UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

HÉVILA MARIA GABRIEL GARCIA

NÚMEROS IRRACIONAIS E SUAS PARTICULARIDADES

SÃO CARLOS
2022

HÉVILA MARIA GABRIEL GARCIA

NÚMEROS IRRACIONAIS E SUAS PARTICULARIDADES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende

SÃO CARLOS
2022

Garcia, Hévila Maria Gabriel

Números irracionais e suas particularidades / Hévila Maria Gabriel Garcia -- 2022.
44f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Alex Carlucci Rezende
Banca Examinadora: Alex Carlucci Rezende, Cesar Rogério de Oliveira, José Nazareno Vieira Gomes
Bibliografia

1. Números irracionais. 2. História dos números irracionais. 3. Irracionais na Educação Básica. I. Garcia, Hévila Maria Gabriel. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 9/2022/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

HÉVILA MARIA GABRIEL GARCIA

NÚMEROS IRRACIONAIS E SUAS PARTICULARIDADES

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 27 de setembro de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	**Nome Completo**
Orientador	Alex Carlucci Rezende
Membro da Banca 1	Cesar Rogério de Oliveira
Membro da Banca 2	José Nazareno Vieira Gomes

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

A Deus pela minha vida e pela força dada.

Aos meus pais Maria Jacira e Nilson que não mediram esforços em apoiar meus sonhos, me incentivando e fortalecendo em todos os momentos. É graças a eles que estou hoje aqui.

Ao meu noivo André que desde o começo da graduação me incentivou e esteve sempre ao meu lado.

Ao meu orientador Alex, por todo o suporte, esclarecer minhas dúvidas, compartilhar comigo uma parte de seu grande conhecimento e estar presente durante toda a elaboração deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos os principais conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, dando enfoque ao conjunto dos números irracionais. Abordamos sua parte histórica, os exemplos mais famosos e a demonstração de suas irracionalidades. Além disso, tratamos dos conceitos de números transcendentes e algébricos. Na segunda parte, expomos a maneira que o conjunto dos números irracionais é abordado na Educação Básica e, ainda, criamos e aplicamos uma atividade envolvendo os conjuntos numéricos em uma Escola Estadual.

Palavras-chave: Números irracionais. Irracionalidade. História dos números irracionais. Avaliação diagnóstica. Irracionais na Educação Básica.

ABSTRACT

In this work we present the main numerical sets: natural, integers, rational, irrational and real, focusing on the set of irrational numbers. We approach its historical part, the most famous examples and the proof of their irrationalities. In addition, we deal with the concepts of transcendental and algebraic numbers. In the second part, we discuss the way that the set of irrational numbers is approached in Basic Education and, moreover, we create and apply an activity involving the numerical sets in a State School.

Keywords: Irrational numbers. Irrationality. History of irrational numbers. Diagnostic evaluation. Irrationals in Basic Education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os conjuntos numéricos surgiram de acordo com as necessidades da humanidade no decorrer da história e através deles conseguimos organizar os números em grupos de forma a terem alguma característica que os torne pertencentes àquele determinado grupo.

Com isso, temos como principais conjuntos estudados neste trabalho: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.

Na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 1 (primeira etapa deste trabalho), apresentamos cada um dos conjuntos numéricos, tratando suas características e propriedades. Em seguida, demos um enfoque maior ao conjunto dos números irracionais, primeiramente apresentando a parte histórica do surgimento dos primeiros elementos do conjunto e a polêmica envolvida. Em sequência, abordamos os exemplos mais famosos do conjunto: $\sqrt{2}$, π e o número de Euler, com o relato de suas histórias e a demonstração de suas irracionalidades. Além disso, apresentamos o conceito de números transcendentes e algébricos.

No Capítulo 2 utilizamos o livro (IEZZI et al., 2004) para as propriedades de cada conjunto numérico e, no Capítulo 3, os livros (BOYER; MERZBACH, 2019) e (MAOR, 2006) foram a base para a parte histórica apresentada. Além disso, para um aprofundamento da Seção 3.4 indicamos o trabalho (CORADO et al., 2017).

É importante observar que o objetivo final desta monografia é propor atividades abordando os números irracionais com o intuito de aplicá-las a alunos dos Ensinos Fundamental II e Médio. Tendo isso em vista, num primeiro momento (Trabalho de Conclusão de Curso 1) nos limitamos a estudar a história e as particularidades dos números irracionais (veja Capítulos 2 e 3), para que, neste segundo momento (Trabalho de Conclusão de Curso 2 com Prática), pudéssemos avaliar como os números irracionais são abordados em materiais didáticos e em sala de aula e propor atividades para aplicá-las aos alunos.

Com isso, no Capítulo 4 é exposto uma análise dos materiais didáticos que são mais utilizados na Educação Básica. Os materiais abordados são: Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Comum Curricular, Apostilas do Governo do Estado de São Paulo e livros didáticos.

E, por fim, no Capítulo 5 é apresentada uma atividade que foi aplicada em uma Unidade Escolar Estadual. Trazemos os resultados obtidos e, ainda, uma atividade extra como sugestão.

2 CONJUNTOS NUMÉRICOS

Para entendermos as particularidades do conjunto dos números irracionais, primeiramente precisamos conhecer os conjuntos existentes: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Por esta razão, neste capítulo apresentaremos esses conjuntos.

2.1 NÚMEROS NATURAIS

Imaginemos a seguinte situação: há uma propriedade rural e nela tem-se ovelhas e ao observá-las, por serem muitas, não é possível identificar a quantidade de cabeças. Então, para solucionar o problema supõe-se que irá recuá-las em um espaço e a cada ovelha que adentrar será representada em um papel por I.

Sem adentrar nenhuma, possuímos a folha em branco.

Ao adentrar a primeira temos I, ou seja, apenas a ovelha que adentrou.

Entrou mais uma ovelha: II (ou seja, a ovelha que entrou antes e a que entrou agora)

Entrou mais uma: III (ou seja, as que tinham antes e a que entrou agora)

E assim por diante, até chegar na última ovelha que será no total todas as que entraram antes IIIIII... e a ultima que entrou I.

Ainda, ao mesmo tempo, suponhamos que fique uma outra pessoa observando a situação, e a cada risco feito no papel ela coloque uma pedra ao seu lado no chão.

Desta forma, percebe-se que a quantidade total de riscos no papel e pedras dependerá sempre de quantas ovelhas tinham adentrado antes e é desta maneira que o conjunto dos números naturais surge, devido à necessidade de contagem de objetos que se tinham desde a pré-história e que esses objetos ao serem contados possuíam a ideia de sucessão, ou seja, duas ovelhas adentradas vêm logo em seguida de uma ovelha adentrada e que não existem nenhuma ovelha no meio das duas. Ainda, a representação feita pelos riscos no papel e pelas pedrinhas no chão possuem uma relação biunívoca.

Sendo assim, podemos denotar o conjunto dos números naturais não nulos por:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}.$$

O matemático chamado Giuseppe Peano (1858-1932), mais conhecido somente como Peano, elaborou cinco axiomas sobre o conjunto dos números naturais:

- **(P1)** Existe o primeiro elemento do conjunto dos naturais e este é o 1 e chamado de "número um".
- **(P2)** Todo número natural possui um único sucessor e este é um número natural também.
- **(P3)** Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes e, portanto, se possuírem o mesmo sucessor serão números iguais.

(P4) O único número natural que não é sucessor de nenhum outro é o número 1.

(P5) Se um subconjunto de números naturais X contém o número 1 e contém o sucessor de cada um de seus elementos, então $X = \mathbb{N}$.

Logo, toda a teoria dos conjunto dos números naturais pode ser deduzida dos axiomas de Peano.

Muitos matemáticos não consideram o zero como parte do conjunto dos naturais e, portanto, em cada obra encontraremos uma visão diferente sobre ele. E nesses axiomas, fica evidente que Peano não considerava o zero como parte dos números naturais, porém, neste trabalho, iremos considerá-lo um número natural, uma vez que será útil para a construção dos outros conjuntos.

Observação 2.1. O zero, representado por 0, vem da palavra *zifr* em árabe, que significa vazio.

Portanto, denotaremos o conjunto dos números naturais por $\mathbb{N}$, e representando-o da seguinte maneira:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Observação 2.2. A letra $\mathbb{N}$ que representa o conjunto dos números naturais vem da palavra natural.

O conjunto dos números naturais é munido de duas operações fundamentais: adição e multiplicação. E essas apresentam as seguintes propriedades:

(A1) Associativa da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$, para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$;

(A2) Comutativa da adição: $a + b = b + a$, para todos $a, b \in \mathbb{N}$;

(A3) Elemento neutro da adição: $a + 0 = a$, para todo $a \in \mathbb{N}$;

(M1) Associativa da multiplicação: $(ab)c = a(bc)$, para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$;

(M2) Comutativa da multiplicação: $ab = ba$, para todos $a, b \in \mathbb{N}$;

(M3) Elemento neutro da multiplicação: $a \cdot 1 = a$, para todo $a \in \mathbb{N}$;

(D) Distributiva da multiplicação em relação à adição: $a \cdot (b + c) = ab + ac$, para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Para finalizar esta seção, relembremos três princípios relacionados ao conjunto dos números naturais.

Proposição 2.1 (Princípio da Casa dos Pombos)**.** *Se n casas de pombos são ocupadas por $pn + 1$ ou mais pombos, onde p e n são números naturais, então pelo menos uma casa é ocupada por $p + 1$ ou mais pombos.*

Proposição 2.2 (Princípio da Indução Finita)**.** *Seja $P(n)$ uma proposição definida sobre os naturais $n \geq 1$, tal que:*

(i) $P(1)$ é verdadeira.

(ii) $P(k+1)$ é verdadeira se $P(k)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \geq 1$.

Proposição 2.3 (Princípio da Boa Ordenação)**.** *Seja P um subconjunto não vazio dos naturais. Então, P contém um menor elemento, isto é, existe $m \in P$ tal que $m \leq s$ para todo $s \in P$.*

A demonstração de tais resultados são encontradas em (MILIES; COELHO, 2001) e (PANSERA; VALMÓRBIDA, 2010).

Observação 2.3. Observamos que as Proposições 2.1, 2.2 e 2.3 são todas equivalentes. A seguir, demonstramos essa afirmação.

Demonstração. Primeiro demonstraremos o Princípio da Casa dos Pombos (PCP) supondo como válido o Princípio da Indução Finita (PIF).

Se $n = 1$ a proposição é válida, pois teremos cada casa ocupada por $p + 1$ ou mais pombos. Agora, supondo $P(k)$ válida, iremos provar que $P(k + 1)$ é válida também. Então, ao distribuirmos $k + 1$ pombos em k casas, alguma casa terá mais de um pombo. Para $(k + 1) + 1 = k + 2$ pombos, teremos $k + 1$ casas. Escolhendo uma das casas, se essa tiver mais que um pombo a afirmação é válida, caso contrário, a casa tem somente um pombo, mas isso significa que $k + 1$ pombos foram distribuídos nas outras k casas restantes, logo, pela hipótese, alguma casa restante terá pelo menos, mais de um pombo. Portanto, o Princípio da Casa dos Pombos é válido.

Agora, demonstraremos o Princípio da Indução Finita (PIF) supondo como válido o Princípio da Boa Ordenação (PBO) e esta demonstração será por contradição.

Queremos provar que: se A é um subconjunto dos números naturais, possuindo as propriedades (i) e (ii) da Proposição 2.2, então $A = \mathbb{N}$. Vamos supor que, mesmo possuindo as propriedades (i) e (ii) o conjunto A não contenha todos os números naturais. Seja B o conjunto dos naturais não contidos em A, ou seja, $B = \mathbb{N} - A$. Pelo Princípio da Boa Ordenação, B possui um menor elemento. Ainda, este é maior do que 1, pois $1 \in A$. Seja z este menor elemento. É claro que $z - 1$ pertence a A e como A satisfaz (ii) então o sucessor de $z - 1$, que é z, também deve pertencer a A o que é uma contradição. Logo, $B = \emptyset$ e, portanto, o Princípio da Indução Finita é válido.

Por fim, demonstraremos o Princípio da Boa Ordenação (PBO) supondo como válido o Princípio da Indução Finita (PIF).

Suponha, por contradição, que $P \neq \emptyset$ não possui um menor elemento. Seja M o conjunto dos naturais que são menores que do que todo elemento de P, logo $1 \in M$, pois caso contrário, 1 seria o menor valor de P (que contraria a suposição inicial). Suponha agora que $k \in M$, logo k é menor do que todo elemento de P. Assim, $k + 1 \in M$, pois, caso contrário, $k + 1$ seria o menor elemento de P. Pelo Princípio de Indução Finita, temos que $M = \mathbb{N}$, o que implica que $P = \emptyset$, ou seja, um absurdo, pois $P \neq \emptyset$. Portanto, P possui um menor elemento.

Conclui-se que as Proposições 2.1, 2.2 e 2.3 são todas equivalentes. □

2.2 NÚMEROS INTEIROS

Tomemos agora a seguinte situação: possuímos uma conta no banco com o saldo de $R\$10,00$ e precisamos pagar um boleto de $R\$25,00$. Ao pagar nota-se que a transação havia completado, mas na conta aparecia um valor em vermelho escrito "$-R\$15,00$".

Em uma situação como essa, evidencia-se que o conjunto dos números naturais não resolveria o problema:

$$10 - 25 = -15.$$

Então, para isso, recorre-se ao conjunto dos números inteiros, denotado pelo símbolo $\mathbb{Z}$, em que neste conjunto para cada número natural, existe um outro de forma que seja quantitativamente igual, porém de qualidade oposta, sendo intitulado número negativo.

Podemos representar o conjunto dos inteiros da seguinte maneira:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Além disso, podemos representar o conjunto dos inteiros não-nulos como:

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$$

Observação 2.4. A letra $\mathbb{Z}$ que representa o conjunto dos números inteiros vem da palavra *zahl*, que significa número em alemão.

Os números negativos demoraram para serem aceitos pela sociedade, visto que, Diofanto de Alexandria (Século III a.C), por exemplo, quando manipulava problemas e encontrava soluções negativas as denominava absurdas. E somente a partir do período do Renascimento em que houve a expansão comercial e, consequentemente, a maior circulação de dinheiro, fez com que as pessoas começassem a considerar os números negativos sendo números, pois precisavam demonstrar seus lucros e prejuízos e, portanto, utilizavam números positivos e negativos.

Quanto às propriedades do conjunto dos inteiros, valem todas as propriedades mencionadas no conjunto dos naturais, [A1], [A2], [A3], [M1], [M2], [M3] e [D]. Além disso, a propriedade a seguir define a operação da subtração:

(A4) Simétrico ou oposto da adição: Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$.

Como vimos, o conjunto dos números inteiros é uma consequência do conjunto dos números naturais. A principal ideia foi considerar os números simétricos aos naturais.

Na próxima seção veremos o conjunto dos números racionais, que são definidos a partir dos números inteiros.

2.3 NÚMEROS RACIONAIS

Tomemos a seguinte situação: possuímos uma barra de chocolate e gostaríamos de dividir essa barra para três crianças de forma que cada uma coma a mesma quantidade da outra, quanto cada criança comeria da barra?

Percebe-se que recorrer aos conjuntos que já conhecemos nas seções anteriores não será suficiente. Para isso, temos o conjunto dos números racionais, definido por:

Definição 2.1. Um número é racional se puder ser escrito em forma de fração do tipo $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Denotamos esse conjunto por $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

Observação 2.5. A letra $\mathbb{Q}$ que representa o conjunto dos números racionais vem da palavra quociente.

Observação 2.6. Os números racionais admitem três formas de representação, sendo:

(1) Representação fracionária (fração ou número fracionário). Exemplo: $\frac{a}{b}$;

(2) Representação decimal (número decimal finito e periódico). Exemplos: $0,2 = \frac{2}{10}$ e $0,333... = \frac{3}{9}$;

(3) Representação porcentual (número porcentual). Exemplo: $25\% = \frac{25}{100}$.

Ainda, o conjunto dos números racionais é munido das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão:

Definição 2.2. A adição dos números racionais é definida por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd},$$

para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer.

Definição 2.3. A subtração dos números racionais é definida por:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd},$$

para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer.

Definição 2.4. A multiplicação dos números racionais é definida por:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer.

Além disso, temos a propriedade a seguir:

(M4) Simétrico ou inverso para a multiplicação: para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b} \neq 0$ existe $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b}.\frac{b}{a} = 1$

E a partir da propriedade **(M4)**, podemos definir a operação da divisão:

Definição 2.5. A divisão dos números racionais é definida por:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer não nulos.

Ainda, todas as propriedades vistas para números inteiros possuem a mesma validade para os números racionais.

E somente agora conseguimos resolver o problema inicial de quanto cada criança comeria do chocolate, em que:

$$\frac{1}{1} : \frac{3}{1} = \frac{1}{3}.$$

Ou seja, cada criança comeria um terço do chocolate.

2.4 NÚMEROS IRRACIONAIS

Neste momento, suponhamos a seguinte situação: Temos um quadrado de lado um e ao calcularmos sua diagonal chegamos ao resultado de $\sqrt{2}$, e ao tentarmos escrevê-lo da forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ não conseguimos (veremos a demonstração desse fato posteriormente).

A partir dessa situação é que fica claro que a $\sqrt{2}$ não pertence a nenhum dos conjuntos que vimos e surge o questionamento: esse seria um caso isolado ou existem outros casos iguais a esse?

E ao ampliar os conhecimentos, surge o conjunto dos números irracionais, que denotaremos por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, e dentro deste conjunto temos todos os números que em sua forma decimal não são periódicos, e por essa razão, não conseguimos representá-los da forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$.

No decorrer do próximo capítulo sobre as particularidades dos números irracionais, conheceremos mais sobre sua história, os exemplos mais famosos (como π, número de *Euler* e $\sqrt{2}$) e suas demonstrações de irracionalidades e, ainda, a ideia sobre números transcendentes e algébricos.

2.5 NÚMEROS REAIS

Por fim, o último conjunto numérico a ser considerado é o conjunto dos números reais, representado por $\mathbb{R}$. Este é composto por todos os conjuntos que vimos nas seções anteriores, definidos de forma geral em: racionais ou irracionais.

Observação 2.7. A letra $\mathbb{R}$ que representa o conjunto dos números reais vem da palavra real.

As propriedades de adição e subtração que foram apresentadas no conjunto dos números racionais são válidas para o conjunto dos números reais.

Além disso, podemos representar os números reais em uma reta ordenada, sendo esta chamada de reta real ou reta numérica. Nesta, os números estão ordenados, ou seja, tomando um número x pertencente à reta, temos que x é maior do que qualquer número colocado a sua esquerda e menor que qualquer número colocado a sua direita.

3 PARTICULARIDADES DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Neste capítulo traremos das particularidades dos números irracionais, conhecendo sobre sua história e seus exemplos mais famosos. Ainda, a ideia de números transcendentes e algébricos será abordada.

3.1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Em meados do século VI a.C., na Grécia, o pensador chamado Pitágoras concretizou uma sociedade secreta, na qual os membros eram denominados pitagóricos. Dentro desta sociedade, os participantes aprofundavam seus estudos nos números, pois tinham consigo que Deus, para criar o mundo, havia seguido padrões numéricos.

Nas rotinas de estudos, certo dia perceberam que ao observarem um quadrado de lado um e dividi-lo em dois triângulos retângulos, sua diagonal media $\sqrt{2}$, que até então era um número desconhecido (veja a Figura 3.1).

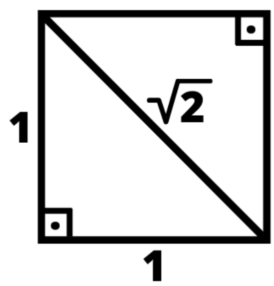


Figura 3.1 – Quadrado de lado um. Fonte: Autoria própria.

A partir disso, gerou-se um grande alvoroço, pois para os pitagóricos todos os números faziam parte dos números inteiros ou podiam ser expressos por algum número racional. Ou seja, para eles a reta numérica real estava completa, mas a partir dessa situação, observaram que haviam espaços a serem preenchidos.

Conta-se a lenda que, devido ao escândalo, tentaram manter essa situação descoberta entre eles para que ninguém soubesse do problema que obtiveram, mas que um dos membros pitagóricos, chamado Hipaso de Metaponto, acabou revelando o segredo para fora da sociedade e que, por esta razão, lançaram-no ao mar. Outros contam que ele não foi morto, mas que foi expulso da sociedade e, por isso, fizeram um túmulo com seu nome para insinuar sua morte.

Ainda, como os pitagóricos descobriram que $\sqrt{2}$ não era um número racional, denominaram-no como número irracional (que significa não-racional). Além disso, por bastante tempo somente

$\sqrt{2}$ era o único número irracional conhecido, até que em 425 a.C, segundo Platão, o pensador Teodoro de Cirene mostrou (ou segundo estudos, somente descobriu), que existiam outros números irracionais, como: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$.

Então, em torno de 370 a.C., Eudoxo, discípulo de Platão, conseguiu resolver o problema encontrado dos irracionais a partir de uma nova definição de proporção, esta que corresponde ao trabalho apresentado sobre os números irracionais de Richard Dedekind em 1872.

A seguir, apresentaremos os exemplos mais famosos de números irracionais.

3.2 O NÚMERO $\sqrt{2}$ (RAIZ QUADRADA DE DOIS)

A $\sqrt{2}$, como evidenciado na seção anterior, acredita ter sido o primeiro número irracional descoberto a partir do estudo da diagonal de um quadrado de lado um, e que por ser o primeiro, é o caso mais conhecido e estudado. Além disso, do ponto de vista algébrico, pode ser encontrado a partir da solução da equação $x^2 - 2 = 0$ com x um número positivo.

Acredita-se que a primeira demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ foi dada pelo seu descobridor Hipaso de Metaponto.

A seguir, demonstraremos a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Para isso, utilizaremos os seguintes conceitos preliminares:

Definição 3.1 (Máximo divisor comum - mdc)**.** Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, em que $c \geq 0$, então c é um máximo divisor comum de a e b se c é um divisor comum de a e b e se c é divisível por todos os divisores comum de a e b.

Notação: $mdc(a, b) = c$, ou seja, c é o máximo divisor comum entre a e b.

Definição 3.2 (Número par)**.** Denomina-se número par todo número inteiro que pode ser escrito da forma $2k$, para algum número inteiro k, ou seja, números que possuem resto zero quando divididos por 2.

Definição 3.3 (Número ímpar)**.** Denomina-se número ímpar todo número inteiro que pode ser escrito da forma $2k + 1$, para algum número inteiro k.

Lema 3.1. *Se a^2 é par, então a é par.*

Demonstração. Iremos demonstrar utilizando a técnica de demonstração pela contrapositiva.

Temos como proposição: Se a^2 é par, então a é par.

E como contrapositiva: Se a não é par, então a^2 não é par.

Demonstrando a contrapositiva, temos que, como a não é par, ele pode ser escrito da forma $a = 2k + 1$, tal que $k \in \mathbb{Z}$, seguindo a definição de número ímpar. Agora, elevando a ao quadrado temos:

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2 \cdot 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1.$$

Daí, como $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, iremos considerar $q = 2k^2 + 2k$, tal que $q \in \mathbb{Z}$ e, portanto:

$$a^2 = 2q + 1,$$

que é um número ímpar, como queríamos demonstrar. □

Com isso, temos:

Teorema 3.1. *O número $\sqrt{2}$ é um número irracional.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Dessa forma, podemos reescrevê-lo por meio de uma razão entre dois inteiros a e b na sua forma irredutível, ou seja, $mdc(a, b) = 1$. Então:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Agora, elevemos ambos os membros da equação ao quadrado:

$$a^2 = 2b^2.$$

Pela Definição 3.2, temos que a^2 é um número par e, pelo Lema 3.1, a é tambem um número par. Além disso, tomando $a = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} & a^2 = 2b^2 \\ \Leftrightarrow\ & (2k)^2 = 2b^2 \\ \Leftrightarrow\ & b^2 = 2k^2 \\ \overset{Def.3.2}{\Rightarrow}\ & b^2 \text{ é par} \\ \overset{Lema 3.1}{\Rightarrow}\ & b \text{ é par.} \end{aligned}$$

Por hipótese, temos que $\frac{a}{b}$ é irredutível, porém, como vimos, a e b são divisíveis por dois, ou seja, $mdc(a, b) = 2$, chegando a um absurdo. Portanto, $\sqrt{2}$ é um número irracional. □

3.3 O NÚMERO π (PI)

Outro famoso número irracional é o número π. Ele foi, segundo os registros, descoberto primeiramente pelos egípcios há mais de 4000 anos ao perceberem que a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro era constante. A partir daí surgiram vários questionamentos envolvendo esta divisão. Naquela época, ainda não se tinha um nome para essa razão. Alguns papiros antigos mostram que os egípcios calculavam que o resultado seria em torno de $3,16$.

Em torno do século III a.C., o matemático grego Arquimedes calculou o perímetro de dois hexágonos, sendo um inscrito e outro circunscrito numa circunferência. Ele foi aumentando o número de lados do polígono, até chegar aos 96 lados, e com isso, conseguiu uma aproximação do valor do π igual a $3,142$. Posteriormente, Ptolomeu, outro matemático e cientista grego, empregando a mesma técnica, mas com um polígono de 720 lados, conseguiu chegar ao resultado de $3,1416$.

Somente em 1706, o matemático inglês William Jones utilizou o símbolo π pela primeira vez para representar a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

Além disso, vale ressaltar que todos esses valores para π foram encontrados a partir de cálculos feitos à mão, mas hoje, com o uso de computadores, já se conhece 62,8 trilhões de casas decimais.

A seguir, discutiremos a irracionalidade de π inspirados na demonstração de (NIVEN, 2004). Precisaremos dos seguintes resultados.

Lema 3.2. *Se α é irracional e β é racional não nulo, então $\alpha\beta$ é irracional.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\alpha\beta$ seja racional. Como β é racional não nulo, então $\frac{1}{\beta}$ é racional. Então, segue que $\alpha\beta \cdot \frac{1}{\beta}$ é racional, ou seja, α é racional, o que é um absurdo. Portanto, $\alpha\beta$ é irracional. □

Proposição 3.1. *π^2 é irracional.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que π^2 é racional. Logo, podemos reescrevê-lo como $\pi^2 = \frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Observemos que

$$(b\pi)^2 = b^2\left(\frac{a}{b}\right) = ab$$

é um inteiro.

Definamos a seguinte sequência:

$$A_n = \frac{b^n}{n!}\int_0^{\pi} (x(\pi - x))^n \operatorname{sen} x \, dx.$$

Integrando por partes, duas vezes, temos:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{b^n}{n!}\int_0^{\pi} n(x(\pi - x))^{n-1}(\pi - 2x)\cos x \, dx \\ &= \frac{b^n}{n!}\int_0^{\pi} 2n(x(\pi - x))^{n-1} \operatorname{sen} x - n(n-1)(x(\pi - x))^{n-2}(\pi - 2x)^2 \operatorname{sen} x \, dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Reescrevendo

$$(\pi - 2x)^2 = \pi^2 - 4x(\pi - x) \tag{3.2}$$

e substituindo a equação (3.2) em (3.1), obtemos a seguinte fórmula de recorrência:

$$A_n = (4n - 2)bA_{n-1} - (b\pi)^2 A_{n-2}. \tag{3.3}$$

Agora, iremos deduzir que A_n é um inteiro, para todo n, usando o Princípio da Indução Finita.

Por integração direta, vemos que:

$$A_0 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = 2,$$
$$A_1 = b\int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen} x dx = 4q.$$

Logo, A_0 e A_1 são números inteiros.

Daí, suponhamos que A_{k-2} e A_{k-1} também sejam inteiros. Ainda, pela equação (3.3) e a hipótese de que b e $(b\pi)^2$ são inteiros, então A_k também é inteiro.

Logo, A_n é um inteiro para todo n, segundo a Proposição 2.2.

Para $x \in [0, \pi]$, temos que:

$$0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

e

$$0 \leq x(\pi - x) \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

Consequentemente,

$$0 \leq A_n \leq \pi\frac{(b\pi^2/4)^n}{n!}.$$

Ainda, tomando $x > 0$ real, seja x_n a sequência definida por $x_n = \dfrac{x^n}{n!}$. Então, x_n converge para 0. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(b\pi^2/4)^n}{n!} = 0.$$

Segue do Teorema do Confronto que:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 0.$$

Logo, para n suficientemente grande, A_n está estritamente entre 0 e 1. Porém, isso contradiz a suposição que A_n é um inteiro.

Portanto, π^2 é irracional. □

Com isso, podemos demonstrar que π é irracional.

Teorema 3.2. *π é irracional.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que π seja racional. Então, $\dfrac{1}{\pi}$ é racional não nulo. No entanto, a Proposição 3.1 nos garante que π^2 é irracional. Daí, segue do Lema 3.2 que $\dfrac{1}{\pi} \cdot \pi^2$ é irracional, ou seja, π é racional, gerando um absurdo. Portanto, π é irracional. □

Observação 3.1. Embora π não seja um número racional, conseguimos "boas aproximações" por números racionais, muitas delas conhecidas desde a antiguidade:

$$\frac{22}{7} = 3,142857142857...,$$
$$\frac{355}{113} = 3,141592920353...,$$
$$\frac{104348}{33215} = 3,141592653921...,$$
$$\pi = 3,141592653589....$$

3.4 O NÚMERO *e* (EULER)

Segundo (MAOR, 2006), o número de Euler era conhecido, de modo implícito e não intencional, pelos antigos povos mesopotâmios e egípcios, por meio de situações de ordem prática, antes de qualquer estudo ou intenção teórica. Depois de um grande lapso de tempo, o número de Euler surge no estudo desenvolvido por Napier, de forma indireta, em 1618, com relação aos logaritmos, sendo esses, criados como ferramenta para agilizar cálculos, por exemplo, na astronomia. Naquela época, para facilitar o cálculo de logaritmos, eram usados tábuas logarítmicas, pois ainda não existiam as calculadoras e os computadores que temos hoje em dia.

Napier queria escrever qualquer número como uma potência de algum número fixo (base). Deste modo, multiplicar ou dividir dois números seria equivalente a soma ou subtrair os expoentes das potências. Por exemplo: se quiséssemos multiplicar $8 \cdot 512$, trocamos 8 por 2^3 e 512 por 2^9. Então, $8 \cdot 512 = 2^3 \cdot 2^9 = 2^{12}$ e, então, o resultado ao realizar os cálculos era 4092.

Além disso, ele produziu uma tabela que completava os espaços entre as potências de expoente inteiro. Por exemplo, para multiplicar 3 por 5, Napier recorria a uma tabela na qual se observava que o número 2,322 era o expoente da potência de base 2 que resultava 5, ou seja, $2^{2,322} = 5$. Da mesma maneira, obtinha que $2^{1,585} = 3$. Então, $3 \cdot 5 = 2^{2,322} \cdot 2^{1,585} = 15$.

Para completar os inúmeros espaços entre as potências de números inteiros, Napier fez uma escolha, utilizando o número $1 - 10^{-7} = 0,9999999$. Essa ideia de utilizar um fator próximo a 1 é a que permite entender a essência do número de Euler.

Por outro lado, acredita-se que o número de Euler surgiu por meio de cálculos de juros compostos. Sabe-se que a fórmula de juros compostos, é dada por:

$$C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}, \tag{3.4}$$

em que C_t é o valor da soma do dinheiro, C_0 é o capital inicial, $\frac{r}{n}$ é a taxa de juros e nt períodos convertidos. E, ao considerar um caso especial da equação (3.4) em que o capital inicial será de 1 real a uma taxa anual de 1%, durante um ano composto n vezes, obtemos a equação:

$$C_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3.5}$$

Então, a cada valor de n que colocarmos e formos aumentando, percebe-se que a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ aproxima-se cada vez mais do valor $2,71828$.

Logo, não se sabe ao certo quando e como realmente foi descoberto o número de Euler. A única certeza é que o número foi denominado com este nome em homenagem à Leonhard Euler, utilizando como símbolo e.

A seguir, demonstraremos a irracionalidade de e utilizando os estudos das aulas de Cálculo B e inspirados na demonstração de (FOURIER, 1815).

Teorema 3.3. *O número de Euler, denotado por e, é um numero irracional.*

Demonstração. Podemos reescrever o número e como uma série de Taylor, da seguinte maneira:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots \tag{3.6}$$

Supondo por absurdo que e é um número racional, o número e pode ser escrito da forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Suponhamos ainda que $\frac{a}{b}$ é irredutível, isto é, $mdc(a, b) = 1$. Então, segue da equação (3.6) que:

$$\frac{a}{b} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{b!}\right) + \frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \ldots,$$

implicando que

$$0 < \frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{b!}\right) = \frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \cdots = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{3.7}$$

Porém, observamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(b+1)!} &= \frac{1}{(b+1)b!},\\
\frac{1}{(b+2)!} &= \frac{1}{(b+2)(b+1)b!},\\
\frac{1}{(b+3)!} &= \frac{1}{(b+3)(b+2)(b+1)b!},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\sum_{n=b+1}^{\infty}\frac{1}{n!} &= \frac{1}{(b+1)!}+\frac{1}{(b+2)!}+\frac{1}{(b+3)!}+\dots\\ &= \frac{1}{b!}\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+2)(b+1)}+\cdots\right)\\ &\leq \frac{1}{b!}\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+2)^2}+\frac{1}{(b+1)^3}+\cdots\right),\end{aligned} \tag{3.8}$$

visto que

$$b+1<b+2<b+3<\cdots\Rightarrow\cdots<\frac{1}{b+3}<\frac{1}{b+2}<\frac{1}{b+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b+2)(b+1)} &< \frac{1}{(b+1)(b+1)}=\frac{1}{(b+1)^2},\\ \frac{1}{(b+3)(b+2)(b+1)} &< \frac{1}{(b+1)(b+1)(b+1)}=\frac{1}{(b+1)^3},\end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

Agora, observamos que

$$\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^3}+\cdots$$

é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita cujo primeiro termo é $\frac{1}{b+1}$ e a razão é $\frac{1}{b+1}$. Portanto, essa soma é igual a:

$$\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^3}+\cdots=\frac{\frac{1}{b+1}}{1-\frac{1}{b+1}}=\frac{1}{b+1}\cdot\frac{b+1}{b}=\frac{1}{b}. \tag{3.9}$$

Substituindo a equação (3.9) na desigualdade (3.8), obtemos:

$$\sum_{n=b+1}^{\infty}\frac{1}{n!}<\frac{1}{b!}\frac{1}{b}. \tag{3.10}$$

Por fim, substituindo a desigualdade (3.10) na desigualdade (3.7):

$$0<\frac{a}{b}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{b!}\right)<\frac{1}{b!}\frac{1}{b},$$

e multiplicando toda a desigualdade por $b!$, temos:

$$0 < b!\left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{b!}\right) < \frac{1}{b} \leq 1. \tag{3.11}$$

Observemos que o segundo termo da desigualdade (3.11) é um número inteiro, visto que a e b pertencem ao conjunto dos números inteiros e, pelas propriedades da multiplicação e adição, temos que:

$$b!\left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{(b-1)!} - \frac{1}{b!}\right) = a(b-1)! - 2b! - \cdots - b - 1.$$

Porém, isso é um absurdo, pois não existe nenhum número inteiro positivo menor que 1. Portanto, e é um número irracional. $\square$

3.5 NÚMEROS TRANSCENDENTES E ALGÉBRICOS

Dentro de todos os conjuntos estudados aqui, ainda podemos separar os números entre duas categorias: números transcendentes e números algébricos.

Definição 3.4. Um número real α é dito algébrico se existir um polinômio não nulo, com coeficientes inteiros, tal que α seja raiz desse polinômio. Caso não exista, esse número é dito transcendente.

Além disso, a respeito dos exemplos que estudamos anteriormente dos irracionais mais famosos, podemos dizer que:

a) $\sqrt{2}$ é um número algébrico, pois é resultado da equação polinomial $x^2 - 2 = 0$,

b) π é um número transcendente,

c) e é um número transcendente.

A demonstração da transcendência de π e e são encontradas em (OLIVEIRA, 2015).

Por fim, trazendo um breve relato histórico, temos que no século XVII Euler, já mencionado anteriormente, definiu números Transcendentes como aqueles que "transcendem" o poder das operações algébricas.

Além disso, em 1768, Johann Heinrich Lambert conjecturou que os números e e π eram transcendentes, mas a demonstração foi obtida somente em 1873 por Charles Hermite do número e e somente em 1882 por Ferdinand Von Lindemann do número π.

4 NÚMEROS IRRACIONAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo traremos como os números irracionais são abordados na Educação Básica, tomando como base os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Base Nacional Comum Curricular, apostilas do Governo do Estado de São Paulo e livros didáticos.

4.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram publicados na década de 1990, e têm como objetivo, segundo o Ministério da Educação, nortear os professores na educação básica para formar cidadãos conscientes e uma educação igualitária em todo o país. Dentro do documento, é explicitado a importância da Matemática para o desenvolvimento dos alunos. Aqui, transcrevemos o documento tal como está redigido em (BRASIL, 1998).

É importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares (ver (BRASIL, 1998, p. 29)).

Diferentemente de outros documentos, os PCN são agrupados em ciclos, sendo que o ensino fundamental é separado da seguinte maneira: primeiro ciclo (1ª e 2ª séries/ 2º e 3º anos), segundo ciclo (3ª e 4ª séries/ 4º e 5º anos), terceiro ciclo (5ª e 6ª séries/ 6º e 7º anos) e quarto ciclo (7ª e 8ª séries/ 8º e 9º anos). Os números irracionais são abordados no quarto ciclo, sendo exposto da seguinte maneira:

(1) Constatação que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (caso do $\sqrt{p}$, da $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc.);

(2) Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso;

(3) Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais.

Vale ressaltar ainda que neste momento não se espera que os alunos tenham uma carga de conceitos formais a respeito dos números irracionais, mas sim que esse processo de reconhecimento seja feito de forma leve para que possam ir se familiarizando com o novo conjunto numérico e consigam realizar operações que o envolvem.

Além disso, nos PCN são estabelecidos critérios de avaliação para cada tema, e para os conjuntos numéricos é esperado que os alunos sejam capazes de:

> Usar os diferentes significados dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e das operações para resolver problemas, em contextos sociais, matemáticos ou de outras áreas do conhecimento.

Ou seja, utilizando este critério de avaliação, verifica-se se os alunos conseguem, a partir deste momento, resolver situações-prolema envolvendo os mais diversos contextos, utilizando todos os conjuntos numéricos aprendidos até o momento.

Porém, é importante frisar que há uma enorme discussão envolvendo os PCN, afinal, para muitos professores, é um absurdo achar que um documento consiga abranger todas as escolas do país e que com isso possa se ter um ensino igualitário, já que cada escola tem suas particularidades. Logo, é válido utilizar como referência os PCN, mas não como uma possibilidade única.

4.2 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que serve de instrumento para guiar as escolas para elaboração dos currículos. Foi implementada para os Ensinos Fundamentais e para o Ensino Médio em 2020, de forma a complementar os PCN, visto que, por se tratar de um documento atualizado, foi incluído, por exemplo, a parte de tecnologia como objeto aliado ao ensino. Ainda, vale ressaltar que as diretrizes da BNCC são obrigatórias para todas as instituições de ensino, sejam elas púbicas ou privadas, tornando assim o ensino igual em todo o país.

A BNCC é dividida por disciplinas e em cada uma delas são apresentadas competências que devem ser cumpridas, sendo essas indicadas por uma sigla, em que as duas primeiras letras representam o nível escolar (EF para Ensino Fundamental e EM para Ensino Médio), em seguida o número representando o ano escolar, depois a abreviação da disciplina (no caso da Matemática é utilizado MA) e, por fim, o número da competência, como exemplificado no modelo a seguir:

EF08MA15: competência número 15 da Matemática para o 8º ano do Ensino Fundamental.

Em relação ao conjunto dos números irracionais, o documento traz o assunto em evidência no currículo do 9º ano (antiga 8ª série), da seguinte maneira:

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

Ou seja, de acordo com a BNCC, é nesse momento que os alunos terão contato com os números não-racionais, isto é, os números irracionais, pela primeira vez e é esperado que os alunos passem a reconhecer esse novo conjunto.

Ainda, é importante ressaltar que a maneira como a BNCC traz os números irracionais é bastante parecida com os PCN, visto que ambos os documentos reconhecem a importância de conectar a geometria e medidas com o conjunto dos números irracionais e estimar sua localização na reta numérica.

4.3 APOSTILAS DO GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

O Governo do Estado de São Paulo distribui gratuitamente apostilas bimestrais de todas as disciplinas para os alunos de escolas estaduais, sendo essas separadas em dois tipos: a *Aprender Sempre* e a *Currículo em Ação*. Em ambas os números irracionais são abordados no 9º ano, como previsto pela BNCC.

A apostila *Aprender Sempre* tem como foco a recuperação; por isso, é uma apostila com exercícios complementares aos propostos pela apostila *Currículo em Ação* e é divida em Sequência de Atividades. Os números irracionais aparecem na Sequência de Atividades 3 do volume 1, em que são propostas 8 aulas para relembrar o conjunto dos números racionais, os números irracionais e, por fim, os números reais (veja na Figura 4.1 um trecho da apostila *Aprender Sempre*).

Já a apostila *Currículo em Ação* tem como foco as habilidades do Currículo Paulista (em que são agrupadas as habilidades da BNCC que se espera que as escolas do Estado de São Paulo desenvolvam. Pode-se encontrar o documento completo em (SÃO PAULO, 2019)) e, por esta razão, introduz os assuntos por completo e tem uma maior variedade de exercícios. Nessa apostila, os assuntos são divididos em Situações de Aprendizagem e os números irracionais aparecem na Situação de Aprendizagem 2 do volume 1, sendo que esta trata-se somente do estudo do conjunto, trazendo o conceito de incomensurabilidade, a técnica de Arquimedes para calcular aproximações do número π e, ainda, a representação na reta numérica da $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ através de construções geométricas. (veja na Figura 4.2 um trecho da apostila *Currículo em Ação*).

4.4 LIVROS DIDÁTICOS

O primeiro livro a ser analisado é da coleção AribabáPlus, da Editora Moderna, dos autores Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva.

Observando o livro do 8º ano, podemos perceber que logo no primeiro capítulo são

150 | MATEMÁTICA

AULAS 3 E 4 - CONJUNTO DOS IRRACIONAIS: SURGIMENTO E IMPORTÂNCIA

Objetivos das aulas:

- Compreender a história do surgimento dos conjuntos numéricos;
- Reconhecer números irracionais em situações de medição;
- Aproximar um número irracional por números inteiros e racionais.

1. Exploração do número pi (π): para essa atividade é preciso que você busque até cinco objetos que apresentem uma circunferência, conforme apresentado pelo professor, dentro da sua sala e escola. Meça o comprimento e o diâmetro e determine a razão entre o comprimento e o diâmetro.

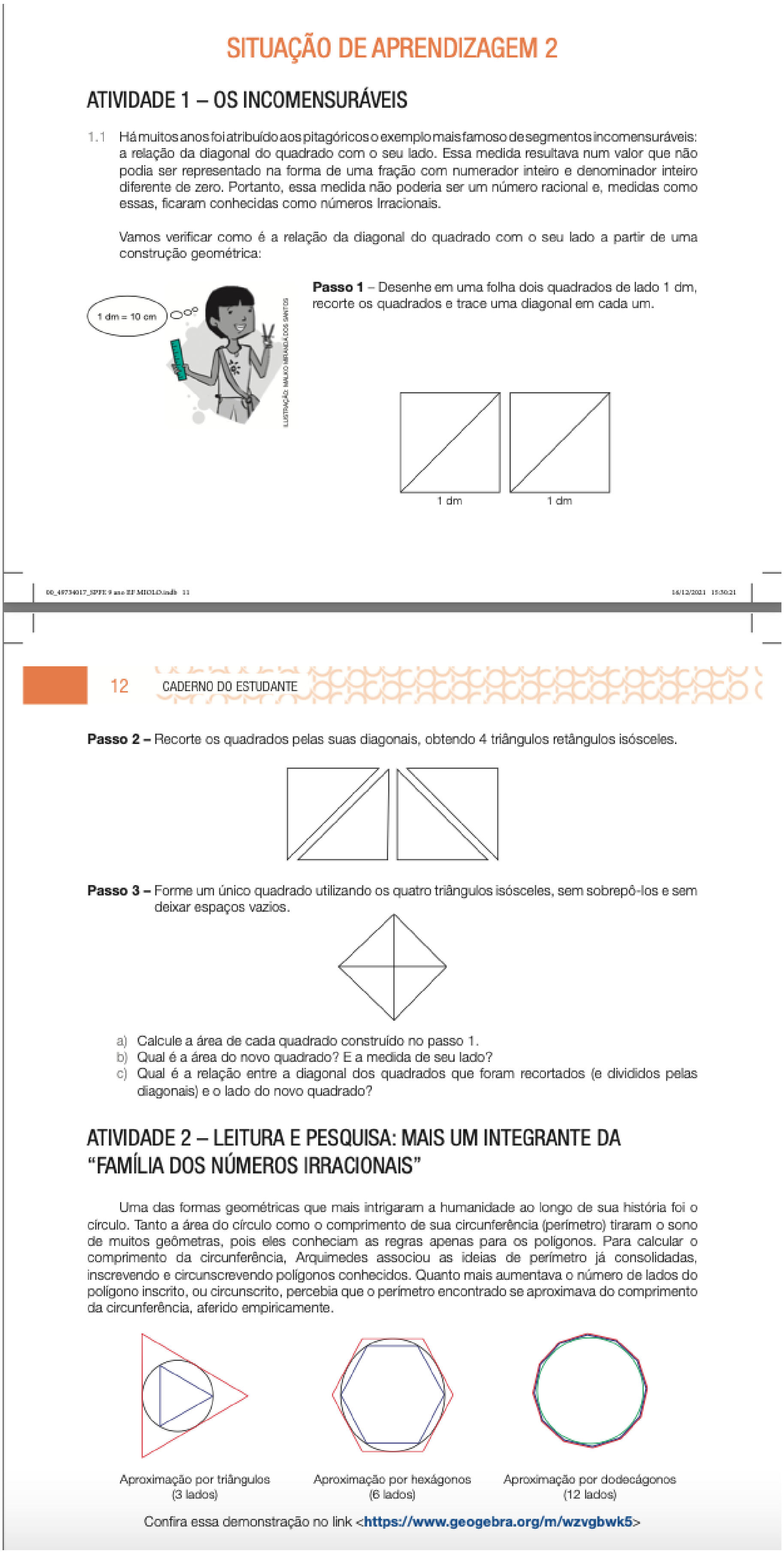
Anote no quadro abaixo suas descobertas.

Circunferência (objeto)	Comprimento da Circunferência (C)	Comprimento do diâmetro (D)	$\frac{C}{D}$
1			
2			
3			
4			
5			

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

2. Em relação ao quadro de cima, cite o que você vê em comum nos casos encontrados quando determinamos a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro.

Figura 4.1 – Sequência de Atividades 3 da apostila *Aprender Sempre*. Fonte: SEE- SP/UNDIME-SP.



SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 2

ATIVIDADE 1 – OS INCOMENSURÁVEIS

1.1 Há muitos anos foi atribuído aos pitagóricos o exemplo mais famoso de segmentos incomensuráveis: a relação da diagonal do quadrado com o seu lado. Essa medida resultava num valor que não podia ser representado na forma de uma fração com numerador inteiro e denominador inteiro diferente de zero. Portanto, essa medida não poderia ser um número racional e, medidas como essas, ficaram conhecidas como números Irracionais.

Vamos verificar como é a relação da diagonal do quadrado com o seu lado a partir de uma construção geométrica:

Passo 1 – Desenhe em uma folha dois quadrados de lado 1 dm, recorte os quadrados e trace uma diagonal em cada um.

Passo 2 – Recorte os quadrados pelas suas diagonais, obtendo 4 triângulos retângulos isósceles.

Passo 3 – Forme um único quadrado utilizando os quatro triângulos isósceles, sem sobrepô-los e sem deixar espaços vazios.

a) Calcule a área de cada quadrado construído no passo 1.
b) Qual é a área do novo quadrado? E a medida de seu lado?
c) Qual é a relação entre a diagonal dos quadrados que foram recortados (e divididos pelas diagonais) e o lado do novo quadrado?

ATIVIDADE 2 – LEITURA E PESQUISA: MAIS UM INTEGRANTE DA "FAMÍLIA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS"

Uma das formas geométricas que mais intrigaram a humanidade ao longo de sua história foi o círculo. Tanto a área do círculo como o comprimento de sua circunferência (perímetro) tiraram o sono de muitos geômetras, pois eles conheciam as regras apenas para os polígonos. Para calcular o comprimento da circunferência, Arquimedes associou as ideias de perímetro já consolidadas, inscrevendo e circunscrevendo polígonos conhecidos. Quanto mais aumentava o número de lados do polígono inscrito, ou circunscrito, percebia que o perímetro encontrado se aproximava do comprimento da circunferência, aferido empiricamente.

Aproximação por triângulos (3 lados) | Aproximação por hexágonos (6 lados) | Aproximação por dodecágonos (12 lados)

Confira essa demonstração no link <**https://www.geogebra.org/m/wzvgbwk5**>

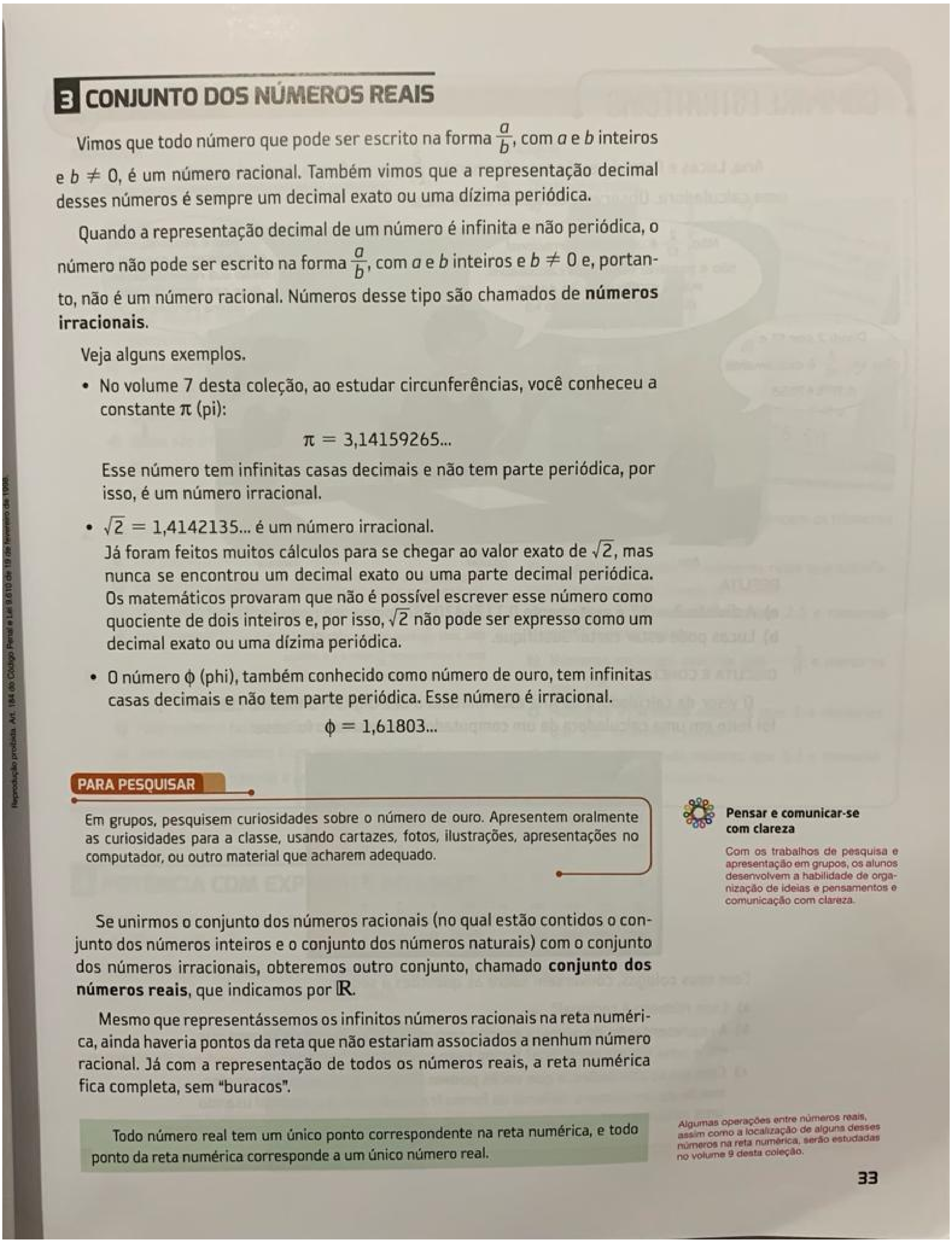
Figura 4.2 – Situação de Aprendizagem da apostila *Currículo em Ação*. Fonte: SEE- SP/UNDIME-SP.

recordados os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais. Ainda, para abordar os números reais, o livro traz um breve trecho sobre os números irracionais, caracterizando-os e trazendo como exemplo o número π e o número de ouro (veja na Figura 4.3 um trecho do livro).

Já no livro do 9º ano, da mesma coleção, é abordado o assunto dos conjuntos numéricos também no primeiro capítulo. Além de retomar mais uma vez os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, desta vez, trata dos números irracionais com maior desenvolvimento. Primeiramente, caracteriza o conjunto e expõe uma história envolvendo um grupo de amigos que desenharam um quadrado de lado 1 e, após dividi-lo pela diagonal e calcularem seu comprimento, encontraram como resultado $\sqrt{2}$. Após isso, o livro expõe aproximações para a raiz quadrada de 2. Ainda, apresenta o número π a partir do estudo de uma circunferência. E por fim, a representação de números reais na reta numérica (veja na Figura 4.4 um trecho do livro).

O terceiro livro a ser analisado é da Coleção Contexto e Aplicações, da Editora Ática, do autor Luiz Roberto Dante.

Observando o volume 1 do Ensino Médio, notamos que nesta coleção os conjuntos numéricos também estão no primeiro capítulo, em que recordam os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, apresentando suas caracterizações, propriedades e exemplos. Já, a respeito dos números irracionais, o livro traz a ideia de incomensurabilidade, aproximações para a $\sqrt{2}$, curiosidades a respeito do número π e do número de ouro. Por fim, o fato que mais chama a atenção é colocado um momento de leitura em que é exposto uma parte da história da descoberta dos números irracionais e, ainda, a demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional (veja este trecho na Figura 4.5).



3 CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Vimos que todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$, é um número racional. Também vimos que a representação decimal desses números é sempre um decimal exato ou uma dízima periódica.

Quando a representação decimal de um número é infinita e não periódica, o número não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$ e, portanto, não é um número racional. Números desse tipo são chamados de **números irracionais**.

Veja alguns exemplos.

- No volume 7 desta coleção, ao estudar circunferências, você conheceu a constante π (pi):

$$\pi = 3{,}14159265...$$

Esse número tem infinitas casas decimais e não tem parte periódica, por isso, é um número irracional.

- $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$ é um número irracional.
Já foram feitos muitos cálculos para se chegar ao valor exato de $\sqrt{2}$, mas nunca se encontrou um decimal exato ou uma parte decimal periódica. Os matemáticos provaram que não é possível escrever esse número como quociente de dois inteiros e, por isso, $\sqrt{2}$ não pode ser expresso como um decimal exato ou uma dízima periódica.

- O número ϕ (phi), também conhecido como número de ouro, tem infinitas casas decimais e não tem parte periódica. Esse número é irracional.

$$\phi = 1{,}61803...$$

PARA PESQUISAR

Em grupos, pesquisem curiosidades sobre o número de ouro. Apresentem oralmente as curiosidades para a classe, usando cartazes, fotos, ilustrações, apresentações no computador, ou outro material que acharem adequado.

Pensar e comunicar-se com clareza

Com os trabalhos de pesquisa e apresentação em grupos, os alunos desenvolvem a habilidade de organização de ideias e pensamentos e comunicação com clareza.

Se unirmos o conjunto dos números racionais (no qual estão contidos o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números naturais) com o conjunto dos números irracionais, obteremos outro conjunto, chamado **conjunto dos números reais**, que indicamos por $\mathbb{R}$.

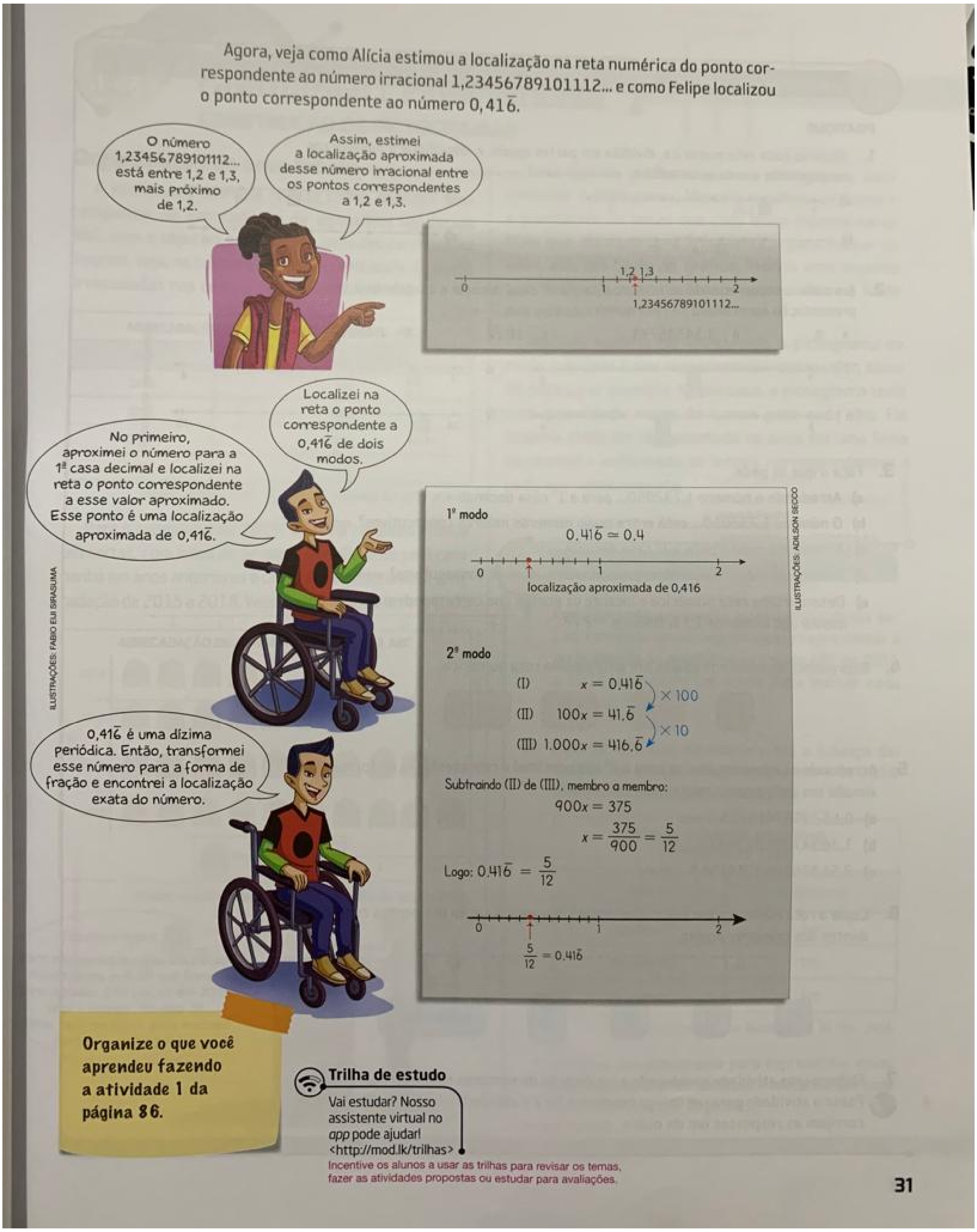
Mesmo que representássemos os infinitos números racionais na reta numérica, ainda haveria pontos da reta que não estariam associados a nenhum número racional. Já com a representação de todos os números reais, a reta numérica fica completa, sem "buracos".

Todo número real tem um único ponto correspondente na reta numérica, e todo ponto da reta numérica corresponde a um único número real.

Algumas operações entre números reais, assim como a localização de alguns desses números na reta numérica, serão estudadas no volume 9 desta coleção.

33

Figura 4.3 – Livro Didático AribabáPlus, 8º ano. Fonte: Editora Moderna.



Agora, veja como Alícia estimou a localização na reta numérica do ponto correspondente ao número irracional 1,23456789101112... e como Felipe localizou o ponto correspondente ao número $0,41\overline{6}$.

1º modo

$0,41\overline{6} \approx 0,4$

2º modo

(I) $x = 0,41\overline{6}$ $\times 100$

(II) $100x = 41,\overline{6}$ $\times 10$

(III) $1.000x = 416,\overline{6}$

Subtraindo (II) de (III), membro a membro:

$$900x = 375$$

$$x = \frac{375}{900} = \frac{5}{12}$$

Logo: $0,41\overline{6} = \frac{5}{12}$

Organize o que você aprendeu fazendo a atividade 1 da página 86.

Trilha de estudo

Vai estudar? Nosso assistente virtual no *app* pode ajudar! <http://mod.lk/trilhas>

Incentive os alunos a usar as trilhas para revisar os temas, fazer as atividades propostas ou estudar para avaliações.

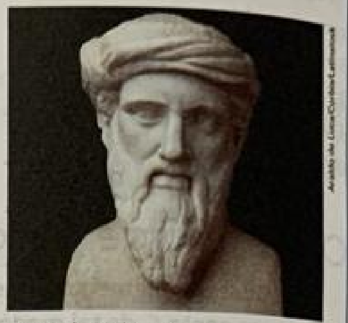
31

Figura 4.4 – Livro Didático AribabáPlus, 9º ano. Fonte: Editora Moderna.

Leituras

A crise dos irracionais

Como já dito anteriormente, os pitagóricos acreditavam que, tomando-se quaisquer dois segmentos, eles seriam comensuráveis. Para eles, o dogma de sua doutrina, "TUDO É NÚMERO", referia-se aos números racionais, já que eles não concebiam a existência de outros números que não fossem racionais (inteiro ou fração).



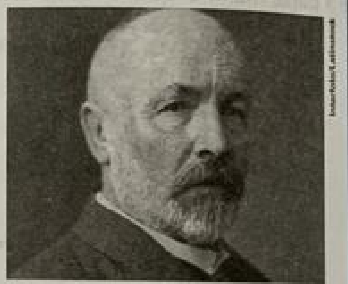
Busto de Pitágoras

Assim, como estudamos, ao medirem a diagonal de um quadrado cujos lados medem 1 unidade de comprimento, os pitagóricos se depararam com o número irracional $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$, ou seja, descobriram que o lado desse quadrado e sua diagonal são segmentos incomensuráveis.

Essa descoberta causou, na época, grande constrangimento, pois punha por terra um dos dogmas centrais dos pitagóricos: "TUDO É NÚMERO" (racional).

Conta-se que Pitágoras proibiu seus discípulos de divulgar tal descoberta para não abalar a sua doutrina, mas um deles, Hipaso, quebrou o voto de silêncio e foi, por isso, duramente punido.

A resistência aos números irracionais prosseguiu por vários séculos, até que, no fim do século XIX, o matemático George Cantor fundamentou-os adequadamente.



George Cantor

Prova de que $\sqrt{2}$ é irracional

Para provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional, vamos supor que ele seja um número racional, ou seja, que possa ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, e $q \neq 0$ e chegar a um absurdo.

Supomos que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Consideramos $\frac{p}{q}$ fração irredutível, ou seja, p e q são primos entre si, isto é, mdc $(p, q) = 1$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \text{ (I)}$$

Como todo número par pode ser escrito na forma $2k$, em que $k \in \mathbb{Z}$, temos que $p^2 = 2\underbrace{q^2}_{k}$ é par (II).

Assim, p^2 é par $\Rightarrow p$ é par $\Rightarrow p = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$ (III).

Observe que:

$$p = 2m \Rightarrow p^2 = 4m^2 \xrightarrow{\text{(I)}} 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \xrightarrow{\text{(II)}} q^2 \text{ é par} \Rightarrow q \text{ é par (IV)}$$

As conclusões (III) de que "p é par" e (IV) de que "q é par" são contraditórias, já que p e q foram supostos primos entre si. Chegamos a um absurdo. Assim, não podemos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Portanto, $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$ não é uma decimal exata nem periódica.

Figura 4.5 – Livro Didático Contexto e Aplicações, 1º ano do EM. Fonte: Editora Ática.

5 HORA DA PRÁTICA!

Neste capítulo será apresentada uma atividade que foi aplicada em uma Unidade Escolar Estadual, apresentando os resultados obtidos. Além disso, indicamos uma atividade extra como sugestão para ser aplicada em Unidades Escolares.

5.1 ATIVIDADE: CONJUNTOS NUMÉRICOS - UM ENFOQUE AOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Após os estudos de como e quando é esperado que os números irracionais sejam abordados na Educação Básica, esta atividade foi elaborada focada nos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio, sendo composta por uma revisão dos conjuntos numéricos através de uma abordagem histórica, mas dando ênfase ao conjunto dos números irracionais. Afinal, esse é o foco principal deste trabalho. Descrevemos o plano da atividade a seguir.

Título da atividade: Conjuntos numéricos: um enfoque aos números irracionais
Turma: 9º ano do Ensino Fundamental/ 1ª série do Ensino Médio
Objetivo: Espera-se que os alunos reconheçam quais são os conjuntos numéricos que existem e consigam descrevê-los. Além disso, compreender a importância do conjunto dos números irracionais.
Desenvolvimento:

- Contextualização histórica a respeito do surgimento de cada conjunto numérico, dando enfoque ao conjunto dos números irracionais a partir do descobrimento do fato de que $\sqrt{2}$ não é um número racional;
- Localização de números racionais na reta numérica real. Exemplos: 0, 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$;
- Localização da $\sqrt{2}$ na reta numérica real utilizando geometria;
- Discussão de como identificar os números irracionais;
- Discussão da importância dos números irracionais.

Recursos didáticos: Lousa, papel quadriculado, régua e compasso.
Avaliação: Antes e após a atividade será aplicada uma avaliação diagnóstica a respeito do tema e, além disso, o professor observará durante a atividade a participação dos alunos.

A presente atividade foi aplicada na Escola Estadual Professor Marivaldo Carlos Degan, situada no bairro Cidade Aracy, na cidade de São Carlos-SP. Atualmente, a escola faz parte do Programa de Ensino Integral (PEI), sendo assim, os alunos permanecem das 7h30 às 16h30 na escola e, além de terem as disciplinas comuns, possuem atividades extras como Projeto de Vida, Itinerários Informativos e Clube Juvenil. No ano de 2022, a unidade escolar possui 402 alunos no período integral e 47 alunos no período noturno (somente 3ª série do Ensino Médio).

Para a aplicação desta atividade, foram escolhidas as turmas: 9º ano B (24 alunos) e 1ª série A (35 alunos), sendo válido ressaltar que a turma do 9º ano não tinha visto nenhum conteúdo sobre o conjunto dos números irracionais e que a turma da 1ª série, apesar de ter visto, foi em um período que, por conta da pandemia do COVID-19, as aulas estavam em formato híbrido, de forma que alguns alunos iam para a escola e outros participavam das atividades pela plataforma do Centro de Mídias da Educação de São Paulo (CMSP) de forma remota. Logo, julgamos ser válido aplicar como forma de revisão.

A aplicação da atividade foi dividida em duas partes: no primeiro dia foi aplicada a avaliação diagnóstica e, no segundo dia, a atividade em si, e novamente a avaliação diagnóstica. Essa avaliação diagnóstica era composta pelas questões a seguir.

Questão 1: Quais conjuntos numéricos você conhece?

Esta questão discursiva tinha como objetivo verificar quais conjuntos numéricos os alunos recordavam. Na turma do 9º ano, na primeira avaliação, 13 alunos responderam e tiveram bastante dificuldade para recordar o que era um conjunto numérico. Então, diversos alunos responderam que não sabiam o que era, e as repostas do que lembraram estão contidas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Questão 1 - Avaliação diagnóstica pré-atividade (9º ano).

CONJUNTOS	QUANTIDADE DE ALUNOS	PORCENTAGEM
Naturais	6	46,15%
Inteiros	4	30,77%
Racionais	4	30,77%
Irracionais	2	15,38%
Reais	0	0%

Fonte: Elaborado pela autora.

Embora a turma não estivesse completa nos dois momentos da atividade, tivemos como resultado da segunda avaliação diagnóstica (11 alunos participaram) a Tabela 5.2.

Já a turma da 1ª série, no primeiro momento participaram 18 alunos e poucos responderam que não sabiam do que se tratava conjuntos numéricos, mas boa parte se recordava de conjuntos que haviam visto mais recentemente e esqueceram dos primeiros conjuntos vistos nos anos escolares, como pode ser observado na Tabela 5.3.

Após a atividade, a qual participaram 24 alunos, apesar da turma não ter tido um grande envolvimento, pudemos obter bons resultados em recordar quais eram os conjuntos, de acordo

Tabela 5.2 – Questão 1 - Avaliação diagnóstica pós-atividade (9º ano).

CONJUNTOS	QUANTIDADE DE ALUNOS	PORCENTAGEM
Naturais	8	72,73%
Inteiros	8	72,73%
Racionais	9	81,82%
Irracionais	10	90,91%
Reais	3	27,28%

Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 5.3 – Questão 1 - Avaliação diagnóstica pré-atividade (1ª série).

CONJUNTOS	QUANTIDADE DE ALUNOS	PORCENTAGEM
Naturais	7	38,39%
Inteiros	8	44,44%
Racionais	14	77,78%
Irracionais	14	77,78%
Reais	3	16,67%

Fonte: Elaborado pela autora.

com os dados da Tabela 5.4.

Portanto, nessa questão concluímos que em ambas as turmas tivemos um melhor desempenho em relação a relembrar quais eram os conjuntos numéricos que existiam.

Questão 2: Apresente um exemplo numérico de cada um dos conjuntos numéricos descritos na questão (1).

Aqui, o objetivo era reconhecer que, além de saberem os nomes dos conjuntos, os alunos podiam dar exemplos de cada um deles.

Na turma de 9º ano, no momento inicial poucos lembraram o que eram os conjuntos e, consequentemente, não conseguiam apresentar exemplos. Além disso, aqueles que lembraram de algum conjunto também não conseguiram dar exemplos. No momento final da atividade, apesar de terem colocado na questão anterior uma quantidade maior de conjuntos, mesmo assim, infelizmente, poucos conseguiram colocar exemplos.

Já na 1ª série, a situação foi bastante parecida, pois lembravam dos conjuntos, mas não sabiam como dar exemplos. Após a atividade, boa parte dos alunos conseguiu dar exemplos de todos os conjuntos numéricos.

Vale ressaltar um fato que aconteceu em ambas as turmas. Muitos dos alunos que deram exemplos de números racionais foram capazes de exemplificar com números inteiros, e

Tabela 5.4 – Questão 1 - Avaliação diagnóstica pós-atividade ($1^{\underline{a}}$ série).

CONJUNTOS	QUANTIDADE DE ALUNOS	PORCENTAGEM
Naturais	19	79,17%
Inteiros	15	62,50%
Racionais	20	83,33%
Irracionais	20	83,33%
Reais	9	37,50%

Fonte: Elaborado pela autora.

ao serem questionados no fim da atividade, uma parte explicou que números inteiros também eram racionais e o restante acabou dizendo que não sabia explicar o motivo.

Questão 3: A respeito do conjunto dos números irracionais, como podemos identificá-lo?

Nesta questão, ambas as turmas responderam antes e depois de forma bastante vaga. Aqueles alunos que conseguiram responder a questão colocaram, por exemplo, números com raiz quadrada não exata. Já sabemos que essa caracterização não abrange todos os números irracionais.

Questão 4: Nos exemplos abaixo, marque com um X, qual (is) pertence (m) ao conjunto dos números irracionais.

( ) $\sqrt{2}$

( ) $\sqrt{4}$

( ) π

( ) $3\sqrt{2}$

Ambas as turmas, antes e depois da atividade, tiveram bastante dificuldade em responder quais eram os números irracionais. Boa parte dos alunos, na primeira avaliação diagnóstica, colocou somente o número π, e após a atividade, selecionaram o $\sqrt{2}$ exclamando que tinham encontrado na reta numérica durante a atividade. Apenas uma aluna selecionou a resposta $3\sqrt{2}$, e ao questioná-la o porquê, respondeu que tinha aprendido que a multiplicação de um número racional por um irracional resultava em um número irracional.

Questão 5: Você achou importante o trabalho desenvolvido pela universitária sobre os números irracionais?

( ) Sim

( ) Não

Questão 6: Comente sua resposta (referente à questão (5)).

Já as questões 5 e 6 serviram como *feedback* dos alunos e de forma geral foi bastante positiva. Diversos alunos pediram para que voltasse e aplicasse outras atividades, enquanto que outros disseram que gostaram de ter recordado os conjuntos e aprendido mais sobre eles.

Observação 5.1. As questões 5 e 6 estavam presentes somente na avaliação diagnóstica aplicada no segundo momento.

5.2 RESULTADOS OBTIDOS DA ATIVIDADE DA SEÇÃO 5.1

A atividade "CONJUNTOS NUMÉRICOS - UM ENFOQUE AOS NÚMEROS IRRACIONAIS" tinha como objetivo avaliar o quanto os alunos recordavam dos conjuntos numéricos e, em especial, o conjunto dos números irracionais. Diante disso, ao aplicá-la para a turma de 9º ano do Ensino Fundamental II e da 1ª série do Ensino Médio foi possível avaliar as turmas e ter os seguintes resultados.

A turma do 9º ano foi extremamente participativa desde o primeiro contato, todos se mostraram entusiasmados com a atividade. Já na primeira avaliação diagnóstica foi possível observar que poucos alunos se recordaram dos conjuntos numéricos, de forma que apenas 46,15% dos alunos citaram o conjunto dos números naturais, sendo este o primeiro conjunto que aprenderam na vida escolar e, ainda, apenas 30,77% citaram o conjunto dos números racionais, que é o conjunto que tinham visto mais recentemente. É importante ressaltar que os dois anos vividos de pandemia de COVID-19 foi bastante difícil para os alunos da Educação Básica, fazendo com que boa parte dos conteúdos acabassem sendo vistos de forma bastante vaga e isso pode ser um dos motivos pelo qual tiveram dificuldade em recordar os conjuntos.

Após a atividade, o resultado foi bastante diferente do momento inicial, pois a porcentagem de alunos que citaram os números naturais subiu para 72,73% e dos racionais, para 81,82%. Além disso, a recordação do conjunto dos números inteiros subiu de 30,77% para 72,73%, dos irracionais de 15,38% para 90,91% e, por fim, dos reais, de 0% para 27,28%.

Portanto, o resultado foi bastante satisfatório, principalmente em relação ao conjunto dos números irracionais que teve o maior aumento (75,53%).

Já na turma da 1ª série, a animação foi um pouco diferente, uma que na aplicação da atividade diversos alunos estavam cansados e dormindo ao chegar na sala. No entanto, com o desenvolvimento da atividade, foram se interessando e se envolvendo, o que no fim foi um ponto positivo.

Nessa turma, o resultado foi dentro do esperado: recordavam-se mais dos conjuntos que haviam visto recentemente e acabaram esquecendo-se de conjuntos vistos há alguns anos, como o caso dos números naturais com 38,39% de resposta, contra 77,78% dos irracionais. E com a avaliação diagnóstica pós-atividade o resultado foi ainda melhor, sendo 79,17% para os naturais, 62,5% para os inteiros (na pré-atividade havia sido 44,44%), 83,33% para os racionais (77,78% na pré-atividade), 83,33% para os irracionais e 37,5% para os reais (16,67% na pré-atividade).

Um fato curioso é que os conjuntos dos números racionais e dos números irracionais tiveram porcentagens iguais de alunos na pré-atividade (77,78%), e o feito se repetiu na avaliação diagnóstica pós-atividade (83,33%).

Outra situação a ser exposta é de uma aluna que, ao começo da aula estava dormindo, mas com o decorrer da atividade foi se interessando e, ao finalizar e entregar a avaliação diagnóstica, perguntou se podia fazer uma correção pois havia se esquecido de marcar a alternativa $3\sqrt{2}$ na Questão 4, alegando que recordou-se de aulas passadas e com a explicação da atividade que a multiplicação de um número irracional por um racional, resultava em um número irracional.

De modo geral, a prática *avaliação-atividade-avaliação* foi bastante positiva, afinal o objetivo principal que era fazer os alunos recordarem os conjuntos numéricos foi atingido. Os *feedbacks* corroboram essa conclusão, como exposto nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4.

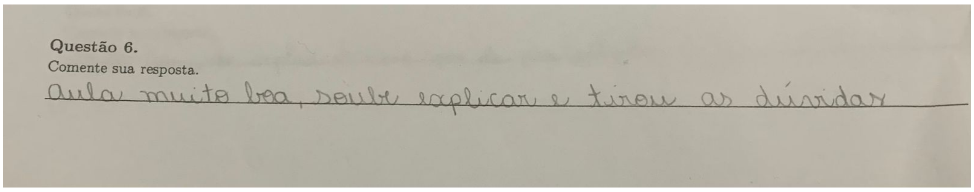


Figura 5.1 – *Feedback* do aluno A do 9º ano.

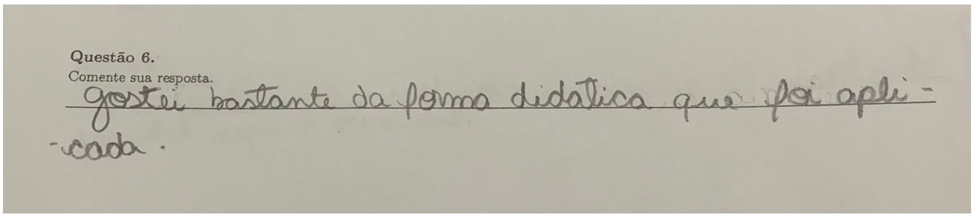


Figura 5.2 – *Feedback* do aluno B do 9º ano.

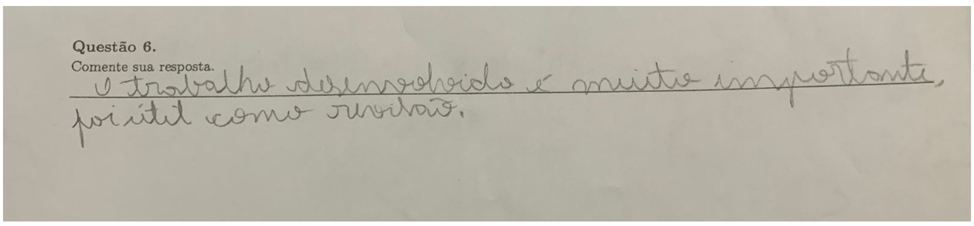


Figura 5.3 – *Feedback* do aluno C da 1ª série.

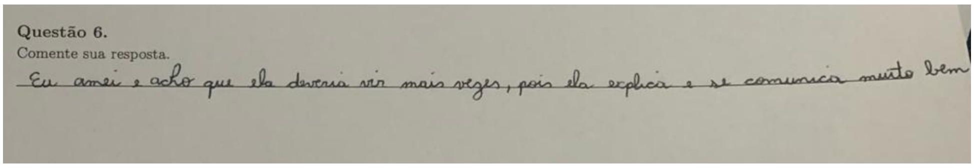


Figura 5.4 – *Feedback* do aluno D da 1ª série.

Além disso, os professores responsáveis agradeceram a atividade aplicada, dizendo que foi importante para a revisão e aprofundamento dos conteúdos e pediram para voltar mais vezes para aplicar outras atividades.

5.3 ATIVIDADE EXTRA

Ao analisar todos os materiais e livros didáticos, percebe-se que há sempre uma revisão dos conjuntos numéricos antes de abordar os números irracionais. Por isso, esta atividade foi pensada como uma maneira de revisar todos conjuntos numéricos de forma lúdica. Descrevemos o plano da atividade a seguir.

Título da atividade: Jogo da memória dos conjuntos numéricos

Turma: 8º e 9º ano do Ensino Fundamental

Objetivo: Espera-se que os alunos relembrem os conjuntos numéricos através do jogo da memória.

Desenvolvimento: Para o desenvolvimento do jogo, é preciso que o professor traga as peças do jogo da memória impressas, divida a turma em duplas e explique as regras do jogo.

- Regra 1: No começo do jogo, as peças devem ser embaralhadas e viradas de modo que não veja o que está escrito.

- Regra 2: Cada aluno na sua vez, irá virar duas peças. Se forem correspondentes, ele recolhe e faz um ponto, caso contrário vira as cartas de volta.

- Regra 3: O jogo termina quando todas as peças forem recolhidas e ganha aquele que conseguir ter feito uma maior quantidade de correspondências.

Recursos didáticos: Peças do Jogo da Memória.

Avaliação: O professor observará se durante a atividade os alunos conseguiram fazer as correspondências entre as peças a respeito dos conjuntos numéricos.

Observação 5.2. As peças para serem utilizadas no jogo da memória são encontradas no Apêndice A .

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o desenvolvimento do trabalho, notamos que os conjuntos numéricos, e em especial o conjunto dos números irracionais, possuem grande importância dentro da Matemática devido a sua historicidade e elementos.

A motivação do trabalho foi o fato de que dentro do curso de Licenciatura em Matemática da UFSCar, as particularidades do conjunto dos irracionais é pouco abordada. Logo, decidimos que seria bastante interessante um estudo mais aprofundado sobre o tema. Por isso, foi imprescindível a ajuda, atenção e suporte do orientador durante todo o desenvolvimento do trabalho, pois juntos a realização deste tornou-se agradável e motivadora.

Além disso, notamos que apesar dos números irracionais estarem presentes nos conteúdos a serem vistos na Educação Básica, geralmente são expostos de forma vaga e rápida. Logo, a atividade desenvolvida e aplicada foi de extrema importância para que os alunos pudessem relembrar os conjuntos numéricos e, em especial, os números irracionais.

Ainda, ressaltamos que a maneira a qual será apresentado um conteúdo em sala de aula influencia nos resultados obtidos, afinal o desafio é cativar os alunos e prender sua atenção para a aula, já que as maneiras de distrair-se são as mais diversas, principalmente com os celulares em sala de aula. Portanto, ao desenvolvermos as atividades, pensamos em como conquistar os alunos e conseguimos atingir essa meta, de acordo com os resultados obtidos com aplicação da atividade da Seção 5.1.

Esta monografia é produto final da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2 (com Prática) da Licenciatura em Matemática da UFSCar, que foi desenvolvida durante dois semestres. No primeiro semestre (disciplina de TCC 1), foi realizado o estudo a respeito dos conjuntos numéricos, em especial o conjunto dos números irracionais e, no segundo semestre (TCC 2 c/ Prática), a aplicação deste conteúdo na Educação Básica, compreendendo como é exposto nos materiais didáticos e, além disso, criando e aplicando uma atividade em uma Unidade Escolar Estadual.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado na página 8.

BRASIL. **Parâmetros Nacionais Curriculares**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. 1998. Brasília: MEC/SEF. <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica>. Citado na página 25.

CORADO, J. F. et al. Números irracionais algébricos e transcendentes. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, 2017. Citado na página 8.

FOURIER, C. **Mélanges d'Analyse Algébrique**. [S.l.]: Stainville, 1815. Citado na página 22.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções, volume 1**. [S.l.]: São Paulo: Atual Editora, 2004. Citado na página 8.

MAOR, E. **E: historia de un número**. [S.l.]: Libraria, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 21.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números: uma introdução à matemática**. [S.l.]: Edusp, 2001. Citado na página 11.

NIVEN, I. A simple proof that π is irrational. In: **Pi: A Source Book**. [S.l.]: Springer, 2004. p. 276–276. Citado na página 19.

OLIVEIRA, G. A. d. Números irracionais e transcendentes. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2015. Citado na página 24.

PANSERA, D. R.; VALMÓRBIDA, E. O princípio da casa dos pombos e suas aplicações. **Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina**, p. 46, 2010. Citado na página 11.

SÃO PAULO. **Currículo Paulista**. 2019. São Paulo: SEE- SP/UNDIME-SP. <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2021/01/Habilidades%20essenciais%20_%20Anos%20Inicias_Matemática_REVISAO_03_03_2021%20Gra.pdf?_t=1614978137>. Citado na página 27.

APÊNDICE A – PEÇAS DO JOGO DA MEMÓRIA

DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS	REPRESENTAÇÃO DECIMAL DO NÚMER0 $\frac{444}{10}$	NÚMERO NATURAL ENTRE 0 E 2
NÚMERO INTEIRO ENTRE -15 E -13	NÚMERO IRRACIONAL QUE É A RAZÃO ENTRE O COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA QUALQUER E SEU DIÂMETRO	NÚMERO IRRACIONAL QUE RESULTA EM APROXIMADAMENTE 1,4142...
CONJUNTO QUE É A UNIÃO ENTRE OS NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS	REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA DO NÚMERO 35,75	NÚMERO INTEIRO MAIOR QUE -5 E MENOR QUE 0
NÚMERO NATURAL MAIOR QUE 6 E MENOR QUE 10.	VERDADEIRO OU FALSO: O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS É FORMADOS SOMENTE PELOS NÚMEROS RACIONAIS.	VERDADEIRO OU FALSO: OS NÚMEROS IRRACIONAIS TAMBÉM PERTENCEM AO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS.

Números que podem ser escrItos da forma $\frac{a}{b}$ tal que a é inteiro e b é inteiro diferente de zero	44,4	1
-14	NÚMERO PI π	$\sqrt{2}$
CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS	$\frac{3575}{100}$	-3
9	FALSO	VERDADEIRO