UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação de centros Hamiltonianos polinomiais biquadrados, e isocronicidade trivial versus formas canônicas para aplicações polinomiais no plano de Jacobiano unitário.

Raul Felipe Appis

São Carlos-SP
Outubro de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação de centros Hamiltonianos polinomiais biquadrados, e isocronicidade trivial versus formas canônicas para aplicações polinomiais no plano de Jacobiano unitário.

Raul Felipe Appis

Orientador: Prof. Dr. Francisco Braun

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP

Outubro de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Raul Felipe Appis, realizada em 28/10/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Francisco Braun (UFSCar)

Profa. Dra. Bruna Oréfice Okamoto (UFSCar)

Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu (UFSCar)

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi (UNESP)

Profa. Dra. Luci Any Francisco Roberto (UNESP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho aos meus pais, meu irmão, meus tios, meus primos, meus professores e amigos, e a mim mesmo.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a todos que me apoiaram nestes 10 anos de caminhada, da graduação até este momento.

A UNESP-IBILCE foi muito importante para minha vida. Lá entrei com 17 anos e permaneci 6 anos. Agradeço imensamente a todos os professores. Principalmente, agradeço à Profª. Drª Luci Any Francisco Roberto, que me orientou desde o primeiro ano de faculdade até o final do meu mestrado. Muito obrigado por confiar em mim. Seria uma honra poder ser seu parceiro de pesquisa algum dia. O IBILCE, além de me formar e dar base para o meu conhecimento, me deu amizades para toda vida. Obrigado Débora, Sara e Maria Clara por me aturarem enquanto morávamos juntos, além das minhas vizinhas. Amo muito vocês. Aos meus amigos Plínio, Ana Livia, Yagor e Mayara, obrigado por serem meus parceiros de estudo, vocês tem parte no conhecimento que possuo. Por fim, meu muito obrigado para a antiga “República do Vale”, vocês me propiciaram lembranças incríveis, além de me ensinarem muitas coisas relativas a como lidar com pessoas.

Aos meus familiares como um todo, em particular, à minha mãe Izildinha, ao meu pai Antônio e ao meu irmão Rodolpho. Obrigado por toda ajuda, paciência e apoio que me deram desde a minha entrada na vida acadêmica. Agradeço também aos meus parceiros de Taquaritinga, Vinicius, Duda, Rafael e Giovanna, amigos desde o colegial e com certeza para o resto da minha vida.

Embora a mudança a UFSCar tenha sido difícil, eu tenho muito a agradecer. Amizades incríveis aconteceram em São Carlos. Em especial, Carol, “Mangerona”, Gabriel, “Linda”, “Sté”e “Vó”. Espero que nossa ligação sempre exista e que a gente aproveite muito ainda juntos, eu amo muito vocês e aprendo com vocês constantemente.

Agradeço ao Departamento de Matemática da UFSCar por ter me dado a oportunidade de contribuir com meu conhecimento. Ao meu orientador de doutorado Prof. Dr. Francisco Braun só devo um muito obrigado. O senhor sempre foi muito paciente comigo e me ensinou muitos conteúdos que eu não conhecia. Também seria uma honra continuar pesquisando com o senhor.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho (processo 88882.426780/2019-01).

Resumo

Neste trabalho, classificamos um centro não degenerado na origem de um sistema Hamiltoniano planar associado a uma função da forma $H(x, y) = A(x) + B(x)y^2 + C(x)y^4$, onde A, B e C são polinômios. Estabelecida uma relação entre centros isócronos triviais e a Conjectura Jacobiana no plano, estudamos aplicações $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $f(0,0) = (0,0)$, de determinante Jacobiano constante e igual a 1, e apresentamos condições suficientes para sua injetividade. Por fim, como consequência deste estudo, caracterizamos os centros isócronos triviais de sistemas Hamiltonianos polinomiais planares associados a funções polinomiais de graus 10, 12, 14 e 22.

Palavras-chave: centro, isócrono, trivial, injetividade.

Abstract

This work, we classify a non- degenerate center at the origin of a planar Hamiltonian system associated to a function of the form $H(x,y) = A(x) + B(x)y^2 + C(x)y^4$, where A, B and C are polynomials. After seing a relation between trivial isochronous centers and the Jacobian Conjecture on the plane, we study polynomial maps $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, with $f(0,0) = (0,0)$ and Jacobian determinant constant and equal to 1, and we present sufficient conditions to its injectivity. At last, as a consequence of the study, we characterize the trivial isochronous centers of planar polynomial Hamiltonian system associated to polynomial function of degrees 10, 12, 14 and 22.

Keywords: center, isochronous, trivial, injectivity.

Sumário

Lista de Figuras

CAPÍTULO 1

Introdução

A séculos o ser humano sente a necessidade de compreender como e porque a natureza age de certas formas. Com a criação da matemática, muitos desses comportamentos naturais foram modelados e entendidos. Além disso, ela facilitou certas interações humanas como, por exemplo, troca de mercadorias, dinheiro, etc. Dentre as várias teorias dentro da matemática, a teoria do cálculo diferencial mostrou-se eficiente no estudo de dinâmicas que envolviam o "tempo". Seu avanço produziu, juntamente com a geometria, a teoria de sistemas dinâmicos: teoria responsável por estudar sistemas de equações diferenciais ordinárias, tanto no aspecto analítico quanto geométrico.

A análise qualitativa das equações diferenciais ordinárias, aplicada no estudo dos sistemas dinâmicos, tem como objetivo descobrir propriedades que não dependam das soluções explícitas de tais sistemas, mas sim das características de cada ponto ou solução. Elas ajudam, na prática, a produzir ferramentas capazes de descrever interações entre animais sobre certos ambientes, prever desastres naturais, além de ajudar em problemas físicos, arquitetônicos e de automação.

Um tipo importante de solução que aparece com frequência é a solução periódica. Em sistemas que modelam interações entre espécies de seres vivos, por exemplo, as soluções periódicas simbolizam situações onde há um equilíbrio existencial desses seres. Muitas vezes, essas soluções aparecem aglomeradas em torno de um ponto. Nesse caso, o ponto é chamado de *centro*; se elas possuírem o mesmo período, o centro é dito *isócrono*. No estudo da meteorologia, os centros exercem grande importância no entendimento dos ciclos da chuva e no comportamento dos ventos, por exemplo.

A classe dos *sistemas Hamiltonianos planares* é uma classe de sistemas muito estudada, pois a análise qualitativa de suas trajetórias está ligada às curvas de nível de uma determinada função, chamada *função Hamiltoniana*. Dada uma função $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, com $k \geq 2$ ou $k = \omega$

(aplicação analítica), o sistema Hamiltoniano em $\mathbb{R}^2$ associado a H (função Hamiltoniana) é

$$\begin{cases} x' = -H_y(x,y) \\ y' = H_x(x,y) \end{cases}. \tag{1.1}$$

Determinar condições teóricas necessárias ou suficientes para que um centro de um sistema de equações diferenciais seja isócrono ou não é extremamente complicado. Sabe-se que um centro isócrono de um sistema diferencial analítico é não degenerado (veja [4]). Ressaltamos que, a menos de translação, podemos assumir que a origem é o centro a ser estudado (quando o sistema é da forma (1.1) consideramos, adicionalmente, $H(0,0) = 0$). Uma caracterização para um centro isócrono na origem de (1.1), com H analítica, é a dada em [13, Teorema B]. Este resultado é enunciado da seguinte forma:

Teorema 1.1. *Seja $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\omega$. A origem é um centro isócrono de período 2π do sistema* (1.1) *se, e somente se, existe uma vizinhança aberta V_0 da origem e uma aplicação analítica $f = (f_1, f_2) : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $f(0,0) = (0,0)$ de tal forma que, para todo $(x,y) \in V_0$,*

$$\Big| Jf(x,y) \Big| = 1 \ \text{e} \ H(x,y) = \frac{f_1(x,y)^2 + f_2(x,y)^2}{2}.$$

Quando a f do Teorema (1.1) puder ser escolhida polinomial, o centro isócrono em questão é dito *trivial*. Dando enfoque para H polinomial, em [11, Teorema 1] está provado que a aplicação f não pode estar definida no plano todo se a origem for um centro isócrono de (1.1) com H polinomial de grau ímpar. Em particular, não existem centros isócronos triviais em sistemas Hamiltonianos associados a H de grau ímpar. Sabe-se que não existe centro isócrono na origem de (1.1) para H de grau 3 ou 5 (veja [5, Proposição 4.1] e [12] no primeiro caso, e [10] para o segundo). Quando H tem grau 2, se a origem é um centro isócrono de (1.1), a condição de centro implica diretamente que a origem é um centro trivial. É conhecido, também, o resultado que diz que se a origem é um centro isócrono do sistema (1.1), com H polinomial de grau 4, então a origem é um centro isócrono trivial (veja [5, Teorema E]). Mais ainda, a menos de isomorfismo,

$$H(x,y) = (k_1 x)^2 + (k_2 y + k_3 x + k_4 x^2)^2 \tag{1.2}$$

com $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ e $k_1 k_2 \neq 0$. Por outro lado, em [5, Exemplo 3.22], é dado um exemplo para H de grau 8 no qual a origem de (1.1) é um centro isócrono não trivial (veja também [2, Exemplo 6]).

Diante disso, surgem duas perguntas:

Pergunta 1.2. *Para* $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *polinomial de grau seis, todo centro isócrono do sistema* (1.1) *é trivial?*

Pergunta 1.3. *Para* $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *polinomial de grau ímpar, o sistema* (1.1) *pode ter centro isócrono?*

Por [5, Proposição 4.1], estudar a isocronicidade de centros em sistemas Hamiltonianos associados a aplicações polinomiais H quárticas na variável y, é suficiente para explorar a primeira pergunta feita. Numa linha semelhante de pensamento, os estudos sobre isocronicidade desenvolvidos em [5] (H de grau 4 pode gerar somente centros isócronos triviais) e [10] (H de grau 5 não produz centros isócronos) foram elaborados a partir das fórmulas de radicais para aplicações polinomiais quadráticas e cúbicas na variável y, respectivamente. Mesmo com o conhecimento destas fórmulas, tais trabalhos mostraram-se extremamente complicados. Como um primeiro passo para atacar a Pergunta 1.2, damos atenção para centros na origem em sistemas relacionados a funções Hamiltonianas H biquadradas na variável y, ou seja,

$$H(x, y) = A(x) + B(x)y^2 + C(x)y^4,$$

onde A, B e C são polinômios, uma vez que as curvas de nível de H são bem determinadas por fórmulas de radicais produzindo, assim, sistemas Hamiltonianos reversíveis onde o eixo x é a reta de simetria. Mostrou-se inconveniente o estudo da isocronicidade sem o conhecimento dos ambientes propícios para seu acontecimento. Diante de tais fatos, mostramos que todos os possíveis formatos para o maior aberto simplesmente conexo $\mathcal{P}$, contendo a origem, totalmente preenchido por trajetórias periódicas associadas ao centro, são construídos a partir de 17 formas base para $\partial\mathcal{P}$. Além disso, verificamos que todas elas são realizáveis. A partir dessa classificação, determinamos todos possíveis valores para o nível da fronteira de $\mathcal{P}$ quando o centro não é global (mostrando também que são realizáveis), bem como condições tanto necessárias quanto suficientes para que o centro seja global.

Nos debruçando sobre Teorema 1.1, notamos que ele conecta centros isócronos com aplicações de determinante Jacobiano constante. Na verdade, esta ligação produz uma forte relação entre a teoria qualitativa das equações diferenciais e a geometria algébrica. Mais precisamente, é verificado em [17, Teorema 2.3] que um centro isócrono trivial é global se, e somente se, a aplicação f em 1.1 é injetora. Consequentemente, provar que um centro isócrono trivial de um sistema Hamiltoniano planar polinomial é global, é equivalente a demonstrar a *Conjectura Jacobiana* em $\mathbb{R}^2$, que é enunciada da seguinte maneira:

Se $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é uma aplicação polinomial com* $f(0,0) = (0,0)$ *e determinante Jacobiano constante igual a* 1*, então* f *é injetora.*

Para f_1 e f_2 de graus menores ou iguais a 101, sabe-se que f é injetora (veja [14]).

Estudar um centro trivial se reduz, em certa parte, a analisar uma aplicação f dada como na hipótese do enunciado da Conjectura Jacobiana. Dessa forma, estudamos f e apresentamos condições suficientes para que ela seja injetora. Em seguida, uma pergunta a ser feita é se a aplicação f, que está relacionada a um centro trivial na origem, tem formas canônicas pelo menos para grau baixo. Com base nisso, em [2, Teorema 2.3, Teorema 2.4], são dadas caracterizações para centros isócronos triviais de (1.1) com H de grau 6 e 8. Assim, complementamos esses resultados, caracterizando os centros isócronos triviais na origem para H de grau 10, 12, 14 e 22.

A tese está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 2, apresentaremos os teoremas clássicos da teoria dos sistemas de equações diferenciais. Tais resultados mostram a existência e unicidade de uma solução por um ponto em um determinado tempo, bem como seu comportamento local. Mais ainda, apresentam os possíveis conjuntos limites de uma solução, caso ela esteja contida em um conjunto compacto. Diante disso, definiremos o conceito de um ponto ser *centro* e, em seguida, daremos a definição de centro *isócrono*, juntamente com algumas propriedades gerais de centros em um sistema qualquer de equações diferenciais.

No Capítulo 3, estudaremos centros na origem de sistemas Hamiltonianos planares relacionados a funções polinomiais H biquadradas em y, classificando os centros não globais de tais sistemas. Além disso, daremos condições necessárias e suficientes para que o centro seja global.

Para finalizar, no Capítulo 4 estudaremos aplicações polinomiais $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de determinante Jacobiano constante igual a 1, dando condições para sua injetividade. Em seguida, daremos formas canônicas para aplicações f de graus 5, 6, 7 e 11. De forma equivalente, caracterizaremos os centros isócronos triviais na origem de (1.1) com H polinomial de grau 10, 12, 14 e 22.

CAPÍTULO 2

Preliminares

2.1 Sistemas de equações diferenciais

Definição 2.1. Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos, e $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : U \longrightarrow V$ uma aplicação diferenciável. A *matriz Jacobiana* de f em um ponto $p \in U$ é a matriz

$$Jf(p) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^k$, com $1 \leq k \leq \infty$ ou $k = \omega$. A aplicação X é chamada de *campo vetorial* de classe $\mathcal{C}^k$. Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$x' = X(x). \tag{2.1}$$

As aplicações diferenciáveis $\varphi : I \longrightarrow U$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, tais que $\varphi(t_0) = p$ e

$$\forall t \in I,\ \varphi'(t) = X(\varphi(t))$$

são ditas *soluções* ou *trajetórias* do sistema (2.1) ou do campo X, que no tempo t_0 passam pelo ponto p (condição inicial). Um ponto $p \in U$ é chamado de *ponto de equilíbrio* do sistema (2.1) (ou do campo X) se $X(p) = 0$. Nesse caso, p é *não degenerado* se

$$\left| JX(p) \right| \neq 0.$$

Quando $X(p) \neq 0$, p é dito *ponto regular*.

Seja $\varphi : I \longrightarrow U$ uma trajetória com condição inicial $\varphi(t_0) = p$. Dizemos que φ é uma *trajetória maximal* que no tempo t_0 passa por p, se para toda trajetória $\psi : J \longrightarrow U$, com $\psi(t_0) = p$, tem-se

$$J \subseteq I \text{ e } \psi = \varphi\Big|_J .$$

Nesse caso, I é denominado *intervalo maximal*. Quando $t_0 = 0$, denota-se $I = I_p$ e $\varphi_p = \varphi$, e φ_p é dita trajetória maximal por p.

O teorema que segue afirma que existe uma única trajetória maximal de (2.1) que passa por um ponto p. De [19, Capítulo VI, Seção 1, página 209, Teorema 1] segue a demonstração do teorema e a propriedade de grupo que mostra que, a menos de reparametrização linear do tempo, podemos considerar $t_0 = 0$ na definição de trajetória maximal. Mais ainda, o último item do teorema citado acima prova que o conjunto $D = \{(t, p) \in \mathbb{R}^{n+1};\ p \in U \text{ e } t \in I_p\}$ é aberto e que a aplicação $\varphi : D \longrightarrow U$ definida por

$$\varphi(t, p) = \varphi_p(t)$$

é de classe C^k. A aplicação φ chama-se *fluxo gerado* por X.

Teorema 2.2 (Existência e unicidade de soluções maximais). *Por cada ponto $p \in U$ existem um intervalo aberto I_p e uma, e somente uma, trajetória maximal $\varphi_p : I_p \longrightarrow U$ do sistema* (2.1) *tal que $\varphi_p(0) = p$.*

No que segue, apresentamos e provamos um resultado, já existente, que afirma que as trajetórias maximais, que no tempo zero estão relativamente próximas, permanecem próximas em um intervalo de tempo fechado pré fixado. Recomendamos a leitura de [19, Capítulo II], onde é estudada e mostrada, de uma forma mais geral, a dependência das soluções de um sistema de equações diferenciais em relação às condições iniciais.

Teorema 2.3. *Seja φ_p uma trajetória maximal de* (2.1)*. Para todo $\varepsilon > 0$ e $[a, b] \subset I_p$, existe $0 < \delta \leq \varepsilon$ tal que, para toda trajetória maximal $\psi_q : J_q \longrightarrow U$, com $q \in B_\delta(p)$,*

$$[a, b] \subset J_q \text{ e } \Big|\Big|\psi_q(t) - \varphi_p(t)\Big|\Big| < \varepsilon, \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Demonstração. Dado $p \in U$, sejam $\varphi_p : I_p \longrightarrow U$ a trajetória maximal de (2.1) por p, $\varepsilon > 0$ e $[a, b] \subset I_p$. Tomemos $\Omega = \mathbb{R} \times U$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(t, x) = X(x).$$

Consideremos o sistema

$$x' = f(t, x). \tag{2.2}$$

Para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$, denotemos por $I(t_0, x_0)$ o intervalo maximal da trajetória maximal de (2.2) que no tempo t_0 passa por x_0. Notemos que $I(0, p) = I_p$ e que as soluções de (2.1) e (2.2) são as mesmas.

Aplicando $f_n = f$ em [19, Capítulo II, Seção 2, página 35, Proposição 3] obtemos que dados $(t_0, x_0) \in \Omega$ e $[c, d] \subset I(t_0, x_0)$, existe uma vizinhança aberta

$$(t_0, x_0) \in W = (-\delta_1 + t_0, \delta_1 + t_0) \times B_{\delta_2}(x_0) \subset \Omega,$$

com $\delta_1, \delta_2 > 0$ e $\delta_2 \leq \varepsilon$, de tal forma que, para cada $(t_1, x_1) \in W$, a trajetória maximal $\overline{\psi}$ de (2.2), com $\overline{\psi}(t_1) = x_1$, satisfaz

$$[c, d] \subset I(t_1, x_1) \text{ e } \left|\left|\overline{\psi}(t) - \varphi(t)\right|\right| < \varepsilon, \text{ para todo } t \in [c, d],$$

onde φ é a trajetória maximal que no tempo t_0 passa pelo ponto x_0.

Logo, para $(t_0, x_0) = (0, p)$ e $[c, d] = [a, b]$, existe $\delta = \delta_2$ de modo que, para cada trajetória maximal $\psi_q : J_q \longrightarrow U$ com $q \in B_\delta(p)$ tem-se $(0, q) \in W$ e, portanto,

$$[a, b] \subset I(0, q) = J_q \text{ e } \left|\left|\psi_q(t) - \varphi_p(t)\right|\right| < \varepsilon$$

para cada $t \in [a, b]$. □

Dada uma trajetória maximal φ_p de (2.1), a *órbita de* X por p é o conjunto $\varphi_p(I)$. Diante disso, o *retrato de fase* de X é a decomposição de U em órbitas de X, onde cada órbita é orientada no sentido da trajetória associada. De [19, Capítulo VI, Seção 3, página 217, Teorema 2] segue que U é decomposto em uma união disjunta de órbitas onde cada uma ou é um ponto (órbita por um ponto de equilíbrio), ou é a imagem biunívoca de um intervalo da reta ou é difeomorfa a uma circunferência. Nesse último caso, a trajetória φ_p associada é chamada de *trajetória periódica* e é tal que, $I_p = \mathbb{R}$ e existe $\tau > 0$ de modo que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \;\varphi_p(t) = \varphi_p(t + \tau), \text{ e } \varphi_p(t_1) \neq \varphi_p(t_2) \text{ se } |t_1 - t_2| < \tau.$$

A seguir, introduzimos uma noção de equivalência entre campos vetorias, que possibilita comparar os retratos de fase correspondentes.

Definição 2.4. Considere $\varphi_1 : D_1 \longrightarrow U$ e $\varphi_2 : D_2 \longrightarrow U$ os fluxos gerados pelos campos vetoriais $X_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. O campo X_1 é *topologicamente conjugado* (C^r-conjugado) a X_2 se existe um homeomorfismo (difeomorfismo de classe C^r) $h : U_1 \longrightarrow U_2$ tal que, para todo $(t, p) \in D_1$,

$$h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p)).$$

A aplicação h é uma *conjugação topológica* (C^r-conjugação) entre X_1 e X_2.

Observação 2.5. Uma relação de conjugação é uma relação de equivalência entre campos vetoriais. Além disso, uma conjugação leva ponto de equilíbrio em ponto de equilíbrio e trajetória periódica em trajetória periódica, preservando o período.

Pelo Teorema 2.3 sabemos que trajetórias por pontos próximos a um ponto de equilíbrio p, permanecem próximas a p. Por outro lado, esse teorema não nos fornece aspectos geométricos locais sobre o comportamento dessas trajetórias. No entanto, o comportamento do fluxo próximo de um ponto regular é bem definido, como mostra o próximo teorema, conhecido como Teorema do Fluxo Tubular. Antes de enunciá-lo, vamos definir o conceito de *seção transversal local*. Para isso, fixado $m \in \mathbb{N}$, denotamos

$$e_i = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i\text{–ésima coordenada}}, \ldots, 0, 0) \in \mathbb{R}^m$$

com $i \in \mathbb{N}$ e $i \leq m$.

Definição 2.6. Sejam $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um conjunto aberto, $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^k$, com $k \geq 1$ ou $k = \omega$, e $p \in U$. Uma *seção transversal local* de X é uma aplicação $f : A \longrightarrow U$ de classe C^k tal que, para todo $a \in A$,

$$\{Jf(a)e_1, Jf(a)e_2, \ldots, Jf(a)e_{n-1}, X(f(a))\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^n$, onde $e_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ para cada $i \leq n-1$. Quando $f : A \longrightarrow \Sigma := f(A)$ for um homeomorfismo e $p \in \Sigma$, o conjunto Σ munido da topologia induzida é chamado de uma *seção transversal* de X por p.

Teorema 2.7 (**Teorema do Fluxo Tubular**). *Sejam p um ponto regular de* (2.1) *e $f : A \longrightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de X, com $0 \in A$ e $f(0) = p$, de modo que Σ seja uma seção transversal de X por p. Considere o campo constante $W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,*

$$W = (1, 0, \ldots, 0).$$

Então, existem uma vizinhança aberta V de p em U e um difeomorfismo $h : V \longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B_\delta(0)$ de classe C^k, onde $\delta, \varepsilon > 0$ e $B_\delta(0) \subset A$, tais que $\Sigma \cap V = f(B_\delta(0))$,

$$h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B_\delta(0)$$

e h é uma C^k- conjugação entres os campos $X\Big|_V$ e $W\Big|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times B_\delta(0)}$.

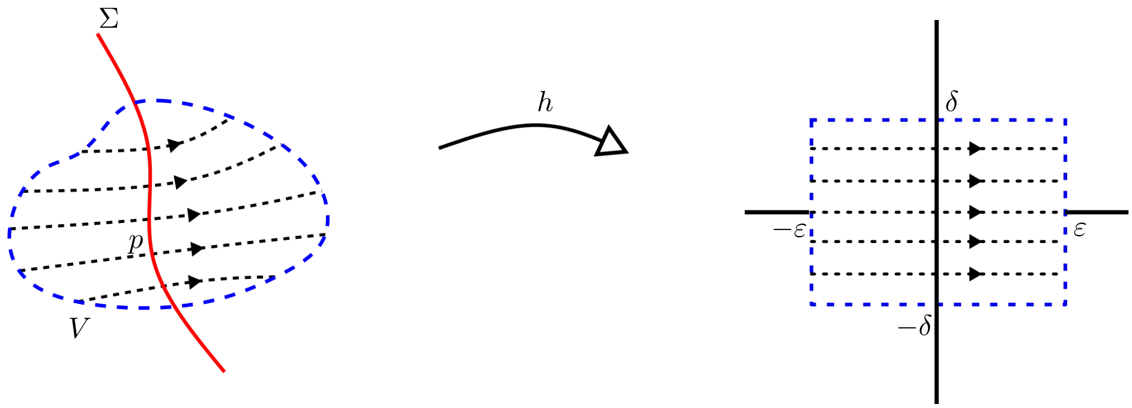


Figura 2.1: Vizinhança tubular por um ponto regular de um campo vetorial planar.

Demonstração. Veja [19, Capítulo VI, Seção 4, página 222, Observação 7 e Teorema 8]. □

Consideremos (2.1) com $n = 2$. Dado um ponto $p \in U$, denotemos $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = +\infty$, o conjunto $\omega-$*limite* de p é o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in U;\ \exists (t_n) \subset \mathbb{R} :\ t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ e } \varphi_p(t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q\}.$$

Analogamente, quando $\omega_-(p) = -\infty$,

$$\alpha(p) = \{q \in U;\ \exists (t_n) \subset \mathbb{R} :\ t_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ e } \varphi_p(t_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q\}$$

é o conjunto $\alpha-$*limite* de p. Denotemos por γ_p^- e γ_p^+ a semi-órbita negativa e a semi-órbita positiva por p, respectivamente. Isto é,

$$\gamma_p^- = \{\varphi_p(t);\ \omega_-(p) < t \leq 0\}$$

e

$$\gamma_p^+ = \{\varphi_p(t);\ 0 \leq t < \omega_+(p)\}.$$

Por [19, Capítulo VI, Seção 1, página 210, Corolário 4] segue que se existe um compacto K de modo que $\gamma_p^+ \subset K$ ($\gamma_p^- \subset K$), então $\omega_+(p) = +\infty$ ($\omega_-(p) = -\infty$). Diante disso, o próximo teorema, conhecido como Teorema de Poincaré-Bendixson, nos fornece quais os tipos de conjunto limite que φ_p pode convergir, sob certas condições. Recomendamos ler [8, Capítulo 1, Seção 1.4], no qual são apresentadas algumas propriedades dos conjuntos $\alpha-$limite e $\omega-$limite de p, necessárias para a demonstração do teorema em questão.

Teorema 2.8. *Considere $n = 2$ na definição do sistema* (2.1)*. Sejam $K \subset U$ um conjunto compacto e $p \in K$ tais que $\gamma_p^+ \subset K$ (respec. $\gamma_p^- \subset K$). Suponha que o campo X tenha um número finito de pontos de equilíbrio em K. Então, seguem as seguintes alternativas:*

1. *Se* $\omega(p)$ (*respec.* $\alpha(p)$) *tem somente pontos regulares, então* $\omega(p)$ (*respec.* $\alpha(p)$) *é uma trajetória periódica;*

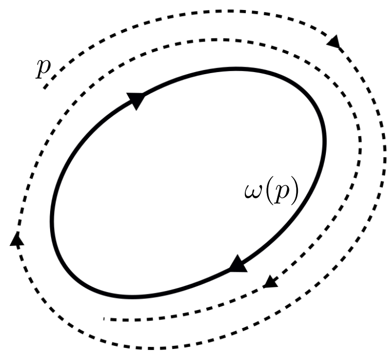


Figura 2.2: Trajetória periódica como $\omega-$limite de um ponto p.

2. *Se* $\omega(p)$ (*respec.* $\alpha(p)$) *contém pontos regulares e pontos de equilíbrio, então* $\omega(p)$ (*respec.* $\alpha(p)$) *é uma únião de órbitas, onde cada trajetória associada tende a um desses pontos de equilíbrio quando* $t \longrightarrow \pm\infty$*;*

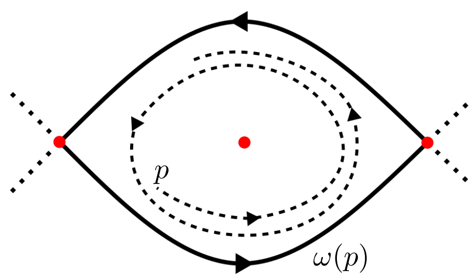


Figura 2.3: Conjunto $\omega-$limite de um ponto p como união de órbitas.

3. *Se* $\omega(p)$ *não possui pontos regulares, então* $\omega(p)$ *é um ponto de equilíbrio.*

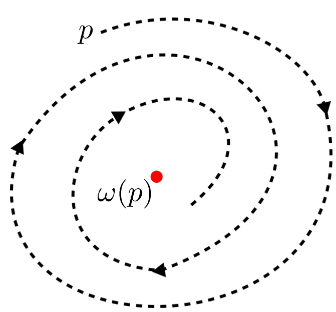


Figura 2.4: Um ponto de equilíbrio como $\omega-$limite de um ponto p.

Demonstração. Veja [8, Capítulo 1, Seção 1.7, página 24 à página 28]. □

2.2 Centros e anel periódico

Nesta seção, assumimos $n = 2$ e $U = \mathbb{R}^2$ em (2.1). Antes de definirmos o que seria um ponto de equilíbrio do tipo centro, vamos apresentar um certo tipo de curva fechada no plano que o divide em duas partes bem definidas. A estrutura geométrica das trajetórias periódicas, que são essenciais para a definição de centro, está totalmente ligada a esse tipo de curva.

Definição 2.9. Seja $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva contínua fechada, ou seja, $c(a) = c(b)$. A curva c é chamada de *curva fechada simples* ou *curva de Jordan* se c restrita ao intervalo $[a, b)$ é injetora. Comumente denota-se $c = c([a, b])$.

Teorema 2.10 (**Teorema da curva de Jordan**). *Seja $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan. Então, $\mathbb{R}^2 \backslash c$ é a união de dois conjuntos abertos conexos não vazios e disjuntos A e B, sendo A limitado e B ilimitado, tais que $c = \partial A = \partial B$.*

Demonstração. Veja [15, Capítulo 4]. □

Dada uma curva de Jordan c, os conjuntos A e B obtidos no Teorema 2.10 são chamados de *interior* de c e *exterior* de c, e são denotados por $\mathrm{Int}(c)$ e $\mathrm{Ext}(c)$, respectivamente. Notemos que $\mathbb{S}^1$ é a imagem da curva de Jordan $\overline{c} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\overline{c}(t) = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t)).$$

Diante disso, o resultado que segue complementa o Teorema 2.10, mostrando que na realidade o interior e o exterior de c, bem como seus fechos, são conexos por caminhos.

Teorema 2.11 (**Teorema de Jordan-Schönflies**). *Seja $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan. Então, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de tal modo que $h(c) = \mathbb{S}^1$. Como consequência,*

$$h(\mathrm{Int}(c)) = \mathrm{Int}(\overline{c}) \text{ e } h(\mathrm{Ext}(c)) = \mathrm{Ext}(\overline{c})$$

Demonstração. Veja [15, Capítulo 10, página 72, Teorema 4]. □

Definição 2.12. Um conjunto conexo por caminhos $V \subset \mathbb{R}^2$ é *simplesmente conexo* se para toda curva de Jordan c em V, $\mathrm{Int}(c) \subset V$.

Agora estamos aptos a definir o conceito de centro. Para isso, observemos que toda trajetória periódica de (2.1) é uma curva de Jordan.

Definição 2.13. Seja p_0 um ponto de equilíbrio do sistema (2.1). Diz-se que p_0 é um *centro* se existe uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{R}^2$ de p_0 simplesmente conexa tal que

1. o ponto p_0 é o único ponto de equilíbrio em V;

2. toda trajetória maximal φ_p por um ponto $p \in V\backslash\{p_0\}$, é uma trajetória periódica que está contida em V com $p \in \mathrm{Int}(\varphi_p)$.

A maior vizinhança aberta simplesmente conexa de p satisfazendo essas duas condições é chamada de *anel periódico de* p e é denotada por $\mathcal{P}$ (a dependência de p é implícita).

Um centro p_0 de (2.1) é *global* quando o anel periódico é todo o plano. A função T que associa cada trajetória periódica em $\mathcal{P}$ ao seu respectivo período é chamada de *função período* do centro p_0. Essa função, com uma parametrização adequada, é da mesma classe de diferenciabilidade do campo vetorial X (em um primeiro momento, veja [13], [6], [9] e [3]). Quando T é constante, diz-se que o centro é um *centro isócrono* e, nesse caso, quando o sistema em questão é analítico, o centro é não degenerado (veja [4]).

No que segue, apresentamos algumas propriedades já conhecidas do anel periódico de um centro. Recomendamos, então, a leitura de [19, Capítulo VI, seção 6] para o conhecimento da *transformação de Poincaré*, a qual descreve o comportamento do campo vetorial em torno de uma trajetória periódica. Deixamos implícito no enunciado dos resultados o fato de considerarmos um centro p_0 do sistema (2.1).

Lema 2.14. *Suponha $\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^2$. Se $p \in \partial\mathcal{P}$, então a trajetória de* (2.1) *por p está contida em $\partial\mathcal{P}$.*

Demonstração. Sejam $p \in \partial\mathcal{P}$ e $\varphi_p : I_p \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a trajetória maximal pelo ponto p. Uma vez que $\mathcal{P} \cap \partial\mathcal{P} = \emptyset$, obtemos

$$\varphi_p(I_p) \subset \partial\mathcal{P} \cup \mathrm{Int}(\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{P}).$$

Suponhamos, por absurdo, que exista $t_0 \in I_p$ tal que $\varphi_p(t_0) \in \mathrm{Int}(\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{P})$. Seja $\varepsilon > 0$ de modo que

$$B_\varepsilon(\varphi_p(t_0)) \subset \mathrm{Int}(\mathbb{R}^2\backslash\mathcal{P}).$$

Logo, do Teorema 2.3, segue que existem $\delta > 0$ e $\psi_q : I_q \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tais que

$$q \in B_\delta(p) \cap \mathcal{P} \text{ e } \psi_q(t_0) \in B_\varepsilon(\varphi_p(t_0)).$$

Contradição, pois a imagem de ψ_q está inteiramente contida em $\mathcal{P}$.

Portanto, para todo $t \in I_p$, $\varphi_p(t) \in \partial\mathcal{P}$. $\square$

Teorema 2.15. *Se X é analítico e $\mathcal{P}$ é limitado, então existe um ponto de equilíbrio em $\partial\mathcal{P}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{P}$ seja limitado e que não existam pontos de equilíbrio em $\partial\mathcal{P}$. Seja $p \in \partial\mathcal{P}$. Logo, do Lema 2.14 e do Teorema 2.8, segue que $\omega(p) \subset \partial\mathcal{P}$ e que $\omega(p)$ é uma trajetória periódica. Agora, pelo Teorema 2.3, temos

$$\omega(p) = \partial\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{P} = \text{Int}(\partial\mathcal{P}).$$

Consideremos a aplicação de Poincaré $\pi : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma$ onde Σ é uma seção transversal local por p e Σ_0 é uma vizinhança de p em Σ. Temos que π é uma aplicação analítica, pois o campo vetorial é analítico. Logo, π é a identidade em Σ_0. Levando em consideração o Teorema 2.7 aplicado em p, existe um conjunto aberto $\mathcal{Q}$ simplesmente conexo contendo p_0 e satisfazendo as condições da Definição 2.13 com $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{Q}$. Isso é um absurdo pela definição de $\mathcal{P}$.

Portanto, existe pelo menos um ponto de equilíbrio em $\partial\mathcal{P}$. □

Teorema 2.16. *Assuma $\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^2$. Considere $p \in \partial\mathcal{P}$ um ponto de equilíbrio e (x_n) uma sequência em $\mathcal{P}$ que converge para p. Denote por $T(x_n)$ o período da trajetória periódica pelo ponto x_n. Então,*

$$\lim_{n\to+\infty} T(x_n) = +\infty.$$

Demonstração. Sejam $p \in \partial\mathcal{P}$ um ponto de equilíbrio, (x_n) uma sequência que converge para o ponto p e $\varepsilon > 0$ tal que $p_0 \notin B_\varepsilon(p)$. Consideremos $M > 0$. Assim, pelo Teorema 2.3, existe $0 < \delta \leq \varepsilon$ de modo que, cada trajetória φ_q com $q \in B_\delta(p)$, está definida no intervalo $[0, M]$ e

$$\left|\left|\varphi_q(t) - p\right|\right| < \varepsilon$$

para todo $t \in [0, M]$. Da convergência de (x_n), temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in B_\delta(p)$. Denotemos por $T(x_n)$ o período da trajetória periódica φ_{x_n}. Como p_0 não pertence a bola $B_\varepsilon(p)$, segue que

$$T(x_n) > M, \text{ para cada } n \geq n_0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} T(x_n) = +\infty,$$

que encerra a demonstração. □

Corolário 2.17. *Se X é analítico e p_0 é um centro isócrono, então o anel periódico $\mathcal{P}$ de p_0 é ilimitado.*

Demonstração. Segue diretamente dos Teoremas 2.15 e 2.16. □

Agora, consideremos que o sistema (2.1) seja um sistema Hamiltoniano planar dado como em (1.1). Notemos que H é constante sobre cada trajetória φ_p de (1.1). Mais especificamente,

$$\forall t \in I_p,\ \ (H \circ \varphi_p)'(t) = 0.$$

Essa é uma característica importante dessa classe de sistemas, pois conecta a análise qualitativa de suas trajetórias com o estudo de suas curvas de nível. A menos de translação, podemos assumir que $p_0 = (0,0)$ e $H(0,0) = 0$. No resultado que segue, mostramos que trajetórias diferentes em $\mathcal{P}$ também possuem níveis distintos.

Teorema 2.18. *Trajetórias periódicas distintas em $\mathcal{P}$ estão em níveis diferentes.*

Demonstração. Consideremos α e β trajetórias periódicas distintas em $\mathcal{P}\backslash\{(0,0)\}$, com $\alpha \subset \operatorname{Int}(\beta)$. Suponhamos, por absurdo, que α e β estejam em um mesmo nível. Denotemos por $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ o aberto limitado e conexo por caminhos tal que $\partial\mathcal{R} = \alpha \cup \beta$, ou seja, $\mathcal{R}$ é a região entre α e β.

Seja $c : [0,1] \longrightarrow \overline{\mathcal{R}}$ uma curva regular simples de tal forma que

$$c(0) \in \alpha,\ \ c(1) \in \beta \text{ e } c((0,1)) \subset \mathcal{R}.$$

Como $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$, existe $t_0 \in (0,1)$ de modo que $h = (H \circ c)(t_0)$ ou é valor de máximo ou valor de mínimo global de $H \circ c$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que seja valor de máximo global. Consideremos $\gamma \subset \mathcal{R}$ a trajetória periódica tal que $\gamma(0) = c(t_0)$. Temos que γ separa $\mathcal{R}$ em dois abertos disjuntos $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ conexos por caminhos, onde $\partial\mathcal{R}_1 = \alpha \cup \gamma$ e $\partial\mathcal{R}_2 = \gamma \cup \beta$. Veja a Figura 2.5. Tomemos o conjunto

$$C = \{t \in (0,1);\ c(t) \in \gamma\} \neq \emptyset.$$

Denotemos $t_1 = \inf C$ e $t_2 = \sup C$. Como c é uma curva contínua, obtemos que

$$0 < t_1 \leq t_2 < 1 \text{ e } t_1, t_2 \in C.$$

Seja $\overline{\gamma}$ a trajetória periódica tal que $\overline{\gamma}(t_1) = c(t_1)$ ($\overline{\gamma}$ é igual a γ a menos de uma reparametrização do tempo). Denotemos por T o período de $\overline{\gamma}$. Logo, existe $s \in [t_1, t_1 + T)$ de tal forma que $\overline{\gamma}(s) = c(t_2)$. Observemos que

$$t_1 = t_2 \text{ se, e somente se, } t_0 = t_1 = t_2 = s.$$

Seja

$$r = \min\{n \in \mathbb{N};\ s < n\}.$$

Consideremos $\overline{c} : [s,r] \longrightarrow \overline{\mathcal{R}}_2$ definida por

$$\overline{c}(t) = c\left(t_2 + \left(\frac{1 - t_2}{r - s}\right)(t - s)\right).$$

Dessa forma, o caminho $\lambda : [0, r] \longrightarrow \overline{\mathcal{R}}$ dado por

$$\lambda(t) = \begin{cases} c(t), \ t \in [0, t_1] \\ \overline{\gamma}(t), \ t \in [t_1, s] \\ \overline{c}(t), \ t \in [s, r] \end{cases}$$

é contínuo e, para todo $t \in [0, r]$,

$$(H \circ \lambda)(t) \leq h, \tag{2.3}$$

com $(H \circ \lambda)(t) = h$ para $t \in [t_1, s]$.

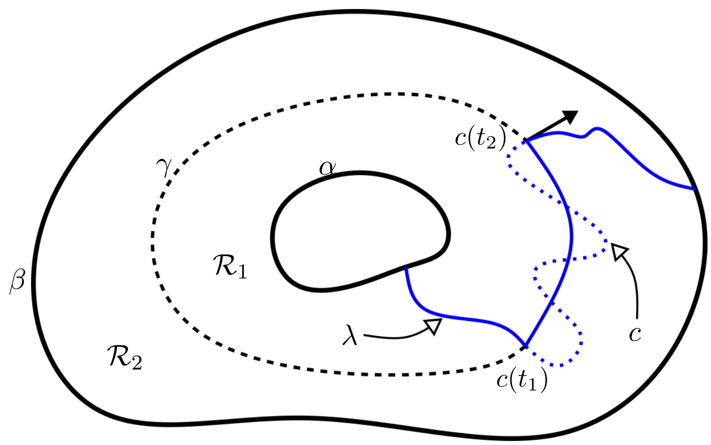


Figura 2.5: Trajetória periódica $\gamma \subset \mathcal{R}$ com gradiente de H sobre γ apontando para $\mathrm{Ext}(\gamma)$.

Lembremos que ou o gradiente de H sobre γ aponta para o exterior de γ ou o gradiente de H em γ aponta para o interior da mesma. Como $\lambda((0, t_1)) \subset \mathcal{R}_1$ e $\lambda((s, r)) = c((t_2, 1)) \subset \mathcal{R}_2$, obtemos que

$$H \circ \lambda \text{ é estritamente crescente para } s \leq t \ll r$$

ou

$$H \circ \lambda \text{ é estritamente decrescentente para } 0 \ll t \leq t_1.$$

Isso é um absurdo por (2.3).

Portanto, trajetórias periódicas distintas em $\mathcal{P} \backslash \{(0, 0)\}$ estão em curvas de nível diferentes. □

Do Teorema 2.18 segue que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $H(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \mathcal{P} \backslash \{(0, 0)\}$. Feito isso, da continuidade de H e novamente pelo Teorema 2.18 obtemos que existe $h_0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tal que

$$H(\mathcal{P}) = [0, h_0).$$

Dessa forma, cada $h \in (0, h_0)$ está associado a uma única trajetória em $\mathcal{P}$. Consequentemente, podemos considerar a função período da forma $T : (0, h_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $T(h)$ é o período da trajetória periódica em $\mathcal{P}$ associada a h.

Nos próximos resultados, apresentamos uma relação intrínseca entre h_0 e $\mathcal{P}$, e um corolário direto do Teorema 2.16 para T parametrizada da forma acima.

Teorema 2.19. *Se $\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^2$, então $h_0 < +\infty$. Mais ainda, $H(\partial\mathcal{P}) = h_0$. Reciprocamente, se $h_0 < +\infty$ e H é uma função polinomial, então $\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Consideremos $\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^2$. Dado $p \in \partial\mathcal{P}$, existe uma sequência (x_n) em $\mathcal{P}$ que converge para p. Assim,

$$0 \leq H(p) = \lim_{n\to+\infty} H(x_n) \leq h_0.$$

Suponhamos que $H(p) < h_0$. Sejam $H(p) < \overline{h} < h_0$ e $\gamma \subset \mathcal{P}$ a trajetória periódica associada ao nível $\overline{h}$. Logo, existem $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $B_\varepsilon(p) \subset \mathrm{Ext}(\gamma)$,

$$x_{n_0} \in B_\varepsilon(p) \text{ e } H(x_{n_0}) < \overline{h}.$$

Da continuidade de H (juntamente com o Teorema 2.11) segue que existe uma trajetória periódica $\alpha \subset \mathrm{Int}(\gamma)$ cujo nível é igual ao da trajetória por x_{n_0}. Absurdo, pelo Teorema 2.18. Dessa forma, h_0 é finito e $H(\partial\mathcal{P}) = h_0$.

Agora, suponhamos h_0 finito e H polinomial. Se $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq H(x, 0) < h_0 < +\infty.$$

Isso é um absurdo, uma vez que nenhum polinômio é limitado. Portanto, $\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^2$. □

Corolário 2.20. *Suponha $\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^2$ e seja $p \in \partial\mathcal{P}$ um ponto de equilíbrio. Então,*

$$\lim_{h\to h_0} T(h) = +\infty.$$

Demonstração. Se a tese for falsa, nós conseguiremos produzir uma sequência (x_n) em $\mathcal{P}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = p \text{ e } \left|T(x_n)\right| \leq M$$

onde M é uma constante real positiva e $T(x_n)$ é o período da trajetória periódica pelo ponto x_n. Porém, isso é um absurdo pelo Teorema 2.16. □

Observação 2.21. Uma vez que não existem pontos de equilíbrio, a menos da origem, em $\mathcal{P}$, podemos ordenar de forma total o conjunto $\mathcal{P}$. De fato, dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{P} \backslash \{(0,0)\}$, definimos

$$\gamma_1 \prec \gamma_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Int}(\gamma_1) \subsetneq \mathrm{Int}(\gamma_2).$$

Notemos que $\gamma_1 = \gamma_2$ se, e somente se, $\mathrm{Int}(\gamma_1) = \mathrm{Int}(\gamma_2)$. Logo, o conjunto $\mathcal{P}$ com a ordem $\preceq$ é totalmente ordenado.

Dado $\gamma \subset \mathcal{P}$, denotemos por $T(\gamma)$ seu período. Consideremos $(\mathcal{P}, \preceq)$, com $\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^2$, e suponhamos que exista um ponto de equilíbrio $p \in \partial\mathcal{P}$. Dizemos que

$$\lim_{\gamma \to \partial\mathcal{P}} T(\gamma) = +\infty \tag{2.4}$$

quando

$$\forall M > 0,\ \exists \overline{\gamma} \in \mathcal{P};\ \forall \gamma \in \mathcal{P},\ \gamma \succ \overline{\gamma},\ T(\gamma) > M.$$

Nessas condições, provar (2.4) é equivalente a provar o Teorema 2.16.

CAPÍTULO 3

Centros em sistemas Hamiltonianos polinomiais biquadrados

Com o intuito de auxiliar na compreensão do estudo desenvolvido neste capítulo, recomendamos a leitura do Capítulo 2, dando uma atenção especial à Seção 2.2.

Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial definida por $H(x, y) = A(x) + B(x)y^2 + C(x)y^4$, onde A, B e C são polinômios, com $C \neq 0$ e $H(0, 0) = 0$. Consideremos o sistema Hamiltoniano associado a H,

$$\begin{cases} x' = -4C(x)y^3 - 2B(x)y \\ y' = A'(x) + B'(x)y^2 + C'(x)y^4 \end{cases}. \tag{3.1}$$

Suponhamos que a origem seja um centro não degenerado, isto é,

$$A(0) = A'(0) = 0 \text{ e } 2B(0)A''(0) > 0.$$

Sabemos da Seção 2.2 que, sem perda de generalidade, para todo ponto (x, y) no círculo periódico $\mathcal{P}$ associado à origem, $H(x, y) > 0$. Logo. $B(0) > 0$ e $A''(0) > 0$.

Uma trajetória periódica em $\mathcal{P}$ passa pelo eixo x somente duas vezes. Isso se deve a forma biquadrada em y da função H. Dado $h \in (0, h_0)$, denotemos por γ_h a trajetória periódica contida em $\mathcal{P}$ associada ao nível h, e por $(x_0(h), 0)$ e $(x_1(h), 0)$ os pontos de intersecção de γ_h com o eixo x. Observemos que $x_0(h) < 0 < x_1(h)$ e que dado $\widetilde{x} \in (x_0(h), x_1(h))$, γ_h intersecta a reta

$$\{(\widetilde{x}, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}$$

em somente dois pontos (simetricamente opostos em relação ao eixo x) e essas intersecções são transversais. Abusando da notação, escrevemos $(0, h_0]$ tanto para h_0 finito quanto para infinito sendo que, nesse último caso, $(0, h_0]$ se refere ao intervalo $(0, +\infty)$.

Para que consigamos determinar as possíveis formas de $\mathcal{P}$, precisamos entender a influência dos polinômios A, B e C sobre cada γ_h. Além disso, conhecer relações entre esses polinômios e h_0. Para isso, estudamos inicialmente o comportamento desses polinômios em cada intervalo $(x_0(h), x_1(h))$.

Lema 3.1. *Seja $h \in (0, h_0)$. Considere a trajetória periódica $\gamma_h \subset \mathcal{P}$. Então*

$$\forall x \in [x_0(h), 0),\ \ A'(x) < 0$$

e

$$\forall x \in (0, x_1(h)],\ \ A'(x) > 0.$$

Demonstração. Seja $\gamma_h \subset \mathcal{P}$ a trajetória periódica de (3.1) associada ao nível $h < h_0$. Denotemos por γ_h^+ a parte de γ_h contida no semi-plano acima do eixo x. Suponhamos, por contradição, que exista $0 \neq \widetilde{x} \in [x_0(h), x_1(h)]$ tal que $A'(\widetilde{x}) = 0$. Assim, $(\widetilde{x}, 0)$ é um ponto de equilíbrio e, daí, $\widetilde{x} \in (x_0(h), x_1(h))$. Como γ_h^+ intersecta a reta $\{(\widetilde{x}, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}$ em dois pontos ambos diferentes de $(\widetilde{x}, 0)$, obtemos que $(\widetilde{x}, 0) \in \mathrm{Int}(\gamma_h) \subset \mathcal{P}$. Absurdo. Logo, $A'(x) \neq 0$ para todo $0 \neq x \in [x_0(h), x_1(h)]$.

Portanto,

$$\forall x \in [x_0(h), 0),\ \ A'(x) < 0$$

e

$$\forall x \in (0, x_1(h)],\ \ A'(x) > 0,$$

pois A é contínua e $A''(0) > 0$. □

Observação 3.2. Assumamos que $\{x \in \mathbb{R};\ A'(x) = 0\} \neq \{0\}$. Sejam

$$a_0 = \max\{x \in \mathbb{R}_-^*;\ A'(x) = 0\} \text{ e } a_1 = \min\{x \in \mathbb{R}_+^*;\ A'(x) = 0\},$$

caso existam. Suponhamos, por absurdo, que

$$h_0 > \min\{A(a_0), A(a_1)\}.$$

Sem perda de generalidade, $\min\{A(a_0), A(a_1)\} = A(a_0)$. Consideremos a trajetória periódica $\gamma_{A(a_0)} \subset \mathcal{P}$. Assim, para todo $x \in (a_0, 0)$, $A'(x) < 0$. Logo, $x_0(A(a_0)) \leq a_0$. Dessa forma, do Lema 3.1 obtemos que $A'(a_0) < 0$ e isso é um absurdo. Então,

$$h_0 \leq \min\{A(a_0), A(a_1)\}.$$

Desse modo, sempre que o polinômio A possuir um ponto crítico diferente do zero, h_0 será finito. Além disso, existirão $x_0(h_0) < 0$ e $x_1(h_0) > 0$ tais que $A(x_0(h_0)) = A(x_1(h_0)) = h_0$,

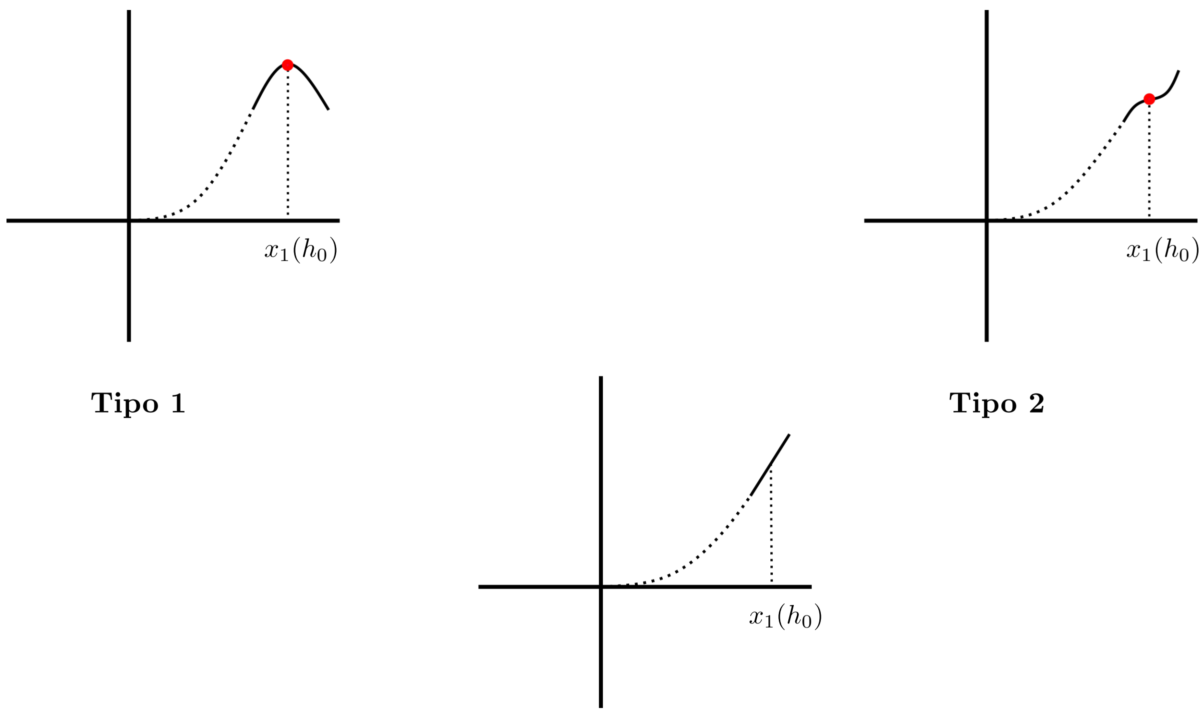
$$\forall x \in (x_0(h_0), 0),\ \ A'(x) < 0$$

e

$$\forall x \in (0, x_1(h_0)),\ \ A'(x) > 0.$$

Quando $h_0 = +\infty$, com certo abuso de notação, $x_0(h_0) = -\infty$ e $x_1(h_0) = +\infty$.

Da Observação 3.2 obtemos que, para $h_0 < +\infty$, o polinômio A, relativamente próximo de $x_1(h_0)$, tem um dos três tipos de comportamento dados na Figura 3.1, sendo $(x_1(h_0), 0)$ ponto de equilíbrio se A for do **Tipo 1** ou do **Tipo 2**, já que em ambos os casos $A'(x_1(h_0)) = 0$.



Tipo 3

Figura 3.1: Possíveis comportamentos do polinômio A próximo de $x_1(h_0)$.

Refletindo A em torno do eixo y e trocando $x_1(h_0)$ por $x_0(h_0)$ na Figura 3.1, seguem os possíveis comportamentos de A próximo de $x_0(h_0)$.

Observação 3.3. Seja $\overline{x} \in (x_0(h_0), x_1(h_0))$ com $B(\overline{x}) \leq 0$. Então, $C(\overline{x}) > 0$. De fato, suponhamos que $C(\overline{x}) \leq 0$. Sem perda de generalidade, consideremos $\overline{x} \in (0, x_1(h_0))$ (o caso $\overline{x} \in (x_0(h_0), 0)$ é análogo). Para todo $x \in (\overline{x}, x_1(h_0))$, a trajetória $\gamma_{A(x)}$ cruza a reta $\{(\overline{x}, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}$ e, daí, existe $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$A(x) = H(\overline{x}, \overline{y}) \leq A(\overline{x}).$$

Contradição, pelo Lema 3.1.

Lema 3.4. *Se $C(0) < 0$, então $\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^2$ e $h_0 \leq -\dfrac{B(0)^2}{4C(0)}$.*

Demonstração. Assumamos que $C(0) < 0$. Se $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ segue, pelo Teorema 2.19, que $h_0 = +\infty$ e $H(\mathbb{R}^2) = [0, +\infty)$. Por outro lado,

$$\lim_{y \to +\infty} H(0, y) = \lim_{y \to +\infty} [B(0)y^2 + C(0)y^4] = -\infty.$$

Absurdo. Dessa maneira, $\mathcal{P} \neq \mathbb{R}^2$.

Denotemos $\widetilde{y} = \sqrt{-\dfrac{B(0)}{2C(0)}}$ e $h_1 = H(0, \widetilde{y})$. O gráfico do polinômio $H(0, y)$ é dado como na Figura 3.2.

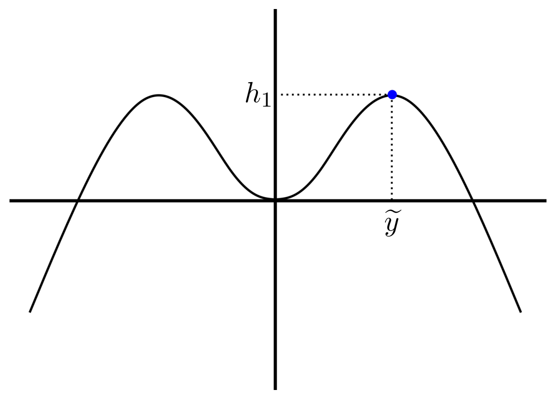


Figura 3.2: Gráfico do polinômio $H(0, y)$ com $C(0) < 0$.

Como h_1 é o valor de máximo do polinômio $H(0, y)$, concluímos que $h_0 \leq h_1$. $\square$

Dado $h \in (0, h_0]$, a forma biquadrada de H implica que para analisarmos a trajetória γ_h, basta estudarmos a parte curva de nível h no semi-plano acima do eixo x. Consideremos, então, o polinômio $\Delta_h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Delta_h(x) = B(x)^2 - 4C(x)[A(x) - h].$$

Sejam

$$\mathcal{D}_1^h = \left\{ x \in \mathbb{R};\ \Delta_h(x) \geq 0,\ C(x) \neq 0 \text{ e } \frac{-B(x) + \sqrt{\Delta_h(x)}}{2C(x)} \geq 0 \right\}$$

e

$$\mathcal{D}_2^h = \{ x \in \mathbb{R};\ \Delta_h(x) \geq 0 \text{ e } C(x) \neq 0 \}.$$

Temos que $\mathcal{D}_1^h, \mathcal{D}_2^h \neq \emptyset$. Sejam $y_1^h : \mathcal{D}_1^h \longrightarrow \mathbb{R}$ e $y_2^h : \mathcal{D}_2^h \longrightarrow \mathbb{C}$ as funções definidas por

$$y_1^h(x) = \sqrt{\frac{-B(x) + \sqrt{\Delta_h(x)}}{2C(x)}}$$

e

$$y_2^h(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{-B(x) - \sqrt{\Delta_h(x)}}{2C(x)}}, \text{ se } \dfrac{-B(x) - \sqrt{\Delta_h(x)}}{2C(x)} \geq 0 \\ \\ \sqrt{\dfrac{B(x) + \sqrt{\Delta_h(x)}}{2C(x)}}i, \text{ se } \dfrac{-B(x) - \sqrt{\Delta_h(x)}}{2C(x)} < 0 \end{cases}.$$

Suponhamos que $h \in (0, h_0)$. Notemos que do Lema 3.4 segue que Δ_h não é identicamente nulo. Para $x \in (x_0(h), x_1(h))$, temos que $\Delta_h(x) \geq 0$, uma vez que existe um único $y > 0$ tal que $(x, y) \in \gamma_h$. Se $\Delta_h(x) = 0$, então da Observação 3.3 segue que $C(x) < 0$ e $B(x) > 0$ e, nesse caso, como as raízes de Δ_h são isoladas, obtemos que existe um intervalo aberto $I \subset (x_0(h), x_1(h))$ centrado em x tal que $I \subset \mathcal{D}_1^h, \mathcal{D}_2^h$,

$$y = y_1^h(x) = y_2^h(x) \text{ e } y_2^h\Big|_{I\setminus\{x\}} > y_1^h\Big|_{I\setminus\{x\}} > 0.$$

Logo, segue do Teorema 2.7 que (x, y) é um ponto de equilíbrio, e isso é um absurdo. Veja a Figura 3.3.

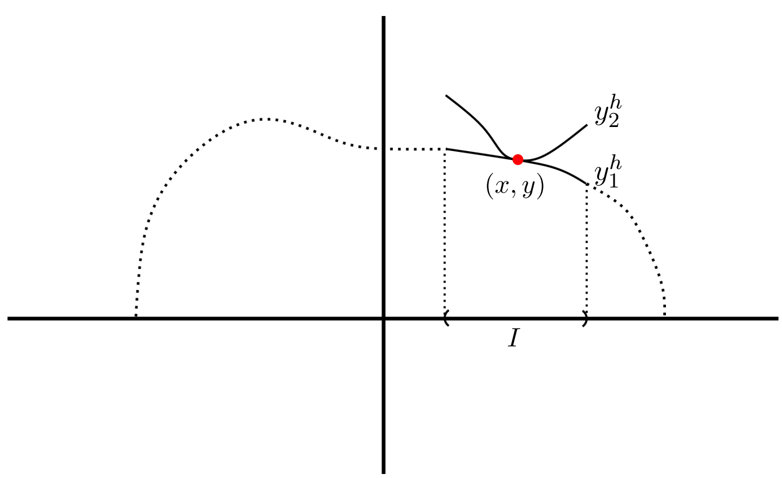


Figura 3.3: Curva de nível $h \in (0, h_0)$ em uma vizinhança do ponto de equilíbrio (x, y).

Concluímos, então, que

$$\forall h \in (0, h_0),\ \forall x \in (x_0(h), x_1(h)),\ \Delta_h(x) > 0.$$

Como consequência, $\Delta_h(x_0(h)), \Delta_h(x_1(h)) \geq 0$.

Agora, tomemos $x \in [x_0(h_0), x_1(h_0)]$, com $h_0 < +\infty$. Para $x = x_0(h_0)$ ou $x = x_1(h_0)$, temos

$$\Delta_{h_0}(x) = B(x)^2 \geq 0.$$

Se $x \in (x_0(h_0), x_1(h_0))$, então para todo $h \in (A(x), h_0)$, $\Delta_h(x) > 0$, pois $x \in (x_0(h), x_1(h))$. Logo,

$$\Delta_{h_0}(x) = \lim_{h \to h_0} \Delta_h(x) \geq 0.$$

Portanto,

$$\forall x \in [x_0(h_0), x_1(h_0)],\ \Delta_{h_0}(x) \geq 0.$$

Teorema 3.5. *Seja* $\overline{x} \in \mathbb{R}$ *e suponha que* $B(\overline{x})C(\overline{x}) < 0$. *Logo,* $\left(\overline{x}, \pm\sqrt{\dfrac{-B(\overline{x})}{2C(\overline{x})}}\right)$ *são pontos de equilíbrio do sistema* (3.1) *se, e somente se,*

$$(B^2 - 4C[A - h])'(\overline{x}) = 0$$

com $h = A(\overline{x}) - \dfrac{B(\overline{x})^2}{4C(\overline{x})}$.

Demonstração. Temos que

$$H_y\left(\overline{x}, \pm\sqrt{\frac{-B(\overline{x})}{2C(\overline{x})}}\right) = 0.$$

Uma vez que

$$(B^2 - 4C[A - h])'(\overline{x}) = -4C(\overline{x})H_x\left(\overline{x}, \pm\sqrt{\frac{-B(\overline{x})}{2C(\overline{x})}}\right)$$

segue, então, o resultado. □

Corolário 3.6. *Se* $C(0) < 0$ *e* $h_0 = -\dfrac{B(0)^2}{4C(0)}$, *então* $\left(0, \pm\sqrt{\dfrac{-B(0)}{2C(0)}}\right)$ *são pontos de equilíbrio do sistema* (3.1).

Demonstração. Como $\Delta_{h_0}(0) = 0$ e $\Delta_{h_0}(x) \geq 0$ em $(x_0(h_0), x_1(h_0))$, segue que $\Delta'_{h_0}(0) = 0$. Assim, do Teorema 3.5 concluímos que os pontos $\left(0, \pm\sqrt{\dfrac{-B(0)}{2C(0)}}\right)$ são pontos de equilíbrio. □

O resultado que segue apresenta uma propriedade importante de polinômios "relativamente próximos". Basicamente, dados $p = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + 0z^{n+1} + \ldots + 0z^m$ e $q = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m$ com $0 \leq n \leq m$, $m \neq 0$ e $a_n, b_m \neq 0$, conforme os coeficientes de q se aproximam dos coeficientes correspondentes de p, $m - n$ raízes de q tendem ao infinito em módulo, e as n raízes restantes se aproximam das raízes de p, contando e respeitando a multiplicidade das raízes de p.

Por exemplo, para $n = 2$ e $m = 4$, suponhamos que p tenha uma raiz dupla α_1. Assim, conforme q se aproxima de p, duas das raízes de q tendem em módulo para o infinito e duas tendem a α_1.

Essa propriedade é essencial para toda a construção que desenvolvemos a seguir.

Teorema 3.7 (**Teorema da continuidade das raízes de um polinômio**). *Considere números $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \geq n \geq 0$ e $m \neq 0$, e $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, com $a_n \neq 0$, um polinômio sobre $\mathbb{C}$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ as raízes de p, caso existam. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que, dados $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ tais que $b_m \neq 0$,*

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ |b_k - a_k| < \delta$$

e, para $m > n$,

$$\forall k \in \{n+1, n+2, \ldots, m\}, \ |b_k| < \delta,$$

as m raízes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$ do polinômio $q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ (a menos de organização) satisfazem

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ |\beta_k - \alpha_k| < \varepsilon$$

e, se $m > n$,

$$\forall k \in \{n+1, n+2, \ldots, m\}, \ |\beta_k| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Demonstração. Veja [20, Teorema 1]. $\square$

Seja $J \subseteq (x_0(h), x_1(h))$ um intervalo aberto, onde $h \in (0, h_0]$. Suponhamos que $B\Big|_J > 0$. Assim, para cada $x \in J$,

$$C(x) < 0 \Longrightarrow -B(x) + \sqrt{\Delta_h(x)} < 0$$

e

$$C(x) > 0 \Longrightarrow -B(x) + \sqrt{\Delta_h(x)} > 0.$$

Dessa forma, em intervalos abertos contidos em J em que ocorre $C \neq 0$:

- as funções y_1^h e y_2^h estão bem definidas, com

$$y_2^h \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \text{ quando } C > 0,$$

e, quando $C < 0$, $y_2^h \in \mathbb{R}$. Mais ainda, em ambos os casos,

$$\left|y_2^h\right| \geq y_1^h$$

(a igualdade pode ocorrer em algum valor x somente se $h = h_0 < +\infty$ e $C(x) < 0$);

- se $h_0 = +\infty$, então $C > 0$. De fato, se existe $x \in J$ em um tal intervalo de modo que $C(x) < 0$, então $y_1^h(x) < y_2^h(x)$ e os pontos $(x, y_1^h(x))$ e $(x, y_2^h(x))$ pertencem a trajetória γ_h. Contradição.

Caso exista $\widetilde{x} \in J$ com $C(\widetilde{x}) = 0$, seguirá do Teorema 3.7 que

$$\lim_{x \to \widetilde{x}} y_1^h(x) = \sqrt{\frac{h - A(\widetilde{x})}{B(\widetilde{x})}} > 0 \text{ e } \lim_{x \to \widetilde{x}} \left|y_2^h(x)\right| = +\infty.$$

Agora, quando $B\Big|_J \leq 0$, segue diretamente da Observação 3.3 que $C > 0$ no intervalo J. Consequentemente, as funções y_1^h e y_2^h estão definidas em J onde y_1^h é a única com imagem em $\mathbb{R}$.

Consideremos todas as raízes $r_1 < r_2 < \ldots < r_i < \ldots < r_m$ de B que estão no intervalo $(x_0(h), x_1(h))$. Assim, aplicando os raciocínios anteriores em cada um dos intervalos (r_i, r_{i+1}), com $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, concluímos que a parte da trajetória γ_h (bem como a fronteira de $\mathcal{P}$ para $h = h_0$) contida no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in (x_0(h), x_1(h))\}$ é formada por "colagens"dos gráficos de y_1^h e de $-y_1^h$ com os pontos

$$\left(\widetilde{x}, \sqrt{\frac{h - A(\widetilde{x})}{B(\widetilde{x})}}\right),$$

onde $C(\widetilde{x}) = 0$ e $B(\widetilde{x}) > 0$.

Observemos que se $h_0 < +\infty$ e $\Delta_{h_0} = 0$, temos $B > 0$ e $C < 0$ em $(x_0(h_0), x_1(h_0))$, com $B(x_0(h_0)) = B(x_1(h_0)) = 0$. Logo, $y_1^{h_0} = y_2^{h_0}$ está bem definida em $(x_0(h_0), x_1(h_0))$ e, pelo Teorema 3.5, todos os pontos do conjunto

$$\left\{(x, y_1^{h_0}(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in (x_0(h_0), x_1(h_0))\right\}$$

são pontos de equilíbrio.

Com a finalidade de descrevermos os possíveis traços de uma trajetória periódica contida em $\mathcal{P}$ bem como o conjunto $\partial\mathcal{P}$, a seguir analisamos mais a fundo o comportamento das funções y_1^h e y_2^h em $\mathbb{R}_+$. A análise para $\mathbb{R}_-$ é análoga.

Antes, lembremos que dados $S \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\emptyset \neq U \subset S$, a fronteira de U visto como subconjunto de (S, τ_S), onde τ_S é a topologia induzida em S pela topologia usual de $\mathbb{R}^2$, é o conjunto

$$\partial_S U = \{x \in S;\ \forall\ V \in \tau_S,\ \text{com } x \in V,\ V \cap U \neq \emptyset \text{ e } V \cap U^c \neq \emptyset\}.$$

Quando $S = \mathbb{R}^2$, escreve-se somente ∂U. Além disso, supondo que $\partial_S U = \emptyset$ e (S, τ_S) é um espaço topológico conexo, temos $U = S$. De fato, sob tais condições,

$$\overline{U}_S = \text{Int}_S U \cup \partial_S U = \text{Int}_S U.$$

Logo, U é um conjunto aberto e fechado em (S, τ_S) e, daí, como U é não vazio e (S, τ_S) é conexo, segue que $U = S$.

Seja $h \in (0, h_0]$. Suponhamos $h_0 < +\infty$ (basta assumir h_0 finito para descrever uma trajetória de nível $h < h_0$). Por questão de notação, nos casos que seguem denotemos $x_1(h)$, y_1^h e y_2^h por x_1, y_1 e y_2 respectivamente. Além disso, sempre que nos referirmos a uma trajetória em $\mathcal{P}$ e a $\partial\mathcal{P}$ em algumas das figuras que seguem, estaremos na realidade considerando a parte da trajetória e de $\partial\mathcal{P}$ contida no primeiro quadrante do plano. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que, para todo $x \in (x_1 - \delta, x_1)$,

$$B(x), C(x) \neq 0,\ A - h < 0 \text{ e, se } \Delta_h \text{ não for identicamente nulo, } \Delta_h(x) > 0.$$

Dividimos nossa análise nos casos que seguem.

Caso 1. $\boldsymbol{B(x_1) = 0}$ **e** $\boldsymbol{C(x_1) = 0}$.

A única possibilidade para esse caso é $h = h_0$. Assumamos que x_1 seja uma raiz de multiplicidade k_A de $A - h_0$, k_B de B e k_C de C. Seja $\overline{k} = \min\{k_A, k_B, k_C\}$. Logo,

$$H(x, y) - h_0 = (x - \overline{x})^{\overline{k}} H_{\overline{k}}(x, y)$$

onde $H_{\overline{k}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$H_{\overline{k}}(x, y) = A_{\overline{k}}(x) + B_{\overline{k}}(x) y^2 + C_{\overline{k}}(x) y^4$$

com $A_{\overline{k}}, B_{\overline{k}}, C_{\overline{k}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ polinômios e $\{A_{\overline{k}}(x_1), B_{\overline{k}}(x_1), C_{\overline{k}}(x_1)\} \neq \{0\}$. Notemos que, a menos da reta $\{(x_1, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}$, os zeros de H e $H_{\overline{k}}$ são os mesmos.

Primeiramente, suponhamos que $k_A < \min\{k_B, k_C\}$. Assim, $\overline{k} = k_A$,

$$B_{\overline{k}}(x_1) = C_{\overline{k}}(x_1) = 0 \text{ e } A_{\overline{k}}(x_1) \neq 0.$$

Desse modo, tomando $p = H_{\overline{k}}(x_1, \cdot)$ no Teorema 3.7, obtemos que

$$\lim_{x \to x_1^-} y_1(x) = \lim_{x \to x_1^-} \left| y_2(x) \right| = +\infty.$$

Veja a forma **(1)** na Figura 3.4.

Suponhamos $k_A \geq \min\{k_B, k_C\}$. Se $k_C \leq k_B$, então $\overline{k} = k_C$ e $C_{\overline{k}}(x_1) \neq 0$. Dessa forma, $H_{\overline{k}}(x_1, \cdot)$ tem quatro raízes em $\mathbb{C}$. Considerando, novamente, $p = H_{\overline{k}}(x_1, \cdot)$ no Teorema 3.7, obtemos que existem $0 \leq y_0 \in \mathbb{R}$ e $\widetilde{y}_0 \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lim_{x \to x_1^-} y_1(x) = y_0 \text{ e } \lim_{x \to x_1^-} y_2(x) = \widetilde{y}_0.$$

Além disso, o ponto (x_1, y_0) é ponto de equilíbrio. Caso Δ_{h_0} seja identicamente nulo, $y_0 = \widetilde{y}_0$. Veja as formas **(2)** e **(3)** na Figura 3.4. Agora, assumamos $k_C > k_B$. Daí,

$$\overline{k} = k_B, \; B_{\overline{k}}(x_1) \neq 0 \text{ e } C_{\overline{k}}(x_1) = 0.$$

Notemos que $\Delta_{h_0} = 0$ não ocorre nessa hipótese. Logo, $H_{\overline{k}}(x_1, \cdot)$ possui duas raízes em $\mathbb{C}$. Se $B\Big|_{(x_1-\delta, x_1)} > 0$ então,

$$\left| y_2 \right| \Big|_{(x_1-\delta, x_1)} > \left| y_1 \right| \Big|_{(x_1-\delta, x_1)}.$$

Assim, pelo Teorema 3.7, existe $0 \leq y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_1^-} y_1(x) = y_0 \text{ e } \lim_{x \to x_1^-} \left| y_2(x) \right| = +\infty,$$

com (x_1, y_0) ponto de equilíbrio. Veja as formas **(2)** e **(3)** na Figura 3.4. Se $B\Big|_{(x_1-\delta, x_1)} < 0$, então

$$C\Big|_{(x_1-\delta, x_1)} > 0 \text{ e } \left| y_1 \right| \Big|_{(x_1-\delta, x_1)} > \left| y_2 \right| \Big|_{(x_1-\delta, x_1)}.$$

Desse modo, existe $\widetilde{y}_0 \in \mathbb{C}$ de tal forma que

$$\lim_{x \to x_1^-} y_1(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to x_1^-} y_2(x) = \widetilde{y}_0.$$

Veja a forma **(1)** na Figura 3.4.

Em cada um dos casos expostos na Figura 3.4, tomemos

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \; 0 < x < x_1 \text{ e } 0 < y < y_1(x)\}.$$

Logo,

$$\partial_S(\mathcal{P} \cap S) = \partial(\mathcal{P} \cap S) \cap S = \partial\mathcal{P} \cap S = \emptyset$$

Como (S, τ_S) é um espaço conexo, segue que $\mathcal{P} \cap S = S$.

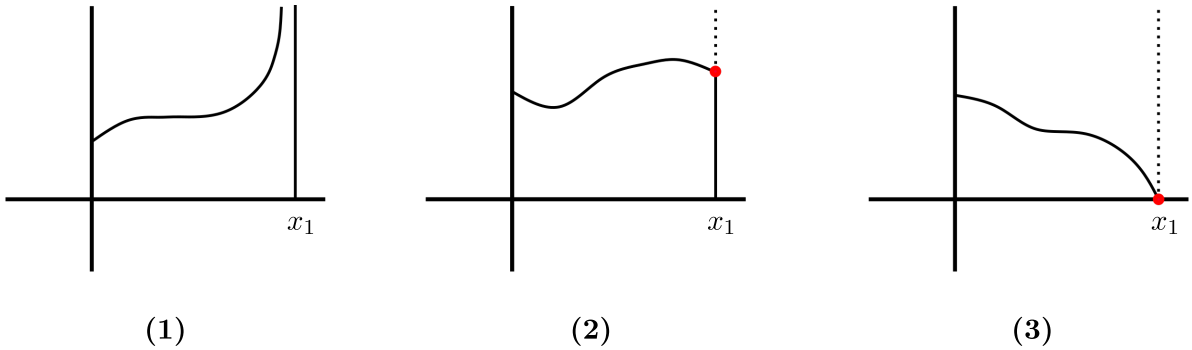


Figura 3.4: Possíveis formas de $\partial\mathcal{P}$ que derivam do **Caso 1**.

Caso 2. $\boldsymbol{B(x_1) > 0}$ **ou,** $\boldsymbol{B(x_1) = 0}$ **e** $\boldsymbol{C(x_1) \neq 0}$.

Se $C(x_1) \neq 0$, então $y_1(x_1) = 0$. Agora, para $C(x_1) = 0$ temos

$$\left|y_2\right|\Big|_{(x_1-\delta, x_1)} > \left|y_1\right|\Big|_{(x_1-\delta, x_1)}$$

e, daí, pelo Teorema 3.7 segue que

$$\lim_{x \to x_1^-} y_1(x) = \sqrt{\frac{h - A(x_1)}{B(x_1)}} = 0. \text{ Veja a Figura 3.5.}$$

Observemos que $(x_1, 0)$ será ponto de equilíbrio se A for do **Tipo 1** ou do **Tipo 2**.

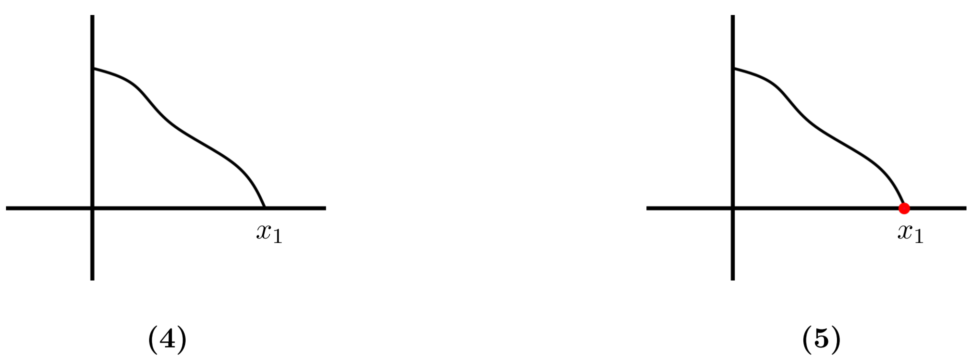


Figura 3.5: Possíveis formas de $\partial\mathcal{P}$ que derivam do **Caso 2**; **(4)** é a única forma possível para uma trajetória em $\mathcal{P}$.

Caso 3. $\boldsymbol{B(x_1) < 0}$.

Sabemos que

$$C\Big|_{(x_1-\delta,x_1)} > 0,\ \Big|y_1\Big|\Big|_{(x_1-\delta,x_1)} > \Big|y_2\Big|\Big|_{(x_1-\delta,x_1)}$$

e, quando $h < h_0$, $C(x_1) > 0$ e A é do **Tipo 3** para valores próximos de x_1 (veja a Figura 3.1). Para $h = h_0$ suponhamos, por absurdo, $C(x_1) = 0$. Então, pelo Teorema 3.7 temos que

$$\lim_{x \to x_1^-} y_1(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to x_1^-} y_2(x) = 0.$$

Logo, estamos diante de uma forma semelhante a dada em **(1)** na Figura 3.4. Assim,

$$\{(x_1, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\} \subset \partial \mathcal{P}.$$

Consequentemente, para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$h_0 = H(x_1, y) = A(x_1) + B(x_1)y^2 = h_0 + B(x_1)y^2.$$

Absurdo. Concluímos, então, que $C(x_1) > 0$ também para $h = h_0$.

Temos que $y_1(x_1) > 0$ e $y_2(x_1) = 0$. Notemos que se $h = h_0$ e x_1 é um máximo local de A (veja **Tipo 1** da Figura 3.1), podemos assumir que y_1 está definida em $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ e que $y_2(x) \in \mathbb{C}$ para cada $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)\backslash\{x_1\}$. Seja

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < x_1 + \delta \text{ e } 0 < y < y_1(x)\}. \text{ Veja a Figura 3.6.}$$

Dessa forma, $\mathcal{P} \cap S_1 = S_1$ e

$$\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 \leq x < x_1 + \delta\} \subset \partial \mathcal{P}.$$

Daí, $A = h_0$ e isso é uma contradição.

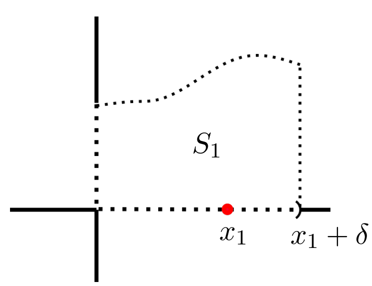


Figura 3.6: Região S_1 aberta, conexa e limitada.

Logo, para $h = h_0$, o comportamento de A ou é do **Tipo 2** ou do **Tipo 3**.

O discriminante de $H - h$ visto como polinômio na variável y é a função $\mathcal{D} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{D}(x) = 16C(x)[A(x) - h]\Delta_h(x)^2.$$

Observemos que existe um maior $\delta_1 \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ de tal forma que $\mathcal{D}$ é positivo em $(x_1, x_1 + \delta_1)$. Mais precisamente, para todo $x \in (x_1, x_1 + \delta_1)$,

$$A(x) - h, C(x), \Delta_h(x) > 0 \text{ e } B(x) < 0.$$

Como consequência, y_1 e y_2 estão definidas em $(x_1, x_1 + \delta_1)$ e $0 < y_2 < y_1$. Se $\delta_1 = +\infty$, então $h = h_0$ e a região delimitada por y_1 e y_2 está contida em $\mathcal{P}$. Veja a forma **(6)** na Figura 3.9.

Suponhamos, então, que $\mathcal{D}$ tenha uma raiz em $(x_1, +\infty)$. Sejam $x_2 < x_3 < \ldots < x_n$, com $n \geq 2$, as raízes de $\mathcal{D}$ em $(x_1, +\infty)$. Desse modo, $\delta_1 = x_2 - x_1$. A análise a seguir está dividida em alguns subcasos.

Subcaso 3.1. $C(x_2) = 0$.

Assumamos, por contradição, que $B(x_2) < 0$. Então, pelo Teorema 3.7, obtemos que

$$\lim_{x \to x_2^-} y_1(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to x_2^-} y_2(x) = \sqrt{\frac{h - A(x_2)}{B(x_2)}}.$$

Além disso, $h = h_0$. Seja

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < x_2 \text{ e } 0 < y < y_1(x)\} \backslash \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 < x < x_2 \text{ e } 0 < y \leq y_2(x)\}.$$

Veja a Figura 3.7. Assim,

$$\left\{(x_2, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq \sqrt{\frac{h - A(x_2)}{B(x_2)}}\right\} \subset \partial\mathcal{P}.$$

Daí, $B(x_2) = 0$. Absurdo. Dessa maneira, $B(x_2) = 0$.

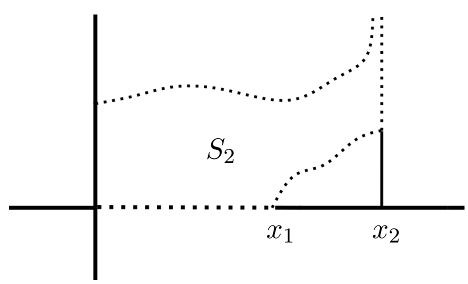


Figura 3.7: Região S_2 aberta, conexa e ilimitada.

Se $A(x_2) - h > 0$, então

$$\lim_{x \to x_2^-} y_1(x) = \lim_{x \to x_2^-} y_2(x) = +\infty \text{ e } h = h_0. \text{ Veja o caso } \textbf{(7)} \text{ na Figura 3.9.}$$

Suponhamos, agora, $A(x_2) - h = 0$. Tomando k_A, k_B, k_C e $\overline{k}$ como no **Caso 1**, trocando x_1 por x_2, obtemos que:

- quando $k_A < \min\{k_B, k_C\}$,

$$\lim_{x \to x_2^-} y_1(x) = \lim_{x \to x_2^-} y_2(x) = +\infty. \text{ Veja a forma } \mathbf{(7)} \text{ na Figura 3.9;}$$

- quando $k_A \geq \min\{k_B, k_C\}$ e $k_C \leq k_B$,

$$\lim_{x \to x_2^-} y_1(x) = y_0 \text{ e } \lim_{x \to x_2^-} y_2(x) = \overline{y}_0;$$

  onde $y_0, \overline{y}_0 \geq 0$ são números reais não necessariamente diferentes. Veja as formas de **(8)** a **(11)** na Figura 3.9;

- para $k_A \geq \min\{k_B, k_C\}$ e $k_C > k_B$,

$$\lim_{x \to x_2^-} y_1(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to x_2^-} y_2(x) = y_0$$

  com $y_0 \geq 0$. Veja as formas **(12)** e **(13)** na Figura 3.9.

Como consequência, $h = h_0$ nessa hipótese, e os pontos (x_2, y_0) e $(x_2, \overline{y}_0)$, quando existem, são pontos de equilíbrio.

Subcaso 3.2. $C(x_2) > 0$.

Primeiramente, consideremos $\Delta_h(x_2) = 0$. Se $B(x_2) = 0$, então

$$y_1(x_2) = y_2(x_2) = 0$$

e $(x_2, 0)$ é ponto de equilíbrio. Quando $B(x_2) < 0$,

$$y_1(x_2) = y_2(x_2) = \sqrt{\frac{-B(x_2)}{2C(x_2)}}.$$

e $(x_2, y_1(x_2))$ pode ser ou não um ponto de equilíbrio. Veja as formas **(14)**, **(15)** e **(16)** na Figura 3.9. Notemos que, para $h < h_0$, pode ocorrer somente o caso **(16)**, onde $(x_2, y_1(x_2))$ não é um ponto de equilíbrio.

Para $A(x_2) - h = 0$ e $\Delta_h(x_2) > 0$, existe $\varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno de modo que y_1 e y_2 estão definidas em $(x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2)$ com y_1 positiva e $y_2(x_2) = 0$. Dessa forma, $h = h_0$. Sem perda de generalidade, ou x_2 é ponto de mínimo do polinômio $A - h_0$ restrito ao intervalo $(x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2)$ ou $A - h_0$ é decrescente em tal intervalo.

Notemos que o segundo caso não ocorre pois, caso contrário, em $(x_2, x_2 + \varepsilon_2)$ somente y_1 tem imagem em $\mathbb{R}$. Daí, o conjunto

$$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < x_2 + \varepsilon_2 \text{ e } 0 < y < y_1(x)\} \backslash \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 < x < x_2 \text{ e } 0 < y \leq y_2(x)\}$$

está contido em $\mathcal{P}$. Veja a Figura 3.8. Logo,

$$\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2,\ x_2 \leq x < x_2 + \varepsilon_2\} \subset \partial\mathcal{P}$$

e, como consequência, $A = h_0$. Absurdo.

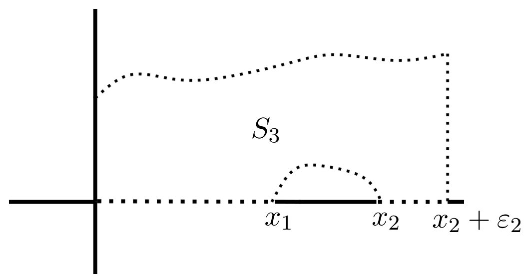


Figura 3.8: Região S_3 aberta, conexa e limitada..

Assim, existe um maior valor $\delta_2 \in \mathbb{R}^*_+ \cup \{+\infty\}$ tal que, para todo $x \in (x_2, x_2 + \delta_2)$,

$$A(x) - h_0, C(x), \Delta_{h_0}(x) > 0 \text{ e } B(x) < 0. \tag{3.2}$$

Daí, as funções y_1 e y_2 em $(x_2, x_2 + \delta_2)$ são reais com $0 < y_2 < y_1$, e $(x_2, 0)$ é ponto de equilíbrio. Com um raciocínio análogo ao feito para δ_1, se $\delta_2 = +\infty$, então o comportamento de y_1 e y_2 no intervalo $(x_2, +\infty)$ é idêntico ao dado em **(6)** na Figura 3.9 trocando x_1 por x_2. Agora, se existe a menor raiz x_3 de $\mathcal{D}$ em $(x_2, +\infty)$, as funções y_1 e y_2 em $[x_2, x_3]$ se comportam como uma das formas dadas de **(7)** a **(17)** na Figura 3.9 depois de trocarmos x_2 por x_3, x_1 por x_2 e, δ_2 por δ_3 caso ocorra **(17)**, onde $\delta_3 \in \mathbb{R}^*_+ \cup \{+\infty\}$ é o maior valor tal que, para todo $x \in (x_3, x_3 + \delta_3)$, vale (3.2) (depois da troca, olharemos para y_1 e y_2 no intervalo $[x_2, x_3]$ na Figura 3.9).

Se em torno de x_3 o comportamento das funções for como em **(17)**, repetiremos o raciocínio feito para δ_2 a δ_3, e assim por diante.

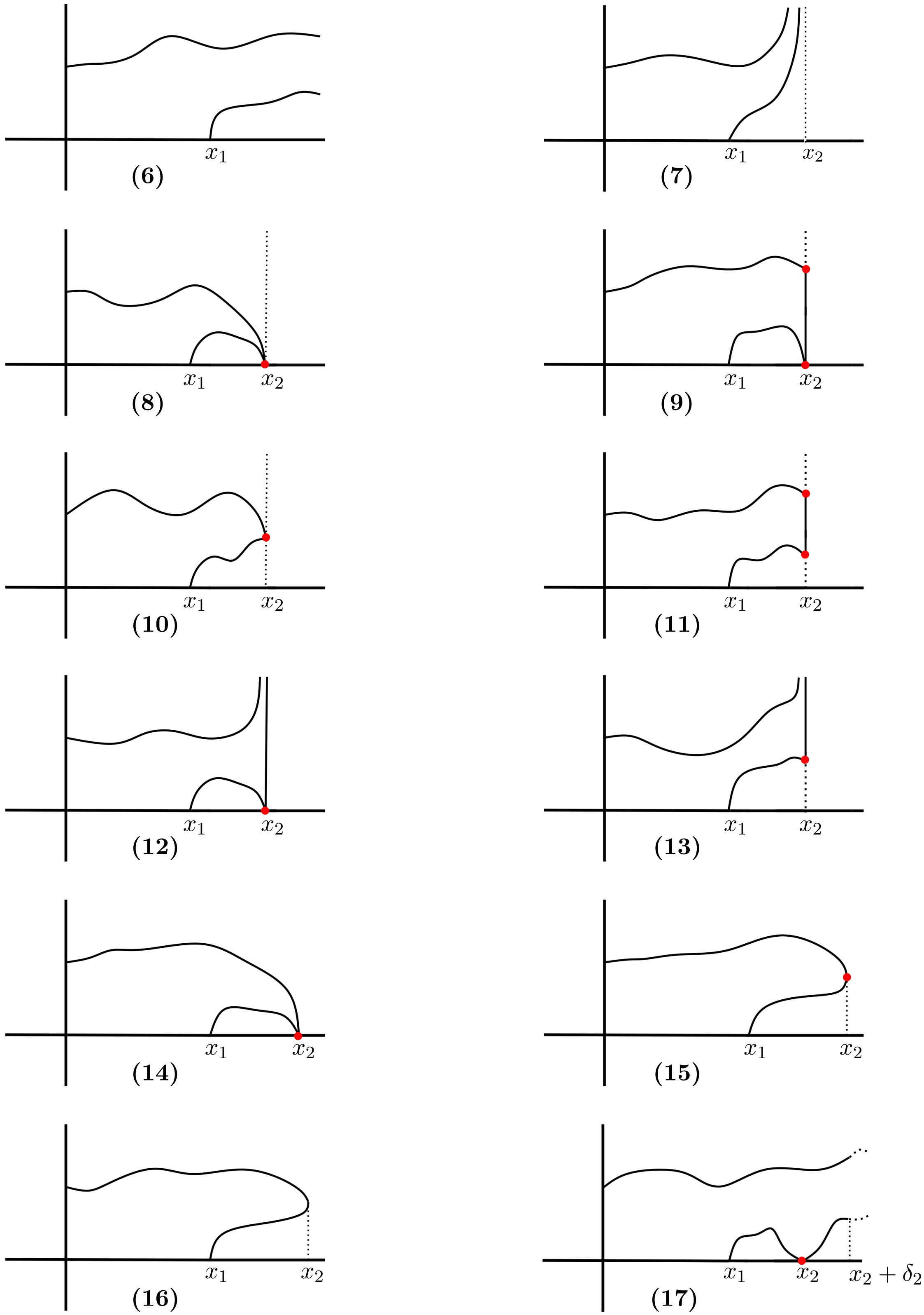


Figura 3.9: Possíveis formas de $\partial\mathcal{P}$ que derivam do **Caso 3**; **(16)** é a única forma possível para uma trajetória em $\mathcal{P}$.

Diante do estudo desenvolvido, concluímos que todas as possíveis formas para $\partial\mathcal{P}$ são geradas a partir das 17 *formas base* dadas nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.9, já que H é biquadrado na variável y. As quatro possibilidades para uma trajetória periódica em $\mathcal{P}$ são dadas na Figura 3.10.

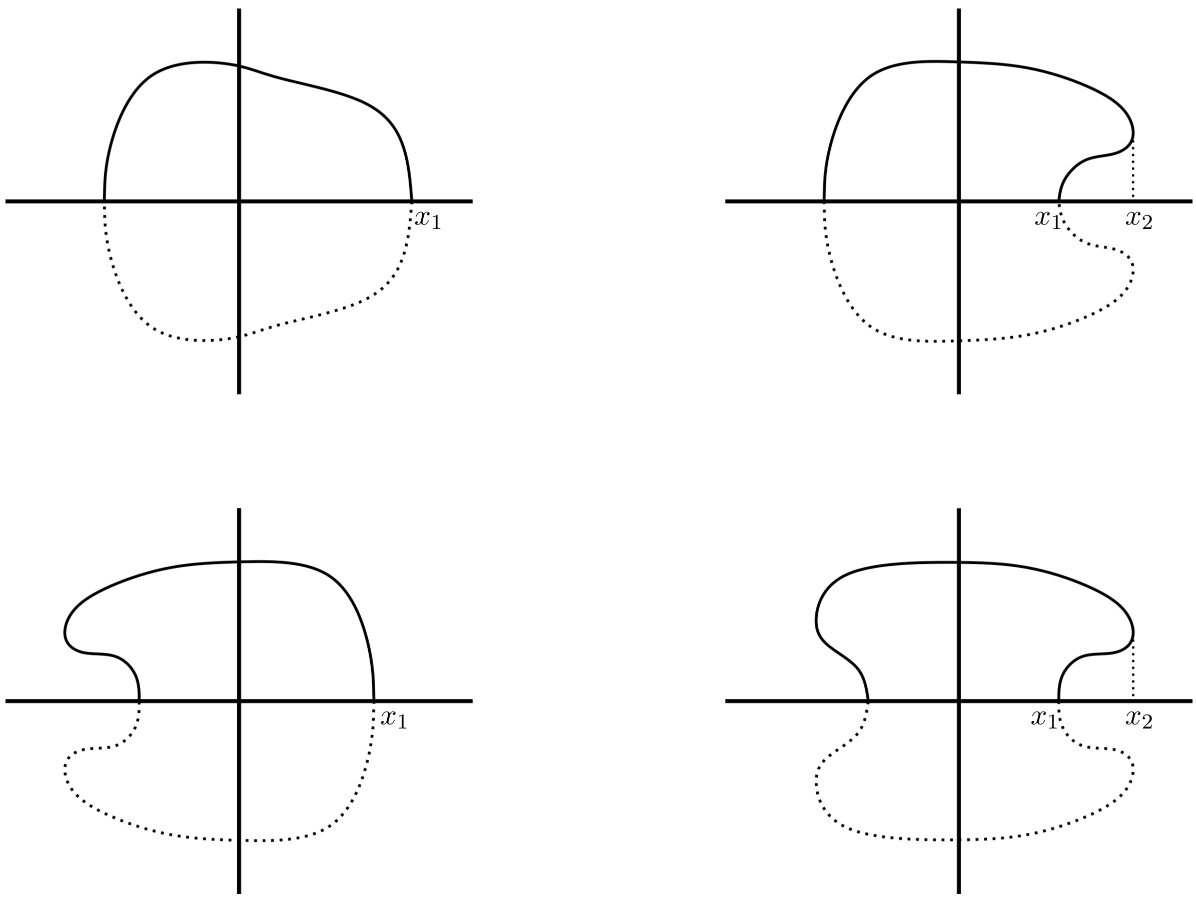


Figura 3.10: Possíveis traços de uma trajetória periódica em $\mathcal{P}$.

Uma vez que conhecemos todas as configurações possíveis do conjunto $\mathcal{P}$, estamos aptos a determinar $h_0 < +\infty$ em função dos polinômios A, B e C, e condições necessárias e suficientes para que um centro na origem do sistema (3.1) seja global.

Nos teoremas a seguir, sempre que nos referirmos a uma trajetória periódica em $\mathcal{P}$, estaremos na verdade considerando somente a sua parte contida no primeiro quadrante do plano unido com os eixos x e y positivos. Além disso, quando necessário, deixaremos explícita a dependência de x_1 por certos valores h. Denotemos $x_0 = x_0(h_0)$, $x_1 = x_1(h_0)$ e $y_1 = y_1^{h_0}$ para $h_0 < +\infty$.

Teorema 3.8. *Considere, caso existam,*

$$a = \max\{x \in \mathbb{R}_-;\ B(x) = C(x) = 0\} \text{ e } b = \min\{x \in \mathbb{R}_+;\ B(x) = C(x) = 0\}.$$

Se $h_0 < +\infty$, então pelo menos um dos itens abaixo é verdadeiro:

1. *h_0 é o nível de um ponto de equilíbrio;*

2. *$h_0 = H(a,0) = A(a)$ ou $h_0 = H(b,0) = A(b)$;*

3. *$h_0 = \lim_{x\to a^+}\left(A(x) - \dfrac{B(x)^2}{4C(x)}\right)$ ou $h_0 = \lim_{x\to b^-}\left(A(x) - \dfrac{B(x)^2}{4C(x)}\right)$;*

4. *$h_0 = \lim_{x\to +\infty}\left(A(x) - \dfrac{B(x)^2}{4C(x)}\right)$ ou $h_0 = \lim_{x\to -\infty}\left(A(x) - \dfrac{B(x)^2}{4C(x)}\right)$.*

Demonstração. Suponhamos $h_0 < +\infty$. Diante das 17 formas base que geram os possíveis comportamentos de $\partial\mathcal{P}$ a menos de **(4)**, **(6)**, **(7)** e **(16)**, segue que podem ser verdadeiros os itens 1 e 2. Se $\partial\mathcal{P}$ for formada somente por **(4)** ou **(16)**, então pelo Teorema 2.15 existirá pelo menos um ponto que equilíbrio em $\partial\mathcal{P}$ e, assim, o item 1 será verdadeiro.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\partial\mathcal{P}$ no primeiro quadrante do plano ou é da forma **(6)** ou da forma **(7)**. Seja $I = [x_1, b)$ o intervalo tal que $b = +\infty$ se for da forma **(6)** e $b = x_2$ caso seja da forma **(7)**. Sabemos que $A(x_1) = h_0$, $B(x_1) < 0$, $C(x_1) > 0$ e, para todo $x \in \operatorname{Int}(I)$,

$$A(x) - h_0, C(x), \Delta_{h_0}(x) > 0 \text{ e } B(x) < 0.$$

Consideremos a curva $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(x) = \left(x, \sqrt{-\frac{B(x)}{2C(x)}}\right).$$

Sejam $\gamma_{\overline{h}}$ a trajetória periódica por $\alpha(x_1)$ e $\overline{y}$ seu ponto de interseção com o eixo y. Notemos que $\gamma_{\overline{h}}$ é da forma **(16)** trocando, na figura, x_1 por $x_1(\overline{h})$ e x_2 por $x_1(h_0) = x_1$. Seja $\mathcal{R}$ a região aberta delimitada por $\gamma_{\overline{h}}$, por $\partial\mathcal{P}$ e pelos eixos x e y. Temos que a curva α está contida em $\mathcal{R}$. Mais ainda, toda trajetória periódica por um ponto de $\mathcal{R}$ é da forma **(16)** e intersecciona a curva α em um único ponto; tal ponto é o mesmo que o associado a x_2 em **(16)**. Seja

$$\overline{y}_1 = \lim_{x\to 0^+} y_1(x).$$

Logo, cada ponto $\alpha(x)$ está relacionado com um único ponto $(0, y)$, com $\overline{y} \le y < \overline{y}_1$, de tal forma que, conforme x cresce, y também cresce. Veja a Figura 3.11. Assim,

$$h_0 = \lim_{y\to \overline{y}_1^-} H(0,y) = \lim_{x\to b^-} H(\alpha(x)) = \lim_{x\to b^-}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right).$$

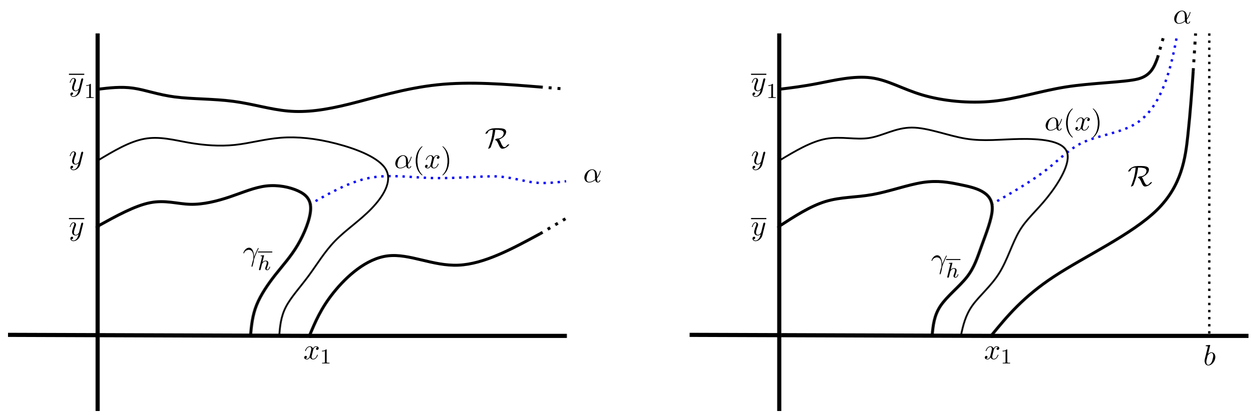


Figura 3.11: Trajetória periódica por um ponto da região aberta $\mathcal{R}$; a figura da esquerda corresponde a forma **(6)** e a da direita à forma **(7)**.

Caso $\partial\mathcal{P}$ tenha a forma **(6)** ou a forma **(7)** no segundo quadrante, adaptando a demonstração anterior a fim de produzir as figuras correspondentes às reflexões das dadas na Figura 3.11, trocando x_1 por x_0 e b por a, obtemos

$$h_0 = \lim_{x\to-\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) \text{ ou } h_0 = \lim_{x\to a^+}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right),$$

respectivamente. Portanto, seguem os itens 3 e 4. □

Observação 3.9. Se $h_0 < +\infty$ e a forma **(6)** faz parte de $\partial\mathcal{P}$ segue, da demonstração do item 4 do Teorema 3.8 e do fato de que $B(0) > 0$, que:

- existe $0 < r_d < x_1$ onde r_d é a maior raiz real de B tal que, para todo $x > r_d$, $B(x) < 0$, $C(x) > 0$ e

$$h_0 = \lim_{x\to+\infty} H\left(x, \sqrt{-\frac{B(x)}{2C(x)}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right);$$

  ou

- existe a menor raiz real $x_0 < r_e < 0$ de B de modo que, para cada $x < r_e$, $B(x) < 0$, $C(x) > 0$ e

$$h_0 = \lim_{x\to-\infty} H\left(x, \sqrt{-\frac{B(x)}{2C(x)}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right).$$

Teorema 3.10. *A origem do sistema* (3.1) *é um centro global se, e somente se:*

1. *a origem é o único ponto de equilíbrio;*
2. *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, se* $B(x) > 0$*, então* $C(x) \geq 0$*;*
3. *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, se* $B(x) \leq 0$*, então* $C(x) > 0$*;*
4. *se existe a maior raiz real* r_d *do polinômio* B*, com* $r_d > 0$*, e* $B(x) < 0$ *para todo* $x > r_d$*, então*
$$\lim_{x \to +\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = +\infty;$$
5. *se existe a menor raiz real* r_e *do polinômio* B*, com* $r_e < 0$*, e* $B(x) < 0$ *para todo* $x < r_e$*, então*
$$\lim_{x \to -\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = +\infty.$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que a origem seja um centro global. Levando em consideração a Observação 3.3, seguem os itens 1, 2 e 3.

Mostremos o item 4. Consideremos $r_d > 0$ a maior raiz de B onde, para todo $x > r_d$, $B(x) < 0$. Seja $\beta : [r_d, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a curva definida por

$$\beta(x) = \left(x, \sqrt{-\frac{B(x)}{2C(x)}} \right).$$

Temos que a trajetória periódica $\gamma_{A(r_d)}$ pelo ponto $\beta(r_d)$ é da forma **(4)**. Denotemos por $\overline{y}$ o ponto de intersecção de $\gamma_{A(r_d)}$ com o eixo y. Considere a região fechada $\mathcal{R}_1$ contida no primeiro quadrante cuja fronteira é formada por $\gamma_{A(r_d)}$ e pelas semirretas

$$X_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq r_d\} \text{ e } Y_1 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq \overline{y}\}.$$

Logo, cada trajetória periódica por um ponto de $\mathcal{R}_1$ tem a forma **(16)** e intersecciona β exatamente no ponto relacionado a x_2 em **(16)**, e somente nesse ponto. Dessa forma, há uma relação biunívoca entre a imagem de β (equivalentemente, de X_1) e Y_1 de modo que, y cresce conforme x cresce. Veja a Figura 3.12.

Portanto,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = \lim_{x \to +\infty} H(\alpha(x)) = \lim_{y \to +\infty} H(0, y) = +\infty.$$

A demonstração do item 5 é totalmente análoga a do item 4. Basta adaptar a demonstração do item 4 de modo a obter a figura que corresponde a reflexão da Figura 3.12 em torno do eixo y, trocando r_d por r_e.

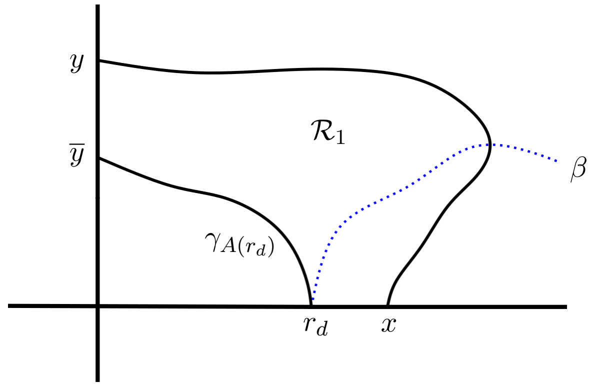


Figura 3.12: Trajetória periódica por um ponto da região fechada $\mathcal{R}_1$.

($\Longleftarrow$) Assumamos que os itens de 1 a 5 sejam verdadeiros. Suponhamos, por absurdo, que a origem não seja um centro global, isto é, $h_0 < +\infty$. Dos itens 1, 2 e 3 segue que a forma **(6)** tem que fazer parte de $\partial\mathcal{P}$. Assim, da Observação 3.9 e dos itens 4 e 5, obtemos que $h_0 = +\infty$. Absurdo.

Portanto, a origem é um centro global do sistema (3.1). $\square$

Consideremos o polinômio $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(x) = B(x)^2 C'(x) + 4C(x)^2 A'(x) - 2B(x)B'(x)C(x).$$

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos, diante do Teorema 3.5, que (x, y) é ponto de equilíbrio do sistema (3.1) se, e somente se,

$$y = 0 \text{ e } A'(x) = 0$$

ou

$$B(x) = C(x) = 0 \text{ e } A'(x) + B'(x)y^2 + C'(x)y^4 = 0$$

ou

$$B(x)C(x) < 0,\ y = \sqrt{-\frac{B(x)}{2C(x)}} \text{ e } F(x) = 0.$$

Levando isso em consideração e tendo o Teorema 3.8 em mente apresentamos, a seguir, um exemplo relativo a cada uma das 17 formas base para $\partial\mathcal{P}$ dadas nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.9 (a menos da forma **(4)** e da forma **(16)**, que estão embutidas nos Exemplos 3.11 e 3.24, respectivamente), respeitando a mesma ordem das formas, bem como exemplos de centros globais. Sempre que considerarmos o traço de uma curva de nível estaremos, na realidade, mostrando a curva de nível em uma vizinhança da origem conveniente e pertinente para nossa análise. A curva de nível em tal vizinhança não será, necessariamente, o conjunto de nível em $\mathbb{R}^2$ como um todo.

Exemplo 3.11 (Exemplo que realiza as formas (1) e (4)). Sejam

$$A(x) = \frac{x^2}{2},\ B(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 \text{ e } C(x) = -\frac{1}{10}(x-1)^4.$$

Temos que $F(x) = \dfrac{1}{25}x(x-1)^8$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = +\infty.$$

Dessa forma, os pontos de equilíbrio, além da origem, são

$$\left(0, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \left(0, \pm\sqrt{-\frac{B(0)}{2C(0)}}\right).$$

Como $x = 1$ é a única raiz comum dos polinômios B e C,

$$h_0 = A(1) = \frac{1}{2} \text{ ou } h_0 = H\left(0, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{8} \text{ ou } h_0 = \lim_{x\to 1^-}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = \frac{9}{8}.$$

Por outro lado, $x_1(h_0) \leq 1$, já que não podem existir raízes comuns de B e C em $(0, x_1(h_0))$. Logo,

$$h_0 = A(x_1(h_0)) \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$h_0 = \frac{1}{2}.$$

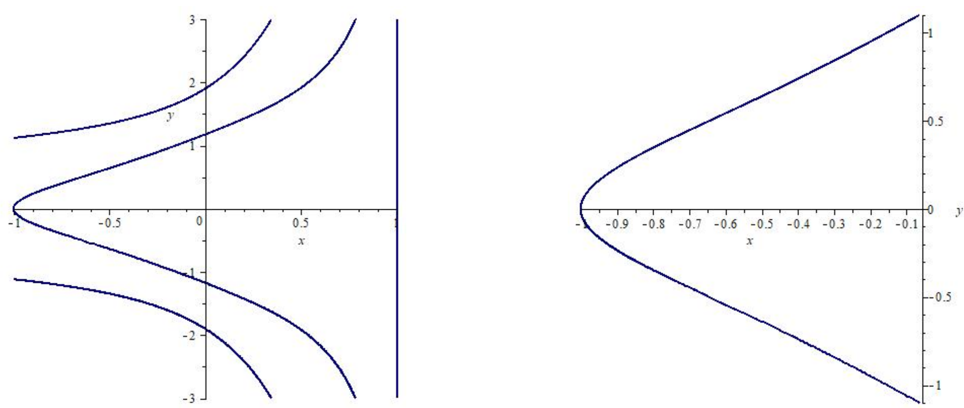


Figura 3.13: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = \dfrac{1}{2}$, relativa às formas **(1)** e **(4)**.

Exemplo 3.12 (Exemplo que realiza a forma (2)). Sejam

$$A(x) = \frac{x^2}{2},\ B(x) = -\frac{1}{2}(x-1) \text{ e } C(x) = \frac{1}{100}(x-1).$$

Nesse caso, $F(x) = \dfrac{1}{10000}(4x-25)(x-1)^2$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = +\infty.$$

Consequentemente, além da origem, os pontos de equilíbrio são

$$\left(1, \frac{\pm\sqrt{70}\pm\sqrt{30}}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{25}{4}, \pm 5\right).$$

Então,

$$h_0 = A(1) = \lim_{x\to 1^-}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = H\left(1, \frac{\pm\sqrt{70}\pm\sqrt{30}}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

pois $H\left(\dfrac{25}{4}, \pm 5\right) < 0$.

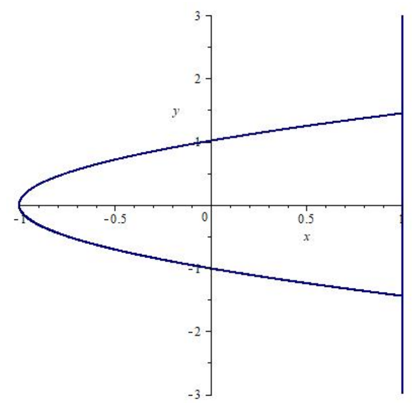


Figura 3.14: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = \frac{1}{2}$, relativa à forma **(2)**.

Exemplo 3.13 (Exemplo que realiza a forma (3)). Sejam

$$A(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)^3 + 1,\ B(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 \text{ e } C(x) = -(x-1).$$

Assim, $F(x) = \dfrac{3}{4}(64x+1)(x-1)^4$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = +\infty.$$

Logo, o único ponto de equilíbrio a menos da origem é o ponto $(1,0)$. Daí,

$$h_0 = A(1) = \lim_{x\to 1^-}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = 1.$$

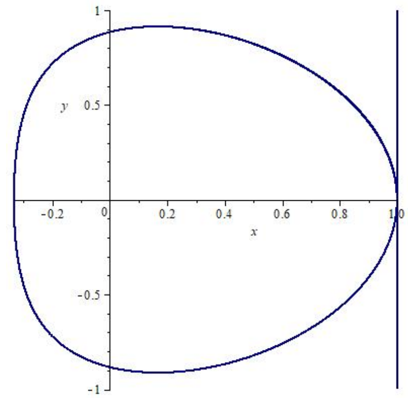


Figura 3.15: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = 1$, relativa à forma **(3)**.

Exemplo 3.14 (Exemplo que realiza a forma (5)). Sejam

$$A(x) = -\frac{27}{4}x^2(x-1) \text{ e } B(x) = C(x) = 2.$$

Dessa forma, $F(x) = -108x(3x-2)$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = \mp\infty.$$

Então, o único ponto de equilíbrio, além da origem, é o ponto $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Portanto, $h_0 = A\left(\frac{2}{3}\right) = 1$.

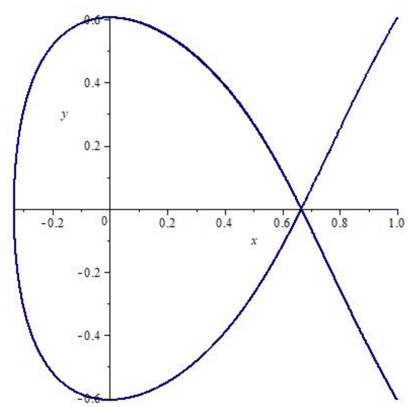


Figura 3.16: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = 1$, relativa à forma **(5)**.

Exemplo 3.15 (Exemplo que realiza a forma (6)). Sejam

$$A(x) = \frac{x^2}{2},\; B(x) = -(x-1)(x+1) \text{ e } C(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Como $F(x) = \dfrac{9}{16}x$ segue que, além da origem, $(0, \pm 2)$ são os pontos de equilíbrio. Temos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = \frac{7}{8}.$$

Uma vez que $H(0, \pm 2) = 2$ e o nível $\dfrac{7}{8}$ (dado na Figura 3.17) é ilimitado, concluímos que $h_0 = \dfrac{7}{8}$.

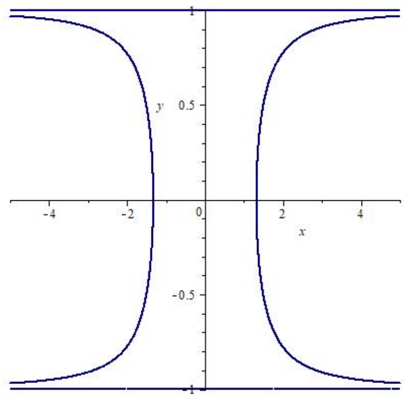


Figura 3.17: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = \dfrac{7}{8}$, relativa à forma **(6)**.

Exemplo 3.16 (**Exemplo que realiza a forma (7)**)**.** Sejam

$$A(x) = \frac{x^2}{2},\ B(x) = (x-1)(x-3) \text{ e } C(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x-3)^2.$$

Temos que

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)^4(8x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 3x + 2)$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = +\infty.$$

Desse modo, não existem pontos de equilíbrio além da origem, pois $x = \dfrac{1}{2}$ e $x = 3$ são as únicas raízes reais de F, com $B\left(\dfrac{1}{2}\right) \neq 0 = C\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e

$$A'(3) + B'(3)y^2 + C'(3)y^4 = 2y^2 + 3 > 0.$$

Assim,

$$h_0 = A(3) = \frac{9}{2} \text{ ou } h_0 = \lim_{x \to 3^-} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = \frac{217}{50} = 4,34.$$

Porém, o nível $\dfrac{217}{50}$ (veja a Figura 3.18) é ilimitado. Logo, $h_0 = \dfrac{217}{50}$.

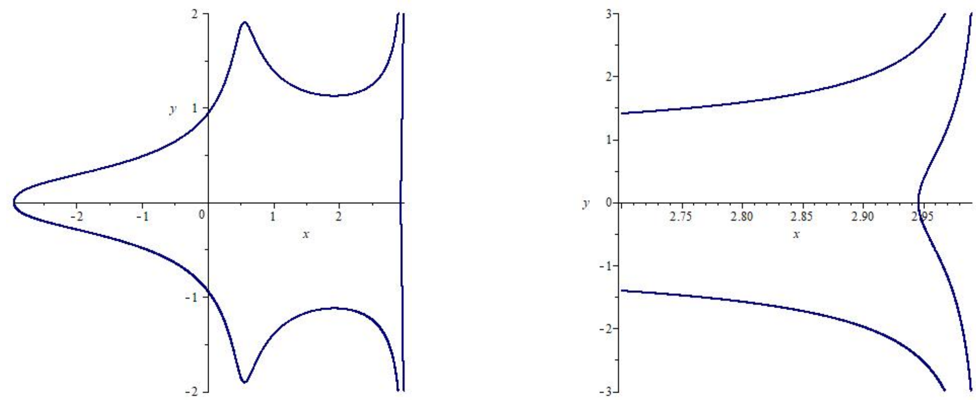


Figura 3.18: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = \dfrac{217}{50}$, relativa à forma **(7)**.

Exemplo 3.17 (Exemplo que realiza a forma (8)). Sejam

$$A(x) = \frac{3}{16}\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)(x-2)^4 + 1, \; B(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)^2$$

e

$$C(x) = -(x+1)(x-2).$$

Nesse caso,

$$F(x) = \frac{1}{2}(x-2)^4(9x^5 - 11x^4 + 5x^3 + 15x^2 - 38x + 26)$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = +\infty.$$

Notemos que F tem somente uma raiz real $r \neq 2$ e é tal que $-2 < r < -1$. Dessa forma, os pontos de equilíbrio, além da origem, são

$$\left(\frac{11}{9}, 0\right), \; (2,0) \text{ e } \left(r, \pm\sqrt{-\frac{B(r)}{2C(r)}}\right).$$

Além disso,

$$H\left(\frac{11}{9}, 0\right) = \frac{725395}{708588} \text{ e } H\left(r, \pm\sqrt{-\frac{B(r)}{2C(r)}}\right) \approx 419,54.$$

Portanto,

$$h_0 = A(2) = \lim_{x \to 2^-}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = 1,$$

pois o nível 1 tem a forma dada na Figura 3.19.

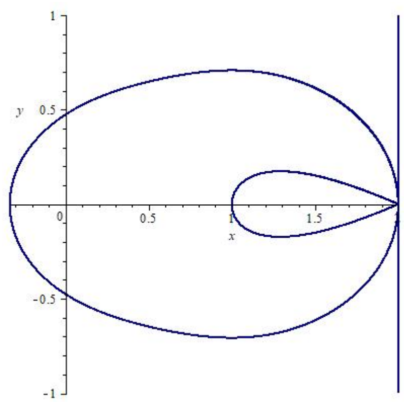


Figura 3.19: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = 1$, relativa à forma **(8)**.

Exemplo 3.18 (Exemplo que realiza a forma (9)). Sejam

$$A(x) = \frac{3}{16}\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)(x-2)^4 + 1,\ B(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)^2$$

e

$$C(x) = (x+1)(x-2)^2.$$

Assim,

$$F(x) = \frac{1}{2}(x-2)^5(9x^6 - 29x^5 - 5x^4 + 45x^3 - 8x^2 + 10x - 24)$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = +\infty.$$

Observemos que, a menos do $x = 2$, F possui somente duas raízes reais r_1 e r_2, com $-2 < r_1 < -1$ e $2 < r_2 < 3$. Dessa maneira, os pontos de equilíbrio, além da origem, são

$$\left(r_1, \pm\sqrt{-\frac{B(r_1)}{2C(r_1)}}\right),\ \left(r_2, \pm\sqrt{-\frac{B(r_2)}{2C(r_2)}}\right), \left(\frac{11}{9}, 0\right)$$

e

$$\{(2, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\} \text{ (reta de singularidades)}$$

onde $A(2) = 1$,

$$H\left(r_1, \pm\sqrt{-\frac{B(r_1)}{2C(r_1)}}\right) \approx 167{,}041,\ H\left(r_2, \pm\sqrt{-\frac{B(r_2)}{2C(r_2)}}\right) \approx 0.5386 \text{ e } H\left(\frac{11}{9}, 0\right) = \frac{725395}{708588}.$$

Como na região aberta entre as retas

$$\{(-1, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\} \text{ e } \{(2, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}$$

os únicos pontos de equilíbrio são $(0,0)$ e $\left(\dfrac{11}{9},0\right)$, segue que

$$h_0 = \lim_{x\to 2^-}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = 1,$$

uma vez que o nível 1 é dado como na Figura 3.20.

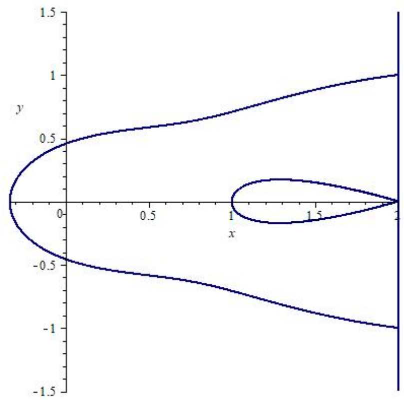


Figura 3.20: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = 1$, relativa à forma **(9)**.

Exemplo 3.19 (**Exemplo que realiza a forma (10)**)**.** Sejam

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2)^2+1,\;\; B(x) = -10\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)^2$$

e

$$C(x) = 3(x+13)(x-2)^2.$$

Logo,

$$F(x) = 9(x-2)^6(8x^3+113x^2-308x+550)$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = +\infty.$$

Temos que a única raiz real $r \neq 2$ do polinômio F é tal que $-20 < r < -15$. Daí, os pontos

$$\left(r, \pm\sqrt{-\frac{B(r)}{2C(r)}}\right),\;\; \left(\frac{11}{8},0\right) \text{ e } \{(2,y)\in\mathbb{R}^2;\; y\in\mathbb{R}\} \text{ (reta de singularidades)}$$

são os pontos de equilíbrio, além da origem. Além disso,

$$H\left(r, \pm\sqrt{-\frac{B(r)}{2C(r)}}\right) \approx 283.133,\;\; H\left(\frac{11}{8},0\right) = \frac{9317}{8192} \text{ e } A(2) = 1.$$

Como o nível 1 tem a forma dada na Figura 3.21, obtemos que

$$h_0 = \lim_{x\to 2^-}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = 1.$$

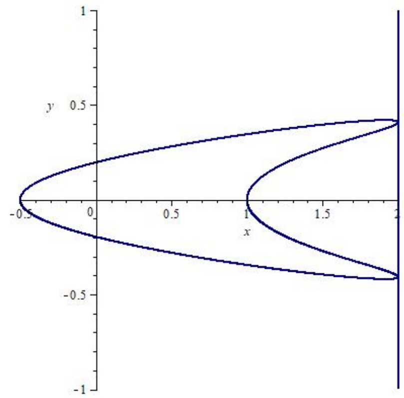


Figura 3.21: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = 1$, relativa à forma **(10)**.

Exemplo 3.20 (**Exemplo que realiza a forma (11)**). Sejam

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2)^2 + 1, \; B(x) = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)^2$$

e

$$C(x) = 3\left(x + \frac{1}{4}\right)(x-2)^2.$$

Daí,

$$F(x) = \frac{9}{16}(x-2)^5(128x^4 - 368x^3 + 176x^2 + 117x - 96)$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = +\infty.$$

A menos do $x = 2$, o polinômio F tem exatamente duas raízes reais r_1 e r_2, com $-1 < r_1 < -\dfrac{1}{2}$ e $2 < r_2 < 3$. Assim, os pontos de equilíbrio, além da origem, são

$$\left(r_1, \pm\sqrt{-\frac{B(r_1)}{2C(r_1)}}\right), \; \left(r_2, \pm\sqrt{-\frac{B(r_2)}{2C(r_2)}}\right), \; \left(\frac{11}{8}, 0\right)$$

e

$$\{(2, y) \in \mathbb{R}^2; \; y \in \mathbb{R}\}(\text{reta de singularidades}),$$

onde $A(2) = 1$,

$$H\left(r_1, \pm\sqrt{-\frac{B(r_1)}{2C(r_1)}}\right) \approx 32{,}688, \; H\left(r_2, \pm\sqrt{-\frac{B(r_2)}{2C(r_2)}}\right) \approx 0{,}9997, \text{ e } H\left(\frac{11}{8}, 0\right) = \frac{9317}{8192}.$$

Notemos que os únicos pontos de equilíbrio na região aberta entre as retas

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}, y\right) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\right\} \text{ e } \{(2, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}$$

são $(0,0)$ e $\left(\frac{11}{8}, 0\right)$. Consequentemente,

$$h_0 = \lim_{x \to 2^-} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = 1,$$

pois o nível 1 é como na Figura 3.22.

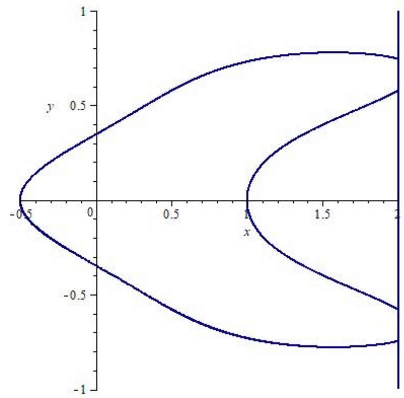


Figura 3.22: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = 1$, relativa à forma **(11)**.

Exemplo 3.21 (**Exemplo que realiza a forma (12)**)**.** Sejam

$$A(x) = -\frac{1}{16}(x+1)^2(x+2)(x-1)(x-2)^3 + 1,\ B(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)^2$$

e

$$C(x) = -x^2(x-2)^3.$$

Logo,

$$F(x) = -\frac{1}{4}x(x-2)^6(7x^9 - 18x^8 - 25x^7 + 76x^6 + 12x^5 - 64x^4 - 16x^3 + 36x - 16)$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = \mp\infty.$$

Temos que F tem, além de $x = 0$ e $x = 2$, exatamente três raízes reais r_1, r_2 e r_3, de modo que $-2 < r_1 < r_2 < -1$ e $2 < r_3 < 3$. Assim, como B e C possuem o mesmo sinal nos intervalos $(-2, -1)$ e $(2, 3)$, segue que os pontos de equilíbrio, além da origem, são

$$\left(\frac{-3 \pm \sqrt{457}}{14}, 0\right),\ (-1, 0) \text{ e } \{(2, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\} \text{ (reta de singularidades)},$$

onde $A(-1) = 1$,

$$H\left(\frac{-3-\sqrt{457}}{14}, 0\right) \approx -0,275, \text{ e } H\left(\frac{-3+\sqrt{457}}{14}, 0\right) \approx 1,11.$$

Uma vez que o nível 1 é ilimitado (veja a Figura 3.23), concluímos que

$$h_0 = \lim_{x \to 2^-} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = 1.$$

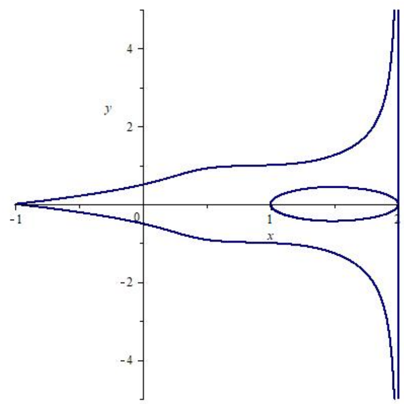


Figura 3.23: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = 1$, relativa à forma **(12)**.

Exemplo 3.22 (**Exemplo que realiza a forma (13)**). Sejam

$$A(x) = \frac{1}{16}(x+1)(x+2)^2(x-1)(x-2)^2 + 1, \ B(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)^2$$

e

$$C(x) = -\frac{1}{2}x^2(x-2)^3.$$

Nesse caso,

$$F(x) = \frac{1}{8}x(x-2)^6(3x^8 - 18x^6 + 24x^4 + 16x^3 - 36x + 16)$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = +\infty.$$

Além de $x = 0$ e $x = 2$, F possui somente duas raízes reais r_1 e r_2, onde $-3 < r_1 < r_2 < -1$. Dessa maneira, além da origem,

$$(-2, 0), \ (\pm\sqrt{2}, 0) \text{ e } \{(2, y) \in \mathbb{R}^2; \ y \in \mathbb{R}\} \text{ (reta de singularidades)}$$

são os pontos de equilíbrio (B e C são ambos positivos no intervalo $(-3, -1)$) e, $A(\pm 2) = 1$ e $H(\pm\sqrt{2}, 0) = \dfrac{5}{4}$.

Assim,

$$h_0 = \lim_{x \to 2^-} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = 1,$$

pois o nível 1 é como na Figura 3.24.

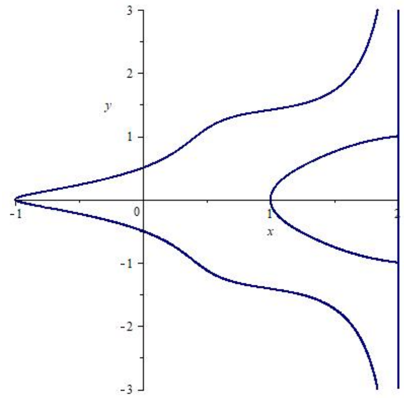


Figura 3.24: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = 1$, relativa à forma **(13)**.

Exemplo 3.23 (**Exemplo que realiza a forma (14)**). Sejam

$$A(x) = \frac{3}{16}\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)(x-2)^4 + 1, \ B(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)^2$$

e

$$C(x) = -(x+1)(x-2) + 1.$$

Temos

$$F(x) = \frac{1}{2}(x-2)^3(9x^6 - 29x^5 + 9x^4 + 45x^3 - 93x^2 + 119x - 76)$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = +\infty.$$

O polinômio F possui somente duas raízes reais r_1 e r_2 diferentes de $x = 2$, com $-2 < r_1 < -1$ e $2 < r_2 < 3$. Dessa forma, os pontos de equilíbrio, além da origem, são

$$\left(r_1, \pm\sqrt{-\frac{B(r_1)}{2C(r_1)}} \right), \ \left(\frac{11}{9}, 0 \right) \text{ e } (2,0).$$

Além disso,

$$H\left(r_1, \pm\sqrt{-\frac{B(r_1)}{2C(r_1)}} \right) \approx 697,75, \ H\left(\frac{11}{9}, 0 \right) = \frac{725395}{708588} \text{ e } A(2) = 1.$$

Portanto, como o nível 1 tem a forma dada na Figura 3.25, temos

$$h_0 = \lim_{x \to 2^-} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = 1.$$

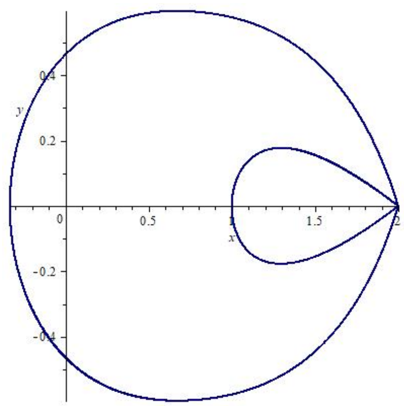


Figura 3.25: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = 1$, relativa à forma **(14)**.

Exemplo 3.24 (**Exemplo que realiza as formas (15) e (16)**)**.** Sejam

$$A(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)^2 + 1,\ B(x) = -8\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \text{ e } C(x) = 4.$$

Dessa forma,

$$F(x) = -1024x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{7}{8}\right)$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = -\infty.$$

Consequentemente, além da origem, os pontos de equilíbrio são

$$\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ \left(-\frac{7}{8}, \pm\frac{3\sqrt{5}}{8}\right) \text{ e } (1,0),$$

com

$$H\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{23}{64},\ H\left(-\frac{7}{8}, \pm\frac{3\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{1699}{1024} \text{ e } A(1) = 1.$$

Temos, então, que entre as retas

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}, y\right) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\right\} \text{ e } \left\{\left(\frac{1}{2}, y\right) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\right\},$$

não existem pontos de equilíbrio, a menos da origem. Portanto, $h_0 = \dfrac{23}{64}$, pois o nível associado a este valor é dado na Figura 3.26.

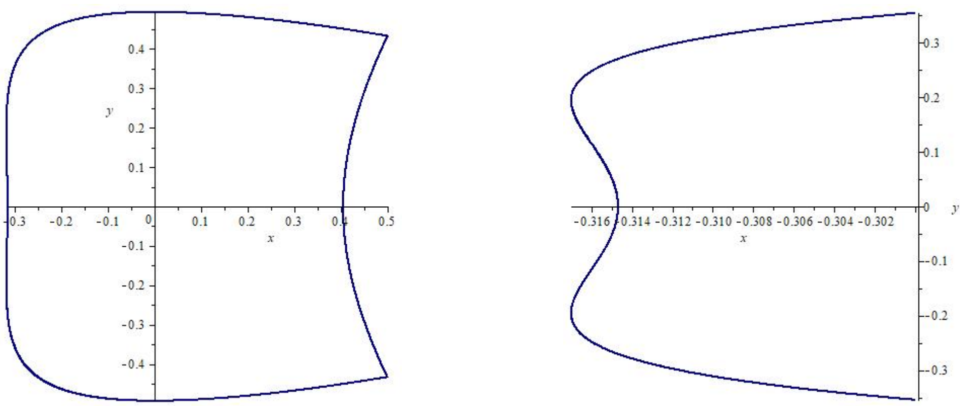


Figura 3.26: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = \dfrac{23}{64}$, relativa às formas **(15)** e **(16)**.

Exemplo 3.25 (**Exemplo que realiza a forma (17)**)**.** Sejam

$$A(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2)^2 + 1,\ \ B(x) = \frac{1}{8}(32x^2 - 72x + 7) \text{ e } C(x) = 8.$$

Como o polinômio C é constante e $F(x) = 126$, segue que os pontos de equilíbrio, além da origem, são

$$(2, 0) \text{ e } \left(\frac{11}{8}, 0\right).$$

Temos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)}\right) = \pm\infty.$$

Assim, h_0 é o nível de um dos pontos de equilíbrio. Uma vez que $x = \dfrac{11}{8}$ é ponto de máximo local de A, segue que $h_0 = A(2) = 1$ (leia a explicação da Figura 3.6).

Outra forma de ver isso é notar que

$$H\left(\frac{11}{8}, 0\right) = \frac{9317}{8192} > 1$$

e que o nível 1 (neste exemplo, em sua totalidade) é da forma dada na Figura 3.27.

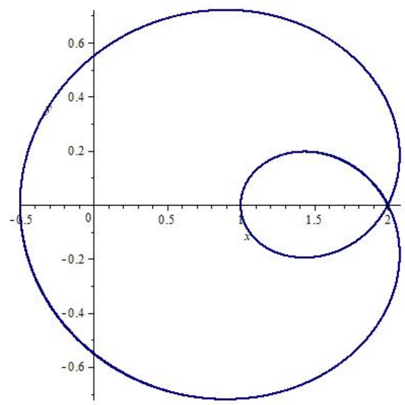


Figura 3.27: Exemplo da fronteira de $\mathcal{P}$, associada ao nível $h_0 = 1$, relativa à forma **(17)**.

Exemplo 3.26 (**Primeiro exemplo de centro global**)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ números não nulos. Consideremos

$$A(x) = \frac{a^2}{2}x^2, \ B(x) = \frac{b}{a}x + \frac{1}{2a^2} \text{ e } C(x) = \frac{b^2}{2a^4}.$$

Como o polinômio C é constante e positivo, e

$$F(x) = -\frac{b^3}{2a^7}$$

segue que não existem pontos de equilíbrio além da origem. Se $ab > 0$, então o polinômio B tem uma única raiz real $r_e < 0$ e, para todo $x < r_e$, $B(x) < 0$. Mais ainda,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = +\infty.$$

Agora, suponhamos $ab < 0$. Assim, B possui uma única raiz real $r_d > 0$ com $B(x) > 0$ para todo $x > r_d$, e

$$\lim_{x \to +\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = +\infty.$$

Logo, os itens de 1 a 5 no Teorema 3.10 são verdadeiros. Portanto, o centro na origem é global

Exemplo 3.27 (**Segundo exemplo de centro global**)**.** Sejam

$$A(x) = \frac{x^2}{2}, \ B(x) = -\sqrt{2}x + 3 \text{ e } C(x) = 1.$$

Uma vez que C é um polinômio constante e positivo, e $F(x) = 6\sqrt{2}$, obtemos que os itens 1, 2 e 3 do Teorema 3.10 são verdadeiros. Como $B(0) > 0$, $B'(0) < 0$ e

$$\lim_{x \to +\infty} \left(A(x) - \frac{B(x)^2}{4C(x)} \right) = +\infty,$$

segue que os itens 4 e 5 do Teorema 3.10 também são verdadeiros. Portanto, o centro é global.

Os Teoremas 3.8 e 3.10 completam a descrição do conjunto $\mathcal{P}$. Apresentamos na proposição abaixo a caracterização de um centro, na origem, isócrono trivial de período 2π do sistema (3.1). Omitimos os argumentos "x"e "(x, y)"na definição de um função em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Proposição 3.28. *A origem é um centro isócrono trivial de período* 2π *do sistema* (3.1) *se, e somente se,*

$$A = \frac{a^2}{2}x^2, \ B = \frac{b}{a}x + \frac{1}{2a^2} \ \text{e} \ C = \frac{b^2}{2a^4} \tag{3.3}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $a, b \neq 0$.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que a origem seja um centro isócrono trivial de período 2π do sistema (3.1). Assim, existe $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde

$$f_1 = p_1 + p_2 y + p_3 y^2 \text{ e } f_2 = q_1 + q_2 y + q_3 y^2$$

com $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}[x]$, tal que

$$\Big| Jf \Big| \equiv 1 \text{ e } H = \frac{f_1^2 + f_2^2}{2}.$$

Temos que $\Big| Jf \Big| \equiv 1$ é equivalente a

$$\begin{aligned} e_1 :\ & 2p_{3x}q_3 - 2p_3 q_{3x} = 0, \\ e_2 :\ & 2p_{2x}q_3 - 2p_3 q_{2x} + p_{3x}q_2 - p_2 q_{3x} = 0, \\ e_3 :\ & 2p_{1x}q_3 - 2p_3 q_{1x} + p_{2x}q_2 - p_2 q_{2x} = 0, \\ e_4 :\ & p_{1x}q_2 - p_2 q_{1x} = 1. \end{aligned}$$

Primeiramente, assumamos $q_3 \neq 0$. De e_1 segue que $p_3 = \lambda q_3$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $p_2 = \lambda q_2$, obtemos de e_3 e e_4 que

$$2q_3(p_{1x} - \lambda q_{1x}) = 0 \text{ e } q_2(p_{1x} - \lambda q_{1x}) = 1,$$

respectivamente. Daí, $p_{1x} - \lambda q_{1x} = 0$ e isso é um absurdo. Dessa forma, $p_2 \neq \lambda q_2$. Por e_2 temos

$$q_3 = a_3(p_2 - \lambda q_2)^2$$

com $0 \neq a_3 \in \mathbb{R}$. Denotemos $K = p_2 - \lambda q_2$. Suponhamos $p_1 = \lambda q_1$. Desse modo, de e_3 e e_4 segue, respectivamente, que

$$q_2 K_x - q_{2x} K = 0 \text{ e } -q_{1x} K = 1.$$

Logo, existem $r, s, v \in \mathbb{R}$ com $r \neq 0$ tais que

$$K = r, \ q_1 = -\frac{1}{r}x + s \text{ e } q_2 = v.$$

Como $H(0,0) = 0$ e $H_{y^3}\Big|_{y=0} = 6a_3r^2(v + \lambda^2 v + r\lambda) = 0$, temos

$$s = 0 \text{ e } v = -\frac{r\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Assim,

$$A = \frac{1+\lambda^2}{2r^2}x^2,\ B = -a_3r(1+\lambda^2)x + \frac{r^2}{2(1+\lambda^2)} \text{ e } C = \frac{a_3^2r^4(1+\lambda^2)}{2}.$$

Agora, suponhamos que $p_1 \neq \lambda q_1$. Denotemos $M = p_1 - \lambda q_1$. Como

$$H_{y^3}\Big|_{y=0} = 6a_3(q_2 + \lambda p_2)(p_2 - \lambda q_2)^2 = 0,$$

obtemos que $q_2 = -\lambda p_2$ e, consequentemente, $p_2 \neq 0$ pois

$$a_3(1+\lambda^2)^2{p_2}^2 = q_3 \neq 0.$$

Do fato de que $H_y\Big|_{y=0} = p_2M = 0$, temos $M = 0$. Dessa maneira, de e_4 segue que existem $r, s \in \mathbb{R}$ com $r \neq 0$ tais que

$$p_2 = -\frac{1}{r(1+\lambda^2)} \text{ e } q_1 = rx + s.$$

Temos, então, $s = 0$, uma vez que $H(0,0) = 0$. Daí,

$$A = \frac{r^2(1+\lambda^2)}{2}x^2,\ B = \frac{a_3(1+\lambda^2)}{r}x + \frac{1}{2r^2(1+\lambda^2)} \text{ e } C = \frac{a_3^2(1+\lambda^2)}{2r^4}.$$

Assumamos, agora, $q_3 = 0$. Daí, $p_3 \neq 0$. Se $q_2 = 0$, então de e_3 e e_4 segue

$$-2p_3{q_1}_x = 0 \text{ e } -p_2{q_1}_x = 1,$$

respectivamente. Logo, ${q_1}_x = 0$ e isso gera um absurdo. Dessa forma, $q_2 \neq 0$. De e_2 segue que

$$p_3 = \lambda q_2^2$$

com $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Como $H_{y^3}\Big|_{y=0} = 6\lambda p_2 q_2^2 = 0$, obtemos que $p_2 = 0$. Temos que

$$H_y\Big|_{y=0} = q_1q_2 = 0.$$

Então, $q_1 = 0$. Temos, por e_4, que existe $0 \neq r \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$q_2 = \frac{1}{r} \text{ e } p_1 = rx,$$

pois $H(0,0)=0$. Desse modo,

$$A=\frac{r^2}{2}x^2,\ B=\frac{\lambda}{r}x+\frac{1}{2r^2}\text{ e } C=\frac{\lambda^2}{2r^4}$$

Portanto, diante as três possíveis formas dos polinômios A, B e C, temos que existem contantes reais $a, b \neq 0$ tais que

$$A=\frac{a^2}{2}x^2,\ B=\frac{b}{a}x+\frac{1}{2a^2}\text{ e } C=\frac{b^2}{2a^4}.$$

($\Longleftarrow$) Consideremos os polinômios A, B e C como na hipótese. Seja $f=(f_1,f_2):\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ dada por

$$f_1=\frac{a^3x+by^2}{a^2}\text{ e } f_2=\frac{y}{a}.$$

Temos que $\left|Jf\right|\equiv 1$ e

$$H=A+By^2+Cy^4=\frac{f_1^2+f_2^2}{2}.$$

Portanto, pelo Teorema 1.1 concluímos que $(0,0)$ é um centro isócrono trivial de período 2π do sistema (3.1). □

Está provado em [5, Teorema E] que todo centro isócrono de período 2π na origem de um sistema Hamiltoniano associado a uma função H qualquer de grau 4 é trivial. Logo, a única classe de centros isócronos de período 2π na origem de (3.1), com $\deg(H)=4$, é a dada na Proposição 3.28. Notemos que, desse fato, o centro global dado no Exemplo 3.27 não é isócrono.

Segue diretamente da Proposição 3.28 o corolário abaixo.

Corolário 3.29. *Se* $(0,0)$ *é centro isócrono de período* 2π *do sistema* (3.1), *com* $\deg(H)\geq 5$, *então* $(0,0)$ *é não trivial.*

Observemos que o Corolário 3.29 nos mostra, em particular, que a classe de sistemas da forma (3.1), com $\deg(H)=6$, é um ambiente adequado para procurar um centro isócrono na origem com o intuito de dar uma resposta negativa à Pergunta 1.2. Por outro lado, acreditamos na veracidade da seguinte proposição:

> *Se* $(0,0)$ *é um centro não degenerado do sistema* (3.1), *com* $\deg(H)\geq 5$, *então* $(0,0)$ *não é um centro isócrono.*

CAPÍTULO 4

Isocronicidade trivial versus Conjectura Jacobiana

4.1 Aplicações polinomiais no plano com determinante Jacobiano unitário

Em [17, Teorema 2.3] é estabelecida uma conexão entre a trivialidade de um centro isócrono e a injetividade da aplicação polinomial f escolhida, dada como no Teorema 1.1. Especificamente, uma vez assumido que a origem de (1.1) é um centro isócrono trivial, a origem é um centro global se, e somente, f é injetora. Logo, estudar centros isócronos triviais se reduz, de certa forma, a analisar aplicações polinomiais $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $\left|Jf\right| \equiv 1$. Diante disso, nesta seção estudamos mais a fundo aplicações desse tipo.

Com a finalidade de nos auxiliar no estudo que desenvolveremos, enunciamos abaixo o Princípio da Boa Ordem, um dos axiomas base para a construção do conjunto dos números naturais. Para um maior entendimento, veja [18, Apêndice A].

> **Princípio da Boa Ordem**. *Todo conjunto não vazio de números naturais tem um elemento mínimo.*

Consideramos, também, dois lemas técnicos envolvendo polinômios homogêneos de duas variáveis. Esses lemas, bem como o Princípio da Boa Ordem, serão essenciais para a demonstração dos resultados deste capítulo.

Lema 4.1. *Sejam $p, q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ polinômios homogêneos de grau m e n, respectivamente. Defina $d = \mathrm{MDC}(m, n)$ e considere os números $m' = \dfrac{m}{d}$ e $n' = \dfrac{n}{d}$. Se $\left|J(p, q)\right| \equiv 0$, então existem* *constantes não nulas $c_p, c_q \in \mathbb{R}$ e um polinômio homogêneo $r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de grau d de modo que $p = c_p r^{m'}$ e $q = c_q r^{n'}$.*

Demonstração. Veja [1, Proposição 1]. $\square$

Lema 4.2. *Sejam $p, h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ polinômios homogêneos de grau k e $k-1$, respectivamente. Se existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p_x + \lambda p_y = h$, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $p(x, y) = q(x, y - \lambda x)$, com $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$q(x, y) = \int_0^x h(s, y + \lambda s)\ ds + cy^k.$$

Demonstração. Veja [2, Lema 2.2]. $\square$

Definição 4.3. Seja $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\mathcal{H}_n$ o conjunto

$$\mathcal{H}_n = \{0\} \cup \{p \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^2, \mathbb{R});\ p \text{ é um polinômio homogêneo de grau } n\}.$$

Dado $l \in \mathbb{N}$, com $l \geq 2$, seja $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação definida por

$$f_1(x, y) = x + p_2(x, y) + \ldots + p_l(x, y) \text{ e } f_2(x, y) = y + q_2(x, y) + \ldots + q_l(x, y) \tag{4.1}$$

com $p_i, q_i \in \mathcal{H}_i$ para cada $i \in \{2, 3, \ldots, l\}$. Suponhamos que $\left|Jf\right| \equiv 1$. Essa condição é equivalente ao polinômio

$$\left|J(p_2 + \ldots + p_l, q_2 + \ldots + q_l)\right| + (p_{2x} + \ldots + p_{lx}) + (q_{2y} + \ldots q_{ly}) \tag{4.2}$$

ser identicamente nulo. Notemos que (4.2) é um polinômio de grau menor ou igual a $2l - 2$. Para $M \in \{0, 1, \ldots, l-2\}$, denotemos por e_{l-M} e e_{l+M} as partes homogêneas de graus $l - M$ e $l + M$, respectivamente, de (4.2). Além disso, denotemos por e_1 a parte homogênea de grau um de (4.2). Assim,

$$e_1 = p_{2x} + q_{2y}.$$

Consideremos os polinômios

$$(p_{2x} + \ldots + p_{lx})(q_{2y} + \ldots + q_{ly}) \tag{4.3}$$

e

$$(p_{2y} + \ldots + p_{ly})(q_{2x} + \ldots + q_{lx}). \tag{4.4}$$

Seja $M \in \{1, 2, \ldots, l-2\}$. As partes homogêneas de grau $l-M$ dos polinômios (4.3) e (4.4) são, respectivamente,

$$\sum_{i+j-2=l-M} p_{i_x} q_{j_y} \text{ e } \sum_{i+j-2=l-M} p_{i_y} q_{j_x}$$

com $i, j \in \{2, 3, \ldots, l\}$, respectivamente. Temos que

$$\sum_{\substack{i+j-2=l-M \\ i,j\in\{2,3,\ldots,l\}}} p_{i_x} q_{j_y} = \sum_{i=2}^{l-M} p_{i_x} q_{l-M+2-i_y} \overset{r=-i+l-M+1}{=} \sum_{r=1}^{l-M-1} p_{l-M+1-r_x} q_{r+1_y}$$

e

$$\sum_{\substack{i+j-2=l-M \\ i,j\in\{2,3,\ldots,l\}}} p_{i_y} q_{j_x} = \sum_{i=2}^{l-M} p_{i_y} q_{l-M+2-i_x} \overset{r=-i+l-M+1}{=} \sum_{r=1}^{l-M-1} p_{l-M+1-r_y} q_{r+1_x}.$$

Assim,

$$e_{l-M} = \sum_{r=1}^{l-M-1} \big(p_{l-M+1-r_x} q_{r+1_y} - p_{l-M+1-r_y} q_{r+1_x}\big) + p_{l-M+1_x} + q_{l-M+1_y}$$

$$= \sum_{r=1}^{l-M-1} \Big|J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1})\Big| + p_{l-M+1_x} + q_{l-M+1_y}.$$

Se $l-M=2$, então

$$e_2 = \Big|J(p_2, q_2)\Big| + p_{3_x} + q_{3_y}.$$

Agora, se $l-M>2$ e $l-M$ é par, então

$$e_{l-M} = \sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \Big|J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1})\Big| + \sum_{r=\frac{l-M}{2}+1}^{l-M-1} \Big|J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1})\Big|$$

$$+ \Big|J\Big(p_{\frac{l-M+2}{2}}, q_{\frac{l-M+2}{2}}\Big)\Big| + p_{l-M+1_x} + q_{l-M+1_y}.$$

Tomando a mudança de variável $s = l-M-r$, obtemos que

$$e_{l-M} = \sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \Big|J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1})\Big| + \sum_{s=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \Big|J(p_{s+1}, q_{l-M+1-s})\Big|$$

$$+ \Big|J\Big(p_{\frac{l-M+2}{2}}, q_{\frac{l-M+2}{2}}\Big)\Big| + p_{l-M+1_x} + q_{l-M+1_y}$$

e, consequentemente,

$$e_{l-M} \overset{s=r}{=} \sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \Big(\Big| J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1}) \Big| + \Big| J(p_{r+1}, q_{l-M+1-r}) \Big| \Big)$$

$$+ \Big| J\Big(p_{\frac{l-M+2}{2}}, q_{\frac{l-M+2}{2}} \Big) \Big| + p_{l-M+1_x} + q_{l-M+1_y}.$$

Se $l-M$ é ímpar, então

$$\begin{aligned}
e_{l-M} &= \sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \Big| J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1}) \Big| + \sum_{r=\frac{l-M-1}{2}+1}^{l-M-1} \Big| J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1}) \Big| + p_{l-M+1_x} + q_{l-M+1_y} \\
&\overset{s=l-M-r}{=} \sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \Big| J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1}) \Big| + \sum_{s=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \Big| J(p_{s+1}, q_{l-M+1-s}) \Big| + p_{l-M+1_x} + q_{l-M+1_y} \\
&\overset{s=r}{=} \sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \Big(\Big| J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1}) \Big| + \Big| J(p_{r+1}, q_{l-M+1-r}) \Big| \Big) + p_{l-M+1_x} + q_{l-M+1_y}.
\end{aligned}$$

Analogamente, seja $M \in \{0, 1, \ldots, l-2\}$. Desse modo, as partes homogêneas de grau $l+M$ de (4.3) e (4.4) são dadas, respectivamente, por

$$\sum_{i+j-2=l+M} p_{i_x} q_{j_y} \text{ e } \sum_{i+j-2=l+M} p_{i_y} q_{j_x}$$

com $i, j \in \{2, 3, \ldots, l\}$, respectivamente. Logo,

$$\sum_{\substack{i+j-2=l+M \\ i,j \in \{2,3,\ldots,l\}}} p_{i_x} q_{j_y} = \sum_{i=M+2}^{l} p_{i_x} q_{l+M+2-i_y} \overset{r=i-M-1}{=} \sum_{r=1}^{l-M-1} p_{r+M+1_x} q_{l+1-r_y}$$

e

$$\sum_{\substack{i+j-2=l+M \\ i,j \in \{2,3,\ldots,l\}}} p_{i_y} q_{j_x} = \sum_{i=M+2}^{l} p_{i_y} q_{l+M+2-i_x} \overset{r=i-M-1}{=} \sum_{r=1}^{l-M-1} p_{r+M+1_y} q_{l+1-r_x}.$$

Dessa forma,

$$e_{l+M} = \sum_{r=1}^{l-M-1} \left(p_{r+M+1x} q_{l+1-ry} - p_{r+M+1y} q_{l+1-rx}\right) = \sum_{r=1}^{l-M-1} \Big| J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r}) \Big|.$$

Para $l + M = 2l - 2$ temos

$$e_{2l-2} = \Big| J(p_l, q_l) \Big|.$$

Se $l + M$ é par, com $l + M < 2l - 2$, então

$$\begin{aligned} e_{l+M} \quad &= \quad \sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \Big| J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r}) \Big| + \sum_{r=\frac{l-M}{2}+1}^{l-M-1} \Big| J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r}) \Big| + \Big| J\Big(p_{\frac{l+M+2}{2}}, q_{\frac{l+M+2}{2}}\Big) \Big| \\ &\overset{s=l-M-r}{=} \sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \Big| J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r}) \Big| + \sum_{s=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \Big| J(p_{l+1-s}, q_{s+M+1}) \Big| + \Big| J\Big(p_{\frac{l+M+2}{2}}, q_{\frac{l+M+2}{2}}\Big) \Big| \\ &\overset{s=r}{=} \quad \sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \Big(\Big| J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r}) \Big| + \Big| J(p_{l+1-r}, q_{r+M+1}) \Big| \Big) + \Big| J\Big(p_{\frac{l+M+2}{2}}, q_{\frac{l+M+2}{2}}\Big) \Big|. \end{aligned}$$

Agora, se $l + M$ é ímpar, então

$$\begin{aligned} e_{l+M} \quad &= \quad \sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \Big| J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r}) \Big| + \sum_{r=\frac{l-M-1}{2}+1}^{l-M-1} \Big| J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r}) \Big| \\ &\overset{s=l-M-r}{=} \sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \Big| J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r}) \Big| + \sum_{s=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \Big| J(q_{l+1-s}, p_{s+M+1}) \Big| \\ &\overset{s=r}{=} \quad \sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \Big(\Big| J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r}) \Big| + \Big| J(p_{l+1-r}, q_{r+M+1}) \Big| \Big). \end{aligned}$$

Portanto, $\Big|Jf\Big| \equiv 1$ se, e somente se,

$$\begin{cases} e_1 = p_{2x} + q_{2y} \\ \\ e_2 = \Big|J(p_2, q_2)\Big| + p_{3x} + q_{3y} \\ \\ e_{2l-2} = \Big|J(p_l, q_l)\Big| \end{cases} \tag{4.5}$$

e, para $M \in \{0, 1, \ldots, l-3\}$,

$$e_{l-M} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \left(\Big|J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1})\Big| + \Big|J(p_{r+1}, q_{l-M+1-r})\Big|\right), \ l-M \text{ par} \\ + \left|J\left(p_{\frac{l-M+2}{2}}, q_{\frac{l-M+2}{2}}\right)\right| + p_{l-M+1x} + q_{l-M+1y} \\ \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \left(\Big|J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1})\Big| + \Big|J(p_{r+1}, q_{l-M+1-r})\Big|\right), \ l-M \text{ ímpar} \\ + p_{l-M+1x} + q_{l-M+1y} \end{cases}, \ M \neq 0 \tag{4.6}$$

e

$$e_{l+M} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \left(\Big|J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r})\Big| + \Big|J(p_{l+1-r}, q_{r+M+1})\Big|\right), \ l+M \text{ par} \\ + \left|J\left(p_{\frac{l+M+2}{2}}, q_{\frac{l+M+2}{2}}\right)\right| \\ \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \left(\Big|J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r})\Big| + \Big|J(p_{l+1-r}, q_{r+M+1})\Big|\right), \ l+M \text{ ímpar} \end{cases}, \tag{4.7}$$

são polinômios homogêneos identicamente nulos. Notemos que se $p_l \neq 0$, do Lema 4.1 segue que $e_{2l-2} = 0$ se, e somente se, existe um único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $q_l = \lambda p_l$. Diante disso, se $p_l \neq 0$, concluímos que $\Big|Jf\Big| \equiv 1$ se, e somente se, para $M \in \{0, 1, \ldots, l-3\}$, os polinômios em (4.5), (4.6) e (4.7) são identicamente nulos e $q_l = \lambda p_l$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação 4.4. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, com $l \geq 3$, e $s \in \{3, 4, \dots, l\}$. Consideremos uma aplicação f definida como em (4.1), juntamente com os polinômios em (4.5), (4.6) e (4.7). Assumamos que $p_l \neq 0$, $q_{s-1} \neq \lambda p_{s-1}$ e, para todo $s \leq i \leq l$, $q_i = \lambda p_i$. Observemos que

$$l + (s-3) \text{ par } \Longrightarrow s \neq l \text{ e } s \leq \frac{l + (s-3) + 2}{2} \leq l,$$

$$2 \leq r \leq \frac{l - (s-3)}{2} - 1 \Longrightarrow \begin{cases} s \leq r + (s-3) + 1 \leq l \\ s \leq l + 1 - r \leq l \end{cases}$$

e

$$2 \leq r \leq \frac{l - (s-3) - 1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} s \leq r + (s-3) + 1 \leq l \\ s \leq l + 1 - r \leq l \end{cases}.$$

Assim, por (4.7),

$$e_{l+(s-3)} = \Big| J(p_l, q_{s-1} - \lambda p_{s-1}) \Big|.$$

Além disso, para cada $M \in \{s-2, s-1, \dots, l-2\}$, segue que

$$1 \leq r \leq \frac{l - M}{2} - 1 \Longrightarrow \begin{cases} s \leq r + M + 1 \leq l \\ s \leq l + 1 - r \leq l \\ s \leq \dfrac{l + M + 2}{2} \leq l \end{cases}$$

e

$$1 \leq r \leq \frac{l - M - 1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} s \leq r + M + 1 \leq l \\ s \leq l + 1 - r \leq l \end{cases}.$$

Novamente de (4.7) obtemos que $e_{l+M} = 0$. Logo, podemos desconsiderar todos os polinômios e_{l+M}, com $M \in \{s-2, s-1, \dots, l-2\}$, já que são expressões polinomiais essencialmente nulas.

Adicionalmente, assumamos que $\Big| Jf \Big| \equiv 1$ e $\mathrm{MDC}(l, s-1) = 1$. Como $e_{l+(s-3)} = 0$ segue, do Lema 4.1, que existem constantes $c_{s-1}, c_l, a, b \in \mathbb{R}$, com $c_{s-1}c_l(a^2 + b^2) \neq 0$, tais que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ p_l(x, y) = c_l(ax + by)^l \text{ e } q_{s-1}(x, y) = \lambda p_{s-1}(x, y) + c_{s-1}(ax + by)^{s-1}.$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo definido por $T(x, y) = (bx - ay, ax + by)$. Para todo $i \in \{2, 3, \dots, l\}$, tomemos os polinômios homogêneos $\overline{p}_i$ e $\overline{q}_i$ tais que $\overline{p}_i \circ T = p_i$ e $\overline{q}_i \circ T = q_i$.

Por questão de notação, no que segue

$$\forall i \in \{1,2,\dots,l\}, \quad \begin{cases} i \neq 1, \ p_i \coloneqq \overline{p}_i \text{ e } q_i \coloneqq \overline{q}_i \\ \\ e_i \coloneqq e_i \circ T^{-1} \end{cases}.$$

Desse modo,

$$\begin{cases} 0 = e_1 = bp_{2_x} + bq_{2_y} + ap_{2_y} - aq_{2_x} \\ 0 = e_2 = (a^2+b^2)\Big|J(p_2,q_2)\Big| + bp_{3_x} + bq_{3_y} + ap_{3_y} - aq_{3_x} \end{cases}, \tag{4.8}$$

para cada $M \in \{1,2,\dots,l-3\}$,

$$0 = e_{l-M} = \begin{cases} (a^2+b^2)\displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1}\left(\Big|J(p_{l-M+1-r},q_{r+1})\Big| + \Big|J(p_{r+1},q_{l-M+1-r})\Big|\right) \\ + (a^2+b^2)\left|J\left(p_{\frac{l-M+2}{2}},q_{\frac{l-M+2}{2}}\right)\right| + bp_{l-M+1_x} + bq_{l-M+1_y} & , \ l-M \text{ par} \\ + ap_{l-M+1_y} - aq_{l-M+1_x} \\ \\ (a^2+b^2)\displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}}\left(\Big|J(p_{l-M+1-r},q_{r+1})\Big| + \Big|J(p_{r+1},q_{l-M+1-r})\Big|\right), & l-M \text{ ímpar} \\ + bp_{l-M+1_x} + bq_{l-M+1_y} + ap_{l-M+1_y} - aq_{l-M+1_x} \end{cases} \tag{4.9}$$

e, para cada $M \in \{0,1,\dots,s-4\}$,

$$0 = e_{l+M} = \begin{cases} (a^2+b^2)\displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1}\left(\Big|J(p_{r+M+1},q_{l+1-r})\Big| + \Big|J(p_{l+1-r},q_{r+M+1})\Big|\right), & l+M \text{ par} \\ + (a^2+b^2)\Big|J\Big(p_{\frac{l+M+2}{2}},q_{\frac{l+M+2}{2}}\Big)\Big| \\ \\ (a^2+b^2)\displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}}\left(\Big|J(p_{r+M+1},q_{l+1-r})\Big| + \Big|J(p_{l+1-r},q_{r+M+1})\Big|\right), & l+M \text{ ímpar} \end{cases} \tag{4.10}$$

com $q_i = \lambda p_i$ para cada $i \in \{s, s+1, \dots, l\}$ e, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$p_l(x,y) = c_l y^l \text{ e } q_{s-1}(x,y) = \lambda p_{s-1}(x,y) + c_{s-1}y^{s-1}.$$

Daqui em diante, em algumas ocasiões, omitiremos o argumento "(x, y)" em expressões polinomiais.

Teorema 4.5. *Considere uma aplicação* $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida como em* (4.1)*, com* $l \geq 5$*. Suponha que* $p_l \neq 0$ *e* $\Big|Jf\Big| \equiv 1$*. Seja* $\lambda \in \mathbb{R}$ *o número tal que* $q_l = \lambda p_l$*. Então,*

a) *Se* $\mathrm{MDC}(l, 3) = 1$ *e, para todo* $i \in \{4, 5, \ldots, l-1\}$*,* $q_i = \lambda p_i$*, então* $q_3 = \lambda p_3$*.*

b) *Se* $\mathrm{MDC}(l, 2) = 1$ *e, para todo* $i \in \{3, 4, \ldots, l-1\}$*,* $q_i = \lambda p_i$*, então* $q_2 = \lambda p_2$*.*

Demonstração. **a)** Assumamos que $\mathrm{MDC}(l, 3) = 1$ e que, para todo $i \in \{4, 5, \ldots, l-1\}$, $q_i = \lambda p_i$. Notemos que se l é par, então $l \geq 8$. Suponhamos, por absurdo, que $q_3 \neq \lambda p_3$. Diante da Observação 4.4, consideremos $s = 4$ em (4.8), (4.9) e (4.10). Denotemos por K o polinômio $q_2 - \lambda p_2$. Logo, para todo $M \in \{2, 3, \ldots, l-3\}$,

$$e_2 = 3bc_3y^2 + (b - a\lambda)p_{3_x} + (a + \lambda b)p_{3_y} + (a^2 + b^2)\Big|J(p_2, K)\Big|, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} e_{l-M} = {} & 3c_3(a^2 + b^2)p_{l-M-1_x}y^2 + (b - a\lambda)p_{l-M+1_x} + (a + \lambda b)p_{l-M+1_y} \\ & + (a^2 + b^2)\Big|J(p_{l-M}, K)\Big|, \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$e_{l-1} = 3c_3(a^2 + b^2)p_{l-2_x}y^2 + lc_l(a + \lambda b)y^{l-1} + (a^2 + b^2)\Big|J(p_{l-1}, K)\Big| \tag{4.13}$$

e

$$e_l = (a^2 + b^2)\Big(3c_3p_{l-1_x}y^2 - lc_lK_xy^{l-1}\Big). \tag{4.14}$$

De (4.14) segue que

$$p_{l-1} = a_1Ky^{l-3} + F_0y^{l-1}$$

com $0 \neq a_1 \in \mathbb{R}$ e $F_0 \in \mathcal{H}_0$. Substituindo p_{l-1} em (4.13) obtemos que, para todo $y > 0$,

$$p_{l-2} = a_2K^2y^{l-6} + F_2y^{l-4}$$

com $0 \neq a_2 \in \mathbb{R}$ e $F_2 \in \mathcal{H}_2$. Consideremos os números $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $l = 3q + r$ e $0 \leq r < 3$. Notemos que $r \in \{1, 2\}$ pois $\mathrm{MDC}(l, 3) = 1$. Observemos que

$$n \in \{1, 2, \ldots q+1\} \Longrightarrow n - 1 \in \{0, 1, \ldots, l-3\}.$$

Seja $\mathcal{P}(n)$ a sentença aberta sobre $\{1, 2, \ldots q+1\}$ dada por

$$\mathcal{P}(n) : \forall y > 0,\ p_{l-n} = a_nK^ny^{l-3n} + F_{2n-2}y^{l-(3n-2)}$$

com $0 \neq a_n \in \mathbb{R}$ e $F_{2n-2} \in \mathcal{H}_{2n-2}$. Temos que $\mathcal{P}(1)$ e $\mathcal{P}(2)$ são verdadeiras. Se $l = 5$, então $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira para cada $n \in \{1, 2, \ldots q+1\} = \{1, 2\}$. Para $l \geq 7$, suponhamos que $\mathcal{P}(1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}(n-1)$ seja verdadeira para um dado $n \in \{3, 4, \ldots, q+1\}$. Logo, para todo $y > 0$,

$$p_{l-(n-2)} = a_{n-2} K^{n-2} y^{l-3n+6} + F_{2n-6} y^{l-3n+8}$$

e

$$p_{l-(n-1)} = a_{n-1} K^{n-1} y^{l-3n+3} + F_{2n-4} y^{l-3n+5}$$

com $0 \neq a_{n-2}, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $F_{2n-6} \in \mathcal{H}_{2n-6}$ e $F_{2n-4} \in \mathcal{H}_{2n-4}$. De (4.12) segue que, para todo $y > 0$,

$$e_{l-(n-1)} = 3c_3(a^2+b^2) p_{l-n_x} y^2 - a_{n-1}(l-3n+3)(a^2+b^2) K_x K^{n-1} y^{l-3n+2} + \overline{F}_{2n-3} y^{l-3n+4}$$

com $\overline{F}_{2n-3} \in \mathcal{H}_{2n-3}$. Logo, para todo $y > 0$,

$$p_{l-n} = a_n K^n y^{l-3n} + F_{2n-2} y^{l-(3n-2)}$$

com

$$0 \neq a_n = \frac{a_{n-1}(l-3n+3)}{3nc_3} \in \mathbb{R}$$

e $F_{2n-2} \in \mathcal{H}_{2n-2}$. Assim, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira. Suponhamos, por contradição, que exista um elemento $n \in \{1, 2, \ldots, q+1\}$ tal que $\mathcal{P}(n)$ é uma proposição falsa. Consideremos o conjunto

$$S = \{n \in \{1, 2, \ldots, q+1\};\ \mathcal{P}(n) \text{ é uma proposição falsa}\}.$$

Como $S \neq \emptyset$, segue do Princípio da Boa Ordem que S tem um menor elemento n_0. Uma vez que $\mathcal{P}(1)$ e $\mathcal{P}(2)$ são verdadeiras, temos $1, 2 \notin S$. Consequentemente, $n_0 \geq 3$. Logo, $n_0 - 1 \notin S$ e $\mathcal{P}(1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}(n_0 - 1)$ é verdadeira. Dessa forma, $\mathcal{P}(n_0)$ é verdadeira e, então, $s \notin S$. Absurdo. Assim, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira para todo $n \in \{1, 2, \ldots, q+1\}$.

De $\mathcal{P}(q+1)$ e da analiticidade dos polinômios homogêneos temos que

$$y^{3-r} p_{l-(q+1)} = a_{q+1} K^{q+1} + F_{2q} y^2.$$

Assim, $K = yK_1$ com $K_1 \in \mathcal{H}_1$.

Nos passos seguintes, usamos algumas notações iguais às dadas anteriormente a constantes e polinômios. No entanto, as notações semelhantes não necessariamente indicam que as constantes/polinômios associados são iguais.

Reescrevendo (4.12), (4.13) e (4.14) obtemos que, para cada $M \in \{2, 3, \ldots, l-3\}$,

$$\begin{aligned} e_{l-M} = {} & 3(a^2+b^2) c_3 p_{l-M-1_x} y^2 + (b - a\lambda) p_{l-M+1_x} + (a + \lambda b) p_{l-M+1_y} \\ & + (a^2+b^2) \Big| J(p_{l-M}, K_1) \Big| y + (a^2+b^2) p_{l-M_x} K_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{l-1} = {} & 3(a^2+b^2)c_3 p_{l-2x} y^2 + lc_l(a+\lambda b)y^{l-1} + (a^2+b^2)\Big|J(p_{l-1},K_1)\Big|y \\ & + (a^2+b^2)p_{l-1x}K_1 \end{aligned}$$

e

$$e_l = (a^2+b^2)\Big(3c_3 p_{l-1x} y^2 - lc_l K_{1x} y^l\Big).$$

Da expressão de e_l temos que

$$p_{l-1} = a_1 K_1 y^{l-2} + F_0 y^{l-1}$$

com $0 \neq a_1 \in \mathbb{R}$ e $F_0 \in \mathcal{H}_0$. Substituindo p_{l-1} na expressão de e_{l-1} obtemos que

$$p_{l-2} = a_2 K_1^2 y^{l-4} + F_1 y^{l-3}$$

com $0 \neq a_2 \in \mathbb{R}$ e $F_1 \in \mathcal{H}_1$. Tomemos os números $\overline{q}, \overline{r} \in \mathbb{N}$ tais que $l = 2\overline{q} + \overline{r}$ e $0 \leq \overline{r} < 2$. Como $l \geq 5$, $\overline{q} \geq 2$. Notemos que

$$n \in \{1, 2, \ldots \overline{q}+1\} \Longrightarrow n-1 \in \{0, \ldots, l-3\}.$$

Seja $\mathcal{P}_1(n)$ a sentença aberta sobre $\{1, 2, \ldots \overline{q}+1\}$ definida por

$$\mathcal{P}_1(n):\ \forall y > 0,\ p_{l-n} = a_n K_1^n y^{l-2n} + F_{n-1} y^{l-(2n-1)}$$

com $0 \neq a_n \in \mathbb{R}$ e $F_{n-1} \in \mathcal{H}_{n-1}$. Temos que $\mathcal{P}_1(1)$ e $\mathcal{P}_1(2)$ são verdadeiras. Suponhamos que $\mathcal{P}_1(1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_1(n-1)$ seja verdadeira para um dado $n \in \{3, 4, \ldots \overline{q}+1\}$. Logo, para todo $y > 0$,

$$p_{l-(n-2)} = a_{n-2} K_1^{n-2} y^{l-2n+4} + F_{n-3} y^{l-2n+5}$$

e

$$p_{l-(n-1)} = a_{n-1} K_1^{n-1} y^{l-2n+2} + F_{n-2} y^{l-2n+3}$$

com $0 \neq a_{n-2}, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $F_{n-3} \in \mathcal{H}_{n-3}$ e $F_{n-2} \in \mathcal{H}_{n-2}$. Assim, para todo $y > 0$,

$$e_{l-(n-1)} = 3(a^2+b^2)c_3 p_{l-nx} y^2 - a_{n-1}(a^2+b^2)(l-3n+3)K_{1x}K_1^{n-1}y^{l-2n+2} + \overline{F}_{n-2} y^{l-2n+3}$$

com $\overline{F}_{n-2} \in \mathcal{H}_{n-2}$. Logo, para todo $y > 0$,

$$p_{l-n} = a_n K_1^n y^{l-2n} + F_{n-1} y^{l-(2n-1)}$$

com

$$0 \neq a_n = \frac{a_{n-1}(l-3n+3)}{3nc_3} \in \mathbb{R}$$

e $F_{n-1} \in \mathcal{H}_{n-1}$. Isto é, $\mathcal{P}_1(n)$ é verdadeira. Pelo Princípio da Boa Ordem, $\mathcal{P}_1(n)$ é verdadeira para todo $n \in \{1, 2, \ldots, \overline{q}+1\}$. De $\mathcal{P}_1(\overline{q}+1)$ obtemos que

$$y^{2-\overline{r}} p_{l-(\overline{q}+1)} = a_{\overline{q}+1} K_1^{\overline{q}+1} + F_{\overline{q}} y.$$

Então, concluímos que $K = yK_1 = vy^2$ para algum $v \in \mathbb{R}$.

Reescrevendo, novamente, (4.12), (4.13) e (4.14) temos, para cada $M \in \{2, 3, \ldots, l-3\}$, que

$$e_{l-M} = 3(a^2+b^2)c_3 p_{l-M-1_x} y^2 + (b - a\lambda) p_{l-M+1_x} + (a + \lambda b) p_{l-M+1_y} + 2v(a^2+b^2) p_{l-M_x} y,$$

$$e_{l-1} = 3(a^2+b^2)c_3 p_{l-2_x} y^2 + l c_l (a+\lambda b) y^{l-1} + 2v(a^2+b^2) p_{l-1_x} y$$

e

$$e_l = 3(a^2+b^2)c_3 p_{l-1_x} y^2.$$

Da expressão de e_l segue que $p_{l-1_x} = 0$ e, posteriormente, da expressão de e_{l-1} obtemos que

$$p_{l-2} = a_{l-2}(a+\lambda b) x y^{l-3} + F_0 y^{l-2}$$

com $0 \neq a_{l-2} \in \mathbb{R}$ e $F_0 \in \mathcal{H}_0$. Substituindo p_{l-2} na expressão de e_{l-2} segue que

$$p_{l-3} = Q_1 y^{l-4}$$

com $Q_1 \in \mathcal{H}_1$. Observemos que

$$l \text{ ímpar e } n \in \left\{1, 2, \ldots \frac{l-3}{2}\right\} \Longrightarrow 2n-1, 2n \in \{1, 2, \ldots, l-3\}$$

e

$$l \text{ par e } n \in \left\{1, 2, \ldots \frac{l-4}{2}\right\} \Longrightarrow 2n-1, 2n \in \{1, 2, \ldots, l-3\}.$$

Seja A o conjunto definido por

$$A = \begin{cases} \left\{1, 2, \ldots \frac{l-3}{2}\right\}, & l \text{ ímpar} \\ \left\{1, 2, \ldots \frac{l-4}{2}\right\}, & l \text{ par} \end{cases}.$$

Consideremos a sentença aberta $\mathcal{P}_2(n)$ sobre A dada por

$$\mathcal{P}_2(n):\ \forall y > 0,\ \begin{cases} p_{l-2n} = a_{l-2n}(a+\lambda b)^n x^n y^{l-3n} + F_{n-1} y^{l-(3n-1)} \\ p_{l-2n-1} = Q_n y^{l-(3n+1)} \end{cases}$$

com $0 \neq a_{l-2n} \in \mathbb{R}$, $F_{n-1} \in \mathcal{H}_{n-1}$ e $Q_n \in \mathcal{H}_n$. Temos que $\mathcal{P}_2(1)$ é verdadeira. Se $l = 5$, então $\mathcal{P}_2(n)$ é verdadeira para cada $n \in A = \left\{1, 2, \dots \frac{l-3}{2}\right\} = \{1\}$. Para $l \geq 7$, suponhamos que $\mathcal{P}_2(n-1)$ seja verdadeira para um dado $n \in A \backslash \{1\}$. Logo, para todo $y > 0$,

$$p_{l-2(n-1)} = a_{l-2n+2}(a + \lambda b)^{n-1} x^{n-1} y^{l-3n+3} + F_{n-2} y^{l-3n+4}$$

e

$$p_{l-2(n-1)-1} = Q_{n-1} y^{l-3n+2}$$

com $0 \neq a_{l-2n+2} \in \mathbb{R}$, $F_{n-2} \in \mathcal{H}_{n-2}$ e $Q_{n-1} \in \mathcal{H}_{n-1}$. Temos, para todo $y > 0$, que

$$e_{l-(2n-1)} = 3(a^2 + b^2) c_3 p_{l-2n_x} y^2 + a_{l-2n+2}(l - 3n + 3)(a + \lambda b)^n x^{n-1} y^{l-3n+2} + \overline{F}_{n-2} y^{l-3n+3}$$

com $\overline{F}_{n-2} \in \mathcal{H}_{n-2}$. Daí, para todo $y > 0$,

$$p_{l-2n} = a_{l-2n}(a + \lambda b)^n x^n y^{l-3n} + F_{n-1} y^{l-(3n-1)}$$

com

$$a_{l-2n} = -\frac{a_{l-2n+2}(l - 3n + 3)}{3n(a^2 + b^2) c_3} \neq 0$$

e $F_{n-1} \in \mathcal{H}_{n-1}$. Diante disso, para todo $y > 0$,

$$e_{l-2n} = 3(a^2 + b^2) c_3 p_{l-2n-1_x} y^2 + \overline{Q}_{n-1} y^{l-3n+1}$$

com $\overline{Q}_{n-1} \in \mathcal{H}_{n-1}$. Dessa forma, para todo $y > 0$,

$$p_{l-2n-1} = Q_n y^{l-(3n+1)}$$

com $Q_n \in \mathcal{H}_n$. Logo, pelo Princípio da Boa Ordem, $\mathcal{P}_2(n)$ é verdadeira para todo $n \in A$. De (4.11) segue que

$$e_2 = 3bc_3 y^2 + (b - a\lambda) p_{3_x} + (a + \lambda b) p_{3_y} + 2(a^2 + b^2) v p_{2_x} y.$$

Primeiramente, suponhamos que l seja ímpar. Nesse caso, temos que

$$\mathcal{P}_2\left(\frac{l-3}{2}\right) : \ \forall y > 0, \quad \begin{cases} p_3 = a_3 (a + \lambda b)^{\frac{l-3}{2}} x^{\frac{l-3}{2}} y^{\frac{9-l}{2}} + F_{\frac{l-5}{2}} y^{\frac{11-l}{2}} \\ p_2 = Q_{\frac{l-3}{2}} y^{\frac{7-l}{2}} \end{cases}$$

com $0 \neq a_3 \in \mathbb{R}$, $F_{\frac{l-5}{2}} \in \mathcal{H}_{\frac{l-5}{2}}$ e $Q_{\frac{l-3}{2}} \in \mathcal{H}_{\frac{l-3}{2}}$. Assim, se $l \geq 11$, então

$$y^{\frac{l-9}{2}} p_3 = a_3 (a + \lambda b)^{\frac{l-3}{2}} x^{\frac{l-3}{2}} + F_{\frac{l-5}{2}} y.$$

Daí, $a + \lambda b = 0$. Se $l = 5$ ou $l = 7$, então

$$\begin{cases} p_3 = a_3(a+\lambda b)xy^2 + F_0y^3 \\ p_2 = Q_1 y \end{cases} \text{ou} \begin{cases} p_3 = a_3(a+\lambda b)^2x^2y + F_1y^2 \\ p_2 = Q_2 \end{cases},$$

respectivamente. Desse modo, da expressão de e_2, segue que $a + \lambda b = 0$ em ambos os casos.

Agora, suponhamos que l seja par. Logo,

$$\mathcal{P}_2\left(\frac{l-4}{2}\right): \ \forall y > 0, \ \begin{cases} p_4 = a_4(a+\lambda b)^{\frac{l-4}{2}}x^{\frac{l-4}{2}}y^{\frac{12-l}{2}} + F_{\frac{l-6}{2}}y^{\frac{14-l}{2}} \\ p_3 = Q_{\frac{l-4}{2}}y^{\frac{10-l}{2}} \end{cases}$$

com $0 \neq a_4 \in \mathbb{R}$, $F_{\frac{l-6}{2}} \in \mathcal{H}_{\frac{l-6}{2}}$ e $Q_{\frac{l-4}{2}} \in \mathcal{H}_{\frac{l-4}{2}}$. De forma análoga a feita na primeira parte do passo de indução relacionado a proposição $\mathcal{P}_2(n)$, segue da expressão de e_3 que

$$p_2 = a_2(a+\lambda b)^{\frac{l-2}{2}}x^{\frac{l-2}{2}}y^{\frac{6-l}{2}} + F_{\frac{l-4}{2}}y^{\frac{8-l}{2}}$$

com $0 \neq a_2 \in \mathbb{R}$, $F_{\frac{l-4}{2}} \in \mathcal{H}_{\frac{l-4}{2}}$. Como $l \geq 8$,

$$y^{\frac{l-6}{2}}p_2 = a_2(a+\lambda b)^{\frac{l-2}{2}}x^{\frac{l-2}{2}} + F_{\frac{l-4}{2}}y$$

e, consequentemente, $a + \lambda b = 0$.

Até o momento sabemos que $K = vy^2$, para algum $v \in \mathbb{R}$, e $a + \lambda b = 0$. Assim, para cada $M \in \{2, 3, \ldots, l-3\}$,

$$e_2 = 3bc_3y^2 + b(1+\lambda^2)p_{3_x} + 2b^2(1+\lambda^2)vp_{2_x}y,$$

$$e_{l-M} = 3b^2(1+\lambda^2)c_3p_{l-M-1_x}y^2 + b(1+\lambda^2)p_{l-M+1_x} + 2vb^2(1+\lambda^2)p_{l-M_x}y,$$

$$e_{l-1} = 3b^2(1+\lambda^2)c_3p_{l-2_x}y^2 + 2vb^2(1+\lambda^2)p_{l-1_x}y$$

e

$$e_l = 3b^2(1+\lambda^2)c_3p_{l-1_x}y^2.$$

Como $a + \lambda b = 0$ e $a^2 + b^2 \neq 0$, $b \neq 0$. Da expressão de e_l e, posteriormente, da expressão de e_{l-1} segue que $p_{l-1_x} = 0$ e $p_{l-2_x} = 0$, respectivamente. Seja $\mathcal{P}_3(n)$ a sentença aberta sobre $\{1, 2, \ldots l-2\}$ definida por

$$\mathcal{P}_3(n) : p_{l-n_x} = 0.$$

Temos que $\mathcal{P}_3(1)$ e $\mathcal{P}_3(2)$ são verdadeiras. Suponhamos que $\mathcal{P}_3(1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_3(n-1)$ seja verdadeira para um dado $n \in \{3, 4, \ldots, l-2\}$. Logo,

$$e_{l-(n-1)} = 3b^2(1+\lambda^2)c_3p_{l-n_x}y^2$$

e, então, $p_{l-n_x} = 0$. Assim, $\mathcal{P}_3(n)$ é verdadeira. Pelo Princípio da Boa Ordem segue que, para todo $n \in \{1, 2, \ldots l-2\}$, $\mathcal{P}_3(n)$ é verdadeira. Dessa maneira, da expressão de e_2 obtemos que $bc_3 = 0$. Absurdo.

Portanto, $q_3 = \lambda p_3$.

b) Assumamos que l seja ímpar e que $q_i = \lambda p_i$ para todo $i \in \{3, 4, \ldots, l-1\}$. Suponhamos, por absurdo, que $q_2 \neq \lambda p_2$. Levando em consideração a Observação 4.4, tomemos $s = 3$ em (4.8), (4.9) e (4.10). Então, para cada $M \in \{2, 3, \ldots, l-2\}$,

$$e_1 = 2bc_2 y + (b - a\lambda)p_{2_x} + (a + \lambda b)p_{2_y},$$

$$e_{l-M} = 2(a^2 + b^2)c_2 p_{l-M_x} y + (b - a\lambda)p_{l-M+1_x} + (a + \lambda b)p_{l-M+1_y}$$

e

$$e_{l-1} = 2(a^2 + b^2)c_2 p_{l-1_x} y + lc_l(a + \lambda b)y^{l-1}.$$

Da expressão de e_{l-1} segue que

$$p_{l-1} = a_{l-1}(a + \lambda b)xy^{l-2} + F_0 y^{l-1}$$

com $0 \neq a_{l-1} \in \mathbb{R}$ e $F_0 \in \mathcal{H}_0$. Substituindo p_{l-1} na expressão de e_{l-2}, obtemos que

$$p_{l-2} = a_{l-2}(a + \lambda b)^2 x^2 y^{l-4} + F_1 y^{l-3}$$

com $0 \neq a_{l-2} \in \mathbb{R}$ e $F_1 \in \mathcal{H}_1$. Seja $\mathcal{P}(n)$ a sentença aberta sobre $\{1, 2, \ldots, l-2\}$ definida por

$$\mathcal{P}(n): \ \forall y > 0, \ p_{l-n} = a_{l-n}(a + \lambda b)^n x^n y^{l-2n} + F_{n-1} y^{l-(2n-1)}$$

com $0 \neq a_{l-n} \in \mathbb{R}$ e $F_{n-1} \in \mathcal{H}_{n-1}$. Temos $\mathcal{P}(1)$ e $\mathcal{P}(2)$ verdadeiras. Suponhamos que, para um dado $n \in \{3, 4, \ldots, l-2\}$, $\mathcal{P}(n-1)$ seja verdadeira. Assim, para todo $y > 0$,

$$p_{l-(n-1)} = a_{l-n+1}(a + \lambda b)^{n-1} x^{n-1} y^{l-2n+2} + F_{n-2} y^{l-2n+3}$$

com $0 \neq a_{l-n+1} \in \mathbb{R}$ e $F_{n-2} \in \mathcal{H}_{n-2}$. Dessa forma, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} e_{l-n} = {} & 2(a^2 + b^2)c_2 p_{l-n_x} y + a_{l-n+1}(l - 2n + 2)(a + \lambda b)^n x^{n-1} y^{l-2n+1} \\ & + y^{1-2n+2}\Big\{(a + \lambda b)\Big[F_{n-2_y} y + (l - 2n + 3)F_{n-2}\Big] \\ & + (b - a\lambda)\Big[a_{l-n+1}(n-1)(a + \lambda b)^{n-1} x^{n-2} + F_{n-2_x} y\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

Logo, para todo $y > 0$,

$$p_{l-n} = a_{l-n}(a+\lambda b)^n x^n y^{l-2n} + F_{n-1}y^{l-(2n-1)}$$

com

$$a_{l-n} = -\frac{a_{l-n+1}(l-2n+2)}{2(a^2+b^2)nc_2} \neq 0$$

e $F_{n-1} \in \mathcal{H}_{n-1}$. Ou seja, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira. Logo, pelo Princípio da Boa Ordem, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira para todo $n \in \{1, 2, \ldots, l-2\}$. De $\mathcal{P}(l-2)$ obtemos que

$$y^{l-4}p_2 = a_2(a+\lambda b)^{l-2}x^{l-2} + F_{l-3}y.$$

Daí, $a + \lambda b = 0$. Reescrevendo (4.8), (4.9) e (4.10) obtemos que, para todo $M \in \{2, 3, \ldots, l-2\}$,

$$e_1 = 2bc_2y + b(1+\lambda^2)p_{2x},$$

$$e_{l-M} = 2b^2(1+\lambda^2)c_2p_{l-M_x}y + b(1+\lambda^2)p_{l-M+1_x}$$

e

$$e_{l-1} = 2b^2(1+\lambda^2)c_2p_{l-1_x}y.$$

Observemos que $b \neq 0$, pois $0 \neq a^2 + b^2 = b^2(1+\lambda^2)$. Consideremos a sentença aberta $\mathcal{P}_1(n)$ sobre $\{1, 2, \ldots, l-2\}$ definida por

$$\mathcal{P}_1(n): \; p_{l-n_x} = 0.$$

Da expressão de e_{l-1} segue que $\mathcal{P}_1(1)$ é verdadeira. Suponhamos que $\mathcal{P}_1(n-1)$ seja verdadeira para algum $n \in \{2, 3, \ldots, l-2\}$. Logo,

$$e_{l-n} = 2b^2(1+\lambda^2)c_2p_{l-n_x}y + b(1+\lambda^2)p_{l-n+1_x} = 2b^2(1+\lambda^2)c_2p_{l-n_x}y.$$

Assim, $p_{l-n_x} = 0$, isto é, $\mathcal{P}_1(n)$ é verdadeira. Pelo Princípio da Boa Ordem temos que, para todo $n \in \{1, 2, \ldots, l-2\}$, $\mathcal{P}_1(n)$ é verdadeira. Então, pela expressão de e_1, $bc_2 = 0$. Absurdo.

Portanto, $q_2 = \lambda p_2$. □

Corolário 4.6. *Sejam $l \geq 5$ um número natural e $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação definida como em* (4.1). *Assuma que $p_l \neq 0$, $\left|Jf\right| \equiv 1$ e*

$$\mathrm{MDC}(l, 3) = \mathrm{MDC}(l, 2) = 1.$$

Tome o número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $q_l = \lambda p_l$. Se $q_i = \lambda p_i$ para cada $i \in \{4, 5, \ldots, l-1\}$, então existem constantes $C_2, C_3, \ldots, C_l \in \mathbb{R}$, com $C_l \neq 0$, e um isomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de determinante um de modo que

$$f_1 \circ T = x + \sum_{i=2}^{l} C_i y^i \;\text{ e }\; f_2 \circ T = y + \lambda(f_1 \circ T).$$

Demonstração. Do Teorema (4.5) segue que, para todo $i \in \{2, 3, \ldots, l\}$, $q_i = \lambda p_i$. Assim, das expressões (4.5), (4.6) e (4.7) obtemos que, para todo $i \in \{2, 3, \ldots, l\}$

$$p_{i_x} + \lambda p_{i_y} = 0.$$

Logo, pelo Lema (4.2), temos que, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, l\}$, existe $C_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_i = C_i(y - \lambda x)^i.$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo dado por $T(x, y) = (x, y + \lambda x)$.

Portanto,

$$f_1 \circ T = x + C_2 y^2 + C_3 y^3 + \ldots + C_l y^l = x + \sum_{i=2}^{l} C_i y^i$$

e

$$f_2 \circ T = y + \lambda\Big(x + C_2 y^2 + C_3 y^3 + \ldots + C_l y^l\Big) = y + \lambda(f_1 \circ T),$$

com $C_l \neq 0$, pois $p_l \neq 0$. □

A fim de completar o item **b)** do Teorema 4.5 com o caso $\mathrm{MDC}(l, 2) = 2$, apresentamos as formas normais de polinômios homogêneos de graus 2 e 3, dadas nos dois lemas abaixo.

Lema 4.7. *Considere um polinômio homogêneo $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de grau dois. A menos de isomorfismo de determinante um, p tem somente uma das seguintes formas:*

(1) $\beta_1 x^2$ (2) $\beta_2 xy$ (3) $\beta_3(x^2 + y^2)$

com $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ constantes não nulas.

Demonstração. Veja [16, Capítulo 1]. □

Lema 4.8. *Seja $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio homogêneo de grau três. A menos de isomorfismo de determinante um, p tem somente uma das seguintes formas:*

(1) $\beta_1 x^3$ (3) $\beta_2 x^2 y$

(2) $\beta_3 x(x^2 - y^2)$ (4) $\beta_4 x(x^2 + y^2)$

com $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{R}$ constantes não nulas.

Demonstração. Veja [16, Capítulo 2]. □

Observação 4.9. Consideremos $l, s \in \mathbb{N}$, com $\mathrm{MDC}(l, s-1) = d \in \{2,3\}$, e uma aplicação f dados como na Observação 4.4, bem como os polinômios em (4.5), (4.6) e (4.7), e as hipóteses impostas sobre f na observação em questão. Ressaltemos que da Observação 4.4 temos

$$e_{l+(s-3)} = \Big|J(p_l, q_{s-1} - \lambda p_{s-1})\Big| = 0$$

e que podemos desconsiderar cada polinômio e_{l+M}, com $M \in \{s-2, s-1, \ldots, l-2\}$ (polinômios essencialmente nulos). Assim, pelo Lema 4.1, existem constantes $\overline{c}_{s-1}, \overline{c}_l \in \mathbb{R}$, com $\overline{c}_{s-1}\overline{c}_l \neq 0$, e um polinômio homogêneo $\overline{r} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de grau d tais que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ p_l(x,y) = \overline{c}_l \overline{r}(x,y)^{\frac{l}{d}} \text{ e } q_{s-1}(x,y) = \lambda p_{s-1}(x,y) + \overline{c}_{s-1}\overline{r}(x,y)^{\frac{s-1}{d}}.$$

Dos Lemas 4.7 e 4.8 segue que existe um isomorfismo $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ onde T_1^{-1} é dada por

$$T_1^{-1}(x,y) = (k_1 x + k_2 y, k_3 x + k_4 y),$$

com $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ e $k_1 k_4 - k_2 k_3 = 1$, de modo que $\overline{r} \circ T_1$ é igual a somente uma formas apresentadas nos lemas citados.

Para cada $i \in \{2, 3, \ldots, l\}$, consideremos os polinômios homogêneos $\overline{p}_i$ e $\overline{q}_i$ tais que $\overline{p}_i \circ T_1^{-1} = p_i$ e $\overline{q}_i \circ T_1^{-1} = q_i$. Para simplificar a notação,

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, l\},\ \begin{cases} i \neq 1,\ p_i \coloneqq \overline{p}_i \text{ e } q_i \coloneqq \overline{q}_i \\ \\ e_i \coloneqq e_i \circ T_1 \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{cases} 0 = e_1 = k_1 p_{2_x} + k_3 p_{2_y} + k_2 q_{2_x} + k_4 q_{2_y} \\ \\ 0 = e_2 = \Big|J(p_2, q_2)\Big| + k_1 p_{3_x} + k_3 p_{3_y} + k_2 q_{3_x} + k_4 q_{3_y} \end{cases}, \tag{4.15}$$

para todo $M \in \{1, 2, \ldots, l-3\}$,

$$0 = e_{l-M} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \left(\Big|J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1})\Big| + \Big|J(p_{r+1}, q_{l-M+1-r})\Big|\right) \\ + \left|J\left(p_{\frac{l-M+2}{2}}, q_{\frac{l-M+2}{2}}\right)\right| + k_1 p_{l-M+1_x} + k_3 p_{l-M+1_y} & , \ l-M \text{ par} \\ + k_2 q_{l-M+1_x} + k_4 q_{l-M+1_y} \\ \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \left(\Big|J(p_{l-M+1-r}, q_{r+1})\Big| + \Big|J(p_{r+1}, q_{l-M+1-r})\Big|\right) & , \ l-M \text{ ímpar} \\ k_1 p_{l-M+1_x} + k_3 p_{l-M+1_y} + k_2 q_{l-M+1_x} + k_4 q_{l-M+1_y} \end{cases} \tag{4.16}$$

e, para todo $M \in \{0,1,\ldots,s-4\}$,

$$0 = e_{l+M} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M}{2}-1} \left(\left|J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r})\right| + \left|J(p_{l+1-r}, q_{r+M+1})\right|\right), & l+M \text{ par} \\ + \left|J\left(p_{\frac{l+M+2}{2}}, q_{\frac{l+M+2}{2}}\right)\right| & \\ & \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{l-M-1}{2}} \left(\left|J(p_{r+M+1}, q_{l+1-r})\right| + \left|J(p_{l+1-r}, q_{r+M+1})\right|\right), & l+M \text{ ímpar} \end{cases} \tag{4.17}$$

onde $q_i = \lambda p_i$ para cada $i \in \{s, s+1, \ldots, l\}$ e, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$p_l(x,y) = c_l r(x,y)^{\frac{l}{d}} \text{ e } q_{s-1}(x,y) = \lambda p_{s-1}(x,y) + c_{s-1} r(x,y)^{\frac{s-1}{d}}$$

com $c_l, c_{s-1} \in \mathbb{R}$ não nulos e, ou $r \in \{x^2, xy, x^2+y^2\}$ ou $r \in \{x^3, x(x^2-y^2), x^2y, x(x^2+y^2)\}$.

Teorema 4.10. *Seja $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação dada como em (4.1), com $l \geq 4$ par. Suponha que $p_l \neq 0$ e $\left|Jf\right| \equiv 1$. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ o número tal que $q_l = \lambda p_l$. Suponha que $q_2 \neq \lambda p_2$ e que, para todo $i \in \{3,4,\ldots,l-1\}$, $q_i = \lambda p_i$. Então, a menos de isomorfismo de determinante um, $q_2 - \lambda p_2$ tem a forma $\beta_1 x^2$, com $\beta_1 \neq 0$.*

Demonstração. Levando em consideração o Lema 4.7, suponhamos, por absurdo, que a menos de isomorfismo de determinante um, $q_2 - \lambda p_2$ ou é da forma $\beta_2 xy$ ou é da forma $\beta_3(x^2+y^2)$, com $\beta_2, \beta_3 \neq 0$. Diante da Observação 4.9 com $s = 3$, consideremos as equações dadas em (4.15) (4.16) com $r = xy$ ou $r = x^2+y^2$. Denotemos $s = k_1 + \lambda k_2$ e $w = k_3 + \lambda k_4$.

Primeiramente, consideremos $r = xy$. Logo, para $M \in \{2,3,\ldots,l-2\}$,

$$e_1 = c_2 k_4 x + c_2 k_2 y + s p_{2_x} + w p_{2_y}, \tag{4.18}$$

$$e_{l-M} = c_2 p_{l-M_x} x - c_2 p_{l-M_y} y + s p_{l-M+1_x} + w p_{l-M+1_y} \tag{4.19}$$

e

$$e_{l-1} = c_2 p_{l-1_x} x - c_2 p_{l-1_y} y + \frac{l}{2} c_l s x^{\frac{l}{2}-1} y^{\frac{l}{2}} + \frac{l}{2} c_l w x^{\frac{l}{2}} y^{\frac{l}{2}-1}. \tag{4.20}$$

De (4.20) segue que

$$p_{l-1} = a^{(1)}_{\frac{l}{2}-1} x^{\frac{l}{2}-1} y^{\frac{l}{2}} + a^{(1)}_{\frac{l}{2}} x^{\frac{l}{2}} y^{\frac{l}{2}-1}$$

onde

$$a^{(1)}_{\frac{l}{2}-1} = sK_0 \text{ e } a^{(1)}_{\frac{l}{2}} = -wK_0$$

com $K_0 \in \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{P}(n)$ a sentença aberta sobre $\{1, 2, \ldots \frac{l}{2}\}$ dada por

$$\mathcal{P}(n) : p_{l-n} = \sum_{j=\frac{l}{2}-n}^{\frac{l}{2}} a_j^{(n)} x^j y^{l-n-j},$$

onde $a_j^{(n)} \in \mathbb{R}$,

$$v_0^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, \ n \text{ ímpar} \\ \\ \dfrac{n}{2}, \ n \text{ par} \end{cases}$$

e

$$a^{(n)}_{\frac{l}{2}-n+N} = \begin{cases} s^{-2N+n} K_N^{(n)}, \ N \in \{0, 1, \ldots, v_0^{(n)}\} \\ \\ (-1)^n w^{2N-n} K^{(n)}_{-N+n}, \ N \in \{v_0^{(n)}+1, v_0^{(n)}+2, \ldots, n\} \end{cases}.$$

Temos $\mathcal{P}(1)$ verdadeira. Suponhamos que para um dado $n \in \{1, 2, \ldots, \frac{l}{2}-1\}$, $\mathcal{P}(n)$ seja verdadeira. Para simplificar a notação, escrevamos $a_j^{(n)} = a_j$, $K_N^{(n)} = K_N$ e $v_0^{(n)} = v_0$.

Mostremos que $\mathcal{P}(n+1)$ é verdadeira. Temos que

$$p_{l-(n+1)} = \sum_{j=0}^{l-n-1} a_j^{(n+1)} x^j y^{l-n-1-j}$$

onde, para todo $j \in \{0, 1, \ldots, l-n-1\}$, $a_j^{(n+1)} \in \mathbb{R}$. Assim,

$$sp_{l-n_x} + wp_{l-n_y} = \sum_{j=\frac{l}{2}-n}^{\frac{l}{2}-1} [\ s(j+1)a_{j+1} + w(l-n-j)a_j]\ x^j y^{l-n-1-j} + s\Big(\frac{l}{2}-n\Big) a_{\frac{l}{2}-n} x^{\frac{l}{2}-n-1} y^{\frac{l}{2}}$$

$$+ w\Big(\frac{l}{2}-n\Big) a_{\frac{l}{2}} x^{\frac{l}{2}} y^{\frac{l}{2}-n-1}$$

e

$$c_2 p_{l-(n+1)_x} x - c_2 p_{l-(n+1)_y} y = \sum_{j=0}^{l-n-1} c_2 a_j^{(n+1)} [2j-(l-n-1)] x^j y^{l-n-1-j}.$$

Como

$$e_{l-(n+1)} = c_2 p_{l-(n+1)_x} x - c_2 p_{l-(n+1)_y} y + sp_{l-n_x} + wp_{l-n_y} = 0$$

obtemos que

$$\forall j \in \Big\{0, 1, \ldots, \frac{l}{2}-n-2\Big\} \cup \Big\{\frac{l}{2}+1, \frac{l}{2}+2, \ldots, l-(n+1)\Big\},\ a_j^{(n+1)} = 0.$$

Além disso,

$$a^{(n+1)}_{\frac{l}{2}-(n+1)} = \frac{s(l-2n)a_{\frac{l}{2}-n}}{2c_2(n+1)},\ a^{(n+1)}_{\frac{l}{2}} = -\frac{w(l-2n)a_{\frac{l}{2}}}{2c_2(n+1)} \tag{4.21}$$

e, para cada $j \in \{\frac{l}{2}-n, \frac{l}{2}-n+1, \dots, \frac{l}{2}-1\}$,

$$c_2 a^{(n+1)}_j[(l-n-1)-2j] = s(j+1)a_{j+1} + w(l-n-j)a_j. \tag{4.22}$$

Seja $N \in \{1,2,\dots,n\}$. Tomemos $j = \dfrac{l}{2}-(n+1)+N$ em (4.22). Definamos

$$m_0 = \begin{cases} v_0 = \dfrac{(n+1)-1}{2},\ n+1 \text{ ímpar} \\ \\ v_0+1 = \dfrac{n+1}{2},\ n+1 \text{ par} \end{cases}.$$

Observemos que, de (4.21) e da hipótese, segue que

$$a^{(n+1)}_{\frac{l}{2}-(n+1)} = s^{n+1}K_0^{(n+1)},\ \text{com } K_0^{(n+1)} = \frac{(l-2n)}{2c_2(n+1)}K_0.$$

Suponhamos $N \in \{1,2,\dots,m_0\}$. Se $m_0 = v_0+1$ e $N = m_0$, então n é ímpar e $v_0 = \dfrac{n-1}{2}$. Logo,

$$a_j = a_{\frac{l}{2}-n+v_0} = sK_{v_0},\ a_{j+1} = a_{\frac{l}{2}-n+(v_0+1)} = -wK_{v_0}$$

e,

$$l-n-j = j+1 \text{ e } (l-n-1)-2j = n+1-2N = 0.$$

Desse modo, os dois lados da igualdade dada em (4.22) são essencialmente nulos e, consequentemente, $a^{(n+1)}_{\frac{l}{2}-(n+1)+m_0}$ é uma constante arbitrária. Assim, podemos escrever

$$a^{(n+1)}_{\frac{l}{2}-(n+1)+m_0} = s^{-2m_0+(n+1)}K^{(n+1)}_{m_0},\ \text{com } K^{(n+1)}_{m_0} = a^{(n+1)}_{\frac{l}{2}-(n+1)+m_0}.$$

Temos que para ou $m_0 = v_0$ ou, $m_0 = v_0+1$ e $N \neq m_0$,

$$a_j = a_{\frac{l}{2}-n+(N-1)} = s^{-2N+n+2}K_{N-1}$$

e

$$a_{j+1} = a_{\frac{l}{2}-n+N} = s^{-2N+n}K_N.$$

Logo, de (4.22) obtemos que

$$a^{(n+1)}_j = s^{-2N+(n+1)}K^{(n+1)}_N \text{ e } K^{(n+1)}_N = \frac{(j+1)K_N + sw(l-n-j)K_{N-1}}{c_2[(l-n-1)-2j]}. \tag{4.23}$$

Agora, de (4.21) segue, também, que

$$a_{\frac{l}{2}}^{(n+1)} = (-1)^{n+1} w^{n+1} K_0^{(n+1)}.$$

Notemos que se $m_0 = v_0$ e $N = m_0 + 1$, então n é par e $v_0 = \dfrac{n}{2}$. Daí,

$$a_j = a_{\frac{l}{2}-n+m_0} = K_{m_0} = (-1)^n w^{2(m_0+1)-n-2} K_{-(m_0+1)+n+1}.$$

Assumamos $N \in \{m_0+1, m_0+2, \ldots, n\}$. Logo,

$$a_j = a_{\frac{l}{2}-n+(N-1)} = (-1)^n w^{2N-n-2} K_{-N+n+1}$$

e

$$a_{j+1} = a_{\frac{l}{2}-n+N} = (-1)^n w^{2N-n} K_{-N+n}.$$

Observemos que $2j - (l-n-1) = 2N - n - 1 \neq 0$. Dessa forma, por (4.22),

$$a_j^{(n+1)} = (-1)^{n+1} w^{2N-(n+1)} \widetilde{K}_N, \text{ com } \widetilde{K}_N = \frac{sw(j+1)K_{-N+n} + (l-n-j)K_{-N+n+1}}{c_2[2j-(l-n-1)]}.$$

Por outro lado,

$$1 \leq -N + (n+1) \leq m_0$$

e, se $m_0 = v_0 + 1$, $-N + (n+1) \neq m_0$. Assim, por (4.23) (lembrando que j depende de N e, em seguida, substituindo N por $-N + (n+1)$),

$$\widetilde{K}_N = K_{-N+(n+1)}^{(n+1)}.$$

Denotemos $m_0 = v_0^{(n+1)}$. Daí, $\mathcal{P}(n+1)$ é verdadeira. Desse modo, pelo Princípio da Boa Ordem, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira para todo $n \in \{1, 2, \ldots, \frac{l}{2}\}$.

Consideremos, agora, a sentença aberta $\mathcal{P}_1(n)$ sobre $\{1, 2, \ldots \frac{l-4}{2} + 1\}$ definida por

$$\mathcal{P}_1(n): \ p_{\frac{l}{2}-(n-1)} = \sum_{j=0}^{\frac{l}{2}-(n-1)} a_j^{(n)} x^j y^{\frac{l}{2}-(n-1)-j},$$

onde $a_j^{(n)} \in \mathbb{R}$,

$$v_0^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{l-2n}{4}, & \dfrac{l}{2} - (n-1) \text{ ímpar} \\[2ex] \dfrac{l-2n+2}{4}, & \dfrac{l}{2} - (n-1) \text{ par} \end{cases}$$

e

$$a_j^{(n)} = \begin{cases} s^{\frac{l-2n+2-4j}{2}} K_j^{(n)}, \ j \in \{0,1,\dots,v_0^{(n)}\} \\ \\ (-1)^{\frac{l}{2}-(n-1)} w^{\frac{-l+2n-2+4j}{2}} K^{(n)}_{\frac{l-2n+2-2j}{2}}, \ j \in \left\{v_0^{(n)}+1, v_0^{(n)}+2, \dots, \dfrac{l}{2}-(n-1)\right\} \end{cases}.$$

Embora algumas constantes na definição de $\mathcal{P}_1(n)$ tenham sido denotadas da mesma forma que na definição de $\mathcal{P}(n)$, não significa que elas sejam iguais.

Temos que $\mathcal{P}_1(1)$ é verdadeira, pois

$$\mathcal{P}_1(1) = \mathcal{P}\Big(\frac{l}{2}\Big).$$

Suponhamos que $\mathcal{P}_1(n)$ seja verdadeira para um dado $n \in \left\{1,2,\dots,\frac{l-4}{2}\right\}$. Denotemos $a_j^{(n)} = a_j$, $K_j^{(n)} = K_j$ e $v_0^{(n)} = v_0$. Mostremos que $\mathcal{P}_1(n+1)$ é verdadeira. Escrevamos

$$p_{\frac{l}{2}-n} = \sum_{j=0}^{\frac{l}{2}-n} a_j^{(n+1)} x^j y^{\frac{l}{2}-n-j}$$

onde $a_j^{(n+1)} \in \mathbb{R}$ para cada $j \in \left\{0,1,\dots,\frac{l}{2}-n\right\}$. Dessa forma,

$$s{p_{\frac{l}{2}-(n-1)}}_x + w{p_{\frac{l}{2}-(n-1)}}_y = \sum_{j=0}^{\frac{l}{2}-n} \Big[s(j+1)a_{j+1} + w\Big(\frac{l}{2}-n+1-j\Big)a_j\Big] x^j y^{\frac{l}{2}-n-j},$$

$$c_2{p_{\frac{l}{2}-n}}_x x - c_2{p_{\frac{l}{2}-n}}_y y = \sum_{j=0}^{\frac{l}{2}-n} c_2 a_j^{(n+1)} \Big[2j - \Big(\frac{l}{2}-n\Big)\Big] x^j y^{\frac{l}{2}-n-j}$$

e

$$e_{l-(\frac{l}{2}+n)} = c_2{p_{\frac{l}{2}-n}}_x x - c_2{p_{\frac{l}{2}-n}}_y y + s{p_{\frac{l}{2}-(n-1)}}_x + w{p_{\frac{l}{2}-(n-1)}}_y = 0.$$

Logo, para todo $j \in \left\{0,1,\dots,\frac{l}{2}-n\right\}$,

$$c_2 a_j^{(n+1)} \Big[\Big(\frac{l}{2}-n\Big) - 2j\Big] = s(j+1)a_{j+1} + w\Big(\frac{l}{2}-n+1-j\Big)a_j. \tag{4.24}$$

Consideremos o número $m_1 \in \mathbb{R}$ dado por

$$m_1 = \begin{cases} v_0 - 1 = \dfrac{l-2(n+1)}{4}, \ \dfrac{l}{2}-n \text{ ímpar} \\ \\ v_0 = \dfrac{l-2(n+1)+2}{4}, \ \dfrac{l}{2}-n \text{ par} \end{cases}.$$

Tomemos $j \in \{0, 1, \ldots, m_1\}$. Se $m_1 = v_0$ e $j = m_1$, então $\frac{l}{2} - n + 1$ é ímpar, $j + 1 = \frac{l}{2} - n + 1 - j$,

$$a_j = sK_{m_1},\ a_{j+1} = -wK_{m_1}.$$

e

$$\left(\frac{l}{2} - n\right) - 2j = 0.$$

Assim, os dois lados da igualdade dada em (4.24) são nulos. Daí, $a_{m_1}^{(n+1)}$ pode ser tomado de forma arbitrária. Consequentemente, podemos escrever

$$a_{m_1}^{(n+1)} = s^{\frac{l-2(n+1)+2-4m_1}{2}} K_{m_1}^{(n+1)},\ \text{com } K_{m_1}^{(n+1)} = a_{m_1}^{(n+1)}.$$

Para ou $m_1 = v_0 - 1$ ou, $m_1 = v_0$ e $j \neq m_1$,

$$\left(\frac{l}{2} - n\right) - 2j \neq 0,\ a_j = s^{\frac{l-2n+2-4j}{2}} K_j \text{ e } a_{j+1} = s^{\frac{l-2n-2-4j}{2}} K_{j+1}.$$

Logo, de (4.24) segue que

$$a_j^{(n+1)} = s^{\frac{l-2(n+1)+2-4j}{2}} K_j^{(n+1)} \text{ e } K_j^{(n+1)} = \frac{(j+1)K_{j+1} + sw\left(\frac{l}{2} - n + 1 - j\right)K_j}{c_2\left[\left(\frac{l}{2} - n\right) - 2j\right]}. \tag{4.25}$$

Observemos que se $m_1 = v_0 - 1$ e $j = v_0$, então $\frac{l}{2} - n + 1$ é par e

$$a_j = K_{m_1+1} = (-1)^{\frac{l}{2}-(n-1)} w^{\frac{-l+2n-2+4(m_1+1)}{2}} K_{\frac{l-2n+2-2(m_1+1)}{2}}.$$

Seja $j \in \left\{m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, \frac{l}{2} - n\right\}$. Desse modo,

$$2j - \left(\frac{l}{2} - n\right) \neq 0,\ a_j = (-1)^{\frac{l}{2}-(n-1)} w^{\frac{-l+2n-2+4j}{2}} K_{\frac{l-2n+2-2j}{2}}$$

e

$$a_{j+1} = (-1)^{\frac{l}{2}-(n-1)} w^{\frac{-l+2n+2+4j}{2}} K_{\frac{l-2n-2j}{2}}.$$

Daí, por (4.24),

$$a_j^{(n+1)} = (-1)^{\frac{l}{2}-n} w^{\frac{-l+2(n+1)-2+4j}{2}} \widetilde{K}_j,$$

com

$$\widetilde{K}_j = \frac{sw(j+1)K_{\frac{l-2n-2j}{2}} + \left(\frac{l}{2} - n + 1 - j\right)K_{\frac{l-2n+2-2j}{2}}}{c_2\left[2j - \left(\frac{l}{2} - n\right)\right]}.$$

Por outro lado,

$$0 \leq \frac{l - 2(n+1) + 2 - 2j}{2} \leq m_1$$

e, se $m_1 = v_0$,

$$\frac{l-2(n+1)+2-2j}{2} \neq m_1.$$

Assim, por (4.25) (substituindo j pelo número acima),

$$\widetilde{K}_j = K^{(n+1)}_{\frac{l-2(n+1)+2-2j}{2}}.$$

Escrevamos $m_1 = v_0^{(n+1)}$. Logo, $\mathcal{P}_1(n+1)$ é verdadeira. Desse modo, pelo Princípio da Boa Ordem, $\mathcal{P}_1(n)$ é verdadeira para todo $n \in \{1, 2, \ldots \frac{l-4}{2} + 1\}$. De $\mathcal{P}_1\left(\frac{l-4}{2} + 1\right)$ obtemos que

$$p_2 = s^2 K_0 y^2 + K_1 xy + w^2 K_0 x^2$$

com $K_0, K_1 \in \mathbb{R}$. Por (4.18) segue que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ (c_2 k_4 + 2sw^2 K_0 + wK_1)x + (c_2 k_2 + 2ws^2 K_0 + sK_1)y = 0.$$

Notemos que $w = k_3 + \lambda k_4 \neq 0$ pois, caso contrário, $k_3 = k_4 = 0$ e, assim,

$$1 = k_1 k_4 - k_2 k_3 = 0.$$

Logo,

$$K_1 = -\frac{c_2 k_4 + 2sw^2 K_0}{w}$$

e, então,

$$0 = -c_2 \frac{sk_4 - k_2 w}{w} = -c_2 \frac{k_1 k_4 - k_2 k_3}{w} = -\frac{c_2}{w} \neq 0.$$

Absurdo.

Consideremos, agora, $r = x^2 + y^2$. Ressaltemos que $s^2 + w^2 \neq 0$, já que

$$k_1 k_4 - k_2 k_3 = sk_4 - wk_2 = 1.$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo definido por

$$T(x, y) = (sx + wy, -wx + sy).$$

Para cada $i \in \{2, 3, \ldots, l\}$, tomemos o polinômio homogêneo P_i tal que $P_i \circ T = p_i$. Por questão de notação,

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, l\},\ \begin{cases} i \neq 1,\ p_i := P_i \\ \\ e_i := e_i \circ T^{-1} \end{cases}.$$

Logo,

$$e_1 = \frac{2c_2 k_2(sx - wy) + 2c_2 k_4(wx + sy)}{s^2 + w^2} + (s^2 + w^2) p_{2x} \tag{4.26}$$

e, para $M \in \{1, 2, \dots, l-2\}$,

$$e_{l-M} = (s^2 + w^2) p_{l-M+1_x} + 2c_2 (p_{l-M_x} y - p_{l-M_y} x). \tag{4.27}$$

Além disso,

$$p_l = \frac{c_l (x^2 + y^2)^{\frac{l}{2}}}{(s^2 + w^2)^{\frac{l}{2}}}.$$

Notemos que o coeficiente do monônimo xy^{l-1} em p_l é nulo. De (4.26) segue que

$$p_2 = b_0^{(1)} y^2 + b_1^{(1)} xy + b_2^{(1)} x^2$$

onde $b_0^{(1)} \in \mathbb{R}$,

$$b_1^{(1)} = -\frac{2c_2}{(s^2 + w^2)^2} \neq 0 \text{ e } b_2^{(1)} = -\frac{c_2 (k_2 s + k_4 w)}{(s^2 + w^2)^2}.$$

Consideremos a sentença aberta $\mathcal{P}_2(n)$ sobre $\{1, 2, \dots l-1\}$ dada por

$$\mathcal{P}_2(n): \ p_{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} b_j^{(n)} x^j y^{n+1-j}, \text{ onde } \forall j \in \{0, 1, \dots, n+1\}, \ b_j^{(n)} \in \mathbb{R}, \text{ e } b_1^{(n)} \neq 0.$$

Dessa forma, $\mathcal{P}_2(1)$ é verdadeira. Dado $n \in \{2, 3, \dots l-1\}$, suponhamos que $\mathcal{P}_2(n-1)$ seja verdadeira. Denotemos $b_j^{(n-1)} = b_j$. Temos que

$$\begin{aligned} p_{n_x} y - p_{n_y} x &= b_1 y^n - b_{n-1} x^n + \sum_{j=2}^{n} j b_j x^{j-1} y^{n+1-j} - \sum_{j=0}^{n-2} (n-j) b_j x^{j+1} y^{n-1-j} \\ &\overset{i=j+2}{=} b_1 y^n - b_{n-1} x^n + \sum_{j=2}^{n} j b_j x^{j-1} y^{n+1-j} - \sum_{i=2}^{n} (n+2-i) b_{i-2} x^{i-1} y^{n+1-i} \\ &\overset{i=j}{=} b_1 y^n - b_{n-1} x^n + \sum_{j=2}^{n} \Big[j b_j - (n+2-j) b_{j-2} \Big] x^{j-1} y^{n+1-j}. \end{aligned}$$

Assim, de (4.27) com $M = l - n$, obtemos que existe $b_0^{(n)} \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$p_{n+1} = -\frac{2c_2}{(s^2 + w^2)} \left\{ b_1 x y^n - b_{n-1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{j=2}^{n} \left[\frac{j b_j - (n+2-j) b_{j-2}}{j} \right] x^j y^{n+1-j} \right\} + b_0^{(n)} y^{n+1}$$

com

$$-\frac{2c_2}{(s^2 + w^2)} b_1 \neq 0.$$

Denotemos

$$b_1^{(n)} = -\frac{2c_2 b_1}{(s^2 + w^2)}, \ b_{n+1}^{(n)} = \frac{2c_2 b_{n-1}}{(s^2 + w^2)(n+1)}$$

e, para cada $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$,

$$b_j^{(n)} = -\frac{2c_2}{(s^2 + w^2)} \left[\frac{jb_j - (n + 2 - j)b_{j-2}}{j} \right].$$

Consequentemente, $\mathcal{P}_2(n)$ é verdadeira. Daí, pelo Princípio da Boa Ordem, $\mathcal{P}_2(n)$ é verdadeira para todo $n \in \{1, 2, \ldots, l - 1\}$. Por $\mathcal{P}_2(l - 1)$ segue que o coeficiente do monômio xy^{l-1} de p_l é não nulo e isso é um absurdo.

Portanto, a menos de isomorfismo de determinante um, $q_2 - \lambda p_2$ é da forma $\beta_1 x^2$, com $\beta_1 \neq 0$. □

Teorema 4.11. *Considere $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação definida como em* (4.1)*, com $l \geq 6$ par. Assuma que $p_l \neq 0$ e $\left|Jf\right| \equiv 1$. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ o número tal que $q_l = \lambda p_l$. Se $q_2 \neq \lambda p_2$ e $q_i = \lambda p_i$ para cada $i \in \{3, 4, \ldots, l - 1\}$, então existem constantes $C_0, C_1, \ldots, C_{\frac{l}{2}} \in \mathbb{R}$ e um isomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de terminante um tais que*

$$f_1 \circ T = x + \sum_{i=1}^{\frac{l}{2}} C_i Q^i \;\; e \;\; f_2 \circ T = Q + \lambda(f_1 \circ T)$$

com $Q = y + C_0 x^2$ e $C_0, C_{\frac{l}{2}} \neq 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.10 segue que $q_2 - \lambda p_2$ é da forma $\beta_1 x^2$ com $\beta_1 \neq 0$, a menos de isomorfismo de determinante um (veja também o Lema 4.7). Diante da Observação 4.9, com $s = 3$, consideremos as equações dadas em (4.15) e (4.16) com $r = x^2$. Denotemos $s = k_1 + \lambda k_2$ e $w = k_3 + \lambda k_4$. Logo, para $M \in \{2, 3, \ldots, l - 2\}$,

$$e_1 = 2c_2 k_2 x + s p_{2_x} + w p_{2_y}$$

$$e_{l-M} = -2c_2 p_{l-M_y} x + s p_{l-M+1_x} + w p_{l-M+1_y}$$
$$e_{l-1} = -2c_2 p_{l-1_y} x + l c_l s x^{l-1}.$$

Suponhamos, por contradição, $s = 0$. Assim, de e_{l-1}, $p_{l-1_y} = 0$. Seja $\mathcal{P}(n)$ a sentença aberta sobre $\{1, 2, \ldots l - 2\}$ definida por

$$\mathcal{P}(n) : p_{l-n_y} = 0.$$

Temos que $\mathcal{P}(1)$ é verdadeira. Dado $n \in \{2, 3, \ldots, l-2\}$, suponhamos que $\mathcal{P}(n-1)$ seja verdadeira. Logo,

$$0 = e_{l-n} = -2c_2 p_{l-n_y} x + w p_{l-n+1_y} = -2c_2 p_{l-n_y} x.$$

Daí, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira e, então, pelo Princípio da Boa Ordem, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira para todo $n \in \{1, 2, \ldots, l-2\}$. Dessa maneira, de $\mathcal{P}(l-2)$ obtemos que $p_{2_y} = 0$. Assim, por e_1, temos $k_2 = 0$ e, consequentemente, $k_1 = -\lambda k_2 + s = 0$. Absurdo, pois $k_1 k_4 - k_2 k_3 = 1$. Logo, $s \neq 0$.

De e_{l-1} segue que existe $a_{l-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_{l-1} = \frac{lc_l s}{2c_2} x^{l-2} y + a_{l-1} x^{l-1}.$$

Seja $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo definido por

$$S(x,y) = \Big(Kx, -\frac{2a_{l-1}Kc_2}{lc_l s} x + \frac{K^2 c_2}{s} y \Big)$$

onde $K = \sqrt[3]{\dfrac{s}{c_2}}$. Para cada $i \in \{2, 3, \ldots, l\}$, consideremos o polinômio homogêneo $\overline{p}_i$ tal que $\overline{p}_i \circ S^{-1} = p_i$. Para simplificar a notação,

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, l\}, \quad \begin{cases} i \neq 1, \; p_i \coloneqq \overline{p}_i \\ \\ e_i \coloneqq e_i \circ S \end{cases} .$$

Dessa forma, para $M \in \{3, 4, \ldots, l-2\}$,

$$e_1 = \frac{2s(\frac{l}{2}c_l w + a_{l-1}c_2)p_{2_y}}{lK^2 c_2 c_l} + \frac{2k_2 c_2 K^2 x + s p_{2_x}}{K}$$

$$e_{l-M} = \frac{2s(\frac{l}{2}c_l w + a_{l-1}c_2)p_{l-M+1_y}}{lK^2 c_2 c_l} + \frac{s(p_{l-M+1_x} - 2p_{l-M_y} x)}{K}$$

e

$$e_{l-2} = \frac{sK^{l-2}(\frac{l}{2}c_l w + a_{l-1}c_2)}{c_2} x^{l-2} + \frac{l(l-2)sK^{l-1}c_l}{2} x^{l-3} y - \frac{2sp_{l-2_y} x}{K},$$

com

$$p_{l-1} = \frac{lc_l K^l}{2} x^{l-2} y \text{ e } p_l = c_l K^l x^l.$$

Mostremos, agora, que

$$N \coloneqq \frac{l}{2} c_l w + a_{l-1} c_2 = 0.$$

Por e_{l-2} obtemos que

$$p_{l-2} = \sum_{i=0}^{2} b_i^{(1)} x^{l-2-i} y^i,$$

onde $b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)} \in \mathbb{R}$ com

$$b_1^{(1)} = \frac{NK^{l-1}}{2c_2} \text{ e } b_2^{(1)} = c_l K^l \prod_{j=1}^{2} \frac{[l - 2(j-1)]}{2j}.$$

Consideremos a sentença aberta $\mathcal{P}_1(n)$ sobre $\{1, 2, \ldots, \frac{l}{2}\}$ definida por

$$\mathcal{P}_1(n) : \; \forall x > 0, \; p_{l-(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} b_i^{(n)} x^{l-(n+1)-i} y^i$$

onde $b_i^{(n)} \in \mathbb{R}$ e,

$$b_n^{(n)} = \frac{NK^{l-1}}{c_2}\overline{b}^{(n)}, \text{ com } \overline{b}^{(n)} > 0, \text{ e } b_{n+1}^{(n)} = c_l K^l \prod_{j=1}^{n+1} \frac{[l-2(j-1)]}{2j}.$$

Temos que $\mathcal{P}_1(1)$ é verdadeira. Assumamos que, para um dado $n \in \{2, 3, \ldots, \frac{l}{2}\}$, $\mathcal{P}_1(n-1)$ seja verdadeira. Provemos que $\mathcal{P}_1(n)$ é verdadeira. Temos

$$e_{l-(n+1)} = \frac{2s(\frac{l}{2}c_l w + a_{l-1}c_2)p_{l-n_y}}{lK^2 c_2 c_l} + \frac{s(p_{l-n_x} - 2p_{l-(n+1)_y}x)}{K}.$$

Denotemos $b_i^{(n-1)} = b_i$ e $\overline{b}^{(n-1)} = \overline{b}$. Dessa forma, existe $b_0^{(n)} \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x > 0$,

$$p_{l-(n+1)} = b_0^{(n)} x^{l-(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{KM_1(l-n-i+1)b_{i-1} + KMib_i}{2si}\right] x^{l-(n+1)-i} y^i$$
$$+ \frac{KM_1 b_n (l-2n)}{2(n+1)s} x^{l-2(n+1)} y^{n+1}$$

onde

$$M = \frac{2sN}{lK^2 c_2 c_l} \text{ e } M_1 = \frac{s}{K}.$$

Escrevamos

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{KM_1 b_n (l-2n)}{2(n+1)s}$$

e, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$b_i^{(n)} = \frac{KM_1(l-n-i+1)b_{i-1} + KMib_i}{2si}.$$

Desse modo, segue que

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{l-2n}{2(n+1)} b_n = c_l K^l \frac{l-2n}{2(n+1)} \prod_{j=1}^{n} \frac{[l-2(j-1)]}{2j} = c_l K^l \prod_{j=1}^{n+1} \frac{[l-2(j-1)]}{2j}$$

e

$$b_n^{(n)} = \frac{NK^{l-1}}{c_2} \frac{(l-2n+1)\overline{b}}{2n} + \frac{NK^{l-1}}{lc_2} \prod_{j=1}^{n} \frac{[l-2(j-1)]}{2j} = \frac{NK^{l-1}}{lc_2} \overline{b}^{(n)}$$

onde

$$\overline{b}^{(n)} = \frac{(l-2n+1)\overline{b}}{2n} + \prod_{j=1}^{n} \frac{[l-2(j-1)]}{2j} > 0.$$

Assim, $\mathcal{P}_1(n)$ é verdadeira e, consequentemente, pelo Princípio da Boa Ordem, $\mathcal{P}_1(n)$ é verdadeira para todo $n \in \{1, 2, \ldots, \frac{l}{2}\}$. Segue de $\mathcal{P}_1\left(\frac{l}{2}\right)$ que, para todo $x > 0$,

$$xp_{\frac{l}{2}-1} = \sum_{i=0}^{\frac{l}{2}+1} b_i^{(\frac{l}{2})} x^{\frac{l}{2}-i} y^i$$

com $b^{(\frac{l}{2})}_{\frac{l}{2}+1} = 0$. Logo, para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$0 = b^{(\frac{l}{2})}_{\frac{l}{2}} y^{\frac{l}{2}} = \frac{NK^{l-1}}{c_2} \overline{b}^{(\frac{l}{2})} y^{\frac{l}{2}}.$$

Desse modo, $N = 0$.

Temos, para cada $M \in \{3, 4, \ldots, l-2\}$,

$$e_1 = \frac{2k_2 c_2 K^2 x + s p_{2_x}}{K}$$

$$e_{l-M} = \frac{s(p_{l-M+1_x} - 2p_{l-M_y} x)}{K}$$

e

$$e_{l-2} = \frac{l(l-2)sc_l K^{l-1}}{2} x^{l-3} y - \frac{2sp_{l-2_y} x}{K}.$$

Dado $i \in \{2, 3, \ldots, l-2\}$, denotemos por a_i o coeficiente que acompanha o monômio y^i no polinômio homogêneo p_i. Definamos

$$a_1 = -\frac{k_2 c_2 K^2}{s}.$$

Por e_1 segue que

$$p_2 = a_1 x^2 + a_2 y^2.$$

De e_2 temos

$$p_3 = 2a_2 x^2 y + a_3 y^3$$

e, em seguida, por e_3 obtemos que

$$p_4 = a_2 x^4 + 3a_3 x^2 y^2 + a_4 y^4.$$

Consideremos a sentença aberta $\mathcal{P}_2(n)$ sobre o conjunto $\{1, 2, \ldots, \frac{l-4}{2}\}$ definida por

$$\mathcal{P}_2(n) : \begin{cases} p_{2n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_{n+i} \binom{n+i}{2i-1} (x^2)^{n+1-i} y^{2i-1} \\ \\ p_{2n+2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} a_{n+i} \binom{n+i}{2i-2} (x^2)^{n+2-i} y^{2i-2} \end{cases}.$$

Temos que $\mathcal{P}_2(1)$ é verdadeira. Dado $n \in \{2, 3, \ldots, \frac{l-4}{2}\}$, suponhamos que $\mathcal{P}_2(n-1)$ seja verdadeira.

Mostremos que $\mathcal{P}_2(n)$ é verdadeira. Por e_{2n} segue que

$$\begin{aligned}
p_{2n+1} &= \sum_{i=2}^{n+1} a_{n-1+i}\frac{2i-2}{n+2-i}\binom{n-1+i}{2i-2}(x^2)^{n+2-i}y^{2i-3}+a_{2n+1}y^{2n+1}\\
&= \sum_{i=2}^{n+1} a_{n-1+i}\binom{n-1+i}{2i-3}(x^2)^{n+2-i}y^{2i-3}+a_{2n+1}y^{2n+1}\\
&\overset{i=j+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} a_{n+j}\binom{n+j}{2j-1}(x^2)^{n+1-j}y^{2j-1}\\
&\overset{j=i}{=} \sum_{i=1}^{n+1} a_{n+i}\binom{n+i}{2i-1}(x^2)^{n+1-i}y^{2i-1}.
\end{aligned}$$

Agora, de e_{2n+1} obtemos que

$$\begin{aligned}
p_{2n+2} &= \sum_{i=1}^{n+1} a_{n+i}\frac{2i-1}{n+2-i}\binom{n+i}{2i-1}(x^2)^{n+2-i}y^{2i-2}+a_{2n+2}y^{2n+2}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} a_{n+i}\binom{n+i}{2i-2}(x^2)^{n+2-i}y^{2i-2}+a_{2n+2}y^{2n+2}\\
&= \sum_{i=1}^{n+2} a_{n+i}\binom{n+i}{2i-2}(x^2)^{n+2-i}y^{2i-2}.
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{P}_2(n)$ é verdadeira. Desse modo, pelo Princípio da Boa Ordem, $\mathcal{P}_2(n)$ é verdadeira para todo $n\in\{1,2,\dots,\frac{l-4}{2}\}$. De $\mathcal{P}_2(\frac{l-4}{2})$ e e_{l-2} temos, respectivamente, que

$$p_{l-2} = \sum_{i=1}^{\frac{l}{2}} a_{\frac{l}{2}-2+i}\binom{\frac{l}{2}-2+i}{2i-2}(x^2)^{\frac{l}{2}-i}y^{2i-2}$$

e

$$p_{l-2_y} = \frac{l(l-2)c_lK^l}{4}x^{l-4}y.$$

Logo, para todo $x,y\in\mathbb{R}$,

$$\frac{l(l-2)c_lK^l}{4}x^{l-4}y = a_{\frac{l}{2}}\frac{l(l-2)}{4}x^{l-4}y+\sum_{i=3}^{\frac{l}{2}}(2i-2)a_{\frac{l}{2}-2+i}\binom{\frac{l}{2}-2+i}{2i-2}(x^2)^{\frac{l}{2}-i}y^{2i-3}$$

e, então,

$$a_{\frac{l}{2}} = c_l K^l \text{ e, para cada } j \in \left\{1, 2, \ldots, \frac{l}{2} - 2\right\},\ a_{\frac{l}{2}+j} = 0. \tag{4.28}$$

Seja $\mathcal{P}_3(n)$ a sentença aberta sobre $\{1, 2, \ldots, \frac{l-4}{2}\}$ dada por

$$\mathcal{P}_3(n):\ p_2 + \ldots + p_{2n+2} = a_1 x^2 + \sum_{i=2}^{n+1} a_i (y + x^2)^i + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=2(i+1)}^{n+2+i} a_{n+2+i} \binom{n+2+i}{j} (x^2)^{n+2+i-j} y^j.$$

Temos $\mathcal{P}_3(1)$ verdadeira. Seja $n \in \{2, 3, \ldots, \frac{l-4}{2}\}$. Suponhamos que $\mathcal{P}_3(n-1)$ seja verdadeira. Dessa forma,

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_{2n} = a_1 x^2 + \sum_{i=2}^{n} a_i (y + x^2)^i + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=2(i+1)}^{n+1+i} a_{n+1+i} \binom{n+1+i}{j} (x^2)^{n+1+i-j} y^j$$

e

$$p_{2n+1} + p_{2n+2} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[a_{n+1+i} \binom{n+1+i}{2i+1} (x^2)^{n-i} y^{2i+1} + a_{n+1+i} \binom{n+1+i}{2i} (x^2)^{n+1-i} y^{2i} \right]$$

$$+ \sum_{j=2(i+1)}^{n+2+i} a_{n+2+i} \binom{n+2+i}{j} (x^2)^{n+2+i-j} y^j \Bigg|_{i=n-1}$$

$$+ \sum_{j=2(i+1)}^{n+2+i} a_{n+2+i} \binom{n+2+i}{j} (x^2)^{n+2+i-j} y^j \Bigg|_{i=n}.$$

Logo,

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_{2n+2} = a_1 x^2 + \sum_{i=2}^{n} a_i (y + x^2)^i + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=2i}^{n+1+i} a_{n+1+i} \binom{n+1+i}{j} (x^2)^{n+1+i-j} y^j$$

$$+ \sum_{j=2(i+1)}^{n+2+i} a_{n+2+i} \binom{n+2+i}{j} (x^2)^{n+2+i-j} y^j \Bigg|_{i=n-1}$$

$$+ \sum_{j=2(i+1)}^{n+2+i} a_{n+2+i} \binom{n+2+i}{j} (x^2)^{n+2+i-j} y^j \Bigg|_{i=n}.$$

Observemos que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=2i}^{n+1+i} a_{n+1+i}\binom{n+1+i}{j}(x^2)^{n+1+i-j}y^j = \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=2(i+1)}^{n+2+i} a_{n+2+i}\binom{n+2+i}{j}(x^2)^{n+2+i-j}y^j$$

$$+ a_{n+1}(y+x^2)^{n+1}.$$

Desse modo,

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_{2n+2} = a_1x^2 + \sum_{i=2}^{n+1} a_i(y+x^2)^i + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=2(i+1)}^{n+2+i} a_{n+2+i}\binom{n+2+i}{j}(x^2)^{n+2+i-j}y^j.$$

Assim, $\mathcal{P}_3(n)$ é verdadeira. Logo, do Princípio da Boa Ordem concluímos que $\mathcal{P}_3(n)$ é verdadeira para todo $n \in \{1, 2, \ldots, \frac{l-4}{2}\}$. Por $\mathcal{P}_3(\frac{l-4}{2})$ e (4.28) obtemos que

$$p_{l-1} = \frac{lc_lK^l}{2}x^{l-2}y = \frac{l}{2}a_{\frac{l}{2}}x^{l-2}y,\ p_l = c_lK^lx^l = a_{\frac{l}{2}}x^l,$$

e

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_l = a_1x^2 + \sum_{i=2}^{\frac{l}{2}-1} a_i(y+x^2)^i + \sum_{i=2}^{\frac{l}{2}} a_{\frac{l}{2}}\binom{\frac{l}{2}}{i}(x^2)^{\frac{l}{2}-i}y^i + \frac{l}{2}a_{\frac{l}{2}}x^{l-2}y + a_{\frac{l}{2}}x^l$$

$$= a_1x^2 + \sum_{i=2}^{\frac{l}{2}} a_i(y+x^2)^i.$$

Considerando o isomorfismo $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado na Observação 4.9, temos

$$f_1 \circ T_1 \circ S = \frac{K(lc_lk_4s + 2a_{l-1}c_2k_2)}{lc_ls}x - \frac{k_2c_2K^2}{s}y + a_1x^2 + \sum_{i=2}^{\frac{l}{2}} a_i(y+x^2)^i$$

e

$$f_2 \circ T_1 \circ S = c_2K^2x^2 - \frac{K(lc_lk_3s + 2a_{l-1}c_2k_1)}{lc_ls}x + \frac{k_1c_2K^2}{s}y + \lambda\Big(a_1x^2 + \sum_{i=2}^{\frac{l}{2}} a_i(y+x^2)^i\Big).$$

Lembremos que $k_1 = -\lambda k_2 + s$, $k_3 = -\lambda k_4 + w$,

$$N = \frac{l}{2}c_lw + a_{l-1}c_2 = 0,\ a_1 = -\frac{k_2c_2K^2}{s} \text{ e } a_{\frac{l}{2}} = c_lK^l \neq 0.$$

Assim,

$$\frac{lc_lk_4s + 2a_{l-1}c_2k_2}{lc_l} = k_1k_4 - k_2k_3 = 1.$$

Mais ainda,

$$f_1 \circ T_1 \circ S = \frac{K}{s}x - \frac{k_2 c_2 K^2}{s}y + a_1 x^2 + \sum_{i=2}^{\frac{l}{2}} a_i (y + x^2)^i = \frac{K}{s}x + a_1(y + x^2) + \sum_{i=2}^{\frac{l}{2}} a_i (y + x^2)^i$$

e

$$f_2 \circ T_1 \circ S = c_2 K^2 (y + x^2) + \lambda(f_1 \circ T_1 \circ S).$$

Seja $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo definido por

$$T_2(x, y) = \Big(\frac{s}{K}x, \frac{K}{s}y\Big).$$

Denotemos $C_0 = s^2 c_2$, $Q = y + C_0 x^2$ e $T = T_1 \circ S \circ T_2$. Portanto, como $K^3 = \dfrac{s}{c_2}$,

$$f_1 \circ T = x + \sum_{i=1}^{\frac{l}{2}} C_i Q^i \text{ e } f_2 \circ T = Q + \lambda(f_1 \circ T)$$

onde $C_0 \neq 0$ e, para cada $i \in \Big\{1, 2, \ldots, \dfrac{l}{2}\Big\}$, $C_i = \Big(\dfrac{K}{s}\Big)^i a_i$, com $C_{\frac{l}{2}} \neq 0$. □

Por fim, notemos que as aplicações f no Corolário 4.6 e no Teorema 4.11 são injetoras.

4.2 Formas canônicas para centros isócronos triviais associados a funções Hamiltonianas de graus 10, 12, 14 e 22.

Na seção anterior, mostramos que uma aplicação f dada ou como no Corolário 4.6 ou como no Teorema 4.11 possui uma certa forma canônica e, como consequência, é injetora. Levando em consideração a relação que o Teorema 1.1 cria entre centros isócronos triviais no plano e aplicações polinomiais planares de determinante Jacobiano constante e igual a um, em [2, Proposição 1, Teorema 2.3, Teorema 2.4] são dadas caracterizações para centros isócronos triviais na origem de (1.1) com H de grau 4, 6 e 8, respectivamente. Equivalentemente, são dadas as possíveis formas canônicas, a menos de isomorfismo de determinante um, para aplicações polinomiais $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $f(0, 0) = (0, 0)$ e $\Big|Jf\Big| \equiv 1$, de graus 2, 3 e 4.

Para f de grau 2 ou 3, existe uma única forma canônica possível. Comparando essas formas, observamos que são semelhantes. Agora, f de grau 4 admite duas formas canônicas, sendo uma semelhante às formas associadas aos graus 2 e 3. Surgiu-se, então, o interesse em saber se, de alguma maneira, as possíveis formas canônicas para f estão relacionadas com os divisores positivos do grau da aplicação f menores que o grau de f, pelo menos para alguns graus baixos.

Nos baseando nisso, nesta seção, mostramos que aplicações f de graus 5, 7 e 11 (que são números primos) admitem uma única forma canônica, e que aplicações de grau 6 admitem três possíveis formas canônicas. Mais especificamente, caracterizamos os centros isócronos triviais na origem de (1.1) com H de grau 10, 12, 14 e 22.

Recomendamos a leitura de [7, Capítulo 1, Capítulo 2] para uma maior compreensão sobre “Variedade afim”, “Teorema da Base de Hilbert”e “Base de Groebner”: resultado e conceitos necessários para nosso estudo. Além disso, as notações que usamos é condizente com o programa *Maple*, o qual utilizamos para realizar nossos cálculos.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ um número não nulo, $\mathbb{K}$ um corpo e $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ um ideal. Consideremos uma permutação σ sobre o conjunto de variáveis $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Define-se como *monômio* a multiplicação formal $\sigma(x_1)^{\alpha_1}\sigma(x_2)^{\alpha_2}\ldots\sigma(x_n)^{\alpha_n}$, com $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Fixemos uma ordem monomial $\succ$ sobre o anel $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Os polinômios em $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, sempre que necessário, são vistos como funções polinomiais na variável $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definição 4.12. A *variedade afim* associada a I é o conjunto

$$\mathcal{V}(I) = \{a \in \mathbb{K}^n;\ \forall f \in I,\ f(a) = 0\}.$$

Pelo Teorema da Base de Hilbert, o ideal I é gerado por, pelo menos, um conjunto finito contido em I. Um conjunto com tais características é dito um *conjunto gerador finito* de I. Seja $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ um conjunto gerador finito de I. Definimos

$$\mathcal{V}(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \{a \in \mathbb{K}^n;\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ f_i(a) = 0\}.$$

Dessa forma, $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Assim, concluímos que a variedade afim associada ao ideal I é completamente determinada a partir de um conjunto gerador finito qualquer de I.

Notação 1. Denotamos por

$$\mathrm{plex}(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n))$$

e

$$\mathrm{tdeg}(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n))$$

as ordens monomiais *Lexicográfica* ($\succ_{\mathrm{plex}}$) e *Lexicográfica Graduada Reversa* ($\succ_{\mathrm{tdeg}}$) sobre o anel $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, respectivamente.

Notação 2. Os conjuntos $\mathrm{Grb}_{\mathrm{plex}}(I)$ e $\mathrm{Grb}_{\mathrm{tdeg}}(I)$ são as bases de Groebner reduzidas de I associadas às ordens plex $= \mathrm{plex}(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n))$ e tdeg $= \mathrm{tdeg}(\sigma(x_1), \sigma(x_2), \ldots, \sigma(x_n))$, respectivamente.

Para $n=2$ convencionamos $x_1=x$ e $x_2=y$; para $n=3$, $x_1=x$, $x_2=y$ e $x_3=z$.

Na demonstração dos lemas que seguem, sempre que nos referirmos às identidades em (4.8), (4.9) e (4.10), levaremos em consideração a Observação 4.4 como um todo. Sempre que citarmos ky^je_i (kx^je_i), com $j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{R}$ e $i\in\{1,2,\ldots,2l-2\}$, estaremos na verdade nos referindo a identidade $ky^je_i=0$ ($kx^je_i=0$), sempre olhando primeiro a expressão polinomial associada a y^je_i (kx^je_i). Além disso, sempre que escrevermos p_{ij} (v_j), com $i,j\in\mathbb{N}$, estaremos nos referindo a um elemento de $\mathcal{H}_j$ ($\mathbb{R}$).

Antes de enunciarmos os lemas, lembremos da *identidade de Euler* para polinômios homogêneos:

Identidade de Euler. *Seja $p:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ um polinômio homogêneo de grau n. Então,*

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=nf(x,y).$$

Lema 4.13. *Seja $f=(f_1,f_2):\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ uma aplicação dada como em (4.1), com $l=5$. Assuma que $p_5\neq 0$ e $\left|Jf\right|\equiv 1$. Seja $\lambda\in\mathbb{R}$ o número tal que $q_5=\lambda p_5$. Então, para todo $i\in\{2,3,\ldots,5\}$, existe $C_i\in\mathbb{R}$ de modo que*

$$p_i=C_i(y-\lambda x)^i \text{ e } q_i=\lambda p_i.$$

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, $q_4\neq\lambda p_4$. Tomemos $l=5$ e $s=5$ em (4.8), (4.9) e (4.10). De e_6 segue que existe $d_3\in\mathbb{R}$ tal que, para todo $y>0$,

$$q_3=\frac{4c_4p_4+5\lambda c_5p_3y}{5c_5y}+d_3y^3.$$

Assim, de e_5 obtemos que existe $d_2\in\mathbb{R}$ tal que, para todo $y>0$,

$$q_2=\frac{25\lambda c_5^2p_2y^6+20c_4c_5p_3y^5+15d_3c_5p_4y^4-2c_4p_4^2}{25c_5^2y^6}+d_2y^2.$$

Dessa forma, por e_4,

$$\frac{12c_4(a^2+b^2)p_{4x}p_4^2}{25c_5^2}\in y^4\mathcal{H}_7$$

e, então, $p_4=y^2p_{42}$. Novamente de e_4 segue que

$$\frac{12c_4(a^2+b^2)p_{42x}p_{42}^2}{25c_5^2}\in y\mathcal{H}_4$$

e, daí, $p_{42}=yp_{41}$. De e_3 temos que

$$\frac{4c_4(a^2+b^2)p_{3x}p_3}{5c_5}\in y^2\mathcal{H}_3.$$

Logo, $p_3=yp_{32}$. Denotemos $s=p_{41}(1,0)$ e $w=p_{32}(1,0)$. Pela identidade de Euler, obtemos que

$$w(s^2-10c_5w)=\frac{25c_5^2}{4c_4(a^2+b^2)}e_3\bigg|_{(x,y)=(1,0)}=0$$

e

$$s(3s^2 - 15c_5 w) = \frac{25c_5^2}{4c_4(a^2+b^2)} y^{-2} e_4 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Daí, $s = w = 0$. Assim, $p_{32} = yp_{31}$ e $p_{41} = v_4 y$. Por e_4,

$$4c_4(a^2+b^2)p_{2x} \in y\mathcal{H}_0$$

e, daí, $p_2 = yp_{21}$. De e_3 temos

$$\frac{4c_4(a^2+b^2)p_{31x}p_{31}}{5c_5} \in y\mathcal{H}_0.$$

Assim, $p_{31} = v_3 y$. Por e_4,

$$p_{21} = -\frac{5c_5(a+\lambda b)}{4c_4(a^2+b^2)}x + v_2 y.$$

Dessa maneira, por e_1, temos que $a + \lambda b = 0$. Então,

$$4bc_4 y^3 = e_3 = 0.$$

Absurdo, pois $b^2(1+\lambda^2) = a^2 + b^2 \neq 0$. Logo, $q_4 = \lambda p_4$.

Diante do Teorema 4.5, como $q_5 = \lambda p_5$ e $q_4 = \lambda p_4$, concluímos que $q_3 = \lambda p_3$ e $q_2 = \lambda p_2$. Logo, de (4.5), (4.6) e (4.7) temos, para todo $i \in \{1,2,3,4\}$, que

$$p_{i+1_x} + \lambda p_{i+1_y} = e_i = 0$$

Portanto, pelo Lema 4.2, obtemos que para cada $i \in \{2,3,4,5\}$, existe $C_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_i = C_i(y - \lambda x)^i \text{ e } q_i = \lambda p_i,$$

o que finaliza a demonstração. $\square$

Lema 4.14. *Considere uma aplicação $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como em (4.1), com $l = 7$. Suponha que $p_7 \neq 0$ e $\Big|Jf\Big| \equiv 1$. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ o número tal que $q_7 = \lambda p_7$. Então, para cada $i \in \{2,3,\dots,7\}$, existe $C_i \in \mathbb{R}$ tal que*

$$p_i = C_i(y - \lambda x)^i \text{ e } q_i = \lambda p_i.$$

Demonstração. Assumamos, por contradição, $q_6 \neq \lambda p_6$. Consideremos as identidades em (4.8), (4.9) e (4.10), com $l = 7$ e $s = 7$. Por e_{10} obtemos que existe $d_5 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_5 = \frac{6c_6p_6 + 7\lambda c_7 p_5 y}{7c_7 y} + d_5 y^5.$$

De e_9 segue que existe $d_4 \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $y > 0$,

$$q_4 = \frac{49\lambda c_7^2 p_4 y^8 + 42c_6c_7p_5y^7 + 35d_5c_7p_6y^6 - 3c_6p_6^2}{49c_7^2y^8} + d_4y^4.$$

Usando que

$$\int p_{6x}p_5\ dx = p_6p_5 - \int p_{5x}p_6\ dx,$$

segue de e_8 que existe $d_3 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$, que

$$q_3 = \frac{1}{343c_7^3y^{15}}\Big(196d_4c_7^2p_6y^{12} - 35d_5c_7p_6^2y^6 - 42c_6c_7p_5p_6y^7 + 245d_5c_7^2p_5y^{13} + 8c_6p_6^3 + 343\,\lambda\, c_7^3p_3y^{15} + 294c_6c_7^2p_4y^{14}\Big) + d_3y^3.$$

Agora, como

$$\int p_{4x}p_6\ dx = p_4p_6 - \int p_{6x}p_4\ dx,$$

$$\int p_{6x}p_5\ dx = p_5p_6 - \int p_{5x}p_6\ dx$$

e

$$\int p_5p_{6x}p_6\ dx = \frac{p_5p_6^2}{2} - \frac{1}{2}\int p_{5x}p_6^2\ dx,$$

segue de e_7 que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_2 = \frac{1}{2401c_7^4y^{22}}\Big(1715d_5c_7^3p_4y^{20} + 168c_6c_7p_5p_6^2y^7 + 1372d_4c_7^3p_5y^{19} - 30c_6p_6^4 - 294d_4c_7^2p_6^2y^{12} + 105d_5c_7p_6^3y^6 - 147c_6c_7^2p_5^2y^{14} - 490d_5c_7^2p_5p_6y^{13} - 294c_6c_7^2p_4p_6y^{14} + 2058c_6c_7^3p_3y^{21} + 1029d_3c_7^3p_6y^{18} + 2401\lambda c_7^4p_2y^{22}\Big) + d_2y^2.$$

Dessa forma, de e_6 temos que

$$\frac{660c_6(a^2+b^2)p_{6x}p_6^4}{2401c_7^4} \in y^6\mathcal{H}_{23}$$

e, daí, $p_6 = y^2p_{64}$. Assim, de e_6 obtemos que

$$\frac{660c_6(a^2+b^2)p_{64x}p_{64}^4}{2401c_7^4} \in y^3\mathcal{H}_{16}.$$

Logo, $p_{64} = yp_{63}$. Novamente de e_6 segue que

$$\frac{660c_6(a^2+b^2)p_{63x}p_{63}^4}{2401c_7^4} \in y\mathcal{H}_{13}$$

e, então, $p_{63} = yp_{62}$. Por e_5 temos que

$$\frac{24c_6(a^2+b^2)p_{5x}p_5^2}{49c_7^2} \in y\mathcal{H}_{13}.$$

Assim, $p_5 = yp_{54}$. Denotemos $s = p_{54}(1,0)$ e $w = p_{62}(1,0)$. Pela identidade de Euler,

$$392c_7^2s^3 - 448c_7s^2w^2 + 80sw^4 = \frac{2401c_7^4}{12c_6(a^2+b^2)}y^6e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e
$$980c_7^2s^2w - 700c_7sw^3 + 110w^5 = \frac{2401c_7^4}{12c_6(a^2+b^2)}y^3e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$
Consideremos o ideal polinomial
$$I =< 392c_7^2x^3 - 448c_7x^2y^2 + 80xy^4, 980c_7^2x^2y - 700c_7xy^3 + 110y^5 > .$$
Como
$$\mathrm{Grb}_{\mathrm{tdeg}}(I) = \{x^5, 11y^5 + 98c_7^2x^2y - 70c_7xy^3, \ldots\}$$
com tdeg = tdeg(x,y), temos que
$$(s,w) \in \mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(x^5, 11y^5 + 98c_7^2x^2y - 70c_7xy^3).$$
Logo, $s = w = 0$ e, consequentemente, $p_{62} = yp_{61}$ e $p_{54} = yp_{53}$. De e_5 segue que
$$\frac{24c_6(a^2+b^2)p_{53x}p_{53}^2}{49c_7^2} \in y\mathcal{H}_7.$$
Assim, $p_{53} = yp_{52}$. Novamente de e_5 obtemos que
$$\frac{6c_6(a^2+b^2)p_{4x}p_4}{7c_7} \in y\mathcal{H}_6.$$
e, daí, $p_4 = yp_{43}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$, $w = p_{61}(1,0)$ e $u = p_{43}(1,0)$. Novamente pela identidade de Euler,
$$50w^4u + 490c_7^2wu^2 + 245c_7^2s^2u - 280c_7sw^2u = \frac{2401c_7^4}{6c_6(a^2+b^2)}y^2e_4\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$
$$80sw^4 - 448c_7s^2w^2 + 392c_7^2s^3 + 931c_7^2swu - 28c_7w^3u - 1029c_7^3u^2 = \frac{2401c_7^4}{6c_6(a^2+b^2)}e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$
e
$$980c_7^2w^2u - 1715c_7^3su + 110w^5 - 700c_7sw^3 + 980c_7^2s^2w = \frac{2401c_7^4}{6c_6(a^2+b^2)}y^{-2}e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

De forma análoga à anterior, com um certo abuso de notação, calculando a base de Groebner em relação a ordem tdeg(s,w,u), obtemos que $u = w = s = 0$. Logo,
$$p_{52} = yp_{51},\ p_{43} = yp_{42} \text{ e } p_{61} = v_6y.$$
De e_3 segue que
$$\frac{6c_6(a^2+b^2)p_{3x}p_3}{7c_7} \in y^2\mathcal{H}_3$$

e, assim, $p_3 = yp_{32}$. Assim, de e_5 temos que

$$\frac{6c_6(a^2+b^2)p_{42x}p_{42}}{7c_7} \in y\mathcal{H}_2.$$

Dessa forma, $p_{42} = yp_{41}$. Denotemos $s = p_{32}(1,0)$ e $w = p_{51}(1,0)$. Desse modo,

$$s(w^2 - 14c_7 s) = \frac{49c_7^2}{6c_6(a^2+b^2)} e_3\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$4w^3 - 21c_7 sw = \frac{49c_7^2}{6c_6(a^2+b^2)} y^{-3} e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Logo, $s = w = 0$ e, consequentemente, $p_{32} = yp_{31}$ e $p_{51} = v_5 y$. Por e_6,

$$6c_6(a^2+b^2)p_{2x} \in y\mathcal{H}_0.$$

Então, $p_2 = yp_{21}$. De e_5 temos que

$$\frac{6c_6(a^2+b^2)p_{41x}p_{41}}{7c_7} \in y\mathcal{H}_0$$

e, daí, $p_{41} = v_4 y$. Por e_3,

$$\frac{6c_6(a^2+b^2)p_{31x}p_{31}}{7c_7} \in y\mathcal{H}_0.$$

Assim, $p_{31} = v_3 y$. Agora, de e_6 segue que

$$p_{21} = -\frac{7c_7(a+\lambda b)}{6c_6(a^2+b^2)}x + v_2 y.$$

Dessa forma, por e_1 temos que $a + \lambda b = 0$ e, consequentemente,

$$6bc_5 y^5 = e_5 = 0.$$

Absurdo, já que $b^2(1+\lambda^2) = a^2 + b^2 \neq 0$. Logo, $q_6 = \lambda p_6$.

Temos que $q_7 = \lambda p_7$ e $q_6 = \lambda p_6$. Suponhamos, por absurdo, que $q_5 \neq \lambda p_5$. Consideremos $l = 7$ e $s = 6$ em (4.8), (4.9) e (4.10). De e_9 temos que existe $d_4 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_4 = \frac{5c_5 p_6 + 7\lambda c_7 p_4 y^2}{7c_7 y^2} + d_4 y^4.$$

De e_8 obtemos que existe $d_3 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_3 = \frac{49\lambda c_7^2 p_3 y^9 + 35c_5 c_7 p_5 y^7 + 28 d_4 c_7 p_6 y^6 - 5c_5 p_6^2}{49c_7^2 y^9} + d_3 y^3.$$

Como

$$\int p_{6x} p_5 \, dx = p_5 p_6 - \int p_{5x} p_6 \, dx,$$

segue de e_7 que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ de tal forma que, para todo $y > 0$,

$$q_2 = \frac{1}{343c_7^3y^{16}}\Big(343\lambda c_7^3p_2y^{16} + 147d_3c_7^2p_6y^{12} + 15c_5p_6^3 - 42d_4c_7p_6^2y^6 - 70c_5c_7p_5p_6y^7 + 245c_5c_7^2p_4y^{14} + 196d_4c_7^2p_5y^{13}\Big) + d_2y^2.$$

Logo, de e_6 temos que

$$\frac{240c_5(a^2+b^2)p_{6x}p_6^3}{343c_7^3} \in y^6\mathcal{H}_{17}$$

e, daí, $p_6 = y^2p_{64}$. De e_6 obtemos que

$$\frac{240c_5(a^2+b^2)p_{64x}p_{64}^3}{343c_7^3} \in y^3\mathcal{H}_{12}.$$

Assim, $p_{64} = yp_{63}$. Novamente por e_6 segue que

$$\frac{240c_5(a^2+b^2)p_{63x}p_{63}^3}{343c_7^3} \in y\mathcal{H}_{10}.$$

Desse modo, $p_{63} = yp_{62}$. De e_6 temos que

$$\frac{10c_5(a^2+b^2)p_{5x}p_5}{7c_7} \in y\mathcal{H}_8$$

e, daí, $p_5 = yp_{54}$. Denotemos $s = p_{54}(1,0)$ e $w = p_{62}(1,0)$. Dessa maneira,

$$22sw(14c_7s - 3w^2) = \frac{343c_7^3}{5c_5(a^2+b^2)}y^4e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$504c_7sw^2 - 96w^4 - 392c_7^2s^2 = \frac{343c_7^3}{5c_5(a^2+b^2)}ye_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e, então, $s = w = 0$. Logo, $p_{54} = yp_{53}$ e $p_{62} = yp_{61}$. Por e_6 temos que

$$\frac{10c_5(a^2+b^2)p_{53x}p_{53}}{7c_7} \in y\mathcal{H}_4$$

e, assim, $p_{53} = yp_{52}$. De e_4 segue que

$$\frac{10c_5(a^2+b^2)p_{4x}p_4}{7c_7} \in y\mathcal{H}_6.$$

Dessa maneira, $p_4 = yp_{43}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$, $w = p_{61}(1,0)$ e $u = p_{43}(1,0)$. Assim,

$$84c_7swu - 18w^3u - 294c_7^2u^2 = \frac{343c_7^3}{5c_5(a^2+b^2)}ye_4\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$154c_7s^2w - 7c_7w^2u - 490suc_7^2 - 33sw^3 = \frac{343c_7^3}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-1}e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$252c_7sw^2 - 48w^4 - 392c_7^2wu - 196c_7^2s^2 = \frac{343c_7^3}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-3}e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, usando a ordem tdeg(s, w, u), $s = w = u = 0$. Então,

$$p_{52} = yp_{51},\ p_{43} = yp_{42} \text{ e } p_{61} = v_6y.$$

Por e_6 temos que

$$5c_5(a^2+b^2)p_{3x} \in y\mathcal{H}_1.$$

Daí, $p_3 = yp_{32}$. De e_4 obtemos que

$$\frac{10c_5(a^2+b^2)p_{42x}p_{42}}{7c_7} \in y\mathcal{H}_2.$$

Dessa forma, $p_{42} = yp_{41}$. Denotemos $s = p_{32}(1,0)$ e $w = p_{51}(1,0)$. Dessa maneira, segue que

$$3sw = \frac{7c_7}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-2}e_4\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$14c_7s - 2w^2 = \frac{7c_7}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-5}e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Então, $s = w = 0$. Consequentemente, $p_{32} = yp_{31}$ e $p_{51} = v_5y$. Por e_5 temos que

$$5c_5(a^2+b^2)p_{2x} \in y\mathcal{H}_0.$$

Logo, $p_2 = yp_{21}$. De e_4 temos que

$$\frac{10c_5(a^2+b^2)p_{41x}p_{41}}{7c_7} \in y\mathcal{H}_0$$

e, então, $p_{41} = v_4y$. Agora, por e_6 segue que

$$p_{31} = -\frac{7c_7(a+\lambda b)}{5c_5(a^2+b^2)}x + v_3y.$$

De e_2 obtemos que

$$\frac{14c_7(a+\lambda b)^2}{5c_5(a^2+b^2)}x \in y\mathcal{H}_0$$

e, daí, $a + \lambda b = 0$. De e_5 temos que $p_{21} = v_2y$. Consequentemente,

$$5bc_5y^4 = e_4 = 0.$$

Absurdo. Então, $q_5 = \lambda p_5$.

Até o momento temos que $q_7 = \lambda p_7$, $q_6 = \lambda p_6$ e $q_5 = \lambda p_5$. Suponhamos, por contradição, que $q_4 \neq \lambda p_4$. Tomemos $l = 7$ e $s = 5$ em (4.8), (4.9) e (4.10). Por e_8 segue que existe $d_3 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_3 = \frac{4c_4 p_6 + 7\lambda c_7 p_3 y^3}{7c_7 y^3} + d_3 y^3.$$

De e_7 obtemos que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_2 = \frac{49\lambda c_7^2 p_2 y^{10} + 28c_4 c_7 p_5 y^7 + 21 d_3 c_7 p_6 y^6 - 6c_4 p_6^2}{49c_7^2 y^{10}} + d_2 y^2.$$

De e_6 temos que

$$\frac{60c_4(a^2+b^2)p_{6x}p_6^2}{49c_7^2} \in y^6\mathcal{H}_{11}$$

e, então, $p_6 = y^2 p_{64}$. Por e_6,

$$\frac{60c_4(a^2+b^2)p_{64x}p_{64}^2}{49c_7^2} \in y^3\mathcal{H}_8.$$

Assim, $p_{64} = yp_{63}$. Novamente de e_6, segue que

$$\frac{60c_4(a^2+b^2)p_{63x}p_{63}^2}{49c_7^2} \in y\mathcal{H}_7$$

e, daí, $p_{63} = yp_{62}$. De e_5 temos que

$$\frac{12c_4(a^2+b^2)p_{5x}p_5}{7c_7} \in y\mathcal{H}_8.$$

Logo, $p_5 = yp_{54}$. Denotemos $s = p_{54}(1,0)$ e $w = p_{62}(1,0)$. Desse modo,

$$2s(3w^2 - 14c_7 s) = \frac{49c_7^2}{12c_4(a^2+b^2)} y^2 e_5\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$10w^3 - 42c_7 sw = \frac{49c_7^2}{12c_4(a^2+b^2)} y^{-1} e_6\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Daí, $s = w = 0$. Assim, $p_{54} = yp_{53}$ e $p_{62} = yp_{61}$. Por e_5,

$$\frac{12c_4(a^2+b^2)p_{53x}p_{53}}{7c_7} \in y\mathcal{H}_4.$$

Daí, $p_{53} = yp_{52}$. Por e_6 temos

$$4c_4(a^2+b^2)p_{4x} \in y\mathcal{H}_2.$$

Assim, $p_4 = yp_{43}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$, $w = p_{61}(1,0)$ e $u = p_{43}(1,0)$. Então,

$$3w^2 u - 14c_7 su = \frac{49c_7^2}{4c_4(a^2+b^2)} e_4\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$35c_7wu + 9sw^2 - 42c_7s^2 = \frac{49c_7^2}{4c_4(a^2+b^2)}y^{-2}e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$147c_7^2u - 63c_7sw + 15w^3 = \frac{49c_7^2}{4c_4(a^2+b^2)}y^{-4}e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem tdeg(s, w, u) obtemos que $u = s = w = 0$. Daí,

$$p_{52} = yp_{51},\ p_{43} = yp_{42} \text{ e } p_{61} = v_6y.$$

De e_5 e e_6 segue, respectivamente, que

$$4c_4(a^2+b^2)p_{3x} \in y\mathcal{H}_1 \text{ e } 4c_4(a^2+b^2)p_{42x} \in y\mathcal{H}_1.$$

Dessa forma, $p_3 = yp_{32}$ e $p_{42} = yp_{41}$. Denotemos $s = p_{32}(1,0)$ e $w = p_{51}(1,0)$. Daí,

$$sw = \frac{7c_7}{4c_4(a^2+b^2)}y^{-1}e_3\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$14c_7s - 3w^2 = \frac{7c_7}{4c_4(a^2+b^2)}y^{-4}e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Logo, $s = w = 0$ e, consequentemente, $p_{32} = yp_{31}$ e $p_{51} = v_5y$. De e_4 e e_6 segue que

$$4c_4(a^2+b^2)p_{2x} \in y\mathcal{H}_0 \text{ e } p_{41} = -\frac{7c_7(a+\lambda b)}{4c_4(a^2+b^2)}x + v_4y,$$

respectivamente. Então, $p_2 = yp_{21}$. De e_3 obtemos que

$$\frac{21c_7(a+\lambda b)^2}{4c_4(a^2+b^2)}x \in y\mathcal{H}_0$$

e, assim, $a + \lambda b = 0$. Por e_5, $p_{31} = v_3y$. Em seguida, de e_4 segue que $p_{21} = v_2y$. Logo,

$$4bc_4y^3 = e_3 = 0.$$

Absurdo. Dessa forma, $q_4 = \lambda p_4$.

Temos, para cada $i \in \{4,5,6,7\}$, $q_i = \lambda p_i$. Pelo Teorema 4.5 obtemos que $q_i = \lambda p_i$ para todo $i \in \{2,3,\ldots,7\}$. Logo, de (4.5), (4.6) e (4.7) segue, para todo $i \in \{1,2,\ldots,6\}$

$$p_{i+1x} + \lambda p_{i+1y} = e_i = 0$$

Portanto, do Lema 4.2 segue que, para todo $i \in \{2,3,\ldots,7\}$, existe $C_i \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$p_i = C_i(y-\lambda x)^i \text{ e } q_i = \lambda p_i,$$

o que encerra a demonstração. $\square$

Lema 4.15. *Considere uma aplicação* $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida como em* (4.1), *com* $l = 11$. *Suponha que* $p_{11} \neq 0$ *e* $\Big|Jf\Big| \equiv 1$. *Seja* $\lambda \in \mathbb{R}$ *o número tal que* $q_{11} = \lambda p_{11}$. *Então, para cada* $i \in \{2, 3, \ldots, 11\}$, *existe* $C_i \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$p_i = C_i(y - \lambda x)^i \ \text{ e } q_i = \lambda p_i.$$

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, $q_{10} \neq \lambda p_{10}$. Consideremos as identidades em (4.8), (4.9) e (4.10), com $l = 11$ e $s = 11$. De e_{18} obtemos que existe $d_9 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_9 = \frac{10c_{10}p_{10} + 11\lambda c_{11}p_9 y}{11c_{11}y} + d_9 y^9.$$

De e_{17} temos que existe $d_8 \in \mathbb{R}$ de tal forma que, para todo $y > 0$,

$$q_8 = \frac{121\lambda c_{11}^2 p_8 y^{12} + 110c_{10}c_{11}p_9 y^{11} + 99d_9 c_{11}p_{10}y^{10} - 5c_{10}p_{10}^2}{121c_{11}^2 y^{12}} + d_8 y^8.$$

Como

$$\int p_{9x}p_{10}\ dx = p_9 p_{10} - \int p_{10x}p_9\ dx,$$

segue de e_{16} que existe $d_7 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} q_7 = \frac{1}{1331c_{11}^3 y^{23}}\Big(&1331\lambda c_{11}^3 p_7 y^{23} - 110c_{10}c_{11}p_9 p_{10}y^{11} + 1210c_{10}c_{11}^2 p_8 y^{22} + 1089d_9 c_{11}^2 p_9 y^{21} \\ &+ 968d_8 c_{11}^2 p_{10}y^{20} + 20c_{10}p_{10}^3 - 99d_9 c_{11}p_{10}^2 y^{10}\Big) + d_7 y^7. \end{aligned}$$

Usando que

$$\int p_{8x}p_{10}\ dx = p_8 p_{10} - \int p_{10x}p_8\ dx,$$

$$\int p_{9x}p_{10}\ dx = p_9 p_{10} - \int p_{10x}p_9\ dx$$

e

$$\int p_9 p_{10x}p_{10}\ dx = \frac{p_9 p_{10}^2}{2} - \frac{1}{2}\int p_{9x}p_{10}^2\ dx$$

segue de e_{15} que existe $d_6 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} q_6 = \frac{1}{14641c_{11}^4 y^{34}}\Big(&660c_{10}c_{11}p_9 p_{10}^2 y^{11} - 115c_{10}p_{10}^4 + 11979d_9 c_{11}^3 p_8 y^{32} + 14641\lambda c_{11}^4 p_6 y^{34} \\ &+ 13310c_{10}c_{11}^3 p_7 y^{33} + 9317d_7 c_{11}^3 p_{10}y^{30} - 2178d_9 c_{11}^2 p_9 p_{10}y^{21} + 10648d_8 c_{11}^3 p_9 y^{31} \\ &+ 429d_9 c_{11}p_{10}^3 y^{10} - 1452d_8 c_{11}^2 p_{10}^2 y^{20} - 1210c_{10}c_{11}^2 p_8 p_{10}y^{22} - 605c_{10}c_{11}^2 p_9^2 y^{22}\Big) + d_6 y^6. \end{aligned}$$

Como feito acima, no que segue, combinamos a regra de integração por partes com a regra de Leibniz várias vezes para determinarmos q_5, q_4, q_3 e q_2. De segue de e_{14} que existe $d_5 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_5 = \frac{1}{161051c_{11}^5 y^{45}}\Big(14157d_9 c_{11}^2 p_9 p_{10}^2 y^{21} - 13310c_{10}c_{11}^3 p_8 p_9 y^{33} + 782c_{10}p_{10}^5 + \ldots\Big) + d_5 y^5.$$

De e_{13} obtemos que existe $d_4 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_4 = \frac{1}{1771561c_{11}^6 y^{56}}\Big(79860c_{10}c_{11}^3 p_7 p_{10}^2 y^{33} + 155727 d_9 c_{11}^3 p_9^2 p_{10} y^{32} + \dots\Big) + d_4 y^4.$$

De e_{12} temos que existe $d_3 \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $y > 0$,

$$q_3 = \frac{1}{19487171c_{11}^7 y^{67}}\Big(1756920c_{10}c_{11}^4 p_7 p_9 p_{10} y^{44} - 1610510c_{10}c_{11}^5 p_6 p_9 y^{55} + \dots\Big) + d_3 y^3.$$

Por e_{11}, existe $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_2 = \frac{1}{214358881c_{11}^8 y^{78}}\Big(9663060c_{10}c_{11}^5 p_7 p_9^2 y^{55} - 49603708 d_7 c_{11}^6 p_7 p_{10} y^{63} + \dots\Big) + d_2 y^2.$$

De e_{10} segue que

$$\frac{30650490c_{10}(a^2+b^2)p_{10x}p_{10}^8}{214358881c_{11}^8} \in y^{10}\mathcal{H}_{79}.$$

Logo, $p_{10} = y^2 p_{108}$. Por e_{10} temos que

$$\frac{30650490c_{10}(a^2+b^2)p_{108x}p_{108}^8}{214358881c_{11}^8} \in y^7\mathcal{H}_{64}$$

e, assim, $p_{108} = y p_{107}$. De e_{10} obtemos que

$$\frac{30650490c_{10}(a^2+b^2)p_{107x}p_{107}^8}{214358881c_{11}^8} \in y^5\mathcal{H}_{57}.$$

Daí, $p_{107} = y p_{106}$. Por e_{10},

$$\frac{30650490c_{10}(a^2+b^2)p_{106x}p_{106}^8}{214358881c_{11}^8} \in y^3\mathcal{H}_{50}.$$

Dessa forma, $p_{106} = y p_{105}$. De e_{10} temos que

$$\frac{30650490c_{10}(a^2+b^2)p_{105x}p_{105}^8}{214358881c_{11}^8} \in y\mathcal{H}_{43}$$

e, então, $p_{105} = y p_{104}$. Por e_9,

$$\frac{3910c_{10}(a^2+b^2)p_{9x}p_9^4}{14641c_{11}^4} \in y\mathcal{H}_{43}.$$

Logo, $p_9 = y p_{98}$. Denotemos $s = p_{98}(1,0)$ e $w = p_{104}(1,0)$. Pela identidade de Euler segue que

$$117128c_{11}^4 s^5 - 724064c_{11}^3 s^4 w^2 + \dots = \frac{214358881c_{11}^8}{3910c_{10}(a^2+b^2)} y^{30} e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$1097712c_{11}^2 s^2 w^5 - 1437480c_{11}^3 s^3 w^3 + \dots = \frac{214358881c_{11}^8}{3910c_{10}(a^2+b^2)} y^{25} e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Encarando as duas expressões anteriores como polinômios g_1 e g_2 nas variáveis $x = s$, $y = w$, respectivamente, temos

$$\mathrm{Grb}_{\mathrm{tdeg}}(I) = \{x^9, 30492c_{11}^2x^2y^5 - 39930c_{11}^3x^3y^3 + 14641c_{11}^4x^4y + 871y^9 - 8844c_{11}xy^7, \ldots\}$$

com $I =< g_1, g_2 >$ e $\mathrm{tdeg} = \mathrm{tdeg}(x, y)$. Dessa maneira,

$$(s, w) \in \mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(x^9, 30492c_{11}^2x^2y^5 - 39930c_{11}^3x^3y^3 + 14641c_{11}^4x^4y + 871y^9 - 8844c_{11}xy^7)$$

e, então, $s = w = 0$. Assim,

$$p_{98} = yp_{97} \text{ e } p_{104} = yp_{103}.$$

De e_9 segue que

$$\frac{3910c_{10}(a^2+b^2)p_{97x}p_{97}^4}{14641c_{11}^4} \in y\mathcal{H}_{33}.$$

Daí, $p_{97} = yp_{96}$. Denotemos $s = p_{96}(1, 0)$ e $w = p_{103}(1, 0)$. Usando novamente a identidade de Euler, temos que

$$20502sw^8 - 543048c_{11}^3s^4w^2 + \ldots = \frac{214358881c_{11}^8}{3910c_{10}(a^2+b^2)}y^{20}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$823284c_{11}^2s^2w^5 - 1078110c_{11}^3s^3w^3 + \ldots = \frac{214358881c_{11}^8}{3910c_{10}(a^2+b^2)}y^{16}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

De maneira análoga à anterior, com um abuso de notação, calculando a base de Groebner em relação a ordem $\mathrm{tdeg}(s, w)$, temos que $s = w = 0$. Consequentemente

$$p_{96} = yp_{95} \text{ e } p_{103} = yp_{102}.$$

Por e_{10},

$$\frac{60c_{10}(a^2+b^2)p_{8x}p_8^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{22}.$$

Dessa maneira, $p_8 = yp_{87}$. De e_9 obtemos que

$$\frac{3910c_{10}(a^2+b^2)p_{95x}p_{95}^4}{14641c_{11}^4} \in y\mathcal{H}_{23}$$

e, daí, $p_{95} = yp_{94}$. De e_{10} temos que

$$\frac{60c_{10}(a^2+b^2)p_{87x}p_{87}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{19}.$$

Logo, $p_{87} = yp_{86}$. Denotemos $s = p_{86}(1, 0)$, $w = p_{94}(1, 0)$ e $u = p_{102}(1, 0)$. Assim,

$$19531094c_{11}^4sw^4 - 112091496c_{11}^5s^3w + \ldots = \frac{214358881c_{11}^8}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^{13}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$5344188wu^8 + 22898524c_{11}^4w^5 + \ldots = \frac{214358881c_{11}^8}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^{10}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$618260148c_{11}^4sw^2u^2 - 400050684c_{11}^5s^2wu + \ldots = \frac{214358881c_{11}^8}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^7e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, usando a ordem tdeg(s, w, u), segue que $s = w = u = 0$. Dessa maneira,

$$p_{86} = yp_{85},\ p_{94} = yp_{93} \text{ e } p_{102} = yp_{101}.$$

De e_7 temos que

$$\frac{60c_{10}(a^2+b^2)p_{7x}p_7^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{19}$$

e, daí, $p_7 = yp_{76}$. Por e_{10},

$$\frac{60c_{10}(a^2+b^2)p_{85x}p_{85}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{13}$$

e, então, $p_{85} = yp_{84}$. Denotemos $s = p_{76}(1, 0)$ e $w = p_{93}(1, 0)$. Então,

$$828sw^4 + 4356c_{11}^2s^3 - 4752c_{11}s^2w^2 = \frac{14641c_{11}^4}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^{10}e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

e

$$10890c_{11}^2s^2w + 1173w^5 - 7590c_{11}sw^3 = \frac{14641c_{11}^4}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^5e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

Desse modo, usando a ordem tdeg(s, w), obtemos que $s = w = 0$. Daí, $p_{76} = yp_{75}$ e $p_{93} = yp_{92}$. De e_{10} obtemos que

$$\frac{60c_{10}(a^2+b^2)p_{84x}p_{84}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{10}$$

e, consequentemente, $p_{84} = yp_{83}$. De e_7 segue que

$$\frac{60c_{10}(a^2+b^2)p_{75x}p_{75}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{13}.$$

Dessa maneira, $p_{75} = yp_{74}$. Por e_9,

$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{6x}p_6}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{10}$$

e, assim, $p_6 = yp_{65}$. Denotemos $s = p_{65}(1, 0)$, $w = p_{74}(1, 0)$, $u = p_{83}(1, 0)$, $v = p_{92}(1, 0)$ e $m = p_{101}(1, 0)$. Logo,

$$40450905c_{11}^2sv^2m^4 + 38388702c_{11}^4su^2m^2 + \ldots = \frac{214358881c_{11}^8}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^6e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$50511450c_{11}^4swm^3 + 132867075c_{11}^6swu + \ldots = \frac{214358881c_{11}^8}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^4e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$61740855c_{11}^2uv^2m^4 - 60368836c_{11}^3uv^3m^2 + \ldots = \frac{214358881c_{11}^8}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^2e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$1845129c_{11}^2wm^6 - 24459787c_{11}^3u^2m^4 + \ldots = \frac{214358881c_{11}^8}{10c_{10}(a^2+b^2)}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$191328588c_{11}^6wuv + 306504m^9 + \ldots = \frac{214358881c_{11}^8}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^{-2}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem plex(s,w,u,v,m), obtemos que $m = v = u = w = s = 0$ e, assim,

$$p_{65} = yp_{64},\ p_{74} = yp_{73},\ p_{83} = yp_{82},\ p_{92} = yp_{91} \text{ e } p_{101} = v_{10}y.$$

De e_7 segue que

$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{5x}p_5}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$

e, então, $p_5 = yp_{54}$. De e_9 temos que

$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{64x}p_{64}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_6.$$

Logo, $p_{64} = yp_{63}$. Por e_7,

$$\frac{60c_{10}(a^2+b^2)p_{73x}p_{73}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_7$$

e, daí, $p_{73} = yp_{72}$. Denotemos $s = p_{54}(1,0)$ e $w = p_{82}(1,0)$. Assim,

$$s(2w^2 - 44c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{10c_{10}(a^2+b^2)}e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$12w^3 - 66c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^{-5}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Desse modo, $s = w = 0$ e, então, $p_{54} = yp_{53}$ e $p_{82} = yp_{81}$. Por e_9,

$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{63x}p_{63}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_4.$$

Então, $p_{63} = yp_{62}$. De e_5 obtemos que

$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{4x}p_4}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_6$$

e, assim, $p_4 = yp_{43}$. Denotemos $s = p_{53}(1,0)$, $w = p_{72}(1,0)$ e $u = p_{91}(1,0)$. Assim,

$$161su^4 + 1694c_{11}^2s^2u + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{10c_{10}(a^2+b^2)}ye_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$3267c_{11}^2swu - 1584c_{11}w^2u^2 + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^{-2}e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$391u^5 + 3630c_{11}^2w^2u + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^{-5}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Dessa forma, usando a ordem $\text{tdeg}(s, w, u)$, temos $s = w = u = 0$. Então,

$$p_{53} = yp_{52},\ p_{72} = yp_{71} \text{ e } p_{91} = v_9y.$$

Por e_5,

$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{43x}p_{43}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_4$$

e, daí, $p_{43} = yp_{42}$. De e_9 temos que

$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{62x}p_{62}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_2.$$

Assim, $p_{62} = yp_{61}$. De e_3 segue que

$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{3x}p_3}{11c_{11}} \in y^2\mathcal{H}_3$$

e, consequentemente, $p_3 = yp_{32}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$ e $w = p_{81}(1,0)$. Dessa forma,

$$s(w^2 - 22c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^{-4}e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$6w^3 - 33c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^{-8}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Logo, $s = w = 0$ e, assim, $p_{52} = yp_{51}$ e $p_{81} = v_8y$. Por e_5,

$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{42x}p_{42}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_2.$$

Daí, $p_{42} = yp_{41}$. Denotemos $s = p_{32}(1,0)$ e $w = p_{71}(1,0)$. Logo,

$$s(w^2 - 22c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{10c_{10}(a^2+b^2)}e_3\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$6w^3 - 33c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{10c_{10}(a^2+b^2)}y^{-5}e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e, daí, $s = w = 0$. Assim, $p_{32} = yp_{31}$ e $p_{71} = v_7y$. De e_{10} segue que

$$10c_{10}(a^2+b^2)p_{2_x} \in y\mathcal{H}_0$$

e, então, $p_2 = yp_{21}$. Por e_9,
$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{61x}p_{61}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_0.$$
Logo, $p_{61} = v_6 y$. De e_7 temos que
$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{51x}p_{51}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_0$$
e, daí, $p_{51} = v_5 y$. De e_5 segue que
$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{41x}p_{41}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_0.$$
Desse modo, $p_{41} = v_4 y$. Por e_3,
$$\frac{10c_{10}(a^2+b^2)p_{31x}p_{31}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_0.$$
Logo, $p_{31} = v_3 y$. De e_{10} segue que
$$p_{21} = -\frac{11c_{11}(a+\lambda b)}{10c_{10}(a^2+b^2)}x + v_2 y.$$
Por e_1,
$$\frac{11c_{11}(a+\lambda b)^2}{10c_{10}(a^2+b^2)}x \in y\mathcal{H}_0$$
e, consequentemente, $a + \lambda b = 0$. Logo,
$$10bc_{10}y^9 = e_9 = 0.$$
Absurdo. Desse modo, $q_{10} = \lambda p_{10}$.

Assumamos, por contradição, que $q_9 \neq \lambda p_9$. Consideremos $l = 11$ e $s = 10$ em (4.8), (4.9) e (4.10). De e_{17} temos que existe $d_8 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,
$$q_8 = \frac{9c_9p_{10} + 11\lambda c_{11}p_8y^2}{11c_{11}y^2} + d_8y^8.$$
Por e_{16}, existe $d_7 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,
$$q_7 = \frac{121\lambda c_{11}^2p_7y^{13} + 99c_9c_{11}p_9y^{11} + 88d_8c_{11}p_{10}y^{10} - 9c_9p_{10}^2}{121c_{11}^2y^{13}} + d_7y^7.$$
Usando que
$$\int p_{9x}p_{10}\,dx = p_9p_{10} - \int p_{10x}p_9\,dx,$$
obtemos de e_{15} que existe $d_6 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,
$$q_6 = \frac{1}{1331c_{11}^3y^{24}}\Big(1331\lambda c_{11}^3p_6y^{24} - 198c_9c_{11}p_9p_{10}y^{11} + 1089c_9c_{11}^2p_8y^{22} + 847d_7c_{11}^2p_{10}y^{20}$$
$$+ 968d_8c_{11}^2p_9y^{21} + 39c_9p_{10}^3 - 132d_8c_{11}p_{10}^2y^{10}\Big) + d_6y^6.$$

Como

$$\int p_{8x}p_{10}\ dx = p_8p_{10} - \int p_{10x}p_8\ dx,$$

$$\int p_{9x}p_{10}\ dx = p_9p_{10} - \int p_{10x}p_9\ dx$$

e

$$\int p_9p_{10x}p_{10}\ dx = \frac{p_9p_{10}^2}{2} - \frac{1}{2}\int p_{9x}p_{10}^2\ dx,$$

por e_{14} segue que existe $d_5 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} q_5 = \frac{1}{14641c_{11}^4y^{35}}\Big(&1287c_9c_{11}p_9p_{10}^2y^{11} - 234c_9p_{10}^4 + 9317d_7c_{11}^3p_9y^{31} + 14641\lambda c_{11}^4p_5y^{35} \\ &+ 11979c_9c_{11}^3p_7y^{33} + 7986d_6c_{11}^3p_{10}y^{30} - 2904d_8c_{11}^2p_9p_{10}y^{21} + 10648d_8c_{11}^3p_8y^{32} \\ &+ 616d_8c_{11}p_{10}^3y^{10} - 1694d_7c_{11}^2p_{10}^2y^{20} - 2178c_9c_{11}^2p_8p_{10}y^{22} - 1089c_9c_{11}^2p_9^2y^{22}\Big) + d_5y^5. \end{aligned}$$

Como feito acima, no que segue, combinamos a regra de integração por partes com a regra de Leibniz várias vezes para determinarmos q_4, q_3 e q_2. De e_{13} temos que existe $d_4 \in \mathbb{R}$ de tal forma que, para todo $y > 0$,

$$q_4 = \frac{1}{161051c_{11}^5y^{46}}\Big(20328d_8c_{11}^2p_9p_{10}^2y^{21} - 23958c_9c_{11}^3p_8p_9y^{33} + 1638c_9p_{10}^5 + \dots\Big) + d_4y^4.$$

Por e_{12}, existe $d_3 \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $y > 0$,

$$q_3 = \frac{1}{1771561c_{11}^6y^{57}}\Big(223608d_8c_{11}^3p_8p_{10}^2y^{32} - 169884c_9c_{11}^2p_9^2p_{10}^2y^{22} - 12558c_9p_{10}^6 + \dots\Big) + d_3y^3.$$

De e_{11} segue que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_2 = \frac{1}{19487171c_{11}^7y^{68}}\Big(3425994c_9c_{11}^4p_7p_9p_{10}y^{44} + 4919376d_8c_{11}^4p_8p_9p_{10}y^{43} + \dots\Big) + d_2y^2.$$

De e_{10} obtemos que

$$\frac{6953544c_9(a^2+b^2)p_{10x}p_{10}^7}{19487171c_{11}^7} \in y^{10}\mathcal{H}_{69}.$$

Assim, $p_{10} = y^2p_{108}$. Por e_{10}

$$\frac{6953544c_9(a^2+b^2)p_{108x}p_{108}^7}{19487171c_{11}^7} \in y^7\mathcal{H}_{56}$$

e, então, $p_{108} = yp_{107}$. De e_{10} temos que

$$\frac{6953544c_9(a^2+b^2)p_{107x}p_{107}^7}{19487171c_{11}^7} \in y^5\mathcal{H}_{50}.$$

Logo, $p_{107} = yp_{106}$. Por e_{10},

$$\frac{6953544c_9(a^2+b^2)p_{106x}p_{106}^7}{19487171c_{11}^7} \in y^3\mathcal{H}_{44}$$

e, consequentemente, $p_{106} = yp_{105}$. De e_{10} segue que

$$\frac{6953544c_9(a^2+b^2)p_{105x}p_{105}^7}{19487171c_{11}^7} \in y\mathcal{H}_{38}.$$

Assim, $p_{105} = yp_{104}$. Novamente de e_{10} obtemos que

$$\frac{936c_9(a^2+b^2)p_{9x}p_9^3}{1331c_{11}^3} \in y\mathcal{H}_{34}$$

e, daí, $p_9 = yp_{98}$. Denotemos $s = p_{98}(1,0)$ e $w = p_{104}(1,0)$. Dessa forma,

$$835912c_{11}s^2w^5 + 1256464c_{11}^3s^4w + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{234c_9(a^2+b^2)}y^{26}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$2981440c_{11}^3s^3w^2 - 3116960c_{11}^2s^2w^4 + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{234c_9(a^2+b^2)}y^{21}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem $\mathrm{tdeg}(s,w)$ obtemos que $s = w = 0$. Desse modo, $p_{98} = yp_{97}$ e $p_{104} = yp_{103}$. Por e_{10},

$$\frac{936c_9(a^2+b^2)p_{97x}p_{97}^3}{1331c_{11}^3} \in y\mathcal{H}_{26}.$$

Dessa maneira, $p_{97} = yp_{96}$. Denotemos $s = p_{96}(1,0)$ e $w = p_{103}(1,0)$. Assim,

$$942348c_{11}^3s^4w - 1499190c_{11}^2s^3w^3 + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{234c_9(a^2+b^2)}y^{17}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$807576c_{11}sw^6 + 2236080c_{11}^3s^3w^2 + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{234c_9(a^2+b^2)}y^{13}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Dessa maneira, usando a ordem $\mathrm{tdeg}(s,w)$, temos que $s = w = 0$. Assim, $p_{96} = yp_{95}$ e $p_{103} = yp_{102}$. Por e_9,

$$\frac{117c_9(a^2+b^2)p_{8x}p_8^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{22}.$$

Logo, $p_8 = yp_{87}$. De e_{10} temos que

$$\frac{936c_9(a^2+b^2)p_{95x}p_{95}^3}{1331c_{11}^3} \in y\mathcal{H}_{18}$$

e, consequentemente, $p_{95} = yp_{94}$. De e_9 segue que

$$\frac{117c_9(a^2+b^2)p_{87x}p_{87}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{19}.$$

Desse modo, $p_{87} = yp_{86}$. Denotemos $s = p_{86}(1,0)$, $w = p_{94}(1,0)$ e $u = p_{102}(1,0)$. Logo,

$$1597200c_{11}^3s^2wu^2 - 423500c_{11}^2s^2u^4 + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{234c_9(a^2+b^2)}y^{11}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$5015208c_{11}^3sw^2u^2 - 103132u^7w + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{117c_9(a^2+b^2)}y^8e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$5962880c_{11}^3swu^3 - 5622144c_{11}^4sw^2u + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{117c_9(a^2+b^2)}y^5e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, usando a ordem $\mathrm{tdeg}(s,w,u)$, segue que $s = w = u = 0$. Daí,

$$p_{86} = yp_{85},\ p_{94} = yp_{93} \text{ e } p_{102} = yp_{101}.$$

Por e_{10},

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{7x}p_7}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{12}.$$

Então, $p_7 = yp_{76}$. De e_9 segue que

$$\frac{117c_9(a^2+b^2)p_{85x}p_{85}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{13}$$

e, assim, $p_{85} = yp_{84}$. Denotemos $s = p_{76}(1,0)$ e $w = p_{93}(1,0)$. Dessa maneira,

$$sw(990c_{11}s - 195w^2) = \frac{1331c_{11}^3}{9c_9(a^2+b^2)}y^6e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$1716c_{11}sw^2 - 1452c_{11}^2s^2 - 312w^4 = \frac{1331c_{11}^3}{9c_9(a^2+b^2)}ye_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Logo, $s = w = 0$ e, então, $p_{76} = yp_{75}$ e $p_{93} = yp_{92}$. Por e_9,

$$\frac{117c_9(a^2+b^2)p_{84x}p_{84}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{10}.$$

Logo, $p_{84} = yp_{83}$. De e_{10} temos que

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{75x}p_{75}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$

e, consequentemente, $p_{75} = yp_{74}$. Por e_8,

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{6x}p_6}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{10}.$$

Dessa maneira, $p_6 = yp_{65}$. Denotemos $s = p_{65}(1,0)$, $w = p_{74}(1,0)$, $u = p_{83}(1,0)$, $v = p_{92}(1,0)$ e $m = p_{101}(1,0)$. Logo,

$$4429568c_{11}^3sv^3m + 10307264c_{11}^5swu + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{9c_9(a^2+b^2)}y^5e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$13206182c_{11}^5w^2u - 468542wm^7 + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{9c_9(a^2+b^2)}y^3e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$11073920c_{11}^3wum^3 - 30453280c_{11}^4uwvm + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{9c_9(a^2+b^2)}ye_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$598598c_{11}um^6 - 13703976c_{11}^4uv^3 + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{9c_9(a^2+b^2)}y^{-1}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$9689680c_{11}^3wm^4 - 36543936c_{11}^4uv^4m + \ldots = \frac{19487171c_{11}^7}{9c_9(a^2+b^2)}y^{-3}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem plex(s,w,u,v,m), segue que $m = v = u = w = s = 0$. Assim,

$$p_{65} = yp_{64},\ p_{74} = yp_{73},\ p_{83} = yp_{82},\ p_{92} = yp_{91} \text{ e } p_{101} = v_{10}y.$$

De e_6 obtemos que

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{5x}p_5}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$

e, então, $p_5 = yp_{54}$. Por e_8,

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{64x}p_{64}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_6.$$

Dessa forma, $p_{64} = yp_{63}$. De e_{10} segue que

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{73x}p_{73}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_4$$

e, assim, $p_{73} = yp_{72}$. Denotemos $s = p_{54}(1,0)$ e $w = p_{82}(1,0)$. Assim,

$$s(8w^2 - 88c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{9c_9(a^2+b^2)}ye_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$26w^3 - 132c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{9c_9(a^2+b^2)}y^{-4}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Então, $p_{54} = yp_{53}$ e $p_{82} = yp_{81}$. Por e_8,

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{63x}p_{63}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_4.$$

Desse modo, $p_{63} = yp_{62}$. De e_4 segue que

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{4x}p_4}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_6$$

e, daí, $p_4 = yp_{43}$. Denotemos $s = p_{53}(1,0)$, $w = p_{72}(1,0)$ e $u = p_{91}(1,0)$. Assim,

$$66c_{11}swu - 13su^3 - 363c_{11}^2s^2 = \frac{1331c_{11}^3}{18c_9(a^2+b^2)}y^{-1}e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$330c_{11}w^2u - 55c_{11}su^2 - 1210c_{11}^2sw - 65wu^3 = \frac{1331c_{11}^3}{9c_9(a^2+b^2)}y^{-4}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$572c_{11}wu^2 - 968c_{11}^2su - 484c_{11}^2w^2 - 104u^4 = \frac{1331c_{11}^3}{9c_9(a^2+b^2)}y^{-7}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Logo, usando a ordem tdeg(s, w, u), obtemos que $s = w = u = 0$. Daí,

$$p_{53} = yp_{52},\ p_{72} = yp_{71} \text{ e } p_{91} = v_9y.$$

Por e_4,

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{43x}p_{43}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_4.$$

Logo, $p_{43} = yp_{42}$. De e_8 temos que

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{62x}p_{62}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_2$$

e, então, $p_{62} = yp_{61}$. De e_{10} segue que

$$9c_9(a^2+b^2)p_{3x} \in y\mathcal{H}_1.$$

Dessa forma, $p_3 = yp_{32}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$ e $w = p_{81}(1,0)$. Então,

$$s(4w^2 - 44c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{9c_9(a^2+b^2)}y^{-3}e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

e

$$13w^3 - 66c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{9c_9(a^2+b^2)}y^{-7}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, $p_{52} = yp_{51}$ e $p_{81} = v_8y$. De e_4 obtemos que

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{42x}p_{42}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_2$$

e, consequentemente, $p_{42} = yp_{41}$. Denotemos $s = p_{32}(1,0)$ e $w = p_{71}(1,0)$. Dessa maneira,

$$9sw = \frac{11c_{11}}{9c_9(a^2+b^2)}y^{-4}e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$22c_{11}s - 2w^2 = \frac{11c_{11}}{9c_9(a^2+b^2)}y^{-9}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Então, $p_{32} = yp_{31}$ e $p_{71} = v_7y$. Por e_9,

$$9c_9(a^2+b^2)p_{2x} \in y\mathcal{H}_0$$

e, daí, $p_2 = yp_{21}$. De e_8 temos que

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{61x}p_{61}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_0.$$

Desse modo, $p_{61} = v_6 y$. De e_6 segue que

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{51x}p_{51}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_0$$

e, então, $p_{51} = v_5 y$. Por e_4,

$$\frac{18c_9(a^2+b^2)p_{41x}p_{41}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_0.$$

Assim, $p_{41} = v_4 y$. De e_{10} obtemos que

$$p_{31} = -\frac{11c_{11}(a+\lambda b)}{9c_9(a^2+b^2)}x + v_3 y.$$

Por e_9,

$$p_{21} = -\frac{(18v_{10}c_9 - 88d_8c_{11})(a+\lambda b)}{81c_9^2(a^2+b^2)}x + v_2 y.$$

De e_2 segue que

$$\frac{22c_{11}(a+\lambda b)^2}{9c_9(a^2+b^2)}x \in y\mathcal{H}_0$$

e, consequentemente, $a + \lambda b = 0$. Desse modo,

$$9bc_9y^8 = e_8 = 0.$$

Absurdo. Logo, $q_9 = \lambda p_9$.

Suponhamos, por absurdo, que $q_8 \neq \lambda p_8$. Tomemos $l = 11$ e $s = 9$ em (4.8), (4.9) e (4.10). Por e_{16}, existe $d_7 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_7 = \frac{8c_8p_{10} + 11\lambda c_{11}p_7y^3}{11c_{11}y^3} + d_7y^7.$$

De e_{15} segue que existe $d_6 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_6 = \frac{121\lambda c_{11}^2 p_6 y^{14} + 88c_8c_{11}p_9y^{11} + 77d_7c_{11}p_{10}y^{10} - 12c_8p_{10}^2}{121c_{11}^2y^{14}} + d_6y^6.$$

Como

$$\int p_{9x}p_{10}\,dx = p_9p_{10} - \int p_{10x}p_9\,dx,$$

temos de e_{14} que existe $d_5 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_5 = \frac{1}{1331c_{11}^3y^{25}}\Big(1331\lambda c_{11}^3p_5y^{25} - 264c_8c_{11}p_9p_{10}y^{11} + 968c_8c_{11}^2p_8y^{22} + 847d_7c_{11}^2p_9y^{21}$$
$$+ 726d_6c_{11}^2p_{10}y^{20} + 56c_8p_{10}^3 - 154d_7c_{11}p_{10}^2y^{10}\Big) + d_5y^5.$$

Usando que

$$\int p_{8x}p_{10}\ dx = p_8p_{10} - \int p_{10x}p_8\ dx,$$

$$\int p_{9x}p_{10}\ dx = p_9p_{10} - \int p_{10x}p_9\ dx$$

e

$$\int p_9p_{10x}p_{10}\ dx = \frac{p_9p_{10}^2}{2} - \frac{1}{2}\int p_{9x}p_{10}^2\ dx,$$

por e_{13} obtemos que existe $d_4 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} q_4 = \frac{1}{14641c_{11}^4y^{36}}\Big(&1848c_8c_{11}p_9p_{10}^2y^{11} - 350c_8p_{10}^4 + 9317d_7c_{11}^3p_8y^{32} + 14641\lambda c_{11}^4p_4y^{36} \\ &+ 10648c_8c_{11}^3p_7y^{33} + 7986d_6c_{11}^3p_9y^{31} - 3388d_7c_{11}^2p_9p_{10}y^{21} + 6655d_5c_{11}^3p_{10}y^{30} \\ &+ 770d_7c_{11}p_{10}^3y^{10} - 1815d_6c_{11}^2p_{10}^2y^{20} - 2904c_8c_{11}^2p_8p_{10}y^{22} - 1452c_8c_{11}^2p_9^2y^{22}\Big) + d_4y^4. \end{aligned}$$

Como feito acima, no que segue, combinamos a regra de integração por partes com a regra de Leibniz várias vezes para determinarmos q_3 e q_2. Por e_{12}, existe $d_3 \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $y > 0$,

$$q_3 = \frac{1}{161051c_{11}^5y^{47}}\Big(25410d_7c_{11}^2p_9p_{10}^2y^{21} - 31944c_8c_{11}^3p_7p_{10}y^{33} + 2520c_8p_{10}^5 + \dots\Big) + d_3y^3.$$

De e_{11} segue que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_2 = \frac{1}{1771561c_{11}^6y^{58}}\Big(279510d_7c_{11}^3p_8p_{10}^2y^{32} - 254100c_8c_{11}^2p_9^2p_{10}^2y^{22} - 19740c_8p_{10}^6 + \dots\Big) + d_2y^2.$$

Por e_{10},

$$\frac{1144920c_8(a^2+b^2)p_{10x}p_{10}^6}{1771561c_{11}^6} \in y^{10}\mathcal{H}_{59}.$$

Logo, $p_{10} = y^2p_{108}$. De e_{10} segue que

$$\frac{1144920c_8(a^2+b^2)p_{108x}p_{108}^6}{1771561c_{11}^6} \in y^{7}\mathcal{H}_{48}$$

e, assim, $p_{108} = yp_{107}$. De e_{10} temos que

$$\frac{1144920c_8(a^2+b^2)p_{107x}p_{107}^6}{1771561c_{11}^6} \in y^{5}\mathcal{H}_{43}.$$

Dessa forma, $p_{107} = yp_{106}$. Por e_{10},

$$\frac{1144920c_8(a^2+b^2)p_{106x}p_{106}^6}{1771561c_{11}^6} \in y^{3}\mathcal{H}_{38}$$

e, daí, $p_{106} = yp_{105}$. De e_{10} obtemos que

$$\frac{1144920c_8(a^2+b^2)p_{105x}p_{105}^6}{1771561c_{11}^6} \in y\mathcal{H}_{33}.$$

Então, $p_{105} = yp_{104}$. Por e_9,

$$\frac{1400c_8(a^2+b^2)p_{9x}p_9^3}{1331c_{11}^3} \in y\mathcal{H}_{34}$$

e, assim, $p_9 = yp_{98}$. Denotemos $s = p_{98}(1,0)$ e $w = p_{104}(1,0)$. Dessa maneira,

$$181500c_{11}^2s^3w^2 - 99000c_{11}s^2w^4 + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{280c_8(a^2+b^2)}y^{22}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$16356w^7 - 130284c_{11}sw^5 + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{280c_8(a^2+b^2)}y^{17}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem $\text{tdeg}(s,w)$, obtemos que $s = w = 0$. Desse modo, $p_{98} = yp_{97}$ e $p_{104} = yp_{103}$. Por e_9,

$$\frac{1400c_8(a^2+b^2)p_{97x}p_{97}^3}{1331c_{11}^3} \in y\mathcal{H}_{26}.$$

Dessa maneira, $p_{97} = yp_{96}$. Denotemos $s = p_{96}(1,0)$ e $w = p_{103}(1,0)$. Assim,

$$10575sw^6 + 136125c_{11}^2s^3w^2 + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{280c_8(a^2+b^2)}y^{14}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$12267w^7 - 97713c_{11}sw^5 + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{280c_8(a^2+b^2)}y^{10}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, usando a ordem $\text{tdeg}(s,w)$, segue que $s = w = 0$. Então, $p_{96} = yp_{95}$ e $p_{103} = yp_{102}$. Por e_8,

$$\frac{168c_8(a^2+b^2)p_{8x}p_8^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{22}.$$

Desse modo, $p_8 = yp_{87}$. De e_9 segue que

$$\frac{1400c_8(a^2+b^2)p_{95x}p_{95}^3}{1331c_{11}^3} \in y\mathcal{H}_{18}$$

e, daí, $p_{95} = yp_{94}$. De e_8 temos que

$$\frac{168c_8(a^2+b^2)p_{87x}p_{87}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{19}.$$

Assim, $p_{87} = yp_{86}$. Denotemos $s = p_{86}(1,0)$, $w = p_{94}(1,0)$ e $u = p_{102}(1,0)$. Logo,

$$29610su^6 - 207900c_{11}swu^4 + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{56c_8(a^2+b^2)}y^9e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$35250wu^6 + 702768c_{11}^4s^2w + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{56c_8(a^2+b^2)}y^6e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$381150c_{11}^2su^4 - 1397550c_{11}^3swu^2 + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{56c_8(a^2+b^2)}y^3e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem tdeg(s, w, u), temos que $s = w = u = 0$. Dessa forma,

$$p_{86} = yp_{85},\ p_{94} = yp_{93} \text{ e } p_{102} = yp_{101}.$$

Por e_9,

$$\frac{24c_8(a^2+b^2)p_{7x}p_7}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{12}$$

e, então, $p_7 = yp_{76}$. De e_8 temos que

$$\frac{168c_8(a^2+b^2)p_{85x}p_{85}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{13}.$$

Logo, $p_{85} = yp_{84}$. Denotemos $s = p_{76}(1,0)$ e $w = p_{93}(1,0)$. Dessa maneira,

$$51sw(33c_{11}s - 7w^2) = \frac{1331c_{11}^3}{8c_8(a^2+b^2)}y^7e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$2772c_{11}sw^2 - 525w^4 - 2178c_{11}^2s^2 = \frac{1331c_{11}^3}{8c_8(a^2+b^2)}y^2e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Logo, $s = w = 0$ e, então, $p_{76} = yp_{75}$ e $p_{93} = yp_{92}$. Por e_8,

$$\frac{168c_8(a^2+b^2)p_{84x}p_{84}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{10}.$$

Deste modo, $p_{84} = yp_{83}$. De e_9 obtemos que

$$\frac{24c_8(a^2+b^2)p_{75x}p_{75}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$

e, daí, $p_{75} = yp_{74}$. De e_7 segue que

$$\frac{24c_8(a^2+b^2)p_{6x}p_6}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{10}.$$

Consequentemente, $p_6 = yp_{65}$. Denotemos $s = p_{65}(1,0)$, $w = p_{74}(1,0)$, $u = p_{83}(1,0)$, $v = p_{92}(1,0)$ e $m = p_{101}(1,0)$. Logo,

$$1141998c_{11}^4s^2m + 570999c_{11}^4su^2 + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{8c_8(a^2+b^2)}y^4e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$317625c_{11}^2svm^3 - 1900668c_{11}^3wuvm + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{8c_8(a^2+b^2)}y^2e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$103635um^6 - 79695c_{11}wm^5 + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{8c_8(a^2+b^2)}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$1715175c_{11}^2uvm^3 + 1888689c_{11}^4svm + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{8c_8(a^2+b^2)}y^{-2}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

e

$$143115m^7 + 2152227c_{11}^4sm^2 + \ldots = \frac{1771561c_{11}^6}{8c_8(a^2+b^2)}y^{-4}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Dessa maneira, usando a ordem plex(s,w,u,v,m), obtemos que $m = v = u = w = s = 0$. Daí,

$$p_{65} = yp_{64},\ p_{74} = yp_{73},\ p_{83} = yp_{82},\ p_{92} = yp_{91} \text{ e } p_{101} = v_{10}y.$$

De e_5 temos que

$$\frac{24c_8(a^2+b^2)p_{5x}p_5}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$

e, então, $p_5 = yp_{54}$. Por e_7,

$$\frac{24c_8(a^2+b^2)p_{64x}p_{64}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_6.$$

Logo, $p_{64} = yp_{63}$. De e_9 segue que

$$\frac{24c_8(a^2+b^2)p_{73x}p_{73}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_4.$$

Então, $p_{73} = yp_{72}$. Denotemos $s = p_{54}(1,0)$ e $w = p_{82}(1,0)$. Assim,

$$s(6w^2 - 44c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{24c_8(a^2+b^2)}y^2e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

e

$$14w^3 - 66c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{24c_8(a^2+b^2)}y^{-3}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Dessa maneira, $p_{54} = yp_{53}$ e $p_{82} = yp_{81}$. Por e_7,

$$\frac{24c_8(a^2+b^2)p_{63x}p_{63}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_4$$

e, então, $p_{63} = yp_{62}$. De e_{10} obtemos que

$$8c_8(a^2+b^2)p_{4_x} \in y\mathcal{H}_2$$

e, assim, $p_4 = yp_{43}$. Denotemos $s = p_{53}(1,0)$, $w = p_{72}(1,0)$ e $u = p_{91}(1,0)$. Assim,

$$297c_{11}swu - 1089c_{11}^2s^2 - 63su^3 = \frac{1331c_{11}^3}{8c_8(a^2+b^2)}e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$561c_{11}w^2u - 1815c_{11}^2sw - 119wu^3 - 33c_{11}su^2 = \frac{1331c_{11}^3}{8c_8(a^2+b^2)}y^{-3}e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

e

$$924c_{11}wu^2 - 1452c_{11}^2su - 175u^4 - 726c_{11}^2w^2 = \frac{1331c_{11}^3}{8c_8(a^2+b^2)}y^{-6}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem tdeg(s, w, u), temos que $s = w = u = 0$. Logo,

$$p_{53} = yp_{52},\ p_{72} = yp_{71} \text{ e } p_{91} = v_9y.$$

Por e_{10},

$$8c_8(a^2+b^2)p_{43x} \in y\mathcal{H}_1$$

e, daí, $p_{43} = yp_{42}$. De e_7 segue que

$$\frac{24c_8(a^2+b^2)p_{62x}p_{62}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_2.$$

Dessa forma, $p_{62} = yp_{61}$. De e_9 temos que

$$8c_8(a^2+b^2)p_{3x} \in y\mathcal{H}_1.$$

Então, $p_3 = yp_{32}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$ e $w = p_{81}(1,0)$. Logo,

$$s(3w^2 - 22c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{24c_8(a^2+b^2)}y^{-2}e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

e

$$7w^3 - 33c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{24c_8(a^2+b^2)}y^{-6}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, $p_{52} = yp_{51}$ e $p_{81} = v_8y$. De e_{10} temos que

$$8c_8(a^2+b^2)p_{42x} \in y\mathcal{H}_0$$

e, consequentemente, $p_{42} = yp_{41}$. Denotemos $s = p_{32}(1,0)$ e $w = p_{71}(1,0)$. Dessa maneira,

$$5sw = \frac{11c_{11}}{8c_8(a^2+b^2)}y^{-3}e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$22c_{11}s - 3w^2 = \frac{11c_{11}}{8c_8(a^2+b^2)}y^{-8}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Então, $p_{32} = yp_{31}$ e $p_{71} = v_7y$. Por e_8,

$$8c_8(a^2+b^2)p_{2x} \in y\mathcal{H}_0.$$

Consequentemente, $p_2 = yp_{21}$. De e_7 segue que

$$\frac{24c_8(a^2+b^2)p_{61x}p_{61}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_0.$$

Desse modo, $p_{61} = v_6 y$. De e_5 obtemos que

$$\frac{24c_8(a^2+b^2)p_{51x}p_{51}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_0$$

e, assim, $p_{51} = v_5 y$. De e_{10} obtemos que

$$p_{41} = -\frac{11c_{11}(a+\lambda b)}{8c_8(a^2+b^2)}x + v_4 y.$$

Por e_9,

$$p_{31} = -\frac{(24v_{10}c_8 - 77d_7c_{11})(a+\lambda b)}{64c_8^2(a^2+b^2)}x + v_3 y.$$

De e_3 temos que

$$\frac{33c_{11}(a+\lambda b)^2}{8c_8(a^2+b^2)}x \in y\mathcal{H}_0$$

e, daí, $a + \lambda b = 0$. Por e_8 temos que $p_{21} = v_2 y$. Logo,

$$8bc_8 y^7 = e_7 = 0.$$

Contradição. Então, $q_8 = \lambda p_8$.

Suponhamos, por contradição, $q_7 \neq \lambda p_7$. Assumamos $l = 11$ e $s = 8$ em (4.8), (4.9) e (4.10). De e_{15} temos que existe $d_6 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_6 = \frac{7c_7p_{10} + 11\lambda c_{11}p_6y^4}{11c_{11}y^4} + d_6y^6.$$

De e_{14} segue que existe $d_5 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_5 = \frac{121\lambda c_{11}^2p_5y^{15} + 77c_7c_{11}p_9y^{11} + 66d_6c_{11}p_{10}y^{10} - 14c_7p_{10}^2}{121c_{11}^2y^{15}} + d_5y^5.$$

Usando que

$$\int p_{9x}p_{10}\,dx = p_9p_{10} - \int p_{10x}p_9\,dx,$$

obtemos de e_{13} que existe $d_4 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} q_4 = \frac{1}{1331c_{11}^3y^{26}}\Big(&1331\lambda c_{11}^3p_4y^{26} - 308c_7c_{11}p_9p_{10}y^{11} + 847c_7c_{11}^2p_8y^{22} + 726d_6c_{11}^2p_9y^{21} \\ &+ 605d_5c_{11}^2p_{10}y^{20} + 70c_7p_{10}^3 - 165d_6c_{11}p_{10}^2y^{10}\Big) + d_4y^4. \end{aligned}$$

Como

$$\int p_{8x}p_{10}\,dx = p_8p_{10} - \int p_{10x}p_8\,dx,$$

$$\int p_{9x}p_{10}\,dx = p_9p_{10} - \int p_{10x}p_9\,dx$$

e

$$\int p_9 p_{10x} p_{10}\ dx = \frac{p_9 p_{10}^2}{2} - \frac{1}{2}\int p_{9x} p_{10}^2\ dx,$$

por e_{12} temos que existe $d_3 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} q_3 = \frac{1}{14641 c_{11}^4 y^{37}} \Big(& 2310 c_7 c_{11} p_9 p_{10}^2 y^{11} - 455 c_7 p_{10}^4 + 7986 d_6 c_{11}^3 p_8 y^{32} + 14641 \lambda c_{11}^4 p_3 y^{37} \\ & + 9317 c_7 c_{11}^3 p_7 y^{33} + 5324 d_4 c_{11}^3 p_{10} y^{30} - 3630 d_6 c_{11}^2 p_9 p_{10} y^{21} + 6655 d_5 c_{11}^3 p_9 y^{31} \\ & + 880 d_6 c_{11} p_{10}^3 y^{10} - 1815 d_5 c_{11}^2 p_{10}^2 y^{20} - 3388 c_7 c_{11}^2 p_8 p_{10} y^{22} - 1694 c_7 c_{11}^2 p_9^2 y^{22} \Big) + d_3 y^3. \end{aligned}$$

Como acima, combinando a regra de integração por partes com a regra de Leibniz várias vezes, de e_{11} segue que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_2 = \frac{1}{161051 c_{11}^5 y^{48}} \Big(29040 d_6 c_{11}^2 p_9 p_{10}^2 y^{21} - 39930 d_6 c_{11}^3 p_8 p_{10} y^{32} + \dots \Big) + d_2 y^2.$$

De e_{10} temos que

$$\frac{161616 c_7 (a^2+b^2) p_{10x} p_{10}^5}{161051 c_{11}^5} \in y^{10}\mathcal{H}_{49}.$$

Daí, $p_{10} = y^2 p_{108}$. Por e_{10},

$$\frac{161616 c_7 (a^2+b^2) p_{108x} p_{108}^5}{161051 c_{11}^5} \in y^{7}\mathcal{H}_{40}$$

e, então, $p_{108} = y p_{107}$. De e_{10} segue que

$$\frac{161616 c_7 (a^2+b^2) p_{107x} p_{107}^5}{161051 c_{11}^5} \in y^{5}\mathcal{H}_{36}.$$

Dessa maneira, $p_{107} = y p_{106}$. Por e_{10},

$$\frac{161616 c_7 (a^2+b^2) p_{106x} p_{106}^5}{161051 c_{11}^5} \in y^{3}\mathcal{H}_{32}$$

e, consequentemente, $p_{106} = y p_{105}$. De e_{10} obtemos que

$$\frac{161616 c_7 (a^2+b^2) p_{105x} p_{105}^5}{161051 c_{11}^5} \in y\mathcal{H}_{28}.$$

Então, $p_{105} = y p_{104}$. Novamente por e_{10} temos que

$$\frac{210 c_7 (a^2+b^2) p_{9x} p_9^2}{121 c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{25}$$

e, assim, $p_9 = y p_{98}$. Denotemos $s = p_{98}(1,0)$ e $w = p_{104}(1,0)$. Dessa maneira,

$$469040 c_{11} s^2 w^3 - 78884 s w^5 - 595320 c_{11}^2 s^3 w = \frac{161051 c_{11}^5}{7 c_7 (a^2+b^2)} y^{18} e_9 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

e

$$634920c_{11}sw^4+319440c_{11}^3s^3-1132560c_{11}^2s^2w^2-92352w^6=\frac{161051c_{11}^5}{7c_7(a^2+b^2)}y^{13}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)}=0.$$

Desse modo, usando a ordem tdeg(s,w) temos que $s=w=0$. Assim, $p_{98}=yp_{97}$ e $p_{104}=yp_{103}$. Por e_{10},

$$\frac{210c_7(a^2+b^2)p_{97x}p_{97}^2}{121c_{11}^2}\in y\mathcal{H}_{19}.$$

Dessa maneira, $p_{97}=yp_{96}$. Denotemos $s=p_{96}(1,0)$ e $w=p_{103}(1,0)$. Daí,

$$351780c_{11}s^2w^3-446490c_{11}^2s^3w-59163sw^5=\frac{161051c_{11}^5}{7c_7(a^2+b^2)}y^{11}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)}=0$$

e

$$239580c_{11}^3s^3-849420c_{11}^2s^2w^2+476190c_{11}sw^4-69264w^6=\frac{161051c_{11}^5}{7c_7(a^2+b^2)}y^7e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)}=0.$$

Usando a ordem tdeg(s,w), obtemos que $s=w=0$. Logo, $p_{96}=yp_{95}$ e $p_{103}=yp_{102}$. Por e_{10},

$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{8x}p_8}{11c_{11}}\in y\mathcal{H}_{14}.$$

Desse modo, $p_8=yp_{87}$. De e_{10} temos que

$$\frac{210c_7(a^2+b^2)p_{95x}p_{95}^2}{121c_{11}^2}\in y\mathcal{H}_{13}$$

e, daí, $p_{95}=yp_{94}$. Novamente por e_{10} obtemos que

$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{87x}p_{87}}{11c_{11}}\in y\mathcal{H}_{12}.$$

Assim, $p_{87}=yp_{86}$. Denotemos $s=p_{86}(1,0)$, $w=p_{94}(1,0)$ e $u=p_{102}(1,0)$. Logo,

$$97240c_{11}swu^3+181016c_{11}^3s^2w+\ldots=\frac{161051c_{11}^5}{14c_7(a^2+b^2)}y^7e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)}=0,$$

$$234520c_{11}w^2u^3+559020c_{11}^3sw^2+\ldots=\frac{161051c_{11}^5}{7c_7(a^2+b^2)}y^4e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)}=0$$

e

$$159720c_{11}^3w^3+958320c_{11}^3swu+\ldots=\frac{161051c_{11}^5}{7c_7(a^2+b^2)}ye_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)}=0.$$

Usando a ordem tdeg(s,w,u) segue que $s=w=u=0$. Dessa forma,

$$p_{86}=yp_{85},\ p_{94}=yp_{93}\text{ e }p_{102}=yp_{101}.$$

De e_8 temos que
$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{7x}p_7}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{12}.$$
Logo, $p_7 = yp_{76}$. Por e_{10},
$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{85x}p_{85}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$
e, então, $p_{85} = yp_{84}$. Denotemos $s = p_{76}(1,0)$ e $w = p_{93}(1,0)$. Dessa maneira,
$$s(24w^2 - 132c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{14c_7(a^2+b^2)}y^3e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$
e
$$45w^3 - 198c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{14c_7(a^2+b^2)}y^{-2}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$
Então, $p_{76} = yp_{75}$ e $p_{93} = yp_{92}$. Por e_{10},
$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{84x}p_{84}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_6.$$
Desse modo, $p_{84} = yp_{83}$. De e_8 obtemos que
$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{75x}p_{75}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$
e, daí, $p_{75} = yp_{74}$. De e_6 segue que
$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{6x}p_6}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{10}.$$
Como consequência, $p_6 = yp_{65}$. Denotemos $s = p_{65}(1,0)$, $w = p_{74}(1,0)$, $u = p_{83}(1,0)$, $v = p_{92}(1,0)$ e $m = p_{101}(1,0)$. Logo,
$$106480c_{11}^3suv - 9620sm^5 + \ldots = \frac{161051c_{11}^5}{7c_7(a^2+b^2)}y^3e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$
$$23958c_{11}^3sv^2 - 12987wm^5 + \ldots = \frac{161051c_{11}^5}{7c_7(a^2+b^2)}ye_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$
$$97240c_{11}uvm^3 - 16354um^5 + \ldots = \frac{161051c_{11}^5}{7c_7(a^2+b^2)}y^{-1}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$
$$244904c_{11}^3wvm - 19721vm^5 + \ldots = \frac{161051c_{11}^5}{7c_7(a^2+b^2)}y^{-3}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$
e
$$239580c_{11}^3wm^2 + 158730c_{11}vm^4 + \ldots = \frac{161051c_{11}^5}{7c_7(a^2+b^2)}y^{-5}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Dessa maneira, usando a ordem plex(s, w, u, v, m) temos $m = v = u = w = s = 0$ e, consequentemente,

$$p_{65} = yp_{64},\ p_{74} = yp_{73},\ p_{83} = yp_{82},\ p_{92} = yp_{91} \text{ e } p_{101} = v_{10}y.$$

De e_6 temos que

$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{64x}p_{64}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_6$$

e, então, $p_{64} = yp_{63}$. Por e_{10},

$$7c_7(a^2+b^2)p_{5x} \in y\mathcal{H}_3.$$

Logo, $p_5 = yp_{54}$. De e_8 segue que

$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{73x}p_{73}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_4$$

Então, $p_{73} = yp_{72}$. Denotemos $s = p_{54}(1,0)$ e $w = p_{82}(1,0)$. Assim,

$$6sw = \frac{11c_{11}}{7c_7(a^2+b^2)}y^{-2}e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$44c_{11}s - 8w^2 = \frac{121c_{11}^2}{24c_8(a^2+b^2)}y^{-7}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Dessa maneira, $p_{54} = yp_{53}$ e $p_{82} = yp_{81}$. Por e_6,

$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{63x}p_{63}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_4$$

e, então, $p_{63} = yp_{62}$. De e_9 obtemos que

$$7c_7(a^2+b^2)p_{4x} \in y\mathcal{H}_2$$

e, assim, $p_4 = yp_{43}$. Denotemos $s = p_{53}(1,0)$, $w = p_{72}(1,0)$ e $u = p_{91}(1,0)$. Assim,

$$2su^2 - 11c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{7c_7(a^2+b^2)}y^{-2}e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$8wu^2 - 44c_{11}w^2 + 55c_{11}su = \frac{121c_{11}^2}{14c_7(a^2+b^2)}y^{-5}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

e

$$30u^3 - 132c_{11}wu + 363c_{11}^2s = \frac{121c_{11}^2}{7c_7(a^2+b^2)}y^{-8}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem tdeg(s, w, u), segue que $s = w = u = 0$. Desse modo,

$$p_{53} = yp_{52},\ p_{72} = yp_{71} \text{ e } p_{91} = v_9y.$$

Por e_9,

$$7c_7(a^2+b^2)p_{43x} \in y\mathcal{H}_1$$

e, daí, $p_{43} = yp_{42}$. De e_6 segue que

$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{62x}p_{62}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_2.$$

Dessa forma, $p_{62} = yp_{61}$. De e_8 temos que

$$7c_7(a^2+b^2)p_{3x} \in y\mathcal{H}_1.$$

Então, $p_3 = yp_{32}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$ e $w = p_{81}(1,0)$. Então,

$$sw = \frac{11c_{11}}{21c_7(a^2+b^2)}y^{-5}e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

e

$$22c_{11}s - 4w^2 = \frac{11c_{11}}{7c_7(a^2+b^2)}y^{-9}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, $p_{52} = yp_{51}$ e $p_{81} = v_8y$. De e_9 temos que

$$7c_7(a^2+b^2)p_{42x} \in y\mathcal{H}_0$$

e, consequentemente, $p_{42} = yp_{41}$. Denotemos $s = p_{32}(1,0)$ e $w = p_{71}(1,0)$. Dessa maneira,

$$3sw = \frac{11c_{11}}{7c_7(a^2+b^2)}y^{-2}e_4\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$22c_{11}s - 4w^2 = \frac{11c_{11}}{7c_7(a^2+b^2)}y^{-7}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Então, $p_{32} = yp_{31}$ e $p_{71} = v_7y$. Por e_7,

$$7c_7(a^2+b^2)p_{2x} \in y\mathcal{H}_0.$$

Daí, $p_2 = yp_{21}$. De e_6 segue que

$$\frac{28c_7(a^2+b^2)p_{61x}p_{61}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_0.$$

Desse modo, $p_{61} = v_6y$. De e_{10} obtemos que

$$p_{51} = -\frac{11c_{11}(a+\lambda b)}{7c_7(a^2+b^2)}x + v_5y.$$

Por e_9,

$$p_{41} = -\frac{(28v_{10}c_7 - 66d_6c_{11})(a+\lambda b)}{49c_7^2(a^2+b^2)}x + v_4y.$$

De e_4 temos que

$$\frac{44c_{11}(a+\lambda b)^2}{7c_7(a^2+b^2)}x \in y\mathcal{H}_0$$

e, daí, $a+\lambda b = 0$. Por e_8 segue que $p_{31} = v_3 y$. Em seguida, de e_7 obtemos que $p_{21} = v_2 y$. Logo,

$$7bc_7 y^6 = e_6 = 0.$$

Absurdo. Assim, $q_7 = \lambda p_7$.

Suponhamos, por absurdo, $q_6 \neq \lambda p_6$. Assumamos $l = 11$ e $s = 7$ em (4.8), (4.9) e (4.10). De e_{14} temos que existe $d_5 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_5 = \frac{6c_6 p_{10} + 11\lambda c_{11} p_5 y^5}{11 c_{11} y^5} + d_5 y^5.$$

De e_{13} segue que existe $d_4 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_4 = \frac{121\lambda c_{11}^2 p_4 y^{16} + 66c_6 c_{11} p_9 y^{11} + 55 d_5 c_{11} p_{10} y^{10} - 15 c_6 p_{10}^2}{121 c_{11}^2 y^{16}} + d_4 y^4.$$

Usando que

$$\int p_{9x} p_{10}\, dx = p_9 p_{10} - \int p_{10x} p_9\, dx,$$

obtemos de e_{12} que existe $d_3 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} q_3 = \frac{1}{1331 c_{11}^3 y^{27}} \Big(& 1331\lambda c_{11}^3 p_3 y^{27} - 330 c_6 c_{11} p_9 p_{10} y^{11} + 726 c_6 c_{11}^2 p_8 y^{22} + 605 d_5 c_{11}^2 p_9 y^{21} \\ & + 484 d_4 c_{11}^2 p_{10} y^{20} + 80 c_6 p_{10}^3 - 165 d_5 c_{11} p_{10}^2 y^{10} \Big) + d_3 y^3. \end{aligned}$$

Como

$$\int p_{8x} p_{10}\, dx = p_8 p_{10} - \int p_{10x} p_8\, dx,$$

$$\int p_{9x} p_{10}\, dx = p_9 p_{10} - \int p_{10x} p_9\, dx$$

e

$$\int p_9 p_{10x} p_{10}\, dx = \frac{p_9 p_{10}^2}{2} - \frac{1}{2} \int p_{9x} p_{10}^2\, dx,$$

por e_{11} temos que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} q_2 = \frac{1}{14641 c_{11}^4 y^{38}} \Big(& 2640 c_6 c_{11} p_9 p_{10}^2 y^{11} - 540 c_6 p_{10}^4 + 6655 d_5 c_{11}^3 p_8 y^{32} + 14641 \lambda c_{11}^4 p_2 y^{38} \\ & + 7986 c_6 c_{11}^3 p_7 y^{33} + 3993 d_3 c_{11}^3 p_{10} y^{30} - 3630 d_5 c_{11}^2 p_9 p_{10} y^{21} + 5324 d_4 c_{11}^3 p_9 y^{31} \\ & + 935 d_5 c_{11} p_{10}^3 y^{10} - 1694 d_4 c_{11}^2 p_{10}^2 y^{20} - 3630 c_6 c_{11}^2 p_8 p_{10} y^{22} - 1815 c_6 c_{11}^2 p_9^2 y^{22} \Big) + d_2 y^2. \end{aligned}$$

De e_{10} temos que

$$\frac{20520 c_6 (a^2+b^2) p_{10x} p_{10}^4}{14641 c_{11}^4} \in y^{10}\mathcal{H}_{39}.$$

Daí, $p_{10} = y^2 p_{108}$. Por e_{10},

$$\frac{20520 c_6 (a^2+b^2) p_{108x} p_{108}^4}{14641 c_{11}^4} \in y^7 \mathcal{H}_{32}$$

e, então, $p_{108} = y p_{107}$. De e_{10} segue que

$$\frac{20520 c_6 (a^2+b^2) p_{107x} p_{107}^4}{14641 c_{11}^4} \in y^5 \mathcal{H}_{29}.$$

Dessa maneira, $p_{107} = y p_{106}$. Por e_{10},

$$\frac{20520 c_6 (a^2+b^2) p_{106x} p_{106}^4}{14641 c_{11}^4} \in y^3 \mathcal{H}_{26}$$

e, consequentemente, $p_{106} = y p_{105}$. De e_{10} obtemos que

$$\frac{20520 c_6 (a^2+b^2) p_{105x} p_{105}^4}{14641 c_{11}^4} \in y \mathcal{H}_{23}.$$

Então, $p_{105} = y p_{104}$. De e_9 temos que

$$\frac{240 c_6 (a^2+b^2) p_{9x} p_9^2}{121 c_{11}^2} \in y \mathcal{H}_{25}$$

e, assim, $p_9 = y p_{98}$. Denotemos $s = p_{98}(1,0)$ e $w = p_{104}(1,0)$. Dessa maneira,

$$1936 c_{11}^2 s^3 - 2816 c_{11} s^2 w^2 + 576 s w^4 = \frac{14641 c_{11}^4}{120 c_6 (a^2+b^2)} y^{14} e_9 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$684 w^5 - 3960 c_{11} s w^3 + 4840 c_{11}^2 s^2 w = \frac{14641 c_{11}^4}{120 c_6 (a^2+b^2)} y^9 e_{10} \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem $\operatorname{tdeg}(s,w)$ obtemos que $s = w = 0$. Daí, $p_{98} = y p_{97}$ e $p_{104} = y p_{103}$. Por e_9,

$$\frac{240 c_6 (a^2+b^2) p_{97x} p_{97}^2}{121 c_{11}^2} \in y \mathcal{H}_{19}.$$

Dessa maneira, $p_{97} = y p_{96}$. Denotemos $s = p_{96}(1,0)$ e $w = p_{103}(1,0)$. Assim,

$$1452 c_{11}^2 s^3 - 2112 c_{11} s^2 w^2 + 432 s w^4 = \frac{14641 c_{11}^4}{120 c_6 (a^2+b^2)} y^8 e_9 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$3630 c_{11}^2 s^2 w - 2970 c_{11} s w^3 + 513 w^5 = \frac{14641 c_{11}^4}{120 c_6 (a^2+b^2)} y^4 e_{10} \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Então, usando a ordem $\operatorname{tdeg}(s,w)$, temos $s = w = 0$. Dessa forma, $p_{96} = y p_{95}$ e $p_{103} = y p_{102}$. Por e_9,

$$\frac{30 c_6 (a^2+b^2) p_{8x} p_8}{11 c_{11}} \in y \mathcal{H}_{14}.$$

Desse modo, $p_8 = yp_{87}$. De e_9 temos que

$$\frac{240c_6(a^2+b^2)p_{95x}p_{95}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{13}$$

e, daí, $p_{95} = yp_{94}$. Novamente por e_9 obtemos que

$$\frac{30c_6(a^2+b^2)p_{87x}p_{87}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{12}.$$

Assim, $p_{87} = yp_{86}$. Denotemos $s = p_{86}(1,0)$, $w = p_{94}(1,0)$ e $u = p_{102}(1,0)$. Logo,

$$936su^4 - 4576c_{11}swu^2 + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{30c_6(a^2+b^2)}y^5e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$1152wu^4 - 5632c_{11}w^2u^2 + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{30c_6(a^2+b^2)}y^2e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$9680c_{11}^2w^2u - 13310c_{11}^3sw + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{30c_6(a^2+b^2)}y^{-1}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem $\mathrm{tdeg}(s,w,u)$ segue que $s = w = u = 0$ e, daí,

$$p_{86} = yp_{85},\ p_{94} = yp_{93} \text{ e } p_{102} = yp_{101}.$$

De e_7 temos que

$$\frac{30c_6(a^2+b^2)p_{7x}p_7}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{12}.$$

Logo, $p_7 = yp_{76}$. Por e_9,

$$\frac{30c_6(a^2+b^2)p_{85x}p_{85}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$

e, então, $p_{85} = yp_{84}$. Denotemos $s = p_{76}(1,0)$ e $w = p_{93}(1,0)$. Dessa maneira,

$$s(15w^2 - 66c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{30c_6(a^2+b^2)}y^4e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$24w^3 - 99c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{30c_6(a^2+b^2)}y^{-1}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, $p_{76} = yp_{75}$ e $p_{93} = yp_{92}$. Por e_9,

$$\frac{30c_6(a^2+b^2)p_{84x}p_{84}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_6.$$

Desse modo, $p_{84} = yp_{83}$. De e_7 obtemos que

$$\frac{30c_6(a^2+b^2)p_{75x}p_{75}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$

e, daí, $p_{75} = yp_{74}$. De e_{10} segue que

$$6c_6(a^2+b^2)p_{6x} \in y\mathcal{H}_4.$$

Consequentemente, $p_6 = yp_{65}$. Denotemos $s = p_{65}(1,0)$, $w = p_{74}(1,0)$, $u = p_{83}(1,0)$, $v = p_{92}(1,0)$ e $m = p_{101}(1,0)$. Logo,

$$1260sm^4 - 6160c_{11}svm^2 + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{6c_6(a^2+b^2)}y^2e_6\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$12100c_{11}^2wum - 26620c_{11}^3w^2 + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{6c_6(a^2+b^2)}e_7\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$2340um^4 - 11440c_{11}uvm^2 + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{6c_6(a^2+b^2)}y^{-2}e_8\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$25289c_{11}^3sm - 14080c_{11}v^2m^2 + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{6c_6(a^2+b^2)}y^{-4}e_9\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$73205c_{11}^4s + 3420m^5 + \ldots = \frac{14641c_{11}^4}{6c_6(a^2+b^2)}y^{-6}e_{10}\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem plex(s,w,u,v,m) temos $m = v = u = w = s = 0$. Assim,

$$p_{65} = yp_{64},\ p_{74} = yp_{73},\ p_{83} = yp_{82},\ p_{92} = yp_{91} \text{ e } p_{101} = v_{10}y.$$

De e_{10} temos que

$$6c_6(a^2+b^2)p_{64x} \in y\mathcal{H}_2$$

e, então, $p_{64} = yp_{63}$. Por e_9,

$$6c_6(a^2+b^2)p_{5x} \in y\mathcal{H}_3.$$

Logo, $p_5 = yp_{54}$. De e_7 segue que

$$\frac{30c_6(a^2+b^2)p_{73x}p_{73}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_4.$$

Então, $p_{73} = yp_{72}$. Denotemos $s = p_{54}(1,0)$ e $w = p_{82}(1,0)$. Assim,

$$2sw = \frac{11c_{11}}{6c_6(a^2+b^2)}y^{-1}e_6\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$44c_{11}s - 10w^2 = \frac{11c_{11}}{6c_6(a^2+b^2)}y^{-6}e_9\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Dessa maneira, $p_{54} = yp_{53}$ e $p_{82} = yp_{81}$. Por e_{10},

$$6c_6(a^2+b^2)p_{63x} \in y\mathcal{H}_1$$

e, então, $p_{63} = yp_{62}$. De e_8 obtemos que

$$6c_6(a^2+b^2)p_{4x} \in y\mathcal{H}_2$$

e, assim, $p_4 = yp_{43}$. Denotemos $s = p_{53}(1,0)$, $w = p_{72}(1,0)$ e $u = p_{91}(1,0)$. Assim,

$$5su^2 - 22c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{12c_6(a^2+b^2)}y^{-1}e_5\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$77c_{11}su + 25wu^2 - 110c_{11}w^2 = \frac{121c_{11}^2}{6c_6(a^2+b^2)}y^{-4}e_7\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

e

$$363c_{11}^2s - 165c_{11}wu + 40u^3 = \frac{121c_{11}^2}{6c_6(a^2+b^2)}y^{-7}e_9\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Logo, usando a ordem $\text{tdeg}(s,w,u)$, segue que $s = w = u = 0$ e, então,

$$p_{53} = yp_{52},\ p_{72} = yp_{71} \text{ e } p_{91} = v_9y.$$

Por e_8,

$$6c_6(a^2+b^2)p_{43x} \in y\mathcal{H}_1$$

e, daí, $p_{43} = yp_{42}$. De e_{10} segue que

$$6c_6(a^2+b^2)p_{62x} \in y\mathcal{H}_0.$$

Dessa forma, $p_{62} = yp_{61}$. De e_7 temos que

$$6c_6(a^2+b^2)p_{3x} \in y\mathcal{H}_1.$$

Então, $p_3 = yp_{32}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$ e $w = p_{81}(1,0)$. Então,

$$sw = \frac{11c_{11}}{6c_6(a^2+b^2)}y^{-4}e_6\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

e

$$22c_{11}s - 5w^2 = \frac{11c_{11}}{6c_6(a^2+b^2)}y^{-8}e_9\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, $p_{52} = yp_{51}$ e $p_{81} = v_8y$. Por e_8,

$$6c_6(a^2+b^2)p_{42x} \in y\mathcal{H}_0$$

e, consequentemente, $p_{42} = yp_{41}$. Denotemos $s = p_{32}(1,0)$ e $w = p_{71}(1,0)$. Dessa maneira,

$$sw = \frac{11c_{11}}{6c_6(a^2+b^2)} y^{-1} e_3 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$22c_{11}s - 5w^2 = \frac{11c_{11}}{6c_6(a^2+b^2)} y^{-6} e_7 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Então, $p_{32} = yp_{31}$ e $p_{71} = v_7 y$. De e_{10} obtemos que

$$p_{61} = -\frac{11c_{11}(a+\lambda b)}{6c_6(a^2+b^2)} x + v_6 y.$$

De e_9 temos que

$$p_{51} = -\frac{(30v_{10}c_6 - 55d_5c_{11})(a+\lambda b)}{36c_6^2(a^2+b^2)} x + v_5 y.$$

Por e_6,

$$6c_6(a^2+b^2)p_{2x} \in y\mathcal{H}_0.$$

Então, $p_2 = yp_{21}$. De e_5 segue que

$$\frac{55c_{11}(a+\lambda b)^2}{6c_6(a^2+b^2)} x \in y\mathcal{H}_0$$

e, assim, $a + \lambda b = 0$. Por e_8, $p_{41} = v_4 y$. De e_7 obtemos que $p_{31} = v_3 y$. Em seguida, de e_6 temos que $p_{21} = v_2 y$. Desse modo,

$$6bc_6 y^5 = e_5 = 0.$$

Absurdo. Logo, $q_6 = \lambda p_6$.

Assumamos, por absurdo, $q_5 \neq \lambda p_5$. Consideremos $l = 11$ e $s = 6$ em (4.8), (4.9) e (4.10). De e_{13} temos que existe $d_4 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_4 = \frac{5c_5p_{10} + 11\lambda c_{11}p_4y^6}{11c_{11}y^6} + d_4y^4.$$

De e_{12} segue que existe $d_3 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_3 = \frac{121\lambda c_{11}^2 p_3 y^{17} + 55c_5c_{11}p_9y^{11} + 44d_4c_{11}p_{10}y^{10} - 15c_5p_{10}^2}{121c_{11}^2y^{17}} + d_3y^3.$$

Usando que

$$\int p_{9x}p_{10}\, dx = p_9p_{10} - \int p_{10x}p_9\, dx,$$

obtemos de e_{11} que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_2 = \frac{1}{1331c_{11}^3y^{28}}\Big(1331\lambda c_{11}^3p_2y^{28} - 330c_5c_{11}p_9p_{10}y^{11} + 605c_5c_{11}^2p_8y^{22} + 484d_4c_{11}^2p_9y^{21}$$
$$+ 363d_3c_{11}^2p_{10}y^{20} + 85c_5p_{10}^3 - 154d_4c_{11}p_{10}^2y^{10}\Big) + d_2y^2.$$

De e_{10} temos que

$$\frac{2380c_5(a^2+b^2)p_{10x}p_{10}^3}{1331c_{11}^3} \in y^{10}\mathcal{H}_{29}$$

e, daí, $p_{10} = y^3 p_{107}$. Por e_{10},

$$\frac{2380c_5(a^2+b^2)p_{107x}p_{107}^3}{1331c_{11}^3} \in y^5\mathcal{H}_{22}$$

e, então, $p_{107} = y^2 p_{105}$. De e_{10} segue que

$$\frac{2380c_5(a^2+b^2)p_{105x}p_{105}^3}{1331c_{11}^3} \in y\mathcal{H}_{18}.$$

Dessa maneira, $p_{105} = yp_{104}$. De e_{10} temos que

$$\frac{30c_5(a^2+b^2)p_{9x}p_9}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{16}$$

e, assim, $p_9 = yp_{98}$. Denotemos $s = p_{98}(1,0)$ e $w = p_{104}(1,0)$. Dessa maneira,

$$sw(6072c_{11}s - 1564w^2) = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)} y^{10} e_9\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$8976c_{11}sw^2 - 1904w^4 - 5808c_{11}^2 s^2 = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)} y^5 e_{10}\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Desse modo, $p_{98} = yp_{97}$ e $p_{104} = yp_{103}$. Por e_{10},

$$\frac{30c_5(a^2+b^2)p_{97x}p_{97}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{12}.$$

Daí, $p_{97} = yp_{96}$. Denotemos $s = p_{96}(1,0)$ e $w = p_{103}(1,0)$. Assim,

$$sw(4554c_{11}s - 1173w^2) = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)} y^5 e_9\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$6732c_{11}sw^2 - 1428w^4 - 4356c_{11}^2 s^2 = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)} y e_{10}\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

Então, $p_{96} = yp_{95}$ e $p_{103} = yp_{102}$. Por e_8,

$$\frac{30c_5(a^2+b^2)p_{8x}p_8}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{14}.$$

Desse modo, $p_8 = yp_{87}$. De e_{10} obtemos que

$$\frac{30c_5(a^2+b^2)p_{95x}p_{95}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$

e, daí, $p_{95} = yp_{94}$. Por e_8, temos

$$\frac{30c_5(a^2+b^2)p_{87x}p_{87}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{12}.$$

Assim, $p_{87} = yp_{86}$. Denotemos $s = p_{86}(1,0)$, $w = p_{94}(1,0)$ e $u = p_{102}(1,0)$. Logo,

$$1188c_{11}swu - 306su^3 - 2178c_{11}^2s^2 = \frac{1331c_{11}^3}{10c_5(a^2+b^2)}y^3e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$3036c_{11}w^2u - 782wu^3 - 7260c_{11}^2sw + 462c_{11}su^2 = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$4488c_{11}wu^2 - 952u^4 - 5808c_{11}^2su - 2904c_{11}^2w^2 = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-3}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem $\text{tdeg}(s,w,u)$ temos $s = w = u = 0$ e, daí,

$$p_{86} = yp_{85},\ p_{94} = yp_{93} \text{ e } p_{102} = yp_{101}.$$

De e_{10} temos que

$$5c_5(a^2+b^2)p_{7x} \in y\mathcal{H}_5.$$

Logo, $p_7 = yp_{76}$. Por e_8,

$$\frac{30c_5(a^2+b^2)p_{85x}p_{85}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$

e, então, $p_{85} = yp_{84}$. Denotemos $s = p_{76}(1,0)$ e $w = p_{93}(1,0)$. Dessa maneira,

$$-3sw = \frac{11c_{11}}{5c_5(a^2+b^2)}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$66c_{11}s - 18w^2 = \frac{11c_{11}}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-5}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, $p_{76} = yp_{75}$ e $p_{93} = yp_{92}$. Por e_8,

$$\frac{30c_5(a^2+b^2)p_{84x}p_{84}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_6.$$

Dessa maneira, $p_{84} = yp_{83}$. De e_{10} obtemos que

$$5c_5(a^2+b^2)p_{75x} \in y\mathcal{H}_3$$

e, daí, $p_{75} = yp_{74}$. De e_9 segue que

$$5c_5(a^2+b^2)p_{6x} \in y\mathcal{H}_4.$$

Como consequência, $p_6 = yp_{65}$. Denotemos $s = p_{65}(1,0)$, $w = p_{74}(1,0)$, $u = p_{83}(1,0)$, $v = p_{92}(1,0)$ e $m = p_{101}(1,0)$. Logo,

$$528c_{11}svm - 136sm^3 - 968c_{11}^2su = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)}ye_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$858c_{11}wvm - 221wm^3 + \ldots = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-1}e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$1694c_{11}^2sm + 66c_{11}wm^2 + \ldots = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-3}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$231c_{11}um^2 - 3630c_{11}^2uv + \ldots = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-5}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$2244c_{11}vm^2 - 1452c_{11}^2v^2 + \ldots = \frac{1331c_{11}^3}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-7}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, usando a ordem plex(s, w, u, v, m), obtemos que $m = v = u = w = s = 0$. Logo,

$$p_{65} = yp_{64},\ p_{74} = yp_{73},\ p_{83} = yp_{82},\ p_{92} = yp_{91} \text{ e } p_{101} = v_{10}y.$$

De e_9 temos que

$$5c_5(a^2+b^2)p_{64_x} \in y\mathcal{H}_2$$

e, então, $p_{64} = yp_{63}$. Por e_8,

$$5c_5(a^2+b^2)p_{5_x} \in y\mathcal{H}_3.$$

Logo, $p_5 = yp_{54}$. De e_{10} segue que

$$5c_5(a^2+b^2)p_{73_x} \in y\mathcal{H}_1.$$

Então, $p_{73} = yp_{72}$. Denotemos $s = p_{54}(1,0)$ e $w = p_{82}(1,0)$. Assim,

$$-2sw = \frac{11c_{11}}{5c_5(a^2+b^2)}e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$44c_{11}s - 12w^2 = \frac{11c_{11}}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-5}e_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Dessa maneira, $p_{54} = yp_{53}$ e $p_{82} = yp_{81}$. Por e_9,

$$5c_5(a^2+b^2)p_{63_x} \in y\mathcal{H}_1$$

e, então, $p_{63} = yp_{62}$. De e_7 obtemos que

$$5c_5(a^2+b^2)p_{4_x} \in y\mathcal{H}_2$$

e, assim, $p_4 = yp_{43}$. Denotemos $s = p_{53}(1,0)$, $w = p_{72}(1,0)$ e $u = p_{91}(1,0)$. Assim,

$$2su = \frac{11c_{11}}{10c_5(a^2+b^2)} y^{-3} e_6 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$33c_{11}s - wu = \frac{11c_{11}}{5c_5(a^2+b^2)} y^{-6} e_8 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

e

$$22c_{11}w - 6u^2 = \frac{11c_{11}}{5c_5(a^2+b^2)} y^{-9} e_{10} \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Logo,

$$p_{53} = yp_{52}, \ p_{72} = yp_{71} \text{ e } p_{91} = v_9 y.$$

Por e_7,

$$5c_5(a^2+b^2)p_{43x} \in y\mathcal{H}_1$$

e, daí, $p_{43} = yp_{42}$. De e_9 segue que

$$5c_5(a^2+b^2)p_{62x} \in y\mathcal{H}_0.$$

Dessa forma, $p_{62} = yp_{61}$. De e_6 temos que

$$5c_5(a^2+b^2)p_{3x} \in y\mathcal{H}_1.$$

Então, $p_3 = yp_{32}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$ e $w = p_{81}(1,0)$. Então,

$$-sw = \frac{11c_{11}}{5c_5(a^2+b^2)} y^{-3} e_5 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$22sc_{11} - 6w^2 = \frac{11c_{11}}{5c_5(a^2+b^2)} y^{-7} e_8 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, $p_{52} = yp_{51}$ e $p_{81} = v_8 y$. Por e_7,

$$5c_5(a^2+b^2)p_{42x} \in y\mathcal{H}_0$$

e, consequentemente, $p_{42} = yp_{41}$. De e_{10} obtemos que

$$p_{71} = -\frac{11c_{11}(a+\lambda b)}{5c_5(a^2+b^2)} x + v_7 y.$$

Por e_9,

$$p_{61} = -\frac{(30v_{10}c_5 - 44d_4c_{11})(a+\lambda b)}{25c_5^2(a^2+b^2)} x + v_6 y.$$

Denotemos $s = p_{32}(1,0)$. Dessa forma,

$$s(a+\lambda b) = e_2\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$50c_5^2(a^2+b^2)^2 s - 66c_{11}(a+\lambda b)^2 = 5c_5(a^2+b^2)y^{-5}e_6\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Logo, $p_{32} = yp_{31}$ e $a+\lambda b = 0$. De e_8 segue que $p_{51} = v_5 y$. Por e_7 temos que $p_{41} = v_4 y$. De e_6 obtemos que $p_{31} = v_3 y$. De e_5 temos que $p_2 = v_2 y^2$. Dessa forma,

$$5bc_5y^4 = e_4 = 0.$$

Absurdo. Então, $q_5 = \lambda p_5$.

Suponhamos, contradição, $q_4 \neq \lambda p_4$. Tomemos $l = 11$ e $s = 5$ em (4.8), (4.9) e (4.10). De e_{12} temos que existe $d_3 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_3 = \frac{4c_4p_{10} + 11\lambda c_{11}p_3y^7}{11c_{11}y^7} + d_3y^3.$$

De e_{11} temos que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_2 = \frac{121\lambda c_{11}^2p_2y^{18} + 44c_4c_{11}p_9y^{11} + 33d_3c_{11}p_{10}y^{10} - 14c_4p_{10}^2}{121c_{11}^2y^{18}} + d_2y^2.$$

De e_{10} obtemos que

$$\frac{252c_4(a^2+b^2)p_{10x}p_{10}^2}{121c_{11}^2} \in y^{10}\mathcal{H}_{19}.$$

Daí, $p_{10} = y^4p_{106}$. Por e_{10},

$$\frac{252c_4(a^2+b^2)p_{106x}p_{106}^2}{121c_{11}^2} \in y^3\mathcal{H}_{14}$$

e, então, $p_{106} = yp_{105}$. De e_{10} segue que

$$\frac{252c_4(a^2+b^2)p_{105x}p_{105}^2}{121c_{11}^2} \in y\mathcal{H}_{13}.$$

Então, $p_{105} = yp_{104}$. De e_9 temos que

$$\frac{28c_4(a^2+b^2)p_{9x}p_9}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{16}$$

e, assim, $p_9 = yp_{98}$. Denotemos $s = p_{98}(1,0)$ e $w = p_{104}(1,0)$. Dessa maneira,

$$s(28w^2 - 88c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{28c_4(a^2+b^2)}y^6e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$36w^3 - 132c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{28c_4(a^2+b^2)}ye_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Desse modo, $p_{98} = yp_{97}$ e $p_{104} = yp_{103}$. Por e_9,

$$\frac{28c_4(a^2+b^2)p_{97x}p_{97}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_{12}.$$

Dessa maneira, $p_{97} = yp_{96}$. Denotemos $s = p_{96}(1,0)$ e $w = p_{103}(1,0)$. Assim,

$$s(21w^2 - 66c_{11}s) = \frac{121c_{11}^2}{28c_4(a^2+b^2)}y^2e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$27w^3 - 99c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{28c_4(a^2+b^2)}y^{-2}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Daí, $p_{96} = yp_{95}$ e $p_{103} = yp_{102}$. Por e_{10},

$$4c_4(a^2+b^2)p_{8x} \in y\mathcal{H}_6.$$

Desse modo, $p_8 = yp_{87}$. De e_9 obtemos que

$$\frac{28c_4(a^2+b^2)p_{95x}p_{95}}{11c_{11}} \in y\mathcal{H}_8$$

e, assim, $p_{95} = yp_{94}$. Por e_{10}, temos

$$4c_4(a^2+b^2)p_{87x} \in y\mathcal{H}_5.$$

Dessa forma, $p_{87} = yp_{86}$. Denotemos $s = p_{86}(1,0)$, $w = p_{94}(1,0)$ e $u = p_{102}(1,0)$. Então,

$$70su^2 - 220c_{11}sw = \frac{121c_{11}^2}{4c_4(a^2+b^2)}ye_8\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

$$22c_{11}su + 98wu^2 - 308c_{11}w^2 = \frac{121c_{11}^2}{4c_4(a^2+b^2)}y^{-2}e_9\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$726c_{11}^2s - 462c_{11}wu + 126u^3 = \frac{121c_{11}^2}{4c_4(a^2+b^2)}y^{-5}e_{10}\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Usando a ordem $\mathrm{tdeg}(s,w,u)$ temos que $s = w = u = 0$. Dessa maneira,

$$p_{86} = yp_{85},\ p_{94} = yp_{93} \text{ e } p_{102} = yp_{101}.$$

Por e_{10},

$$4c_4(a^2+b^2)p_{85x} \in y\mathcal{H}_3$$

e, então, $p_{85} = yp_{84}$. De e_9 temos que

$$4c_4(a^2+b^2)p_{7x} \in y\mathcal{H}_5.$$

Logo, $p_7 = yp_{76}$. Denotemos $s = p_{76}(1,0)$ e $w = p_{93}(1,0)$. Dessa maneira,

$$-9sw = \frac{11c_{11}}{4c_4(a^2+b^2)} ye_7\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$66c_{11}s - 21w^2 = \frac{11c_{11}}{4c_4(a^2+b^2)} y^{-4}e_9\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, $p_{76} = yp_{75}$ e $p_{93} = yp_{92}$. Por e_{10},

$$4c_4(a^2+b^2)p_{84x} \in y\mathcal{H}_2.$$

Desse modo, $p_{84} = yp_{83}$. De e_9 obtemos que

$$4c_4(a^2+b^2)p_{75x} \in y\mathcal{H}_3$$

e, daí, $p_{75} = yp_{74}$. De e_8 segue que

$$4c_4(a^2+b^2)p_{6x} \in y\mathcal{H}_4.$$

Consequentemente, $p_6 = yp_{65}$. Denotemos $s = p_{65}(1,0)$, $w = p_{74}(1,0)$, $u = p_{83}(1,0)$, $v = p_{92}(1,0)$ e $m = p_{101}(1,0)$. Logo,

$$7sm^2 - 22c_{11}sv = \frac{121c_{11}^2}{4c_4(a^2+b^2)} e_6\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$99c_{11}sm + 21wm^2 - 66c_{11}wv = \frac{121c_{11}^2}{4c_4(a^2+b^2)} y^{-2}e_7\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$605c_{11}^2s + 55c_{11}wm + 35um^2 - 110c_{11}uv = \frac{121c_{11}^2}{4c_4(a^2+b^2)} y^{-4}e_8\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$484c_{11}^2w + 11c_{11}um + 49vm^2 - 154c_{11}v^2 = \frac{121c_{11}^2}{4c_4(a^2+b^2)} y^{-6}e_9\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$363c_{11}^2u - 231c_{11}vm + 63m^3 = \frac{121c_{11}^2}{4c_4(a^2+b^2)} y^{-8}e_{10}\bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim, usando a ordem plex(s,w,u,v,m), segue que

$$p_{65} = yp_{64},\ p_{74} = yp_{73},\ p_{83} = yp_{82},\ p_{92} = yp_{91} \text{ e } p_{101} = v_{10}y.$$

De e_{10} temos que

$$4c_4(a^2+b^2)p_{82x} \in y\mathcal{H}_0$$

e, então, $p_{82} = yp_{81}$. Por e_9,

$$4c_4(a^2+b^2)p_{73x} \in y\mathcal{H}_1.$$

Logo, $p_{73} = yp_{72}$. De e_8 segue que

$$4c_4(a^2+b^2)p_{64x} \in y^2\mathcal{H}_1.$$

Então, $p_{64} = y^2 p_{62}$. Por e_9,

$$4c_4(a^2+b^2)p_{5x} \in y^2\mathcal{H}_2$$

e, daí, $p_5 = y^2 p_{53}$. De e_6 obtemos que

$$4c_4(a^2+b^2)p_{4x} \in y\mathcal{H}_2$$

e, assim, $p_4 = yp_{43}$. Denotemos $s = p_{53}(1,0)$, $w = p_{72}(1,0)$ e $u = p_{91}(1,0)$. Assim,

$$su = \frac{11c_{11}}{4c_4(a^2+b^2)} y^{-2} e_5 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$33c_{11}s - 3wu = \frac{11c_{11}}{4c_4(a^2+b^2)} y^{-5} e_7 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$22c_{11}w - 7u^2 = \frac{11c_{11}}{4c_4(a^2+b^2)} y^{-8} e_9 \Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Dessa maneira,

$$p_{53} = yp_{52},\ p_{72} = yp_{71} \text{ e } p_{91} = v_9 y.$$

De e_{10} temos que

$$p_{81} = -\frac{11c_{11}(a+\lambda b)}{4c_4(a^2+b^2)} x + v_8 y.$$

Por e_9,

$$p_{71} = -\frac{(28v_{10}c_4 - 33d_3c_{11})(a+\lambda b)}{16c_4^2(a^2+b^2)} x + v_7 y.$$

De e_8 segue que

$$4c_4(a^2+b^2)p_{62x} \in y\mathcal{H}_0.$$

Dessa forma, $p_{62} = yp_{61}$. Por e_6,

$$4c_4(a^2+b^2)p_{43x} \in y\mathcal{H}_1$$

e, daí, $p_{43} = yp_{42}$. De e_5 temos que

$$4c_4(a^2+b^2)p_{3x} \in y\mathcal{H}_1.$$

Então, $p_3 = yp_{32}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$. Dessa forma,

$$3s(a+\lambda b) = y^{-2}e_4\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$32c_4^2(a^2+b^2)^2 s - 77c_{11}(a+\lambda b)^2 = 4c_4(a^2+b^2)y^{-6}e_7\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Logo, $p_{52} = yp_{51}$ e $a+\lambda b = 0$. De e_8 segue que $p_{61} = v_6 y$. Por e_7, $p_{51} = v_5 y$. De e_6 segue que $p_{42} = v_4 y^2$. De e_5 temos que $p_{32} = v_3 y^2$. Por e_4 segue que $p_2 = v_2 y^2$. Logo,

$$4bc_4 y^4 = e_3 = 0.$$

Contradição. Dessa forma, $q_4 = \lambda p_4$.

Temos $q_i = \lambda p_i$ para cada $i \in \{4,5,\ldots,11\}$. Pelo Teorema 4.5 obtemos que, para todo $i \in \{2,3,\ldots,11\}$, $q_i = \lambda p_i$. Logo, de (4.5), (4.6) e (4.7) temos, para todo $i \in \{1,2,\ldots,10\}$,

$$p_{i+1_x} + \lambda p_{i+1_y} = e_i = 0.$$

Portanto, do Lema 4.2 segue que, para todo $i \in \{2,3,\ldots,11\}$, existe $C_i \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$p_i = C_i(y-\lambda x)^i \text{ e } q_i = \lambda p_i,$$

o que encerra a demonstração. □

O teorema a seguir nos da uma caracterização alternativa para centros isócronos triviais em sistemas Hamiltonianos associados à funções de graus 4, 6, 10, 14 e 22. Ressaltamos que, para os graus 4 e 6, a caracterização já está dada em [2, Proposição 1, Teorema 2.3].

Teorema 4.16. *Seja $H:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau $2l$, com $l \geq 2$ e $H(0,0)=0$. Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = -H_y(x,y) \\ y' = H_x(x,y) \end{cases}. \tag{4.29}$$

Suponha que a origem seja um centro isócrono trivial de período 2π do sistema (4.29).

Se $l \in \{2,3,5,7,11\}$, então existem $\lambda \in \mathbb{R}$ e um isomorfismo $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de modo que $\Big|\det(T)\Big| = 1$ e

$$H \circ T = \frac{P^2 + (y+\lambda P)^2}{2},$$

onde $P = x + C_2y^2 + C_3y^3 + \ldots + C_l y^l$ com $C_2, C_3, \ldots, C_l \in \mathbb{R}$ e $C_l \neq 0$.

Demonstração. Como já mencionado, resta provarmos o resultado para $l \in \{5, 7, 11\}$. Pelo Teorema 1.1, existe uma aplicação polinomial $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $f(0,0) = (0,0)$ tal que

$$H = \frac{f_1^2 + f_2^2}{2} \text{ e } \Big|Jf\Big| \equiv 1.$$

Seja $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo dado por $S = Jf(0,0)^{-1}$. Logo, $\det(S) = 1$,

$$f_1 \circ S = x + p_2 + \ldots + p_l \text{ e } f_2 \circ S = y + q_2 + \ldots + q_l$$

com $\Big|J(f_1 \circ S, f_2 \circ S)\Big| \equiv 1$, onde $p_i, q_i \in \mathcal{H}_i$ para cada $i \in \{2, 3, \ldots, l\}$.

Suponhamos $p_l \neq 0$. Da Seção 4.1 segue que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $q_l = \lambda p_l$. Desse modo, pelos Lemas 4.13, 4.14 e 4.15, e em seguida pelo Corolário 4.6, temos que existem constantes $C_2, C_3, \ldots, C_l \in \mathbb{R}$, com $C_l \neq 0$, e um isomorfismo $\overline{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, com $\det(\overline{T}) = 1$, de tal forma que

$$f_1 \circ S \circ \overline{T} = x + \sum_{i=2}^{l} C_i y^i$$

e

$$f_2 \circ S \circ \overline{T} = y + \lambda\Big(f_1 \circ S \circ \overline{T}\Big).$$

Denotando $T = S \circ \overline{T}$ e $P = f_1 \circ T$, obtemos

$$H \circ T = \frac{P^2 + (y + \lambda P)^2}{2}.$$

Agora, suponhamos $p_l = 0$. Daí, $q_l \neq 0$ pois H tem grau $2l$. Consideremos o isomorfismo $S_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $S_1(x, y) = (y, x)$. Denotemos

$$F_1 = f_2 \circ S \circ S_1 = x + q_2 \circ S_1 + \ldots + q_l \circ S_1$$

e

$$F_2 = f_1 \circ S \circ S_1 = y + p_2 \circ S_1 + \ldots + p_{l-1} \circ S_1.$$

Observemos que $\Big|J(F_1, F_2)\Big| \equiv 1$ e $q_l \circ S_1 \neq 0$. Logo, de forma análoga a feita no caso anterior, existe um isomorfismo $S_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\det(S_2) = 1$,

$$F_1 \circ S_2 = P$$

e

$$F_2 \circ S_2 = y + \lambda P,$$

onde $P = x + C_2 y^2 + C_3 y^3 + \ldots + C_l y^l$ com $C_2, C_3, \ldots, C_l \in \mathbb{R}$ e $C_l \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ é o número tal que $p_l \circ S_1 = \lambda(q_l \circ S_1)$. Notemos que $\lambda = 0$, já que $p_l = 0$. Assim,

$$f_1 \circ S \circ S_1 \circ S_2 = y$$

e

$$f_2 \circ S \circ S_1 \circ S_2 = P.$$

Dessa forma, denotando $T = S \circ S_1 \circ S_2$ temos $\det(T) = -1$ e

$$H \circ T = \frac{y^2 + P^2}{2}.$$

Portanto, existe um isomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\Big| \det(T) \Big| = 1$ e

$$H \circ T = \frac{P^2 + (y + \lambda P)^2}{2},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $P = x + C_2 y^2 + C_3 y^3 + \ldots + C_l y^l$, com $C_2, C_3, \ldots, C_l \in \mathbb{R}$ e $C_l \neq 0$. $\square$

Para finalizar, apresentamos a seguir as formas canônicas para centros isócronos triviais na origem em sistemas Hamiltonianos relacionados à H de grau 12.

Teorema 4.17. *Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau 12 com $H(0,0) = 0$. Suponha que a origem seja um centro isócrono trivial de período 2π do sistema (4.29). Então, a menos de isomorfismo de determinante, em módulo, igual a um, H tem somente uma das formas abaixo:*

- **1ª Forma.**

$$H = \frac{P^2 + (Q + \lambda P)^2}{2}$$

onde

$$Q = y \ \text{ e } \ P = x + C_2 Q^2 + C_3 Q^3 + C_4 Q^4 + C_5 Q^5 + C_6 Q^6,$$

com $C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, \lambda \in \mathbb{R}$ e $C_6 \neq 0$.

- **2ª Forma.**

$$H = \frac{P^2 + (Q + \lambda P)^2}{2}$$

onde

$$Q = y + \alpha_1 x^2 \ \text{ e } \ P = x + C_1 Q + C_2 Q^2 + C_3 Q^3,$$

com $C_1, C_2, C_3, \alpha_1, \lambda \in \mathbb{R}$ e $C_3, \alpha_1 \neq 0$.

- **3ª Forma.**

$$H = \frac{P^2 + (Q + \lambda P)^2}{2}$$

onde

$$Q = y + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 \ e \ P = x + C_1 Q + C_2 Q^2,$$

com $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2, \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $C_2, \alpha_2 \neq 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.1, existe uma aplicação polinomial $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $f(0,0) = (0,0)$ tal que

$$H = \frac{f_1^2 + f_2^2}{2} \text{ e } \left| Jf \right| \equiv 1.$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo dado por $T = Jf(0,0)^{-1}$. Logo, $\det(T) = 1$,

$$f_1 \circ T = x + p_2 + \ldots + p_6 \text{ e } f_2 \circ T = y + q_2 + \ldots + q_6$$

com $\left| J(f_1 \circ T, f_2 \circ T) \right| \equiv 1$, onde $p_i, q_i \in \mathcal{H}_i$ para cada $i \in \{2, 3, \ldots, 6\}$.

Primeiramente, consideremos $p_6 \neq 0$. Da Seção 4.1 sabemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $q_6 = \lambda p_6$. Suponhamos, por contradição, que $q_5 \neq \lambda p_5$. Tomemos $l = 6$ e $s = 6$ em (4.8), (4.9) e (4.10). De e_8 segue que existe $d_4 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $y > 0$,

$$q_4 = \frac{5c_5 p_5 + 6\lambda c_6 p_4 y}{6c_6 y} + d_4 y^4.$$

Por e_7 obtemos que existe $d_3 \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $y > 0$,

$$q_3 = \frac{72\lambda c_6^2 p_3 y^7 + 60c_5 c_6 p_4 y^6 + 48d_4 c_6 p_5 y^5 - 5c_5 p_5^2}{72c_6^2 y^7} + d_3 y^3.$$

Usando que

$$\int p_{5x} p_4 \, dx = p_4 p_5 - \int p_{4x} p_5 \, dx,$$

segue de e_6 que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ de tal forma que, para todo $y > 0$,

$$\begin{aligned} q_2 = \frac{1}{1296c_6^3 y^{13}} \Big(& 1296\lambda c_6^3 p_2 y^{13} + 864d_4 c_6^2 p_4 y^{11} + 35c_5 p_5^3 - 144d_4 c_6 p_5^2 y^5 - 180c_5 c_6 p_4 p_5 y^6 \\ & + 1080c_5 c_6^2 p_3 y^{12} + 648d_3 c_6^2 p_5 y^{10} \Big) + d_2 y^2. \end{aligned}$$

Daí, por e_5 temos que

$$\frac{455c_5(a^2 + b^2) p_{5x} p_5^3}{1296c_6^3} \in y^5 \mathcal{H}_{14}.$$

Logo, $p_5 = y^2 p_{53}$. Novamente de e_5 temos

$$\frac{455c_5(a^2+b^2)p_{53x}p_{53}^3}{1296c_6^3} \in y^2\mathcal{H}_9$$

e, então, $p_{53} = yp_{52}$. Denotemos $s = p_{52}(1,0)$ e $w = p_4(1,0)$. Como $p_{52x}(1,0) = 2p_{52}(1,0)$ e $p_{4x}(1,0) = 4p_4(1,0)$,

$$4sw(36c_4w - 7s^2) = \frac{324c_6^3}{5c_5(a^2+b^2)} y^5 e_4\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$1008c_6s^2w - 182s^4 - 864c_6^2w^2 = \frac{1296c_6^3}{5c_5(a^2+b^2)} y^2 e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Tomemos o ideal polinomial $I_1 =< 4xy(36c_4y - 7x^2), 1008c_6x^2y - 182x^4 - 864c_6^2y^2 >$. Temos que

$$\mathrm{Grb}_{\mathrm{tdeg}}(I_1) = \{y^4, 91x^4 + 432c_6^2y^2 - 504c_6x^2y, \ldots\}$$

com tdeg = tdeg(x,y). Dessa forma,

$$(s,w) \in \mathcal{V}(I_1) \subset \mathcal{V}(y^4, 91x^4 + 432c_6^2y^2 - 504c_6x^2y).$$

Assim, $s = w = 0$. Logo, $p_{52} = yp_{51}$ e $p_4 = yp_{43}$. De e_5 obtemos que

$$\frac{5c_5(a^2+b^2)p_{43x}p_{43}}{6c_6} \in y\mathcal{H}_4$$

e, então, $p_{43} = yp_{42}$. Denotemos $s = p_{51}(1,0)$, $w = p_{42}(1,0)$ e $u = p_3(1,0)$. Uma vez que $p_{51x}(1,0) = p_{51}(1,0)$, $p_{42x}(1,0) = 2p_{42}(1,0)$ e $p_{3x}(1,0) = 3p_3(1,0)$, temos

$$-3u(7s^3 + 216c_6^2u - 36c_6sw) = \frac{1296c_6^3}{5c_5(a^2+b^2)} = y^2 e_3\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0,$$

$$288c_6sw^2 - 1080c_6^2wu - 54c_6s^2u - 56s^3w = \frac{1296c_6^3}{5c_5(a^2+b^2)} = e_4\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$504c_6s^2w - 864c_6^2su - 91s^4 - 432c_6^2w^2 = \frac{1296c_6^3}{5c_5(a^2+b^2)} = y^{-2}e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Encarando as três expressões anteriores como polinômios g_1, g_2 e g_3 nas variáveis $x = s$, $y = w$, $z = u$, respectivamente, e considerando o ideal polinomial $I_2 =< g_1, g_2, g_3 >$, obtemos que

$$\mathrm{Grb}_{\mathrm{tdeg}}(I_2) = \{z^4, y^4 - 432c_6yz^2, 91x^4 + 864c_6^2xz + 432c_6^2y^2 - 504c_6x^2y, \ldots\}$$

com tdeg = tdeg(x,y,z). Logo,

$$(s,w,u) \in \mathcal{V}(I_2) \subset \mathcal{V}(z^4, y^4 - 432c_6yz^2, 91x^4 + 864c_6^2xz + 432c_6^2y^2 - 504c_6x^2y)$$

e, então, $s = w = u = 0$. Consequentemente,

$$p_{42} = yp_{41},\ p_3 = yp_{32} \text{ e } p_{51} = v_5 y.$$

Por e_3 temos

$$\frac{5c_5(a^2+b^2)p_{32x}p_{32}}{6c_6} \in y\mathcal{H}_2.$$

Assim, $p_{32} = yp_{31}$. Denotemos $s = p_{41}(1,0)$ e $w = p_2(1,0)$. Como $p_{41x}(1,0) = p_{41}(1,0)$ e $p_{2x}(1,0) = 2p_2(1,0)$,

$$2sw = \frac{3c_6}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-1}e_3\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0 \text{ e } 12c_6 w - s^2\frac{6c_6}{5c_5(a^2+b^2)}y^{-4}e_5\Big|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Desse modo, $s = w = 0$ e, daí, $p_2 = yp_{21}$ e $p_{41} = v_4 y$. De e_3 obtemos que

$$\frac{5c_5(a^2+b^2)p_{31x}p_{31}}{6c_6} \in y\mathcal{H}_0$$

e, daí, $p_{31} = v_3 y$. Agora, por e_5 temos que existe $v_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_{21} = -\frac{6c_6(a+\lambda b)}{5c_5(a^2+b^2)}x + v_2 y.$$

De e_1 obtemos que

$$\frac{6c_6(a+\lambda b)^2}{5c_5(a^2+b^2)}x \in y\mathcal{H}_0$$

e, assim, $a + \lambda b = 0$. Logo,

$$5bc_5 y^4 = e_4 = 0.$$

Absurdo, pois $b^2(1+\lambda^2) = a^2+b^2 \neq 0$. Dessa forma, $q_5 = \lambda p_5$.

Suponhamos, por absurdo, $q_4 \neq \lambda p_4$. Tomemos $l = 6$ e $s = 5$ em (4.15), (4.16) e (4.17).

- **1º Caso:** $r = x^2$.

De e_7 segue que existe $d_3 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x > 0$,

$$q_3 = \frac{2c_4p_5 + 3\lambda c_6 p_3 x^2}{3c_6x^2} + d_3x^3.$$

Por e_6, existe $d_2 \in \mathbb{R}$ de modo que, para todo $x > 0$,

$$q_2 = \frac{18\lambda c_6^2 p_2 x^8 + 12c_4c_6p_4x^6 + 9d_3c_6p_5x^5 - 2c_4p_5^2}{18c_6^2x^8} + d_2x^2.$$

De e_5 obtemos que

$$\frac{8c_4p_{5y}p_5^2}{9c_6^2} \in x^5\mathcal{H}_9.$$

Daí, $p_5 = x^2 p_{53}$. Novamente de e_5, temos que

$$\frac{8c_4 p_{53_y} p_{53}^2}{9c_6^2} \in x^2 \mathcal{H}_6$$

e, então, $p_{53} = x p_{52}$. Denotemos $s = p_4(0,1)$ e $w = p_{52}(0,1)$. Pela identidade de Euler segue que

$$4s(6c_6 s - w^2) = \frac{9c_6^2}{2c_4} x^3 e_4 \bigg|_{(x,y)=(0,1)} = 0$$

e

$$18c_6 sw - 4w^3 = \frac{9c_6^2}{4c_4} e_5 \bigg|_{(x,y)=(0,1)} = 0.$$

Dessa forma, $s = w = 0$. Assim, $p_4 = x p_{43}$ e $p_{52} = x p_{51}$. Por e_4,

$$\frac{4c_4 p_{43_y} p_{43}}{3c_6} \in x \mathcal{H}_4.$$

Dessa maneira, $p_{43} = x p_{42}$. Escrevamos $p_{51} = a_{51} x + b_{51} y$, com $a_{51}, b_{51} \in \mathbb{R}$. Denotemos $s = p_3(0,1)$ e $w = p_{42}(0,1)$. Novamente da identidade de Euler temos que

$$6c_6 w^2 - b_{51}^2 w - 9c_6 b_{51} s = \frac{9c_6^2}{4c_4} x^{-1} e_4 \bigg|_{(x,y)=(0,1)} = 0$$

e

$$9c_6 b_{51} w - 27c_6^2 s - 2b_{51}^3 = \frac{9c_6^2}{4c_4} x^{-3} e_5 \bigg|_{(x,y)=(0,1)} = 0.$$

Logo,

$$s = \frac{b_{51}^3}{27c_6^2} \text{ e } w = \frac{b_{51}^2}{3c_6}$$

e, consequentemente,

$$p_3 = x p_{32} + \frac{b_{51}^3}{27c_6^2} y^3 \text{ e } p_{42} = x p_{41} + \frac{b_{51}^2}{3c_6} y^2.$$

Como

$$\int p_{41_y} y \, dy = y p_{41} - \int p_{41} \, dy,$$

segue de e_5 que existe $a_{32} \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_{32} = \frac{1}{144 c_4 c_6^2} \Big(216 \lambda k_2 c_6^3 xy + 48 a_{51} c_4 c_6 p_{41} x - 108 d_3 c_6^2 p_{41} x - 32 b_{51} a_{51}^2 c_4 xy + \dots \Big) + a_{32} x^2.$$

Usando, novamente, que

$$\int p_{41_y} y \, dy = y p_{41} - \int p_{41} \, dy,$$

obtemos de e_4 que existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x > 0$,

$$p_2 = \frac{1}{1728 c_4^2 c_6^3 x} \Big(864 \lambda k_2 b_{51} c_4 c_6^3 x y^2 + 288 c_4^2 c_6^2 p_{41}^2 x - 30 d_3 b_{51}^3 c_4 c_6 y^3 + \dots \Big) + a_2 x^2.$$

Temos que

$$\frac{5d_3b_{51}^4}{432c_6^3} = e_3\Big|_{(x,y)=(0,1)} = 0.$$

Se $b_{51} = 0$, então de e_2 segue que

$$\frac{2c_4 p_{41y} p_{41}^2}{9c_6^2} \in x\mathcal{H}_1$$

e, daí, $p_{41} = v_4 x$. Por e_2 obtemos que $k_1 = -\lambda k_2$. Logo,

$$4k_2c_4x^3 = e_3 = 0.$$

Absurdo. Desse modo, $b_{51} \neq 0$ e $d_3 = 0$. Denotemos $s = p_{41}(0,1)$. Dessa forma,

$$-(3c_6 s - 2a_{51}b_{51})^2 = \frac{27c_6^4}{2b_{51}c_4} x^{-1} e_3\Big|_{(x,y)=(0,1)} = 0.$$

Assim,

$$p_{41} = a_{41}x + \frac{2a_{51}b_{51}}{3c_6} y,$$

com $a_{41} \in \mathbb{R}$. Por e_3,

$$k_3 = -\frac{81\lambda k_4 c_6^3 + 27d_2a_{51}c_6^2 + 4a_{51}^3c_4 + 54a_{32}c_4c_6^2}{81c_6^3}.$$

Novamente de e_3 segue que

$$a_2 = \frac{1}{324b_{51}c_4^2c_6^3}\Big(162d_2a_{41}b_{51}c_4c_6^3 - 972k_2c_4^2c_6^4 + \dots\Big).$$

Por e_2 obtemos que

$$d_2 = \frac{2a_{51}^2b_{51}c_4 - 6a_{41}b_{51}c_4c_6 + 27\lambda k_2 c_6^3 + 27k_1c_6^3}{9b_{51}c_6^2}.$$

Novamente de e_2 temos

$$k_4 = \frac{1}{486b_{51}c_4c_6^4}\Big(243\lambda k_2 a_{41}a_{51}c_6^4 - 729\lambda k_2 a_{32}c_6^5 + \dots\Big).$$

De e_1 segue que

$$a_{32} = \frac{9a_{41}a_{51}c_6 - 5a_{51}^3}{27c_6^2}.$$

Dessa forma, $k_1k_4 - k_2k_3 = 0$. Contradição.

- **2º Caso:** $r = xy$.

De e_7 temos que

$$2c_4 p_{5_y} y^2 \in x\mathcal{H}_5$$

e, assim, $p_5 = xp_{54}$. De e_7 segue que

$$2c_4(p_{54} + xp_{54_x}) \in y\mathcal{H}_3.$$

Logo, $p_{54} = yp_{53}$. Novamente por e_7 obtemos que

$$(3\lambda c_6 p_3 - 3c_6 q_3 + 2c_4 p_{53})_x x - (3\lambda c_6 p_3 - 3c_6 q_3 + 2c_4 p_{53})_y y = 0.$$

Se $3\lambda c_6 p_3 - 3c_6 q_3 + 2c_4 p_{53} \neq 0$, então pelo Lema 4.1 com

$$p = 3\lambda c_6 p_3 - 3c_6 q_3 + 2c_4 p_{53} \text{ e } q = xy,$$

segue que existem $0 \neq r_1 \in \mathcal{H}_1$ e $0 \neq c_q \in \mathbb{R}$ tais que

$$xy = c_q r_1^2,$$

e isso é um absurdo. Dessa forma,

$$q_3 = \frac{3\lambda c_6 p_3 + 2c_4 p_{53}}{3c_6}.$$

Por e_6,

$$\frac{2c_4 x p_{53_x} p_{53}}{3c_6} \in y\mathcal{H}_5.$$

Então, $p_{53} = yp_{52}$. De e_6 temos

$$2c_4 p_{4_x} x^2 \in y\mathcal{H}_4$$

e, daí, $p_4 = yp_{43}$. De e_6 segue que

$$\frac{2c_4 p_{52}(p_{52} + yp_{52_y})}{3c_6} \in x\mathcal{H}_3.$$

Dessa maneira, $p_{52} = xp_{51}$. Novamente por e_6 obtemos que

$$2c_4(p_{43} + yp_{43_y}) \in x\mathcal{H}_2$$

e, consequentemente, $p_{43} = xp_{42}$. De e_6 temos que

$$(9\lambda c_6^2 p_2 - 9c_6^2 q_2 - c_4 p_{51}^2 + 6c_4 c_6 p_{42})_x x - (9\lambda c_6^2 p_2 - 9c_6^2 q_2 - c_4 p_{51}^2 + 6c_4 c_6 p_{42})_y y = 0.$$

Considerando

$$p = 9\lambda c_6^2 p_2 - 9c_6^2 q_2 - c_4 p_{51}^2 + 6c_4 c_6 p_{42} \text{ e } q = xy$$

no Lema 4.1, obtemos que existe $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$q_2 = \frac{9\lambda c_6^2 p_2 - c_4 p_{51}^2 + 6c_4 c_6 p_{42}}{9c_6^2} + d_2 xy.$$

Escrevamos $p_{51} = a_{51}x + b_{51}y$, com $a_{51}, b_{51} \in \mathbb{R}$. Denotemos $s = p_3(0,1)$ e $w = p_{42}(0,1)$. Pela identidade de Euler para aplicações homogêneas temos que

$$6c_6 w^2 - b_{51}^2 w - 9c_6 b_{51} s = \frac{9c_6^2}{2c_4} e_4 \bigg|_{(x,y)=(0,1)} = 0$$

e

$$9c_6 b_{51} w - 27c_6^2 s - 2b_{51}^3 = \frac{9c_6^2}{2c_4} x^{-1} e_5 \bigg|_{(x,y)=(0,1)} = 0.$$

Desse modo,

$$s = \frac{b_{51}^3}{27c_6^2} \text{ e } w = \frac{b_{51}^2}{3c_6}$$

e, então,

$$p_3 = xp_{32} + \frac{b_{51}^3}{27c_6^2} y^3 \text{ e } p_{42} = xp_{41} + \frac{b_{51}^2}{3c_6} y^2.$$

Denotemos $s = p_{32}(1,0)$ e $w = p_{41}(1,0)$. Logo,

$$a_{51}^2 w - 6c_6 w^2 + 9c_6 a_{51} s = \frac{9c_6^2}{2c_4} e_4 \bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0$$

e

$$27c_6^2 s - 9c_6 a_{51} w + 2a_{51}^3 = \frac{9c_6^2}{2c_4} y^{-1} e_5 \bigg|_{(x,y)=(1,0)} = 0.$$

Assim,

$$p_{32} = \frac{a_{51}^3}{27c_6^2} x^2 + yp_{31} \text{ e } p_{41} = \frac{a_{51}^2}{3c_6} x + b_{41} y$$

com $b_{41} \in \mathbb{R}$. De e_5 segue que existe $b_{31} \in \mathbb{R}$ de modo que

$$p_{31} = \frac{6a_{51}b_{41}c_4c_6 - 2a_{51}^2 b_{51} c_4 - 27\lambda k_4 c_6^3 - 9d_2 a_{51} c_6^2 - 27k_3 c_6^3}{18c_4 c_6^2} x + b_{31} y.$$

Por e_5,

$$b_{31} = \frac{6b_{51}b_{41}c_4c_6 - 2b_{51}^2 a_{51} c_4 + 27\lambda k_2 c_6^3 - 9d_2 b_{51} c_6^2 + 27k_1 c_6^3}{18c_4 c_6^2}.$$

De e_4 obtemos que

$$p_2 = -\frac{d_2 a_{51}^2 + 3\lambda k_4 a_{51} c_6 + 3k_3 a_{51} c_6}{6c_4 c_6} x^2 + yp_{21}.$$

Por e_4, existe $a_{21} \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_{21} = a_{21}x + \frac{3k_1b_{51}c_6 - d_2b_{51}^2 + 3\lambda k_2b_{51}c_6}{6c_4c_6}y.$$

Se $b_{51} = 0$, então por e_2 segue que $k_1 = -\lambda k_2$. Assim, de e_3, segue que $k_2 = 0$. Absurdo. Desse modo, $b_{51} \neq 0$ e de e_3 temos que

$$k_3 = \frac{1}{54b_{51}^2c_4c_6^3}\Big(162\lambda k_2a_{51}b_{51}c_4c_6^3 + 16a_{51}^2b_{51}^3c_4^2 + \dots\Big).$$

Por e_2,

$$k_1 = \frac{6b_{41}b_{51}c_4c_6 + 9d_2b_{51}c_6^2 - 27\lambda k_2c_6^3 - 4a_{51}b_{51}^2c_4}{27c_6^3}.$$

De e_3 segue que

$$k_4 = \frac{1}{162b_{51}^2c_4c_6^4}\Big(162a_{21}b_{41}b_{51}c_4c_6^4 - 16a_{51}^3b_{51}^4c_4 + \dots\Big).$$

Por e_2 obtemos que

$$k_2 = \frac{6a_{51}b_{41}b_{51}^2c_6 - 4a_{51}^2b_{51}^3 - 27a_{21}b_{51}c_6^3}{81c_6^4}.$$

Dessa maneira, $k_1k_4 - k_2k_3 = 0$. Contradição.

- **3º Caso:** $r = x^2 + y^2$.

Escrevamos

$$\begin{aligned}
p_5 &= a_5x^5 + b_5y^5 + xy(a_{53}x^3 + b_{53}y^3 + xyp_{51}),\\
p_4 &= a_4x^4 + b_4y^4 + xyp_{42},\\
p_3 &= a_3x^3 + b_3y^3 + xy(a_{31}x + b_{31}y),\\
p_2 &= a_2x^2 + b_2y^2 + K_{p2}xy,\\
q_3 &= a_{q3}x^3 + b_{q3}y^3 + xyq_{31},\\
q_2 &= a_{q2}x^2 + b_{q2}y^2 + K_{q2}xy.
\end{aligned}$$

De e_7 obtemos que

$$q_{31} = \frac{3\lambda a_{31}c_6 + 2a_{53}c_4}{3c_6}x + \frac{3\lambda b_{31}c_6 + 2b_{53}c_4}{3c_6}y.$$

Por e_7,

$$p_{51} = \frac{9\lambda a_3c_6 + 4b_{53}c_4 + 10a_5c_4 - 9a_{q3}c_6}{4c_4}x + \frac{9\lambda b_3c_6 + 4a_{53}c_4 + 10b_5c_4 - 9b_{q3}c_6}{4c_4}y.$$

Novamente de e_7, segue que

$$a_{q3} = \frac{3\lambda a_3c_6 + 2a_5c_4}{3c_6} \text{ e } b_{q3} = \frac{3\lambda b_3c_6 + 2b_5c_4}{3c_6}.$$

Por e_6 temos

$$p_{42} = \frac{2a_5a_{53}c_4 - 9\lambda K_{p2}c_6^2 + 9K_{q2}c_6^2}{6c_4c_6}x^2 + a_{41}xy + \frac{2b_5b_{53}c_4 - 9\lambda K_{p2}c_6^2 + 9K_{q2}c_6^2}{6c_4c_6}y^2$$

com $a_{41} \in \mathbb{R}$. De e_6 temos que

$$b_{q2} = \frac{1}{9c_6^2}\Big(6a_{41}c_4c_6 - 9\lambda a_2c_6^2 - 2a_5b_{53}c_4 - a_{53}^2c_4 + \dots\Big).$$

Por e_6,

$$a_{41} = \frac{1}{12c_6}\Big(12b_4c_6 + b_{53}^2 - 3b_5^2 + 2b_5a_{53} + \dots\Big).$$

Novamente de e_6, obtemos que $a_5 = b_{53}$ e $b_5 = a_{53}$. De e_5 segue que

$$b_{31} = \frac{1}{18c_4c_6^2}\Big(6a_4b_{53}c_4c_6 - 27k_3c_6^3 - 9a_{q2}b_{53}c_6^2 + \dots\Big).$$

Por e_5,

$$b_3 = \frac{1}{54c_4c_6^2}\Big(27k_1c_6^3 - 4a_{53}^3c_4 + 36a_{31}c_4c_6^2 + \dots\Big).$$

De e_5 obtemos que

$$k_3 = \frac{1}{81c_6^3}\Big(27\lambda a_2b_{53}c_6^2 - 54a_3c_4c_6^2 - 7b_{53}^3c_4 + \dots\Big).$$

Novamente por e_5 temos

$$k_1 = \frac{1}{9c_6^3}\Big(3\lambda K_{p2}b_{53}c_6^2 + 3a_{q2}a_{53}c_6^2 - 3K_{q2}b_{53}c_6^2 + \dots\Big).$$

De e_3 segue que

$$k_2 = \frac{1}{1994c_4^2c_6^4}\Big(243\lambda^2a_2K_{p2}b_{53}c_6^4 + 108a_3a_{53}b_{53}c_4^2c_6^2 + \dots\Big).$$

Por e_3 obtemos

$$k_4 = \frac{1}{648c_4^2c_6^4}\Big(864a_3a_4c_4^2c_6^3 - 648a_{31}K_{q2}c_4c_6^4 - 432a_3b_4c_4^2c_6^3 + \dots\Big).$$

De e_4 temos que

$$b_2 = \frac{1}{648c_4^2c_6^3}\Big(486\lambda K_{p2}K_{q2}c_6^4 - 108\lambda a_2a_{53}^2c_4c_6^2 - 28b_{53}^4c_4^2 + \dots\Big).$$

Por e_4,

$$b_4 = \frac{3a_4c_6 + a_{53}^2 - b_{53}^2}{3c_6} \text{ e } K_{q2} = \frac{9\lambda K_{p2}c_6^2 + 2a_{53}b_{53}c_4}{9c_6^2}.$$

Novamente de e_4 segue que

$$K_{p2} = \frac{27a_3a_{53}c_6^2 + 2a_{53}b_{53}^3 + 27a_{31}b_{53}c_6^2 - 18a_4a_{53}b_{53}c_6}{81c_6^3}.$$

Agora, de e_2 temos

$$a_{31} = \frac{6a_4a_{53}c_6 - a_{53}b_{53}^2}{9c_6^2} \text{ e } a_3 = \frac{18a_4b_{53}c_6 - 5b_{53}^3}{27c_6^2}$$

e, consequentemente, $k_1k_4 - k_2k_3 = 0$. Absurdo. Desse modo, $q_4 = \lambda p_4$.

Suponhamos $q_3 \neq \lambda p_3$. Consideremos $l = 6$ e $s = 4$ em (4.15), (4.16) e (4.17).

- **1º Caso:** $r = x^3$.

Este caso está relacionado a terceira forma possível de H dada no enunciado do teorema. Escrevamos

$$\begin{aligned}
p_5 &= a_5x^5 + b_5y^5 + xy[a_{53}x^3 + b_{53}y^3 + xy(a_{51}x + b_{51}y)],\\
p_4 &= a_4x^4 + b_4y^4 + xy(a_{42}x^2 + K_{42}xy + b_{42}y^2),\\
p_3 &= a_3x^3 + b_3y^3 + xy(a_{31}x + b_{31}y),\\
p_2 &= a_2x^2 + b_2y^2 + K_2xy,\\
q_2 &= a_{q2}x^2 + b_{q2}y^2 + K_{q2}xy.
\end{aligned}$$

De e_6 segue $b_5 = b_{51} = b_{53} = 0$,

$$b_{q2} = \frac{2\lambda b_2c_6 + a_{51}c_3}{2c_6} \text{ e } K_{q2} = \frac{2\lambda K_2c_6 + a_{53}c_3}{2c_6}.$$

Denotemos $k_1 = -\lambda k_2 + s$ e $k_3 = -\lambda k_4 + w$. Por e_5,

$$b_{42} = \frac{a_{51}a_{53}}{2c_6},\ b_4 = \frac{a_{51}^2}{4c_6},\ K_{42} = \frac{3a_{53}^2c_3 - 8a_{q2}a_{51}c_6 + 8\lambda a_2a_{51}c_6 + 10a_5a_{51}c_3}{12c_3c_6}$$

e

$$a_{42} = \frac{5a_5a_{53}c_3 - 4a_{q2}a_{53}c_6 + 4\lambda a_2a_{53}c_6 + 12sc_6^2}{6c_3c_6}.$$

Dos coeficientes associados a x^4, x^3y e x^2y^2 em e_4 obtemos, respectivamente, que

$$a_{31} = \frac{1}{9c_3^2c_6}\Big(4a_{q2}^2a_{53}c_6 - 5a_5a_{q2}a_{53}c_3 + \dots\Big),\ b_{31} = \frac{1}{36c_3^2c_6^2}\Big(5a_5a_{53}^2c_3^2 - 32\lambda a_2a_{q2}a_{51}c_6^2 + \dots\Big)$$

e

$$b_3 = \frac{1}{18c_3c_6^2}\Big(18sa_{51}c_6^2 + 10\lambda a_2a_{51}a_{53}c_6 + \dots\Big).$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$a_{q2} \neq \frac{2\lambda a_2c_6 + a_5c_3}{2c_6}.$$

Assim, de e_4, $a_{51} = 0$. Pelos coeficientes de xy^2 e x^2y de e_3 segue que $a_{53} = 0$ e $b_2 = \dfrac{s^2c_6}{c_3^2}$. Dessa forma, do coeficiente relacionado a xy em e_2 obtemos que $s = 0$. Daí, por e_3, $K_2 = 0$ e, em seguida, de e_2 temos que $k_2 = 0$. Contradição. Logo,

$$a_{q2} = \frac{2\lambda a_2c_6 + a_5c_3}{2c_6}.$$

Por e_3, mais especificamente dos coeficientes associados a x^3 e x^2y, segue que

$$K_2 = \frac{1}{18c_3^2c_6^3}\Big(wa_5a_{53}c_3c_6^2 + 12swc_6^4 + \dots\Big) \text{ e } b_2 = \frac{1}{72c_3^2c_6^3}\Big(4wa_5a_{51}c_3c_6^2 + 72s^2c_6^4 + \dots\Big),$$

respectivamente. Assumamos, por contradição,

$$a_4 \neq \frac{a_5^2c_3 - 8wc_6^2}{4c_3c_6}.$$

Daí, de e_3, $a_{51} = 0$. Assim, por e_2, $a_{53} = 0$. Consequentemente, de e_1 obtemos que $s = 0$. Logo, por e_2, $k_2 = 0$. Absurdo. Desse modo,

$$a_4 = \frac{a_5^2c_3 - 8wc_6^2}{4c_3c_6}.$$

Suponhamos, por absurdo,

$$a_2 \neq \frac{2w^2c_6^2 + wa_5^2c_3 + a_3a_5c_3^2}{2c_3^2c_6}.$$

Dessa maneira, por e_2, $a_{51} = 0$. Do coeficiente de y em e_1 e de e_2 temos que

$$a_{53} = 0 \text{ e } sa_3c_3 + swa_5 + k_2c_3^2 = 0.$$

Observemos que da segunda igualdade acima segue que $s \neq 0$. Logo, por e_1,

$$a_2 = \frac{2sw^2c_6^2 - k_2a_5c_3^3}{2sc_3^2c_6}.$$

Daí,

$$0 \neq a_2 - \frac{2w^2c_6^2 + wa_5^2c_3 + a_3a_5c_3^2}{2c_3^2c_6} = -\frac{a_5(sa_3c_3 + swa_5 + k_2c_3^2)}{2sc_3c_6} = 0.$$

Absurdo. Assim,

$$a_2 = \frac{2w^2c_6^2 + wa_5^2c_3 + a_3a_5c_3^2}{2c_3^2c_6}.$$

De e_2 temos $s \neq 0$ e

$$a_3 = -\frac{swa_5 + k_2c_3^2}{sc_3}.$$

Como $1 = k_1k_4 - k_2k_3 = sk_4 - wk_2$, segue de e_1 que $a_{51} = a_{53} = 0$.

Consideremos o isomorfismo $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$T_2(x, y) = \Big(sx, \frac{s^2wx + \alpha^3c_3y}{s^2}\Big)$$

com $\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{s}{c_3}}$. Observemos que $\det(T_2) = 1$. Logo,

$$H \circ T \circ T_1 \circ T_2 = \frac{P^2 + (Q + \lambda P)^2}{2}$$

onde

$$Q = y + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3$$

e

$$P = x + C_1 Q + C_2 Q^2,$$

com $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $C_2, \alpha_2 \neq 0$.

- **2º Caso:** $r = x^2 y$.

De e_6 obtemos que $p_5(1,0) = p_5(0,1) = 0$. Daí, $p_5 = xyp_{53}$. Por e_6,

$$c_3 y(p_{53} + 2yp_{53_y}) \in x\mathcal{H}_3$$

e, assim, $p_{53} = xp_{52}$. Escrevamos

$$\begin{aligned}
p_{52} &= a_{52}x^2 + K_{52}xy + b_{52}y^2, \\
p_4 &= a_4x^4 + b_4y^4 + xy(a_{42}x^2 + K_{42}xy + b_{42}y^2), \\
p_3 &= a_3x^3 + b_3y^3 + xy(a_{31}x + b_{31}y), \\
p_2 &= a_2x^2 + b_2y^2 + K_{p2}xy, \\
q_2 &= a_{q2}x^2 + b_{q2}y^2 + K_{q2}xy.
\end{aligned}$$

De e_6 segue que

$$a_{q2} = \frac{2\lambda a_2 c_6 + a_{52}c_3}{2c_6}, \; b_{q2} = \frac{2\lambda b_2 c_6 + b_{52}c_3}{2c_6} \text{ e } K_{q2} = \frac{2\lambda K_{p2}c_6 + K_{52}c_3}{2c_6}.$$

Agora, de e_5 temos

$$a_4 = \frac{a_{52}^2}{4c_6}, \; b_4 = \frac{b_{52}^2}{4c_6}, \; b_{42} = \frac{b_{52}K_{52}}{2c_6}, \; k_1 = \frac{4K_{42}c_3c_6 - 8\lambda k_2 c_6^2 - K_{52}^2c_3 - 2a_{52}b_{52}c_3}{8c_6^2}$$

e

$$k_3 = \frac{a_{52}K_{52}c_3 - 2a_{42}c_3c_6 - 4\lambda k_4 c_6^2}{4c_6^2}.$$

Por e_4 obtemos que

$$a_3 = \frac{2a_{42}a_{52}c_6 - a_{52}^2K_{52}}{4c_6^2}, \; b_3 = \frac{4b_{52}K_{42}c_6 - 2a_{52}b_{52}^2 - b_{52}K_{52}^2}{8c_6^2}$$

e

$$b_{31} = \frac{4K_{42}K_{52}c_6 - K_{52}^3 - 4a_{52}b_{52}K_{52} - 4a_{42}b_{52}c_6}{8c_6^2}.$$

Por e_3,

$$a_2 = \frac{1}{8c_6^3}\Big(2a_{52}^2K_{52}^2 - 4a_{42}a_{52}K_{52}c_6 + 2a_{42}^2c_6^2 + \dots\Big),$$

$$b_2 = \frac{1}{64c_6^3}\Big(16a_{52}b_{52}K_{52}^2 - 8K_{42}K_{52}^2c_6 + K_{52}^4 + \dots\Big)$$

e

$$K_{p2} = \frac{1}{8c_6^3}\Big(2a_{52}^2b_{52}K_{52} - 3a_{42}K_{52}^2c_6 + 2a_{52}K_{52}^3 + \dots\Big).$$

De e_2 temos

$$k_4 = \frac{1}{32c_6^4}\Big(10a_{42}a_{52}K_{52}^2c_6 - 8a_{31}a_{52}K_{52}c_6^2 - 3a_{52}^2K_{52}^3 + \dots\Big)$$

e

$$k_2 = \frac{1}{64c_6^4}\Big(8a_{31}K_{52}^2c_6^2 - 32a_{31}K_{42}c_6^3 + 3a_{52}K_{52}^4 + \dots\Big).$$

Assim, $k_1k_4 - k_2k_3 = 0$. Absurdo.

- **3º Caso:** $r = x(x^2 + y^2)$.

Denotemos

$$p_5 = a_5x^5 + b_5y^5 + xy(a_{53}x^3 + b_{53}y^3 + xyp_{51}),$$
$$p_4 = a_4x^4 + b_4y^4 + xy(a_{42}x^2 + K_{42}xy + b_{42}y^2),$$
$$p_3 = a_3x^3 + b_3y^3 + xy(a_{31}x + b_{31}y),$$
$$p_2 = a_2x^2 + b_2y^2 + K_{p2}xy,$$
$$q_2 = a_{q2}x^2 + b_{q2}y^2 + K_{q2}xy.$$

De e_6 segue $b_5 = 0$. Daí, por e_6,

$$K_{q2} = \frac{2\lambda K_{p2}c_6 + a_{53}c_3}{2c_6} \text{ e } b_{q2} = \frac{2\lambda b_2c_6 + b_{53}c_3}{2c_6}.$$

De e_6 temos que

$$p_{51} = \frac{10a_5c_3 - 8a_{q2}c_6 + 8\lambda a_2c_6 + 6b_{53}c_3}{6c_3}x + a_{53}y$$

e, em seguida, novamente por e_6,

$$a_{q2} = \frac{a_5c_3 + 2\lambda a_2c_6}{2c_6}.$$

Dos coeficientes de e_5 associados aos monômios y^5, xy^4 e x^4y segue que

$$b_4 = \frac{b_{53}^2}{4c_6},\ k_1 = \frac{2b_{42}c_3c_6 - 4\lambda k_2c_6^2 - a_{53}b_{53}c_3}{4c_6^2}$$

e

$$k_3 = \frac{12K_{42}c_3c_6 - 8\lambda k_4c_6^2 - 16a_4c_3c_6 + 4a_5^2c_3 - 6a_5b_{53}c_3 - 3a_{53}^2c_3}{8c_6^2},$$

respectivamente. Novamente por e_5, dos coeficientes de x^5 e x^2y^3 temos, respectivamente, que

$$a_{42} = \frac{2b_{42}c_6 - a_{53}b_{53} + a_5a_{53}}{2c_6} \text{ e } K_{42} = \frac{a_{53}^2 + 2a_5b_{53} + 4a_4c_6 - a_5^2}{4c_6}.$$

Dos coeficientes relacionados a x^4, x^3y e y^4 em e_4, temos

$$a_{31} = \frac{4a_5b_{42}c_6 - 2a_5a_{53}b_{53} - a_5^2a_{53} + 4a_4a_{53}c_6}{8c_6^2},\ b_{31} = \frac{1}{8c_6^2}\Big(4a_{53}b_{42}c_6 + 4a_4b_{53}c_6 + 8a_3c_6^2 + \dots\Big)$$

e

$$b_3 = \frac{2b_{42}b_{53}c_6 - a_{53}b_{53}^2}{4c_6^2}.$$

Por e_3, dos coeficientes de x^3 e y^3 obtemos que

$$K_{p2} = \frac{1}{16c_6^3}\Big(8a_3a_{53}c_6^2 - 4a_4a_{53}b_{53}c_6 - 4a_4a_5a_{53}c_6 + \dots\Big)$$

e

$$b_2 = \frac{1}{16c_6^3}\Big(4b_{42}^2c_6^2 - 4a_4a_5b_{53}c_6 + a_{53}^2b_{53}^2 + \dots\Big).$$

Novamente de e_3 temos que

$$a_2 = \frac{32a_3a_5c_6^2 - 24a_4a_5^2c_6 + 16a_4^2c_6^2 + 5a_5^4}{64c_6^3}.$$

Pelos coeficientes de x^2 e xy em e_2, segue

$$k_2 = \frac{1}{32c_6^4}\Big(8a_4a_5b_{42}c_6^2 + a_5^3a_{53}b_{53} - 2a_5^3b_{42}c_6 + \dots\Big)$$

e

$$k_4 = \frac{32a_3a_4c_6^3 - 16a_4^2a_5c_6^2 + 8a_4a_5^3c_6 - 8a_3a_5^2c_6^2 - a_5^5}{64c_6^4}.$$

Dessa forma, $k_1k_4 - k_2k_3 = 0$. Contradição.

- **4º Caso:** $r = x(x^2 - y^2)$.

  Escrevamos

$$\begin{aligned} p_5 &= a_5x^5 + b_5y^5 + xyp_{53},\\ p_4 &= a_4x^4 + b_4y^4 + xyp_{42},\\ p_3 &= a_3x^3 + b_3y^3 + xy(a_{31}x + b_{31}y),\\ p_2 &= a_2x^2 + b_2y^2 + K_{p2}xy,\\ q_2 &= a_{q2}x^2 + b_{q2}y^2 + K_{q2}xy. \end{aligned}$$

Por e_6, $b_5 = 0$ e

$$p_{53} = -\frac{2c_6(\lambda K_{p2} - K_{q2})}{c_3}x^3 + yp_{52}.$$

De e_6 temos que existe $K_{52} \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_{52} = -\frac{5a_5c_3 - 4a_{q2}c_6 + 4\lambda a_2c_6 - 6b_{q2}c_6 + 6\lambda b_2c_6}{3c_3}x^2 + K_{52}xy + \frac{2c_6(\lambda b_2 - b_{q2})}{c_3}y^2.$$

Dos coeficientes de x^4y^2 e x^3y^3 em e_6, obtemos

$$K_{52} = \frac{2c_6(\lambda K_{p2} - K_{q2})}{c_3} \text{ e } a_{q2} = \frac{a_5c_3 + 2\lambda a_2 c_6}{2c_6},$$

respectivamente. De e_5 temos

$$b_4 = \frac{c_6(\lambda^2 b_2^2 - 2\lambda b_2 b_{q2} + b_{q2}^2)}{c_3^2}.$$

Por e_5, existe $K_{42} \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\begin{aligned} p_{42} = &\frac{2k_1c_6 - \lambda a_5 K_{p2} + a_5 K_{q2} + 2\lambda k_2 c_6}{c_3} x^2 + K_{42}xy \\ &+ \frac{2c_6(b_{q2}K_{q2} - \lambda k_2 c_3 - \lambda b_{q2}K_{p2} - \lambda b_2 K_{q2} + \lambda^2 b_2 K_{p2} - k_1 c_3)}{c_3^2} y^2. \end{aligned}$$

Pelos coeficientes associados a x^2y^3 e x^4y de e_5 segue, respectivamente, que

$$K_{42} = \frac{1}{c_3^2}\Big(\lambda^2 K_{p2}^2 c_6 - \lambda a_5 b_2 c_3 + K_{q2}^2 c_6 + \dots\Big) \text{ e } k_3 = \frac{a_5^2 c_3 - 4a_4 c_3 c_6 - 8\lambda k_4 c_6^2}{8c_6^2}.$$

Dos coeficientes de x^4 e y^4 em e_4 temos

$$a_{31} = \frac{1}{4c_3c_6}\Big(4a_4 K_{q2} c_6 - a_5^2 K_{q2} + 4k_1 a_5 c_6 + \dots\Big)$$

e

$$b_3 = \frac{2k_1 b_{q2} c_6 + \lambda k_2 b_{q2} c_6 - 2\lambda k_1 b_2 c_6 - 2\lambda^2 k_2 b_2 c_6}{c_3^2}.$$

Novamente por e_4 segue que

$$b_{31} = \frac{1}{8c_3^2c_6^2}\Big(4a_4 a_5 c_3^2 c_6 - 8a_3 c_3^2 c_6^2 - a_5^3 c_3^2 + \dots\Big).$$

Denotemos $k_1 = -\lambda k_2 + s$. Do coeficiente de xy em e_2 segue

$$k_4 = \frac{1}{64c_3^2c_6^4}\Big(64a_5 c_6^4 s^2 - a_5^5 c_3^2 + 32\lambda b_2 a_4^2 c_3 c_6^3 + \dots\Big).$$

Pelo coeficiente associado ao monômio x^2y de e_3, obtemos que

$$a_2 = \frac{1}{64c_3^2c_6^3}\Big(96c_6^4 s^2 + 16a_4^2 c_3^2 c_6^2 - 92b_2 c_3^2 c_6^3 + \dots\Big).$$

Assumamos, por contradição, $K_{q2} = \lambda K_{p2}$. Dessa forma, pelo coeficiente de x^3 em e_3,

$$K_{p2} = \frac{4a_4 c_6 s - a_5^2 s}{4c_3 c_6}.$$

Se $s = 0$, então de e_2 segue que $k_2 = 0$ e isso é um absurdo. Logo, $s \neq 0$. Desse modo, por e_2, temos

$$a_3 = \frac{4a_4a_5c_6s - 8k_2c_3c_6^2 - a_5^3s}{8sc_6^2}.$$

Em seguida, de e_3 obtemos que

$$c_6 = \frac{k_2b_{q2}c_3^2 + b_2sc_3^2 - \lambda k_2b_2c_3^2}{s^3}$$

e, então, $k_1k_4 - k_2k_3 = 0$. Absurdo. Dessa maneira, $K_{q2} \neq \lambda K_{p2}$. Do coeficiente de xy^2 em e_3, segue que

$$a_3 = \frac{1}{8c_6^2(\lambda K_{p2} - K_{q2})}\Big(a_5^3K_{q2} - 8K_{p2}c_3c_6^2 + 8a_4c_6^2s + \dots\Big).$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$4a_4c_6s - 4c_3c_6K_{p2} - a_5^2s = 0.$$

Assim, isolando K_{p2} na igualdade anterior, segue de e_3 que

$$b_2 = \frac{c_6s^2}{c_3^2}.$$

Dessa maneira, por e_2, $k_2 = 0$. Daí, $k_1k_4 - k_2k_3 = 0$. Contradição. Logo, de e_3 temos

$$b_{q2} = \frac{1}{c_3(4a_4c_6s - 4c_3c_6K_{p2} - a_5^2s)}\Big(4\lambda a_4b_2c_3c_6s - \lambda b_2c_3a_5^2s + 4K_{q2}c_6^2s^2 + \dots\Big).$$

Assim, por e_1,

$$4a_4c_6s^2 - a_5^2s^2 - 4K_{p2}c_3c_6s - 4K_{q2}k_2c_3c_6 + 4\lambda K_{p2}k_2c_3c_6 = 0.$$

Então,

$$k_1k_4 - k_2k_3 = \frac{(4a_4c_6 - a_5^2)(4a_4c_6s^2 - a_5^2s^2 - 4K_{p2}c_3c_6s - 4K_{q2}k_2c_3c_6 + 4\lambda K_{p2}k_2c_3c_6)}{32c_6^3(\lambda K_{p2} - K_{q2})} = 0.$$

Absurdo.

Suponhamos $q_3 = \lambda p_3$ e $q_2 \neq \lambda p_2$. Seja $l = 6$ e $s = 3$ em (4.15), (4.16) e (4.17).

- **1º Caso:** $r = x^2$.

Este caso está relacionado a existência da segunda forma possível para H. De e_5 obtemos que existe $a_5 \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_5 = a_5x^5 + \frac{3c_6(k_1 + \lambda k_2)}{c_2}x^4y.$$

Por e_4, existe $a_4 \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_4 = a_4x^4 + \frac{(k_1+\lambda k_2)(3k_3c_6+3\lambda k_4c_6+5a_5c_2)}{2c_2^2}x^3y + \frac{3c_6(k_1+\lambda k_2)^2}{c_2^2}x^2y^2.$$

De e_3 segue que existe $a_3 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\begin{aligned} p_3 = a_3x^3 &+ \frac{(k_1+\lambda k_2)(3\lambda^2k_4^2c_6+5\lambda k_4a_5c_2+6\lambda k_3k_4c_6+3k_3^2c_6+8a_4c_2^2+5k_3a_5c_2)}{4c_2^3}x^2y \\ &+ \frac{(k_1+\lambda k_2)^2(7k_3c_6+7\lambda k_4c_6+5a_5c_2)}{8c_2^3}xy^2 + \frac{c_6(k_1+\lambda k_2)^3}{c_2^3}y^3. \end{aligned}$$

Denotemos $k_1 = -\lambda k_2 + s$ e $k_3 = -\lambda k_4 + w$. Se $s = 0$, então de e_2 segue que $p_{2_y} = 0$ e, em seguida, por e_1 temos $k_2 = 0$, e isto é um absurdo. Assim, $s \neq 0$. Desse modo, por e_2,

$$w = -\frac{a_5c_2}{3c_6}.$$

Novamente de e_2 temos que existe $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$p_2 = a_2x^2 + \frac{s(a_5^3-6a_4a_5c_6+27a_3c_6^2)}{18c_2c_6^2}xy + \frac{s^2(3a_4c_6-a_5^2)}{3c_2^2c_6}y^2.$$

Logo, de e_1 obtemos que

$$a_2 = \frac{3sa_4a_5^2c_6 - sa_5^4 - 27k_2c_2c_6^3}{27sc_6^3} \text{ e } a_3 = \frac{18a_4a_5c_6 - 5a_5^3}{27c_6^2}.$$

Consideremos o isomorfismo $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$T_2(x,y) = \left(sx, \frac{c_2(3\alpha^3c_6y - s^2a_5x)}{3s^2c_6}\right)$$

com $\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{s}{c_2}}$. Notemos que $\det(T_2) = 1$. Assim,

$$H \circ T \circ T_1 \circ T_2 = \frac{P^2 + (Q+\lambda P)^2}{2}$$

onde $Q = y + \alpha_1x^2$ e $P = x + C_1Q + C_2Q^2 + C_3Q^3$, com $C_1, C_2, C_3, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ e $C_3, \alpha_1 \neq 0$.

- **2º Caso:** $r = xy$.

$$\begin{aligned} p_5 &= a_5x^5 + b_5y^5 + xy(a_{53}x^3 + b_{53}y^3 + xyp_{51}), \\ p_4 &= a_4x^4 + b_4y^4 + xy(a_{42}x^2 + K_{42}xy + b_{42}y^2), \\ p_3 &= a_3x^3 + b_3y^3 + xy(a_{31}x + b_{31}y), \\ p_2 &= a_2x^2 + b_2y^2 + K_{p2}xy. \end{aligned}$$

De e_5 obtemos que $a_5 = b_5 = a_{53} = b_{53} = 0$ e

$$p_{51} = -\frac{3c_6(k_3 + \lambda k_4)}{c_2}x + \frac{3c_6(k_1 + \lambda k_2)}{c_2}y.$$

Por e_4, $a_4 = b_4 = 0$,

$$a_{42} = \frac{3c_6(k_3 + \lambda k_4)^2}{c_3^2} \text{ e } b_{42} = \frac{3c_6(k_1 + \lambda k_2)^2}{c_3^2}.$$

Dessa forma, de e_3 temos que

$$a_3 = -\frac{c_6(k_3 + \lambda k_4)^3}{c_2^3}, \; b_3 = \frac{c_6(k_1 + \lambda k_2)^3}{c_2^3},$$

$$a_{31} = -\frac{(k_3 + \lambda k_4)(9\lambda^2 k_2 k_4 c_6 + 9\lambda k_1 k_4 c_6 + 9\lambda k_2 k_3 c_6 + 2c_2^2 K_{42} + 9k_1 k_3 c_6)}{c_2^3}$$

e

$$b_{31} = \frac{(k_1 + \lambda k_2)(9\lambda^2 k_2 k_4 c_6 + 9\lambda k_1 k_4 c_6 + 9\lambda k_2 k_3 c_6 + 2c_2^2 K_{42} + 9k_1 k_3 c_6)}{c_2^3}.$$

Em seguida, por e_2,

$$a_2 = \frac{(k_3 + \lambda k_4)^2(6\lambda^2 k_2 k_4 c_6 + 6\lambda k_1 k_4 c_6 + 6\lambda k_2 k_3 c_6 + 6k_1 k_3 c_6 c_2^2 K_{42})}{c_2^4}$$

e

$$b_2 = \frac{(k_1 + \lambda k_2)^2(6\lambda^2 k_2 k_4 c_6 + 6\lambda k_1 k_4 c_6 + 6\lambda k_2 k_3 c_6 + 6k_1 k_3 c_6 c_2^2 K_{42})}{c_2^4}.$$

Denotemos $k_1 = \lambda k_2 + s$ e $k_3 = \lambda k_4 + w$. Assim, de e_1,

$$12c_6 s^2 w^3 + 2K_{42}c_2^2 s w^2 + K_{p2}c_2^4 w + k_4 c_2^5 = 0$$

e

$$12c_6 s^3 w^2 + 2K_{42}c_2^2 s^2 w + K_{p2}c_2^4 s + k_2 c_2^5 = 0.$$

Se $w = 0$, então $k_3 = k_4 = 0$ e isso é um absurdo. Logo, isolando K_{p2} na primeira igualdade dada acima e, em seguida, substituindo na segunda, obtemos que

$$0 = k_4 s - k_2 w = k_1 k_4 - k_2 k_3.$$

Contradição.

- **3º Caso:** $r = x^2 + y^2$.

Consideremos

$$
\begin{aligned}
p_5 &= a_5x^5 + b_5y^5 + xy[a_{53}x^3 + b_{53}y^3 + xy(a_{51}x + b_{51}y)],\\
p_4 &= a_4x^4 + b_4y^4 + xy(a_{42}x^2 + K_{42}xy + b_{42}y^2),\\
p_3 &= a_3x^3 + b_3y^3 + xy(a_{31}x + b_{31}y),\\
p_2 &= a_2x^2 + b_2y^2 + K_{p2}xy,\\
k_1 &= -\lambda k_2 + s,\\
k_3 &= \lambda k_4 + w.
\end{aligned}
$$

Dos coeficientes de x^5 e y^5 em e_5 temos, respectivamente, que

$$s = \frac{a_{53}c_2}{3c_6} \text{ e } w = -\frac{b_{53}c_6}{3c_6}.$$

Novamente por e_5 obtemos que

$$a_{51} = 2b_{53},\ b_{51} = 2a_{53},\ a_5 = b_{53} \text{ e } b_5 = a_{53}.$$

De e_4 segue que

$$a_{42} = b_{42} = \frac{2a_{53}b_{53}}{3c_6},\ a_4 = \frac{b_{53}^2 - a_{53}^2 + 3K_{42}c_6}{6c_6} \text{ e } b_4 = \frac{a_{53}^2 - b_{53}^2 + 3K_{42}c_6}{6c_6}.$$

Por e_3,

$$a_{31} = -\frac{a_{53}^3 - 3K_{42}a_{53}c_6}{9c_6^2},\ b_{31} = -\frac{b_{53}^3 - 3K_{42}b_{53}c_6}{9c_6^2},\ a_3 = -\frac{2b_{53}^3 + 3a_{53}^2b_{53} - 9K_{42}b_{53}c_6}{27c_6^2}$$

e

$$b_3 = -\frac{2a_{53}^3 + 3a_{53}b_{53}^2 - 9K_{42}a_{53}c_6}{27c_6^2}.$$

Em seguide, de e_1 temos

$$k_2 = -\frac{2a_2a_{53} - K_{p2}b_{53}}{6c_6} \text{ e } k_4 = \frac{2b_2b_{53} - K_{p2}a_{53}}{6c_6}.$$

Por fim, de e_2 obtemos que

$$K_{p2} = -\frac{a_{53}b_{53}^3 + a_{53}^3b_{53} - 3K_{42}a_{53}b_{53}c_6}{27c_6^3} \text{ e } a_2 = \frac{a_{53}^4 - b_{53}^4 + 3K_{42}b_{53}^2c_6 - 3K_{42}a_{53}^2c_6 + 54b_2c_6^3}{c_6^3}.$$

Desse modo, $k_1k_4 - k_2k_3 = 0$ e isso é um absurdo.

O caso seguinte está relacionado a primeira forma possível de H dada no enunciado do teorema. Agora, suponhamos $q_i = \lambda p_i$ para cada $i \in \{2, 3, \ldots, 6\}$. Dessa maneira, de (4.5), (4.6) e (4.7) temos, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$,

$$p_{i+1_x} + \lambda p_{i+1_y} = e_i = 0.$$

Logo, do Lema 4.2 obtemos que, para todo $i \in \{2, 3, \ldots, 6\}$, existe $C_i \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$p_i = C_i(y - \lambda x)^i \text{ e } q_i = \lambda p_i.$$

Seja $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo definido por $T_1(x, y) = (x, y + \lambda x)$. Desse modo,

$$H \circ T \circ T_1 = \frac{P^2 + (y + \lambda P)^2}{2},$$

onde $P = x + C_2y^2 + C_3y^3 + C_4y^4 + C_5y^5 + C_6y^6$ com $C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \in \mathbb{R}$ e $C_6 \neq 0$.

Agora, consideremos $p_6 = 0$. Daí, $q_6 \neq 0$ pois H tem grau 12. Seja $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o isomorfismo dado por $T_1 = (y, x)$. Denotemos

$$F_1 = f_2 \circ T \circ T_1 = x + q_2 \circ T_1 + \ldots + q_6 \circ T_1$$

e

$$F_2 = f_1 \circ T \circ T_1 = y + p_2 \circ T_1 + \ldots + p_5 \circ T_1.$$

Observemos que $\Big|J(F_1, F_2)\Big| \equiv 1$ e $q_6 \circ T_1 \neq 0$. Logo, de forma análoga a feita nos casos anteriores, existe um isomorfismo $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $\det(T_2) = 1$, de tal forma que

$$H \circ T \circ T_1 \circ T_2 = \frac{(Q + \lambda P)^2 + P^2}{2}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é o número tal que $p_6 \circ T_1 = \lambda(q_6 \circ T_1)$ (neste caso, $\lambda = 0$) e os polinômios Q e P são dados ou como na 1ª Forma ou como na 2ª Forma ou como na 3ª Forma.

Para finalizar, mostremos que as três formas dadas no enunciado do teorema são independentes. Suponhamos, por absurdo, que existe um isomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de modo que

$$G := \frac{P_1^2 + (Q_1 + \lambda_1 P_1)^2}{2} - \frac{(P_2 \circ T)^2 + [(Q_2 \circ T) + \lambda_2(P_2 \circ T)]^2}{2} = 0$$

com Q_1 e P_1 como em uma das três formas e, Q_2 e P_2 como em uma das outras duas formas restantes. Consideremos Q_1 e P_1 como na 1ª Forma e, Q_2 e P_2 como na 2ª Forma. Assim, do coeficiente de x^{12} em G, segue que $a = 0$. Pelo coeficiente associado a x^5y^2 em G obtemos que $bc = 0$. Contradição.

Agora, assumamos Q_1 e P_1 como na 1ª Forma e, Q_2 e P_2 como na 3ª Forma. Do coeficiente de x^{12} temos que $a = 0$. Consequentemente, pelo coeficiente relacionado a x^4, $bc = 0$ e isso é um absurdo.

Por fim, tomemos Q_1 e P_1 como na 2ª Forma e, Q_2 e P_2 como na 3ª Forma. Do coeficiente de y^{12} segue que $b = 0$. Logo, do coeficiente de x^9y, $ad = 0$. Absurdo. $\square$

CAPÍTULO 5

Conclusão

Na primeira parte do trabalho, estudamos os centros não degenerados na origem de sistemas Hamiltonianos planares biquadrados, ou seja, sistemas associados à funções do tipo

$$H(x, y) = A(x) + B(x)y^2 + C(x)y^4,$$

onde A, B e C são polinômios. Esse é um passo inicial para tentar responder à Pergunta 1.2, para isso veja [5, Proposição 4.1]. Uma característica importante dessa classe de sistemas é a reversibilidade com o eixo x sendo reta de simetria. Diante disso, estabelecemos relações entre as trajetórias periódicas no círculo periódico $\mathcal{P}$ (determinado pelo centro na origem) e os polinômios A, B e C, e para um centro não global, construímos todas as possíveis formas para a fronteira de $\mathcal{P}$. Mais especificamente, mostramos que a fronteira de $\mathcal{P}$ é gerada a partir de 17 formas base, determinando então todos os possíveis formatos para $\mathcal{P}$. Essas 17 formas são, de certa forma, os possíveis comportamentos iniciais da fronteira de $\mathcal{P}$ no primeiro quadrante do plano (veja as Figuras 3.4, 3.5 e 3.9). A menos de reflexão em torno do eixo y, os possíveis comportamentos no segundo quadrante são os mesmos que no primeiro.

Nos baseando nessa classificação, determinamos no Teorema 3.8 todos os valores possíveis para o nível da fronteira do círculo periódico $\mathcal{P}$ associado a um centro não global na origem. Apresentamos também, no Teorema 3.10, condições necessárias e suficientes para que a origem seja um centro global. Em seguida, verificamos que todos os casos dados nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.9 são realizáveis (veja do Exemplo 3.11 ao Exemplo 3.25). Uma vez que a fronteira de $\mathcal{P}$, como um todo, pode ser formada por diversas combinações (inclusive em um mesmo quadrante) das 17 formas base, a ideia foi realmente ver que cada uma delas se realiza individualmente. Também damos dois exemplos de centros globais na origem (veja o Exemplo 3.26 e o Exemplo 3.27). Por fim, na Proposição 3.28, caracterizamos os centros isócronos triviais de período 2π. Dessa proposição e de [5, Teorema E] segue que o centro global dado no Exemplo 3.27 não é isócrono, e que todo centro isócrono de período 2π, com H de grau maior ou igual a cinco, é não trivial (veja o Corolário 3.29).

Temos, a partir de todo esse estudo, a classificação completa de um centro não degenerado na origem de um sistema Hamiltoniano planar biquadrado, bem como as ferramentas necessárias para que, em um trabalho futuro, possamos analisar a isocronicidade de tais centros. Além disso, a classe de sistemas com H de grau seis, é um ambiente propício para procurar um centro isócrono na origem, com o objetivo de responder negativamente à Pergunta 1.2.

Na segunda parte do trabalho, estudamos aplicações polinomiais $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ determinante Jacobiano constante e não nulo, uma vez que o Teorema 1.1 conecta esse tipo de aplicação com o estudo de centros isócronos triviais em sistemas Hamiltonianos planares polinomiais. Essa conexão é extremamente forte já que, por [17, Teorema 2.3], provar que um centro isócrono trivial de um sistema Hamiltoniano planar polinomial é global, é equivalente a provar a Conjectura Jacobiana no plano. Diante disso, analisamos aplicações f que satisfazem $f(0,0) = (0,0)$ e $\left|Jf\right| \equiv 1$, e no Corolário 4.6 e no Teorema 4.11 apresentamos, sob certas hipóteses, formas canônicas para f, tendo como consequência a injetividade da aplicação f. Observamos que a forma dada no Teorema 4.11 só depende da paridade do grau de f.

Em [2, Proposição 1, Teorema 2.3, Teorema 2.4] são caracterizados os centros isócronos triviais na origem de sistemas Hamiltonianos associados à funções H de graus 4, 6 e 8. Na realidade, são dadas formas canônicas para as aplicações f, associadas aos centros isócronos triviais, de graus 2, 3 e 4. Para f de grau 2 ou 3, existe somente uma forma canônica possível; para f de grau 4, existem duas possíveis formas canônicas. Uma questão a ser discutida é a de que se há alguma relação entre o número de formas canônicas possíveis e os divisores positivos do grau de f menores que o grau de f. Com base nisso, no Teorema 4.16 e no Teorema 4.17, caracterizamos os centros isócronos triviais na origem com H de grau 10, 12, 14 e 22. Mais especificamente, no Teorema 4.16, juntamente com os Lemas 4.13, 4.14 e 4.15, mostramos que aplicações f de graus 5, 7 e 11 (números primos) admitem uma única forma canônica possível; e no Teorema 4.17 provamos que aplicações f de grau 6 (tem 3 divisores menores que 6) admitem 3 formas canônicas possíveis.

Para finalizar, ressaltamos que os métodos utilizados para demonstrar os resultados do Capítulo 4 são, de certa forma, indutivos. Além disso, embora sejam para f de grau baixo, tanto os resultados dados em [2, Proposição 1, Teorema 2.3, Teorema 2.4] quanto os Teoremas 4.16 e 4.17 compactuam com a ideia de existir relações entre as formas canônicas possíveis para f e os divisores do grau da aplicação f. Isso cria o interesse em investigar, para trabalhos futuros, se essas relações podem ser generalizadas para aplicações f de qualquer grau.

Referências Bibliográficas

[1] K. Baba, Y. Nakai, *A generalization of Magnu's Theorem*, Osaka J. Math., 14 (1977), 403-409.

[2] F. Braun, J. Llibre, A. Mereu, *Isochronicity for trivial quintic and septic planar polynomial Hamiltonian systems*, Discrete and Contin. Dyn. Syst., 36 (2016), 5245-5255.

[3] C. A. Buzzi, Y. R. Carvalho, A. Gasull, *The local period function for Hamiltonian systems with applications*, J. Differential Equations, 280 (2021), 590-617.

[4] C. J. Christopher, J. Devlin, *Isochronous centers in planar polynomial systems*, Siam J. Math. Anal., 28 (1997), 162-177.

[5] A. Cima, F. Mañosas, J. Villadelprat, *Isochronicity for several classes of Hamiltonian systems*, J. Differential Equations, 157 (1999), 373-413.

[6] A. Cima, A. Gasull, V. Mañosa, F. Mañosas, *Algebraic properties of the Liapunov and period constants*, Rocky Mountain J. Math., 27 (1997), 471-501.

[7] D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Springer International Publishing Switzerland, 4 (2015).

[8] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*, Springer-Verlag, (2006).

[9] E. Freire, A. Gasull, A. Guillamon, *First derivative of the period function with applications*, J. Differential Equations, 204 (2004), 139-162.

[10] X. Jarque, J. Villadelprat, *Nonexistence of isochronous centers in planar polynomial Hamiltonian systems of degree four*, J. Differential Equations, 180 (2002), 334-373.

[11] J. Llibre, V. G. Romanovski, *Isochronicity and linearizability of planar polynomial Hamiltonian systems*, J. Differential Equations, 259 (2015), 1649-1662.

[12] W. S. Loud, *Behaviour of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers*, Contrib. Differential Equations, 3 (1964), 21-36.

[13] F. Mañosas, J. Villadelprat, *Area-preserving normalizations for centers of planar Hamiltonian systems*, J. Differential Equations, 179 (2002), 625-646.

[14] T. T. Moh, *On the Jacobian conjecture and the configurations of roots*, J. Reine Angew. Math., 340 (1983), 140-212.

[15] E. E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, 47 (1977).

[16] P.J. Olver, *Classical invariant theory*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 44 (1999). xxii+280.

[17] A. Sabatini, *A connection between isochronous Hamiltonian centers and the Jacobian Conjecture*, Nonlinear Anal., 34 (1998), 829-838.

[18] J. P. O. Santos, *Introdução a teoria dos números*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, (1998).

[19] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, (1979).

[20] M. Zedek, *Continuity and location of zeros of linear combinations of polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 78-84.