

Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia – CCET
Departamento de Engenharia Mecânica – DEMec

Camila Ogata Masuno

**Análise Dinâmica e Dimensionamento de um Sistema Pendular
com Roda de Reação**



São Carlos
2022

Camila Ogata Masuno

Análise Dinâmica e Dimensionamento de um Sistema Pendular com Roda de Reação

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Sidney Bruce Shiki

São Carlos

2022

Camila Ogata Masuno

Análise Dinâmica e Dimensionamento de um Sistema Pendular com Roda de Reação/
Camila Ogata Masuno. – São Carlos, 2022-
58p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Sidney Bruce Shiki

Trabalho de conclusão de curso – Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia – CCET
Departamento de Engenharia Mecânica – DEMec, 2022.

1. Rodas de reação. 2. Volante de Inércia. 3. Nanossatélite. 4. Controle.



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA - CCEMec/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33519703 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 29/2022/CCEMec/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

CAMILA OGATA MASUNO

ANÁLISE DINÂMICA E DIMENSIONAMENTO DE UM SISTEMA PENDULAR COM RODA DE REAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 28 de setembro de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Sidney Bruce Shiki
Membro da Banca 1	Alexandre Tácito Malavolta
Membro da Banca 2	Luis Antonio Oliveira Araujo



Documento assinado eletronicamente por **Sidney Bruce Shiki, Docente**, em 28/09/2022, às 15:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luis Antonio Oliveira Araujo, Docente**, em 28/09/2022, às 15:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexandre Tacito Malavolta, Docente**, em 28/09/2022, às 15:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0821708** e o código CRC **94D2835B**.



Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº
23112.034464/2022-71

SEI nº 0821708

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Dedico este trabalho à minha família e amigos que me acompanharam todos esses anos.

RESUMO

Seja na robótica ou até em veículos espaciais, as rodas de reação, caracterizadas por um disco rotativo acoplado a um volante de inércia, servem como atuadores dentro de uma malha de controle que confere um comportamento não linear e de sub-atuação à resposta. Tal particularidade na resposta permite diversas aplicações dentro de sistemas mecatrônicos, como no controle de equilíbrio de um robô e no controle de atitude de nanossatélites. Este trabalho apresenta a modelagem e simulação numérico-computacional de um sistema com rodas de reação e, por fim, o seu projeto. O modelo desenvolvido tem como fundamento a metodologia Newton-Euler de modelagem de sistemas mecânicos cujas equações de movimento foram simuladas computacionalmente, possibilitando o dimensionamento de todos os componentes do sistema. Com os resultados obtidos comprovou-se a validade do modelo construído neste trabalho. Dessa forma, espera-se que haja maior clareza neste assunto de modo a viabilizar diferentes aplicações ainda não exploradas.

Palavras-chave: Rodas de reação. Swing-up. Volante de Inércia.

ABSTRACT

Whether in robotics or even in space vehicles, reaction wheels, characterized by a rotating disk coupled to an inertia flywheel, act as actuators that confers a non-linear and under-acting behavior to the response. This particularity in the response allows several applications within mechatronic systems, such as in the balance control of a robot. This work presents the numerical-computational modeling and simulation of a system with reaction wheels and, finally, its project. The model developed is based on the Newton-Euler methodology for modeling mechanical systems whose equations of motion were computationally simulated, enabling the design of all system components. With the results obtained, the validity of the model built in this work was confirmed. That way, it is expected to get more clarity about this matter in order to enable different applications not yet explored.

Keywords: Reaction wheels. Swing-up. Inertia flywheel.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo esquemático de uma roda de reação	13
Figura 2 – <i>Swing-up</i> no sistema pendular com volante de inércia	15
Figura 3 – Melhores arranjos de 3 e 4 rodas de reação no desempenho energético	16
Figura 4 – Cubli	16
Figura 5 – Modelo para estabilização de uma variante do <i>segway</i>	17
Figura 6 – Robô bípede com uma e duas rodas de reação	17
Figura 7 – Representação do Modelo em Estudo	18
Figura 8 – Representação do Modelo: alterações do projeto	19
Figura 9 – DCL do Modelo em Estudo	20
Figura 10 – Componentes do raio de O ao CG do pêndulo	20
Figura 11 – Esquema com contrapeso	24
Figura 12 – Experimento análogo ao projeto	27
Figura 13 – Análise do experimento a partir do Tracker	27
Figura 14 – Trajetória do sistema	28
Figura 15 – Curva ajustada aos dados experimentais	29
Figura 16 – Velocidade angular durante a manobra	30
Figura 17 – Aceleração angular durante a manobra	30
Figura 18 – Forças de Reação durante a manobra do primeiro modelo	32
Figura 19 – Velocidade e aceleração angular da roda durante a manobra do primeiro modelo	33
Figura 20 – Torque e Potência durante a manobra do primeiro modelo	33
Figura 21 – Forças de Reação durante a manobra do segundo modelo	35
Figura 22 – Velocidade e aceleração angular da roda durante a manobra do segundo modelo	36
Figura 23 – Torque e Potência durante a manobra do segundo modelo	36
Figura 24 – Forças de Reação durante a manobra do modelo final	38
Figura 25 – Velocidade e aceleração angular da roda durante a manobra do modelo final	39
Figura 26 – Torque e Potência durante a manobra do modelo final	39
Figura 27 – Fluxograma dos Processos	40
Figura 28 – Arduino	41
Figura 29 – Motor DC	41
Figura 30 – Sensor de Posição	42
Figura 31 – Fluxograma Final dos Processos	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficientes da equação	29
Tabela 2 – Parâmetros do sistema do primeiro modelo	31
Tabela 3 – Parâmetros do sistema do segundo modelo	34
Tabela 4 – Parâmetros do sistema do modelo final	37
Tabela 5 – Especificações Técnicas do Controlador	40
Tabela 6 – Especificações Técnicas do Motor	41
Tabela 7 – Especificações Técnicas do Sensor	42

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CG	Centro de gravidade
DCL	Diagrama de corpo livre

LISTA DE SÍMBOLOS

a_{CG}	Aceleração do CG
a_a	Aceleração no ponto A
L	Comprimento do pêndulo
d_{CG}	Distância do centro de gravidade
d_c	Distância do contrapeso
t	Duração da manobra
F	Força
R_A	Força de reação no ponto A
R_o	Força de reação no ponto O
W_A	Força peso do disco
W_B	Força peso do pêndulo
g	Gravidade
m_A	Massa da roda
m_c	Massa do contrapeso
m_{motor}	Massa do motor
m_B	Massa do pêndulo
M	Momento
I_b	Momento de inércia de massa do pêndulo
I_v	Momento de inércia de massa da roda
P	Potência do motor
r	Raio da roda de reação
T	Torque do motor
v_{CG}	Velocidade do CG
v_a	Velocidade no ponto A

α	Aceleração angular do pêndulo
α_a	Aceleração angular da roda
θ	Posição angular do pêndulo
θ_f	Ângulo final do movimento
θ_i	Ângulo inicial do movimento
ω	Velocidade angular do pêndulo
ω_a	Velocidade angular da roda
ω_i	Velocidade angular inicial

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Motivação	13
1.2	Objetivos	14
1.2.1	Objetivos Gerais	14
1.2.2	Objetivos Específicos	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
3	MODELAGEM DINÂMICA DO PÊNDULO COM RODAS DE REAÇÃO	18
3.1	Descrição do Sistema	18
3.2	Diagrama de Corpo Livre	19
3.3	Velocidade e Aceleração do Sistema	20
3.4	Decomposição de forças	21
3.5	Centro de Gravidade e Dimensões do Contrapeso	24
4	DIMENSIONAMENTO E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO SISTEMA	26
4.1	Trajetória do movimento	26
4.2	Primeiro modelo: Volante com formato de disco e sem contrapeso	31
4.3	Segundo modelo: Volante com formato de anel e sem contrapeso	34
4.4	Modelo final: Volante com formato de anel e com contrapeso	37
5	SELEÇÃO DOS COMPONENTES	40
5.1	Controlador: Arduino	40
5.2	Atuador: Motor elétrico	41
5.3	Planta: Roda de reação/Pêndulo	41
5.4	Sensor: Sensor de posição angular	42
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	43
	REFERÊNCIAS	44
	APÊNDICE A – MATLAB: AJUSTE DA CURVA EXPERIMENTAL	46
	APÊNDICE B – SIMULAÇÃO DO PRIMEIRO MODELO	47
	APÊNDICE C – SIMULAÇÃO DO SEGUNDO MODELO	51

APÊNDICE D – SIMULAÇÃO DO MODELO FINAL	55
---------------------------------------------------------	-----------

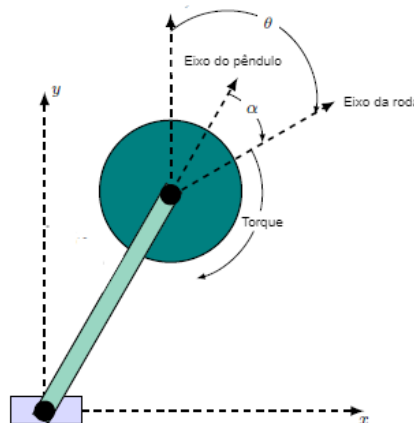
1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

Seja no controle da atitude de nanossatélites no meio aeroespacial ou até na estabilização de robôs no setor mecatrônico, rodas de reação apresentam grande relevância como solução para métodos de controle.

Rodas de reação são atuadores compostos por um volante de inércia acoplado a um motor que, ao variar a saída do mesmo, provoca-se uma aceleração no volante que por consequência, aplica um torque contrário como resposta devido ao princípio de conservação de momento angular (SANTOS, 2001; MONTOYA et al., 2019). Esse tipo de sistema como ilustrado na Figura 1 apresenta propriedades interessantes do ponto de vista dinâmico conferindo um grau de complexidade no seu estudo.

Figura 1 – Exemplo esquemático de uma roda de reação



Fonte: Adaptado de Montoya (2019)

Sistemas com roda de reação apresentam menos atuadores do que graus de liberdade e, dessa forma, são caracterizados como sub-atuados (OGATA, 1998). Além disso, devido ao atrito dinâmico cujo módulo depende da velocidade angular, o torque resultante não é linear em relação a entrada de corrente do motor (CARRARA, 2010). Apesar de tais características particulares desse sistema, a aplicação de rodas de reação possibilita o controle do movimento de corpos rígidos de forma precisa e confiável.

Tendo em vista as possibilidades de aplicações desse sistema e o grau de complexidade no seu comportamento, este trabalho tem como intuito explorar ainda mais esse tema a partir da simulação numérica e projeto de um modelo pendular acoplado à uma roda de reação.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

Objetivo deste trabalho consiste em simular e projetar um pêndulo com roda de reação que seja capaz de realizar a manobra conhecida como *swing-up* de forma a contribuir em futuras aplicações desse sistema.

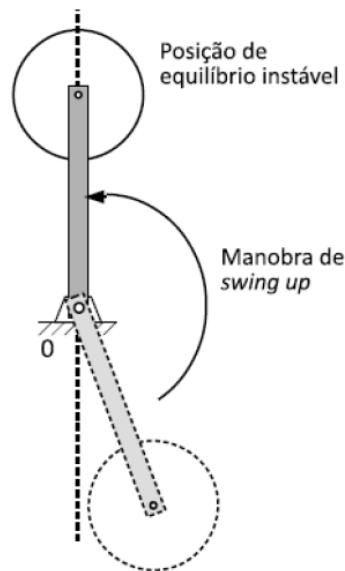
1.2.2 Objetivos Específicos

- Modelar um pêndulo com volante de inércia a partir da metodologia Newton-Euler;
- Realizar simulações numérico-computacionais baseado em experimento da bibliografia;
- Selecionar a melhor configuração geométrica do dispositivo;
- Dimensionar o sistema a partir da configuração escolhida;
- Selecionar os componentes necessários para a construção de um protótipo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Segundo Montoya (2019), a análise de um sistema com rodas de reação foca em dois quesitos: no controle do pêndulo quando este se encontra na posição vertical com o volante de inércia apontando para cima e nas estratégias de controle para se chegar a essa posição, esta manobra pode ser chamada de *swing-up* (SRINIVAS; BEHERA, 2008), e é ilustrada na Figura 2. As estratégias de controle neste caso são importantes visto que esta posição representa um caso de equilíbrio instável do sistema pendular.

Figura 2 – *Swing-up* no sistema pendular com volante de inércia



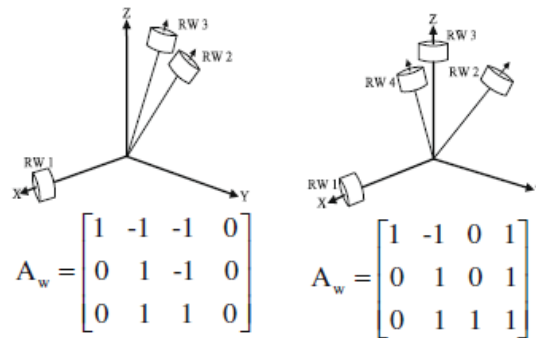
Fonte: Elaborado pela autora

Apesar de não ser o único método utilizado, a aplicação de rodas de reação remete principalmente ao controle de atitude de satélites, isto é, no controle da orientação dos satélites em órbita. Isso se deve principalmente ao seu baixo custo, confiabilidade e acurácia (BURAKOV et al., 2019).

Um dos desafios no uso da roda de reação nos satélites (usualmente equipado por 3 ou 4 rodas de reação) é o consumo de energia elétrica, já que requer o acionamento do motor elétrico para a movimentação do sistema. Assim, alguns autores na literatura fizeram estudos em cima da configuração das rodas de reação de forma a minimizar o consumo energético. Ismail e Varatharajoo (2010), através de simulações numéricas, concluiu que os arranjos que requerem menor torque e, conseqüentemente, utilizam menos energia elétrica, para 3 e 4 rodas de reação, respectivamente, são os ilustrados na Figura 3.

Além disso, como a posição dos satélites tendem a variar de acordo com fatores externos,

Figura 3 – Melhores arranjos de 3 e 4 rodas de reação no desempenho energético

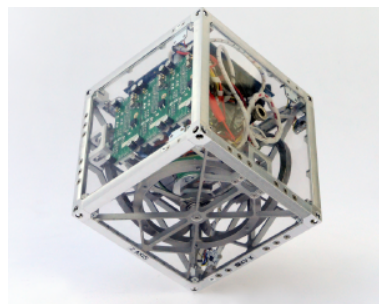


Fonte: (ISMAIL; VARATHARAJOO, 2010)

a atuação do sistema pode saturar, ou seja, como a sua velocidade é limitada pela capacidade do motor, as rodas de reação podem atingir a sua velocidade máxima e serem incapazes de aumentá-la. Apesar de existirem soluções para dessaturar o sistema, esse desafio tem que ser considerado ao projetar um satélite (LEE et al., 2021).

Entretanto, a aplicação desse sistema não se limita apenas ao setor aeroespacial. Na área da mecatrônica, graças à utilização de três rodas de reação, o Cubli (robô cúbico) possui um sistema de controle que o permite sair de uma posição de repouso, se erguer e manter o equilíbrio com o apoio de apenas uma de suas arestas, mesmo com perturbações externas (MUEHLEBACH; D'ANDREA, 2016). Para testar o conceito do Cubli, foi desenvolvido um protótipo de um sistema pendular com o objetivo de simular as manobras do robô (GAJAMOHAN et al., 2012). Para estimar a velocidade angular necessária para o Cubli se erguer, o autor utilizou a conservação de momento angular durante o movimento. Esse dispositivo é ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Cubli

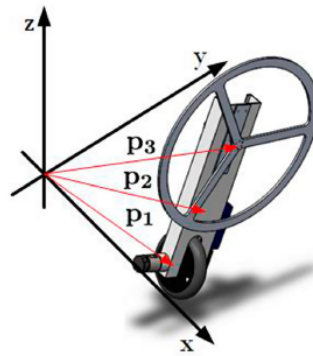


Fonte: MUEHLEBACH et al. (2013)

Diferentemente do Cubli, que utiliza da estratégia de acelerar e parar suas rodas de reação para conseguir fazer a manobra de se erguer em uma de suas arestas (*swing-up*), Mayr, Spanlang e Gattringer (2015) desenvolveram um cubo que controla ativamente essa manobra, ou seja, as rodas não precisam frear durante o movimento. Por outro lado, esse projeto apresenta limitações de potência em relação à massa do cubo ao gerar torque durante as manobras.

Também pode-se encontrar outras aplicações na literatura como na estabilização de motos, *segways* (meio de locomoção sob duas rodas no qual seu funcionamento é controlado pelo movimento do corpo do seu usuário) e robôs bípedes (NEVES; ANGÉLICO; AGULHARI, 2020). Esse dispositivo é ilustrado na Figura 5.

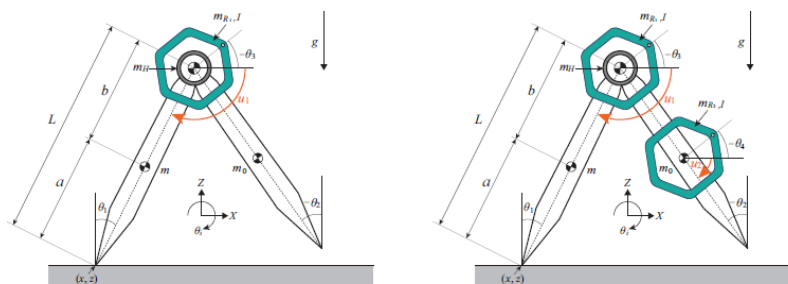
Figura 5 – Modelo para estabilização de uma variante do *segway*



Fonte: Neves, Angélico e Agulhari (2020)

No caso de robôs bípedes, com a adição de mais uma roda de reação, além do equilíbrio, é possível controlar o comprimento dos passos e sua velocidade (YAN; ASANO; LI, 2019). Contudo, a funcionalidade desse sistema ainda é pouco explorada no mercado em virtude da complexidade em relação às particularidades do comportamento desse atuador.

Figura 6 – Robô bípede com uma e duas rodas de reação



Fonte: YAN et al. (2019)

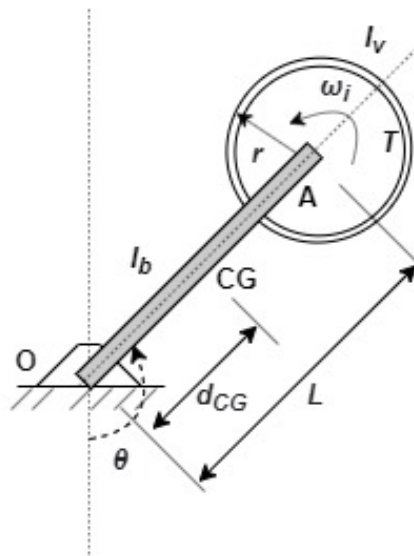
Dado o contexto apresentado, este trabalho tem como objetivo principal ampliar o conhecimento sobre mecanismos com rodas de reação através da modelagem, dimensionamento e simulações de um pêndulo, que deverá ser capaz de realizar a manobra de *swing-up*. Além de contribuir para a viabilização de aplicações ainda não exploradas.

3 MODELAGEM DINÂMICA DO PÊNULO COM RODAS DE REAÇÃO

3.1 Descrição do Sistema

O modelo em estudo consiste em um sistema com um pêndulo acoplado a um volante de inércia, ilustrado na Figura 7, que será representado através das equações obtidas utilizando o método de modelagem de sistemas mecânicos Newton-Euler (HIBBELER, 2005). O pêndulo, cujo comprimento é representado por L e sua massa por m_B , é caracterizado por sua posição θ , velocidade e aceleração angular. Seu centro de gravidade (CG) está localizado a uma distância d_{CG} em relação ao pivô de rotação (ponto O), e seu momento de inércia de massa é representado por I_b . No ponto A do pêndulo (extremidade direita) está acoplado um disco com volante de inércia de raio r , momento de inércia de massa I_v e massa m_A . Através da entrada de um torque T de um motor elétrico que move o disco, este se põe a mover através de uma velocidade angular instantânea ω_i . O motor, ao acelerar ou desacelerar o volante de inércia, faz com que o pêndulo se movimente no sentido contrário ao da aceleração angular do disco $\frac{d\omega_i(t)}{dt}$ devido ao torque de reação criado.

Figura 7 – Representação do Modelo em Estudo

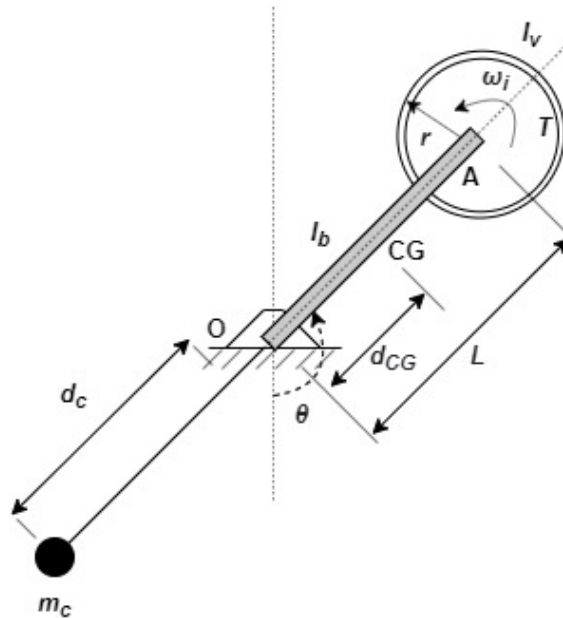


Fonte: Elaborado pela autora

Com o intuito de tornar o projeto mais acessível para trabalhos futuros que preveem a montagem de uma bancada, a modelagem do sistema também considerou algumas alterações para diminuir o torque mínimo do motor e, conseqüentemente, reduzir a potência necessária (Figura 8). Duas soluções foram abordadas: alteração da geometria do disco para um anel, dobrando assim o seu momento de inércia; adição de um contrapeso de massa m_c na outra extremidade do

pêndulo a uma distância d_c em relação à origem, o que também aumenta o momento no mesmo sentido da rotação do motor.

Figura 8 – Representação do Modelo: alterações do projeto



Fonte: Elaborado pela autora

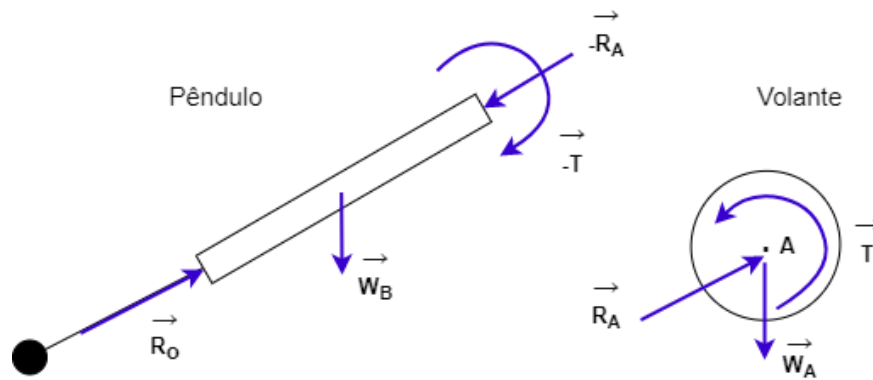
3.2 Diagrama de Corpo Livre

Para obter as equações que regem o movimento e as forças de reações dinâmicas desse sistema, é preciso fazer o diagrama de corpo livre (DCL), ou seja, montar o esquemático de cada componente do sistema com as forças que atuam sobre ele.

As forças de reação que atuam no sistema são: \vec{R}_O no ponto O e \vec{R}_A no ponto A. Já, as forças peso são representadas por \vec{W}_B (no pêndulo) e \vec{W}_A (no volante).

Algumas considerações importantes sobre essa modelagem ainda são: o contrapeso é uma massa concentrada e a barra que conecta o contrapeso com o pêndulo não tem massa significativa. Para o DCL do sistema, o contrapeso em conjunto com a barra sem massa significativa e o pêndulo são um corpo único, assim, o equacionamento é igual para os dois modelos. A Figura 9 ilustra o DCL do pêndulo e do volante de inércia.

Figura 9 – DCL do Modelo em Estudo

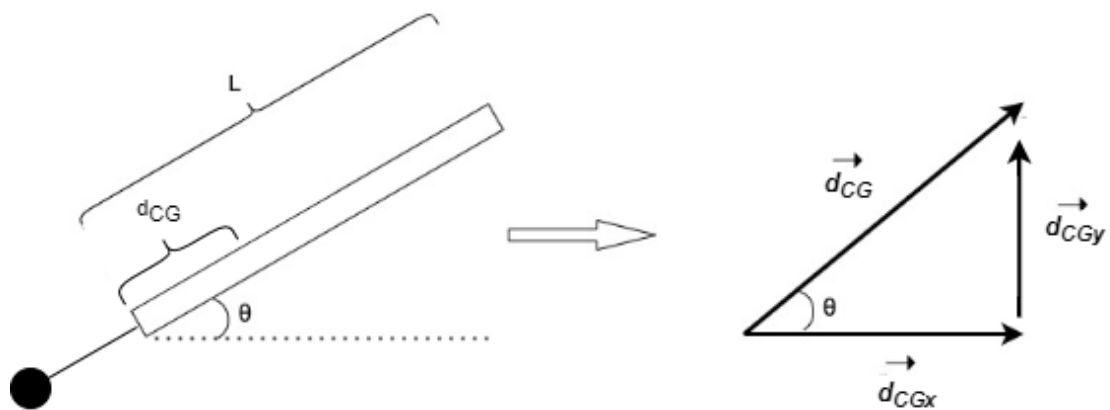


Fonte: Elaborado pela autora

3.3 Velocidade e Aceleração do Sistema

De forma a descrever os parâmetros do sistema usando a metodologia Newton-Euler de modelagem de sistemas mecânicos, primeiro é preciso definir o vetor de raio de O ao CG do pêndulo (\vec{d}_{CG}). Assim, a Figura 10 ilustra os componentes em x (\vec{d}_{CGx}) e y (\vec{d}_{CGy}) do vetor do raio e as equações 2 e 3 descrevem esses componentes.

Figura 10 – Componentes do raio de O ao CG do pêndulo



Fonte: Elaborado pela autora

$$\vec{d}_{CG} = \vec{d}_{CGx} + \vec{d}_{CGy} \tag{1}$$

$$\cos \theta = \frac{d_{CGx}}{d_{CG}} \rightarrow d_{CGx} = d_{CG} \cos \theta \tag{2}$$

$$\sin \theta = \frac{d_{CGy}}{d_{CG}} \rightarrow d_{CGy} = d_{CG} \text{sen} \theta \tag{3}$$

Assim,

$$\vec{d}_{CG} = d_{CG} \cos \theta \vec{i} + d_{CG} \sin \theta \vec{j} \quad (4)$$

Para obter a velocidade do CG (\vec{v}_{CG}),

$$\vec{v}_{CG} = \vec{\omega} \times \vec{d}_{CG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ d_{CG} \cos \theta & d_{CG} \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = -\omega d_{CG} \sin \theta \vec{i} + \omega d_{CG} \cos \theta \vec{j} \quad (5)$$

Já a aceleração do CG (\vec{a}_{CG}) é dada por:

$$\vec{a}_{CG} = \frac{d\vec{v}_{CG}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\omega d_{CG} \sin \theta \vec{i} + \omega d_{CG} \cos \theta \vec{j} \right) \quad (6)$$

$$\vec{a}_{CG} = d_{CG} \left[-\frac{d}{dt} \left(\omega \sin \theta \vec{i} \right) + \frac{d}{dt} \left(\omega \cos \theta \vec{j} \right) \right] \quad (7)$$

Aplicando a regra do produto na Equação 7,

$$\vec{a}_{CG} = d_{CG} \left[-\vec{i} \left(\frac{d\omega}{dt} \sin \theta + \omega \frac{d \sin \theta}{dt} \right) + \vec{j} \left(\frac{d\omega}{dt} \cos \theta + \omega \frac{d \cos \theta}{dt} \right) \right] \quad (8)$$

E aplicando a regra da cadeia na Equação 8,

$$\vec{a}_{CG} = d_{CG} \left[-\vec{i} \left(\alpha \sin \theta + \omega \left(\frac{d \sin \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) \right) + \vec{j} \left(\alpha \cos \theta + \omega \left(\frac{d \cos \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) \right) \right] \quad (9)$$

$$\vec{a}_{CG} = d_{CG} \left[-\vec{i} (\alpha \sin \theta + \omega \cos \theta \omega) + \vec{j} (\alpha \cos \theta + \omega (-\sin \theta) \omega) \right] \quad (10)$$

Portanto, a aceleração do CG é dada por:

$$\vec{a}_{CG} = d_{CG} \left(-\alpha \sin \theta - \omega^2 \cos \theta \right) \vec{i} + d_{CG} \left(\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta \right) \vec{j} \quad (11)$$

Para definir a aceleração no ponto A da barra (\vec{a}_A), podemos relacionar a aceleração no ponto A com a aceleração no CG conforme a equação 12 para obter seu valor.

$$\vec{a}_A = \left(\frac{L}{d_{CG}} \right) \vec{a}_{CG} \quad (12)$$

3.4 Decomposição de forças

Para cada força no DCL do modelo, podemos escrever a equação que a descreve nos eixos x e y, temos:

$$\vec{R}_o = R_{ox}\vec{i} + R_{oy}\vec{j} \quad (13)$$

$$\vec{R}_A = R_{Ax}\vec{i} + R_{Ay}\vec{j} \quad (14)$$

$$\vec{T} = T\vec{k} \quad (15)$$

$$\vec{W}_B = -m_B g \vec{j} \quad (16)$$

$$\vec{W}_A = -m_A g \vec{j} \quad (17)$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton no volante,

$$\sum \vec{F} = m_A \vec{a}_A \rightarrow \vec{R}_A + \vec{W}_A = m_A \vec{a}_A \quad (18)$$

Substituindo as Equações 14 e 17 em 18:

$$(R_{Ax}\vec{i} + R_{Ay}\vec{j}) - m_A g \vec{j} = m_A [(\vec{a}_A)_x \vec{i} + (\vec{a}_A)_y \vec{j}] \quad (19)$$

Das Equações 11 e 12:

$$R_{Ax}\vec{i} + (R_{Ay} - m_A g)\vec{j} = m_A \left[\frac{L}{d_{CG}} d_{CG} (-\alpha \sin \theta - \omega^2 \cos \theta) \vec{i} + \frac{r_A}{d_{CG}} d_{CG} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \vec{j} \right] \quad (20)$$

Então, como o raio até o ponto A vale L, temos:

$$R_{Ax}\vec{i} + (R_{Ay} - m_A g)\vec{j} = m_A [L(-\alpha \sin \theta - \omega^2 \cos \theta) \vec{i} + L(\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \vec{j}] \quad (21)$$

Assim,

$$\boxed{R_{Ax} = m_A L (-\alpha \sin \theta - \omega^2 \cos \theta)} \quad (22)$$

e

$$\boxed{R_{Ay} - m_A g = m_A L (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta)} \quad (23)$$

Aplicando Euler no volante,

$$\boxed{\sum M = I_V \alpha_A \rightarrow T = I_V \alpha_A} \quad (24)$$

Fazendo o mesmo pro pêndulo,

$$\vec{R}_o + \vec{W}_B - \vec{R}_A = m_B \vec{a}_{CG} \quad (25)$$

Substituindo as Equações 13, 16, 14 e 6:

$$(R_{ox} - R_{Ax})\vec{i} + (R_{oy} - m_{BG} - R_{Ay})\vec{j} = m_B d_{CG} \left[(-\alpha \text{sen} \theta - \omega^2 \cos \theta) \vec{i} + (\alpha \cos \theta - \omega^2 \text{sen} \theta) \vec{j} \right] \quad (26)$$

Assim,

$$\boxed{R_{ox} - R_{Ax} = m_B d_{CG} (-\alpha \text{sen} \theta - \omega^2 \cos \theta)} \quad (27)$$

e

$$\boxed{R_{oy} - m_{BG} - R_{Ay} = m_B d_{CG} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \text{sen} \theta)} \quad (28)$$

Aplicando Euler no pêndulo, onde \vec{r}_A é o raio do ponto O ao A, temos:

$$\sum M_o = I_B \alpha \rightarrow \vec{d}_{CG} \times \vec{W}_B + \vec{r}_A \times -\vec{R}_A - \vec{T} = I_B \vec{\alpha} \quad (29)$$

Analogamente à definição dos componentes do vetor \vec{d}_{CG} , \vec{r}_A é dado por:

$$\vec{r}_A = L \cos \theta \vec{i} + L \text{sen} \theta \vec{j} \quad (30)$$

Substituindo as Equações 4, 16, 30, 14 e 15:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d_{CG} \cos \theta & d_{CG} \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & -m_{BG} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L \cos \theta & L \text{sen} \theta & 0 \\ -R_{Ax} & -R_{Ay} & 0 \end{vmatrix} - T \vec{k} = I_B \alpha \vec{k} \quad (31)$$

Assim,

$$\boxed{I_B \alpha + R_{Ay} L \cos \theta - R_{Ax} L \text{sen} \theta + m_{BG} d_{CG} \cos \theta = -T} \quad (32)$$

Lembrando que, o momento de inércia do pêndulo e do volante são dados, respectivamente, pelas Equações 33, 34 (no caso do formato de disco) e 35 (no caso do formato anelar).

$$\boxed{I_B = \frac{1}{3} m_B L^2} \quad (33)$$

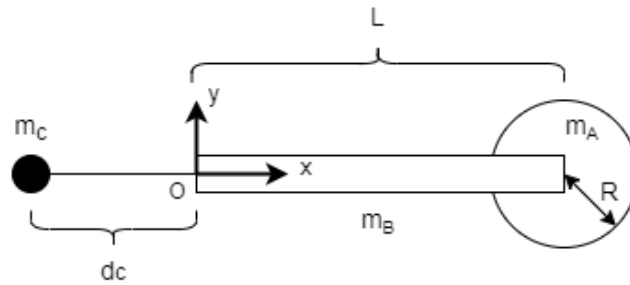
$$\boxed{I_V(\text{discofino}) = \frac{1}{2} m_A R^2} \quad (34)$$

$$\boxed{I_V(\text{anel}) = m_A R^2} \quad (35)$$

3.5 Centro de Gravidade e Dimensões do Contrapeso

Para a definição do centro de gravidade do sistema foi considerado já a adição do contrapeso. Dessa forma, para o projeto sem contrapeso, é necessário apenas igualar a massa a zero. A Figura 11 ilustra o sistema para o equacionamento.

Figura 11 – Esquema com contrapeso



Fonte: Elaborado pela autora

O CG do sistema, então, é dado por:

$$m_{Total}d_{CG} = m_C(-d_C) + m_B\frac{L}{2} + m_AL \quad (36)$$

Para que o sistema exija menor torque no motor, é interessante que o CG do sistema coincida com o centro de giro, ou seja, no ponto O. Assim, é possível chegar na relação que determina as dimensões ideais do contrapeso.

$$d_{CG} = \frac{-m_Cd_C + m_B\frac{L}{2} + m_AL}{m_A + m_B + m_C} = 0 \quad (37)$$

Resolvendo a equação e fixando a distância do contrapeso para encontrar a massa, temos que:

$$m_C = \frac{L(\frac{m_B}{2} + m_A)}{d_C} \quad (38)$$

Com a adição do contrapeso, o CG do conjunto pêndulo + contrapeso irá se deslocar, portanto, o CG será dado por:

$$(m_C + m_B)d_{CG} = m_C(-d_C) + m_B\frac{L}{2} \quad (39)$$

$$d_{CG} = \frac{-m_Cd_C + m_B\frac{L}{2}}{m_B + m_C} \quad (40)$$

Assim, temos todas as equações que descrevem o modelo do sistema pendular com volante de inércia:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{Ax} = m_A L (-\alpha \operatorname{sen} \theta - \omega^2 \cos \theta) \\ R_{Ay} - m_A g = m_A L (\alpha \cos \theta - \omega^2 \operatorname{sen} \theta) \\ T = I_V \alpha_A \\ R_{Ox} - R_{Ax} = m_B d_{CG} (-\alpha \operatorname{sen} \theta - \omega^2 \cos \theta) \\ R_{Oy} - m_B g - R_{Ay} = m_B d_{CG} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \operatorname{sen} \theta) \\ I_B \alpha + R_{Ay} L \cos \theta - R_{Ax} L \operatorname{sen} \theta + m_B g d_{CG} \cos \theta = -T \\ I_B = \frac{1}{3} m_B L^2 \\ I_V(\text{discofino}) = \frac{1}{2} m_A R^2 \\ I_V(\text{anel}) = m_A R^2 \\ m_C = \frac{L(\frac{m_B}{2} + m_A)}{d_C} \\ d_{CG} = \frac{-m_C d_C + m_B \frac{L}{2}}{m_B + m_C} \end{array} \right. \quad (41)$$

4 DIMENSIONAMENTO E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO SISTEMA

Utilizando o *software* MATLAB para execução das simulações e, após algumas iterações dos valores das métricas, foram determinadas as dimensões finais do projeto. Essas iterações visaram a obtenção de valores que possibilitem a construção de uma bancada para trabalhos futuros visando o estudo de sistemas com rodas de reação.

A simulação do sistema foi feita seguindo as seguintes premissas:

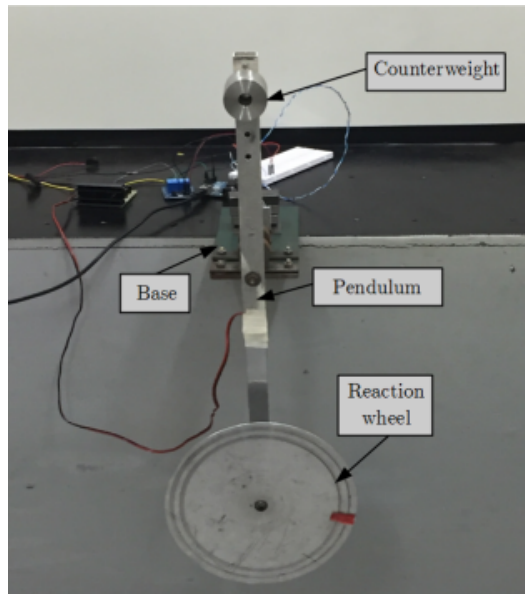
- A trajetória do movimento segue a manobra de *swing-up*: de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ radianos;
- Para a obtenção do torque real necessário para o sistema, é preciso levar em consideração a massa do motor que estará acoplada ao volante. Dessa forma, primeiramente, foi realizada uma simulação inicial seguindo as equações descritas no capítulo 3. Em seguida, através da consulta de catálogo de fornecedores, foi obtido uma massa de um motor que atende esse torque e potência. Por fim, a massa do volante final utilizada foi a soma da massa do volante com a massa do motor acoplado. Assim foi feita a simulação final.

Além das equações que descrevem o modelo, é preciso definir um parâmetro inicial como entrada no sistema para que o torque seja obtido. No caso, a trajetória do movimento irá determinar o resto dos valores do sistema.

4.1 Trajetória do movimento

Visando melhor fidelidade ao movimento, a variação do ângulo θ no tempo foi baseada no experimento de trabalho análogo da bibliografia ilustrado na Figura 12 (TRENTIN, 2020).

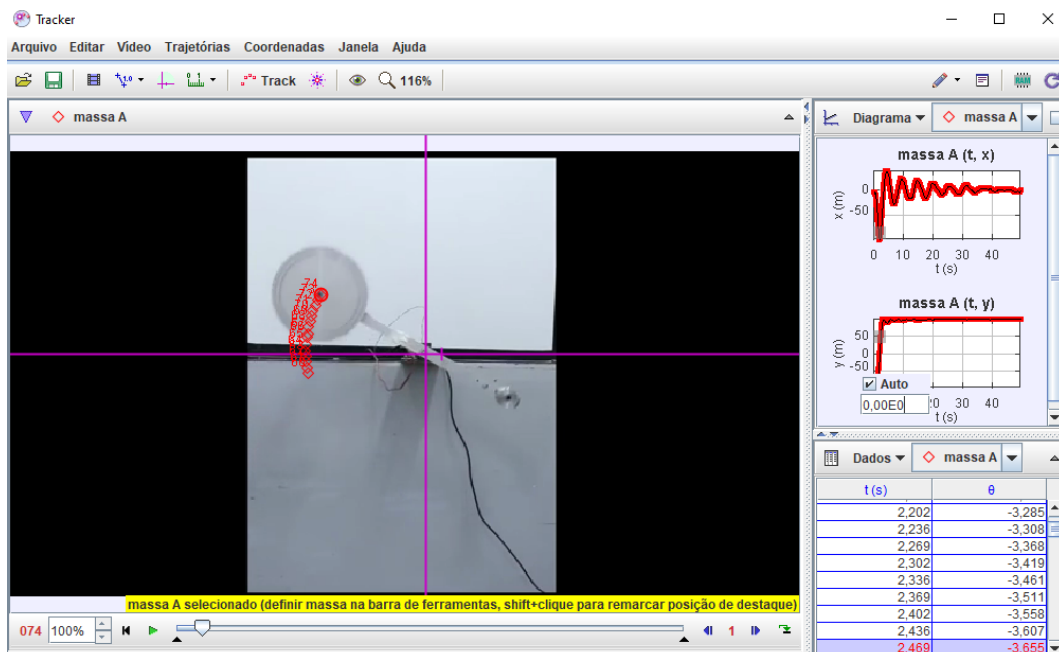
Figura 12 – Experimento análogo ao projeto



Fonte: Trentin (2020)

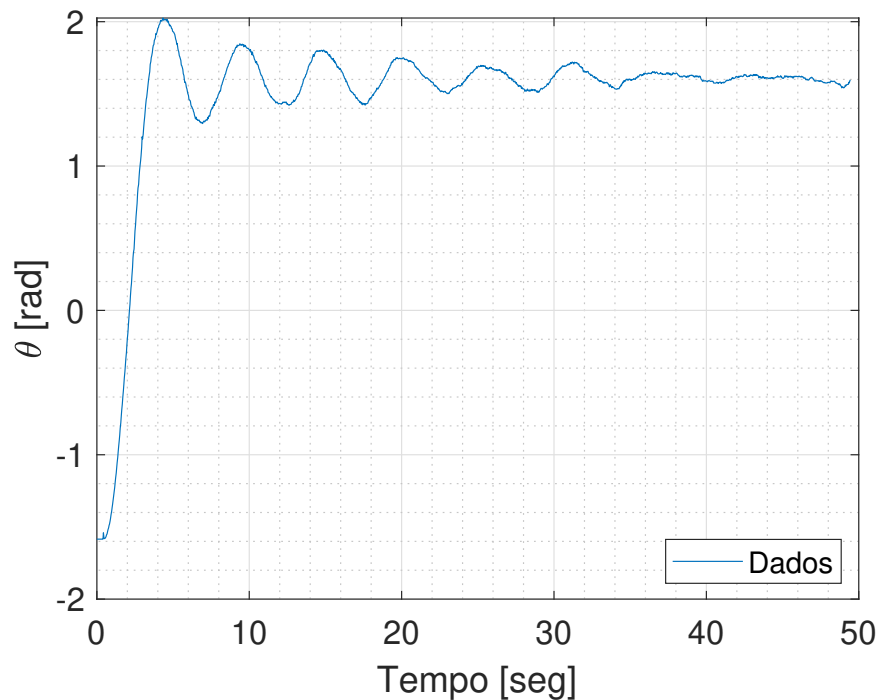
Com o vídeo do experimento e, através da utilização do programa Tracker (Figura 13), foi possível obter a curva do ângulo θ no tempo, ilustrado na Figura 14.

Figura 13 – Análise do experimento a partir do Tracker



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 14 – Trajetória do sistema



Fonte: Elaborado pela autora

Entretanto, como o comportamento oscilatório do gráfico de θ ocorre devido à frequência natural desse experimento em particular, que é diferente da frequência do projeto, optou-se por utilizar a trajetória experimental até o momento que o pêndulo atinge o valor de $\frac{\pi}{2}$ radianos já que o torque máximo requerido ocorre durante a primeira etapa da curva e não na parte oscilatória de θ e pela diferença da frequência natural. Essa simplificação na trajetória, entretanto, não afetará a escolha do motor necessário de forma significativa.

Dessa forma, a variação de θ no tempo, com o auxílio do MATLAB, foi aproximada após algumas iterações, por um polinômio dado pela Equação 45 e cujos parâmetros são fornecidos na Tabela 1. Apesar dos polinômios de graus menores apresentarem uma boa aproximação da curva, a velocidade angular associada à curva não apresentava o comportamento esperado (velocidade inicial nula), por isso, a ordem 9 acabou se apresentando com o melhor ajuste à curva. A Figura 15 ilustra o gráfico experimental em comparação com o polinômio ajustado.

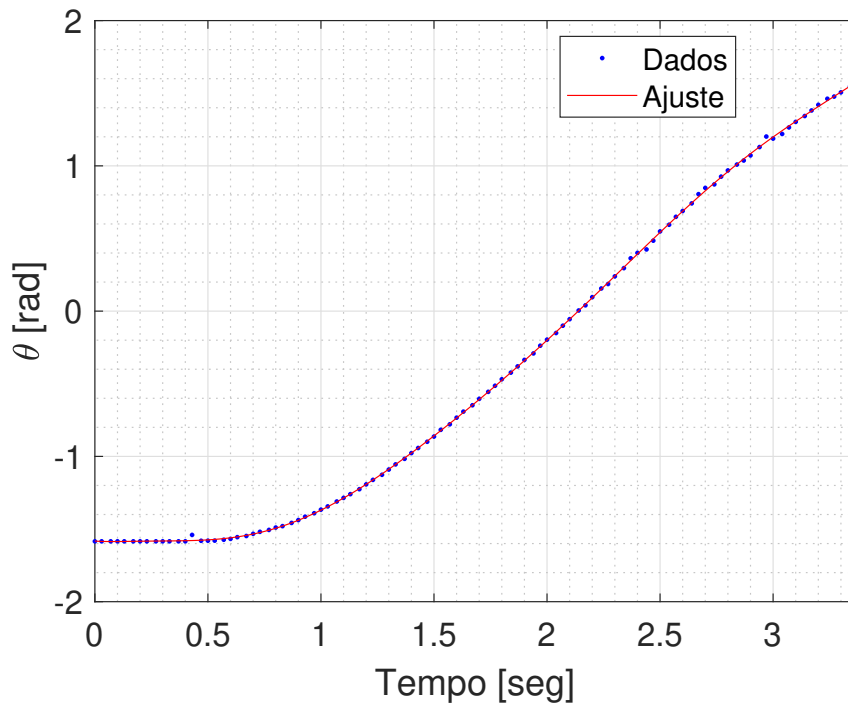
$$\theta(t) = p_1.t^9 + p_2.t^8 + p_3.t^7 + p_4.t^6 + p_5.t^5 + p_6.t^4 + p_7.t^3 + p_8.t^2 + p_9.t + p_{10} \quad (45)$$

Tabela 1 – Coeficientes da equação

Coeficiente	Valor
p_1	-0,008356
p_2	0,1359
p_3	-0,9125
p_4	3,257
p_5	-6,601
p_6	7,398
p_7	-3,976
p_8	1,019
p_9	0
p_{10}	-1,583

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 15 – Curva ajustada aos dados experimentais



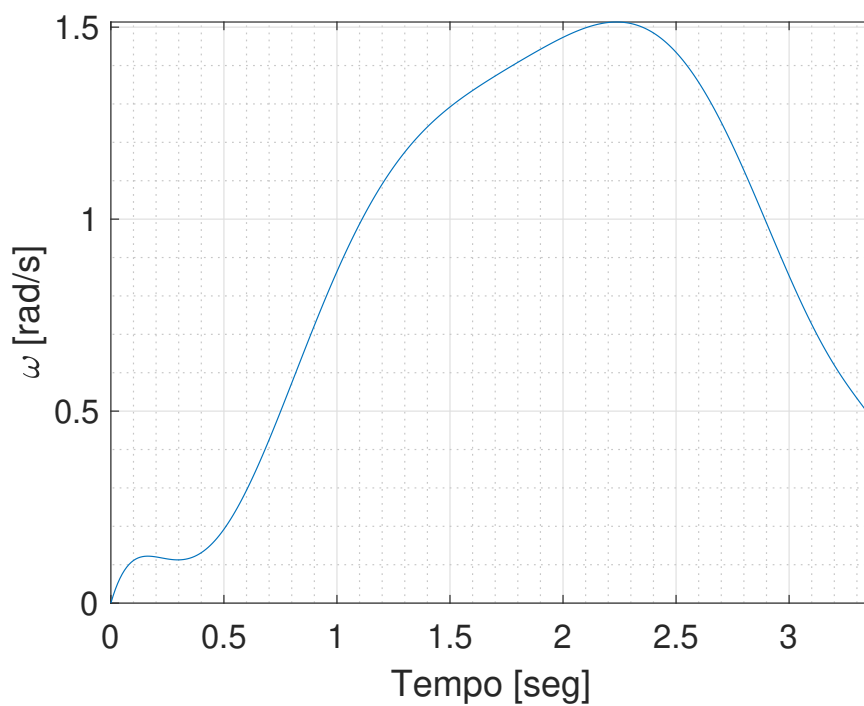
Fonte: Elaborado pela autora

Assim, a velocidade angular (ω) e aceleração angular do sistema (α) também podem ser obtidas:

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} = 9p_1.t^8 + 8p_2.t^7 + 7p_3.t^6 + 6p_4.t^5 + 5p_5.t^4 + 4p_6.t^3 + 3p_7.t^2 + 2p_8.t + p_9 \quad (46)$$

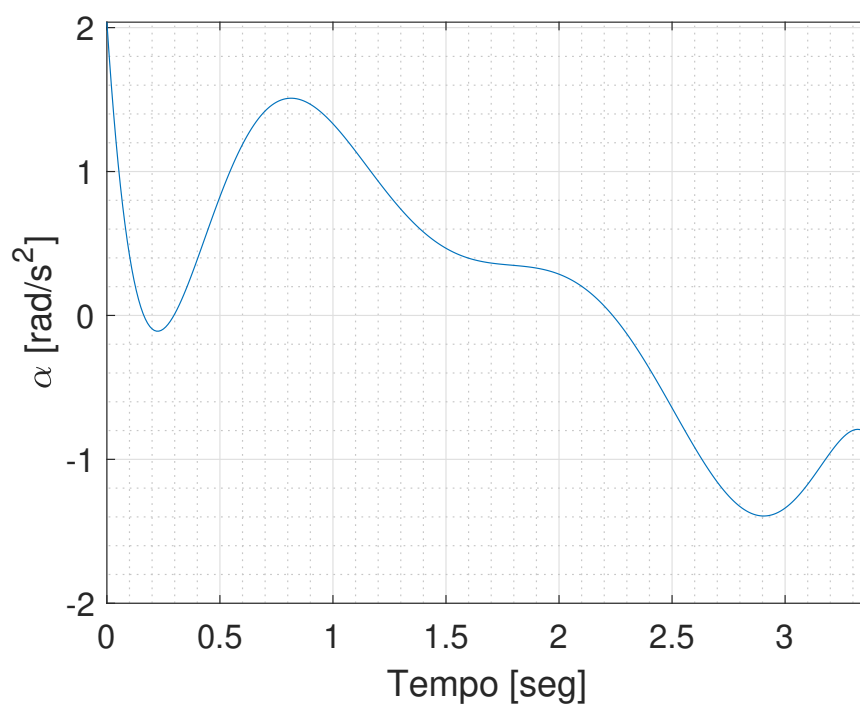
$$\alpha = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = 72p_1.t^7 + 56p_2.t^6 + 42p_3.t^5 + 30p_4.t^4 + 20p_5.t^3 + 12p_6.t^2 + 6p_7.t + 2p_8 \quad (47)$$

Figura 16 – Velocidade angular durante a manobra



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 17 – Aceleração angular durante a manobra



Fonte: Elaborado pela autora

Apesar da escolha do polinômio para o ajuste da curva devido a sua facilidade e flexibilidade em diferentes aplicações, essa escolha também gera um erro associado e que provocou algumas perturbações como, por exemplo, a oscilação inicial da velocidade angular na Figura 16. Para trabalhos futuros, outros ajustes como uma exponencial, poderão ser explorados para garantir que o motor não esteja superdimensionado.

Com essas variáveis definidas, é possível obter os valores das forças de reação e torque do sistema para todos os modelos propostos do projeto. A potência do motor, enfim, é obtida a partir de:

$$P = T \omega_A \quad (48)$$

No qual a velocidade de rotação do volante é definida por:

$$\alpha_A = \frac{\Delta \omega_A}{\Delta t} \quad (49)$$

4.2 Primeiro modelo: Volante com formato de disco e sem contrapeso

Inicialmente, a simulação foi realizada seguindo os parâmetros da Tabela 2 para um volante com formato de disco e sem o uso do contrapeso.

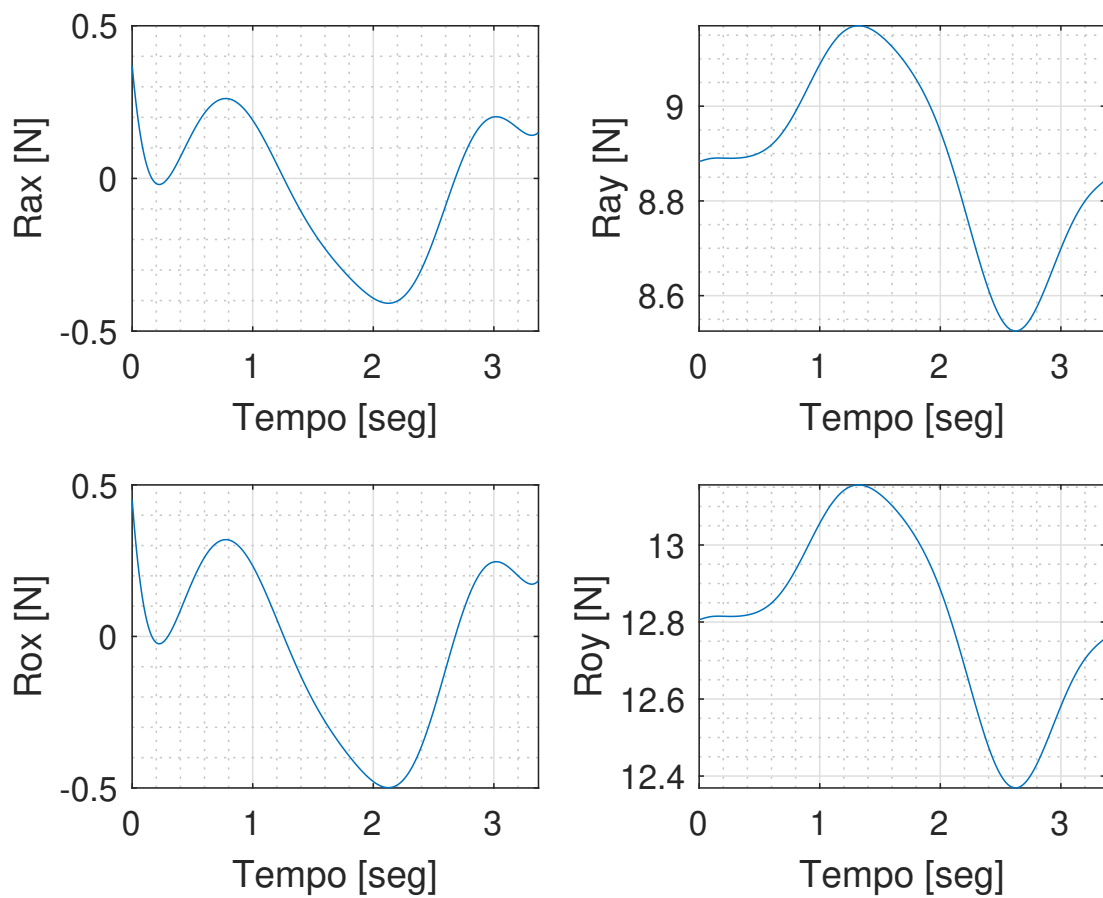
Tabela 2 – Parâmetros do sistema do primeiro modelo

Métrica	Valor
Gravidade [g]	9,81 m/s^2
Massa do volante [m_A]	0,6 kg
Massa do pêndulo [m_B]	0,4 kg
Comprimento do pêndulo [L]	0,2 m
Velocidade angular inicial [w_i]	0 rad/s
Raio do volante [r]	0,6 m
Duração do arranque [t]	3,37 s
Massa do motor [m_{motor}]	0,306 kg

Fonte: Elaborado pela autora

Os resultados obtidos para o primeiro modelo podem ser observados nas Figuras 18, 19 e 20.

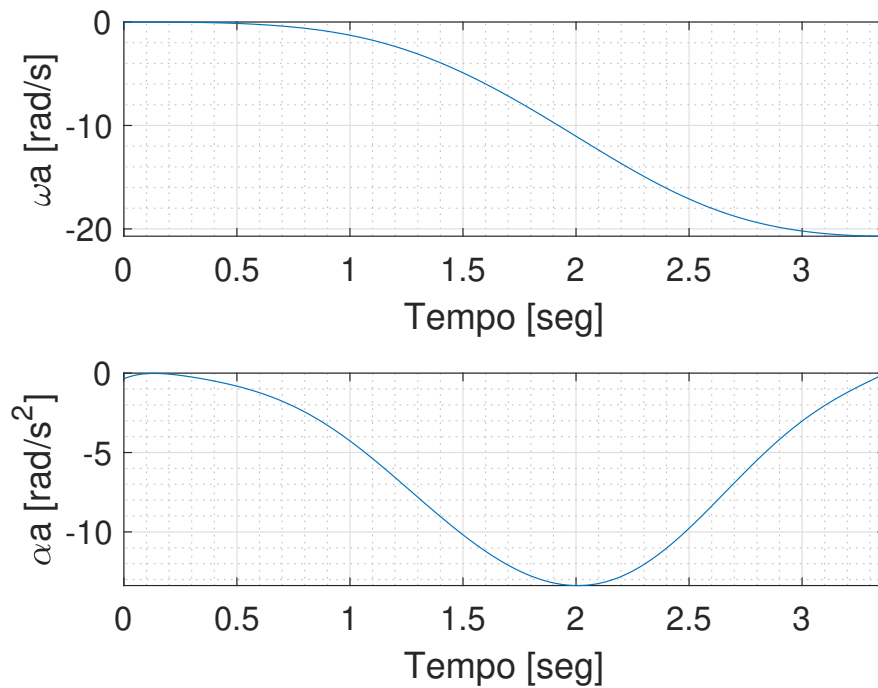
Figura 18 – Forças de Reação durante a manobra do primeiro modelo



Fonte: Elaborado pela autora

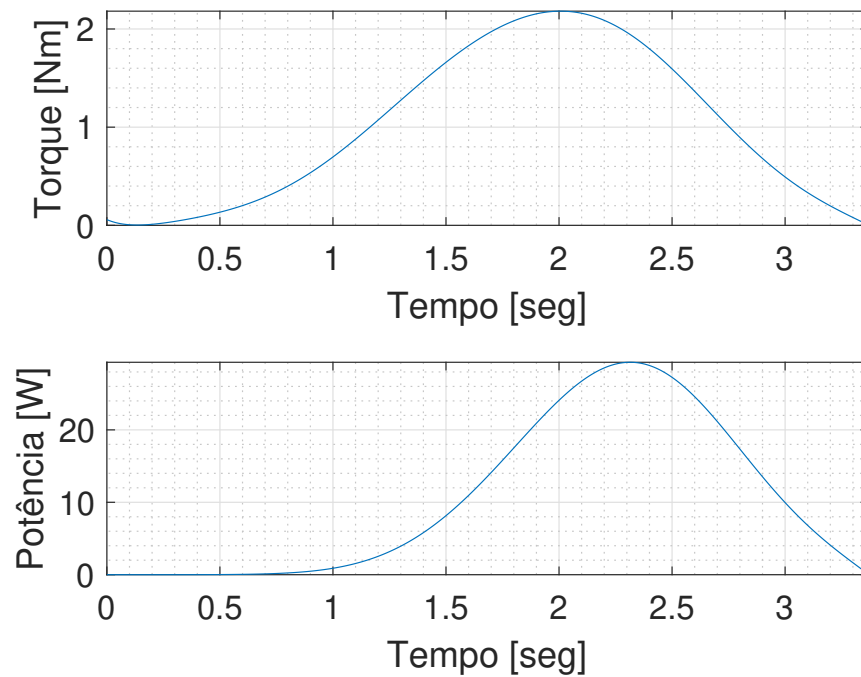
O torque máximo requerido pelo modelo foi de 2,182 Nm, já a potência máxima foi de 29,34 W.

Figura 19 – Velocidade e aceleração angular da roda durante a manobra do primeiro modelo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 20 – Torque e Potência durante a manobra do primeiro modelo



Fonte: Elaborado pela autora

4.3 Segundo modelo: Volante com formato de anel e sem contrapeso

Em seguida, a simulação foi realizada seguindo os parâmetros da Tabela 3 para um volante com formato de anel e sem o uso do contrapeso.

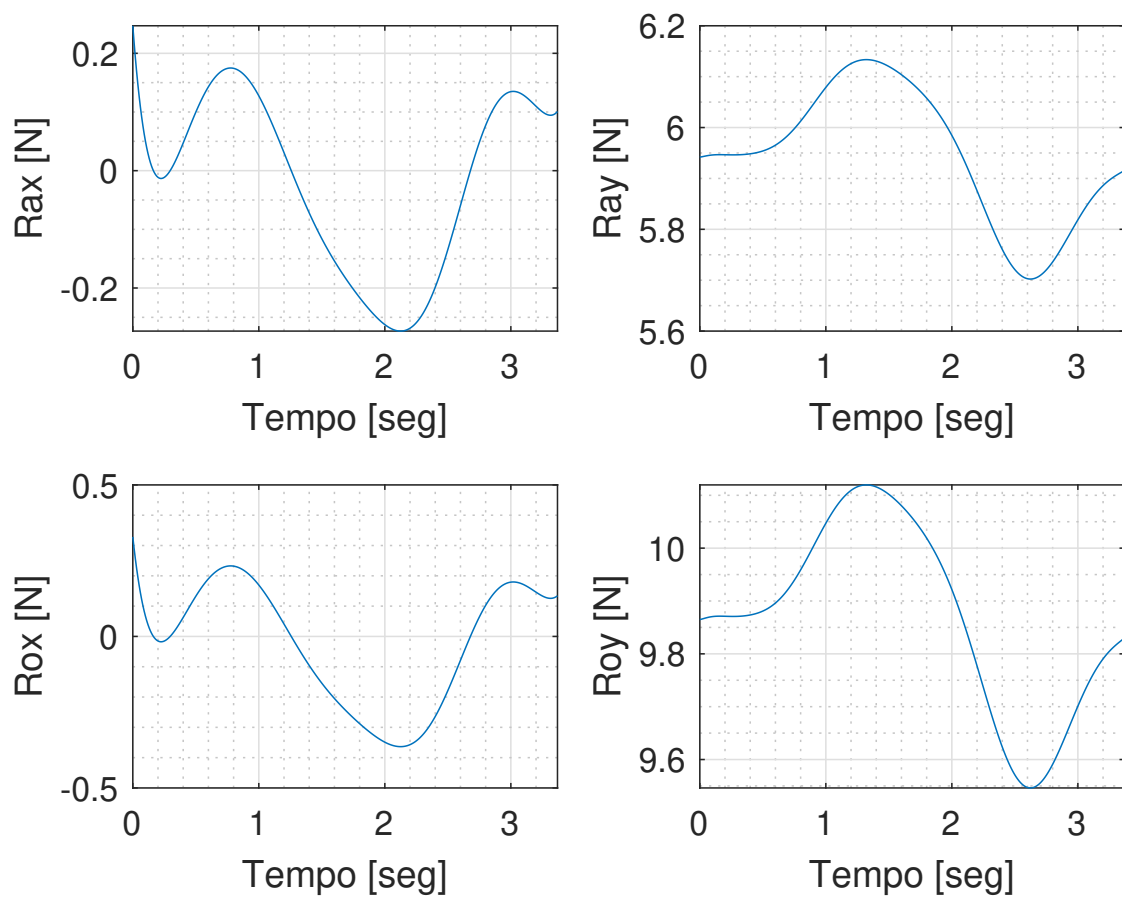
Tabela 3 – Parâmetros do sistema do segundo modelo

Métrica	Valor
Gravidade [g]	9,81 m/s^2
Massa do volante [m_A]	0,3 kg
Massa do pêndulo [m_B]	0,4 kg
Comprimento do pêndulo [L]	0,2 m
Velocidade angular inicial [w_i]	0 rad/s
Raio do volante [r]	0,6 m
Duração do arranque [t]	3,37 s
Massa do motor [m_{motor}]	0,306 kg

Fonte: Elaborado pela autora

Os resultados obtidos para o segundo modelo podem ser observados nas Figuras 21, 22 e 23.

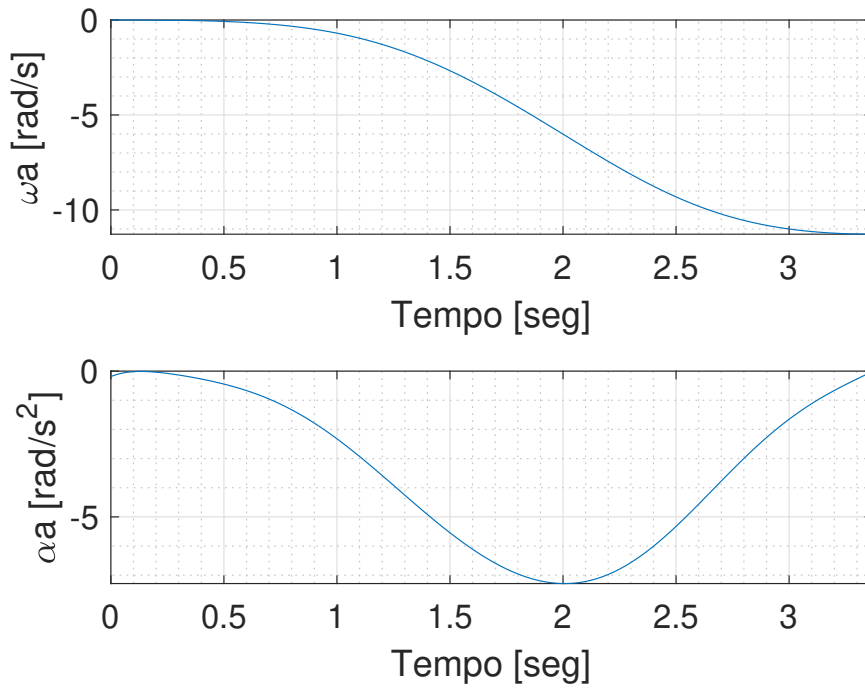
Figura 21 – Forças de Reação durante a manobra do segundo modelo



Fonte: Elaborado pela autora

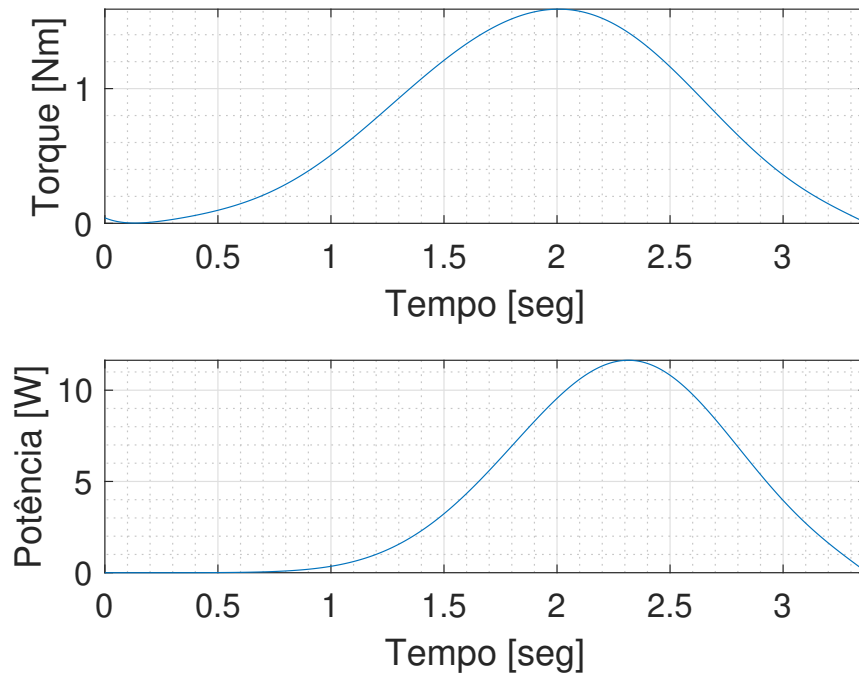
O torque máximo requerido pelo modelo foi de 1,589 Nm, já a potência máxima foi de 11,64 W. Isso representa uma redução de 27% para o torque e 60% para a potência.

Figura 22 – Velocidade e aceleração angular da roda durante a manobra do segundo modelo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 23 – Torque e Potência durante a manobra do segundo modelo



Fonte: Elaborado pela autora

4.4 Modelo final: Volante com formato de anel e com contrapeso

Por fim, a simulação foi realizada seguindo os parâmetros da Tabela 4 para um volante com formato de anel com contrapeso.

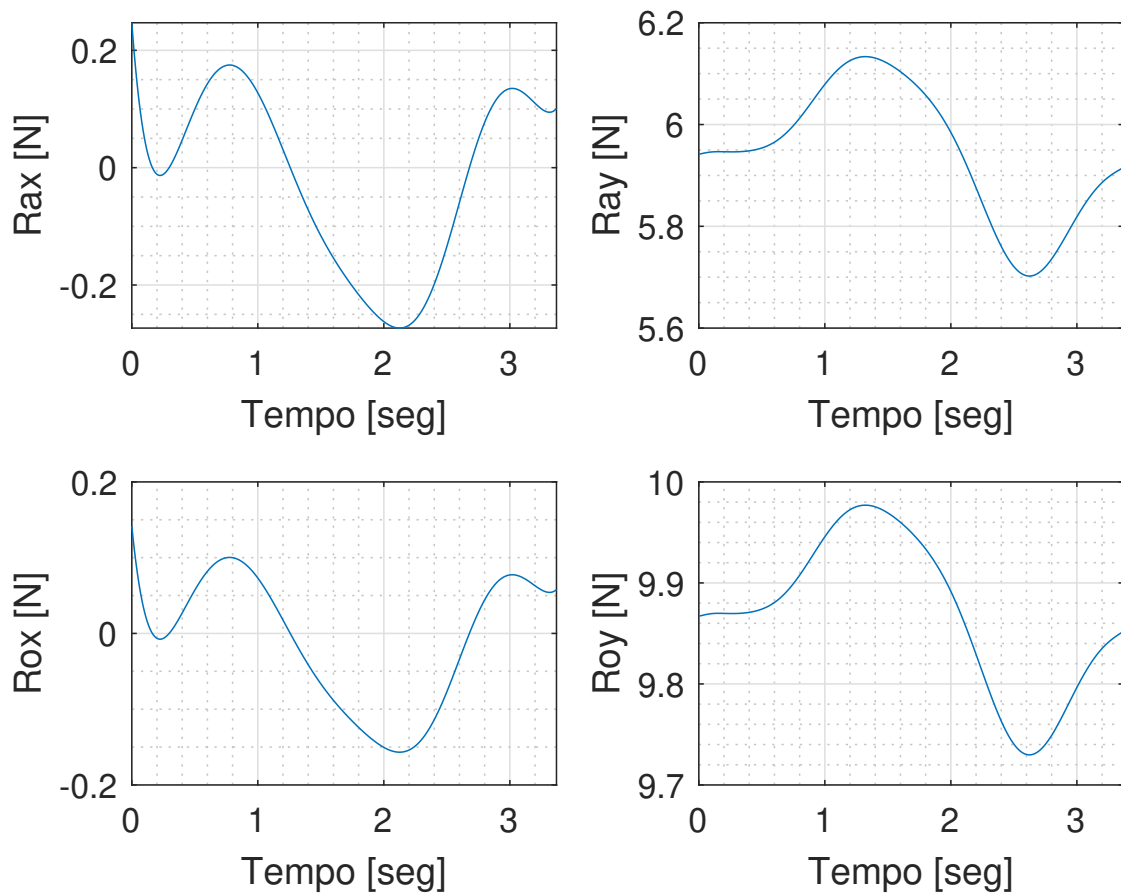
Tabela 4 – Parâmetros do sistema do modelo final

Métrica	Valor
Gravidade [g]	9,81 m/s^2
Massa do volante [m_A]	0,3 kg
Massa do pêndulo [m_B]	0,4 kg
Distância da origem ao contrapeso [d_c]	0,3 m
Massa do contrapeso [m_c]	0,537 kg
Comprimento do pêndulo [L]	0,2 m
Velocidade angular inicial [w_i]	0 rad/s
Raio do volante [r]	0,6 m
Duração do arranque [t]	3,37 s
Massa do motor [m_{motor}]	0,306 kg

Fonte: Elaborado pela autora

Os resultados obtidos para o modelo final podem ser observados nas Figuras 24, 25 e 26.

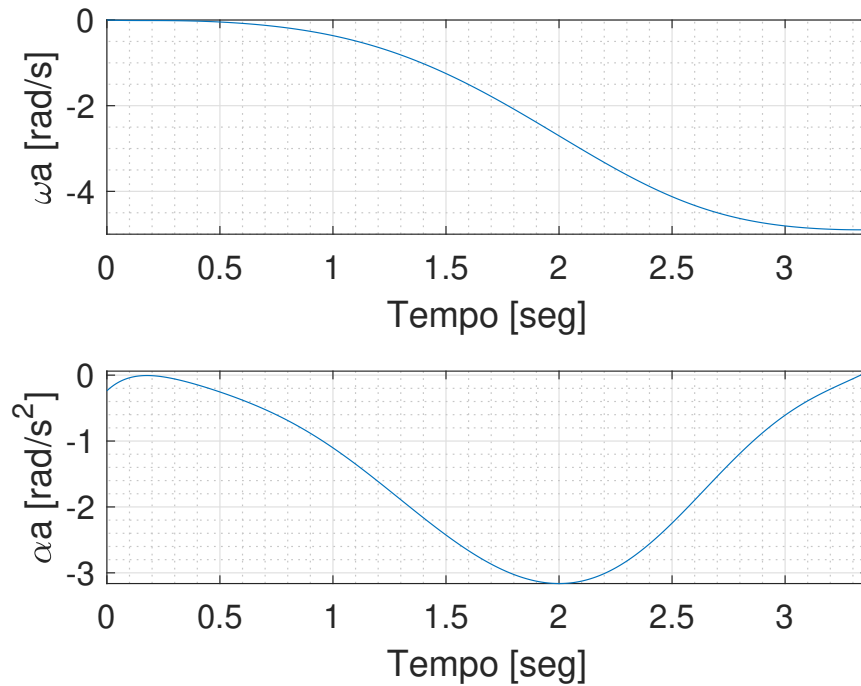
Figura 24 – Forças de Reação durante a manobra do modelo final



Fonte: Elaborado pela autora

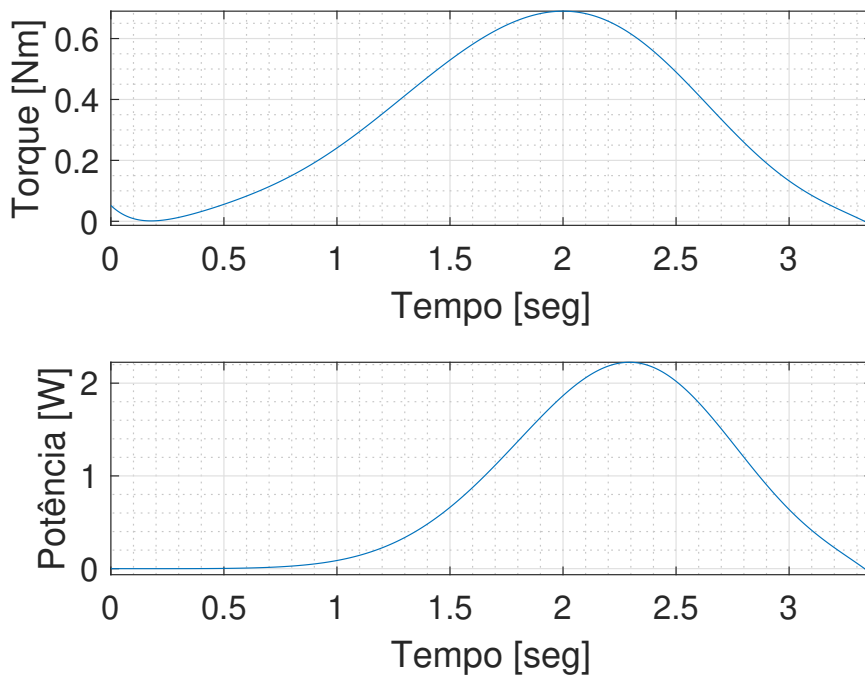
O torque máximo requerido pelo modelo foi de 0,690 Nm, a velocidade angular máxima da roda foi de 4,896 rad/s, já a potência máxima foi de 2,225 W. Isso representa uma redução de 56% para o torque do modelo anterior e 81% para a potência. Dessa forma, o modelo com contrapeso se apresenta como a melhor opção para o projeto e, conseqüentemente, é o modelo escolhido para o projeto.

Figura 25 – Velocidade e aceleração angular da roda durante a manobra do modelo final



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 26 – Torque e Potência durante a manobra do modelo final



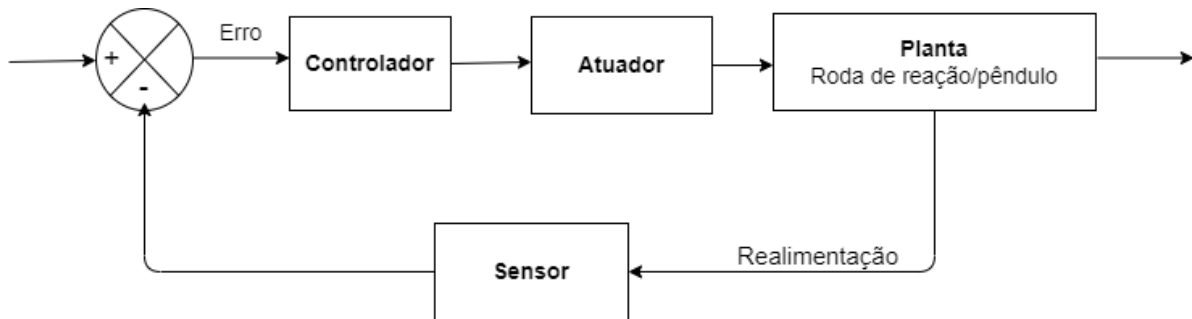
Fonte: Elaborado pela autora

5 SELEÇÃO DOS COMPONENTES

Calculado todos os parâmetros do projeto no capítulo 4, é possível selecionar o resto dos componentes necessários de forma a realizar a manobra.

A Figura 27 descreve os processos desse sistema de controle através do diagrama de blocos. O controlador gera um sinal fazendo com que o atuador opere. A roda de reação, então, sai do repouso e movimentada o pêndulo. O sensor irá alimentar o fluxo com os dados da posição angular. Dessa forma, o controlador ajusta o sinal até que a posição final seja atingida.

Figura 27 – Fluxograma dos Processos



Fonte: Elaborado pelo autora

Assim, esses são os componentes que precisam ser selecionados para o projeto.

5.1 Controlador: Arduino

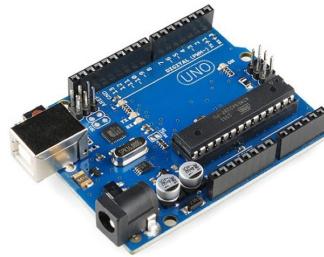
Para o controlador, o Arduino, que é uma placa de prototipagem eletrônica, é ideal para o sistema. Além de apresentar baixo custo para a sua implementação, o Arduino também tem o código aberto, assim, usuários podem adaptar e codificar de acordo com a sua necessidade. Suas especificações técnicas constam na Tabela 5 (ELETRÔNICA, 2022).

Tabela 5 – Especificações Técnicas do Controlador

Parâmetro	Valor
Tensão de operação	5 V
Tensão de alimentação	7 a 12 V
Entradas analógicas	6
Entradas e saídas digitais	14
Massa	50 g

Fonte: ELETRÔNICA (2022)

Figura 28 – Arduino



Fonte: ELETRÔNICA (2022)

5.2 Atuador: Motor elétrico

O motor elétrico escolhido para o projeto foi o AK555/11.1PF12R83CE-SG. Este motor DC, além de suprir as necessidades requeridas pelo sistema do modelo final, também apresenta custo vantajoso para uma construção de uma bancada. Suas especificações técnicas constam na Tabela 6 (SARAVATI, 2022).

Tabela 6 – Especificações Técnicas do Motor

Parâmetro	Valor
Torque (Máximo)	11,1 kgf.cm
Potência (Máxima)	5 W
Rotação (Máxima)	64,5 rpm
Tensão Nominal	12 V
Massa do Motor	306 g

Fonte: SARAVATI (2022)

Figura 29 – Motor DC



Fonte: SARAVATI (2022)

5.3 Planta: Roda de reação/Pêndulo

As dimensões do sistema pendular e da roda de reação foram definidas no capítulo 4.4.

5.4 Sensor: Sensor de posição angular

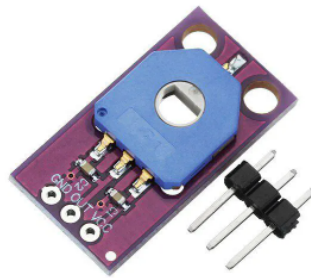
Finalmente, para a definição do sensor, este dispositivo deverá ser capaz de mensurar o ângulo do pêndulo durante a manobra. Por isso, o sensor de posição angular é o ideal para o desenvolvimento do projeto. Suas especificações técnicas constam na Tabela 7 (EASYTRONICS, 2022).

Tabela 7 – Especificações Técnicas do Sensor

Parâmetro	Valor
Tensão de alimentação	5 V
Resistência	10 kΩ
Vida útil	300.000 ciclos
Temperatura de trabalho	-40 °C até 85 °C
Saída	Analógica

Fonte: EASYTRONICS (2022)

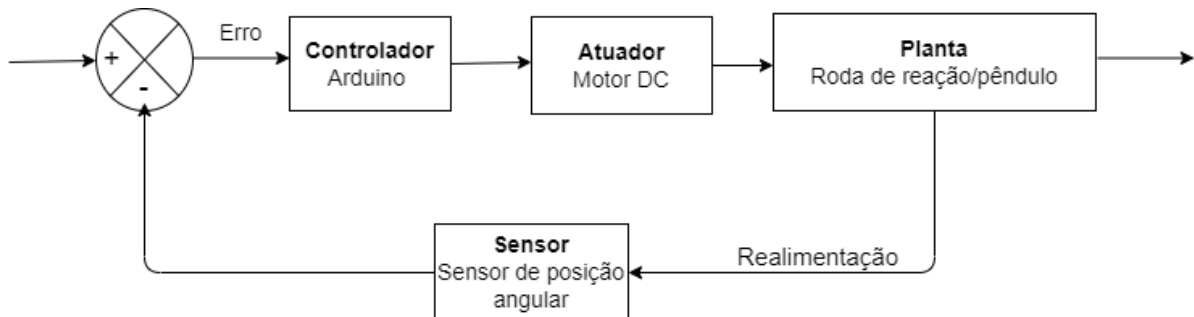
Figura 30 – Sensor de Posição



Fonte: EASYTRONICS (2022)

Dessa forma, o fluxograma final do processo se encontra na Figura 31 e todos os componentes necessários foram definidos.

Figura 31 – Fluxograma Final dos Processos



Fonte: Elaborado pela autora

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalizado o projeto e junto com a revisão bibliográfica, este trabalho pode ilustrar a relevância das rodas de reação em diferentes áreas de aplicação.

O trabalho consistiu na modelagem dinâmica de todo o sistema. Definido todas as equações que descrevem o sistema e junto com os dados da trajetória de um modelo real, foram simuladas, através de recursos computacionais, diversas configurações diferentes do projeto. A mudança do disco pelo anel para o formato do volante teve melhoras significativas nos resultados (exigiu um motor menos potente). Somando-se à essa mudança, a adição do contrapeso de forma a aumentar o momento do pêndulo a favor do sentido do motor, teve resultados ainda melhores. Dessa forma, foi-se definido o modelo final.

Por fim, foi-se selecionado todos os componentes do projeto para o sistema de controle do projeto. Assim, o Arduino irá enviar um sinal para o motor, que atuará em cima da roda de reação. O sensor de posição angular fará a medição da orientação do pêndulo e retornará esse valor para o controlador, que irá ajustar seu sinal para o atuador até que o ângulo final seja atingido.

Portanto, este trabalho cumpriu com os objetivos propostos: projetar um sistema pendular que realize a manobra de *swing-up*.

Para trabalhos futuros, o projeto poderá ser construído e testado de forma a verificar possíveis melhorias, analisar outras trajetórias, já pensando em diferentes aplicações.

REFERÊNCIAS

- BURAKOV, M. et al. Fuzzy control of spacecraft reaction wheel. *Gyroscopy and Navigation*, Springer, v. 10, n. 4, p. 339–345, 2019. Citado na página 15.
- CARRARA, V. Comparação experimental entre formas de controle de atitude com rodas de reação. *VI SBEIN-Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial*. Rio de Janeiro, 2010. Citado na página 13.
- EASYTRONICS. *Módulo Sensor de Posição Angular CJMCU103*. 2022. Disponível em: <<https://www.easytronics.com.br/sensor-de-posicao-angular-cjmcu103>>. Citado na página 42.
- ELETRÔNICA, B. D. *Arduino Uno R3 + Cabo USB 2.0 - A-B*. 2022. Disponível em: <<https://www.baudaeletronica.com.br/arduino-uno-r3.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- GAJAMOHAN, M. et al. The cubli: A cube that can jump up and balance. In: IEEE. *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. [S.l.], 2012. p. 3722–3727. Citado na página 16.
- HIBBELER, R. *Dinâmica. Mecânica para Engenharia*. 10ª Edição. [S.l.]: Pearson, 2005. Citado na página 18.
- ISMAIL, Z.; VARATHARAJOO, R. A study of reaction wheel configurations for a 3-axis satellite attitude control. *Advances in Space Research*, Elsevier, v. 45, n. 6, p. 750–759, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- LEE, A. M. et al. 3-axis reaction wheel system for cubesats. 2021. Citado na página 16.
- MAYR, J.; SPANLANG, F.; GATTRINGER, H. Mechatronic design of a self-balancing three-dimensional inertia wheel pendulum. *Mechatronics*, Elsevier, v. 30, p. 1–10, 2015. Citado na página 16.
- MONTOYA, O. D. et al. Passivity-based control applied of a reaction wheel pendulum: an ida-pbc approach. In: IEEE. *2019 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)*. [S.l.], 2019. p. 1–6. Citado na página 13.
- MUEHLEBACH, M.; D’ANDREA, R. Nonlinear analysis and control of a reaction-wheel-based 3-d inverted pendulum. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 25, n. 1, p. 235–246, 2016. Citado na página 16.
- NEVES, G. P.; ANGÉLICO, B. A.; AGULHARI, C. M. Robust 2 controller with parametric uncertainties applied to a reaction wheel unicycle. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 93, n. 10, p. 2431–2441, 2020. Citado na página 17.
- OGATA, K. Engenharia de controle moderno, 3a. edição. Editora. LTC. Rio de Janeiro, 1998. Citado na página 13.
- SANTOS, I. F. *Dinâmica de sistemas mecânicos: modelagem, simulação, visualização, verificação*. [S.l.]: Makron, 2001. Citado na página 13.

- SARAVATI. *Micro Motor DC com Caixa de Redução 12V 83 RPM AK555/11.1PF12R83CE*. 2022. Disponível em: <<https://www.saravati.com.br/motor-dc-com-caixa-de-reducao-12v-83-rpm>>. Citado na página 41.
- SRINIVAS, K.; BEHERA, L. Swing-up control strategies for a reaction wheel pendulum. *International Journal of Systems Science*, Taylor & Francis, v. 39, n. 12, p. 1165–1177, 2008. Citado na página 15.
- TRENTIN, J. F. S. Attitude control of inverted pendulums using reaction wheels and variable speed control moment gyroscope. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2020. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- YAN, C.; ASANO, F.; LI, L. Stable gait generation of impaired biped robot with reaction wheel. In: IEEE. *2019 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. [S.l.], 2019. p. 1886–1891. Citado na página 17.

APÊNDICE A – MATLAB: AJUSTE DA CURVA EXPERIMENTAL

```

1  clc
2  clear all
3  close all
4
5  %vetor tempo do tracker
6  t = [0.00;0.03;0.07;0.10;0.13;0.17;0.20;0.23;0.27;0.30;0.33;
7  0.37;0.40;0.43;0.47;0.50;0.53;0.57;0.60;0.63;0.67;0.70;0.73;
8  0.77;0.80;0.83;0.87;0.90;0.93;0.97;1.00;1.03;1.07;1.10;1.13;
9  1.17;1.20;1.23;1.27;1.30;1.33;1.37;1.40;1.43;1.47;1.50;1.53;
10 1.57;1.60;1.63;1.67;1.70;1.74;1.77;1.80;1.84;1.87;1.90;1.94;
11 1.97;2.00;2.04;2.07;2.10;2.14;2.17;2.20;2.24;2.27;2.30;2.34;
12 2.37;2.40;2.44;2.47;2.50;2.54;2.57;2.60;2.64;2.67;2.70;2.74;
13 2.77;2.80;2.84;2.87;2.90;2.94;2.97;3.00;3.04;3.07;3.10;3.14;
14 3.17;3.20;3.24;3.27;3.30;3.34;3.37];
15
16 %vetor theta do tracker
17 theta = [-1.5846;-1.5846;-1.5846;-1.5846;-1.5846;-1.5846;
18 -1.5846;-1.5846;-1.5846;-1.5846;-1.5846;-1.5846;-1.5846;
19 -1.5405;-1.5809;-1.5802;-1.5798;-1.5737;-1.5677;-1.5559;
20 -1.5479;-1.5330;-1.5192;-1.5061;-1.4898;-1.4800;-1.4579;
21 -1.4382;-1.4150;-1.3911;-1.3665;-1.3442;-1.3105;-1.2857;
22 -1.2598;-1.2258;-1.1927;-1.1616;-1.1267;-1.0906;-1.0550;
23 -1.0167;-0.9771;-0.9422;-0.8993;-0.8635;-0.8170;-0.7790;
24 -0.7334;-0.6918;-0.6480;-0.6039;-0.5556;-0.5138;-0.4690;
25 -0.4233;-0.3803;-0.3358;-0.2911;-0.2381;-0.1963;-0.1507;
26 -0.1004;-0.0555;0.0044;0.0400;0.0963;0.1559;0.1867;0.2394;
27 0.2960;0.3637;0.4010;0.4247;0.4850;0.5488;0.5945;0.6492;
28 0.6892;0.7416;0.8052;0.8481;0.8725;0.9257;0.9685;1.0090;
29 1.0368;1.0718;1.1292;1.2018;1.1876;1.2195;1.2645;1.3028;
30 1.3430;1.3813;1.4200;1.4619;1.4769;1.5059;1.5459;1.5760];
31
32 %ajuste na curva com polinomio de grau 9
33 f=fit(t,theta,'poly9')
34
35 figure (2);
36 plot(f,t,theta)
37 xlim([0 3.37])
38 xlabel('Tempo [seg]')
39 ylabel('\theta [rad]')
40 legend('Dados','Ajuste')
41 set(gca,'fontsize',14)
42 grid on
43 grid minor

```

APÊNDICE B – SIMULAÇÃO DO PRIMEIRO MODELO

```

1  close all
2  clear all
3  clc
4
5  %Parametros
6  g = 9.81; %gravidade
7  m_motor = 0.306; %massa motor
8  ma = 0.6; %massa volante
9  ma = ma+m_motor;
10 mb = 0.4; %massa do pendulo
11 L = 0.2; %comprimento pendulo
12 wi = 0; %vel angular inicial
13 r = 0.6; %raio do volante
14 dc = 0; %distancia ao contrapeso
15 mc=0; %massa contrapeso
16 tmax= 3.37; %tempo arranque
17 t = 0:0.01:tmax;
18
19 %momento de inercia de massa
20 Ib = (1/3)*mb*(L^2);
21 Iv_disco = (1/2)*ma*(r^2);
22 Iv_anel = ma*(r^2);
23 Iv = Iv_disco;
24
25 %distancia ao cg
26 dcg = ((-mc*dc) + (mb*(L/2)))/(mb + mc);
27
28 %polinomio da curva ajustada de theta
29 p1 = -0.008356;
30 p2 = 0.1359;
31 p3 = -0.9125;
32 p4 = 3.257;
33 p5 = -6.601;
34 p6 = 7.398;
35 p7 = -3.976;
36 p8 = 1.019;
37 p9 = 0;
38 p10 = -1.583;
39
40 v_theta = p1*t.^9 + p2*t.^8 + p3*t.^7 + p4*t.^6 + p5*t.^5 + p6*t.^4
41 + p7*t.^3 + p8*t.^2 + p9*t + p10;
42 figure(1);

```

```
43     plot(t,v_theta)
44     xlim([0 tmax])
45     xlabel('Tempo [seg]')
46     ylabel('\theta [rad]')
47     set(gca,'fontsize',14)
48     grid on
49     grid minor
50
51     %veloc angular
52     v_w = 9*p1*t.^8 + 8*p2*t.^7 + 7*p3*t.^6 + 6*p4*t.^5 + 5*p5*t.^4 +
4*p6*t.^3 + 3*p7*t.^2 + 2*p8*t + p9;
53
54     figure(2);
55     plot(t,v_w)
56     xlim([0 tmax])
57     xlabel('Tempo [seg]')
58     ylabel('\omega [rad/s]')
59     set(gca,'fontsize',14)
60     grid on
61     grid minor
62
63     %aceleracao angular
64     alfa = 9*8*p1*t.^7 + 7*8*p2*t.^6 + 6*7*p3*t.^5 + 5*6*p4*t.^4 + 4*5*
p5*t.^3 + 3*4*p6*t.^2 + 2*3*p7*t + 2*p8;
65
66     figure(3);
67     plot(t,alfa)
68     xlim([0 tmax])
69     xlabel('Tempo [seg]')
70     ylabel('\alpha [rad/s^2]')
71     set(gca,'fontsize',14)
72     grid on
73     grid minor
74
75     %forca de reacao
76     Rax = ma*L*(-alfa.*sin(v_theta)-(v_w.^2).*cos(v_theta));
77     Ray = ma*L*(alfa.*cos(v_theta)-(v_w.^2).*sin(v_theta)) + ma*g;
78     Rox = mb*dcg*(-alfa.*sin(v_theta)-(v_w.^2).*cos(v_theta)) + Rax;
79     Roy = mb*dcg*(alfa.*cos(v_theta)-(v_w.^2).*sin(v_theta)) + mb*g +
Ray;
80
81     figure(4);
82     subplot(2,2,1)
83     plot(t,Rax)
84     xlim([0 tmax])
85     xlabel('Tempo [seg]')
86     ylabel('Rax [N]')
```

```
87     set(gca,'fontsize',11)
88     grid on
89     grid minor
90
91     subplot(2,2,2)
92     plot(t,Ray)
93     xlim([0 tmax])
94     xlabel('Tempo [seg]')
95     ylabel('Ray [N]')
96     set(gca,'fontsize',11)
97     grid on
98     grid minor
99
100    subplot(2,2,3)
101    plot(t,Rox)
102    xlim([0 tmax])
103    xlabel('Tempo [seg]')
104    ylabel('Rox [N]')
105    set(gca,'fontsize',11)
106    grid on
107    grid minor
108
109    subplot(2,2,4)
110    plot(t,Roy)
111    xlim([0 tmax])
112    xlabel('Tempo [seg]')
113    ylabel('Roy [N]')
114    set(gca,'fontsize',11)
115    grid on
116    grid minor
117
118    %torque
119    T = - (Ib*alfa + Ray.*L.*cos(v_theta) - Rax.*L.*sin(v_theta) + mb*g*
120    dcg*cos(v_theta));
121
122    alfa_a = T/Iv;
123
124    w_a = zeros(size(t));
125    w_a(1)=wi;
126    for n=2:length(w_a)
127        w_a(n) = w_a(n-1) + alfa_a(n)*0.01;
128    end
129
130    figure(5)
131    subplot(2,1,1)
132    plot(t,w_a)
133    xlim([0 tmax])
```

```
133     xlabel('Tempo [seg]')
134     ylabel('\omegaa [rad/s]')
135     set(gca,'fontsize',14)
136     grid on
137     grid minor
138
139     subplot(2,1,2)
140     plot(t,alfa_a)
141     xlim([0 tmax])
142     xlabel('Tempo [seg]')
143     ylabel('\alphaa [rad/s^2]')
144     set(gca,'fontsize',14)
145     grid on
146     grid minor
147
148     %potencia
149     P = T.*w_a ;
150
151     figure(6);
152     subplot(2,1,1)
153     plot(t,-T)
154     xlim([0 tmax])
155     xlabel('Tempo [seg]')
156     ylabel('Torque [Nm]')
157     set(gca,'fontsize',14)
158     grid on
159     grid minor
160
161     subplot(2,1,2)
162     plot(t,P)
163     xlim([0 tmax])
164     xlabel('Tempo [seg]')
165     ylabel('Pot ncia [W]')
166     set(gca,'fontsize',14)
167     grid on
168     grid minor
```

APÊNDICE C – SIMULAÇÃO DO SEGUNDO MODELO

```

1  close all
2  clear all
3  clc
4
5  %Parametros
6  g = 9.81; %gravidade
7  m_motor = 0.306; %massa motor
8  ma = 0.3; %massa volante
9  ma = ma+m_motor;
10 mb = 0.4; %massa pendulo
11 L = 0.2; %comprimento pendulo
12 wi = 0; %veloc angular inicial
13 r = 0.6; %raio volante
14 dc = 0; %distancia contrapeso
15 mc=0; %massa contrapeso
16 tmax= 3.37; %tempo de arranque
17 t = 0:0.01:tmax;
18
19 %momento de inercia de massa
20 Ib = (1/3)*mb*(L^2);
21 Iv_disco = (1/2)*ma*(r^2);
22 Iv_anel = ma*(r^2);
23 Iv = Iv_anel;
24
25 %distancia ao cg
26 dcg = ((-mc*dc) + (mb*(L/2)))/(mb + mc);
27
28 %polinomio de ajuste de theta
29 p1 = -0.008356;
30 p2 = 0.1359;
31 p3 = -0.9125;
32 p4 = 3.257;
33 p5 = -6.601;
34 p6 = 7.398;
35 p7 = -3.976;
36 p8 = 1.019;
37 p9 = 0;
38 p10 = -1.583;
39
40 v_theta = p1*t.^9 + p2*t.^8 + p3*t.^7 + p4*t.^6 + p5*t.^5 + p6*t.^4
41 + p7*t.^3 + p8*t.^2 + p9*t + p10;
42 figure(1);

```

```

43     plot(t,v_theta)
44     xlim([0 tmax])
45     xlabel('Tempo [seg]')
46     ylabel('\theta [rad]')
47     set(gca,'fontsize',14)
48     grid on
49     grid minor
50
51     %veloc angular
52     v_w = 9*p1*t.^8 + 8*p2*t.^7 + 7*p3*t.^6 + 6*p4*t.^5 + 5*p5*t.^4 +
4*p6*t.^3 + 3*p7*t.^2 + 2*p8*t + p9;
53
54     figure(2);
55     plot(t,v_w)
56     xlim([0 tmax])
57     xlabel('Tempo [seg]')
58     ylabel('\omega [rad/s]')
59     set(gca,'fontsize',14)
60     grid on
61     grid minor
62
63     %aceleracao angular
64     alfa = 9*8*p1*t.^7 + 7*8*p2*t.^6 + 6*7*p3*t.^5 + 5*6*p4*t.^4 + 4*5*
p5*t.^3 + 3*4*p6*t.^2 + 2*3*p7*t + 2*p8;
65
66     figure(3);
67     plot(t,alfa)
68     xlim([0 tmax])
69     xlabel('Tempo [seg]')
70     ylabel('\alpha [rad/s^2]')
71     set(gca,'fontsize',14)
72     grid on
73     grid minor
74
75     %forca reacao
76     Rax = ma*L*(-alfa.*sin(v_theta)-(v_w.^2).*cos(v_theta));
77     Ray = ma*L*(alfa.*cos(v_theta)-(v_w.^2).*sin(v_theta)) + ma*g;
78     Rox = mb*dcg*(-alfa.*sin(v_theta)-(v_w.^2).*cos(v_theta)) + Rax;
79     Roy = mb*dcg*(alfa.*cos(v_theta)-(v_w.^2).*sin(v_theta)) + mb*g +
Ray;
80
81     figure(4);
82     subplot(2,2,1)
83     plot(t,Rax)
84     xlim([0 tmax])
85     xlabel('Tempo [seg]')
86     ylabel('Rax [N]')

```

```
87     set(gca,'fontsize',11)
88     grid on
89     grid minor
90
91     subplot(2,2,2)
92     plot(t,Ray)
93     xlim([0 tmax])
94     xlabel('Tempo [seg]')
95     ylabel('Ray [N]')
96     set(gca,'fontsize',11)
97     grid on
98     grid minor
99
100    subplot(2,2,3)
101    plot(t,Rox)
102    xlim([0 tmax])
103    xlabel('Tempo [seg]')
104    ylabel('Rox [N]')
105    set(gca,'fontsize',11)
106    grid on
107    grid minor
108
109    subplot(2,2,4)
110    plot(t,Roy)
111    xlim([0 tmax])
112    xlabel('Tempo [seg]')
113    ylabel('Roy [N]')
114    set(gca,'fontsize',11)
115    grid on
116    grid minor
117
118    %torque
119    T = - (Ib*alfa + Ray.*L.*cos(v_theta) - Rax.*L.*sin(v_theta) + mb*g*
120    dcg*cos(v_theta));
121    alfa_a = T/Iv;
122
123    w_a = zeros(size(t));
124    w_a(1)=wi;
125    for n=2:length(w_a)
126        w_a(n) = w_a(n-1) + alfa_a(n)*0.01;
127    end
128
129    figure(5)
130    subplot(2,1,1)
131    plot(t,w_a)
132    xlim([0 tmax])
133    xlabel('Tempo [seg]')
```



```
133     ylabel('\omegaa [rad/s]')
134     set(gca,'fontsize',14)
135     grid on
136     grid minor
137
138     subplot(2,1,2)
139     plot(t,alfa_a)
140     xlim([0 tmax])
141     xlabel('Tempo [seg]')
142     ylabel('\alphaa [rad/s^2]')
143     set(gca,'fontsize',14)
144     grid on
145     grid minor
146
147 %potencia
148 P = T.*w_a ;
149
150 figure(6);
151     subplot(2,1,1)
152     plot(t,-T)
153     xlim([0 tmax])
154     xlabel('Tempo [seg]')
155     ylabel('Torque [Nm]')
156     set(gca,'fontsize',14)
157     grid on
158     grid minor
159
160     subplot(2,1,2)
161     plot(t,P)
162     xlim([0 tmax])
163     xlabel('Tempo [seg]')
164     ylabel('Pot ncia [W]')
165     set(gca,'fontsize',14)
166     grid on
167     grid minor
```

APÊNDICE D – SIMULAÇÃO DO MODELO FINAL

```

1  close all
2  clear all
3  clc
4
5  %Parametros
6  g = 9.81; %gravidade
7  m_motor = 0.306; %massa do motor
8  ma = 0.3; %massa do volante
9  ma = ma+m_motor;
10 mb = 0.4; %massa pendulo
11 L = 0.2; %comprimento pendulo
12 wi = 0; %veloc angular inicial
13 r = 0.6; %raio do volante
14 dc = 0.3; %distancia contrapeso
15 mc = L*((mb/2)+ma)/dc; %massa contrapeso
16 tmax= 3.37; %tempo de arranque
17 t = 0:0.01:tmax;
18 %momento de inercia de massa
19 Ib = (1/3)*mb*(L^2);
20 Iv_disco = (1/2)*ma*(r^2);
21 Iv_anel = ma*(r^2);
22 Iv = Iv_anel;
23 dcg = ((-mc*dc) + (mb*(L/2)))/(mb + mc);
24
25 %polinomio de ajuste de theta
26 p1 = -0.008356;
27 p2 = 0.1359;
28 p3 = -0.9125;
29 p4 = 3.257;
30 p5 = -6.601;
31 p6 = 7.398;
32 p7 = -3.976;
33 p8 = 1.019;
34 p9 = 0;
35 p10 = -1.583;
36
37 v_theta = p1*t.^9 + p2*t.^8 + p3*t.^7 + p4*t.^6 + p5*t.^5 + p6*t.^4
38 + p7*t.^3 + p8*t.^2 + p9*t + p10;
39 figure(1);
40 plot(t,v_theta)
41 xlim([0 tmax])
42 xlabel('Tempo [seg]')
43 ylabel('\theta [rad]')

```

```
43     set(gca,'fontsize',14)
44     grid on
45     grid minor
46
47     %veloc angular
48     v_w = 9*p1*t.^8 + 8*p2*t.^7 + 7*p3*t.^6 + 6*p4*t.^5 + 5*p5*t.^4 +
49     4*p6*t.^3 + 3*p7*t.^2 + 2*p8*t + p9;
50
51     figure(2);
52     plot(t,v_w)
53     xlim([0 tmax])
54     xlabel('Tempo [seg]')
55     ylabel('\omega [rad/s]')
56     set(gca,'fontsize',14)
57     grid on
58     grid minor
59
60     %aceleracao angular
61     alfa = 9*8*p1*t.^7 + 7*8*p2*t.^6 + 6*7*p3*t.^5 + 5*6*p4*t.^4 + 4*5*
62     p5*t.^3 + 3*4*p6*t.^2 + 2*3*p7*t + 2*p8;
63
64     figure(3);
65     plot(t,alfa)
66     xlim([0 tmax])
67     xlabel('Tempo [seg]')
68     ylabel('\alpha [rad/s^2]')
69     set(gca,'fontsize',14)
70     grid on
71     grid minor
72
73     %forca reacao
74     Rax = ma*L*(-alfa.*sin(v_theta)-(v_w.^2).*cos(v_theta));
75     Ray = ma*L*(alfa.*cos(v_theta)-(v_w.^2).*sin(v_theta)) + ma*g;
76     Rox = mb*dcg*(-alfa.*sin(v_theta)-(v_w.^2).*cos(v_theta)) + Rax;
77     Roy = mb*dcg*(alfa.*cos(v_theta)-(v_w.^2).*sin(v_theta)) + mb*g +
78     Ray;
79
80     figure(4);
81     subplot(2,2,1)
82     plot(t,Rax)
83     xlim([0 tmax])
84     xlabel('Tempo [seg]')
85     ylabel('Rax [N]')
86     set(gca,'fontsize',11)
87     grid on
88     grid minor
```

```
87     subplot(2,2,2)
88     plot(t,Ray)
89     xlim([0 tmax])
90     xlabel('Tempo [seg]')
91     ylabel('Ray [N]')
92     set(gca,'fontsize',11)
93     grid on
94     grid minor
95
96     subplot(2,2,3)
97     plot(t,Rox)
98     xlim([0 tmax])
99     xlabel('Tempo [seg]')
100    ylabel('Rox [N]')
101    set(gca,'fontsize',11)
102    grid on
103    grid minor
104
105    subplot(2,2,4)
106    plot(t,Roy)
107    xlim([0 tmax])
108    xlabel('Tempo [seg]')
109    ylabel('Roy [N]')
110    set(gca,'fontsize',11)
111    grid on
112    grid minor
113
114    %torque
115    T = - (Ib*alfa + Ray.*L.*cos(v_theta) - Rax.*L.*sin(v_theta) + mb*g*
116    dcg*cos(v_theta));
117    alfa_a = T/Iv;
118
119    w_a = zeros(size(t));
120    w_a(1)=wi;
121    for n=2:length(w_a)
122        w_a(n) = w_a(n-1) + alfa_a(n)*0.01;
123    end
124
125    figure(5)
126    subplot(2,1,1)
127    plot(t,w_a)
128    xlim([0 tmax])
129    xlabel('Tempo [seg]')
130    ylabel('\omegaa [rad/s]')
131    set(gca,'fontsize',14)
132    grid on
133    grid minor
```

```
133
134     subplot(2,1,2)
135     plot(t,alfa_a)
136     xlim([0 tmax])
137     xlabel('Tempo [seg]')
138     ylabel('\alphaa [rad/s^2]')
139     set(gca,'fontsize',14)
140     grid on
141     grid minor
142
143 %potencia
144 P = T.*w_a ;
145
146 figure(6);
147     subplot(2,1,1)
148     plot(t,-T)
149     xlim([0 tmax])
150     xlabel('Tempo [seg]')
151     ylabel('Torque [Nm]')
152     set(gca,'fontsize',14)
153     grid on
154     grid minor
155
156     subplot(2,1,2)
157     plot(t,P)
158     xlim([0 tmax])
159     xlabel('Tempo [seg]')
160     ylabel('Pot ncia [W]')
161     set(gca,'fontsize',14)
162     grid on
163     grid minor
```