



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estabilidade, instabilidade e fenômenos de concentração em equações de reação e difusão: uma abordagem geométrica

Carolinne Stefane de Souza

São Carlos-SP
Dezembro de 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estabilidade, instabilidade e fenômenos de concentração em equações de reação e difusão: uma abordagem geométrica

Carolinne Stefane de Souza

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Arnaldo Simal do Nascimento

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
Dezembro de 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Carolinne Stefane de Souza, realizada em 07/12/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento (UFSCar)

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho (ICMC/USP)

Prof. Dr. Marcone Correa Pereira (USP)

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira (UFSCar)

Prof. Dr. Maicon Sônego (UNIFEI)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

*Dedico este trabalho
a Angela e ao Geraldo,
meus pais.*

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Angela, ao meu pai Geraldo e à minha avó Odette, *in memoriam*, pelo apoio, incentivo, educação e carinho que me forneceram nesta jornada.

Ao Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento pelas valiosas contribuições dadas durante todo o processo. Seus conhecimentos fizeram grande diferença no resultado final deste trabalho.

Aos meus amigos, professores e servidores da UFSCar, que de alguma forma me ajudaram neste caminho. Em particular, Leandro, Cláudio, Rafael e Marcelo, pelos apoios incansáveis, conversas, risadas, dúvidas e pelos bons momentos que passamos.

À minha família que de algum modo me apoiou, especialmente Dara, Aka, Lena e Rubens, por todo apoio e consideração, sendo presentes em diversas etapas deste processo.

Este trabalho contou com os apoios financeiros da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo n^o 2018/10033-7, sem os quais não teria sido possível terminar este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, abordamos o estudo de estabilidade da equação de reação e difusão em dois domínios distintos: em uma família de superfícies de revolução sem fronteira e em um intervalo aberto limitado cuja função difusão se anula em um ponto no interior deste intervalo.

No primeiro problema, além de provarmos a existência de soluções estacionárias não constantes estáveis para a equação de Allen-Cahn em uma família de superfícies de revolução sem fronteira, analisamos o comportamento assintótico e a instabilidade das soluções estacionárias quando $\lambda \rightarrow \infty$, onde λ é um parâmetro positivo cujo inverso pode ser interpretado como coeficiente de difusibilidade.

Enquanto, no segundo problema, denominado problema de Allen-Cahn degenerado, por lidarmos com uma função de difusão que se anula em um ponto no interior do intervalo, o operador principal não é uniformemente elíptico e por essa razão, não é possível utilizar resultados da literatura e nem os espaços habituais. Para este caso, provamos que uma função específica, a saber, uma função escada assumindo apenas dois valores – os zeros estáveis da função bi-estável f^- , é uma solução estacionária não constante estável do problema degenerado.

Palavras-chave: Problema de Allen-Cahn, Superfície de revolução sem fronteira, Problema degenerado, Caso fortemente degenerado, Equação de reação e difusão, Estabilidade no sentido de Lyapunov, Comportamento assintótico.

Abstract

In this work, we address the study of stability of a reaction-diffusion equation in two domains: in a family of surfaces of revolution without boundary and in a bounded open interval whose diffusion function vanishes at a point inside this interval.

In the first problem, in addition to proving the existence of stable non-constant stationary solutions for the Allen-Cahn equation in a family of surfaces of revolution without boundary, we analyze the asymptotic behavior and the instability of solutions when $\lambda \rightarrow \infty$, where λ is a positive parameter whose inverse can be interpreted as a diffusibility coefficient.

While in the second problem, called degenerate Allen-Cahn problem, because we are dealing with a diffusion function that vanishes at a point inside the interval, the main operator is not uniformly elliptical and for this reason, it is not possible to use results of the related literature nor the usual spaces. In this case, we prove that a specific function, namely a step function taking only two values – the stable zeros of the bistable function f –, is a stable non-constant stationary solution of degenerate problem.

Keywords: Allen-Cahn equation, Surface of revolution without boundary, Degenerate problem, Strongly degenerate case, Reaction and diffusion equation, Lyapunov stability, Asymptotic behavior.

Sumário

1	Introdução	1
	Introdução	1
2	Estabilidade da equação de reação e difusão em superfícies de revolução sem fronteira	7
2.1	Resultados preliminares e notações	13
2.2	Estudo de estabilidade das soluções estacionárias do problema de Allen-Cahn	21
2.3	Estudo do comportamento assintótico quando f não satisfaz a condição de igualdade de área	43
2.4	Análise de estabilidade das soluções para $\lambda > 0$ suficientemente grande quando f não satisfaz a condição de igualdade de área	52
3	Estabilidade da equação de reação e difusão degenerada em um intervalo	59
3.1	Resultados preliminares e notações	62
3.2	Existência de soluções para o problema degenerado de Allen-Cahn	79
3.3	Estudo de estabilidade da solução estacionária do problema degenerado de Allen-Cahn	85
3.4	Comportamento das soluções de (3.1)	104
A	Resultados utilizados	109
A.1	Família de soluções que desenvolve camada de transição interna	109
A.2	Existência de solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.1), para todo $t > 0$	109
A.3	Compacidade de conjuntos limitados em L^p	110
A.4	Espaços de Hilbert e operadores como soma de projeções	110
	Referências Bibliográficas	111
	Índice Remissivo	115

Lista de Figuras

1.1	Quando f não satisfaz a condição de igualdade de área, a família de soluções estacionárias $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ de (2.1) em S_γ se concentra à direita da superfície S_γ , quando $\lambda \rightarrow \infty$, em torno do ponto P_0 . Além disso, para $\lambda > \lambda_0$ suficientemente grande, u_λ é uma solução instável, conforme o terceiro item.	3
1.2	Quando f satisfaz a condição de igualdade de área, existe uma família de soluções estacionárias estáveis $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ de (2.1) em S_γ que desenvolve camada de transição interna.	3
2.1	Curva geratriz γ_ϵ no plano O_{xy}	10
2.2	Curva limite γ_0 no plano O_{xy}	11
2.3	Exemplo de potencial de poço duplo assimétrico F	15
2.4	Curva geratriz γ_ϵ no plano O_{xy}	22
2.5	Curva γ_ϵ^r e o conjunto I_ϵ	26
2.6	Casos 1, 2 e 3.	35
2.7	Caso 4.	36
2.8	Caso 5.	37
2.9	Função \tilde{u}_ϵ	38
2.10	Função \bar{u}_ϵ	38
2.11	Caso A (i).	40
2.12	Caso A (ii).	40
2.13	Caso B.	40
2.14	Exemplo de função f que não satisfaz a condição de igualdade de área, onde $\int_\alpha^{\beta_0} f(\xi) d\xi = 0$	44
2.15	Curva geratriz γ no plano O_{xy}	53
3.1	Exemplo de função f	60
3.2	Comportamento da solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.1) em $[0, x_0 - \eta] \cup [x_0 + \eta, 1]$	106
3.3	Comportamento da função $ku(t, \cdot; u^0)$, onde $u(t, \cdot; u^0)$ é solução de (3.1).	107

Introdução

Vários modelos matemáticos de processos evolutivos de reação e difusão podem ser representados por equações diferenciais parciais do tipo parabólico.

No estudo da teoria qualitativa de tais equações a questão de existência de soluções estacionárias desempenha um papel importante, pois frequentemente se tem um fluxo gradiente e em muitos destes casos a dinâmica global do fluxo será em grande parte determinada pelo caráter de estabilidade ou instabilidade das soluções estacionárias. A importância das soluções estacionárias estáveis advém do fato de que nos modelos físicos associados, as mesmas correspondem aos únicos estados observáveis e persistentes no tempo. Já as soluções estacionárias instáveis possuem um papel matemático importante na determinação da dinâmica do fluxo no atrator global mas não são tão interessantes do ponto de vista físico, uma vez que raramente são observáveis e quando o são, não persistem no tempo.

Em domínios Euclidianos, estes fenômenos têm sido mais estudados e, portanto, melhor compreendidos. Já em superfícies, a geometria dos domínios aparece como um novo elemento na análise e geralmente é expressa através dos diferentes conceitos de curvaturas, e em um intervalo limitado, onde a função de difusibilidade se anula em um ponto no interior deste intervalo – denominado isolante perfeito –, é necessário utilizar novos espaços, diferentes dos espaços de Sobolev usuais; estes dois problemas podem ser bastante comuns em fenômenos naturais.

No Capítulo 2, estudamos a equação de reação e difusão em uma família de superfícies de revolução sem fronteira

$$\begin{cases} u_t = \Delta_{S_{\gamma_\varepsilon}} u + \lambda f(u) & \text{em } (0, \infty) \times S_{\gamma_\varepsilon} \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) & \text{em } S_{\gamma_\varepsilon}, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde S_{γ_ε} é uma superfície de revolução sem fronteira gerada por uma curva $\gamma_\varepsilon = (\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon, 0) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ como descrita na Fig. 1.2; $\Delta_{S_{\gamma_\varepsilon}}$, o operador Laplace-Beltrami em relação a métrica

Riemanniana de S_{γ_ε} ; $\lambda > 0$, um parâmetro fixo e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função bi-estável da forma

$$f(u) = -u(u - \alpha)(u - \beta), \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

com

$$\alpha < 0 < -\alpha \leq \beta.$$

Através de técnicas de Cálculo Variacional, introduzimos um funcional de energia

$$E(u; S_{\gamma_\varepsilon}) := \int_{S_{\gamma_\varepsilon}} \left[\frac{1}{2} |\nabla_{S_{\gamma_\varepsilon}} u|^2 + \lambda F(u) \right] d\sigma, \quad \forall u \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon}),$$

provamos a existência de L^1 -mínimos locais desse funcional e que tais mínimos são padrões, ou seja, soluções estacionárias não constantes estáveis, da equação desejada, onde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial de poço duplo tal que $F' = -f$.

Além disso, ao fixarmos uma superfície S_{γ_ε} , foram feitos estudos referentes ao comportamento assintótico e à instabilidade das soluções estacionárias do problema quando $\lambda \rightarrow \infty$, cujo inverso, $1/\lambda$, pode ser interpretado como coeficiente de difusibilidade.

Em uma linguagem mais técnica, utilizando a parametrização de S_{γ_ε} , ao considerarmos

$$u(s, \theta) := u(\phi_\varepsilon(s), \psi_\varepsilon(s) \cos \theta, \psi_\varepsilon(s) \sin \theta), \quad \forall (s, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi),$$

os principais resultados podem ser descritos como:

- *Existência de uma família de padrões monotonicamente crescentes:* Para $\lambda > 0$ fixo e f não satisfazendo necessariamente a condição de igualdade de área, existe uma família de soluções estacionárias estáveis $(u_{\varepsilon, \lambda})_{\varepsilon < \varepsilon_1}$ do problema (2.1) associada à família de superfícies $\{S_{\gamma_\varepsilon}\}_{\varepsilon < \varepsilon_1}$, tal que $u_{\varepsilon, \lambda}(s, \theta)$ é monotônica crescente em $s \in [a, b]$ e independe de $\theta \in [0, 2\pi)$, para todo $\varepsilon < \varepsilon_1$. Além disso,

$$\|u_{\varepsilon, \lambda} - \alpha\|_{L^1(S_{\gamma_\varepsilon}^i)} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|u_{\varepsilon, \lambda} - \beta\|_{L^1(S_{\gamma_\varepsilon}^e)} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

- *Fenômeno de concentração quando f não satisfaz a condição de igualdade de área:* Fixados $\lambda_0 > 0$ e uma superfície de revolução sem fronteira $S_\gamma \in \{S_{\gamma_\varepsilon}\}_{\varepsilon < \varepsilon_1}$, como f não satisfaz a condição de igualdade de área, temos $\int_\alpha^\beta f(\xi) d\xi > 0$ e existe $\beta_0 \in (0, \beta)$ tal que $\int_\alpha^{\beta_0} f(\xi) d\xi = 0$. Seja $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ uma família de soluções estacionárias de (2.1) em S_γ , então

$$(i) \quad u_\lambda \rightarrow \alpha \text{ uniformemente em todo compacto de } S_\gamma \setminus P_0;$$

$$(ii) \quad u_\lambda(P_0) \rightarrow \beta_0,$$

onde $P_0 = (\phi(b), 0, 0)$ e ϕ é uma das funções coordenadas de γ .

Essa família de soluções estacionárias $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ terá um comportamento como descrito na Fig. 1.1¹, justamente porque a função reação f não satisfaz a condição de igualdade de área.

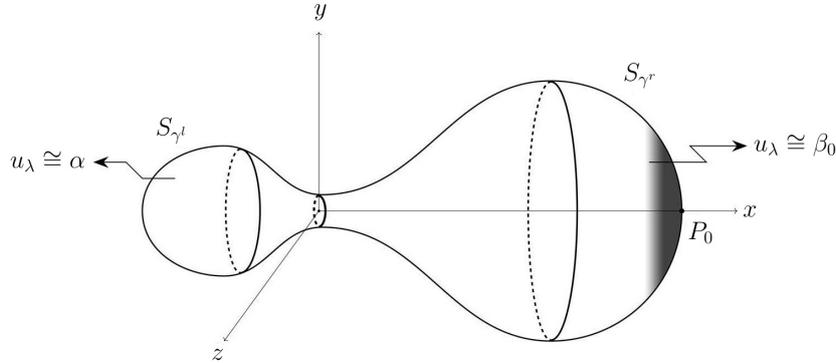


Figura 1.1: Quando f não satisfaz a condição de igualdade de área, a família de soluções estacionárias $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ de (2.1) em S_γ se concentra à direita da superfície S_γ , quando $\lambda \rightarrow \infty$, em torno do ponto P_0 . Além disso, para $\lambda > \lambda_0$ suficientemente grande, u_λ é uma solução instável, conforme o terceiro item.

Em contrapartida, no caso em que f satisfaz a condição de igualdade de área, fixados $\lambda_0 > 0$ e uma superfície de revolução sem fronteira $S_\gamma \in \{S_{\gamma_\varepsilon}\}_{\varepsilon < \varepsilon_1}$, os autores de [28], através de técnicas de Γ -convergência, provaram a existência de uma família de soluções estacionárias estáveis $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ de (2.1) em S_γ , que desenvolve camada de transição interna, isto é,

$$\|u_\lambda - \alpha\|_{L^1(a,0)} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|u_\lambda - \beta\|_{L^1(0,b)} \rightarrow 0 \quad \text{quando } \lambda \rightarrow 0$$

e, portanto, possui um comportamento como descrito na Fig. 1.2². Tal estudo não será abordado aqui, mas pode ser encontrado na referência supracitada.

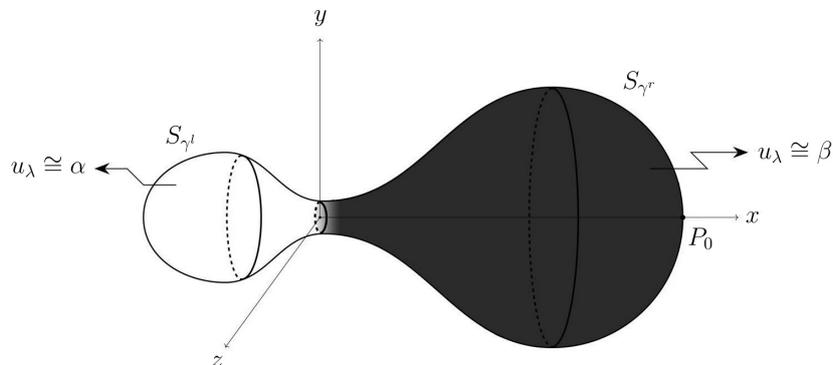


Figura 1.2: Quando f satisfaz a condição de igualdade de área, existe uma família de soluções estacionárias estáveis $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ de (2.1) em S_γ que desenvolve camada de transição interna.

¹Crédito da figura: Gabriel Clemente

²Crédito da figura: Gabriel Clemente

- *Instabilidade das soluções para $\lambda > 0$ suficientemente grande quando f não satisfaz a condição de igualdade de área:* Fixados $\lambda_0 > 0$ e uma superfície de revolução sem fronteira $S_\gamma \in \{S_{\gamma_\varepsilon}\}_{\varepsilon < \varepsilon_1}$, seja $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ uma família de soluções estacionárias de (2.1) em S_γ , tal que u_{λ_0} é estável segundo o primeiro item. Então, para $\lambda > \lambda_0$ suficientemente grande, u_λ será uma solução instável de (2.1).

Já no Capítulo 3, abordamos a equação de reação e difusão no intervalo $I = (0, 1)$, onde a função de difusão k se anula em um único ponto $x_0 \in I$, dada por

$$\begin{cases} u_t = (ku_x)_x + f(u), & \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times I \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes hipóteses:

$$(h_1) \quad k \in W^{1, \infty}(I).$$

$$(h_2) \quad \exists x_0 \in (0, 1) : k(x_0) = 0 \text{ e } k(x) > 0, \forall x \neq x_0.$$

$$(h_3) \quad \exists c \in [1, 2) : (x - x_0)k' \leq ck \text{ qtp em } [0, 1].$$

$$(h_4) \quad f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e bi-estável, isto é, existem } \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha < 0 < \beta) \text{ tais que}$$

$$f(\alpha) = f(0) = f(\beta) = 0, f'(\alpha) < 0, f'(\beta) < 0 \quad \text{e} \quad f'(0) > 0.$$

$$(h_5) \quad \exists c_1 > 0 :$$

$$|f(u)| \leq c_1 \quad \text{e} \quad |f'(u)| \leq c_1, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Tal problema é denominado problema fortemente degenerado devido ao fato da constante $c > 0$ pertencer ao intervalo $[1, 2)$ definida na hipótese (h_3) . Caso $c \in [0, 1)$, o problema é chamado de fracamente degenerado e sob esta condição, Sônego, em [33], garante apenas a existência de uma solução estacionária semiestável (isto é, o primeiro autovalor do problema linearizado em torno da solução é maior ou igual a zero), o que não garante a estabilidade no sentido de Lyapunov.

O fato de k se anular em x_0 faz com o que o operador principal $(ku_x)_x$ seja um operador elíptico degenerado e os métodos e resultados já existentes na literatura não possam ser utilizados nesse problema e devido a degenerescência forte de k foi necessário introduzirmos um novo espaço

$$H_k^1(I) := \{u \in L^2(I) : u \text{ localmente absolutamente contínua em } [0, x_0) \cup (x_0, 1] \\ \text{e } \sqrt{k}u_x \in L^2(I)\},$$

que por definição, contém funções descontínuas em x_0 .

Novamente, utilizando um potencial de poço duplo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F' = -f$, definimos um funcional de energia

$$E(u) = \int_0^1 \left[\frac{k}{2} u_x^2 + F(u) \right] dx, \quad \forall u \in H_k^1(I),$$

e utilizando as teorias de Cálculo Variacional, Semigrupos, Operadores Setoriais e Potências Fracionárias de Operadores, provamos a estabilidade de uma função específica, cuja imagem consiste dos zeros da função reação do problema, $\bar{u} : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{u} = \begin{cases} \alpha, & \text{em } (0, x_0) \\ \beta, & \text{em } (x_0, 1) \end{cases}$$

e, como em nenhum resultado obtido foi levado em consideração o fato de \bar{u} ser definida como α em $(0, x_0)$ e β em $(x_0, 1)$, a função $\tilde{u} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{u} = \begin{cases} \beta, & \text{em } (0, x_0) \\ \alpha, & \text{em } (x_0, 1) \end{cases}$$

também é um padrão de (1.2).

Além dos resultados referentes à existência de padrões para (1.2), há um breve estudo do comportamento das soluções $u(t, \cdot; u_0)$ de (1.2) em $[0, 1]$.

Por fim, no Apêndice A podem ser encontrados os resultados menos comuns utilizados ao longo deste trabalho.

Estabilidade da equação de reação e difusão em superfícies de revolução sem fronteira

As equações de reação e difusão em domínios Euclidianos limitados foram e são muito estudados. No entanto, o mesmo tipo de estudo em superfícies é relativamente recente. Pode-se dizer que a diferença entre ambos é o fato de que no caso da superfície, a sua geometria, geralmente expressa através de algum tipo de curvatura, desempenha um papel determinante na dinâmica do processo de difusão.

Alguns processos evolutivos em Dinâmica Populacional, Bioquímica, Termodinâmica, Filotaxia, Quemotaxia, entre outros, que são modelados por equações de reação e difusão em um domínio Euclidiano de \mathbb{R}^2 podem ser estudados em uma superfície de \mathbb{R}^3 . Em [10], por exemplo, os autores fizeram um estudo sobre a difusão ao longo de membranas biológicas utilizando superfícies.

Equações de reação e difusão em superfícies de revolução ou de forma mais geral, em variedades Riemannianas, vem sendo estudadas ao longo dos anos. As referências [2, 11, 27, 28, 32], por exemplo, fazem uma análise a respeito de estabilidade ou instabilidade de soluções estacionárias de suas equações. Em [2], os autores estudaram equações tanto em superfícies de revolução quanto em variedades Riemannianas, já em [28, 32], foram estudadas equações em superfícies de revolução e em [11, 27], em variedades Riemannianas.

Definição 2.1. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é denominada *função bi-estável* se possui somente três zeros $\alpha < \zeta < \beta$ e satisfaz

$$f'(\alpha) < 0 \quad \text{e} \quad f'(\beta) < 0.$$

Definição 2.2. Uma função \bar{u} é dita *padrão* de (2.1) se \bar{u} for uma solução estacionária estável não constante de (2.1), cujo problema está descrito logo adiante.

Um dos objetivos deste capítulo é provar a existência de padrões para o problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta_{S_\gamma} u + \lambda f(u) & \text{em } (0, \infty) \times S_\gamma \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) & \text{em } S_\gamma, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde S_γ é uma superfície de revolução sem fronteira gerada por uma curva γ do \mathbb{R}^2 ; Δ_{S_γ} , o operador Laplace-Beltrami em relação a métrica Riemanniana de S_γ ; $\lambda > 0$, um parâmetro fixo e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função bi-estável da forma

$$f(u) = -u(u - \alpha)(u - \beta), \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

sendo

$$\alpha < 0 < \beta \quad \text{e} \quad \beta \geq -\alpha. \quad (2.3)$$

Neste caso, os pontos α e β são soluções estáveis constantes do problema (2.1) e chamados de *zeros estáveis de f* .

Note que como $\beta \geq -\alpha$, a função f pode satisfazer a condição de igualdade de área, isto é, $\int_\alpha^\beta f(\xi) d\xi = 0$.

Além de conseguirmos a existência de padrões para uma família específica de superfícies, gostaríamos que essas soluções estacionárias estáveis fossem monotônicas em relação à variável espacial. Ou seja, se $\gamma = (\phi, \psi, 0) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ for a curva geratriz da superfície S_γ , então existe um padrão $u \in H^1(S_\gamma)$ para (2.1) tal que $u(\phi(s), \psi(s) \cos \theta, \psi(s) \sin \theta)$ é monotônico em relação a $s \in I$. Tal característica irá ajudar nos estudos de comportamento assintótico e de instabilidade das soluções quando $\lambda \rightarrow \infty$, no caso em que f não satisfaz a condição de igualdade de área.

Em [29], o autor trata de uma família de soluções estacionárias estáveis decrescente em sua variável espacial que se concentram, à medida que o coeficiente de difusibilidade (inverso do parâmetro λ) tende a zero, no ponto mais à esquerda da superfície de revolução, enquanto que aqui, tratamos de uma família de soluções estacionárias estáveis crescente que se concentram à direita da superfície.

A outra distinção, e a mais importante, diz respeito à função reação: em [29], por uma razão técnica, o autor supõe que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função ímpar em torno de uma vizinhança arbitrariamente pequena da origem. Apesar de não generalizarmos esta situação com as hipóteses consideradas aqui, apresentamos resultados que permitem considerar funções reação diferentes das abordadas em [29], além de, é claro, funções que se encaixam em ambas as hipóteses, como por exemplo, $f(u) = u - u^3$.

A eliminação dessa hipótese, técnica e incômoda, tornou o resultado buscado mais geral e elegante. No entanto, essa generalização requer uma análise longa e cuidadosa com a necessidade de novos argumentos.

Apesar do estudo de existência de padrões para superfícies de revolução ser algo recente, os autores de [2], provaram a inexistência de padrões para (2.1) quando

$$\frac{d}{ds}k_g := \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)' < 0 \text{ em } (a, b),$$

onde $\gamma = (\phi, \psi, 0) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a curva geratriz de S_γ e k_g a curvatura geodésica de S_γ .

Além disso, os mesmos autores provaram que, quando S_γ possui fronteira com fluxo zero e existe $s_0 \in (a, b)$ tal que

$$\frac{d}{ds}k_g(s_0) > 0,$$

o problema (2.1) possui padrão para alguma função f , que depende de ψ ; e caso S_γ não possua fronteira, foi provado a existência de padrões quando ψ é analítica em $[a, b]$.

Se a superfície S_γ não possui fronteira e sua curvatura de Ricci é não negativa, isto é,

$$K_{S_\gamma}(s) := -\frac{\psi''(s)}{\psi(s)} \geq 0, \quad \forall s \in (a, b),$$

foi provado em [27] que apenas funções constantes podem ser soluções estacionárias estáveis do problema (2.1).

Já em [28], os autores estudaram o problema

$$u_t = \varepsilon \operatorname{div}_g(\kappa(\cdot)\nabla_g u) + f(u) \text{ em } (0, \infty) \times \mathcal{M},$$

onde \mathcal{M} é uma superfície de revolução e f é uma função bi-estável com raízes $\alpha < \zeta < \beta$ satisfazendo a condição de igualdade de área, isto é, $\int_\alpha^\beta f(\xi) d\xi = 0$. Utilizando técnicas de Γ -convergência, foi provado que se a função $\psi\sqrt{\kappa}$ possui mínimo local isolado em $s_0 \in (0, l)$, então existe uma família de padrões $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>\varepsilon_0}$ que desenvolve camada de transição interna com interface em s_0 , ou seja, u_ε converge para $\alpha\chi_{(0,s_0)} + \beta\chi_{(s_0,l)}$ na topologia de L^1 , quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Observe que no trabalho aqui desenvolvido não exigimos a condição de igualdade de área sobre f em relação a α e β , ou seja, a função f não satisfaz necessariamente $\int_\alpha^\beta f(\xi) d\xi = 0$. Portanto, a teoria de Γ -convergência não pode ser utilizada neste problema, uma vez que a condição de igualdade de área é fundamental para seu uso, já que gera um potencial do tipo poço duplo de mesma profundidade. Além disso, estamos interessados em provar a existência de padrões de (2.1) para uma família de superfícies suficientemente próximas de uma superfície limite, enquanto que a teoria de Γ -convergência garante a existência de padrões em domínios fixos. Por essas razões supracitadas, recorreremos ao Cálculo Variacional: definiremos um funcional de energia associado à (2.1), provaremos a existência de L^1 -mínimos locais deste funcional e por fim, mostraremos que tais mínimos são padrões de (2.1).

Há diversos estudos que utilizam Cálculo Variacional para garantir a existência de mínimos locais de funcionais de energia. Nos artigos [20], [23] e [24], por exemplo, os autores estudaram o funcional de energia

$$E(u; \Omega_\varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} F(u), \quad \forall u \in H^1(\Omega_\varepsilon),$$

a fim de provar a existência de L^1 -mínimos locais de $E(\cdot; \Omega_\varepsilon)$, onde F é uma função de classe C^2 com um número finito de mínimos locais e Ω_ε é um domínio aberto de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 .

Em [20], os autores trabalharam com domínios Ω_ε tridimensionais em formato de haltere com lados idênticos, onde a medida do gargalo tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Sob algumas condições, provaram a existência de uma família de L^1 -mínimos locais para o funcional de energia $E(\cdot; \Omega_\varepsilon)$ com o potencial de poço duplo simétrico $F(u) = (u^2 - 1)^2$.

Já em [23], Morini e Slastikov, provaram, sob as mesmas condições, a existência de uma família de L^1 -mínimos locais para o funcional de energia $E(\cdot; \Omega_\varepsilon)$, onde Ω_ε é um domínio bidimensional em formato de haltere com lados idênticos. Ademais, esses mesmos autores notaram a possibilidade de se obter resultados análogos para domínios bidimensionais em formato de haltere de lados distintos, trabalho realizado em [24].

Após esses artigos, indagamos se tais fenômenos também ocorreriam na fronteira de um domínio tridimensional em formato de haltere de lados distintos. Ao longo da nossa pesquisa, notamos que para a existência de padrões para esse tipo de superfícies não era necessário que a fronteira fosse em formato de haltere, e por esse motivo, estudamos uma superfície gerada pela curva descrita na Fig. 2.1.

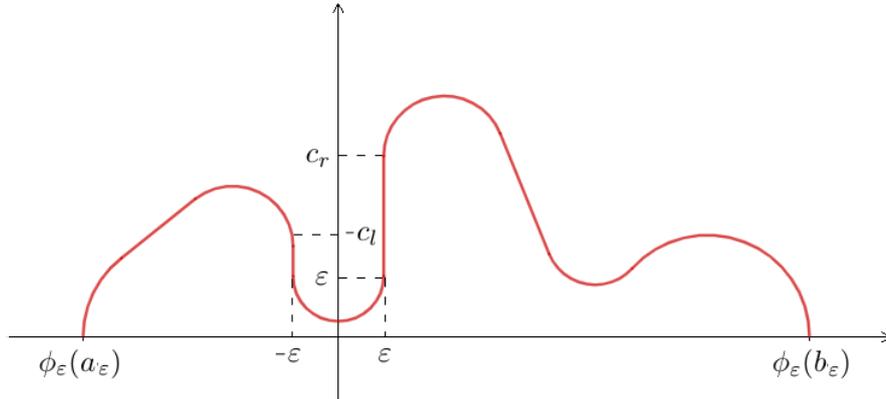


Figura 2.1: Curva geratriz γ_ε no plano O_{xy} .

Com a finalidade de definirmos a família de superfícies $\{S_{\gamma_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ do problema (2.1), que serão os domínios onde se dará o fenômeno de difusão, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, defina a curva geratriz $\Gamma_\varepsilon : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\Gamma_\varepsilon(s) = (\Phi_\varepsilon(s), \Psi_\varepsilon(s), 0), \quad \forall s \in [a_0, b_0],$$

cujas funções coordenadas $\Phi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^2 definidas por

$$\Phi_\varepsilon(s) = \begin{cases} \phi_0 - \varepsilon, & \text{em } [a_0, -\varepsilon) \\ \omega_\varepsilon, & \text{em } [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \phi_0 + \varepsilon, & \text{em } (\varepsilon, b_0] \end{cases} \quad \text{e} \quad \Psi_\varepsilon(s) = \begin{cases} \psi_0, & \text{em } [a_0, -\varepsilon) \\ j_\varepsilon, & \text{em } [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \psi_0, & \text{em } (\varepsilon, b_0], \end{cases}$$

onde $a_0 < 0 < b_0$, as funções $\omega_\varepsilon, j_\varepsilon : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ são positivas tais que $\omega_\varepsilon(0) = 0, j_\varepsilon > 0$ em $[-\varepsilon, \varepsilon], j'_\varepsilon(0) = 0, j''_\varepsilon(0) > 0$ e $\phi_0, \psi_0 : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}$, funções coordenadas da superfície limite¹ S_{γ_0} , são definidas por

$$\phi_0(s) = \begin{cases} 0, & s \in [c_l, c_r] \\ \tilde{\phi}_0(s), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad \psi_0(s) = \begin{cases} |s|, & s \in [c_l, c_r] \\ \tilde{\psi}_0(s), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

com ϕ_0 e ψ_0 funções de classe C^2 em $[a_0, 0], [0, b_0]$ e $a_0 < c_l < 0 < c_r < b_0$, onde c_l e c_r são constantes fixas e $\tilde{\phi}_0, \tilde{\psi}_0 \in C^2(a, c_l) \cap C^2(c_r, b)$.

Neste caso, iremos trabalhar com a família de superfícies $\{S_{\gamma_\varepsilon}\}$, para $\varepsilon < \min\{-c_l, c_r\}$, como na Fig. 2.1. Destacamos que o traço da curva Γ_ε foi tomado como um segmento vertical nos intervalos $[c_l, -\varepsilon]$ e $[\varepsilon, c_r]$ apenas para facilitar os cálculos feitos neste trabalho.

As funções ϕ_0 e ψ_0 foram tomadas de modo que a curva $\gamma_0 = (\phi_0, \psi_0, 0) : [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}^3$ no plano O_{xy} seja descrita como na Fig. 2.2.

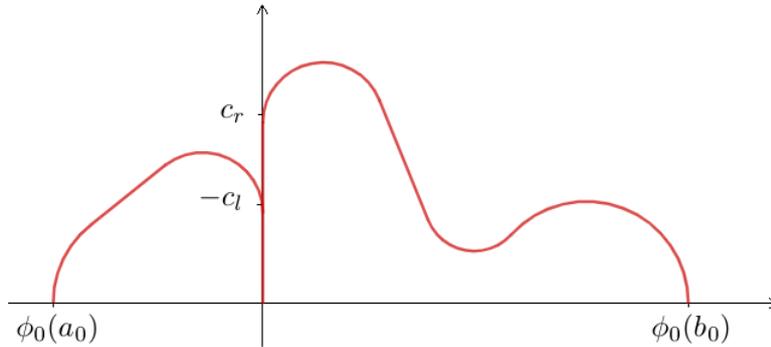


Figura 2.2: Curva limite γ_0 no plano O_{xy} .

Sem perda de generalidade, podemos supor γ_0 parametrizada pelo comprimento de arco em $(a_0, 0)$ e $(0, b_0)$, mas note que a curva Γ_ε não necessariamente possui essa mesma propriedade. Por esse motivo, considere $q_\varepsilon : [a_0, b_0] \rightarrow [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ a função comprimento de arco de Γ_ε a partir do ponto $0 \in (a_0, b_0)$ e sua inversa $h_\varepsilon = (q_\varepsilon)^{-1} : [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \rightarrow [a_0, b_0]$. Defina a curva parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma_\varepsilon : [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\gamma_\varepsilon := \Gamma_\varepsilon \circ h_\varepsilon.$$

Sejam $\phi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ as funções coordenadas de classe C^2 de γ_ε definidas por

$$\phi_\varepsilon := \Phi_\varepsilon \circ h_\varepsilon \quad \text{e} \quad \psi_\varepsilon := \Psi_\varepsilon \circ h_\varepsilon.$$

¹O modo como γ_0 está definida em 0 faz com que S_{γ_0} não seja uma superfície, mas utilizaremos a nomenclatura *superfície limite* para nos referirmos a mesma.

Podemos supor γ_ε com a mesma orientação da curva Γ_ε . Caso isso não ocorra, basta considerar a curva $\gamma_\varepsilon(b_\varepsilon + a_\varepsilon - s)$, com $s \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$, que por definição possui a mesma orientação de Γ_ε e é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

De modo geral, as parametrizações das curvas $\gamma_0, \Gamma_\varepsilon$ e γ_ε são dadas por:

- $\gamma_0(s) = (\phi_0(s), \psi_0(s), 0)$, para $s \in [a_0, b_0]$ (Fig. 2.2).
- $\Gamma_\varepsilon(s) = (\Phi_\varepsilon(s), \Psi_\varepsilon(s), 0)$, para $s \in [a_0, b_0]$.
- $\gamma_\varepsilon(s) = (\phi_\varepsilon(s), \psi_\varepsilon(s), 0)$, para $s \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ (Fig. 2.1).

Usaremos as notações γ_0^l e γ_0^r (reciprocamente, Γ_ε^l e Γ_ε^r) quando nos referirmos à curva γ_0 (reciprocamente, Γ_ε) restrita aos intervalos $[a_0, 0]$ e $[0, b_0]$, respectivamente. Já no caso de γ_ε , como ela está definida em um intervalo que pode ser distinto de $[a_0, b_0]$, a fim de manter os traços de suas restrições iguais a Γ_ε^l e Γ_ε^r , usaremos γ_ε^l e γ_ε^r para denotar a curva γ_ε restrita aos intervalos $[a_\varepsilon, q_\varepsilon(0)]$ e $[q_\varepsilon(0), b_\varepsilon]$, respectivamente, onde q_ε é a função comprimento de arco de Γ_ε .

Dada uma curva geratriz γ qualquer, as superfícies de revolução consideradas aqui são rotações de γ em torno do eixo O_x , denotadas por S_γ . Por exemplo, a superfície S_{γ_ε} é a superfície de revolução gerada pela rotação de γ_ε em torno do eixo O_x .

Nosso principal interesse é mostrar que como o problema limite

$$u_t = \Delta_{S_{\gamma_0}} u + \lambda f(u) \quad \text{em } (0, \infty) \times S_{\gamma_0}$$

possui soluções estáveis $u \equiv \alpha$ em $S_{\gamma_0^l}$ e $v \equiv \beta$ em $S_{\gamma_0^r}$, onde α e β são os zeros estáveis de f , então existem soluções estacionárias não constantes u_ε em superfícies suficientemente próximas, S_{γ_ε} , que gozam da propriedade de estabilidade.

Além disso, se fixarmos $\varepsilon > 0$ e supusermos que f não satisfaz a condição de igualdade de área, ao considerarmos uma família de soluções estacionárias de (2.1), denotada por $(u_{\varepsilon, \lambda})_{\lambda > 0}$, queremos estudar o comportamento assintótico e a estabilidade de $u_{\varepsilon, \lambda}$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Este capítulo será dividido em quatro seções. Na primeira seção, exporemos resultados preliminares que serão utilizados nas seções seguintes, enquanto na segunda, exibiremos a prova de existência de padrões para problema (2.1). Nas Seções 2.3 e 2.4, faremos um estudo do comportamento assintótico e uma análise da estabilidade, respectivamente, das soluções estacionárias de (2.1), quando o parâmetro $\lambda > 0$ tende ao infinito.

2.1 Resultados preliminares e notações

Para $\varepsilon > 0$, como S_{γ_ε} é uma superfície de revolução, os pontos $(x, y, z) \in S_{\gamma_\varepsilon}$ podem ser expressos por

$$\begin{cases} x = \phi_\varepsilon(s) \\ y = \psi_\varepsilon(s) \cos \theta \\ z = \psi_\varepsilon(s) \sin \theta \end{cases}, \quad \text{para } (s, \theta) \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \times [0, 2\pi). \quad (2.4)$$

Então, dada uma função $u : S_{\gamma_\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir $\tilde{u} : [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{u}(s, \theta) := u(\phi_\varepsilon(s), \psi_\varepsilon(s) \cos \theta, \psi_\varepsilon(s) \sin \theta), \quad \forall (s, \theta) \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \times [0, 2\pi). \quad (2.5)$$

As funções u e \tilde{u} definidas na superfície e no cartesiano de intervalos, respectivamente, serão denotadas apenas por u , pois deixaremos claro com qual função estamos lidando através dos seus domínios ou variáveis utilizadas.

A superfície de revolução S_{γ_ε} é uma variedade Riemanniana bidimensional suave com a métrica

$$g_\varepsilon := ds^2 + \psi_\varepsilon^2 d\theta^2 \quad (2.6)$$

e, conseqüentemente, o gradiente em S_{γ_ε} é dado por

$$\nabla_{S_{\gamma_\varepsilon}} u := \left(u_s, \frac{1}{\psi_\varepsilon^2} u_\theta \right). \quad (2.7)$$

Além disso, como γ_ε é parametrizada pelo comprimento de arco, o elemento de área em S_{γ_ε} é dado por

$$d\sigma = \psi_\varepsilon ds d\theta \quad (2.8)$$

e sua curvatura geodésica por

$$k_{g_\varepsilon} := \frac{\psi'_\varepsilon}{\psi_\varepsilon} \quad \text{em } (a_\varepsilon, b_\varepsilon). \quad (2.9)$$

Note que, como $\psi_\varepsilon(a_\varepsilon) = \psi_\varepsilon(b_\varepsilon) = 0$ e $\psi'_\varepsilon(a_\varepsilon) = -\psi'_\varepsilon(b_\varepsilon) = 1$, temos

$$\lim_{s \rightarrow a^-} k_{g_\varepsilon}(s) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow b^+} k_{g_\varepsilon}(s) = -\infty.$$

Sabemos que da Geometria Riemanniana e das hipóteses anteriores, o operador Laplace-Beltrami de S_{γ_ε} é dado por

$$\Delta_{S_{\gamma_\varepsilon}} u = u_{ss} + k_{g_\varepsilon} u_s + \frac{1}{\psi_\varepsilon^2} u_{\theta\theta}$$

e devido a suavidade da superfície S_{γ_ε} , o problema (2.1) torna-se

$$\begin{cases} u_t = u_{ss} + k_{g_\varepsilon} u_s + \frac{1}{\psi_\varepsilon^2} u_{\theta\theta} + \lambda f(u) & \text{em } (0, \infty) \times (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \times [0, 2\pi) \\ u(0, s, \theta) = u^0(s, \theta) & \text{em } (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \times [0, 2\pi) \\ u_s(t, a_\varepsilon, \theta) = u_s(t, b_\varepsilon, \theta) = 0, & (t, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi). \end{cases} \quad (2.10)$$

Definição 2.3. Uma solução estacionária \bar{u} de (2.10) é dita *estável no sentido de Lyapunov* (ou apenas *estável*) se para todo $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tais que, para todo valor inicial u^0 em (2.10) com $\|u^0 - \bar{u}\|_{L^\infty(S_{\gamma_\varepsilon})} < \delta$, a solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (2.10), existe para todo $t > 0$ e satisfaz $\|u(t, \cdot; u^0) - \bar{u}\|_{L^\infty(S_{\gamma_\varepsilon})} < \eta$, para todo $t > 0$, onde $u(t, \cdot; u^0)$ é a solução tal que $u(0, \cdot; u^0) = u^0(\cdot)$.

Dizemos que \bar{u} é *instável* se ela não for estável no sentido de Lyapunov.

Portanto, um padrão de (2.1) é uma solução de

$$\begin{cases} u_{ss} + k_{g_\varepsilon} u_s + \frac{1}{\psi_\varepsilon^2} u_{\theta\theta} + \lambda f(u) = 0 & \text{em } (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \times [0, 2\pi) \\ u_s(a_\varepsilon, \theta) = u_s(b_\varepsilon, \theta) = 0, & \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

que é uma solução estacionária estável de (2.10) no sentido de Lyapunov.

Como estamos procurando padrões de (2.1), o resultado seguinte é importante para o nosso estudo de estabilidade.

Lema 2.4 (Proposição 3.2 [2]). *Toda solução estacionária u do problema (2.1) em S_γ que depende do ângulo θ é instável.*

O Lema 2.4 garante que padrões de (2.10) não dependem do ângulo. Deste modo, podemos restringir a nossa análise a funções que independem de θ e provar a existência de padrões para o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{ss} + k_{g_\varepsilon} u_s + \lambda f(u) & \text{em } (0, \infty) \times (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) & \text{em } (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \\ u_s(t, a_\varepsilon) = u_s(t, b_\varepsilon) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Como os padrões u independem de θ , podemos tomar $\theta = 0$ em (2.5) e então, lidarmos com funções $\tilde{u} : [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\tilde{u}(s) := u(s, 0) = u(\phi_\varepsilon(s), \psi_\varepsilon(s), 0), \text{ para } s \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon].$$

Novamente, iremos denotar as funções u e \tilde{u} definidas na superfície e no intervalo, respectivamente, apenas por u , uma vez que ficará explícito as funções que estaremos lidando através dos seus domínios ou variáveis utilizadas. Além disso, iremos utilizar as notações

$$\frac{du}{ds}, \quad u' \quad \text{ou} \quad u_s$$

quando nos referirmos à derivada de u em relação à variável espacial, a depender da situação que estivermos trabalhando.

Apesar de termos citado apenas as superfícies de revolução S_{γ_ε} , todas as caracterizações (2.4)-(2.9) são válidas para as superfícies $S_{\gamma_0^l}$ e $S_{\gamma_0^r}$, fazendo suas respectivas substituições.

Como dito anteriormente, utilizaremos Cálculo Variacional para provar a existência de padrões para (2.1). Deste modo, para encontrar padrões de (2.1) é suficiente encontrar L^1 -mínimos locais do funcional de energia

$$E(u; S_{\gamma_\varepsilon}) := \int_{S_{\gamma_\varepsilon}} \left[\frac{1}{2} |\nabla_{S_{\gamma_\varepsilon}} u|^2 + \lambda F(u) \right] d\sigma, \quad \forall u \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon}),$$

e mostrar que esses mínimos são padrões de (2.11), onde $\lambda > 0$ é um parâmetro fixo e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é o potencial de poço duplo definido por

$$F(u) = - \int_0^u f(\xi) d\xi, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

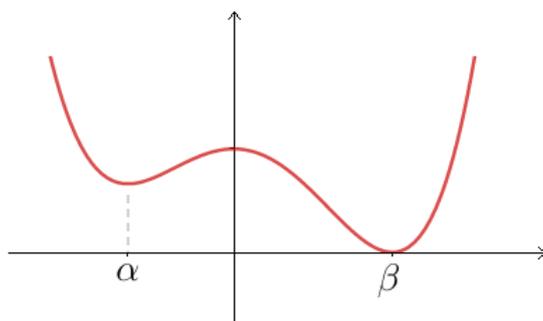


Figura 2.3: Exemplo de potencial de poço duplo assimétrico F .

Imediatamente, de (2.2) e (2.3), obtemos as seguintes propriedades de F :

- (c₁) $F \in C^\infty(\mathbb{R})$;
- (c₂) α e β são os únicos mínimos locais isolados de F e $F(\beta) \leq F(\alpha)$;
- (c₃) $F(u) \leq F(-u), \forall u \in [0, -\alpha]$;
- (c₄) $F' = -f$;
- (c₅) F é estritamente crescente em $[\alpha, 0] \cup [\beta, \infty)$;
- (c₆) F é estritamente decrescente em $(-\infty, \alpha] \cup [0, \beta]$.

Observação 2.5. A função F pode ser tomada não negativa, pois ao considerarmos

$$\tilde{F}(u) = F(u) - \min\{F(\alpha), F(\beta)\}, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

temos \tilde{F} não negativa e as propriedades (c₁)-(c₆) são válidas, uma vez que os pontos críticos de F e \tilde{F} são os mesmos.

Como o intuito é encontrar padrões monotônicos de (2.1), inicialmente vamos trabalhar com os espaços L^p e de Sobolev, restritos às funções monotônicas crescentes. Deste modo, sejam $L_m^1(S_\gamma)$ e $H_m^1(S_\gamma)$ subconjuntos de $L^1(S_\gamma)$ e $H^1(S_\gamma)$, respectivamente, definidos por

$$L_m^1(S_\gamma) = \{u \in L^1(S_\gamma) : u(s) \text{ monotônica crescente em } \bar{I}\}$$

e

$$H_m^1(S_\gamma) = \{u \in H^1(S_\gamma) : u(s) \text{ monotônica crescente em } \bar{I}\},$$

onde I denota um intervalo aberto limitado, $\gamma = (\phi, \psi, 0) : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $u(s) = u(s, 0)$.

Agora que já foram introduzidos o funcional de poço duplo F e suas propriedades, as curvas e superfícies de revolução que serão estudadas e os espaços que iremos trabalhar, começaremos com as demonstrações de resultados que ajudarão a provar a existência de padrões para o problema inicial (2.1), através do problema derivado (2.11). No decorrer das próximas demonstrações serão usados fatos a respeito de variedades Riemannianas como, por exemplo, $H^1(S_\gamma)$ ser um espaço de Banach reflexivo, a imersão compacta de $H^1(S_\gamma)$ em $L^2(S_\gamma)$ e a desigualdade de Poincaré em $H^1(S_\gamma)$, que podem ser encontrados em [15, 16, 30, 31].

O resultado a seguir será utilizado no Teorema 2.9 aplicado em uma família de curvas geratrizes $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Por esta razão, iremos utilizar uma curva genérica parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma = (\phi, \psi, 0) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\psi > 0 \text{ em } (a, b) \quad \text{e} \quad \psi(a) = \psi(b) = 0. \quad (2.12)$$

Lema 2.6. *Sejam $\gamma = (\phi, \psi, 0) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco que satisfaz (2.12), $u_0 \in L_m^1(S_\gamma)$ e*

$$B_d^m(u_0) = \{v \in H_m^1(S_\gamma) : \|v - u_0\|_{L^1(S_\gamma)} \leq d\}.$$

Se $B_d^m(u_0) \neq \emptyset$, então

$$\exists u \in B_d^m(u_0) : E(u; S_\gamma) = \min \{E(v; S_\gamma) : v \in B_d^m(u_0)\},$$

para $\lambda > 0$ fixo.

Demonstração. Seja

$$\tau = \inf \{E(v; S_\gamma) : v \in B_d^m(u_0)\}.$$

Como F é não negativa, temos $\tau \geq 0$.

Se $\tau = \infty$, o funcional de energia $E(\cdot; S_\gamma)$ aplicado em qualquer função pertencente à $B_d^m(u_0)$ atinge τ e o resultado segue.

Analiseemos o caso onde $\tau < \infty$. Seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B_d^m(u_0)$ uma sequência minimizante, isto é,

$$E(u_k; S_\gamma) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tau. \quad (2.13)$$

Uma vez que $F \geq 0$, segue de (2.13) que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\nabla_{S_\gamma} u_k\|_{L^2(S_\gamma)} < \infty. \quad (2.14)$$

Pela Desigualdade de Poincaré, existe uma constante $c = c(S_\gamma) > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u_k\|_{L^2(S_\gamma)} \leq \|u_k - \bar{u}_k\|_{L^2(S_\gamma)} + \|\bar{u}_k\|_{L^2(S_\gamma)} \leq c \|\nabla_{S_\gamma} u_k\|_{L^2(S_\gamma)} + \|\bar{u}_k\|_{L^2(S_\gamma)}, \quad (2.15)$$

onde $\bar{u}_k = \frac{1}{\mu(S_\gamma)} \int_{S_\gamma} u_k d\sigma$ é a média integral de u_k em S_γ , para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $\|u_k - u_0\|_{L^1(S_\gamma)} \leq d$, segue que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\bar{u}_k\|_{L^2(S_\gamma)}^2 \leq \frac{1}{\mu(S_\gamma)^2} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{S_\gamma} \|u_k\|_{L^1(S_\gamma)}^2 d\sigma < \infty. \quad (2.16)$$

De (2.16), (2.15) e (2.14), obtemos

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{L^2(S_\gamma)} < \infty. \quad (2.17)$$

De (2.14) e (2.17), temos $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(S_\gamma)$ limitada e da reflexividade de $H^1(S_\gamma)$, passando a uma subsequência se necessário, segue que

$$\exists u \in H^1(S_\gamma) : u_k \rightharpoonup u \text{ em } H^1(S_\gamma). \quad (2.18)$$

Uma vez que $E(\cdot; S_\gamma)$ é um operador fracamente semicontínuo inferiormente, temos

$$E(u; S_\gamma) \leq \liminf_{k \in \mathbb{N}} E(u_k; S_\gamma) = \tau. \quad (2.19)$$

Para concluirmos a prova é suficiente mostrar que $u \in B_d^m(u_0)$. Para isso, basta provar que u é monotônica crescente em $[a, b]$, visto que

$$\|u - u_0\|_{L^1(S_\gamma)} \leq \liminf_{k \in \mathbb{N}} \|u_k - u_0\|_{L^1(S_\gamma)} \leq d.$$

De (2.14) e (2.17), temos

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_a^b [(u'_k)^2 + u_k^2] \psi ds < \infty.$$

Como ψ se anula nos extremos do intervalo $[a, b]$ não podemos garantir que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ seja limitada em $H^1(a, b)$. Mas podemos afirmar que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^1(I_\delta)$, para todo $\delta > 0$, onde $I_\delta = (a + \delta, b - \delta) \subset (a, b)$, uma vez que ψ é estritamente positiva em I_δ . Deste modo, passando a uma subsequência (a menos de notação), segue que

$$\exists v_\delta \in H^1(I_\delta) : u_k \rightharpoonup v_\delta \text{ em } H^1(I_\delta). \quad (2.20)$$

Note que a função $v_\delta \in H^1(I_\delta)$ não necessariamente é da forma $u(\phi, \psi, 0)$, onde u está definida em (2.18). Contudo, através das inclusões compactas $H^1(S_\gamma) \hookrightarrow L^1(S_\gamma)$ e $H^1(I_\delta) \hookrightarrow L^1(I_\delta)$ e da unicidade do limite em $L^1(I_\delta)$, obtemos

$$v_\delta(s) = u(s), \quad \forall s \in I_\delta, \quad \forall \delta > 0. \quad (2.21)$$

De (2.20) e (2.21), temos

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } H^1(I_\delta), \quad \forall \delta > 0. \quad (2.22)$$

Observe que a sequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ obtida em (2.22) depende de $\delta > 0$, ou seja, para cada $\delta > 0$, existe uma subsequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfaz (2.22).

Sejam $s_1, s_2 \in (a, b)$ tais que $s_1 < s_2$. Então existe $\delta_0 > 0$ tal que $s_1, s_2 \in I_{\delta_0}$. Segue da inclusão compacta $H^1(I_{\delta_0}) \hookrightarrow C(I_{\delta_0})$ e de (2.22) que, passando a uma subsequência se necessário,

$$u_k(s) \rightarrow u(s), \quad \forall s \in I_{\delta_0}. \quad (2.23)$$

De (2.23) e da monotonicidade crescente de u_k , para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$u(s_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(s_1) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(s_2) = u(s_2).$$

Consequentemente, u é monotônica crescente em (a, b) . Vejamos essa propriedade em relação aos extremos do intervalo.

Seja $\tilde{s} > a$. Da monotonicidade de u em (a, b) e de sua continuidade, temos

$$u(a) = \lim_{s \rightarrow a^+} u(s) \leq u(\tilde{s}), \quad \text{para } s < \tilde{s}.$$

De modo análogo, obtemos

$$u(\tilde{s}) \leq u(b), \quad \text{para } \tilde{s} < b.$$

Portanto, u é monotônica crescente em $[a, b]$, e consequentemente, $u \in B_d^m(u_0)$. \square

O próximo resultado também será utilizado no Teorema 2.9.

Lema 2.7. *Sejam \bar{u} um mínimo local isolado de F , ou seja $\bar{u} = \alpha$ ou $\bar{u} = \beta$. Então, a função \bar{u} é um L^1 -mínimo local isolado dos funcionais $E(\cdot; S_{\gamma_l})$ e $E(\cdot; S_{\gamma_r})$, para $\lambda > 0$ fixo.*

Demonstração. Demonstraremos este lema apenas para o funcional de energia $E(\cdot; S_{\gamma_r})$, pois a prova para $E(\cdot; S_{\gamma_l})$ é análoga.

Seja $\tilde{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o potencial definido por

$$\tilde{F}(u) = - \int_0^u \tilde{f}(\xi) d\xi, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

onde $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 definida por

$$\tilde{f}(u) = \begin{cases} f'(\alpha)(u - \alpha), & u \in (-\infty, \alpha) \\ f(u), & u \in [\alpha, \beta] \\ f'(\beta)(u - \beta), & u \in (\beta, \infty). \end{cases}$$

Note que $\tilde{F} \in C^2(\mathbb{R})$, $\tilde{F}'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\tilde{F}(u) \leq F(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Em particular, $\tilde{F}(\bar{u}) = F(\bar{u})$.

Seja $\tilde{E}(\cdot; S_{\gamma_0^r}) : H^1(S_{\gamma_0^r}) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional de energia definido por

$$\tilde{E}(u; S_{\gamma_0^r}) = \int_{S_{\gamma_0^r}} \left[\frac{1}{2} \left| \nabla_{S_{\gamma_0^r}} u \right|^2 + \lambda \tilde{F}(u) \right] d\sigma, \quad \forall u \in H^1(S_{\gamma_0^r}).$$

Segue da definição de \tilde{F} que

$$\tilde{E}(u; S_{\gamma_0^r}) \leq E(u; S_{\gamma_0^r}), \quad \forall u \in S_{\gamma_0^r} \quad (2.24)$$

e

$$\tilde{E}(\bar{u}; S_{\gamma_0^r}) = E(\bar{u}; S_{\gamma_0^r}). \quad (2.25)$$

Nosso intuito é mostrar que através da Afirmação 1, feita a seguir, e de uma cadeia de desigualdades, $\tilde{E}(\bar{u}; S_{\gamma_0^r})$ é estritamente menor que o funcional de energia $\tilde{E}(\cdot; S_{\gamma_0^r})$ aplicado em um vizinhança de \bar{u} e devido as relações expressas em (2.24) e (2.25), provar que o mesmo ocorre com o funcional $E(\cdot; S_{\gamma_0^r})$.

Afirmação 1. $\exists \eta_0 > 0$:

$$\partial^2 \tilde{E}(v; S_{\gamma_0^r})[\varphi] > \lambda \frac{\tilde{F}''(\bar{u})}{2} \|\varphi\|_{L^2(S_{\gamma_0^r})}^2,$$

$$\forall \varphi \in H^1(S_{\gamma_0^r}), \forall v \in H^1(S_{\gamma_0^r}) : \|v - \bar{u}\|_{L^1(S_{\gamma_0^r})} \leq \eta_0.$$

Suponha por contradição que isso não ocorra. Então, existem sequências $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}, (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(S_{\gamma_0^r})$ tais que

$$v_k \rightarrow \bar{u} \quad \text{em } L^1(S_{\gamma_0^r})$$

e

$$\partial^2 \tilde{E}(v_k; S_{\gamma_0^r})[\varphi_k] \leq \lambda \frac{\tilde{F}''(\bar{u})}{2} \|\varphi_k\|_{L^2(S_{\gamma_0^r})}^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.26)$$

onde

$$\partial^2 \tilde{E}(v_k; S_{\gamma_0^r})[\varphi_k] := \int_{S_{\gamma_0^r}} \left[\left| \nabla_{S_{\gamma_0^r}} \varphi_k \right|^2 + \lambda \tilde{F}''(v_k) \varphi_k^2 \right] d\sigma, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Seja o primeiro autovalor associado a v_k definido por

$$\mu_1(v_k) := \min \{ \partial^2 \tilde{E}(v_k; S_{\gamma_0^r})[\varphi] : \varphi \in H^1(S_{\gamma_0^r}) \text{ e } \|\varphi\|_{L^2(S_{\gamma_0^r})} = 1 \}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor φ_k primeira autofunção associada ao primeiro autovalor $\mu_1(v_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue de (2.26) que

$$\liminf_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(v_k) \leq \lambda \frac{\tilde{F}''(\bar{u})}{2}. \quad (2.27)$$

Afirmção 1.1. $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(S_{\gamma_0^r})$ é limitada.

De fato, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_{L^2(S_{\gamma_0^r})}^2 + \left\| \nabla_{S_{\gamma_0^r}} \varphi_k \right\|_{L^2(S_{\gamma_0^r})}^2 &= 1 + \int_{S_{\gamma_0^r}} \left| \nabla_{S_{\gamma_0^r}} \varphi_k \right|^2 d\sigma \\ &= 1 + \mu_1(v_k) - \lambda \int_{S_{\gamma_0^r}} \tilde{F}''(v_k) \varphi_k^2 d\sigma \\ &\leq 1 + \mu_1(v_k) + \lambda \|\tilde{F}''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Consequentemente, de (2.27) e $\tilde{F}'' \in L^\infty(\mathbb{R})$, obtemos

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{H^1(S_{\gamma_0^r})} < \infty,$$

concluindo a Afirmção 1.1.

Como $H^1(S_{\gamma_0^r})$ é um espaço reflexivo, existem uma subsequência $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(S_{\gamma_0^r})$ e $\varphi_0 \in H^1(S_{\gamma_0^r})$ tais que

$$\varphi_k \rightharpoonup \varphi_0 \text{ em } H^1(S_{\gamma_0^r}).$$

Da imersão compacta de $H^1(S_{\gamma_0^r})$ em $L^2(S_{\gamma_0^r})$, obtemos

$$\varphi_k \rightarrow \varphi_0 \text{ em } L^2(S_{\gamma_0^r}), \quad (2.28)$$

a menos de uma subsequência.

De (2.28) e do Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\|\varphi_0\|_{L^2(S_{\gamma_0^r})} = 1. \quad (2.29)$$

Da convergência $v_k \rightarrow \bar{u}$ em $L^1(S_{\gamma_0^r})$ e de (2.29), temos

$$\liminf_{k \in \mathbb{N}} \mu_1(v_k) \geq \liminf_{k \in \mathbb{N}} \lambda \int_{S_{\gamma_0^r}} \tilde{F}''(v_k) \varphi_k^2 d\sigma = \lambda \tilde{F}''(\bar{u}) \int_{S_{\gamma_0^r}} \varphi_0^2 d\sigma = \lambda \tilde{F}''(\bar{u}),$$

contradizendo (2.27) e validando a Afirmção 1.

Fixado $v \in H^1(S_{\gamma_0^r})$ tal que $0 < \|v - \bar{u}\|_{L^1(S_{\gamma_0^r})} \leq \eta_0$, defina

$$g_v(s) = \tilde{E}(\bar{u} + s(v - \bar{u}); S_{\gamma_0^r}), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Para $s \in (0, 1)$, segue da Afirmção 1 que

$$g_v''(s) = \partial^2 \tilde{E}(\bar{u} + s(v - \bar{u}); S_{\gamma_0^r})[v - \bar{u}] > \lambda \frac{\tilde{F}''(\bar{u})}{2} \|v - \bar{u}\|_{L^2(S_{\gamma_0^r})}^2.$$

Uma vez que $g'_v(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{E}(v; S_{\gamma_0^r}) &= g_v(1) = g_v(0) + \int_0^1 (1-s) g''_v(s) ds \\ &\geq \tilde{E}(\bar{u}; S_{\gamma_0^r}) + \lambda \frac{\tilde{F}''(\bar{u})}{4} \|v - \bar{u}\|_{L^2(S_{\gamma_0^r})}^2.\end{aligned}$$

Como \bar{u} é um zero estável de f , temos $\tilde{F}''(\bar{u}) = -f'(\bar{u}) > 0$ e, portanto, \bar{u} é um L^1 -mínimo local isolado do funcional de energia $\tilde{E}(\cdot; S_{\gamma_0^r})$, isto é,

$$\tilde{E}(\bar{u}; S_{\gamma_0^r}) < \tilde{E}(v; S_{\gamma_0^r}), \quad (2.30)$$

para $v \in H^1(S_{\gamma_0^r})$ tal que $0 < \|v - \bar{u}\|_{L^1(S_{\gamma_0^r})} \leq \eta_0$.

De (2.24), (2.25) e (2.30), segue que

$$E(\bar{u}; S_{\gamma_0^r}) = \tilde{E}(\bar{u}; S_{\gamma_0^r}) < \tilde{E}(v; S_{\gamma_0^r}) \leq E(v; S_{\gamma_0^r}),$$

para $v \in H^1(S_{\gamma_0^r})$ tal que $0 < \|v - \bar{u}\|_{L^1(S_{\gamma_0^r})} \leq \eta_0$.

Consequentemente, \bar{u} é L^1 -mínimo local isolado do funcional $E(\cdot; S_{\gamma_0^r})$. \square

Corolário 2.8. *Seja \bar{u} mínimo local isolado de F . Então, a função \bar{u} é um L_m^1 -mínimo local isolado dos funcionais $E(\cdot; S_{\gamma_0^l})$ e $E(\cdot; S_{\gamma_0^r})$, para $\lambda > 0$ fixo.*

Demonstração. Segue imediatamente da cadeia de inclusões

$$\{\bar{u}\} \subset L_m^1(S_{\gamma_0^l}) \subset L^1(S_{\gamma_0^l}),$$

que também é válida para $S_{\gamma_0^r}$. \square

2.2 Estudo de estabilidade das soluções estacionárias do problema de Allen-Cahn

Utilizando os resultados da seção anterior e os artigos [24, 28] como inspiração, provaremos, para $\lambda > 0$ fixo, a existência de L^1 -mínimos locais do funcional $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$ e que tais mínimos são padrões de (2.10) e, consequentemente, padrões de (2.1).

O resultado a seguir garante a existência de uma família de L_m^1 -mínimos locais de $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$.

Teorema 2.9. *Sejam α e β mínimos locais isolados de F . Então, existem $\varepsilon_0 > 0$, $\eta_0 > 0$ (independente de ε) e $u_\varepsilon \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon})$ tais que*

$$(a) \quad E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) \leq E(v; S_{\gamma_\varepsilon}), \forall v \in H_m^1(S_{\gamma_\varepsilon}) : \|u_\varepsilon - v\|_{L^1(S_{\gamma_\varepsilon})} \leq \eta_0, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

$$(b) \quad u_\varepsilon \text{ é monotônica crescente em } [a_\varepsilon, b_\varepsilon], \text{ para } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

$$(c) \quad \|u_\varepsilon - \alpha\|_{L^1(S_{\gamma_\varepsilon^l})} \rightarrow 0 \quad e \quad \|u_\varepsilon - \beta\|_{L^1(S_{\gamma_\varepsilon^r})} \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

(d) $\alpha \leq u_\varepsilon \leq \beta, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Demonstração. Como α e β são mínimos locais isolados de F , segue do Corolário 2.8 que existe $d > 0$ tal que

$$E(\alpha; S_{\gamma_0^l}) < E(v; S_{\gamma_0^l}), \quad \forall v \in H_m^1(S_{\gamma_0^l}) : \|u - \alpha\|_{L^1(S_{\gamma_0^l})} \leq d$$

e

$$E(\beta; S_{\gamma_0^r}) < E(v; S_{\gamma_0^r}), \quad \forall v \in H_m^1(S_{\gamma_0^r}) : \|u - \beta\|_{L^1(S_{\gamma_0^r})} \leq d. \quad (2.31)$$

Considere as divisões de γ_ε^r e γ_ε^l como descritas na Fig. 2.4:

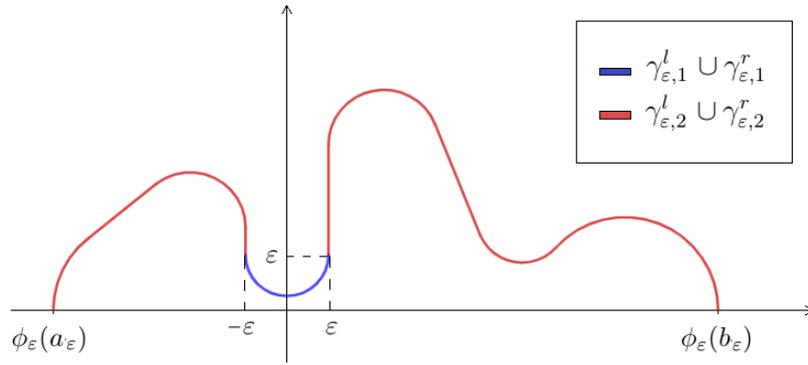


Figura 2.4: Curva geratriz γ_ε no plano O_{xy} .

Seja $u_{0,\varepsilon} : S_{\gamma_\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função em $L_m^1(S_{\gamma_\varepsilon})$ definida por

$$u_{0,\varepsilon} = \begin{cases} \alpha, & \text{em } S_{\gamma_{\varepsilon,2}^l} \\ \frac{\alpha+\beta}{2}, & \text{em } S_{\gamma_{\varepsilon,1}^l} \cup S_{\gamma_{\varepsilon,1}^r} \\ \beta, & \text{em } S_{\gamma_{\varepsilon,2}^r} \end{cases}$$

onde $\gamma_{\varepsilon,i}^l$ e $\gamma_{\varepsilon,i}^r$ ($i = 1, 2$) estão descritas na Fig. 2.4.

Seja $B_d^m(u_{0,\varepsilon})$ a bola fechada definida por

$$B_d^m(u_{0,\varepsilon}) = \{v \in H_m^1(S_{\gamma_\varepsilon}) : \|v - u_{0,\varepsilon}\|_{L^1(S_{\gamma_\varepsilon})} \leq d\}.$$

Afirmção 1. $\exists \tilde{\varepsilon} > 0 : B_d^m(u_{0,\varepsilon}) \neq \emptyset, \forall \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$.

Para provarmos esta afirmação, iremos construir uma família de funções teste $\xi_\varepsilon : S_{\gamma_\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$ e provar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\xi_\varepsilon - u_{0,\varepsilon}\|_{L^1(S_{\gamma_\varepsilon})} = 0. \quad (2.32)$$

Vejamos a construção de ξ_ε em $S_{\gamma_\varepsilon^r}$, pois a construção segue análoga em $S_{\gamma_\varepsilon^l}$.

Note que $0 \in [a_0, b_0]$ é o ponto de intersecção das curvas γ_0^l e γ_0^r e, por definição, é o único ponto tal que $\Gamma_\varepsilon(0)$ está sobre o eixo O_y (isto é, $\Phi_\varepsilon(0) = 0$). Além disso, justamente pelo fato de

$\Gamma_\varepsilon(0)$ estar sobre o eixo O_y , usamos este ponto para decompor a curva Γ_ε em duas curvas: Γ_ε^l e Γ_ε^r , para todo $\varepsilon > 0$. Devido à parametrização feita sobre Γ_ε , o ponto que decompõe as curvas γ_ε^l e γ_ε^r é $q_\varepsilon(0)$, uma vez que $\gamma_\varepsilon(q_\varepsilon(0)) = \Gamma_\varepsilon(0)$. Deste modo, para qualquer ponto $(x, y, z) \in S_{\gamma_\varepsilon^r}$, o seu ponto correspondente, ou seja, o ponto que satisfaz $\gamma_\varepsilon(s) = (x, y, z)$, pertence a $[q_\varepsilon(0), b_\varepsilon]$ e o mesmo ocorre para $S_{\gamma_\varepsilon^l}$ e $[a_\varepsilon, q_\varepsilon(0)]$.

Seja $\rho \in (0, 1)$ tal que $\varepsilon \leq \varepsilon^\rho$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\varepsilon^\rho < \min\{-c_l, c_r\}.$$

Para os pontos $(\varepsilon, \varepsilon, 0), (\varepsilon, \varepsilon^\rho, 0) \in S_{\gamma_\varepsilon^r}$, existem $s_\varepsilon^r, z_\varepsilon^r \in [q_\varepsilon(0), b_\varepsilon]$ tais que $s_\varepsilon^r < z_\varepsilon^r$ (pois γ_ε e Γ_ε têm a mesma orientação) e

$$\gamma_\varepsilon(s_\varepsilon^r) = (\varepsilon, \varepsilon, 0) \quad \text{e} \quad \gamma_\varepsilon(z_\varepsilon^r) = (\varepsilon, \varepsilon^\rho, 0).$$

Veja que, do fato de $\Gamma_\varepsilon(\varepsilon) = (\varepsilon, \varepsilon, 0)$ e $\Gamma_\varepsilon(\varepsilon^\rho) = (\varepsilon, \varepsilon^\rho, 0)$, temos

$$q_\varepsilon(\varepsilon) = s_\varepsilon^r \quad \text{e} \quad q_\varepsilon(\varepsilon^\rho) = z_\varepsilon^r.$$

De modo análogo, existem $s_\varepsilon^l, z_\varepsilon^l \in [a_\varepsilon, q_\varepsilon(0)]$ tais que

$$q_\varepsilon(-\varepsilon^\rho) = z_\varepsilon^l < s_\varepsilon^l = q_\varepsilon(-\varepsilon), \quad \gamma_\varepsilon(s_\varepsilon^l) = (-\varepsilon, \varepsilon, 0) \quad \text{e} \quad \gamma_\varepsilon(z_\varepsilon^l) = (-\varepsilon, \varepsilon^\rho, 0).$$

Defina a função teste $\xi_\varepsilon : S_{\gamma_\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\xi_\varepsilon = \begin{cases} \alpha, & \text{em } S_{\gamma_\varepsilon}([a_\varepsilon, z_\varepsilon^l]) \\ \frac{\alpha+\beta}{2} + g_\varepsilon^l, & \text{em } S_{\gamma_\varepsilon}([z_\varepsilon^l, s_\varepsilon^l]) \\ \frac{\alpha+\beta}{2}, & \text{em } S_{\gamma_\varepsilon}([s_\varepsilon^l, s_\varepsilon^r]) \\ \frac{\alpha+\beta}{2} + g_\varepsilon^r, & \text{em } S_{\gamma_\varepsilon}([s_\varepsilon^r, z_\varepsilon^r]) \\ \beta, & \text{em } S_{\gamma_\varepsilon}([z_\varepsilon^r, b_\varepsilon]), \end{cases} \quad (2.33)$$

onde $g_\varepsilon^l : [z_\varepsilon^l, s_\varepsilon^l] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_\varepsilon^r : [s_\varepsilon^r, z_\varepsilon^r] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem, respectivamente, os seguintes problemas de fronteira:

$$\begin{cases} (g_\varepsilon^l)'' + k_\varepsilon (g_\varepsilon^l)' = 0 \\ g_\varepsilon^l(z_\varepsilon^l) = \frac{\alpha - \beta}{2} \\ g_\varepsilon^l(s_\varepsilon^l) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (g_\varepsilon^r)'' + k_\varepsilon (g_\varepsilon^r)' = 0 \\ g_\varepsilon^r(s_\varepsilon^r) = 0 \\ g_\varepsilon^r(z_\varepsilon^r) = \frac{\beta - \alpha}{2}. \end{cases}$$

Por cálculo direto, obtemos

$$g_\varepsilon^l(s) = \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \left(\int_{z_\varepsilon^l}^{s_\varepsilon^l} \frac{1}{\psi_\varepsilon} d\tilde{s} \right)^{-1} \int_{z_\varepsilon^l}^s \frac{1}{\psi_\varepsilon} d\tilde{s}$$

e

$$g_\varepsilon^r(s) = \frac{\beta - \alpha}{2} \left(\int_{s_\varepsilon^r}^{z_\varepsilon^r} \frac{1}{\psi_\varepsilon} d\tilde{s} \right)^{-1} \int_{s_\varepsilon^r}^s \frac{1}{\psi_\varepsilon} d\tilde{s}.$$

Observe que as famílias $(g_\varepsilon^l)_{\varepsilon>0}$ e $(g_\varepsilon^r)_{\varepsilon>0}$ são funções monotônicas crescentes e limitadas por $\frac{\beta-\alpha}{2}$. Portanto, a função teste ξ_ε é monotônica crescente em $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ e obtemos $\xi_\varepsilon \in H_m^1(S_{\gamma_\varepsilon})$. Resta, apenas, provarmos (2.32).

De fato, como $\Gamma_\varepsilon = (\phi_0 \pm \varepsilon, \psi_0, 0)$ em $[a_0, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, b_0]$ e γ_0 é parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$|\Gamma'_\varepsilon| = 1 \text{ em } [a_0, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, b_0].$$

Além disso, note que $S_{\gamma_{\varepsilon,1}^l} \cup S_{\gamma_{\varepsilon,1}^r} = S_{\gamma_\varepsilon([s_\varepsilon^l, s_\varepsilon^r])}$.

Então, segue do Teorema de Mudança de Variáveis e de $q'_\varepsilon = |\Gamma'_\varepsilon|$ que

$$\begin{aligned} \|\xi_\varepsilon - u_{0,\varepsilon}\|_{L^1(S_{\gamma_\varepsilon})} &= \int_{S_{\gamma_\varepsilon^l}} |\xi_\varepsilon - u_{0,\varepsilon}| d\sigma + \int_{S_{\gamma_\varepsilon^r}} |\xi_\varepsilon - u_{0,\varepsilon}| d\sigma \\ &= \int_{S_{\gamma_\varepsilon([z_\varepsilon^l, s_\varepsilon^l])}} \left| \frac{\beta - \alpha}{2} + g_\varepsilon^l \right| d\sigma + \int_{S_{\gamma_\varepsilon([s_\varepsilon^r, z_\varepsilon^r])}} \left| \frac{\alpha - \beta}{2} + g_\varepsilon^r \right| d\sigma \\ &= 2\pi \int_{z_\varepsilon^l}^{s_\varepsilon^l} \left| \frac{\beta - \alpha}{2} + g_\varepsilon^l \right| \psi_\varepsilon ds + 2\pi \int_{s_\varepsilon^r}^{z_\varepsilon^r} \left| \frac{\alpha - \beta}{2} + g_\varepsilon^r \right| \psi_\varepsilon ds \\ &\leq 2\pi(\beta - \alpha) \left[\int_{q_\varepsilon(-\varepsilon^p)}^{q_\varepsilon(-\varepsilon)} \psi_\varepsilon ds + \int_{q_\varepsilon(\varepsilon)}^{q_\varepsilon(\varepsilon^p)} \psi_\varepsilon ds \right] \\ &= 2\pi(\beta - \alpha) \left[\int_{-\varepsilon^p}^{-\varepsilon} \psi_\varepsilon(q_\varepsilon) \cdot q'_\varepsilon ds + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^p} \psi_\varepsilon(q_\varepsilon) \cdot q'_\varepsilon ds \right] \\ &= 2\pi(\beta - \alpha) \left[\int_{-\varepsilon^p}^{-\varepsilon} \Psi_\varepsilon |\Gamma'_\varepsilon| ds + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^p} \Psi_\varepsilon |\Gamma'_\varepsilon| ds \right] \\ &= 2\pi(\beta - \alpha) \left[\int_{-\varepsilon^p}^{-\varepsilon} \psi_0 ds + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^p} \psi_0 ds \right] \\ &\leq 4\pi(\beta - \alpha) \left(\max_{[a_0, b_0]} \psi_0 \right) (\varepsilon^p - \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

confirmando a Afirmação 1.

Aplicando o Lema 2.6 em $B_d^m(u_{0,\varepsilon})$, para $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, seja u_ε solução do problema

$$\min \{E(v; S_{\gamma_\varepsilon}) : v \in B_d^m(u_{0,\varepsilon})\}.$$

Nosso intuito é mostrar a existência de uma subfamília de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon < \tilde{\varepsilon}}$ tal que a função u_ε seja um L_m^1 -mínimo local do funcional de energia $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$. Como u_ε já minimiza o funcional de energia em $B_d^m(u_{0,\varepsilon})$, basta provar que u_ε está no interior desta bola, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Para tal, provemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u_{0,\varepsilon}\|_{L^1(S_{\gamma_\varepsilon})} = 0. \quad (2.34)$$

Com efeito, através de cálculo direto, das propriedades (c_5) e (c_6) , temos

$$\alpha \leq u_\varepsilon \leq \beta. \quad (2.35)$$

Para provarmos que (2.34) é válida, iremos utilizar a família de funções teste, $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon < \bar{\varepsilon}}$, definida em (2.33).

Devido ao fato das demonstrações referentes à $S_{\gamma_\varepsilon^l}$ e $S_{\gamma_\varepsilon^r}$ serem análogas, todas as afirmações feitas, a partir de agora, serão apenas para a superfície $S_{\gamma_\varepsilon^r}$.

Afirmiação 2. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(\xi_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon^r}) = E(\beta; S_{\gamma_0^r})$.

Para provarmos esta afirmação, iremos decompor o funcional de energia $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon^r})$ em três partes. Vejamos.

- $S_{\gamma_{\varepsilon,1}^r}$:

$$E(\xi_\varepsilon; S_{\gamma_{\varepsilon,1}^r}) = \lambda \int_{S_{\gamma_{\varepsilon,1}^r}} F\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) d\sigma = \lambda F\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \mu(S_{\gamma_{\varepsilon,1}^r}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.36)$$

- $S_{\gamma_\varepsilon([s_\varepsilon^r, z_\varepsilon^r])}$:

Do fato de $(g_\varepsilon^r)_{\varepsilon < \bar{\varepsilon}}$ ser uma família de funções monotônicas crescentes tal que $0 \leq g_\varepsilon^r \leq \frac{\beta - \alpha}{2}$, para todo $\varepsilon > 0$, e F é decrescente em $[0, \beta]$, temos

$$F\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + g_\varepsilon^r\right) \leq F(0) \text{ em } [s_\varepsilon^r, z_\varepsilon^r]. \quad (2.37)$$

Logo, do Teorema de Mudança de Variáveis, de (2.37) e de $|\Gamma'_\varepsilon| = 1$ em (ε, b_0) , temos

$$\begin{aligned} E(\xi_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon([s_\varepsilon^r, z_\varepsilon^r])}) &= \int_{S_{\gamma_\varepsilon([s_\varepsilon^r, z_\varepsilon^r])}} \left[\frac{1}{2} |\nabla_{S_{\gamma_\varepsilon}} g_\varepsilon^r|^2 + \lambda F\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + g_\varepsilon^r\right) \right] d\sigma \\ &= 2\pi \int_{s_\varepsilon^r}^{z_\varepsilon^r} \left[\frac{1}{2} |(g_\varepsilon^r)'|^2 + \lambda F\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + g_\varepsilon^r\right) \right] \psi_\varepsilon ds \\ &= \frac{\pi(\beta - \alpha)^2}{4} \left(\int_{s_\varepsilon^r}^{z_\varepsilon^r} \frac{1}{\psi_\varepsilon} ds \right)^{-1} + 2\pi\lambda \int_{s_\varepsilon^r}^{z_\varepsilon^r} F\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + g_\varepsilon^r\right) \psi_\varepsilon ds \\ &\leq \frac{\pi(\beta - \alpha)^2}{4} \left(\int_{q_\varepsilon(\varepsilon)}^{q_\varepsilon(\varepsilon^\rho)} \frac{1}{\psi_\varepsilon} ds \right)^{-1} + 2\pi\lambda F(0) \int_{q_\varepsilon(\varepsilon)}^{q_\varepsilon(\varepsilon^\rho)} \psi_\varepsilon ds \\ &= \frac{\pi(\beta - \alpha)^2}{4} \left(\int_\varepsilon^{\varepsilon^\rho} \frac{|\Gamma'_\varepsilon|}{\Psi_\varepsilon} ds \right)^{-1} + 2\pi\lambda F(0) \int_\varepsilon^{\varepsilon^\rho} \Psi_\varepsilon |\Gamma'_\varepsilon| ds \\ &= \frac{\pi(\beta - \alpha)^2}{4} \left(\int_\varepsilon^{\varepsilon^\rho} \frac{1}{\psi_0} ds \right)^{-1} + 2\pi\lambda F(0) \int_\varepsilon^{\varepsilon^\rho} \psi_0 ds \\ &\leq \pi \left[\frac{(\beta - \alpha)^2}{4 \ln(\varepsilon^{\rho-1})} + 2\lambda F(0) \left(\max_{[a_0, b_0]} \psi_0 \right) (\varepsilon^\rho - \varepsilon) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

uma vez que $\rho \in (0, 1)$.

- $S_{\gamma_\varepsilon([z_\varepsilon^r, b_\varepsilon])}$:

Novamente, utilizando o Teorema de Mudança de Variáveis e $|\Gamma'_\varepsilon| = 1$ em $[\varepsilon, b_0]$, temos

$$\begin{aligned}
E(\xi_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon([z_\varepsilon^r, b_\varepsilon])}) &= \lambda \int_{S_{\gamma_\varepsilon([z_\varepsilon^r, b_\varepsilon])}} F(\beta) d\sigma = 2\pi\lambda \int_{z_\varepsilon^r}^{b_\varepsilon} F(\beta)\psi_\varepsilon ds \\
&= 2\pi\lambda F(\beta) \int_{q_\varepsilon(\varepsilon^r)}^{q_\varepsilon(b_0)} \psi_\varepsilon ds = 2\pi\lambda F(\beta) \int_{\varepsilon^r}^{b_0} \Psi_\varepsilon |\Gamma'_\varepsilon| ds \\
&= 2\pi\lambda F(\beta) \int_{\varepsilon^r}^{b_0} \psi_0 ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi\lambda \int_0^{b_0} F(\beta)\psi_0 ds = E(\beta; S_{\gamma_0^r}). \quad (2.39)
\end{aligned}$$

A Afirmação 2 segue de (2.36), (2.38) e (2.39).

Seja $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência que tende a zero quando $k \rightarrow \infty$. Pela minimalidade de u_{ε_k} em $B_d^m(u_0, \varepsilon_k)$ e da Afirmação 2, segue que

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} E(u_{\varepsilon_k}; S_{\gamma_{\varepsilon_k}}) \leq \limsup_{k \in \mathbb{N}} E(\xi_{\varepsilon_k}; S_{\gamma_{\varepsilon_k}}) = E(\alpha; S_{\gamma_0^l}) + E(\beta; S_{\gamma_0^r}). \quad (2.40)$$

Como $(F(u_{\varepsilon_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, de (2.40) temos, a menos de uma subsequência,

$$\int_{S_{\gamma_{\varepsilon_k}}} \left| \nabla_{S_{\gamma_{\varepsilon_k}}} u_{\varepsilon_k} \right|^2 d\sigma < \infty. \quad (2.41)$$

Sejam $I_{\varepsilon_k} = \{\varepsilon_k\} \times [0, \varepsilon_k]$ (Fig. 2.5) um subconjunto de \mathbb{R}^2 e $S_{I_{\varepsilon_k}}$ sua rotação em torno do eixo O_x .

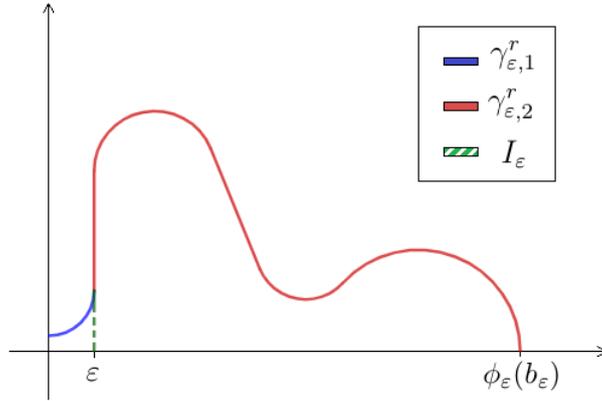


Figura 2.5: Curva γ_ε^r e o conjunto I_ε .

Seja $s_{\varepsilon_k}^r \in (q_{\varepsilon_k}(0), b_{\varepsilon_k})$ tal que $\gamma_{\varepsilon_k}(s_{\varepsilon_k}^r) = (\varepsilon_k, \varepsilon_k, 0)$. Defina $\tilde{u}_{\varepsilon_k} : S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r} \cup S_{I_{\varepsilon_k}} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{u}_\varepsilon(x, y, z) = \begin{cases} u_\varepsilon(x, y, z), & \text{se } (x, y, z) \in S_{\gamma_{\varepsilon,2}^r} \\ p_{\varepsilon_k}, & \text{se } (x, y, z) \in S_{I_{\varepsilon_k}}, \end{cases}$$

onde $p_{\varepsilon_k} := u_{\varepsilon_k}(\phi_{\varepsilon_k}(s_{\varepsilon_k}^r), \psi_{\varepsilon_k}(s_{\varepsilon_k}^r), 0) = u_{\varepsilon_k}(\varepsilon_k, \varepsilon_k, 0)$.

Note que $\tilde{u}_{\varepsilon_k}$ está bem definida, pois a função $u_{\varepsilon_k}(\phi_{\varepsilon_k}, \psi_{\varepsilon_k}, 0) \in H^1(q_{\varepsilon_k}(0), b_{\varepsilon_k} - \delta)$, para algum $\delta > 0$, e portanto, pode ser tomada contínua de modo que p_{ε_k} exista e seja finito. Além

disso, pela definição de $\tilde{u}_{\varepsilon_k}$, garantimos que ela é uma função monotônica crescente em relação à variável espacial e $\tilde{u}_{\varepsilon_k} \in H^1\left(S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r} \cup S_{I_{\varepsilon_k}}\right)$.

Seja $v_k^r : S_{\gamma_0^r} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$v_k^r(x, y, z) = \tilde{u}_{\varepsilon_k}(x + \varepsilon_k, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in S_{\gamma_0^r}.$$

Afirmção 3. $(v_k^r)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(S_{\gamma_0^r})$ é limitada.

Primeiramente, note que $S_{\gamma_0^r}$ e $(S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r} \cup S_{I_{\varepsilon_k}})$ são iguais a menos de uma translação na primeira coordenada. Logo, de (2.35) e $\beta \geq -\alpha$, temos

$$\begin{aligned} \int_{S_{\gamma_0^r}} v_k^r(x, y, z)^2 d\sigma &= \int_{S_{\gamma_0^r}} \tilde{u}_{\varepsilon_k}(x + \varepsilon_k, y, z)^2 d\sigma = \int_{S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r} \cup S_{I_{\varepsilon_k}}} \tilde{u}_{\varepsilon_k}(x, y, z)^2 d\sigma \\ &= \int_{S_{I_{\varepsilon_k}}} p_{\varepsilon_k}^2 d\sigma + \int_{S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r}} u_{\varepsilon_k}(x, y, z)^2 d\sigma \leq \beta^2 \mu(S_{I_{\varepsilon_k}}) \\ &\quad + \beta^2 \mu(S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r}) = \beta^2 \mu(S_{I_{\varepsilon_k}} \cup S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r}) = \beta^2 \mu(S_{\gamma_0^r}) < \infty. \end{aligned} \quad (2.42)$$

De (2.41), aplicando o Teorema de Mudança de Variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S_{\gamma_0^r}} \left| \nabla_{S_{\gamma_0^r}} v_k^r \right|^2 d\sigma &= \int_{S_{\gamma_0^r}} \left| \nabla_{S_{\gamma_0^r}} \tilde{u}_{\varepsilon_k}(\cdot + \varepsilon, \cdot, \cdot) \right|^2 d\sigma \\ &= 2\pi \int_0^b \left| \tilde{u}'_{\varepsilon_k}(\phi_0 + \varepsilon_k, \psi_0, 0) \right|^2 \psi_0 ds \\ &= 2\pi \int_{\varepsilon_k}^b \left| \tilde{u}'_{\varepsilon_k}(\phi_0 + \varepsilon_k, \psi_0, 0) \right|^2 \psi_0 ds \\ &= 2\pi \int_{\varepsilon_k}^b \left| u'_{\varepsilon_k}(\Phi_{\varepsilon_k}, \Psi_{\varepsilon_k}, 0) \right|^2 \Psi_{\varepsilon_k} |\Gamma'_{\varepsilon_k}| ds \\ &= 2\pi \int_{q_\varepsilon(\varepsilon_k)}^{q_\varepsilon(b)} \left| u'_{\varepsilon_k}(\phi_{\varepsilon_k}, \psi_{\varepsilon_k}, 0) \right|^2 \psi_{\varepsilon_k} ds \\ &= \int_{S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r}} \left| \nabla_{S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r}} u_{\varepsilon_k} \right|^2 d\sigma < \infty. \end{aligned} \quad (2.43)$$

De (2.42) e (2.43), concluímos a Afirmção 3.

Segue da Afirmção 3 que existem uma subsequência de $(v_k^r)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(S_{\gamma_0^r})$, manteremos a mesma notação, e $v_*^r \in H^1(S_{\gamma_0^r})$, tais que

$$v_k^r \rightharpoonup v_*^r \text{ em } H^1(S_{\gamma_0^r}). \quad (2.44)$$

Afirmção 4. $\|v_*^r - \beta\|_{L^1(S_{\gamma_0^r})} \leq d$.

Com efeito, do fato de $u_{\varepsilon_k} \in B_d^m(u_{0,\varepsilon_k})$, temos

$$\|u_{\varepsilon_k} - \beta\|_{L^1(S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r})} \leq \|u_{\varepsilon_k} - u_{0,\varepsilon_k}\|_{L^1(S_{\gamma_{\varepsilon_k}})} \leq d. \quad (2.45)$$

De (2.35), (2.45), da definição da função v_k^r e do fato de $S_{\gamma_0^r}$ e $(S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r} \cup S_{I_{\varepsilon_k}})$ serem iguais a menos de uma translação, obtemos

$$\|v_k^r - \beta\|_{L^1(S_{\gamma_0^r})} = \|u_{\varepsilon_k} - \beta\|_{L^1(S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r})} + \|p_{\varepsilon_k} - \beta\|_{L^1(S_{I_{\varepsilon_k}})} \leq d + (\beta - \alpha)\mu(S_{I_{\varepsilon_k}}). \quad (2.46)$$

Da imersão compacta de $H^1(S_{\gamma_0^r})$ em $L^1(S_{\gamma_0^r})$ e de (2.44), temos

$$v_k \rightarrow v_*^r \text{ em } L^1(S_{\gamma_0^r}), \quad (2.47)$$

a menos de uma subsequência.

Passando o limite em (2.46), segue de (2.47) que $\|v_*^r - \beta\|_{L^1(S_{\gamma_0^r})} \leq d$, encerrando a prova da Afirmação 4.

De modo análogo ao que foi feito no Lema 2.6, é possível provar que $v_*^r \in L_m^1(S_{\gamma_0^r})$, uma vez que $(v_k^r)_{k \in \mathbb{N}} \subset L_m^1(S_{\gamma_0^r})$. Conseqüentemente, de (2.31) e da Afirmação 4, segue que

$$E(\beta; S_{\gamma_0^r}) \leq E(v_*^r; S_{\gamma_0^r}). \quad (2.48)$$

Afirmação 5. $\liminf_{k \in \mathbb{N}} E(u_{\varepsilon_k}; S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r}) \geq E(v_*^r; S_{\gamma_0^r})$.

De fato, como F é não negativa, temos

$$\begin{aligned} E(u_{\varepsilon_k}; S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r}) &= \int_{S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r}} \left[\frac{1}{2} |\nabla_{S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r}} u_{\varepsilon_k}|^2 + \lambda F(u_{\varepsilon_k}) \right] d\sigma \\ &\geq \int_{S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r}} \left[\frac{1}{2} |\nabla_{S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r}} u_{\varepsilon_k}|^2 + \lambda F(u_{\varepsilon_k}) \right] d\sigma \\ &= \int_{S_{\gamma_{\varepsilon_k,2}^r} \cup S_{I_{\varepsilon_k}}} \left[\frac{1}{2} |\nabla_{S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r}} \tilde{u}_{\varepsilon_k}|^2 + \lambda F(\tilde{u}_{\varepsilon_k}) \right] d\sigma \\ &\quad - \int_{S_{I_{\varepsilon_k}}} \left[\frac{1}{2} |\nabla_{S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r}} \tilde{u}_{\varepsilon_k}|^2 + \lambda F(\tilde{u}_{\varepsilon_k}) \right] d\sigma \\ &= \int_{S_{\gamma_0^r}} \left[\frac{1}{2} |\nabla_{S_{\gamma_0^r}} v_k^r|^2 + \lambda F(v_k^r) \right] d\sigma - \int_{S_{I_{\varepsilon_k}}} \lambda F(p_{\varepsilon_k}) d\sigma \\ &= E(v_k^r; S_{\gamma_0^r}) - E(p_{\varepsilon_k}; S_{I_{\varepsilon_k}}). \end{aligned}$$

Como $E(p_{\varepsilon_k}, S_{I_{\varepsilon_k}}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e $E(\cdot; S_{\gamma_0^r})$ é um operador fracamente semicontínuo inferiormente, temos

$$\liminf_{k \in \mathbb{N}} E(u_{\varepsilon_k}; S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r}) \geq E(v_*^r; S_{\gamma_0^r}), \quad (2.49)$$

concluindo a Afirmação 5.

De modo análogo, agora, referente à $S_{\gamma_\varepsilon^l}$ e $S_{\gamma_0^l}$, existe $v_*^l \in H^1(S_{\gamma_0^l})$ tal que

$$E(\alpha; S_{\gamma_0^l}) \leq E(v_*^l; S_{\gamma_0^l}) \quad (2.50)$$

e

$$\liminf_{k \in \mathbb{N}} E(u_{\varepsilon_k}; S_{\gamma_{\varepsilon_k}^l}) \geq E(v_*^l; S_{\gamma_0^l}). \quad (2.51)$$

De (2.40), (2.51), (2.49), (2.50) e (2.48), temos

$$\begin{aligned} E(\alpha; S_{\gamma_0^l}) + E(\beta; S_{\gamma_0^r}) &\geq \liminf_{k \in \mathbb{N}} E(u_{\varepsilon_k}; S_{\gamma_{\varepsilon_k}}) \\ &\geq \liminf_{k \in \mathbb{N}} E(u_{\varepsilon_k}; S_{\gamma_{\varepsilon_k}^l}) + \liminf_{k \in \mathbb{N}} E(u_{\varepsilon_k}; S_{\gamma_{\varepsilon_k}^r}) \\ &\geq E(v_*^l; S_{\gamma_0^l}) + E(v_*^r; S_{\gamma_0^r}) \geq E(\alpha; S_{\gamma_0^l}) + E(\beta; S_{\gamma_0^r}). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$E(v_*^l; S_{\gamma_0^l}) = E(\alpha; S_{\gamma_0^l}) \quad \text{e} \quad E(v_*^r; S_{\gamma_0^r}) = E(\beta; S_{\gamma_0^r}).$$

Como α e β são L_m^1 -mínimos locais isolados de $E(\cdot; S_{\gamma_0^l})$ e $E(\cdot; S_{\gamma_0^r})$, respectivamente, temos $v_*^l = \alpha$ e $v_*^r = \beta$ e, consequentemente,

$$\|u_{\varepsilon_k} - u_{0, \varepsilon_k}\|_{L^1(S_{\gamma_{\varepsilon_k}})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

concluindo o desejado.

Portanto, u_ε é L_m^1 -mínimo local de $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. \square

O Teorema 2.9 assegura a existência de uma família limitada de L_m^1 -mínimos locais monotônicos crescentes em $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$, denotada por $(u_\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$, que possui uma relação de convergência entre os zeros estáveis de f .

Sabemos que dadas duas bolas $B_d^m(u_0)$ e $B_d(u_0)$ de mesmo raio $d > 0$ contidas em $L_m^1(S_\gamma)$ e $L^1(S_\gamma)$, respectivamente, obtemos por definição, $B_d^m(u_0) \subset B_d(u_0)$. Além de $B_d(u_0)$ conter funções monotônicas crescentes, esta bola contém funções não-monotônicas e monotônicas decrescentes. Por essa razão, para obtermos a existência de padrões monotônicos de (2.1) em uma família específica de superfícies S_{γ_ε} , precisamos estabelecer a existência de uma subfamília $(u_\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_1}$, onde u_ε é um L^1 -mínimo local do funcional $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$.

Teorema 2.10. *Seja u_ε o L_m^1 -mínimo local de $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$ obtido no Teorema 2.9, para $\varepsilon < \varepsilon_0$. Então, existe $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ tal que u_ε é um L^1 -mínimo local de $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$, para todo $\varepsilon < \varepsilon_1$, isto é, u_ε será mínimo não somente em uma bola de L^1 restrita a funções monotônicas crescentes, mas*

$$E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) = \min\{E(v; S_{\gamma_\varepsilon}) : v \in B_r(u_\varepsilon)\},$$

onde $B_r(u_\varepsilon) \subset L^1(S_{\gamma_\varepsilon})$, para algum raio $r > 0$.

Demonstração. Como iremos lidar com funções monotônicas crescentes e não-monotônicas, acrescentaremos o expoente m em u_ε para distinguir a função monotônica crescente das outras. Para ficar claro, a função u_ε^m é o L_m^1 -mínimo local de $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$, obtido no Teorema 2.9. Além disso, como a prova é feita para $\varepsilon > 0$ fixo, com o intuito de deixar a prova visualmente mais limpa, omitiremos a dependência de $\varepsilon > 0$ nas constantes η , δ e no intervalo $[a, b]$ (que representa o intervalo $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$) que serão utilizados no decorrer da demonstração.

Fixado $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, seja $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\eta < \min \left\{ \frac{\eta_0}{\mu(S_{\gamma_\varepsilon})}, -\frac{\alpha}{2} \right\}, \quad (2.52)$$

onde $\eta_0 > 0$ é o raio da bola obtido no Teorema 2.9.

Além disso, seja $z_1 \in [a, b]$ tal que

$$z_1 = \min\{s \in [a, b] : u_\varepsilon^m(s) = 0\}. \quad (2.53)$$

Da definição de continuidade de u_ε^m em z_1 , existe $\delta > 0$ tal que

$$-\frac{\eta}{2} < u_\varepsilon^m < \frac{\eta}{2} \quad \text{em } [z_1 - \delta, z_1 + \delta]. \quad (2.54)$$

Afirmção 1. $\exists \varepsilon_1 < \varepsilon_0$:

$$u(a) < 0 \quad \text{e} \quad u(b) > 0,$$

$$\forall u \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon}) : \max_{s \in [a, b]} |u(s) - u_\varepsilon^m(s)| \leq \eta, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_1.$$

De fato, provemos que $u(b) > 0$, uma vez que a prova de $u(a) < 0$ é similar.

Sabemos que $u_\varepsilon^m \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \beta$ em $L^1(S_{\gamma_\varepsilon})$, então

$$\int_{q_\varepsilon(0)}^b |u_\varepsilon^m - \beta| \psi_\varepsilon ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis, $\Psi_\varepsilon = \psi_0$ e $|\Gamma'_\varepsilon| = 1$ em $[c_r, b]$, temos

$$\int_{c_r}^{c_r + \delta_0} |u_\varepsilon^m - \beta| \psi_0 ds \leq \int_0^{b_0} |u_\varepsilon^m - \beta| \Psi_\varepsilon |\Gamma'_\varepsilon| ds = \int_{q_\varepsilon(0)}^b |u_\varepsilon^m - \beta| \psi_\varepsilon ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

para algum $\delta_0 > 0$ tal que $c_r + \delta_0 < b_0$.

Como $\psi_0 > 0$ em $[c_r, c_r + \delta_0]$, temos $u_\varepsilon^m \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \beta$ em $L^1(c_r, c_r + \delta_0)$ e, conseqüentemente,

$$u_\varepsilon^m \rightarrow \beta \quad \text{qtp em } (c_r, c_r + \delta_0) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.55)$$

De (2.55) e da monotonicidade crescente de u_ε^m , segue que

$$u_\varepsilon^m(b_0) \rightarrow \beta, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Como, por definição,

$$u_\varepsilon^m(b) := u_\varepsilon^m(\phi_\varepsilon(b), \psi_\varepsilon(b), 0) \quad \text{e} \quad u_\varepsilon^m(b_0) := u_\varepsilon^m(\Phi_\varepsilon(b_0), \Psi_\varepsilon(b_0), 0)$$

são iguais, temos

$$u_\varepsilon^m(b) \rightarrow \beta, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.56)$$

De (2.56), da hipótese que $\beta \geq -\alpha$ e de (2.52), obtemos $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ tal que para $u \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon})$ que satisfaz $|u_\varepsilon^m - u| \leq \eta$ em $[a, b]$, temos

$$u(b) > u_\varepsilon^m(b) - \eta > \frac{\beta}{2} - \eta \geq -\frac{\alpha}{2} - \eta > 0,$$

encerrando a prova da Afirmação 1.

Seja $C_\eta(u_\varepsilon^m)$ a vizinhança descrita por

$$C_\eta(u_\varepsilon^m) = \left\{ u \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon}) : |u_\varepsilon^m - u| \leq \eta \text{ em } [a, b], u \leq 0 \text{ em } [a, z_1 - \delta], \right. \\ \left. u \geq -\frac{\eta}{2} \text{ em } [z_1 - \delta, z_1 + \delta] \text{ e } u \geq 0 \text{ em } (z_1 + \delta, b] \right\}.$$

Seja

$$B_r(u_\varepsilon^m) = \{u \in C_\eta(u_\varepsilon^m) : \|u - u_\varepsilon^m\|_{L^1(S_{\gamma_\varepsilon})} < r\}, \quad (2.57)$$

onde $r = \eta\mu(S_{\gamma_\varepsilon})$.

Da definição de $r > 0$, temos

$$C_\eta(u_\varepsilon^m) \subset B_r(u_\varepsilon^m).$$

Afirmação 2. $\exists u_\varepsilon \in B_r(u_\varepsilon^m)$:

$$E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) = \inf\{E(v; S_{\gamma_\varepsilon}) : v \in B_r(u_\varepsilon^m)\}.$$

Com efeito, aplicando um raciocínio análogo ao Lema 2.6, existem uma sequência minimizante $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B_r(u_\varepsilon^m)$ e $u_\varepsilon \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon})$ tais que

$$u_k \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ em } H^1(S_{\gamma_\varepsilon}) \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

$$E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) \leq \inf\{E(v; S_{\gamma_\varepsilon}) : v \in B_r(u_\varepsilon^m)\} \quad (2.58)$$

e

$$\forall \tau > 0, \exists (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(I_\varepsilon) : u_k(s) \rightarrow u_\varepsilon(s), \quad \forall s \in I_\tau = (a - \tau, b + \tau), \quad (2.59)$$

equivalentes às equações (2.18), (2.19) e (2.23) do Lema 2.6.

Para obtermos a igualdade em (2.58), basta provar que $u_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$. Vejamos.

- $|u_\varepsilon^m - u_\varepsilon| \leq \eta$ em $[a, b]$.

Como $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_\eta(u_\varepsilon^m)$, temos

$$|u_\varepsilon^m(s) - u_k(s)| \leq \eta, \quad \forall s \in [a, b]. \quad (2.60)$$

Para $s \in (a, b)$, seja $\varepsilon_0 > 0$ tal que $s \in I_{\varepsilon_0}$. Passando o limite em (2.60), segue de (2.59) aplicado em I_{ε_0} que

$$|u_\varepsilon^m(s) - u_\varepsilon(s)| \leq \eta.$$

Logo,

$$|u_\varepsilon^m(s) - u_\varepsilon(s)| \leq \eta, \quad \forall s \in (a, b).$$

Como u_ε é contínua no ponto b , através do limite lateral, obtemos

$$|u_\varepsilon^m(b) - u_\varepsilon(b)| = \lim_{s \rightarrow b^+} |u_\varepsilon^m(s) - u_\varepsilon(s)| \leq \eta.$$

De modo análogo, temos $|u_\varepsilon^m(a) - u_\varepsilon(a)| \leq \eta$.

Portanto, $|u_\varepsilon^m - u_\varepsilon| \leq \eta$ em $[a, b]$.

- $u_\varepsilon \geq \frac{-\eta}{2}$ em $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$.

Decorre imediatamente de (2.59).

- $u_\varepsilon \leq 0$ em $[a, z_1 - \delta]$ e $u_\varepsilon \geq 0$ em $[z_1 + \delta, b]$.

De (2.59), temos que $u_\varepsilon \leq 0$ em $(a, z_1 - \delta)$ e $u_\varepsilon \geq 0$ em $(z_1 + \delta, b)$.

Da continuidade de u_ε em a e b através dos limites laterais, segue que

$$u_\varepsilon(a) = \lim_{s \rightarrow a^-} u_\varepsilon(s) \leq 0 \quad \text{e} \quad u_\varepsilon(b) = \lim_{s \rightarrow b^+} u_\varepsilon(s) \geq 0.$$

Portanto, $u_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$ e, conseqüentemente,

$$\inf\{E(v; S_{\gamma_\varepsilon}) : v \in B_r(u_\varepsilon^m)\} \leq E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}). \quad (2.61)$$

De (2.58) e (2.61), obtemos a Afirmação 2.

Decorre da Afirmação 2, da definição de u_ε^m , do Teorema 2.9 e de (2.52) que

$$\begin{aligned} E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) &= \inf\{E(v; S_{\gamma_\varepsilon}) : v \in B_r(u_\varepsilon^m)\} \\ &\leq \inf\{E(v; S_{\gamma_\varepsilon}) : v \in B_r(u_\varepsilon^m) \text{ e } v \text{ é monotônica crescente em } [a, b]\} \\ &= E(u_\varepsilon^m; S_{\gamma_\varepsilon}). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Queremos provar que u_ε^m é mínimo local em uma vizinhança completa de L^1 e não apenas restrita a funções monotônicas crescentes. Para isto, provaremos que a energia de u_ε^m é igual à de u_ε e devido a cadeia de desigualdades (2.62), basta provarmos que

$$E(u_\varepsilon^m; S_{\gamma_\varepsilon}) \leq E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}).$$

Para essa prova, iremos supor que u_ε não é uma função monotônica crescente, construir uma função relacionada a u_ε que pertença a $B_r(u_\varepsilon^m)$ e possua energia menor que u_ε . Essa função irá contradizer a minimalidade de u_ε em $B_r(u_\varepsilon^m)$ e, conseqüentemente, teremos u_ε uma função monotônica crescente.

Para $\varepsilon < \varepsilon_1$, segue da Afirmação 1 que $u_\varepsilon(a) < 0$ e $u_\varepsilon(b) > 0$ e como u_ε é uma função contínua, existe, pelo menos um ponto em (a, b) que a anule. Sejam

$$s_m = \min\{s \in [a, b] : u_\varepsilon(s) = 0\} \quad \text{e} \quad s_M = \max\{s \in [a, b] : u_\varepsilon(s) = 0\}.$$

Afirmação 3. $\alpha \leq u_\varepsilon \leq \beta$ em $[a, b]$.

Suponha que exista $s^* \in [a, b]$ tal que $u_\varepsilon(s^*) < \alpha$. Como u_ε é contínua, existe um intervalo $I \subset [a, b]$ tal que $u_\varepsilon < \alpha$ em I .

Defina

$$\tilde{u}_\varepsilon = \begin{cases} \alpha, & \text{em } I \\ u_\varepsilon, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmiação 3.1. $\tilde{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$.

- $|u_\varepsilon^m - \tilde{u}_\varepsilon| \leq \eta$ em $[a, b]$.

Do Teorema 2.9-(d), temos $\alpha \leq u_\varepsilon^m$ e, portanto,

$$-\eta < 0 \leq u_\varepsilon^m - \alpha \leq u_\varepsilon^m - u_\varepsilon \leq \eta \quad \text{em } I.$$

Como $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon$ em I^c , o resultado segue.

- $\tilde{u}_\varepsilon \geq -\frac{\eta}{2}$ em $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$.

Para $s \in I \cap [z_1 - \delta, z_1 + \delta]$, temos

$$-\frac{\eta}{2} < u_\varepsilon(s) < \alpha = \tilde{u}_\varepsilon(s).$$

Enquanto que, para $s \in I^c$, temos $\tilde{u}_\varepsilon(s) = u_\varepsilon(s)$.

- $\tilde{u}_\varepsilon \leq 0$ em $[a, z_1 - \delta)$ e $\tilde{u}_\varepsilon \geq 0$ em $(z_1 + \delta, b]$.

Como $u_\varepsilon < \alpha < 0$ em I , temos $I \subset [a, z_1 + \delta)$. Logo, $\tilde{u}_\varepsilon \leq 0$ em $[a, z_1 - \delta)$, pois \tilde{u}_ε é igual a u_ε ou α e ambos são não positivos neste intervalo.

Ademais, $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon \geq 0$ em $(z_1 + \delta, b]$.

Com isso, temos $\tilde{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$, encerrando a prova da Afirmiação 3.1 e concluindo que $\tilde{u}_\varepsilon \in B_r(u_\varepsilon^m)$.

Agora, vejamos as energias de u_ε e \tilde{u}_ε . Como $u_\varepsilon < \tilde{u}_\varepsilon = \alpha$ em I e F é estritamente decrescente em $(-\infty, \alpha]$, temos $F(\tilde{u}_\varepsilon) < F(u_\varepsilon)$ em I . Além disso, $(\tilde{u}'_\varepsilon)^2 = 0 \leq (u'_\varepsilon)^2$ em I , implicando em

$$E(\tilde{u}_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) < E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon})$$

e contradizendo a minimalidade de u_ε em $B_r(u_\varepsilon^m)$.

Portanto, $u_\varepsilon \geq \alpha$ em $[a, b]$. De modo similar, obtemos $u_\varepsilon \leq \beta$ em $[a, b]$, completando a prova da Afirmiação 3.

Afirmiação 4. u_ε é monotônica crescente em $[a, s_m] \cup [s_M, b]$.

De fato, suponha que u_ε possui um ponto de máximo local em (a, s_m) . Denote tal ponto por s^* . Do fato de s_m ser o primeiro ponto a anular u_ε , segue que $u_\varepsilon(s^*) < 0$. Nesse caso, $s^* \in [a, z_1 + \delta)$ e existe um intervalo $I = (\bar{s}, \tilde{s}) \subset [a, z_1 + \delta)$ tal que

$$u_\varepsilon(\bar{s}) = u_\varepsilon(\tilde{s}) \quad \text{e} \quad u_\varepsilon(\bar{s}) < u_\varepsilon(s) \leq u_\varepsilon(s^*) < 0, \quad \text{para todo } s \in I.$$

Defina

$$\tilde{u}_\varepsilon = \begin{cases} u_\varepsilon(\bar{s}), & \text{em } I \\ u_\varepsilon, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmamos que $\tilde{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$. De fato,

- $|u_\varepsilon^m - \tilde{u}_\varepsilon| \leq \eta$ em $[a, b]$.

Do fato de u_ε^m ser monotônica crescente e da definição de \tilde{u}_ε , temos, para $s \in I$,

$$\begin{aligned} -\eta &\leq u_\varepsilon^m(\bar{s}) - u_\varepsilon(\bar{s}) \leq u_\varepsilon^m(s) - u_\varepsilon(\bar{s}) = u_\varepsilon^m(s) - \tilde{u}_\varepsilon(s) \\ &\leq u_\varepsilon^m(\tilde{s}) - \tilde{u}_\varepsilon(s) = u_\varepsilon^m(\tilde{s}) - u_\varepsilon(\tilde{s}) \leq \eta. \end{aligned}$$

- $\tilde{u}_\varepsilon \geq -\frac{\eta}{2}$ em $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$ e $\tilde{u}_\varepsilon \leq 0$ em $[a, z_1 - \delta]$.

Existem dois casos: $s^* \in [a, z_1 - \delta]$ ou $s^* \in [z_1 - \delta, z_1 + \delta]$. Em ambos os casos, é possível escolher o intervalo I de tal modo que $\tilde{u}_\varepsilon \geq -\frac{\eta}{2}$ em $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$ e $\tilde{u}_\varepsilon \leq 0$ em $[a, z_1 - \delta]$.

- $\tilde{u}_\varepsilon \geq 0$ em $(z_1 + \delta, b]$.

Como $I \subset [a, z_1 + \delta)$, temos $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon \geq 0$ em $(z_1 + \delta, b]$.

Portanto, $\tilde{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$ e, conseqüentemente, $\tilde{u}_\varepsilon \in B_r(u_\varepsilon^m)$.

Da definição de \tilde{u}_ε e da Afirmação 3, temos

$$\alpha \leq \tilde{u}_\varepsilon < u_\varepsilon < 0 \text{ em } I.$$

Como F é estritamente crescente em $[\alpha, 0]$, temos $F(\tilde{u}_\varepsilon) < F(u_\varepsilon)$. Novamente, da definição de \tilde{u}_ε segue que $(\tilde{u}'_\varepsilon)^2 = 0 \leq (u'_\varepsilon)^2$ em I e, portanto,

$$E(\tilde{u}_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) < E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}),$$

contradizendo a minimalidade de u_ε em $B_r(u_\varepsilon^m)$.

Para provar que u_ε é monotônica crescente em $[s_M, b]$, basta supor que existe um mínimo local nesse intervalo e prosseguir de forma semelhante à prova anterior. Deste modo, a Afirmação 4 está concluída.

Note que, se $s_m = s_M$ ou $u_\varepsilon = 0$ em $[s_m, s_M]$, segue da Afirmação 4 que u_ε é uma função monotônica crescente. O nosso propósito, a partir de agora, é provar que só umas dessas opções ocorre. Então, suponha, por contradição, que

$$\exists s \in (s_m, s_M) : u_\varepsilon(s) \neq 0. \quad (2.63)$$

Afirmação 5. $[s_m, s_M] \subset [z_1 - \delta, z_1 + \delta]$.

Com efeito, suponha que $[s_m, s_M] \not\subseteq [z_1 - \delta, z_1 + \delta]$. Portanto, ou $s_m \notin [z_1 - \delta, z_1 + \delta]$ ou $s_M \notin [z_1 - \delta, z_1 + \delta]$.

Novamente, faremos a prova dessa afirmação apenas para s_m , visto que os cálculos são similares para s_M .

Os tipos de comportamento da função u_ε podem ser resumidos a cinco casos. Os estudo dos três casos a seguir possuem procedimentos iguais, enquanto que os Casos 4 e 5 necessitam de uma análise mais detalhada.

Caso 1. $\exists s^* \in (a, z_1 - \delta) : u_\varepsilon(s^*) = 0$ (Fig. 2.6(a)).

Caso 2. $\exists I \subset (a, z_1 - \delta) : u_\varepsilon = 0$ em I (Fig. 2.6(b)).

Caso 3. $\exists s_1 \in (a, z_1 - \delta), s_2 \in [z_1 - \delta, z_1 + \delta) : u_\varepsilon = 0$ em $[s_1, s_2]$ e $u_\varepsilon(s) < 0$ para $s > s_2$ suficientemente próximo (Fig. 2.6(c)).

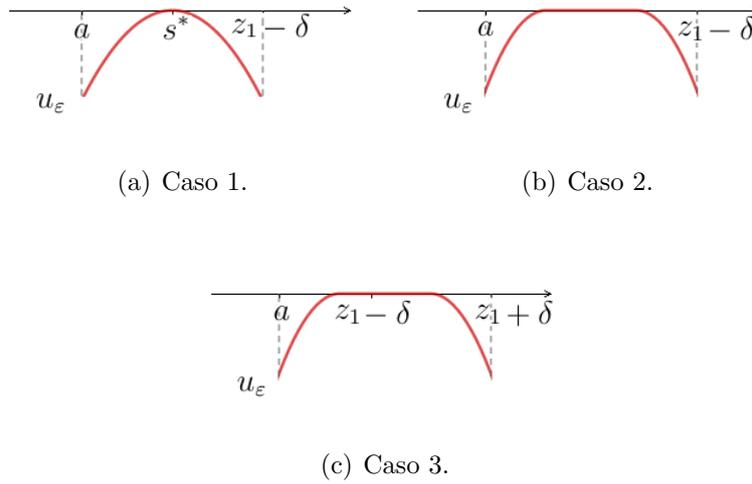


Figura 2.6: Casos 1, 2 e 3.

Esses três casos possuem a mesma prova: seja $s^* \in (a, z_1 + \delta)$ tal que $u_\varepsilon(s^*) = 0$. Tome $\bar{s} < s^* < \tilde{s}$ tais que $u_\varepsilon(\bar{s}) = u_\varepsilon(\tilde{s})$ e $u_\varepsilon(\bar{s}) < u_\varepsilon(s) \leq u_\varepsilon(s^*)$, para $s \in (\bar{s}, \tilde{s})$. Defina

$$\tilde{u}_\varepsilon = \begin{cases} u_\varepsilon(\bar{s}), & \text{em } (\bar{s}, \tilde{s}) \\ u_\varepsilon, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De modo análogo a Afirmação 4, temos $\tilde{u}_\varepsilon \in B_r(u_\varepsilon^m)$.

Além disso, $\alpha \leq \tilde{u}_\varepsilon < u_\varepsilon \leq 0$ em I e como F é estritamente crescente em $[\alpha, 0]$, temos $F(\tilde{u}_\varepsilon) < F(u_\varepsilon)$ em I , enquanto que $(\tilde{u}'_\varepsilon)^2 = 0 \leq (u'_\varepsilon)^2$ em I . Portanto,

$$E(\tilde{u}_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) < E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}),$$

contradizendo a minimalidade de u_ε em $B_r(u_\varepsilon^m)$ e provando que os Casos 1, 2 e 3 não podem ocorrer.

Caso 4. $\exists s_1 \in (a, z_1 - \delta), s_2, s_3 \in [z_1 - \delta, b) : u_\varepsilon = 0$ em $[s_1, s_2], u_\varepsilon > 0$ em $(s_2, s_3), u_\varepsilon(s_3) = 0$ e $u_\varepsilon(s) > 0$ para $s > s_3$ suficientemente próximo (Fig. 2.7).

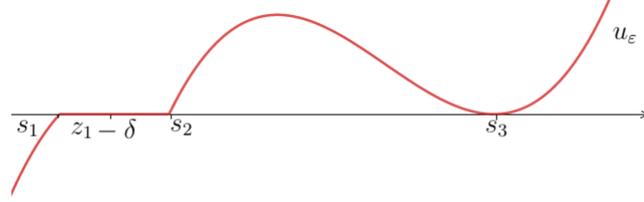


Figura 2.7: Caso 4.

Observe que não podemos garantir que $s_2 < z_1 + \delta$ e nem que $s_3 < z_1 + \delta$, já que $u_\varepsilon \geq 0$ a partir de s_2 .

Nesse caso, note que s_3 é um ponto de mínimo local de u_ε . Sejam $\bar{s} < s_3 < \tilde{s}$ tais que $u_\varepsilon(\bar{s}) = u_\varepsilon(\tilde{s}) > 0$ e $u_\varepsilon(s_3) \leq u_\varepsilon(s) < u_\varepsilon(\bar{s})$, para todo $s \in (\bar{s}, \tilde{s})$. Defina

$$\tilde{u}_\varepsilon = \begin{cases} u_\varepsilon(\bar{s}), & \text{em } (\bar{s}, \tilde{s}) \\ u_\varepsilon, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmção 5.1. $\tilde{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$.

De fato,

- $|u_\varepsilon^m - \tilde{u}_\varepsilon| \leq \eta$ em $[a, b]$.

De modo análogo a Afirmção 4, obtemos $|u_\varepsilon^m - u_\varepsilon| \leq \eta$ em $[a, b]$.

- $\tilde{u}_\varepsilon \geq -\frac{\eta}{2}$ em $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$ e $\tilde{u}_\varepsilon \geq 0$ em $(z_1 + \delta, b]$.

É possível escolher \bar{s} e \tilde{s} de modo que $(\bar{s}, \tilde{s}) \subset (z_1 - \delta, b)$ e como temos

$$\tilde{u}_\varepsilon \geq u_\varepsilon(s_3) = 0 > -\frac{\eta}{2} \text{ em } [z_1 - \delta, b],$$

o resultado segue.

- $\tilde{u}_\varepsilon \leq 0$ em $[a, z_1 - \delta]$.

Da definição de \tilde{u}_ε , temos $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon \leq 0$ em $[a, z_1 - \delta]$.

Assim, $\tilde{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$, confirmando a Afirmção 5.1 e, portanto, $\tilde{u}_\varepsilon \in B_r(u_\varepsilon^m)$.

Como

$$0 \leq u_\varepsilon < \tilde{u}_\varepsilon \leq \beta \text{ em } (\bar{s}, \tilde{s})$$

e F é estritamente decrescente em $[0, \beta]$, obtemos

$$F(\tilde{u}_\varepsilon) < F(u_\varepsilon) \text{ em } (\bar{s}, \tilde{s}).$$

Ademais, $(\tilde{u}'_\varepsilon)^2 = 0 \leq (u'_\varepsilon)^2$ em (\bar{s}, \tilde{s}) . Deste modo, temos

$$E(\tilde{u}_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) < E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}),$$

contrariando a minimalidade de u_ε em $B_r(u_\varepsilon^m)$ e provando que esse caso também não pode ocorrer.

Caso 5. $\exists s_1 \in (a, z_1 - \delta), s_2, s_3, s_4 \in [z_1 - \delta, z_1 + \delta] : u_\varepsilon = 0$ em $[s_1, s_2], u_\varepsilon > 0$ em $(s_2, s_3), u_\varepsilon(s_3) = 0 = u_\varepsilon(s_4), u < 0$ em (s_3, s_4) e $u > 0$ em (s_4, b) . (Fig. 2.8).

Ao contrário do Caso 4, podemos afirmar que $s_4 \leq z_1 + \delta$, uma vez que $u_\varepsilon < 0$ em (s_3, s_4) e $u_\varepsilon \geq 0$ para pontos maiores que $z_1 + \delta$.

Esse caso é o mais complexo dentre todos, pois será necessário fazermos dois processos para exibir uma função que possua energia menor que u_ε . O primeiro passo é refletir a corcova negativa em torno do eixo O_x (Fig. 2.9) e, em seguida, fazer o corte da função igual aos outros casos (Fig. 2.10).

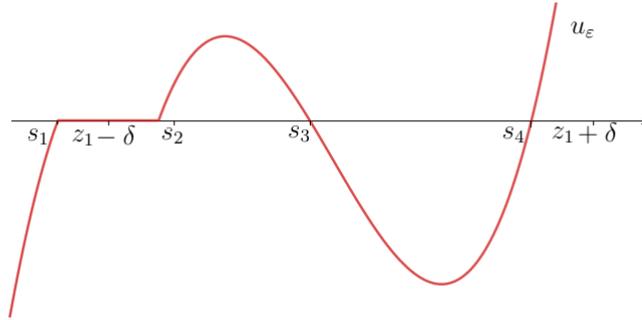


Figura 2.8: Caso 5.

Seja

$$\tilde{u}_\varepsilon = \begin{cases} -u_\varepsilon, & \text{em } [s_3, s_4] \\ u_\varepsilon, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Novamente, afirmamos que $\tilde{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$. Com efeito,

- $|u_\varepsilon^m - \tilde{u}_\varepsilon| \leq \eta$ em $[a, b]$.

Como $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon$ fora de $[s_3, s_4]$, então

$$|u_\varepsilon^m - \tilde{u}_\varepsilon| \leq \eta \text{ em } [a, s_3) \cup (s_4, b].$$

Para $s \in [s_3, s_4]$ tal que $s \leq z_1$, temos $u_\varepsilon^m(s) \leq 0$. Segue de (2.54), de $u_\varepsilon \geq -\frac{\eta}{2}$ em $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$, da monotonicidade de u_ε^m e de $\tilde{u}_\varepsilon \geq 0$ em $[s_3, s_4]$ que

$$\begin{aligned} -\eta &= -\frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2} \leq u_\varepsilon^m(z_1 - \delta) + u_\varepsilon(s) \leq u_\varepsilon^m(s) + u_\varepsilon(s) \\ &= u_\varepsilon^m(s) - [-u_\varepsilon(s)] = u_\varepsilon^m(s) - \tilde{u}_\varepsilon(s) \leq 0 < \eta. \end{aligned}$$

Para $s \in [s_3, s_4]$ tal que $s > z_1$, temos $u_\varepsilon^m(s) > 0$. Segue de $u_\varepsilon \geq -\frac{\eta}{2}$ em $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$, de $\tilde{u}_\varepsilon \geq 0$ em $[s_3, s_4]$, da monotonicidade de u_ε^m e de (2.54) que

$$\begin{aligned} -\eta &< -\frac{\eta}{2} \leq u_\varepsilon(s) \leq u_\varepsilon(s) + u_\varepsilon^m(s) = u_\varepsilon^m(s) - [-u_\varepsilon(s)] \\ &= u_\varepsilon^m(s) - \tilde{u}_\varepsilon(s) \leq u_\varepsilon^m(s) \leq u_\varepsilon^m(z_1 + \delta) \leq \frac{\eta}{2} < \eta. \end{aligned}$$

- $\tilde{u}_\varepsilon \geq -\frac{\eta}{2}$ em $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$.

Para $s \in [z_1 - \delta, z_1 + \delta]$, temos $\tilde{u}_\varepsilon(s) \geq 0 > -\frac{\eta}{2}$.

- $\tilde{u}_\varepsilon \leq 0$ em $[a, z_1 - \delta]$ e $\tilde{u}_\varepsilon \geq 0$ em $(z_1 + \delta, b]$.

Por definição de u_ε , temos $[s_3, s_4] \subset [z_1 - \delta, z_1 + \delta]$. Portanto, $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon$ em $[a, z_1 - \delta] \cup (z_1 + \delta, b]$, obtendo o desejado.

Logo, $\tilde{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$ e, conseqüentemente, $\tilde{u}_\varepsilon \in B_r(u_\varepsilon^m)$. Como $\alpha \leq u_\varepsilon \leq 0$ em $[s_3, s_4]$, segue da propriedade (c_3) que $F(\tilde{u}_\varepsilon) \leq F(u_\varepsilon)$ em $[s_3, s_4]$, enquanto que $(\tilde{u}'_\varepsilon)^2 = (u'_\varepsilon)^2$ em $[a, b]$ e, portanto,

$$E(\tilde{u}_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) \leq E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}). \quad (2.64)$$

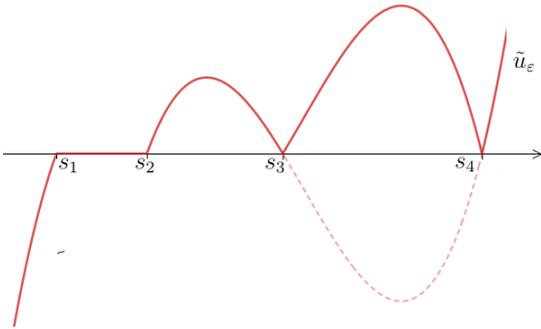


Figura 2.9: Função \tilde{u}_ε .

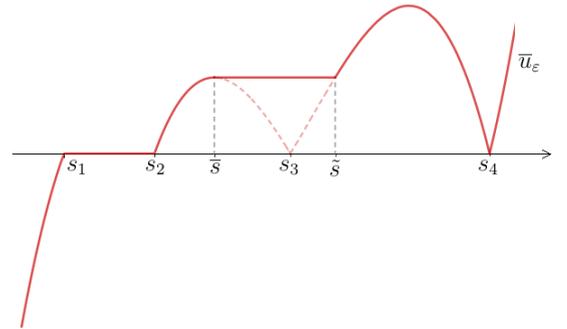


Figura 2.10: Função \bar{u}_ε .

Seja $\bar{s} \in [a, b]$ o mínimo entre os máximos das duas corcovas positivas de \tilde{u}_ε , isto é,

$$\tilde{u}_\varepsilon(\bar{s}) = \min \left\{ \max_{[s_2, s_3]} \tilde{u}_\varepsilon, \max_{[s_3, s_4]} \tilde{u}_\varepsilon \right\} > 0.$$

Suponha, sem perda de generalidade, $\bar{s} \in [s_2, s_3]$. Seja $\tilde{s} \in [s_3, s_4]$ tal que $\tilde{u}_\varepsilon(\bar{s}) = \tilde{u}_\varepsilon(\tilde{s})$. Defina

$$\bar{u}_\varepsilon = \begin{cases} \tilde{u}_\varepsilon(\bar{s}), & \text{em } (\bar{s}, \tilde{s}) \\ \tilde{u}_\varepsilon, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Veja que $\bar{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$. De fato,

- $|u_\varepsilon^m - \bar{u}_\varepsilon| \leq \eta$ em $[a, b]$.

Do fato de u_ε^m ser uma função monotônica crescente, temos, para $s \in (\bar{s}, \tilde{s})$,

$$-\eta \leq u_\varepsilon^m(\bar{s}) - \tilde{u}_\varepsilon(\bar{s}) \leq u_\varepsilon^m(s) - \bar{u}_\varepsilon(s) \leq u_\varepsilon^m(\tilde{s}) - \tilde{u}_\varepsilon(\tilde{s}) \leq \eta.$$

Além disso, para $s \notin (\bar{s}, \tilde{s})$, temos $\bar{u}_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon$ e portanto,

$$|\bar{u}_\varepsilon(s) - u_\varepsilon^m(s)| \leq \eta, \text{ para } s \in [a, b].$$

- $\bar{u}_\varepsilon \geq -\frac{\eta}{2}$ em $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$.

Para $s \in [z_1 - \delta, z_1 + \delta]$ tal que $s \notin (\bar{s}, \tilde{s})$, temos $\bar{u}_\varepsilon(s) = \tilde{u}_\varepsilon(s) \geq -\frac{\eta}{2}$, pois $\tilde{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$.

Para $s \in (\bar{s}, \tilde{s}) \subset [s_2, s_4]$, temos $\bar{u}_\varepsilon(s) \geq 0 > -\frac{\eta}{2}$.

- $\bar{u}_\varepsilon \leq 0$ em $[a, z_1 - \delta]$ e $\bar{u}_\varepsilon \geq 0$ em $(z_1 + \delta, b]$.

Como $(\bar{s}, \tilde{s}) \subset [s_2, s_4] \subset [z_1 - \delta, z_1 + \delta]$, temos $\bar{u}_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon$ em $[a, z_1 - \delta] \cup (z_1 + \delta, b]$.

Com isso, provamos que $\bar{u}_\varepsilon \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$ e, portanto, $\bar{u}_\varepsilon \in B_r(u_\varepsilon^m)$.

Como $0 \leq \tilde{u}_\varepsilon < \bar{u}_\varepsilon \leq \beta$ em (\bar{s}, \tilde{s}) e F é estritamente decrescente em $[0, \beta]$, temos

$$F(\bar{u}_\varepsilon) < F(\tilde{u}_\varepsilon) \text{ em } (\bar{s}, \tilde{s}).$$

Além disso, $(\bar{u}'_\varepsilon)^2 = 0 \leq (\tilde{u}'_\varepsilon)^2$ em (\bar{s}, \tilde{s}) . Por conseguinte, de (2.64), temos

$$E(\bar{u}_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}) < E(\tilde{u}_\varepsilon, S_{\gamma_\varepsilon}) \leq E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}),$$

contradizendo o fato de u_ε ser L^1 -mínimo de $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$ em $B_r(u_\varepsilon^m)$ e provando que esse caso também não pode ocorrer.

Em todos os casos anteriores onde há um ponto que anula u_ε fora de $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$, encontramos uma função que possui energia menor que u_ε , contradizendo sua minimalidade em $B_r(u_\varepsilon^m)$. Deste modo, provamos que não existem pontos fora de $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$ que anulam u_ε , comprovando a Afirmação 5.

Apesar de não ter sido citado no decorrer das demonstrações das afirmações anteriores, todas as modificações feitas em u_ε , denotadas por \tilde{u}_ε , pertencem a $H^1(S_{\gamma_\varepsilon})$, inclusive a função \bar{u}_ε descrita no Caso 5 da Afirmação 5.

Agora, estamos aptos a provar que a suposição (2.63) está, de fato, incorreta. Ou seja, qualquer ponto de $[s_m, s_M]$, obrigatoriamente, terá de anular u_ε .

Supondo a hipótese (2.63) válida, isto é,

$$\exists s \in [s_m, s_M] : u_\varepsilon(s) \neq 0.$$

Há apenas dois casos possíveis: u_ε se anula em dois ou três pontos, uma vez que outros casos são combinações desses.

Caso A. u_ε se anula em dois pontos.

Aqui, temos dois subcasos:

(i) $\exists s_1, s_2 \in [z_1 - \delta, z_1 + \delta] : u_\varepsilon(s_1) = 0 = u_\varepsilon(s_2), u \leq 0$ em $[z_1 - \delta, s_2)$ e $u > 0$ em $(s_2, z_1 + \delta]$ (Fig. 2.11).

(ii) $\exists s_1, s_2 \in [z_1 - \delta, z_1 + \delta] : u_\varepsilon(s_1) = 0 = u_\varepsilon(s_2), u < 0$ em $[z_1 - \delta, s_1)$ e $u \geq 0$ em $(s_1, z_1 + \delta]$ (Fig. 2.12).

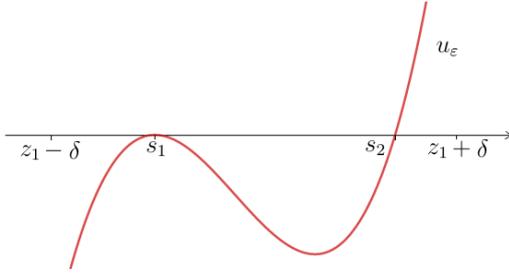


Figura 2.11: Caso A (i).

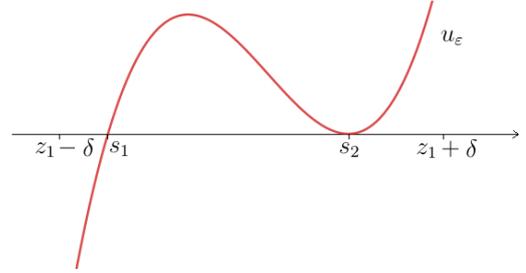


Figura 2.12: Caso A (ii).

Caso B. u_ε se anula em três pontos: $\exists s_1, s_2, s_3 \in [z_1 - \delta, z_1 + \delta] : u_\varepsilon(s_i) = 0, i = 1, 2, 3, u_\varepsilon < 0$ em $[z_1 - \delta, s_1) \cup (s_2, s_3)$ e $u_\varepsilon > 0$ em $(s_1, s_2) \cup (s_3, z_1 + \delta]$ (Fig. 2.13).

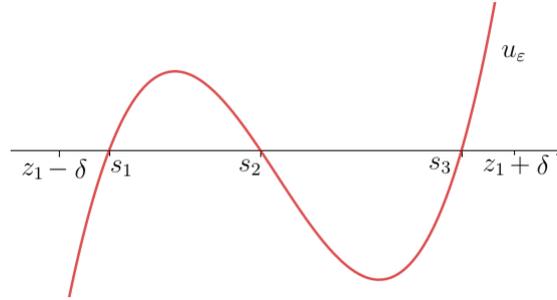


Figura 2.13: Caso B.

O caso A é análogo ao Caso 1: para o subcaso (i), o procedimento deve ser aplicado em s_1 , enquanto que no subcaso (ii), em s_2 . Já no Caso B, a demonstração é similar ao Caso 5.

Deste modo, qualquer ponto em $[s_m, s_M]$ tem de anular u_ε , ou seja, a suposição (2.63) não pode ocorrer.

Com isso, provamos que u_ε é monotônica crescente e, portanto, $u_\varepsilon \in B_{\eta_0}^m(u_\varepsilon^m)$. Logo, segue do Teorema 2.9 que

$$E(u_\varepsilon^m; S_{\gamma_\varepsilon}) \leq E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}). \quad (2.65)$$

De (2.62) e (2.65), temos

$$E(u_\varepsilon^m; S_{\gamma_\varepsilon}) = E(u_\varepsilon; S_{\gamma_\varepsilon}).$$

Consequentemente, u_ε^m é um L^1 -mínimo local de $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$ em $B_r(u_\varepsilon^m)$. \square

Observação 2.11. Quando f for uma função da forma $f(u) = -u(u - \alpha)(u - \beta)$ com $\beta < -\alpha$, é possível obter todos os resultados anteriores (e posteriores, também), uma vez que

$$F(-u) \leq F(u), \quad \forall u \in [0, \beta].$$

Nesse caso, são necessários alguns ajustes. No Teorema 2.10, deve-se fazer pequenas modificações nas definições de $\eta > 0$, da vizinhança $C_\eta(u_\varepsilon^m)$ e na análise do Caso 5 (e, consequentemente, na do Caso B): em vez de limitarmos as funções em $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$ inferiormente por $-\eta/2$ e refletirmos a corcova negativa em torno do eixo O_x , agora as limitaremos superiormente por $\eta/2$ e refletiremos a corcova positiva.

Observação 2.12. Se f for uma função bi-estável e ímpar em $[-\epsilon, \epsilon]$ para algum $\epsilon > 0$, então F será uma função par em $[-\epsilon, \epsilon]$ e é possível obter todos os resultados anteriores. Nesse caso, a vizinhança tubular não possui restrições, não sendo necessário lidar com um intervalo $[z_1 - \delta, z_1 + \delta]$ (trabalho realizado em [29]).

Através dos resultados anteriores, podemos provar que u_ε , para $\varepsilon < \varepsilon_1$, é um padrão do problema (2.10), ou seja, solução estacionária não constante estável de (2.1).

Teorema 2.13. *Seja $(u_\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_1}$ a família de L^1 -mínimos locais obtida no Teorema 2.10. Então, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, u_ε é um padrão para o problema (2.10). Além disso, u_ε é uma função estritamente crescente em $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.10, existe $\varepsilon_1 > 0$, tal que

$$E(u_\varepsilon^m; S_{\gamma_\varepsilon}) = \min \{E(v; S_{\gamma_\varepsilon}) : v \in B_r(u_\varepsilon^m)\}, \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_1,$$

onde $B_r(u_\varepsilon^m)$ está definido em (2.57).

Dado $\mu_0 > 0$, seja

$$v = u_\varepsilon^m + \mu\varphi,$$

com $\mu \in (0, \mu_0)$ e $\varphi \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon})$ tal que

$$(i) \quad |\varphi| \leq \frac{\eta}{\mu_0} \text{ em } [a_\varepsilon, b_\varepsilon],$$

$$(ii) \quad \varphi \leq \frac{u_\varepsilon^m(z_1 - \delta)}{\mu_0} \text{ em } [a_\varepsilon, z_1 - \delta],$$

$$(iii) \quad \varphi \geq -\frac{\eta/2 + u_\varepsilon^m(z_1 - \delta)}{\mu_0} \text{ em } [z_1 - \delta, z_1 + \delta],$$

$$(iv) \quad \varphi \geq -\frac{u_\varepsilon^m(z_1 + \delta)}{\mu_0} \text{ em } (z_1 + \delta, b_\varepsilon],$$

onde η, z_1 e δ estão definidos em (2.52), (2.53) e (2.54), respectivamente.

Pelas condições impostas em $\mu > 0$ e $\varphi \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon})$, temos $v \in C_\eta(u_\varepsilon^m)$ e, conseqüentemente, $v \in B_r(u_\varepsilon^m)$. Como u_ε^m é L^1 -mínimo local de $E(\cdot; S_{\gamma_\varepsilon})$ em $B_r(u_\varepsilon^m)$, temos

$$E(u_\varepsilon^m; S_{\gamma_\varepsilon}) \leq E(v; S_{\gamma_\varepsilon}),$$

onde $v = u_\varepsilon^m + \mu\varphi$, $0 < \mu < \mu_0$ e $\varphi \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon})$ satisfaz (i)-(iv).

A minimalidade é suficiente para utilizar o argumento de Cálculo Variacional, mesmo com as restrições impostas sobre φ , para concluir que u_ε^m satisfaz

$$\partial_G E(u_\varepsilon^m; S_{\gamma_\varepsilon})[\varphi] = 0 \quad \text{e} \quad \partial_G^2 E(u_\varepsilon^m; S_{\gamma_\varepsilon})[\varphi] \geq 0, \quad \forall \varphi \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon}) \text{ satisfazendo (i)-(iv)}, \quad (2.66)$$

onde ∂_G denota a derivada de Gateaux.

Conseqüentemente, para $\varepsilon < \varepsilon_1$, u_ε^m é uma solução estacionária do problema (2.11) e, conseqüentemente uma solução estacionária de (2.10), pois u_ε^m independe de θ .

Para provarmos a estabilidade de u_ε^m , considere o problema linearizado em torno de u_ε^m

$$\begin{cases} v_{ss} + k_\varepsilon v_s + \lambda f'(u_\varepsilon^m)v + \mu v = 0 \text{ em } (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \\ v_s(a_\varepsilon) = v_s(b_\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (2.67)$$

De (2.66), temos que o primeiro autovalor associado a u_ε^m satisfaz

$$\mu_1(u_\varepsilon^m) := \inf \{ \partial_G^2 E(u_\varepsilon^m; S_{\gamma_\varepsilon})[\varphi] : \varphi \in H^1(S_{\gamma_\varepsilon}), \|\varphi\|_{L^2(S_{\gamma_\varepsilon})} = 1 \} \geq 0.$$

Se $\mu_1(u_\varepsilon^m) > 0$, o resultado segue de imediato.

Vejamos o caso onde $\mu_1(u_\varepsilon^m) = 0$. Nesse caso, o autovalor é simples e existe uma variedade local invariante $W(u_\varepsilon^m)$ tangente ao autoespaço tal que se u_ε^m é estável em $W(u_\varepsilon^m)$, então ela também é estável em $H^1(S_{\gamma_\varepsilon})$. A garantia da estabilidade de u_ε^m em $W(u_\varepsilon^m)$ segue da existência de uma função de Lyapunov e do fato de $W(u_\varepsilon^m)$ ter dimensão 1. Com isso, concluímos que u_ε^m é um padrão de (2.11). A estabilidade de u_ε^m em (2.10) e, conseqüentemente, em (2.1), decorre do fato de que a primeira autofunção associada a $\mu_1(u_\varepsilon^m)$ de (2.67) não depende de θ e da aplicação do Teorema de Krein-Rutman.

Para encerrarmos a prova, falta mostrar que u_ε^m é estritamente crescente em $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$. Vejamos.

Devido a natureza de u_ε^m , sabemos que ela é uma função monotonicamente crescente. Basta provarmos que essa relação é estrita. De fato, como u_ε^m é uma solução estacionária de (2.11), temos

$$\frac{d^2 u_\varepsilon^m}{ds^2} + \frac{\psi'_\varepsilon}{\psi_\varepsilon} \frac{du_\varepsilon^m}{ds} + \lambda f(u_\varepsilon^m) = 0 \quad \text{em } (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \quad (2.68)$$

e

$$\frac{du_\varepsilon^m}{ds}(a_\varepsilon) = \frac{du_\varepsilon^m}{ds}(b_\varepsilon) = 0. \quad (2.69)$$

Através de (2.68), (2.69) e de cálculo direto, temos

$$\frac{du_\varepsilon^m}{ds}(s) = -\frac{\lambda}{\psi_\varepsilon(s)} \int_{a_\varepsilon}^s f(u_\varepsilon^m) \psi_\varepsilon d\xi, \quad \forall s \in (a_\varepsilon, z_1), \quad (2.70)$$

onde $z_1 = \min\{s \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon] : u_\varepsilon^m(s) = 0\}$.

Do Princípio do Máximo e da definição de z_1 , temos

$$\alpha < u_\varepsilon^m(s) < 0, \quad \forall s \in (a_\varepsilon, z_1). \quad (2.71)$$

Além disso, note que

$$f < 0 \text{ em } (\alpha, 0) \quad \text{e} \quad \psi_\varepsilon > 0 \text{ em } (a_\varepsilon, z_1). \quad (2.72)$$

De (2.70), (2.71), (2.72) e $\lambda > 0$, segue que

$$\frac{du_\varepsilon^m}{ds} > 0 \text{ em } (a_\varepsilon, z_1),$$

ou seja, u_ε^m é estritamente crescente em $[a_\varepsilon, z_1]$.

De modo análogo, prova-se que u_ε^m é estritamente crescente em $[z_2, b_\varepsilon]$, onde

$$z_2 = \max\{s \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon] : u_\varepsilon^m(s) = 0\}.$$

Portanto, temos u_ε^m estritamente crescente em $[a_\varepsilon, z_1] \cup [z_2, b_\varepsilon]$. Provemos então, que $z_1 = z_2$.

Afirmção 1. $z_1 = z_2$.

Suponha $z_1 \neq z_2$. Como u_ε^m é monotônica crescente, temos $u_\varepsilon^m = 0$ em $[z_1, z_2]$. Portanto, existe $\tilde{s} \in (z_1, z_2)$ tal que

$$u_\varepsilon^m(\tilde{s}) = \frac{du_\varepsilon^m}{ds}(\tilde{s}) = 0.$$

Segue da unicidade da solução que $u_\varepsilon^m \equiv 0$ em $[\tilde{s}, b_\varepsilon]$. Absurdo, pois $u_\varepsilon^m > 0$ em pontos próximos a b_ε , comprovando a Afirmação 1 e por fim, provando que u_ε^m é uma função estritamente crescente. \square

Com os resultados obtidos nesta seção, podemos garantir que, para cada $\lambda > 0$ fixo, existe um padrão $u_{\varepsilon, \lambda}$ do problema (2.1) estritamente crescente. Como dito inicialmente, a monotonicidade desses padrões ajudará nos estudos de comportamento assintótico e de estabilidade das soluções quando $\lambda \rightarrow \infty$, feitos nas próximas seções.

2.3 Estudo do comportamento assintótico quando f não satisfaz a condição de igualdade de área

Aqui, trabalharemos com o termo de reação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$(H) \quad f(u) = -u(u - \alpha)(u - \beta), \quad \text{com } \beta > -\alpha,$$

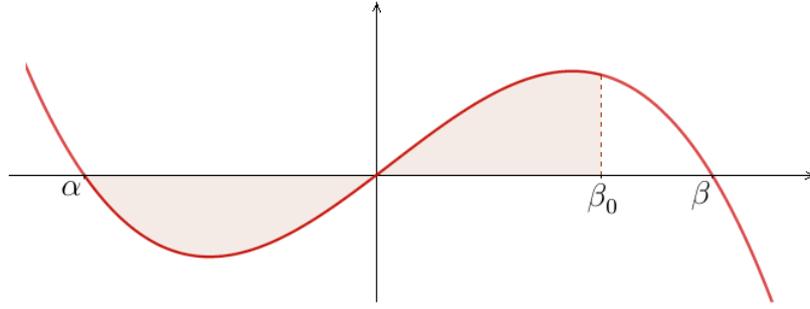


Figura 2.14: Exemplo de função f que não satisfaz a condição de igualdade de área, onde $\int_{\alpha}^{\beta_0} f(\xi) d\xi = 0$.

ou seja, f não satisfaz a condição de igualdade de área.

Como as provas desta seção serão feitas para cada superfície S_{γ_ε} , sem depender do parâmetro $\varepsilon > 0$, fixaremos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ e o omitiremos das notações da solução $u_{\varepsilon, \lambda}$, do intervalo $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$, da curva γ_ε , da função coordenada ψ_ε e da curvatura geodésica k_{g_ε} e, utilizaremos $u_\lambda, [a, b], \gamma, \psi$ e k_g , respectivamente, para uma visualização mais limpa. Além disso, sem perda de generalidade, podemos supor que o ponto $q_\varepsilon(0)$ é a origem, onde q_ε é a função de comprimento de arco de Γ_ε .

Em [28], quando f satisfaz a condição de igualdade de área (neste caso, $\beta = -\alpha$), utilizando técnicas de Γ -convergência, os autores provaram que existe $\lambda_1 > 0$ tal que o problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta_{S_\gamma} u + \lambda f(u) & \text{em } (0, \infty) \times S_\gamma \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) & \text{em } S_\gamma \end{cases} \quad (2.73)$$

possui solução estacionária estável u_λ , para todo $\lambda > \lambda_1$ e que essa família $(u_\lambda)_{\lambda > \lambda_1}$ desenvolve camada de transição interna com interface em $s = 0$, isto é,

$$\|u_\lambda - \alpha\|_{L^1(a, 0)} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|u_\lambda - \beta\|_{L^1(0, b)} \rightarrow 0 \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.74)$$

Nesse mesmo artigo, foi provado que a condição de igualdade de área é uma hipótese necessária para a formação de camada interna (Fig. 1.2). Portanto, se retirarmos essa condição, qualquer família de soluções estacionárias de (2.73) não pode satisfazer (2.74), o que acarreta em uma mudança no comportamento assintótico das soluções quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Como aqui não exigimos que f satisfaça a condição de igualdade de área, ao supor f satisfazendo **(H)**, fica claro que nenhuma família de soluções estacionárias de (2.1) terá um comportamento como descrito em (2.74), pois a família de soluções não desenvolve camada de transição interna. Por essa razão, seria interessante estudarmos o que acontece com as soluções estacionárias de (2.1) quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Sob a hipótese **(H)**, seja u_λ solução estacionária de (2.1). Provaremos, baseado nas referências [26, 29], que $u_\lambda(b)$ converge para $\beta_0 \in (0, \beta)$, ponto o qual satisfaz $\int_{\alpha}^{\beta_0} f(\xi) d\xi = 0$, e u_λ converge uniformemente para α em $[a, \bar{s}]$, para qualquer $\bar{s} \in (a, b)$, quando $\lambda \rightarrow \infty$ (Fig. 1.1).

Da hipótese **(H)**, temos

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi > 0 \quad (2.75)$$

e devido a continuidade de f , podemos garantir a existência de um único $\beta_0 \in (0, \beta)$ tal que

$$\int_{\alpha}^{\beta_0} f(\xi) d\xi = 0.$$

Fixado $\lambda_0 > 0$, vimos na seção anterior, a existência de um padrão monotônico crescente u_{λ_0} de (2.1). Seja $\lambda \geq \lambda_0$ e considere o problema

$$\begin{cases} u_{ss} + k_g u_s + \lambda f(u) = 0 & \text{em } (a, b) \\ u_s(a) = u_s(b) = 0. \end{cases} \quad (2.76)$$

Da continuidade e suavidade do fluxo em relação a λ e da unicidade de solução de (2.11), podemos garantir a existência de soluções monotônicas crescentes u_{λ} , para $\lambda \geq \lambda_0$, do problema (2.76), que se anula em um único ponto, denotado por $z_1(\lambda)$.

É importante salientar que todos cálculos subsequentes não utilizam o conceito de estabilidade, uma vez que não podemos garantir que u_{λ} é estável, para $\lambda > \lambda_0$. Usaremos apenas, os seguintes fatos: as soluções são funções monotônicas crescentes que se anulam em único ponto $z_1(\lambda)$ e que, para todo $\lambda \geq \lambda_0$, segundo o Princípio do Máximo,

$$\alpha \leq u_{\lambda}(s) \leq \beta, \quad \forall s \in [a, b]. \quad (2.77)$$

Seja $\bar{s} \in (a, b)$ e considere o problema linearizado:

$$\begin{cases} v_{ss} + k_g v_s + \mu f'(0)v = 0 & \text{em } (\bar{s}, b) \\ v(\bar{s}) = v(b) = 0. \end{cases} \quad (2.78)$$

Sejam μ_1 e v_1 os primeiros autovalor e autofunção de (2.78).

Para a análise do comportamento assintótico de $(u_{\lambda})_{\lambda \geq \lambda_0}$ quando $\lambda \rightarrow \infty$, precisaremos dos seguintes lemas auxiliares.

Lema 2.14. *Se existem $\bar{s} \in (a, b)$ e uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : a < z_1(\lambda_n) < \bar{s}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Então,

(a) $v_1 \leq u_{\lambda_n}$ em $[\bar{s}, b]$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{s}}^b v_1 f(u_{\lambda_n}) \psi ds = 0$.

(c) $u_{\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$ em medida em $[\bar{s}, b]$.

(d) $u_{\lambda_n}(b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$.

Demonstração. (a) Como $\bar{s} > z_1(\lambda_n)$, para n suficientemente grande, e u_{λ_n} é monotônica crescente, temos

$$u_{\lambda_n}(s) > 0, \quad \forall s \geq \bar{s}, \quad \forall n \geq n_0. \quad (2.79)$$

Do fato de v_1 ser autofunção de (2.78), podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$0 < v_1(s) < \frac{\alpha + \beta}{3}, \quad \forall s \geq \bar{s}, \quad (2.80)$$

onde $\frac{\alpha + \beta}{3} \in (0, \beta)$ é o ponto de inflexão de f , isto é, $f' \left(\frac{\alpha + \beta}{3} \right) = f'' \left(\frac{\alpha + \beta}{3} \right) = 0$.

Para provar o desejado, suponha por contradição, que para todo $\Lambda > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\text{para } \lambda_n > \Lambda, \exists \tilde{s}(\lambda_n) \in (\bar{s}, b) : 0 < u_{\lambda_n}(\tilde{s}(\lambda_n)) < v_1(\tilde{s}(\lambda_n)).$$

Da continuidade e informações sobre u_{λ_n} e v_1 , existem $\tilde{s}_1(\lambda_n), \tilde{s}_2(\lambda_n) \in (\bar{s}, b)$ tais que

$$v_1(\tilde{s}_i(\lambda_n)) = u_{\lambda_n}(\tilde{s}_i(\lambda_n)), \quad i = 1, 2$$

e

$$u_{\lambda_n} < v_1 \text{ em } (\tilde{s}_1(\lambda_n), \tilde{s}_2(\lambda_n)). \quad (2.81)$$

Seja $\xi_{\lambda_n} : [\tilde{s}_1(\lambda_n), \tilde{s}_2(\lambda_n)] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\xi_{\lambda_n}(s) = \frac{v_1(s)}{u_{\lambda_n}(s)}, \quad \text{para } s \in (\tilde{s}_1(\lambda_n), \tilde{s}_2(\lambda_n)).$$

Note que ξ_{λ_n} satisfaz

$$\begin{cases} \xi_{ss} + \left(k_g + 2 \frac{u'_{\lambda_n}}{u_{\lambda_n}} \right) \xi_s + \left(\mu_1 f'(0) - \lambda_n \frac{f(u_{\lambda_n})}{u_{\lambda_n}} \right) \xi = 0 & \text{em } (\tilde{s}_1(\lambda_n), \tilde{s}_2(\lambda_n)) \\ \xi(\tilde{s}_1(\lambda_n)) = \xi(\tilde{s}_2(\lambda_n)) = 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

Como $\xi_{\lambda_n}(\tilde{s}_i(\lambda_n)) = 1, i = 1, 2$, e $\xi_{\lambda_n}(\tilde{s}(\lambda_n)) > 1$, segue que ξ_{λ_n} atinge seu máximo no interior do intervalo $[\tilde{s}_1(\lambda_n), \tilde{s}_2(\lambda_n)]$.

De (2.79), (2.81) e (2.80), temos

$$0 < u_{\lambda_n} < v_1 < \frac{\alpha + \beta}{3} \text{ em } (\tilde{s}_1(\lambda_n), \tilde{s}_2(\lambda_n)). \quad (2.83)$$

Como f é uma função convexa em $(-\infty, \frac{\alpha + \beta}{3})$, segue de (2.83) que

$$\frac{f(u_{\lambda_n})}{u_{\lambda_n}} \geq f'(0) = -\alpha\beta > 0 \text{ em } (\tilde{s}_1(\lambda_n), \tilde{s}_2(\lambda_n))$$

e, conseqüentemente,

$$\lambda_n \frac{f(u_{\lambda_n})}{u_{\lambda_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ em } (\tilde{s}_1(\lambda_n), \tilde{s}_2(\lambda_n)),$$

uma vez que $(f(u_{\lambda_n})/u_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada inferiormente por uma constante $f'(0)$ estritamente positiva.

Tomando $\Lambda > 0$ suficientemente grande tal que o coeficiente de ξ_{λ_n} em (2.82) seja negativo em $(\bar{s}_1(\lambda_n), \bar{s}_2(\lambda_n))$, segue do fato de ξ_{λ_n} atingir seu máximo no interior de $[\bar{s}_1(\lambda_n), \bar{s}_2(\lambda_n)]$ e do Teorema do Princípio do Máximo que ξ_{λ_n} é uma constante. Absurdo.

Portanto, $v_1 \leq u_{\lambda_n}$ em $[\bar{s}, b]$.

(b) Como u_{λ_n} é solução de (2.76), segue que

$$(\psi u'_{\lambda_n})' = -\lambda_n f(u_{\lambda_n}) \psi. \quad (2.84)$$

Multiplicando (2.84) por v_1 , obtemos

$$v_1(\psi u'_{\lambda_n})' = -\lambda_n v_1 f(u_{\lambda_n}) \psi. \quad (2.85)$$

Além disso, temos

$$(v_1 \psi u'_{\lambda_n})' = v_1' \psi u'_{\lambda_n} + v_1 (\psi u'_{\lambda_n})' \quad (2.86)$$

e

$$(v_1' \psi u_{\lambda_n})' = (v_1' \psi)' u_{\lambda_n} + v_1' \psi u'_{\lambda_n} = -\mu_1 f'(0) v_1 \psi u_{\lambda_n} + v_1' \psi u'_{\lambda_n}, \quad (2.87)$$

uma vez que v_1 satisfaz (2.78) com $\mu = \mu_1$.

Segue de (2.85), (2.86) e (2.87) que

$$(v_1 \psi u'_{\lambda_n})' - (u_{\lambda_n} \psi v_1')' - \mu_1 f'(0) v_1 u_{\lambda_n} \psi = -\lambda_n v_1 f(u_{\lambda_n}) \psi. \quad (2.88)$$

Integrando (2.88) em $[\bar{s}, b]$, obtemos

$$\int_{\bar{s}}^b [(v_1 \psi u'_{\lambda_n})' - (u_{\lambda_n} \psi v_1')' - \mu_1 f'(0) v_1 u_{\lambda_n} \psi] ds = -\lambda_n \int_{\bar{s}}^b v_1 f(u_{\lambda_n}) \psi ds.$$

Do fato de $v_1(\bar{s}) = v_1(b) = 0$, temos

$$\frac{1}{\lambda_n} \left[(u_{\lambda_n} \psi v_1') \Big|_{\bar{s}}^b + \mu_1 f'(0) \int_{\bar{s}}^b v_1 u_{\lambda_n} \psi ds \right] = \int_{\bar{s}}^b v_1 f(u_{\lambda_n}) \psi ds. \quad (2.89)$$

Como v_1 e ψ independem de λ_n e a sequência $(u_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, o termo entre colchetes de (2.89) é limitado e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{s}}^b v_1 f(u_{\lambda_n}) \psi ds = 0.$$

(c) Seja $I_\epsilon = \{s \in [\bar{s}, b] : \bar{s} + \epsilon < s < b - \epsilon\}$.

Seja $m_\epsilon(v_1) = \inf\{v_1(s) : s \in I_\epsilon\}$. Segue dos itens (a) e (b) que

$$0 < m_\epsilon(v_1) \leq v_1 \leq u_{\lambda_n} < \beta \text{ em } I_\epsilon$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_\epsilon} v_1 f(u_{\lambda_n}) \psi \, ds = 0. \quad (2.90)$$

Queremos provar que $u_{\lambda_n} \rightarrow \beta$ em medida em $[\bar{s}, b]$. Para isso, suponha por contradição que não ocorra. Então, existem $\delta > 0$ e uma subsequência (λ_{n_k}) tais que $\lambda_{n_k} \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$ e $\mu(I_{\epsilon, k}) \geq \delta$, onde

$$I_{\epsilon, k} := \{s \in I_\epsilon : |u_{\lambda_{n_k}}(s) - \beta| \geq \eta\}.$$

Como $u_{\lambda_{n_k}}$ é monotônica crescente e devido a definição de ψ , temos $f(u_{\lambda_{n_k}})$ e ψ limitadas inferiormente em I_ϵ por constantes estritamente positivas, denotadas por f_m e ψ_m , respectivamente. Logo,

$$\int_{I_{\epsilon, k}} v_1 f(u_{\lambda_{n_k}}) \psi \, ds \geq m_\epsilon(v_1) f_m \psi_m \delta > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.91)$$

Como $m_\epsilon(v_1)$, f_m , ψ_m e δ independem de k , ao fazer $k \rightarrow \infty$ em (2.91) temos uma contradição com (2.90). Logo, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\mu(I_{\epsilon, k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

(d) Segue do item (c) que existe uma subsequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, manteremos a mesma notação, tal que

$$u_{\lambda_n} \rightarrow \beta \text{ qtp em } [\bar{s}, b].$$

Seja $s_0 \in [\bar{s}, b]$ tal que $u_{\lambda_n}(s_0) \rightarrow \beta$. Pela monotonicidade crescente de u_{λ_n} e (2.77), temos

$$u_{\lambda_n}(b) \rightarrow \beta \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

□

De modo análogo, obtemos o resultado seguinte.

Lema 2.15. *Se existem $\bar{s} \in (a, b)$ e uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \bar{s} < z_1(\lambda_n) < b, \quad \forall n \geq n_0.$$

Então, $u_{\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ em medida em $[a, \bar{s}]$ e $u_{\lambda_n}(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$.

Por fim, obtemos o resultado principal desta seção:

Teorema 2.16. *Sejam $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ uma família de soluções monotônicas crescentes de (2.76) e $z_1(\lambda)$ o único zero de u_λ , para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Então, existe uma subfamília $(\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$, de mesma notação, tal que:*

$$(a) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} z_1(\lambda) = b.$$

$$(b) u_\lambda \rightarrow \alpha \text{ uniformemente em } [a, \bar{s}], \text{ para } \bar{s} \in (a, b).$$

$$(c) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} u_\lambda(b) = \beta_0.$$

Demonstração. (a) Como a família $(z_1(\lambda))_{\lambda \geq \lambda_0} \subset (a, b)$ é limitada, possui uma subfamília convergente.

Suponha, por absurdo, que $z_1(\lambda_n) \rightarrow s_0 \in (a, b)$. Então,

$$\forall \bar{s} \in (s_0, b), \exists n_0 = n_0(\bar{s}) \in \mathbb{N} : a < z_1(\lambda_n) < \bar{s}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Segue do Lema 2.14 que

$$u_{\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta \text{ em medida em } [\bar{s}, b]$$

e do fato de $(u_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ser uma sequência limitada, temos

$$u_{\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta \text{ em } L^1(\bar{s}, b). \quad (2.92)$$

Afirmção 1. $u_{\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$ em $L^1(s_0, b)$, para alguma subsequência.

Suponha que isso não ocorra. Então,

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq n : \int_{s_0}^b (\beta - u_{\lambda_{n_0}}) ds \geq \epsilon_0. \quad (2.93)$$

De (2.93) e da monotonicidade crescente de $u_{\lambda_{n_0}}$, tomando $\bar{s} = s_0 + \frac{\epsilon_0}{2(\beta - \alpha)} \in (s_0, b)$, para n grande, temos

$$\begin{aligned} \int_{\bar{s}}^b (\beta - u_{\lambda_{n_0}}) ds &= \int_{s_0}^b (\beta - u_{\lambda_{n_0}}) ds - \int_{s_0}^{\bar{s}} (\beta - u_{\lambda_{n_0}}) ds \\ &\geq \epsilon_0 - \int_{s_0}^{\bar{s}} (\beta - \alpha) ds = \epsilon_0 - (\beta - \alpha)(\bar{s} - s_0) = \frac{\epsilon_0}{2}, \end{aligned}$$

contradizendo (2.92) e concluindo a Afirmação 1.

Analogamente, obtemos uma subsequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u_{\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \text{ em } L^1(a, s_0). \quad (2.94)$$

Da Afirmação 1 e de (2.94), temos $u_{\lambda_n} \rightarrow \alpha \chi_{(a, s_0)} + \beta \chi_{(s_0, b)}$ em $L^1(a, b)$, ou seja, $(u_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ desenvolve camada de transição interna com interface em $s_0 \in (a, b)$. Segue do Teorema A.2 que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi = 0,$$

contradizendo (2.75).

Deste modo, $z_1(\lambda_n) \rightarrow a$ ou $z_1(\lambda_n) \rightarrow b$. Suponha, por absurdo, que $z_1(\lambda_n) \rightarrow a$. Então,

$$\forall \bar{s} > a, \exists n_0 = n_0(\bar{s}) \in \mathbb{N} : a < z_1(\lambda_n) < \bar{s}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Do Lema 2.14, $u_{\lambda_n} \rightarrow \beta$ em medida em $[\bar{s}, b]$ e

$$u_{\lambda_n}(b) \rightarrow \beta. \quad (2.95)$$

De modo análogo a Afirmação 1, prova-se que $u_{\lambda_n} \rightarrow \beta$ em $L^1(a, b)$ e, conseqüentemente, em medida em (a, b) .

Afirmação 2. $u_{\lambda_n} \rightarrow \beta$ uniformemente em qualquer intervalo $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset (a, b)$.

De fato, suponha que não. Então, existem $\delta, \epsilon_0 > 0$ e $s_0 \in (a, b)$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq n, \exists \tilde{s} \in (s_0 - \epsilon_0, s_0 + \epsilon_0) \subset (a, b) : \beta - \delta > u_{\lambda_{n_0}}(\tilde{s}).$$

Como u_{λ_n} é monotônica crescente em (a, b) , temos

$$\beta - \delta > u_{\lambda_{n_0}}(s), \quad \forall s \in (a, \tilde{s}), \text{ para } n \text{ grande,}$$

contradizendo a convergência em medida $u_{\lambda_n} \rightarrow \beta$ em (a, b) .

Portanto, $u_{\lambda_n} \rightarrow \beta$ uniformemente em qualquer intervalo $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset (a, b)$. Em particular,

$$u_{\lambda_n}(s) \rightarrow \beta, \quad \forall s \in (a, b). \quad (2.96)$$

Seja $(\delta_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ a dupla seqüência definida por

$$\delta_{n,m} := F\left(u_{\lambda_n}\left(a + \frac{1}{m}\right)\right) - F(u_{\lambda_n}(b)), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Como $(u_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e F é contínua, temos $(\delta_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada e, portanto, possui subsequência convergente, que manteremos a mesma notação. Além disso, segue de (2.95) e (2.96) que

- fixado $m_0 \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{n,m_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[F\left(u_{\lambda_n}\left(a + \frac{1}{m_0}\right)\right) - F(u_{\lambda_n}(b)) \right] = F(\beta) - F(\beta) = 0.$$

- fixado $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_{n_0,m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[F\left(u_{\lambda_{n_0}}\left(a + \frac{1}{m}\right)\right) - F(u_{\lambda_{n_0}}(b)) \right] = F(u_{\lambda_{n_0}}(a)) - F(u_{\lambda_{n_0}}(b)).$$

Devido ao fato dos limites serem iguais, temos

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_{n,m} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(u_{\lambda_n}(a)) - F(u_{\lambda_n}(b)) \right),$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_{\lambda_n}(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_{\lambda_n}(b)). \quad (2.97)$$

Como $\alpha \leq u_{\lambda_n}(a) < 0$, para n suficientemente grande, segue de (2.97) e das definições de f e F que

$$F(\alpha) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_{\lambda_n}(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_{\lambda_n}(b)) = F(\beta),$$

isto é,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi \leq 0,$$

contradizendo (2.75).

Consequentemente, $z_1(\lambda_n) \rightarrow b$ quando $n \rightarrow \infty$.

(b) Note que $u_{\lambda_n} \rightarrow \alpha$ em medida em $[a, b]$. De fato, como $z_1(\lambda_n) \rightarrow b$ (item (a)), para qualquer $\bar{s} < b$, temos

$$\exists n_0 = n_0(\bar{s}) \in \mathbb{N} : \bar{s} < z_1(\lambda_n) < b, \quad \forall n \geq n_0$$

e, segue do Lema 2.15 que $u_{\lambda_n} \rightarrow \alpha$ em medida em $[a, \bar{s}]$.

De modo análogo ao que foi feito no item (a), prova-se que

$$u_{\lambda_n} \rightarrow \alpha \text{ em medida em } [a, b]. \quad (2.98)$$

Mostremos agora que $u_{\lambda_n} \rightarrow \alpha$ uniformemente em $[a, \bar{s}]$, para todo $\bar{s} \in (a, b)$. Para tal, suponha, por absurdo, que isso não ocorra, ou seja, que existem $\tilde{s} \in (a, b)$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq n, \exists s_0 \in (a, \tilde{s}] : \alpha + \epsilon < u_{\lambda_{n_0}}(s_0).$$

Como $u_{\lambda_{n_0}}$ é uma função monotônica crescente, temos

$$\alpha + \epsilon < u_{\lambda_{n_0}}(s), \quad \forall s \in [s_0, b), \text{ para } n \text{ suficientemente grande,}$$

contradizendo (2.98).

Logo, $u_{\lambda_n} \rightarrow \alpha$ uniformemente em $[a, \bar{s}]$, para todo $\bar{s} \in (a, b)$.

(c) Seja $(\delta_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ a dupla sequência definida por

$$\delta_{n,m} := F(u_{\lambda_n}(a)) - F\left(u_{\lambda_n}\left(b - \frac{1}{m}\right)\right), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Do item (b), temos

$$u_{\lambda_n}(s) \rightarrow \alpha, \quad \forall s \in [a, b). \quad (2.99)$$

De modo similar ao que foi feito no item (b) e utilizando (2.99), temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [F(u_{\lambda_n}(a)) - F(u_{\lambda_n}(b))] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_{n,m} \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{n,m} \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[F(u_{\lambda_n}(a)) - F \left(u_{\lambda_n} \left(b - \frac{1}{m} \right) \right) \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (F(\alpha) - F(\alpha)) = 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_{\lambda_n}(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_{\lambda_n}(b)). \quad (2.100)$$

Do item (b) e de (2.100), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_{\lambda_n}(b)) = F(\alpha). \quad (2.101)$$

Como $(u_{\lambda_n}(b))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada por 0 e β , existem uma subsequência (mantemos a mesma notação) e $d \in [0, \beta]$ tais que

$$u_{\lambda_n}(b) \rightarrow d.$$

Segue da continuidade de F que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_{\lambda_n}(b)) = F(d). \quad (2.102)$$

De (2.101) e (2.102), temos $F(d) = F(\alpha)$, ou seja,

$$\int_{\alpha}^d f(\xi) d\xi = 0.$$

Portanto, $d = \beta_0$. □

2.4 Análise de estabilidade das soluções para $\lambda > 0$ suficientemente grande quando f não satisfaz a condição de igualdade de área

Aqui, como na seção anterior, também trabalharemos com o termo de reação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(u) = -u(u - \alpha)(u - \beta), \quad \text{com } \beta > -\alpha,$$

ou seja, f não satisfaz a condição de igualdade de área.

Podemos afirmar que

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi > 0$.
- $\exists! \beta_0 \in (0, \beta) : \int_{\alpha}^{\beta_0} f(\xi) d\xi = 0$.

Visto que o resultado obtido nesta seção é referente à cada superfície S_{γ_ε} , independente do parâmetro $\varepsilon > 0$, fixaremos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ e o omitiremos das notações da solução $u_{\varepsilon, \lambda}$, da função coordenada ψ_ε , da curvatura geodésica k_{g_ε} , da superfície de revolução S_{γ_ε} e do intervalo $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ e utilizaremos $u_\lambda, \psi, k_g, S_\gamma$ e $[a, b]$, igual à seção anterior, a fim de deixar a visualização do resultado mais limpa. Além disso, sem perda de generalidade, podemos supor que $q_\varepsilon(0)$ é a origem, onde q_ε é a função de comprimento de arco de Γ_ε .

Quando f satisfaz a condição de igualdade de área (neste caso, $\beta = -\alpha$), em [28], utilizando a Teoria de Γ -convergência, foi provado a existência de um parâmetro $\lambda_1 > 0$ e de uma família de padrões $(u_\lambda)_{\lambda > \lambda_1}$ do problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta_{S_\gamma} u + \lambda f(u) & \text{em } (0, \infty) \times S_\gamma \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) & \text{em } S_\gamma. \end{cases} \quad (2.103)$$

Portanto, para esse caso, podemos garantir que as soluções estacionárias u_λ de (2.103) são estáveis, para qualquer $\lambda \geq \lambda_1$.

No caso que f não satisfaz a condição de igualdade de área, para λ_0 fixo, *provamos a existência de uma solução estacionária estável u_{λ_0} de (2.1), mas não há informações que garantam a estabilidade de u_λ , para $\lambda > \lambda_0$* . Na verdade, irá ocorrer justamente o contrário: ao considerarmos $(u_\lambda)_{\lambda \geq \lambda_0}$ uma família de soluções estacionárias monotônicas crescentes de (2.1), as soluções u_λ serão instáveis, para $\lambda > \lambda_0$ suficientemente grande.

Para provarmos esse fato, baseado em [29], será necessário impormos duas hipóteses: a primeira, suporemos que o traço de γ tenha o formato de haltere de lados distintos (como, por exemplo, na Fig. 2.15), e a segunda, que β esteja suficientemente próximo de $-\alpha$ para garantir que β_0 seja maior que o ponto que maximiza f em $[0, \beta]$. Para isso, tome

$$\beta < - \left(\frac{5\sqrt{33} + 11}{32} \right) \alpha. \quad (2.104)$$

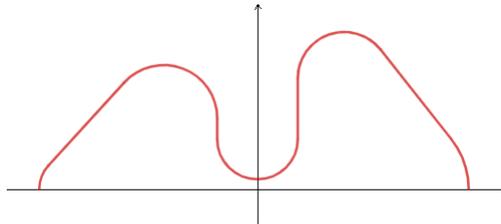


Figura 2.15: Curva geratriz γ no plano O_{xy} .

Sejam $s^l, s^r \in (a, b)$ tais que

$$\psi(s^l) = \max\{\psi(s) : s \in [a, 0]\}$$

e

$$\psi(s^r) = \max\{\psi(s) : s \in [0, b]\}.$$

Como $\psi'(b) = -1$, para facilitar os próximos cálculos, podemos considerar a parametrização local próximo ao ponto b por

$$\psi(s) = b - s, \quad \forall s \in (b - \delta_0, b), \quad (2.105)$$

para algum $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno.

Uma vez que $k'_g(0) > 0$ e $k'_g(s) \rightarrow -\infty$ quando $s \rightarrow a$ e $s \rightarrow b$, segue que k'_g se anula em um único ponto em cada intervalo $(a, 0)$ e $(0, b)$. Denote tais pontos por s_1 e s_2 , respectivamente.

Como $k'_g(s^l) < 0$ e $k'_g(s^r) < 0$, visto que s^l e s^r são máximos locais de ψ , podemos afirmar que

$$a < s^l < s_1 < 0 < s_2 < s^r < b$$

e

$$k'_g(s_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Logo,

$$\begin{cases} k'_g < 0 & \text{em } (a, s_1) \\ k'_g > 0 & \text{em } (s_1, s_2) \\ k'_g < 0 & \text{em } (s_2, b). \end{cases} \quad (2.106)$$

Sejam $u_m, u_M \in (\alpha, \beta)$ tais que

$$f(u_m) = \min\{f(u) : u \in [\alpha, 0]\} < 0 \quad (2.107)$$

e

$$f(u_M) = \max\{f(u) : u \in [0, \beta]\} > 0. \quad (2.108)$$

Note que, pela definição de f e (2.104), temos

$$\alpha < u_m < 0 < u_M < \beta_0 < \beta. \quad (2.109)$$

Seja u_λ solução do problema

$$\begin{cases} u_{ss} + \frac{\psi'}{\psi} u_s + \lambda f(u) = 0 & \text{em } (a, b) \\ u_s(a) = u_s(b) = 0, \end{cases} \quad (2.110)$$

para $\lambda \geq \lambda_0$.

Por cálculo direto, temos

$$u'_\lambda(s) = \frac{\lambda}{\psi(s)} \int_s^b f(u_\lambda) \psi d\tilde{s}, \quad \forall s \in (a, b). \quad (2.111)$$

Com as notações e informações introduzidas, podemos provar a instabilidade de u_λ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Teorema 2.17. *Sejam $\lambda_0 > 0$, u_{λ_0} padrão de (2.1), obtido no Teorema 2.13, e $(u_\lambda)_{\lambda > \lambda_0}$ uma família de soluções estacionárias, monotônicas crescentes e independentes do ângulo θ , de*

$$\begin{cases} u_t = \Delta_{S_\gamma} u + \lambda f(u) & \text{em } (0, \infty) \times S_\gamma \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) & \text{em } S_\gamma. \end{cases}$$

Então, para $\lambda > \lambda_0$ suficientemente grande, u_λ é instável.

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lambda_n > \lambda_0$, $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e u_{λ_n} é estável, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja o coeficiente de Rayleigh $R_{u_{\lambda_n}}$ definido por

$$R_{u_{\lambda_n}}(\varphi) := \frac{\int_a^b [(\varphi')^2 - \lambda_n f'(u_{\lambda_n}) \varphi^2] \psi ds}{\int_a^b \varphi^2 \psi ds}, \quad \forall \varphi \in H^1(S_\gamma).$$

Como u_{λ_n} é estável, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\mu_1(u_{\lambda_n}) := R_{u_{\lambda_n}}(v_{1,n}) = \inf\{R_{u_{\lambda_n}}(\varphi) : \varphi \in H^1(S_\gamma), \varphi \neq 0\} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\mu_1(u_{\lambda_n})$ e $v_{1,n}$ são os primeiros autovalor e autofunção, respectivamente, do problema linearizado de (2.11) em torno de u_{λ_n} .

Aplicando o coeficiente de Rayleigh em u'_{λ_n} é possível obter

$$R_{u_{\lambda_n}}(u'_{\lambda_n}) = \frac{1}{2} \int_a^b k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e da definição de primeiro autofunção, segue que

$$R_{u_{\lambda_n}}(u'_{\lambda_n}) \geq R_{u_{\lambda_n}}(v_{1,n}) = \mu_1(u_{\lambda_n}) \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Conseqüentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{u_{\lambda_n}}(u'_{\lambda_n}) \geq 0. \quad (2.112)$$

Para completarmos essa prova, mostraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{u_{\lambda_n}}(u'_{\lambda_n}) = -\infty$, contradizendo (2.112).

Como

$$\frac{1}{2} \int_a^b k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds = \frac{1}{2} \int_a^{s_1} k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds + \frac{1}{2} \int_{s_2}^b k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds$$

e sabemos, de (2.106), que a primeira integral do lado direito é negativa; se provarmos que $\int_{s_1}^{s_2} k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds \rightarrow 0$ e $\int_{s_2}^b k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds \rightarrow -\infty$, quando $n \rightarrow \infty$, iremos obter $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{u_{\lambda_n}}(u'_{\lambda_n}) = -\infty$.

Antes de provarmos essas afirmações, do Teorema 2.16 segue que, existe uma subsequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$s_2 < s^l < s^-(\lambda_n) < z_1(\lambda_n) < s^+(\lambda_n) < b, \quad (2.113)$$

onde

$$u_{\lambda_n}(s^-(\lambda_n)) = u_m \quad \text{e} \quad u_{\lambda_n}(s^+(\lambda_n)) = u_M, \quad (2.114)$$

com u_m e u_M definidos em (2.107) e (2.108), respectivamente.

Note que a garantia de u_m e u_M serem atingidos por algum ponto $u_{\lambda_n}(s)$ decorre do fato de $\beta_0 > u_M$, que foi obtido através de (2.104).

Como $z_1(\lambda_n) \rightarrow b$ (Teorema 2.16-(a)), segue de (2.113) que

$$s^+(\lambda_n) \rightarrow b.$$

Logo,

$$b - \delta_0 < s^+(\lambda_n) < b, \quad \text{para } n \text{ grande,}$$

e de (2.105), temos

$$\psi(s) = b - s, \quad \forall s \in [s^+(\lambda_n), b].$$

Portanto,

$$k'_g(s) = \frac{\psi''(s)\psi(s) - \psi'(s)^2}{\psi^2(s)} = -\frac{1}{(b-s)^2}, \quad \forall s \in [s^+(\lambda_n), b]$$

e

$$k'_g(s) \left(\frac{1}{\psi(s)} \int_s^b \psi \, d\tilde{s} \right)^2 = -\frac{1}{4}, \quad \forall s \in [s^+(\lambda_n), b]. \quad (2.115)$$

Afirmção 1. $\int_{s_2}^b k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$

Como $k'_g < 0$ em (s_2, b) , segue de (2.111) e (2.115) que

$$\begin{aligned} \int_{s_2}^b k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds &\leq \int_{s^+(\lambda_n)}^b k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds = \int_{s^+(\lambda_n)}^b k'_g \left(\frac{\lambda_n}{\psi} \int_s^b f(u_{\lambda_n}) \psi \, d\tilde{s} \right)^2 ds \\ &\leq \lambda_n^2 f^2(u_{\lambda_n}(b)) \int_{s^+(\lambda_n)}^b k'_g \left(\frac{1}{\psi} \int_s^b \psi \, d\tilde{s} \right)^2 ds \\ &= -\frac{\lambda_n^2}{4} f^2(u_{\lambda_n}(b))(b - s^+(\lambda_n)), \end{aligned} \quad (2.116)$$

uma vez que $0 < f^2(u_{\lambda_n}(b)) \leq f^2(u_{\lambda_n}) \leq f^2(u_M)$, pois $u_M \leq u_{\lambda_n} \leq u_{\lambda_n}(b) < \beta$ em $[s^+(\lambda_n), b]$.

Além disso, como u_{λ_n} é monotônica crescente, de (2.114), (2.111) e (2.105), temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_{\lambda_n}(b) - u_M = u_{\lambda_n}(b) - u_{\lambda_n}(s^+(\lambda_n)) = \int_{s^+(\lambda_n)}^b u'_{\lambda_n} ds \\ &= \lambda_n \int_{s^+(\lambda_n)}^b \left(\frac{1}{\psi} \int_s^b f(u_{\lambda_n}) \psi \, d\tilde{s} \right) ds \\ &\leq \lambda_n f(u_M) \int_{s^+(\lambda_n)}^b \left(\frac{1}{\psi} \int_s^b \psi \, d\tilde{s} \right) ds = \frac{\lambda_n}{4} f(u_M)(b - s^+(\lambda_n))^2, \end{aligned} \quad (2.117)$$

uma vez que $0 \leq u_{\lambda_n} \leq \beta$ em $[s^+(\lambda_n), b] \subset [z_1(\lambda_n), b]$ e, conseqüentemente, $f(u_{\lambda_n}) \leq f(u_M)$.

De (2.117), temos

$$b - s^+(\lambda_n) \geq \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\sqrt{u_{\lambda_n}(b) - u_M}}{\sqrt{f(u_M)}}. \quad (2.118)$$

De (2.116) e (2.118), temos

$$\int_{s_2}^b k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds \leq -\frac{\lambda_n^{3/2} f^2(u_{\lambda_n}(b))}{2 f(u_M)} \sqrt{u_{\lambda_n}(b) - u_M}. \quad (2.119)$$

Do fato de $u_{\lambda_n}(b) \rightarrow \beta_0$ (Teorema 2.16-(c)), obtemos

$$f^2(u_{\lambda_n}(b)) \rightarrow f^2(\beta_0) > 0 \quad (2.120)$$

e

$$\sqrt{u_{\lambda_n}(b) - u_M} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\beta_0 - u_M} > 0, \quad (2.121)$$

devido a (2.109).

Como u_m, u_M e f independem de $n \in \mathbb{N}$, segue de (2.119), (2.120) e (2.121) que

$$\int_{s_2}^b k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty,$$

comprovando a Afirmação 1.

Afirmação 2. $\int_{s_1}^{s_2} k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Como k'_g é contínua e positiva em $[s_1, s_2]$, temos

$$\int_{s_1}^{s_2} k'_g(u'_{\lambda_n})^2 ds \leq \left(\max_{[s_1, s_2]} k'_g \right) \int_{s_1}^{s_2} (u'_{\lambda_n})^2 ds. \quad (2.122)$$

Seja $\bar{s} \in (s_2, z_1(\lambda_n))$. Pelo item (b) do Teorema 2.16, existe uma subsequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, manteremos a mesma notação, tal que

$$u_{\lambda_n} \rightarrow \alpha \text{ uniformemente em } [a, \bar{s}] \quad (2.123)$$

e, portanto,

$$\int_a^{\bar{s}} u'_{\lambda_n} = u_{\lambda_n}(\bar{s}) - u_{\lambda_n}(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha - \alpha = 0. \quad (2.124)$$

Como u_{λ_n} é monotônica crescente, temos $u'_{\lambda_n} \geq 0$ em $[a, \bar{s}]$ e segue de (2.124) que $u'_{\lambda_n} \rightarrow 0$ em $L^1(a, \bar{s})$. Consequentemente, existe uma subsequência $(u_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$, de mesma notação, tal que $u'_{\lambda_n} \rightarrow 0$ qtp em $[a, \bar{s}]$. Sejam $s_3 \in (a, s_1)$ e $s_4 \in (s_2, \bar{s})$ tais que

$$u'_{\lambda_n}(s_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad i = 3, 4. \quad (2.125)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{s_1}^{s_2} (u'_{\lambda_n})^2 ds &\leq \int_{s_3}^{s_4} (u'_{\lambda_n})^2 ds = u'_{\lambda_n} u_{\lambda_n} \Big|_{s_3}^{s_4} - \int_{s_3}^{s_4} u''_{\lambda_n} u_{\lambda_n} ds \\
&= u'_{\lambda_n} u_{\lambda_n} \Big|_{s_3}^{s_4} + \int_{s_3}^{s_4} [k_g u'_{\lambda_n} + \lambda_n f(u_{\lambda_n})] u_{\lambda_n} ds \\
&\leq \beta \left[u'_{\lambda_n} \Big|_{s_3}^{s_4} + \left(\max_{[s_3, s_4]} |k_g| \right) \int_{s_3}^{s_4} u'_{\lambda_n} ds + \lambda_n \int_{s_3}^{s_4} |f(u_{\lambda_n})| ds \right], \quad (2.126)
\end{aligned}$$

uma vez que $u_{\lambda_n} \leq \beta$ e $u'_{\lambda_n} \geq 0$ em $[a, b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Segue de (2.125) que

$$u'_{\lambda_n} \Big|_{s_3}^{s_4} = u'_{\lambda_n}(s_4) - u'_{\lambda_n}(s_3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.127)$$

De (2.123), temos

$$\int_{s_3}^{s_4} u'_{\lambda_n} ds = u_{\lambda_n}(s_4) - u_{\lambda_n}(s_3) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2.128)$$

já que $s_3, s_4 \in [a, \bar{s}]$.

Como u_{λ_n} é solução de (2.110), temos

$$\lambda_n f(u_{\lambda_n}) = -\frac{(\psi u'_{\lambda_n})'}{\psi}. \quad (2.129)$$

Além disso, segue de (2.123) que

$$|f(u_{\lambda_n})| = -f(u_{\lambda_n}) > 0 \text{ em } [s_3, s_4], \text{ para } n \text{ grande.} \quad (2.130)$$

Portanto, de (2.130), (2.129) e (2.125), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_n \int_{s_3}^{s_4} |f(u_{\lambda_n})| ds &= -\lambda_n \int_{s_3}^{s_4} f(u_{\lambda_n}) ds = \int_{s_3}^{s_4} \frac{(\psi u'_{\lambda_n})'}{\psi} ds \\
&\leq \left(\max_{[s_3, s_4]} \frac{1}{\psi} \right) \int_{s_3}^{s_4} (\psi u'_{\lambda_n})' ds = \left(\max_{[s_3, s_4]} \frac{1}{\psi} \right) (\psi u'_{\lambda_n}) \Big|_{s_3}^{s_4} \\
&\leq \left(\max_{[s_3, s_4]} \frac{1}{\psi} \right) \left(\max_{[a, b]} \psi \right) (u'_{\lambda_n}(s_4) - u'_{\lambda_n}(s_3)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.131)
\end{aligned}$$

Segue de (2.122), (2.126), (2.127), (2.128) e (2.131) que

$$\int_{s_1}^{s_2} k'_g (u'_{\lambda_n})^2 ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

encerrando a prova da Afirmação 2 e, provando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{u_{\lambda_n}}(u'_{\lambda_n}) = -\infty.$$

Isso contradiz (2.112) e portanto, concluímos que u_λ se torna instável para $\lambda > \lambda_0$ suficientemente grande. \square

Estabilidade da equação de reação e difusão degenerada em um intervalo

Considere o seguinte problema de reação e difusão degenerado

$$\begin{cases} u_t = (ku_x)_x + f(u), & \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times I \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $I := (0, 1)$, $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes hipóteses:

(h_1) $k \in W^{1,\infty}(I)$.

(h_2) $\exists x_0 \in (0, 1) : k(x_0) = 0$ e $k(x) > 0, \forall x \neq x_0$.

(h_3) $\exists c \in [1, 2) : (x - x_0)k' \leq ck$ qtp em $[0, 1]$.

(h_4) $f \in C^1(\mathbb{R})$ e bi-estável, isto é, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha < 0 < \beta$) tais que

$$f(\alpha) = f(0) = f(\beta) = 0, f'(\alpha) < 0, f'(\beta) < 0 \quad \text{e} \quad f'(0) > 0.$$

Neste caso, α e β são denominados de zeros estáveis de f .

(h_5) $\exists c_1 > 0 :$

$$|f(u)| \leq c_1 \quad \text{e} \quad |f'(u)| \leq c_1, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

O tipo de solução que consideraremos para (3.1), assim como para o problema elíptico associado a soluções estacionárias, será especificado na Definição 3.15.

O problema parabólico (3.1) sob as condições $(h_1) - (h_3)$ é chamado problema fortemente degenerado com degeneração no interior do domínio. Há dois tipos de problema: fortemente degenerado e fracamente degenerado. Aqui, estudaremos o problema fortemente degenerado,

enquanto que o fracamente degenerado, onde a função k satisfaz $(h_1) - (h_3)$, mas a constante $c \in [0, 1)$, é abordado em [33].

Em ambos os casos, o operador principal, $(ku_x)_x$, apresenta dificuldades que não são encontradas em operadores uniformemente elípticos.

Como exemplo de função k que gera um problema fortemente degenerado, podemos considerar $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x) = |x - x_0|^r$, com $r \in [1, 2)$. No caso em que $r \in [0, 1)$, temos um exemplo de função difusão k que gera um problema fracamente degenerado.

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ descrita na Fig. 3.1 é um exemplo de função reação que satisfaz as hipóteses (h_4) e (h_5) .

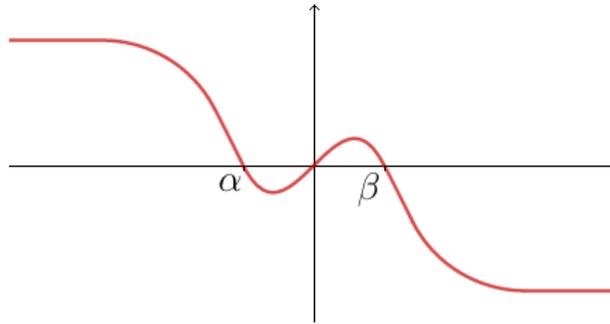


Figura 3.1: Exemplo de função f .

Definição 3.1. Uma solução estacionária \bar{u} de (3.1) é dita *estável no sentido de Lyapunov* (quando conveniente, chamaremos apenas de *estável*) se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tais que, para todo valor inicial u^0 em (3.1) com $\|u^0 - \bar{u}\|_{H_k^1(I)} < \delta$, a solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.1) existe para todo $t > 0$ e satisfaz $\|u(t, \cdot; u^0) - \bar{u}\|_{H_k^1(I)} < \varepsilon$, para todo $t > 0$, onde $u(0, \cdot; u^0) = u^0(\cdot)$.

O espaço $H_k^1(I)$ será definido em breve e observamos aqui que ele comporta funções descontínuas em $x_0 \in I$ e devido a degenerescência de k neste ponto (resultado provado adiante, mas especificamente na Proposição 3.4), o problema (3.1) pode ser considerado do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_t = (ku_x)_x + f(u), & \text{para } (t, x) \in (0, \infty) \times I \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) \\ u_x(t, 0) = k(x_0)u(t, x_0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

onde k e f satisfazem as hipótese $(h_1) - (h_5)$.

Definição 3.2. Uma função \bar{u} é denominada *padrão* de (3.1) se \bar{u} for uma solução estacionária estável não constante de (3.1).

Nosso objetivo é provar a existência de padrões para o problema (3.1). Ou seja, encontrar soluções não constantes de

$$\begin{cases} (ku_x)_x + f(u) = 0 & \text{em } I \\ u_x(0) = (ku)(x_0) = u_x(1) = 0 \end{cases}$$

que sejam estáveis no sentido de Lyapunov.

Sônego, em [33], provou a existência de soluções estacionárias estáveis – uma estabilidade mais fraca que a de Lyapunov, a qual a segunda variação do funcional de energia na solução é não negativa – do problema fracamente degenerado, enquanto aqui, provaremos a existência de padrões do problema fortemente degenerado. No problema fortemente degenerado, o ponto x_0 , onde k se anula, é denominado *isolante perfeito*, pois não permite que haja fluxo através desse ponto. O fato de k se anular nesse ponto faz com que o operador principal $(ku_x)_x$ seja um operador elíptico degenerado, ou seja, não uniformemente elíptico, e os métodos e resultados já conhecidos na literatura, como por exemplo, Princípio do Máximo e Teoria Espectral, não podem ser aplicados a esse problema e, portanto, são necessárias modificações, novas ferramentas e novos resultados. Além disso, apesar dos problemas fortemente e fracamente degenerados parecerem similares, o intervalo onde a constante $c > 0$ (que difere um caso do outro) pertence, impede que os métodos utilizados para obter os resultados sejam análogos. Um exemplo dessa distinção de problemas é que no caso fracamente degenerado temos $1/k \in L^1(0, 1)$, mas isso não ocorre no fortemente degenerado (resultado provado adiante).

Observe que do fato de estarmos lidando com uma função difusão que se anula em um ponto x_0 no interior de um intervalo limitado sugere que o processo de difusão ocorre de maneira independente em cada componente conexa de $I \setminus \{x_0\}$ – razão pela qual x_0 é denominado isolante perfeito –, uma vez que de acordo com a Lei de Fick da difusão, a condição matemática que reflete a condição de fluxo zero é

$$k(x_0)u_x(x_0, t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

Tal fato nos fez questionar se o problema (3.1) poderia possuir um padrão descontínuo em x_0 . Com este estudo, pretendemos contribuir para uma melhor compreensão desse fenômeno de difusão no caso fortemente degenerado.

Neste capítulo, ressaltamos que não é exigido a condição de igualdade de área para a função reação, ou seja, f não satisfaz necessariamente a condição de igualdade de área e, portanto, o caso onde $\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) d\xi \neq 0$ também é abordado.

Como dito anteriormente, o nosso objetivo é estudar a existência de padrões de (3.1). Para tal estudo, utilizaremos ferramentas do Cálculo Variacional e devido à condição de degeneração de k no interior do intervalo I será necessário introduzirmos um novo espaço, $H_k^1(I)$, definido mais à frente. Além do Cálculo Variacional, também iremos utilizar resultados das teorias de Semigrupos, Operadores Setoriais e Potências Fracionárias de Operadores.

O estudo de problemas parabólicos e elípticos degenerados é tema de diversos autores e diferentes tipos de equações. Esse tipo de função de difusibilidade é abordada em diversos modelos físicos, químicos, biológicos e econômicos. Por exemplo, em Aeronáutica temos a equação de Crocco estudada em [22], em Física existem as equações de Ginzburg-Landau e do

calor abordadas em [19] e [13], respectivamente, e em Matemática Financeira temos a equação de Black-Scholes apresentada em [9]. Além disso, é possível encontrar estudos com operadores degenerados da forma $(ku_x)_x$ em [4, 12, 33, 34], cuja função degenerada se anula em um único ponto no interior do domínio e nos artigos [1, 7, 8], onde a função degenerada se anula na fronteira.

Aqui, trabalhamos com a equação de Allen-Cahn que é muito utilizada em processos de reação e difusão. Esse tipo de equação, por exemplo, pode modelar a evolução no tempo da concentração u de uma substância que se dissemina em um meio cuja difusibilidade é dada por $k(x)$, $x \in I$, sob efeito de um termo f , chamado de reação.

Antes de iniciarmos a prova dos resultados, considere os espaços de Hilbert $H_k^1(I)$ e $H_k^2(I)$ definidos do seguinte modo:

$$H_k^1(I) := \{u \in L^2(I) : u \text{ localmente absolutamente contínua em } [0, x_0] \cup (x_0, 1] \\ \text{e } \sqrt{k}u_x \in L^2(I)\}$$

e

$$H_k^2(I) := \{u \in H_k^1(I) : ku_x \in H^1(I)\},$$

com as seguintes normas, respectivamente,

$$\|u\|_{H_k^1(I)}^2 := \|u\|_{L^2(I)}^2 + \|\sqrt{k}u_x\|_{L^2(I)}^2, \quad \forall u \in H_k^1(I)$$

e

$$\|u\|_{H_k^2(I)}^2 := \|u\|_{H_k^1(I)}^2 + \|(ku_x)_x\|_{L^2(I)}^2, \quad \forall u \in H_k^2(I).$$

Note que a cadeia de inclusões contínuas

$$H_k^2(I) \hookrightarrow H_k^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$$

é válida e além disso, o espaço $H_k^1(I)$ contém funções descontínuas em x_0 .

Este capítulo será dividido em quatro seções. Na primeira, serão apresentados resultados preliminares que serão usados nas seções posteriores. Na Seção 3.2, será provado a existência de solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.1), para todo $t > 0$. Na terceira seção, provaremos a estabilidade de uma função \bar{u} , definida mais adiante, candidata a padrão de (3.1), enquanto na última, abordaremos brevemente o comportamento das soluções de (3.1).

3.1 Resultados preliminares e notações

Por estarmos lidando com novos espaços, suas caracterizações são essenciais para obter os resultados desejados. O propósito desta seção é apresentar resultados, baseados nos artigos [4, 12], que irão auxiliar nas seções subsequentes.

O lema a seguir evidencia a principal diferença entre os problemas fracamente e fortemente degenerados. Isso ocorre devido ao intervalo onde a constante definida em (h_3) pertence. No caso fracamente degenerado, tem-se $1/k \in L^1(I)$, o que não ocorre no fortemente degenerado, resultado provado a seguir.

Lema 3.3. *Seja $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as hipóteses $(h_1) - (h_3)$. Então, para $\eta > 0$, temos $\frac{1}{k} \notin L^1(x_0 - \eta, x_0) \cup L^1(x_0, x_0 + \eta)$.*

Demonstração. Provemos que $\frac{1}{k} \notin L^1(x_0 - \eta, x_0)$, para $\eta > 0$, já que o outro caso segue de modo análogo.

Como $k \in W^{1,\infty}(I)$, seja $k'_-(x_0) \in \mathbb{R}$ a derivada lateral esquerda de k em x_0 , definida por

$$k'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{k(x) - k(x_0)}{x - x_0}. \quad (3.2)$$

Segue de (3.2) que, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left| \frac{k(x) - k(x_0)}{x - x_0} - k'_-(x_0) \right| \leq 1, \quad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0).$$

Para $\delta < \min\{\delta_1, \eta\}$, temos

$$k(x) \leq k(x_0) + [1 + |k'_-(x_0)|] |x - x_0|, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0). \quad (3.3)$$

De (3.3) e $k(x_0) = 0$, obtemos

$$k(x) \leq [1 + |k'_-(x_0)|] |x - x_0| \leq [1 + \|k'\|_{L^\infty(I)}] |x - x_0|, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Logo, para $d = \frac{1}{1 + \|k'\|_{L^\infty(I)}}$, temos

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0} \frac{d}{|x - x_0|} dx \leq \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \frac{1}{k(x)} dx \leq \int_{x_0 - \eta}^{x_0} \frac{1}{k(x)} dx.$$

Como $\frac{1}{|x - x_0|} \notin L^1(x_0 - \delta, x_0)$, então $\frac{1}{k} \notin L^1(x_0 - \eta, x_0)$, para $\eta > 0$. \square

Obviamente, do lema anterior, temos $1/k \notin L^1(I)$. Esse resultado é um fator importante para obtermos as caracterizações de alguns espaços e resultados relevantes para o estudo de (3.1). Inicialmente, iremos caracterizar o espaço $H_k^1(I)$.

Proposição 3.4. *Seja*

$$X := \{u \in L^2(I) : u \text{ localmente absolutamente contínua em } [0, x_0) \cup (x_0, 1], \\ \sqrt{k}u_x \in L^2(I), ku \text{ contínua em } x_0 \text{ e } (ku)(x_0) = 0\}.$$

Então, $X = H_k^1(I)$.

Demonstração. Claramente, $X \subset H_k^1(I)$. Para provarmos a outra inclusão, precisamos mostrar que ku é contínua em x_0 e $(ku)(x_0) = 0$.

Como $k \in W^{1,\infty}(I)$, sabemos que

$$(ku)_x = k'u + ku_x \in L^2(I).$$

Para $x < x_0$, temos

$$(ku)(x) = (ku)(0) + \int_0^x (ku)_y dy. \quad (3.4)$$

Como $(ku)(0) \in \mathbb{R}$ e $(ku)_x \in L^1(I)$, segue de (3.4) que

$$(ku)(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} (ku)(x) = (ku)(0) + \int_0^{x_0} (ku)_y dy = L \in \mathbb{R}.$$

Afirmção 1. $L = 0$.

Suponha $L \neq 0$. Então, existem $d, \delta > 0$ tais que

$$|(ku)(x)| \geq d, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Para $d_1 = \frac{d^2}{\max_{[0,1]} k} > 0$, temos

$$|u(x)|^2 \geq \frac{d^2}{k^2(x)} \geq \frac{d_1}{k(x)}, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Logo,

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0} \frac{d_1}{k(x)} dx$$

e do Lema 3.3, temos $u \notin L^2(I)$. Absurdo, conseqüentemente, $L = 0$, comprovando a Afirmação 1.

De modo análogo, prova-se que $(ku)(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (ku)(x) = 0$.

Portanto, ku é contínua em x_0 e $(ku)(x_0) = 0$. \square

Para provar a existência de soluções $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.1), para todo $t > 0$, utilizaremos a teoria de Semigrupos. Com esse intuito, seja $A : D(A) \subset L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ o operador elíptico degenerado definido por

$$Au = (ku_x)_x, \quad \text{para } u \in D(A). \quad (3.5)$$

A fim de encontrar soluções para (3.1), considere

$$D(A) = \{u \in H_k^2(I) : u_x(0) = u_x(1) = 0\}.$$

Além disso, seja $D \subset L^2(I)$ o subespaço definido por

$$\begin{aligned} D := \{ & u \in L^2(I) : u \text{ localmente absolutamente contínua em } [0, x_0) \cup (x_0, 1], \\ & ku \in H^1(I), ku_x \in H^1(I), ku \text{ contínua em } x_0 \text{ e} \\ & (ku)(x_0) = (ku_x)(x_0) = u_x(0) = u_x(1) = 0\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Com o objetivo de caracterizar o subespaço $D(A)$, mostremos que $D = D(A)$. Para tal, iremos precisar do seguinte lema.

Lema 3.5. *Dados $u \in D$ e $x \in [0, 1]$, temos*

$$|(ku)(x)| \leq \|(ku)_x\|_{L^2(I)} \sqrt{|x - x_0|}$$

e

$$|(ku_x)(x)| \leq \|(ku_x)_x\|_{L^2(I)} \sqrt{|x - x_0|}. \quad (3.7)$$

Demonstração. Seja $u \in D$, então $(ku)(x_0) = 0$ e, pela da Desigualdade de Hölder, segue que

$$|(ku)(x)| = \left| \int_{x_0}^x (ku)_y dy \right| \leq \|(ku)_x\|_{L^2(I)} \sqrt{|x - x_0|}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

De modo análogo, utilizando $(ku_x)(x_0) = 0$, obtemos

$$|(ku_x)(x)| = \left| \int_{x_0}^x (ku_x)_y dy \right| \leq \|(ku_x)_x\|_{L^2(I)} \sqrt{|x - x_0|}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

□

Com o lema anterior, podemos caracterizar $D(A)$.

Teorema 3.6. *Seja $D \subset L^2(I)$ definido em (3.6). Então, $D = D(A)$.*

Demonstração.

Afirmção 1. $D \subset D(A)$.

Dado $u \in D$, basta provar que $\sqrt{k}u_x \in L^2(I)$.

Como $ku_x \in H^1(I)$, $u_x(1) = 0$ e $k > 0$ em $(x_0, 1)$, temos, para $x > x_0$,

$$\int_x^1 (ku_x)_y u dy = (ku_x u)|_x^1 - \int_x^1 ku_y^2 dy = -(ku_x u)(x) - \int_x^1 ku_y^2 dy.$$

Ou seja,

$$(ku_x u)(x) = - \int_x^1 (ku_x)_y u dy - \int_x^1 ku_y^2 dy. \quad (3.8)$$

Como $u \in D$, segue que $(ku_x)_x u \in L^1(I)$ e, portanto, existe $L \in [-\infty, \infty)$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} (ku_x u)(x) = L. \quad (3.9)$$

Afirmção 1.1. $L = 0$.

Suponha que $L \neq 0$. Então, existem $d, \delta > 0$ tais que

$$|(ku_x u)(x)| \geq d, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Segue de (3.7) que

$$|u(x)| \geq \frac{d}{|(ku_x)(x)|} \geq \frac{d_1}{\sqrt{|x - x_0|}}, \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

onde $d_1 = \frac{d}{\|(ku_x)_x\|_{L^2(I)}}$.

Deste modo, temos

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \geq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{d_1^2}{|x - x_0|} dx$$

e segue do Lema 3.3 que $u \notin L^2(I)$. Absurdo. Portanto, $L = 0$, confirmando a Afirmação 1.1.

Segue de (3.8), (3.9) e da Afirmação 1.1 que

$$\int_{x_0}^1 (ku_x)_x u dx = - \int_{x_0}^1 ku_x^2 dx. \quad (3.10)$$

Fazendo o mesmo procedimento para $x < x_0$ e utilizando o fato de que $u_x(0) = 0$ (nesse caso, $L \in (-\infty, \infty]$), temos

$$\int_0^{x_0} (ku_x)_x u dx = - \int_0^{x_0} ku_x^2 dx. \quad (3.11)$$

De (3.10) e (3.11), segue que

$$\int_0^1 (ku_x)_x u dx = - \int_0^1 ku_x^2 dx.$$

Como $(ku_x)_x u \in L^1(I)$, temos $ku_x^2 \in L^1(I)$ e, conseqüentemente, $\sqrt{k}u_x \in L^2(I)$.

Com isso, provamos que $D \subset D(A)$, confirmando a Afirmação 1.

Afirmação 2. $D(A) \subset D$.

Seja $u \in D(A)$, precisamos provar que $ku \in H^1(I)$ e $(ku_x)(x_0) = 0$.

Note que $ku \in L^2(I)$ e $(ku)_x = k'u + ku_x \in L^2(I)$. Portanto, $ku \in H^1(I)$. Resta provar apenas que $(ku_x)(x_0) = 0$.

Com efeito, como $ku_x \in H^1(I)$, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (ku_x)(x) = L.$$

Se $L \neq 0$, existem $d, \delta > 0$ tais que

$$|(ku_x)(x)| \geq d, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Em particular,

$$|(ku_x)(x)| \geq d, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad x \neq x_0$$

e, portanto,

$$|(ku_x^2)(x)| \geq \frac{d^2}{k(x)}, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad x \neq x_0.$$

Logo,

$$\int_0^1 k u_x^2(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{d^2}{k(x)} dx$$

e do Lema 3.3, segue que $\sqrt{k}u_x \notin L^2(I)$. Absurdo. Portanto, $L = 0$ e, conseqüentemente,

$$(ku_x)(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (ku_x)(x) = 0,$$

encerrando a prova da Afirmação 2 e concluindo que $D(A) = D$. \square

Claramente, o Lema 3.3 foi crucial para obtermos os resultados anteriores referentes à caracterização dos espaços. No caso onde o problema é fracamente degenerado, não temos essa condição mas, também não é necessário utilizar caracterizações para os espaços além de suas definições usuais.

Por estarmos lidando com um espaço onde o peso k se anula em um ponto, é necessário provarmos a validade da integração por partes em $H_k^2(I) \times H_k^1(I)$ de modo a garantir os resultados feitos neste capítulo.

Lema 3.7 (Integração por partes). *Sejam $(u, v) \in H_k^2(I) \times H_k^1(I)$. Então,*

$$\int_0^1 (ku_x)_x v dx = (ku_x v)|_0^1 - \int_0^1 ku_x v_x dx.$$

Demonstração. Sejam $(u, v) \in H_k^2(I) \times H_k^1(I)$. Dado $\delta > 0$, do fato de $k > 0$ em $(0, x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta, 1)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ku_x)_x v dx &= \int_0^{x_0-\delta} (ku_x)_x v dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (ku_x)_x v dx + \int_{x_0+\delta}^1 (ku_x)_x v dx \\ &= (ku_x v)(x_0 - \delta) - (ku_x v)(0) - \int_0^{x_0-\delta} ku_x v_x dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (ku_x)_x v dx \\ &\quad + (ku_x v)(1) - (ku_x v)(x_0 + \delta) - \int_{x_0+\delta}^1 ku_x v_x dx. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ku_x)_x v dx &= (ku_x v)|_0^1 + (ku_x v)(x_0 - \delta) - \int_0^{x_0-\delta} ku_x v_x dx \\ &\quad + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (ku_x)_x v dx - (ku_x v)(x_0 + \delta) - \int_{x_0+\delta}^1 ku_x v_x dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para obtermos o desejado, precisamos provar os seguintes itens:

$$(i) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{x_0-\delta} ku_x v_x dx = \int_0^{x_0} ku_x v_x dx.$$

$$(ii) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{x_0+\delta}^1 ku_x v_x dx = \int_{x_0}^1 ku_x v_x dx.$$

$$(iii) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} (ku_x)_x v \, dx = 0.$$

$$(iv) \lim_{\delta \rightarrow 0} (ku_x v)(x_0 - \delta) = 0.$$

$$(v) \lim_{\delta \rightarrow 0} (ku_x v)(x_0 + \delta) = 0.$$

Para (i), sabemos que

$$\int_0^{x_0 - \delta} ku_x v_x \, dx = \int_0^{x_0} ku_x v_x \, dx - \int_{x_0 - \delta}^{x_0} ku_x v_x \, dx. \quad (3.13)$$

Como $ku_x v_x \in L^1(I)$, da continuidade absoluta da integral aplicada no último termo de (3.13), segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left| \int_{x_0 - \delta_1}^{x_0} ku_x v_x \, dx \right| \leq \int_{x_0 - \delta_1}^{x_0} |ku_x v_x| \, dx < \varepsilon.$$

O mesmo ocorre para a integral do item (iii), uma vez que $(ku_x)_x v \in L^1(I)$. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\left| \int_{x_0 - \delta_2}^{x_0 + \delta_2} (ku_x)_x v \, dx \right| \leq \int_{x_0 - \delta_2}^{x_0 + \delta_2} |(ku_x)_x v| \, dx < \varepsilon.$$

Tomando $\delta > 0$ de (3.12) menor que $\min\{\delta_1, \delta_2\}$, seguem os itens (i) e (iii). O item (ii) é análogo ao item (i). Para encerrarmos a prova, resta apenas os itens (iv) e (v). Provaremos (iv), uma vez que (v) é análogo.

Para (iv), temos

$$(ku_x v)(x_0 - \delta) = \int_0^{x_0 - \delta} (ku_x v)_x \, dx - (ku_x v)(0).$$

Como $(ku_x v)_x \in L^1(I)$ e $(ku_x v)(0) \in \mathbb{R}$, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (ku_x v)(x_0 - \delta) = L.$$

Se $L \neq 0$, então existem $d, \eta > 0$ tais que

$$|(ku_x v)(x)| \geq d, \quad \forall x \in (x_0 - \eta, x_0).$$

De (3.7), existe $d_1 > 0$ tal que

$$|v(x)| \geq \frac{d}{(ku_x)(x)} \geq \frac{d_1}{\sqrt{|x - x_0|}}, \quad \forall x \in (x_0 - \eta, x_0).$$

Logo,

$$\int_0^1 |v(x)|^2 \, dx \geq \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} \frac{d_1^2}{|x - x_0|} \, dx.$$

Segue do Lema 3.3 que $v \notin L^2(I)$. Absurdo. Portanto, $L = 0$.

Do mesmo modo, obtemos $\lim_{\delta \rightarrow 0} (ku_x v)(x_0 + \delta) = 0$. Portanto, os itens (i), (ii), (iii), (iv) e (v) estão provados e o resultado segue. \square

Observe que, em particular, para $(u, v) \in D(A) \times H_k^1(I) \subset H_k^2(I) \times H_k^1(I)$, temos

$$\int_0^1 (ku_x)_x v \, dx = - \int_0^1 ku_x v_x \, dx.$$

Através dos resultados anteriores e da teoria de Semigrupos (vide, por exemplo, [3, 14]), o operador elíptico degenerado A gera o seguinte semigrupo.

Teorema 3.8. *O operador $A : D(A) \rightarrow L^2(I)$, definido em (3.5), é autoadjunto, não positivo em $L^2(I)$ e gera um semigrupo analítico de ângulo $\frac{\pi}{2}$ e de contração.*

Demonstração. Note que $D(A)$ é denso em $L^2(I)$, em vista das Afirmações 2 e 3 provadas a seguir. Para provarmos que A é um operador autoadjunto e não positivo, basta provar que A é simétrico, não positivo e o operador $(Id - A)$ é sobrejetor, onde Id denota o operador identidade.

Afirmação 1. A simétrico.

Dados $u, v \in D(A)$, segue do Lema 3.7 que

$$\langle v, Au \rangle_{L^2(I)} = \int_0^1 v(ku_x)_x \, dx = - \int_0^1 ku_x v_x \, dx = \int_0^1 (kv_x)_x u \, dx = \langle Av, u \rangle_{L^2(I)}.$$

Afirmação 2. A não positivo.

Dado $u \in D(A)$, do Lema 3.7, temos

$$\langle Au, u \rangle_{L^2(I)} = \int_0^1 (ku_x)_x u \, dx = - \int_0^1 ku_x^2 \, dx \leq 0.$$

Afirmação 3. $(Id - A)(D(A)) = L^2(I)$.

Seja $f \in L^2(I)$. Precisamos encontrar $u \in D(A)$ tal que $(Id - A)u = f$.

Sabemos que $H_k^1(I)$ é um espaço de Hilbert com a norma induzida pelo produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_k^1(I)} = \int_0^1 (uv + ku_x v_x) \, dx, \quad \forall u, v \in H_k^1(I).$$

Seja $F : H_k^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(v) = \int_0^1 f v \, dx, \quad \forall v \in H_k^1(I).$$

É evidente que $F \in (H_k^1(I))^*$, onde $(H_k^1(I))^*$ denota o dual de $H_k^1(I)$. Pelo Teorema de Representação de Riesz-Fréchet, existe um único $u \in H_k^1(I)$ tal que

$$\int_0^1 f v \, dx = F(v) = \langle u, v \rangle_{H_k^1(I)} = \int_0^1 [uv + ku_x v_x] \, dx, \quad \forall v \in H_k^1(I). \quad (3.14)$$

Como $C_c^\infty(I) \subset H_k^1(I)$, a igualdade (3.14) é válida para $v \in C_c^\infty(I)$, ou seja,

$$\int_0^1 ku_x v_x \, dx = \int_0^1 (f - u)v \, dx, \quad \forall v \in C_c^\infty(I). \quad (3.15)$$

Provemos que $u \in D(A)$, isto é, $u \in H_k^2(I)$ e $u_x(0) = u_x(1) = 0$. A igualdade (3.15) mostra que a derivada distribucional de ku_x existe e é uma função em $L^2(I)$. Portanto, $ku_x \in H^1(I)$ e, conseqüentemente, $u \in H_k^2(I)$, uma vez que $u \in H_k^1(I)$.

Pela definição de derivada distribucional, segue que

$$\int_0^1 (ku_x)_x v \, dx = - \int_0^1 ku_x v_x \, dx, \quad \forall v \in C_c^\infty(I). \quad (3.16)$$

De (3.15) e (3.16), temos

$$\int_0^1 (ku_x)_x v \, dx = \int_0^1 (u - f)v \, dx, \quad \forall v \in C_c^\infty(I)$$

e, conseqüentemente,

$$(ku_x)_x = (u - f) \text{ qtp em } (0, 1). \quad (3.17)$$

Se provarmos que $u_x(0) = u_x(1) = 0$, então $u \in D(A)$ e de (3.17), teremos $(Id - A)u = f$. Com efeito, segue do Lema 3.7 e de (3.14) que

$$\begin{aligned} \int_0^1 (ku_x)_x v \, dx &= ku_x v \Big|_0^1 - \int_0^1 ku_x v_x \, dx \\ &= ku_x v \Big|_0^1 - \int_0^1 (f - u)v \, dx, \quad \forall v \in H_k^1(I). \end{aligned} \quad (3.18)$$

De (3.17) e (3.18), temos

$$ku_x v \Big|_0^1 = 0, \quad \forall v \in H_k^1(I).$$

Desde que $k(0)$ e $k(1)$ são não nulos e $v(0)$ e $v(1)$ são arbitrários, concluímos que $u_x(0) = u_x(1) = 0$.

Logo, $u \in D(A)$ e $(Id - A)u = f$. Ou seja, o operador $(Id - A)$ é sobrejetor, comprovando a Afirmação 3.

Segue das Afirmações 1, 2 e 3 que o operador A é autoadjunto e não positivo.

Como A é um operador autoadjunto e não positivo em um espaço de Hilbert, concluímos que A gera um semigrupo analítico de ângulo $\frac{\pi}{2}$ e de contração. \square

O fato de A gerar um semigrupo analítico e de contração irá garantir a existência de solução fraca para um problema associado a (3.1) que auxiliará na prova da existência da solução $u(t, \cdot; u^0)$, para $t > 0$, na Seção 3.2. Além dos resultados obtidos até o momento, serão necessários resultados que envolvam a compacidade de inclusões contínuas. Apesar de estarmos trabalhando com espaços distintos dos espaços de Sobolev, $H^1(I)$ e $H^2(I)$, as relações de compacidade se mantêm, isto é,

$$H_k^2(I) \hookrightarrow H_k^1(I) \hookrightarrow L^2(I). \quad (3.19)$$

Começaremos provando a segunda inclusão de (3.19) e através dela, iremos obter a primeira. Como o ponto que anula a função k pertence ao interior do intervalo, não foi possível provar essa

inclusão compacta diretamente em I . Para essa prova foi necessário decompor o intervalo I em $(0, x_0)$ e $(x_0, 1)$, provarmos as inclusões compactas referentes a esses subintervalos e por fim, utilizando outros resultados, obter a compacidade da inclusão referente ao intervalo I .

Para iniciarmos as provas da compacidade das inclusões, precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.9. *Seja $c \in [1, 2)$, a constante da hipótese (h_3) , tal que $(x - x_0)k' \leq ck$ qtp em $[0, 1]$. Então, existe uma constante $\tilde{c} > 0$ tal que*

$$\frac{|x - x_0|^c}{k(x)} \leq \tilde{c} \text{ qtp em } [0, 1].$$

Demonstração. Dividiremos esta prova em dois intervalos, $[0, x_0)$ e $(x_0, 1]$.

Sejam $g : [0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : (x_0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas por

$$g(x) = \frac{(x_0 - x)^c}{k(x)}, \quad \forall x \in [0, x_0) \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{(x - x_0)^c}{k(x)}, \quad \forall x \in (x_0, 1].$$

Se mostrarmos que g é decrescente e h é crescente, então as funções serão limitadas superiormente por $g(0)$ e $h(1)$ qtp, respectivamente. Façamos isto.

Derivando g e h , temos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-c(x_0 - x)^{c-1}k(x) - (x_0 - x)^c k'(x)}{k^2(x)} \\ &= \frac{(x_0 - x)^{c-1}}{k^2(x)} \left[-ck(x) + (x - x_0)k'(x) \right] \leq 0 \text{ qtp em } (0, x_0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

e

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{c(x - x_0)^{c-1}k(x) - (x - x_0)^c k'(x)}{k^2(x)} \\ &= \frac{(x - x_0)^{c-1}}{k^2(x)} \left[ck(x) - (x - x_0)k'(x) \right] \geq 0 \text{ qtp em } (x_0, 1). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Segue de (3.20) e (3.21) que g e h são funções decrescente e crescente, respectivamente.

Logo,

$$g(x) \leq \frac{x_0^c}{k(0)} \text{ qtp em } [0, x_0) \quad \text{e} \quad h(x) \leq \frac{(1 - x_0)^c}{k(1)} \text{ qtp em } (x_0, 1].$$

Consequentemente,

$$\frac{|x - x_0|^c}{k(x)} \leq \tilde{c} := \max \left\{ \frac{x_0^c}{k(0)}, \frac{(1 - x_0)^c}{k(1)} \right\} \text{ qtp em } [0, 1].$$

□

Através do Lema 3.9, podemos provar as inclusões compactas seguintes.

Teorema 3.10. *As inclusões $H_k^1(0, x_0) \subset L^2(0, x_0)$ e $H_k^1(x_0, 1) \subset L^2(x_0, 1)$ são compactas.*

Demonstração. Provaremos a compacidade da inclusão $H_k^1(0, x_0) \subset L^2(0, x_0)$, usando o critério de compacidade descrito no Corolário A.5. A outra inclusão segue de modo análogo.

É evidente que a inclusão $H_k^1(0, x_0) \subset L^2(0, x_0)$ é contínua. Dado $M > 0$, seja

$$\mathcal{F}_{H_k^1} = \left\{ u \in H_k^1(0, x_0) : \|u\|_{H_k^1(0, x_0)}^2 \leq M \right\}.$$

Para provarmos que a inclusão é compacta, devemos mostrar que

$$\mathcal{F}_{L^2} = \left\{ u \in L^2(0, x_0) : u \in \mathcal{F}_{H_k^1} \right\}$$

possui fecho compacto em $L^2(0, x_0)$. A fim de utilizar o Corolário A.5, provaremos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $u \in \mathcal{F}_{L^2}$ e $|h| < \delta$, temos

$$\int_{\delta}^{x_0 - \delta} |u(x+h) - u(x)|^2 dx < \varepsilon \quad (3.22)$$

e

$$\int_0^{\delta} |u(x)|^2 dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0} |u(x)|^2 dx < \varepsilon. \quad (3.23)$$

De fato, seja $u \in \mathcal{F}_{L^2}$, consequentemente, $\|u\|_{H_k^1(0, x_0)}^2 \leq M$. Dado $\varepsilon > 0$, inicialmente tome $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \eta(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{k(0)^2 \varepsilon}{18M \|k'\|_{L^\infty(I)}^2}, \frac{k(0)^2 \varepsilon}{18M \|k\|_{L^\infty(I)}} \right\}. \quad (3.24)$$

Para $x < x_0$, temos

$$|u(x)| = \left| u(0) - \int_0^x u_y(y) dy \right| \leq |u(0)| + \int_0^x |u_y(y)| dy. \quad (3.25)$$

A fim de limitar $u(x)$, limitaremos cada termo do lado direito de (3.25). Primeiro, vejamos a integral. Segue da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \int_0^x |u_y(y)| dy &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{k(y)}} \left| \sqrt{k(y)} u_y(y) \right| dy \\ &\leq \|\sqrt{k} u_y\|_{L^2(0, x_0)} \left[\int_0^x \frac{1}{k(y)} dy \right]^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{H_k^1(0, x_0)} \left[\int_0^x \frac{1}{k(y)} dy \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Para a limitação de $|u(0)|$, usaremos a Desigualdade de Hölder e $(ku)(x_0) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} |u(0)| &= \frac{1}{k(0)} \left| \int_0^{x_0} (ku)_y dy \right| \leq \frac{1}{k(0)} \left[\int_0^{x_0} |k'u| dy + \int_0^{x_0} |ku_y| dy \right] \\ &\leq \frac{1}{k(0)} \left(\|k'\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^2(0, x_0)} + \|ku_y\|_{L^2(0, x_0)} \right) \\ &\leq \frac{1}{k(0)} \left(\|k'\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{H_k^1(0, x_0)} + \|k\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}} \|\sqrt{k} u_y\|_{L^2(0, x_0)} \right) \\ &\leq \frac{\|u\|_{H_k^1(0, x_0)}}{k(0)} \left(\|k'\|_{L^\infty(I)} + \|k\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para $x < x_0$, de (3.25), (3.26) e (3.27), temos

$$\begin{aligned}
|u(x)|^2 &\leq \|u\|_{H_k^1(0,x_0)}^2 \left[\frac{\|k'\|_{L^\infty(I)}}{k(0)} + \frac{\|k\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}}}{k(0)} + \left(\int_0^x \frac{1}{k(y)} dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
&\leq M \left[3 \max \left\{ \frac{\|k'\|_{L^\infty(I)}}{k(0)}, \frac{\|k\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}}}{k(0)}, \left(\int_0^x \frac{1}{k(y)} dy \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right]^2 \\
&\leq 9M \max \left\{ \frac{\|k'\|_{L^\infty(I)}^2}{k(0)^2}, \frac{\|k\|_{L^\infty(I)}}{k(0)^2}, \int_0^x \frac{1}{k(y)} dy \right\} \\
&= \max \left\{ \frac{9M\|k'\|_{L^\infty(I)}^2}{k(0)^2}, \frac{9M\|k\|_{L^\infty(I)}}{k(0)^2}, \int_0^x \frac{9M}{k(y)} dy \right\}. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Se limitarmos a integral dos três termos do máximo em (3.28) nos intervalos $(0, \delta)$ e $(x_0 - \delta, x_0)$ por $\varepsilon/2$, obtemos (3.23).

Em $(0, \delta)$, de (3.24), temos

$$\int_0^\delta \frac{9M\|k'\|_{L^\infty(I)}^2}{k(0)^2} dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad \int_0^\delta \frac{9M\|k\|_{L^\infty(I)}}{k(0)^2} dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.29}$$

Para o último termo do máximo em (3.28), segue do Lema 3.9 que

$$\begin{aligned}
9M \int_0^\delta \int_0^x \frac{1}{k(y)} dy dx &= 9M \int_0^\delta \int_0^x \frac{(x_0 - y)^c}{k(y)} \frac{1}{(x_0 - y)^c} dy dx \\
&\leq 9M\tilde{c} \int_0^\delta \int_0^x \frac{1}{(x_0 - y)^c} dy dx, \tag{3.30}
\end{aligned}$$

onde $c \in [1, 2)$ tal que $(y - x_0)k' \leq ck$ qtp em $[0, 1]$.

De (3.30), temos

$$\int_0^\delta 9M \int_0^x \frac{1}{k(y)} dy dx \leq g_1(\delta) := \begin{cases} 9M\tilde{c} \left[(x_0 - \delta) \ln \left(\frac{x_0 - \delta}{x_0} \right) + \delta \right], & \text{se } c = 1 \\ \frac{9M\tilde{c}}{c-1} \left[\frac{(x_0 - \delta)^{2-c} - x_0^{2-c}}{c-2} - \delta x_0^{1-c} \right], & \text{se } c > 1. \end{cases} \tag{3.31}$$

Como $\lim_{\delta \rightarrow 0} g_1(\delta) = 0$, segue que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1(\varepsilon) > 0 : g_1(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para } 0 < \delta < \eta_1(\varepsilon). \tag{3.32}$$

De (3.28), (3.29), (3.31) e (3.32), obtemos

$$\int_0^\delta |u(x)|^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para } \delta < \bar{\eta}(\varepsilon) := \min\{\eta(\varepsilon), \eta_1(\varepsilon)\}, \tag{3.33}$$

onde $\eta(\varepsilon)$ e $\eta_1(\varepsilon)$ estão definidos em (3.24) e (3.32), respectivamente.

No caso da integração de $|u(x)|^2$ em $(x_0 - \delta, x_0)$, utilizando (3.24) e (3.28), temos

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{9M \|k'\|_{L^\infty(I)}^2}{k(0)^2} dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad e \quad \int_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{9M \|k\|_{L^\infty(I)}}{k(0)^2} dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.34)$$

No último termo do máximo de (3.28), através do Lema 3.9, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{x_0-\delta}^{x_0} 9M \int_0^x \frac{1}{k(y)} dy dx &= 9M \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_0^x \frac{(x_0 - y)^c}{k(y)} \frac{1}{(x_0 - y)^c} dy dx \\ &\leq 9M\tilde{c} \int_{x_0-\delta}^{x_0} \int_0^x \frac{1}{(x_0 - y)^c} dy dx. \end{aligned} \quad (3.35)$$

De (3.35), temos

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} 9M \int_0^x \frac{1}{k(y)} dy dx \leq g_2(\delta) := \begin{cases} 9M\tilde{c} \left[\delta \ln \left(\frac{x_0}{\delta} \right) + \delta \right], & \text{se } c = 1 \\ \frac{9M\tilde{c}}{c-1} \left[-\frac{\delta^{2-c}}{c-2} - x_0^{1-c} \delta \right], & \text{se } c > 1. \end{cases} \quad (3.36)$$

Como $\lim_{\delta \rightarrow 0} g_2(\delta) = 0$, segue que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2(\varepsilon) > 0 : g_2(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para } 0 < \delta < \eta_2(\varepsilon). \quad (3.37)$$

De (3.28), (3.34), (3.36) e (3.37), obtemos

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} |u(x)|^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para } \delta < \tilde{\eta}(\varepsilon) := \min\{\eta(\varepsilon), \eta_2(\varepsilon)\}, \quad (3.38)$$

onde $\eta(\varepsilon)$ e $\eta_2(\varepsilon)$ estão definidos em (3.24) e (3.37), respectivamente.

Portanto, para $\delta < \min\{\bar{\eta}(\varepsilon), \tilde{\eta}(\varepsilon)\}$, com $\bar{\eta}(\varepsilon)$ e $\tilde{\eta}(\varepsilon)$ definidos em (3.33) e (3.38), obtemos (3.23).

Provemos agora, a desigualdade (3.22). Seja $|h| < \delta$. Assuma $h > 0$, pois para $h < 0$ o resultado é análogo. Da Desigualdade de Hölder e cálculo direto, obtemos

$$|u(x+h) - u(x)|^2 = \left| \int_x^{x+h} u_y(y) dy \right|^2 \leq M \int_x^{x+h} \frac{1}{k(y)} dy \leq M \int_x^{x+\delta} \frac{1}{k(y)} dy.$$

Do Lema 3.9, temos

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{x_0-\delta} |u(x+h) - u(x)|^2 dx &\leq M \int_{\delta}^{x_0-\delta} \int_x^{x+\delta} \frac{1}{k(y)} dy dx \\ &\leq M\tilde{c} \int_{\delta}^{x_0-\delta} \int_x^{x+\delta} \frac{1}{(x_0 - y)^c} dy dx \leq g_3(\delta), \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde

$$g_3(\delta) := \begin{cases} M\tilde{c} \left[\delta \ln \left(\frac{x_0 - 2\delta}{\delta} \right) + (\delta - x_0) \ln \left(\frac{x_0 - 2\delta}{x_0 - \delta} \right) \right], & \text{se } c = 1 \\ \frac{M\tilde{c} [-\delta^{2-c} - (x_0 - 2\delta)^{2-c} + (x_0 - \delta)^{2-c}]}{(c-1)(c-2)}, & \text{se } c > 1. \end{cases} \quad (3.40)$$

Como $\lim_{\delta \rightarrow 0} g_3(\delta) = 0$, segue que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_3(\varepsilon) > 0 : g_3(\delta) < \varepsilon, \quad \text{para } 0 < \delta < \eta_3(\varepsilon). \quad (3.41)$$

De (3.39), (3.40) e (3.41), dado $0 < h < \delta$, temos

$$\int_{\delta}^{x_0 - \delta} |u(x+h) - u(x)|^2 dx < \varepsilon, \quad \text{para } \delta < \eta_3(\varepsilon),$$

onde $\eta_3(\varepsilon)$ está definido em (3.41).

Logo, para $\delta < \min\{\bar{\eta}(\varepsilon), \tilde{\eta}(\varepsilon), \eta_3(\varepsilon)\}$, as desigualdades (3.22) e (3.23) ocorrem, onde $\bar{\eta}(\varepsilon)$, $\tilde{\eta}(\varepsilon)$ e $\eta_3(\varepsilon)$ estão definidos em (3.33), (3.38) e (3.41), respectivamente. Como dito anteriormente, a compacidade segue do Corolário A.5.

Recordamos que a prova da compacidade da inclusão $H_k^1(x_0, 1) \subset L^2(x_0, 1)$ segue de modo análogo, utilizando $(x_0 + \delta, 1 - \delta)$ em (3.22), $(x_0, x_0 + \delta)$ e $(1 - \delta, 1)$ em (3.23), $k(1)$ em (3.24) e $u(1)$ em (3.25). \square

O Teorema 3.10 é uma adaptação de [1, Teorema 6.1] e as inclusões compactas obtidas através dele, garantem a compacidade da inclusão $H_k^1(I) \subset L^2(I)$. Para provarmos esse fato, precisaremos dos seguintes lemas auxiliares.

Lema 3.11. *Sejam $J \subseteq I$ um subintervalo, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_k^1(J)$ e $u \in H_k^1(J)$. Então,*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_k^1(J) \iff \begin{cases} u_n \rightharpoonup u \\ \sqrt{k}(u_n)_x \rightharpoonup \sqrt{k}u_x \end{cases} \text{ em } L^2(J).$$

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam $i, j : H_k^1(J) \rightarrow L^2(J)$ operadores lineares contínuos definidos por

$$i(v) = v \quad \text{e} \quad j(v) = \sqrt{k}v_x, \quad \forall v \in H_k^1(J).$$

Como operadores lineares contínuos preservam convergência fraca, obtemos

$$u_n = i(u_n) \rightharpoonup i(u) = u \quad \text{e} \quad \sqrt{k}(u_n)_x = j(u_n) \rightharpoonup j(u) = \sqrt{k}u_x \quad \text{em } L^2(J).$$

(\Leftarrow) Seja $g \in H_k^1(J)$, então $g, \sqrt{k}g_x \in L^2(J)$. Segue das convergências fracas que

$$\int_J gu_n dx \rightarrow \int_J gu dx \quad \text{e} \quad \int_J kg_x(u_n)_x dx \rightarrow \int_J kg_x u_x dx.$$

Portanto,

$$\int_J [gu_n + kg_x(u_n)_x] dx \rightarrow \int_J [gu + kg_x u_x] dx,$$

ou seja, $u_n \rightharpoonup u$ em $H_k^1(J)$. \square

Lema 3.12. *Se $u_n \rightharpoonup u$ em $H_k^1(I)$, então $u_n \rightharpoonup u$ em $H_k^1(0, x_0)$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $H_k^1(x_0, 1)$.*

Demonstração. A prova será feita apenas para $H_k^1(0, x_0)$, já que o resultado para o subintervalo $(x_0, 1)$ é análogo.

A fim de utilizar o lema anterior, iremos provar que $u_n \rightharpoonup u$ e $\sqrt{k}(u_n)_x \rightharpoonup \sqrt{k}u_x$ em $L^2(0, x_0)$. Vejamos.

Dados $g, h \in L^2(0, x_0)$, sejam $\tilde{g}, \tilde{h} : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções definidas por

$$\tilde{g} = \begin{cases} g, & \text{em } (0, x_0) \\ 0, & \text{em } [x_0, 1) \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{h} = \begin{cases} h, & \text{em } (0, x_0) \\ 0, & \text{em } [x_0, 1). \end{cases}$$

Claramente, $\tilde{g}, \tilde{h} \in L^2(I)$. Segue da convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ em $H_k^1(I)$ e do Lema 3.11 que

$$\int_0^{x_0} u_n g \, dx = \int_0^1 u_n \tilde{g} \, dx \rightarrow \int_0^1 u \tilde{g} \, dx = \int_0^{x_0} u g \, dx \quad (3.42)$$

e

$$\int_0^{x_0} \sqrt{k}(u_n)_x h \, dx = \int_0^1 \sqrt{k}(u_n)_x \tilde{h} \, dx \rightarrow \int_0^1 \sqrt{k}u_x \tilde{h} \, dx = \int_0^{x_0} \sqrt{k}u_x h \, dx. \quad (3.43)$$

De (3.42), (3.43) e do Lema 3.11, obtemos $u_n \rightharpoonup u$ em $H_k^1(0, x_0)$. \square

Com os três resultados anteriores, obtemos a compacidade da inclusão de $H_k^1(I)$ em $L^2(I)$.

Teorema 3.13 (Imersão compacta). *A inclusão $H_k^1(I) \subset L^2(I)$ é compacta.*

Demonstração. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_k^1(I)$ uma sequência limitada. Mostremos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(I)$ possui uma subsequência convergente. De fato, segue da limitação de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e da reflexividade de $H_k^1(I)$ que

$$\exists u \in H_k^1(I) : u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_k^1(I), \quad (3.44)$$

a menos de uma subsequência, que será mantida com a mesma notação.

De (3.44), do Lema 3.12 e do Teorema 3.10, temos

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^2(0, x_0), \quad (3.45)$$

para uma subsequência, se necessário.

Note que, a subsequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtida em (3.45) satisfaz (3.44). Novamente, de (3.44), do Lema 3.12 e do Teorema 3.10, obtemos

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^2(x_0, 1), \quad (3.46)$$

se necessário, passando a uma subsequência.

Claramente, a subsequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtida em (3.46) satisfaz (3.44) e (3.45). Com isso, temos

$$\|u_n - u\|_{L^2(I)}^2 = \|u_n - u\|_{L^2(0, x_0)}^2 + \|u_n - u\|_{L^2(x_0, 1)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ou seja, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(I)$ possui uma subsequência convergente. \square

Essa compacidade é parte fundamental para a prova da existência de solução, para todo $t > 0$, do problema (3.1). Além disso, futuramente, através dela, poderemos garantir que o primeiro autovalor do problema linearizado de (3.1) é atingido.

Com este resultado, garantimos a compacidade da inclusão $H_k^2(I) \subset H_k^1(I)$.

Teorema 3.14 (Imersão Compacta). *A inclusão $H_k^2(I) \subset H_k^1(I)$ é compacta.*

Demonstração. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_k^2(I)$ uma sequência limitada, provemos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_k^1(I)$ possui subsequência convergente.

Como $H_k^2(I)$ é reflexivo, existem $u \in H_k^2(I)$ e uma subsequência de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, manteremos a mesma notação, tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_k^2(I) \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.47)$$

Da inclusão contínua $H_k^2(I) \hookrightarrow H_k^1(I)$, temos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_k^1(I).$$

Do Teorema 3.13, passando a uma subsequência, se necessário, a menos de notação, obtemos

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^2(I). \quad (3.48)$$

Para obtermos $u_n \rightarrow u$ em $H_k^1(I)$, basta mostrar que $\|\sqrt{k}(u_n - u)_x\|_{L^2(I)} \rightarrow 0$. Com efeito, da integração por partes (Lema 3.7), temos

$$\begin{aligned} \|\sqrt{k}(u_n - u)_x\|_{L^2(I)}^2 &= \int_0^1 k(u_n - u)_x^2 dx = \int_0^1 [k(u_n - u)_x] (u_n - u)_x dx \\ &= k(u_n - u)_x(u_n - u)|_0^1 - \int_0^1 (k(u_n - u)_x)_x (u_n - u) dx. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Se provarmos que os dois termos do lado direito de (3.49) tendem ao zero quando $n \rightarrow \infty$, provamos o resultado.

Afirmção 1. $\int_0^1 (k(u_n - u)_x)_x (u_n - u) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Note que $\left((k(u_n - u)_x)_x \right)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(I)$. Segue da definição da norma de $H_k^2(I)$ e de (3.47) que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(k(u_n - u)_x)_x\|_{L^2(I)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n - u\|_{H_k^2(I)} < \infty. \quad (3.50)$$

Da Desigualdade de Hölder, de (3.50) e (3.48), temos

$$\left| \int_0^1 (k(u_n - u)_x)_x (u_n - u) dx \right| \leq \|(k(u_n - u)_x)_x\|_{L^2(I)} \|u_n - u\|_{L^2(I)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

comprovando a Afirmção 1.

Afirmção 2. $k(u_n - u)_x(u_n - u)|_0^1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Para provarmos essa afirmação, mostraremos que a sequência $\left(k(u_n - u)_x|_0^1\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e a sequência $\left((u_n - u)|_0^1\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero.

Segue do Lema 3.11 que

$$\int_0^1 \sqrt{k}(u_n)_x w \, dx \longrightarrow \int_0^1 \sqrt{k}u_x w \, dx, \quad \forall w \in L^2(I). \quad (3.51)$$

Para $v \in H_k^1(I)$, temos $\sqrt{k}v_x \in L^2(I)$. Tomando $w = \sqrt{k}v_x$ em (3.51), obtemos

$$\int_0^1 k(u_n)_x v_x \, dx \longrightarrow \int_0^1 k u_x v_x \, dx, \quad \forall v \in H_k^1(I).$$

Em particular,

$$\int_0^1 k(u_n - u)_x v_x \, dx \longrightarrow 0, \quad \forall v \in H_k^2(I)$$

e, conseqüentemente,

$$k v_x (u_n - u)|_0^1 - \int_0^1 (k v_x)_x (u_n - u) \, dx = \int_0^1 k(u_n - u)_x v_x \, dx \longrightarrow 0, \quad \forall v \in H_k^2(I). \quad (3.52)$$

Para cada $v \in H_k^2(I)$ fixo, segue da Desigualdade de Hölder, de $(k v_x)_x \in L^2(I)$ e de (3.48) que

$$\left| \int_0^1 (k v_x)_x (u_n - u) \, dx \right| \leq \int_0^1 |(k v_x)_x (u_n - u)| \, dx \leq \|(k v_x)_x\|_{L^2(I)} \|u_n - u\|_{L^2(I)} \rightarrow 0. \quad (3.53)$$

De (3.52) e (3.53), temos

$$k v_x (u_n - u)|_0^1 \rightarrow 0, \quad \text{para cada } v \in H_k^2(I) \text{ fixo.}$$

Seja $v \in H_k^2(I)$ tal que $v_x(0) = k(0)^{-1}$ e $v_x(1) = k(1)^{-1}$. Como $k(0)$ e $k(1)$ são não nulos, segue que

$$(u_n - u)|_0^1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Agora, resta provar apenas que $\left(k(u_n - u)_x|_0^1\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em \mathbb{R} . Como $k(u_n - u)_x \in H^1(I)$, temos

$$\begin{aligned} \left| k(u_n - u)_x|_0^1 \right| &= \left| \int_0^1 (k(u_n - u)_x)_x \, dx \right| \leq \|(k(u_n - u)_x)_x\|_{L^1(I)} \\ &\leq \|(k(u_n - u)_x)_x\|_{L^2(I)} \leq \|u_n - u\|_{H_k^2(I)}. \end{aligned}$$

Devido a (3.47), temos $\|u_n - u\|_{H_k^2(I)} < \infty$ e, portanto,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| k(u_n - u)_x|_0^1 \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n - u\|_{H_k^2(I)} < \infty,$$

comprovando a Afirmação 2.

Das Afirmações 1 e 2, segue que $\|\sqrt{k}(u_n - u)_x\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0$, encerrando a prova. \square

Portanto, equivalentemente aos espaços de Sobolev, obtemos a cadeia de inclusões compactas

$$H_k^2(I) \hookrightarrow H_k^1(I) \hookrightarrow L^2(I).$$

Tal cadeia de inclusões será utilizada tanto na prova de existência de soluções $u(t, \cdot; u^0)$ de (2.1), para todo $t > 0$, quanto para garantir que o primeiro autovalor do problema linearizado associado a (2.1) será atingido.

3.2 Existência de soluções para o problema degenerado de Allen-Cahn

Com os resultados da seção anterior, baseado nos artigos [12, 33], iremos provar a existência de solução $u(t, \cdot; u^0)$, para todo $t > 0$, de

$$\begin{cases} u_t = (ku_x)_x + f(u) & \text{em } (0, \infty) \times I \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.54)$$

onde k e f satisfazem as hipóteses $(h_1) - (h_5)$.

Para isso, provaremos alguns resultados relevantes, além de utilizar resultados existentes, como por exemplo, existência e unicidade de solução fraca para um determinado problema.

Definição 3.15. Seja $u^0 \in L^2(I)$. Uma função u é dita *solução fraca* do problema (3.54) se

$$u \in C([0, T]; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^1(I))$$

e, para toda $\varphi \in H^1(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^1(I))$, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u(T, x)\varphi(T, x) dx - \int_0^1 u^0(x)\varphi(0, x) dx - \int_0^T \int_0^1 u(t, x)\varphi_t(t, x) dx dt \\ & = - \int_0^T \int_0^1 ku_x(t, x)\varphi_x(t, x) dx dt + \int_0^T \int_0^1 f(u(t, x))\varphi(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

Dado $g \in L^\infty((0, \infty) \times I)$, seja $B(t)$ um operador linear definido por

$$B(t)u = g(t, \cdot)u.$$

Através de algumas técnicas referentes à teoria de Semigrupos (veja, por exemplo, [12, 14]), o problema

$$\begin{cases} u_t(t, x) = (k(x)u_x(t, x))_x + g(t, x)u(t, x), & (t, x) \in (0, \infty) \times I \\ u(0, x) = u^0(x), & x \in I \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, & t \in (0, \infty) \end{cases} \quad (3.55)$$

está bem posto no sentido dessa teoria.

Fixado $T > 0$, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.16. *Sejam $u^0 \in L^2(I)$ e $g(\cdot, x) \in C^1(0, \infty)$, para todo $x \in [0, 1]$. Então (3.55), referente ao intervalo $(0, T)$, possui uma única solução fraca*

$$u \in C([0, T]; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^1(I))$$

e

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(I)}^2 + \int_0^T \|u(t)\|_{H_k^1(I)}^2 dt \leq c_T \|u^0\|_{L^2(I)}^2,$$

para alguma constante $c_T > 0$.

Além disso, se $u^0 \in D(A)$, então

$$u \in H^1(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^2(I)) \cap C([0, T]; H_k^1(I))$$

e existe uma constante $\lambda_T > 0$ tal que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H_k^1(I)}^2 + \int_0^T \left[\|u_t\|_{L^2(I)}^2 + \|(ku_x)_x\|_{L^2(I)}^2 \right] dt \leq \lambda_T \|u^0\|_{H_k^1(I)}^2.$$

Observação 3.17. Como $D(A)$ é denso em $H_k^1(I)$, o Teorema 3.16 é válido se $u^0 \in H_k^1(I)$.

A demonstração do resultado a seguir pode se encontrado em [21]. Utilizaremos o Teorema de Aubin-Lions para mostrar uma inclusão compacta que será utilizada no decorrer desta seção.

Teorema 3.18 (Teorema de Aubin-Lions). [21] *Sejam $X_0 \subset X_1 \subset X_2$ espaços de Banach tais que X_0 e X_2 são reflexivos e a inclusão $X_0 \subset X_1$ é compacta. Sejam $r_0, r_1 \in (1, \infty)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então,*

$$L^{r_0}(a, b; X_0) \cap W^{1, r_1}(a, b; X_2) \text{ está contido compactamente em } L^{r_0}(a, b; X_1).$$

Através do Teorema de Aubin-Lions, obtemos o resultado:

Lema 3.19. *A inclusão*

$$H^1(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^2(I)) \subset C([0, T]; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^1(I))$$

é compacta.

Demonstração. Utilizando o Teorema de Aubin com $r_0 = r_1 = 2$, $a = 0$, $b = T$, $X_0 = H_k^2(I)$, $X_1 = H_k^1(I)$ e $X_2 = L^2(I)$, temos

$$H^1(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^2(I)) \hookrightarrow L^2(0, T; H_k^1(I)). \quad (3.56)$$

Além disso, como

$$H^1(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^2(I)) \subset H^1(0, T; L^2(I))$$

e

$$H^1(0, T; L^2(I)) \hookrightarrow C([0, T]; L^2(I)),$$

temos

$$H^1(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^2(I)) \hookrightarrow C([0, T]; L^2(I)). \quad (3.57)$$

A inclusão compacta desejada segue de (3.56) e (3.57). \square

Munido de todos os resultados necessários, podemos provar a existência de solução $u(t, \cdot; u^0)$, para $t > 0$, do problema (3.54). Para isso, note que do fato de $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(0) = 0$, obtemos

$$f(u) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} f(\lambda u) d\lambda = u \int_0^1 f'(\lambda u) d\lambda, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Seja $X = C([0, T]; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^1(I))$, defina

$$g(t, x, u) := \int_0^1 f'(\lambda u(t, x)) d\lambda, \quad \forall (t, x, u) \in (0, \infty) \times I \times X. \quad (3.58)$$

Para $(t, x, u) \in (0, \infty) \times I \times X$, temos:

- $f(u(t, x)) = g(t, x, u)u(t, x)$.
- $|g(t, x, u)| \leq c_1$, onde c_1 é a constante mencionada em (h_5) .

Além disso, o resultado seguinte é válido.

Lema 3.20. *Se $v_n \rightarrow v$ em X , então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t, x, v_n) = g(t, x, v) \text{ qtp em } (0, T) \times I,$$

onde g está definida em (3.58).

Provemos agora, o resultado principal desta seção.

Teorema 3.21. *Se $u^0 \in H_k^1(I)$, então (3.54) possui solução*

$$u \in H^1(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^2(I)).$$

Demonstração. Sejam $X = C([0, T]; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^1(I))$ e

$$g^v(t, x) = g(t, x, v(t, x)), \quad \forall (t, x, v) \in (0, T) \times I \times X,$$

onde g está definida em (3.58).

Defina o operador $\Lambda : X \rightarrow X$ por

$$\Lambda(v) = u^v, \quad \forall v \in X,$$

onde u^v é a única solução fraca de

$$\begin{cases} u_t(t, x) = (k(x)u_x(t, x))_x + g^v(t, x)u(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times I \\ u(0, x) = u^0(x), & x \in I \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, & t \in (0, T). \end{cases} \quad (3.59)$$

O Teorema 3.16 garante a existência e a unicidade de u^v e, conseqüentemente, o operador Λ está bem definido. Para provarmos a existência de solução de (3.54), iremos mostrar que o operador Λ possui ponto fixo u^v , isto é, $\Lambda(u^v) = u^v$, que será solução de (3.54). Para tal, utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Então, é suficiente provar:

(i) $\Lambda : B_X \longrightarrow B_X$,

(ii) Λ é um operador compacto,

(iii) Λ é um operador contínuo,

onde

$$B_X = \{v \in X : \|v\|_X \leq r\},$$

com $r = c_T \|u^0\|_{L^2(I)}^2$ e

$$\|v\|_X = \sup_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{L^2(I)}^2 + \int_0^T \|v(t)\|_{H_k^1(I)}^2 dt.$$

Vejamos. Para o item (i), note que o Teorema 3.16 garante que $\Lambda(X) \subset B_X$ e, portanto, $\Lambda(B_X) \subset B_X$.

Para o item (ii), seja $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ limitada e defina

$$Y := H^1(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^2(I)).$$

Segue da Observação 3.17 que $(u^{v_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ e do Lema 3.19, a sequência $(u^{v_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ possui uma subsequência convergente e, portanto, Λ é um operador compacto.

Provemos agora, o item (iii). Para provarmos que Λ é um operador contínuo, dados $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ e $v \in X$ tais que $v_n \rightarrow v$ em X , mostremos que $\Lambda(v_n) \rightarrow \Lambda(v)$ em X .

Por definição, u^v e u^{v_n} , para todo $n \in \mathbb{N}$, são soluções fracas de (3.59) associados a v e v_n , respectivamente. Novamente, da Observação 3.17, temos $(u^{v_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ limitada e da reflexividade de Y , existe $\bar{u} \in Y$ tal que $u^{v_n} \rightharpoonup \bar{u}$ em Y e do Lema 3.19, passando a uma subsequência, se necessário,

$$u^{v_n} \rightarrow \bar{u} \text{ em } X. \quad (3.60)$$

Provemos que $\bar{u} = u^v$. Multiplicando a equação

$$u_t^{v_n} = (k u_x^{v_n})_x + g^{v_n}(t, x) u^{v_n}$$

por uma função teste $\varphi \in H^1(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_k^1(I))$, integrando em $(0, T) \times I$ e utilizando

$$u_x^{v_n}(t, 0) = u_x^{v_n}(t, 1) = 0,$$

temos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u^{v_n}(T, x) \varphi(T, x) dx - \int_0^1 u^0(x) \varphi(0, x) dx - \int_0^T \int_0^1 u^{v_n}(t, x) \varphi_t(t, x) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_0^1 k u_x^{v_n}(t, x) \varphi_x(t, x) dx dt + \int_0^T \int_0^1 g^{v_n}(t, x) u^{v_n}(t, x) \varphi(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

Afirmação 1. $\int_0^1 u^{v_n}(T, x) \varphi(T, x) dx \longrightarrow \int_0^1 \bar{u}(T, x) \varphi(T, x) dx.$

Como $u^{v_n} \rightarrow \bar{u}$ em X , temos $u^{v_n}(T) \rightarrow \bar{u}(T)$ em $L^2(I)$ e do fato de $\varphi \in H^1(0, T; L^2(I))$, obtemos $\varphi(T) \in L^2(I)$. Segue, da convergência fraca $u^{v_n}(T) \rightharpoonup \bar{u}(T)$ em $L^2(I)$ que

$$\int_0^1 u^{v_n}(T, x) \varphi(T, x) dx \longrightarrow \int_0^1 \bar{u}(T, x) \varphi(T, x) dx.$$

Afirmação 2. $\int_0^T \int_0^1 u^{v_n}(t, x) \varphi_t(t, x) dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_0^1 \bar{u}(t, x) \varphi_t(t, x) dx dt.$

Pela Desigualdade de Hölder, cálculo direto, de (3.60) e de $\varphi \in H^1(0, T; L^2(I))$, temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^1 \left(u^{v_n}(t, x) - \bar{u}(t, x) \right) \varphi_t(t, x) dx dt \right| \leq \int_0^T \|u^{v_n}(t) - \bar{u}(t)\|_{L^2(I)} \|\varphi_t(t)\|_{L^2(I)} dt \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]} \|u^{v_n}(t) - \bar{u}(t)\|_{L^2(I)} \int_0^T \|\varphi_t(t)\|_{L^2(I)} dt \leq \|u^{v_n} - \bar{u}\|_X^{\frac{1}{2}} \int_0^T \|\varphi_t(t)\|_{L^2(I)} dt \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Afirmação 3. $\int_0^T \int_0^1 k u_x^{v_n}(t, x) \varphi_x(t, x) dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_0^1 k \bar{u}_x(t, x) \varphi_x(t, x) dx dt.$

De (3.60), temos $\int_0^T \left\| \sqrt{k} u_x^{v_n}(t) - \sqrt{k} \bar{u}_x(t) \right\|_{L^2(I)}^2 dt \rightarrow 0$, então

$$\sqrt{k} u_x^{v_n} \rightarrow \sqrt{k} \bar{u}_x \text{ em } L^2((0, T) \times I).$$

Por outro lado, como $\varphi \in L^2(0, T; H_k^1(I))$, temos $\sqrt{k} \varphi_x \in L^2((0, T) \times I)$. Portanto, da convergência fraca $\sqrt{k} u_x^{v_n} \rightharpoonup \sqrt{k} \bar{u}_x$ em $L^2((0, T) \times I)$, segue que

$$\int_0^T \int_0^1 k u_x^{v_n}(t, x) \varphi_x(t, x) dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_0^1 k \bar{u}_x(t, x) \varphi_x(t, x) dx dt.$$

Afirmação 4. $\int_0^T \int_0^1 g^{v_n}(t, x) u^{v_n}(t, x) \varphi(t, x) dx dt \longrightarrow \int_0^T \int_0^1 g^v(t, x) \bar{u}(t, x) \varphi(t, x) dx dt.$

Temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^1 g^{v_n}(t, x) u^{v_n}(t, x) \varphi(t, x) - g^v(t, x) \bar{u}(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^T \int_0^1 [u^{v_n}(t, x) - \bar{u}(t, x)] g^{v_n}(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right| \\ & \quad + \left| \int_0^T \int_0^1 [g^{v_n}(t, x) - g^v(t, x)] \bar{u}(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right|. \end{aligned}$$

Se provarmos que cada parcela do lado direito da desigualdade tende a zero, provamos a Afirmação 4. Façamos isso.

$$\text{Afirmação 4.1. } \left| \int_0^T \int_0^1 [u^{v_n}(t, x) - \bar{u}(t, x)] g^{v_n}(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right| \longrightarrow 0.$$

Seja $c_1 > 0$ a constante da hipótese (h_5). Logo, da Desigualdade de Hölder e de (3.60), temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^1 [u^{v_n}(t, x) - \bar{u}(t, x)] g^{v_n}(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right| \\ & \leq c_1 \int_0^T \|u^{v_n}(t) - \bar{u}(t)\|_{L^2(I)} \|\varphi(t)\|_{L^2(I)} dt \leq c_1 \|u^{v_n} - \bar{u}\|_{X^{\frac{1}{2}}} \int_0^T \|\varphi(t)\|_{L^2(I)} dt \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\text{Afirmação 4.2. } \left| \int_0^T \int_0^1 [g^{v_n}(t, x) - g^v(t, x)] \bar{u}(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right| \longrightarrow 0.$$

Como $\bar{u} \in X$ e $\varphi \in L^2(0, T; H_k^1(I))$, temos $\bar{u}, \varphi \in L^2((0, T) \times I)$.

Da convergência $v_n \rightarrow v$ em X e do Lema 3.20, segue que

$$g^{v_n}(t, x) \rightarrow g^v(t, x) \text{ qtp em } (0, T) \times I.$$

Logo,

$$g^{v_n}(t, x) \bar{u}(t, x) \varphi(t, x) \rightarrow g^v(t, x) \bar{u}(t, x) \varphi(t, x) \text{ qtp em } (0, T) \times I. \quad (3.61)$$

Além disso,

$$|g^{v_n}(t, x) \bar{u}(t, x) \varphi(t, x)| \leq c_1 |\bar{u}(t, x) \varphi(t, x)| \in L^1((0, T) \times I) \text{ qtp em } (0, T) \times I. \quad (3.62)$$

De (3.61), (3.62) e do Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$g^{v_n} \bar{u} \varphi \longrightarrow g^v \bar{u} \varphi \text{ em } L^1((0, T) \times I),$$

comprovando a Afirmação 4.2.

Através das Afirmações 4.1 e 4.2, concluímos a Afirmação 4.

Segue das Afirmações 1, 2, 3 e 4 que o operador Λ é contínuo. Portanto, Λ possui ponto fixo u^v , que por sua vez é solução de (3.54) em $(0, T)$. \square

A existência de solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.54), ou equivalentemente, de (3.1), para todo $t > 0$, decorre do Teorema A.3.

3.3 Estudo de estabilidade da solução estacionária do problema degenerado de Allen-Cahn

Nesta seção, nosso objetivo é mostrar que $\bar{u} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\bar{u} = \begin{cases} \alpha, & \text{em } (0, x_0] \\ \beta, & \text{em } (x_0, 1) \end{cases} \quad (3.63)$$

é um padrão de

$$\begin{cases} u_t = (ku_x)_x + f(u) & \text{em } (0, \infty) \times I \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.64)$$

onde k e f satisfazem as hipóteses $(h_1) - (h_5)$ e α e β são os zeros estáveis de f .

Do fato de $H_k^1(I)$ conter funções descontínuas em x_0 , a função \bar{u} é uma forte candidata a padrão de (3.1), justamente por que os valores que definem sua imagem são os zeros de f e ambos são soluções estacionárias constantes desse problema.

O próximo resultado garante que \bar{u} é solução estacionária de (3.64) ou equivalentemente, de (3.1).

Proposição 3.22. *A função \bar{u} , definida em (3.63), é solução estacionária de (3.64).*

Demonstração. Como \bar{u} é constante em $(0, x_0)$ e $(x_0, 1)$, segue que $(k\bar{u}_x)_x = 0$ em $I \setminus \{x_0\}$.

Além disso, \bar{u} independe do tempo t e $f(\bar{u}) = f(\alpha) = f(\beta) = 0$ em I .

Logo, \bar{u} satisfaz

$$\begin{cases} (ku_x)_x + f(u) = 0 & \text{em } I \\ u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{cases}$$

□

Para prosseguirmos com a prova da estabilidade de \bar{u} , utilizaremos o conceito de operador de Nemitski. Tal operador é definido do seguinte modo:

Definição 3.23. Seja $M(I)$ a classe das funções reais $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis em I . Dada uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o operador de Nemitski associado a g é o operador definido em $M(I)$ por

$$u(x) \mapsto g(u(x)).$$

Usaremos a mesma notação de g para o operador de Nemitski, mas deixaremos explícito através do domínio de g , quando necessário, se g é a função real ou o operador.

Neste trabalho, utilizaremos apenas dois operadores de Nemitski: f e F , onde f é a função reação e $F' = -f$.

Vejamos algumas propriedades sobre o operador de Nemitski $f : H_k^1(I) \rightarrow L^2(I)$. A partir de agora, iremos lidar com as derivadas de Fréchet e de Gateaux do operador f , denotadas por

$$df \quad \text{e} \quad d_G f,$$

respectivamente. Os operadores que forem Fréchet-diferenciáveis serão chamados apenas de *diferenciáveis*.

Teorema 3.24. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sob as hipóteses (h_4) e (h_5) . Então, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(i) *o operador de Nemitski $f : H_k^1(I) \rightarrow L^2(I)$ está bem definido, é diferenciável e sua derivada df é contínua.*

(ii) *$f : H_k^1(I) \rightarrow L^2(I)$ é um operador de Lipschitz, isto é, existe $d > 0$ tal que*

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^2(I)} \leq d\|u - v\|_{H_k^1(I)}, \quad \forall u, v \in H_k^1(I).$$

(iii) *Seja \bar{u} a função definida em (3.63). Então,*

$$f(\bar{u} + v) = f(v) + df(\bar{u})[v] + r(v),$$

onde

$$\frac{\|r(v)\|_{L^2(I)}}{\|v\|_{H_k^1(I)}} \xrightarrow{\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0} 0.$$

Demonstração. (i) A boa definição do operador $f : H_k^1(I) \rightarrow L^2(I)$ decorre imediatamente da hipótese (h_5) , uma vez que

$$\|f(u)\|_{L^2(I)}^2 = \int_0^1 f(u)^2 dx \leq \int_0^1 c_1^2 dx = c_1^2 < \infty, \quad \forall u \in H_k^1(I).$$

Para mostrarmos que f é Fréchet-diferenciável, provaremos que o operador $d_G f : H_k^1(I) \rightarrow L(H_k^1(I), L^2(I))$ existe e é contínuo, onde $L(H_k^1(I), L^2(I))$ denota o espaço dos operadores lineares contínuos de $H_k^1(I)$ em $L^2(I)$. Para tal, fixados $u, \varphi \in H_k^1(I)$, mostremos que

$$\frac{f(u + s\varphi) - f(u)}{s} \xrightarrow{s \rightarrow 0} f'(u)\varphi \text{ em } L^2(I),$$

ou seja,

$$\left\| \frac{f(u + s\varphi) - f(u)}{s} - f'(u)\varphi \right\|_{L^2(I)} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0.$$

De fato, para $s \neq 0$, seja $g_s : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_s = \frac{f(u + s\varphi) - f(u)}{s}.$$

Afirmção 1. $g_s \xrightarrow{s \rightarrow 0} f'(u)\varphi$ em $L^2(I)$.

Para provarmos essa afirmação, aplicaremos o Teorema da Convergência Dominada em $(g_s)_{s \neq 0}$. Note que, a convergência qtp $g_s \xrightarrow{s \rightarrow 0} f'(u)\varphi$ decorre imediatamente da definição de derivada de f em $u(x)$, para $x \in I$.

Agora, provemos a existência de uma função $h \in L^2(I)$ tal que

$$\forall s \neq 0, |g_s(x)| \leq h(x) \text{ qtp em } I.$$

Fixado $x \in I$, para $s \neq 0$, sejam

$$m_s(x) := \min\{u(x) + s\varphi(x), u(x)\} \quad \text{e} \quad M_s(x) := \max\{u(x) + s\varphi(x), u(x)\}.$$

Como $f \in C^1(\mathbb{R})$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $y_s(x) \in (m_s(x), M_s(x))$ tal que

$$f(M_s(x)) - f(m_s(x)) = f'(y_s(x)) [M_s(x) - m_s(x)].$$

Logo,

$$|g_s(x)| = \left| \frac{f(u(x) + s\varphi(x)) - f(u(x))}{s} \right| = |f'(y_s(x))| |\varphi(x)| \leq c_1 |\varphi(x)| \in L^2(I),$$

onde a constante c_1 está definida em (h_5) .

Segue do Teorema da Convergência Dominada que $g_s \rightarrow f'(u)\varphi$ em $L^2(I)$, concluindo a Afirmção 1 e, portanto, $d_G f$ existe e é dada por

$$d_G f(u)[\varphi] = f'(u)\varphi, \quad \forall u, \varphi \in H_k^1(I).$$

Para completarmos a prova desse item, basta verificarmos a continuidade de $d_G f$. Isto é, dados $u, v \in H_k^1(I)$, provar que

$$\|d_G f(u+v) - d_G f(u)\|_{L(H_k^1(I), L^2(I))} \xrightarrow{\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0} 0,$$

onde

$$\|d_G f(u+v) - d_G f(u)\|_{L(H_k^1(I), L^2(I))} = \sup_{\substack{\varphi \in H_k^1(I) \\ \|\varphi\|_{H_k^1(I)} \leq 1}} \|d_G f(u+v)[\varphi] - d_G f(u)[\varphi]\|_{L^2(I)}. \quad (3.65)$$

Para cada $v \in H_k^1(I)$, temos

$$\begin{aligned} \|d_G f(u+v)[\varphi] - d_G f(u)[\varphi]\|_{L^2(I)} &= \left[\int_0^1 (f'(u+v)\varphi - f'(u)\varphi)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_0^1 (f'(u+v) - f'(u))^2 \varphi^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_0^1 g_v^2 \varphi^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde $g_v = f'(u + v) - f'(u)$.

Para $\varphi \in H_k^1(I)$ tal que $\|\varphi\|_{H_k^1(I)} \leq 1$, temos

$$\left[\int_0^1 g_v^2 \varphi^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq 2c_1 \|\varphi\|_{H_k^1(I)} \leq 2c_1, \quad (3.67)$$

uma vez que f' é limitada por c_1 (constante da hipótese (h_5)). Segue de (3.67) que existe $\tau(v) \in [0, 2c_1]$ tal que

$$\tau(v) := \sup_{\substack{\varphi \in H_k^1(I) \\ \|\varphi\|_{H_k^1(I)} \leq 1}} \left[\int_0^1 g_v^2 \varphi^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.68)$$

De (3.65), (3.66) e (3.68), temos

$$\|d_G f(u + v) - d_G f(u)\|_{L(H_k^1(I), L^2(I))} = \tau(v). \quad (3.69)$$

Para provarmos o desejado, mostraremos que $\tau(v)$ é atingido e em seguida, que $\tau(v) \rightarrow 0$ quando $\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0$.

Afirmção 1. $\tau(v)$ é atingido, para todo $v \in H_k^1(I)$.

Com efeito, seja $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_k^1(I)$ uma sequência maximizante, isto é $\|\varphi_n\|_{H_k^1(I)} \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 g_v^2 \varphi_n^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \tau(v). \quad (3.70)$$

Como $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_k^1(I)$ e $H_k^1(I)$ é reflexivo, existem $\varphi_v \in H_k^1(I)$ e uma subsequência, se necessário, tais que

$$\varphi_n \rightharpoonup \varphi_v \text{ em } H_k^1(I), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Devido a inclusão compacta de $H_k^1(I)$ em $L^2(I)$, temos, a menos de uma subsequência,

$$\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_v \text{ em } L^2(I). \quad (3.71)$$

Do fato de f' ser limitada, segue de (3.71) e do Teorema da Convergência Dominada que

$$\left[\int_0^1 g_v^2 \varphi_n^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 g_v^2 \varphi_v^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.72)$$

Além disso, temos

$$\|\varphi_v\|_{H_k^1(I)} \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{H_k^1(I)} \leq 1. \quad (3.73)$$

Segue de (3.70), (3.72) e (3.73) que

$$\tau(v) = \left[\int_0^1 g_v^2 \varphi_v^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \text{ com } \|\varphi_v\|_{H_k^1(I)} \leq 1, \quad (3.74)$$

completando a Afirmação 1.

Para completarmos a demonstração, provemos que $\tau(v) \rightarrow 0$, quando $v \rightarrow 0$ em $H_k^1(I)$.

Afirmção 2. $\tau(v) \xrightarrow{\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0} 0$.

Para isso, basta provarmos que

$$\left[\int_0^1 g_v^2 \varphi_v^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0} 0.$$

De fato, sejam $(h_v), (j_v) \subset L^1(I)$ seqüências definidas por

$$h_v = g_v^2 \varphi_v^2 \quad \text{e} \quad j_v = 4c_1^2 \varphi_v^2, \quad \forall v \in H_k^1(I).$$

A fim de aplicar o Teorema da Convergência Dominada Generalizado, resta provar a existência de $j_0 \in L^1(I)$ tal que $j_v \rightarrow j_0$ em $L^1(I)$ e $h_v \rightarrow 0$ qtp em I quando $\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0$. Para ambos os casos, basta provar que a seqüência $(\varphi_v^2) \subset L^1(I)$ é convergente.

Como $(\varphi_v) \subset H_k^1(I)$ é limitada, existe $\varphi_0 \in H_k^1(I)$ tal que

$$\varphi_v \rightarrow \varphi_0 \text{ em } H_k^1(I) \text{ quando } \|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0.$$

Devido à inclusão compacta de $H_k^1(I)$ em $L^2(I)$, temos, a menos de uma subsequência,

$$\varphi_v \rightarrow \varphi_0 \text{ em } L^2(I)$$

e, conseqüentemente,

$$\varphi_v^2 \rightarrow \varphi_0^2 \text{ em } L^1(I).$$

Com isso, $h_v \rightarrow 0$ qtp em I , uma vez que $g_v \rightarrow 0$ qtp em I , e tomando $j_0 = 4c_1^2 \varphi_0^2$, segue a convergência de $j_v \rightarrow j_0$ em $L^1(I)$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada Generalizado em (h_v) e (j_v) , temos

$$\left[\int_0^1 g_v^2 \varphi_v^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0} 0,$$

concluindo a Afirmção 2.

De (3.74) e da Afirmção 2, obtemos

$$\|d_G f(u+v) - d_G f(u)\|_{L(H_k^1(I), L^2(I))} \xrightarrow{\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0} 0,$$

ou seja, df existe, $df = d_G f$ e, portanto, f é diferenciável.

(ii) No item (i), vimos que f é Gateaux-diferenciável. É sabido que, para $u, v \in H_k^1(I)$, temos

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^2(I)} \leq \sup \left\{ \|d_G f(w)\|_{L(H_k^1(I), L^2(I))} : w \in [u, v] \right\} \|u - v\|_{H_k^1(I)}, \quad (3.75)$$

onde $[u, v]$ denota o segmento $\{su + (1-s)v : s \in [0, 1]\}$.

Para provarmos que f é Lipschitz, mostremos que $\|d_G f(w)\|_{L(H_k^1(I), L^2(I))}$ é limitado por uma constante, para todo $w \in H_k^1(I)$. De fato,

$$\begin{aligned} \|d_G f(w)\|_{L(H_k^1(I), L^2(I))} &= \sup_{\substack{\varphi \in H_k^1(I) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\|d_G f(w)[\varphi]\|_{L^2(I)}}{\|\varphi\|_{H_k^1(I)}} \\ &= \sup_{\substack{\varphi \in H_k^1(I) \\ \varphi \neq 0}} \frac{1}{\|\varphi\|_{H_k^1(I)}} \left[\int_0^1 f'(w)^2 \varphi^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{\substack{\varphi \in H_k^1(I) \\ \varphi \neq 0}} c_1 \frac{\|\varphi\|_{L^2(I)}}{\|\varphi\|_{H_k^1(I)}} \leq c_1, \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde c_1 é a constante da hipótese (h_5).

Segue de (3.75) e (3.76) que

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^2(I)} \leq c_1 \|u - v\|_{H_k^1(I)}, \quad \forall u, v \in H_k^1(I).$$

(iii) Seja \bar{u} definida em (3.63). Dado $v \in H_k^1(I)$, defina

$$r(v) := f(\bar{u} + v) - f(\bar{u}) - df(\bar{u})[v].$$

Como f é diferenciável, em particular, diferenciável em \bar{u} , temos

$$\frac{\|r(v)\|_{L^2(I)}}{\|v\|_{H_k^1(I)}} \xrightarrow{\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0} 0.$$

□

Como dito inicialmente, para provarmos a estabilidade da função \bar{u} , serão necessários alguns conceitos e resultados que serão introduzidos no decorrer desta seção. Considere o seguinte problema de autovalor linearizado em torno de \bar{u} :

$$\begin{cases} (k\varphi_x)_x + f'(\bar{u})\varphi + \mu\varphi = 0 & \text{em } I \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0, \end{cases} \quad (3.77)$$

onde $\varphi \in H_k^1(I)$ e $\mu \in \mathbb{R}$ são denominados de autofunção e autovalor associados a \bar{u} , respectivamente.

Salientamos que $\mu \in \mathbb{R}$, pois o operador elíptico degenerado A , definido em (3.5), é um operador autoadjunto.

Além das propriedades do operador de Nemitski f feitas anteriormente, precisamos provar que os autovalores de (3.77) estão contidos na semirreta positiva $(0, \infty)$. O caminho que utilizaremos para esta prova é definir um funcional de energia $E \in C^2(H_k^1(I), \mathbb{R})$ associado a (3.64) e, através dele, provar que o primeiro autovalor de (3.77) é maior que zero, uma vez que todos os autovalores de (3.77) são maiores que o primeiro autovalor. Fazemos isto.

Seja $E : H_k^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de energia definido por

$$E(u) = \int_0^1 \left[\frac{k}{2} u_x^2 + F(u) \right] dx, \quad \forall u \in H_k^1(I), \quad (3.78)$$

onde k é a função de difusibilidade que satisfaz $(h_1) - (h_3)$ e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um potencial duplo definido por

$$F(u) = - \int_0^u f(\xi) d\xi, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Observe que $F \in C^2(\mathbb{R})$ e α e β são mínimos locais isolados de F , visto que f satisfaz as hipóteses (h_4) e (h_5) . Além disso, veja que o operador E pode ser tomado não negativo, pois se F não for uma função não negativa em \mathbb{R} , podemos considerar sua translação não negativa $\tilde{F} = F - \min\{F(\alpha), F(\beta)\}$.

Então, temos os seguintes resultados:

Proposição 3.25. *O funcional de energia E definido em (3.78) está bem definido, $E \in C^2(H_k^1(I), \mathbb{R})$ e suas derivadas são definidas do seguinte modo:*

$$\partial E(u)[\varphi] = \int_0^1 [k u_x \varphi_x - f(u) \varphi] dx, \quad \forall u, \varphi \in H_k^1(I)$$

e

$$\partial^2 E(u)[\varphi, h] = \int_0^1 [k \varphi_x h_x - f'(u) \varphi h] dx, \quad \forall u, \varphi, h \in H_k^1(I),$$

onde ∂ denota a derivada de Fréchet.

Demonstração. A prova será dividida em três partes. Primeiro, mostraremos que E está bem definido.

Afirmção 1. E está bem definido.

Dado $u \in H_k^1(I)$, segue da hipótese (h_5) que

$$\int_0^1 F(u) dx \leq \int_0^1 \int_0^u c_1 d\xi dx = c_1 \int_0^1 |u| dx = c_1 \|u\|_{L^1(I)} \leq c_1 \|u\|_{L^2(I)} < \infty. \quad (3.79)$$

De (3.79) e de $\|\sqrt{k}u_x\|_{L^2(I)} < \infty$, para todo $u \in H_k^1(I)$, temos

$$E(u) = \int_0^1 \left[\frac{k}{2} u_x^2 + F(u) \right] dx < \infty, \quad \forall u \in H_k^1(I),$$

confirmando a Afirmação 1.

Afirmção 2. E é diferenciável.

Para provarmos que E é diferenciável (ou seja, Fréchet-diferenciável), provaremos que o funcional é Gateaux-diferenciável com derivada contínua.

De modo a facilitar as contas, dividiremos o operador E em dois operadores. Sejam $D, W : H_k^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$D(u) = \int_0^1 \frac{k}{2} u_x^2 dx \quad \text{e} \quad W(u) = \int_0^1 F(u) dx, \quad \forall u \in H_k^1(I).$$

Afirmção 2.1. D é diferenciável.

Fixados $u, \varphi \in H_k^1(I)$, provemos que

$$\frac{D(u + s\varphi) - D(u)}{s} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \int_0^1 k u_x \varphi_x dx.$$

De fato, para $s \neq 0$, temos

$$\left| \frac{D(u + s\varphi) - D(u)}{s} - \int_0^1 k u_x \varphi_x dx \right| = \frac{|s|}{2} \int_0^1 k \varphi_x^2 dx \leq \frac{|s|}{2} \|\varphi\|_{H_k^1(I)}^2 \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0.$$

Portanto, $\partial_G D : H_k^1(I) \rightarrow (H_k^1(I))^*$ existe e é dado por

$$\partial_G D(u)[\varphi] = \int_0^1 k u_x \varphi_x dx, \quad \forall u, \varphi \in H_k^1(I). \quad (3.80)$$

Para concluirmos a Afirmção 2.1, provemos que o operador $\partial_G D$ é contínuo. Com efeito, dados $u, v \in H_k^1(I)$, temos

$$\begin{aligned} \|\partial_G D(u + v) - \partial_G D(u)\|_{(H_k^1(I))^*} &= \sup_{\substack{\varphi \in H_k^1(I) \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\partial_G D(u + v)[\varphi] - \partial_G D(u)[\varphi]|}{\|\varphi\|_{H_k^1(I)}} \\ &\leq \|\sqrt{k} v_x\|_{L^2(I)} \leq \|v\|_{H_k^1(I)} \xrightarrow{\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Deste modo, concluímos que D é Fréchet-diferenciável e $\partial D = \partial_G D$, encerrando a prova da Afirmção 2.1.

Afirmção 2.2. W é diferenciável.

Fixados $u, \varphi \in H_k^1(I)$, provemos que

$$\int_0^1 \frac{F(u + s\varphi) - F(u)}{s} dx \xrightarrow{s \rightarrow 0} - \int_0^1 f(u) \varphi dx. \quad (3.81)$$

Seja $s \neq 0$ e considere $g_s : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_s = \frac{F(u + s\varphi) - F(u)}{s}.$$

Se $g_s \xrightarrow{s \rightarrow 0} -f(u)\varphi = F'(u)\varphi$ em $L^2(I)$, então (3.81) ocorre. Perceba que tal demonstração é análoga ao que foi feito na Afirmção 1 do Teorema 3.24 -(i), trocando F por f e, apenas por este motivo, omitiremos tal prova.

De (3.81), concluímos que o operador $\partial_G W : H_k^1(I) \rightarrow (H_k^1(I))^*$ existe é dado do seguinte modo:

$$\partial_G W(u)[\varphi] = - \int_0^1 f(u) \varphi dx, \quad \forall u, \varphi \in H_k^1(I). \quad (3.82)$$

Dados $u, v \in H_k^1(I)$, a continuidade de $\partial_G W$ segue de

$$\begin{aligned} \|\partial_G W(u + v) - \partial_G W(u)\|_{(H_k^1(I))^*} &= \sup_{\substack{\varphi \in H_k^1(I) \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\partial_G W(u + v)[\varphi] - \partial_G W(u)[\varphi]|}{\|\varphi\|_{H_k^1(I)}} \\ &\leq \|f(u + v) - f(u)\|_{L^2(I)} \xrightarrow{\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\partial_G W : H_k^1(I) \longrightarrow (H_k^1(I))^*$ é contínuo e, conseqüentemente, o operador W é diferenciável com $\partial W = \partial_G W$, encerrando a Afirmação 2.2.

Das Afirmações 2.1 e 2.2, obtemos a Afirmação 2. Além disso, de (3.80) e (3.82), temos

$$\partial E(u)[\varphi] = \int_0^1 [ku_x \varphi_x - f(u)\varphi] dx, \quad \forall u, \varphi \in H_k^1(I).$$

Afirmação 3. $\partial^2 E$ existe e é um operador contínuo.

Vimos nas Afirmações 2.1 e 2.2 que ∂D e ∂W existem. Caso $\partial^2 D$ e $\partial^2 W$ existam, teremos $\partial^2 D(u), \partial^2 W(u) \in L(H_k^1(I), (H_k^1(I))^*)$, para $u \in H_k^1(I)$. Do isomorfismo entre $L(H_k^1(I), (H_k^1(I))^*)$ e $L^2(H_k^1(I), \mathbb{R})$, espaço dos operadores bilineares contínuos de $H_k^1(I) \times H_k^1(I)$ em \mathbb{R} , teremos

$$\left(\partial^2 D(u)[\varphi] \right) [h] = \partial^2 D(u)[\varphi, h], \quad \forall u, \varphi, h \in H_k^1(I)$$

e

$$\left(\partial^2 W(u)[\varphi] \right) [h] = \partial^2 W(u)[\varphi, h], \quad \forall u, \varphi, h \in H_k^1(I).$$

Para esta prova, utilizaremos o mesmo método usado na Afirmação 2: provar que os operadores ∂D e ∂W são Gateaux-diferenciáveis e que os operadores $\partial_G^2 D$ e $\partial_G^2 W$ são contínuos.

Afirmação 3.1. $\partial^2 D$ existe e é um operador contínuo.

Fixados $u, \varphi \in H_k^1(I)$, mostremos que

$$\left\| \frac{\partial D(u + s\varphi) - \partial D(u)}{s} - J(\varphi) \right\|_{(H_k^1(I))^*} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0, \quad (3.83)$$

onde $J(\varphi)[h] = \int_0^1 k\varphi_x h_x dx, \forall h \in H_k^1(I)$.

Note que

$$\frac{\partial D(u + s\varphi)[h] - \partial D(u)[h]}{s} - J(\varphi)[h] = 0, \quad \forall h \in H_k^1(I),$$

validando (3.83) e, portanto,

$$\partial_G^2 D(u)[\varphi, h] = \int_0^1 k\varphi_x h_x dx, \quad \forall u, \varphi, h \in H_k^1(I). \quad (3.84)$$

Observe que $\partial_G^2 D(u) = \partial_G^2 D(v)$, para quaisquer $u, v \in H_k^1(I)$. Portanto,

$$\| \partial_G^2 D(u + v) - \partial_G^2 D(u) \|_{L(H_k^1(I), (H_k^1(I))^*)} \xrightarrow{\|v\|_{H_k^1(I)} \rightarrow 0} 0,$$

ou seja, $\partial_G^2 D$ é um operador contínuo e conseqüentemente, ∂D é Fréchet-diferenciável com $\partial^2 D = \partial_G^2 D$, encerrando a Afirmação 3.1.

Afirmação 3.2. $\partial^2 W$ existe e é um operador contínuo.

Fixados $u, \varphi \in H_k^1(I)$, provemos que

$$\left\| \frac{\partial W(u + s\varphi) - \partial W(u)}{s} - J(\varphi) \right\|_{(H_k^1(I))^*} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0,$$

onde $J(\varphi)[h] = - \int_0^1 f'(u)\varphi_x h_x dx, \forall h \in H_k^1(I)$.

Para $h \in H_k^1(I)$ tal que $\|h\|_{H_k^1(I)} \leq 1$, da Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial W(u + s\varphi)[h] - \partial W(u)[h]}{s} - J(\varphi)[h] \right| = \left| \int_0^1 \left[\frac{f(u + s\varphi) - f(u)}{s} - f'(u)\varphi \right] h dx \right| \\ & \leq \|h\|_{L^2(I)} \left\| \frac{f(u + s\varphi) - f(u)}{s} - f'(u)\varphi \right\|_{L^2(I)} \leq \left\| \frac{f(u + s\varphi) - f(u)}{s} - f'(u)\varphi \right\|_{L^2(I)}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Segue da definição da norma em $(H_k^1(I))^*$ e de (3.85) que

$$\left\| \frac{\partial W(u + s\varphi) - \partial W(u)}{s} - J(\varphi) \right\|_{(H_k^1(I))^*} \leq \left\| \frac{f(u + s\varphi) - f(u)}{s} - f'(u)\varphi \right\|_{L^2(I)} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0,$$

uma vez que a convergência

$$\frac{f(u + s\varphi) - f(u)}{s} \rightarrow f'(u)\varphi \text{ em } L^2(I)$$

está provada na Afirmação 1 do Teorema 3.24 -(i).

Portanto, $\partial_G^2 W$ existe e é dado por

$$\partial_G^2 W(u)[\varphi, h] = - \int_0^1 f'(u)\varphi h dx, \quad \forall u, \varphi, h \in H_k^1(I). \quad (3.86)$$

Para encerrarmos a prova da Afirmação 3.2, basta mostrar que $\partial_G^2 W$ é um operador contínuo.

Dados $u, v \in H_k^1(I)$, temos

$$\begin{aligned} \|\partial_G^2 W(u + v) - \partial_G^2 W(u)\|_{L(H_k^1(I), (H_k^1(I))^*)} &= \sup_{\substack{\varphi \in H_k^1(I) \\ \|\varphi\|_{H_k^1(I)} \leq 1}} \|\partial_G^2 W(u + v)[\varphi] - \partial_G^2 W(u)[\varphi]\|_{(H_k^1(I))^*} \\ &= \sup_{\substack{\varphi \in H_k^1(I) \\ \|\varphi\|_{H_k^1(I)} \leq 1}} \sup_{\substack{h \in H_k^1(I) \\ \|h\|_{H_k^1(I)} \leq 1}} |\partial_G^2 W(u + v)[\varphi, h] - \partial_G^2 W(u)[\varphi, h]|. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Para $\varphi, h \in H_k^1(I)$ tais que $\|\varphi\|_{H_k^1(I)}, \|h\|_{H_k^1(I)} \leq 1$, da Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |\partial_G^2 W(u + v)[\varphi, h] - \partial_G^2 W(u)[\varphi, h]| &= \left| \int_0^1 [f'(u + v) - f'(u)] \varphi h dx \right| \\ &\leq \|h\|_{L^2(I)} \| [f'(u + v) - f'(u)] \varphi \|_{L^2(I)} \\ &\leq \| [f'(u + v) - f'(u)] \varphi \|_{L^2(I)} \\ &= \left[\int_0^1 g_v^2 \varphi^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde $g_v = f'(u + v) - f'(u)$.

Definindo

$$\tau(v) := \left[\int_0^1 g_v^2 \varphi^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H_k^1(I),$$

segue das Afirmações 1 e 2 do Teorema 3.24 que

$$\|\partial_G^2 W(u + v) - \partial_G^2 W(u)\|_{L(H_k^1(I), (H_k^1(I))^*)} \leq \sup_{\substack{\varphi \in H_k^1(I) \\ \|\varphi\|_{H_k^1(I)} \leq 1}} \|[f'(u + v) - f'(u)] \varphi\|_{L^2(I)} \rightarrow 0,$$

quando $\|v\|_{H^1(I)} \rightarrow 0$.

Portanto, $\partial_G^2 W$ é contínuo, ∂W é Fréchet-diferenciável e $\partial^2 W = \partial_G^2 W$, comprovando a Afirmção 3.2.

Das Afirmções 3.1 e 3.2 segue a Afirmção 3 e de (3.84) e (3.86), temos

$$\partial^2 E(u)[\varphi, h] = \int_0^1 [k\varphi_x h_x - f'(u)\varphi_x h_x] dx, \quad \forall u, \varphi, h \in H_k^1(I).$$

Das Afirmções 2 e 3, temos $E \in C^2(H_k^1(I), \mathbb{R})$. \square

Dado $u \in H_k^1(I)$, ao utilizarmos a mesma função $\varphi \in H_k^1(I)$ em ambas as coordenadas de $\partial^2 E(u)$, temos

$$\partial^2 E(u)[\varphi] := \partial^2 E(u)[\varphi, \varphi] = \int_0^1 [k\varphi_x^2 - f'(u)\varphi^2] dx, \quad \forall \varphi \in H_k^1(I).$$

Além disso, através da compacidade da inclusão $H_k^1(I)$ em $L^2(I)$, garantimos, de modo análogo ao caso regular, que o primeiro autovalor associado a uma solução estacionária $u \in H_k^1(I)$ do problema (3.64), é atingido e definido por

$$\mu_1(u) := \inf\{\partial_G^2 E(u)[\varphi] : \varphi \in H_k^1(I), \|\varphi\|_{L^2(I)} = 1\},$$

onde ∂_G denota a derivada de Gateaux.

Deste modo, o primeiro autovalor $\mu_1(\bar{u})$ de (3.77) é dado por

$$\mu_1(\bar{u}) := \inf \left\{ \int_0^1 [k\varphi_x^2 - f'(\bar{u})\varphi^2] dx : \varphi \in H_k^1(I), \|\varphi\|_{L^2(I)} = 1 \right\}.$$

Até o momento, definimos um funcional de energia $E \in C^2(H_k^1(I), \mathbb{R})$. O próximo passo é garantir que o primeiro autovalor $\mu_1(\bar{u}) > 0$.

Proposição 3.26. *Existe $\rho > 0$ tal que $\mu_1(\bar{u}) > \rho$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in H_k^1(I)$ tal que $\|\varphi\|_{L^2(I)} = 1$.

Como $f'(\alpha) < 0$ e $f'(\beta) < 0$, temos Temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 [k\varphi_x^2 - f'(\bar{u})\varphi^2] dx &\geq - \int_0^1 f'(\bar{u})\varphi^2 dx = -f'(\alpha) \int_0^{x_0} \varphi^2 dx - f'(\beta) \int_{x_0}^1 \varphi^2 dx \\ &\geq \min\{-f'(\alpha), -f'(\beta)\} \|\varphi\|_{L^2(I)}^2 = -\max\{f'(\alpha), f'(\beta)\} > 0. \end{aligned}$$

Tomando $\rho = -\max\{f'(\alpha), f'(\beta)\}$, temos o resultado. \square

Esse resultado será de grande valia para garantirmos a estabilidade de \bar{u} , provada adiante. Com esse intuito, agora introduziremos alguns resultados e definições das teorias de Operadores Setoriais e Potências Fracionárias de Operadores necessários para darmos continuidade a prova de estabilidade de \bar{u} . Destacamos que tais resultados e definições enunciados aqui estão adaptados ao nosso problema. Para uma análise mais profunda dessa teoria, recomendamos [17].

Definição 3.27. Um operador T é *setorial* em um espaço de Banach X se T for um operador fechado, densamente definido e existem $\phi \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $M \geq 1$ e uma constante real d , tais que o setor

$$S_{d,\phi} = \{\lambda : \phi \leq |\arg(\lambda - d)| \leq \pi, \lambda \neq d\}$$

está contido no resolvente de T e

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - d|}, \quad \forall \lambda \in S_{d,\phi}.$$

Como o operador elíptico degenerado A , definido em (3.5), gera um semigrupo analítico de ângulo $\frac{\pi}{2}$, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.28. [18, Teorema 12.8.1] *O operador $-A$ é um operador setorial.*

Para completarmos nosso objetivo, será necessário trabalharmos com o operador trasladado de $-A$. Seja $A_1 : D(A_1) \subset L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ definido por

$$A_1 u = (Id - A)u = u - (ku_x)_x, \quad \text{para } u \in D(A_1) = D(A).$$

Como A_1 é uma translação do operador setorial $-A$, temos:

Proposição 3.29. *O operador $A_1 = Id - A$ é um operador setorial.*

Demonstração. Decorre de [17, Teorema 1.3.2]. □

Por estamos lidando apenas com operadores setoriais, os resultados e definições seguintes são feitos apenas para essa classe de operadores. Ressaltamos que o espectro de A_1 está contido em $(0, \infty)$ e, portanto, os resultados e definições subseqüentes são válidos para esse operador.

Definição 3.30. Seja T um operador setorial tal que $\text{Re } \sigma(T) > 0$, onde $\sigma(T)$ denota o espectro de T . Para $\gamma > 0$, seja

$$T^{-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty s^{\gamma-1} e^{-sT} ds,$$

onde Γ denota a função gama.

O operador T^γ é definido como a inversa do operador $T^{-\gamma}$, ou seja, $T^\gamma = (T^{-\gamma})^{-1}$.

Vejamos algumas propriedades a respeito desses operadores e seus domínios.

Teorema 3.31. [17, Teorema 1.4.2] Se T é um operador setorial em um espaço de Banach X com $\operatorname{Re} \sigma(T) > 0$, então $T^{-\gamma}$ é um operador linear limitado em X , para todo $\gamma > 0$, e $T^{-\gamma_1} T^{-\gamma_2} = T^{-\gamma_1 - \gamma_2}$, para quaisquer $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Além disso, para $\gamma \in (0, 1)$, temos

$$T^{-\gamma} = \frac{\operatorname{sen}(\pi\gamma)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\gamma} (\lambda Id + T)^{-1} d\lambda. \quad (3.89)$$

Para alcançarmos o nosso objetivo, que é garantir a estabilidade de \bar{u} , estamos interessados apenas no operador A_1^γ , quando $\gamma = \frac{1}{2}$. Por essa razão, a partir de agora, os resultados seguintes serão voltados apenas para os operadores $A_1^{-\frac{1}{2}}$ e $A_1^{\frac{1}{2}}$.

A fim de caracterizarmos $A_1^{\frac{1}{2}}$ e $D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right)$, seja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A_1)$ a base ortonormal de $L^2(I)$ definida por

$$A_1 e_n = \lambda_n e_n \quad \text{com} \quad \lambda_{n+1} \geq \lambda_n \geq \lambda_1 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.90)$$

que advém do fato do operador A_1 possuir resolvente compacto.

Utilizando os resultados anteriores, as seguintes caracterizações são obtidas.

Proposição 3.32. Seja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base ortonormal de $L^2(I)$ definida em (3.90). Então, o operador $A_1^{\frac{1}{2}} : D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right) \subset L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ é definido por

$$A_1^{\frac{1}{2}} u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)} e_n, \quad \forall u \in D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right). \quad (3.91)$$

Demonstração. Inicialmente, iremos encontrar a caracterização de $A_1^{-\frac{1}{2}}$ e em seguida, a de $A_1^{\frac{1}{2}}$.

De (3.89), temos

$$A_1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}} (\lambda Id + A_1)^{-1} d\lambda. \quad (3.92)$$

Como $A_1 e_n = \lambda_n e_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(\lambda Id + A_1)^{-1} e_n = \frac{1}{\lambda + \lambda_n} e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.93)$$

Segue de (3.92) e (3.93) que

$$\begin{aligned} A_1^{-\frac{1}{2}} e_n &= \frac{e_n}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\lambda + \lambda_n} d\lambda = \frac{e_n}{\pi} \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\lambda + \lambda_n} d\lambda \\ &= \frac{2e_n}{\pi} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\lambda_n}} \right) = \lambda_n^{-\frac{1}{2}} e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Dado $u \in D\left(A_1^{-\frac{1}{2}}\right) \subset L^2(I)$, temos

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)} e_n.$$

Seja $s_m = \sum_{n=1}^m \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)} e_n$. Como $A_1^{-\frac{1}{2}}$ é um operador contínuo (Teorema 3.31), segue de (3.94) que

$$\begin{aligned} \left\| A_1^{-\frac{1}{2}} u - \sum_{n=1}^m \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)} e_n \right\|_{L^2(I)} &= \left\| A_1^{-\frac{1}{2}} u - A_1^{-\frac{1}{2}} s_m \right\|_{L^2(I)} \\ &= \left\| A_1^{-\frac{1}{2}} (u - s_m) \right\|_{L^2(I)} \\ &\leq d \|u - s_m\|_{L^2(I)}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

para alguma constante $d > 0$. Como $s_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u$ em $L^2(I)$, segue de (3.95) que

$$\sum_{n=1}^m \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)} e_n \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A_1^{-\frac{1}{2}} u \text{ em } L^2(I)$$

e, portanto,

$$A_1^{-\frac{1}{2}} u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)} e_n, \quad \forall u \in D\left(A_1^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Tomando $\lambda = 0$ e $T = -A_1^{-\frac{1}{2}}$ no Lema A.6, temos

$$A_1^{\frac{1}{2}} u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)} e_n, \quad \forall u \in D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right).$$

□

Proposição 3.33. *Sejam $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base ortonormal de $L^2(I)$ e o operador $A_1^{\frac{1}{2}}$ definidos em (3.90) e (3.91), respectivamente. Então,*

$$D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right) = \left\{ u \in L^2(I) : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)}^2 < \infty \right\}. \quad (3.96)$$

Demonstração. Seja

$$Y = \left\{ u \in L^2(I) : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)}^2 < \infty \right\}.$$

Afirmção 1. $D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right) \subset Y$.

Seja $u \in D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right)$, então $u \in L^2(I)$ e $A_1^{\frac{1}{2}} u \in L^2(I)$. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)} e_n$ é convergente em $L^2(I)$ e, conseqüentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)}^2 < \infty.$$

Portanto, $u \in Y$, comprovando a Afirmção 1.

Afirmção 2. $Y \subset D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right)$.

Seja $u \in Y$, então $u \in L^2(I)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)}^2 < \infty$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)} e_n$ é convergente em $L^2(I)$ e, portanto, $u \in D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right)$, concluindo a Afirmção 2.

Das Afirmções 1 e 2, concluímos (3.96). \square

Além das caracterizações de $A_1^{\frac{1}{2}}$ e $D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right)$, obtemos as seguintes propriedades.

Teorema 3.34. [17, Teorema 1.4.8] *O espaço $L^2(I)^{\frac{1}{2}} := D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|u\|_{\frac{1}{2}} = \left\| A_1^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(I)}, \quad \forall u \in L^2(I)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, $D(A_1)$ é denso em $L^2(I)^{\frac{1}{2}}$ e a inclusão $L^2(I)^{\frac{1}{2}} \subset L^2(I)$ é contínua.

Em decorrência do teorema anterior, temos:

Proposição 3.35. *O espaço $L^2(I)^{\frac{1}{2}}$ é um espaço de Hilbert com a norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ induzida do produto interno*

$$\langle u, v \rangle_{\frac{1}{2}} = \left\langle A_1^{\frac{1}{2}} u, A_1^{\frac{1}{2}} v \right\rangle_{L^2(I)}, \quad \forall u, v \in L^2(I)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, se $u_j \rightarrow u$ em $L^2(I)^{\frac{1}{2}}$, então $\|u_j\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow \|u\|_{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. É evidente que $L^2(I)^{\frac{1}{2}}$ é um espaço de Hilbert, utilizando o Teorema 3.34.

Vejam a convergência em norma. Sabemos que

$$\|u_j\|_{\frac{1}{2}}^2 = \|u_j - u\|_{\frac{1}{2}}^2 + 2\langle u_j, u \rangle_{\frac{1}{2}} - \|u\|_{\frac{1}{2}}^2. \quad (3.97)$$

Basta provarmos que o termo à direita da igualdade de (3.97) tende a $\|u\|_{\frac{1}{2}}^2$. De fato, o primeiro termo decorre da convergência $u_j \rightarrow u$ em $L^2(I)^{\frac{1}{2}}$, ou seja,

$$\|u_j - u\|_{\frac{1}{2}}^2 \rightarrow 0. \quad (3.98)$$

Para o segundo termo. Considere o funcional linear $\Phi : L^2(I)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(v) = \langle v, u \rangle_{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in L^2(I)^{\frac{1}{2}}.$$

Devido a convergência fraca $u_j \rightharpoonup u$ em $L^2(I)^{\frac{1}{2}}$ (decorrente da convergência forte) e operador $\Phi : L^2(I)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ ser contínuo, temos

$$\langle u_j, u \rangle_{\frac{1}{2}} = \Phi(u_j) \rightarrow \Phi(u) = \langle u, u \rangle_{\frac{1}{2}} = \|u\|_{\frac{1}{2}}^2. \quad (3.99)$$

De (3.97), (3.98) e (3.99), obtemos

$$\|u_j\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow \|u\|_{\frac{1}{2}}.$$

\square

Além de $L^2(I)^{\frac{1}{2}}$ ser um espaço de Hilbert, ainda temos a seguinte propriedade em relação ao operador $A_1^{\frac{1}{2}}$:

Proposição 3.36. *O operador $A_1^{\frac{1}{2}}$ é um operador autoadjunto e*

$$A_1^{\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} = A_1 \text{ em } D(A_1) = D(A). \quad (3.100)$$

Demonstração. Como $A_1^{-\frac{1}{2}}$ é um operador contínuo, temos $D(A_1^{-\frac{1}{2}}) = L^2(I)$, através de Teorema A.7. Além disso, $A_1^{-\frac{1}{2}}$ é um operador autoadjunto, uma vez que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais (Corolário A.8) e como $A_1^{-\frac{1}{2}}$ possui inversa $A_1^{\frac{1}{2}}$, segue da Proposição A.9 que $A_1^{\frac{1}{2}}$ é um operador autoadjunto.

Provemos (3.100). Seja A_1^{-1} a inversa de A_1 . Em $D(A)$, do Teorema 3.31, temos

$$A_1^{-1} \left(A_1^{\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} \right) = \left(A_1^{-\frac{1}{2}} A_1^{-\frac{1}{2}} \right) \left(A_1^{\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} \right) = A_1^{-\frac{1}{2}} \left(A_1^{-\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} \right) A_1^{\frac{1}{2}} = A_1^{-\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} = Id. \quad (3.101)$$

De (3.101),

$$A_1^{\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} = (A_1 A_1^{-1}) A_1^{\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} = A_1 \left(A_1^{-1} A_1^{\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} \right) = A_1 Id = A_1.$$

□

Através das caracterizações de $A_1^{\frac{1}{2}}$ e $D(A_1^{\frac{1}{2}})$ feitas nas Proposições 3.32 e 3.33, respectivamente, e de todas as propriedades descritas anteriormente, temos

$$L^2(I)^{\frac{1}{2}} = H_k^1(I)$$

e as normas destes espaços coincidem. Tais fatos são demonstrados a seguir.

Teorema 3.37. *Seja $L^2(I)^{\frac{1}{2}} := D(A_1^{\frac{1}{2}})$, definido em (3.96). Então, $L^2(I)^{\frac{1}{2}} = H_k^1(I)$ e as normas $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ e $\|\cdot\|_{H_k^1(I)}$ coincidem.*

Demonstração. Primeiramente, utilizando a integração por partes (Lema 3.7) e a Proposição 3.36, observe que, dado $u \in D(A_1) = D(A)$, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_k^1(I)}^2 &= \int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 k u_x^2 dx = \int_0^1 u^2 dx - \int_0^1 (k u_x)_x u dx \\ &= \int_0^1 u [u - (k u_x)_x] dx = \int_0^1 u A_1 u dx = \langle A_1 u, u \rangle_{L^2(I)} \\ &= \left\langle A_1^{\frac{1}{2}} A_1^{\frac{1}{2}} u, u \right\rangle_{L^2(I)} = \left\langle A_1^{\frac{1}{2}} u, A_1^{\frac{1}{2}} u \right\rangle_{L^2(I)} = \left\| A_1^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(I)}^2. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Iremos utilizar (3.102) nas afirmações seguintes.

Afirmação 1. $L^2(I)^{\frac{1}{2}} \subseteq H_k^1(I)$.

Seja $u \in L^2(I)^{\frac{1}{2}}$. Essa prova será dividida em dois casos: $u \in D(A_1)$ e $u \notin D(A_1)$. Inicialmente, suponha $u \in D(A_1)$, logo $A_1 u$ existe e de (3.102), temos

$$\|u\|_{H_k^1(I)}^2 = \left\| A_1^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)}^2 < \infty,$$

isto é, $u \in H_k^1(I)$.

Agora, vejamos o caso onde $u \notin D(A_1)$. Como $D(A_1)$ é denso em $L^2(I)^{\frac{1}{2}}$, então

$$\exists (u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset D(A_1) : u_j \rightarrow u \text{ em } L^2(I)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.103)$$

Aplicando (3.102) em u_j , para todo $j \in \mathbb{N}$, de (3.103) e da Proposição 3.35, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{H_k^1(I)}^2 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| A_1^{\frac{1}{2}} u_j \right\|_{L^2(I)}^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{\frac{1}{2}}^2 = \|u\|_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \left\| A_1^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle u, e_n \rangle_{L^2(I)}^2 < \infty. \end{aligned} \quad (3.104)$$

De (3.104), segue que $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset H_k^1(I)$ é limitada e da reflexividade de $H_k^1(I)$, passando a uma subsequência, se necessário, temos

$$\exists v \in H_k^1(I) : u_j \rightharpoonup v \in H_k^1(I) \quad (3.105)$$

e, conseqüentemente, de (3.104), segue que

$$\|v\|_{H_k^1(I)} \leq \liminf_{j \in \mathbb{N}} \|u_j\|_{H_k^1(I)} = \|u\|_{\frac{1}{2}}. \quad (3.106)$$

Além disso, da inclusão contínua $L^2(I)^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^2(I)$ e de (3.103), temos

$$u_j \rightarrow u \in L^2(I). \quad (3.107)$$

Portanto, segue de (3.105), (3.107) e (3.106) que

$$u = v \in H_k^1(I) \quad \text{e} \quad \|u\|_{H_k^1(I)} \leq \|u\|_{\frac{1}{2}}.$$

Com isto, demonstramos que $L^2(I)^{\frac{1}{2}} \subseteq H_k^1(I)$ e

$$\|u\|_{H_k^1(I)} \leq \|u\|_{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in L^2(I)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.108)$$

Afirmção 2. $H_k^1(I) \subseteq L^2(I)^{\frac{1}{2}}$.

Para provarmos esta inclusão, observe que $D(A_1)$ é denso em $H_k^1(I)$, uma vez que $D(A)$ é denso em $H_k^1(I)$ (Observação 3.17) e $D(A_1) = D(A)$. Logo, para $u \in H_k^1(I)$, segue que

$$\exists (u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset D(A_1) : u_j \rightarrow u \in H_k^1(I). \quad (3.109)$$

Aplicando (3.102) em u_j , para cada $j \in \mathbb{N}$, de (3.109), temos

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|u_j\|_{\frac{1}{2}} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|u_j\|_{H_k^1(I)} < \infty.$$

Deste modo, $(u_j) \subset L^2(I)^{\frac{1}{2}}$ é limitada e, como $L^2(I)^{\frac{1}{2}}$ é um espaço de Hilbert, portanto, um espaço reflexivo, segue que

$$\exists v \in L^2(I)^{\frac{1}{2}} : u_j \rightharpoonup v \text{ em } L^2(I)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.110)$$

Da inclusão contínua de $L^2(I)^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^2(I)$, temos

$$u_j \rightharpoonup v \text{ em } L^2(I). \quad (3.111)$$

De (3.109), (3.110) e (3.111), temos

$$u = v \in L^2(I)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.112)$$

Agora, resta provarmos a desigualdade entre as normas $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ e $\|\cdot\|_{H_k^1(I)}$. De fato, novamente, utilizando a igualdade (3.102) para u_j , para todo $j \in \mathbb{N}$, de (3.109), (3.110) e (3.112), temos

$$\|u\|_{\frac{1}{2}} \leq \liminf_{j \in \mathbb{N}} \|u_j\|_{\frac{1}{2}} = \liminf_{j \in \mathbb{N}} \left\| A_1^{\frac{1}{2}} u_j \right\|_{L^2(I)} = \liminf_{j \in \mathbb{N}} \|u_j\|_{H_k^1(I)} = \|u\|_{H_k^1(I)},$$

ou seja,

$$\|u\|_{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{H_k^1(I)}, \quad \forall u \in H_k^1(I), \quad (3.113)$$

encerrando a prova da Afirmação 2.

Das Afirmações 1 e 2, segue que $L^2(I)^{\frac{1}{2}} = H_k^1(I)$.

De (3.108) e (3.113), temos

$$\|u\|_{\frac{1}{2}} = \|u\|_{H_k^1(I)}, \quad \forall u \in H_k^1(I).$$

□

Com os resultados provados até o momento, estamos aptos a provar a estabilidade de \bar{u} definida em (3.63). Para tal, iremos utilizar o teorema a seguir que é um caso particular do [17, Teorema 5.1.1]. Pelo fato da prova desse teorema precisar de diversas propriedades acerca de operadores setoriais e potências fracionárias de operadores, tal resultado não será demonstrado aqui, mas pode ser encontrado na referência supracitada.

Teorema 3.38. *Sejam T um operador setorial em um espaço de Banach X , $f : X^\gamma \rightarrow X$, para algum $\gamma < 1$, e \tilde{u} solução estacionária de*

$$u_t + Tu = f(u), \quad (3.114)$$

isto é, $T\tilde{u} = f(\tilde{u})$. Suponha

$$f(\tilde{u} + v) = f(\tilde{u}) + Bv + g(v), \quad (3.115)$$

onde $B \in L(X^\gamma, X)$, $\|g(v)\|_X = o(\|v\|_\gamma)$ quando $\|v\|_\gamma \rightarrow 0$ e f é um operador localmente Lipschitz em X^γ . Se o espectro de $T - B$ está contido em $\{\operatorname{Re} \mu > \rho\}$, para algum $\rho > 0$, então: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tais que, para todo valor inicial $u^0 \in X^\gamma$ em (3.114) com $\|u^0 - \tilde{u}\|_\gamma < \delta$, a solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.114) existe para todo $t > t_0$ e satisfaz $\|u(t, \cdot; u^0) - \tilde{u}(\cdot)\|_\gamma < \varepsilon$, para todo $t > t_0$.

A estabilidade de \bar{u} segue do teorema anterior. Vejamos.

Teorema 3.39. A função $\bar{u} \in H_k^1(I)$ definida por

$$\bar{u} = \begin{cases} \alpha, & \text{em } (0, x_0] \\ \beta, & \text{em } (x_0, 1) \end{cases} \quad (3.116)$$

é um padrão - solução estacionária não constante estável - de

$$\begin{cases} u_t = (ku_x)_x + f(u) & \text{em } (0, \infty) \times I \\ u(0, \cdot) = u^0(\cdot) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (3.117)$$

Demonstração. Para tal prova, utilizaremos o Teorema 3.38.

Tomando $t_0 = 0$, $X = L^2(I)$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\tilde{u} = \bar{u}$ e $T = -A$, com A definido em (3.5), temos T setorial (Proposição 3.28), $X^{\frac{1}{2}} = H_k^1(I)$ (Teorema 3.37), \bar{u} solução estacionária de (3.117) (Proposição 3.22) e $f : H_k^1(I) \rightarrow L^2(I)$ um operador de Lipschitz satisfazendo (3.115), através do Teorema 3.24, com $B = df(\bar{u})$ e $g(v) = r(v)$.

Para completarmos a prova, basta apenas provarmos a afirmação referente ao espectro de $T - B = -(A + B)$, onde

$$(T - B)v = -[(kv_x)_x + f'(\bar{u})v], \quad \forall v \in D(A).$$

Como A e B são operadores autoadjuntos, então o espectro de $-(A + B)$ está contido na reta real. Basta provarmos que $\sigma(-(A + B))$ está contido em $\{\mu > \rho\}$, para algum $\rho > 0$, ou seja, que os autovalores de $-(A + B)$ são estritamente maiores que ρ . Segue da Proposição 3.26 que existe $\rho > 0$ tal que

$$\mu_1(\bar{u}) > \rho > 0,$$

onde $\mu_1(\bar{u})$ denota o primeiro autovalor de (3.77).

Consequentemente, o espectro de $(T - B)$ está contido em $\{\mu > \rho\}$.

Do Teorema 3.38, temos \bar{u} padrão de (3.117), ou equivalentemente, \bar{u} é um padrão de (3.1). \square

Com o teorema anterior, garantimos a estabilidade de \bar{u} definida em (3.63) para o problema (3.1). Perceba que a função $\tilde{u} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{u} = \begin{cases} \beta, & \text{em } (0, x_0] \\ \alpha, & \text{em } (x_0, 1) \end{cases} \quad (3.118)$$

é uma padrão de (3.1). Além disso, a definição das funções de $H_k^1(I)$ no ponto x_0 não interfere em nenhum dos resultados expostos, pois os mesmos consideram apenas o que ocorre nos intervalos $(0, x_0)$ e $(x_0, 1)$. Dito isso, as variações de \bar{u} e \tilde{u} , que diferem apenas no ponto x_0 , também são padrões de (3.1), isto é, as funções $\bar{v}, \tilde{v} : I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in (0, x_0) \\ d, & x = x_0 \\ \beta, & x \in (x_0, 1) \end{cases} \quad e \quad \tilde{v}(x) = \begin{cases} \beta, & x \in (0, x_0) \\ d, & x = x_0 \\ \alpha, & x \in (x_0, 1) \end{cases} \quad (3.119)$$

onde $d \in \mathbb{R}$, são padrões de (3.1).

3.4 Comportamento das soluções de (3.1)

Nas seções anteriores, provamos a existência de solução $u(t, \cdot; u^0)$ do problema (3.1), para $t > 0$, e a existência de padrões de (3.1), onde os padrões encontrados foram \bar{u} e \tilde{u} definidos em (3.116) e (3.118), respectivamente, e suas variações, \bar{v} e \tilde{v} , definidas em (3.119).

Na análise de um problema em $H^1(I)$, utiliza-se a inclusão contínua $H^1(I) \hookrightarrow C^0(\bar{I})$ para estudar o comportamento das soluções desse problema. *No nosso caso, devido à degeneração forte de k , isto não pode ser feito*, uma vez que as inclusões

$$H_k^1(0, x_0) \subset C^0(0, x_0) \quad e \quad H_k^1(x_0, 1) \subset C^0(x_0, 1)$$

não são necessariamente contínuas.

Um exemplo da não continuidade de ambas as inclusões é a função $k(x) = |x - x_0|^r$, com $r \in (1, 2)$, pois tomando $u(x) = \ln |x - x_0|$, temos $u \in H_k^1(0, x_0) \cap C^0(0, x_0)$ e $u \in H_k^1(x_0, 1) \cap C^0(x_0, 1)$. Mas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty \quad e \quad \|u\|_{H_k^1(I)} < \infty.$$

Logo, não existe constante positiva $d > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^0(0, x_0)} \leq d \|u\|_{H_k^1(0, x_0)} \quad e \quad \|u\|_{C^0(x_0, 1)} \leq d \|u\|_{H_k^1(x_0, 1)}$$

e, portanto, as inclusões $H_k^1(0, x_0) \subset C^0(0, x_0)$ e $H_k^1(x_0, 1) \subset C^0(x_0, 1)$ não são contínuas.

Apesar de não obtermos as inclusões contínuas supracitadas e, conseqüentemente, não termos uma relação entre as normas dos respectivos espaços, podemos ter uma ideia do que ocorre

com as soluções fora de uma vizinhança de $x_0 \in I$. Isso ocorre devido às cadeias de inclusões contínuas

$$H_k^1(0, x_0 - \eta) \hookrightarrow H^1(0, x_0 - \eta) \hookrightarrow C^0([0, x_0 - \eta])$$

e

$$H_k^1(x_0 + \eta, 1) \hookrightarrow H^1(x_0 + \eta, 1) \hookrightarrow C^0([x_0 + \eta, 1]),$$

para algum $\eta > 0$.

Vejam os como.

Seja $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$m(\eta) := \min \left\{ \left(\min_{x \in [0, x_0 - \eta]} k(x) \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\min_{x \in [x_0 + \eta, 1]} k(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \leq 1.$$

Para $u \in H_k^1(I)$, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(0, x_0 - \eta)} &\leq \|u\|_{L^2(0, x_0 - \eta)} + \|u_x\|_{L^2(0, x_0 - \eta)} \\ &\leq \|u\|_{L^2(0, x_0 - \eta)} + \frac{1}{m(\eta)} \|\sqrt{k}u_x\|_{L^2(0, x_0 - \eta)} \\ &\leq \frac{1}{m(\eta)} \|u\|_{H_k^1(0, x_0 - \eta)} \leq \frac{1}{m(\eta)} \|u\|_{H_k^1(I)}. \end{aligned} \quad (3.120)$$

De $H^1(0, x_0 - \eta) \hookrightarrow C^0([0, x_0 - \eta])$ e de (3.120), obtemos

$$\sup_{x \in [0, x_0 - \eta]} |u(x)| \leq \frac{1}{m(\eta)} \|u\|_{H_k^1(I)}, \quad \forall u \in H_k^1(I). \quad (3.121)$$

De modo análogo, temos

$$\sup_{x \in [x_0 + \eta, 1]} |u(x)| \leq \frac{1}{m(\eta)} \|u\|_{H_k^1(I)}, \quad \forall u \in H_k^1(I). \quad (3.122)$$

Segue de (3.121) e (3.122) que, para todo $u \in H_k^1(I)$,

$$|u(x)| \leq \frac{1}{m(\eta)} \|u\|_{H_k^1(I)}, \quad \forall x \in [0, x_0 - \eta] \cup [x_0 + \eta, 1]. \quad (3.123)$$

Da estabilidade de \bar{u} , temos

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \delta > 0 : \|u(t, \cdot; u^0) - \bar{u}\|_{H_k^1(I)} < \tilde{\varepsilon} \quad \text{se} \quad \|u^0 - \bar{u}\|_{H_k^1(I)} < \delta. \quad (3.124)$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\tilde{\varepsilon} = m(\eta)\varepsilon$ em (3.124) e aplicando (3.123) em $u = u(t, \cdot; u^0) - \bar{u}$, temos:

$$\exists \delta > 0 : |u(t, x; u^0) - \bar{u}(x)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \|u^0 - \bar{u}\|_{H_k^1(I)} < \delta, \quad \forall x \in [0, x_0 - \eta] \cup [x_0 + \eta, 1]. \quad (3.125)$$

Ressaltamos que este processo vale para $\eta > 0$ fixo, pois quando $\eta \rightarrow 0$, temos $m(\eta) \rightarrow \infty$. Deste modo, podemos garantir apenas o comportamento das soluções fora de $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, para algum $\eta > 0$.

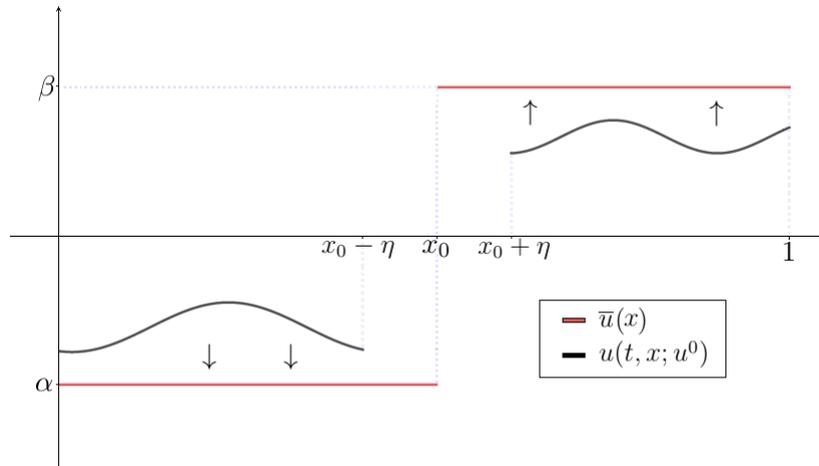


Figura 3.2: Comportamento da solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.1) em $[0, x_0 - \eta] \cup [x_0 + \eta, 1]$.

De (3.125), podemos afirmar que a solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.1) se comportará fora da vizinhança $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ como na Fig. 3.2.

Além de estudarmos o comportamento da solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.1) fora da vizinhança $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, podemos estudar o comportamento de $ku(t, \cdot; u^0)$. Como $u(t, \cdot; u^0), \bar{u} \in D(A) = D$, onde D está definido em (3.6), temos

$$ku(t, \cdot; u^0), k\bar{u} \in H^1(I)$$

e neste caso, podemos utilizar a inclusão contínua $H^1(I) \hookrightarrow C^0(\bar{I})$. Vejamos de que modo.

Dado $u \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |(ku)(x)| &\leq \|ku\|_{H^1(I)} \leq \|ku\|_{L^2(I)} + \|(ku)_x\|_{L^2(I)} \\ &\leq \|k\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^2(I)} + \|k'u + ku_x\|_{L^2(I)} \\ &\leq \|k\|_{L^\infty(I)} \|u\|_{L^2(I)} + \|k'u\|_{L^2(I)} + \|ku_x\|_{L^2(I)} \\ &\leq \left(\|k\|_{L^\infty(I)} + \|k'\|_{L^\infty(I)} \right) \|u\|_{L^2(I)} + \|k\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}} \|\sqrt{k}u_x\|_{L^2(I)} \\ &= \|k\|_{W^{1,\infty}(I)} \|u\|_{L^2(I)} + \|k\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}} \|\sqrt{k}u_x\|_{L^2(I)} \\ &\leq \max \left\{ \|k\|_{W^{1,\infty}(I)}, \|k\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}} \right\} \left(\|u\|_{L^2(I)} + \|\sqrt{k}u_x\|_{L^2(I)} \right) \\ &\leq \max \left\{ \|k\|_{W^{1,\infty}(I)}, \|k\|_{L^\infty(I)}^{\frac{1}{2}} \right\} \|u\|_{H_k^1(I)}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Da estabilidade de \bar{u} , dado $\varepsilon > 0$, tomando $\tilde{\varepsilon} > 0$ apropriado em (3.124) e aplicando (3.126) em $u = u(t, \cdot; u^0) - \bar{u}$, temos

$$\exists \delta > 0 : \sup_{x \in [0,1]} |k(x)u(t, x; u^0) - k(x)\bar{u}(x)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \|u^0 - \bar{u}\|_{H_k^1(I)} < \delta.$$

Consequentemente, devido à estabilidade de \bar{u} , $ku(t, \cdot; u^0)$ se comportará como na Fig. 3.3, onde $u(t, \cdot; u^0)$ é solução de (3.1). Vale ressaltar que $k(x_0)u(t, x_0; u^0) = k(x_0)\bar{u}(x_0) = 0$, devido à definição do subespaço D .

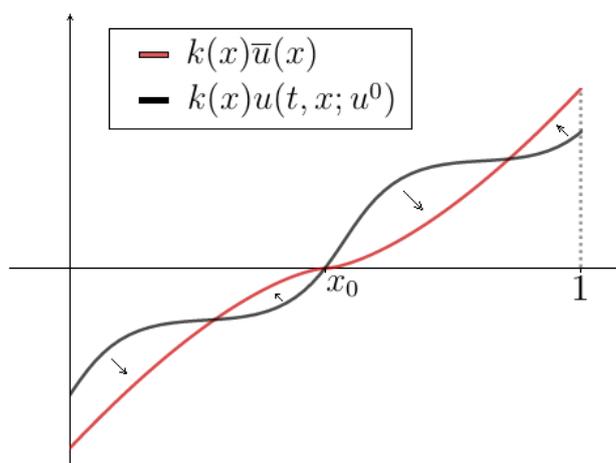


Figura 3.3: Comportamento da função $ku(t, \cdot; u^0)$, onde $u(t, \cdot; u^0)$ é solução de (3.1).

Embora esse estudo do comportamento tenha sido feito apenas para o padrão \bar{u} , o mesmo pode ser aplicado, de forma análoga, ao padrão \tilde{u} .

Resultados utilizados

Neste apêndice, exporemos os resultados que foram utilizados no decorrer deste trabalho. Suas demonstrações foram omitidas, mas poderão ser encontradas em [5, 6, 17, 25, 28, 35], que serão referenciadas em seus devidos resultados.

A.1 Família de soluções que desenvolve camada de transição interna

Considere o problema

$$\varepsilon(\psi a u_s)_s + \psi f(u) = 0, \quad s \in (0, l), \quad (\text{A.1})$$

onde $\varepsilon > 0$, $a \in C^1(0, l)$ positiva, $\psi \in C^2(0, l)$ tal que $\psi(0) = \psi(l) = 0$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ que possui únicos zeros $\alpha < \theta < \beta$ com $f'(\alpha) < 0$ e $f'(\beta) < 0$.

Definição A.1. Dizemos que uma família $(v_\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$ de soluções de (A.1) em $C^2(0, l)$ desenvolve camada de transição interna com interface em um ponto $p \in (0, l)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, se

$$v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha \chi_{(0,p)} + \beta \chi_{(p,l)} \quad \text{em } L^1(0, l).$$

Teorema A.2. [28, Teorema 6.2] *Seja $(v_\varepsilon)_{\varepsilon < \varepsilon_0}$ uma família limitada de soluções de (A.1) que desenvolve camada de transição interna com interface em $p \in (0, l)$. Então,*

$$\int_\alpha^\beta f(\xi) d\xi = 0.$$

A.2 Existência de solução $u(t, \cdot; u^0)$ de (3.1), para todo $t > 0$

Utilizando as definições usadas na Seção 3.3, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t + Tu = f(t, u), & t > t_0 \\ u(t_0) = u^0, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

onde $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial, X espaço de Banach e $T_1 = T + a_1 Id$, com $a_1 \in \mathbb{R}$ uma constante tal que $\operatorname{Re} \sigma(T_1) > 0$. Seja $X^\alpha = D(T_1^\alpha)$ com a norma $\|x\|_\alpha = \|T_1^\alpha x\|$, para $\alpha > 0$ e para qualquer $x \in X^\alpha$. Suponha $f : U \rightarrow X$ uma função, onde $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ é um conjunto aberto, para algum $\alpha \in [0, 1)$, f localmente Hölder contínua em t e localmente lipschitziana em u em U .

Teorema A.3. [17, Teorema 3.3.4] *Suponha T e f com as hipóteses anteriores. Além disso, suponha que para todo fechado limitado $B \subset U$, a imagem $f(B)$ é limitado em X . Se u é uma solução de (A.2) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal, isto é, não existe solução de (A.2) em (t_0, t_2) , com $t_2 > t_1$, então ou $t_1 = \infty$ ou existe uma sequência $(t_n) \subset (t_0, t_1)$ tal que $t_n \rightarrow t_1$ e $(t_n, u(t_n)) \rightarrow \partial U$.*

A.3 Compacidade de conjuntos limitados em L^p

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $p \in \mathbb{R}$, com $n \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Temos:

Teorema A.4 (Teorema de Kolmogorov, Riesz-Fréchet). [5, Teorema IV. 25] *Sejam $\omega \subset \Omega$ e $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$ um conjunto limitado. Suponha que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ com $\delta < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$ tal que*

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, |h| < \delta, \quad \forall f \in \mathcal{F},$$

onde $\tau_h f(\cdot) = f(\cdot + h)$.

Então, \mathcal{F} possui fecho compacto em $L^p(\omega)$.

Corolário A.5. [5, Corolário IV.26] *Seja $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$ um conjunto limitado. Suponha que*

(a) $\forall \varepsilon > 0, \forall \omega \subset\subset \Omega, \exists \delta \in (0, \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)) :$

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, |h| < \delta, \quad \forall f \in \mathcal{F},$$

onde $\tau_h f(\cdot) = f(\cdot + h)$.

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \omega \subset\subset \Omega : \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$.

Então, \mathcal{F} possui fecho compacto em $L^p(\Omega)$.

A.4 Espaços de Hilbert e operadores como soma de projeções

Seja $H = \bigoplus_n C_n$ um espaço de Hilbert, onde $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de subespaços fechados de H . Seja $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ um operador linear (pode ou não ser limitado) definido por

$$Tu = \sum \mu_n P_n u, \quad \forall u \in D(T), \quad (\text{A.3})$$

onde P_n é a projeção de H em C_n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos:

Lema A.6. [25, Lema 6.9.10] Se $\lambda \neq \mu_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(\lambda Id - T)$ possui inversa e

$$(\lambda Id - T)^{-1}u = \sum (\lambda - \mu_n)^{-1}P_n u, \quad \forall u \in \text{Im}(\lambda Id - T).$$

Teorema A.7. [25, Teorema 6.9.6] O operador T é contínuo se, e somente se, $D(T) = H$.

Corolário A.8. [25, Corolário 6.9.12] Suponha T um operador limitado. Então, T é autoadjunto se, e somente se, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais.

Para o resultado a seguir, não é necessário supor o espaço de Hilbert H como uma soma direta e nem o operador T definido como em (A.3).

Proposição A.9. [35, Proposição A.8.2] Se $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ é autoadjunto e injetivo, então T^{-1} , com domínio $\text{Im } T$ denso em H , é autoadjunto.

Referências Bibliográficas

- [1] ALABAU-BOUSSOUIRA, F.; CANNARSA, P.; FRAGNELLI, G. Carleman estimates for degenerate parabolic operators with applications to null controllability. **Journal of Evolution Equations**, v. 6, p. 161-204, 2006.
- [2] BUNDLE, C.; PUNZO, F.; TESEI, A. Existence and nonexistence of patterns on Riemannian manifolds. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 387, p. 33-47, 2012.
- [3] BENSOUSSAN, A. *et al.* **Representation and control of finite dimensional systems**. 2 ed. Berlin: Birkhäuser, 2007.
- [4] BOUTAAYAMOU, I.; FRAGNELLI, G.; MANIAR, L. Carleman estimates for parabolic equations with interior degeneracy and Neumann boundary conditions. **Journal d'Analyse Mathématique**, v. 135, p. 1-35, 2018.
- [5] BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle**. 1 ed. Paris: Masson, 1983.
- [6] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. 1 ed. New York: Springer, 2010.
- [7] CAMPITI, M.; METAFUNE, G.; PALLARA, D. Degenerate self-adjoint evolution equations on the unit interval. **Semigroup Forum**, v. 57, p. 1-36, 1998.
- [8] CANNARSA, P.; FRAGNELLI, G.; ROCCHETTI, D. Controllability results for a class of one-dimensional degenerate parabolic problems in nondivergence form. **Journal of Evolution Equations**, v. 8, p. 583-616, 2008.
- [9] EMMAMIRAD, H.; GOLDSTEIN, G. R.; GOLDSTEIN, J. A. Chaotic solution for the Black-Sholes equation. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 140, n. 6, p. 2043-2052, 2012.
- [10] FARAUDO, J. Diffusion equation on curved surfaces. I. Theory and application to biological membranes. **Journal of Chemical Physics**, v. 116, n. 13, p. 5831-5841, 2002.
- [11] FARINA, A.; SIRE, Y.; VALDINOCI, E. Stable solutions of elliptic equations on Riemannian manifolds. **Journal of Geometric Analysis**, v. 23, p. 1158-1172, 2013.
- [12] FRAGNELLI, G.; GOLDSTEIN, G. R.; GOLDSTEIN, J. A.; ROMANELLI, Silvia. Generators with interior degeneracy on spaces of L^2 type. **Electronic Journal of Differential Equations**, v. 212, n. 189, p. 1-30, 2012. Disponível em: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2012/189/fragnelli.pdf>. Acesso em: 5 set. 2022.

- [13] FRAGNELLI, G. Null controllability of degenerate parabolic equations in non divergence form via Carleman estimates. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, v. 6, n. 3, p. 687-701, 2013.
- [14] GOLDSTEIN, J. A. **Semigroups of linear operators and applications**. 1 ed. New York: Oxford University Press, 1985.
- [15] HEBEY, E. **Sobolev Spaces on Riemannian manifolds**. 1 ed. Berlin: Springer, 1996.
- [16] HEBEY, E. Sharp Sobolev-Poincaré Inequalities on compact Riemannian manifolds. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 354, n. 3, p. 1193-1213, 2002.
- [17] HENRY, D. **Geometric Theory of semilinear parabolic equations**. 1 ed. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [18] HILLE, E.; PHILLIPS, R. S. **Functional Analysis and Semi-Groups**. 1 ed. Rhode Island: American Mathematical Society Providence, 1957.
- [19] KARACHALIOS, N. I.; ZOGRAPHOPOULOS, N. B. On the dynamics of a degenerate parabolic equation: global bifurcation of stationary states and convergence. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 25, p. 361-393, 2006.
- [20] KOHN, R. V.; SLASTIKOV, V. V. Geometrically constrained walls. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 28, p. 33-57, 2006.
- [21] LIONS, J. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**. 1 ed. Paris: Dunod, 1969.
- [22] MARTINEZ, P.; RAYMOND, J.; VANCOSTENOBLE, J. Regional null controllability of a linearized Crocco-type equation. **SIAM – Journal on Control and Optimization**, v. 42, n. 2, p. 709-728, 2003.
- [23] MORINI, M.; SLASTIKOV, V. V. Geometrically constrained walls in two dimensions. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 203, p. 621-692, 2012.
- [24] MORINI, M.; SLASTIKOV, V. V. Geometrically induced phase transitions in two-dimensional dumbbell-shaped domains. **Journal of Differential Equations**, v. 259, p. 1560-1605, 2015.
- [25] NAYLOR, A. W.; SELL, G. R. **Linear Operator Theory in Engineering and Science**. 1 ed. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [26] NASCIMENTO, A. S. do. Boundary and interior spike layer formation for an elliptic equation with symmetry. **SIAM – Journal on Mathematical Analysis**, v. 24, n. 2, p. 466-479, 1993.
- [27] NASCIMENTO, A. S. do; GONÇALVES, A. C. Instability of elliptic equations on compact Riemannian manifolds with non-negative Ricci curvature. **Electronic Journal of Differential Equations**, v. 2010, n. 67, p. 1-18, 2010. Disponível em: <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2010/67/nascimento.pdf>. Acesso em: 5 set. 2022.
- [28] NASCIMENTO, A. S. do; SÔNEGO, M. The roles of diffusivity and curvature in patterns on surfaces of revolution. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 412, p. 1084-1096, 2014.

-
- [29] NASCIMENTO, A. S. do. The destabilizing effect of unbalanced reaction as diffusivity decreases on reaction-diffusion equations in boundaryless surfaces. **SIAM – Journal on Mathematical Analysis** (aceito para publicação).
- [30] NICOLAESCU, L. I. **Lectures on the Geometry of manifolds**. 2 ed. Notre Dame: World Scientific, 2007.
- [31] OMENYI, L. Rellich-Kondrakov embedding of the Laplacian resolvent on the torus. **Journal of Applied Research**, v. 4, n. 1, p. 1385-1395, 2018.
- [32] RUBINSTEIN, J.; WOLANSKY, G. Instability results for reaction diffusion equations over surfaces of revolutions. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 187, p. 485-489, 1994.
- [33] SÔNEGO, M. On the weakly degenerate Allen-Cahn equation. **Advances in Nonlinear Analysis**, v. 9, p. 361-371, 2020.
- [34] SÔNEGO, M.; NASCIMENTO, A. S. do. Stable transition layer induced by degeneracy of the spatial inhomogeneities in the Allen-Cahn problem. **AIMS – Discrete and Continuous Dynamical Systems**, v. 27, n. 6, p. 3297-3311, 2022.
- [35] TAYLOR, M. E. **Partial differential equations I: Basic Theory**. 2 ed. New York: Springer, 2011.

Índice Remissivo

- Curvatura geodésica de uma superfície de revolução, 9
- de Aubin-Lions, 76
de Kolmogorov, Riesz-Fréchet, 106
- Elemento área de uma superfície de revolução, 9
- Estabilidade no sentido de Lyapunov, 9, 56
- Família de soluções que desenvolve camada de transição, 105
- Função bi-estável, 3
- Gradiente de uma superfície de revolução, 9
- Imersão compacta, 72, 73
- Integração por partes, 63
- Métrica de uma superfície de revolução, 9
- Operador
 com expoente fracionário, 92
 de Nemitski, 81
 Laplace-Beltrami de uma superfície de revolução, 9
 setorial, 92
- Padrão, 3, 56
- Problema
 de Allen-Cahn degenerado, 55
 de Allen-Cahn em superfícies de revolução, 4
 fortemente degenerado, 55
- Solução fraca, 75
- Teorema