UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Involuções fixando somas conexas de espaços projetivos e melhorias para o Five Halves Theorem quando $Fix(T) = F^n \cup F^j$.

Larissa Moura

São Carlos-SP
Dezembro de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Involuções fixando somas conexas de espaços projetivos e melhorias para o Five Halves Theorem quando $Fix(T) = F^n \cup F^j$.

Larissa Moura

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
Dezembro de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Larissa Moura, realizada em 06/12/2022.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher (UFSCar)

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi (UNESP)

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior (UFSCar)

Prof. Dr. Thiago de Melo (UNESP)

Profa. Dra. Denise de Mattos (USP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

À minha mãe Eunice
e aos meus irmãos
Renan e Gabriela.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a minha família por toda a paciência e motivação. Em especial a minha mãe, os meus irmãos pelas palavras de apoio quando eu acreditava ser impossível, pelo carinho, amor e por acreditarem em mim.

Ao Professor Doutor Pedro L. Q. Pergher, não só por ter proposto os problemas os quais deram como fruto esta tese, mas também pela disponibilidade de tempo e paciência com que me orientou, um professor com quem aprendi muito e que admiro pela sua dedicação.

Também sou grata á minha orientadora do mestrado Profa. Dra. Alice Libardi por me inspirar, incentivar e pelo compartilhamento da paixão pela Topologia que também se tornou minha.

A todos os professores os quais contribuíram para minha formação.

Aos professores e colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, tiveram participação ou influência no desenvolvimento deste trabalho e à CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Sejam M^m uma variedade suave, fechada e m-dimensional, e $T : M^m \to M^m$ uma involução suave. É conhecido o fato de que o conjunto de pontos fixos de T, , $F = \{x \in M^m | T(x) = x\}$, é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de diferentes dimensões. Escrevemos $F = \cup_{i=0}^{n} F^i$, $n \leq m$, onde F^i denota a união das componentes i-dimensionais de F. O famoso *Five Halves Theorem of J. Boardman* diz que, se o par (M^m, T) não borda equivariantemente, então temos que $m \leq \frac{5}{2}n$, e com essa generalidade esse resultado é o melhor possível. Esse resultado motivou P. Pergher a introduzir, na literatura, a seguinte questão: é possível melhorar o limitante de Boardman se impomos a omissão de algumas dimensões no conjunto de pontos fixos? O primeiro objetivo desse trabalho é obter um resultado desse tipo, achando um limite superior para m no caso em que F tenha a forma $F^n \cup F^j$, $0 \leq j < n$ e com $F^n \cup F^j$ não bordando. Existem vários resultados prévios na literatura desta natureza, conforme será detalhado na Introdução em termos históricos e cronológicos.

O segundo objetivo desse trabalho mora no contexto de se classificar classes de cobordismo equivariante de involuções (M, T) que possuem um conjunto de pontos fixos pré-fixado F. Essa é uma linha de problemas bem consolidada na literatura, vide na Introdução referências a diversos resultados correlatos. Nesse trabalho, abordaremos o caso em que F é a soma conexa de dois espaços projetivos reais, complexos e quaterniônicos, $F = K_d P(n) \# K_d P(n)$, com n ímpar, onde $d = 1, 2$ e 4 simbolizam os casos reais, complexos e quaterniônicos, respectivamente. Novamente, a relação deste caso com os casos já existentes na literatura será descrita na Introdução.

Palavras-chave: Teorema $\frac{5}{2}$ de Boardman, Soma conexa de fibrados, Limitante de Stong-Pergher, Soma conexa de espaços projetivos, número caracteristico, fixed-data, quadrados de Steenrod, classe de Stiefel-Whitney, cobordismo equivariante.

Abstract

Let M^m be a closed and smooth m-dimensional manifold, and $T : M^m \to M^m$ a smooth involution, that is, a period 2 diffeomorphism defined on M^m. It is well known the fact that the fixed point set of T, $F = \{x \in M^m | T(x) = x\}$, is a finite and disjoint union of closed smooth submanifolds, whose dimensions can vary from 0 to m. We write $F = \cup_{i=0}^{n} F^i$, $n \leq m$, where F^i denotes the disjoint union of the i-dimensional components of F. The famous *Five Halves Theorem of J. Boardman* assures that, if the pair (M^m, T) does not bound equivariantly, then we have $m \leq \frac{5}{2}n$, and with this level of generality, this bound is best possible. This result motivated P. Pergher to introduce, in the literature, the following type of question: is it possible to improve the Boardman's bound by imposing the omission of some dimensions of F? In this work, our first objective is obtaining a result of this type, specifically the case where F has the form $F^n \cup F^j$, $0 \leq j < n$, and with $F^n \cup F^j$ not being a boundary. There are several results of this nature in the literature, as will be detailed in the Introduction in historical and chronological terms.

The second goal of this work lives in the context of classifying, up to equivariant cobordism, involutions (M, T) whose fixed point set is a pre-selected manifold (or a disjoint union of manifolds) F. This line of problems is well-established in the literature, see in the Introduction references with several correlated results. Specifically, in this work we will address the case in which F is a connected sum of two projectives spaces real, complex and quaternionic, $F = K_dP(n)\#K_dP(n)$, with n odd, where $d = 1, 2$ and respectively symbolize the real, complex and quaternionic cases. Again, the relationship of this case with existing cases in the literature will be described in the Introduction.

Keywords: Five Halves Theorem of Boardman, Connected sum of fiber bundles, Stong-Pergher bound, Connected sum of two copies of projective spaces, characteristic number, fixed-data, Steenrod Square, Stiefel-Whitney class, equivariant cobordism.

Sumário

Introdução

Conforme dito no resumo, este trabalho é dividido em duas partes independentes. Nosso foco será sempre objetos do tipo (M^m, T), onde M^m é uma variedade fechada, suave e m-dimensional, e $T : M^m \to M^m$ é uma involução suave definida em M^m, ou seja, $T \circ T = Id$. Se F é o conjunto de pontos fixos de T, conforme visto no resumo, simbolicamente podemos dizer que nosso trabalho se caracteriza por dois itens:

(I) $F = F^m \cup F^j, j < m$

(II) $F = K_d P(n) \# K_d P(n)$

No que se refere ao item (I) acima, a história começa com o famoso *Teorema $\frac{5}{2}$ de Boardman*, ou *Five Halves Theorem*, o qual foi anunciado no Bulletin of the American Math. Soc. em 1957, em [3], que diz o seguinte: seja (M^m, T) uma involução que não borda equivariantemente, e seja $F = F^0 \cup F^1 \cdots \cup F^n$ o seu conjunto de pontos fixos. Então $m \leq \frac{5}{2}n$, e com essa generalidade a respeito do conjunto de pontos fixos, esta estimativa é a melhor possível. Posteriormente, P. Pergher observou na literatura a ocorrência dos seguintes resultados:

- (a) Se (M^m, T) fixa $F = F^n$ e se $m > 2n$, então (M^m, T) borda equivariantemente. Esse resultado foi provado por *C. Kosniowski e R. Stong* em [14]. Em particular, se (M^m, T) fixa $F = F^n$ e (M^m, T) não borda equivariantemente, então $m \leq 2n$. Note que esta é uma melhoria para o Five Halves Theorem na situação especial em que F possui uma única componente, e devido à involução $(F^n \times F^n, twist)$, que fixa F^n, esta estimativa é a melhor possível.

- (b) Se (M^m, T) é uma involução fixando a união de um ponto com uma variedade conexa F de dimensão n ímpar, então (M^m, T) é equivariantemente cobordante à uma involução específica definida em $\mathbb{R}P^{n+1}$, a qual fixa $\mathbb{R}P^n \cup \{ponto\}$. Em particular, $m \leq n+1$. Esse é um *Teorema de D. Royster*, contido em [27]. Novamente temos uma melhoria intrigante do Five Halves Theorem na situação específica na qual F tem a forma $F = F^n \cup \{ponto\}$, com n ímpar. Novamente, esta estimativa é a melhor possível, simplesmente porque é impossível diminuir $m = n+1$.

Os resultados acima, de forma natural, motivam a seguinte questão: estabelecer um limitante para m, em termos de n, que é a dimensão maximal ocorrendo em F, melhor que o de *Boardman*, quando impomos a omissão de algumas componentes de F, e também quando impomos algum tipo de restrição a respeito das dimensões das componentes que ocorrem. Essa linha de problemas foi descoberta e estabelecida por *Pergher* em [18]. Nesse contexto, surgiu o relevante limitante $m(n)$ de Stong e Pergher em [25], o qual será detalhado no capítulo 2. Neste trabalho, Pergher e Stong completaram o resultado de Royster acima citado, provando que, se F possui a forma $F = F^n \cup F^0 = F^n \cup \{ponto\}$, então $m \leq m(n)$. Referente a essa linha de problemas, temos alguns resultados na literatura:

- (c) *S. Kelton* mostrou em [12] que, se (M^m, T) fixa $F^m \cup \mathbb{R}P^1$, então

$$m \leq \begin{cases} m(n-1)+1, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ m(n-1)+2, & \text{se } n \text{ par,} \end{cases}$$

  e essas estimativas são as melhores possíveis. Notando que a única variedade fechada, suave, conexa e 1-dimensional, é $S^1 = \mathbb{R}P^1$, na verdade, S. Kelton então resolveu essa questão na situação $F = F^n \cup F^1$.

- (d) *Pedro L. Q. Pergher e Fábio Gomes Figueira* mostraram em [8] e em [22] que, se (M^m, T) tem conjunto de pontos fixos da forma $F = F^n \cup F^2$, então

$$m \leq \{\max\{2n, m(n-2)+4\}, \forall n,$$

  e esse é o melhor limitante possível. *P. Pergher e F. Figueira* também mostraram em [23] que, se F é da forma $F = F^n \cup F^{n-1}$, então $m \leq 2n$. Se tomarmos um fibrado η de dimensão $2n+1$ sobre uma variedade F^{n-1} o qual borda (basta tomar F^{n-1} que borda e o fibrado trivial $2n+1$-dimensional sobre F^{n-1}), a sequência de Conner e Floyd (vide [5]) nos diz que existe involução (V^{2n}, S) com fixed data η. Então a involução $(F^n \times F^n, twist) \cup (V^{2n}, S)$ mostra que este resultado é o melhor possível.

- (e) *Pedro L. Q. Pergher e Évelin Meneguesso Barbaresco* estudaram em [1] e [2] o caso em que F tem a forma $F = F^n \cup F^3$, obtendo neste caso o seguinte limitante:

$$m \leq \max\{2n, m(n-3)+6\}, \forall n.$$

  Além disso, Pergher e Barbaresco construíram um exemplo de involução do tipo $(M^{m(n-3)+5}, T)$ com conjunto de pontos fixos do tipo $F = F^n \cup F^3$, desta forma mostrando que seu limitante é o melhor possível a menos de uma unidade (quase o melhor possível).

- (f) *Pedro L. Q. Pergher* considerou em [19] o caso $F^n \cup F^j$, com $n > j$ e com F^j indecomponível, mostrando nesse caso que $m \leq m(n-j)+2j$, e através de um exemplo sutil, mostrou que este limitante é *quase o melhor possível.*

Seguindo essa linha, o primeiro objetivo desse trabalho é mostrar o seguinte teorema:

Teorema 0.0.1. *Seja (M^m,T) uma involução com conjunto de pontos fixos da forma $F = F^n \cup F^j$, com $n > j$. Então $m \leq \max\{\frac{5}{2}j + m(n-j), 2n\}$.*

Note que este resultado está no contexto de [19], mas sem impor a indecomponibilidade de F^j. Embora não tenha sido possível mostrar que esta estimativa é a melhor possível, com vários exemplos mostramos que de fato essa estimativa fornece boas melhorias no que se refere ao Five Halves Theorem.

No que se refere ao item (II) vimos no resumo que a classificação pretendida seria equivalente ao caso $F = K_dP(n) \cup K_dP(n)$, se todo fibrado sobre a soma conexa fosse uma soma conexa de fibrados. Veremos agora que tal caso já é conhecido na literatura. Sabemos que F, o conjunto de pontos fixos, é uma união finita de subvariedades fechadas de M, uma questão natural que surge é a existência de uma involução fixando F, no caso positivo, outra questão é a classificação por cobordismo equivariante do par (M,T) que tem F como conjunto de pontos fixos. Tal problema é bem estabelecido na literatura, e começou em 1964 com o resultado de Conner e Floyd, [6], com $F = S^n \cup \{\text{ponto}\}$, $F = \mathbb{R}P^n$, com n ímpar e F um conjunto finito de pontos isolados. Tais resultados foram aplicações da teoria de cobordismo equivariante em [6], o qual foi uma extensão da famosa teoria de René Thom.

Estes problemas exigem o conhecimento da K-teoria de F ou, mais especificamente, o conhecimento de todas as possíveis classes características de fibrados vetoriais sobre F, que é o caso dos espaços projetivos $K_dP(n)$, $d = 1$, 2 e 4.

O caso em que F é união disjunta de espaços projetivos tem uma história na literatura extensa e ainda inacabada que começou, como mencionado acima, com $F = \mathbb{R}P^n$, n ímpar, [6]. Neste caso, Conner e Floyd provaram que (M,T) borda equivariantemente e com argumentos semelhantes é possível provar o mesmo resultado para $F = K_dP(n)$, $d = 2$ e 4, com n ímpar.

Mais tarde, em [28], Stong resolveu o problema para $\mathbb{R}P^n$ com n par, mostrando que (M,ϕ) é cobordante equivariantemente a involução $(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n, \text{twist})$, onde a aplicação twist leva (x,y) em (y,x), ou cobordante equivariantemente a $(\mathbb{R}P^n, Id)$, onde Id é aplicação identidade. O mesmo é válido para $F = K_dP(n)$, $d = 2$ e 4. Provas podem ser encontradas em [15], o que fecha o caso de uma componente.

Para duas componentes a história começa com Royster, [27], onde uma classificação parcial foi obtida para o caso $F = \mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$, deixando em aberto apenas o caso em que m e n são pares e não nulos, ou seja, Royster resolveu os casos, $F = \mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^0 = \mathbb{R}P^m \cup \text{ponto}$ para todo $m \geq 1$. Em particular Royster provou que se m e n são ímpares, então (M,T) borda equivariantemente, o mesmo resultado vale para $K_dP(n)$, $d = 2$ e 4, provas podem ser encontradas em [10].

cndo com o caso de duas componentes, P. L. Q. Pergher, A. Ramos e R. Oliveira, [20] e [21], obtiveram as versões complexas e quaterniônicas do resultado de Royster que não foi considerada em

[10] com m e n ímpar. Mais especificamente, eles resolveram os casos $F = K_dP(m) \cup K_dP(n)$ para $d = 2$ e 4, onde $n \geq 0$ par e $m \geq 1$ é ímpar, e onde $n = 0$ e $m \geq 2$ é par. Adicionalmente ele resolveu um caso particular deixado em aberto por Royster, dado por $F = \mathbb{R}P^m \cup \mathbb{R}P^n$, onde $n = 2^s$, m é par e $m \geq 2^{s+1}$, o qual inclui o caso $F = \mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{R}P^n$, $n \geq 4$ par. Este último caso pode ser encontrado em [20] e as versões complexas e quaterniônicas são obtidas em [26].

Para F com mais de duas componentes o único resultado conhecido é de Torrence e Huo, [9], se F é uma união arbitrária de espaços projetivos reais de dimensão ímpar, então (M,T) borda equivariantemente (o mesmo é válido para $d = 2$, [30], e $d = 4$, [26]).

Resumindo, temos o caso de uma componente resolvido e com exceção do caso em que $(m,n) = (par, par)$, $m,n > 0$ e $m \neq 2^s$, $n \neq 2^s$, temos o caso de duas componentes resolvido.

Com o problema da união resolvido partimos para a questão da soma conexa onde o objetivo é provar o seguinte resultado: Seja (M,T) uma involução fixando $\eta^k \to K_dP(n)\#K_dP(n)$, n ímpar, $k < dn$. Então η borda.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos algumas notações, ferramentas e resultados, presentes na literatura, que serão necessários para o desenvolvimento dos capítulos que se seguem. Incluiremos tópicos básicos da teoria de cobordismo equivariante, desenvolvida por Conner e Floyd em [6]. Admitiremos que o leitor tenha noções de topologia diferencial, homologia, cohomologia, teoria de fibrados e classes de Stiefel-Whitney.

Quando mencionarmos variedades e aplicações entre variedades, ficará subentendido que as mesmas são de classe C^∞; além disso, em todo esse trabalho, a cohomologia será sempre com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$.

1.1 Cobordismo de variedades

Dada uma variedade n-dimensional M^n compacta com bordo, denotamos por $\partial(M^n)$ o bordo de M^n, o qual é uma variedade $(n-1)$-dimensional fechada, ou seja, compacta e sem bordo.

Definição 1.1.1. *Dizemos que uma variedade M^n borda, se existe uma variedade compacta, W^{n+1}, tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n$. Além disso, dizemos que duas variedades fechadas, M^n, V^n, são cobordantes, se a união disjunta $M^n \cup V^n$ borda.*

Teorema 1.1.2 (Cancelamento do Bordo)**.** *Sejam W^{n+1}, U^{n+1} variedades com bordo e suponha que existam componentes de bordo $F^n \subset \partial(W^{n+1})$, $G^n \subset \partial(U^{n+1})$ difeomorfas. Então existe uma variedade compacta V^{n+1}, com bordo ou não, obtida "grudando-se ´´ os bordos comuns F^n e G^n; ou seja, em V^{n+1}, as componentes de bordo difeomorfas desaparecem. A prova de tal fato requer o uso do famoso "Teorema do Colar Equivariante", visto no livro de Conner e Floyd.*

Observação 1.1.3. Para cada n, a relação de cobordismo definida acima é uma relação de equivalência no conjunto das variedades fechadas de dimensão n.

Demonstração. De fato,

1. *(Reflexiva)* Seja M^n uma variedade fechada, então $M^n \sim M^n$: basta considerar $W^{n+1} = M^n \times [0,1]$, e observar que
$$\partial(W^{n+1}) = M^n \times 0 \cup M^n \times 1 \simeq M^n \cup M^n.$$

2. *(Simétrica)* Sejam M^n, V^n duas variedades fechadas e suponha que $M^n \sim V^n$. Então existe W^{n+1} tal que
$$\partial(W^{n+1}) = M^n \cup V^n = V^n \cup M^n,$$
e, portanto, $V^n \sim M^n$.

3. *(Transitiva)* Suponha que $M^n \sim V^n$ e $V^n \sim U^n$. Então $M^n \cup V^n$ e $V^n \cup U^n$ bordam, e podemos usar o teorema do cancelamento de bordos para cancelar V^n e assim obter uma variedade com bordo $M^n \cup U^n$.

Denotaremos por $[M^n]$ a classe de cobordismo de M^n e η_n a coleção de tais classes.

$\square$

Teorema 1.1.4. *Dado $n \geq 0$, existe uma classe de cobordismo especifica que é formada por variedades que bordam, a qual denotaremos por ε_n.*

Demonstração. Primeiramente observe que ε_n não é vazio, pois para todo $n \geq 0$ temos que $S^n \in \varepsilon_n$, uma vez que $\partial(D^{n+1}) = S^n$.

Sejam $M^n, V^n \in \varepsilon_n$. Então M^n, V^n bordam e consequentemente $M^n \cup V^n$ borda.

Por fim, sejam $M^n \in \varepsilon_n$ e $V^n \notin \varepsilon_n$ e suponha por absurdo que $M^n \sim V^n$, ou seja, existe W^{n+1} tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n \cup V^n$. Mas $M^n \in \varepsilon_n$ então existe U^{n+1} tal que $\partial(U^{n+1}) = M^n$. Usando o teorema de cancelamento de bordo, cancelamos M^n e obtemos uma variedade cujo o bordo é V^n, contradizendo o fato de que $V^n \notin \varepsilon_n$.

Portanto, ε_n é uma classe de equivalência. $\square$

Observe que cobordismo é invariante por difeomorfismo, ou seja, se $M^n \sim V^n$ e $M^n \simeq M'^n$, $V^n \simeq V'^n$, então $M^n \cup V^n \simeq M'^n \cup V'^n$, portanto $M' \sim V'$.

Queremos, agora, dar a η_n uma estrutura de grupo, e para tanto dados M^n, V^n variedades fechadas definiremos a operação:
$$[M^n] + [V^n] = [M^n \cup V^n].$$

Observe que tal operação está bem definida: Se $M^n \sim \overline{M^n}$ e $V^n \sim \overline{V^n}$, existem W^{n+1} e U^{n+1} tais que $\partial(W^{n+1}) = M^n \cup \overline{M^n}$ e $\partial(U^{n+1}) = V^n \cup \overline{V^n}$. Assim,
$$\partial(W^{n+1} \cup U^{n+1}) = M^n \cup \overline{M^n} \cup V^n \cup \overline{V^n}$$
e então $M^n \cup V^n \sim \overline{M^n} \cup \overline{V^n}$.

A operação é comutativa e associativa e existe um elemento neutro, a saber, ε_n. Quanto a elementos inversos, basta notar que $[V] + [V] = \varepsilon_n$. Portanto, η_n é um grupo de ordem 2.

Vejamos alguns exemplos de η_n.

1. $\eta_0 = \mathbb{Z}_2$

   Observe que qualquer quantidade par de pontos borda, enquanto qualquer quantidade ímpar de pontos não.

2. $\eta_1 = \varepsilon_1 = 0$

   Só existe uma, a menos de difeomorfismo, variedade fechada de dimensão 1, S^1, a qual borda.

3. $\eta_2 = \mathbb{Z}_2$

   Toda variedade de dimensão 2 orientável borda, assim,

   $$\varepsilon_2 = [S^2] = [T^2] = [\#T^2] = [\#\mathbb{R}P^2]$$

   (soma conexa de um número par de $\mathbb{R}P^2$). Além disso, toda soma conexa de um número ímpar de cópias de $\mathbb{R}P^2$ não borda e é fácil ver que

   $$[\mathbb{R}P^2] = [\#\mathbb{R}P^2].$$

   Assim, η_2 tem duas classes, ε_2 e $[\mathbb{R}P^2]$.

4. $\eta_3 = 0$

   É um teorema famoso, provado antes mesmo do trabalho de Thom sobre cobordismo, que toda variedade de dimensão 3 borda.

A soma direta $\eta_* = \oplus_{n=0}^{\infty} \eta_n$ possui estrutura de anel graduado comutativo com unidade: *o anel de cobordismo não-orientado de Thom*. O produto é definido pelo produto cartesiano:

$$[M^n] \cdot [V^m] = [M^n \times V^m]$$

A unidade é a classe de cobordismo das variedades 0-dimensionais que são formadas por um número ímpar de pontos.

Observação 1.1.5. η_* é chamado, conforme dito acima, o *anel de cobordismo não-orientado de Thom*.

Demonstração. Primeiramente verificaremos que tal operação está bem definida, ou seja, dadas M, M' de dimensão n e V, V' de dimensão m tais que $M \sim M'$ e $V \sim V'$, então

$$M \times V \sim M' \times V'.$$

De fato, como $M \sim M'$, então existe W^{n+1} tal que $\partial(W) = M \cup M'$. Logo,

$$\partial(W \times V) = (\partial(W) \times V) \cup (W \times \partial(V)) = \partial(W) \times V = (M \cup M') \times V$$

$$= M \times V \cup M' \times V.$$

Portanto,

$$M \times V \sim M' \times V.$$

Análogamente, se $V \sim V'$, existe U tal que $\partial(U) = V \cup V'$, e assim $\partial(M' \times U) = M' \times V \cup M' \times V'$. Portanto,

$$M' \times V \sim M' \times V'.$$

Da transitividade da relação de cobordismo, temos que

$$M \times V \sim M' \times V'.$$

Como $(\eta_n, +)$ para todo n é um grupo abeliano, segue da definição de soma direta que $(\eta_*, +)$ também é um grupo abeliano.

Além disso, a definição de produto cartesiano implica que a operação multiplicativa satisfaz as propriedades associativa, distributiva e comutativa. Ou seja,

$$([M^n] \cdot [V^m]) \cdot [W^k] = [M^n] \cdot ([V^m] \cdot [W^k]),$$

$$[M^n] \cdot ([V^m] + [W^k]) = [M^n] \cdot [V^m] + [M^n] \cdot [W^k]$$

e

$$[M^n] \cdot [V^m] = [V^m] \cdot [M^n].$$

Por fim, note que a classe de cobordismo do ponto, $[ponto]$, é o elemento unidade, uma vez que $\{ponto\} \times M = M$.

□

Teorema 1.1.6 (Thom)**.** *η_* é um álgebra polinomial graduada sobre $\mathbb{Z}_2$ com um gerador $x_n \in \eta_n$ em cada dimensão $0 \leq n \neq 2^j - 1$.*

Esse teorema encontra-se no importante artigo, [29], o qual deu a R. Thom a Medalha Fields em 1958.

1.1.1 Números de Stiefel-Whitney de uma variedade fechada

Seja M^n uma variedade suave e fechada. Associados a M temos uma coleção de números mod 2, 0 ou 1, chamados *números de Stiefel-Whitney* ou *números característicos de M*.

Seja $\tau^n \to M^n$ o fibrado tangente, e seja

$$W(\tau) = W(M^n) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

sua classe total de Stiefel-Whitney.

Tome partição $n = i_1 + i_2 + \cdots + i_r$, $i_r \geq 1$, $r \geq 1$ não necessariamente distintos, onde permutações dos i_r não modifica a partição. Associado a n, existe seu *conjunto de partições*. O número $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r} \in H^n(M)$ é chamado um número de Stiefel-Whitney correspondente a tal partição, e

$$w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r}[M^n]_2 = \begin{cases} 0, & \text{ou} \\ 1. \end{cases}$$

A coleção de números de Stiefel Whitney de M é a coleção de todos tais 0 e 1, correspondentes a todas as partições de n. Por simplicidade, escreveremos números de S.W.

Teorema 1.1.7. *Seja $\mathbb{R}P^n$ com n é ímpar então todos seus números de S.W. são nulos. Se n é par, pelo menos dois números de S.W. são não nulos.*

Demonstração. Primeiramente suponha que n é ímpar. Então $n+1$ é par. Sabemos que

$$W(\mathbb{R}P^n) = (1+\alpha)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \alpha^i = 1 + w_1 + \cdots + w_{n+1},$$

onde $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador do anel de cohomologia de $\mathbb{R}P^n$. Pelo corolário 1.7.3, se i é ímpar então $\binom{n+1}{i}$ é par, logo, $w_i = 0$.

Como n é ímpar, qualquer partição de n deve ter ao menos algum i_j ímpar portanto

$$w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r}[\mathbb{R}P^n]_2 = 0.$$

Suponha agora que n é par. Então, pelo teorema 1.7.2, temos que

$$w_1 = \binom{n+1}{1} \alpha = \alpha \neq 0$$

portanto,

$$w_1^n[\mathbb{R}P^n] = \alpha^n[\mathbb{R}P^n] = 1.$$

Além disso,

$$w_n(\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{n} \alpha^n = \alpha^n \neq 0$$

portanto,

$$w_n[\mathbb{R}P^n] = \alpha^n[\mathbb{R}P^n] = 1.$$

Isso conclui o desejado.

□

Teorema 1.1.8. *Uma variedade fechada M^n borda se, e só se, todos os números característicos de M^n são nulos.*

Corolário 1.1.9. *Duas variedades M^n e V^n são cobordantes se, e só se, M^n e V^n possuem os mesmos números característicos.*

Corolário 1.1.10. *Para todo n ímpar, $\mathbb{R}P^n$ é bordo de alguma variedade.*

1.2 Cobordismo singular

Fixemos X um espaço topológico e $n \geq 0$. Dada uma variedade fechada M^n e $f: M^n \to X$ contínua, consideraremos nessa seção os objetos do tipo (M^n, f) que chamaremos de *variedades singulares*. Para os fatos abaixo, vide [6].

Definição 1.2.1. *Dizemos que (M^n, f) borda se existem uma variedade W^{n+1} e uma função contínua $F: W^{n+1} \to X$ tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n$ e $F|_{M^n} = f$. Além disso, diremos que (M^n, f) e (V^n, g) são cobordantes se $(M^n \cup V^n, f \cup g)$ borda, ou seja, se existem W^{n+1} e $F: W^{n+1} \to X$ contínua tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n \cup V^n$, $F_{|M^n} = f$ e $F_{|V^n} = g$.*

A relação de cobordismo dada acima é uma relação de equivalência na coleção das variedades singulares n-dimensionais em X. Denotamos por $[M, f]$ a *classe de cobordismo da variedade singular* (M, f) em X e, por $\eta_n(X)$ o conjunto de tais classes. Com a operação $[M^n, f] + [V^n, g] = [M^n \cup V^n, f \cup g]$, $\eta_n(X)$ possui estrutura de grupo abeliano: *o grupo de cobordismo n-dimensional não-orientado de X.* O elemento neutro é dado pela classe de cobordismo representada pelas variedades singulares (M^n, f) em X tais que M^n borda e f é constante (claro que existem outros tipos de representantes).

Também diremos que (M^n, f) e (V^n, g) são difeomorfos se existe um difeomorfismo $\phi: M^n \to V^n$, C^∞ tal que $f = g \circ \phi$. Ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & X \\ V^n \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

comuta.

Teorema 1.2.2. *Se (M^n, f) como representante de uma classe de $\eta_n(X)$ borda e $(M^n, f) \simeq (V^n, g)$, então (V^n, g) borda.*

Demonstração. Por hipótese (M^n, f) borda, logo existem W^{n+1} e $F: W^{n+1} \to X$ contínua tais que $\partial(W^{n+1}) = M^n$ e $F|_{M^n} = f$. Além disso, $(M^n, f) \simeq (V^n, g)$, logo existe $\phi: M^n \to V^n$ tal que $f = g \circ \phi$. Como ϕ é um difeomorfismo, podemos usar o teorema 1.1.2 para as variedades W^{n+1} e $V^n \times I$ (I é o intervalo $[0,1]$), obtendo uma variedade U^{n+1} tal que $\partial(U^{n+1}) = V^n$. Defina

$$\begin{array}{cccc} G: & V^n \times I & \to & X \\ & (v,t) & \longmapsto & g(v). \end{array}$$

Note que, $G|_{V^n} = g$, portanto (V^n, g) borda. $\square$

Como na seção anterior vamos definir

$$\eta_*(X) = \oplus_{i=1}^{\infty} \eta_i(X).$$

Podemos introduzir em $\eta_*(X)$ uma estrutura de η_* - módulo graduado, com a convenção de que a soma de dois elementos $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_t})$, $\alpha_{i_j} \in \eta_{i_j}(X)$ de grau i_j é a justaposição junto com a soma usual (união disjunta) de elementos do mesmo grau. Para tanto definimos tal estrutura em partes homogêneas

$$\eta_r \times \eta_n(X) \to \eta_{r+n}(X)$$

e a seguir impomos a distributividade para obtermos

$$\eta_* \times \eta_*(X) \to \eta_*(X).$$

Dada $f : M^n \to X$ contínua, $V^r \in \eta_r$, defina

$$\begin{array}{cccc} F: & V^r \times M^n & \longrightarrow & X \\ & & & \\ & (v,m) & \longmapsto & f(m). \end{array}$$

Assim, defina

$$\begin{array}{ccc} \eta_r \times \eta_n(X) & \longrightarrow & \eta_{r+n}(X) \\ & & \\ ([V^r],[M^n,f]) & \longmapsto & [M^n \times V^r, F]. \end{array}$$

Observação 1.2.3. A operação está bem definida.

Demonstração. Dado $[M^n, f] \in \eta_n(X)$ e $V^r \sim U^r$, existe W^{r+1} tal que $\partial(W^{r+1}) = V^r \cup U^r$. Tome $\overline{W} = M^n \times W^{r+1}$; assim,

$$\partial(\overline{W}) = M^n \times \partial(W) = M^n \times (V^r \cup U^r) = M^n \times V^r \cup M^n \times U^r.$$

Defina,

$$\begin{array}{cccc} G: & \overline{W} & \longrightarrow & X \\ & & & \\ & (m,w) & \longmapsto & f(m). \end{array}$$

Observe que, $G|_{M^n \times V^r} = F = G|_{M^n \times U^r}$. Portanto, $(M^n \times V^r, F) \sim (M^n \times U^r, F)$.

Dada $[V^r] \in \eta_r$ e $(M^n, f) \sim (U^n, g)$, existem W^{n+1} e $G : W \to X$ tais que $\partial(W) = M^n \cup U^n$, $G|_{M^n} = f$ e $G|_{U^n} = g$. Considere $\overline{W} = W^{n+1} \times V^r$. Queremos mostrar que $(M^n \times V^r, F) \sim (U^n \times V^r, \overline{F})$, onde $F, \overline{F}$ são as funções dadas na definição que vem de f e g, respectivamente, ou seja, $F(v,m) = f(m)$ e $\overline{F}(v,u) = g(u)$. Defina $\overline{W} = W^{n+1} \times V$ e $\overline{G} : \overline{W} \to X$ por $\overline{G}(w,v) = G(w)$. Então obtemos $(M^{\times} V^r, F) \sim (U^n \times V^r, \overline{F})$, como queríamos.

□

Teorema 1.2.4. *$\eta_*(X)$ é um η_*-módulo graduado com a operação definida acima.*

1.2.1 Números de Whitney de uma variedade singular

Seja $(M^n, f) \in \eta_n(X)$. Tome $h \in H^j(X)$. Como $f : M^n \to X$, temos a induzida em cohomologia $f^* : H^j(X) \to H^j(M^n)$, e assim $f^*(h) \in H^j(M^n)$. Escreva $W(M^n) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$. Um número de Whitney de (M^n, f) tem a forma:

$$w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_t} f^*(h)[M^n],$$

onde $i_1 + \cdots + i_t = n - j$.

Tomando todas tais possibilidades, com $h \in H^j(X)$ qualquer, $0 \leq j \leq n$ e $i_1 + \cdots + i_t = n - j$, temos a *coleção de número de Whitney de* (M^n, f).

Temos o elemento unidade $1 \in H^0(X) = \mathbb{Z}_2$ (uma vez que X é conexo), e $f^*(1) = 1 \in H^0(M^n)$. Assim os números de S.W. de M^n também não números de Whitney de (M^n, f).

O teorema a seguir pode ser encontrado em [5].

Teorema 1.2.5 (Conner e Floyd)**.** *Seja X um CW-complexo finito em cada dimensão. Então uma variedade singular (M^n, f) borda se, e só se, todos os números de Whitney (ou números característicos) de (M^n, f) são nulos.*

Corolário 1.2.6. *Seja X um CW-complexo finito em cada dimensão. Duas variedades singulares em X são cobordantes se, e só se, possuem os mesmos números característicos.*

1.3 Cobordismo de fibrados vetoriais

Nessa seção iremos trabalhar com objetos da forma (M^n, η^k), onde M^n é uma variedade fechada suave e η^k é um fibrado vetorial k-dimensional com base M^n. Como nas seções anteriores, iremos estabelecer entre esses objetos uma relação de cobordismo, que será uma relação de equivalência. Para tanto, necessitamos recordar o Teorema de Classificação de Fibrados Vetoriais.

Teorema 1.3.1 (Teorema da Classificação da Fibrados Vetoriais)**.** *Seja η um fibrado vetorial n-dimensional qualquer, com espaço base X paracompacto. Então existe uma função contínua $f : X \to BO(n)$ tal que o fibrado pullback, $f!(\gamma^n)$, é equivalente a η; aqui, γ^n é o assim chamado fibrado universal n-dimensional sobre $BO(n)$, que por sua vez é chamado o espaço classificante para fibrados n-dimensionais; $BO(n)$ é constituido pelos n planos em R^∞, e o espaço total de γ^n é formado pelos pares (π, v), onde π é um n plano e $v \in \pi$. A função f chama-se função classificante para η. Além disso, $g : X \to BO(n)$ é outra função classificante para η se, e só se, f, g são homotópicas.*

Definição 1.3.2. *Dizemos que (M^n, η^k) borda se existe W^{n+1} compacta com bordo e fibrado $\psi^k \to W^{n+1}$ tais que $\partial(W^{n+1}) = M^n$ e $\psi^k|_{M^n} = \eta^k$, ou seja, ψ restrito a M^n é igual a η. Além disso, dizemos que $(M^n, \eta^k) \sim (V^n, \mu^k)$ são cobordantes se $(M^n \eta^k) \cup (V^n, \mu^k)$ borda, ou seja, se existem W^{n+1} e $\psi^k \to W^{n+1}$ fibrado vetorial tais que $\partial(W^{n+1}) = M^n \cup V^n$, $\psi^k|_{M^n} \simeq \eta^n$ e $\psi^k|_{V^n} \simeq \mu^n$.*

Denotaremos por $Fib_{n,k}$ o conjunto das classes de cobordismo de fibrados vetoriais k-dimensionais sobre variedades n-dimensionais fechadas, ou seja,

$$Fib_{n,k} = \{[\eta^k \to M^n]\} = \{[(M^n, \eta^k)]\}.$$

Observação 1.3.3. $Fib_{n,k}$ é um grupo de ordem 2, onde o elemento neutro é a classe $\varepsilon_n = [(M^n, \eta^k)]$ formada pelos elementos (M^n, η^k) que bordam (por exemplo, se M^n borda e η^k é o fibrado trivial sobre M^n, então (M^n, η^k) representa esta classe).

Proposição 1.3.4. *$Fib_{*,k}$ é um η_*-módulo graduado com a seguinte operação:*

$$\begin{array}{ccc} \eta_r \times Fib_{n,k} & \to & Fib_{n+r,k} \\ ([V^r], [(M^n, \eta^k)]) & \mapsto & [(M^n \times V^r, p!(\eta^k))], \end{array}$$

onde p é a projeção na primeira coordenada, $p : M^n \times V^r \to M^n$, e $p!(\eta^k)$ é o pullback de η^k via p.

Demonstração. Primeiramente vamos provar que tal aplicação está bem definida.

1. Se $V^r \sim U^r$, então $(M^n \times V^r, p!(\eta^k)) \sim (M^n \times U^r, p!(\eta^k))$.

   De fato, se $V^r \sim U^r$, então existem W^{r+1} tal que $\partial(W^{r+1}) = V^r \cup U^r$. Então, tomando $\overline{W} = M^n \times W^{r+1}$, temos que $\partial(\overline{W}) = M^n \times V^r \cup M^n \times U^r$. Observe que o pullback de η^k via $p : \overline{W} \to M^n$ é igual à união disjunta dos pullbacks de η^k via $p : M^n \times V^r \to M^n$ e $p : M^n \times U^r \to M^n$, o que prova o desejado.

2. Se $(M^n, \eta^k) \sim (U^n, \mu^k)$, então $(M^n \times V^r, p!(\eta^k)) \sim (U^n \times V^r, q!(\mu^k))$.

   De fato, por hipótese existem W^{n+1} tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n \cup U^n$ e $\psi^k \to W^{n+1}$ com $\psi^k|_{M^n} = \eta^k$ e $\psi^k|_{U^n} = \mu^k$. Tome $\overline{W} = W^{n+1} \times V^r$, e observe que $\partial(\overline{W}) = M^n \times V^r \cup U^n \times V^r$. Defina $\pi : \overline{W} \to W^{n+1}$ por

   $$\pi(w, v) = \begin{cases} p(w), & w \in M^n \\ q(w), & w \in U^n \end{cases}$$

   Dessa definição temos que:

   $$\pi!(\psi^k)|_{M^n \times V^r} = p!(\psi^k|_{M^n}) = p!(\eta^k)$$

   e

   $$\pi!(\psi^k)|_{U^n \times V^r} = q!(\psi^k|_{U^n}) = q!(\eta^k).$$

   Então concluímos o desejado.

Com os dois itens acima fica provado que a aplicação está bem definida. Agora precisamos verificar que $Fib_{*,k}$ é um η_*-módulo, com unidade, sendo a classe do fibrado zero-dimensional sobre um ponto a unidade. Da definição da soma, $[(M^n,\eta^k)]+[(U^n,\mu^r)] = [(M^n\cup U^n,\eta^k\cup\mu^r)]$, é fácil verificar que as igualdades a seguir são válidas:

$$([V^r]+[U^r])[(M^n,\eta^k)] = [V^r][(M^n,\eta^k)]+[U^r][(M^n,\eta^k)];$$
$$[V^r]([(M^n,\eta^k)]+[(U^r,\mu^k)]) = [V^r][(M^n,\eta^k)]+[V^r][(M^n,\mu^k)];$$
$$([V^r][U^r])[(M^n,\eta^k)] = [V^r]([U^r][(M^n,\eta^k)].$$

□

Proposição 1.3.5. *$Fib_{n,k}$ é isomorfo a $\eta_n(BO(k))$ como η_*-módulos.*

Demonstração. Dado $[(M^n,\eta^k)]\in Fib_{n,k}$, pelo teorema 1.3.1, existe $f: M^n\to BO(k)$ com $f!(\gamma^k) = \eta^k$, onde γ^k é o fibrado universal. Então $[(M^n,f)]\in\eta_n(BO(k))$. Definimos

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & Fib_{n,k} & \to & \eta_n(BO(k)) \\ \\ & [(M^n,\eta^k)] & \mapsto & [(M^n,f)]. \end{array}$$

Observe, primeiramente, que o objeto $[(M^n,f)]$ independe da escolha da função classificante, f. Para isso, considere g outra função classificante para η^k, ou seja, $g!(\gamma^k)=\eta^k$. Então g é homotópica a f e a função que realiza essa homotopia é a mesma função que estabelece o cobordismo

$$(M^n,f)\sim(M^n,g).$$

Afirmamos também que a função φ está bem definida. Basta notar que, se $(M^n,\eta^k)\sim(U^n,\mu^k)$, então existe $\psi^k\to W^{n+1}$ e considere $G: W^{n+1}\to BO(k)$ uma função classificante para ψ^k. Daí, observamos que $G|_{M^n}$ e $G|_{U^n}$ são funções classificantes para η^k e μ^k, respectivamente, e assim temos o cobordismo entre $(M^n,G|_{M^n})$ e $(U^n,G|_{U^n})$.

Para verificar que φ é um homomorfismo de η_*- módulos, note que dados $[(M^n,\eta^k)]$, $[(U^n,\mu^k)]$ e $[V^r]$, com $\varphi([(M^n,\eta^k)]) = [(M^n,f)]$ e $\varphi([(U^n,\mu^k)]) = [(U^n,g)]$, vale:

$$(f\cup g)!(\gamma^k) = f!(\gamma^k)\cup g!(\gamma^k) = \eta^k\cup\mu^k$$

e

$$(f\circ p)!(\gamma^k) = p!(f!(\gamma^k)) = p!(\eta^k),$$

onde $p: M^n\times U^r\to M^n$ é a projeção na primeira coordenada.

Então verificamos que

$$\varphi((M^n,\eta^k)+(U^n,\psi^k)) = \varphi((M^n,\eta^k))+\varphi((U^n,\psi^k))$$

e

$$\varphi([V^r](M^n,\eta^k)) = [V^r]\varphi((M^n,\eta^k)).$$

Para concluir o teorema, precisamos verificar que φ é bijetora, e então ela dará o isomorfismo desejado. Mas claramente φ é sobrejetora, uma vez que, dado $[(M^n, f)] \in \eta_n(BO(k))$, temos que f é função classificante para o fibrado $f!(\gamma^k)$. Assim, $\varphi([M^n, f!(\gamma^k)]) = [(M^n, f)]$.

Por fim, note que se $[(M^n,\eta^k)] = \varepsilon_n$, ou seja, (M^n,η^k) borda, existem W^{n+1} tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n$ e $\psi^k \to W^{n+1}$ com $\psi^k|_{M^n} = \eta^k$. Denote por g uma função classificante para ψ^k, $g : W^{n+1} \to BO(k)$, e note que $f = g\circ i$, onde $i : M^n \to W^{n+1}$ é a inclusão, é uma função classificante para η^k. Assim, como $g|_{M^n} = f$, temos que (M^n, f) borda.

□

Como nas seções anteriores, concluímos essa seção fornecendo uma cara típica para um número de Whitney de η^k.

Seja (M^n,η^k), e considere as classes totais de Stiefel-Whitney,

$$W(M^n) = 1+w_1+\cdots+w_n$$

e

$$W(\eta^k) = 1+u_1+\cdots+u_k.$$

Pelo teorema da classificação, existe $f : M^n \to BO(k)$ e $v_1,\ldots,v_k \in BO(k)$ tal que $f^*(v_i) = u_i$. Assim, via o isomorfismo acima estabelecido, a cara típica de um número característico de η^k é

$$f^*(v_{i_1}\cdots v_{i_s})(w_{j_1}\ldots w_{j_l}) = u_{i_1}\ldots u_{i_s}w_{j_1}\ldots w_{j_l}.$$

1.4 Cobordismo de ações de grupos

Enfatizamos que estamos subentendendo que as variedades, aplicações entre variedades e ações sobre variedades são diferenciáveis de classe C^∞ (ou suaves).

Definição 1.4.1. *Seja G um grupo de Lie compacto e M^n uma variedade fechada. Uma ação suave ϕ de G em M^n , que será denotada por (M^n,ϕ) é uma aplicação $\phi : G\times M^n \to M^n$ tal que:*

1. *$\phi(e,m) = m, \forall m \in M^n$, onde e é o elemento neutro de G.*

2. *$\phi(g,\phi(h,m)) = \phi(gh,m), \forall g,h \in G$ e $m \in M^n$.*

   Uma ação é dita livre se, caso $\phi(g,m) = m$, então $g = e$, para todo $m \in M^n$.

Definição 1.4.2. *Sejam G um grupo, X,Y conjuntos, ϕ,ψ ações de G em X e Y respectivamente. Dizemos que $f : X \to Y$ é G-equivariante (ou apenas, equivariante) se*

$$f(\phi(g,x)) = \psi(g, f(x)), \forall g \in G, \forall x \in X.$$

Considerando os objetos da forma (M^n, ϕ), temos a seguinte noção de equivalência:

$(M^n, \phi) \sim (V^n, \psi)$ se existe um difeomorfismo C^∞, $f : M^n \to V^n$, G-equivariante com respeito a ϕ e ψ.

Definição 1.4.3. *Dizemos que (M^n, ϕ) borda se existe W^{n+1} compacta tal que $\partial(W^{n+1}) = M^n$ e existe $\varphi : G \times W^{n+1} \to W^{n+1}$ tal que $\varphi|_{M^n} = \phi$. Além disso, dizemos que duas ações (M^n, ϕ) e (V^n, ψ) são G-cobordantes, se a união disjunta $(M^n \cup V^n, \phi \cup \psi)$ borda no sentido acima.*

A relação de cobordismo assim introduzida é uma relação de equivalência. Não é difícil mostrar a reflexividade e a simetria, enquanto a transitividade necessita do Teorema do Colar Equivariante para garantir a suavidade da ação. Denotaremos por $I_n(G)$ o conjunto das classes de G-cobordismo $[(M^n, \phi)]$.

Com a operação dada pela união disjunta, $[(M^n, \phi)] + [(V^n, \psi)] = [M^n \cup V^n, \phi \cup \psi]$, $I_n(G)$ é um grupo abeliano, denominado o *grupo de G-cobordismo irrestrito n-dimensional*. O elemento neutro é dado pela classe de cobordismo $[M^n, \phi]$ representado pelas ações (M^n, ϕ) que bordam. Além disso, $I_*(G) = \oplus_{n \geq 0} I_n(G)$ é um η_*-módulo graduado, com a operação

$$[V^k] \cdot [M^n, \phi] = [V^k \times M^n, \overline{\phi}]$$

onde

$$\begin{array}{cccc} \overline{\phi} : & G \times V^k \times M^n & \to & V^k \times M^n \\ \\ & (g, v, m) & \mapsto & (v, \phi(g, m)) \end{array}$$

Podemos obter outros grupos de G-cobordismo impondo restrições às ações consideradas. Nesta linha surge *o grupo de G-cobordismo principal n-dimensional*, denotado por $\eta_n(G)$, obtido ao impormos que todas as ações consideradas na relação de cobordismo sejam *livres*. Análogamente a $I_*(G)$, temos uma estrutura de η_* - módulo graduado em $\eta_*(G) = \oplus_{n \geq 0} \eta_n(G)$.

Dada uma G-ação qualquer (M^n, ϕ) em uma variedade fechada M^n, a teoria das ações de grupos de Lie garante que o conjunto de pontos fixos de ϕ,

$$F_\phi = \{x \in M^n : \phi(g, x) = x, \forall g \in G\},$$

é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de M^n.

Por outro lado, dados um grupo de Lie compacto G e F uma união disjunta e finita de variedades fechadas, cabe perguntar: existe um limitante superior para a dimensão de variedades M^n equipadas com uma G-ação que possui F como conjunto de pontos fixos?

Conforme visto na Introdução, essa tese considera a questão acima para o caso $G = \mathbb{Z}_2$ e F da forma $F = F^n \cup F^j$.

A partir de agora iremos considerar $G = \mathbb{Z}_2$, e nesse caso estaremos trabalhando com $\eta_*(\mathbb{Z}_2)$ (o grupo de $\mathbb{Z}_2$-cobordismo principal).

Definição 1.4.4. *Uma involução suave T sobre uma variedade fechada M^n, denotada por (M^n,T), é uma aplicação suave $T : M^n \to M^n$ tal que $T \circ T = Id$.*

Note que uma involução suave T sobre uma variedade fechada M^n define uma ação ϕ de $\mathbb{Z}_2$ em M^n, pois podemos identificar o grupo formado por Id e T com a operação composição, com o grupo $\mathbb{Z}_2$. Assim, (M^n,ϕ) é uma $\mathbb{Z}_2$-ação tal que

$\phi(\bar{0},m) = \phi(Id,m) = m$ e $\phi(\bar{1},m) = \phi(T,m) = T(m)$, para todo $m \in M^n$.

Dessa forma, existe uma identificação entre as $\mathbb{Z}_2$-ações (M^n,ϕ) e as involuções (M^n,T). Sendo assim, usaremos a notação (M^n,T), onde T é uma involução suave, ao invés de (M^n,ϕ). A partir de agora, admitiremos tacitamente que todas as involuções serão suaves. Com a identificação acima, podemos reescrever a definição de cobordismo de $\mathbb{Z}_2$-ações da seguinte maneira:

Definição 1.4.5. *Dizemos que uma involução suave (M^n,T) borda, se existem uma variedade compacta W^{n+1} e uma involução suave S sobre W^{n+1}, tais que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $S|_{M^n} = T$. Duas involuções suaves (M^n,T) e (N^n,T') são cobordantes se a união disjunta $(M^n \cup N^n, T \cup T')$ borda.*

Definição 1.4.6. *Dada uma involução sem pontos fixos (M^n,T), definimos os números de involução* de (M^n,T) como sendo os números de Whitney do fibrado linha associado $\lambda \to \frac{M^n}{T}$. Ou seja, tais números são da forma $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_r}c^k[\frac{M^n}{T}]$, onde os w_{i_j} são classes tangenciais de $[\frac{M^n}{T}]$ e $c \in H^1(\frac{M^n}{T},\mathbb{Z}_2)$ é a primeira classe de Whitney do fibrado linha λ.

Assim, temos: $(M^n,T) = 0$ em $\eta_n(\mathbb{Z}_2)$ se, e só se, todos seus números de involução são nulos. Temos, portanto, o seguinte resultado.

Teorema 1.4.7. *Duas involuções sem pontos fixos são cobordantes se, e só se, possuem os mesmos números de involução.*

Assim, temos um critério algébrico para detectar o cobordismo de involuções quando os conjuntos de pontos fixos envolvidos são vazios, mas não temos tal critério caso contrário. Estudaremos isso na seção a seguir. Para tanto, recordaremos dois teoremas importantes da literatura.

Teorema 1.4.8 (Leray-Hirsch)**.** *Seja $p : E \mapsto X$ um fibrado, onde X é um CW-complexo, e seja Λ um anel comutativo com unidade. Suponha que existam elementos homogêneos $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \in H^*(E,\Lambda)$ tal que, para cada $x \in X$, o Λ-módulo $H^*(E_x,\Lambda)$ seja livre com base $\{j_x^*(\alpha_1), j_x^*(\alpha_2),\cdots, j_x^*(\alpha_r)\}$, onde $E_x = p^{-1}(x)$ é a fibra sobre x e $j_x : E_x \to E$ é a aplicação inclusão. Então o $H^*(X,\Lambda)$-módulo $H^*(E,\Lambda)$ é livre com base $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$. [17]*

Teorema 1.4.9 (Teorema de Borel-Hirzebruch)**.** *Sejam $\eta^k \to M^n$ um fibrado vetorial sobre uma variedade fechada, com $W(\eta^k) = v_1 + \cdots + v_k$, $W(M^n) = w_1 + \cdots + w_n$ e c a classe característica do fibrado linha $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ associado ao fibrado projetivo $\mathbb{R}P(\eta^k)$. Então $H^*(\mathbb{R}P(\eta^k))$ é um $H^*(M)$-módulo livre graduado, com base $1,c,c^2,\cdots,c^{k-1}$, e a classe total de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P(\eta^k)$ é dada por*

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = W(M^n).(\sum_{j=0}^{k}(1+c)^j v_{k-j}) = (1+w_1+\cdots+w_n)((1+c)^k+(1+c)^{k-1}v_1+\cdots+v_k).$$

Além disso, vale a relação

$$c^k + c^{k-1}v_1 + \cdots + v_k = 0.$$

1.5 Sequência de Conner e Floyd

Seja (M^n, T) uma involução suave definida em uma variedade fechada n-dimensional M^n. O conjunto de pontos fixos de T, F, é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de M^n, que pode ser escrita como $F = \cup_{i=0}^{n} F^i$, onde cada F^i é a união (eventualmente vazia) das componentes $i-$ dimensionais de F. O fibrado normal de F em M^n, $\eta \to F = \cup_{i=0}^{n}(\eta^{n-i} \to F^i)$, é chamado o *fixed-data* da involução (M^n, T). A notação F^n diz respeito às componentes de M^n nas quais T atua como a identidade. Dessa forma, $\eta^0 \to F^n$ é o fibrado 0-dimensional.

Exemplo 1.5.1. Para qualquer variedade fechada M^n, o fibrado tangente $\tau(M^n) \to M^n$ pode ser realizado como o fixed-data de uma involução. De fato, a involução

$$\begin{array}{rccc} twist: & M^n \times M^n & \to & M^n \times M^n \\ & (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$$

tem como conjunto de pontos fixos a diagonal $\Delta = \{(x,x); x \in M^n\}$, ou seja, uma cópia difeomorfa de M^n. O fibrado normal de Δ no produto cartesiano $M^n \times M^n$ é equivalente, como fibrado, ao fibrado tangente $\tau(M^n) \to M^n$.

Com isso em mente, e conforme temos atuado até o momento, queremos caracterizar quando duas involuções são cobordantes. Como vimos na seção anterior, o que caracteriza a classe de cobordismo de uma involução sem pontos fixos (M^n, T) em $\eta_n(\mathbb{Z}_2)$ são seus números de involução. No entanto, não existe, a priori, um tal critério para involuções (M^n, T) com $Fix(T) \neq \emptyset$. Veremos a seguir que o monomorfismo j^* da *sequência exata de Conner e Floyd* de [6] fornece uma ferramenta algébrica para caracterizar um elemento de $I_*(\mathbb{Z}_2)$; esta sequência estabelece quando duas involuções são cobordantes, e ainda, quando um determinado fibrado pode ser caracterizado como o *fixed-data* de alguma involução.

Considere as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rcl} j^*: I_n(\mathbb{Z}_2) & \to & \oplus \eta_j(BO(n-j)) \\ [M^n, T] & \mapsto & \Sigma_{i=0}^{n}[\eta^{n-i} \to F^i], \end{array}$$

onde $\cup_{i=0}^{n}(\eta^{n-i} \to F^i)$ é o fixed-data da involução (M^n, T); e

$$\partial : \oplus\eta_j(BO(n-j)) \quad \to \quad \eta_{n-1}(BO(1))$$

$$[\eta, F] = \Sigma_{i=0}^{n}[\eta^{n-i} \to F^i] \quad \mapsto \quad [\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)] = \Sigma_{i=0}^{n}[\lambda \to \mathbb{R}P^{n-j}],$$

onde $\lambda \to \mathbb{R}P^{n-j}$ é o fibrado linha associado à involução antipodal nas fibras de η^{n-i} (ou seja, como já citado acima, o fibrado linha associado ao fibrado projetivo $\mathbb{R}P^{n-j}$). Pode-se mostrar que tais aplicações são homomorfismos.

Teorema 1.5.2 (Sequência de Conner e Floyd)**.** *Para cada n, a sequência curta de $\mathbb{Z}_2$-módulos*

$$0 \to I_n(\mathbb{Z}_2) \to \oplus\eta_j(BO(n-j)) \to \eta_{n-1}(BO(1)) \to 0$$

é exata.

Veremos a seguir algumas consequências do Teorema 1.4.9; a primeira tal consequência será muito utilizada ao longo da seção 3.4.

Corolário 1.5.3. *Se $\eta \to F$ é um fixed-data, então todos os números característicos de $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)$ são zero.*

Demonstração. De fato, se $\eta \to F$ é o fibrado normal de uma involução (M^n, T) fixando F, temos, pela sequência de Conner e Floyd, que

$$[\eta] = j_*[(M^n, T)],$$

e assim, da exatidão da sequência, seque que

$$0 = (\partial \circ j_*)[(M^n, T)] = \partial([\eta \to F]) = [\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)].$$

Ou seja, $\eta \to \mathbb{R}P(\eta)$ borda em $\eta_{n-1}(BO(1))$, portanto todos os seus números característicos são nulos. □

Além disso, vejamos a forma de tais números característicos.

Como λ é o fibrado linha associado à involução antipodal nas fibras de η, temos que $W(\lambda) = 1 + c, c \in H^1(\mathbb{R}P(\eta))$. Escrevendo $F = \cup F^i$, o teorema 1.4.9 nos diz que $H^*(\mathbb{R}P(\eta))$ é um $H^*(F^i)$-módulo livre gerado por $\{1, c, c^2, \cdots, c^{n-i-1}\}$, e temos

$$W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1 + w_1(F^i) + \cdots + w_i(F^i)) \sum_{j=0}^{n-i}(1+c)^{n-i-j}v_j = 1 + W_1 + \cdots + W_{n-1},$$

onde $W(\eta^{n-i}) = 1 + v_1 + \cdots + v_{n-i}$.

Portanto, um número característico tipico (sobre F^i) do fibrado $[\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)]$ é da forma:

$$c^j W_{i_1} \cdots W_{i_t}[\mathbb{R}P(\eta)],$$

onde $j + i_1 + \cdots + i_t = n - 1$.

O que o resultado acima nos diz é que a soma dos números acima correspondentes a todos os F^i é zero.

Na demonstração do Teorema 1.5.2 é provado que, se $\partial([\eta \to F]) = 0$, então η é realizado como o fixed-data de uma involução (M^n, T), e não apenas cobordante à um fibrado que é realizado como fixed-data. Em particular, temos que um fibrado cobordante a um fixed-data também é um fixed-data. Dessa forma obtemos o seguinte corolário

Corolário 1.5.4. *Um fibrado $\eta \to F$ é o fixed-data de uma involução (M^n, T) se, e somente se, $\partial([\eta \to F]) = 0$.*

Corolário 1.5.5. *Seja $\eta \to F = (\eta_{n_i} \to F^i) \cup (\eta_{n_j} \to F^j)$, fibrado normal de uma involução (ou seja, o conjunto de pontos fixos contempla apenas duas dimensões). Se η_{n_i} é um fixed-data, então η_{n_j} é um fixed-data.*

Demonstração.

$$0 = \partial([\eta \to F]) = \partial([\eta_{n-i} \to F^i]) + \partial([\eta_{n-j} \to F^j]) = \partial([\eta_{n-j} \to F^j]).$$

□

Corolário 1.5.6. *Duas involuções (M^n, T) e (V^n, S) são cobordantes se, e só se, seus fixed-data $\eta \to F_T$ e $\eta' \to F_S$ forem cobordantes. Em outras palavras, duas involuções (M^n, T) e (V^n, S) são cobordantes se, e somente se, seus fixed-data possuem os mesmos números característicos.*

1.6 Ferramentas para o cálculo de classes características

1.6.1 *Multiplicação por potências inteiras de* $(1 + c)$

Seja X um espaço topológico qualquer. A coleção de todos os elementos da forma

$$w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots \in H^*(X),$$

em que $w_i \in H^i(X)$ e o termo de grau zero é $1 \in H^0(X)$, é um grupo comutativo com a operação dada pelo produto cup (ver [16]). Dado um elemento $w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots$, o seu inverso (ou dual)

$$\frac{1}{w} = \overline{w} = 1 + \overline{w_1} + \overline{w_2} + \cdots,$$

o qual é caracterizado pela relação $w\overline{w} = 1 \in H^*(X)$, pode ser construído indutivamente pelo algoritmo

$$w_0 = 1;\; w_n = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{w}_{n-i}.$$

Consideramos agora um *fixed-data*

$$\eta \to F = \cup_{j=0}^{m} \eta^{n-j} \to F^j.$$

O inverso multiplicativo de $1+c$ em $H^*(\mathbb{R}P(\eta))$ é dado por

$$\frac{1}{1+c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1},$$

lembrando que $c^t = 0$ se $t > n-1$, pois $\mathbb{R}P(\eta)$ é uma variedade de dimensão $n-1$.

Para qualquer d, $(1+c)^d$ pode ser escrito na forma

$$(1+c)^d = 1 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots a_{n-1} c^{n-1},$$

para certos $a_i \in \{0,1\}$. Assim, fixando um inteiro d qualquer, temos

$$(1+c)^d \cdot W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_{n-1} c^{n-1})(1 + w_1(\mathbb{R}P(\eta)) + w_2(\mathbb{R}P(\eta)) + \cdots + w_{n-1}(\mathbb{R}P(\eta)))$$

é tal que sua parte homogênea de grau i é um polinômio homogêneo de grau i nas classes $w_{j,i} \in H^i(\mathbb{R}P(\eta))$ e c. Logo, escrevendo

$$(1+c)^d \cdot W(\mathbb{R}P(\eta^{n-j})) = 1 + w_{j,1} + w_{j,2} + \cdots + w_{j,n-1}$$

com $w_{j,i} \in H^i(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))$, temos que para cada partição $i_1 + i_2 + \cdots + i_s + t = n-1$,

$$w_{j,i_1} w_{j,i_2} \cdots w_{j,i_s} c^t [\mathbb{R}P(\eta^{n-j})] = 0.$$

A discussão acima fornece então a técnica de efetuar multiplicações por potências inteiras de $1+c$, positivas ou negativas, para obter equações com números característicos. Essa técnica foi bastante explorada por *Pergher e Stong* em [25] através das chamadas classes $w[r]$, e será muito usada ao longo deste trabalho. A ideia central é que cada parte homogônea de $W(\mathbb{R}P(\eta))$ pode ser algebricamente complicada e a multiplicação por potências de $1+c$ pode dar origem a partes homogêneas mais simples.

1.6.2 Fórmula de Conner

Seja $\eta^k \to M^n$ um fibrado k-dimensional sobre uma variedade n-dimensional fechada e conexa, com

$$W(\eta^k) = 1 + v_1 + \cdots + v_k.$$

Pelo teorema de Borel-Hirzebruch, 1.4.9, temos que $H^*(\mathbb{R}P(\eta^k))$ é um $H^*(M^n)$-módulo livre graduado com base $\{1, c, c^2, \cdots, c^{k-1}\}$, com a relação $c^k = c^{k-1} v_1 + \cdots + v_k$. Em particular, se $a_n \in H^n(M^n)$

é tal que $a_n c^{k-1} = 0$, então $a_n = 0$. Além disso, como $H^n(M^n)$ e $H^{n+k-1}(\mathbb{R}P(\eta^k))$ são isomorfos à $\mathbb{Z}_2$, temos que

$$a_n[M^n] = a_n c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)].$$

Se $a_s \in H^s(M^n)$, com $n < s \leq n+k-1$ então

$$a_s c^{n+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k] = 0, \text{pois } a_s = 0.$$

Teorema 1.6.1 (Fórmula de Conner)**.** *Para cada a_s pertencente a $H^s(M^n)$, onde $0 \leq s \leq n$, temos*

$$a_s c^{n+k-1}[\mathbb{R}P(\eta^k] = a_s \overline{v_{n-s}}[M^n].$$

Mais precisamente os $\overline{v_i} \in H^i(M^n)$, os duais de v_i, é o termo homogêneo de grau i do inverso multiplicativo de $W(\eta^k)$. Onde

$$\overline{W(\eta^k)} = \frac{1}{W(\eta^k)} = 1 + \overline{v_1} + \cdots \overline{v_n}.$$

1.6.3 Quadrados de Steenrod

As operações cohomológicas Sq^i, conhecidas como *quadrados de Steenrod*, são completamente caracterizadas pelas quatro propriedades a seguir. Dados X, Y espaços topológicos quaisquer, temos:

1. Para cada n e cada i inteiros não negativos, $Sq^i : H^n(X) \to H^{n+i}(X)$ define um homomorfismo aditivo.

2. (Naturalidade) Se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} H^n(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "Sq^i"'] & H^n(X) \arrow[d, "Sq^i"'] \\ H^{n+i}(Y) \arrow[r, "f^*"] & H^{n+i}(X) \end{tikzcd}$$

   é comutativo.

3. Se $a \in H^n(X)$ então $Sq^0(a) = a, Sq^i(a) = 0$ para cada $i > n$.

4. *(Fórmula de Cartan)* Se a, b são elementos homogêneos de $H^*(X)$ e ab denota o produto cup, então vale a identidade

$$Sq^i(ab) = \sum_{j=0}^{i} Sq^j(a) Sq^{i-j}(b).$$

Teorema 1.6.2 (Fórmula de Wu)**.** *Se $\eta^k \to X$ é um fibrado vetorial sobre um espaço X paracompacto, e $W(\eta^k) = 1 + w_1 + \cdots + w_k$ denota a classe de Stiefel-Whitney de η^k, então:*

$$Sq^i(w_j) = \sum_{t=0}^{i} \binom{j-i-1+t}{t} w_{i-t} w_{j+t},$$

para $i < j$.

Teorema 1.6.3. *Dado $r \geq 0$, y uma classe de dimensão 1, então*

$$Sq^j(y^{2^r}) = \begin{cases} y^{2^r}, \; se \; j = 0 \\ y^{2^{r+1}}, \; se \; j = 2^r \\ 0, \; c.c. \end{cases}$$

Demonstração. Provaremos por indução em r. Se $r = 0$ temos que

$$Sq^j(y) = \begin{cases} y, \text{ se } j = 0 \\ y^2, \text{ se } j = 1 \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$$

Suponha que seja válido para $r-1$, ou seja,

$$Sq^j(y^{2^{r-1}}) = \begin{cases} y^{2^{r-1}}, \text{ se } j = 0 \\ y^{2^r}, \text{ se } j = 2^{r-1} \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$$

Vamos provar para r. Sabemos das propriedades de Sq que então:

$$Sq^0(y^{2^r}) = 2^r,$$

$$Sq^{2^r}(y^{2^r}) = y^{2^{r+1}};$$

$$Sq^j(y^{2^r}) = 0, \forall j > 2^r.$$

Suponha então que $0 < j < 2^r$. Daí,

$$Sq^j(y^{2^r}) = \sum_{t=0}^{j} Sq^t(y^{2^{r-1}}) Sq^{j-t}(y^{2^{r-1}}).$$

Assim, temos pela hipótese de indução que:

$$Sq^t(y^{2^{r-1}}) \neq 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 2^{r-1}.$$

Suponha, primeiramente, $t = 0$:

$$Sq^{j-t}(y^{2^{r-1}}) = Sq^j(y^{2^{r-1}}) \neq 0 \Leftrightarrow j = 0 \text{ ou } j = 2^{r-1}.$$

Mas, $j \neq 0$, então:

$$Sq^{j-t}(y^{2^{r-1}}) \neq 0 \Leftrightarrow j = 2^{r-1}.$$

E assim temos o termo

$$Sq^0(y^{2^{r-1}})Sq^{2^{r-1}}(y^{2^{r-1}}) = y^{2^{r-1}}y^{2^r}$$

Suponha agora que $t = 2^{r-1}$. Temos que:

$$Sq^{j-t}(y^{2^{r-1}}) = Sq^{j-2^{r-1}}(y^{2^{r-1}}) \neq 0 \Leftrightarrow j = 2^{r-1} \text{ ou } j = 2^r + 2^{r-1} > 2^r.$$

Logo,

$$Sq^{j-t}(y^{2^{r-1}}) \neq 0 \Leftrightarrow j = 2^{r-1}.$$

Assim temos o termo

$$Sq^{2^{r-1}}(y^{2^{r-1}})Sq^0(y^{2^{r-1}}) = y^{2^r}y^{2^{r-1}}.$$

Mas esses termos são iguais, portanto a soma deles é zero, o que prova o desejado. □

Teorema 1.6.4. *Dado $r \geq 0$, c,x classes de dimensão 1, então*

$$Sq^{2^r}(cx^{2^r}) = cx^{2^{r+1}}.$$

Demonstração. Dados $r \geq 0$, temos que:

$$Sq^{2^r}(cx^{2^r}) = \sum_{t=0}^{2^r} Sq^t(c)Sq^{2^r-t}(x^{2^r}).$$

Mas c tem dimensão 1, então:

$$Sq^t(c) \neq 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1.$$

Suponha $t = 0$. Então

$$Sq^0(c)Sq^{2^r}(x^{2^r}) = cx^{2^{r+1}},$$

e por outro lado, se $t = 1$, temos pelo teorema anterior que

$$Sq^{2^r-1}(x^{2^r}) = 0.$$

Portanto,

$$Sq^{2^r}(cx^{2^r}) = cx^{2^{r+1}}.$$

□

1.7 Teorema de Lucas

Nesta seção iremos estudar a paridade de $\binom{m}{n}$, e para isso o Teorema de Lucas é extremamente útil.

Definição 1.7.1. *Seja p um número primo. Dado um número natural n, definimos sua expansão p-ádica escrevendo n na forma*

$$n = n_k n_{k-1} \cdots n_1 n_0 = n_k p^k + n_{k-1}p^{k-1} + \cdots n_1 p + n_0, 0 \leq n_i \leq p-1.$$

Por exemplo, para $p = 2$, temos a expansão diádica (2-ádica) de n dada por:

$$n = n_k n_{k-1} \cdots n_1 n_0 = n_k 2^k + n_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + n_1 2 + n_0, \ (n_i = 0 \text{ ou } 1)$$

que é equivalente a escrever n como uma soma de potências de 2. Se $n_i = 1$ dizemos que 2^i aparece na expansão diádica de n, ou simplesmente, 2^i aparece em n.

Em nossos cálculos faremos uso apenas das partições diádicas, ou seja, $p = 2$, e para esse caso o teorema de Lucas fica:

Teorema 1.7.2 (Teorema de Lucas)**.** *Sejam $m,n \in \mathbb{N}$ com $n \leq m$. Então*

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

é ímpar se, e só se, a expansão diádica de n está contida na expansão de m. Em outras palavras, $\binom{m}{n} = 1$ se, e só se, toda potência de 2 que aparece na expansão diádica de n também aparece na de m.

Corolário 1.7.3. *Se m é par, n é ímpar e $n \leq m$, então $\binom{m}{n}$ é par.*

Corolário 1.7.4. *Sejam m,n naturais quaisquer com $\binom{m}{n} = 1$. Se 2^t é uma potência que aparece em n, então $\binom{m}{n-2^t} = 1$.*

Corolário 1.7.5. *$\binom{m+n}{n} = 1$ se, e só se, m e n possuem expansões diádicas disjuntas.*

Corolário 1.7.6. *Se m,t são naturais positivos que possuem expansões diádicas disjuntas então, para qualquer natural n, temos*

$$\binom{n}{m+t} = \binom{n}{m} \cdot \binom{n}{t}.$$

Observação 1.7.7. Sejam m, n naturais ímpares tais que sua soma é uma potência de 2, digamos, $m + n = 2^{r+1}$. Então temos que para cada $1 \leq t \leq r$, 2^t aparece em m ou aparece em n. Logo,

$$\binom{m}{2^t} + \binom{n}{2^t} = 1.$$

Além disso, temos as seguintes propriedades dos coeficientes binomiais que usaremos a seguir:

- *(relação de Stiefel)* para quaisquer naturais m,n, temos

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

- para quaisquer naturais n,m,k

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

CAPÍTULO 2

Limitantes para a dimensão de variedades com involução com conjunto de pontos fixos da forma $F^n \cup F^j$

2.1 Alguns resultados conhecidos

O objetivo central deste capítulo é responder à pergunta que foi levantada nas preliminares: existe um limitante máximo para a dimensão de variedades M^n dotadas de uma $\mathbb{Z}_2$-ação que possui F como conjunto de pontos fixos?

Outros estudos foram feitos tendo em mente a pergunta acima, impondo restrições ao conjunto de pontos fixos. Nesta seção conheceremos alguns dos resultados obtidos na literatura.

Podemos começar falando do famoso *Teorema $\frac{5}{2}$ de Boardman*, ou (*Five Halves Theorem*) de [3].

Teorema 2.1.1 ($\frac{5}{2}$-Boardman)**.** *Se (M^m,T) é uma involução que não borda equivariantemente, e se $F = F^1 \cup \cdots \cup F^n$ é o seu conjunto de pontos fixos, então $m < \frac{5}{2}n$.*

Adicionalmente, e através de exemplos explícitos, *Boardman* mostrou que a estimativa em questão é a melhor possível nas condições gerais nas quais a mesma foi formulada.

Essa generalidade do resultado de Boardman independe de n e abrange a possibilidade de F possuir componentes com todas as dimensões, de 0 a n; por essa razão tal resultado possui embutido em si um leque de problemas interessantes, que se revelam mediante a observação simultânea de dois resultados posteriores da literatura.

O primeiro desses é o seguinte resultado de *C. Kosniowski e R. Stong*:

Teorema 2.1.2. *Se (M^m,T) fixa $F = F^n$, e se $m > 2n$, então (M^m,T) borda equivariantemente.*

Observe que nas condições do teorema, temos que o fixed-data de (M^m,T) borda, portanto F borda, de onde concluímos, por contra-positiva, que caso F não borde, então $m \leq 2n$. O exemplo dado pela involução *twist* mostra que essa estimativa é a melhor possível, o que significa um limitante melhor para m que o de *Boardman*, no caso especial em que F possui dimensão constante igual à n.

O segundo resultado é um *Teorema de Royster* contido em [27].

Teorema 2.1.3. *Se (M^m,T) é uma involução fixando a união de um ponto com uma variedade F de dimensão n ímpar, então (M^m,T) é equivariantemente cobordante à uma involução específica definida em $\mathbb{R}P^{n+1}$, e em particular, $m \leq n+1$.*

Naturalmente surge então o problema de se estabelecer um limitante para m, em termos de n, melhor que o de *Boardman*, quando alguma restrição sobre n é imposta ou quando se omite a presença de algumas dimensões no conjunto de pontos fixos. Essa linha de problemas foi descoberta e estabelecida por *P. Pergher* em [18].

Tal problema pode ser formulado segundo a seguinte forma: para cada número natural n, e para cada conjunto de naturais $X = \{p_1, p_2, \cdots, p_r\}$, onde $0 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_r < n$ e $0 \leq r$, definimos $m(n,X)$ como sendo o seguinte número natural:

$$m(n,X) = \max\{m|\ \text{existe involução } (M^m,T) \text{ fixando alguma } F \text{ que não borda, cuja componente maximal é } n\text{-dimensional, e tal que } F \text{ não possui componentes com dimensões diferentes de } n \text{ daquelas especificadas na lista } X.\}$$

Com essa formulação, temos que

- Teorema $\frac{5}{2}$ de Boardman estabelece que $m(n;X) \leq \frac{5}{2}n$ para qualquer $(n;X)$;
- O teorema de Kosniowski e Stong diz que, se X é a lista vazia, então $m(n,X) = 2n$ para todo n;
- O resultado de Royster diz que $m(n;\{0\}) = n+1$ quando n é ímpar.

É importante frisar que o valor de $m(n;X)$ independe da quantidade de componentes de F com alguma dimensão específica $p_j \in X$, uma vez que a soma conexa de dois fibrados com mesma dimensão tanto na base quanto na fibra é cobordante como fibrado à união disjunta dos mesmos; utilizando a sequência de Conner e Floyd, podemos então supor que para cada dimensão ocorrendo no conjunto de pontos fixos só existe uma componente com tal dimensão.

Uma vez que $m(n;X) = 2n$ está estabelecido para a lista vazia X e para qualquer n, o passo seguinte é a análise de $m(n;X)$ quando X é unitário, ou seja, quando F possui duas componentes com dimensões distintas, $F^n \cup F^j$, $j < n$. O caso $j = 0$ e n ímpar foi resolvido por Royster, como já mencionado. Nessa direção Pergher mostrou que $m(2n;\{0\}) \leq 3n+3$ quando n é ímpar em [18].

Posteriormente, *Stong e Pergher* [25] completaram a análise de $m(n;\{0\})$ para qualquer n par. *Stong e Pergher* chamaram $m(n;\{0\})$ de $m(n)$ e determinaram seu valor exato para cada n. A técnica utilizada consistiu inicialmente em mostrar que, se (M^m,T) fixa $F^n \cup \{\text{ponto}\}$, então $m \leq m(n)$; isso foi obtido com a utilização de certas classes características especiais, denotadas por $w[r]$, e a teoria de

Conner e Floyd. $m(n)$ e $w[r]$ serão mais explorados na seção 2.2, e a classe $w[r]$ será muito utilizada na prova do teorema central desse capítulo.

Em sua tese de doutorado, *Involutions fixing* $\mathbb{R}P^j \cup F^n$, [11], sob a orientação do *Prof. Stong*, e posteriormente nos artigos [12] e [13] *Suzanne M. Kelton* analisou limitantes para as dimensões de variedades com involução cujo conjunto de pontos fixos é da forma $F^n \cup \mathbb{R}P^j$. Essa é uma linha de generalização para o caso $F = F^n \cup \{\text{ponto}\}$, uma vez que ponto é igual à $\mathbb{R}P^0$. Entre os diversos resultados obtidos, *Kelton* mostrou que se (M^m, T) fixa $F^m \cup \mathbb{R}P^1$, então

$$m \leq \begin{cases} m(n-1)+1, & \text{se } n \text{ ímpar} \\ m(n-1)+2, & \text{se } n \text{ par,} \end{cases}$$

e tais resultados são os melhores possíveis, encerrando o estudo desse caso.

Já o caso $m(n, \{2\})$, $F = F^n \cup F^2$, foi estudado por *Fábio Gomes Figueira* em sua tese de doutorado *Involuções cujo conjunto de pontos fixos possui duas componentes*, vide [8] sob orientação do Prof. Pergher, e posteriormente nos artigos [22], [23] e [24]. O resultado é o seguinte: se (M^m, T) fixa $F^n \cup F^2$, então

$$m(n; \{2\}) = \max\{2n, m(n-2)+4\}, \forall n,$$

e esse é o melhor limitante possível. *Figueira* também mostrou que

$$m(n; \{n-1\}) = 2n.$$

Seguindo essa direção, *Évelin Meneguesso Barbaresco* estudou em sua tese de doutorado *Involuções fixando* $F^n \cup F^3$, [1], o caso $m(n, \{3\})$, onde obteve o seguinte resultado:

$$m(n; \{3\}) = \max\{2n, m(n-3)+6\}, \forall n,$$

e esse é o melhor limitante possível.

Seguindo essa linha, o principal objetivo desse capítulo é mostrar o seguinte teorema:

Teorema 2.1.4. *Seja (M^m, T) uma involução com $Fix(T) = F^n \cup F^j$ com $n > j$. Então $m \leq \max\{\frac{5}{2}j + m(n-j), 2n\}$.*

2.2 O limitante $m(n)$ de *Stong e Pergher*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, *Stong e Pergher* construíram, em [25], uma involução (M^m, T) onde a dimensão de M é um número natural especifico $m(n) > n$, e o conjunto de pontos fixos é da forma $F^n \cup \{\text{ponto}\}$; além disso, esse valor é o máximo nessas condições. Em outras palavras, se (N^r, T) possui conjunto de pontos fixos da forma $F^n \cup \{\text{ponto}\}$, então $r \leq m(n)$. A seguir detalharemos $m(n)$.

Escreva $n = 2^p q$, onde $p \geq 0$ e $q \geq 1$, com q ímpar. Então

$$m(n) = \begin{cases} 2n+p+1-q, & \text{se } q \geq p \\ 2n+2^{p-q}, & \text{se } p < q. \end{cases}$$

Note em particular que:

1. Se n é ímpar, então $n = 2^0 q = q$, $q \geq 1$, portanto $m(n) = 2n+1-q = n+1$, que é o resultado de *Royster* [27];

2. Se $n = 2q$, com q ímpar, então $m(n) = 2n+1+1-q = 3q+2 = \frac{3}{2}n+2$. Nesse caso, esse valor (maximal) melhora o resultado de *Pergher* [18], o qual mostra que um limitante é $\frac{3}{2}n+3$;

3. se $n = 2^p$, $p \geq 1$, então:

$$m(n) = \begin{cases} 5, & \text{se } p = 1 \\ 2n+2^{p-q} = 2^{p+1}+2^{p-1} = 5\cdot 2^{p+1} = \frac{5}{2}2^p = \frac{5}{2}n, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

   Em outras palavras, se $n = 2^p$ com $p \geq 1$, os exemplos $(M^{m(n)}, T)$ de *Stong e Pergher* atingem o limite $\frac{5}{2}n$ de *Boardman*.

A seguir enunciaremos o teorema de *Stong e Pergher* no formato em que o mesmo aparece em [25], com $m(n)$ sendo escrito de forma um pouco diferente, a qual é mais adequada em alguns contextos.

Teorema 2.2.1. *Seja (M^m, T) uma involução suave sobre uma variedade fechada, tal que $F_T = F^n \cup \{\text{ponto}\}$, onde F^n é uma subvariedade fechada de dimensão $0 < n < m$. Se $n = 2^p(2q+1)$, então $m \leq m(n)$, onde*

$$m(n) = \begin{cases} (2^{p+1}-1)(2q+1)+(p+1), & \text{se } p \leq 2q+1 \\ (2^{p+1}-2^{p-(2q+1)})(2q+1)+2^{p-(2q+1)}(2q+2), & \text{se } p \geq 2q+2. \end{cases}$$

Adicionalmente, para cada n existe uma involução $(M^{m(n)}, T)$ com F_T sendo da forma $F^n \cup \{\text{ponto}\}$.

A técnica utilizada para provar o teorema acima consistiu inicialmente em mostrar que, se (M^m, T) fixa $F^n \cup \{\text{ponto}\}$, então $m \leq m(n)$, e isso foi obtido com a utilização de certas classes características especiais. A saber, as classes

$$w[r] = \frac{W(\mathbb{R}P(\eta^k))}{(1+c)^{k-r}}.$$

A parte de grau i de $w[r]$ foi denotado por $w[r]_i$, ou seja,

$$w[r] = 1 + w[r]_1 + w[r]_2 + \cdots w[r]_{n+k-1}$$

Em outras palavras, $w[r]_i$ é obtida coletando-se os termos de grau i em

$$w[r] = (1+w_1+w_2+\cdots+w_n)((1+c)^r+(1+c)^{r-1}v_1+\cdots+v_r+\frac{v_{r+1}}{1+c}+\cdots)$$

e cada tal $w[r]_i$ é, portanto uma polinomial homogênea de grau i nas classes w_j's e c. Outra classe que *Stong e Pergher* introduziram e que também sera utilizada é a classe

$$X = w[r_1]_{2r_1}\cdots w[r_l]_{2r_l} w[s_1-1]_{2s_1-1}\cdots w[s_t-1]_{2s_t-1},$$

para r_i's e s_i's específicos, com

$$dimX = m(n-j) = 2r_1+\cdots+2r_l+2s_1+\cdots+2s_t+t.$$

Por fim, *Stong e Pergher* em [25] construíram explicitamente involuções (M^m,T) fixando $F^n \cup \{\text{ponto}\}$ com $m=m(n)$.

2.3 Funções auxiliares

Antes de provarmos o teorema 2.1.4, veremos nessa seção alguns resultados necessários e introduziremos certas classes características para $\eta_{m-1}(BO(1))$.

Tome $f: N \to BO(1)$ classificante para o fibrado linha $\lambda \to N$, com ν sendo o fibrado tangente sobre N. Mais genericamente, tome ξ um fibrado vetorial qualquer sobre N.

Usando o splitting principle para ξ, temos:

$$W(\xi) = \prod_{i=1}^{k}(1+x_i).$$

Definição 2.3.1. *Uma partição $w=(i_1,i_2,\ldots,i_r)$ vai ser entendida como r números inteiros positivos indexados com índices $1,\ldots,r$ onde $|w| = i_1+i_2+\cdots+i_r$ e $r=l(w)$, o comprimento da partição. Além disso uma subpartição w_1 de w com $l(w_1)=s$ são s números inteiros positivos onde o conjunto de indexadores pertence ao conjunto de indexadores de w, $1,\ldots,r$, e a subpartição complementar é a partição indexada com o conjunto complementar de indexadores de w.*

Tome $w=(i_1,i_2,\ldots,i_r)$ com $r \le k$, e defina:

$$f_w(\xi) = \sum_{i_j} x_1^{i_1}(c+x_1)^{i_1}x_2^{i_2}(c+x_2)^{i_2}\ldots x_r^{i_r}(c+x_r)^{i_r};$$

$$g_w(\xi) = \sum_{i_j} x_1^{i_1}(c+x_1)^{i_1+1}x_2^{i_2}(c+x_2)^{i_2+1}\ldots x_r^{i_r}(c+x_r)^{i_r+1};$$

$$h_w(\xi) = \sum_{i_j} x_1^{i_1+1}(c+x_1)^{i_1}x_2^{i_2+1}(c+x_2)^{i_2}\ldots x_r^{i_r+1}(c+x_r)^{i_r}$$

$$s_w(\xi) = \sum_{i_j} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_r^{i_r}$$

onde estas são as menores funções simétricas usuais contendo o monômio dado.

Denotaremos

$$f_{\emptyset}(\xi) = g_{\emptyset}(\xi) = h_{\emptyset}(\xi) = 1.$$

Exemplo 2.3.2. Se $W(\xi) = (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$ e $w = (2,3)$, então

$$f_w(\xi) = \sum x_{i_1}^2 (c+x_{i_1})^2 x_{i_2}^3 (c+x_{i_2})^3$$

$$= x_1^2(c+x_1)^2x_2^3(c+x_2)^3 + x_1^2(c+x_1)^2x_3^3(c+x_3)^3 + x_2^2(c+x_2)^2x_1^3(c+x_1)^3 +$$

$$x_2^2(c+x_2)^2x_3^3(c+x_3)^3 + x_3^2(c+x_3)^2x_1^3(c+x_1)^3 + x_3^2(c+x_3)^2x_2^3(c+x_2)^3.$$

Proposição 2.3.3. *Dados ξ e η com*

$$W(\xi) = \prod_{i=1}^{k}(1+x_i)$$

e

$$W(\eta) = \prod_{i=1}^{t}(1+y_i),$$

respectivamente, temos:

1) $f_w(\xi \oplus \eta) = \sum_{w=w_1w_2} f_{w_1} f_{w_2}$

2) $g_w(\xi \oplus \eta) = \sum_{w=w_1w_2} g_{w_1} g_{w_2}$

3) $h_w(\xi \oplus \eta) = \sum_{w=w_1w_2} h_{w_1} h_{w_2}$

4) $f_w(\lambda \otimes \xi) = f_w(\xi)$

5) $g_w(\lambda \otimes \xi) = h_w(\xi)$

6) $h_w(\lambda \otimes \xi) = g_w(\xi)$

7) $f_w(\xi + 1) = f_w(\xi + \lambda) = f_w(\xi)$

8) $g_w(\xi + 1) = g_w(\xi + \lambda) = g_w(\xi)$

9) $h_w(\xi + 1) = h_w(\xi + \lambda) = h_w(\xi)$

Demonstração. Por definição,

$$f_w(\xi) = \sum x_1^{i_1}(c+x_1)^{i_1} x_2^{i_2}(c+x_2)^{i_2} \ldots x_r^{i_r}(c+x_r)^{i_r}$$

com $w = (i_1, \ldots, i_r)$, $W(\xi) = \prod_{i=1}^{k}(1+x_i)$ e $r \leq k$. Tome η com $W(\eta) = \prod_{i=1}^{k}(1+y_i)$

1) Denotando o produto $x_1^{i_1}(c+x_1)^{i_1}$ pelo par (i_1,x_1), podemos considerar $f_w(\xi)$ em termos de conjuntos, da seguinte forma:

$$f_w(\xi)=\{\{(i_1,z_1),(i_2,z_2),\ldots,(i_r,z_r)\} \text{ com } z_i\in\{x_1,\ldots,x_k\} \text{ e } x_i\neq x_j \text{ se } i\neq j\}.$$

onde o elemento $\{(i_1,x_1),\ldots,(i_r,x_r)\}$ é o produto $x_1^{i_1}(c+x_1)^{i_1}\ldots x_r^{i_r}(c+x_r)^{i_r}$.

Dados $w_1=(a_1,\ldots,a_s)$ e $w_2=(b_1,\ldots,b_l)$, definimos também o produto dos conjuntos:

$f_{w_1}(\xi)f_{w_2}(\eta)=\{\{(a_1,z_1),\ldots,(a_s,z_s),(b_1,\bar{z}_1),\ldots,(b_l,\bar{z}_l)\}\ z_i\in\{x_1,\ldots,x_k\}$ e $\bar{z}_i\in\{y_1,\ldots,y_t\}$ $z_i\neq z_j$ e $\bar{z}_i\neq\bar{z}_j$ se $i\neq j\}$

Temos também definido:

$f_w(\xi\oplus\eta)=\{\{(i_1,z_1),\ldots,(i_r,z_r)\}z_i\in\{x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_t\}$ com $z_i\neq z_j\}$.

Vamos provar que:

$$f_w(\xi\oplus\eta)=\cup_{w=w_1w_2}f_{w_1}(\xi)f_{w_2}(\eta)$$

Dado um elemento qualquer de $f_w(\xi\oplus\eta)$, $\sigma=\{(i_1,z_1),\ldots,(i_r,z_r)\}$, temos três possibilidades para os $z_i's$:

i) $z_i's\in\{x_1,\ldots,x_k\},\forall i$, então $\sigma\in f_w(\xi)=f_w(\xi)\cdot 1=f_w(\xi)f_\emptyset(\eta)\subset\cup_{w=w_1w_2}f_{w_1}(\xi)f_{w_2}(\eta)$

ii) $z_i's\in\{y_1,\ldots,y_l\},\forall i$, então $\sigma\in f_w(\eta)$

iii) $z_i's$ assume valores em $\{x_1,\ldots,x_k\}$ e $\{y_1,\ldots,y_t\}$, assim existem $w_1=(i_{j_1},\ldots,i_{j_s})$ subpartição de w e $w_2=(i_{b_1},\ldots,i_{b_l})$ a subpartição complementar, de tal forma que $z_{j_i}\in\{x_1,\ldots,x_k\}$ e $z_{b_i}\in\{y_1,\ldots,y_t\}$. Em outras palavras,
$\sigma=\{(i_{j_1},z_1)\ldots,(i_{j_s},z_s)(i_{b_1},\bar{z}_1),\ldots,(i_{b_l},\bar{z}_l),\ z_i\in\{x_1,\ldots,x_k\}$ e $\bar{z}_i\in\{y_1,\ldots,y_t\}$ $z_i\neq z_j,\ \bar{z}_i\neq\bar{z}_j$ se $i\neq j\}$. Ou seja, $\sigma\in f_{w_1}(\xi)f_{w_2}(\eta)$.

De onde concluímos que

$$f_w(\xi\oplus\eta)\subset\cup_{w=w_1w_2}f_{w_1}(\xi)f_{w_2}(\eta)$$

Tomando, agora, um elemento qualquer de $f_{w_1}(\xi)f_{w_2}(\eta)$, com $w_1=(a_1,\ldots,a_s)$ e $w_2=(b_1,\ldots,b_l)$ subpartições complementares de w,

$\sigma=\{(a_1,z_1),\ldots,(a_s,z_s),(b_1,\bar{z}_1),\ldots,(b_l,\bar{z}_l)\}$

Neste caso, temos três possibilidades para as subpartições de w:

i) $w_1=w$ e $w_2=\emptyset$, então $\sigma\in f_w(\xi)\subset f_w(\xi\oplus\eta)$

ii) $w_1=\emptyset$ e $w_2=w$, então $\sigma\in f_w(\eta)$

iii) $w_1 \neq \emptyset \neq w_2$, então aparece $z_i's$ no conjunto de $x_1,\dots,x_k$ e $\bar{z}_i's$ no conjunto de $y_1,\dots,y_t$ e podemos reordenar σ com a ordem dos indexadores de w e denotar apenas por z_i. Temos: $\sigma = \{(i_1,z_1),\dots,(i_r,z_r)\}$ com $z_i's \in \{x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_t\}$.
Logo, $\sigma \in f_w(\xi \oplus \eta)$

$$\cup_{w=w_1w_2} f_{w_1}(\xi) f_{w_2}(\eta) \subset f_w(\xi \oplus \eta)$$

2) Pode ser provado de forma análoga ao item (1), considerando que o par (i_j,x_j) é o produto $x_j^{i_j}(c+x_j)^{i_j+1}$, então todo o resto contínua válido.

3) Análogamente, podemos considerar que o par (i_j,x_j) é o produto $x_j^{i_j+1}(c+x_j)^{i_j}$.

4) Observe que $c+c+x_i = x_i$ logo,

$$f_w(\lambda \otimes \xi) = \sum (c+x_1)^{i_1}(c+c+x_1)^{i_1}(c+x_2)^{i_2}(c+c+x_2)^{i_2}\dots(c+x_r)^{i_r}(c+c+x_r)^{i_r}$$

$$= \sum (c+x_1)^{i_1}x_1^{i_1}(c+x_2)^{i_2}x_2^{i_2}\dots(c+x_r)^{i_r}x_r^{i_r} = f_w(\xi).$$

5)

$$\begin{aligned} g_w(\lambda \otimes \xi) &= \sum (c+x_1)^{i_1}(c+c+x_1)^{i_1+1}(c+x_2)^{i_2}(c+c+x_2)^{i_2+1}\dots(c+x_r)^{i_r}(c+c+x_r)^{i_r+1} \\ &= \sum (c+x_1)^{i_1}x_1^{i_1+1}(c+x_2)^{i_2}x_2^{i_2+1}\dots(c+x_r)^{i_r}x_r^{i_r+1} = h_w(\xi) \end{aligned}$$

.

6)

$$\begin{aligned} h_w(\lambda \otimes \xi) &= \sum (c+x_1)^{i_1+1}(c+c+x_1)^{i_1}(c+x_2)^{i_2+1}(c+c+x_2)^{i_2}\dots(c+x_r)^{i_r+1}(c+c+x_r)^{i_r} \\ &= \sum (c+x_1)^{i_1+1}x_1^{i_1}(c+x_2)^{i_2+1}x_2^{i_2}\dots(c+x_r)^{i_r+1}x_r^{i_r} = g_w(\xi). \end{aligned}$$

7) $W(\xi+1) = W(\xi)$, logo $f_w(\xi+1) = f_w(\xi)$. Além disso,
$W(\xi \oplus \lambda) = (1+c)\prod_{i=1}^{k}(1+x_i)$. Usando a notação de conjunto definida anteriormente, $\sigma = \{(i_1,z_1),\dots,(i_r,z_r)\} \in f_w(\xi \oplus \lambda)$, observe que temos duas possibilidades para $z_i's$:

i) $z_i's \in \{x_1,\dots,x_k\}$, logo $\sigma \in f_w(\xi)$.

ii) Existe i tal que $z_j = c$, assim o par (i_j,c) representa o produto $c^{i_j}(c+c)^{i_j} = 0$ e consequentemente $\sigma = 0$.

Logo, $\sigma \in f_w(\xi)$ portanto $f_w(\xi \oplus \lambda) = f_w(\xi)$.

8) Basta observar que assim como em (7) o par (i_j, c) representa o produto $c^{i_j}(c+c)^{i_j+1} = 0$.

9) Basta observar que assim como em (7) o par (i_j, c) representa o produto $c^{i_j+1}(c+c)^{i_j} = 0$.

$\square$

Para um fibrado $\xi \to F^q$, considere $\lambda \to \mathbb{R}P(\xi)$ o fibrado linha usual (Hopf line bundle), e denote por τ o fibrado tangente sobre F^q. Então

$$\tau(\mathbb{R}P(\xi)) = \pi^*\tau + \theta$$

onde θ é o fibrado ao longo das fibras de $\pi : \mathbb{R}P(\xi) \to F^q$ e $\theta + 1 = \lambda \otimes \pi^*\xi$.

Proposição 2.3.4. *Valem as seguintes igualdades:*

1) $f_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) = f_w(\tau \oplus \xi)$

2) $g_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) = \sum_{w=w_1w_2} g_{w_1}(\tau)h_{w_2}(\xi)$

3) $h_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) = \sum_{w=w_1w_2} h_{w_1}(\tau)g_{w_2}(\xi)$

Demonstração. De acordo com as propriedades vistas em 2.3.3, temos:

1)
$$\begin{aligned} f_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) &= f_w(\tau+\theta) = f_w(\tau+\theta+1) = f_w(\tau \oplus \lambda \otimes \xi) \\ &= \sum_{w=w_1w_2} f_{w_1}(\tau) f_{w_2}(\lambda \otimes \xi) = \sum_{w=w_1w_2} f_{w_1}(\tau) f_{w_2}(\xi) = f_w(\tau \oplus \xi) \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} g_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) &= g_w(\tau+\theta) = g_w(\tau+\theta+1) = g_w(\tau \oplus \lambda \otimes \xi) \\ &= \sum_{w=w_1w_2} g_{w_1}(\tau) g_{w_2}(\lambda \otimes \xi) = \sum_{w=w_1w_2} g_{w_1}(\tau) h_{w_2}(\xi) \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} h_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) &= h_w(\tau+\theta) = h_w(\tau+\theta+1) = h_w(\tau \oplus \lambda \otimes \xi) \\ &= \sum_{w=w_1w_2} h_{w_1}(\tau) h_{w_2}(\lambda \otimes \xi) = \sum_{w=w_1w_2} h_{w_1}(\tau) g_{w_2}(\xi). \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 2.3.5. *1)* $f_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) = s_w(\tau \oplus \xi)c^{|w|} +$ *termos com potências menores de c*

2) $g_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) = s_w(\tau)c^{|w|+l(w)} +$ *termos com potências menores de c*

3) $h_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) = s_w(\xi)c^{|w|+l(w)} +$ *termos com potências menores de c*

Demonstração. Escreva $W(\xi)=\prod_{i=1}^{k}(1+x_i)$ e $W(\tau)=\prod_{i=1}^{t}(1+y_i)$. Por definição, temos que

$$f_w(\xi)=\sum x_1^{i_1}(c+x_1)^{i_1}x_2^{i_2}(c+x_2)^{i_2}\dots x_r^{i_r}(c+x_r)^{i_r};$$

$$g_w(\xi)=\sum x_1^{i_1}(c+x_1)^{i_1+1}x_2^{i_2}(c+x_2)^{i_2+1}\dots x_r^{i_r}(c+x_r)^{i_r+1};$$

$$h_w(\xi)=\sum x_1^{i_1+1}(c+x_1)^{i_1}x_2^{i_2+1}(c+x_2)^{i_2}\dots x_r^{i_r+1}(c+x_r)^{i_r}$$

$$s_w(\xi)=\sum x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_r^{i_r}$$

Assim:

1) Note que se tomarmos um termo qualquer da expressão de $f_w(\tau\oplus\xi)$ da forma

$$z_1^{i_1}(c+z_1)^{i_1}z_2^{i_2}(c+z_2)^{i_2}\dots z_r^{i_r}(c+z_r)^{i_r}$$

com z_i's assumindo valores em $\{x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_t\}$, temos que:

$$\begin{aligned} & z_1^{i_1}(c+z_1)^{i_1}z_2^{i_2}(c+z_2)^{i_2}\dots z_r^{i_r}(c+z_r)^{i_r}\\ &= z_1^{i_1}c^{i_1}z_2^{i_2}c^{i_2}\dots z_r^{i_r}c^{i_r}+\text{ termos com potências menores de } c\\ &= z_1^{i_1}z_2^{i_2}\dots z_r^{i_r}c^{i_1+i_2+\dots+i_r}+\text{ termos com potências menores de } c\\ &= z_1^{i_1}z_2^{i_2}\dots z_r^{i_r}c^{|w|}+\text{ termos com potências menores de } c\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) = f_w(\tau\oplus\xi) &= \sum z_1^{i_1}z_2^{i_2}\dots z_r^{i_r}c^{|w|}+\text{ termos com potências menores de } c\\ &= s_w(\tau\oplus\xi)c^{|w|}\text{ termos com potências menores de } c.\end{aligned}$$

2) Observe agora que

$$g_w(\tau)=\sum y_1^{i_1}(c+y_1)^{i_1+1}y_2^{i_2}(c+y_2)^{i_2+1}\dots y_r^{i_r}(c+y_r)^{i_r+1}$$

Nesse caso, um termo de $g_w(\tau)$ é da forma

$$z_1^{i_1}(c+z_1)^{i_1+1}z_2^{i_2}(c+z_2)^{i_2+1}\dots z_r^{i_r}(c+z_r)^{i_r+1}$$

com $z_i's$ assumindo valores em $\{y_1,\dots,y_t\}$, e de forma análoga ao visto em (1) temos que:

$$\begin{aligned} & z_1^{i_1}(c+z_1)^{i_1+1}z_2^{i_2}(c+z_2)^{i_2+1}\dots z_r^{i_r}(c+z_r)^{i_r+1}\\ &= z_1^{i_1}c^{i_1+1}z_2^{i_2}c^{i_2+1}\dots z_r^{i_r}c^{i_r+1}+\text{ termos com potências menores de } c\\ &= z_1^{i_1}z_2^{i_2}\dots z_r^{i_r}c^{|w|+l(w)}+\text{ termos com potências menores de } c\end{aligned}$$

Logo, $g_w(\tau) = s_w(\tau)c^{|w|+l(w)} +$ termos com potências menores de c. Note agora que

$$h_w(\xi) = \sum x_1^{i_1+1}(c+x_1)^{i_1} x_2^{i_2+1}(c+x_2)^{i_2} \dots x_r^{i_r+1}(c+x_r)^{i_r}$$

$$= \sum x_1^{i_1+1} c^{i_1} x_2^{i_2+1} c^{i_2} \dots x_r^{i_r+1} c^{i_r} \text{ termos com potências menores de } c$$

$$= \sum x_1^{i_1+1} x_2^{i_2+1} \dots x_r^{i_r+1} c^{|w|} \text{ termos com potências menores de } c$$

Ou seja, todos os elementos de $h_w(\xi)$ tem potências de c menores que $|w| < |w| + l(w)$.

Se considerarmos w_1 e w_2 subpartições de w não vazias, temos que o elemento de $g_{w_1}(\tau)h_{w_2}(\xi)$ com a maior potência de c é $z_1^{i_1} \dots z_s^{i_s} \bar{z_1}^{j_1+} \dots \bar{z_l}^{j_l+1} c^{|w|+s}$, onde $l(w_1) = s$. Como $l(w_2) = l$, temos que todos os elementos de $g_{w_1}(\tau)h_{w_2}(\xi)$ tem potências de c menores que $|w| + l(w) - l < |w| + l(w)$.

Desta forma,

$$g_w(\tau(\mathbb{R}P(\xi))) = \sum_{w=w_1w_2} g_{w_1}(\tau)h_{w_2}(\xi)$$

$$= g_w(\tau) + h_w(\xi) + \sum_{w=w_1w_2, w_1\neq\emptyset, w_2\neq\emptyset} g_{w_1}(\tau)h_{w_2}(\xi)$$

$$= s_w(\tau)c^{|w|+l(w)} + \text{ termos com potências menores de } c.$$

3) Análogo ao item (2)

$\square$

2.4 Prova do 2.1.4

Demonstração. Seja (M^m, T) uma involução com $Fix(T) = F^n \cup F^j$, com $n > j$, e sejam $\nu^{m-n} \to F^n$ e $\nu^{m-j} \to F^j$ os respectivos fibrados normais. Dado $r \geq 0$, $r < m - n$, defina a classe:

$$w[r] = \frac{w(\mathbb{R}P(\nu))}{(1+c)^{m-n-r}}.$$

Em particular,

$$w[0] = \frac{w(\mathbb{R}P(\nu))}{(1+c)^{m-n}}.$$

Sobre a componente F^j, temos:

$$w[r] = \frac{(1+\bar{w}_1+\bar{w}_2+\dots+\bar{w}_j)((1+c)^{m-j}+v_1(1+c)^{m-j-1}+\dots v_{m-j})}{(1+c)^{m-n-r}}$$

$$= (1+c)^{n+r-j} \text{módulo classes de dimensões positivas em } H^*(F^j).$$

Ou seja, todos os outros termos possuem elementos de $H^*(F^j)$. E,

$$w[0] = \frac{(1+\bar{w}_1+\bar{w}_2+\dots+\bar{w}_j)((1+c)^{m-j}+v_1(1+c)^{m-j-1}+\dots v_{m-j})}{(1+c)^{m-n}}$$

$$= (1+\bar{w}_1+\bar{w}_2+\cdots+\bar{w}_j)((1+c)^{n-j}+v_1(1+c)^{n-j-1}+\ldots v_{m-j}(1+c)^{-m+n}),$$

onde $W(F^j) = 1+\bar{w}_1+\bar{w}_2+\cdots+\bar{w}_j$ e $W(\nu^{m-j}) = 1+v_1+\cdots+v_{m-j}$. Assim, temos que

$$w[r]_{2r} = (\frac{n+r-j}{2r})c^{2r}\text{módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^j)$$

$$w[r-1]_{2r-1} = (\frac{n+r-1-j}{2r-1})c^{2r-1}\text{módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^j).$$

Além disso,

$$w[0]_1 = \bar{w}_1+v_1+c.$$

Agora, Pergher e Stong introduziram a classe

$$X = w[r_1]_{2r_1}\ldots w[r_l]_{2r_l}w[s_1-1]_{2s_1-1}\ldots w[s_t-1]_{2s_t-1}$$

para r_i's e s_i's específicos, com

$$dimX = m(n-j) = 2r_1+\cdots+2r_l+2s_1+\cdots+2s_t+t$$

e

$$k = r_1+\cdots+r_l+s_1+\cdots+s_t > n-j.$$

Denotando $n-j = 2^pq$ com $p,q \geq 1$ e q ímpar, tome $r_i = 2^p-2^{p-i}$, $1 \leq i \leq p$ e $s_i = 2^p$, $1 \leq i \leq q+1-p$. Neste caso:

$$w[r_i]_{2r_i} = (\frac{n+r_i-j}{2r_i})c^{2r_i} = (\frac{n-j+2^p-2^{p-i}}{2^{p+1}-2^{p+1-i}})c^{2^{p+1}-2^{p+1-i}}$$

$$= (\frac{2^pq+2^p-2^{p-i}}{2^{p+1}-2^{p+1-i}})c^{2^{p+1}-2^{p+1-i}}$$

Observe que

$$2^p+2^{p-i} = \sum_{j=p-i}^{p-1} 2^j = 2^{p-i}+2^{p-i+1}+\ldots 2^{p-1} \text{ e}$$

$$2^{p+1}+2^{p+1-i} = \sum_{j=p+1-i}^{p} 2^j = 2^{p+1-i}+\cdots+2^{p-1}+2^p.$$

Além disso, q é ímpar, portanto 2^p aparece na expansão diádica de 2^pq. Pelo teorema de Lucas, temos que

$$w[r_i]_{2r_i} = c^{2^{p+1}-2^{p+1-i}} = c^{2r_i}.$$

E

$$w[s_i-1]_{2s_i-1} = (\frac{n-j+s_i-1}{2s_i-1})c^{2s_i-1} = (\frac{2^pq+2^p-1}{2^{p+1}-1})c^{2^{p+1}-1} = c^{2^{p+1}-1} = c^{2s_i-1}.$$

$$X = w[r_1]_{2r_1}\dots w[r_l]_{2r_l} w[s_1-1]_{2s_1-1}\dots w[s_t-1]_{2s_t-1} \text{módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^j)$$
$$= c^{2r_1}c^{2r_2}\dots c^{2r_l}c^{2s_1-1}\dots c^{2s_t-1} \text{módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^j)$$
$$= c^{m(n-j)} \text{módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^j).$$

Para $p=0$, isto é, $n-j=q$, os r_i's não existem e $s_i=1$, para $1 \le i \le q+1$. Assim,

$$X = w[s_1-1]_{2s_1-1}\dots w[s_t-1]_{2s_t-1} = w[0]_1^{q+1} = w[0]_1^{m(n-j)} = (\bar{w}_1+v_1+c)^{m(n-j)}$$
$$= c^{m(n-j)} \text{ módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^j).$$

Agora suponha que $m > \max\{\frac{5}{2}j + m(n-j), 2n\}$, e considere a seguinte classe característica:

$$Y_{w,w'} = g_w(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))f_{w'}(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))Xc^y$$

onde $|w|+|w'| = j, w$ é uma partição não diádica e $2|w|+l(w)+2|w'|+m(n-j)+y = m-1$. Observe que sendo w não diádica então $l(w) \le \frac{j}{2}$ (note que o pior caso é quando j é par, exemplo, $j=8$, a maior partição não diádica é $w=(2,2,2,2)$ e nesse caso, $l(w)=4$), logo $2|w|+l(w)+2|w'| \le \frac{5}{2}j$. Como $m > \frac{5}{2}j + m(n-j)$, então $m-1 \ge \frac{5}{2}j + m(n-j)$. Assim,

$$\frac{5}{2}j + m(n-j) \le m-1 = 2|w|+l(w)+2|w'|+m(n-j)+y \le \frac{5}{2}j + m(n-j) + y$$

portanto $y \ge 0$, e esta é uma classe característica factível de gerar número característico de dimensão $m-1$.

Vimos que

$$g_w(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))f_{w'}(\tau(\mathbb{R}P(\nu))) = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)c^{|w|+l(w)+|w'|} + \text{ termos com potências menores de } c.$$

Tais termos serão zero, uma vez que $|w|+|w'| = j = dim(F^j)$, ou seja, $s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)$ tem grau j, e uma vez que a soma tem grau constante $j+|w|+l(w)+|w'|$, conforme as potências de c diminuem, a dimensão dos elementos da base que acompanham c aumentam, ultrapassando j. Logo

$$g_w(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))f_{w'}(\tau(\mathbb{R}P(\nu))) = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)c^{|w|+l(w)+|w'|}$$

Além disso, note que $s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)$ anula todos os termos de dimensão positiva de $H^*(F^j)$, ou seja, ao fazermos

$$g_w(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))f_{w'}(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))X = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)c^{|w|+l(w)+|w'|}[c^{m(n-j)}$$
$$+ \text{ termos de dimensões positivas de } H^*(F^j)],$$

o produto de cada um dos termos de dimensão positiva de $H^*(F^j)$ com $s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)$ vai ser um elemento de $H^*(F^j)$ com dimensão maior que j, portanto é zero. Dessa forma, temos que

$$g_w(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))f_{w'}(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))X = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)c^{|w|+l(w)+|w'|}c^{m(n-j)}.$$

Logo,

$$Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-j})] = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)c^{|w|+l(w)+|w'|}c^{m(n-j)}c^y[\mathbb{R}P(\nu^{m-j})].$$

Temos que $j+|w|+l(w)+|w'|+m(n-j)+y = 2|w|+l(w)+2|w'|+m(n-j)+y = m-1$, logo $|w|+l(w)+|w'|+m(n-j)+y = m-1-j$, e assim,

$$Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-j})] = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)c^{m-1-j}[\mathbb{R}P(\nu^{m-j})].$$

Do teorema de Leray-Hirsch (Ver página 129 de [4]) $H^*(\mathbb{R}P(\nu))$ é um $H^*(F^j)$-módulo livre gerado por $1, c, \ldots, c^m - 1 - j$. Então:

$$s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)c^{m-1-j}[\mathbb{R}P(\nu^{m-j})] = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)[F^j].$$

Logo,

$$Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-j})] = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)[F^j] \tag{2.1}$$

Agora faremos o mesmo para a componente F^n. Pela definição, temos que:

$$w[r] = \frac{(1+w_1+w_2+\cdots+w_n)((1+c)^{m-n}+u_1(1+c)^{m-n-1}+\ldots u_{m-n})}{(1+c)^{m-n-r}}$$

$$= (1+w_1+w_2+\cdots+w_n)((1+c)^r+u_1(1+c)^{r-1}+\cdots+u_{r-1}(1+c)+u_r+u_{r+1}(1+c)^{-1}+\ldots)$$

onde $W(F^n) = 1+w_1+\cdots+w_n$ e $W(\nu^{m-n}) = 1+u_1\cdots+u_{m-n}$. Em particular,

$$w[0] = \frac{(1+w_1+w_2+\cdots+w_n)((1+c)^{m-n}+u_1(1+c)^{m-n-1}+\ldots u_{m-n})}{(1+c)^{m-n}}$$

$$= (1+w_1+w_2+\cdots+w_n)(1+u_1(1+c)^{-1}+\cdots+u_{m-n}(1+c)^{-m+n}).$$

Além disso, temos que:

$$w[r]_{2r} = w_r c^r + \text{termos } c^i \text{ com } i < r;$$

$$w[r]_{2r+1} = (w_{r+1}+u_{r+1})c^r + \text{termos } c^i \text{ com } i < r;$$

$$w[r]_{2r+2} = u_{r+1}c^{r+1} + \text{termos } c^i \text{ com } i < r+1.$$

Note que: $w[r]_{2r+1} = w[s-1]_{2s-1} = (w_s+u_s)c^{s-1} + \text{termos } c^i$ com $i < s-1$ (fazendo $r = s-1$) e

$$w[0]_1 = w_1+u_1.$$

Tomando a classe de Pergher e Stong

$$X = w[r_1]_{2r_1}\ldots w[r_l]_{2r_l}w[s_1-1]_{2s_1-1}\ldots w[s_t-1]_{2s_t-1},$$

temos que:

$$X = w[r_1]_{2r_1}\ldots w[r_l]_{2r_l}w[s_1-1]_{2s_1-1}\ldots w[s_t-1]_{2s_t-1}$$

$$= w_{r_1}c^{r_1}\dots w_{r_l}c^{r_l}(w_{s_1}+u_{s_1})c^{s_1-1}\dots(w_{s_t}+u_{s_t})c^{s_t-1} + \text{ termos com potências menores de } c$$
$$= w_{r_1}\dots w_{r_l}(w_{s_1}+u_{s_1})\dots(w_{s_t}+u_{s_t})c^{k-t} + \text{ termos com potências menores de } c$$
$$= \alpha c^{m(n-j)-k} + \text{ termos com potências menores de } c,$$

com $\alpha = w_{r_1}\dots w_{r_l}(w_{s_1}+u_{s_1})\dots(w_{s_t}+u_{s_t})$. Note que $\alpha \in H^k(F^n)$.

Além disso, temos que:

$$Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-n})] = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)c^{|w|+l(w)+|w'|}[\alpha c^{m(n-j)-k} + \text{ termos com potências menores de } c]c^y$$

Uma vez que $|w|+|w'| = j$ e $\alpha \in H^k(F^n)$, temos que $s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)\alpha$ tem grau $j+k > j+n-j = n$, além disso os termos com potências menores de c devem ter elementos da base com grau maior que $j+k > n$, portanto

$$Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-n})] = 0$$

Observe que, no caso $p = 0$, $k = q+1$ e

$$X = w[0]_1^{q+1} = (w_1+u_1)^{q+1},$$

e tomamos $\alpha = (w_1+u_1)^{q+1} \in H^k(F^n)$. Portanto também temos que

$$Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-n})] = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)c^{|w|+l(w)+|w'|}\alpha = 0.$$

Como $\mathbb{R}P(\nu^{m-j})$ e $\mathbb{R}P(\nu^{m-n})$ são cobordantes em $\eta_{m-1}(BO(1))$, temos de (2.1) que

$$0 = Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-n})] = Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-j})] = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)[F^j].$$

Resultado visto na página 316 de [14]: Sejam $\nu \to F$ um fibrado, $\tau \to F$ o fibrado tangente e w_1 e w_2 com $|w_1|+|w_2| = n$, e considere a classe $s_{w_1}(\tau)s_{w_2}(\tau\oplus\nu)$. Se para qualquer w_1 e w_2 como acima tal que w_1 é não diádico (não contém termos da forma 2^x-1) valer $s_{w_1}(\tau)s_{w_2}(\tau\oplus\nu)[F] = 0$, então o fibrado ν borda.

De acordo com o resultado acima, temos que F^j com o fibrado normal ν^{m-j} borda, portanto (M^m,T) é cobordante a uma involução fixando F^n com fibrado normal ν^{m-n}.

Como $m > \max\{\frac{5}{2}j + m(n-j), 2n\}$, em particular $m > 2n$, segue do teorema de Kosniowski e Stong (página 309 de [14]) que (M^m,T) borda. Mas por hipotése (M^m,T) não borda, portanto devemos ter $m \le \max\{\frac{5}{2}j + m(n-j), 2n\}$.

□

2.5 Consequências do Teorema 2.1.4

Teorema 2.5.1. *Seja (M^m,T) involução com $Fix(T) = F^{n_1}\cup F^{n_2}\cup\dots\cup F^{n_s}$, onde $n_1 < n_2 < \dots < n_s$, não bordante. Então:*

$$m \le \max\{2n_s, \frac{5}{2}n_j + m(n_s-n_j), \forall n_j < n_s\}$$

Demonstração. Por simplicidade, vejamos inicialmente o caso $Fix(T) = F^l \cup F^j \cup F^n$, com $l < j < n$. Supondo $m > \max\{\frac{5}{2}j + m(n-j), 2n, \frac{5}{2}l + m(n-l)\}$, faremos o mesmo que foi feito no teorema 2.1.4, agora para a componente F^l. Considerando os resultados já obtidos para F^n e F^j: $Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-n})] = 0$ e de 2.1, temos que $Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-j})] = s_w(\tau)s_{w'}(\tau \oplus \nu)[F^j]$.

Temos $W(F^l) = 1 + z_1 + z_2 + \cdots + z_l$ e $W(\nu^{m-l}) = 1 + \bar{\nu}_1 + \cdots + \nu_{\bar{m-l}}$, e a classe

$$w[r] = \frac{(1 + z_1 + z_2 + \cdots + z_l)((1+c)^{m-l} + \bar{\nu}_1(1+c)^{m-l-1} + \ldots \bar{\nu}_{m-l})}{(1+c)^{m-n-r}}$$

$$= (1+c)^{n+r-l}\text{módulo classe de dimensão positiva de } H^*(F^l).$$

Ou seja, todo os outros termos possuem elementos de $H^*(F^l)$. Assim, temos que

$$w[r]_{2r} = (\frac{n+r-l}{2r})c^{2r}\text{módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^l)$$

$$w[r-1]_{2r-1} = (\frac{n+r-1-l}{2r-1})c^{2r-1}\text{módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^l).$$

Agora, tome a classe de Pergher e Stong

$$X = w[r_1]_{2r_1} \ldots w[r_a]_{2r_a} w[s_1-1]_{2s_1-1} \ldots w[s_t-1]_{2s_t-1}$$

para r_i's e s_i's específicos, com

$$dimX = m(n-l) = 2r_1 + \cdots + 2r_a + 2s_1 + \cdots + 2s_t + t$$

e

$$k = r_1 + \cdots + r_a + s_1 + \cdots + s_t > n - l.$$

Como no caso da componente F^j, temos que:

$$w[r_i]_{2r_i} = c^{2^{p+1} - 2^{p+1-i}} = c^{2r_i}.$$

Além disso,

$$w[s_i - 1]_{2s_i - 1} = c^{2s_i - 1}.$$

Assim,

$$X = w[r_1]_{2r_1} \ldots w[r_a]_{2r_a} w[s_1-1]_{2s_1-1} \ldots w[s_t-1]_{2s_t-1}\text{módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^l)$$

$$= c^{2r_1}c^{2r_2} \ldots c^{2r_a}c^{2s_1-1} \ldots c^{2s_t-1}\text{módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^l)$$

$$= c^{m(n-l)}\text{módulo classes de dimensões positivas de } H^*(F^l).$$

Assim, temos a classe

$$Y_{w,w'} = g_w(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))f_{w'}(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))Xc^y,$$

onde $|w|+|w'|=j, w$ é uma partição não diádica e $2|w|+l(w)+2|w'|+m(n-j)+y=m-1$.

Vimos que

$$g_w(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))f_{w'}(\tau(\mathbb{R}P(\nu))) = s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)c^{|w|+l(w)+|w'|} + \text{ termos com potências menores de } c.$$

Como $|w|+|w'|=j>l$, temos que $g_w(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))f_{w'}(\tau(\mathbb{R}P(\nu)))=0$ portanto:

$$Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-l})]=0.$$

Como $\mathbb{R}P(\nu^{m-l})$, $\mathbb{R}P(\nu^{m-j})$, $\mathbb{R}P(\nu^{m-n})$ são cobordantes em $\eta_{m-1}(BO(1))$ temos que

$$0 = Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-l})]+Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-j})]+Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-n})] = 0+Y_{w,w'}[\mathbb{R}P(\nu^{m-j})]+0$$
$$= s_w(\tau)s_{w'}(\tau\oplus\nu)[F^j].$$

De onde concluímos, como no teorema 2.1.4, que F^j borda; logo, (M^m,T) é cobordante a uma involução que fixa $F^n\cup F^l$, e como $m>\max\{\frac{5}{2}j+m(n-j),2n,\frac{5}{2}l+m(n-l)\}$, em particular $m>\max\{2n,\frac{5}{2}l+m(n-l)\}$, e então e segue do teorema 2.1.4 que (M^m,T) borda. Portanto $m\le\max\{\frac{5}{2}j+m(n-j),2n,\frac{5}{2}l+m(n-l)\}$.

□

Observação 2.5.2. Em [25], temos a involução maximal de Pergher e Stong, $(M^{m(n-j)},\bar{T})$, com $Fix(\bar{T})=F^{n-j}\cup(ponto)$. Considere a involução

$$(M^{m(n-j)}\times F^j\times F^j,\bar{T}\times t),$$

onde t denota a aplicação twist. Observe que:

$$Fix(\bar{T}\times t) = Fix(\bar{T})\times Fix(t) = (F^{n-j}\cup(ponto))\times F^j = F^{n-j}\times F^j\cup(ponto)\times F^j$$
$$\cong F^n\cup F^j.$$

Assim obtemos uma involução de dimensão $2j+m(n-j)$ fixando $F^n\cup F^j$. Essa involução não mostra que tal limitante é best possible, mas ainda assim é um bom limitante, diferenciando de um almost possible por $\frac{1}{2}j$.

Teorema 2.5.3. *Seja (M^m,T) involução com $Fix(T)=F^{n_1}\cup F^{n_2}\cup\cdots\cup F^{n_s}$, onde $n_1<n_2<\cdots<n_s$, e n_s-n_i é ímpar para todo $1\le i\le s-1$. Se $n_s\ge 1,5n_{s-1}+1$, então $m\le 2n_s$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que se n_s-n_i é ímpar, então $m(n_s-n_i)=n_s-n_i+1$. Assim, temos que $\frac{5}{2}n_j+m(n_s-n_j)=\frac{5}{2}n_j+n_s-n_j+1=\frac{3}{2}n_j+n_s+1$. Como $n_1<n_2<\cdots<n_{s-1}$, temos que $\frac{3}{2}n_1<\frac{3}{2}n_2<\cdots<\frac{3}{2}n_{s-1}$. Logo $\frac{3}{2}n_1+n_s+1<\cdots<\frac{3}{2}n_{s-1}+n_s+1$, portanto $\frac{5}{2}n_1+m(n_s-n_1)<\cdots<\frac{5}{2}n_{s-1}+m(n_s-n_{s-1})$. Assim, do teorema 2.5.1, temos que

$$m\le\max\{2n_s,\frac{5}{2}n_j+m(n_s-n_j),\forall n_j<n_s\}=\max\{2n_s,\frac{5}{2}n_{s-1}+m(n_s-n_{s-1})\}$$

$$= \max\{2n_s, 1,5n_{s-1} + n_s + 1\}.$$

Ou seja, se $n_s \geq 1,5n_{s-1} + 1$, então $2n_s \geq 1,5n_{s-1} + 1 + n_s$, portanto $m \leq 2n_s$.

□

Exemplo 2.5.4. Seja (M^m, T) involução como no teorema acima. Se $n_s = 1000$ e $1000 = n_s \geq 1,5n_{s-1} + 1$, então $999 \geq 1,5n_{s-1} \Rightarrow n_{s-1} \leq 666$. Como $n_s - n_i$ é ímpar, devemos ter $n_{s-1} \leq 665$.

Teorema 2.5.5. *Seja (M^m, T) involução com $Fix(T) = F^{n_1} \cup F^{n_2} \cup \cdots \cup F^{n_s}$, onde $n_1 < n_2 < \cdots < n_s$, e $n_s - n_i = 2q_i$ com q_i ímpar para todo $1 \leq i \leq s-1$. Se $n_s \geq 2n_{s-1} + 4$, então $m \leq 2n_s$.*

Demonstração. Para $1 \leq j \leq s-1$, como $n_s - n_j = 2q_j$, então $p = 1 \leq q_j + 1$, e por definição $m(n_s - n_j) = 2(2q_j) + p - q_j + 1 = 4q_j + 1 - q_j + 1 = 3q_j + 2$. Temos também que $q_j = \frac{n_s - n_j}{2}$. Assim,

$$\frac{5}{2}n_j + m(n_s - n_j) = \frac{5}{2}n_j + 3q_j + 2 = \frac{5}{2}n_j + \frac{3}{2}(n_s - n_j) + 2,$$

$$= n_j + \frac{3}{2}n_s + 2.$$

Como $n_1 < n_2 < \cdots < n_{s-1}$, temos que $n_1 + \frac{3}{2}n_s + 2 < \cdots < n_{s-1} + \frac{3}{2}n_s + 2$, e assim do teorema 2.5.1, temos que

$$m \leq \max\{2n_s, \frac{5}{2}n_j + m(n_s - n_j), \forall n_j < n_s\} = \max\{2n_s, n_j + \frac{3}{2}n_s + 2, \forall n_j < n_s\}$$

$$= \max\{2n_s, n_{s-1} + \frac{3}{2}n_s + 2\}.$$

Assim, $m \leq 2n_s$ se $2n_s \geq n_{s-1} + \frac{3}{2}n_s + 2$. Mas,

$$2n_s \geq n_{s-1} + \frac{3}{2}n_s + 2 \Leftrightarrow 2n_s - \frac{3}{2}n_s \geq n_{s-1} + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}n_s \geq n_{s-1} + 2$$

$$\Leftrightarrow n_s \geq 2n_{s-1} + 4.$$

Ou seja, se $n_s \geq 2n_{s-1} + 4$, então $m \leq 2n_s$ (ou seja, todos tais exemplos mostram melhorias relevantes para o Five Halves Theorem).

□

Exemplo 2.5.6. Seja (M^m, T) involução como no teorema acima. Se $n_s = 1000$ e $1000 = n_s \geq 2n_{s-1} + 4$, então $996 \geq 2n_{s-1} \Rightarrow n_{s-1} \leq 498$. Como $n_s - n_i = 2q_i$ com q_i ímpar, e $1000 - 498 = 502 = 2 \times 251$, devemos ter $n_{s-1} \leq 498$ (novamente uma melhoria relevante para o Five Halves Theorem).

CAPÍTULO 3

Involuções fixando $K_dP(n)\#K_dP(n)$

3.1 Introdução

Conforme mencionado na Introdução deste trabalho, o objetivo desse capitulo é provar o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. *Seja (M,T) uma involução com fixed-data $\eta^k \to K_dP(n)\#K_dP(n)$, onde n ímpar e $k < dn$. Então η^k borda como fibrado, portanto (M,T) borda equivariantemente.*

Se M^n, V^n são variedades fechadas, então a soma conexa $M^n\#V^n$ também é uma variedade fechada de dimensão n. Chamemos sucintamente de S o bordo de D^n, onde D^n simboliza os discos abertos retirados para fazer a soma conexa, $S \simeq S^{n-1}$.

Dados fibrados vetoriais $\eta_1 \to M^n$, $\eta_2 \to V^n$, é conhecido o fato de que $\eta_1\#\eta_2$ é cobordante como fibrado a $\eta_1 \cup \eta_2$. Então $\eta_1\#\eta_2$ é um fixed-data se, e só se, $\eta_1 \cup \eta_2$ o for. Em particular, se todo fibrado $\eta \to M^n\#V^n$ fosse equivalente a uma soma conexa $\eta_1\#\eta_2$, o problema de, a menos de cobordismo equivariante, classificar involuções fixando $M^n\#V^n$ seria equivalente ao mesmo problema fixando $M^n \cup V^n$; em particular, no caso específico de um fibrado $\eta \to K_dP(n)\#K_dP(n)$ com n ímpar, já é conhecido na literatura que se uma involução fixar $K_dP(n) \cup K_dP(n)$ com n ímpar, então ela borda, o que automaticamente implicaria no teorema acima enunciado; porém, veremos que isso não é verdade, mostrando então que o teorema por nós proposto é relevante, reiterando que nunca na literatura foram estudadas involuções fixando somas conexas, mesmo porque via de regra sua K-teoria não é conhecida.

Teorema 3.1.2. *Seja $\eta \to M^n\#V^n$. Então existem fibrados $\eta_1 \to M^n$, $\eta_2 \to V^n$ com mesma dimensão de η e tal que $\eta \simeq \eta_1\#\eta_2$ se, e só se, η restrito a S é trivial.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dados $\eta_1 \to M^n$, $\eta_2 \to V^n$, como D^n é contrátil temos que η_1 e η_2 restritos a D^n são triviais. Em particular, η_1 e η_2 restritos a S são triviais. Portanto, $\eta_1\#\eta_2$ restrito a S é trivial, e como $\eta \simeq \eta_1\#\eta_2$ temos que η restrito a S é trivial.

($\Leftarrow$) Suponha, agora, que η restrito a S é trivial e denote por η_1' o fibrado η restrito a M^n menos o interior de D^n. Note que M^n menos o interior de D^n é uma subvariedade compacta com bordo de $M^n \# V^n$, tal bordo sendo S.

Considere $\varepsilon \to D^n$ fibrado (trivial) de mesma dimensão de η, e cole η_1' a ε através de S. Como η_1' e ε restritos a S são triviais, temos que a colagem está bem definida em S, resultando em um fibrado $\eta_1 \to M^n$.

Com argumentos análogos obtemos $\eta_2 \to V^n$ e por construção $\eta_1 \# \eta_2 \simeq \eta$.

□

Corolário 3.1.3. *Se $\eta \to M^n \# V^n$ é tal que η restrito a S não é trivial, então η não é uma soma conexa, $\eta_1 \# \eta_2$, onde η_1 e η_2 são fibrados sobre M^n e V^n, respectivamente.*

Teorema 3.1.4. *Seja $\eta \to M^n \# V^n$ um fibrado vetorial qualquer. Então $\eta_{|S} \to S$ borda como fibrado.*

Demonstração. Denote por M' a subvariedade M^n menos o interior de D^n com bordo S. Então temos que $\eta_{|M'} \to M'$ providencia um cobordismo para $\eta_{|S}$.

□

Teorema 3.1.5. *Todo fibrado sobre uma soma conexa de duas variedades fechadas bidimensionais, $\eta \to M^2 \# V^2$, é uma soma conexa $\eta_1 \# \eta_2 \to M^2 \# V^2$.*

Demonstração. É conhecido o fato de que qualquer fibrado $\eta \to S^1$ é da forma $\eta = \xi_1' \oplus$ triviais , ou η é trivial, onde ξ_1' é o fibrado linha canônico. Tome $\eta \to M^2 \# V^2$. Então $S = S^1$ e $\eta|_S$ contempla uma das duas possibilidades. Note que $\xi_1' \oplus$ triviais sobre S^1 não borda, uma vez que $W(\xi_1' \oplus$ triviais $) = 1 + \alpha$, onde $\alpha \in H^1(S^1, \mathbb{Z}_2)$ é o gerador, e temos então o número característico não nulo $\alpha[S^1]$. Porem, $\eta|_S$ deve bordar, como vimos no teorema 3.1.4, portanto esse caso não ocorre. Logo, $\eta|_S$ deve ser trivial, e então do teorema 3.1.2 temos que η será uma soma conexa. □

Exemplo 3.1.6. Seja $T \to S^2$ o fibrado tangente sobre S^2. Sabemos que

$$W(S^2) = 1 \text{ e } W(T) = 1.$$

Portanto todos os números característicos de $T \to S^2$ são nulos, o que implica que ele borda como fibrado. Então existe variedade tridimensional compacta W e um fibrado bidimensional $G \to W$ tal que

$$\partial(W) = S^2 \text{ e o fibrado } G|_{S^2} = T.$$

Podemos então colar duas cópias de W através do bordo S^2, obtendo uma variedade fechada N, e como os dois fibrados nessa colagem sobre S^2 são os mesmos temos um fibrado bem definido sobre N, o qual restrito a cada cópia de W coincide com o fibrado G.

Chamemos tal fibrado de $\eta \to N$.

Considere a variedade fechada tridimensional $W \cup D^3$, obtida por se colar um disco D^3 a W através do bordo comum S^2. Note que N é a soma conexa de duas cópias de $W \cup D^3$, onde novamente a colagem é através do bordo comum S^2.

No entanto, η não é uma soma conexa de fibrados sobre $W \cup D^3$, pois caso contrário o fibrado tangente $T \to S^2$ seria trivial, o que é conhecido não ser verdade. Isso mostra definitivamente que um fibrado sobre uma soma conexa de variedades fechadas pode não ser uma soma conexa de fibrados sobre as variedades envolvidas, com exceção de variedades bidimensionais.

3.2 Classes características de fibrados sobre somas conexas, $\eta \to M^n\#V^n$

Sejam M^n, V^n variedades fechadas n-dimensionais. A seguir, vamos descrever a estrutura multiplicativa de $H^*(M^n\#V^n)$. Para tanto, fixe CW-estruturas em M^n e V^n, e observe que podemos escolher bolas de dimensão n, $B_1 \subset M^n$ e $B_2 \subset V^n$ para obter a soma conexa, de modo que os $(n-1)$-esqueletos de M^n e V^n são preservados em $M^n\#V^n$ (ou seja, as bolas estão inteiramente contidas em células de dimensão n). Denote por K, S os $(n-1)$-esqueletos de M^n e V^n, respectivamente. Sabemos que:

$H^j(M^n\#V^n) = \mathbb{Z}_2$ se $j = 0, n$, e

$H^j(M^n\#V^n) = H^j(M^n) \oplus H^j(V^n)$, se $1 \leq j \leq n-1$.

Portanto, $H^*(M^n\#V^n)$ tem subgrupos E, F que são isomorfos aditivamente a $H^*(M^n)$ e $H^*(V^n)$, respectivamente. Observe que:

$$M^n\#V^n = \frac{(M^n \backslash int(B_1)) \cup (V^n \backslash int(B_2))}{\sim},$$

onde $\sim$ indica a relação de colar o bordo de B_1 com o bordo de B_2. Considere agora os subconjuntos M', V' de $M^n\#V^n$ dados por:

$$M' = \frac{V^n \backslash B_2}{\sim}$$

e

$$V' = \frac{M^n \backslash B_1}{\sim}.$$

Observe que: $\frac{M^n\#V^n}{M'}$ e $\frac{M^n\#V^n}{V'}$ são homeomorfos a M^n e V^n, respectivamente. Então temos as aplicações "pinch´´:

$$P_{M'} : M^n\#V^n \to \frac{M^n\#V^n}{M'} = M^n$$

e

$$P_{V'} : M^n\#V^n \to \frac{M^n\#V^n}{V'} = V^n$$

que são as respectivas aplicações quocientes. Observe que $P_{M'}|_K$ e $P_{V'}|_S$ são aplicações inclusões. Portanto, $E = P_{M'}^*(H^*(M^n))$ e $F = P_{V'}^*(H^*(V^n))$, onde

$$P_{M'}^* : H^*(M^n) \to H^*(M^n \# V^n)$$

e

$$P_{V'}^* : H^*(V^n) \to H^*(M^n \# V^n),$$

são os homomorfismos induzidos em cohomologia. Como $P_{M'}^*$ e $P_{V'}^*$ são homomorfismos de anéis, concluímos que E, F são multiplicativamente isomorfos a $H^*(M^n), H^*(V^n)$. Para simplificar a notação, escreveremos $E = H^*(M^n), F = H^*(V^n)$, e se $\alpha \in H^*(M^n)$ ($\beta \in H^*(V^n)$), usaremos a mesma notação $\alpha \in H^*(M^n \# V^n)$ (β) para denotar a imagem de α através de $P_{M'}$ (de β através de $P_{V'}$).

Se $\alpha \in H^j(M^n)$ e $\beta \in H^s(V^n)$, onde $1 \leq j, s \leq n-1$, usamos a relação entre a intersecção de classes de homologia e o produto cup de classes de cohomologia através da dualidade de Poincaré para concluir que $\alpha \cdot \beta = 0$ em $H^{j+s}(M^n \# V^n)$. Isso descreve a estrutura multiplicativa de $H^*(M^n \# V^n)$. Ver [7].

Agora vamos descrever a classe característica de um fibrado vetorial $\eta \to M^n \# V^n$.

Em geral, se P^n é uma variedade fechada n-dimensional com uma estrutura de CW-complexo fixada, e se $K \subset P$ é o $(n-1)$-esqueleto, então cada classe característica, $w_s(\mu)$, com $\mu^k \to P^n$ um fibrado vetorial k-dimensional, $1 \leq s \leq n-1$, é determinada pela classe característica do fibrado restrição $\mu_{|K} \to K$. Mais precisamente, se $i : K \to P$ é a aplicação inclusão, então $i^* : H^s(P^n) \to H^s(K)$ é um isomorfismo para $1 \leq s \leq n-1$ e

$$i^*(w_s(\mu)) = w_s(\mu_{|K}).$$

No nosso caso, escreva $K \cup T$ o $(n-1)$-esqueleto de $M^n \# V^n$, e sejam $i : K \to M^n$, $j : T \to V^n$ as aplicações inclusões. Então $P_{M'} \circ i : K \to M^n$, $P_{V'} \circ j : T \to V^n$ são inclusões, portanto

$$w_s(\eta) = w_s(\eta_{|K}) + w_s(\eta_{|T}), \forall 1 \leq s \leq n-1.$$

3.3 Os espaços $K_dP(n)$

Enunciaremos a seguir alguns fatos bastante conhecidos, relacionados especificamente aos espaços projetivos $K_dP(n)$, onde $K_dP(n)$ denota o espaço n-projetivo real ($d = 1$), complexo ($d = 2$) ou quaterniônico ($d = 4$). Cada $K_dP(n)$ é uma variedade fechada e conexa, de dimensão dn, e pode ser vista como o espaço quociente:

$$K_dP(n) = \frac{K_d^{n+1} \backslash \{0\}}{\sim} = \{[x] : 0 \neq x \in K_d^{n+1}\},$$

onde a relação de equivalência $\sim$ é dada por:

Dados $x, y \in K_d^{n+1} \backslash \{0\}$, $x \sim y$ se, e só se, $x = a \cdot y$ para algum $a \in K_d \backslash \{0\}$.

Sabe-se que

$$H^t(K_dP(n)) = \mathbb{Z}_2, \text{ se } t = 0, d, 2d, 4d, \ldots, nd,$$

e

$$H^t(K_dP(n)) = 0 \text{ caso contrário.}$$

Além disso, a estrutura multiplicativa do anel $H^*(K_dP(n))$ está completamente determinada: se denotarmos por $\alpha_d \in H^d(K_dP(n))$ o gerador, então α_d^k é o gerador de $H^{kd}(K_dP(n))$.

Observação 3.3.1. A classe de Stiefel-Whitney do espaço projetivo $K_dP(n)$ é dada por:

$$W(K_dP(n)) = (1+\alpha_d)^{n+1},$$

onde α_d é o gerador de $H^d(K_dP(n))$.

Temos que:

$$H^t(K_dP(n)\#K_dP(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, \text{ se t = 0,nd} \\ \mathbb{Z}_2\#\mathbb{Z}_2, \text{ se t = d, 2d, \ldots, (n-1)d} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Observação 3.3.2. A classe de Stiefel-Whitney do espaço projetivo $K_dP(n)\#K_dP(n)$ é então dada por:

$$W(K_dP(n)\#K_dP(n)) = (1+\alpha_d)^{n+1} + (1+\beta_d)^{n+1},$$

onde α_d, β_d são os geradores de $H^d(K_dP(n)\#K_dP(n))$.

Seja (M^m, T) uma involução com fixed-data $\eta^k \to K_dP(n)\#K_dP(n)$.

Proposição 3.3.3. *Propriedades:*

Primeiramente, observe que, dado $\eta \to K_dP(n)\#K_dP(n)$, se n for ímpar, podemos supor que $nd > 1$, pois, $\mathbb{R}P^1 = S^1$ e $S^1\#S^1 = S^1$.

1) *Podemos supor sem perda de generalidade que $k < dn$, uma vez que os outros casos são obtidos diretamente de um teorema importante de Kosniowski-Stong, já citado anteriormente: se $k = dn$, então $m = k + dn = 2dn$, e portanto, pelo teorema de Kosniowski-Stong, temos que a involução é cobordante a twist. Agora, se $k > dn$ então $m > 2dn$, e novamente pelo mesmo teorema, temos que η borda.*

2) *Sabemos que RP^n é obtido da seguinte forma: tome uma célula (disco) D^n, e considere $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ a aplicação quociente. Então temos que $\mathbb{R}P^n$ é o resultado da colagem $D^n \cup_f \mathbb{R}P^{n-1}$. Denote por η_1 e η_2 as restrições de η aos $(n-1)$-esqueletos das cópias de $\mathbb{R}P^n$. Então, usando a naturalidade das classes características com respeito as inclusões dos $(n-1)$-esqueletos das cópias de $\mathbb{R}P^n$ na soma conexa, temos*

$$W(\eta_1) = (1+\alpha)^p, \alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n), p \in \mathbb{N}$$

$$W(\eta_2) = (1+\beta)^q, \beta \in H^1(\mathbb{R}P^n), q \in \mathbb{N}.$$

Segue que $W(\eta) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_k = W(\eta_1) + W(\eta_2) = (1+\alpha)^p + (1+\beta)^q$. *Mesmo tipo de abordagem produz resultados similares para* $K_dP(n)$, *se* $d = 2$ *ou* 4.

3) *Dados* $\alpha^j \in H^j(K_dP(n))$ *e* $\beta^i \in H^i(K_dP(n))$, *temos que o produto cup* $\alpha^j\beta^i$ *é zero, como vimos ao descrever a estrutura de* $H^*(M^n \# V^n)$.

4) *Temos que* $0 \neq \alpha_d \in H^1(K_dP(n))$ *e* $0 \neq \alpha_d^n \in H^n(K_dP(n)) = \mathbb{Z}_2$, *e o mesmo é valido para* β_d. *Como estamos trabalhando com duas cópias de* $K_dP(n)$ *distintas, temos que* $\alpha_d \neq \beta_d$, *uma vez que*

$$\alpha_d + \beta_d \in H^1(K_dP(n)\#K_dP(n)) = \mathbb{Z}_2[\alpha_d] \oplus \mathbb{Z}_2[\beta_d].$$

Mas

$$H^n(K_dP(n)\#K_dP(n)) = \mathbb{Z}_2,$$

ou seja, $H^n(K_dP(n)\#K_dP(n))$ *só tem um gerador, a saber,* $\alpha_d^n = \beta_d^n$. *Portanto* $\alpha_d^n + \beta_d^n = 0$.

Observação 3.3.4. Seja $r > 0$ tal que $2^r \leq k$. Observe que se $\binom{p}{2^i} = \binom{q}{2^i}$ para todo $i < r$ então $\binom{p}{t} = \binom{q}{t}$ para todo $t < 2^r$.

Demonstração. De fato, temos que $t = 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_s}$ para $0 \leq x_1 < \cdots < x_s < r$. Por hipótese,

$$\binom{p}{2^{x_i}} = \binom{q}{2^{x_i}}, \forall i.$$

Pelo teorema de Lucas, segue que, para todo i, 2^{x_i} está na expansão diádica de p se, e só se, 2^{x_i} está na expansão diádica de q. Logo, $2^{x_1} + \cdots + 2^{x_s}$ está na expansão diádica de p se, e só se, está na expansão diádica de q. Portanto, $\binom{p}{t} = \binom{q}{t}$. □

Existem $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_k$ tais que $(1 + v_d + v_{2d} + \cdots + v_k)(1 + \overline{v}_d + \overline{v}_{2d} + \cdots + \overline{v}_k) = 1$.

Lema 3.3.5. *Seja* r *tal que* $2^r < k$. *Suponha que* $\binom{p}{2^i} = \binom{q}{2^i}$ *para todo* $i < r$. *Então, dado* $j < 2^r d$, *temos que*

$$\overline{v}_j = \begin{cases} 0 \\ \alpha_d^{\frac{j}{d}} + \beta_d^{\frac{j}{d}} \end{cases}$$

Demonstração. Observe que

$$\overline{v}_d = v_d = \binom{p}{1}\alpha_d + \binom{q}{1}\beta_d,$$

sendo $\binom{p}{1} = \binom{q}{1}$, e temos que

$$\overline{v}_d = \begin{cases} 0 \\ \alpha_d + \beta_d \end{cases}$$

$$\overline{v}_{2d} = v_d\overline{v}_d + v_{2d} = \binom{p}{1}\alpha_d^2 + \binom{q}{1}\beta_d^2 + \binom{p}{2}\alpha_d^2 + \binom{q}{2}\beta_d^2,$$

e sendo $\binom{p}{2} = \binom{q}{2}$ temos que

$$\overline{v}_{2d} = \begin{cases} 0 \\ \alpha_d^2 + \beta_d^2 \end{cases}$$

Suponha que para todo $1 \leq t < j$ tenhamos:

$$\overline{v}_t = \begin{cases} 0 \\ \alpha_d^{\frac{t}{d}} + \beta_d^{\frac{t}{d}} \end{cases}$$

Por definição,

$$\overline{v}_j = v_j + \sum_{s+t=j,s,t\neq 0} v_s \overline{v}_t,$$

e podemos supor que $\overline{v}_t = \alpha_d^{\frac{t}{d}} + \beta_d^{\frac{t}{d}}$, pois caso contrario seria zero, o que não contribuiria para a soma, e assim:

$$\overline{v}_j = v_j + \sum_{s+t=j,s,t\neq 0} \left(\binom{p}{\frac{s}{d}} \alpha_d^{\frac{s}{d}} + \binom{q}{\frac{s}{d}} \beta_d^{\frac{s}{d}}\right)\left(\alpha_d^{\frac{t}{d}} + \beta_d^{\frac{t}{d}}\right)$$

$$= \binom{p}{\frac{j}{d}} \alpha_d^{\frac{j}{d}} + \binom{q}{\frac{j}{d}} \beta_d^{\frac{j}{d}} + \sum_{s+t=j,s,t\neq 0} \left(\binom{p}{\frac{s}{d}} \alpha_d^{\frac{t+s}{d}} + \binom{q}{\frac{s}{d}} \beta_d^{\frac{t+s}{d}}\right).$$

Como $t \neq 0$, temos que $s < 2^r$, portanto $\binom{p}{\frac{s}{d}} = \binom{q}{\frac{s}{d}}$. Consequentemente,

$$\sum_{s+t=j,s,t\neq 0} \left(\binom{p}{\frac{s}{d}} \alpha_d^{\frac{t+s}{d}} + \binom{q}{\frac{s}{d}} \beta_d^{\frac{t+s}{d}}\right) = \begin{cases} 0 \\ \alpha_d^{\frac{j}{d}} + \beta_d^{\frac{j}{d}} \end{cases}$$

Como $j < 2^r d$, ou seja, $\frac{j}{d} < 2^r$, segue que $\binom{p}{\frac{j}{d}} = \binom{q}{\frac{j}{d}}$ portanto

$$\overline{v}_j = \begin{cases} 0 \\ \alpha_d^{\frac{j}{d}} + \beta_d^{\frac{j}{d}} \end{cases}$$

□

3.4 Prova do Teorema 3.1.1

Demonstração. Primeiramente, escrevendo $W(\eta) = 1 + v_1 + \cdots + v_k$, vamos provar que para todo $1 \leq i \leq k$,

$$v_i = \begin{cases} 0 \\ \alpha_d^{\frac{i}{d}} + \beta_d^{\frac{i}{d}} \end{cases}$$

Sabemos que

$$W(K_dP(n)\#K_dP(n)) = (1+\alpha_d)^{n+1} + (1+\beta_d)^{n+1},$$

$$W(\eta) = 1 + v_d + \cdots + v_k = (1+\alpha_d)^p + (1+\beta_d)^q.$$

Assim,

$$W(\mathbb{R}P(\eta)) = ((1+\alpha_d)^{n+1} + (1+\beta_d)^{n+1})((1+c)^k + (1+c)^{k-d} v_d + \cdots + v_k).$$

Ou seja,
$$w_d = \binom{n+1}{1}(\alpha_d+\beta_d)+\binom{k}{d}c^d+v_d.$$
Como n é ímpar, temos que $\binom{n+1}{1}=0$. Podemos supor que $\binom{k}{d}=0$, caso contrário basta considerar
$$\overline{w}_d = w_d + c.$$
Assim,
$$w_d = v_d.$$
Vamos separar a prova em três casos, a saber:

1) p ímpar e q par;

2) p,q pares;

3) p,q ímpares.

1) p ímpar e q par:

Neste caso,
$$w_d = v_d = \alpha_d.$$
Logo,
$$0 = w_d^n c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = \alpha_d^n[K_dP(n)] = 1.$$
Portanto esse caso não ocorre.

2) p,q pares:

Neste caso,
$$w_d = v_d = 0.$$
Como n é ímpar, temos que $n+1=2s$, e assim
$$W(\mathbb{R}P^n\#\mathbb{R}P^n) = (1+\alpha_d)^{n+1}+(1+\beta_d)^{n+1} = (1+\alpha_d^2)^s+(1+\beta_d^2)^s = 1+v_{2d}+\cdots+v_k.$$
Além disso, temos que $p=2\overline{p}$, $q=2\overline{q}$, e assim
$$W(\eta) = 1+v_d+\cdots+v_k = (1+\alpha_d)^p+(1+\beta_d)^q = (1+\alpha_d^2)^{\overline{p}}+(1+\beta_d^2)^{\overline{q}}.$$
Desta forma,
$$W(\mathbb{R}P(\eta)) = ((1+\alpha_d^2)^s+(1+\beta_d^2)^s)((1+c)^k+(1+c)^{k-2d}v_{2d}+\cdots+v_k).$$
Então, para cada j que não é múltiplo de $2d$, a j-ésima classe de Stiefel-Whitney, w_j, é necessariamente nula. Agora note que para qualquer partição $j_1+\cdots+j_s=nd$, deve existir algum j_i que não é múltiplo de $2d$, pois n é ímpar. Se $j_i=2dt_i$ para todo i, então
$$nd = j_1+\cdots+j_s = 2d(t_1+\cdots+t_s)$$

$$\Leftrightarrow n = 2(t_1 + \cdots + t_s).$$

Portanto, todo produto de classes

$$w_{j_1} w_{j_2} \ldots w_{j_t}$$

é zero, o que implica que η borda, como queríamos.

3) p, q ímpar:

Neste caso,

$$w_d = v_d = \alpha_d + \beta_d.$$

Assim,

$$w_d^{n-2} = \alpha_d^{n-2} + \beta_d^{n-2}.$$

Agora, considere a classe:

$$\overline{W} = \frac{W}{(1+c)^k} = ((1+\alpha_d)^{n+1} + (1+\beta_d)^{n+1})\big(1 + \frac{\alpha_d + \beta_d}{(1+c)^d} + \frac{\binom{p}{2}\alpha_d^2 + \binom{q}{2}\beta_d^2}{(1+c)^{d+2}} + \cdots + \frac{\binom{p}{k}\alpha_d^k + \binom{q}{k}\beta_d^k}{(1+c)^k}\big).$$

Temos que

$$\overline{w}_{2d} = \binom{n+1}{2}(\alpha_d^2 + \beta_d^2) + \binom{n+1}{1}(\alpha_d^2 + \beta_d^2) + c^d(\alpha_d + \beta_d) + \binom{p}{2}\alpha_d^2 + \binom{q}{2}\beta_d^2$$

$$= \binom{n+1}{2}(\alpha_d^2 + \beta_d^2) + c^d(\alpha_d + \beta_d) + \binom{p}{2}\alpha_d^2 + \binom{q}{2}\beta_d^2.$$

Logo,

$$w_d^{n-2}\overline{w}_{2d} = \binom{n+1}{2}(\alpha_d^n + \beta_d^n) + c^d(\alpha_d^{n-1} + \beta_d^{n-1}) + \binom{p}{2}\alpha_d^n + \binom{q}{2}\beta_d^n$$

$$= c^d(\alpha_d^{n-1} + \beta_d^{n-1}) + \binom{p}{2}\alpha_d^n + \binom{q}{2}\beta_d^n.$$

Ou seja,

$$0 = w_d^{n-2}\overline{w}_{2d}c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = (c^d(\alpha_d^{n-1} + \beta_d^{n-1}) + \binom{p}{2}\alpha_d^n + \binom{q}{2}\beta_d^n)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]$$

$$= (\overline{v}_d(\alpha_d^{n-1} + \beta_d^{n-1}) + \binom{p}{2}\alpha_d^n + \binom{q}{2}\beta_d^n)[K_dP(n)\#K_dP(n)].$$

Mas,

$$\overline{v}_d = v_d = \alpha_d + \beta_d.$$

Substituindo na igualdade acima temos que:

$$0 = (\alpha_d^n + \beta_d^n + \binom{p}{2}\alpha_d^n + \binom{q}{2}\beta_d^n)[K_dP(n)\#K_dP(n)]$$

$$= (\binom{p}{2}\alpha_d^n + \binom{q}{2}\beta_d^n)[K_dP(n)\#K_dP(n)],$$

o que implica que $\binom{p}{2} = \binom{q}{2}$, pois caso contrário $1 = \binom{p}{2} \neq \binom{q}{2}$ e teríamos:

$$0 = \alpha_d[K_dP(n)\#K_dP(n)] = 1.$$

Dado $r > 0$ tal que $2^r \leq k$, suponha que $\binom{p}{2^i} = \binom{q}{2^i}$ para todo $i < r$. Provemos que $\binom{p}{2^r} = \binom{q}{2^r}$. Para tanto, considere a classe:

$$\overline{W} = \frac{W}{(1+c)^{k-2^rd+1}} = ((1+\alpha_d)^{n+1} + (1+\beta_d)^{n+1})((1+c)^{2^rd-1} + (1+c)^{2^rd-d-1}v_d + \cdots + \frac{v_{2^rd}}{1+c} + \dots).$$

Note que estamos interessados no termo de grau 2^rd, e também até o termo $\frac{v_{2^rd}}{1+c}$, uma vez que o termo seguinte $\frac{v_{2^rd+1}}{(1+c)^2}$ já tem dimensão mínima 2^rd+1. Um termo geral de $\overline{w}_{2^rd}$ é da forma:

$$\binom{n+1}{i}(\alpha_d^i + \beta_d^i)\binom{2^rd-(j+1)}{u}c^u v_j,$$

onde $di + j + u = 2^rd$. Note que isso implica que $i + \frac{j}{d} + \frac{u}{d} = 2^r$. Observe que se $\binom{2^rd-(j+1)}{u} = 0$, então o termo todo se anula, por isso os únicos termos que consideraremos são os envolvidos em $\binom{2^rd-(j+1)}{u} = 1$, e o mesmo vale para $\binom{n+1}{i}$. Desta forma, podemos escrever o termo geral como:

$$(\alpha_d^i + \beta_d^i)c^u v_j.$$

1) Suponha $i = 0$. Então:

   * $j = 0, u \neq 0$, e então temos que $u = 2^rd$, mas a maior potência de c é $2^rd - 1$, logo esse caso não ocorre.
   * $j \neq 0, u \neq 0$, e então temos que $j + u = 2^rd$, o que também não ocorre, uma vez que $j + u \leq 2^rd - 1$.
   * $j \neq 0, u = 0$, e então temos que $j = 2^rd$, quando ocorre o termo

$$v_{2^rd}.$$

2) Suponha $i \neq 0$. Então:

   * $j = 0, u = 0$, e então temos que $i = 2^r$, e assim temos o termo

$$\binom{n+1}{2^r}(\alpha_d^{2^r} + \beta_d^{2^r});$$

   * $j = 0, u \neq 0$, e então temos que $u = 2^rd - di$, quando aparece a soma

$$\sum_{1 \leq i < 2^rd}(\alpha_d^i + \beta_d^i)c^{2^rd-di};$$

* $j \neq 0, u \neq 0$. Como $j < 2^r d$, segue que $\frac{j}{d} < 2^r$, portanto $\binom{p}{\frac{j}{d}} = \binom{q}{\frac{j}{d}}$. Assim, temos a soma:
$$\sum_{di+u+j=2^r d}^{i,j,u\neq 0} (\alpha_d^i + \beta_d^i) c^u v_j = \sum_{di+u+j=2^r d}^{i,j,u\neq 0} \binom{p}{\frac{j}{d}} (\alpha_d^{i+\frac{j}{d}} + \beta_d^{i+\frac{j}{d}}) c^u$$
$$= \sum_{di+u+j=2^r d}^{i,j,u\neq 0} (\alpha_d^{i+\frac{j}{d}} + \beta_d^{i+\frac{j}{d}}) c^u,$$
uma vez que quando $\binom{p}{\frac{j}{d}} = 0$ a soma não é alterada.
* $j \neq 0, u = 0$, e então temos que $j = 2^r d - di$, quando aparece a soma
$$\sum_{1\leq i<2^r d} (\alpha_d^i + \beta_d^i) v_{2^r d - di} = \sum_{1\leq i<2^r d} (\binom{p}{2^r - i} \alpha_d^{2^r} + \binom{q}{2^r - i} \beta_d^{2^r})$$
$$= \sum_{1\leq i<2^r d} (\alpha_d^{2^r} + \beta_d^{2^r}).$$

Assim,
$$\overline{w}_{2^r d} = v_{2^r d} + \binom{n+1}{2^r} (\alpha_d^{2^r} + \beta_d^{2^r}) + \sum_{1\leq i<2^r d} (\alpha_d^i + \beta_d^i) c^{2^r d - di}$$
$$+ \sum_{di+u+j=2^r d}^{i,j,u\neq 0} (\alpha_d^{i+\frac{j}{d}} + \beta_d^{i+\frac{j}{d}}) c^u + \sum_{1\leq i<2^r d} (\alpha_d^{2^r} + \beta_d^{2^r}),$$
logo,
$$w_1^{n-2^r} \overline{w}_{2^r d} = \binom{p}{2^r} \alpha_d^n + \binom{q}{2^r} \beta_d^n + \binom{n+1}{2^r} (\alpha_d^n + \beta_d^n) + \sum_{1\leq i<2^r d} (\alpha_d^{n-2^r+i} + \beta_d^{n-2^r+i}) c^{2^r d - di}$$
$$+ \sum_{di+u+j=2^r d}^{i,j,u\neq 0} (\alpha_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}} + \beta_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}}) c^u + \sum_{1\leq i<2^r d} (\alpha_d^n + \beta_d^n)$$
$$= \binom{p}{2^r} \alpha_d^n + \binom{q}{2^r} \beta_d^n + \sum_{1\leq i<2^r d} (\alpha_d^{n-2^r+i} + \beta_d^{n-2^r+i}) c^{2^r d - di}$$
$$+ \sum_{di+u+j=2^r d}^{i,j,u\neq 0} (\alpha_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}} + \beta_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}}) c^u.$$
Desta forma,
$$0 = w_1^{n-2^r} \overline{w}_{2^r d} c^{k-1} [\mathbb{R}P(\eta)] = (\binom{p}{2^r} \alpha_d^n + \binom{q}{2^r} \beta_d^n + \sum_{1\leq i<2^r d} (\alpha_d^{n-2^r+i} + \beta_d^{n-2^r+i}) c^{2^r d - di}$$
$$+ \sum_{di+u+j=2^r d}^{i,j,u\neq 0} (\alpha_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}} + \beta_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}}) c^u) c^{k-1} [\mathbb{R}P(\eta)]$$
$$= (\binom{p}{2^r} \alpha_d^n + \binom{q}{2^r} \beta_d^n + \sum_{1\leq i<2^r d} (\alpha_d^{n-2^r+i} + \beta_d^{n-2^r+i}) \overline{v}_{2^r d - di}$$

$$+\sum_{di+u+j=2^r d}^{i,j,u\neq 0}(\alpha_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}}+\beta_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}})\overline{v}_u)[K_dP(n)\#K_dP(n)].$$

Observe que $di+u+j=2^r d$, então $u=2^r d-di-j<2^r d$. Então, pelo 3.3.5, temos que:

$$\overline{v}_u=\alpha_d^{\frac{u}{d}}+\beta_d^{\frac{u}{d}},$$

supondo que seja não nulo, uma vez que os nulos não contribuem para a soma. Desta forma,

$$(\alpha_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}}+\beta_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}})\overline{v}_u=\alpha_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}+\frac{u}{d}}+\beta_d^{n-2^r+i+\frac{j}{d}+\frac{u}{d}}=\alpha_d^n+\beta_d^n=0.$$

De forma análoga, temos que:

$$(\alpha_d^{n-2^r+i}+\beta_d^{n-2^r+i})\overline{v}_{2^r d-di}=\alpha_d^{n-2^r+i+2^r-i}+\beta_d^{n-2^r+i+2^r-i}=\alpha_d^n+\beta_d^n=0.$$

Assim, temos que

$$0=(\binom{p}{2^r}\alpha_d^n+\binom{q}{2^r}\beta_d^n)[K_dP(n)\#K_dP(n)].$$

Portanto,

$$\binom{p}{2^r}=\binom{q}{2^r}.$$

Concluímos que

$$\binom{p}{2^i}=\binom{q}{2^i}$$

para todo $2^i\leq k$, e assim,

$$\binom{p}{t}=\binom{q}{t},\forall t\leq k.$$

Portanto,

$$v_i=\begin{cases}0\\ \alpha_d^{\frac{i}{d}}+\beta_d^{\frac{i}{d}}\end{cases}$$

Um número característico genérico de η é da forma

$$W_{i_1}W_{i_2}\ldots W_{i_t}v_{j_1}v_{j_2}\ldots v_{j_l}[K_dP(n)\#K_dP(n)],$$

W_i classes tangenciais de $K_dP(n)\#K_dP(n)$, v_j classes de η. Se algum W_i,v_j for nulo então todo o produto se anula. Podemos então podemos considerar apenas os que são não nulos. Assim,

$$W_{i_s}=\alpha_d^{\frac{i_s}{d}}+\beta_d^{\frac{i_s}{d}}$$

e

$$v_{j_s}=\alpha_d^{\frac{j_s}{d}}+\beta_d^{\frac{j_s}{d}}.$$

Logo,

$$W_{i_1}W_{i_2}\ldots W_{i_t}v_{j_1}v_{j_2}\ldots v_{j_l}[K_dP(n)\#K_dP(n)]=[\alpha_d^n+\beta_d^n][K_dP(n)\#K_dP(n)]=0.$$

Portanto, η borda, concluindo a prova do nosso teorema.

□

CAPÍTULO 4

Exemplos para n par

Nossa conjectura é que o resultado provado no capítulo anterior para n ímpar é também válido para n par. No entanto, não conseguimos a prova desse caso em sua integralidade, mas apenas em alguns casos particulares. Vamos discutir tais casos nesse capítulo. Agradecemos o Prof. Luiz Hartmann pela sugestão de incluir tais casos nessa tese.

Como no caso n ímpar, separamos nossa análise em três partes:

1) p ímpar e q par;

2) p,q pares;

3) p,q ímpares.

Veremos a seguir que é possível provar os itens 1 e 2. O problema surge no item 3, quando dividimos em duas possibilidades, $n = 2^r$ ou $n = 2^r t$, ou seja, quando n é potência de dois ou não. E, nesse momento, a prova fica em aberto. Mas essa parte concluída contribuiu fortemente para a análise dos exemplos que veremos depois.

Teorema 4.0.1. *Seja (M,T) uma involução com fixed-data $\eta^k \to \mathbb{R}P^n \# \mathbb{R}P^n$, n par, $k < n$. Então, escrevendo $W(\eta) = 1 + w_1 + \cdots + w_k$, temos que, para todo $1 \leq i \leq k$,*

$$w_i = \begin{cases} 0 \\ \alpha^i + \beta^i \end{cases}$$

Demonstração. 1) Suponha p ímpar e q par. Sabemos que:

$$W(\mathbb{R}P(\eta)) = ((1+\alpha)^{n+1} + (1+\beta)^{n+1})((1+c)^k + (1+c)^{k-1}(\binom{p}{1}\alpha + \binom{q}{1}\beta) + \cdots + \binom{p}{k}\alpha^k + \binom{q}{k}\beta^k).$$

Assim,

$$w_1 = \binom{n+1}{1}(\alpha+\beta) + \binom{k}{1}c + \binom{p}{1}\alpha + \binom{q}{1}\beta.$$

Como vimos no caso n ímpar, podemos supor que $\binom{k}{1} = 0$. Por hipótese, n, q são pares, assim $\binom{q}{1} = 0, n+1, p$ são ímpares. Então $\binom{p}{1} = 1 = \binom{n+1}{1}$. Logo,

$$w_1 = \alpha + \beta + \alpha = \beta.$$

Então,

$$0 = w_1^n c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = \beta^n[\mathbb{R}P^n \# \mathbb{R}P^n] = 1.$$

Portanto, esse caso não ocorre.

2) p, q pares:

Temos que $\binom{p}{1} = \binom{q}{1} = 0$, logo

$$w_1 = \alpha + \beta$$

Considere a classe

$$\overline{W} = \frac{W}{(1+c)^k} = ((1+\alpha)^{n+1} + (1+\beta)^{n+1})(1 + \frac{1}{1+c^2}(\binom{p}{2}\alpha^2 + \binom{q}{2}\beta^2) + \cdots + \frac{1}{(1+c)^k}v_k).$$

Temos

$$\overline{w}_2 = \binom{n+1}{2}(\alpha^2+\beta^2) + \binom{p}{2}\alpha^2 + \binom{q}{2}\beta^2$$

e

$$w_1^{n-2}\overline{w}_2 = \binom{n+1}{2}(\alpha^n+\beta^n) + \binom{p}{2}\alpha^n + \binom{q}{2}\beta^n.$$

Mas $\alpha^n + \beta^n = 0$, assim

$$w_1^{n-2}\overline{w}_2 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = [\binom{p}{2}\alpha^n + \binom{q}{2}\beta^n]c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = 0.$$

Portanto,

$$\binom{p}{2} = \binom{q}{2}.$$

Considere agora a classe

$$\overline{W} = \frac{W}{(1+c)^{k-2^r+1}} =$$

$$= ((1+\alpha)^{n+1} + (1+\beta)^{n+1})((1+c)^{2^r-1} + (1+c)^{2^r-3}v_2 + (1+c)^{2^r-4}v_3 + \cdots + (1+c)^{-1}v_{2^r} + \dots).$$

Assim, dado r tal que $2^r \leq k$, suponha como hipótese de indução que $\binom{p}{2^i} = \binom{q}{2^i}$ para todo $i < r$. Temos que um termo geral de $\overline{w}_{2^r}$ é da forma

$$\binom{n+1}{i}(\alpha^i + \beta^i)\binom{2^r-(j+1)}{u}c^u v_j,$$

com $i+j+u = 2^r$. Novamente podemos supor que os binômios são não nulos e simplificar para:

$$(\alpha^i + \beta^i)c^u v_j.$$

1) Suponha $i = 0$. Então:

   * $j = 0, u \neq 0$, e então temos que $u = 2^r$, mas a maior potência de c que ocorre é $2^r - 1$, logo esse caso não acontece;
   * $j \neq 0, u \neq 0$, e então temos que $j + u = 2^r$, o que também não ocorre, uma vez que $j + u \leq 2^r - 2$;
   * $j \neq 0, u = 0$, e então temos que $j = 2^r$, onde temos a ocorrência do termo v_{2^r}.

2) Suponha $i \neq 0$. Então:

   * $j = 0, u = 0$, e então temos que $i = 2^r$. Assim, ocorre o termo

   $$\binom{n+1}{2^r}(\alpha^{2^r} + \beta^{2^r});$$

   * $j = 0, u \neq 0$, e então temos que $u = 2^r - i$ ocorre na soma

   $$\sum_{1 \leq i < 2^r}(\alpha^i + \beta^i)c^{2^r - i};$$

   * $j \neq 0, u \neq 0$, e então temos a soma

   $$\sum_{i+u+j=2^r, i,j,u \neq 0}(\alpha^i + \beta^i)c^u v_j;$$

   * $j \neq 0, u = 0$, e então temos que $j = 2^r - i$, ou seja, temos a soma

   $$\sum_{1 \leq i < 2^r}(\alpha^i + \beta^i)v_{2^r - i} = \sum_{1 \leq i < 2^r}(\binom{p}{2^r - i}\alpha^{2^r} + \binom{q}{2^r - i}\beta^{2^r}).$$

Assim,

$$\overline{w}_{2^r} = v_{2^r} + \binom{n+1}{2^r}(\alpha^{2^r} + \beta^{2^r}) + \sum_{1 \leq i < 2^r}(\alpha^i + \beta^i)c^{2^r - i} + \sum_{i+u+j=2^r, i,j,u \neq 0}(\alpha^i + \beta^i)c^u v_j +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < 2^r}\binom{p}{2^r - i}\alpha^{2^r} + \binom{q}{2^r - i}\beta^{2^r}.$$

Logo,

$$w_1^{n-2^r}\overline{w}_{2^r}c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] =$$

$$(\binom{p}{2^r}\alpha^n+\binom{q}{2^r}\beta^n+\binom{n+1}{2^r}(\alpha^n+\beta^n)+\sum_{1\leq i<2^r}(\alpha^{n-2^r+i}+\beta^{n-2^r+i})c^{2^r-i}$$

$$+\sum_{i+u+j=2^r,i,j,u\neq 0}(\alpha^{n-2^r+i}+\beta^{n-2^r+i})c^u v_j+\sum_{1\leq i<2^r}\binom{p}{2^r-i}\alpha^n+\binom{q}{2^r-i}\beta^n)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)].$$

Observe que, sendo $i\geq 1$, temos que $\binom{p}{2^r-i}=\binom{q}{2^r-i}$, e assim

$$\binom{p}{2^r-i}\alpha^n+\binom{q}{2^r-i}\beta^n=0.$$

Além disso,

$$\binom{n+1}{2^r}(\alpha^n+\beta^n)=0,$$

e assim:

$$w_1^{n-2^r}\overline{w}_{2^r}c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]=(\binom{p}{2^r}\alpha^n+\binom{q}{2^r}\beta^n+\sum_{1\leq i<2^r}(\alpha^{n-2^r+i}+\beta^{n-2^r+i})c^{2^r-i}+$$
$$+\sum_{i+u+j=2^r,i,j,u\neq 0}(\alpha^{n-2^r+i}+\beta^{n-2^r+i})c^u v_j)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)].$$

$$w_1^{n-2^r}\overline{w}_{2^r}c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]=(\binom{p}{2^r}\alpha^n+\binom{q}{2^r}\beta^n+\sum_{1\leq i<2^r}(\alpha^{n-2^r+i}+\beta^{n-2^r+i})\overline{v}_{2^r-i}+$$
$$+\sum_{i+u+j=2^r,i,j,u\neq 0}(\alpha^{n-2^r+i}+\beta^{n-2^r+i})\overline{v}^u v_j)[\mathbb{R}P^n\#\mathbb{R}P^n].$$

Podemos substituir acima o que foi visto em 3.3.5, supondo que $\overline{v}_{2^r-i}\neq 0\neq c^u$. Isso acarreta:

$$w_1^{n-2^r}\overline{w}_{2^r}c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]=(\binom{p}{2^r}\alpha^n+\binom{q}{2^r}\beta^n+\sum_{1\leq i<2^r}(\alpha^{n-2^r+i}+\beta^{n-2^r+i})(\alpha^{2^r-i}+\beta^{2^r-i})+$$
$$+\sum_{i+u+j=2^r,i,j,u\neq 0}(\alpha^{n-2^r+i}+\beta^{n-2^r+i})(\alpha^u+\beta^u)v_j)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)].$$

Mas,

$$(\alpha^{n-2^r+i}+\beta^{n-2^r+i})(\alpha^{2^r-i}+\beta^{2^r-i})=\alpha^n+\beta^n=0,$$

e, como $j\leq 2^r-2$, uma vez que $i+j+u=2^r$ e $i,u\neq 0$, temos que $\binom{p}{j}=\binom{q}{j}$. Assim,

$$(\alpha^{n-2^r+i}+\beta^{n-2^r+i})(\alpha^u+\beta^u)v_j=(\alpha^{n-2^r+i+u}+\beta^{n-2^r+i+u})(\binom{p}{j}\alpha^j+\binom{q}{j}\beta^j)$$

$$=\binom{p}{j}\alpha^n+\binom{q}{j}\beta^n=0.$$

Logo,

$$w_1^{n-2^r}\overline{w}_{2^r}c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = (\binom{p}{2^r}\alpha^n + \binom{q}{2^r}\beta^n)[\mathbb{R}P^n\#\mathbb{R}P^n] = 0,$$

o que implica que:

$$\binom{p}{2^r} = \binom{q}{2^r}.$$

3) Suponha p,q ímpares, e vamos considerar dois casos:

a) $n = 2^r$;

b) $n = 2^r t = 2^r(1+2^{x_1}+\cdots+2^{x_s})$.

a) $n = 2^r$:

Temos que $\binom{p}{1} = \binom{q}{1} = 1 = \binom{n+1}{1}$. Lembrando que estamos considerando $n > 2$, logo $r > 1$, teremos que $\binom{n+1}{2} = 0$.

Considere a classe

$$\overline{W} = \frac{W}{(1+c)^k} = ((1+\alpha)^{n+1} + (1+\beta)^{n+1})(1 + \frac{\alpha+\beta}{1+c} + \frac{v_2}{(1+c)^2} + \cdots + \frac{v_k}{(1+c)^k})$$

$$\overline{w}_2 = \binom{n+1}{1}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta) + \binom{n+1}{2}(\alpha^2+\beta^2) + \binom{p}{2}\alpha^2 + \binom{q}{2}\beta^2 + c(\alpha+\beta).$$

$$= \alpha^2+\beta^2+\binom{p}{2}\alpha^2+\binom{q}{2}\beta^2+c(\alpha+\beta).$$

Suponha por absurdo que $\binom{p}{2} \neq \binom{q}{2}$, ou seja, $\binom{p}{2} = 1$ e $\binom{q}{2} = 0$. Assim,

$$\overline{w}_2 = \alpha^2+\beta^2+\alpha^2+c(\alpha+\beta) = \beta^2+c(\alpha+\beta).$$

Considere o termo característico:

$$c\bar{w}_2 = c\beta^2 + c^2(\alpha+\beta).$$

(Observe que se $\binom{p}{2} = 0$ e $\binom{q}{2} = 1$, então $c\bar{w}_2 = c\alpha^2 + c^2(\alpha+\beta)$.)

Do Teorema 1.6.4, temos que

$$Sq^2(c\bar{w}_2) = Sq^2(c\beta^2 + c^2(\alpha+\beta)) = c\beta^4 + c^4(\alpha+\beta)$$

$$\vdots$$

$$Sq^{2^{r-1}}(c\beta^{2^{r-1}}+c^{2^{r-1}}(\alpha+\beta))=c\beta^{2^r}+c^{2^r}(\alpha+\beta)=c\beta^n+c^n(\alpha+\beta).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}0=(c\beta^n+c^n(\alpha+\beta))c^{k-2}[\mathbb{R}P(\eta)]&=(\beta^n+\overline{v}_{n-1}(\alpha+\beta))[\mathbb{R}P^n\#\mathbb{R}P^n]\\&=(\beta^n+\binom{2^{r+1}-p}{2^r-1}\alpha^n+\binom{2^{r+1}-q}{2^r-1}\beta^n)[\mathbb{R}P^n\#\mathbb{R}P^n].\end{aligned}$$

Suponha que $p,q>1$. Como $p,q<2^r$, podemos escrever $p=1+2^{x_1}+2^{x_2}+\cdots+2^{x_s}$, com $x_1<x_2<\cdots<x_s<r$. Dessa forma:

$$2^{r+1}-p=2^{r+1}-1-2^{x_1}-2^{x_2}-\cdots-2^{x_s}=1+2+\cdots+2^r-2^{x_1}-2^{x_2}-\cdots-2^{x_s},$$

ou seja, algumas potências de 2 não aparecem e, por outro lado,

$$2^r-1=1+2+2^2+\cdots+2^{r-1},$$

ou seja, aparecem todas as potências de 2 até $r-1$, portanto, do teorema de Lucas, segue que

$$\binom{2^{r+1}-p}{2^r-1}=0.$$

Análogamente, temos que

$$\binom{2^{r+1}-q}{2^r-1}=0.$$

Portanto,

$$0=\beta^n[\mathbb{R}P^n\#\mathbb{R}P^n]=1.$$

Suponha então que $p=1$. Como $0=\binom{p}{2}\neq\binom{q}{2}=1$, devemos ter $q>1$, portanto $\binom{2^{r+1}-q}{2^r-1}=0$. Por outro lado,

$$2^{r+1}-p=2^{r+1}-1=1+2+\cdots+2^r,$$

portanto,

$$\binom{2^{r+1}-p}{2^r-1}=1.$$

Assim,

$$\overline{v}_{n-1}=\alpha^{n-1}.$$

Temos que

$$\overline{w}_2=\beta^2+c(\alpha+\beta),$$

e assim,

$$Sq^1(\overline{w}_2)=Sq^1(\beta^2)+Sq^0(c)Sq^1(\alpha+\beta)+Sq^1(c)Sq^0(\alpha+\beta)=c(\alpha^2+\beta^2)+c^2(\alpha+\beta).$$

Do teorema 1.6.4, temos que

$$Sq^{2^{r-1}}(c(\alpha^{2^{r-1}}+\beta^{2^{r-1}})+c^{2^{r-1}}(\alpha+\beta))=c(\alpha^{2^r}+\beta^{2^r})+c^{2^r}(\alpha+\beta)=c^{2^r}(\alpha+\beta).$$

Logo,

$$0 = (c^{2^r}(\alpha+\beta))c^{k-2}[\mathbb{R}P(\eta)] = \overline{v}_{n-1}(\alpha+\beta)[\mathbb{R}P^n\#\mathbb{R}P^n]$$
$$= \alpha^{n-1}(\alpha+\beta)[\mathbb{R}P^n\#\mathbb{R}P^n] = \alpha^n[\mathbb{R}P^n\#\mathbb{R}P^n] = 1,$$

o que é um absurdo, portanto devemos ter $\binom{p}{2} = \binom{q}{2}$.

Para concluir esse caso, falta mostrar que $\binom{p}{2^i} = \binom{q}{2^i}, \forall i < r$.

b) $n = 2^r t = 2^r(1+2^{x_1}+\cdots+2^{x_s})$: infelizmente este caso está em aberto, não tendo sido até agora encontradas técnicas para concluí-lo.

□

Veremos a seguir que tal resultado (em aberto em geral) é, no entanto, válido para específicos n pares, em geral, pequenos, mas que constituem um bom indício da validade da conjectura.

4.1 $n = 4$

Considere

$$\overline{W} = \frac{W}{(1+c)^k} = ((1+\alpha)^{n+1} + (1+\beta)^{n+1})(1 + \frac{v_1}{1+c} + \frac{v_2}{(1+c)^2} + \ldots).$$

Temos que:

$$\overline{w}_2 = \binom{n+1}{1}(\alpha+\beta)v_1 + v_2 + c(\alpha+\beta)$$
$$= \alpha^2+\beta^2+\binom{p}{2}\alpha^2+\binom{q}{2}\beta^2+c(\alpha+\beta).$$

Observe que $p, q < 4$, e assim

1 $p = q = 1$, portanto $\binom{p}{2} = \binom{q}{2} = 1$.

2 $p = q = 3$, portanto $\binom{p}{2} = \binom{q}{2} = 0$.

3 $p = 1, q = 3$, então $v_2 = \beta^2$, assim

$$\overline{w}_2 = \alpha^2 + c(\alpha+\beta).$$

Temos que:

$$Sq^1(\overline{w}_2) = c^2(\alpha+\beta) + c(\alpha^2+\beta^2),$$
$$Sq^2(Sq^1(\overline{w}_2)) = c^4(\alpha+\beta).$$

Isto implica que

$$0 = c^4(\alpha+\beta)c^{k-2}[\mathbb{R}P(\eta)] = \overline{v}_3(\alpha+\beta)[\mathbb{R}P^4\#\mathbb{R}P^4].$$

Mas,

$$\bar{v}_3 = \binom{8-p}{3}\alpha^3 + \binom{8-q}{3}\beta^3 = \binom{7}{3}\alpha^3 + \binom{5}{3}\beta^3 = \alpha^3.$$

Portanto,

$$0 = \alpha^4[\mathbb{R}P^4\#\mathbb{R}P^4] = 1.$$

Consequentemente, devemos ter

$$\binom{p}{2} = \binom{q}{2},$$

o que encerra o caso $n = 4$.

4.2 $n = 6$

Considere a classe

$$\hat{W} = \frac{W}{(1+c)^k} = ((1+\alpha)^{n+1} + (1+\beta)^{n+1})(1 + \frac{v_1}{1+c} + \frac{v_2}{(1+c)^2} + \dots).$$

Temos que:

$$\hat{w}_2 = \binom{n+1}{2}(\alpha^2+\beta^2) + \binom{n+1}{1}(\alpha+\beta)v_1 + v_2 + c(\alpha+\beta)$$
$$= \binom{p}{2}\alpha^2 + \binom{q}{2}\beta^2 + c(\alpha+\beta).$$

Suponha $\binom{p}{2} = 1$, $\binom{q}{2} = 0$. Assim,

$$\hat{w}_2 = \alpha^2 + c(\alpha+\beta),$$

$$\hat{w}_2^3 = (\alpha^2 + c(\alpha+\beta))^2(\alpha^2 + c(\alpha+\beta))$$
$$= (\alpha^4 + c^2(\alpha^2+\beta^2))(\alpha^2 + c(\alpha+\beta))$$
$$= \alpha^6 + \alpha^4 c(\alpha+\beta) + c^2(\alpha^2+\beta^2)\alpha^2 + c^3(\alpha^3+\beta^3)$$
$$= \alpha^6 + c\alpha^5 + c^2\alpha^4 + c^3(\alpha^3+\beta^3).$$

Assim,

$$0 = \hat{w}_2^3 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = (\alpha^6 + c\alpha^5 + c^2\alpha^4 + c^3(\alpha^3+\beta^3))c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] =$$

$$= (\alpha^6 + \bar{v}_1\alpha^5 + \bar{v}_2\alpha^4 + \bar{v}_3(\alpha^3+\beta^3))[\mathbb{R}P^6\#RP^6].$$

Como $\binom{p}{2} = 1$ e $\binom{q}{2} = 0$, temos que:

$$\bar{v}_3 = \binom{8-p}{3}\alpha^3 + \binom{8-q}{3}\beta^3 = \beta^3,$$

$$\overline{v}_2 = \binom{8-p}{2}\alpha^2 + \binom{8-q}{2}\beta^2 = \beta^2.$$

Também

$$\overline{v}_1 = \alpha + \beta,$$

logo

$$0 = (\alpha^6 + \alpha^6 + \beta^6)[\mathbb{R}P^6 \# RP^6] = \beta^6[\mathbb{R}P^6 \# RP^6] = 1.$$

Portanto, $\binom{p}{2} = \binom{q}{2}$.

Suponha $\binom{p}{4} = 0$ e $\binom{q}{4} = 1$. Se $\binom{p}{2} = 1 = \binom{q}{2}$, então

$$\hat{w}_4 = \binom{7}{4}(\alpha^4 + \beta^4) + v_1\binom{7}{3}(\alpha^3 + \beta^3) + \binom{7}{2}(\alpha^2 + \beta^2)(cv_1 + v_2)$$

$$+\binom{7}{1}(\alpha + \beta)(c^2 v_1 + v_3) + v_4 + cv_3 + c^2 v_2 + c^3 v_1$$

$$= \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^4 + \beta^4 + c(\alpha^3 + \beta^3) + \alpha^4 + \beta^4 + c^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$+\alpha^4 + \beta^4 + \beta^4 + c(\alpha^3 + \beta^3) + c^2(\alpha^2 + \beta^2) + c^3(\alpha + \beta)$$

$$= c^3(\alpha + \beta) + \beta^4.$$

Assim,

$$c\hat{w}_4 = c^4(\alpha + \beta) + c\beta^4$$

e

$$Sq^1(c\hat{w}_4) = c^4(\alpha^2 + \beta^2) + c^2\beta^4.$$

Logo,

$$0 = Sq^1(c\hat{w}_4)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = (c^4(\alpha^2 + \beta^2) + c^2\beta^4)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = (\overline{v}_4(\alpha^2 + \beta^2) + \overline{v}_2\beta^4)[\mathbb{R}P^6 \# \mathbb{R}P^6],$$

e como $\binom{p}{2} = 1$, $\binom{p}{4} = 0$ e $\binom{q}{4} = 1$, segue que:

$$\overline{v}_2 = \binom{8-p}{2}\alpha^2 + \binom{8-q}{2}\beta^2 = 0,$$

$$\overline{v}_4 = \binom{8-p}{4}\alpha^4 + \binom{8-q}{4}\beta^4 = \alpha^4.$$

Logo,

$$0 = \alpha^6[\mathbb{R}P^6 \# \mathbb{R}P^6] = 1.$$

Logo, não podemos ter $\binom{p}{2} = 1$, $\binom{p}{4} = 0$ e $\binom{q}{4} = 1$. Suponha agora que $\binom{p}{4} = 0$, $\binom{q}{4} = 1$ e $\binom{p}{2} = 0 = \binom{q}{2}$. Então $v_2 = 0$ e $v_3 = 0$, logo:

$$\hat{W} = \frac{W}{(1+c)^k} = ((1+\alpha)^{n+1} + (1+\beta)^{n+1})(1 + \frac{v_1}{1+c} + \frac{v_4}{(1+c)^4} + \dots).$$

Assim,

$$\hat{w}_4 = \alpha^4 + \beta^4 + v_1(\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^2 + \beta^2)cv_1 + (\alpha + \beta)c^2 v_1 + v_4 + c^3 v_1$$

$$= \alpha^4 + \beta^4 + \alpha^4 + \beta^4 + c(\alpha^3 + \beta^3) + c^2(\alpha^2 + \beta^2) + \beta^4 + c^3(\alpha + \beta)$$

$$= \beta^4 + c(\alpha^3 + \beta^3) + c^2(\alpha^2 + \beta^2) + c^3(\alpha + \beta).$$

Portanto,

$$c^2\hat{w}_4 = c^2\beta^4 + c^3(\alpha^3 + \beta^3) + c^4(\alpha^2 + \beta^2) + c^5(\alpha + \beta).$$

Desta forma,

$$0 = c^2\hat{w}_4 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = (c^2\beta^4 + c^3(\alpha^3 + \beta^3) + c^4(\alpha^2 + \beta^2) + c^5(\alpha + \beta))c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] =$$

$$= (\overline{v}_2\beta^4 + \overline{v}_3(\alpha^3 + \beta^3) + \overline{v}_4(\alpha^2 + \beta^2) + \overline{v}_5(\alpha + \beta))[\mathbb{R}P^6 \# \mathbb{R}P^6],$$

onde, como $\binom{p}{2} = 0 = \binom{p}{4}$ e $\binom{q}{4} = 1$, temos que:

$$\overline{v}_2 = \binom{8-p}{2}\alpha^2 + \binom{8-q}{2}\beta^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$\overline{v}_3 = \binom{8-p}{3}\alpha^3 + \binom{8-q}{3}\beta^3 = \alpha^3 + \beta^3,$$

$$\overline{v}_4 = \binom{8-p}{4}\alpha^4 + \binom{8-q}{4}\beta^4 = \alpha^4,$$

$$\overline{v}_5 = \binom{8-p}{5}\alpha^5 + \binom{8-q}{5}\beta^5 = \alpha^5.$$

Logo,

$$0 = (\beta^6 + \alpha^6 + \beta^6 + \alpha^6 + \alpha^6)[\mathbb{R}P^6 \# \mathbb{R}P^6] = \alpha^6[\mathbb{R}P^6 \# \mathbb{R}P^6] = 1,$$

portanto

$$\binom{p}{4} = \binom{q}{4}.$$

o que encerra o caso $n = 6$.

4.3 $n = 8$

Já foi provado que $\binom{p}{2} = \binom{q}{2}$. Vamos provar que $\binom{p}{4} = \binom{q}{4}$. Para isso, considere a classe

$$\overline{W} = \frac{W}{(1+c)^k} = ((1+\alpha)^9 + (1+\beta)^9)(1 + \frac{v_1}{1+c} + \frac{v_2}{1+c^2} + \frac{v_3}{(1+c)^3} + \frac{v_4}{1+c^4} + \dots)$$

$$= (1+\alpha+\beta)(1 + \frac{v_1}{1+c} + \frac{v_2}{1+c^2} + \frac{v_3}{(1+c)^3} + \frac{v_4}{1+c^4} + \dots).$$

Assim,

$$\overline{w}_4 = (\alpha+\beta)(c^2 v_1 + v_3) + c^3 v_1 + c^2 v_2 + c v_3 + v_4.$$

Como $\binom{p}{2} = \binom{q}{2}$, temos que $\binom{p}{3} = \binom{q}{3} = \binom{p}{2}$, logo,

$$v_2 = \binom{p}{2}(\alpha^2+\beta^2) \text{ e } v_3 = \binom{p}{2}(\alpha^3+\beta^3).$$

Desta forma,

$$\overline{w}_4 = c^2(\alpha^2+\beta^2) + \binom{p}{2}(\alpha^4+\beta^4) + c^3(\alpha+\beta) + c^2\binom{p}{2}(\alpha^2+\beta^2) + c\binom{p}{2}(\alpha^3+\beta^3) + \binom{p}{4}\alpha^4 + \binom{q}{4}\beta^4$$

$$= c^2(\alpha^2+\beta^2) + \binom{p}{2}(\alpha^4+\beta^4+c^2(\alpha^2+\beta^2)+c(\alpha^3+\beta^3)) + c^3(\alpha+\beta) + \binom{p}{4}\alpha^4 + \binom{q}{4}\beta^4.$$

Logo,

$$\overline{w}_4^2 = c^4(\alpha^4+\beta^4) + \binom{p}{2}(\alpha^8+\beta^8+c^4(\alpha^4+\beta^4)+c^2(\alpha^6+\beta^6)) + c^6(\alpha^2+\beta^2) + \binom{p}{4}\alpha^8 + \binom{q}{4}\beta^8$$

$$= c^4(\alpha^4+\beta^4) + \binom{p}{2}(c^4(\alpha^4+\beta^4)+c^2(\alpha^6+\beta^6)) + c^6(\alpha^2+\beta^2) + \binom{p}{4}\alpha^8 + \binom{q}{4}\beta^8.$$

Assim,

$$0 = \overline{w}_4^2 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]$$

$$= (c^4(\alpha^4+\beta^4) + \binom{p}{2}(c^4(\alpha^4+\beta^4)+c^2(\alpha^6+\beta^6)) + c^6(\alpha^2+\beta^2) + \binom{p}{4}\alpha^8 + \binom{q}{4}\beta^8)c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]$$

$$= (\overline{v}_4(\alpha^4+\beta^4) + \binom{p}{2}(\overline{v}_4(\alpha^4+\beta^4)+\overline{v}_2(\alpha^6+\beta^6)) + \overline{v}_6(\alpha^2+\beta^2) + \binom{p}{4}\alpha^8 + \binom{q}{4}\beta^8)[\mathbb{R}P^8 \# \mathbb{R}P^8].$$

Suponha $\binom{p}{4} = 1$ e $\binom{q}{4} = 0$. Então:

$$0 = (\overline{v}_4(\alpha^4+\beta^4) + \binom{p}{2}(\overline{v}_4(\alpha^4+\beta^4)+\overline{v}_2(\alpha^6+\beta^6)) + \overline{v}_6(\alpha^2+\beta^2) + \alpha^8)[\mathbb{R}P^8 \# \mathbb{R}P^8].$$

Como $\binom{p}{2} = \binom{q}{2}$, temos que $\binom{16-p}{2} = \binom{16-q}{2}$, e além disso, como $\binom{q}{4} = 0$, temos que $\binom{16-q}{6} = \binom{16-q}{2}$. Desta forma,

$$\overline{v}_2 = \binom{16-p}{2}\alpha^2 + \binom{16-q}{2}\beta^2 = \binom{16-p}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

$$\overline{v}_4 = \binom{16-p}{4}\alpha^4 + \binom{16-q}{4}\beta^4 = \beta^4$$

$$\overline{v}_6 = \binom{16-p}{6}\alpha^6 + \binom{16-q}{6}\beta^6 = \binom{16-q}{6}\beta^6 = \binom{16-q}{2}\beta^6.$$

Então

$$0 = (\overline{v}_4(\alpha^4+\beta^4) + \binom{p}{2}(\overline{v}_4(\alpha^4+\beta^4) + \overline{v}_2(\alpha^6+\beta^6)) + \overline{v}_6(\alpha^2+\beta^2) + \alpha^8)[\mathbb{R}P^8\#\mathbb{R}P^8]$$

$$= (\beta^8 + \binom{p}{2}(\beta^8+\alpha^8+\beta^8) + \binom{16-q}{2}\beta^8 + \alpha^8)[\mathbb{R}P^8\#\mathbb{R}P^8]$$

$$= (\beta^8 + \binom{p}{2}\beta^8 + \binom{16-q}{2}\beta^8 + \alpha^8)[\mathbb{R}P^8\#\mathbb{R}P^8].$$

Observe que $\binom{q}{2} \neq \binom{16-q}{2}$. Então, $\binom{p}{2}\beta^8 + \binom{16-q}{2}\beta^8 = \beta^8$, portanto

$$0 = (\beta^8+\beta^8+\alpha^8)[\mathbb{R}P^8\#\mathbb{R}P^8] = \alpha^8[\mathbb{R}P^8\#\mathbb{R}P^8] = 1.$$

Desta forma, concluímos que

$$\binom{p}{4} = \binom{q}{4},$$

o que encerra o caso $n = 8$.

4.4 $n = 16$

Considere a classe

$$\overline{W} = \frac{W}{(1+c)^k} = (1+\alpha+\beta)(1+\frac{v_1}{1+c}+\frac{v_2}{1+c^2}+\frac{v_3}{(1+c)^3}+\frac{v_4}{1+c^4}+\frac{v_5}{(1+c)^5}+\frac{v_6}{(1+c)^6}+\frac{v_7}{(1+c)^7}+\dots).$$

Sabemos que:

$$\frac{1}{1+c} = 1+c+c^2+\dots,$$

$$\frac{1}{1+c^2} = 1+c^2+c^4+c^6+\dots,$$

$$\frac{1}{(1+c)^3} = 1+c+c^4+c^5+c^8+\dots,$$

$$\frac{1}{1+c^4} = 1+c^4+c^8+\dots,$$

$$\frac{1}{(1+c)^5} = 1+c+c^2+c^3+c^8+\dots,$$

$$\frac{1}{(1+c)^6} = 1+c^2+c^6+\dots,$$

$$\frac{1}{(1+c)^7} = 1+c+c^8+\dots,$$

$$\frac{1}{1+c^8} = 1+c^8+\dots.$$

Como $n=16=2^4$, já foi provado que $\binom{p}{2}=\binom{q}{2}$.

Provemos que $\binom{p}{4}=\binom{q}{4}$. Suponha que $\binom{p}{4}=1$ e $\binom{q}{4}=0$. Note que:

$$\overline{w}_2 = (\alpha+\beta)v_1+cv_1+v_2,$$

e

$$\begin{aligned}\overline{w}_4 &= (\alpha+\beta)(c^2v_1+v_3)+c^3v_1+c^2v_2+cv_3+v_4\\ &= (\alpha+\beta)(c^2v_1+v_3)+c^3v_1+c^2v_2+cv_3+\alpha^4.\end{aligned}$$

- $\binom{p}{2}=1$:

  Neste caso,
  $$\overline{w}_2 = cv_1 = c(\alpha+\beta)$$
  e
  $$\begin{aligned}\overline{w}_4 &= c^2(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^4+\beta^4+c^3(\alpha+\beta)+c^2(\alpha^2+\beta^2)+c(\alpha^3+\beta^3)+\alpha^4\\ &= \beta^4+c^3(\alpha+\beta)+c(\alpha^3+\beta^3).\end{aligned}$$

  Assim,
  $$\overline{w}_2^2 = c^2(\alpha^2+\beta^2)$$
  e
  $$\overline{w}_4^3 = \beta^{12}+c^9(\alpha^3+\beta^3)+c^3(\alpha^9+\beta^9).$$

  Logo,
  $$\overline{w}_2^2\overline{w}_4^3 = c^2\beta^{14}+c^{11}(\alpha^5+\beta^5)+c^5(\alpha^{11}+\beta^{11}).$$

  Temos
  $$\begin{aligned}0=\overline{w}_2^2\overline{w}_4^3c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] &= (c^2\beta^{14}+c^{11}(\alpha^5+\beta^5)+c^5(\alpha^{11}+\beta^{11}))c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]\\ &= (\overline{v}_2\beta^{14}+\overline{v}_{11}(\alpha^5+\beta^5)+\overline{v}_5(\alpha^{11}+\beta^{11}))[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}].\end{aligned}$$

  Mas $\binom{p}{2}=1$, e então:
  $$\begin{aligned}\overline{v}_2 &= \binom{32-p}{2}\alpha^2+\binom{32-q}{2}\beta^2=0,\\ \overline{v}_{11} &= \binom{32-p}{11}\alpha^{11}+\binom{32-q}{11}\beta^{11}=0.\end{aligned}$$

  E, como $\binom{p}{4}=1$ e $\binom{q}{4}=0$, temos que:
  $$\overline{v}_5 = \binom{32-p}{5}\alpha^5+\binom{32-q}{5}\beta^5=\beta^5,$$

  e então
  $$0=\beta^{16}[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}]=1.$$

- $\binom{p}{2} = 0$:

$$\overline{w}_2 = (\alpha+\beta)v_1 + cv_1 + v_2 = \alpha^2 + \beta^2 + c(\alpha+\beta)$$

e

$$\begin{aligned}\overline{w}_4 &= (\alpha+\beta)(c^2v_1+v_3) + c^3v_1 + c^2v_2 + cv_3 + v_4 \\ &= (\alpha+\beta)c^2v_1 + c^3v_1 + v_4 = c^2(\alpha^2+\beta^2) + c^3(\alpha+\beta) + \alpha^4.\end{aligned}$$

Assim,

$$\overline{w}_2^4 = \alpha^8 + \beta^8 + c^4(\alpha^4+\beta^4)$$

e

$$\overline{w}_4^2 = c^4(\alpha^6+\beta^6) + c^6(\alpha^2+\beta^2) + \alpha^8.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\overline{w}_2^4\overline{w}_4^2 &= (\alpha^8+\beta^8+c^4(\alpha^4+\beta^4))(c^4(\alpha^6+\beta^6)+c^6(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^8) \\ &= c^4(\alpha^{12}+\beta^{12}) + c^8(\alpha^{10}+\beta^{10}) + c^6(\alpha^{10}+\beta^{10}) + c^{10}(\alpha^6+\beta^6) + \alpha^{16} + c^4\alpha^{12} \\ &= c^4\beta^{12} + c^8(\alpha^{10}+\beta^{10}) + c^6(\alpha^{10}+\beta^{10}) + c^{10}(\alpha^6+\beta^6) + \alpha^{16}.\end{aligned}$$

Então

$$0 = \overline{w}_2^4\overline{w}_4^2c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = (c^4\beta^{12}+c^8(\alpha^{10}+\beta^{10})+c^6(\alpha^{10}+\beta^{10})+c^{10}(\alpha^6+\beta^6)+\alpha^{16})c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]$$

$$= (\overline{v}_4\beta^{12} + \overline{v}_8(\alpha^{10}+\beta^{10}) + \overline{v}_6(\alpha^{10}+\beta^{10}) + \overline{v}_{10}(\alpha^6+\beta^6) + \alpha^{16})[\mathbb{R}P^{16}\#RP^{16}].$$

Como $\binom{p}{2} = 0$, $\binom{p}{4} = 1$ e $\binom{q}{4} = 0$, temos que:

$$\overline{v}_4 = \binom{32-p}{4}\alpha^4 + \binom{32-q}{4}\beta^4 = \beta^4,$$

$$\overline{v}_6 = \binom{32-p}{6}\alpha^6 + \binom{32-q}{6}\beta^6 = \binom{32-p}{4}\alpha^6 + \binom{32-q}{4}\beta^6 = \beta^6,$$

$$\overline{v}_8 = \binom{32-p}{8}\alpha^8 + \binom{32-q}{8}\beta^8$$

e

$$\overline{v}_{10} = \binom{32-p}{10}\alpha^{10} + \binom{32-q}{10}\beta^{10} = \binom{32-p}{8}\alpha^{10} + \binom{32-q}{8}\beta^{10}.$$

Observe que:

$$\overline{v}_8(\alpha^{10}+\beta^{10}) + \overline{v}_{10}(\alpha^6+\beta^6) = \binom{32-p}{8}\alpha^{16} + \binom{32-q}{8}\beta^{16} + \binom{32-p}{8}\alpha^{16} + \binom{32-q}{8}\beta^{16} = 0,$$

e então

$$\begin{aligned}0 &= (\overline{v}_4\beta^{12} + \overline{v}_6(\alpha^{10}+\beta^{10}) + \alpha^{16})[\mathbb{R}P^{16}\#RP^{16}] \\ &= (\beta^{16}+\beta^{16}+\alpha^{16})[\mathbb{R}P^{16}\#RP^{16}] = \alpha^{16}[\mathbb{R}P^{16}\#RP^{16}] = 1.\end{aligned}$$

Portanto $\binom{p}{4} = \binom{q}{4}$.

Mostremos que $\binom{p}{8} = \binom{q}{8}$. Suponha que $\binom{p}{8} = 1$ e $\binom{q}{8} = 0$. Assim,

$$\overline{w}_8 = v_8 + cv_7 + c^2v_6 + c^3v_5 + c^4v_4 + c^5v_3 + c^6v_2 + c^7v_1 + (\alpha+\beta)(v_7 + c^2v_5 + c^4v_3 + c^6v_1).$$

a) $\binom{p}{2} = \binom{q}{2} = \binom{p}{4} = \binom{q}{4}$

- $\binom{p}{2} = 0$ Nesse caso, temos que $v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = v_6 = v_7 = 0$, e assim

$$\overline{w}_8 = \alpha^8 + c^7v_1 + (\alpha+\beta)c^6v_1$$
$$= \alpha^8 + c^7(\alpha+\beta) + (\alpha^2+\beta^2)c^6.$$

Logo,

$$\overline{w}_8^2 = \alpha^{16} + c^{14}(\alpha^2+\beta^2) + c^{12}(\alpha^4+\beta^4).$$

Então,

$$0 = \overline{w}_8^2 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = (\alpha^{16} + c^{14}(\alpha^2+\beta^2) + c^{12}(\alpha^4+\beta^4))c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]$$
$$= (\alpha^{16} + \overline{v}_{14}(\alpha^2+\beta^2) + \overline{v}_{12}(\alpha^4+\beta^4))[\mathbb{R}P^{16}\#RP^{16}].$$

Segue que

$$\overline{v}_{12} = \binom{32-p}{12}\alpha^{12} + \binom{32-q}{12}\beta^{12} = \beta^{12}$$

e

$$\overline{v}_{14} = \binom{32-p}{14}\alpha^{14} + \binom{32-q}{14}\beta^{14} = \beta^{14}.$$

Portanto,

$$0 = (\alpha^{16} + \beta^{16} + \beta^{16})[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}] = \alpha^{16}[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}] = 1.$$

- $\binom{p}{2} = 1$

$$\overline{w}_8 = v_8 + cv_7 + c^2v_6 + c^3v_5 + c^4v_4 + c^5v_3 + c^6v_2 + c^7v_1 + (\alpha+\beta)(v_7 + c^2v_5 + c^4v_3 + c^6v_1)$$
$$= \alpha^8 + c(\alpha^7+\beta^7) + c^2(\alpha^6+\beta^6) + c^3(\alpha^5+\beta^5) + c^4(\alpha^4+\beta^4) + c^5(\alpha^3+\beta^3) + c^6(\alpha^2+\beta^2) +$$
$$c^7(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta)(\alpha^7+\beta^7 + c^2(\alpha^5+\beta^5) + c^4(\alpha^3+\beta^3) + c^6(\alpha+\beta))$$
$$= \alpha^8 + c(\alpha^7+\beta^7) + c^2(\alpha^6+\beta^6) + c^3(\alpha^5+\beta^5) + c^4(\alpha^4+\beta^4) + c^5(\alpha^3+\beta^3) + c^6(\alpha^2+\beta^2) +$$
$$c^7(\alpha+\beta) + \alpha^8 + \beta^8 + c^2(\alpha^6+\beta^6) + c^4(\alpha^4+\beta^4) + c^6(\alpha^2+\beta^2)$$
$$= \beta^8 + c(\alpha^7+\beta^7) + c^3(\alpha^5+\beta^5) + c^5(\alpha^3+\beta^3) + c^7(\alpha+\beta).$$

Logo,

$$\overline{w}_8^2 = \beta^{16} + c^2(\alpha^{14}+\beta^{14}) + c^6(\alpha^{10}+\beta^{10}) + c^{10}(\alpha^6+\beta^6) + c^{14}(\alpha^2+\beta^2).$$

Assim,

$$0 = \overline{w}_8^2 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] =$$

$$= (\beta^{16} + c^2(\alpha^{14}+\beta^{14}) + c^6(\alpha^{10}+\beta^{10}) + c^{10}(\alpha^6+\beta^6) + c^{14}(\alpha^2+\beta^2))c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]$$

$$= (\beta^{16} + \overline{v}_2(\alpha^{14}+\beta^{14}) + \overline{v}_6(\alpha^{10}+\beta^{10}) + \overline{v}_{10}(\alpha^6+\beta^6) + \overline{v}_{14}(\alpha^2+\beta^2))[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}].$$

Ou seja,

$$\overline{v}_2 = \binom{32-p}{2}\alpha^2 + \binom{32-q}{2}\beta^2 = 0,$$

$$\overline{v}_6 = \binom{32-p}{6}\alpha^6 + \binom{32-q}{6}\beta^6 = 0,$$

$$\overline{v}_{10} = \binom{32-p}{10}\alpha^{10} + \binom{32-q}{10}\beta^{10} = 0$$

e

$$\overline{v}_{14} = \binom{32-p}{14}\alpha^{14} + \binom{32-q}{14}\beta^{14} = 0.$$

Portanto,

$$0 = \beta^{16}[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}] = 1.$$

b) $\binom{p}{2} = \binom{q}{2} \neq \binom{p}{4} = \binom{q}{4}$. Para este caso, considere a classe:

$$\hat{W} = \frac{W}{(1+c)^{k-7}} = (1+\alpha+\beta)((1+c)^7 + (1+c)^6 v_1 + (1+c)^5 v_2 + \cdots + v_7 + \frac{v_8}{1+c} + \ldots).$$

Temos

$$\hat{w}_8 = v_8 + (\alpha+\beta)(v_7+c^7) + \sum_{1\le j\le 7}(\alpha+\beta)\binom{8-(j+1)}{7-j}c^u v_j$$

$$= \alpha^8 + (\alpha+\beta)(v_7+c^7) + \sum_{1\le j\le 7}(\alpha+\beta)c^{7-j}v_j$$

$$= \alpha^8 + c^7(\alpha+\beta) + \sum_{1\le j\le 7}\binom{p}{j}c^{7-j}(\alpha^{1+j}+\beta^{1+j}).$$

– $\binom{p}{2} = 0 \neq 1 = \binom{p}{4}$. Neste caso, $\binom{p}{2} = \binom{p}{3} = \binom{p}{6} = \binom{p}{7}$, $\binom{p}{1} = \binom{p}{4} = \binom{p}{5}$, e assim

$$\hat{w}_8 = \alpha^8 + c^7(\alpha+\beta) + c^6(\alpha^2+\beta^2) + c^3(\alpha^5+\beta^5) + c^2(\alpha^6+\beta^6).$$

Assim,

$$\hat{w}_8^2 = \alpha^{16} + c^{14}(\alpha^2+\beta^2) + c^{12}(\alpha^4+\beta^4) + c^6(\alpha^{10}+\beta^{10}) + c^4(\alpha^{12}+\beta^{12}).$$

Logo,

$$0 = \hat{w}_8^2 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] =$$

$$= (\alpha^{16} + c^{14}(\alpha^2+\beta^2) + c^{12}(\alpha^4+\beta^4) + c^6(\alpha^{10}+\beta^{10}) + c^4(\alpha^{12}+\beta^{12}))c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]$$

$$= (\alpha^{16} + \bar{v}_{14}(\alpha^2+\beta^2) + \bar{v}_{12}(\alpha^4+\beta^4) + \bar{v}_6(\alpha^{10}+\beta^{10}) + \bar{v}_4(\alpha^{12}+\beta^{12}))[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}].$$

Como $\binom{p}{4} = 1$, segue que $\binom{32-p}{4} = 0 = \binom{32-p}{5} = \binom{32-p}{6} = \binom{32-p}{7}$. Desta forma,

$$\bar{v}_4 = 0,$$

$$\bar{v}_6 = 0,$$

$$\bar{v}_{12} = 0,$$

$$\bar{v}_{14} = 0.$$

Então,

$$0 = \hat{w}_8^2 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] = \alpha^{16}[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}] = 1.$$

– $\binom{p}{2} = 1 \neq 0 = \binom{p}{4}$. Neste caso, $\binom{p}{4} = 0 = \binom{p}{5} = \binom{p}{6} = \binom{p}{7}$ e $\binom{p}{1} = 1 = \binom{p}{2} = \binom{p}{3}$. Assim,

$$\hat{w}_8 = \alpha^8 + c^7(\alpha+\beta) + \sum_{1\leq j\leq 7}\binom{p}{j}c^{7-j}(\alpha^{1+j}+\beta^{1+j})$$
$$= \alpha^8 + c^7(\alpha+\beta) + c^6(\alpha^2+\beta^2) + c^5(\alpha^3+\beta^3) + c^4(\alpha^4+\beta^4).$$

Logo,

$$\hat{w}_8^2 = \alpha^{16} + c^{14}(\alpha^2+\beta^2) + c^{12}(\alpha^4+\beta^4) + c^{10}(\alpha^6+\beta^6) + c^8(\alpha^8+\beta^8).$$

Segue que

$$0 = \hat{w}_8^2 c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)] =$$
$$= (\alpha^{16} + c^{14}(\alpha^2+\beta^2) + c^{12}(\alpha^4+\beta^4) + c^{10}(\alpha^6+\beta^6) + c^8(\alpha^8+\beta^8))c^{k-1}[\mathbb{R}P(\eta)]$$
$$= (\alpha^{16} + \bar{v}_{14}(\alpha^2+\beta^2) + \bar{v}_{12}(\alpha^4+\beta^4) + \bar{v}_{10}(\alpha^6+\beta^6) + \bar{v}_8(\alpha^8+\beta^8))[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}].$$

Mas $\binom{p}{2} = 1$, o que implica $\binom{32-p}{2} = \binom{32-p}{10} = \binom{32-p}{14} = 0$. Logo,

$$\bar{v}_{10} = 0$$

e

$$\bar{v}_{14} = 0.$$

Como $\binom{p}{4} = 0$, $\binom{p}{8} = 1$ e $\binom{q}{8} = 0$, temos que:

$$\bar{v}_8 = \beta^8,$$

$$\bar{v}_{12} = \beta^{12}.$$

Segue que

$$0 = (\alpha^{16} + \beta^{16} + \beta^{16})[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}] = \beta^{16}[\mathbb{R}P^{16}\#\mathbb{R}P^{16}] = 1.$$

Portanto $\binom{p}{8} = \binom{q}{8}$, encerrando o caso $n = 16$.

Com os cálculos feitos nesse capítulo podemos ver que para alguns casos de n par o resultado continua válido, contudo conforme a dimensão de n aumenta os cálculos ficam mais complexos tornando inviável continuar desse modo para n muito grande.

Referências Bibliográficas

[1] Barbaresco, E.M., *Involuções fixando* $F^n \cup F^3$, Tese de Doutorado - DM / UFSCar (2010).

[2] Barbaresco, E.M.; Pergher, P.L.Q., *Involutions fixing* $F^n \cup F^3$, Indagationes Mathematicae, no. 29 807-818 (2018)

[3] Boardman, J., *On manifolds with involution*, Bull Am. Math. Soc. 73 no. 2, 136-138 (1967)

[4] Borel, *A.: Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. 57, n. 2, (1953), 115-207

[5] Conner, P. E., *Differentiable periodic maps*, second ed., Springer-Verlag, 1979.

[6] Conner, P. E.; Floyd, E. E., *Differentiable periodic maps*, Springer-Verlag, 1964.

[7] Dold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Die grundlehren der mathematischen, Band 200. Springer-Verlag, New York - Berlin (1972)

[8] Figueira, F.G., *Involuções cujo conjunto de pontos fixos possui duas componentes*, Tese de Doutorado - DM / UFSCar (2004).

[9] Hou, D.; Torrence B., *Involutions fixing the union of odd-dimensional projective spaces*, Canadian Math. Bull. 37, (1994), 66-74.

[10] Jiang, G. R.; Yan, C. Z., *Involutions fixing the disjoint union of many projective* $2r+1$*-spaces*, Northeast. Math. J. 7, n. 4, (1991), 473-479.

[11] Kelton, S.M., *Involutions fixing* $\mathbb{R}P^j \cup F^n$, Tese de Doutorado - Department of Mathematics/ University of Virginia (2001).

[12] Kelton, S.M., *Involutions fixing* $\mathbb{R}P^j \cup F^n$, Topology Appl. 142, 197-203 (2004).

[13] Kelton, S.M., *Involutions fixing* $\mathbb{R}P^j \cup F^n$, II, Topology Appl. 149, 217-226 (2005).

[14] Kosniowski, C; Stong, R.E., (1978) *Involutions and characteristic numbers.* Topology Volume 17, Issue 4, 1978, 309-330

[15] Liu, X. G., *Involutions fixing the disjoint union of copies of HP^n* , J. Jilin Univ. Sci. 40, n. 2, (2002), 119-121

[16] Milnor, J.W.; Stasheff, J.D., *Characteristic classes.* Princenton University Press, 1974.

[17] Osborn, H., *Vector Bundles*, Academic Press, Inc, 1982.

[18] Pergher, P.L.Q., *Upper bounds for the dimension of involutions with certain $\mathbb{Z}_2$ fixed sets*, Mathemática Contemporânea, 13, 269-275 (1997).

[19] Pergher, P.L.Q., *Involutions fixing $F^n \cup \{Indecomposable\}$*, Canadian Math. Bulletin 55, 164-171 (2012).

[20] Pergher, P.L.Q.; Ramos, A.; de Oliveira, R., *(Z_2^k)-actions fixing $\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{R}P^{even}$*, Algebraic Geometric Topology 7, (2007), 29-45.

[21] Pergher, P.L.Q.; Ramos, A., *(Z_2^k)-actions fixing $K_dP(2^t \cup K_dP(even))$*, Topology Appl. 156, (2009), 629-642.

[22] Pergher, P.L.Q.; Figueira, F.G., *Involutions fixing $F^n \cup F^2$*, Topology Appl. 153 no. 14, 2499-2507 (2006).

[23] Pergher, P.L.Q.; Figueira, F.G., *Two commuting involutions fixing $F^n \cup F^{n-1}$*, Geometriae Dedicata, 117, 181-193 (2006).

[24] Pergher, P.L.Q.; Figueira, F.G., *Involutions fixing $F^n \cup F^2$*, Topology Appl. 153 no. 14, 2499-2507 (2006)

[25] Pergher, P.L.Q.; Stong, R.E., *Involutions fixing (point) $\cup F^n$* , Transformation Groups (2001), 6 - 79. (https://doi.org/10.1007/BF01236063)

[26] Pergher, P.L.Q.; Zhao, S., *(Z_2^k)-actions fixing the disjoint union of odd-dimensional quaternionic projective spaces*, to appear in Houston Journal Math.

[27] Royster, D.C., *Involutions fixing the disjoint union of the two projective spaces*, Indiana University Mathematics Journal 29, no2, 267-276 (1980).

[28] Stong, R. E., *Involutions fixing projective spaces*, Michigan Math. J. 13, (1966), 445-447.

[29] Thom, R., *Quelques proprietés globales des variétes differentiables*, Comm. Math. Helv. 28 (1954),18-88

[30] Zhao, S. Q.; Li, J. Y., *Involutions of the disjoint union of fixed point set with odd-dimensional complex projective spaces*, J. Jilin Univ. Sci. 53, (2015), 1201-1206