



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



GABRIEL LACERDA VENTURA

RETRATOS DE FASE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM
COEFICIENTES CONSTANTES DE ATÉ TERCEIRA ORDEM

SÃO CARLOS
2022

GABRIEL LACERDA VENTURA

RETRATOS DE FASE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM
COEFICIENTES CONSTANTES DE ATÉ TERCEIRA ORDEM

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende

SÃO CARLOS
2022

Ventura, Gabriel Lacerda

Retrato de fase de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes de até terceira ordem / Gabriel Lacerda Ventura -- 2022.
89f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Alex Carlucci Rezende
Banca Examinadora: Cláudia Buttarello Gentile Moussa,
Thaís Maria Dalbelo
Bibliografia

1. Retratos de Fase. 2. Sistemas de Equações Diferenciais. 3. Classificação Topológica. I. Ventura, Gabriel Lacerda. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 17/2022/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

GABRIEL LACERDA VENTURA

RETRATOS DE FASE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES DE ATÉ
TERCEIRA ORDEM

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 28 de setembro de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Alex Carlucci Rezende
Membro da Banca 1	Thais Maria Dalbello
Membro da Banca 2	Cláudia Buttarello Gentile Moussa



Documento assinado eletronicamente por **Claudia Buttarello Gentile Moussa, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 12:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alex Carlucci Rezende, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 13:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Thais Maria Dalbello, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 21:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **0857938** e o código CRC **AC0D5F3D**.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, a todos professores com quem já tive contato: desde do ensino fundamental até no superior, que além de aprendizado, compartilhei de amizade e inspiração. Particularmente, destaco a participação que o professor Dr. Alex Carlucci Rezende desempenhou na minha vida acadêmica. Desde meu segundo ano de graduação, foi meu orientador de iniciação científica e estendeu para este trabalho de conclusão de curso, contribuindo imensamente nos meus aprendizados, abrindo e me ajudando a abrir portas; serei sempre grato à oportunidade de ter trabalhado com um profissional como ele.

Agradeço a vida, a Deus, ao destino, e a tudo que nos rege, pela oportunidade que tive de realizar uma graduação e com este trabalho, concluir mais um ciclo. É difícil expressar em palavras como essa experiência serviu para meu crescimento pessoal, acadêmico e profissional. Em especial, agradeço às políticas de permanência estudantil, que me possibilitaram, financeiramente, a oportunidade de estudar: as bolsas de moradia e alimentação fornecidas pela universidade e as bolsas de iniciação científica e de estágios fornecidas pelas instituições e empresas privadas.

Agradeço à minha família, que confiou e apoiou minha jornada e, mesmo com a distância, permaneceram presentes na minha vida. Aos meus amigos de infância e aos que fiz durante o curso, que foram meu ponto de apoio durante este período, nos estudos, festas, desabafos e tomadas de decisões. Carregarei para sempre todos vocês em meu coração. Por fim, agradeço a mim mesmo, que diante diversos obstáculos, dificuldades e desafios, segui em frente. E assim continuarei.

RESUMO

Este estudo foi desenvolvido com o propósito de investigar os retratos de fase de todos os sistemas lineares com coeficientes constantes de até terceira ordem. Para isso, determinaremos as soluções dos sistemas, faremos um estudo analítico delas e esboçaremos ilustrações que representem tais retratos. Com isso, poderemos identificar semelhanças e diferenças para classificar os retratos de fase conforme comportamento topológico, compreendendo a utilidade desse tipo de classificação. Para alcançar esses objetivos, passaremos por tópicos preliminares que perpassam por equações diferenciais de primeira ordem, métodos de resolução, sistemas lineares, autovalores e autovetores, exponencial de matriz e matrizes de Jordan. Por fim, concluímos que existe uma grande pluralidade de retratos de fase, que aumentam conforme a dimensão. Para primeira dimensão, possuem três retratos de fase diferentes geometricamente entre si, enquanto para a segunda dimensão, possuem treze retratos de fase e, para terceira, trinta e sete retratos. Por isso, entendemos a importância e a facilitação que conjugações topológicas trazem nessa situação, reduzindo os casos para três, sete e treze retratos de fase para primeira, segunda e terceira ordens, respectivamente.

Palavras-chave: Retratos de Fase. Sistemas de Equações Diferenciais. Classificação Topológica.

ABSTRACT

This study was developed with the intention of investigating the phase portraits of all linear systems with constant coefficients up to third order. For this purpose, we will determine the systems solutions, perform an analytical study of them and sketch illustrations representing the portraits. Then, we may identify similarities and differences and classify the phase portraits according to the topological behavior, understanding the importance of this kind of classification. To achieve these goals, we will go through preliminaries that permeate first order linear differential equation, methods for finding solutions, linear systems, eigenvalues and eigenvectors, exponential matrices and Jordan matrices. Finally, we conclude that there is a large plurality of phase portraits, which increase with the dimension. For first dimension, we have three phase portraits that are geometrically different from each other, while for the second dimension, we have thirteen phase portraits and, for the third dimension, thirty seven portraits. Therefore, we understand the importance and facilitation of these topological conjugations, reducing the number of cases to three, seven and thirteen, for first, second and third orders, respectively.

Keywords: Phase Portraits. Systems of Differential Equation. Topological Classification.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Exemplo campo de direção $dy/dt = f(y, t)$	18
Figura 3.1 – Sistema linear de primeira ordem, autovalor negativo	44
Figura 3.2 – Sistema linear de primeira ordem, autovalor positivo	44
Figura 3.3 – Sistema linear de primeira ordem, autovalor igual a zero	44
Figura 3.4 – Retrato de fase - sistema linear de segunda ordem com dois autovalores negativos.	46
Figura 3.5 – Retrato de fase - sistema linear de segunda ordem com dois autovalores positivos.	47
Figura 3.6 – Retrato de fase - sistema linear segunda ordem, autovalores com sinais opostos.	48
Figura 3.7 – Retrato de fase - sistema linear de segunda ordem com dois autovalores repetidos.	49
Figura 3.8 – Retrato de fase - sistema linear de segunda ordem com autovalores imaginários.	50
Figura 3.9 – Retrato de fase - sistema linear segunda ordem, autovalores imaginários puros.	51
Figura 3.10 – Retrato de fase - sistema linear de segunda ordem com autovalores nulos.	52
Figura 4.1 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com todos autovalores negativos e autovetores LI.	56
Figura 4.2 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com todos autovalores negativos e dois autovetores LD.	58
Figura 4.3 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com todos autovalores negativos e três autovetores LD.	59

Figura 4.4 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com todos autovalores negativos e autovetores LI.	60
Figura 4.5 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com autovalores de sinais distintos e autovetores LI.	61
Figura 4.6 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com autovalores de sinais distintos e autovetores LI.	62
Figura 4.7 – Retrato de fase - sistema linear de terceira ordem com dois ou mais autovalores nulos.	63
Figura 4.8 – Retrato de fase - sistema linear de terceira ordem com um autovalor nulo.	64
Figura 4.9 – Retrato de fase - sistema linear de terceira ordem com autovalores imaginários.	66
Figura 4.10 – Retrato de fase - sistema linear de terceira ordem com autovalores imaginários e autovalor real nulo.	67
Figura 4.11 – Retrato de fase - sistema linear de terceira ordem com autovalores imaginários puros.	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Retrato de fase de sistemas lineares com autovalores constantes de primeira ordem	45
Tabela 3.2 – Retrato de fase de sistemas lineares com autovalores constantes de segunda ordem	53
Tabela 4.1 – Retrato de fase de sistemas lineares com autovalores constantes de terceira ordem	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	14
2.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM	14
2.1.1	Método dos Fatores Integrantes	15
2.1.2	Equações Separáveis	16
2.1.3	Campo de Direções	17
2.1.4	Teorema da Existência e Unicidade	18
2.2	SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM	25
2.2.1	Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes	27
2.2.1.1	Autovalores Reais e Distintos	29
2.2.1.2	Autovalores Complexos	29
2.2.1.3	Autovalores Repetidos	30
2.2.2	Sistemas Lineares Não Homogêneos	32
2.2.3	Exponencial de Matriz	32
2.2.3.1	Matrizes Fundamentais	32
2.2.3.2	Propriedades da Exponencial de Matriz	35
2.2.3.3	Matrizes Diagonalizáveis e Formas de Jordan	37
2.3	SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESTABILIDADE	40
2.4	RETRATOS DE FASE	41
3	RETRATO DE FASE DE SISTEMAS DE LINEARES DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM	43
3.1	SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM	43
3.1.1	Autovalor negativo	43
3.1.2	Autovalor positivo	44
3.1.3	Autovalor igual a zero	44
3.2	SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM	44
3.2.1	Dois autovalores reais negativos	45
3.2.2	Dois autovalores reais positivos	46
3.2.3	Autovalores reais com sinais opostos	47
3.2.4	Autovalores repetidos	48
3.2.5	Autovalores complexos com parte real não nula	49
3.2.6	Autovalores imaginários puros	50
3.2.7	Autovalores nulos	51

4	RETRATO DE FASE DE SISTEMAS DE LINEARES DE TERCEIRA ORDEM	54
4.1	AUTOVALORES REAIS	54
4.1.1	Três autovalores com mesmo sinal	55
4.1.2	Autovalores com sinais distintos	60
4.1.3	Autovalores nulos	62
4.2	UM PAR DE AUTOVALORES COMPLEXOS CONJUGADOS E UM AUTOVALOR REAL	64
4.2.1	Parte real diferente de zero	65
4.2.2	Parte real igual a zero	67
5	CONCLUSÕES	70
5.1	PRIMEIRA DIMENSÃO	70
5.2	SEGUNDA DIMENSÃO	70
5.3	TERCEIRA DIMENSÃO	71
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
	REFERÊNCIAS	74
APÊNDICE A	FLUXOS E CONJUNTOS INVARIANTES	75
APÊNDICE B	CONJUGAÇÃO ENTRE SISTEMAS LINEARES HIPERBÓLICOS	81

1 INTRODUÇÃO

O reconhecimento de padrões está presente na vida dos seres humanos em diversos aspectos e momentos e consiste em, basicamente, classificar dados a partir de um conhecimento – já existente ou deduzido. Desde a conhecida das cores por crianças até a classificações mais complexas como a taxonomia, faz parte da nossa vida procurar (e, em muitas vezes, encontrar) padrões e, a partir disso, fazer associações que facilitam o entendimento dos objetos em questão. Um dos aspectos que ajudam tal procura é a percepção visual, quando possível de ser realizada. Por exemplo, uma tabela que contém dados brutos do faturamento de uma empresa ao longo de alguns anos pode ser difícil de ser analisada, enquanto que a sua disposição em um gráfico pode ajudar a encontrar padrões ou sazonalidades da venda de produtos ou serviços.

Dentro do estudo de sistemas dinâmicos, um dos tópicos envolvidos é a compreensão do comportamento das suas soluções, que em alguns casos são fáceis de ser encontradas e, em outros, nem tanto. Um dos aspectos visuais que auxiliam na compreensão do comportamento das soluções é o retrato de fase, que possibilita visualizá-las dentro do espaço de fase e, a partir disso, identificar características em comum entre as soluções de diferentes sistemas, criando agrupamentos conforme determinados fatores escolhidos. Um dos exemplos mais conhecidos e úteis na teoria dos sistemas dinâmicos é a Classificação Topológica de Sistemas Hiperbólicos, que conforme o nome indica, agrupa os retratos de fase conforme comportamento topológico deles, e é baseado no Teorema de Grobman-Hartman. Com esse resultado é possível associar os retratos de fase de sistemas não lineares com as suas versões linearizadas, que possuem soluções mais palpáveis de serem encontradas.

O objetivo deste trabalho não é discutir sobre o reconhecimento de padrões em retratos de fase, mas levantar todas as possibilidades existentes de retratos, facilitando a análise das soluções a partir deste aspecto visual citado, para sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, neste caso, de até terceira ordem. Para isso, discutiremos o comportamento dos possíveis sistemas, a menos de casos análogos, a partir das suas soluções analíticas – uma vez que são mais acessíveis e, então, esboçar os retratos de fase nos seus respectivos planos. Os esboços foram realizados pelo autor por meio do *software* Inkscape – plataforma gratuita que possibilita realizar ilustrações que representem os retratos de fase, conforme discutido no decorrer dos capítulos.

O levantamento a ser realizado tem como princípio ressaltar a pluralidade de retratos de fase existentes e, conseqüentemente a riqueza que a matemática possui, observando as especificações e diferenças geométricas entre cada um deles. Como consequência, teremos material para olhar também para as semelhanças entre eles, que pode servir de base para criar agrupamentos ou entender os já existentes. Além disso, pretende-se reforçar a importância e a utilidade de se realizar tais reconhecimentos de padrões, uma vez que existem inúmeros retratos de fase, que aumentam consideravelmente conforme a dimensão do sistema. Por fim, mostraremos um exemplo dos possíveis agrupamentos, que é realizado a partir do seu

comportamento topológico, diferenciando-se da classificação citada anteriormente por restringir a sistemas lineares com coeficientes constantes e incluir sistemas não hiperbólicos.

Para facilitar a compreensão dos retratos de fase e das suas características, apresentaremos no próximo capítulo conceitos preliminares que perpassam tópicos como equações diferenciais, existência, unicidade e métodos para encontrar soluções; sistemas de equações diferenciais; exponencial de matriz; formas de Jordan; sistemas autônomos; estabilidade e retratos de fase. Com isso, seguiremos com o estudo e construção de retratos de fase de primeira e segunda ordem no Capítulo 3 e, posteriormente, de sistemas de terceira ordem, no Capítulo 4. Por fim, o agrupamento topológico dos retratos de fase dos sistemas lineares será realizado nas Conclusões. Conceitos de conjugações que justificam tais classificações serão exibidos nos Apêndices, uma vez que fogem do escopo principal deste trabalho.

2 PRELIMINARES

Para o desenvolvimento do estudo dos retratos de fase de sistemas de equações diferenciais é importante a compreensão de alguns conceitos que precedem a teoria e serão abordados neste capítulo, entre eles, veremos o que são Equações Diferenciais, suas classificações, condições de existência de solução e comportamento, além de Sistemas de Equações Diferenciais, exponencial de matriz e matrizes de Jordan. Desta maneira, espera-se que sirva de base para o entendimento dos capítulos seguintes. Os estudos desse capítulo foram baseados na obra *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, de Boyce e Diprima (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Chamamos de Equações Diferenciais (ED) as equações cuja a função incógnita aparece sob a forma de suas derivadas. Essas equações são tão amplas como se parece, por isso é importante estabelecer boas formas de classificá-las para que seja possível um estudo mais aprofundado sobre cada tipo de ED. Nesta seção, iremos elencar as principais classificações utilizadas.

A primeira forma de classificá-las é a respeito da função incógnita em questão, podendo esta ser uma função de apenas uma variável ou de diversas. No primeiro caso, chamamos essa equação de **Equação Diferencial Ordinária (EDO)**, enquanto no segundo, chamamos de **Equação Diferencial Parcial (EDP)**.

Outra forma de classificar as ED, é em relação à sua ordem. A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação, podendo então ser de **primeira ordem, segunda ordem, ... n -ésima ordem**.

Também é possível classificar a ED quanto a sua linearidade. A linearidade referida é em relação à função incógnita e suas derivadas. Isto é, uma EDO de n -ésima ordem linear, pode ser escrita da forma:

$$a_0(t)y + a_1(t)y' + a_2(t)y'' + \dots + a_n(t)y^{(n)} = g(y)$$

Temos um pensamento análogo para EDP. Então, uma ED pode ser classificada como **linear** ou **não linear**.

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Como visto na classificação de equações diferenciáveis, a sua ordem é relativa a derivada de maior ordem. Sendo assim, considere a equação genérica de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \tag{2.1}$$

Note que ela pode ser tanto uma EDO quanto uma EDP, podendo ser linear ou não.

Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaça a equação para todo t em um

intervalo, é dita solução da equação. Nem toda equação dessa forma tem uma solução, e também não existe um método geral para determinar se existe e qual é. Estudaremos a seguir alguns métodos para subclasses dessa ED, em específico para EDOs, que permitem encontrar soluções para ((2.1)).

2.1.1 Método dos Fatores Integrantes

O método descrito a seguir é aplicável nos casos em que a equação diferencial de primeira ordem é linear. Isto é, é possível escrever a equação ((2.1)) da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t).$$

Poderíamos tentar uma integração direta dessa equação. Teríamos então:

$$\int \frac{dy}{dt} + p(t)y \, dt = \int g(t) \, dt \Rightarrow y + \int p(t)y \, dt = \int g(t) \, dt.$$

Porém, não conseguimos calcular $\int p(t)y \, dt$.

Observando a equação, vemos que na primeira parte temos uma soma com a função incógnita e sua derivada, o que lembra a derivada do produto. Como não sabemos qual função está sendo multiplicada com y , chamaremos essa função de $\mu(t)$. Assim,

$$(\mu(t) \cdot y)' = \mu(t) \cdot \frac{dy}{dt} + \mu'(t) \cdot y.$$

Comparando com a equação inicial, vemos que a derivada da função incógnita está sozinha. Portanto, multiplicamos toda a equação inicial por $\mu(t)$.

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t)$$

Portanto, comparando a equação com a derivada do produto, para que sejam iguais, então

$$\mu(t)p(t) = \mu'(t)$$

Supondo $\mu(t) > 0$,

$$p(t) = \frac{1}{\mu(t)} \mu'(t)$$

Integrando, temos:

$$\begin{aligned}\int p(t) dt &= \int \frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} dt \Rightarrow \\ \int p(t) dt &= \int \frac{1}{\mu(t)} d\mu(t) \Rightarrow \\ \ln \mu(t) &= \int p(t) dt \Rightarrow \\ \mu(t) &= e^{\int p(t) dt}.\end{aligned}$$

Note que durante o processo foi feito a passagem $d\mu(t)/dt \cdot dt$ para $d\mu(t)$ que não é apenas um cancelamento e sim uma regra da cadeia oculta, que será novamente abordada na próxima seção.

Voltando à equação, temos

$$\begin{aligned}\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y &= \mu(t)g(t) \Rightarrow \\ (\mu(t) \cdot y)' &= \mu(t)g(t).\end{aligned}$$

Integrando,

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) dt.$$

Substituindo $\mu(t)$:

$$y(t) = \frac{\int e^{\int p(t) dt} g(t) dt}{e^{\int p(t) dt}}.$$

Esse método recebe o nome de **fator integrante**, pois multiplicamos toda a equação pelo fator $\mu(t)$ para que fosse possível integrar a equação diferencial. Novamente, isso só foi possível pelo fato de ser uma equação linear de primeira ordem, pois a função incógnita não multiplica sua derivada, sendo então, possível transformar em uma derivada do produto.

2.1.2 Equações Separáveis

Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \tag{2.2}$$

Dizemos que esta é uma **equação separável** se ela pode ser escrita da forma $N(y) \cdot dy/dt = M(t)$, onde $f(t, y) = M(t)/N(y)$.

Temos:

$$N(y) \cdot \frac{y(t)}{dt} = M(t).$$

Integrando ambos os lados em função de t :

$$\int N(y) \cdot \frac{y(t)}{dt} dx = \int M(t) dt.$$

Considerando $H_1(y)$ e $H_2(t)$ primitivas de, respectivamente, $N(y)$ e $M(t)$, isto é, $\frac{H_1(y)}{dy} = N(y)$ e $\frac{H_2(t)}{dt} = M(t)$. Então,

$$\int \frac{H_1(y)}{dy} \cdot \frac{y(t)}{dt} dt = \int \frac{H_2(t)}{dt} dt$$

Pela Regra da Cadeia,

$$\int \frac{H_1(y)}{dt} dt = \int \frac{H_2(t)}{dt} dt \Rightarrow \\ H_1(y) = H_2(t) + c.$$

Sendo essa uma solução da equação ((2.2)), com $c \in \mathbb{R}$ uma constante provinda da integração.

Note que é equivalente integrar $N(y)$ em relação a y , reforçando, tal como na seção anterior, que não é um cancelamento entre dy/dt e dt e sim consequência da regra da cadeia, isto é:

$$\int N(y) \cdot y'(x) dx = H_1(y) = \int N(y) dy.$$

Enquanto isso, $M(t)$ continua sendo integrada em relação a t e por isso o método recebe o nome de equações separáveis ou variáveis separáveis, pois podemos separar as variáveis e integrar cada lado da equação em apenas uma variável, facilitando significativamente os cálculos envolvidos.

2.1.3 Campo de Direções

Mesmo sem conhecer a solução de uma equação diferencial, é possível estudar o seu comportamento, como a solução “se parece” por meio do seu campo de direções. Considerando uma equação da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

o campo de direções desta equação diferencial pode ser construído calculando-se f em cada ponto de uma malha retangular e desenhado um pequeno segmento de reta cujo coeficiente angular é o valor de f no ponto. Desta forma, cada segmento desenhado é tangente à curva de uma solução que contém aquele ponto, podendo ter então, uma noção do comportamento global das soluções de uma ED.

É importante ressaltar que para construir o campo de direção de uma equação não é necessário encontrar a sua solução, apenas calcular o valor de f , por isso é possível construir o campo de direção até em casos em que é difícil de se resolver a equação, permitindo uma análise quantitativa do problema. Além do mais, é apropriado que os cálculos sejam feitos por computadores, tendo em vista a grande quantidade que deve ser feito para que o campo seja relevante o suficiente.

A seguir, na Figura 2.1 temos um exemplo de campo de direções da EDO

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) = \frac{y^2}{t} + yt.$$

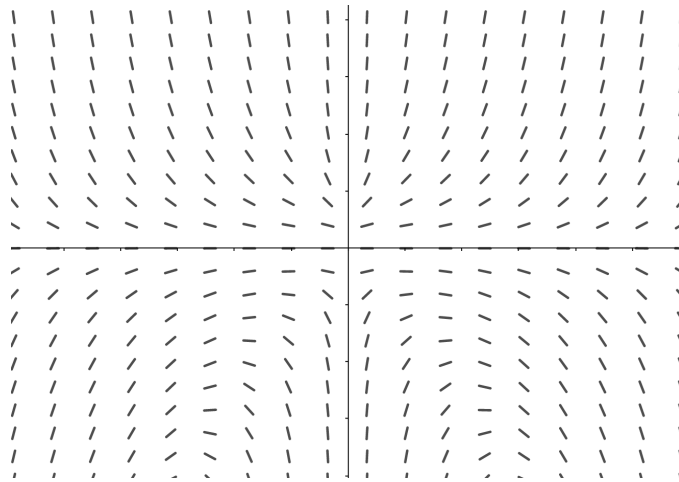


Figura 2.1 – Exemplo campo de direção $dy/dt = f(y, t)$

2.1.4 Teorema da Existência e Unicidade

Foram vistos, até então, alguns métodos para determinar as soluções de uma equação diferencial. Em alguns casos, as soluções são dadas em função de uma constante provinda da integração, então, adicionando à equação uma condição inicial, conseguimos determinar uma solução específica. Esses casos são chamados de Problemas de Valor Inicial (PVI). Antes de começar a resolução desses problemas é importante saber se essa solução de fato existe, e depois de encontrá-la, saber se é única ou se deve continuar a procurar por outras soluções.

Para equações lineares, as respostas dessas questões são dadas pelo Teorema 2.1.

Teorema 2.1. *Seja o problema de valor inicial*

$$y'(t) + p(t)y = q(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Se as funções p e q são contínuas em um intervalo aberto $I : \alpha < t < \beta$ contendo o ponto t_0 , então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz o PVI.

Demonstração. Como visto na Seção 2.1.1, se a solução de equação diferencial linear considerada existir, ela é dada por

$$\mu(t)y = \int \mu(t)q(t) dt, \tag{2.3}$$

sendo $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$.

Como, por hipótese, p é contínua em $\alpha < t < \beta$, então $\mu(t)$ está definida nesse intervalo. Multiplicando a equação diferencial do PVI por $\mu(t)$, temos

$$[\mu(t)y(t)]' = \mu(t)q(t).$$

Como $\mu(t)$ e $q(t)$ são contínuas em I , então a função μq é diferenciável, de modo que y , dado pela equação ((2.3)), existe e é diferenciável no intervalo I . Substituindo a equação dada para y , pode-se verificar que satisfaz a equação diferencial em $\alpha < t < \beta$. Por fim, a condição inicial $y(t_0) = y_0$ determina a constante provinda da integração, de modo que essa solução seja, de fato, única. \square

É notável que a demonstração se apoia em um modelo de solução geral de equação diferencial linear e sabemos que ao se tratar de equações não lineares, não temos uma solução geral, o que não nos permite seguir pelo mesmo caminho. Portanto, consideraremos um teorema mais geral, conhecido como Teorema de Picard.

Teorema 2.2 (Teorema de Picard). *Suponha que f e $\partial f / \partial y$ sejam contínuas em algum retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_0, y_0) . Então, em algum intervalo $t_0 - h < t_0 < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$ existe uma única solução do problema de valor inicial*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.4)$$

Antes de demonstrar esse teorema, vamos definir uma ferramenta útil para obter o resultado.

Lema 2.1. *Resolver o problema de valor inicial*

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0,$$

é equivalente a resolver a equação integral

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Demonstração. Suponha a princípio que exista uma função $y = \phi(t)$ que satisfaz o PVI. Então, $f(t, y) = f(t, \phi(t))$ é uma função contínua que depende apenas de t e, portanto, pode ser integrada de um ponto inicial 0 até um ponto arbitrário t :

$$\int_0^t y'(s) ds = \int_0^t f(s, y(s)) ds \Rightarrow y(t) = \phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s)) ds. \quad (2.5)$$

Por conter uma integral de uma equação desconhecida, a equação ((2.5)) recebe o nome de **equação integral**. Essa equação fornece outra relação que é satisfeita por qualquer solução

$\phi(t)$ do PVI; reciprocamente, qualquer função $\phi(t)$ que satisfaz a equação ((2.5)), também satisfaz o PVI.

De fato, se substituirmos t por 0, temos

$$\int_0^0 f(s, \phi(s)) ds = 0,$$

satisfazendo a condição inicial. Além disso, como $f(s, \phi(s))$ é contínua, então, como $\phi(t)$ é diferenciável, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$. Portanto, o PVI e a equação integral são equivalentes. \square

A partir desse lema, cria-se um novo caminho para demonstrar o Teorema de Picard.

Demonstração do Teorema 2.2. Considerando a condição inicial $y_0 = 0$ e $t_0 = 0$, sem perda de generalidade, pois podemos transladar os eixos das coordenadas de forma que a origem seja o ponto (t_0, y_0) , podemos utilizar o Lema 2.1, para resolver o PVI ((2.4)), basta resolver a equação integral ((2.5)). Um dos métodos para mostrar que essa equação tem uma única solução é conhecido como método das aproximação sucessivas ou método de iteração de Picard.

Começamos escolhendo uma função arbitrária que aproxima, de certa forma, do PVI. Neste caso, a escolha mais simples é a função constante

$$\phi_0(t) = 0,$$

que satisfaz a condição inicial, mas que provavelmente não satisfaz a equação diferencial do PVI. A próxima aproximação é feita substituindo $\phi(s)$ pela nossa função $\phi_0(s)$ na equação integral. Então,

$$\phi_1(t) = \int_0^t f(s, \phi_0(s)) ds.$$

Seguindo esse raciocínio iteradamente, temos

$$\phi_n(t) = \int_0^t f(s, \phi_{n-1}(s)) ds.$$

Assim, obtemos a sequência de funções $(\phi_n) = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots)$, onde cada elemento satisfaz a condição inicial, mas não satisfaz, em geral, o PVI. Se em algum momento, encontrarmos $\phi_{k+1} = \phi_k$, para algum k natural, então ϕ_k é uma solução para a equação integral e consequentemente para o PVI. Mas não é comum que isso aconteça, portanto, precisamos analisar como a sequência se comporta no infinito.

Se para algum $n = k$ o gráfico de $y = \phi_k(t)$ contém pontos fora do retângulo definido no enunciado do teorema, então no cálculo de ϕ_{k+1} estaríamos calculando a função em pontos onde ela pode não ser contínua ou nem ao menos existir. Portanto, devemos restringir t a um intervalo onde não corra o risco disso acontecer.

Primeiro, vamos restringir o retângulo do enunciado a um novo retângulo $R : |t| \leq a, |y| \leq b$, sendo a o menor valor entre α e β e b o menor valor entre γ e δ . Portanto, temos f contínua e limitada no compacto R e, portanto, pelo Teorema de Weierstrass, f possui um máximo e um mínimo em R . Logo, existe M tal que:

$$|f(t, y)| \leq M, \forall (t, y) \in R.$$

Como todo elemento da sequência (ϕ_n) satisfaz a condição inicial, então $\phi_n(0) = 0$, para cada n , o que implica que o ponto $(0, 0)$ pertence a todo gráfico de ϕ_n .

Como $\phi'_{k+1}(t) = f(t, \phi_k(t))$, então o módulo do coeficiente angular para as retas tangentes ao gráfico da função ϕ'_{k+1} é limitado por M .

A reta tangente é definida por $y = mt$, sendo m o coeficiente angular, que por sua vez é limitado por M , enquanto que y é limitado por b . Logo, temos por essa relação que t é limitado por b/M .

Portanto, o ponto $(t, \phi_{k+1}(t))$ permanece em R , enquanto R contiver as regiões triangulares definidas por $|t| \leq b/M$, podendo ser $a \leq b/M$ ou $a \geq b/M$.

Sendo assim, daqui para frente vamos considerar apenas o retângulo $D : |t| \leq h, |y| \leq b$, onde h é o menor número entre a e b/M . Com essa restrição, todos elementos de (ϕ_n) existem.

Mostremos, agora, que a sequência (ϕ_n) converge. Observe que

$$\phi_n(t) = \phi_1(t) + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] + [\phi_3(t) - \phi_2(t)] + \cdots + [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)]$$

e, portanto, a sequência se torna a soma parcial da série

$$\phi_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)]$$

e, assim, se a série converge, então a sequência também converge.

Com a finalidade de mostrar que essa série converge, vamos procurar estimar o termo geral $|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)|$. Para isso, note que f é uma função contínua e, considerando t fixo, temos uma função de apenas uma variável, y , e podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, que diz que dado dois pontos y_1, y_2 , existe um \tilde{y} tal que

$$f'(t, \tilde{y}) = \frac{f(t, y_1) - f(t, y_2)}{y_1 - y_2}.$$

Considerando K como o valor máximo de $|\partial f / \partial y|$ em D , cuja existência é garantida por hipótese da continuidade da derivada de f em relação a y e pelo Teorema de Weierstrass, temos

$$K \geq |f'(t, \tilde{y})| = \frac{|f(t, y_1) - f(t, y_2)|}{|y_1 - y_2|}$$

e, portanto,

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K \cdot |y_1 - y_2|.$$

Como $\phi_{n-1}(t)$ e $\phi_n(t)$ são elementos da sequência (ϕ_n) , usamos o resultado encontrado para mostrar que

$$|f(t, \phi_{n-1}(t)) - f(t, \phi_n(t))| \leq K \cdot |\phi_{n-1}(t) - \phi_n(t)|.$$

Olhando os elementos da sequência, vemos que $\phi_1(t)$ pode ser estimado. Sabendo que $\phi_1(t) = \int_0^t f(s, \phi_0(s)) ds$, e tomando $M \geq f(t, y)$, pois como visto anteriormente, a função é limitada, então

$$\phi_1(t) = \int_0^t f[s, \phi_0(s)] ds \leq \int_0^t M ds \leq Mt.$$

Logo, $|\phi_1(t)| \leq M|t|$.

A partir disso, podemos estimar $|\phi_2(t) - \phi_1(t)|$. Temos por definição que

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| = \left| \int_0^t f[s, \phi_1(s)] ds - \int_0^t f[s, \phi_0(s)] ds \right| \leq \int_0^t |f[s, \phi_1(s)] - f[s, \phi_0(s)]| ds.$$

Conforme visto anteriormente,

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \leq \int_0^t |f[s, \phi_1(s)] - f[s, \phi_0(s)]| ds \leq \int_0^t K |\phi_1(s) - \phi_0(s)| ds = K \int_0^t |\phi_1(s) - \phi_0(s)| ds.$$

Pela definição da sequência, $\phi_0(t) = 0$, então concluímos que

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \leq K \cdot \int_0^t |\phi_1(s)| ds \leq K \int_0^t M|s| ds = \frac{MK|t|^2}{2}.$$

Neste ponto, percebemos uma possível regra para $|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|$, sendo

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \leq \frac{MK^{n-1}|t|^n}{n!},$$

que pelo Princípio da Indução Finita, e tendo já provado o caso básico de $n = 1$, vamos supor ser válido para n e provar ser válido para $n + 1$.

Sendo assim, temos

$$|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| \leq \int_0^t |f[s, \phi_n(s)] - f[s, \phi_{n-1}(s)]| ds \leq K \int_0^t |\phi_n(s) - \phi_{n-1}(s)| ds,$$

que por sua vez é menor, pela hipótese da indução, que

$$K \int_0^t \frac{MK^{n-1}|s|^n}{n!} ds = \frac{MK^n|t|^{n+1}}{(n+1)n!}.$$

Portanto,

$$|\phi_{n+1}(t) - \phi_n(t)| = \frac{MK^n |t|^{n+1}}{(n+1)!},$$

sendo então, a hipótese válida para qualquer n natural.

Por fim, como $|t| \leq h$, então $|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|$ é limitado por $MK^{n-1} h^n / n!$.

Voltando para a série $\phi_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)]$, sabemos, pela desigualdade triangular, que

$$|\phi_n(t)| \leq |\phi_1(t)| + |\phi_2(t) - \phi_1(t)| + \dots + |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|$$

e, então,

$$|\phi_n(t)| \leq M \cdot h + \frac{MK \cdot h^2}{2} + \dots + \frac{MK^{n-1} \cdot h^n}{n!} = \frac{M}{K} \cdot \left[Kh + \frac{(Kh)^2}{2} + \dots + \frac{(Kh)^n}{n!} \right].$$

Portanto, a série inicial é limitada pela série

$$\frac{M}{K} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Kh)^i}{i!}.$$

Logo, se essa série convergir, a primeira também converge. Pelo teste da razão, temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(Kh)^{i+1}}{(i+1)!}}{\frac{(Kh)^i}{i!}} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{Kh}{i+1} \rightarrow 0.$$

Então, ambas as séries convergem, assim como a sequência (ϕ_n) . Dessa forma, existe uma função limite $\phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)$. Para que essa função seja de fato solução da equação integral, ela deve ser contínua, o que acontece se a sequência $\phi_n(t)$ convergir uniformemente.

Voltando à definição da sequência, quando $n \rightarrow \infty$ temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{n+1}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, \phi_n(s)) ds \Rightarrow \\ \phi(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, \phi_n(s)) ds. \end{aligned}$$

Suponha que $\phi_n(t)$ seja uniformemente convergente. Então, podemos passar o limite para dentro da integral.

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, \phi_n(s)) ds \\ \phi(t) &= \int_0^t f\left(s, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(s)\right) ds \\ \phi(t) &= \int_0^t f(s, \phi(s)) ds \end{aligned}$$

Note que a passagem de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s, \phi_n(s)) = f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(s))$ é equivalente ao fato de f ser

contínua em sua segunda variável, o que é verdade por hipótese. Portanto, a função limite $\phi(t)$ é solução da equação integral e do Problema de Valor Inicial ((2.4)).

Mostrado que a função limite é solução do PVI, para concluir a demonstração do teorema, resta provar que essa solução é única. Para isso, iremos supor a existência de outra solução $y = \psi(t)$.

Para $t \geq 0$, temos

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s)) ds, \quad \psi(t) = \int_0^t f(s, \psi(s)) ds.$$

Então,

$$\phi(t) - \psi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s)) ds - \int_0^t f(s, \psi(s)) ds.$$

Pela desigualdade triangular,

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq \int_0^t |f(s, \phi(s)) - f(s, \psi(s))| ds.$$

Lembrando dos resultados utilizados para mostrar que a sequência converge, tínhamos que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K \cdot |y_1 - y_2|,$$

sendo K cota superior de $|\partial f / \partial y|$ em D . Como $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são soluções do PVI, podemos substituir:

$$|f(t, \phi(t)) - f(t, \psi(t))| \leq K \cdot |\phi(t) - \psi(t)|.$$

Definimos então, uma função

$$U(t) = \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)| ds,$$

onde, por definição, $U(0) = 0$ e para $t \geq 0$, $U(t) \geq 0$.

Como $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são soluções, então elas são contínuas e, portanto, U é diferenciável. Sendo assim, $U'(t) = |\phi(t) - \psi(t)|$. Então,

$$U'(t) \leq K \cdot U(t) \Rightarrow U'(t) - K \cdot U(t) \leq 0,$$

obtendo uma inequação diferencial ordinária de primeira ordem linear em $U(t)$.

Multiplicando ambos os lados da inequação por e^{-Kt} ,

$$\begin{aligned} U'(t) \cdot e^{-Kt} - K \cdot e^{-Kt} \cdot U &\leq 0 \\ (U(t) \cdot e^{-Kt})' &\leq 0. \end{aligned}$$

Integrando,

$$U(t)e^{-Kt} \leq 0,$$

que implica

$$U(t) \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Lembrando que a definição da função $U(t)$ diz que $U(t) \geq 0$ para $t \geq 0$ temos que, neste intervalo, $U(t) = 0$, e então $\phi(t) \equiv \psi(t)$.

Analogamente, quando $t \leq 0$, definimos a função U como

$$U(t) = - \int_0^{-t} |\phi(s) - \psi(s)| ds,$$

onde, por definição, $U(0) = 0$ e para $t \leq 0$, $U(t) \leq 0$.

Pela mesma justificativa, U é diferenciável, e $U'(t) = -|\phi(t) - \psi(t)|$, então, $U'(t) \geq K \cdot U(t) \Rightarrow U'(t) - K \cdot U \geq 0$.

Multiplicando ambos os lados da inequação por e^{-Kt} ,

$$\begin{aligned} U'(t) \cdot e^{-Kt} - K \cdot e^{-Kt} \cdot U &\geq 0 \\ (U(t) \cdot e^{-Kt})' &\geq 0, \end{aligned}$$

integrando,

$$U(t)e^{-Kt} \geq 0 \Rightarrow U(t) \geq 0, \quad t \leq 0.$$

Lembrando que a definição da função $U(t)$ diz que $U(t) \leq 0$ para $t \leq 0$, temos então que $U(t) = 0$. Portanto, concluímos que $\phi(t) \equiv \psi(t)$ para qualquer t .

Sendo assim, qualquer outra solução é equivalente a $\phi(t)$, provando então, sua unicidade. \square

Observação 2.1.1. Uma consequência geométrica direta do Teorema 2.2 é que os gráficos de duas soluções não podem se intersectar, pois isso implicaria em duas soluções satisfazendo uma mesma condição inicial.

2.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Considere uma equação linear de segunda ordem $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$. Utilizando a troca de variável $x_1 = x$ e $x_2 = x'$, transformamos a equação em um sistema de primeira ordem a duas variáveis:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= a(t)x_2 + b(t)x_1 + c(t). \end{aligned}$$

Considerando uma equação linear de terceira ordem $x'''(t) = a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x + d(t)$, utilizando a troca de variáveis $x_1 = x$, $x_2 = x_1'$ e $x_3 = x_2'$, temos um sistema de primeira ordem a

três variáveis:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\x_2' &= x_3, \\x_3' &= a(t)x_3 + b(t)x_2 + c(t)x_1 + d(t).\end{aligned}$$

Analogamente, podemos estender esse processo para uma equação linear de n -ésima ordem, $x^{(n)} = a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x + a_{n+1}$, obtendo o sistema:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2, \\x_2' &= x_3, \\&\vdots \\x_n' &= a_1(t)x_n + a_2(t)x_{n-1} + \dots + a_n(t)x_1 + a_{n+1}(t).\end{aligned}$$

Sendo assim, o estudo de soluções de equações lineares de ordem n pode ser visto como um caso específico de sistemas lineares de mesma ordem, que será estudado neste capítulo.

Um sistema linear de n equações diferenciais de primeira ordem é do tipo

$$\begin{aligned}x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\&\vdots \\x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t),\end{aligned}$$

e é dito **linear** pois todas as equações envolvidas são lineares; caso contrário, seria um sistema **não linear**. No caso em que todas as funções $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ forem iguais a à função constante 0, dizemos que o sistema é **homogêneo**; caso contrário, **não homogêneo**.

É comum e mais eficiente usar a sua representação matricial, isto é, consideraremos como x o vetor cujos elementos são as funções x_1, x_2, \dots, x_n , g o vetor cujos elementos são as funções g_1, g_2, \dots, g_n e, por fim, $P(t)$ a matriz $n \times n$ cujos elementos são as funções p_{ij} . Desta forma, temos a equação matricial correspondente ao sistema

$$x' = P(t)x + g(t). \tag{2.6}$$

Dizemos que um vetor $x = \phi(t)$ é uma solução da equação ((2.6)) se suas componentes $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ satisfazem o sistema de equações correspondente.

Os teoremas que garantem a existência de tais soluções estão enunciados a seguir. Suas demonstrações podem ser feitas a partir de uma generalização dos Teoremas 2.1 e 2.2 que se referem à existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial linear de primeira ordem.

Teorema 2.3 ((BOYCE; DIPRIMA, 2018)). *Se as funções $p_{11}(t), \dots, p_{nn}(t), g_1(t), \dots, g_n(t)$ forem contínuas em um intervalo aberto $I : \alpha < t < \beta$ que contém o ponto t_0 , então existirá uma única*

solução $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema que satisfaz as condições iniciais que existe em todo I .

Considere agora um sistema em sua forma geral, podendo ser linear ou não,

$$\begin{aligned}x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

com as mesmas condições iniciais.

Teorema 2.4 ((BOYCE; DIPRIMA, 2018)). *Se as funções F_1, \dots, F_n e as suas derivadas parciais $\partial F_1/\partial x_1, \dots, \partial F_1/\partial x_n, \dots, \partial F_n/\partial x_1, \dots, \partial F_n/\partial x_n$ forem contínuas em uma região R do espaço $tx_1 \dots x_n$ definida por $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1$, \dots , $\alpha_n < x_n < \beta_n$, e suponha o ponto $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ contido em R . Então, existe uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ em um intervalo $|t - t_0| < h$ que satisfaz o sistema e suas condições iniciais.*

Note que, no caso geral, o intervalo em que a solução está definida não é especificado, enquanto que no Teorema 2.3 é o mesmo intervalo em que as funções são contínuas. Além disso, as condições iniciais são arbitrárias no Teorema 2.3, enquanto que no Teorema 2.4 é necessário que elas estejam contidas na região R .

2.2.1 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Os sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes se referem aos casos em que as funções $p_{11}(t), \dots, p_{nn}(t)$ são funções constantes, isto é, não são dependentes de t . Por isso, chamaremos a matriz $P(t)$ de A , que é uma matriz constante $n \times n$, considerando seus elementos reais.

Então, se $n = 1$, reduzimos o sistema a um problema simples de uma equação de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = ax,$$

que tem como solução geral

$$x(t) = ce^{at}.$$

As soluções de equilíbrio, isto é, quando $dx/dt = 0$, se resumem apenas a $x = 0$, considerando $a \neq 0$. Se $a < 0$, as soluções tendem a 0 e, nesse caso, dizemos que a solução de equilíbrio $x = 0$ é assintoticamente estável. Por outro lado, se $a > 0$, então as funções tendem ao infinito, de acordo com o gráfico da função exponencial; por isso, nesse caso dizemos que $x = 0$ é instável.

Em geral, supomos que $\det A \neq 0$, de forma que, quando procuramos as soluções de equilíbrio $Ax = 0$, encontramos apenas $x = 0$, mas para $n > 1$ não é trivial concluir se as

soluções tendem ou não a $x = 0$. Para $n \geq 2$, podemos visualizar seu comportamento a partir do campo de direções de vetores tangentes às soluções do sistema $x' = Ax$ no espaço $x_1 \dots x_n$. Podemos também incluir curvas-soluções, obtendo assim um **retrato de fase**.

Para encontrar as soluções de um sistema

$$x' = Ax, \tag{2.7}$$

é normal deduzir que elas possuem $e^{\lambda t}$ em sua composição, pois essa é a solução fundamental de uma equação diferencial de primeira ordem com coeficientes constantes. Sendo assim, vamos supor que as soluções desse sistema são da forma $x = \xi e^{\lambda t}$, em que ξ é um vetor constante e λ uma constante deverão ser determinados. Substituindo na equação matricial do sistema,

$$(\xi e^{\lambda t})' = A\xi e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \xi e^{\lambda t} = A\xi e^{\lambda t}.$$

Como $e^{\lambda t}$ não se anula, obtemos

$$(A - \lambda I)\xi = 0,$$

sendo I a matriz identidade e 0 a matriz nula, ambas de ordem $n \times n$.

Essa última equação é exatamente o método de se calcular os autovalores da matriz A através do seu polinômio característico. Portanto, o vetor $x = \xi e^{\lambda t}$ é uma solução quando λ é um autovalor e ξ um autovetor da matriz A .

Como resultado de Álgebra Linear (pode ser encontrado em (LIMA, 2014)), os autovalores da matriz A são as raízes da equação $\det(A - \lambda I) = 0$, de grau n , implicando na existência de, no máximo, n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Como a matriz envolvida possui apenas elementos reais, temos três opções para os autovalores:

- Todos com valores distintos e reais;
- Alguns com valores complexos conjugados;
- Alguns autovalores repetidos.

Na Seção 2.2.1.1 explicamos como obter a solução geral no caso em que todos os autovalores são reais e distintos. Quando encontramos autovalores complexos conjugados, se esses forem distintos entre si, ainda temos n autovetores diferentes e a solução geral pode ser encontrada como no caso anterior, com a diferença de que, naturalmente, as soluções terão valores complexos. No entanto, é possível conseguir um conjunto de solução real, como será discutido na Seção 2.2.1.2.

As complicações podem existir nos casos em que temos autovalores repetidos, onde existe a possibilidade de que esses autovalores não formem um conjunto de n vetores linearmente independentes. Se for o caso, então não conseguiríamos o conjunto de soluções fundamentais e seria necessário procurar soluções adicionais tal como no cálculo de soluções de

um equação linear de ordem n com coeficientes constantes. Essas soluções podem ser produtos de funções polinomiais com funções exponenciais, da forma $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$, ..., e serão discutidas na Seção 2.2.1.3.

2.2.1.1 Autovalores Reais e Distintos

Temos n autovetores linearmente independentes entre si da matriz A , um associado a cada autovalor. Portanto as soluções são

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad x^{(n)}(t) = \xi^{(n)} e^{\lambda_n t}.$$

E de fato, essas soluções formam um conjunto fundamental, pois calculando seu Wronskiano, temos:

$$W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t) = \begin{vmatrix} \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \dots & \xi^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^n \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^n \xi^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} \xi^{(1)} & \dots & \xi^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^n \xi^{(1)} & \dots & \lambda_n^n \xi^{(n)} \end{vmatrix},$$

onde a exponencial não se anula e, como os autovetores são linearmente independentes, o determinante também não se anula, concluindo que o Wronskiano é sempre diferente de zero. Portanto, a solução geral do sistema é $x = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{\lambda_n t}$.

2.2.1.2 Autovalores Complexos

Suponhamos que a matriz A possua pelo menos um par de autovalores complexos conjugados. Observamos que, como A é uma matriz de entradas reais, então os coeficientes do polinômio característico também serão reais, o que implica que, no caso de ter raízes complexas, elas apareceram em pares conjugados.

Sendo assim, suponhamos λ_1 e λ_2 complexos conjugados que são raízes do polinômio característico da matriz A e seus respectivos autovetores conjugados ξ_1 e ξ_2 . Então,

$$(A - \lambda_1 I)\xi_1 = 0, \quad (A - \lambda_2 I)\xi_2 = 0.$$

Isso implica nas respectivas soluções conjugadas

$$x^{(1)}(t) = \xi_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x^{(2)}(t) = \xi_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Assim, podemos encontrar duas soluções reais equivalentes às soluções acima. Considere $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$; da mesma forma, $\xi_1 = a + bi$ e $\xi_2 = a - bi$, sendo α , β reais e

a, b vetores com entradas reais. Então,

$$\begin{aligned}x^{(1)}(t) &= (a + bi)e^{\alpha + \beta i t} \\ &= (a + bi)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) \\ &= e^{\alpha t}(a \cos \beta t - b \operatorname{sen} \beta t) + ie^{\alpha t}(a \operatorname{sen} \beta t + b \cos \beta t).\end{aligned}$$

Escrevendo $x^{(1)} = u(t) + iv(t)$, então os vetores

$$u(t) = e^{\alpha t}(a \cos \beta t - b \operatorname{sen} \beta t) \text{ e } v(t) = e^{\alpha t}(a \operatorname{sen} \beta t + b \cos \beta t)$$

são soluções reais e linearmente independentes do sistema ((2.7)). O mesmo processo para ξ_2 resulta nos mesmos valores de $u(t)$ e $v(t)$.

Se o polinômio característico da matriz A possuir mais do que um par de autovalores complexos conjugados, seguimos o mesmo procedimento para cada par desses autovalores.

2.2.1.3 Autovalores Repetidos

Suponhamos que λ_1 seja um autovalor de multiplicidade algébrica k , isto é, um autovalor que se repete k vezes como solução do polinômio característico da matriz A . Sendo assim, esse autovalor pode ter no máximo k autovetores associados. No caso em que possui exatamente k autovetores associados, temos um conjunto de soluções fundamentais completo e, assim, seguimos como na Seção 2.2.1.1. Caso contrário, não teremos soluções suficientes para o conjunto fundamental, portanto, devemos procurar soluções envolvendo produtos de funções polinomiais e exponenciais.

Primeiro, considere que λ_1 seja um autovalor duplo com apenas um autovetor associado, e uma respectiva solução

$$x^{(1)}(t) = \xi e^{\lambda_1 t}.$$

Então, precisamos determinar mais uma solução do sistema ((2.7)) relativa ao autovalor λ_1 .

É natural procurarmos uma segunda solução da forma $x^{(2)}(t) = \xi t e^{\lambda_1 t}$. Substituindo nessa equação, temos

$$\begin{aligned}\lambda_1 \xi t e^{\lambda_1 t} + \xi e^{\lambda_1 t} &= A \xi t e^{\lambda_1 t} \Rightarrow \\ \lambda_1 \xi t e^{\lambda_1 t} + \xi e^{\lambda_1 t} - A \xi t e^{\lambda_1 t} &= 0,\end{aligned}$$

que só é satisfeita quando $\xi = 0$. Logo, não existe solução dessa forma. Vamos supor então, uma solução da forma $x^{(2)}(t) = \xi t e^{\lambda_1 t} + \eta e^{\lambda_1 t}$. Substituindo na mesma equação,

$$\begin{aligned}\lambda_1 \xi t e^{\lambda_1 t} + \xi e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \eta e^{\lambda_1 t} &= A(\xi t e^{\lambda_1 t} + \eta e^{\lambda_1 t}) \Rightarrow \\ \lambda_1 \xi t e^{\lambda_1 t} + (\xi + \lambda_1 \eta) e^{\lambda_1 t} &= A(\xi t e^{\lambda_1 t} + \eta e^{\lambda_1 t}).\end{aligned}$$

Igualando coordenada a coordenada, temos que

$$(A - \lambda_1 I)\xi = 0, \quad (A - \lambda_1 I)\eta = \xi.$$

Embora $\det(A - \lambda_1 I) = 0$, é possível mostrar que sempre possui solução para η , como faremos a seguir. Considere o Exemplo 2.1 retirado de (BOYCE; DIPRIMA, 2018).

Exemplo 2.1.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x,$$

Resolvendo esse sistema, chegamos à conclusão que ele possui um único autovalor, $\lambda_1 = 2$ com um único autovetor correspondente $\xi = (1, -1)$, desta forma,

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Substituindo em $(A - \lambda_1 I)\eta = \xi$,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

de forma que chegamos em

$$\begin{aligned} -\eta_1 - \eta_2 &= 1, \\ \eta_1 + \eta_2 &= -1, \end{aligned}$$

sendo $\eta = (\eta_1, \eta_2)$.

Supondo η_1 fixo, arbitrário, temos $\eta_2 = -\eta_1 - 1$, então:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ -1 - \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \eta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Então, teríamos na solução $x^{(2)}$:

$$x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \eta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t},$$

onde a última parcela é múltipla da solução $x^{(1)}$ e, portanto, pode ser ignorada, enquanto as duas primeiras parcelas constituem uma nova solução, onde $W[x^{(1)}, x^{(2)}] = -e^{2t}$, portanto, formam um conjunto fundamental de solução.

Este segundo autovalor recebe o nome de autovetor generalizado de λ_1 . Analogamente, podemos procurar soluções para autovalores com multiplicidade maior.

2.2.2 Sistemas Lineares Não Homogêneos

Tal como as soluções de uma equação diferencial de primeira ordem não homogênea, as soluções de um sistema não homogêneo necessitam de um conjunto de soluções fundamentais e uma solução particular do sistema. Dessa forma, um sistema de n equações

$$x' = P(t) + g(t)$$

tem como solução

$$x = c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)} + x^{(p)},$$

onde $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}$ é o conjunto fundamental de soluções relativo ao sistema homogêneo correspondente, e $x^{(p)}$ é uma solução particular, cuja determinação trás as maiores dificuldades. Alguns métodos para a determinação tais como diagonalização, coeficientes indeterminados, variação de parâmetros ou transformada de Laplace estão descritos em (BOYCE; DIPRIMA, 2018) e serão omitidos pois, mais uma vez, não é o foco deste trabalho.

No entanto, um conceito bastante útil na determinação do conjunto fundamental de soluções e também de soluções particulares para equações não homogêneas é a *exponencial de matrizes*, que embora seja um método quantitativo de obtenção de soluções, também é útil para o estudo dos retratos de fase.

2.2.3 Exponencial de Matriz

Como discutido na Seção 2.2.1, é natural deduzir que o sistema ((2.7)) tenha em suas soluções o termo $e^{\lambda t}$, mas resolvendo o sistema como uma equação e esquecendo por um instante o fato de que A é uma matriz $n \times n$, teríamos naturalmente como solução $x(t) = e^{At}$. Relembrando que A é uma matriz, questionamos o que seria a exponencial de uma matriz. Mas, antes disso, precisamos olhar as soluções de um sistema por uma outra abordagem.

2.2.3.1 Matrizes Fundamentais

Chama-se de *matriz fundamental* um sistema homogêneo $n \times n$, $x' = P(t)x$, a matriz

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \dots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix},$$

quando os vetores $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$, colunas na matriz $\Psi(t)$, são um conjunto fundamental de soluções do sistema. De cara, sabemos que a matriz fundamental é invertível, pois como visto anteriormente, as soluções de um sistema são linearmente independentes.

Dado um problema de valor inicial, podemos expressar sua solução $x = c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)}$ em função da matriz fundamental da seguinte forma:

$$x = \Psi(t)c,$$

sendo c um vetor constante. Particularmente, quando a condição inicial é $x(t_0) = x_0$, temos

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \Psi(t_0)c \Rightarrow \\ \Psi(t_0)^{-1}x_0 &= \Psi^{-1}(t_0)\Psi(t_0)c \Rightarrow \\ c &= \Psi(t_0)^{-1}x_0. \end{aligned}$$

Então, a solução do PVI é $x = \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}x_0$. Substituindo no sistema, obtemos

$$\Psi'(t) = \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}x_0.$$

Lembre-se que um conjunto fundamental de soluções não é único, sendo assim, podem existir diversas matrizes fundamentais de um mesmo sistema, desde que satisfaçam a definição. Particularmente, podemos procurar por uma matriz fundamental específica, que chamaremos de $\Phi(t)$ tal que $\Phi(t_0) = I = \Phi^{-1}(t_0)$, de modo que a solução seja $x = \Phi(t)x_0$.

Analisando o caso específico onde o sistema é linear com coeficientes constantes, sabemos que cada componente j das colunas da matriz fundamental é do tipo $x_j^{(i)}(t) = e^{\lambda_j t}$, com $j = 1, 2, \dots, n$, para toda coluna i . Pela definição de exponencial,

$$x_j^{(i)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_j^k t^k}{k!} = \lambda_j^0 + \lambda_j t + \frac{\lambda_j^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{\lambda_j^n}{n!} t^n + \dots$$

Chamando $a_n = \lambda_j^n/n!$, temos $x_j^{(i)}(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots$. Generalizando o processo para a matriz fundamental, temos

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots & b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n + \dots & \dots \\ c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n + \dots & d_0 + d_1 t + \dots + d_n t^n + \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Então, $\Phi(t) = A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n + \dots$, onde

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i & \dots \\ c_i & d_i & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Note que as matrizes A_i não têm relação com a matriz A do sistema. Tendo então determinado o formato das matrizes fundamentais de um sistema linear homogêneo de ordem n ,

substituímos na equação que o define:

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= A\Phi(t) \Rightarrow \\ (A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n + \dots)' &= A(A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n + \dots) \Rightarrow \\ A_1 + 2A_2 t + \dots + nA_n t^{n-1} + \dots &= AA_0 + AA_1 t + \dots + AA_n t^n + \dots\end{aligned}$$

Por igualdade de polinômios, temos

$$A_1 = AA_0, \quad 2A_2 = AA_1, \quad \dots, \quad nA_n = AA_{n-1}.$$

Por hipótese, estamos considerando $\Phi(t_0) = I$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $t_0 = 0$, sabendo que uma mudança de variável pode transformar qualquer t_0 em 0. Então, temos que

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= I \Rightarrow \\ A_0 + A_1 0 + \dots + A_n 0^n + \dots &= I \Rightarrow \\ A_0 &= I.\end{aligned}$$

Então,

$$A_0 = I; \quad A_1 = A; \quad A_2 = \frac{A^2}{2}; \quad \dots; \quad A_n = \frac{A^n}{n!}; \quad \dots$$

Descobrimos, então, os valores de A_i e, portanto, a matriz fundamental que tem como propriedade $\Phi(0) = I$ é dada por

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!},$$

que pela definição de exponencial, equivale a e^{At} , a exponencial de matriz introduzida no início da seção.

No caso em que $A = a \in \mathbb{R}$, sabemos que o somatório converge para e^{at} . Para garantir a convergência do somatório matricial para todo n , vamos considerar, inicialmente, $n = 2$. Sendo uma matriz de coeficientes constantes, consideremos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} \\ a_{n3} & a_{n4} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Além disso, definimos

$$M_k = \max\{|a_{k1}|, |a_{k2}|, |a_{k3}|, |a_{k4}|\},$$

para $k = 1, 2, \dots, n, \dots$.

Dessa forma, certamente $M_2 \leq 2(M_1)^2$, pois, por exemplo,

$$a_{21} = (a_{11})^2 + a_{12}a_{13} \leq (M_1)^2 + (M_1)^2 = 2(M_1)^2,$$

relação válida para todo a_{2i} , $i = 1, 2, 3, 4$.

Analogamente, temos

$$M_3 \leq 2M_2M_1 \leq 2^2(M_1)^3;$$

$$M_4 \leq 2M_3M_1 \leq 2^3(M_1)^4;$$

...

$$M_n \leq 2^{n-1}(M_1)^n;$$

...

Dessa maneira,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_{n1})^n t^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}(M_1)^n |t|^n}{n!}.$$

Pelo teste da razão,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n(M_1)^{n+1} |t|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n-1}(M_1)^n |t|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M_1 |t|}{n} = 0,$$

implicando que a série converge. Analogamente, fazemos a mesma análise para a_{n2} , a_{n3} , a_{n4} e verificamos que é convergente em toda componente e, portanto, e^{At} é convergente.

O mesmo processo pode ser feito para matrizes de ordem superior, com uma pequena mudança na construção da relação entre os M_i .

2.2.3.2 Propriedades da Exponencial de Matriz

Tendo garantido a convergência da exponencial de matriz e, portanto, sua definição formal, vamos considerar algumas propriedades importantes para o desenvolvimento dos estudos.

– Derivada

Dada uma função matricial $\Phi(t) = e^{At}$, sendo A uma matriz de coeficientes constantes, então temos a continuidade de $\Phi(t)$ garantida e podemos considerar sua derivada. Queremos entender o significado da operação:

$$\frac{d(\Phi(t))}{dt} = \frac{d(e^{At})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right).$$

Como a convergência da série foi garantida anteriormente, podemos derivar termo a termo:

$$\frac{d(\Phi(t))}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{A^n t^n}{n!} \right) = \frac{dI}{dt} + \frac{d(At)}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{At}{2!} \right) + \cdots + \frac{d}{dt} \left(\frac{A^n t}{n!} \right) + \cdots,$$

obtendo:

$$\begin{aligned}\frac{d(\Phi(t))}{dt} &= A + \frac{2A^2t}{2} + \frac{3A^3t^2}{3!} + \cdots + \frac{nA^n t^{n-1}}{n!} + \frac{(n+1)A^{n+1}t^n}{(n+1)!} + \cdots \\ &= A \left(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots \right) \\ &= Ae^{At} = A\Phi(t).\end{aligned}$$

Isto é, $(e^{At})' = Ae^{At}$. Por recorrência, $(e^{At})^{(n)} = A^n e^{At}$.

– Unicidade

Como a exponencial de matriz é o limite de uma série de potências convergente, sua unicidade é garantida, pois a exponencial de uma matriz é uma a matriz fundamental de um sistema homogêneo de equações diferenciais tal que $\Phi(t_0) = I = \Phi^{-1}(t_0)$. Além disso, sua unicidade é garantida pelo Teorema 2.4.

– Transformação de Matriz

Considere A , B , P matrizes $n \times n$ tais que $A = PBP^{-1}$. Então,

$$A^2 = AA = PBP^{-1}PBP^{-1} = PBIBP = PB^2P.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, $A^n = PB^nP$ e, conseqüentemente,

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{PB^n P t^n}{n!} = P \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n t^n}{n!} \right) P^{-1} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

– Distributiva

Dadas A , B matrizes tais que $AB = BA$, então a função $\Phi(t) = e^{At}e^{Bt}$ é solução do sistema $x' = (A + B)x$. De fato, temos:

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} \\ &= (A + B)e^{At}e^{Bt} \\ &= (A + B)\Phi(t).\end{aligned}$$

Por outro lado, a solução do sistema é $\Phi(t) = e^{(A+B)t}$. Dada a unicidade de soluções, temos $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$, implicando na propriedade distributiva das exponenciais de matriz. De forma análoga, mostramos que $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$.

– Inverso

Dada uma exponencial de matriz e^{At} , seu inverso é dado naturalmente por $(e^{At})^{-1}$, de forma que $e^{At}(e^{At})^{-1} = I$. Considerando $e^{A(-t)}$, note que

$$e^{At}e^{A(-t)} = e^{A(t-t)} = e^{A0} = e^0 = I.$$

Então, $(e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$.

2.2.3.3 Matrizes Diagonalizáveis e Formas de Jordan

Uma das dificuldades em se resolver sistemas de equações é que, em geral, as equações envolvem mais de uma incógnita, de modo que a resolução das equações deve ser feita simultaneamente. Sendo assim, caso seja possível transformar esse sistema de tal forma que ele seja *desacoplado*, isso é, que suas equações dependam apenas de uma variável, a resolução fica relativamente mais simples. Isso corresponde em transformar a matriz de coeficientes A em uma matriz diagonalizável.

Para isso, consideramos os autovalores e autovetores da matriz A . A princípio, suponhamos que A tenha um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes, denotados por $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$ e seus respectivos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Chamando de T a matriz cujas colunas são os autovetores referidos, já sabemos que T é invertível, pois os autovetores são linearmente independentes.

Calculando AT , temos que cada coluna i da matriz será um vetor $A\xi^{(i)}$. Sabendo que $A\xi^{(i)} = \lambda_i\xi^{(i)}$, então $AT = TD$, sendo D a matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Disso, segue que quando a matriz A tem n autovetores linearmente independentes entre si, é possível transformá-la numa matriz diagonal por meio da equação $T^{-1}AT = D$. Nesse caso, dizemos que a matriz A é **semelhante** à matriz D e, portanto, A é **diagonalizável**.

Quando existem menos que n autovetores linearmente independentes devido à matriz A ter autovalores repetidos, então a matriz não é diagonalizável, mas sempre é possível transformá-la em uma matriz quase diagonal denominada **Formas de Jordan**, cuja diagonal são os autovalores da matriz estudada e em algumas determinadas posições acima de um elemento da diagonal principal há o número 1, enquanto que nas demais posições coloca-se 0. Seguindo o mesmo raciocínio, $T^{-1}AT = J$, onde J é a forma de Jordan da matriz A .

Uma das facilidades que a transformação da matriz A para uma matriz diagonal ou para uma matriz quase diagonal é para o cálculo da sua exponencial. Considerando, a princípio, que a matriz seja de ordem dois, o cálculo da matriz e^{At} pode trazer grandes complicações para se

obter uma recorrência de A^n enquanto que, considerando sua forma canônica, os cálculos de e^{Jt} podem ser simplificados.

Para o caso em que a forma de Jordan da matriz é uma matriz diagonal com entradas reais, temos que

$$e^{Jt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n t^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Quando a forma de Jordan é uma matriz quase diagonal com entradas reais, temos

$$e^{Jt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n t^n}{n!}.$$

Note que

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= e^{\lambda t} \exp \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quando a matriz tem como autovalores um par de números complexos conjugados, então

$$e^{Jt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n t^n}{n!}.$$

Escrevendo a matriz como uma soma e calculando algumas potências, observamos:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & b^3 \\ -b^3 & 0 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}; & \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} 0 & -b^5 \\ b^5 & 0 \end{pmatrix}; & \dots \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \exp \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} t \right) &= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}; \\ \exp \left(\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} t \right) &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n} t^{2n}}{(2n)!} & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n} t^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

onde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n} t^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

são as Séries de Taylor convergentes para $\cos t$ e $\sin t$, respectivamente.

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= \exp \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} t \right) \exp \left(\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} t \right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & -e^{at} \sin bt \\ e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que quando a parte real dos autovalores for zero, a exponencial e^{at} é igual a 1 e sobra na exponencial da matriz na forma de Jordan apenas as funções seno e cosseno.

Então a solução $x = e^{At} x_0$ do sistema ((2.7)) pode ser reescrita considerando a forma de Jordan da matriz $J = T^{-1}AT$ ou $A = TJT^{-1}$. Portanto,

$$e^{At} = e^{TJT^{-1}t},$$

e pelas propriedades de exponencial de matriz,

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}.$$

Então a solução pode ser reescrita como $x = Te^{Jt}T^{-1}x_0$, sendo e^{Jt} descrita conforme as possibilidades citadas anteriormente.

Analogamente, o processo pode ser feito para matrizes de sistemas de ordem superior.

Como as formas de Jordan de ordem superior são formadas por blocos das matrizes na forma de Jordan de ordem dois, então as soluções de quaisquer sistemas homogêneos de coeficientes constantes serão combinações das funções $e^{\lambda t}$, t , $\sin t$, $\cos t$.

Conhecidas as formas que as soluções de um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes podem assumir, é possível analisar como essas soluções se comportam localmente em uma **singularidade** nos respectivos **planos de fases**, principal objetivo deste trabalho. A seguir, discutiremos conceitos relacionados à sistemas autônomos e estabilidade, objetos essenciais para o desenvolvimento dos **retratos de fase**.

2.3 SISTEMAS AUTÔNOMOS E ESTABILIDADE

Uma equação diferencial é dita autônoma quando ela é da forma $dx/dt = f(x)$, isto é, ela não depende de t . Nesse sentido, um sistema autônomo é um sistema onde todas as equações são autônomas. Por exemplo, um sistema autônomo de segundo grau seria do tipo

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y).$$

Um sistema $x' = Ax$ sendo A uma matriz de coeficientes constantes, é um tipo de sistema autônomo, tendo em vista que não há influência da variável independente t . É importante a diferenciação de sistemas autônomos e não autônomos, pois o plano de fase xy , para sistemas de grau 2, por exemplo, quando não tem influência de t , existe apenas uma trajetória passando por um ponto qualquer, conforme será estudado no Capítulo 3. Quando nos referimos a sistemas não autônomos, a localização das trajetórias também dependem de t , então quando colocado em um plano de fase, pode causar a impressão de que elas se cruzam. Portanto, apenas um retrato de fase possui informações sobre todas as soluções apenas quando o sistema é autônomo.

A seguir, iremos definir o conceito de estabilidade de pontos críticos para sistemas autônomos da forma $x' = f(x)$. Considere então, um ponto crítico x^0 do sistema.

Definição 2.1 (Estável). O ponto crítico x^0 do sistema $x' = f(x)$ é dito estável, se para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda solução do sistema $x = \gamma(t)$ onde $\|\gamma(0) - x^0\| < \delta$, então $\|\gamma(t) - x^0\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

Note que essas proposições dizem que toda solução que começa suficientemente perto (um distancia menor que δ) do ponto crítico permanecem próximas (a uma distância menor que ϵ) do mesmo ponto. Além, disso, um ponto ser estável não diz nada a respeito do comportamento das trajetórias quando $t \rightarrow \infty$.

Um ponto crítico que não é estável é dito instável.

Definição 2.2 (Assintoticamente estável). O ponto crítico x^0 do sistema $x' = f(x)$ é dito assintoticamente estável, se é estável e existe um δ_0 com $0 < \delta_0 < \delta$ tal que toda solução do sistema $x = \gamma(t)$ onde $\|\gamma(0) - x^0\| < \delta_0$, satisfaz $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = x^0$.

Na estabilidade assintótica, além das soluções permanecerem próxima a partir de um determinado ponto, ainda devem tender ao próprio ponto crítico quando $t \rightarrow \infty$. É importante ressaltar que um ponto para ser assintoticamente estável, deve ser primeiro, estável. Podemos construir trajetórias que começam suficientemente próximas de δ e se afastam a uma distância arbitrariamente grande do ponto crítico para depois voltar e tender a ele quando $t \rightarrow \infty$. Este exemplo não é assintoticamente estável e nem apenas estável. Alguns autores o chamam de quase-estáveis, mas por enquanto, não é de nosso interesse estudar esse tipo de estabilidade.

Quando estudamos um sistema autônomo de dimensão dois com pelo menos um ponto crítico, é interessante determinarmos todas as trajetórias que se aproximam do ponto crítico no plano de fase xy . Dado um ponto $p \in xy$ onde a trajetória que passa por ele tende ao ponto crítico quando $t \rightarrow \infty$, dizemos que a trajetória é atraída pelo ponto. O conjunto P de todos os pontos p onde tem sua trajetória atraída pelo ponto crítico é chamado de **bacia de atração** do ponto crítico, e as trajetória que limitam essa bacia são chamadas de **separatrizes**.

2.4 RETRATOS DE FASE

O retrato de fase de um sistema de equações é uma representação geométrica das trajetórias do sistema no plano de fase. Chamamos de **plano de fase** o espaço determinado pelas soluções do sistema e, quando adicionado o conjunto das trajetórias nesse espaço, temos o **retrato de fase** do campo. A análise destes objetos são mais úteis quando os sistemas são autônomos, uma vez que não depende diretamente da variável do tempo, t , assim, existe apenas uma trajetória passando por cada ponto no plano de fase. Por exemplo, considerando um sistema de dimensão igual a dois, dado por

$$\begin{aligned}x_1' &= H(x_1, x_2) \\x_2' &= G(x_1, x_2),\end{aligned}$$

com H e G de classe C^1 , eu retrato de fase se dará no plano x_1x_2 e as soluções $(x_1(t), x_2(t))$ são curvas parametrizadas no plano. Olhando para o gráfico das soluções em $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, t)\}$, pela hipótese de continuidade, é garantido pelo Teorema 2.4 que para cada condição inicial, temos uma única solução $(x_1(t), x_2(t))$ do sistema e, sendo ele autônomo, para cada t_1 fixado, $(x_1(t + t_1), x_2(t + t_1))$ também é uma solução do sistema, uma vez que:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= H(x_1(t), x_2(t)) = H(x_1(t + t_1), x_2(t + t_1)) = x_1'(t + t_1) \\x_2'(t) &= G(x_1(t), x_2(t)) = G(x_1(t + t_1), x_2(t + t_1)) = x_2'(t + t_1).\end{aligned}$$

Com isso, mostramos que transladar uma solução de um sistema autônomo paralelamente ao eixo t nos fornece uma solução dele e, ainda, nos conduz à mesma trajetória no plano de fases, por isso, podemos considerar todas condições iniciais com $t_0 = 0$.

Além disso, quando o sistema é autônomo, duas trajetórias diferentes não se intersectam no plano de fases. Para provar tal afirmação, consideremos duas soluções $(x_1(t), x_2(t))$ e

$(y_1(t), y_2(t))$ e vamos supor, por absurdo, que em algum instante $t = \bar{t}$ elas se encontrem, isto é

$$(x_1(\bar{t}), x_2(\bar{t})) = (y_1(\bar{t}), y_2(\bar{t})),$$

porém, como vimos anteriormente, para qualquer \bar{t} fixado, $(x_1(\bar{t}), x_2(\bar{t})) = (x_1(t), x_2(t))$, o que nos leva à conclusão que as soluções são idênticas, contradizendo a hipótese inicial. Portanto, elas não podem se cruzar.

A principal ideia do estudo dos retratos de fase é entender o comportamento do sistema a partir da configuração das trajetórias no plano, identificando a existência de atratores, repulsores e ciclos limites. Conceitos de conjugação permitem identificar quando dois sistemas têm o mesmo comportamento sob uma certa visão, por exemplo, topológica e, a partir disso, entender o comportamento qualitativo de outros sistemas mais complexos sem calcular explicitamente suas soluções. Nos Apêndices [A](#) e [B](#), encontra-se algumas informações sobre conjugações topológicas.

3 RETRATO DE FASE DE SISTEMAS DE LINEARES DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM

Agora que os conceitos preliminares foram abordados, podemos seguir para a análise dos retratos de fase de sistemas lineares de coeficientes constantes de primeira e segunda ordem. Para cada caso serão estudadas todas as possibilidades dos retratos de fases geometricamente diferentes entre si, conforme as soluções estudadas na Seção 2.2.1. Para facilitar o estudo e análise dos retratos, consideraremos os autovalores λ_i genéricos e os seus autovetores como os eixos do plano de fases. Desta forma, teremos os retratos de fase a menos de uma rotação e/ou translação.

3.1 SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

Um sistema linear de primeira ordem, possui, dentro das condições do Teorema 2.1, apenas uma solução para cada condição inicial, por isso, seu retrato de fase se dá no plano de fase x .

De acordo com a Seção 2.2.1, a solução de um sistema de primeira ordem $x'(t) = \lambda x$ se dá como

$$x(t) = ce^{\lambda t},$$

sendo c a constante provinda da integração. Como temos apenas um autovalor, este só pode ser real, podendo ser positivo, negativo ou igual a zero, o que descreve as seguintes possibilidades de retrato de fase.

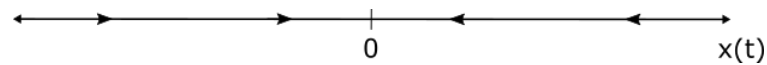
3.1.1 Autovalor negativo

Neste caso, temos $\lambda < 0$. Desta forma, quando $t \rightarrow \infty$ temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} ce^{\lambda t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c}{e^{-\lambda t}} = \frac{c}{\infty} = 0.$$

Analogamente, quando $t \rightarrow -\infty$ temos ou $x(t) \rightarrow \infty$ ou $x(t) \rightarrow -\infty$, conforme a constante multiplicativa seja positiva ou negativa, respectivamente. Isto significa que, dado um ponto no plano de fase, com o passar do tempo positivo, a solução tende à origem. Por isso, há setas apontando para ela e, com o passar do tempo negativamente, as soluções vão para o infinito positiva ou negativamente, o que significa que, de certa forma, elas estão “saindo” de lá. Segue ilustração do plano de fase na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Sistema linear de primeira ordem, autovalor negativo

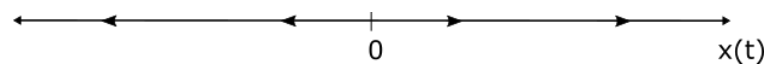


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1.2 Autovalor positivo

Para este caso, temos $\lambda > 0$. Pela mesma análise feita anteriormente, para $t \rightarrow \infty$ temos $x(t) \rightarrow \infty$ quando $c > 0$ e $x(t) \rightarrow -\infty$ quando $c < 0$, enquanto que, para $t \rightarrow -\infty$ temos $x(t) \rightarrow 0$. Portanto, temos o plano de fase equivalente à Figura 3.2.

Figura 3.2 – Sistema linear de primeira ordem, autovalor positivo

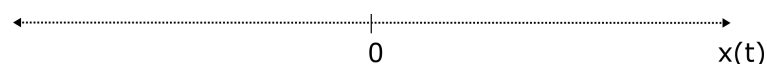


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1.3 Autovalor igual a zero

Por fim, temos $\lambda = 0$, o que significa que $x(t) = c$, isto é, todas as soluções são constantes. Então, independente do passar do tempo t para zero, infinito positiva ou negativamente, a solução se mantém na condição inicial e, portanto, o retrato de fase é equivalente à reta, onde cada ponto representa uma solução, conforme na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Sistema linear de primeira ordem, autovalor igual a zero



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos concluir os casos de primeira ordem na Tabela 3.1.

3.2 SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

O retrato de fase de um sistema linear de segunda ordem se dá no plano de fase $x_1 x_2$. Conforme estudado na Seção 2.2.1, cada sistema tem dois autovalores, que chamaremos de λ_1

Tabela 3.1 – Retrato de fase de sistemas lineares com autovalores constantes de primeira ordem

Caso	Autovalor	Estabilidade	Retrato de Fase
1.1	$\lambda < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 3.1
1.2	$\lambda > 0$	Instável	Figura 3.2
1.3	$\lambda = 0$	Estável	Figura 3.3

Fonte: Elaborado pelo Autor.

e λ_2 , que determinam a solução conforme forem reais, distintos, complexos ou repetidos, além de positivos, negativos ou nulos. Assim, temos as seguintes possibilidades de retratos de fase.

3.2.1 Dois autovalores reais negativos

A solução geral deste caso, pela Seção 2.2.1, é da forma

$$x(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t},$$

onde supomos $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Quando $t \rightarrow \infty$, independente dos valores de c_1 e c_2 , $x \rightarrow 0$, em outras palavras, as soluções tendem ao ponto crítico da origem.

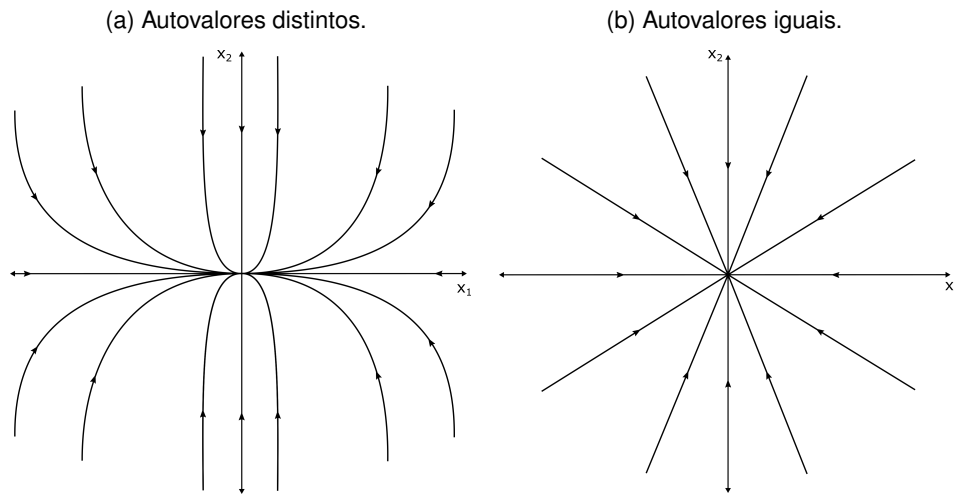
Para entender melhor esse comportamento, reescrevemos a solução como

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}],$$

onde $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, então, o segundo termo dentro dos colchetes é desprezível comparado ao primeiro para valores suficientemente grandes de t , o que significa que, quando $t \rightarrow -\infty$, as trajetórias são influenciadas por λ_2 , explodindo ao infinito quase paralelas ao eixo x_2 e quando $t \rightarrow \infty$ a expressão com maior influência na solução é a relativa ao autovetor λ_1 , fazendo com que as soluções tendam à origem quase paralelas ao eixo x_1 exceto as que começam no próprio eixo x_2 . Portanto, temos o retrato de fase como mostrado na Figura 3.4a e a singularidade recebe o nome de **nó estável**.

Caso $\lambda_1 = \lambda_2$ e seja possível determinar dois autovetores diferentes, então nenhum deles atrairá as soluções como no caso anterior, portanto, elas tendem à origem igualmente, isto é, em retas, portanto o retrato de fase fica como na Figura 3.4b e a singularidade recebe o nome de **foco estável** ou **poço**.

Figura 3.4 – Retrato de fase - sistema linear de segunda ordem com dois autovalores negativos.



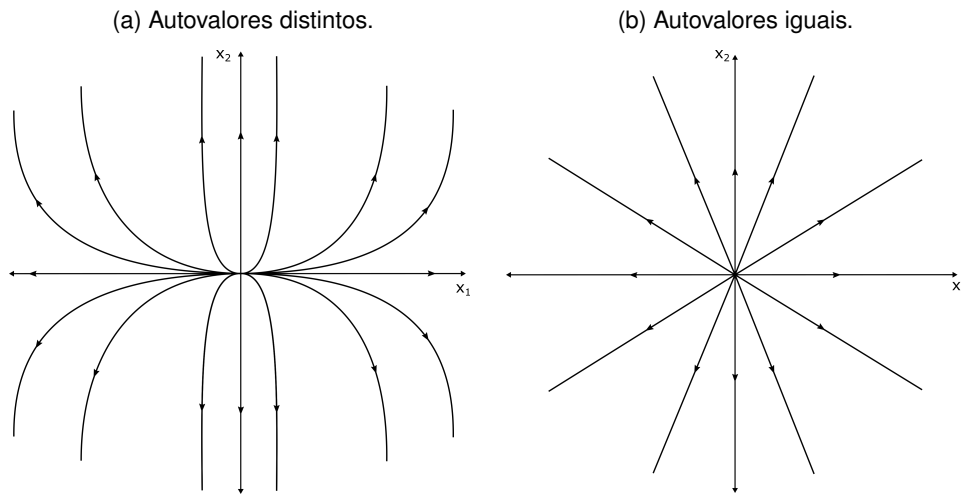
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.2 Dois autovalores reais positivos

O comportamento para este caso é análogo ao caso de dois autovalores reais negativos, mudando apenas que, agora, as soluções tendem ao infinito quando o tempo tende ao infinito, paralelas ao maior autovalor, já que ambos são positivos, e para a origem quando o tempo tende ao infinito negativamente, paralelas ao menor autovalor. O retrato de fase para este caso é igual ao da Figura 3.4a, trocando apenas a direção das setas, que neste caso apontam para fora da origem, considerando $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, conforme na Figura 3.5a.

Para autovalores iguais que possibilitem encontrar autovetores independentes, tal como na Figura 3.4b, as soluções não tendem a nenhum dos autovetores, neste caso, se afastando da origem em retas. Novamente, o retrato de fase é igual, com exceção das setas que apontam para fora da origem, conforme na Figura 3.5b. Recebe o nome de **foco instável** ou **fonte**.

Figura 3.5 – Retrato de fase - sistema linear de segunda ordem com dois autovalores positivos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.3 Autovalores reais com sinais opostos

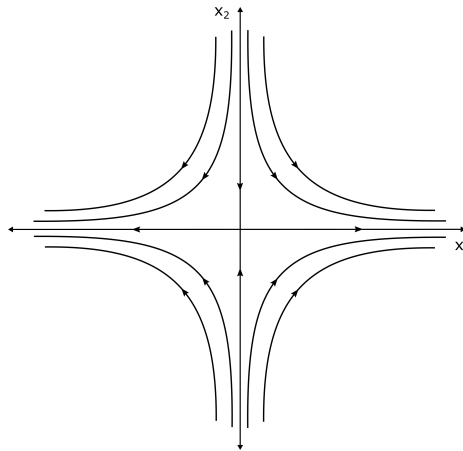
Neste caso, não há diferença se os autovalores são iguais ou não em módulo e a solução geral ainda tem a forma

$$x(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t},$$

onde λ_1 e λ_2 são de sinais opostos. Vamos supor, sem perda de generalidade, que λ_1 é positivo e λ_2 negativo. Quando uma solução está na reta formada pelo autovetor $\xi^{(1)}$ (neste caso, o eixo x_1), temos que $c_2 = 0$, portanto a solução permanece nessa reta, e $\|x\| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Analogamente para a solução que pertence à reta formada por $\xi^{(2)}$ (eixo x_2), onde $\|x\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

As soluções que começam em outros pontos são influenciadas pela exponencial positiva, que é a parcela dominante da equação para t suficientemente grande, de modo que, quando $t \rightarrow \infty$, as soluções tendem, assintoticamente, para a reta determinada por $\xi^{(1)}$. Quando olhamos $t \rightarrow -\infty$, as soluções tendem assintoticamente para $\xi^{(2)}$, devido ao autovalor ser negativo, como podemos ver na Figura 3.6. A singularidade recebe o nome de **sela**.

Figura 3.6 – Retrato de fase - sistema linear segunda ordem, autovalores com sinais opostos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.4 Autovalores repetidos

O caso em que o autovalor repetido fornece dois autovetores linearmente independentes já foi citado, que é quando a singularidade é um foco (seja estável ou instável). Para o caso em que apenas um autovetor é encontrado, a solução é da forma

$$x(t) = c_1 \xi e^{\lambda t} + c_2 (\xi t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t}).$$

Para t suficientemente grande, o termo dominante é $c_2 \xi t e^{\lambda t}$, portanto, para λ positivo, todas as soluções se afastam da origem quando $t \rightarrow \infty$, enquanto que para λ negativo, elas se aproximam, até mesmo quando $c_2 = 0$, mas nesse caso, elas se mantêm na reta determinada por ξ , no caso, o eixo x_1 . Olhando $t \rightarrow -\infty$, quando $\lambda > 0$, as soluções se aproximam da origem, e quando $\lambda < 0$, as soluções são assintóticas a uma reta paralela a ξ .

Para entender e esboçar as soluções, é conveniente reescrever a solução como

$$x(t) = (c_1 \xi + c_2 \eta + c_2 \xi t) e^{\lambda t} = y e^{\lambda t},$$

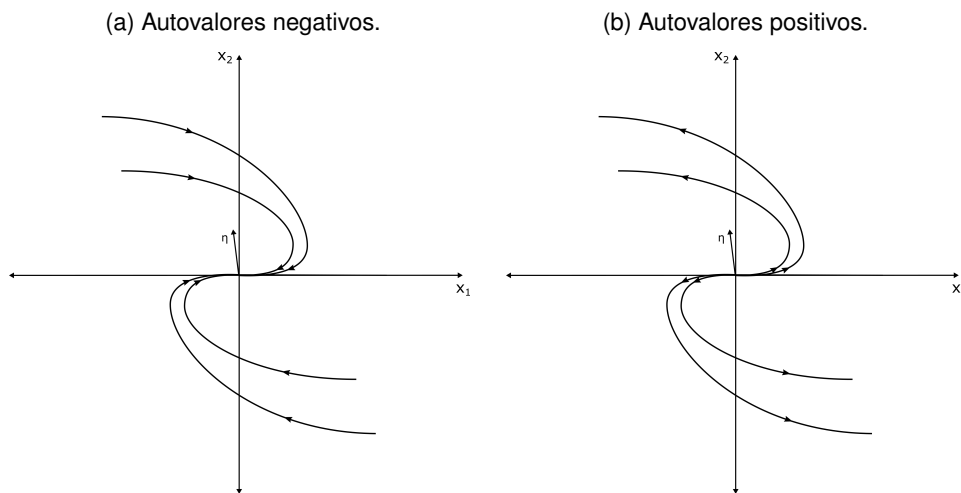
onde $y = c_1 \xi + c_2 \eta + c_2 \xi t$ determina a direção de x , no caso, para $\pm\infty$, conforme combinação de c_2 e t , enquanto o exponencial determina apenas o tamanho, uma vez que é uma escalar que multiplica a equação da reta e determina o qual rápido a solução aumenta ou diminui nas possíveis direções determinadas pela reta. Note que, para c_1 e c_2 fixos, y é uma equação vetorial da reta que contem o ponto $c_1 \xi + c_2 \eta$ e é paralela a ξ , no caso, o eixo x_1 .

Sendo assim, o sentido da reta determinada por y depende de c_2 , isto é, para cada solução, c_2 assume um valor constante diferente, que determina a reta e, conseqüentemente, o comportamento da solução. Quando $c_2 > 0$, a reta cresce no sentido positivo quando $t \rightarrow \infty$.

Analogamente, se $c_2 < 0$, então a reta cresce no sentido negativo e as soluções seguem da mesma maneira. Quanto ao tamanho da solução, é dependente de λ , que se for negativo, então vai diminuir exponencialmente, tendendo a zero, quando $t \rightarrow \infty$, e aumentar da mesma maneira quando $t \rightarrow -\infty$. Se λ for positivo, então a solução se comporta de maneira inversa à descrita anteriormente.

Um esboço de solução está apresentado na Figura 3.7a, para os autovalores negativos e a singularidade recebe o nome de **nó impróprio estável**, enquanto que na Figura 3.7b está retratado o caso positivo, que altera apenas a direção das setas, que apontam para fora da origem e recebe o nome de **nó impróprio instável**.

Figura 3.7 – Retrato de fase - sistema linear de segunda ordem com dois autovalores repetidos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.5 Autovalores complexos com parte real não nula

É possível escrever a solução geral em termo dos autovalores e autovetores, mas é conveniente trabalhar com as equações escalares. Supondo os autovalores como $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, com $\alpha \neq 0$, então suas equações são tipicamente da forma

$$x_1' = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad x_2' = -\beta x_1 + \alpha x_2.$$

Introduzindo coordenadas polares r e θ da forma $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ e $\tan \theta = x_1/x_2$ e integrando, temos

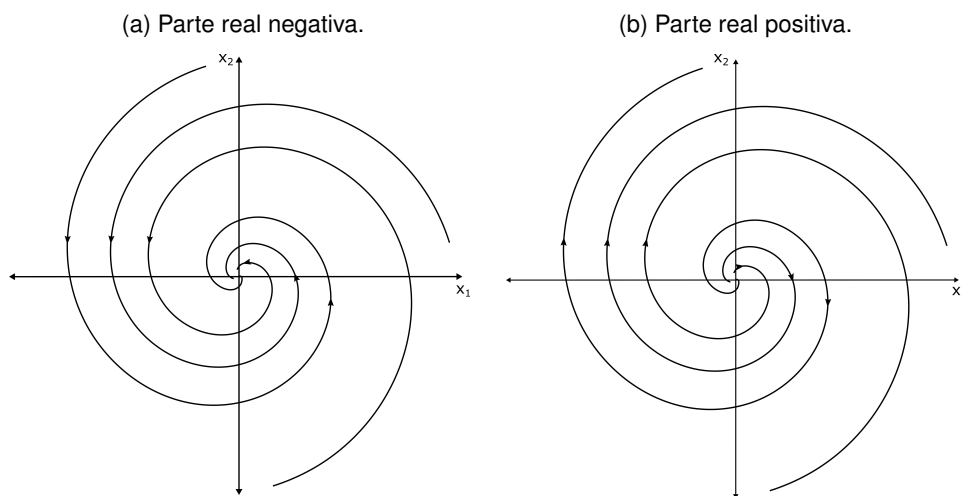
$$rr' = x_1 x_1' + x_2 x_2', \quad (\sec^2 \theta) \theta' = \frac{x_1 x_2' + x_1' x_2}{x_1^2}.$$

Substituindo as escalares na primeira equação, chegamos em $r' = \alpha r$ e, portanto, $r = ce^{\alpha t}$,

sendo c uma constante provinda da integração. Sabendo que $\sec^2\theta = r^2/x_1^2$, substituímos as equações escalares e chegamos em $\theta' = -\beta$ e, portanto, $\theta = \beta t + \theta_0$, sendo $\theta_0 = \theta(0)$.

Assim, com as equações paramétricas em coordenadas polares, é possível estudar as soluções do sistema. Como β é maior que zero, então θ diminui quando t aumenta, o que implica que o movimento das soluções será em sentido horário, caso contrario, seria em sentido trigonométrico. Quando $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ se $\alpha > 0$ e $r \rightarrow 0$ se $\alpha < 0$, portanto as trajetórias são espirais que tendem ou se afastam da origem, como podemos ver, respectivamente nos exemplos das Figura 3.8a e 3.8b. A singularidade recebe o nome de **espiral**.

Figura 3.8 – Retrato de fase - sistema linear de segunda ordem com autovalores imaginários.

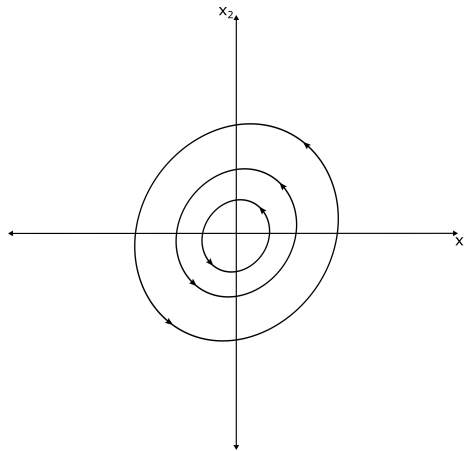


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.6 Autovalores imaginários puros

Neste caso, $\alpha = 0$, e seguindo as mesmas contas do caso anterior, chegamos em $r' = 0$ e $\theta' = -\beta$, e portanto $r = c$ e $\theta = -\beta t + \theta_0$. Portanto, as trajetórias são círculos centrados no ponto crítico que são percorridos no sentido horário ou trigonométrico de acordo com o sinal de β , de modo que as soluções são periódicas com período $2\pi/\beta$, como no exemplo mostrado na Figura 3.9 e a singularidade recebe o nome de **centro**.

Figura 3.9 – Retrato de fase - sistema linear segunda ordem, autovalores imaginários puros.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.7 Autovalores nulos

Sendo dois autovalores, temos as opções de serem ambos nulos ou apenas um nulo e, conseqüentemente, o outro distinto de zero. Note que, analisando a solução geral, quando um autovalor λ é igual a zero, temos $e^{\lambda t} = 1$ e, portanto, teríamos duas possíveis soluções gerais:

$$x(t) = c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)},$$

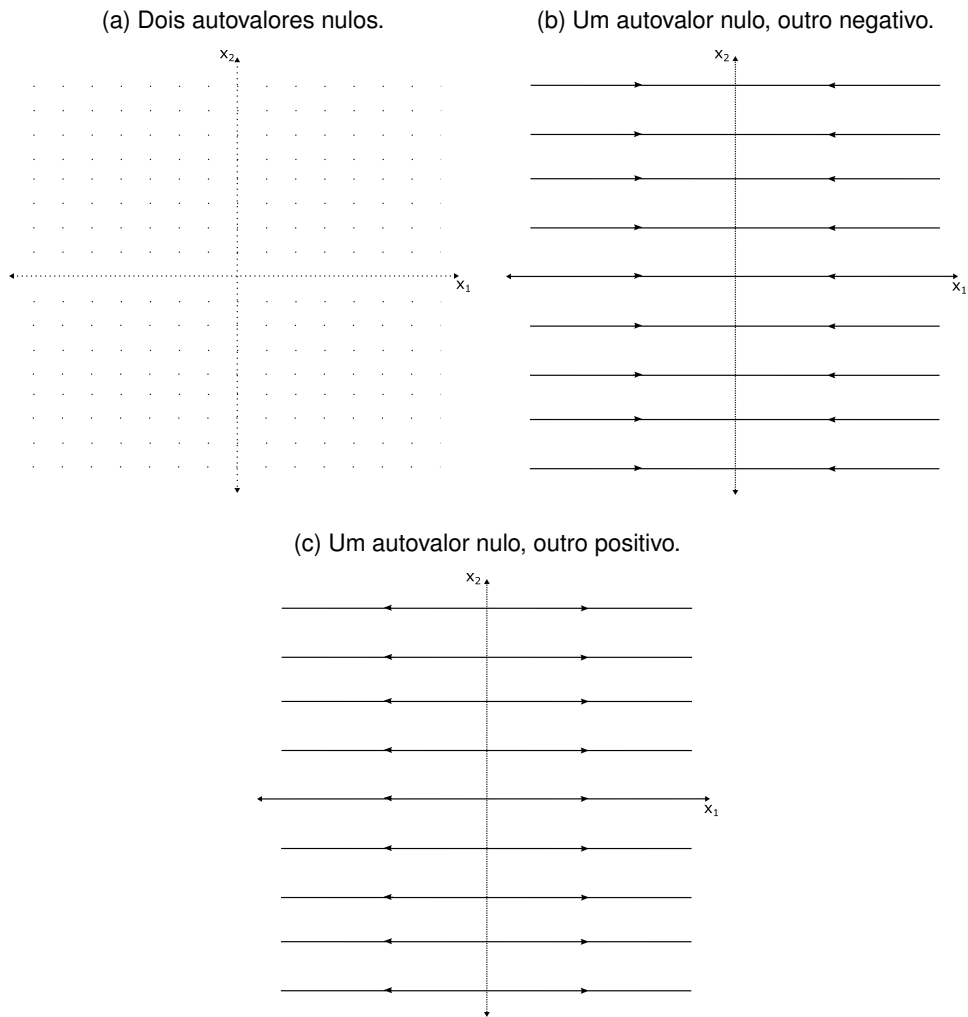
para ambos autovalores nulos ou

$$x(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda t} + c_2 \xi^{(2)},$$

para apenas um autovalor nulo, sem perda de generalidade.

No primeiro caso, temos que as soluções são constantes, portanto cada ponto do retrato de fase representa uma solução, que não se altera com o passar do tempo t , conforme ilustrado na Figura 3.10a. Enquanto isso, no segundo caso, as soluções dependem apenas da primeira parcela, isto é, de $c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda t}$, o que significa que, conforme o sinal de λ é positivo ou negativo, as soluções tendem para $c_2 \xi^{(2)}$ quando $t \rightarrow -\infty$ e para o infinito quando $t \rightarrow \infty$ ou vão para o infinito quando $t \rightarrow -\infty$ e para $c_2 \xi^{(2)}$ quando $t \rightarrow \infty$, respectivamente. Além disso, os pontos no eixo x_1 são soluções constantes, conforme ilustrado na Figura 3.10b e na Figura 3.10c.

Figura 3.10 – Retrato de fase - sistema linear de segunda ordem com autovalores nulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resumimos e enumeramos os casos de retratos de fase para sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constante de segunda ordem na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Retrato de fase de sistemas lineares com autovalores constantes de segunda ordem

Caso	Autovalor	Estabilidade	Retrato de Fase
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$			
2.1	$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 3.4a
2.2	$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 3.4b
2.3	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Instável	Figura 3.5a
2.4	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Instável	Figura 3.5b
2.5	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$	Instável	Figura 3.6
2.6	$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 3.7a
2.7	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Instável	Figura 3.7b
2.8	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	Estável	Figura 3.10a
2.9	$\lambda_1 < 0 = \lambda_2$	Assintoticamente Estável	Figura 3.10b
2.10	$\lambda_1 > 0 = \lambda_2$	Instável	Figura 3.10c
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$			
2.11	$\alpha < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 3.10b
2.12	$\alpha > 0$	Instável	Figura 3.10b
2.13	$\alpha = 0$	Estável	Figura 3.9

Fonte: Elaborado pelo Autor.

4 RETRATO DE FASE DE SISTEMAS DE LINEARES DE TERCEIRA ORDEM

Para o entendimento deste capítulo, além da principal referência (BOYCE; DIPRIMA, 2018), foram utilizadas as obras (FIGUEIREDO; NEVES, 1976) e (DOERING; LOPES, 2016).

Os retratos de fase de sistemas lineares com coeficientes constantes de terceira ordem se dá no espaço constituído pela suas soluções, isto é, no espaço de fase $x_1 x_2 x_3$. Conforme estudado na Seção 2.2.3, as soluções de um sistema linear podem ser dadas por meio da exponencial de matriz. Por exemplo, dado um sistema $x' = Ax$, sendo A uma matriz 3×3 com coeficientes reais, sua solução é $x(t) = e^{At} x_0$, a menos de uma constante provinda da integração. Além disso, também vimos nessa mesma seção que podemos considerar a matriz Jacobiana do sistema, de modo que

$$x(t) = e^{At} x_0 = T e^{Jt} T^{-1} x_0.$$

A menos de uma rotação e/ou translação, consideramos $x(t) = e^{Jt}$. Para os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 , teremos duas possibilidades: ou todos são reais ou temos um par de complexos conjugados e um real, que estão divididos nas duas próximas seções.

4.1 AUTOVALORES REAIS

Consideremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ autovalores do sistema. Assim, sua solução se dá por

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}, \text{ ou } x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \text{ ou } x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix},$$

conforme as possibilidades dos autovalores serem iguais e termos autovetores linearmente dependentes ou não, conforme raciocínio desenvolvido na Seção 2.2.3. A partir disso, estudaremos as possibilidades de sinais dos autovalores, que podem ser: todos negativos, todos positivos, autovalores com sinais distintos ou autovalores nulos. Cada um dos casos estão descritos nas próximas subseções. Neste capítulo, a fim de simplificar as análises e estudos envolvidos, consideraremos as constantes multiplicativas provindas da integração como positivas, e não citaremos isso ao decorrer do texto. Lembre-se que: quando uma solução com uma constante multiplicativa positiva tende ao infinito, se a constante fosse negativa, a solução tenderia a menos infinito e, graças a essas possibilidades que os retratos de fase são preenchidos em todos quadrantes, perante as combinações de sinais das constantes.

4.1.1 Três autovalores com mesmo sinal

O comportamento dos retratos de fase para sistemas lineares com três autovalores de mesmo sinal é geometricamente o mesmo para quando os autovalores são negativos e para quando são positivos, diferenciando pela orientação das soluções, sendo que, quando os autovalores são negativos, tendem à origem quando $t \rightarrow \infty$ e, quando positivos, tendem ao infinito nessa mesma situação, tal como observado no Capítulo 3.

Desenvolveremos o estudo para os casos em que todos autovalores são negativos e, sem perda de generalidade, podemos extrapolar os resultados para o caso em que são positivos. Para ilustrar, mostraremos um exemplo de autovalores positivos no final da seção. Sendo assim, consideremos $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Seguindo o raciocínio do Capítulo 3, temos a solução geral

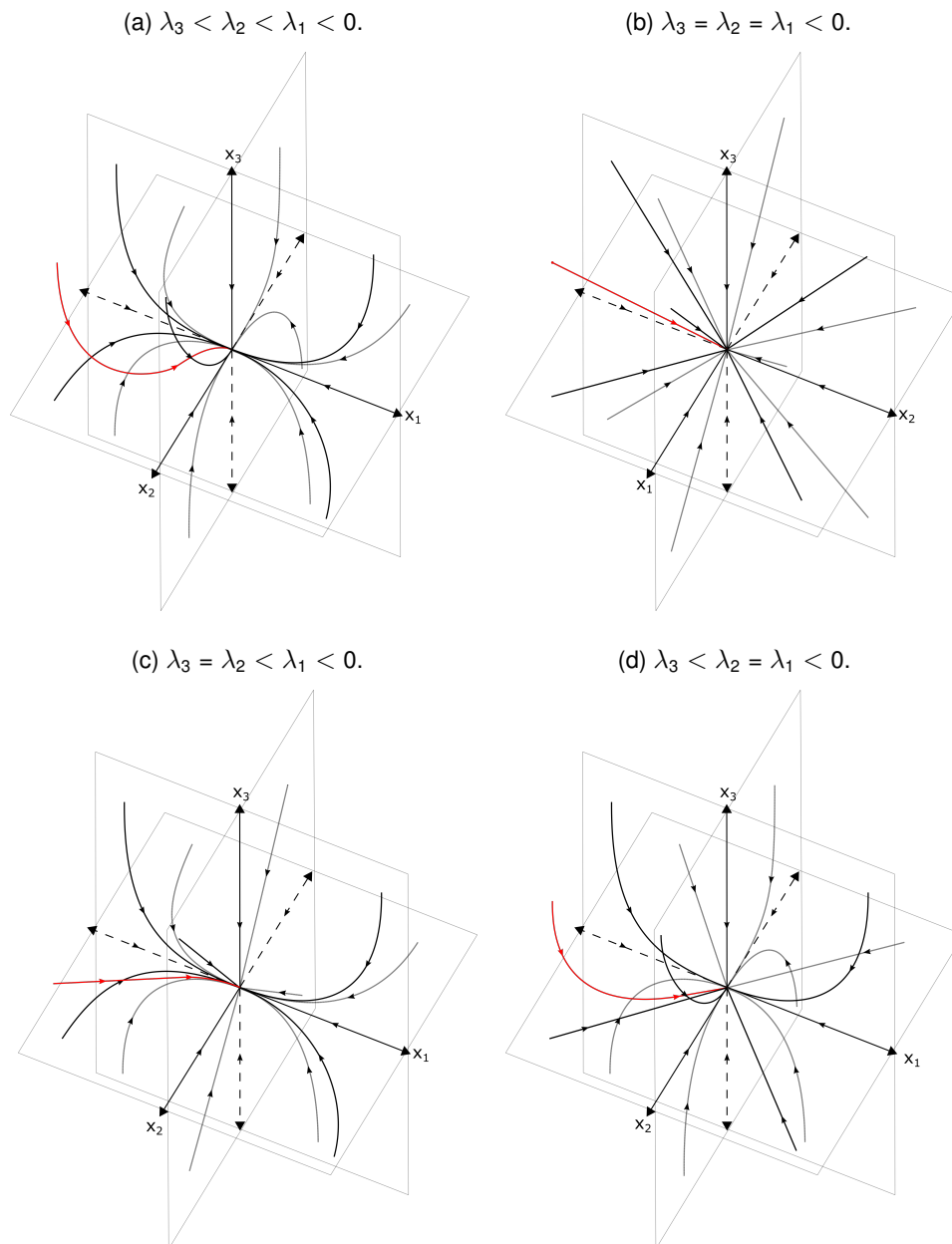
$$x(t) = c_1 \zeta^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \zeta^{(2)} e^{\lambda_2 t} + c_3 \zeta^{(3)} e^{\lambda_3 t}.$$

Olhando para quando uma das constantes c_1 , c_2 ou c_3 é igual a zero, isto é os planos $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ e $x_2 x_3$, as soluções se comportam analogamente ao caso da segunda dimensão retratado na Figura 3.4a. No plano $x_1 x_2$ as soluções se aproximam da origem assintoticamente ao eixo x_1 quando $t \rightarrow \infty$, e tendem ao infinito paralelamente ao eixo x_2 quando $t \rightarrow -\infty$, devido a $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Pelo mesmo raciocínio, as soluções tendem à origem assintoticamente ao eixo x_1 no plano $x_1 x_3$ e assintoticamente a x_2 no plano $x_2 x_3$. Para soluções em quaisquer um dos eixos x_1 , x_2 ou x_3 , temos que $x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, uma vez que todos os autovalores são negativos.

Para as outras soluções (exemplo destacado em vermelho em cada uma das figuras que ilustram os retratos de fase), quando $t \rightarrow -\infty$ a solução tende a infinito paralelamente ao eixo x_3 , que contém autovalor de maior módulo. Conforme $t \rightarrow \infty$, a solução passa a se aproximar da origem e a ser influenciada pelos outros autovalores e, quanto maior t , mais assintoticamente a solução se mantém ao eixo correspondente ao autovalor λ_1 . Desta forma, temos o retrato de fase do sistema de terceira ordem com autovalores negativos ilustrado na Figura 4.1a que é chamado de *nó estável*, o mesmo nome do seu correspondente na segunda dimensão.

Tal como para segunda ordem, quando temos autovalores iguais com autovetores linearmente independentes, as soluções se comportam de maneira parecida, mas em vez de tenderem a um eixo, as soluções se aproximam da origem em retas, uma vez que todos autovalores exercem a mesma influência nas soluções, conforme ilustrado na Figura 4.1b, que retrata um sistema com três autovalores iguais. Quando temos um sistema com dois autovalores iguais e um diferente deles, uma solução geral vai se comportar, ora influenciada pelos dois autovalores de mesmo valor, onde sua trajetória se assemelha a um reta, ora vai se comportar assintoticamente ao eixo correspondente ao autovalor diferente dos demais, conforme registrado nas Figuras 4.1d e 4.1c.

Figura 4.1 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com todos autovalores negativos e autovetores LI.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para quando temos autovalores repetidos e vetores linearmente dependentes, analogamente aos retratos de sistemas planares, temos a solução:

$$x(t) = c_1 \zeta^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \zeta^{(2)} e^{\lambda_2 t} + c_3 (\zeta^{(2)} t e^{\lambda_2 t} + \eta e^{\lambda_2 t}),$$

para $\lambda_3 = \lambda_2 < \lambda_1 < 0$, sem perda de generalidade. Reescrevendo, temos

$$x(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + [c_2 \xi^{(2)} + c_3 \eta + c_3 t \xi^{(2)}] e^{\lambda_2 t} = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + y e^{\lambda_2 t},$$

onde $y = c_2 \xi^{(2)} + c_3 \eta + c_3 t \xi^{(2)}$ é uma reta, tal como no caso planar, que determina a direção da solução junto com a primeira parcela, $c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t}$. Como, neste caso, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, para $t \rightarrow -\infty$, o autovalor com maior força é λ_2 que faz com que as soluções tendam ao infinito paralelamente à reta y , que por sua vez, é paralela à $\xi^{(2)}$, que neste caso é representado pelo eixo x_2 , enquanto para $t \rightarrow \infty$, as soluções se aproximam da origem e, para t suficientemente grande, assintoticamente ao eixo x_1 .

Além disso, soluções no plano $x_1 x_2$ se comportam como um nó impróprio, enquanto o plano $x_1 x_3$, tal como o eixo x_3 , não possui soluções inteiramente contidas nele, uma vez que não obtemos um terceiro vetor que seria representado por x_3 . Isso significa que soluções no espaço cruzam o plano $x_1 x_3$, diferentes dos casos estudados até então. Este caso está representado na Figura 4.2a.

Para quando $\lambda_3 < \lambda_2 = \lambda_1 < 0$, temos

$$x(t) = c_3 \xi^{(3)} e^{\lambda_3 t} + [c_1 \xi^{(1)} + c_2 \eta + c_2 t \xi^{(1)}] e^{\lambda_1 t} = c_3 \xi^{(3)} e^{\lambda_3 t} + y e^{\lambda_1 t},$$

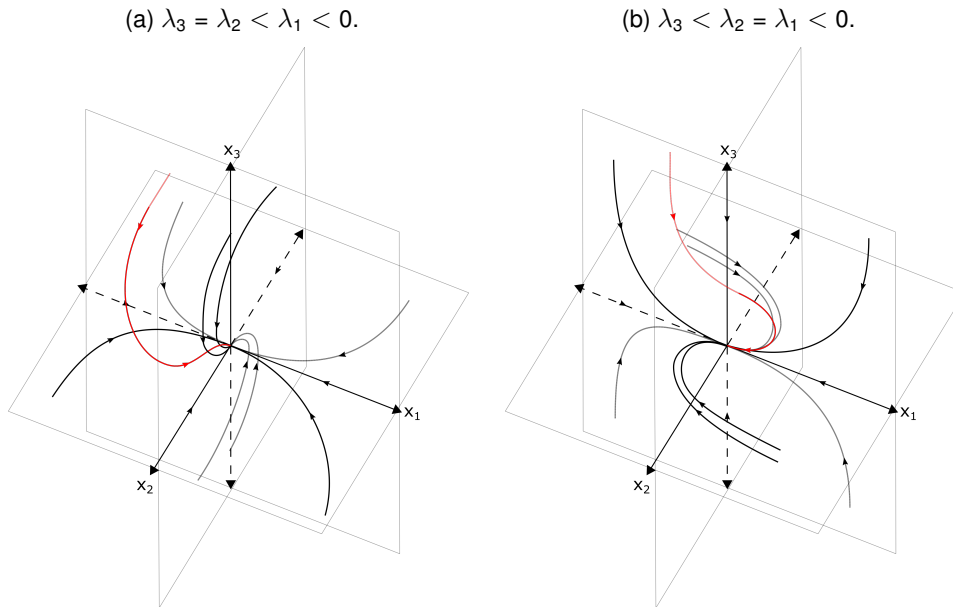
e para $t \rightarrow -\infty$, o autovalor com maior força é λ_3 que faz com que as soluções tendam ao infinito paralelamente ao eixo x_3 e, conforme o tempo t aumenta, as soluções são influenciadas por λ_1 , ficando paralelas à reta y e se aproximando da origem assintoticamente ao eixo x_1 , conforme ilustrado na Figura 4.2b.

Para o caso em que todos autovalores são iguais mas conseguimos apenas dois autovetores, os retratos de fase são parecidos com a Figura 4.2a ou com a Figura 4.2b, distinguindo-se que, no primeiro caso, as soluções no plano $x_1 x_2$ tendem em retas para a origem, uma vez que a influência dos autovalores é igual, o que faz com que as soluções no espaço também se aproximem assintoticamente à origem tal como na Figura 4.1d e, no segundo caso, o mesmo acontece com o plano $x_1 x_3$, e as soluções tendem ao infinito quando $t \rightarrow -\infty$ igualmente à Figura 4.1c.

Por fim, se tivermos todos os vetores linearmente dependentes, procuramos por outras soluções que completem as três necessárias, tal como realizado na Seção 2.2.1.3, onde vimos que uma segunda solução é do tipo $x^{(2)}(t) = \xi t e^{\lambda_1 t} + \eta e^{\lambda_1 t}$. Seguindo o mesmo raciocínio, procuraremos por uma solução do tipo $x^{(3)}(t) = \xi t^2 e^{\lambda_1 t} + \eta t e^{\lambda_1 t} + \zeta e^{\lambda_1 t}$. Substituindo na equação do sistema, temos

$$\begin{aligned} x^{(3)'} &= Ax^{(3)} \Leftrightarrow \\ \lambda_1 \xi t^2 e^{\lambda_1 t} + \xi 2t e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \eta t e^{\lambda_1 t} + \eta e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \zeta e^{\lambda_1 t} &= A(\xi t^2 e^{\lambda_1 t} + \eta t e^{\lambda_1 t} + \zeta e^{\lambda_1 t}) \Leftrightarrow \\ \lambda_1 \xi t^2 e^{\lambda_1 t} + (2\xi + \lambda_1 \eta) t e^{\lambda_1 t} + (\eta + \lambda_1 \zeta) e^{\lambda_1 t} &= A \xi t^2 e^{\lambda_1 t} + A \eta t e^{\lambda_1 t} + A \zeta e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

Figura 4.2 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com todos autovalores negativos e dois autovetores LD.



Fonte: Elaborada pelo autor.

comparando coordenada a coordenada,

$$(A - \lambda_1 I)\xi = 0, \quad (A - \lambda_1 I)\eta = 2\xi, \quad (A - \lambda_1 I)\zeta = \eta,$$

que, apesar de $\det(A - \lambda I) = 0$, sempre é possível achar um ζ que satisfaça a solução, tal como realizado na Seção 2.2.1.3.

Sendo assim, temos como solução geral deste caso

$$x(t) = c_1 \xi e^{\lambda_1 t} + c_2 (\xi t e^{\lambda_1 t} + \eta e^{\lambda_1 t}) + c_3 (\xi t^2 e^{\lambda_1 t} + \eta t e^{\lambda_1 t} + \zeta e^{\lambda_1 t}),$$

reescrevendo,

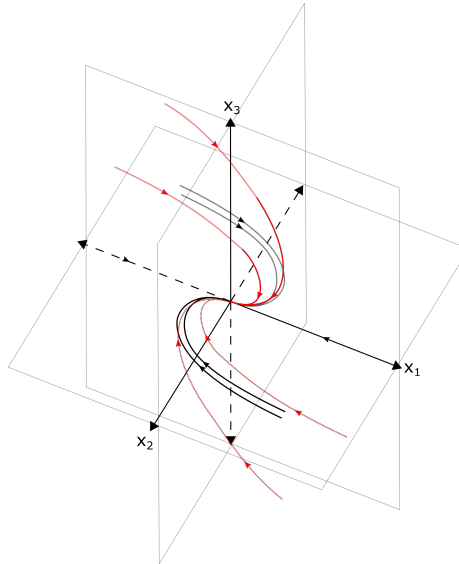
$$x(t) = (c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta + c_2 \xi t + c_3 \eta t + c_3 \xi t^2) e^{\lambda_1 t} = y e^{\lambda_1 t},$$

onde $y = c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta + (c_2 \xi + c_3 \eta)t + c_3 \xi t^2$ é uma curva contida num plano paralelo ao plano formado pelos autovetores ξ e η (que corresponde ao plano $x_1 x_2$). A curva determina a direção da solução, enquanto o fator exponencial determina o tamanho da solução. Como, neste caso, temos apenas um autovalor, ele determina sozinho o comportamento das soluções, portanto, quando $t \rightarrow -\infty$ elas tendem ao infinito paralelamente ao plano $x_1 x_2$, enquanto para $t \rightarrow \infty$, as soluções se aproximam da origem exponencialmente, conforme retratado na Figura 4.3.

Note que não existem soluções completamente contidas nos planos $x_1 x_3$ e $x_2 x_3$, tal como no eixo x_3 , uma vez que as soluções que dependem de ζ também dependem de η e ξ . Isso

significa que soluções no espaço podem cruzar o plano x_1x_3 e o plano x_2x_3 .

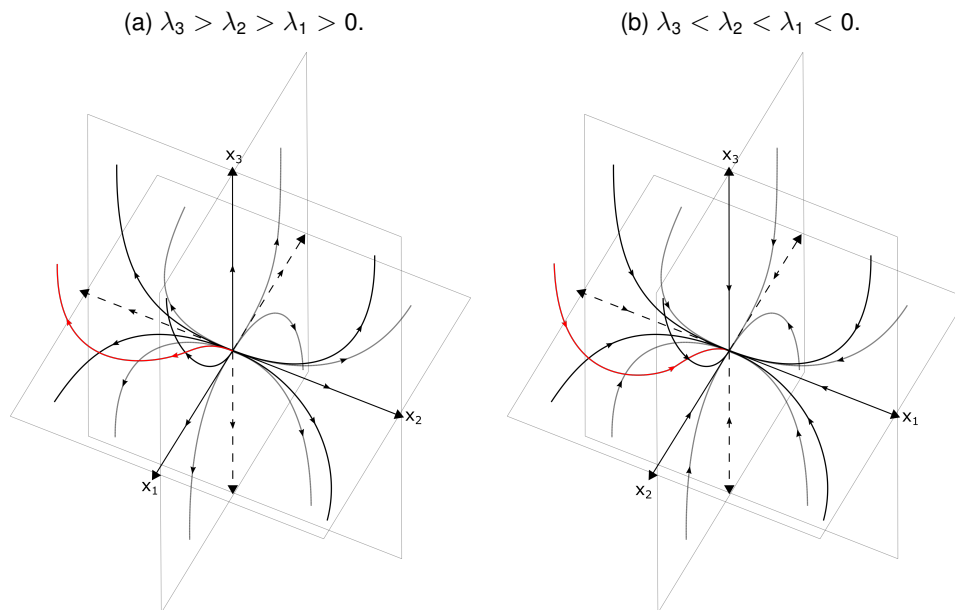
Figura 4.3 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com todos autovalores negativos e três autovetores LD.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme dito no início desta Seção, os resultados para quando todos autovalores são positivos são geometricamente equivalentes. Por exemplo, caso tivermos $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1 > 0$, seu retrato de fase é equivalente ao da Figura 4.1a, conforme comparação a seguir, na Figura 4.4a com a Figura 4.4b.

Figura 4.4 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com todos autovalores negativos e autovetores LI.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.2 Autovalores com sinais distintos

Para o caso em que os autovalores possuem sinais distintos, como temos três autovalores, as únicas possibilidades são: dois autovalores positivos e um negativo ou dois autovalores negativos e um positivo, adicionando as possibilidades dos autovalores de mesmo sinais serem iguais. Nesse sentido, analisando primeiramente o caso em que dois autovalores são positivos e um negativo, sem perda de generalidade consideremos $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

Olhando para o plano $x_1 x_2$, temos um nó instável conforme representado na Figura 3.5a. Dessa forma, as soluções afastam da origem conforme o tempo t cresce, paralelamente ao eixo x_2 e, quando $t \rightarrow -\infty$, as soluções se aproximam da origem assintoticamente ao eixo x_1 . Enquanto isso, no eixo $x_1 x_3$, a origem se comporta como uma sela, representada na Figura 3.6, onde as soluções tendem ao infinito assintoticamente ao eixo x_1 quando $t \rightarrow \infty$ e tendem ao infinito assintoticamente ao eixo x_3 quando $t \rightarrow -\infty$. A situação se repete no plano $x_2 x_3$.

Olhando para os eixos, quando $t \rightarrow \infty$, as soluções tendem à origem no eixo x_3 e ao infinito nos eixos x_2 e x_3 . A situação se inverte para $t \rightarrow -\infty$.

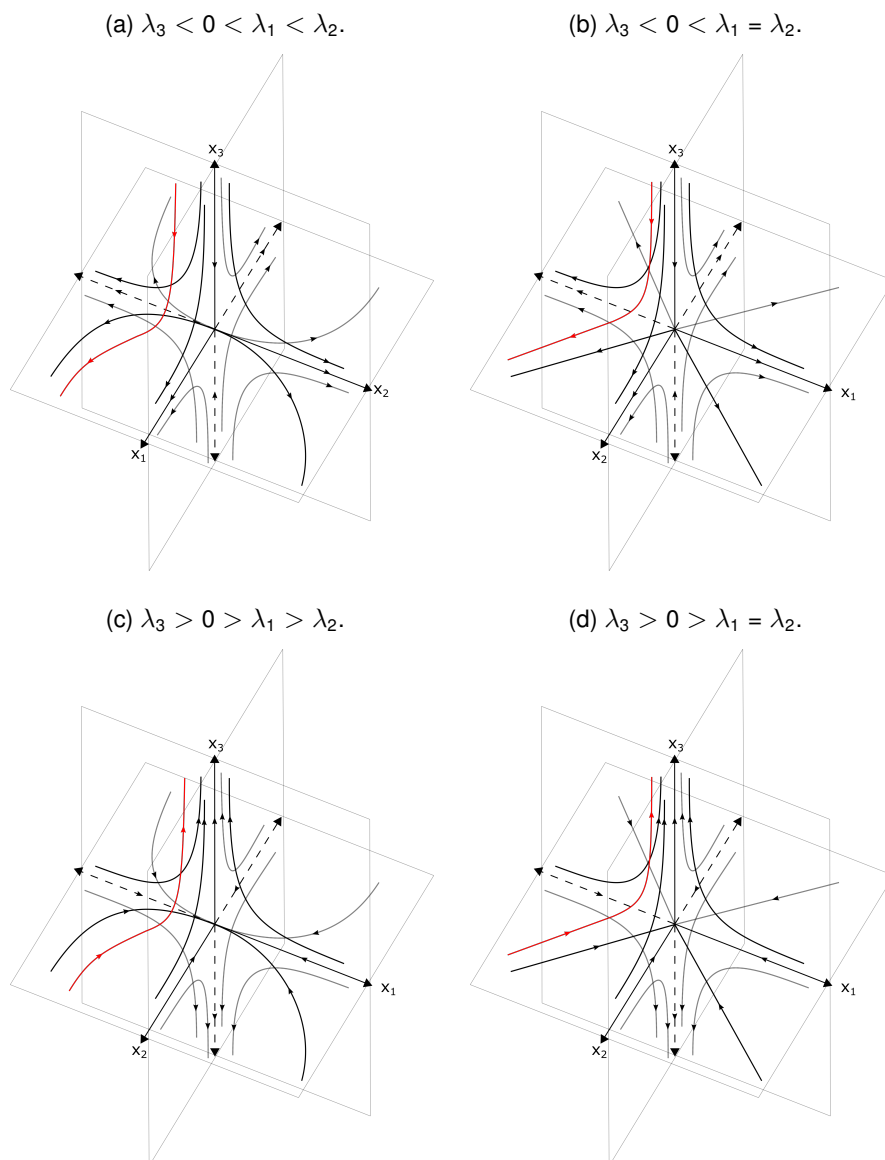
As outras soluções tendem ao infinito assintoticamente ao eixo x_3 quando $t \rightarrow -\infty$ e, conforme o passar do tempo positivo com $t \rightarrow \infty$, as soluções são atraídas ao plano $x_1 x_2$, tendendo ao infinito assintoticamente a esse plano e paralelamente ao eixo x_2 , onde o autovalor positivo de maior módulo exerce mais influência sobre as soluções. Esse caso está representado

na Figura 4.5a.

Quando $\lambda_1 = \lambda_2$, temos no plano x_1x_2 uma fonte e, conseqüentemente, as soluções são influenciadas igualmente pelos respectivos autovalores e, portanto, as soluções genéricas tendem ao infinito assintoticamente ao plano, em retas definidas por $x_1 = x_2$, conforme ilustrado na Figura 4.5b.

Analogamente, estendemos as análises para $\lambda_3 > 0 > \lambda_1 > \lambda_2$ e para $\lambda_3 > 0 > \lambda_1 = \lambda_2$. Neste caso, as soluções tendem ao infinito assintoticamente ao eixo x_3 quando $t \rightarrow \infty$ e tendem assintoticamente ao plano x_1x_2 quando $t \rightarrow -\infty$. As representações geométricas estão nas Figuras 4.5c e 4.5d.

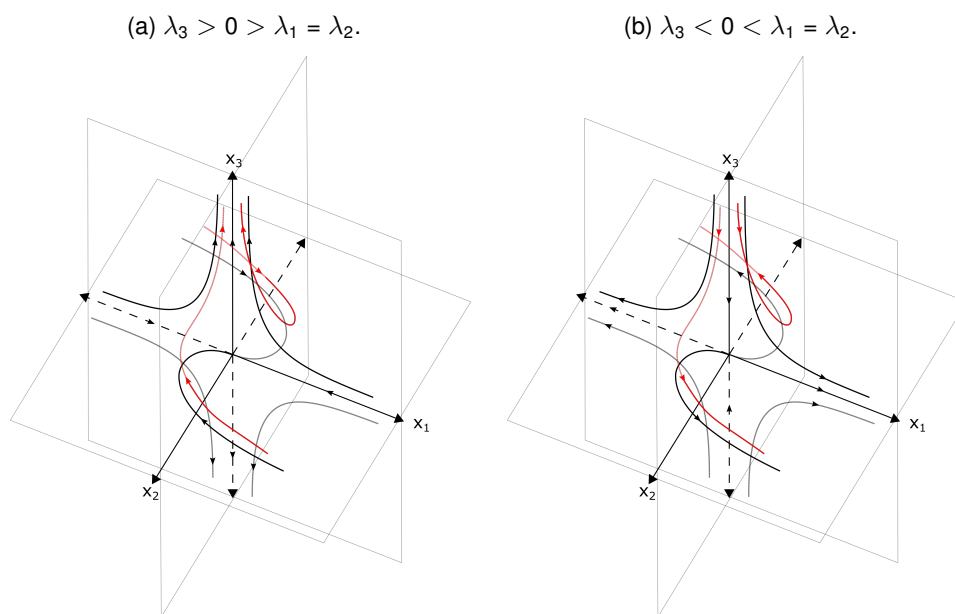
Figura 4.5 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com autovalores de sinais distintos e autovetores LI.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Caso não seja possível encontrar autovetores linearmente independentes, analogamente ao estudo realizado na seção anterior, concluímos que o plano x_1x_2 se comporta como um nó improprio, enquanto o plano x_2x_3 não possui soluções unicamente contidas nele, o que faz com que as soluções cruzem esse plano. Para o caso em que os autovalores envolvidos são negativos, as soluções tendem ao plano x_1x_2 quando $t \rightarrow -\infty$, enquanto que para $t \rightarrow \infty$ as soluções tendem ao infinito se aproximando do eixo x_3 , tal como as soluções presentes no plano x_1x_3 . As soluções se comportam de maneira inversa quando os autovalores envolvidos positivos. Podemos ver cada um dos respectivos casos ilustrados nas Figuras 4.6a e 4.6b.

Figura 4.6 – Retrato de fase - sistema linear de terceira com autovalores de sinais distintos e autovetores LI.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.3 Autovalores nulos

Para sistemas com autovalores nulos, temos as seguintes opções: todos autovalores são nulos, dois autovalores são nulos e o outro é real ou um autovalor nulo e dois autovalores reais.

Para o primeiro caso, a solução geral se dá por

$$x(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{0t} + c_2 \xi^{(2)} e^{0t} + c_3 \xi^{(3)} e^{0t} = c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} + c_3 \xi^{(3)},$$

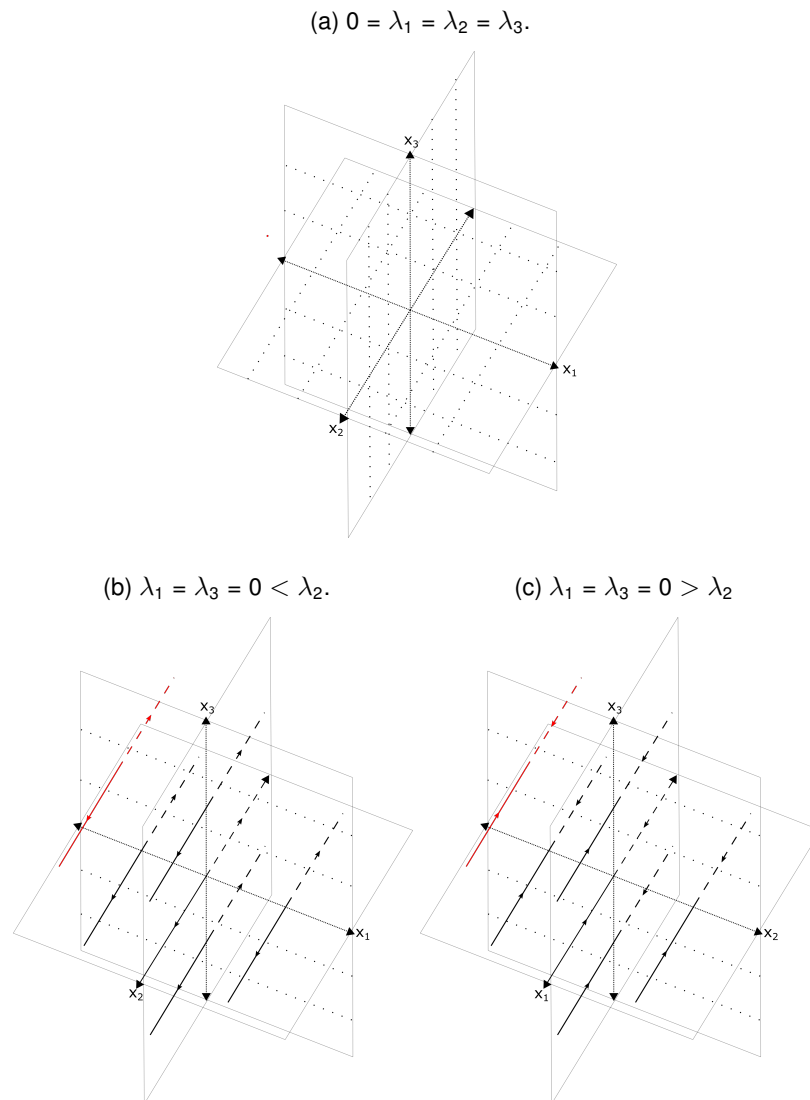
isto é, a solução é constante, independe do tempo t , sendo assim, todo ponto do espaço $x_1x_2x_3$ representa uma solução, conforme representado na Figura 4.7a.

Para o segundo caso em que temos exatamente dois autovalores nulos, temos duas

possibilidades que são: ou o outro autovalor é positivo ou é negativo. Considerando, sem perda de generalidade, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0 < \lambda_2$, as soluções no plano x_1x_2 se comportam tal como na Figura 3.10c, isto é, as soluções se afastam do eixo x_1 conforme $t \rightarrow \infty$, paralelamente ao eixo x_2 . Da mesma forma se comportam as soluções em x_2x_3 , enquanto que em x_1x_3 todos os pontos são soluções constantes, conforme na Figura 3.10a.

Por fim, uma solução geral tende ao infinito conforme $t \rightarrow \infty$ e se aproxima do plano $x_2 = 0$ conforme $t \rightarrow -\infty$, paralelamente ao plano, uma vez que os autovetores nulos não exercem influência sobre as soluções. Igualmente discutido em outros momentos, o comportamento para o autovalor negativo é semelhante ao caso positivo, invertendo o sentido para t tendendo ao infinito positiva e negativamente. Os casos podem ser conferidos nas Figuras 4.7b e 4.7c.

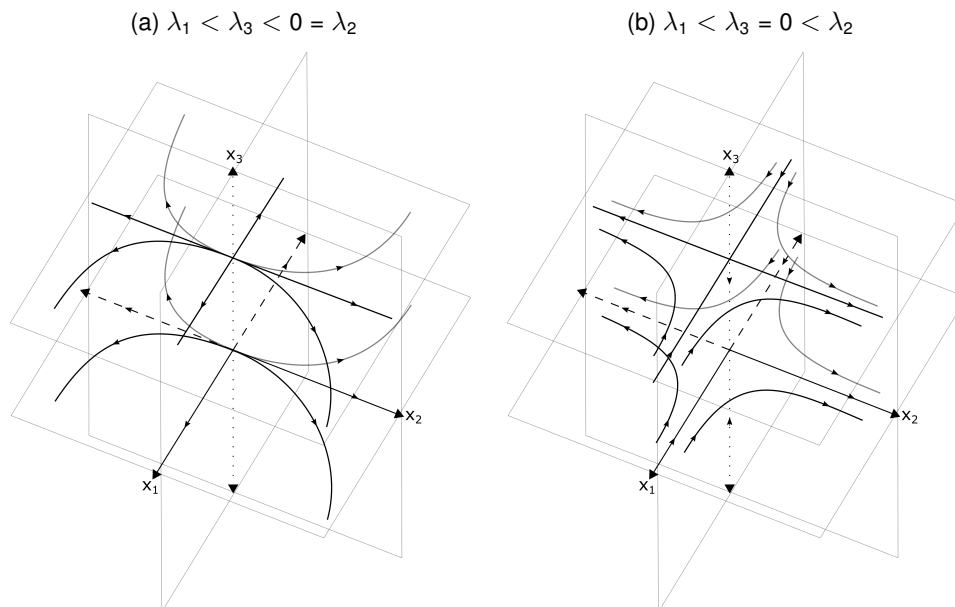
Figura 4.7 – Retrato de fase - sistema linear de terceira ordem com dois ou mais autovalores nulos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o terceiro e último caso envolvendo autovalores reais e nulos, temos um autovalor nulo e os outros dois variando entre positivos e negativos, iguais ou diferentes entre si e, portanto, supondo $\lambda_3 = 0$, no plano x_1x_2 temos exatamente todas as possibilidades descritas no Capítulo 3 quando temos dois autovalores reais, isto é, podemos ter um nó, uma sela entre outros. Todo ponto no eixo x_3 é uma solução fixa que não se move conforme o tempo t passa e as soluções dispostas no espaço estão contidas em planos paralelos ao plano x_1x_2 e se comportam exatamente igual como se comportam nele. Alguns retratos de fase estão ilustrados nas Figuras 4.8a e 4.8b, todos os outros casos são análogos, mudando as soluções conforme sinais de λ_1 e λ_2 .

Figura 4.8 – Retrato de fase - sistema linear de terceira ordem com um autovalor nulo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 UM PAR DE AUTOVALORES COMPLEXOS CONJUGADOS E UM AUTOVALOR REAL

Consideremos, sem perda de generalidade, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, autovalores do sistema, sendo $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_3 = \alpha - i\beta$. Assim, conforme a Seção 2.2.3 sua solução se dá por

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} - \text{sen } \beta t \\ 0 & e^{\alpha t} \text{sen } \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Nesse sentido, estudaremos os possíveis retratos de fase provindos dessa solução conforme λ_1 for positivo, negativo ou nulo e α for positivo, negativo ou nulo. Dividiremos a seção de acordo com a parte real dos autovalores imaginários ser diferente de zero ou não. Conforme estudamos os casos de segunda dimensão no Capítulo 3, o sinal de β interfere o sentido de rotação das soluções e, sem perda de generalidade, consideraremos $\beta > 0$. Além disso, note que nesta seção, invertemos os eixos do espaço de fase, a fim de facilitar a visualização das trajetórias.

4.2.1 Parte real diferente de zero

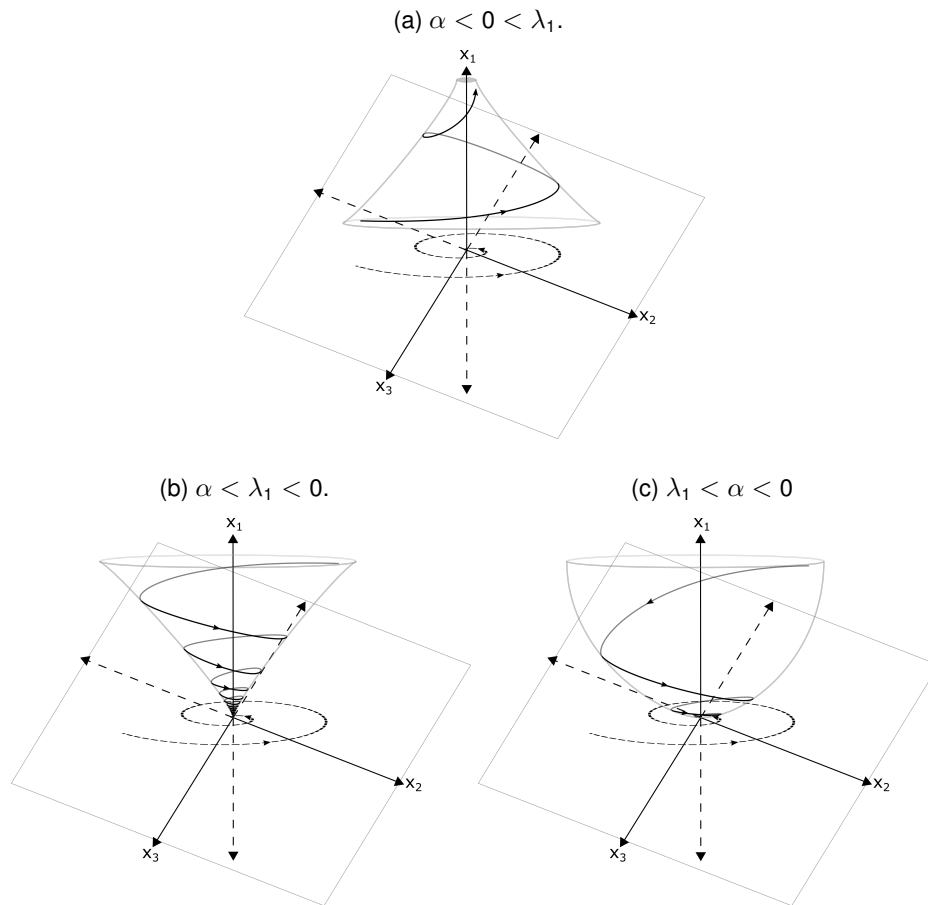
Separando primeiramente o caso em que α é negativo, temos três casos a se analisar: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_1 = 0$.

De acordo com a Seção 2.2.1.2, quando existem autovalores imaginários conjugados a solução geral contém parcelas das funções seno e cosseno e, conforme a mudança de coordenadas realizada no Capítulo 3, vimos que tais funções exercem uma força espiral nas soluções no retrato de fase.

Nesse sentido, considerando $\alpha < 0 < \lambda_1$. As soluções no plano x_2x_3 se comportam como uma espiral, conforme na Figura 3.8a e a solução contida no eixo x_1 tende ao infinito conforme $t \rightarrow \infty$. Uma solução geral dentro do retrato de fase sofre maior influência do autovalor com parte real positiva, portanto tende ao infinito conforme $t \rightarrow \infty$, porém, ainda existe a força dos autovalores imaginários, que faz com que a solução espirale ao redor do eixo x_1 , se aproximando do eixo conforme t aumenta. Essa situação está retratada na Figura 4.9a, e pode ser chamada de funil invertido devido a se parecer com o objeto.

Quando $\alpha < \lambda_1 < 0$ ou $\lambda_1 < \alpha < 0$, temos um caso parecido, onde em vez de as soluções fora do plano x_2x_3 tenderem ao infinito, elas tendem à origem devido ao autovalor real ser negativo, também espiralando conforme o caso anterior. O que difere entre os dois casos é qual a influência mais forte: se $\alpha < \lambda_1$, a força espiral sobressai em relação à força que atrai a espiral para origem, o que implica que as soluções espiralam mais ao redor do eixo x_1 , enquanto no caso $\lambda_1 < \alpha$ as soluções se aproximam mais rapidamente da origem, espiralando menos que no caso anterior. Ambos os casos estão retratos, respectivamente, nas Figuras 4.9b e 4.9c, o primeiro caso pode ser chamado de funil enquanto o segundo pode ser chamado de parabolóide circular, devido às soluções percorrerem a superfície de tais objetos geométricos.

Figura 4.9 – Retrato de fase - sistema linear de terceira ordem com autovalores imaginários.

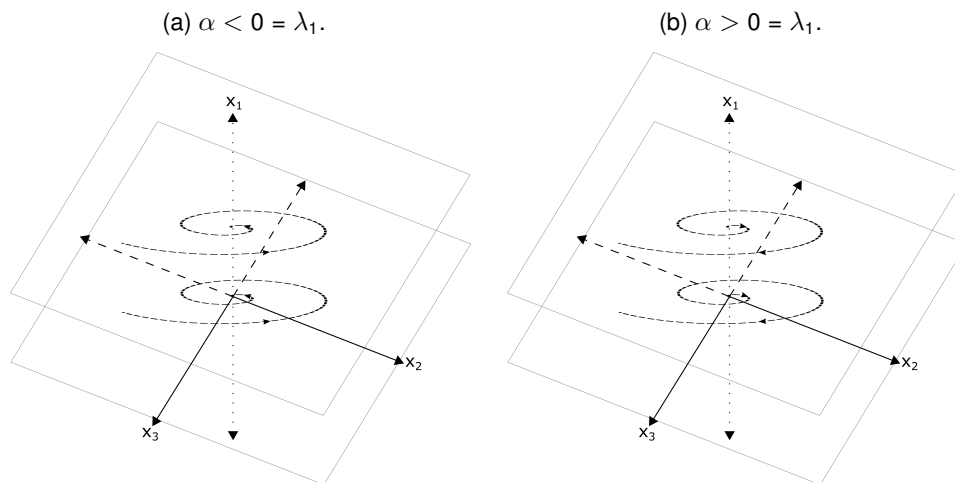


Fonte: Elaborada pelo autor.

Para os casos em que $\alpha > 0$, o cenário se repete. Quando λ_1 tem sinal oposto, isto é, negativo, as soluções se comportam inversamente ao caso retrato na Figura 4.9a, se aproximando do plano x_2x_3 e se afastando da origem por meio de espirais. Soluções dentro do plano x_2x_3 se afastam da origem em espirais, e no eixo x_1 se aproximam da origem, conforme $t \rightarrow \infty$. Quando λ_1 possui o mesmo sinal que α , neste caso, positivo, temos dois casos em que a parte real dos autovalores imaginários é maior ou menor que o autovalor real. Quando for maior, as soluções se comportam inversamente ao caso retratado na Figura 4.9b, tendendo ao infinito em espirais que se afastam do eixo x_1 conforme $t \rightarrow \infty$, e se for menor, se comportam inversamente à Figura 4.9c.

Quando os autovalores reais são nulos, todo ponto no eixo x_1 é uma solução que não se altera conforme o passar do tempo e as soluções no espaço se comportam como no plano x_2x_3 , que pode ser uma espiral estável ou instável, conforme sinal de α , em planos paralelos ao plano referido, conforme nas Figuras 4.10a e 4.10b.

Figura 4.10 – Retrato de fase - sistema linear de terceira ordem com autovalores imaginários e autovalor real nulo.



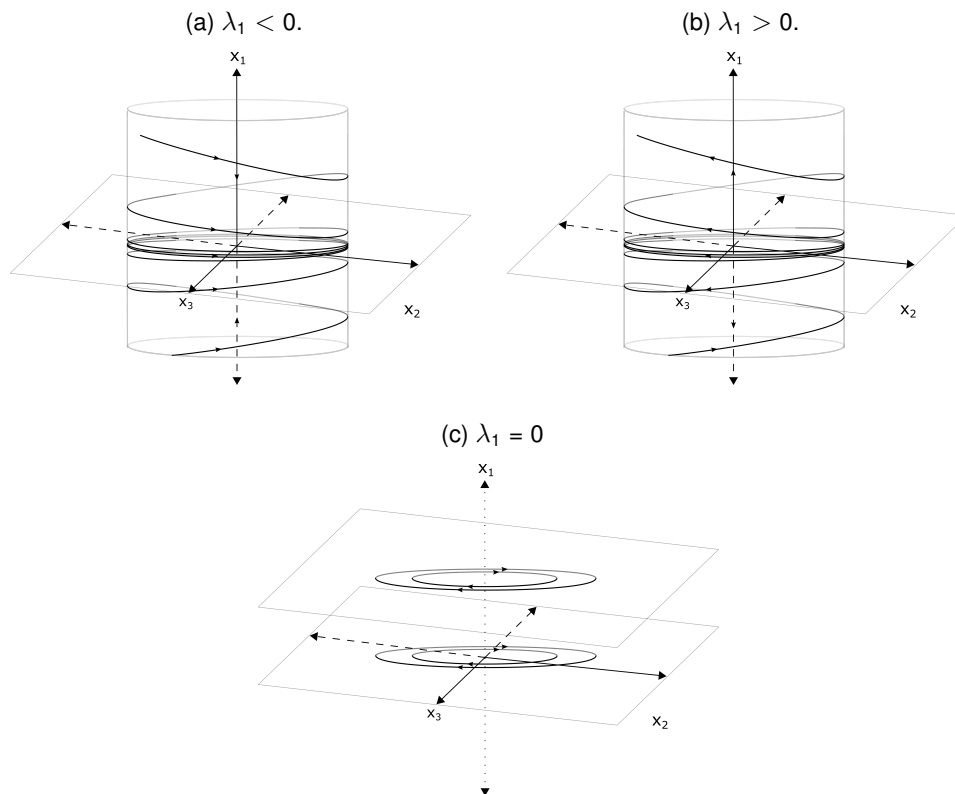
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2 Parte real igual a zero

Para os casos em que a parte real dos autovalores complexos conjugados é igual a zero, isto é para autovalores imaginários puros, considerando $\lambda_2 = i\beta$, $\lambda_3 = -i\beta$ e $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, temos três possibilidades de retratos de fase: para $\lambda_1 > 0$, $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_1 < 0$.

Analogamente aos casos anteriores, os autovalores complexos exercem uma força de rotação nas soluções, porém como neste caso, como a parte real é nula, o raio das espirais é constante, conforme estudado na Seção 3.2.6. Com isso, cada uma das soluções rotaciona sob um raio constante ao redor do eixo x_1 , que por sua vez, seu autovalor λ_1 exerce a força de fazer as soluções tenderem ao plano x_2x_3 quando negativo ou para o infinito quando positivo, conforme $t \rightarrow \infty$. As soluções no plano x_2x_3 se comportam como centros, e no eixo x_1 , conforme o valor de λ_1 . Por fim, se $\lambda_1 = 0$ as soluções se comportam como centros em planos paralelos à origem. Os três casos estão retratados nas Figura 4.11a, Figura 4.11b e Figura 4.11c.

Figura 4.11 – Retrato de fase - sistema linear de terceira ordem com autovalores imaginários puros.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Resumimos e enumeramos os casos de retratos de fase para sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes de terceira ordem na Tabela 4.1. Note que, nesta tabela estão inclusos os retratos de fases análogos que foram omitidos ao longo do trabalho a fim de simplificar o entendimento.

Tabela 4.1 – Retrato de fase de sistemas lineares com autovalores constantes de terceira ordem

Caso	Autovalor	Estabilidade	Retrato de Fase
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$			
3.1	$\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 4.1a
3.2	$\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 4.1b ou Figura 4.3
3.3	$\lambda_3 = \lambda_2 < \lambda_1 < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 4.1c ou Figura 4.2a
3.4	$\lambda_3 < \lambda_2 = \lambda_1 < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 4.1d ou Figura 4.2b
3.5	$\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1 > 0$	Instável	Figura 4.4a
3.6	$\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 > 0$	Instável	Análogo ao Caso 3.2
3.7	$\lambda_3 = \lambda_2 > \lambda_1 > 0$	Instável	Análogo ao Caso 3.3
3.8	$\lambda_3 > \lambda_2 = \lambda_1 > 0$	Instável	Análogo ao Caso 3.4
3.9	$\lambda_3 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2$	Instável	Figura 4.5a
3.10	$\lambda_3 < 0 < \lambda_1 = \lambda_2$	Instável	Figura 4.5b ou Figura 4.6b
3.11	$\lambda_3 > 0 > \lambda_1 > \lambda_2$	Instável	Figura 4.5c
3.12	$\lambda_3 > 0 < \lambda_1 = \lambda_2$	Instável	Figura 4.5d ou Figura 4.6a
3.13	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$	Estável	Figura 4.7a
3.14	$\lambda_1 = \lambda_3 = 0 < \lambda_2$	Instável	Figura 4.7b
3.15	$\lambda_1 = \lambda_3 = 0 > \lambda_2$	Assintoticamente Estável	Figura 4.7c
3.16	$\lambda_1 < \lambda_3 < 0 = \lambda_2$	Instável	Figura 4.8a
3.17	$\lambda_1 < \lambda_3 = 0 < \lambda_2$	Instável	Figura 4.8b
3.18	$\lambda_1 > \lambda_3 > 0 = \lambda_2$	Instável	Análogo ao Caso 3.16
$\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}, \lambda_1 \in \mathbb{R}$			
3.19	$\alpha < 0 < \lambda_1$	Instável	Figura 4.9a
3.20	$\alpha < \lambda_1 < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 4.9b
3.21	$\lambda_1 < \alpha < 0$	Assintoticamente Estável	Figura 4.9c
3.22	$\alpha > 0 > \lambda_1$	Instável	Análogo ao Caso 3.19
3.23	$\alpha > \lambda_1 > 0$	Instável	Análogo ao Caso 3.20
3.24	$\lambda_1 > \alpha > 0$	Instável	Análogo ao Caso 3.21
3.25	$\alpha < 0 = \lambda_1$	Assintoticamente Estável	Figura 4.10a
3.26	$\alpha > 0 = \lambda_1$	Instável	Figura 4.10b
3.27	$\lambda_1 < 0 = \alpha$	Estável	Figura 4.11a
3.28	$\lambda_1 > 0 = \alpha$	Instável	Figura 4.11b
3.29	$\lambda_1 = 0 = \alpha$	Estável	Figura 4.11c

Fonte: Elaborado pelo Autor.

5 CONCLUSÕES

Finalizamos o levantamento geométrico dos retratos de fases para sistemas lineares de até terceira ordem, onde foi possível analisar cada uma das possibilidades de retratos de fase a partir do estudo analítico e das suas ilustrações e, com isso, entender e conhecer as peculiaridades, diferenças e semelhanças entre o comportamento das soluções de cada um dos sistemas, exaltando a beleza e a diversidade que tais representações possuem. Para além de seu comportamento geométrico, é possível traçar algumas semelhanças entre alguns casos de retratos de fase, por exemplo entre as Figuras 4.1a e 4.1c, que apesar da diferença, o comportamento das soluções é o mesmo: tende à origem conforme $t \rightarrow \infty$. Ainda, olhando por essa perspectiva, as Figuras 4.1a e 4.3, apesar de serem geometricamente diferentes, também têm esse mesmo comportamento das soluções. Este tipo de análise, voltada ao comportamento *topológico* das soluções, possibilita a realização de agrupamentos entre os sistemas, que nos faz enxergá-los a partir de uma outra ótica.

Para realizar e comprovar tais agrupamentos, é necessário um estudo sobre **conjugações** e, parte dele está apresentado nos Apêndices A e B, que traz conceitos de fluxo, conjuntos invariantes, sistemas hiperbólicos e conjugações topológicas. Para não fugir do escopo desta monografia, realizaremos os agrupamentos por dimensão do sistema e de acordo com a ideia de comportamento e estabilidade das soluções, voltadas ao aspecto visual construído ao longo dos capítulos. O respaldo matemático está contido nos apêndices citados, a título de curiosidade.

5.1 PRIMEIRA DIMENSÃO

Para os retratos de fase de primeira dimensão, de acordo com o que foi estudado no Capítulo 3 e os casos resumidos na Tabela 3.1, provamos o Corolário 5.1.

Corolário 5.1. *Existem três possibilidades de retratos de fase topologicamente diferentes para sistemas lineares de primeira ordem, listados a seguir:*

- Um autovalor negativo, representado pela Figura 3.1, inclui apenas o caso 1.1;
- Um autovalor positivo, representado pela Figura 3.2, inclui apenas o caso 1.2;
- Um autovalor nulo, representado pela Figura 3.3, inclui apenas o caso 1.3.

5.2 SEGUNDA DIMENSÃO

Para os retratos de fase de primeira dimensão, de acordo com o que foi estudado no Capítulo 3 e os casos resumidos na Tabela 3.2, provamos o Corolário 5.2.

Corolário 5.2. *Existem sete possibilidades de retratos de fase topologicamente diferentes para sistemas lineares de segunda ordem, listados a seguir:*

- Dois autovalores negativos, representado pela Figura 3.4a, inclui os casos 2.1, 2.2, 2.6 e 2.11;
- Dois autovalores positivos, representado pela Figura 3.5a, inclui os casos 2.3, 2.4, 2.7 e 2.12;
- Um autovalor negativo, outro positivo, representado pela Figura 3.6, inclui apenas o caso 2.5;
- Um autovalor negativo outro nulo, representado pela Figura 3.10b, inclui apenas o caso 2.9;
- Um autovalor positivo outro nulo, representado pela Figura 3.10c, inclui apenas o caso 2.10;
- Dois autovalores nulos, representado pela Figura 3.10a, inclui apenas o caso 2.8;
- Dois autovalores imaginários puros, representado pela Figura 3.9, inclui apenas o caso 2.13.

5.3 TERCEIRA DIMENSÃO

Para os retratos de fase de terceira dimensão, de acordo com o que foi estudado no Capítulo 4 e os casos resumidos na Tabela 4.1, provamos o Corolário 5.3.

Corolário 5.3. *Existem treze possibilidades de retratos de fase topologicamente diferentes para sistemas lineares de terceira ordem, listados a seguir:*

- Três autovalores negativos, representado pela Figura 4.1a, inclui os casos 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.20 e 3.21;
- Três autovalores positivos, representado pela Figura 4.4a, inclui os casos 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.23 e 3.24;
- Dois autovalores negativos e um autovalor positivo, representado pela Figura 4.5c, inclui os casos 3.11, 3.12 e 3.19;
- Dois autovalores positivos e um autovalor negativo, representado pela Figura 4.5a, inclui os casos 3.9, 3.10 e 3.22;
- Dois autovalores negativos e um autovalor nulo, representado pela Figura 4.8a, inclui os casos 3.16 e 3.25;
- Dois autovalores positivos e um autovalor nulo, análogo à Figura 4.8a com a direção das soluções trocado, inclui os casos 3.18 e 3.26;

- Um autovalor negativo, dois autovalores nulos, representado pela Figura 4.7b, inclui apenas o caso 3.14;
- Um autovalor positivo, dois autovalores nulos, representado pela Figura 4.7c, inclui apenas o caso 3.15;
- Um autovalor positivo, um autovalor negativo e um autovalor nulo, representado pela Figura 4.8b, inclui apenas o caso 3.17;
- Três autovalores nulos, representado pela Figura 4.7a, inclui apenas o caso 3.13;
- Dois autovalores imaginários puros e um negativo, representado pela Figura 4.11a, inclui apenas o caso 3.27;
- Dois autovalores imaginários puros e um positivo, representado pela Figura 4.11b, inclui apenas o caso 3.28;
- Dois autovalores imaginários puros e um nulo, representado pela Figura 4.11c, inclui apenas o caso 3.29.

Resultados importantes de conjugações topológicas mostram que sistemas lineares são topologicamente conjugados à sua forma de Jordan – que é uma matriz com coeficientes constantes, e, portanto, seu retrato de fase está contido entre os levantados neste trabalho. Além disso, o Teorema de Grobman-Hartman¹ afirma que sistemas hiperbólicos (isto é, sistemas que não possuem autovalores nulos ou com parte real nula) são conjugados à sua matriz linearizada. Com a transitividade da conjugação, tais sistemas também têm seus retratos de fase contidos dentro dos apresentados neste trabalho. Além disso, excluindo os casos não hiperbólicos, os retratos de fase para terceira dimensão são reduzidos em quatro possibilidades, ressaltando a importância e a facilidade que tais resultados trazem.

O levantamento dos casos existentes realizados neste trabalho, além de fornecer o aspecto visual, facilitando a compreensão do comportamento de todos sistemas lineares com coeficientes constantes de até terceira dimensão, mostram como tais agrupamentos, ou melhor, conjugações, funcionam no aspecto geométrico, o que facilita entender também não a conjugação entre estes sistemas, mas entre sistemas lineares e até não lineares, resultados importantes dentro da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias.

¹ para mais informações sobre este teorema, verifique (PALIS; MELO, 1978)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base no levantamento de retratos de fase e o agrupamento conforme comportamento topológico, podemos concluir que os objetivos deste trabalho foram realizados. Também posso afirmar que foi uma grande satisfação realizar este estudo, em diversos sentidos, desde a oportunidade de estudar este objeto que tive contato no início da minha iniciação científica e que me despertou a curiosidade sobre suas diferentes possibilidades de existência e comportamento; o desenvolvimento do estudo em si, onde tive autonomia e total apoio do meu orientador; até às conclusões chegadas com esse trabalho. Além disso, reforço como a realização deste trabalho de conclusão de curso também auxiliou no meu crescimento pessoal e acadêmico, abrindo possibilidades e estruturando bases para, caso se concretize, eu seguir na pós-graduação em matemática.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. Citado 6 vezes nas páginas [14](#), [26](#), [27](#), [31](#), [32](#) e [54](#).
- DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 6. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016. (Projeto Euclides). Citado na página [54](#).
- FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976. Citado na página [54](#).
- LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014. Citado na página [28](#).
- OLIVEIRA, A. R. de. **Conjugação topológica de fluxos**. Paraná: Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2011. Citado na página [77](#).
- PALIS, J.; MELO, W. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978. (Projeto Euclides). Citado na página [72](#).
- SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. Citado na página [81](#).

APÊNDICE A – FLUXOS E CONJUNTOS INVARIANTES

Neste apêndice será apresentado o conceito de fluxo de uma equação diferencial (tal como de um sistema), como diferentes fluxos se relacionam e alguns resultados que servirão de base para o estudo de conjugações. Começamos com a definição de campo vetorial.

Definição A .1. Um **campo vetorial** F é uma função que associa cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ um único vetor em \mathbb{R}^n .

Para todo campo vetorial $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , temos associado uma equação diferencial autônoma.

$$x'(t) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A .1})$$

Analogamente, qualquer equação diferencial autônoma ou sistema de equações autônomas está associada a um campo. Por isso, a partir de agora iremos utilizar também da nomenclatura de campo vetorial para se referir a uma equação diferencial ou um sistema de equações. Note também, que a notação de campo usada será de letra maiúsculas, como F , G , entre outras, para reforçar a possibilidade de estarmos trabalhando em dimensões maiores (lembrando que também é válido para a reta).

Para cada condição inicial $x(t_0) = x_0$ adicionado à ((A .1)), temos uma única solução assegurada pelo fato de F ser de classe C^1 , conforme os teoremas de existência e unicidade apresentados na Seção 2.1.4. Tais soluções estão definidas em um intervalo e chamamos de **intervalo máximo ou maximal** I de uma solução o intervalo tal que dado qualquer outra solução definida em J passando pela condição inicial tem-se $J \subset I$. A solução dada em I é chamada **solução máxima** ou **trajetória** de F por x_0 . A imagem da trajetória é chamada de **órbita** de F sobre x_0 . Formalmente, temos:

Um tipo importante de solução para o estudo dos planos de fase são as soluções $x(t) \equiv x_0$ tais que $F(x_0) = 0$, essa solução recebe o nome de **solução trivial**. Tal ponto $x_0 \in E$ é dito **singularidade** ou **pontos singular** do campo F . Caso contrário, se $x(t)$ não é constante, então é chamada de **solução regular**. Outro tipo notável dentro das soluções regulares são as soluções periódicas, que recebe esse nome se existem $t_1, t_2 \in I$ diferentes entre si tais que $x(t_1) = x(t_2)$ e a trajetória não é uma solução trivial.

Se existir algum $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que \bar{t} pertence ao intervalo máximo de toda solução relativa a cada condição inicial $x_0 \in E$, dizemos que o **fluxo no tempo** \bar{t} associado ao campo F é a aplicação $\phi_{\bar{t}} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida tal que para cada condição inicial x_0 , $\phi_{\bar{t}}(x_0) = x(\bar{t})$, sendo $x(\cdot)$ a solução definida pela condição inicial $x(t_0) = x_0$. Note que a definição de fluxo no tempo analisa a posição de cada solução de ((A .1)) em um tempo fixo \bar{t} , e isto é o oposto que $x(t)$ (ou $\phi_{x_0}(t)$) faz, que dá a posição de uma solução de ((A .1)) conforme o tempo t varia.

Podemos também definir o **fluxo** do campo de vetores para cada par (t, x) como $\phi : \Omega \rightarrow$

\mathbb{R}^n , com $\Omega = I \times E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(t, x)$ satisfaz

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = f(\phi(t, x)).$$

Portanto, $\phi(t, x) = x(t)$ analisa todas a posição de cada solução x (definida pela sua condição inicial) em algum ponto t . Durante o texto que segue, serão utilizado todos os formatos da notação de fluxo, de acordo com o que se quer destacar no momento. É importante lembrar que todos se referem ao mesmo fluxo. Além disso, vale a propriedade de grupo

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s,$$

em particular, $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$ é a inversa e $\phi_0 = id|_E$ é a aplicação identidade. Nesse sentido, ϕ_t define um sistema dinâmico discreto, conforme melhor descrito nas próximas seções. Dizemos ainda que, se $\phi(t, x_0) = x_0$ para todo $t \in I$, então $x_0 \in E$ é um **ponto fixo** ou um **ponto de equilíbrio** para o fluxo. No que segue, assumiremos que o fluxo está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Pelo conceito de fluxo, podemos definir formalmente o conceito de trajetória:

Definição A .2. A trajetória que passa por x é o conjunto

$$\lambda(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi(x, t).$$

Chamamos de semi-trajetória positiva ($\lambda^+(x)$) o mesmo conjunto para $t \geq 0$ e de semi-trajetória negativa ($\lambda^-(x)$) o conjunto para $t \leq 0$

Dizemos que um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é **invariante** se $\gamma(x) \subset E$ para todo $x \in E$. Também podemos definir como **positivamente invariante** ou **negativamente invariante** se, sob as mesmas condições, $\lambda^+(x) \subset E$ ou $\lambda^-(x) \subset E$, respectivamente. Definimos, a seguir, dois importantes conjuntos invariantes da trajetória por x .

Definição A .3. O conjunto ω -**limite** é o conjuntos dos pontos y para os quais existe uma subsequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x, t_n) = y$, representamos esse conjunto por $\Lambda(x)$. Analogamente, o conjunto α -**limite** é o conjuntos dos pontos y para os quais existe uma subsequência $s_n \rightarrow -\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x, s_n) = y$ e é representado por $A(x)$.

Observe que os conjuntos ω -limite e α -limite, apesar de estarem relacionados a um ponto x , descrevem uma propriedade sobre a trajetória que passar por x e não exatamente sobre o ponto, afirmação justificada na próxima proposição, que mostra que dois pontos em uma mesma trajetória tem os mesmos conjuntos limites. Sendo assim, tais conjuntos descrevem “para onde a trajetória vai” para o tempo positivamente ou negativamente infinito. Além disso, note também que, a definição do conjunto $\Lambda(x)$ coincide com a definição da bacia de atração feita na Seção 2.3 para pontos críticos assintoticamente estáveis e, em geral, os conjuntos ω e α -limites são não abertos e sempre são não vazios e invariantes pelo fluxo.

Proposição A .1. *Se y está na mesma órbita de x , então $\Lambda(x) = \Lambda(y)$.*

Demonstração. Se y está na mesma órbita de x , então para algum $\tau \in \mathbb{R}$, temos $\phi(x, \tau) = y$, por definição. Seja $a \in \Lambda(x)$ o ponto tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x, t_n) = a$ para alguma subsequência $t_n \rightarrow \infty$, onde temos:

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x, t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(\phi(x, \tau), t_n - \tau) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(y, t_n - \tau).$$

Portanto, mostramos que existe uma subsequência $t_n - \tau \rightarrow \infty$ que satisfaz a definição de conjunto limite, ou seja, $a \in \Lambda(y)$. Repetindo o processo para todo $a \in \Lambda(x)$, temos $\Lambda(x) \subseteq \Lambda(y)$. Analogamente, mostramos que $\Lambda(y) \subseteq \Lambda(x)$ e, conseqüentemente, temos a igualdade dos conjuntos provada. \square

O mesmo resultado pode ser adaptado para o conjunto $A(x)$.

Outros tipos de conjuntos invariantes importantes para esse estudo são as variedades estáveis, instáveis e centrais. Como cada autoespaço generalizado de um sistema $x' = Ax$ é invariante, naturalmente o espaço formado pela união de autoespaços é, também, invariante. Dividimos, então, os autovalores $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ da matriz A em três conjuntos: $(u) = \{\lambda_j | \text{Re}(\lambda_j) > 0\}$, $(s) = \{\lambda_k | \text{Re}(\lambda_k) < 0\}$, $(c) = \{\lambda_l | \text{Re}(\lambda_l) = 0\}$. Sendo a origem um ponto crítico do sistema, definimos a variedade instável de $x = 0$ como conjunto invariante E^u dos autovalores (u) , a variedade estável de $x = 0$ como conjunto invariante E^s dos autovalores (s) e a variedade central de $x = 0$ como conjunto invariante E^c dos autovalores (c) .

A .1 CONJUGAÇÃO ENTRE FLUXOS

Temos como objetivo comparar fluxos e entender como eles podem, ou não, se relacionar. O método para essa comparação é a partir da conjugação entre duas aplicações. Abordaremos, então, algumas definições e resultados para conjugações entre sistemas dinâmicos contínuos, isto é, conjugação entre fluxos ou conjugação entre campos, que foram baseados na dissertação de mestrado *Conjugação topológica de fluxos* de Ailton Ribeiro de Oliveira, da Universidade Estadual de Maringá (OLIVEIRA, 2011).

Definição A .4. Dado dois campos de vetores $F_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $F_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ com respectivos fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2 , dizemos que F_1 e F_2 ou que ϕ_t^1 e ϕ_t^2 são **topologicamente (diferenciavelmente) conjugados** se existe o homeomorfismo (difeomorfismo) $g : E_1 \rightarrow E_2$, denominado conjugação topológica (diferenciável) tal que dado $t \in \mathbb{R}$, $g \circ \phi_t^1 = \phi_t^2 \circ g$. Conseqüentemente, duas equações diferenciais são topologicamente (diferenciavelmente) conjugadas se seus campos ou fluxos também o são.

Dois campos podem ser, também, conjugados topologicamente (*diferenciavelmente*) em apenas uma vizinhança de um ponto. Considere $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$ postos dos respectivos

campos. Se existem vizinhanças $U_1 \in E_1$ e $U_2 \in E_2$ tais que exista $g : U_1 \rightarrow U_2$ homeomorfismo (difeomorfismo) que satisfaz $g(x_1) = x_2$ e $g \circ \phi_t^1 = \phi_t^2 \circ g$, dizemos que F_1 e F_2 ou que ϕ_t^1 e ϕ_t^2 são **localmente topologicamente (diferenciavelmente) conjugados**. A conjugação diferenciável carrega a classe de diferenciabilidade da aplicação, isto é, se h é de classe C^k , $k \geq 1$, dizemos que a conjugação é C^k -diferenciável.

Observamos que a conjugação topológica (diferenciável) define uma relação de equivalência. De fato, dado os campos $F_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $F_3 : E_3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ com respectivos fluxos ϕ_t^1 , ϕ_t^2 e ϕ_t^3 , temos:

- F_1 é topologicamente (diferenciavelmente) conjugado a F_1 , basta tomar $g = Id$ a identidade pois $Id(\phi_t^1(x)) = \phi_t^1(x) = \phi_t^1(Id(x))$
- Se G_1 é topologicamente (diferenciavelmente) conjugado a F_2 , então F_2 é topologicamente (diferenciavelmente) conjugado a F_1 . Sendo g um homeomorfismo (difeomorfismo) tal que $g \circ \phi_t^1 = \phi_t^2 \circ g$. Dado $y \in \mathbb{R}^n$, existe um único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $h(x) = y$, então

$$h^{-1}(\phi_t^2(y)) = h^{-1}(\phi_t^2(h(x))) = h^{-1}h(\phi_t^1(x)) = \phi_t^1(x) = \phi_t^1(h^{-1}(y)).$$

- Se F_1 é topologicamente (diferenciavelmente) conjugado a F_2 e F_2 é topologicamente (diferenciavelmente) conjugado a F_3 , então F_1 é topologicamente (diferenciavelmente) conjugado a F_3 . Sejam g e \bar{g} os homeomorfismos (difeomorfismo) que conjugam F_1, F_2 e F_2, F_3 , respectivamente. Tomemos $h = \bar{g} \circ g$, candidato a homeomorfismo (difeomorfismo) entre F_1 e F_3 . Temos:

$$h(\phi_t^1(x)) = \bar{g}(g(\phi_t^1(x))) = \bar{g}(\phi_t^2(g(x))) = \phi_t^3(\bar{g} \circ g(x)) = \phi_t^3(h(x)).$$

A partir disso, temos uma divisão dos fluxos e campos vetoriais em classes de equivalências. Chamaremos a classe de equivalência de um campo F_1 ou de um fluxo ϕ_t^1 de $\langle F_1 \rangle$ ou $\langle \phi_t^1 \rangle$, respectivamente.

Além disso, algumas das propriedades de conjugações:

- a) Uma conjugação topológica h entre dois fluxos $\phi_t(x)$ e $\psi_t(x)$ leva órbita em órbita, preservando o tempo.

Para verificar, usaremos a notação de fluxo $\phi_x(t)$, onde fixado x , temos a órbita que passa por x para $t \in \mathbb{R}$. Como h é homeomorfismo, dado um ponto (ou uma condição inicial) x , existe y tal que $h(x) = y$. Sendo assim, aplicando h à órbita $\phi_x(t)$, temos

$$h(\phi_x(t)) = \psi_{h(x)}(t) = \psi_y(t),$$

isto é, h leva a órbita de x na órbita de $y = h(x)$.

- b) Uma conjugação topológica h entre dois fluxos $\phi_t(x)$ e $\psi_t(x)$ leva órbita periódica em órbita periódica, preservando o período.

Considere uma órbita periódica de período T , $\{x(t) : s \leq t \leq s + T\} \subset \mathbb{R}^n$. Sabemos, por 1., que $h(\phi_x(t)) = \psi_y(t)$ é uma órbita, faltando, então, mostrar que é periódica de período T . Como, além disso, a conjugação preserva tempo, então, em particular, $h(\phi_x(s)) = \psi_y(s)$ e $h(\phi_x(s + T)) = \psi_y(s + T)$. Como $x(t)$ é periódica, então $h(\phi_x(s)) = h(\phi_x(s + T))$, o que implica que $\psi_y(s) = \psi_y(s + T)$. Desta maneira, $\psi_y(t)$ também é periódica de mesmo período T .

- c) Uma conjugação topológica h entre dois fluxos $\phi_t(x)$ e $\psi_t(x)$ leva ponto fixo em ponto fixo, preservando estabilidade.

Temos, por hipótese $h(\phi_t(x)) = \psi_t(h(x))$. Sejam x_1 ponto fixo de $\phi_t(x)$, isto é, $\phi_t(x_1) = x_1$. Portanto, $h(x_1) = h(\phi_t(x_1)) = \psi_t(h(x_1))$. Como h é um homeomorfismo e x_1 é um ponto, então $h(x_1)$ também é um ponto, que vamos chamar de x_2 . Isto significa que $\psi_t(x_2) = \psi_t(h(x_1)) = h(x_1) = x_2$, ou seja, x_2 é ponto fixo de $\psi_t(x)$ e h leva ponto fixo em ponto fixo.

Além disso, podemos supor que x_1 é um ponto estável, isso é, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = x_1$. Por continuidade, temos:

$$h(x_1) = h\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x)\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(\phi(t, x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, h(x)).$$

Pelo mesmo argumento, $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, h(x)) = h(x_1) = x_2$ é um ponto fixo estável de $\psi(t, x)$.

Um tipo de conjugação, definida a seguir, permite comparações diretas entre sistemas lineares quando a aplicação que os conjuga também é linear, conforme demonstrado no teorema que segue.

Definição A .5. Sejam ϕ e ψ fluxos topologicamente conjugados pelo homeomorfismo h . Se h for linear, dizemos que ϕ e ψ são linearmente conjugados.

Teorema A .1. Considere dois fluxos lineares ϕ e ψ , associados a, respectivamente, $x' = Ax$ e $x' = Bx$. Então, as afirmações a seguir são equivalentes:

- ϕ e ψ são diferenciavelmente conjugados;
- ϕ e ψ são linearmente conjugados;
- A e B são semelhantes.

Demonstração. Para a demonstração das equivalências, por conveniência, começaremos a provar por $b) \Rightarrow c)$, seguindo a ordem $c) \Rightarrow a)$ e, por fim, $a) \Rightarrow b)$

b) \Rightarrow c) Como os fluxos são lineares, conhecemos suas soluções então, temos que uma conjugação linear entre eles satisfaz $h(e^{At}x) = e^{Bt}(h(x))$. Aplicando o diferencial na expressão, pela regra da cadeia, temos:

$$D(h(e^{At}x)) = D(e^{Bt}(h(x))) \Rightarrow D(h(e^{At}x))e^{At} = e^{Bt}D(h(x)).$$

Definindo $T^{-1} := D(h(0))$, temos que

$$T^{-1}e^{At} = D(h(0))e^{At} = e^{Bt}D(h(0)) = e^{Bt}T^{-1}.$$

Note que, para $x = 0$, $e^{At}x = e^{At}0 = 0$. Concluimos que $e^{At} = Te^{Bt}T^{-1} \Leftrightarrow A = TBT^{-1}$

c) \Rightarrow a) Sendo A e B semelhantes, existe uma matriz inversível T tal que $A = TBT^{-1}$ e, portanto, $e^{At} = Te^{Bt}T^{-1} \Leftrightarrow T^{-1}e^{At} = e^{Bt}T^{-1}$. Definindo uma conjugação $h(x) = T^{-1}(x)$, cuja continuidade da derivada e de sua inversa é garantido pela linearidade T e:

$$h(e^{At}x) = T^{-1}(e^{At}x) = e^{Bt}(T^{-1}x) = e^{Bt}(h(x)).$$

Portanto, os fluxos são diferenciavelmente conjugados.

a) \Rightarrow b) Seja h uma conjugação diferenciável tal que $h(\phi_t(x)) = \psi_t(h(x))$. Substituindo a expressão dos fluxos, temos $h(e^{At}x) = e^{Bt}(h(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. Pela diferenciabilidade de h , temos

$$D(h(e^{At}x)) = D(e^{Bt}(h(x))) \Rightarrow D(h(e^{At}x))e^{At} = e^{Bt}D(h(x)).$$

Definindo $T^{-1} := D(h(0))$, temos $T^{-1}e^{At} = e^{Bt}T^{-1}$ e, como $Dh(0)$ é invertível, define uma conjugação linear. \square

Corolário A .1. *Um sistema linear $x' = Ax$ é diferenciavelmente conjugado ao sistema associado com a Forma de Jordan J de A .*

Demonstração. Sendo J a forma de Jordan da matriz A , por definição segue que A e J são semelhantes. Aplicando o Teorema A .1, temos o resultado. \square

APÊNDICE B – CONJUGAÇÃO ENTRE SISTEMAS LINEARES HIPERBÓLICOS

No apêndice anterior, tivemos o resultado de que matrizes semelhantes definem sistemas lineares diferenciavelmente conjugados. Agora, temos como objetivo trazer um resultado a respeito de conjugação topológica entre sistemas lineares hiperbólicos, cujo embasamento bibliográfico vem da obra de Jorge Sotomayor, (SOTOMAYOR, 1979).

Definição B .1. Dado um sistema linear hiperbólico $x' = Ax$, o número $s = s(A)$ de autovalores com parte real negativa é chamado de **índice de estabilidade** do sistema.

Definição B .2. Dado um sistema linear hiperbólico $x' = Ax$, chama-se de **subespaço estável** de A o subespaço maximal E^s invariante por A tal que $A|_{E^s}$ tem todos os seus autovalores com parte real negativa. Analogamente, chama-se de **subespaço instável** de A o subespaço maximal E^u invariante por A tal que $A|_{E^u}$ tem todos os seus autovalores com parte real positiva.

Recordando que um subespaço é dito invariante por uma matriz A quando aplicado a transformação linear definida por A em cada elemento do subespaço, obtém-se um elemento do subespaço, isto é, sendo U o subespaço, $A(U) = U$.

A seguir, temos dois lemas que servirão de apoio para a Proposição B .1, que apresenta uma propriedade dos sistemas hiperbólicos.

Lema B .1. *Seja $\varepsilon > 0$. Então, para todo $k > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon t} t^k = 0$. Daí, para qualquer polinômio $p(t)$, $e^{-\varepsilon t} p(t)$ é limitado para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Basta aplicar a mudança de variável $t = 1/s$, o que nos fornece

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon t} t^k = \lim_{s \rightarrow 0} e^{\frac{-\varepsilon}{s}} \left(\frac{1}{s} \right)^k = \lim_{s \rightarrow 0} e^{\frac{-\varepsilon}{s}} s^{-k}.$$

Para $s > 0$, temos que $e^{\frac{-\varepsilon}{s}}$ é limitado e $s^{-k} \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$, portanto o limite do produto também é 0. □

Lema B .2. *Dado um autovalor λ de um sistema hiperbólico com parte real negativa e um μ tal que $0 < \mu < -\alpha = -\text{Re}(\lambda)$. Então existe constante $K \geq 1$ tal que*

$$\begin{aligned} \|e^{J(\lambda)}\| &\leq Ke^{-t\mu}, t \geq 0; \\ \|e^{J(\alpha, \beta)}\| &\leq Ke^{-t\mu}, t \geq 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $J(\lambda)$ a forma canônica de Jordan para $A|_W$, sendo W o subespaço invariante por A tal que λ é o único autovalor de $A|_W$. Neste caso, podemos escrever $J(\lambda) = \lambda I + N$, onde I é a matriz identidade e N a matriz nilpotente, onde $E_{1ij} = 0$ se $j \neq i + 1$ e as entradas não

nulas são iguais a 1. Com isso temos

$$e^{J(\lambda)t} = e^{(\lambda+M)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{E_1 t} = e^{\lambda t} \left[E + \frac{E_1 t}{1} + \frac{E_1^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{E_1^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \right] = e^{\lambda t} \cdot \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{E_1^i t^i}{i!} \right].$$

Tomando sua norma temos:

$$\|e^{J(\lambda)t}\| \leq |e^{\lambda t}| \cdot \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{E_1^i t^i}{i!} \right\| \leq e^{-\mu t} \left[e^{-\varepsilon t} \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{E_1^i t^i}{i!} \right\| \right]$$

Sendo $\varepsilon = -\mu - \operatorname{Re}(\lambda)$, isto é, $e^{\lambda t} = e^{(-\mu-\varepsilon)t}$. Como λ é um autovalor com parte real negativa e $0 < \mu < -\operatorname{Re}(\lambda)$ por hipótese, então $\varepsilon > 0$ e como o somatório anterior é um polinômio $p(t)$, aplicamos o Lema B.1 e concluímos que existe K , em particular, $K \geq 1$ tal que

$$e^{-\varepsilon t} \cdot \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{E_1^i t^i}{i!} \right] \leq K.$$

Portanto,

$$\|e^{J(\lambda)t}\| \leq K \cdot e^{-\mu t}.$$

Analogamente, temos o caso complexo. □

Proposição B.1. *Seja $x' = Ax$ um sistema linear hiperbólico de índice de estabilidade s .*

a) $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, E^s e E^u são invariantes pelo sistema, isto é, para todo $x \in E^s$, a trajetória do sistema $e^{At}x$ pertence a E^s para todo $t \in \mathbb{R}$. Analogamente para $x \in E^u$. A dimensão de E^s é s .

b) Existem $\mu > 0$ e $K \geq 1$ tais que

$$a) |e^{At}x| \leq Ke^{-\mu t}|x| \text{ para } x \in E^s \text{ e } t \geq 0.$$

$$b) |e^{At}x| \leq Ke^{\mu t}|x| \text{ para } x \in E^u \text{ e } t \leq 0.$$

Demonstração. Para demonstrar essa proposição, faremos três observações que têm como conclusão o resultado esperado:

Observação B.0.1. Se h é uma conjugação linear entre dois sistemas $x' = Ax$ e $x' = Bx$ cujos subespaços estáveis são E^s e \bar{E}^s , então $h(E^s) = \bar{E}^s$.

Imediato, pois o homeomorfismo leva autovetores em autovetores, preservando a quantidade e a estabilidade, conforme constatado na Seção 2, na propriedade 3.

Observação B.0.2. A conclusão 2) não depende da norma nem da classe de similaridade de A .

De fato, se $\alpha | | \leq \| \| \leq \gamma | |$, então $\alpha | e^{At} x | \leq \| e^{At} x \| \leq \gamma | e^{At} x | \leq \gamma K e^{-\mu t} | x |$. Portanto, $| e^{At} x | \leq \gamma / \alpha K e^{\mu t} | x |$, com $\gamma / \alpha K \geq 1$.

Além disso, se C é uma matriz real ou complexa invertível, então

$$\left| e^{C^{-1} A C t} x \right| = \left| C^{-1} e^{A t} C x \right| \leq \left| C^{-1} \right| \left| e^{A t} C x \right| \leq \left| C^{-1} \right| K e^{-\mu t} | C | | x | = K_1 e^{-\mu t} | x |,$$

com $K_1 = | C^{-1} | | C | K \geq 1$.

Observação B .0.3. Se $x' = Ax$ é hiperbólico com índice de estabilidade s , então ele é linearmente conjugado a um sistema da forma

$$\begin{aligned} x_1' &= A_1 x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R}^s \\ x_2' &= A_2 x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n-s}, \end{aligned}$$

onde os autovalores de A_1 tem parte real negativa e os autovalores de A_2 tem parte real positiva.

Segue do Corolário A .1, conjugando A com sua forma de Jordan J tal que

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix},$$

onde J_1 são os blocos $s \times s$ de Jordan com autovalores cuja parte real é negativa e J_2 os blocos $(n - s) \times (n - s)$ com autovalores cuja parte real é positiva, sendo $A_1 := J_1$ e $A_2 := J_2$.

Pela Observação B .0.3 podemos considerar o sistema do enunciado da proposição como o linearmente conjugado descrito por ela, onde $E^s = \mathbb{R}^s \times (0 \in \mathbb{R}^{n-s})$ e $E^u = (0 \in \mathbb{R}^s) \times \mathbb{R}^{n-s}$, portanto, temos que $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ e a invariância pelo sistema é direta, portanto, 1) está demonstrado.

Pela Observação B .0.2, podemos tomar a norma do *sup* e a matriz A na sua forma de Jordan. Isto é, temos

$$\left| e^{A t} x \right| = \left| (e^{J_1 t} x_1, e^{J_2 t} x_2, \dots, e^{J_k t} x_k) \right| = \sup_{i=1, \dots, k} \left| e^{J_i t} x_i \right|,$$

pelo Lema B .2,

$$\left| e^{A t} x \right| = \sup_{i=1, \dots, k} \left| e^{J_i t} x_i \right| \leq \sup_{i=1, \dots, k} K_i e^{-\mu t} | x_i | \leq K e^{\mu t} | x |,$$

sendo $K = \sup K_i$ e $| x | = \sup \{ | x_i | \}$, para $i = 1, \dots, k$. □

Corolário B .1. Nas hipóteses da Proposição B .1, temos

- (a) $| e^{A t} x | \geq K^{-1} e^{\mu t} | x |$ para todo $x \in E^u$ e $t \geq 0$.
- (b) $| e^{A t} x | \geq K^{-1} e^{-\mu t} | x |$ para todo $x \in E^s$ e $t \leq 0$.

Demonstração. (a) Para $t \geq 0$ e $\bar{x} = e^{At}x$ e $\tau = -t$, conseqüentemente $\tau \leq 0$, pela desigualdade do item 2.(b) da Proposição B .1, temos:

$$|x| = |e^{A(t-\tau)}x| = |e^{A(t+\tau)}x| = |e^{A\tau}e^{At}x| = |e^{A\tau}\bar{x}| \leq Ke^{\mu\tau}|\bar{x}| = Ke^{\mu\tau}|e^{At}x|$$

$$|e^{At}x| \geq K^{-1}e^{-\mu\tau}|x| = K^{-1}e^{\mu t}|x|.$$

(b) Para $t \leq 0$, $\bar{x} = e^{At}x$ e $\tau = -t$, portanto, $\tau \geq 0$, aplicamos o item 2.(a) da Proposição B .1:

$$|x| = |e^{A(t-\tau)}x| = |e^{A(t+\tau)}x| = |e^{A\tau}e^{At}x| = |e^{A\tau}\bar{x}| \leq Ke^{-\mu\tau}|\bar{x}| = Ke^{-\mu\tau}|e^{At}x|$$

$$\Rightarrow |e^{At}x| \geq K^{-1}e^{\mu\tau}|x| = K^{-1}e^{-\mu t}|x|.$$

□

Com isso, concluímos que uma solução que pertence a E^s tende a 0 exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$ (pela Proposição B .1, item 2.(a)) e se afasta exponencialmente de 0 quando $t \rightarrow -\infty$ (pelo Corolário B .1, item (b)), funcionando como um atrator. Pelo mesmo raciocínio, E^u funciona como uma fonte. As trajetórias que não pertencem a nenhum dos espaço têm seu comportamento similar ao de uma hipérbole, onde para $t \rightarrow \infty$ suas componentes de E^s tendem a zero enquanto as suas componentes de E^u tendem a ∞ e para $t \rightarrow -\infty$, suas componentes de E^s tendem a ∞ enquanto as suas componentes de E^u tendem a 0. Isso acontece pois $e^{At}x = e^{At}(x_s + x_u) = e^{At}x_s + e^{At}x_u$, onde $x_s \in E^s$ e $x_u \in E^u$.

Teorema B .1. *As seguintes proposições são equivalentes:*

- O sistema $x' = Ax$ é um atrator.
- Todos os autovalores próprios de A têm parte real negativa.
- Existem $\mu > 0$ e $K \geq 1$ tais que $|e^{At}x| \leq Ke^{-\mu t}|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.
- O sistema $x' = Ax$ é topologicamente conjugado a $x' = -x$.

Demonstração. 4 \rightarrow 1: Decorre do fato que o sistema $x' = -x$ é um atrator, pois $e^{-t}x \rightarrow 0$ quanto $t \rightarrow \infty$ e a conjugação topológica mantém estrutura do sistema.

1 \rightarrow 2: Suponha λ um autovalor de A , podendo ser real ou complexo. Caso seja real, temos que $e^{\lambda t}|v|$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$ se e somente se $e^{\lambda t}$ tende a zero, ou seja, se, e só se, λ é negativo. Para o caso complexo $\lambda = \alpha + \beta i$, temos que $|e^{At}v| = e^{\alpha t}|\cos(\beta t)v_1 + \text{sen}(\beta t)v_2|$, que também tende a zero se, e só se, $e^{\alpha t} \rightarrow 0$, isto é, $\alpha < 0$.

2 \rightarrow 3: Segue da Proposição B .1, item 2.(a).

3 \rightarrow 4: Considere a norma provinda do produto interno euclidiano, isto é, $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ e $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.

i. A forma quadrática $q(x) = \int_0^\infty \langle e^{At}x, e^{At}x \rangle dt$ é positiva definida pois o produto interno de um vetor com si mesmo é, por definição, maior que zero e tem a convergência da integral como consequência da desigualdade em 3., já que o exponencial é limitado.

Além disso,

$$q(e^{Au}x) = \int_0^\infty \langle e^{At}e^{Au}x, e^{At}e^{Au}x \rangle dt = \int_0^\infty \langle e^{A(t+u)}x, e^{A(t+u)}x \rangle dt,$$

e pela troca $v = t + u$,

$$q(e^{Au}x) = \int_u^\infty \langle e^{Av}x, e^{Av}x \rangle dv.$$

Derivando a expressão em u , temos

$$\frac{dq}{du}(e^{Au}x) = \frac{dq}{dv} \int_u^\infty \sum (e^{Av}x_i)^2 dv = \lim_{v \rightarrow \infty} \sum (e^{Av}x_i - e^{Au}x_i) = \sum -e^{Au}x_i = -\langle e^{Au}x, e^{Au}x \rangle.$$

ii. Para toda forma quadrática q , positivamente definida, existem números positivos α e β tais que $\alpha\|x\|^2 \leq q(x) \leq \beta\|x\|^2$. De fato, basta tomar $\alpha = \min\{q(v); \|v\| = 1\}$ e $\beta = \max\{q(v); \|v\| = 1\}$, assim, todo vetor x pode ser escrito como $x = kv$, sendo $\|v\| = 1$ e, conseqüentemente, $|k| = \|x\|$. Como toda forma quadrática é associada a uma forma bilinear, que nesse caso chamaremos de b , então $q(x) = b(x, x) = b(kv, kv) = k^2b(v, v) = k^2q(v)$. Pela definição, $\alpha \leq q(v) \leq \beta$, para qualquer $q(v)$. Portanto, $k^2\alpha \leq k^2q(v) \leq k^2\beta \Rightarrow \alpha\|x\|^2 \leq q(x) \leq \beta\|x\|^2$.

iii. Para todo $x \neq 0$, a trajetória $e^{At}x$ intercepta todos os esferoides $q(x) = r > 0$.

Tomando a desigualdade em ii. e $x = e^{At}x$,

$$\alpha\|e^{At}x\|^2 \leq q(e^{At}x) \leq \beta\|e^{At}x\|^2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha\|e^{At}x\|^2} \geq \frac{1}{q(e^{At}x)} \geq \frac{1}{\beta\|e^{At}x\|^2},$$

multiplicando a expressão por $-\langle e^{At}x, e^{At}x \rangle$:

$$\frac{-\langle e^{At}x, e^{At}x \rangle}{\alpha\|e^{At}x\|^2} \leq \frac{-\langle e^{At}x, e^{At}x \rangle}{q(e^{At}x)} \leq \frac{-\langle e^{At}x, e^{At}x \rangle}{\beta\|e^{At}x\|^2},$$

por i ,

$$-\frac{1}{\alpha} \leq \frac{dq/dt(e^{At}x)}{q(e^{At}x)} \leq -\frac{1}{\beta}.$$

Integrando de 0 a t :

$$-\frac{t}{\alpha} \leq \log q(e^{At}x) - \log q(x) \leq -\frac{t}{\beta}.$$

Portanto

$$e^{-t/\alpha}q(x) \leq q(e^{At}x) \leq e^{-t/\beta}q(x)$$

e daí, quando t percorre \mathbb{R} , $q(e^{At}x)$ percorre todo o eixo positivo.

Note que, em virtude de *i.*, $e^{At}x$ corta cada esferoide uma única vez, apontando para o seu interior. Se $x \neq 0$, denotemos por t_x o único número real tal que $q(e^{At_x}x) = 1$.

iv. A função t_x é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Esse fato decorre do Teorema da Função Implícita aplicado à equação $q(e^{At}x) = 1$, pois por *i.*, $\partial/\partial t (q(e^{At}x)) \neq 0$, se $x \neq 0$.

Passamos a definir a conjugação topológica h da seguinte maneira: $h(x) = e^{t_x} e^{At_x} x$ se $x \neq 0$ e $h(0) = 0$, pois t_x não está definido para $x = 0$. É claro que, por *iv.*, é consequência do Teorema da Função Implícita que $h|\mathbb{R}^n - \{0\}$ é um difeomorfismo de classe C^∞ . Provemos a continuidade de h em 0.

Substituindo $h(x)$ na desigualdade obtida em *ii.*, temos:

$$\alpha \|h(x)\|^2 \leq q(h(x)) \leq \beta \|h(x)\|^2 \Rightarrow \alpha \|h(x)\|^2 \leq q(e^{t_x} e^{At_x} x) \leq \beta \|h(x)\|^2, \text{ se } x \neq 0,$$

considerando a primeira desigualdade, dividindo por α e tomando a raiz:

$$\|h(x)\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} (q(e^{t_x} e^{At_x} x))^{1/2},$$

como e^{t_x} é constante e $q(e^{At_x} x) = 1$,

$$\|h(x)\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} e^{t_x},$$

De *iii.*,

$$e^{-t_x/\beta} q(x) \geq q(e^{At_x} x) = 1$$

e daí,

$$e^{-t_x} \geq [q(x)]^{-\beta} \Rightarrow e^{t_x} \leq [q(x)]^\beta.$$

Substituindo,

$$\|h(x)\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} [q(x)]^\beta$$

consequentemente, para $x \rightarrow 0$, $h(x) \rightarrow 0$.

Sendo h uma função contínua e injetiva em \mathbb{R}^n , em particular, em um compacto X contendo a origem, então com certeza $0 \in h(X)$, pois $h(0) = 0$. Tomemos (y_n) uma sequência de termos em $h(X)$ tal que $y_n \rightarrow 0$. Definimos $x_n = h^{-1}(y_n)$ um sequência de termos em X , que provaremos que o único valor que essa sequência pode assumir com $n \rightarrow \infty$ é zero. De fato, considere uma subsequência x_{n_k} tal que $x_{n_k} \rightarrow a$, com $a \in X$. Como h é contínua,

$$h(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n_k} = 0 = h(0).$$

Pela injetividade, $a = 0$. Consequentemente, h^{-1} é contínua em 0.

Verifiquemos agora que h é conjugação entre os sistemas $x' = Ax$ e $x' = -x$, isto é, leva soluções $e^{At}x$ em $e^{-t}x$. Antes, note que para $y = e^{At}x$, a função t_y assume o valor tal que $q(e^{At_y}y) = 1$. Então,

$$y = e^{At}x \Rightarrow x = e^{-At}y,$$

sabemos que existe t_x tal que $q(e^{At_x}x) = 1$, portanto multiplicamos ambos lados da equação por e^{At_x} :

$$e^{At_x}x = e^{At_x}e^{-At}y = e^{A(t_x-t)}y.$$

Aplicando q :

$$q(e^{At_x}x) = q(e^{A(t_x-t)}y)$$

$$\Rightarrow 1 = q(e^{A(t_x-t)}y).$$

Portanto, pela definição e unicidade da função t_x , temos que para $y = e^{At}x$, $t_y = t_x - t$

Com isso, ainda considerando $y = e^{At}x$ para facilitar o entendimento, temos:

$$h(e^{At}x) = e^{t_y}e^{At_y}y = e^{t_x-t}e^{A(t_x-t)}e^{At}x = e^{-t}e^{t_x}e^{At_x}x = e^{-t}h(x),$$

conforme queríamos provar. □

Teorema B .2. *As seguintes proposições são equivalentes:*

- a) *O sistema $x' = Ax$ é uma fonte.*
- b) *Todos os autovalores próprios de A têm parte real positiva.*
- c) *Existem $\mu > 0$ e $K \geq 1$ tais que $|e^{At}x| \geq K^{-1}e^{\mu t}|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.*
- d) *O sistema $x' = Ax$ é topologicamente conjugado a $x' = x$.*

Demonstração. Note que uma conjugação h conjugua $x' = Ax$ com $x' = Bx$ se, e somente se, conjugua $x' = -Ax$ com $x' = -Bx$, pois $h(e^{At}x) = H(e^{-t(-A)}x) = e^{-t(-B)}h(x) = e^{Bt}h(x)$. Com isso, temos que 4. \Rightarrow 2., pois a mesma conjugação conjugua $x' = (-A)x$ com $x' = -x$, o que pelo Teorema B .1 implica que $-A$ tem autovalores com parte real negativa, ou seja, A tem autovalor com parte real positiva.

Além disso, 2. \rightarrow 3., pois $|x| = |e^{t(-A)}e^{tA}x| \leq Ke^{-\mu t}|e^{tA}x|$, então $|e^{At}x| \geq K^{-1}e^{\mu t}|x|$.

3. \Rightarrow 1., pois para $t \rightarrow \infty$, $|e^{tA}x| \rightarrow \infty$ e para $t \rightarrow -\infty$, $|e^{tA}x| \rightarrow 0$.

1. \Rightarrow 2., suponha λ um autovalor de A . Se λ for real, então uma trajetória $e^{\lambda t}|x|$ tende a ∞ quando $t \rightarrow \infty$ se, e somente se, $e^{\lambda t} \rightarrow \infty$, isto é, se $\lambda > 0$. Se $\lambda = \alpha + \beta i$, temos uma trajetória $|e^{\lambda t}x| = e^{\alpha t}|\cos(\beta t)x_1 + \sin(\beta t)x_2|$, que também tende a ∞ quando $t \rightarrow \infty$ se, e somente se, $e^{\alpha t} \rightarrow \infty$, isto é, $\alpha > 0$.

Por fim, 2. \rightarrow 4., pelo Teorema B .1 aplicado a $-A$. □

Lema B .3. Se $x'_i = A_i x_i$ é topologicamente conjugado a $x'_i = B_i x_i$ para $i = 1, 2$ e $x_i \in \mathbb{R}^n$, então o sistema

$$x'_1 = A_1 x_1,$$

$$x'_2 = A_2 x_2,$$

é topologicamente conjugado a

$$x'_1 = B_1 x_1,$$

$$x'_2 = B_2 x_2.$$

Demonstração. Seja h_i uma conjugação topológica entre $x'_i = A_i x_i$ e $x'_i = B_i x_i$, com $i = 1, 2$. Então, $h = (h_1, h_2)$ é uma conjugação topológica entre os dois sistemas, pois $h(e^{A_1 t} x_1, e^{A_2 t} x_2) = (e^{B_1 t} x_1, e^{B_2 t} x_2) = (e^{B_1 t}, e^{B_2 t})(h(x_1), h(x_2))$. \square

Lema B .4. Seja $x' = Ax$ um sistema linear hiperbólico. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ pertence a E^s se e somente se $e^{At} x$ é limitado para todo $t \geq 0$. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ pertence a E^u se e somente se $e^{At} x$ é limitado para todo $t \leq 0$.

Demonstração. Seja um ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Pela Proposição B .1, temos que $x = x_s + x_u$, com $x_s \in E^s$ e $x_u \in E^u$, donde a solução $e^{At} x = e^{At} x_u + e^{At} x_s$. Pelo Corolário B .1, item (a),

$$|e^{At} x| \geq |e^{At} x_u| - |e^{At} x_s| \geq K^{-1} e^{\mu t} |x_u| - |e^{At} x_s|.$$

Sabendo que $|e^{At} x_s| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, então $|e^{At} x|$ tende a infinito se $x_u \neq 0$. Portanto, para $t \geq 0$, $|e^{At} x|$ é limitado se, e somente se, $x \in E^s$ (isto é, $x_u = 0$). Analogamente, para $t \rightarrow -\infty$, pelo Corolário B .1, item (b),

$$|e^{At} x| \geq |e^{At} x_s| - |e^{At} x_u| \geq K^{-1} e^{-\mu t} |x_s| - |e^{At} x_u|.$$

Como $|e^{At} x_u| \rightarrow 0$, então $|e^{At} x| \rightarrow \infty$ se $x_s \neq 0$. Portanto, $|e^{At} x|$ é limitado para $t \leq 0$ se e somente se $|e^{At} x| \in E^u$ (isto é, $x_s = 0$). \square

A partir disso, podemos introduzir o teorema mais importante desta seção.

Teorema B .3. Dois sistemas lineares hiperbólicos $x' = Ax$ e $x' = Bx$ em \mathbb{R}^n são topologicamente conjugados se e somente se têm o mesmo índice de estabilidade.

Demonstração. Pela Observação B .0.3, se $x' = Ax$ tem índice de estabilidade s então ele é linearmente conjugado ao sistema:

$$(*) \begin{cases} x'_1 = A_1 x_1, & x_1 \in \mathbb{R}^s \\ x'_2 = A_2 x_2, & x_2 \in \mathbb{R}^{n-s}. \end{cases}$$

(*) é topologicamente conjugado a:

$$(**) \begin{cases} x'_1 = -x_1, & x_1 \in \mathbb{R}^s \\ x'_2 = x_2, & x_2 \in \mathbb{R}^{n-s}. \end{cases}$$

Pelo Teorema B .2, temos que $x'_1 = A_1 x_1$, $x_1 \in \mathbb{R}^s$ é topologicamente conjugado a $x'_1 = -x_1$, $x_1 \in \mathbb{R}^s$, tal como $x'_2 = A_2 x_2$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-s}$ é topologicamente conjugado a $x'_2 = x_2$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-s}$ pelo Teorema B .2. Então, a conjugação entre os sistemas (*) e (**) é consequência do Lema B .3.

Analogamente, temos $x' = Bx$ conjugados à (**), o que implica que existe uma conjugação topológica entre $x' = Ax$ e $x' = Bx$.

Por outro lado, se h é uma conjugação topológica entre dois sistemas $x' = Ax$ e $x' = Bx$, temos que $h(E_A^s) = E_B^s$, sendo E_A^s , E_B^s os subespaços estáveis de $x' = Ax$ e $x' = Bx$ respectivamente. De fato,

$$e^{Bt} h(x) = h(e^{At} x), \text{ logo se } x \in E_A^s \text{ e } t \rightarrow \infty,$$

temos por continuidade que $h(e^{At} x) \rightarrow h(0) = 0$. Portanto, $h(x) \in E_B^s$ pelo Lema B .4.

O Teorema da Invariância da Dimensão de Brouwer implica que $\dim E_B^s = \dim E_A^s$, isto é, tem o mesmo índice de estabilidade. \square

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil

