UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Hipoelipticidade global analítica e Gevrey de sublaplacianos sob condições Diofantinas

Elis Coimbra de Moura

São Carlos-SP
Julho de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Hipoelipticidade global analítica e Gevrey de sublaplacianos sob condições Diofantinas

Elis Coimbra de Moura

Orientador: Prof. Dr. Gerson Petronilho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Julho de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Elis Coimbra de Moura, realizada em 22/09/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Gerson Petronilho (UFSCar)

Prof. Dr. Igor Ambo Ferra (UFABC)

Prof. Dr. Cezar Issao Kondo (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho
a Matheus, aos meus pais
e a Luana.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus pois sem ele a conclusão desta jornada e deste trabalho não seria possível.

Agradeço ao meu esposo Matheus por sempre me dar forças, por nossa inúmeras conversas sobre os próximos passos e pelo seu carinho e amor a nossa pequena família, sem dúvidas sem seu apoio e seu amor e o amor do Joey este trabalho não seria possível.

Agradeço aos meus pais e minha irmã Luana que mesmo não estando em São Carlos fisicamente sempre estavam comigo nas videochamadas e quando eu mesma não acreditava que ia conseguir eles sempre estiveram confiando no meu potencial e me aconselhando da melhor forma.

Agradeço ao meu orientador Gerson Petronilho pela paciência de me orientar. Por me acompanhar neste um ano de trabalho e por sempre me auxiliar.

Agradeço meus amigos Jeniffer, Léo e João pelas conversas tanto sobre carreira como sobre outras coisas da vida. Em especial a Jeniffer minha amiga querida de tantos anos e minha conselheira sobre tantas coisa da vida.

Agradeço a Aline pois com certeza sua ajuda e seus conselhos semanais me ajudaram muito neste caminho do mestrado me dando força e me ajudando a me conhecer melhor.

Agradeço minhas colegas de mestrado Amanda e Catarina por compartilharem nossas angustias e medos e nas ideias e conselhos matemáticos.

Agradeço os professores do mestrado Dimas e Gerson por me inspirarem como professores e me mostrarem como esta jornada pode não ser dolorosa.

Por fim agradeço também aos meus professores da UFU pois sem eles eu não saberia a força que tenho para recomeçar.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

Resumo

Nesta dissertação consideramos o problema da regularidade periódica Gevrey para uma classe de operadores diferenciais parciais na forma de soma de quadrados de campos vetoriais e mostramos que esses operadores são globalmente Gevrey hipoelípticos no toro se e somente se seus coeficientes satisfazem uma certa condição diofantina.

Palavras-chave: Hipoelipticidade Gevrey, Sublaplacianos e Condições Diofantinas

Abstract

In this dissertation we consider the problem of global Gevrey regularity for a class of partial differential operators in the form of a sum of squares of vector fields and we show that these operators are globally Gevrey hypoeliptic on the torus if and only if their coefficients satisfy a certain Diophantine condition.

Keywords: Gevrey hypoellipticity, Sublaplacians, Diophantine conditions.

Sumário

Introdução

O objetivo desta dissertação é apresentar com detalhes a demonstração do teorema do artigo ”**Global Analytic and Gevrey Hypoellipticity of Sublaplacians under Diophantine conditions”**, referência [3] da bibliografia, e tal artigo serviu como fonte principal para o presente trabalho. Este teorema relaciona as chamadas condições Diofantinas, inspiradas na teoria dos números, com o operador

$$P = -\triangle_t - \left(a_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 = -\triangle_t - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2$$

para garantir que tal operador é, ou não é, globalmente G^s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$.

Os conteúdos do capítulo 1 contém um pouco sobre a teoria dos espaços Gevrey, a teoria da transformada de Fourier para diversos espaços relacionados, notações e relação de ordem em $\mathbb{Z}^n$ para definir as duas ferramentas principais que utilizaremos para demonstrar o teorema no capítulo 2.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Conhecimentos necessários para a compreensão

Nesta dissertação vamos trabalhar o tempo todo com vetores em $\mathbb{R}^n$ e sequências indexadas em $\mathbb{Z}^n$ com $n \in \mathbb{N}$. Para evitar confusão, a primeira coisa que devemos fazer é fixar notações. Depois citaremos algumas das desigualdades que utilizaremos de forma natural e começaremos os pré-requisitos necessários para a demonstração do teorema principal no capítulo 2.

Esse primeiro capítulo é simplesmente um resumo sobre a teoria de distribuições periódicas em $\mathbb{R}^n$ $\left(D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \text{ ou } D'(\mathbb{T}^n)\right)$ e ultra-distribuições periódicas em $\mathbb{R}^n$ $\left(D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n) \text{ ou } D'_s(\mathbb{T}^n)\right)$, onde $\mathbb{T}^n$ significa o toro n-dimensional.

Para os leitores interessado as demonstrações e mais detalhes sobre esse assunto podem encontrar, por exemplo, em [6] e em [7].

1.1.1 Notações

Nesta seção vamos discutir um pouco sobre o significado de algumas notações e também definir outras que não são tão usuais. De modo geral, quando escrevermos $x \in \mathbb{R}^n$ estaremos considerando que $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Analogamente quando escrevermos $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ significa que $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ onde cada $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$. Além disso, durante toda esta dissertação utilizaremos o produto por escalar usual:

$$x \cdot \xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n, \;\; x \in \mathbb{R}^n \;\; e \;\; \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

E também usaremos a norma euclidiana usual

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Vamos fixar também as seguintes notações para $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
- $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$.
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.
- $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ onde $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$.
- $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdot D_{x_2}^{\alpha_2} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$ onde $D_{x_j} = -i\frac{\partial}{\partial_{x_j}}$.

Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_n^+$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_n^+$ iremos usar a seguinte relação de ordem

$$\alpha \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha_j \leq \beta_j, \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$$

Para encerrar esta subseção vamos definir o coeficiente binomial de dois elementos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}^n$ tais que $\beta \leq \alpha$ pela expressão:

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$

Em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vale a fórmula de Leibniz dada pela expressão:

$$\partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}\varphi \cdot \partial^\beta \psi$$

onde $\varphi,\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}^n$.

1.1.2 Identidades e desigualdades envolvendo fatoriais

Nesta seção estão algumas das desigualdades envolvendo n-uplas de números inteiros que precisaremos para estudar as funções de classe Gevrey. A primeira delas é a chamada fórmula de Newton generalizada:

Proposição 1.1. *Sejam $m \geq 1$ um natural e $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Então,*

$$(t_1 + \cdots + t_n)^m = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} \cdot t^\alpha.$$

Em particular, quando $t_1 = \cdots = t_n = 1$, obtemos a relação

$$n^m = \sum_{|\alpha|} \frac{m!}{\alpha!}$$

que por sua vez pode ser utilizada para provar que $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}\alpha!$.

Agora, pela expansão em série de Taylor da função exponencial temos

$$e^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!},$$

e portanto obtemos as seguintes desigualdades para $m = 1, 2, \ldots$:

- $t^m \leq m! \cdot e^t$ para todo $t > 0$.
- $m^m \leq m! \cdot e^m$.
- $m! \leq m^m$.

Além destas desigualdades também precisaremos das desigualdades abaixo válidas para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

- $\alpha! \leq |\alpha|!$.
- $|\alpha|! \leq |\alpha|^{|\alpha|}$.
- $|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|} \cdot |\alpha|!$.

1.2 Funções C^∞ e distribuições periódicas

Definição 1.2. $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ formado pelas funções 2π-periódicas em cada variável.

Podemos dar uma estrutura de espaço métrico completo com a seguinte métrica:

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(f-g)}{1+\rho_k(f-g)} \tag{1.1}$$

sendo ρ_k, $k = 0,1,2,\ldots$, a semi-norma definida em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ por

$$\rho_k(\theta) = \sup_{\substack{x\in[0,2\pi]^n \\ |\alpha|\leq k}} |D^\alpha \theta(x)|. \tag{1.2}$$

$C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial completo com relação a métrica d. Estudando com mais detalhes a métrica d obtemos o seguinte critério de convergência:

Proposição 1.3. *Uma sequência $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}_+^n}$ onde $\varphi_k \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ converge em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se existir $\varphi \in C^\infty_{2\pi}$ tal que $D^\alpha\varphi_k$ converge uniformemente para $D^\alpha\varphi$ em $\mathbb{R}^n$ para cada $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$.*

Denotaremos por $C^\omega_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial das funções $\varphi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tais que para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe uma vizinhança V de x_0 onde φ é dada pela sua expansão de Taylor centrada em x_0.

1.2.1 Séries de Fourier em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.4. Seja $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}_+^n}$ uma sequência numérica em $\mathbb{C}$. Dizemos que a sequência $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}_+^n}$ é **rapidamente decrescente** se para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $C = C(N) > 0$ tal que

$$|a_k| \leq C|k|^{-N}, \tag{1.3}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$.

Teorema 1.5. *Seja $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n_+}$ uma sequência rapidamente decrescente. A série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{ik\cdot x}$ converge em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além do mais, se*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{ik\cdot x} \tag{1.4}$$

então

$$a_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} e^{ik\cdot x} f(x)dx = a_k, \tag{1.5}$$

é o k-ésimo coeficiente de Fourier de$f$. Usaremos a notação $\widehat{f}(k) = a_k(f)$.

Teorema 1.6. *Seja $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[-\pi,\pi]^n} e^{-ik\cdot x} f(x)dx \tag{1.6}$$

forma um sequência rapidamente decrescente. Além disso,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k)e^{ik\cdot x}, \tag{1.7}$$

e a convergência é em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

1.2.2 O espaço das distribuições 2π-periódicas

Definição 1.7. Um funcional linear $u : C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ é dito **contínuo** (ou sequencialmente contínuo) se para toda sequência $\{\varphi_j\}$ que converge para 0 em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ temos que a sequência das imagens $\{u(\varphi_j)\}_j$ converge para 0 em $\mathbb{C}$.

Definição 1.8. O conjunto dos funcionais lineares contínuos em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, denotado por $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é chamado de **espaço das distribuições 2π-periódicas.**

Teorema 1.9. *Seja $u : C^\infty_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. O funcional u é contínuo se somente se existe uma constante $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$| < u, \varphi > | \leq C \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{|D^\alpha \varphi(x)|\}, \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Exemplo 1.10. Dado$f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Podemos dizer que f define uma distribuição 2π-periódica por

$$< T_f, \varphi >= \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1,\ldots,x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n \tag{1.8}$$

para toda $\varphi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.11. Uma sequência $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é **convergente** em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se existe $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que, para toda $\varphi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, a sequência $< u_j, \varphi >_j$ converge para $< u, \varphi >$ em $\mathbb{C}$.

Definição 1.12. Sejam $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Definimos as distribuições periódicas $D^\alpha u$ e fu como sendo:

$$< D^\alpha u, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < u, D^\alpha \varphi >, \;\; \forall \varphi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n); \tag{1.9}$$

$$< fu, \varphi >=< u, f\varphi >, \;\; \forall \varphi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n). \tag{1.10}$$

1.2.3 Séries de Fourier em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.13. Seja $\{u_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ uma sequência em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. A série $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} u_m$ é **convergente** em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se a sequência das reduzidas $S_l = \sum_{|m|\leq l} u_m$ for convergente em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.14. *Se $u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} u_m \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então $D^\alpha u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} D^\alpha u_m$.*

Definição 1.15. Uma sequência numérica $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ é chamada de **crescimento lento** se existem constantes $C>0$ e $k\in\mathbb{N}$ tais que

$$|a_m| \leq C|m|^k, \ \ \forall m\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}. \tag{1.11}$$

Teorema 1.16. *Seja $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ uma sequência de crescimento lento. Então a série*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{ix\cdot m} \tag{1.12}$$

converge em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se

$$u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{ix\cdot m}, \tag{1.13}$$

então

$$a_m = \frac{1}{(2\pi)^n} < u, e^{-ix\cdot m} > . \tag{1.14}$$

Teorema 1.17. *Seja $u\in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Se $a_m = \frac{1}{(2\pi)^n} < u, e^{-ix\cdot m} >$, então $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$, é uma sequência de crescimento lento e*

$$u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{ix\cdot m} \ \text{ em } \ D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n). \tag{1.15}$$

1.2.4 Série parcial de Fourier em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Sejam p,q e $n\in\mathbb{Z}$, tais que $n\geq 2$, $p\geq 1$, $q\geq 1$ e vale a igualdade $p+q=n$.

Teorema 1.18. *Seja $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^q}$ uma sequência de funções em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ tal que para cada $\alpha\in\mathbb{Z}^p_+$ e $N\in\mathbb{N}$ existe $C>0$ tal que*

$$|D^\alpha \varphi_k(x)| \leq C(1+|k|)^{-N}, \tag{1.16}$$

para todo $k\in\mathbb{Z}^q$ e $x\in\mathbb{R}^p$. Então a série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^q} \varphi_k(x) e^{iy\cdot k} \tag{1.17}$$

converge em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^N)$, isto é, existe uma função $\psi\in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\psi(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^q} \varphi_k(x) e^{iy\cdot k}. \tag{1.18}$$

Teorema 1.19. *Seja* $\varphi \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^N)$*. Então* φ *é a soma*

$$\varphi(x,y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} \varphi_k(x) e^{iy\cdot k} \tag{1.19}$$

na qual $\varphi_k \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *e vale*

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{[-\pi,\pi]} \varphi(x,y) e^{iy\cdot k} dy. \tag{1.20}$$

Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{Z}^p_+$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *existe* $C > 0$ *tais que*

$$|D^{\alpha}\varphi_k(x)| \leq C(1+|k|)^{-N}, \tag{1.21}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^q$ *e* $x \in \mathbb{R}^p$*.*

As funções $\varphi_k(x)$ são chamadas de coeficientes parciais de Fourier de φ e usaremos a notação $\widehat{\varphi}(x,k) = \varphi_k(x)$. A série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^q} \widehat{\varphi}(x,k) e^{iy\cdot k}$ é chamada série parcial de Fourier de φ em relação a y.

1.2.5 Série parcial de Fourier em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Sejam p, q e n números naturais com $n \geq 2$, $p \geq 1$ e $q \geq 1$ e vale a igualdade $p+q=n$

Teorema 1.20. *Todo elemento* $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *é a soma de uma série*

$$u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^q} u_m(x) e^{iy\cdot m} \tag{1.22}$$

sendo que $u_m \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$*, dada por*

$$< u_m, \varphi(x) >= \frac{1}{(2\pi)^q} < u, \varphi(x) e^{-iy\cdot m} >, \tag{1.23}$$

onde $\varphi \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$*. Assim temos*

$$< u, \varphi(x) \otimes \theta(y) >= \sum_{m\in\mathbb{Z}^q} << u_m, \varphi > e^{im\cdot y}, \theta >, \tag{1.24}$$

onde $\varphi \otimes \theta : \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$ *é definida por* $(\varphi\otimes\theta)(x,y) = \varphi(x)\theta(y)$*.*

Além disso, para cada $\varphi \in \mathbb{C}^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$*,* $\{< u_m, \varphi(x) >\}_{m\in\mathbb{Z}^q}$ *é uma sequência de crescimento lento.*

Teorema 1.21. *Seja* $\{u_m\}_{m\in\mathbb{Z}^q}$ *uma sequência em* $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *satisfazendo a seguinte condição:*

Existe $C > 0$ *e* $k \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$| < u_m, \varphi > | \leq C\rho_k(\varphi)(1+|m|)^k, \tag{1.25}$$

para toda $\varphi \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$ *e* $m \in \mathbb{Z}^q$*, onde* ρ_k *é a semi-norma definida em (1.2).*

Então $u = \sum_{m\in\mathbb{Z}^q} u_m(x) e^{iy\cdot m} \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*.*

1.3 Funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$

Definição 1.22. Dizemos que $\varphi \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é uma função Gevrey periódica de ordem $s \geq 1$ e $h > 0$ quando existir uma constante $C > 0$ tal que

$$|\partial^{\alpha}\varphi(x)| \leq C \cdot h^{|\alpha|}.(\alpha!)^s : \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+, \ \forall x \in [0,2\pi]^n. \tag{1.26}$$

O conjunto de todas as funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$ será denotada por $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e denominada classe das funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$.

Observação: Podemos facilmente observar que $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subseteq G^{s',h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se $s' < s$ e $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subseteq G^{s,h'}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se $h < h'$.

Exemplo 1.23. Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ é função analítica e 2π-periódica em todas as variáveis, então existe $h > 0$ tal que $f \in G^{1,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Consequência: Se $f \in C^{\omega}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então existe $h > 0$ tal que $f \in G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \geq 1$. As operações usuais de soma e multiplicação por escalar em funções são claramente fechadas nas classes $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Dessa forma o espaço $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é um $\mathbb{C}$-subespaço vetorial de $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda,

$$||\varphi||_{s,h} = \sup\{|\partial^{\alpha}\varphi(x)|h^{-|\alpha|}(\alpha!)^{-s} : \ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+, x \in [0,2\pi]\} \tag{1.27}$$

define uma norma em $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.24. *A classe $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ das funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$ e $h > 0$ é um espaço de Banach com relação a norma $||\cdot||_{s,h}$.*

1.4 Espaços vetoriais topológicos e a topologia do limite indutivo.

Definição 1.25. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Dizemos que uma topologia definida sobre E é compatível com a estrutura de espaço vetorial de E se as aplicações

$$(x,y) \in E \times E \longmapsto x + y \in E$$

$$(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E \longmapsto \lambda x \in E$$

são contínuas. Um espaço vetorial munido com uma topologia compatível com sua estrutura de espaço vetorial é dito ser um espaço vetorial topológico (EVT).

Definição 1.26. Em um espaço topológico uma coleção de conjuntos é dita ser um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto se todo conjunto da coleção contém o ponto, a interseção de dois conjuntos quaisquer da coleção contém um conjunto da coleção e toda vizinhança do ponto contém um conjunto da coleção. Lembremos que em um espaço topológico uma vizinhança de um ponto x é qualquer conjunto aberto que contém o ponto.

Observação: A topologia de um EVT pode ser descrita em termos de um sistema fundamental de vizinhanças do zero.

Definição 1.27. Seja E um EVT e $A \subset E$. Dizemos que A é convexo se dados dois pontos quaisquer em A, então o segmento que os liga também está em A. Isto é, se $x, y \in A$, então $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

Definição 1.28. Um EVT é dito ser localmente convexo se existir um sistema fundamental de vizinhanças do zero formado por conjuntos convexos.

Definição 1.29. Seja E um EVT. Um subconjunto $B \subset E$ é dito ser limitado se para toda vizinhança V de zero temos que $B \subset tV$ para t suficientemente grande.

Introduziremos agora a topologia do limite indutivo a qual será útil para definirmos a topologia de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Suponhamos que E seja a união de uma sequência crescente de subespaços E_n, onde $n \in \mathbb{N}$, localmente convexos tais que as aplicações inclusões

$$i_{n,n+1} : E_n \longrightarrow E_{n+1}$$

são contínuas para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos sobre E a menor topologia localmente convexa que torna as inclusões

$$i_n : E_n \longrightarrow E$$

contínuas (isto é a topologia com menos abertos, mais grossa, que torna tais inclusões contínuas). Neste caso dizemos que E é o limite indutivo dos E_n.

Definição 1.30. Sejam X e Y espaços normados. Uma aplicação linear $u : X \to Y$ é dita ser compacta se para todo conjunto $B \subset X$, limitado, temos que $u(B)$ é relativamente compacto em Y, isto é, $\overline{u(B)}$ é compacto em Y. Equivalentemente, u é compacta se toda sequência limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X contém uma subsequência $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\{u(x_{n_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto de Y.

Definição 1.31. Diremos que uma sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de espaços normados é regular se as seguintes condições são satisfeitas:

i) $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a topologia de E_{n+1} induz em E_n uma topologia menos fina que a topologia original de E_n.

ii) $i_{n,n+1} : E_n \to E_{n+1}$ é uma aplicação linear compacta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.32. *Seja E o limite indutivo de uma sequência regular de espaços normados $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto F seja fechado em E é que a interseção $F \cap E_n$ seja fechada em E_n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Corolário 1.33. *Sejam E o limite indutivo de uma sequência regular de espaços normados $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e F um espaço topológico qualquer. Para que uma aplicação $f : E \to F$ seja contínua é necessário e suficiente que a restrição de f em E_n seja contínua para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.34. *Seja E o limite indutivo de uma sequência regular de espaços normados $\{E_n\}$. Para que o subconjunto $B \subset E$ seja limitado é necessário e suficiente que exista um natural n_0 tal que $B \subset E_{n_0}$ e B é limitado em E_{n_0} na sua própria topologia.*

Corolário 1.35. *Sejam E o limite indutivo de uma sequência regular de espaços normados $\{E_n\}$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Para que $x_n \to 0$ em E é necessário e suficiente que exista um natural n_0 tal que $\{x_n\} \subset E_{n_0}$ e $x_n \to 0$ em E_{n_0}.*

1.4.1 Topologia em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.36. Dizemos que $\varphi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é uma **função Gevrey** de ordem $s \geq 1$ se existe $h > 0$ tal que $\varphi \in G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

O conjunto de todas as funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$ será denotado por $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

O nosso objetivo nesta seção será definir uma topologia em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ utilizando a topologia do limite indutivo. Para isto as propriedadse dos espaços $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ que precisamos são as seguintes:

Teorema 1.37. *Sejam h e h' dois números naturais. Se $h < h'$, então a inclusão*

$$i : G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G^{s,h'}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$$

é contínua e compacta.

Seja $\{h_j\}_{j\geq 1}$ uma sequência crescente de números reais tal que $h_j \to \infty$. Então podemos escrever:

$$G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} G^{s,h_j}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$$

Assim, podemos definir a topologia limite indutivo sobre $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. É possível mostrar que a topologia do limite indutivo em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ independe da escolha da sequencia h_j. Segue ainda, pelo corolário 1.35, que uma sequência $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ converge para $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, existe um natural p tal que

$$\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset G^{s,h_p}_{2\pi}(\mathbb{R}^n),\ \varphi \in G^{s,h_p}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \text{ e } ||\varphi_j - \varphi||_{s,h_p} \to 0.$$

1.5 Ultradistribuição Gevrey periódica de ordem $s \geq 1$.

O espaço $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ das ultradistribuições 2π periódicas de ordem $s \geq 1$ é definida como o dual topológico do espaço $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ com a topologia do limite indutivo. Podemos definir mais explicitamente da seguinte forma:

Definição 1.38. Dizemos que $u : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma **ultradistribuição Gevrey** $2\pi-$ **periódica de ordem** $s \geq 1$ se u é um funcional linear contínuo. O conjunto das ultradistribuições 2π-periódicas será denotado por $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e chamamos este de classe de ultradistribuições Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$.

Teorema 1.39. *Seja $u : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

1) $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

2) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$| < u, \varphi > | \leq C_\varepsilon \sup_{x\in[0,2\pi]^n} \left\{ \sup_{\alpha\in Z^n_+} \left\{ |\partial^\alpha \varphi(x)\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^{-s}, \ \forall \varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \right\} \right\}. \tag{1.28}$$

3) Se a sequência $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ converge para 0 em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então a sequência $\{< u, \varphi_j > \}_{j\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em $\mathbb{C}$.

Lema 1.40. *Seja $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ distribuição 2π periódica em $\mathbb{R}^n$. Então a restrição de u ao espaço $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ define um elemento em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Lema 1.41. *$G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para todo $s \geq 1$.*

Já sabemos pelo Lema 1.40 que se $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então a restrição a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ define um elemento em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Segue do Lema 1.41 que, se essa restrição é uma distribuição nula em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então $u \equiv 0$ também em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Assim podemos identificar $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ com um subespaço $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$; que explica a palavra "ultradistribuição periódica "para elementos de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.42. Seja $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então f define uma ultradistribuição 2π-periódica dada por

$$< T_f, \varphi >= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots, dx_n, \tag{1.29}$$

para toda $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.43. Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Definimos então as aplicações:

$$< \partial^\alpha u, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < u, \partial^\alpha \varphi >, \ \forall \varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \tag{1.30}$$

$$< fu, \varphi >=< u, f\varphi >, \ \varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n). \tag{1.31}$$

Lema 1.44. *Se $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então $\partial^\alpha u$ e fu pertencem a $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Exemplo 1.45. Seja $u = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+} a_\alpha \delta^{(\alpha)}$, com $a_\alpha \in \mathbb{C}$, definida por:

$$< u, \varphi >= \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+} (-1)^{|\alpha|}\delta^\alpha \varphi(0), \ \varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n). \tag{1.32}$$

Se para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|a_\alpha| \leq C_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^{-s}, \tag{1.33}$$

então $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Observação: Muitas vezes quando lidamos com a topologia em certos espaços de funções (ou funções generalizadas) em uma variedade compacta, como é o caso do toro N-dimensional, é útil conhecermos a teoria do espaços de Fréchet-Schwartz (FS) e os seus duais (DFS). Grosso modo, os espaços FS são limites projetivos de uma sequência decrescente de espaços de Banach, enquanto que os espaços DFS são limites indutivos de uma sequência crescente de espaços de Banach, existindo uma relação de dualidade entre eles: os detalhes podem ser encontrados em [8].

Enquanto que $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ é um espaço FS (a saber o limite projetivo dos espaços de Sobolev $H^k(\mathbb{T}^N)$), o que em particular garante que o espaço das distribuições, $D'(\mathbb{T}^N)$, é um DFS, o espaço das funções Gevrey $G^s(\mathbb{T}^N)$ é um espaço DFS, o que nos diz que o espaço das ultradistribuições $D'_s(\mathbb{T}^N)$ é um espaço FS.

1.6 Série de Fourier para funções Gevrey periódicas

Recordemos que se $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$ definimos o coeficiente de Fourier por $\widehat{\varphi}(\xi)$ por

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx. \tag{1.34}$$

Teorema 1.46. *Se $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então φ é a soma de uma série*

$$\varphi(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}(\xi)e^{ix\cdot\xi} \tag{1.35}$$

sendo a convergência em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso existem constantes $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq Ce^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \ \forall\xi \in \mathbb{Z}^n. \tag{1.36}$$

Teorema 1.47. *Seja $\{C_\xi\}_{\xi\in\mathbb{Z}^n}$ uma sequência de números complexos e suponhamos que existem $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$|C_\varepsilon| \leq Ce^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \ \forall\xi \in \mathbb{Z}^n. \tag{1.37}$$

Então existe uma única $\psi(x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\psi(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} C_\xi e^{ix\cdot\xi}, \tag{1.38}$$

onde a convergência é em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\widehat{\psi}(\xi) = C_\xi$.

1.7 Séries de Fourier para ultradistribuições Gevrey periódicas

Definição 1.48. Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Definimos o coeficiente de Fourier $\widehat{u}(\xi)$ de u por

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} < u, e^{-ix\cdot\xi} >, \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^n. \tag{1.39}$$

Observação: Como $e^{ia\cdot\xi} \in C^{\omega}(\mathbb{R}^n)$ para todo $a \in \mathbb{Z}^n$, então $e^{ia\cdot\xi} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e portanto $\widehat{u}$ está bem definido.

Teorema 1.49. *Se $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \tag{1.40}$$

Definição 1.50. Seja $\{u_j\}$ uma sequência em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que $\{u_j\}$ converge para u em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se $\{< u_j, \varphi >\}$ converge para u, para qualquer escolha de $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.51. *Seja $\{C_\xi\}_{\xi\in\mathbb{Z}^n}$ uma sequência de números complexos tal que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|C_\xi| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n. \tag{1.41}$$

Então existe uma única $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} C_\xi e^{ix\cdot\xi}$, isto é,

$$< u, \varphi >= \lim_{j\longrightarrow\infty} < S_j, \varphi >= \lim_{j\longrightarrow\infty} \int_{[0,2\pi]^n} S_j(x)\varphi(x)dx, \tag{1.42}$$

com $S_j(x) = \sum_{|\xi|\leq j} C_\xi e^{ix\cdot\xi}$. Além disso, $\widehat{u}(\xi) = C_\varepsilon$.

Teorema 1.52. *Dado $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever u da seguinte forma:*

$$u(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\xi)e^{ix\cdot\xi}, \tag{1.43}$$

com a convergência sendo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Para mostrar que

$$D'_{2\pi}(\mathbb{R}) \subsetneqq D'_{s,2\pi}(\mathbb{R})$$

ver [6] página 53.

1.8 Série parcial de Fourier para funções Gevrey periódicas

Sejam p, q e n números naturais com $n \geq 2, p \geq 1, q \geq 1$ tais que $p + q = n$. Escreveremos $(x, y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ onde $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$.

Seja $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $x \in \mathbb{R}^p$ vamos considerar a função

$$\varphi_x : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$. Podemos ver que $\varphi_x \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q)$ para cada x fixado em $\mathbb{R}^p$. Assim podemos escrever

$$\varphi(x,y) = \varphi_x(y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \widehat{\varphi}(x,\eta) e^{iy\cdot\eta},$$

onde

$$\widehat{\varphi}(x,\eta) = \widehat{\varphi}_x(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^q}\int_{[0,2\pi]^q} e^{-iy\cdot\eta}\varphi_x(y)dy = \frac{1}{(2\pi)^q}\int_{[0,2\pi]^q} e^{-iy\cdot.\eta}\varphi(x,y)dy.$$

Como $\varphi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, segue para cada $\eta \in \mathbb{Z}^q$ fixado, $\widehat{\varphi}(\cdot,\eta) \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$.

Sejam $\alpha \in \mathbb{Z}^p_+$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$. Então dado que $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ existe $C > 0$ e $h_{j_0} > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha_x \widehat{\varphi}(x,\eta)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^q}\int_{[0,2\pi]^q} |\partial^\alpha_x \widehat{\varphi}(x,y)|dy \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^q}\int_{[0,2\pi]^q} Ch^{|\alpha|}_{j_0}(\alpha!)^s dy \\
&\leq Ch^{|\alpha|}_{j_0}(\alpha!)^s, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^p_+, \ \ \forall x \in [0,2\pi]^p.
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que $\widehat{\varphi}(\cdot,\eta) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$.

Teorema 1.53. *Seja $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então existem constantes $h_p = h_p(\varphi), C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$|\partial^\alpha_x \widehat{\varphi}(x,\eta)| \leq Ch^{|\alpha|}_p(\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}}, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^p_+, \ \ \forall \eta \in \mathbb{Z}^q, \ \ \forall x \in [0,2\pi]^p. \tag{1.44}$$

Teorema 1.54. *Sejam $\eta \in \mathbb{Z}^q$ e $\{\varphi_\eta\}$ uma sequência de funções em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ tal que existem constantes $C > 0$, $h_p > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$|\partial^\alpha_x \varphi_\eta(x)| \leq Ch^{|\alpha|}_p(\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}}, \tag{1.45}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^p_+$, para todo $x \in [0,2\pi]^p$ e para todo η em $\mathbb{Z}^q$. Então a função $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(x,y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \varphi_\eta(x) e^{iy\cdot\eta},$$

com a série convergindo em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e portanto φ está bem difinida e pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

1.9 Série parcial de Fourier para ultradistribuições Gevrey periódicas

Para o melhor entendimento dos resultados dos dois resultados abaixo sugerimos a referência [6].

Sejam p, q e $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2, p \geq 1$, $q \geq 1$ tais que $p + q = n$ e escrevemos $(x,y) \in \mathbb{R}^n$ para indicar $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$.

Teorema 1.55. *Todo elemento $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é a soma de uma série*

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m e^{iy \cdot m} \tag{1.46}$$

a qual converge em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, e $u_m \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$ é dada por

$$< u_m, \varphi(x) >= \frac{1}{(2\pi)^q} < u, \varphi(x) e^{-iy \cdot m} >, \tag{1.47}$$

onde $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$. Assim para $\varphi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_x)$ e $\theta \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q_y)$ temos

$$< u, \varphi(x) \otimes \theta(y) >= \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} << u_m, \varphi > e^{im \cdot y}, \theta >, \tag{1.48}$$

onde $\varphi \otimes \theta : \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q \to \mathbb{C}$ é definida por $(\varphi \otimes \theta)(x,y) = \varphi(x)\theta(y)$.

Além disso, dado $\varepsilon > 0$ e h_ℓ existe uma constante $C_{\varepsilon,h_\ell} > 0$ tal que

$$| < u_m(x), \psi(x) > | \leq C_{\varepsilon.h_\ell} ||\psi||_{s,h_\ell} e^{\varepsilon |m|^{1/s}}, \forall m \in \mathbb{Z}^q, \forall \psi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^p).$$

Teorema 1.56. *Seja $u_\eta, \eta \in \mathbb{Z}^q$, uma sequência em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p)$ que satisfaz a seguinte condição: dados $\varepsilon > 0$ e $h_l > 0$ existe uma constante $C_{\varepsilon,h_l} > 0$, tal que*

$$| < u_\eta(x), \psi(x) > | \leq C_{\varepsilon,h_l} ||\psi||_{s,h_l} e^{\varepsilon |\eta|^{\frac{1}{s}}}, \ \ \forall \psi \in G^{s,h_l}_{2\pi}(\mathbb{R}^p).$$

Então,

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} u_\eta(x) e^{iy \cdot \eta} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

CAPÍTULO 2

Hipoeliticidade global Gevrey de sublaplacianos sob condições diophantinas

Definição 2.1. Seja $m \in \mathbb{N}$. Dado o operador

$$P(x,D) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{2.1}$$

com coeficientes $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, recordamos que o *símbolo* de P é dado por

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

e o *símbolo principal* é dado por

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Ambos o símbolo e o símbolo principal são funções definidas em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e o último é homogêneo de grau m em ξ.

O operador P será dito um **operador elíptico** se $P_m(x,\xi) \neq 0$ para todo $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ com $\xi \neq 0$.

O operador P será dito um **operador elíptico** em $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \backslash 0$ se $P_m(x_0,\xi_0) \neq 0$.

Exemplo 2.2. O operador de Laplace dado por $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ é um operador elíptico.

De fato,

$$\Delta_2(x,\xi) = -|\xi|^2 \tag{2.2}$$

e portanto é elíptico em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3. Um operador linear diferencial parcial P é dito **globalmente G^s-hipoelíptico** em $\mathbb{T}^N$ se para todo $u \in D'(\mathbb{T}^N)$ (ou $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$) e $Pu \in G^s(\mathbb{T}^N)$ implica $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$, onde $\mathbb{T}^N$ denota o toro N-dimensional.

Precisaremos também algumas definições teóricas.

2.1 Condições Diofantinas

Agora enunciemos algumas definições de teoria dos números que serão necessárias para a prova do teorema principal desse capítulo.

Definição 2.4. Dado $s \geq 1$, dizemos que a coleção de vetores $\{v_1, \ldots, v_\ell\} \subseteq \mathbb{R}^d$ é **não simultaneamente aproximável com expoente s**, se para todo $\varepsilon > 0$ existe constante $C_\varepsilon > 0$ tal que para cada $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\ell) \in \mathbb{Z}^l$ e cada $\xi \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ temos

$$|\eta_j - v_j \cdot \xi| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \quad \text{para algum} \quad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{2.3}$$

Se $\ell = d = s = 1$ esta é a definição de número **não exponencialmente Liouville.**

Consequência: Os vetores $\{v_1, \ldots, v_\ell\} \subseteq \mathbb{R}^d$ **são simultaneamente aproximáveis com expoente** s se e somente se, existe $\varepsilon > 0$ para o qual existem duas sequências $\{\eta_k\} = \{(\eta_{k,1}, \ldots, \eta_{k,\ell})\} \subset \mathbb{Z}^\ell$ e $\{\xi_k\} = \{(\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,d})\} \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ tais que

$$|\eta_{k,j} - v_j \cdot \xi_k| \leq e^{-\varepsilon|\xi_k|^{\frac{1}{s}}}, \quad , \forall j = 1, 2, \ldots, l. \tag{2.4}$$

Definição 2.5. Seja $(b_1(t), \ldots, b_\ell(t))$ um vetor de funções a valores reais as quais são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Um vetor $(f_1(t), \ldots, f_d(t))$ é dito **não simultaneamente aproximável com expoente** s para a base $(b_1(t), \ldots, b_\ell(t))$ e usamos a notação $(f_1, \ldots, f_d) \in (SA)^s_c(b_1, \ldots, b_\ell)$, se as duas seguintes condições valem:

1) $\{f_1(t), \ldots, f_d(t)\}$ está contido no $span\{b_1, \ldots, b_\ell\}$.

2) As ℓ colunas da matriz $(\lambda_{j,k})$ da expressão

$$(f_1, \ldots, f_d)^t = (\lambda_{j,k})(b_1, \ldots, b_\ell)^t$$

é uma coleção de vetores não simultaneamente aproximável com expoente s.

Agora estamos em condições de enunciar o teorema principal do capítulo que relaciona alguns conceitos de teoria dos números com a teoria sobre espaços Gevrey.

Teorema 2.6. *Em $\mathbb{T}^{m+n}$ com variáveis $(t, x) = (t_1, \ldots t_m, x_1, \ldots x_n)$ seja o operador*

$$P = -\triangle_t - \left(a_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 = -\triangle_t - \left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2$$

onde $a_j, j = 1, \ldots, n$, são funções a valores reais e analíticas reais definidas em $\mathbb{T}^m$. Então o operador P é globalmente G^s hipoelíptico em $\mathbb{T}^{m+n}$ se, e somente se, depois de uma possível reoordenação de variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e os coeficientes correspondentes $a_1, \ldots, a_n$, a seguinte condição Diofantina $(DC)_j$ valer para algum $j \in 0, 1, ..., n-1$

$(DC)_j : (a_1, \ldots, a_{n-j})$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ e $(a_{n-j+1}, \ldots, a_n) \in (SA)^c_s(a_1, \ldots, a_{n-j})$.

Para mais resultados sobre o problema da hipoeliticidade global, analítico e Gevrey de sublaplacianos sugerimos aos leitores os seguintes trabalhos e as referências listadas neles: [1], [3], .

2.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.6

A partir desse ponto passaremos a trabalhar com ”distribuição periódica” ao invés de usarmos ”ultradistribuição periódica” pois é a linha que o autor do artigo que estamos estudando adotou.

Primeiro vamos mostrar que a condição é **necessária** periódica

Assuma que a condição Diofantina não é satisfeita para qualquer $j \in \{0,\ldots,n-1\}$.

Então, depois de uma possível reordenação das variáveis $x_1,\ldots,x_n$ devemos ter os coeficientes $a_1,,\ldots,a_n$ satisfazendo uma das possibilidades abaixo:

1) $a_1(t) = 0,\ t \in \mathbb{T}^m$.

2) para algum $j \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ os coeficientes $a_1,\ldots,a_{n-j}$ são linearmente independentes e $\{a_{n-j+1},\ldots,a_n\}$ está contido no span $\{a_1,\ldots,a_{n-j}\}$ e as $(n-j)$ colunas da matriz $\lambda_{\ell,k}$ na expressão

$$(a_{n-j+1},\ldots,a_n)^t = (\lambda_{\ell,k})(a_1,\ldots,a_{n-j})^t$$

são simultaneamente aproximáveis com expoente s.

No caso em que $a_1 = 0$ basta tomarmos uma função $u = u(x_1) \notin G^s(\mathbb{T})$ pois temos $Pu = 0$. Assim podemos concluir que o operador P não é globalmente G^s hipoelíptico em $\mathbb{T}^{m+n}$.

No segundo caso note que podemos escrever os coeficientes da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} a_{n-j+1} \\ a_{n-j+2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{j\times 1} = \begin{pmatrix} \lambda_{n-j+1,1} & \cdots & \lambda_{n-j+1,n-j} \\ \lambda_{n-j+2,1} & \cdots & \lambda_{n-j+2,n-j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \vdots & \lambda_{n,n-j} \end{pmatrix}_{j\times n-j} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-j} \end{pmatrix}_{n-j\times 1} . \tag{2.5}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_{n-j+1} &= \lambda_{n-j+1,1}a_1 + \cdots + \lambda_{n-j+1,n-j}a_{n-j} \\ &\vdots \\ a_n &= \lambda_{n,1}a_1 + \cdots + \lambda_{n,n-j}a_{n-j}. \end{aligned}$$

Logo,

$$a_\ell(t) = \sum_{k=1}^{n-j} \lambda_{\ell,k} a_k(t) \quad \text{para todo} \quad \ell = n-j+1,\ldots,n, \tag{2.6}$$

onde os vetores $\lambda_k = (\lambda_{n-j+1,k},\ldots,\lambda_{n,k})$ para $k = 1,\ldots,n-j$ são simultaneamente aproximáveis com expoente s. Então, o operador P pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
P &= -\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial t_p^2} - \left(\sum_{l=1}^{n} a_l(t) \frac{\partial}{\partial x_l} \right)^2 \\
&= -\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial t_p^2} - \left(\sum_{l=1}^{n-j} a_l(t) \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{l=n-j+1}^{n} a_l(t) \frac{\partial}{\partial x_l} \right)^2 \\
&\overset{(2.6)}{=} -\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial t_p^2} - \left(\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l=n-j+1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n-j} \lambda_{\ell,k} a_k(t) \right) \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right)^2 \\
&= -\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial t_p^2} - \left(\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t) \partial x_k + \sum_{k=1}^{n-j} a_k(t) \sum_{l=n-j+1}^{n} \lambda_{\ell,k} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right)^2 \\
&= -\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial t_p^2} - \left(\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t) \left[\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l=n-j+1}^{n} \lambda_{\ell,k} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right] \right)^2 .
\end{aligned}$$

Como $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-j}\}$ são simultaneamente aproximáveis com expoente s então existe $\varepsilon > 0$ e uma sequência $\xi'_v = \{(\xi'_{v,1}, \dots, \xi'_{v,n-j})\} \subseteq \mathbb{Z}^{n-j}$ e outra $\xi''_v = \{(\xi''_{v,n-j+1}, \dots, \xi''_{v,n})\} \subseteq \mathbb{Z}^j \backslash \{0\}$ tal que $|\xi''_v| \to \infty$ quando $v \to \infty$ e também satisfazem a seguinte desigualdade

$$|\xi'_{v,k} + \lambda_k \cdot \xi''_v| \leq e^{-\varepsilon |\xi''_v|^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall \quad k = 1, \dots n-j \quad \text{e} \quad v \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Vamos mostrar que a expressão

$$u(t,x) = \sum_{v=1}^{\infty} e^{i(\xi'_v \cdot x' - \xi''_v \cdot x'')}$$

onde $x' = (x_1, \dots, x_{n-j})$ e $x'' = (x_{n-j+1}, \dots, x_n)$, define uma distribuição que não é de classe Gevrey mas Pu será de classe Gevrey. Dessa maneira finalizaremos a demonstração da condição necessária pela contra-positiva.

Note que podemos reescrever a expressão anterior da seguinte maneira:

$$u(t,x) = \sum_{v=1}^{\infty} e^{i(\xi'_v \cdot x' - \xi''_v \cdot x'')} = \sum_{v=1}^{\infty} e^{i(\xi'_v, -\xi''_v) \cdot (x', x'')}.$$

Por simplicidade denotando por $x = (x', x'')$ e $\xi_v = (\xi'_v, -\xi''_v)$ temos

$$u(t,x) = \sum_{v=1}^{\infty} e^{i(\xi'_v \cdot x' - \xi''_v \cdot x'')} = \sum_{v=1}^{\infty} e^{i(\xi'_v, \xi''_v) \cdot (x', -x'')} = \sum_{v=1}^{\infty} e^{i(\xi_v \cdot x)}.$$

Se escrevermos $u(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{ixm}$, podemos observar por comparação, que

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad m \neq \xi_v \\ 1, & \text{se} \quad m = \xi_v \end{cases}$$

Como $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}^n}$ é uma sequência de crescimento lento pelo Teorema 1.16 a série $u(t,x)$ converge em $D'(\mathbb{T}^{m+n})$ e portanto $u \in D'(\mathbb{T}^{m+n})$.

Os elementos da sequência $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ são os coeficientes de Fourier de u. Portanto segue do Teorema 1.46 que u não é uma função Gevrey pois não satisfaz a desigualdade (1.36).

Agora mostremos que $Pu = f \in G^s$. Para melhor compreensão observemos as seguintes igualdades. Estas serão necessárias quando aplicarmos o operador diferencial na ultradistribuição.

Temos que

$$\frac{\partial e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')}}{\partial x_k} = i\xi'_{\nu,k}e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')},\ k=1,\dots n-j,$$

$$\frac{\partial e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')}}{\partial x_\ell} = -i\xi''_{\nu,\ell}e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')},\ \ell=n-j+1,\dots n$$

e recordando que $\lambda_k = (\lambda_{n-j+1,k},\dots,\lambda_{n,k})$ e $\xi''_\nu = (\xi''_{\nu,n-j+1},\dots,\xi''_{\nu,n})$ temos

$$\sum_{\ell=n-j+1}^{n} \lambda_{l,k}\xi''_{\nu,\ell} = \lambda_k\cdot\xi''_\nu.$$

Note que

$$\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\left[\frac{\partial e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')}}{\partial x_k} + \sum_{l=n-j+1}^{n}\lambda_{\ell,k}\frac{\partial e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')}}{\partial x_\ell}\right] = i\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\big(\xi'_{\nu,k}-\lambda_k\cdot\xi''_\nu\big)e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')}. \tag{2.8}$$

Observe que

$$Pu(x,t) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\left[\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l=n-j+1}^{n}\lambda_{l,k}\frac{\partial}{\partial x_l}\right]\right)^2 e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')}. \tag{2.9}$$

Segue de (2.9) and (2.8) que

$$\begin{aligned}
Pu(t,x) &= -\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\left[\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l=n-j+1}^{n}\lambda_{l,k}\frac{\partial}{\partial x_l}\right]\right)\left(i\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\big(\xi'_{\nu,k}-\lambda_k\cdot\xi''_\nu\big)\right)e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')}\\
&= -\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(i\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\big(\xi'_{\nu,k}-\lambda_k\cdot\xi''_\nu\big)\right)\left(\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\left[\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l=n-j+1}^{n}\lambda_{l,k}\frac{\partial}{\partial x_l}\right]\right)e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')}\\
&\overset{(2.8)}{=} -i\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\big(\xi'_{\nu,k}-\lambda_k\cdot\xi''_\nu\big)\left[i\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\big(\xi'_{\nu,k}-\lambda_k\cdot\xi''_\nu\big)e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')}.\right]\\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\big(\xi'_{\nu,k}-\lambda_k\cdot\xi''_\nu\big)\right]^2 e^{i(\xi'_\nu\cdot x'-\xi''_\nu\cdot x'')}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Observação: Da primeira para a segunda igualdade em (2.10) usamos o fato que a função $i\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\big(\xi'_{\nu,k}-\lambda_k\cdot\xi''_\nu\big)$ depende somente da variáve t e como o operador $\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\left[\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_{l=n-j+1}^{n}\lambda_{l,k}\frac{\partial}{\partial x_l}\right]$ só age na variável x então podemos fazer a troca desse operador com a função.

Finalmente, usando o fato que as funções $a_k(t), k = 1, \ldots, n-j$ são analíticas, e portanto são funções Gevrey de ordem $s > 1$, e a desigualdade (2.7), isto é

$$|\xi'_{\nu,k} + \lambda_k \cdot \xi''_\nu| \leq e^{-\varepsilon|\xi''_\nu|^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall \quad k = 1, \ldots n-j \quad \text{e} \quad \nu \in \mathbb{N}$$

conclui-se que $f \in G^s(\mathbb{T}^{m+n})$, o que conclui a demonstração da necessidade. ■

Para a demonstração da **suficiência** necessitamos do seguinte resultado

Lema 2.7 (Ver Himonas e Petronilho [5]). *Para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ seja B_j a função definida por*

$$B_j(t, \gamma) = \sum_{k=1}^{n-j} \gamma_k a_k(t), \quad t \in \mathbb{T}^m, \ \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-j}) \in \mathbb{R}^{n-j} \backslash \{0\}, \tag{2.11}$$

onde $a_1, \ldots, a_{n-j}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Então existem $C_j > 0$ e $\delta_j > 0$ tais que para cada $\gamma \in \mathbb{R}^{n-j}$, com $|\gamma| = 1$, existe intervalo aberto $I_j = I_j(\gamma) \subseteq \mathbb{T}^m$ com

$$|B_j(t, \gamma)| \geq C_j, \quad t \in I_j, \ \ vol(I_j) \geq \delta_j. \tag{2.12}$$

Demonstração. Como as funções $a_1, \ldots, a_{n-j}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ podemos concluir que se $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-j}) \neq (0, \ldots, 0)$, então

$$B_j(t, \gamma) = \sum_{k=1}^{n-j} \gamma_k a_k(t) \not\equiv 0. \tag{2.13}$$

Logo, para $\xi^0 \in \mathbb{S}^{n-j-1} \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^m$ tal que

$$B_j(t_0, \xi^0) \neq 0. \tag{2.14}$$

Como $\mathbb{T}^m \times \mathbb{S}^{n-j-1}$ é compacto e $|B_j|$ é contínua em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{S}^{n-j-1}$ e portanto existe $(t_0, \tilde{\xi}_0) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{S}^{n-j-1}$ tal que $|B_j(t, \xi)| \geq |B_j(t_0, \tilde{\xi}_0)| > 0$. De fato, como $\tilde{\xi}_0 \in \mathbb{S}^{n-j-1}$, segue da desigualdade (2.14), que $B_j(t_0, \tilde{\xi}_0) \neq 0$, logo $|B_j(t_0, \tilde{\xi}_0)| > 0$. Denotaremos por $\alpha_j \doteq \alpha_j(\tilde{\xi}_0) := |B_j(t_0, \tilde{\xi}_0)| > 0$.

Agora, como $|B_j(t, \xi)|$ é contínua e $|B_j(t_0, \tilde{\xi}_0)| = \alpha_j(\tilde{\xi}_0) > 0$, existe um intervalo $I_j = I_j(\tilde{\xi}_0) \subseteq \mathbb{T}^m$ e um conjunto aberto $\Gamma_j = \Gamma_j(\tilde{\xi}_0) \subseteq \mathbb{S}^{n-j-1}$ tais que

$$|B_j(t, \xi)| > 0, \quad \forall t \in I_j \quad \text{e} \quad \forall \xi \in \Gamma_j. \tag{2.15}$$

Mas $\alpha_j(\tilde{\xi}_{0)}) = |B_j(t_0, \tilde{\xi}_0)|$ é o valor mínimo para $|B_j(t, \xi)|$ para $t \in \mathbb{T}^m$ e $\xi \in \mathbb{S}^{n-j-1}$, e portanto segue disso e de (2.15) que

$$|B_j(t, \xi)| \geq \alpha_j, \quad \forall t \in I_j, \quad \forall \xi \in \Gamma_j. \tag{2.16}$$

Por outro lado, $\{\Gamma_j(\xi^0)\}_{\xi^0 \in \mathbb{S}^{n-j-1}}$ é cobertura aberta de S^{n-j-1} e S^{n-j-1} é compacto, então existe uma subcobertura finita $\Gamma_j(\xi^1), \ldots, \Gamma_j(\xi^{\ell_j})$ de $\{\Gamma_k(\xi^0\}_{\xi^0}$ que ainda cobre $\mathbb{S}^{n-j-1}$.

Portanto escolhendo

$$C_j = \min\{\alpha_j(\xi^1), \ldots, \alpha_j(\xi^{\ell_j})\}$$

e

$$\delta_j = \min\{vol(I_j(\xi^1)), \ldots, vol(I_j(\xi^{\ell_j}))\}$$

obtemos o resultado desejado. □

Demonstração da suficiência do Teorema 2.6.

Para provarmos a suficiência da condição, seja $u \in D'(\mathbb{T}^{m+n})$ com

$$Pu = f, f \in G^s(\mathbb{T}^{m+n}). \tag{2.17}$$

Mostraremos que $u \in G^s(\mathbb{T}^{m+n})$ se a condição $(DC)_j$ valer para algum $j \in \{0,1,...,n-1\}$.

Tomando a transformada parcial de Fourier com relação a x em (2.17) obtemos

$$\Big(-\Delta_t + [a_1(t)\xi_1 + \cdots + a_n(t)\xi_n]^2\Big)\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(t,\xi). \tag{2.18}$$

ou seja,

$$\left[-\triangle_t + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\xi_j\right)^2\right]\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(t,\xi). \tag{2.19}$$

Por simplicidade, assumiremos que temos somente um t, i.e., $m = 1$ ou seja $\Delta_t = \partial_t^2$.

Para ilustrar demonstraremos a fórmula (2.19) somente para o caso $n = 2$. Podemos escrever

$$-\left(a_1(t)\frac{\partial}{\partial_{x_1}} + a_2(t)\frac{\partial}{x_2}\right)^2 u(t,x_1,x_2) \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left[\left(a_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(t)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(a_1(t)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right]\\
&= -\left[\left(a_1^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1} + a_1(t)a_2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} + a_2(t)a_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1} + a_2^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}\right)\right]\\
&= -\left[\left(a_1^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1} + 2a_1(t)a_2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} + a_2^2(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Assim, tomando a transformada parcial de Fourier com relação a x na última equação obtemos

$$\begin{aligned}
&-\left[a_1^2(t)(i\xi_1)^2) + 2a_1(t)a_2(t)(i\xi_1)(i\xi_2) + a_2^2(t)(i\xi_2)^2\right]\\
&= \left[a_1^2(t)\xi_1^2 + 2a_1(t)(a_2(t)\xi_1\xi_2 + a_2^2(t)\xi_2^2\right]\\
&= \Big(\sum_{j=1}^{2} a_j(t)\xi_j\Big)^2,
\end{aligned}$$

o que mostra a validade da fórmula (2.19) no caso $n = 2$. Podemos repetir o mesmo procedimento acima para obter a equação no caso geral.

Agora mostraremos que $\widehat{u}(t,\xi) \in C^\infty(\mathbb{T})$ para cada ξ fixo e portanto tem sentido tomar o conjugado de $\widehat{u}(t,\xi)$.

De fato, denotamos o operador in (2.19) por $Q_\xi(t,\partial_t)$, isto é,
$Q_\xi(t,\partial_t) = \left[-\partial_t^2 + \left(\sum_{j=1}^n a_j(t)\xi_j\right)^2\right]$. Note que $Q_\xi(t,\partial_t)$ é elíptico em t para qualquer ξ fixo, pois seu símbolo principal é dado por τ^2.

Como temos

$$Q_\xi(t,\partial_t)\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(t,\xi),$$

então, segue da propriedade de $Q_\xi(t,\partial_t)$ ser elíptico que $\widehat{u}(t,\xi) \in C^\infty(\mathbb{T})$ para cada ξ fixo, pois por hipótese temos que $\widehat{f}(t,\xi) \in C^\infty(\mathbb{T})$ para cada ξ fixo.

Multiplicando (2.19) por $\overline{\widehat{u}}(t,\xi)$ obtemos

$$\int_{\mathbb{T}} \left[-(\partial_t^2\widehat{u}(t,\xi))\overline{\widehat{u}}(t,\xi)\right]dt + \int_{\mathbb{T}} w^2(t,\xi)\widehat{u}(t,\xi)\overline{\widehat{u}}(t,\xi)dt = \int_{\mathbb{T}} f(t,\xi)\overline{\widehat{u}}(t,\xi)dt, \tag{2.21}$$

com $w(t,\xi) = a_1(t)\xi_1 + \cdots + a_n(t)\xi_n$.

Agora integrando a primeira integral acima por partes e usando o fato de que estamos trabalhando com objetos periódicos obtemos

$$\|\widehat{u}(\cdot,\xi)\|_w^2 \doteq \int_{\mathbb{T}} |\partial_t\widehat{u}(t,\xi)|^2dt + \int_{\mathbb{T}} w^2(t,\xi)|\widehat{u}(t,\xi)|^2dt = \int_{\mathbb{T}} \overline{f}(t,\xi)\overline{\widehat{u}}(t,\xi)dt. \tag{2.22}$$

Precisaremos do seguinte lema

Lema 2.8. *Se para algum $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ a condição Diofantina $(DC)_j$ é satisfeita, então existem constantes $\alpha = \alpha(a_1,\ldots,a_n) > 0$ e $\delta = \delta(a_1,\ldots,a_n) > 0$ tais que para todo $\varepsilon > 0$ e todo $\xi \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ conseguimos encontrar um intervalo $I_\xi \subseteq \mathbb{T}$ para o qual*

$$w^2(t,\xi) \geq \alpha C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \quad \forall t \in I_\xi,\ |I_\xi| \geq \delta, \tag{2.23}$$

onde $C_\varepsilon > 0$ depende apenas de ε.

Antes de demonstrar esse Lema o usaremos para completar a demonstração o Teorema 2.6 .

Seja $\xi \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ fixado. Então para $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$ e $s \in I_\xi$ e $t \in \mathbb{T}$, usando teorema fundamental do cálculo obtemos

$$\int_s^t \varphi_r(r)dr = \varphi(t) - \varphi(s) \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(s) + \int_s^t \varphi_r(r)dr. \tag{2.24}$$

Daí,

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(s)| + \int_s^t |\varphi_r(r)|dr.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade (2.24) obtemos

$$|\varphi(t)|^2 \leq |\varphi(s)|^2 + 2|\varphi(s)|\int_s^t |\varphi_r(r)|dr + \left(\int_s^t |\varphi_r(r)dr|\right)^2. \tag{2.25}$$

Agora vamos observar o termo $\int_s^t |\varphi_r(r)|dr$, para $s \in I_\xi$ e $t \in \mathbb{T}$.

$$\begin{aligned}\int_s^t |\varphi_r(r)|dr &\leq \int_s^t 1|\varphi_r(r)|dr \\ &\leq \int_0^{2\pi} |1||\varphi_r(r)|dr.\end{aligned}$$

Então, pela desigualdade de Cauchy Schwarz para integrais

$$\left(\int_s^t |\varphi_r(r)dr|\right)^2 \leq 2\pi . \int_0^{2\pi} |\varphi_t(t)|^2 dt.$$

Por outro lado analisemos o termo $2|\varphi(s)| \int_s^t |\varphi_r(r)|dr$. Para isso vamos utilizar a seguinte desigualdade

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2.$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Assim, escolhendo $a = |\varphi(s)|$ e $b = \displaystyle\int_s^t |\varphi_r(r)|dr$ teremos

$$2|\varphi(s)| \int_s^t |\varphi_r(r)|dr \leq |\varphi(s)|^2 + \left(\int_s^t |\varphi_r(r)|dr\right)^2.$$

Relacionando os termos que havíamos citado anteriormente, obtemos voltando a equação (2.25), que

$$\begin{aligned}|\varphi(t)|^2 &\leq |\varphi(s)|^2 + 2|\varphi(s)| \int_t^s |\varphi_r(r)|dr + \left(\int_s^t |\varphi_r(r)|dr\right)^2 \\ &\leq |\varphi(s)|^2 + |\varphi(s)|^2 + \left(\int_s^t |\varphi_r(r)|dr\right)^2 + \left(\int_s^t |\varphi_r(r)|dr\right)^2 \\ &= 2|\varphi(s)|^2 + 2\left(\int_s^t |\varphi_r(r)|dr\right)^2 \\ &\leq 2\left(|\varphi(s)|^2 + 2\pi \int_0^{2\pi} |\varphi_r(r)|dr\right) \\ &\leq C\left(|\varphi(s)|^2 + \int_0^{2\pi} |\varphi_r(r)|dr\right)\end{aligned}$$

onde C é uma constante real positiva.

Portanto,

$$|\varphi(t)|^2 \lesssim |\varphi(s)|^2 + \int_0^{2\pi} |\varphi_t(t)|dt. \tag{2.26}$$

Agora integrando em ambos lados da equação (2.26)) com relação a $t \in \mathbb{T}$ temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} |\varphi(t)|^2 dt &\lesssim \int_{\mathbb{T}} |\varphi(s)|^2 dt + \int_{\mathbb{T}} \left(\int_0^{2\pi} |\varphi_t(t)|^2 dt\right) dt \\ &\lesssim |\varphi(s)|^2 \int_0^{2\pi} 1\, dt + \int_0^{2\pi} 1\, dt . \int_{\mathbb{T}} |\varphi_t(t)|^2 dt. \end{aligned}\tag{2.27}$$

Portanto

$$\begin{aligned}||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{T})} &\lesssim |\varphi(s)|^2 2\pi + 2\pi ||\varphi_t||^2_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\lesssim 2\pi(|\varphi(s)|^2 + ||\varphi_t||^2_{L^2(\mathbb{T})}).\end{aligned}$$

Então

$$||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq C(|\varphi(s)|^2 + ||\varphi_t||^2_{L^2(\mathbb{T})}).$$

Agora integrando com relação a $s \in I_\xi$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{I_\xi} ||\varphi(t)||^2_{L^2(\mathbb{T})} ds &\leq C \int_{I_\xi} (|\varphi(s)|^2 + ||\varphi_t||^2_{L^2(\mathbb{T})}) ds \\ &\leq C \left(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + ||\varphi_t||_{L^2(\mathbb{T})} \int_{I_\xi} 1 ds \right).\end{aligned}$$

Logo temos

$$|I_\xi| ||\varphi(t)||^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq C \left(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + |I_\xi| \cdot ||\varphi_t||_{L^2(\mathbb{T})} \right),$$

ou seja,

$$|I_\xi| ||\varphi(t)||^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq C\Big(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + |I_\xi| ||\varphi_t||_{L^2(\mathbb{T})} \Big). \tag{2.28}$$

Usando o lema (2.8), para qualquer $\varepsilon > 0$ segue a desigualdade abaixo

$$w^2(s,\xi).\alpha^{-1} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}} \geq 1 \quad \forall s \in I_\xi, \quad |I_\xi| \geq \delta,$$

e portanto temos

$$\begin{aligned}\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds &\leq \alpha^{-1} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}} \int_{I_\xi} w^2(s,\xi) |\varphi(s)|^2 ds \\ &\leq \alpha^{-1} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}} \int_{\mathbb{T}} w^2(t,\xi) |\varphi(t)|^2 dt.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Isso junto com (2.28) mostra que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_{\alpha\delta} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}} \|\varphi\|^2_w, \ \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}), \ \forall \xi \neq 0, \tag{2.30}$$

onde $C_{\alpha\delta}$ é uma constante positiva dependendo somente de $a_1, \cdots, a_n$.

Mostraremos essa última desigualdade com mais detalhes no Apendice A.

Note que podemos aplicar a desigualdade (2.50) para a função $\widehat{u}(\cdot,\xi)$, pois $\widehat{u}(\cdot,\xi) \in C^\infty(\mathbb{T})$ como vimos anteriormente. Assim,

$$\begin{aligned}||\widehat{u}(\cdot,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T})} &\leq C_{\alpha\delta} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}} ||\widehat{u}(\cdot,\xi)||^2_w \\ &= C_{\alpha\delta} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon |\xi|^{\frac{1}{s}}} \int_{\mathbb{T}} \widehat{f}(t,\xi) \overline{\widehat{u}}(t,\xi) dt\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde na última igualdade usamos (2.22).

Como o lado esquerdo da útima desigualdade é maior do que zero então o lado direito deve ser positivo e portanto temos

$$
\begin{aligned}
||\widehat{u}(\cdot,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T})} &\leq C_{\alpha\delta}C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}||\widehat{u}(\cdot,\xi)||^2_w \\
&= C_{\alpha\delta}C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}\int_{\mathbb{T}}\widehat{f}(t,\xi)\overline{\widehat{u}}(t,\xi)dt \\
&= C_{\alpha\delta}C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}\left|\int_{\mathbb{T}}\widehat{f}(t,\xi)\overline{\widehat{u}}(t,\xi)dt\right| \\
&\leq C_{\alpha\delta}C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}\int_{\mathbb{T}}|\widehat{f}(t,\xi)||\overline{\widehat{u}}(t,\xi)|dt. \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais podemos concluir de (2.32) que

$$
\begin{aligned}
||\widehat{u}(\cdot,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T})} &\leq C_\alpha C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}||\widehat{f}(t,\xi)||_{L^2(\mathbb{T})}||\widehat{u}(t,\xi)||_{L^2(\mathbb{T})} \\
&= [C_\alpha C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}]^2 2||\widehat{f}(t,\xi)||_{L^2(\mathbb{T})}\frac{1}{2[C_\alpha C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}]}||\widehat{u}(t,\xi)||_{L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq [C_\alpha C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}]^2\left(||\widehat{f}(t,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T})} + \frac{1}{4[C_\alpha C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}]^2}||\widehat{u}(t,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T})}\right) \\
&= [C_\alpha C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}]^2||\widehat{f}(t,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T})} + \frac{1}{4}||\widehat{u}(t,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T})}. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Now it follows from (2.33) que

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}||\widehat{u}(\cdot,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T})} &\leq [C_\alpha C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}]^2||\widehat{f}(t,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T})} \\
&= [C_\alpha C_\varepsilon^{-1}]^2 e^{2\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}||\widehat{f}(t,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T})}. \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Como, por hipótese, $f \in G^s(\mathbb{T}^{m+n})$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$
||\widehat{f}(\cdot,\xi)||_{L^2(\mathbb{T})} \leq c_0 e^{-\varepsilon_0|\xi|^{\frac{1}{s}}} \qquad (2.35)
$$

Escolhendo $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_1$ e usando (2.35) obtemos

$$
\begin{aligned}
||\widehat{u}(\cdot,\xi)|| &\leq \frac{2}{\sqrt{3}}C_\alpha C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}||\widehat{f}(t,\xi)||_{L^2(\mathbb{T})} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{3}}C_\alpha C_\varepsilon^{-1}e^{\frac{\varepsilon_0}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}}c_0 e^{-\varepsilon_0|\xi|^{\frac{1}{s}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}c_0 C_\alpha C_\varepsilon^{-1}e^{\frac{-\varepsilon_0}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}} \\
&= C_1 e^{-\varepsilon_1|\xi|^{\frac{1}{s}}},\ \xi \neq 0. \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

Agora vamos relacionar a transformada de Fourier com a norma de $L^2(\mathbb{T})$ da seguinte maneira. Como a transformada de Fourier pode ser escrita como

$$
\widehat{u}(\tau,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}e^{-it\tau}\widehat{u}(t,\xi)dt,
$$

então

$$
\begin{aligned}
|\widehat{u}(\tau,\xi)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |e^{-it\tau}||\widehat{u}(t,\xi)|dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\widehat{u}(t,\xi)|dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |1||\widehat{u}(t,\xi)|dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{T}} 1dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{T}} |\widehat{u}(t,\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Logo, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq C_2||\widehat{u}(\cdot,\xi)||_{L^2(\mathbb{T})}. \tag{2.37}$$

Segue de (2.36) e (2.37) que

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq C_3 e^{-\varepsilon_1|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \quad \xi \neq 0 \tag{2.38}$$

Note que para (τ_0,ξ_0) com $\xi_0 = 0$ e $\tau_0 \neq 0$ o operador P é elíptico pois $P(t,\tau,0) = |\tau|^2 \neq 0$ para $\tau \neq 0$.

Assim, segue do Teorema 2.1, página 76 de [2], com $w(t) = t^{1/s}$ e $s \geq 1$ (espaço $G^s(\mathbb{T}^{m+n})$), e se $s = 1$, (espaço das funções analíticas e periódicas) que existe um cone aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}^{m+n}\backslash\{0\}$ que contém $(\tau_0,0)$ e constantes $C_1,\varepsilon_1 > 0$ tais que

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq C_1 e^{-\varepsilon_1|(\tau,\xi)|^{\frac{1}{s}}}, \forall(\tau,\xi) \in \Gamma\cap\mathbb{Z}^{m+n}. \tag{2.39}$$

Podemos assumir que existe $\delta > 0$ tal que $\Gamma = \{(\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{m+n} : |\xi| < \delta|\tau|\}$, contendo $(\tau_0,0)$.

Agora definimos $\Gamma_1 = \{(\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{m+n} : |\xi| > \frac{\delta}{2}|\tau|\}$. Assim, $(0,0) \notin \Gamma_1, (\tau_0,0) \notin \Gamma_1$ e se $(\tau,\xi) \in \Gamma_1$, então $\xi \neq 0$.

Segue de (2.38) que para $(\tau,\xi) \in \Gamma_1$ temos

$$
\begin{aligned}
|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq Ce^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}} &= Ce^{-\varepsilon(\frac{1}{2}|\xi|+\frac{1}{2}|\xi|)^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq Ce^{-\varepsilon(\frac{\delta}{4}|\tau|+\frac{1}{2}|\xi|)^{\frac{1}{s}}}.
\end{aligned}
$$

Seja $C_2 = \min\{\frac{\delta}{4},\frac{1}{2}\} > 0$. Logo temos $\frac{\delta}{4} \geq C_2$ e $\frac{1}{2} \geq C_2$. Logo obtemos $(\frac{\delta}{4}|\tau| + \frac{1}{2}|\xi|) \geq C_2(|\tau| + |\xi|)$.

Assim podemos concluir que $-\varepsilon(\frac{\delta}{4}|\tau| + \frac{1}{2}|\xi|)^{\frac{1}{s}} \leq -\varepsilon C_2^{\frac{1}{s}}(|\tau| + |\xi|)^{\frac{1}{s}}$.

Definindo $\varepsilon' = \varepsilon C_2^{\frac{1}{s}} > 0$ podemos concluir que para $(\tau,\xi) \in \Gamma_1$ temos

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq Ce^{-\varepsilon'(|\tau|+|\xi|)^{\frac{1}{s}}}. \tag{2.40}$$

Assim podemos concluir que segue de (2.39) e (2.40) que

$$|\widehat{u}(\tau,\xi)| \leq Ce^{-\varepsilon|(\tau,\xi)|^{\frac{1}{s}}}, \forall(\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{m+n},$$

o qual mostra que $u \in G^s(\mathbb{T}^{m+n})$. A demonstração do teorema estará completa se provarmos o Lemma 2.8.

Demonstração do Lema 2.8.

Seja $\xi = (\xi', \xi'')$ onde $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-j})$ e $\xi'' = (\xi_{n-j+1}, \xi_{n-j+2}, \ldots, \xi_n)$. Se para algum $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ a condição Diofantina é válida, então são válidas as seguintes afirmações:

1) $(a_1, \ldots, a_{n-j})$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.

2) $(a_{n-j+1}, \ldots, a_n) \in (SA)^c_s(a_1, \ldots, a_{n-j})$.

O item 2 ser satisfeito significa que $(a_{n-j+1}, \ldots, a_n) \in span(a_1, \ldots, a_{n-j})$ e e podemos escrever: $(a_{n-j+1}, \ldots, a_n)^t = (\lambda_{jk})(a_1, \ldots, a_{n-j})^t$ e as $n-j$ colunas da matriz (λ_{jk}) são não simultaneamente aproximáveis com expoente s. Ou seja, podemos escrever a seguinte igualdade matricial

$$\begin{pmatrix} a_{n-j+1} \\ a_{n-j+2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{j\times 1} = \begin{pmatrix} \lambda_{n-j+1,1} & \cdots & \lambda_{n-j+1,n-j} \\ \lambda_{n-j+2,1} & \cdots & \lambda_{n-j+2,n-j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \vdots & \lambda_{n,n-j} \end{pmatrix}_{j\times n-j} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-j} \end{pmatrix}_{n-j\times 1}. \tag{2.41}$$

Como $w(t,\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\xi_j$, é possível reescrever esta expressão da seguinte forma:

$$\begin{aligned} w(t,\xi) =& a_1(t)\xi_1 + \cdots + a_{n-j}(t)\xi_{n-j} + \left[\lambda_{n-j+1,1}a_1(t) + \lambda_{n-j+1,2}a_2(t) + \cdots + \lambda_{n-j+1,n-j}a_{n-j}(t)\right]\xi_{n-j+1} + \\ & \left[\lambda_{n-j+2,1}a_1(t) + \lambda_{n-j+2,2}a_2(t) + \cdots + \lambda_{n-j+2,n-j}a_{n-j}(t)\right]\xi_{n-j+2} + \cdots + \\ & \left[\lambda_{n,1}a_1(t) + \lambda_{n,2}a_2(t) + \cdots + \lambda_{n,n-j}a_{n-j}(t)\right]\xi_n. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} w(t,\xi) =& a_1(t)\left[\xi_1 + \lambda_{n-j+1,1}\xi_{n-j+1} + \lambda_{n-j+2,1}\xi_{n-j+2} + \cdots + \lambda_{n,1}\xi_n\right] \\ & a_2(t)\left[\xi_2 + \lambda_{n-j+1,2}\xi_{n-j+1} + \lambda_{n-j+2,2}\xi_{n-j+2} + \cdots + \lambda_{n,2}\xi_n\right] \\ & + \cdots + \\ & a_{n-j}(t)\left[\xi_{n-j} + \lambda_{n-j+1,n-j}\xi_{n-j+1} + \lambda_{n-j+2,n-j}\xi_{n-j+2} + \cdots + \lambda_{n,n-j}\xi_n\right]. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Definindo $\lambda_k \doteq \left(\lambda_{n-j+1,k}, \ldots, \lambda_{n,k}\right)$ e recordando que $\xi'' = (\xi_{n-j+1}, \ldots, \xi_n)$ podemos escrever a equação (2.42) de uma forma mais compacta

$$w(t,\xi) = \sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)(\xi_k + \lambda_k \cdot \xi''). \tag{2.43}$$

Supondo que $\xi'' = 0$ e $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-j}) \neq 0$ segue do Lema 2.7 que existem $C_j > 0$ e $\delta_j > 0$ independentes de ξ e um intervalo $I_j = I_j(\xi) \subseteq \mathbb{T}^m$ tal que

$$\begin{aligned}
w^2(t,\xi) = w^2(t,\xi',\xi'') = w^2(t,\xi') = \left(\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\xi_k\right)^2 \\
\doteq B_j^2(t,\xi') \\
= |\xi'|^2 B_j^2\left(t,\frac{\xi'}{|\xi'|}\right) \geq |\xi'|^2\alpha.
\end{aligned}$$

para todo $t \in I_j = I_j(\xi)$ e $vol(I_j) \geq \delta_j$ e na última igualdade usamos o fato de B_j ser homogênea de grau 1 com relação a ξ' e na última desigualdade usamos o fato que as funções $a_1(t),\ldots,a_{n-j}(t)$ são linearmente independentes e a compacidade da esfera unitária S^{n-j-1}.

Para terminarmos a prova do caso $\xi'' = 0$, provemos que dado $\varepsilon > 0$ e $\xi' \neq 0$ a seguinte desigualdade é válida:

$$|\xi'|^2 \geq e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}. \tag{2.44}$$

De fato, quando $\xi' = (\xi,\ldots,\xi_{n-j}) \neq (0,\ldots,0)$ existe $\xi_i \in \{\xi_1,\ldots,\xi_{n-j}\}$ tal que $0 \neq \xi_i \in \mathbb{Z}$. Logo, $|\xi_i| \geq 1$ e portanto

$$|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-j}^2} \geq |\xi_i'| \geq 1.$$

Denotando por simplicidade $\theta = |\xi'|$, devemos mostrar que $\theta^2 \geq e^{-\varepsilon\theta^{\frac{1}{s}}}$. Com efeito,

$$\theta^2 \geq e^{-\varepsilon\theta^{\frac{1}{s}}} \Longleftrightarrow \frac{\theta^2}{e^{-\varepsilon\theta^{\frac{1}{s}}}} \geq 1 \Longleftrightarrow \theta^2 e^{\varepsilon\theta^{\frac{1}{s}}} \geq 1. \tag{2.45}$$

E a última desigualdade é válida pois

$$\theta^2 e^{\varepsilon\theta^{\frac{1}{s}}} \geq \theta^2 \geq 1 \Longleftrightarrow \theta \geq 1.$$

Portanto $\theta^2 \geq e^{-\varepsilon\theta^{\frac{1}{s}}}$.

Das equações (2.44), (2.45) e que $\xi'' = 0$, podemos concluir que

$$w^2(t,\xi) \geq \alpha|\xi'|^2 \geq \alpha e^{-\varepsilon|\xi'|^{\frac{1}{s}}} = \alpha e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}. \tag{2.46}$$

finalizando o primeiro caso.

Provemos agora o segundo caso, isto é, quando $\xi'' \neq 0$. Denotamos por $\gamma_k = \xi_k + \lambda_k \cdot \xi''$, para $k = 1,\ldots,n-j$, e podemos escrever

$$w^2(t,\xi) = \left(\sum_{k=1}^{n-j} a_k(t)\gamma_k\right)^2 = |\gamma|^2 w^2\left(t,\frac{\gamma}{|\gamma|}\right),$$

onde $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-j})$. Novamente usando o lema 2.7, como fizemos no caso $\xi'' = 0$, obtemos

$$w^2(t,\xi) \geq |\gamma|^2\alpha, \quad \forall t \in I_\alpha, \quad |I_\alpha| \geq \delta. \tag{2.47}$$

Como os vetores $\lambda_1 = (\lambda_{n-j+1,1}, \ldots, \lambda_{n,1}), \ldots, \lambda_k = (\lambda_{n-j+1,k}, \ldots, \lambda_{n,k}), \ldots, \lambda_{n-j} = (\lambda_{n-j+1,n-j}, \ldots, \lambda_{n,n-j})$ são não simultaneamente aproximáveis com expoente s, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\gamma_{k_0}| = |\xi_{k_0} + \lambda_{k_0} \cdot \xi''| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\xi''|^{\frac{1}{s}}}, \tag{2.48}$$

para algum $k_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$. As desigualdades (2.47) e (2.48) implicam que

$$w^2(t,\xi) \geq \alpha|\gamma_{k_0}|^2 \geq \alpha C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\xi''|^{\frac{1}{s}}} \geq \alpha C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}} \tag{2.49}$$

concluindo a demonstração do lema e portanto a demonstração do Teorema 2.6 .

2.3 Apêndice

Vamos mostrar que a desigualdade

$$\begin{aligned}
\Box \quad \int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds &\leq \alpha^{-1} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}} \int_{I_\xi} w^2(s,\xi)|\varphi(s)|^2 ds \\
&\leq \alpha^{-1} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}} \int_{\mathbb{T}} w^2(t,\xi)|\varphi(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

junto com

$$\Diamond \quad |I_\xi| ||\varphi(t)||^2_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim \int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + |I_\xi| ||\varphi_t||_{L^2(\mathbb{T})}.$$

mostra que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_{\alpha\delta} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}} \|\varphi\|^2_w, \ \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}), \ \forall \xi \neq 0, \tag{2.50}$$

onde $C_{\alpha\delta}$ é uma constante positiva dependendo somente de $a_1, \cdots, a_n$.

De fato, usando $\Box$ em $\Diamond$ obtemos

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq \frac{C_1 \alpha^{-1} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}}{|I_\xi|} \int_{\mathbb{T}} w^2(t,\xi)|\varphi(t)|^2 dt + \|\varphi_t\|_{L^2}. \tag{2.51}$$

Notando que no Lema 2.8 temos que $|I_\xi| > \delta$ então obtemos $\frac{1}{|I_\xi|} = \frac{1}{\delta} = \delta^{-1}$ e portanto e portanto podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &\leq C_1 \alpha^{-1} \delta^{-1} C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}} \int_{\mathbb{T}} w^2(t,\xi)|\varphi(t)|^2 dt + \|\varphi_t\|_{L^2} \\
&\leq C_1[(\alpha\delta)^{-1} + 1] C_\varepsilon^{-1} e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}} \int_{\mathbb{T}} w^2(t,\xi)|\varphi(t)|^2 dt + e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}} \|\varphi_t\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Podemos assumir que $C_1C_\varepsilon^{-1} > 1$ pois se $C_1C_\varepsilon^{-1} \leq 1$ então $C_1C_\varepsilon^{-1} + 1 > 1$ e continuamos a chamá-lo de C_ε^{-1}. Assim podemos re-escrever (2.52) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &\leq [(\alpha\delta)^{-1}+1]C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}\int_{\mathbb{T}} w^2(t,\xi)|\varphi(t)|^2dt + [(\alpha\delta)^{-1}+1]C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}\|\varphi_t\|_{L^2} \\
&= [(\alpha\delta)^{-1}+1]C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}\left[\int_{\mathbb{T}} w^2(t,\xi)|\varphi(t)|^2dt + \|\varphi_t\|_{L^2}\right] \\
&= C_{\alpha\delta}C_\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}\|\varphi\|^2_w, \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

onde $C_{\alpha\delta} = [(\alpha\delta)^{-1}+1]$.

A demonstração está completa.

Referências Bibliográficas

[1] CORDARO, Paulo D.; HIMONAS, Alexandrou A., **Global analytic hypoellipticity for a class of degenerate elliptic operators on the torus**, Math. Lett. v. 1, (1994), 501-510.

[2] FERRA, Igor Ambo, **Funções Ultradiferenciáveis e Ultradistribuições**, Notas.

[3] GREENFIELD, S.J; WALLACH, N.R., **Global hypoellipticity and Liouville numbers**, Proceedings of the AMS, v.31, (1972), 112-114.

[4] HIMONAS, Alexandrou A, **Global Analytic and Gevrey Hypoellipticity of Sublaplacians under Diophantine conditions**, Proceedings of the American Mathematical society v. 129, No. 7, (2000), 2061-2067.

[5] HIMONAS, Alexandrou A.; PETRONILHO, Gerson., **Global Hypoellipticity and Simultaneous Approximability**, Journal of Functional Analysis 170, No. 2, (2000), 356-365.

[6] PETRONILHO, Gerson, **Periodic Gevrey Ultradistribuitions in** R^n, Mini Curso, Unicamp.

[7] RODINO, Luigi, **Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces**, World Scientific, (1993).

[8] KOMATSU, Hikosaburo., **Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces**, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 366–383.