots x_n = 0\} \quad (3.6)$$

Demonstração. Seja $\Gamma_+ = \Gamma_+(M)$, se Δ é uma face de Γ_+ e $\Delta = \Delta(v, \Gamma_+)$, onde $v \in \mathbb{R}_+^n$, $v \neq 0$. Então, observemos que $p(v, M) = M_\Delta$. De fato, se $l(v, u_j^i) = m_j^v$, temos que $\Delta(v, u_j^i) = \Delta_j$, onde Δ_j é uma face de $\Gamma_+(M_j)$. Dessa forma, $p_v^M(u_j^i) = (u_j^i)_{\Delta_j}$. Caso contrário, se $l(v, u_j^i) \neq m_j^v$, então $\text{supp}(u_j^i) \cap \Delta_j = \emptyset$. Logo, $(u_j^i)_{\Delta_j} = 0 = p_v^M(u_j^i)$. Com o mesmo raciocínio, temos que $p(v, M_\Delta) = M_\Delta$.

Portanto, M é newton não-degenerado se, e somente se,

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(M_\Delta(x)) < p\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \dots x_n = 0\}$$

para qualquer face Δ de $\Gamma_+(M)$.

Seja Δ uma face arbitrária de Γ_+ e suponhamos que a inclusão 3.6 vale para qualquer face compacta de Γ_+ . Então, o submódulo de \mathcal{O}_n^p definido por M_Δ é Newton não-degenerado. Pela Proposição 3.13, $I_p(M_\Delta)$ é Newton não-degenerado. Pelo Lema 3.11, temos

$$\{x \in \mathbb{C}^n : p_v^S(g_1)(x) = \dots = p_v^S(g_r)(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \dots x_n = 0\}$$

para qualquer face, onde S é o sistema de geradores de $I_p(M_\Delta)$. Segue da Proposição 3.13 que

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(M_\Delta(x)) < p\} &= \{x \in \mathbb{C}^n : p_v^S(g_1)(x) = \cdots = p_v^S(g_r)(x) = 0\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\} \end{aligned}$$

Como $p(v, M_\Delta) = M_\Delta = p(v, M)$, segue que M é Newton não-degenerado. □

Pela Definição 3.12, sabemos que, se M é um submódulo Newton não-degenerado, então M_i é Newton não-degenerado, para todo $i = 1, \dots, p$. O exemplo a seguir mostra que o inverso é falso.

Exemplo 3.16. Considere os polinômios $f, g \in \mathcal{O}_2$ dados por $f(x, y) = x^4 + xy + y^4$, $g(x, y) = x^2 + y^5$. Seja $M \subseteq \mathcal{O}_2^2$ gerado pelas colunas da matriz

$$\begin{pmatrix} x \frac{\partial f}{\partial x} & y \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ 0 & x \frac{\partial g}{\partial x} & y \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Vamos verificar que os ideais

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\langle x \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle 4x^4 + xy, 4y^4 + xy \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \\ M_2 &= \left\langle x \frac{\partial g}{\partial x}, y \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle = \langle 2x^2, 5y^5 \rangle = \langle x^2, y^5 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle \end{aligned}$$

são Newton não-degenerados e $\Gamma_+(M) = \Gamma_+(I_2(M))$. Primeiramente, consideremos o ideal M_1 . O poliedro de Newton $\Gamma_+(M_1)$ é descrito como na figura abaixo.

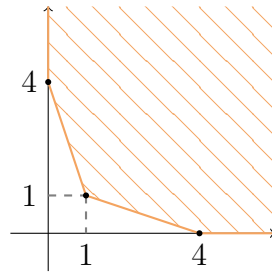


Figura 3.1: Poliedro de Newton de $M_1 = \langle 4x^4 + xy, 4y^4 + xy \rangle$.

Consideremos as faces compactas Δ_1 e Δ_2 definidas pelos segmentos reta de $(4, 0)$ a $(1, 1)$ e $(1, 1)$ a $(0, 4)$, respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (f_1)_{\Delta_1}(x, y) = (f_2)_{\Delta_1}(x, y) = (0, 0)\} &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : 4x^4 + xy = xy = 0\} \\ &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (f_1)_{\Delta_2}(x, y) = (f_2)_{\Delta_2}(x, y) = (0, 0)\} &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 4y^4 + xy = 0\} \\ &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}. \end{aligned}$$

Logo, M_1 é Newton não-degenerado.

Agora, consideremos o ideal M_2 . Temos o seguinte poliedro de Newton.

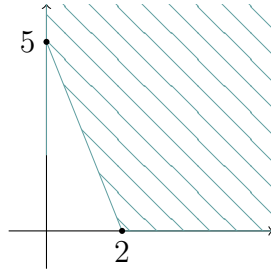


Figura 3.2: Poliedro de Newton de $M_2 = \langle x^2, y^5 \rangle$.

Considere a face compacta Δ dada pelo segmento de reta que liga o ponto $(2, 0)$ ao ponto $(5, 0)$. Segue que

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (g_1)_\Delta(x, y) = (g_2)_\Delta(x, y) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 = y^5 = 0\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}.$$

Portanto, M_2 é Newton não-degenerado.

Como $\Gamma_+(M) = \Gamma_+(M_1) + \Gamma_+(M_2)$, temos que $\Gamma_+(M)$ é dado da seguinte forma

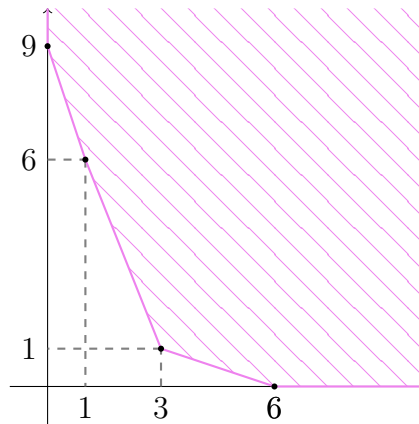


Figura 3.3: Poliedro de Newton de $\Gamma_+(M)$.

No entanto, $I_2(M) = \langle 8x^6 + 2x^3y, 20y^9 + 5xy^6, 20x^4y^5 + 5xy^6 \rangle = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$ não é Newton não-degenerado. De fato, temos que $\text{supp}(I_2(M)) = \text{supp}(h_1) \cup \text{supp}(h_2) \cup \text{supp}(h_3) = \{(6, 0), (3, 1), (0, 9), (1, 6), (4, 5)\}$, isto é, $\Gamma_+(I_2(M)) = \Gamma_+(M)$. Dessa forma, considere a face compacta Δ definida pelo segmento de reta que liga $(6, 0)$ a $(3, 1)$, temos que

$$\begin{aligned} \{(h_1)_\Delta(x, y) = (h_2)_\Delta(x, y) = (h_3)_\Delta(x, y) = (0, 0)\} &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : 8x^6 + 2x^3y = 0\} \\ &\not\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}. \end{aligned}$$

Ou seja, $I_2(M)$ não é Newton não-degenerado. Portanto, M também não é Newton não-degenerado, pela Proposição 3.13.

Exemplo 3.17. Seja $M \subset \mathcal{O}_2^2$ um submódulo gerado pelas colunas da matriz

$$M = \begin{pmatrix} x^4 + xy & x^4 & y^4 \\ x^8 + y^8 & x^2y^2 & x^8 \end{pmatrix}.$$

Consideremos os ideais $M_1 = \langle x^4 + xy, x^4, y^4 \rangle$ e $M_2 = \langle x^8 + y^8, x^2y^2, x^8 \rangle$. Temos os seguintes poliedros de Newton.

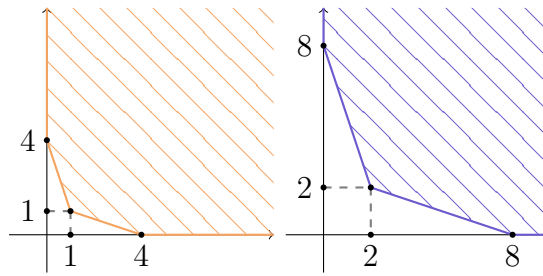


Figura 3.4: Poliedros de Newton de $M_1 = \langle x^4 + xy, x^4, y^4 \rangle$ e $M_2 = \langle x^8 + y^8, x^2y^2, x^8 \rangle$.

Assim, o poliedro de Newton $\Gamma_+(M)$ é dado da seguinte forma

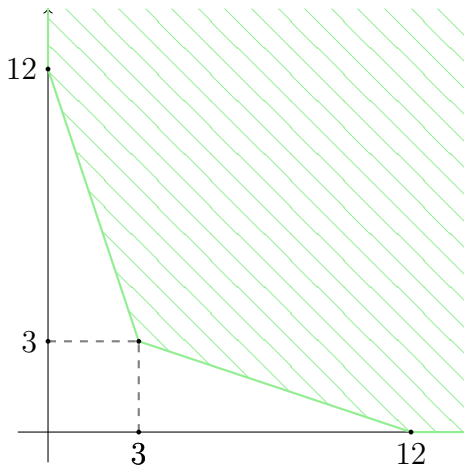


Figura 3.5: Poliedro de Newton de $\Gamma_+(M)$.

Consideremos o ideal $I_2(M) = \langle x^{12} - x^2y^6, x^{12} - y^{12} - x^8y^4 + x^9y, -x^{12} - x^4y^8 + x^3y^3 + x^6y^3 \rangle = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$. Observemos que $\Gamma_+(I_2(M)) = \Gamma_+(M)$.

Agora, vamos verificar se $I_2(M)$ é Newton não-degenerado. Consideremos as faces compactas Δ_1 e Δ_2 definidas pelos segmentos reta de $(12, 0)$ a $(3, 3)$ e $(3, 3)$ a $(0, 12)$, respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (h_1)_{\Delta_1}(x, y) = (h_2)_{\Delta_1}(x, y) = (h_3)_{\Delta_1}(x, y) = (0, 0)\} &= \\ \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^{12} = x^{12} + x^9y = -x^{12} + x^3y^3 + x^6y^2 = 0\} &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (h_1)_{\Delta_2}(x, y) = (h_2)_{\Delta_2}(x, y) = (h_3)_{\Delta_2}(x, y) = (0, 0)\} &= \\ \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : -x^2y^6 = -y^2 = -x^{12} + x^3y^3 = 0\} &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}. \end{aligned}$$

Logo, $I_2(M)$ é Newton não-degenerado. Assim, pela Proposição 3.13, M é Newton não-degenerado.

Observação 3.18. A definição de fecho integral para submódulos $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ pode ser escrita analogamente para submódulos de \mathcal{A}_n^p , onde \mathcal{A}_n denota o anel local de germes analíticos reais $f : (\mathbb{R}_n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ (ver [9]). Além disso, uma versão do Teorema 3.8 para submódulos de \mathcal{A}_n^p também existe (ver [9]) e o poliedro de Newton de um ideal $I \subseteq \mathcal{A}_n$ é definido analogamente. Consequentemente, a Definição 3.12, Proposição 3.13 e Teorema 3.14 podem ser estendidos para submódulos $M \subseteq \mathcal{A}_n^p$.

Multiplicidades e submódulos Newton não-degenerados

Neste capítulo, aplicaremos os conceitos e resultados estudados anteriormente para descrever alguns elementos algébricos de suma importância, cuja definição pode ser num certo sentido bastante complicada, como por exemplo, a multiplicidade de Buchsbaum-Rim. Ressaltamos que na próxima seção nosso objetivo geral é caracterizar a classe de submódulos $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ de modo que o fecho integral de M e a multiplicidade de Buchsbaum-Rim são computados utilizando alguns objetos algébricos que serão expressos em termos determinados ideais relacionados a M .

4.1 Multiplicidade de Buchsbaum-Rim e multiplicidades mistas de ideais

Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um \mathcal{O}_n -submódulo de co-comprimento finito. Como M herda uma estrutura natural de espaço vetorial sobre \mathbb{C} , o co-comprimento de M será considerado o comprimento como \mathbb{C} -espaço vetorial do quociente $\frac{\mathcal{O}_n^p}{M}$. Denotaremos por $l(\mathcal{O}_n^p/M)$ o co-comprimento de M , isto é, $l(\mathcal{O}_n^p/M) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n^p}{M}$.

Seja $S(\mathcal{O}_n^p)$ a \mathcal{O}_n -álgebra simétrica gerada por \mathcal{O}_n^p , a qual podemos escrever da seguinte maneira: se t_1, \dots, t_p são indeterminadas, então $S(\mathcal{O}_n^p) = \mathcal{O}_n[t_1, \dots, t_p]$. Se $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathcal{O}_n^p$, definimos o elemento

$$w(h) = h_1 t_1 + \dots + h_p t_p \in S(\mathcal{O}_n^p).$$

Então, temos um morfismo injetivo de \mathcal{O}_n -módulos

$$w : \mathcal{O}_n^p \longrightarrow S(\mathcal{O}_n^p).$$

Se $M \subset \mathcal{O}_n^p$ for um submódulo, denotamos por $S(M)$ o ideal de $S(\mathcal{O}_n^p)$ gerado por

$$\{w(h) : h \in M\}.$$

Notemos que $S(M)$ é uma subálgebra graduada de $S(\mathcal{O}_n^p)$. O submódulo gerado pelos polinômios homogêneos de ordem r de $S(\mathcal{O}_n^p)$ será denotado por $S(\mathcal{O}_n^p)_r$ e denotamos

$$S(M)_r := S(M) \cap S(\mathcal{O}_n^p)_r, r \geq 0.$$

Suponhamos que $l(\mathcal{O}_n^p/M) < \infty$. Então, $l(S(\mathcal{O}_n^p)_r/S(M)_r) < \infty, \forall r \geq 0$ (ver [8, p.209]).

Utilizando os elementos acima podemos enunciar o seguinte teorema, demonstrado em [8, p. 14].

Teorema 4.1. *Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo de co-comprimento finito. Consideremos a função $H(r) = l(S(\mathcal{O}_n^p)_r/S(M)_r), r \geq 0$. Então, existe uma função polinomial $P(r)$ em r com coeficientes racionais e grau $n + p - 1$ tal que $H(r) = P(r)$, para todo $r \geq 0$.*

Nas condições do Teorema acima, se $a_{n+p-1} \in \mathbb{Q}$ denota o coeficiente de r^{n+p-1} na expressão de $P(r)$, apresentamos o seguinte definição.

Definição 4.2. A *Multiplicidade de Buchsbaum-Rim* de M é definida da seguinte forma

$$e(M) = (n + p - 1)!a_{n+p-1}.$$

Buchsbaum e Rim provaram em [8, p.214] que se $M \neq \mathcal{O}_n^p$ então $e(M) > 0$.

Se I for um ideal de \mathcal{O}_n de co-comprimento finito, então a multiplicidade de Buchsbaum-Rim de I , com I sendo considerado como um submódulo de \mathcal{O}_n é igual à multiplicidade de Samuel de I , que apresentamos no Capítulo 2 (Definição 2.31).

A multiplicidade de Buchsbaum-Rim conecta-se com o fecho integral de módulos através do seguinte resultado, cuja demonstração podemos encontrar em [13].

Teorema 4.3. *Sejam $N \subseteq M$ submódulos de \mathcal{O}_n^p de co-comprimento finito. Então, $e(N) \geq e(M)$. Além disso, $e(N) = e(M)$ se, e somente se, $\bar{N} = \bar{M}$.*

Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo de co-comprimento finito, então qualquer sistema gerador de M tem pelo menos $n + p - 1$ elementos (ver [8, p. 213]). Assim, o submódulo $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ de co-comprimento finito é chamado de *submódulo de parâmetros* quando M admite um sistema de geradores formado por $n + p - 1$ elementos. A matriz de tamanho $p \times (n + p - 1)$ construída a partir de tal sistema de geradores é chamada de *matriz de parâmetros*. Dessa forma, o próximo resultado garante que quando M é um submódulo de parâmetros, sua multiplicidade de Buchsbaum-Rim é o co-comprimento do ideal de menores maximais de M .

Teorema 4.4. [8] *Seja $M \subset \mathcal{O}_n^p$ um submódulo de parâmetros. Então,*

$$e(M) = l(\mathcal{O}_n^p/M) = l(\mathcal{O}_n/I_p(M)).$$

Dados $J \subseteq I$ ideais de \mathcal{O}_n , o Teorema 2.35 garante que J é redução de I se, e somente se, $\bar{I} = \bar{J}$. Esse fato é a motivação para a seguinte definição.

Definição 4.5. Sejam N, M submódulos de \mathcal{O}_n^p de modo que $N \subseteq M$. Dizemos que N é uma redução de M quando $\overline{N} = \overline{M}$.

Uma referência para a definição anterior é [22, p. 436]. O próximo resultado afirma que as reduções existem genericamente.

Teorema 4.6. [22, p. 441]. *Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo de co-comprimento finito. Então, existe um submódulo de parâmetros $N \subseteq M$ tal que N é uma redução de M . Além disso, se $\{u^1, \dots, u^s\}$ é um sistema gerador de M , então N pode ser gerado por $n + p - 1$ elementos expressos como combinações \mathbb{C} -lineares de u^1, \dots, u^s .*

A partir dos Teoremas 4.3, 4.4 e 4.6, temos que $e(M)$ é igual ao mínimo dos co-comprimentos $l(\mathcal{O}_n^p/N)$ dos submódulos de parâmetros $N \subseteq M$ obtidos como combinações \mathbb{C} -lineares de determinado sistema gerador de M .

A seguir, apresentaremos uma fórmula para calcular $e(M)$, no caso em que $M = I_1 \oplus \dots \oplus I_p$, onde I_1, \dots, I_p são ideais de \mathcal{O}_n de co-comprimento finito. Para tanto, utilizaremos as multiplicidades mistas de I_1, \dots, I_p que definiremos no que segue.

Observamos que, se I_1, \dots, I_p são ideais de \mathcal{O}_n de co-comprimento finito e definimos

$$M = I_1 \oplus \dots \oplus I_p,$$

então a subálgebra graduada $S(M)$ de $S(\mathcal{O}_n^p)$ é igual a álgebra de Rees multigraduada de I_1, \dots, I_p , isto é,

$$S(M) = \mathcal{O}_n[I_1 t_1, \dots, I_p t_p].$$

Vamos considerar a função $B : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$B(r_1, \dots, r_p) = l(\mathcal{O}_n/I_1^{r_1} \dots I_p^{r_p}),$$

para todo $(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p$. Foi provado por Bhattacharya [1] para $p = 2$ e por Teissier e Risler [25, p.302] o caso geral que existe um polinômio $Q(r_1, \dots, r_p)$ de grau total n com coeficientes racionais tais que $B(r_1, \dots, r_p) = Q(r_1, \dots, r_p)$, para todo $r_1, \dots, r_p \gg 0$. Suponhamos que o termo homogêneo de grau n de $Q(r_1, \dots, r_p)$ seja escrito

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p \geq 0}} a_{i_1, \dots, i_p} r_1^{i_1} \dots r_p^{i_p}.$$

Assim, temos a seguinte definição.

Definição 4.7. As multiplicidades mistas dos ideais I_1, \dots, I_p são definidas pelos números

$$e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p) = i_1! \dots i_p! a_{i_1, \dots, i_p},$$

onde $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ e $i_1 + \dots + i_p = n$.

De acordo com [25, p.303], o número $e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p)$ é igual ao co-comprimento do ideal de parâmetros gerado por $G_1 \cup \dots \cup G_p$, onde G_j é o conjunto formado por i_j combinações \mathbb{C} -lineares genéricas de um dado sistema gerador de $I_j, j = 1, \dots, p$.

Na sequência apresentaremos dois resultados sobre multiplicidades mistas que usaremos a fim de calcular a multiplicidade de Buchsbaum-Rim de um submódulo Newton não-degenerado $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em [21].

Teorema 4.8. *Sejam I_1, \dots, I_n ideais de \mathcal{O}_n de co-comprimento finito. Então,*

$$e(I_1^{r_1} \cdots I_p^{r_p}) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p \geq 0}} \frac{n!}{i_1! \cdots i_p!} e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p) r_1^{i_1} \cdots r_p^{i_p},$$

para todo $(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p$.

Quando $p = n$ e $i_1 = \dots = i_n = 1$, denotamos a multiplicidade $e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_n)$ por $e(I_1, \dots, I_n)$.

Corolário 4.9. *Sejam I_1, \dots, I_n ideais de \mathcal{O}_n de co-comprimento finito. Então,*

$$n!e(I_1, \dots, I_n) = \sum_{\substack{B \subseteq \{1, \dots, n\} \\ B \neq \emptyset}} (-1)^{n-|B|} \cdot e\left(\prod_{j \in B} I_j\right)$$

onde $|B|$ denota o número de elementos de $B \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Corolário 4.10. *Sejam I_1, \dots, I_p ideais de \mathcal{O}_n de co-comprimento finito. Então,*

$$e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p) = e_{i_1, \dots, i_p}(\overline{I_1}, \dots, \overline{I_p})$$

para todo $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tal que $i_1 + \dots + i_p = n$.

Demonstração. Dada uma p -upla $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tal que $i_1 + \dots + i_p = n$, então o número $e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p)$ é igual a $e(J_1, \dots, J_n)$, onde J_1, \dots, J_n é uma sequência de ideais formada por i_1 cópias de I_1 , i_2 cópias de I_2 , e assim, por diante. Portanto, o resultado segue do Corolário 4.9 e a versão de Teorema 4.3 para ideais. \square

Como dito anteriormente, a seguir, apresentaremos uma fórmula para calcular $e(M)$, no caso em que $M = I_1 \oplus \dots \oplus I_p$, onde I_1, \dots, I_p são ideais de \mathcal{O}_n de co-comprimento finito. Para tanto utilizaremos o seguinte Lema, cuja prova deve ser encontrada em [28, p.221].

Lema 4.11. *Para $r, n, p \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} K &= \{(i_1, \dots, i_p) : i_1 + \dots + i_p = n, i_1, \dots, i_p \in \mathbb{N}\} \\ R &= \{(r_1, \dots, r_p) : r_1, \dots, r_p \in \mathbb{N}, r_1 + \dots + r_p = r\}. \end{aligned}$$

Então

$$\sum_R \sum_K \frac{e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p) r_1^{i_1} \dots r_p^{i_p}}{i_1! \dots i_p!} = \frac{r^{n+p-1}}{(n+p-1)!} \sum_K e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p) + \dots$$

A seguir, apresentamos um dos principais resultados desta seção.

Teorema 4.12. *Sejam I_1, \dots, I_p ideais de \mathcal{O}_n de co-comprimento finito e M um submódulo de \mathcal{O}_n^p dado por $M = I_1 \oplus \dots \oplus I_p$. Então, M também tem co-comprimento finito e*

$$e(M) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p > 0}} e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p). \quad (4.1)$$

Demonstração. A álgebra graduada

$$S(M) = \bigoplus_{r \geq 0} S(M)_r \subseteq S(\mathcal{O}_n^p)$$

é igual a álgebra de Rees multigrada $\mathcal{O}_n[I_1 t_1, \dots, I_p t_p]$. Portanto, podemos reescrever

$$H(r) = l(S(\mathcal{O}_n^p)/S(M)_r) = \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_p = n \\ r_1, \dots, r_p \geq 0}} l(\mathcal{O}_n/I_1^{r_1} \dots I_p^{r_p}).$$

Seja Q um polinômio em r_1, \dots, r_p de grau total n tal que

$$Q(r_1, \dots, r_p) = l(\mathcal{O}_n/I_1^{r_1} \dots I_p^{r_p}),$$

para todo $r_1, \dots, r_p \gg 0$.

Podemos supor que a igualdade acima vale para todo $(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p$ uma vez que essa suposição não afeta o valor de $e(M)$. O termo homogêneo de grau n de $Q(r_1, \dots, r_p)$ pode ser escrito como

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p \geq 0}} a_{i_1, \dots, i_p} r_1^{i_1} \dots r_p^{i_p}.$$

Como $e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p) = i_1! \dots i_p! a_{i_1, \dots, i_p}$, segue que

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p \geq 0}} \frac{e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p)}{i_1! \dots i_p!} r_1^{i_1} \dots r_p^{i_p}.$$

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} H(r) &= \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_p = r \\ r_1, \dots, r_p \geq 0}} Q(r_1, \dots, r_p) \\ &= \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_p = n \\ r_1, \dots, r_p \geq 0}} \left(\sum_{\substack{r_1 + \dots + r_p = r \\ r_1, \dots, r_p \geq 0}} \frac{e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p)}{i_1! \dots i_p!} r_1^{i_1} \dots r_p^{i_p} + q(r_1, \dots, r_p) \right) \end{aligned}$$

onde $q(r_1, \dots, r_p)$ denota um polinômio em r_1, \dots, r_p de grau total menor que n com coeficientes racionais.

Aplicando o Lema 4.11 a expressão anterior pode ser simplificada

$$H(r) = \frac{r^{n+p-1}}{(n+p-1)!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_p=n \\ i_1, \dots, i_p > 0}} e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p) + h(r),$$

onde $h(r)$ é um polinômio em r de grau menor que $n+p-1$ com coeficientes racionais.

Pela definição da Multiplicidade de Buchsbaum-Rim, temos

$$e(M) = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_p=n \\ i_1, \dots, i_p > 0}} e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p),$$

como queríamos demonstrar. □

Para o enunciado e demonstração do Teorema 4.12 seguimos [3]. O Teorema 4.12 também foi mostrado por Kirby e Rees em [16, p.444] considerando uma notação diferente e uma abordagem baseada na noção de redução conjunta de um conjunto de ideais (ver [21]).

Indicamos na prova do Lema 3.10 que $\overline{M} \subseteq \overline{M}_1 \oplus \dots \oplus \overline{M}_p$ para qualquer submódulo $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$. No corolário a seguir, vemos que o Teorema 4.12 dá uma caracterização numérica dos submódulos $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ de co-comprimento finito tal que $\overline{M} = \overline{M}_1 \oplus \dots \oplus \overline{M}_p$. Porém, primeiramente apresentamos a seguinte definição.

Definição 4.13. Sejam $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo de co-comprimento finito e os ideais M_1, \dots, M_p , onde também têm co-comprimento finito. Definimos

$$\delta(M) = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_p=n \\ i_1, \dots, i_p > 0}} e_{i_1, \dots, i_p}(M_1, \dots, M_p).$$

Corolário 4.14. *Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo de co-comprimento finito. Então $e(M) \geq \delta(M)$ e a igualdade é válida se, e somente se $\overline{M} = \overline{M}_1 \oplus \dots \oplus \overline{M}_p$.*

Demonstração. Da relação $M \subseteq M_1 \oplus \dots \oplus M_p$, temos

$$e(M) \geq e(M_1 \oplus \dots \oplus M_p) = \delta(M),$$

onde a última igualdade segue do Teorema 4.12. Se supormos que $\overline{M} = \overline{M}_1 \oplus \dots \oplus \overline{M}_p$, então,

pelo Teorema 4.3 e Corolário 4.10, obtemos as igualdades

$$\begin{aligned}
e(M) &= e(\overline{M}) \\
&= e(\overline{M}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{M}_p) \\
&= \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p > 0}} e_{i_1, \dots, i_p}(\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_p) \\
&= \sum_{\substack{i_1 + \cdots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p > 0}} e_{i_1, \dots, i_p}(M_1, \dots, M_p) \\
&= e(M_1 \oplus \cdots \oplus M_p) \\
&= \delta(M).
\end{aligned}$$

Se assumirmos que $e(M) = \delta(M)$, então concluímos que $e(M) = e(M_1 \oplus \cdots \oplus M_p)$, pelo Teorema 4.12. Portanto, os submódulos M e $M_1 \oplus \cdots \oplus M_p$ tem o mesmo fecho integral, pelo Teorema 4.3. Assim, pela Definição 3.1, temos a relação $\overline{M_1 \oplus \cdots \oplus M_p} = \overline{M}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{M}_p$. \square

Exemplo 4.15. Considere o submódulo M de \mathcal{O}_2^2 gerado pelas colunas da matriz

$$M = \begin{pmatrix} x^6 + y^2 & xy^2 + 2x^4y & xy^2 + y^2 \\ xy^3 & x^2 + y^5 & x^2y \end{pmatrix}.$$

Como M é um submódulo de parâmetro, pelo Teorema 4.4 temos $e(M) = l(\mathcal{O}_2/I_2(M)) = 27$.

Além disso, considerando a definição de $\delta(M)$ e o Corolário 4.9, temos $\delta(M) = \frac{1}{2}(-e(M_1) - e(M_2) + e(M_1M_2)) = 27$.

Portanto, embora M não seja Newton não-degenerado, obtemos a relação $\overline{M} = \overline{M}_1 \oplus \overline{M}_2$ do Corolário 4.14.

4.2 Multiplicidade de Buchsbaum-Rim e submódulos Newton não-degenerados

Nessa seção, vamos caracterizar os submódulos Newton não-degenerado de \mathcal{O}_n^p através de sua multiplicidade de Buchsbaum–Rim $e(M)$. Além disso, apresentaremos um método eficaz para o cálculo de $e(M)$ utilizando volumes de poliedros de Newton anexados a M .

Se K é um conjunto limitado em \mathbb{R}^n , denotamos por $V_n(K)$ o volume n -dimensional de K . Se $\Gamma_+ \subset \mathbb{R}_+^n$ é um poliedro de Newton que intersecta cada eixo coordenado, também denotamos o número $V_n(\mathbb{R}_+^n \setminus \Gamma_+)$ simplesmente por $V_n(\Gamma_+)$.

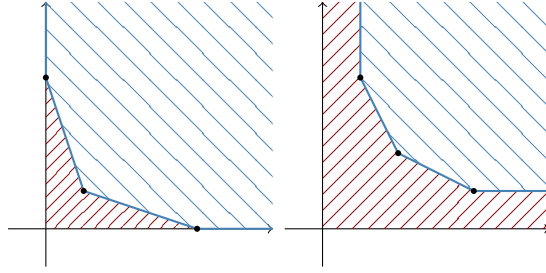


Figura 4.1: Complementar dos Poliedros de Newton limitado e ilimitado, respectivamente.

A Figura 5.2 ilustra perfeitamente o porque precisamos que $\Gamma_+ \subset \mathbb{R}_+^n$ intersekte todos os eixos coordenados para que possamos calcular $V_n(\Gamma_+)$.

Proposição 4.16. *Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo Newton não-degenerado de co-comprimento finito. Então, $e(M) \leq n!V_n(\Gamma_+(M))$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.6, podemos considerar uma redução $N \subseteq M$ de M gerado por $p + n - 1$ combinações lineares de um sistema gerador de M . Então, pelos Teoremas 4.3 e 4.4, $e(M)$ é igual ao co-comprimento de $I_p(N)$ em \mathcal{O}_n . Isto é,

$$e(M) = e(N) = l(\mathcal{O}_n/I_p(N)).$$

Como N é redução de M então $\overline{N} = \overline{M}$, e isso implica que $\overline{I_p(M)} = \overline{I_p(N)}$, pelo item (2) do Teorema 3.8. Além disso, a inclusão $N \subseteq M$ implica que $I_p(N) \subseteq I_p(M)$. Então, o ideal $I_p(N)$ é redução de $I_p(M)$ e têm a mesma multiplicidade.

Pelo Teorema 2.36, segue que $e(I_p(N)) \geq l(\mathcal{O}_n/I_p(N))$ e pela Proposição 3.13, $I_p(M)$ é Newton não-degenerado e $\Gamma_+(I_p(M)) = \Gamma_+(M)$. Logo, o Teorema 2.36 garante que $e(I_p(M)) = n!V_n(\Gamma_+(I_p(M)))$. Dessa forma, temos

$$e(M) = l(\mathcal{O}_n/I_p(N)) \leq e(I_p(N)) = e(I_p(M)) = n!V_n(\Gamma_+(I_p(M))) = n!V_n(\Gamma_+(M)).$$

□

Observação 4.17. De forma análoga ao visto na Observação 2.33, temos que se M tem co-comprimento finito, então $\Gamma_+(M)$ intersekte todos os eixos coordenados.

No exemplo a seguir veremos que, se $M \subset \mathcal{O}_n^p$ é um submódulo Newton não-degenerado de co-comprimento finito, então o volume $n!V_n(\Gamma_+(M))$ pode ser diferente de $e(M)$.

Exemplo 4.18. Considere o submódulo $M \subset \mathcal{O}_2^2$ gerado pelas colunas da matriz

$$M = \begin{pmatrix} x^4 + xy & x^4 & y^4 \\ x^2 + y^5 & y^5 & x^2 \end{pmatrix}.$$

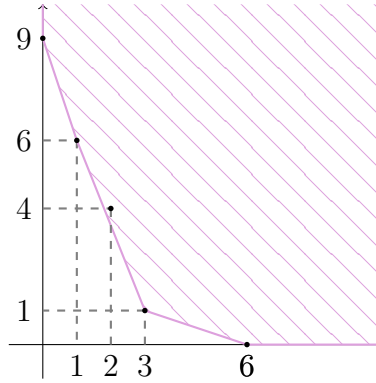
Como M é submódulo de parâmetros, temos $e(M) = l(\mathcal{O}_2/I_2(M)) = 25$. Agora, mostraremos que M é Newton não-degenerado. De fato, considere $I_2(M)$ o ideal gerado pelos menores de ordem 2. Então,

$$\begin{aligned} I_2(M) &= \langle xy^6 - x^6, x^6 + x^3y - x^2y^4 - y^9, x^6 - y^9 \rangle \\ &= \langle xy^6 - x^6, x^3y - x^2y^4, x^6 - y^9 \rangle = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle. \end{aligned}$$

Temos que o suporte de $I_2(M)$ é

$$\text{supp}(I_2(M)) = \{(1, 6), (6, 0), (3, 1), (2, 4), (0, 9)\}.$$

Assim, o poliedro de Newton de $I_2(M)$ é a parte ilimitada do \mathbb{R}_+^2 a partir dos segmentos de reta que ligam os pontos $(0, 9)$ a $(1, 6)$, $(1, 6)$ a $(3, 1)$ e $(3, 1)$ a $(6, 0)$.



Consideremos as faces compactas Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 dadas pelos segmentos citados anteriormente, respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned} \{(g_1)_{\Delta_1}(x, y) = (g_2)_{\Delta_1}(x, y) = (g_3)_{\Delta_1}(x, y) = 0\} &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy^6 = -y^9 = 0\} \\ &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{(g_1)_{\Delta_2}(x, y) = (g_2)_{\Delta_2}(x, y) = (g_3)_{\Delta_2}(x, y) = 0\} &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy^6 = x^3y = 0\} \\ &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{(g_1)_{\Delta_3}(x, y) = (g_2)_{\Delta_3}(x, y) = (g_3)_{\Delta_3}(x, y) = 0\} &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^6 = x^3y = 0\} \\ &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}. \end{aligned}$$

Logo, $I_2(M)$ é Newton não-degenerado. Agora, considere

$$M_1 = \langle x^4 + xy, x^4, y^4 \rangle = \langle xy, x^4, y^4 \rangle \text{ e } M_2 = \langle x^2 + y^5, y^5, x^2 \rangle = \langle y^5, x^2 \rangle.$$

Como o $\text{supp}(M_1) = \{(1, 1), (4, 0), (0, 4)\}$ e $\text{supp}(M_2) = \{(0, 5), (2, 0)\}$, temos que

$$\text{supp}(M) = \{(1, 6), (4, 5), (6, 0), (3, 1), (2, 4), (0, 9)\}.$$

Dessa forma, segue que $\Gamma_+(M) = \Gamma_+(I_2(M))$. Pela Proposição 3.13, M é Newton não-degenerado. Além disso, o número $2!V_2(\Gamma_+(M))$ é igual a 32.

Observação 4.19. O Teorema 2.36 garante que para $I \subseteq \mathcal{O}_n$ um ideal arbitrário de co-comprimento finito, temos que $e(I) \geq n!V_n(\Gamma_+(I))$ e a igualdade $e(I) = n!V_n(\Gamma_+(I))$ caracteriza I ser Newton não-degenerado, onde o número $V_n(\Gamma_+(I))$ é denotado por $v(I)$.

A fim de estabelecer uma caracterização análoga para submódulos, definiremos um número $v(M)$, quando M é um submódulo de co-comprimento finito de \mathcal{O}_n^p . Como vimos no Exemplo 4.18, o número $v(M)$ não deve ser definido como $n!V_n(\Gamma_+(M))$.

Sejam $\Gamma_+^1, \dots, \Gamma_+^p$ poliedros de Newton em \mathbb{R}_+^n intersectando cada eixo coordenado. Considere $I(\Gamma_+^i)$ o ideal de \mathcal{O}_n gerado pelos monômios x^k tal que $k \in \Gamma_+^i$, $i = 1, \dots, p$.

Definição 4.20. Os covolumes mistos de $\Gamma_+^1, \dots, \Gamma_+^p$ são definidos como a coleção de números

$$v_{i_1, \dots, i_p}(\Gamma_+^1, \dots, \Gamma_+^p) = \frac{1}{n!} e_{i_1, \dots, i_p}(I(\Gamma_+^1), \dots, I(\Gamma_+^p))$$

onde $i_1 + \dots + i_p = n$, $i_1, \dots, i_p \geq 0$.

Esses números também podem ser introduzidos em uma linguagem puramente combinatória (ver [15, 14] para mais detalhes).

Sejam I_1, \dots, I_p ideais de \mathcal{O}_n de co-comprimento finito. Denotamos por $v_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p)$ os covolumes mistos dos poliedros de Newton $\Gamma_+(I_1), \dots, \Gamma_+(I_p)$.

Antes de enunciarmos o próximo resultado, lembremos que se I é um ideal de \mathcal{O}_n , o ideal $I(\Gamma_+(I))$ também é denotado por I^0 .

Lema 4.21. *Sejam $I_1, \dots, I_p \subseteq \mathcal{O}_n$ ideais Newton não-degenerados de co-comprimento finito. Então,*

$$e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p) = n!v_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p),$$

para todo $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tal que $i_1 + \dots + i_p = n$.

Demonstração. Como os ideais I_1, \dots, I_p são Newton não-degenerados, o Teorema 2.30 garante que $\bar{I}_j = I_j^0$, para todo $j = 1, \dots, p$. Então,

$$\begin{aligned} v_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p) &= v_{i_1, \dots, i_p}(\Gamma_+(I_1), \dots, \Gamma_+(I_p)) \\ &= \frac{1}{n!} e_{i_1, \dots, i_p}(I(\Gamma_+(I_1)), \dots, I(\Gamma_+(I_p))) \\ &= \frac{1}{n!} e_{i_1, \dots, i_p}(I_1^0, \dots, I_p^0) \\ &= \frac{1}{n!} e_{i_1, \dots, i_p}(\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_p) \\ &= \frac{1}{n!} e_{i_1, \dots, i_p}(I_1, \dots, I_p) \end{aligned}$$

A última igualdade segue do Corolário 4.10. □

Definição 4.22. Seja M um submódulo de \mathcal{O}_n^p tal que $\Gamma_+(M)$ intersecta cada eixo coordenado de \mathbb{R}^n . Em particular, os poliedros de Newton $\{\Gamma_+(M_i), i = 1, \dots, p\}$ também intersectam cada eixo coordenado. Portanto, definimos

$$v(M) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p \geq 0}} v_{i_1, \dots, i_p}(M_1, \dots, M_p).$$

Corolário 4.23. Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo de co-comprimento finito. Então,

$$e(M) \geq \delta(M) \geq n!v(M),$$

e igualdade $e(M) = n!v(M)$ é válida se, e somente se, M é um submódulo Newton não-degenerado.

Demonstração. A inequação $e(M) \geq \delta(M)$ segue do Corolário 4.14.

Seja $M^0 = M_1^0 \oplus \dots \oplus M_p^0$ e notemos que

$$\overline{M^0} = \overline{M_1^0 \oplus \dots \oplus M_p^0} = \overline{M_1^0} \oplus \dots \oplus \overline{M_p^0} = M_1^0 \oplus \dots \oplus M_p^0,$$

logo pelo Teorema 3.14, M^0 é um submódulo Newton não-degenerado de \mathcal{O}_n^p . Pelo Teorema 4.12, temos que

$$e(M^0) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p \geq 0}} e_{i_1, \dots, i_p}(M_1^0, \dots, M_p^0).$$

Como cada M_i^0 é Newton não-degenerado, o Lema 4.21 garante que

$$e(M^0) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p \geq 0}} n!v_{i_1, \dots, i_p}(M_1^0, \dots, M_p^0).$$

Logo, $e(M^0) = n!v(M)$. No entanto, $\overline{M_1} \oplus \dots \oplus \overline{M_p} \subseteq M^0$. Assim, o Corolário 4.10 garante que

$$\delta(M) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p > 0}} e_{i_1, \dots, i_p}(M_1, \dots, M_p) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p > 0}} e_{i_1, \dots, i_p}(\overline{M_1}, \dots, \overline{M_p}),$$

e pelo Teorema 4.12, temos

$$\delta(M) = e(\overline{M_1} \oplus \dots \oplus \overline{M_p}).$$

Como $\overline{M_1} \oplus \dots \oplus \overline{M_p} \subseteq M^0$, o Teorema 4.3 garante a seguinte desigualdade

$$\delta(M) = e(\overline{M_1} \oplus \dots \oplus \overline{M_p}) \geq e(M^0) = n!v(M).$$

Suponhamos que $e(M) = n!v(M)$ é válida. Então, $e(M) = e(M^0)$, isto é, M é uma redução de M^0 . Logo, $\overline{M} = \overline{M^0} = M_1^0 \oplus \dots \oplus M_p^0$. Pelo Teorema 3.14, M é Newton não-degenerado. Por outro lado, se M é Newton não-degenerado, o Teorema 3.14 garante que $\overline{M} = M^0$. Portanto, $e(M) = e(\overline{M}) = e(M^0) = n!v(M)$. \square

No corolário a seguir, resumimos as informações que obtivemos sobre submódulos Newton não-degenerados de co-comprimento finito de \mathcal{O}_n^p .

Corolário 4.24. *Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo de co-comprimento finito tal que $I_p(M) \neq 0$. Então, as seguintes condições são equivalentes.*

- (1) M é um submódulo Newton não-degenerado;
- (2) $I_p(M)$ é um ideal Newton não-degenerado e $\Gamma_+(I_p(M)) = \Gamma_+(M)$;
- (3) $\overline{M} = M_1^0 \oplus \cdots \oplus M_p^0$;
- (4) $e(M) = n!v(M)$;
- (5) $e(I_p(M)) = n!V_n(\Gamma_+(M))$;
- (6) M_i é Newton não-degenerado, para todo $i = 1, \dots, p$, e $e(M) = \delta(M)$.

Demonstração. As equivalências entre as condições (1), (2), (3) e (4) vêm da Proposição 3.13, Teorema 3.14 e Corolário 4.23. Se assumimos (2), então (5) é automaticamente satisfeita pela caracterização numérica de ideais Newton não-degenerado dada no Teorema 2.36.

Denotaremos o ideal $I_p(M)$ por I . Se assumimos (5), temos

$$n!V_n(\Gamma_+(M)) = e(I) \geq n!V_n(\Gamma_+(I)) \geq n!V_n(\Gamma_+(M))$$

onde a última desigualdade é uma consequência da inclusão $\Gamma_+(I) \subseteq \Gamma_+(M)$. Então, segue que

$$e(I) = n!V_n(\Gamma_+(I)).$$

Assim, o Teorema 2.36 garante que I é um ideal Newton não-degenerado e $\Gamma_+(I) = \Gamma_+(M)$. A equivalência entre (1) e (6) segue imediatamente como consequência da definição de submódulo Newton não-degenerado, do Corolário 4.14 e do Teorema 3.14. \square

Como vimos no Corolário 4.23, o número $e(M)$ depende apenas dos poliedros de Newton $\Gamma_+(M_1), \dots, \Gamma_+(M_p)$ quando M é Newton não-degenerado. No próximo resultado veremos que, neste caso, é possível calcular efetivamente a multiplicidade $e(M)$ usando as informações fornecidas por esses poliedros de Newton.

Antes de enunciar tal resultado, lembramos que, se $g \in \mathcal{O}_n$, então $I(g)$ denota o ideal de \mathcal{O}_n gerado por

$$x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, x_n \frac{\partial g}{\partial x_n}.$$

Corolário 4.25. *Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo Newton não-degenerado de co-comprimento finito tal que $I_p(M) \neq 0$. Seja g_{r_1, \dots, r_p} o polinômio obtido como a soma dos monômios x^k de modo que k pertença a $r_1\Gamma_+(M_1) + \dots + r_p\Gamma_+(M_p)$, para um dado $(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p$. Então*

$$e(M) = n!v(M) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p > 0}} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \alpha_j(i_1, \dots, i_p) \right),$$

onde

$$\alpha(i_1, \dots, i_p) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_p = j \\ 0 \leq r_l \leq i_l}} \binom{i_1}{r_1} \cdots \binom{i_p}{r_p} l(\mathcal{O}_n/I(g_{r_1, \dots, r_p})),$$

para todo $j = 1, \dots, n$ e para todo $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tal que $i_1 + \dots + i_p = n$.

Demonstração. Pelos Teoremas 3.14 e 4.3, podemos assumir que $\overline{M} = M_1 \oplus \dots \oplus M_p$, onde M_i é integralmente fechado, $i = 1, \dots, p$. Pelo Corolário 4.14, sabemos que

$$e(M) = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_p = n \\ i_1, \dots, i_p > 0}} e_{i_1, \dots, i_p}(M_1, \dots, M_p).$$

Então, podemos aplicar o Corolário 4.9 para expressar cada multiplicidade mista $e_{i_1, \dots, i_p}(M_1, \dots, M_p)$ em termos de multiplicidades de ideais. Se fixamos $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tal que $i_j + \dots + i_p = n$, temos

$$e_{i_1, \dots, i_p}(M_1, \dots, M_p) = e(J_1, \dots, J_p),$$

onde a sequência de ideais J_1, \dots, J_p é dado por i_1 cópias de M_1 , i_2 cópias de M_2 e assim por diante.

Então, pelo Corolário 4.9, temos a relação

$$e_{i_1, \dots, i_p}(M_1, \dots, M_p) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \left(\sum_{\substack{r_1 + \dots + r_p = j \\ 0 \leq r_l \leq i_l}} \binom{i_1}{r_1} \cdots \binom{i_p}{r_p} e(M_1^{r_1} \cdots M_p^{r_p}) \right).$$

Agora, vamos fixar $(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p$. Como cada ideal M_i é monomial para $i = 1, \dots, p$, o produto $M_1^{r_1} \cdots M_p^{r_p}$ também é um ideal monomial. Além disso, observamos que

$$\Gamma_+(M_1^{r_1} \cdots M_p^{r_p}) = r_1\Gamma_+(M_1) + \dots + r_p\Gamma_+(M_p).$$

A função $g = g_{r_1, \dots, r_p}$ é Newton não-degenerada, por [2, Teorema 5.1]. Então, o ideal $I(g)$ gerado por

$$x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, x_n \frac{\partial g}{\partial x_n}$$

é redução de $M_1^{r_1} \cdots M_p^{r_p}$.

Portanto, a multiplicidade $e(M_1^{r_1} \cdots M_p^{r_p})$ é igual ao co-comprimento de $I(g)$ e o resultado segue. \square

Outras noções de não-degeneração

Neste capítulo, vamos comparar a definição de um submódulo Newton não-degenerado de \mathcal{O}_n^p com a definição de não-degenerado estabelecida por Biviá-Ausina, Fukui e Saia em [4] para matrizes e um poliedro de Newton fixo.

5.1 Filtração de Newton

Inicialmente, apresentaremos a definição de filtração em um anel e construiremos uma filtração a partir de um poliedro de Newton, que chamaremos de Filtração de Newton.

Definição 5.1. Seja A um anel. Uma *filtração* em A é uma família de ideais $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo $I_n \supseteq I_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a filtração $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é multiplicativa em A se:

- (i) $I_0 = A$;
- (ii) $I_m I_n \subseteq I_{m+n}$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Observação 5.2. A definição de filtração e função de ordem, que apresentamos no Capítulo 2 (ver Definição 2.15), são equivalentes. De fato, dada uma função de ordem μ , consideremos $I_n = \{x \in A : \mu(x) \geq n\}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Notemos que

- (i) $I_0 = \{x \in A : \mu(x) \geq 0\} = A$;
- (ii) I_n é ideal de A ;
- (iii) $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ e $A \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$.

Logo, $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma filtração em A .

Reciprocamente, dada uma filtração $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em A , definimos a função μ por $\mu(x) = \sup\{n : x \in I_n\}$. Temos que

- (i) $\mu(0) = \infty$;
- (ii) $\mu(1) = \sup\{n : 1 \in I_n\} = 0$;
- (iii) $\mu(x + y) = \sup\{n : x + y \in I_n\} \geq \inf\{\sup\{n : x \in I_n\}, \sup\{n : y \in I_n\}\} = \inf\{\mu(x), \mu(y)\}$;
- (iv) $\mu(xy) = \sup\{n : xy \in I_n\} \geq \sup\{n : x \in I_n\} + \sup\{n : y \in I_n\} = \mu(x) + \mu(y)$.

Assim, μ é uma função de ordem. Portanto, podemos dizer que uma filtração μ sobre A é uma função de ordem.

Consideremos um poliedro de Newton $\Gamma_+(I)$ de um ideal $I \subseteq \mathcal{O}_n$ de codimensão finita. Na sequência, denotaremos $\Gamma_+(I)$ simplesmente por Γ_+ .

Definição 5.3. Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ é um *vetor primitivo* para $\Delta(v, \Gamma_+)$ quando v define a face $\Delta(v, \Gamma_+)$ e tem comprimento mínimo no conjunto $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\} \cap \mathbb{Z}_+^n$.

Definição 5.4. Dizemos que uma face $\Delta(v, \Gamma_+)$ tem dimensão d , $0 \leq d \leq n - 1$ quando o menor subespaço afim que contém $\Delta(v, \Gamma_+)$ tem dimensão d . Assim, para cada poliedro de Newton, definimos o seguinte conjunto

$$K(\Gamma_+) = \max\{\dim C(\Delta) : \Delta \text{ é face compacta de } \Gamma_+\}.$$

Agora, iremos construir uma filtração em \mathcal{O}_n a partir do poliedro de Newton $\Gamma_+(I) \subset \mathbb{R}_+^n$ tal que $K(\Gamma_+) = n$.

Consideremos v_1, v_2, \dots, v_r os vetores primitivos correspondentes as faces de dimensão $n - 1$ de Γ_+ tais que $l(v_j, \Gamma_+) \neq 0$, para todo $j = 1, \dots, r$. Seja M o mínimo múltiplo comum entre $l(v_1, \Gamma_+), l(v_2, \Gamma_+), \dots, l(v_r, \Gamma_+)$, ou qualquer outro múltiplo destes números. Para cada $j = 1, \dots, r$, vamos considerar a aplicação linear

$$\varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $\varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)}(k) = \frac{M}{l(v_j, \Gamma_+)} \langle k, v_j \rangle$.

Dessa forma, definimos a aplicação $\varphi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$\varphi(k) = \min\{\varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)}(k) : j = 1, \dots, r\}.$$

Notemos que $\varphi|_{C(\Delta(v_j, \Gamma_+))}(k) = \varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)}(k)$, para todo $k \in C(\Delta(v_j, \Gamma_+))$ e $j = 1, \dots, r$. Isto é, a aplicação φ é linear sobre cada cone $C(\Delta(v_j, \Gamma_+))$.

Ainda mais, a aplicação φ satisfaz a propriedade $\varphi(a + b) \geq \varphi(a) + \varphi(b)$. De fato,

$$\begin{aligned} \varphi(a + b) &= \min\{\varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)}(a + b) : j = 1, \dots, r\} \\ &= \min\{\varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)}(a) + \varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)}(b) : j = 1, \dots, r\} \\ &\geq \min\{\varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)}(a) : j = 1, \dots, r\} + \min\{\varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)}(b) : j = 1, \dots, r\} = \varphi(a) + \varphi(b). \end{aligned}$$

Além disso, $\varphi(\mathbb{Z}_+^n) \subseteq \mathbb{Z}_+$ e o valor sobre cada ponto de Γ_+ é igual a M . De fato, notemos que

$$\varphi(k) = \min\{\varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)}(k) : j = 1, \dots, r\} = \min\left\{\frac{M}{l(v_j, \Gamma_+)}\langle k, v_j \rangle : j = 1, \dots, r\right\}.$$

Pelo Lema 2.9, $\varphi(k) = M$, para todo $k \in \Gamma_+$.

Afirmção 5.5. Toda função $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\tilde{\varphi}$ é linear sobre cada cone $C(\Delta(v_j, \Gamma_+))$ e $\tilde{\varphi}$ é constante sobre Γ_+ é um múltiplo de φ .

Demonstração. Mostraremos que $\tilde{\varphi} = \lambda\varphi$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\tilde{\varphi}$ e φ são constantes sobre Γ_+ , existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\varphi} = \lambda\varphi$ em Γ_+ .

Agora, dado $k \in \mathbb{R}_+^n$, então $k \in C(\Delta(v_j, \Gamma_+))$ para alguma face compacta $\Delta(v_j, \Gamma_+)$, pois I é um ideal de codimensão finita. Logo, $k = \beta m$, onde $m \in \Delta(v_j, \Gamma_+)$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Dessa forma, temos

$$\tilde{\varphi}(k) = \tilde{\varphi}(\beta m) = \beta\tilde{\varphi}(m) = \beta L = \beta(\lambda N) = \lambda(\beta\varphi_{\Delta(v_j, \Gamma_+)}(m)) = \lambda(\varphi(\beta m)) = \lambda(\varphi(k)),$$

onde $L = \tilde{\varphi}(\Gamma_+)$ e $N = \varphi(\Gamma_+)$. □

Usando os elementos acima, definimos a aplicação $v_\Gamma : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ por $v_\Gamma(f) = \min\{\varphi(k) : k \in \text{supp}(f)\}$. Como $\text{supp}(0) = \emptyset$, convencionamos então $v_\Gamma(0) = \infty$.

Afirmção 5.6. v_Γ é uma função de ordem.

Demonstração. Notemos que

$$(i) \quad v_\Gamma(1) = \min\{\varphi(k) : k \in \text{supp}(1) = \{0\}\} = \varphi(0) = 0;$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} v_\Gamma(f+g) &= \min\{\varphi(k) : k \in \text{supp}(f+g)\} \\ &\geq \min\{\varphi(k) : k \in \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)\} \text{ (pois } \text{supp}(f+g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)\text{)} \\ &= \min\{\min\{\varphi(k) : k \in \text{supp}(f)\}, \min\{\varphi(k) : k \in \text{supp}(g)\}\} \\ &= \min\{v_\Gamma(f), v_\Gamma(g)\}. \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \begin{aligned} v_\Gamma(fg) &= \min\{\varphi(k) : k \in \text{supp}(fg)\} \\ &\geq \min\{\varphi(k) : k \in \text{supp}(f) + \text{supp}(g)\} \text{ (pois } \text{supp}(fg) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)\text{)} \\ &\geq \min\{\varphi(k_1) + \varphi(k_2) : k_1 \in \text{supp}(f), k_2 \in \text{supp}(g)\} \\ &\geq \min\{\varphi(k_1) : k_1 \in \text{supp}(f)\} + \min\{\varphi(k_2) : k_2 \in \text{supp}(g)\} \\ &= v_\Gamma(f) + v_\Gamma(g). \end{aligned}$$

Logo, v_Γ é uma função de ordem em \mathcal{O}_n e portanto, v_Γ é uma filtração, denominada por filtração de Newton de \mathcal{O}_n associada ao poliedro de Newton. □

Observação 5.7. Pela Observação 5.2, temos que $\{A_d\}_{d \in \mathbb{N}}$ é a filtração de Newton de \mathcal{O}_n associada ao poliedro de Newton, onde

$$A_d = \{f \in \mathcal{O}_n : v_\Gamma(f) \geq d\}.$$

5.2 Ideais e módulos não-degenerados

Fixaremos um poliedro de Newton Γ_+ em \mathbb{R}_+^n que intercepta cada eixo coordenado de \mathbb{R}^n . Para qualquer $d \geq 0$, definimos o ideal

$$\mathcal{A}_d = \{g \in \mathcal{O}_n : v_\Gamma(g) \geq d\} \cup \{0\}.$$

Consideremos Δ um face de Γ_+ . Se $g \in \mathcal{O}_n$, $g \neq 0$ e $g = \sum_k a_k x^k$ é o desenvolvimento de Taylor de g , então denotamos por $p_\Delta(g)$ a soma dos termos $a_k x^k$ tal que $v_\Gamma(g) = v_\Gamma(x^k)$ e $k \in C(\Delta)$. Se tais termos não existem, então definimos $p_\Delta(g) = 0$.

Também denotamos por \mathcal{A}_Δ o subanel de \mathcal{O}_n dado por

$$\mathcal{A}_\Delta = \{g \in \mathcal{O}_n : \text{supp}(g) \subseteq C(\Delta)\}.$$

Definição 5.8. Seja $S = \{g_1, \dots, g_r\} \subseteq \mathcal{O}_n$ um conjunto gerador de um ideal de co-comprimento finito. Dizemos que S é *não-degenerado* em Γ_+ quando, para cada face compacta Δ de Γ_+ , o ideal de \mathcal{A}_Δ gerado por $\{p_\Delta(g_1), \dots, p_\Delta(g_r)\}$ tem co-comprimento finito em \mathcal{A}_Δ .

Usando resultados de [17], dizer que S é não-degenerado no sentido acima é equivalente a exigir que

$$\{x \in \mathbb{C}^n : p_\Delta(g_1)(x) = \dots = p_\Delta(g_r)(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}$$

para qualquer face compacta Δ de Γ_+ . A noção acima está relacionada aos ideais Newton não-degenerados através do próximo resultado, cuja demonstração pode ser vista em [4].

Proposição 5.9. [4] *Seja $S = \{g_1, \dots, g_n\} \subseteq \mathcal{O}_n$ um conjunto gerador de um ideal de co-comprimento finito. Consideremos os números $d_i = v_\Gamma(g_i)$, $i = 1, \dots, n$ e $d = d_1 \cdots d_n$. Então, as seguintes condições são equivalentes.*

- *O sistema S é não-degenerado em Γ_+ .*
- *O ideal $J = \langle g_1^{\frac{d}{d_1}}, \dots, g_n^{\frac{d}{d_n}} \rangle$ é Newton não-degenerado e $\Gamma_+(S) = \Gamma_+(\mathcal{A}_d)$.*

Definição 5.10. Seja $M = (u_j^i)$ uma matriz de ordem $p \times s$ com entradas em \mathcal{O}_n , $p \leq s$, tal que o ideal $I_p(M)$ tem co-comprimento finito. A matriz M é dita *não-degenerada* em Γ_+ quando, para cada face compacta Δ de Γ_+ , o ideal de \mathcal{A}_Δ gerado pelos menores de ordem máxima da matriz $(p_\Delta(u_j^i))$ tem co-comprimento finito em \mathcal{A}_Δ .

Como na Definição 5.8, a matriz M é não-degenerada em Γ_+ se, e somente se,

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(p_\Delta(u_j^i)) < p\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}$$

para cada face compacta Δ de Γ_+ .

O conceito acima foi definido primeiramente em [4] por Biviá-Ausina, Fukui e Saia, onde é estabelecida de uma situação mais geral, ou seja, quando o ideal $I_p(M)$ tem profundidade arbitrária. Porém neste trabalho, seguiremos [3].

Observamos que, se $M = (u_j^i)$ é uma matriz de tamanho $p \times s$ não-degenerada em um determinado poliedro de Newton Γ_+ , então cada matriz linha $(u_j^1 \ u_j^2 \ \dots \ u_j^s)$ também é não-degenerada em Γ_+ , para todo $j = 1, \dots, p$.

Para formular a Definição 5.10, precisamos de uma matriz M com entradas em \mathcal{O}_n e um poliedro de Newton fixo em \mathbb{R}_+^n . Por outro lado, a Definição 3.12 depende da própria matriz M . Como veremos nos exemplos a seguir, podemos dizer que as Definições 3.12 e 5.10 são independentes. No entanto, também descreveremos um caso em que ambas definições concordam (ver Proposição 5.13).

Exemplo 5.11. Consideremos a matriz de parâmetros com entradas em \mathcal{O}_2 dada por

$$M = \begin{pmatrix} x^2y^2 + x^{2a} & x^3y^3 + x^{3a} & y^{3a} \\ x^2y^2 + y^{2a} & 2x^3y^3 + y^{3a} & x^{3a} \end{pmatrix}$$

onde a é um inteiro não negativo e $a > 2$. Também denotamos por M o submódulo de \mathcal{O}_2^2 gerado pelas colunas da matriz acima.

Sejam M_1 e M_2 os ideais gerados pelas linhas, respectivamente, isto é

$$M_1 = \langle x^2y^2 + x^{2a}, x^3y^3 + x^{3a}, y^{3a} \rangle = \langle g_{11}, g_{12}, g_{13} \rangle$$

$$M_2 = \langle x^2y^2 + y^{2a}, 2x^3y^3 + y^{3a}, x^{3a} \rangle = \langle g_{21}, g_{22}, g_{23} \rangle.$$

Temos que

$$\text{supp}(M_1) = \{(2, 2), (2a, 0), (3, 3), (3a, 0), (0, 3a)\}$$

$$\text{supp}(M_2) = \{(2, 2), (0, 2a), (3, 3), (3a, 0), (0, 3a)\}.$$

Assim, os poliedros $\Gamma_+(M_1)$ e $\Gamma_+(M_2)$ são determinados como mostra a figura abaixo.

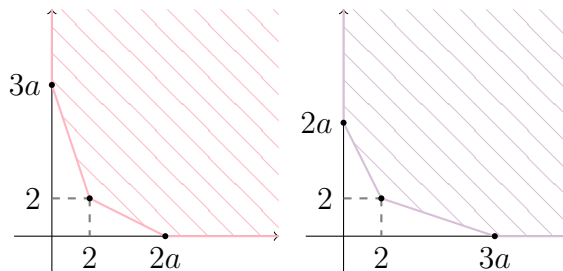


Figura 5.1: Poliedros de Newton $\Gamma_+(M_1)$ e $\Gamma_+(M_2)$.

Consideremos a face compacta Δ_1 do poliedro de Newton $\Gamma_+(M_1)$, ou seja, o segmento de reta que liga os pontos $(2, 2)$ e $(2a, 0)$. Daí,

$$\begin{aligned} \{(g_{11})_{\Delta_1}(x, y) = (g_{12})_{\Delta_1}(x, y) = (g_{13})_{\Delta_1}(x, y) = (0, 0)\} &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2y^2 + x^{2a} = 0\} \\ &\not\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}. \end{aligned}$$

Segue que M_1 não é Newton não-degenerado. De maneira análoga, M_2 não é Newton não-degenerado. Então, o submódulo M não é Newton não-degenerado.

Por outro lado, se Γ_+ é o poliedro de Newton determinado pelos monômios x^a , xy e y^a , podemos verificar se a matriz M é não-degenerada em Γ_+ (ver Definição 5.10).

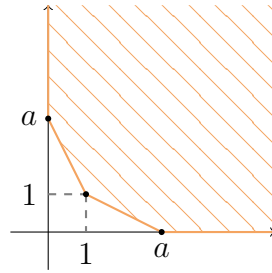


Figura 5.2: Poliedro de Newton determinado por x^a, xy e y^a .

Sejam Δ_1 e Δ_2 as faces compactas definidas pelos segmentos de reta de $(a, 0)$ a $(1, 1)$ e $(1, 1)$ a $(0, a)$, respectivamente. Temos que $v_1 = (1, a - 1)$ e $v_2 = (a - 1, 1)$ são vetores primitivos com respeito as faces Δ_1 e Δ_2 , respectivamente.

Consideremos v_Γ a filtração de Newton associada ao poliedro de Newton Γ_+ definida por

$$v_\Gamma = \min\{\varphi(k) : k \in \text{supp}(f)\},$$

onde $\varphi(k) = \min\{\langle k, v_1 \rangle, \langle k, v_2 \rangle\}$. Assim, temos as seguintes matrizes

$$p_{\Delta_1}(M) = \begin{pmatrix} p_{\Delta_1}(x^2y^2 + x^{2a}) & p_{\Delta_1}(x^3y^3 + x^{3a}) & p_{\Delta_1}(y^{3a}) \\ p_{\Delta_1}(x^2y^2 + y^{2a}) & p_{\Delta_1}(2x^3y^3 + y^{3a}) & p_{\Delta_1}(x^{3a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y^2 + x^{2a} & x^3y^3 + x^{3a} & 0 \\ x^2y^2 & 2x^3y^3 & x^{3a} \end{pmatrix},$$

$$p_{\Delta_2}(M) = \begin{pmatrix} p_{\Delta_2}(x^2y^2 + x^{2a}) & p_{\Delta_2}(x^3y^3 + x^{3a}) & p_{\Delta_2}(y^{3a}) \\ p_{\Delta_2}(x^2y^2 + y^{2a}) & p_{\Delta_2}(2x^3y^3 + y^{3a}) & p_{\Delta_2}(x^{3a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y^2 & x^3y^3 & y^{3a} \\ x^2y^2 + y^{2a} & 2x^3y^3 + y^{3a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, obtemos as inclusões

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \text{posto}(p_{\Delta_1}(M)) < 2\} = \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\},$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \text{posto}(p_{\Delta_2}(M)) < 2\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}.$$

Logo, pela Definição 5.10, concluímos que a matriz M é não-degenerada em Γ_+ . Além disso, $e(M) = 42a$, como podemos ver em [3].

Exemplo 5.12. Considere a matriz de parâmetros com entradas em \mathcal{O}_2 dada por

$$M = \begin{pmatrix} x^a + xy + y^a & 2x^a + 5xy + 7y^a & 0 & 0 \\ 0 & 4x^b + 3xy - 5y^b & x^b + 9xy + 2y^b & 0 \\ 0 & 0 & 7x^c + 2xy + 3y^c & 5x^c - xy + 4y^c \end{pmatrix}$$

onde a, b e c são inteiros positivos tais que $a < b < c$.

Denotamos por M o submódulo de \mathcal{O}_2^3 gerado pelas colunas da matriz acima.

Podemos ver em [3] que o submódulo M é Newton não-degenerado e que aplicando o Corolário 4.25 para calcular $e(M)$, obtemos $e(M) = 2(3a + 2b + c)$.

Denotemos por g_{ij} o elemento (i, j) da matriz M , para todo i, j . Suponhamos que Γ_+ é um poliedro de Newton tal que M é não-degenerado em Γ_+ . Então, de Proposição 5.9, existem alguns inteiros positivos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tais que os ideais

$$\langle (g_{11})^{\alpha_1}, (g_{12})^{\alpha_1} \rangle, \langle (g_{22})^{\alpha_2}, (g_{23})^{\alpha_2} \rangle, \langle (g_{33})^{\alpha_3}, (g_{34})^{\alpha_3} \rangle \quad (5.1)$$

são Newton não-degenerados e têm o mesmo poliedro de Newton. Em particular, os poliedros de Newton dos ideais acima encontram o eixo x no mesmo ponto, ou seja, temos a relação

$$a\alpha_1 = b\alpha_2 = c\alpha_3. \quad (5.2)$$

Além disso, observamos que $(1, 1)$ pertence à intersecção dos suportes dos germes $g_{11}, g_{12}, g_{22}, g_{23}, g_{33}, g_{34}$. Portanto, uma vez que os ideais descritos em (5.1) possuem a mesmo poliedro de Newton, também concluímos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. No entanto, isto não é compatível com (5.2), a menos que $a = b = c$, o que não é o caso. Então, a matriz M não satisfaz a Definição 5.10 com respeito a nenhum poliedro de Newton.

Proposição 5.13. *Seja $M \subseteq \mathcal{O}_n^p$ um submódulo de co-comprimento finito. Suponhamos que existe algum poliedro de Newton $\Gamma_+ \subseteq \mathbb{R}_+^n$ tal que $\Gamma_+(M_j) = r_j\Gamma_+$, para algum $r_j > 0$, $j = 1, \dots, p$. Então, são equivalentes:*

- (1) A matriz M é não-degenerada em Γ_+ ;
- (2) O submódulo M é Newton não-degenerado;
- (3) A expressão para $e(M)$ é dada por

$$e(M) = n!V_n(\Gamma_+) \left(\sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n \\ \alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0}} r_1^{\alpha_1} \cdots r_p^{\alpha_p} \right).$$

Demonstração. Suponhamos que o submódulo M é representado por uma matriz (u_j^i) de ordem $p \times s$, onde $i \in \{1, \dots, s\}$ e $j \in \{1, \dots, p\}$. Se Δ é uma face compacta de Γ_+ , então observamos que

$$p_\Delta(u_j^i) = (u_j^i)_{r_j\Delta},$$

pois estamos assumindo que $\Gamma_+(M_j) = r_j\Gamma_+$.

A equivalência entre (1) e (2) surge da comparação do Lema 3.15 e da Definição 5.10.

De fato, o Lema 3.15 garante que o submódulo M é Newton não-degenerado se, e somente se, para qualquer face compacta $\Delta \subseteq \Gamma_+(M)$

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(M_\Delta(x)) < p\} \subseteq \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}.$$

Notemos que $M_\Delta = (u_j^i)_\Delta = (u_j^i)_{r_j\Delta} = p_\Delta(u_j^i)$. Assim, a matriz M é não-degenerada, pela Definição 5.10.

Em [3], o autor usando as propriedades de multiplicidades mistas e a hipótese de que $\Gamma_+(M_j) = r_j\Gamma_+$, para todo $j = 1, \dots, p$, obtem que o número $n!v(M)$ é igual a parte direita da igualdade no item (3). Então, a equivalência entre (2) e (3) é uma consequência do Corolário 4.23. \square

A seguir, apresentaremos um exemplo para o qual o cálculo de multiplicidade de Buchsbaum-Rim depende apenas do volume n -dimensional de um poliedro de Newton, usando a Proposição 5.13.

Exemplo 5.14. Seja $M \subset \mathcal{O}_2^2$ um submódulo gerado pelas colunas da matriz

$$M = \begin{pmatrix} x^4 + xy & x^4 & y^4 \\ x^8 + y^8 & x^2y^2 & x^8 \end{pmatrix}.$$

Vimos no Exemplo 3.17 que M é Newton não-degenerado. Observemos na Figura 3.4 que $\Gamma_+(M_2) = 2 \cdot \Gamma_+(M_1)$. Assim, pela Proposição 5.13, temos que

$$e(M) = 2! \cdot V_2(\Gamma_+(M_1)) \cdot 2 = 16.$$

Como mencionamos no Capítulo 2, uma função $f \in \mathcal{O}_n$ é considerada Newton não-degenerada quando o ideal $I(f)$ é Newton não-degenerado, e isso acontece se, e somente se, $\overline{I(f)}$ for igual a $\langle x^k : k \in \Gamma_+(f) \rangle$, pelo trabalho de Yoshinaga [29]. Portanto, se assumirmos que f é um germe de aplicação analítica de $(\mathbb{C}^n, 0)$ a $(\mathbb{C}^p, 0)$, é natural perguntarmos qual é o objeto análogo para $I(f)$ em \mathcal{O}_n^p a fim de afirmarmos uma caracterização semelhante em termos de poliedros de Newton $\Gamma_+(f_1), \dots, \Gamma_+(f_p)$, onde f_1, \dots, f_p são as funções componentes de f .

Seja $f \in \mathcal{O}_n$. Visto que f é sempre integral sobre $I(f)$. Observamos que $I(f)$ é Newton não-degenerado se, e somente se,

$$\left\{ f, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$$

é Newton não-degenerado.

Isso nos motiva a, dada uma função analítica $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, considerarmos o submódulo $M(f)$ de \mathcal{O}_n^p gerado pelas colunas da matriz

$$M(f) = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & x_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & x_n \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & & & \ddots & \\ x_1 \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & x_n \frac{\partial f_p}{\partial x_n} & 0 & 0 & \cdots & f_p \end{pmatrix}.$$

Portanto, como consequência do Teorema 3.14, temos a seguinte extensão do Teorema 1.7 de [29].

Corolário 5.15. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ germe de uma aplicação analítica. Então $M(f)$ é Newton não-degenerado se, e somente se, o fecho integral de $M(f)$ em \mathcal{O}_n^p é igual a*

$$\{(h_1, \dots, h_p) \in \mathcal{O}_n^p : \Gamma_+(h_i) \subseteq \Gamma_+(f_i), \text{ para todo } i = 1, \dots, p\}.$$

Considerando a Observação 3.18, destacamos que o Corolário anterior pode ser enunciado de forma análoga para germes de aplicações analíticas reais $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$.

Se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um germe de uma aplicação analítica tal que $M(f)$ é Newton não-degenerado, então f é Newton não-degenerado no sentido de Khovanskii (ver [9, p. 315] ou [14, p.291]).

Referências Bibliográficas

- [1] BHATTACHARYA, P. B. The Hilbert function of two ideals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 53, 3 (1957), 568–575.
- [2] BIVIÀ-AUSINA, C. Nondegenerate ideals in formal power series rings. *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 34, 2 (2004), 495 – 511.
- [3] BIVIÀ-AUSINA, C. The Integral Closure of Modules, Buchsbaum–Rim Multiplicities and Newton Polyhedra. *Journal of the London Mathematical Society* 69, 2 (04 2004), 407–427.
- [4] BIVIÀ-AUSINA, C., FUKUI, T., AND SAIA, M. J. Newton filtrations, graded algebras and codimension of non-degenerate ideals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 133, 1 (2002), 55–75.
- [5] BORGES, H., AND TENGAN, E. *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos*, 2 ed. IMPA, 2020.
- [6] BOURBAKI, N. *Elements of Mathematics: Commutative algebra*. No. v. 2 in Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 1972.
- [7] BRUNS, W., AND HERZOG, H. J. *Cohen-Macaulay Rings*, 2 ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [8] BUCHSBAUM, D. A., AND RIM, D. S. A Generalized Koszul Complex. II. Depth and Multiplicity. *Transactions of the American Mathematical Society* 111, 2 (1964), 197–224.
- [9] GAFFNEY, T. Integral closure of modules and Whitney equisingularity. *Inventiones mathematicae* 107, 2 (1992), 301–322.
- [10] GAFFNEY, T. Multiplicities and equisingularity of ICIS germs. *Inventiones mathematicae* 123, 2 (1996), 209–220.
- [11] GIBSON, C. *Singular points of smooth mappings*. Pitman, London San Francisco, 1979.
- [12] JACOBSON, N. *Basic Algebra*, vol. I. W.H. Freeman, 1985.

-
- [13] KATZ, D. Reduction criteria for modules. *Communications in Algebra* 23, 12 (1995), 4543–4548.
- [14] KHOVANSKII, A. G. Newton polyhedra and toroidal varieties. *Funct. Anal. Appl.* 11 (1977), 289–295.
- [15] KHOVANSKII, A. G. Newton polyhedra, a new formula for mixed volume, products of roots of a system of equations. *Fields Inst. Commun.* 12 (1999), 325–365.
- [16] KIRBY, D., AND REES, D. Multiplicities in graded rings II: integral equivalence and the Buchsbaum–Rim multiplicity. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 119, 3 (1996), 425–445.
- [17] KOUCHNIRENKO, A. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Inventiones mathematicae* 32 (1976), 1–32.
- [18] MARTINET, J. *Singularities of smooth functions and mappings*. Cambridge University Press, 1982.
- [19] MATSUMURA, H. *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, Cambridge England New York, 1989.
- [20] REES, D. A-Transforms of Local Rings and a Theorem on Multiplicities of Ideals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 57, 1 (1961), 8–17.
- [21] REES, D. Generalizations of Reductions and Mixed Multiplicities. *Journal of the London Mathematical Society* s2-29, 3 (06 1984), 397–414.
- [22] REES, D. Reduction of modules. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 101, 3 (1987), 431–449.
- [23] SAIA, M. J. The integral closure of ideals and the Newton Filtration. *Algebraic Geom.* 5 (1996).
- [24] TARI, F. *Singularidades de aplicações diferenciáveis*, 34 ed. Notas Didáticas do ICMC, 1999.
- [25] TEISSIER, B. Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. In *Singularités à Cargèse*, no. 7-8 in Astérisque. Société mathématique de France, 1973.
- [26] TEISSIER, B. Multiplicities polaires, sections planes, et conditions de whitney. In *Aroca, J.M. et al. (eds.) Algebraic Geometry. La Rabida 1981* (Berlin Heidelberg New York, 1983), Springer, pp. 314–491.

-
- [27] TEISSIER, B. Monômes, volumes et multiplicités. In *Introduction à la théorie des singularités II* (1998), Travaux en Cours 37, pp. 127–141.
- [28] VERMA, J. Multigraded Rees algebras and mixed multiplicities. *Journal of Pure and Applied Algebra* 77, 2 (1992), 219–228.
- [29] YOSHINAGA, E. Topologically principal part of analytic functions. *Transactions of the American Mathematical Society* 314 (1989), 803–814.