UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

ISABEL RONCATO FAIFER

DO RACIONAL AO IRRACIONAL: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS NO ENSINO BÁSICO.

SÃO CARLOS

2023

ISABEL RONCATO FAIFER

DO RACIONAL AO IRRACIONAL: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS NO ENSINO BÁSICO.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS

2023

Faifer, Isabel Roncato

Do racional ao irracional: uma sequência didática para a construção do conjunto dos números reais no Ensino Básico / Isabel Roncato Faifer -- 2023.
64f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): João Carlos Vieira Sampaio
Banca Examinadora: José Luciano Santinho Lima, Pedro Luiz Aparecido Malagutti
Bibliografia

1. Educação. 2. História da Matemática. 3. Números irracionais. I. Faifer, Isabel Roncato. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Isabel Roncato Faifer, realizada em 07/02/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio (UFSCar)

Prof. Dr. José Luciano Santinho Lima (IFSP)

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Para o Antonio, com todo meu amor e para todos aqueles que através da educação, buscam fazer do mundo um lugar mais justo.

AGRADECIMENTOS

A Deus por providenciar tudo que me foi necessário desde sempre.

À toda minha família, pelo apoio e estímulo, desde o início dos meus estudos até hoje.

Aos meus amigos, de maneira especial, àqueles que fiz ao longo deste mestrado, Cleber, Daniel, Kátia, Luana, Matheus e Pedrinho. Pelas manhãs, tardes, noites e madrugadas estudando juntos, pelos surtos coletivos e pelo companheirismo dos últimos três anos. Sem vocês essa caminhada seria muito menos divertida e proveitosa!

Ao meu querido professor e orientador, João Carlos Vieira Sampaio, por toda a paciência desde a graduação e por toda contribuição na elaboração deste trabalho.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente ao longo de todos esses anos. Muito obrigada!

O poder é a habilidade não apenas de contar a história de outra pessoa, mas de fazer que ela seja sua história definitiva.

Chimamanda Ngozi Adichie

Uma teoria matemática não deve ser considerada completa até que a tenhamos feito tão clara que a possamos explicar ao primeiro homem que encontramos na rua.

David Hilbert

Redondo sem início e sem fim, eu sou o ponto antes do zero e do ponto final, Do zero ao infinito vou caminhando sem parar.

Clarice Lispector

RESUMO

Diante do cenário atual da educação, onde o ensino de matemática se dá, cada dia mais, de modo mecânico e distante do pensamento crítico, o presente trabalho aborda uma proposta do uso da história da matemática como metodologia de ensino para a introdução do conteúdo de números irracionais e construção do conjunto dos números reais, a partir de reflexões e discussões acerca da noção de infinito, para uma turma do nono ano do ensino fundamental, com o intuito de construir um processo de ensino e aprendizagem significativo para os estudantes.

Palavras-chave: Educação. História da matemática. Números irracionais. Números reais. Infinito.

ABSTRACT

Faced with the current scenario of education, where the teaching of mathematics takes place, each day more, in a mechanical way and far from critical thinking, the present work approaches a proposal for the use of the history of mathematics as a teaching methodology for the introduction of the content of irrational numbers and construction of the set of real numbers, based on reflections and discussions about the notion of infinity, for a ninth grade elementary school class, with the aim of building a meaningful teaching and learning process for students.

Keywords: Education. History of mathematics. Irrational numbers. Real numbers. Infinity.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um dos principais questionamentos feitos em sala de aula por parte dos alunos é sobre a finalidade dos conteúdos matemáticos ensinados. Desde o início do Ensino Fundamental até o final do Ensino Médio, diversos alunos não consideram o estudo da matemática importante e não encontram significado ou relação com sua vida, nos temas previstos no currículo escolar, causando o desestímulo e a falta de interesse no estudo de determinados assuntos e até mesmo o medo e a aversão à matemática que, por muitas vezes, permanece até a vida adulta.

> Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino de matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral. Isso é particularmente notado no que se refere a conteúdos. A maior parte dos programas consiste de coisas acabadas, mortas e absolutamente fora do contexto moderno. Torna-se cada vez mais difícil motivar alunos para uma ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância. (D'AMBROSIO, 1996)

> Para o ser humano é de fato muito difícil ter o desejo, a vontade de querer aprender algo que não apresenta relação com a sua vida, com o seu contexto social, que não permite a ele verificar a importância que tem aquela informação, aquele conhecimento que está sendo ensinado. Assim sendo, essa atitude de não querer aprender conteúdos tidos como arbitrários, sem sentido, torna-se um empecilho ao desenvolvimento de uma aprendizagem significativa. (PAIVA, 2018)

Em vista disso, fala-se muito sobre a contextualização dos conceitos matemáticos para que a mesma se torne mais concreta e relacionada ao cotidiano das pessoas. Entretanto, se a matemática é naturalmente vista como abstrata, como podemos torná-la significativa aos alunos do Ensino Básico? A contextualização é o processo de criar cenários para promover uma aprendizagem motivadora, aproximando as experiências dos alunos dos conteúdos estudados, estabelecendo relações de natureza sociocultural, históricas ou mesmo na matemática. É ao longo da

> [...] dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de "ilustrar" o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2006, p. 83, grifo nosso).
>
> [...]é possível destacar que contextualização como movimento desencadeado em uma proposta de ensino tem por objetivo fundamentar o processo de aprendizagem, pois possibilita estabelecer sentidos do aluno para os significados dos conceitos matemáticos. No processo de aprendizagem, a significação consiste na internalização do conceito, precisando ser mediada pela produção de signos e sentidos, essenciais para o desenvolvimento de funções mentais superiores. (REIS; NEHRING, 2017)

A aprendizagem é considerada significativa quando uma nova ideia se relaciona a conhecimentos prévios permitindo que as novas ideias adquiram significado para o indivíduo e que os conhecimentos prévios sejam ressignificados. Para Ausubel, a aprendizagem significativa ocorre quando alguém atribui significados a um conhecimento a partir da interação com seus conhecimentos prévios, independentemente de esses significados serem aceitos no contexto do sujeito.

> O conceito central da teoria de Ausubel e o de aprendizagem significativa. Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do individuo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como conceito subsunçor, ou simplesmente subsunçor , existente na estrutura cognitiva do individuo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo organizado, formando uma hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos. Estrutura cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos que são representações de experiencias sensoriais do individuo. (MOREIRA, 1985)

A Base Nacional Comum Curricular determina como função da escola o letramento matemático e o preparo do estudante para entender como a Matemática é aplicada em diferentes situações, dentro e fora da escola. É importante que os procedimentos sejam abordados a partir de significados que fazem parte do cotidiano do aluno, que esteja focada na associação entre os diversos conhecimentos que o aluno já tem.

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BNCC. . . , 2018).

A História da Matemática se faz, dentro desse contexto, uma ferramenta essencial para promover esse tipo de aprendizagem, tendo em vista que ela permite que os alunos conheçam não só o contexto histórico onde os conceitos foram desenvolvidos, mas também a sua ordem de invenção, que diz respeito ao modo e cronologia de como os resultados se desenvolveram. Explorar a ordem de invenção possibilita aos alunos reconhecer a matemática como uma construção, conectando-a ao seu contexto de descoberta.

> As situações que motivaram os matemáticos são problemas em um sentido muito mais rico. Podem ter sido problemas quotidianos (contar, fazer contas); problemas

> relativos à descrição dos fenômenos naturais (por que um corpo cai, por que as estrelas giram?); problemas filosóficos (o que é conhecer, como a Matemática ajuda a alcançar o conhecimento verdadeiro?); ou ainda, problemas matemáticos (como legitimar certa técnica ou certo conceito?). Na história da Matemática, encontramos motivações que misturam todos estes tipos de problemas. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012).

De maneira geral, podemos entender um problema como um objeto de pesquisa ou de discussões acadêmicas, que exige que o indivíduo pense para solucioná-lo. Um problema matemático, por sua vez, exige, além do pensar, conhecimentos prévios e um raciocínio matemático para chegar a uma solução.

> Segundo Dante (2003) um problema é qualquer circunstância que exige o indivíduo pensar para resolvê-la. Já um problema matemático não exige apenas o pensar, mas sim conhecimentos e maneiras de raciocinar matematicamente para solucioná-lo. É importante ressaltar que não existe apenas uma forma de representar um problema matemático, pois os mesmos se subdividem em alguns aspectos, como por exemplo: exercícios de reconhecimento e algoritmos, problemas-padrão simples e composto, problemas-processo ou heurísticos, problemas de aplicação e quebra-cabeça, em que cada um desses possui suas especificidades. Para resolver esses problemas, um possível método a ser utilizado é a Resolução de Problemas. (MELO; PAZ; SOUZA, 2018)

George Polya em seu livro *A arte de resolver problemas* propõe as quatro etapas que ele considera como necessárias para a Resolução de Problemas, que são: compreender o problema, construir um plano de ação, executar o plano e rever a solução. Suas ideias tiveram rapidamente uma enorme repercussão, sendo inicialmente adotadas por muitos e, posteriormente, estudadas, estendidas, criticadas e modificadas por outros autores.

Para promover uma melhor compreensão sobre os problemas que motivaram os matemáticos, o estudo da história da matemática se faz muito importante pois nos permite compreender como essa ciência tomou forma, indo além do senso comum que a concebe como um modelo pronto e sem falhas. Sendo a matemática um ciência construída inteiramente por pessoas, é através da história que somos capazes de resgatar seu caráter humano. Assim sendo, o conhecimento histórico permite uma melhor reflexão sobre conceitos matemáticos, criando uma aprendizagem significativa que atinja todos os alunos e permite que eles estabeleçam uma identificação com essa ciência.

> Pode-se fazer história da matemática, essencialmente, por duas razões: para mostrar como ela se tornou o que é; ou para indicar que ela não é apenas o que nos fazem crer que é. No primeiro caso, deseja-se contar como foi construído o que se acredita ser o edifício ordenado e rigoroso que hoje chamamos de “matemática”. No segundo, ao contrário, pretende-se exibir um conjunto de práticas, muitas vezes desordenadas, que, apesar de distintas das atuais, também podem ser ditas “matemáticas”. Quando encarado como uma prática múltipla e diversa, esse conhecimento se apresenta composto por ferramentas, técnicas e resultados desenvolvidos por pessoas em momentos e contextos específicos, com suas próprias razões para fazer matemática e com ideias singulares sobre o que isso significa.] (ROQUE, 2012)

O objetivo deste trabalho é, inicialmente, questionar os impactos da abordagem tradicional da história da matemática no processo de identificação dos estudantes com essa ciência, a apresentação rigorosa e ordenada dos conceitos, cogitando uma nova perspectiva, baseada na apresentação da matemática como uma prática múltipla e diversa. Em seguida, discutir a abordagem do conceito histórico e filosófico do infinito para a construção do Conjunto dos Números Reais dentro do contexto da Educação Básica, analisando, do ponto de vista teórico, seus impactos e contribuições. Por fim, a avaliação da dinâmica sobre o Hotel de Hilbert em sala de aula a partir da Engenharia Didática.

> Apostamos na possibilidade de que um novo olhar ajude a fazer com que as pessoas não se sintam pertencentes a um mundo distante daquele que os matemáticos produziram. O intuito é tornar disponível, para os leitores brasileiros, uma parte das discussões sobre um novo modo de ver a matemática do passado, desfazendo a imagem romantizada e heroica que a envolve e que tem sido reproduzida pela mitificação de sua história. Talvez assim se possam romper certas barreiras psicológicas, tornando possível até mesmo que um público mais amplo venha a gostar mais dessa disciplina. (ROQUE, 2012)

2 A ENGENHARIA DIDÁTICA

Pensando na validação da sequência didática desenvolvida ao longo do trabalho, foi utilizado o recurso da engenharia didática na coleta de dados ao longo da aplicação de uma das atividades. Nesse capítulo explicaremos o conceito e a utilização de tal metodologia, evidenciando cada uma de suas etapas.

A engenharia didática é o método de ação pedagógica investigativa que compreende a preparação de um plano de ensino sobre um determinado conteúdo, pensado para um público específico, través de uma estratégia que planeja a atividade, considerando a experiência do professor para fazer previsões sobre as expectativas de aprendizagem, surgimento de dúvidas e uma maneira de saná-las, trazendo elementos que diferem do ensino tradicional, respeitadas as exigências da escola onde será aplicado. De acordo com (CARNEIRO, 2005), essa metodologia "*exige sólido conhecimento científico, básico e essencial, mas também exige enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia – momentos em que é preciso construir soluções."*

Essa teoria surge a partir da preocupação com a “ideologia da educação” que instiga a aplicação de experiências em sala de aula sem fundamentação científica e, ao mesmo tempo, pensa na valorização do saber prático do professor, consciente de que teorias desenvolvidas fora da sala de aula são falhas para promover transformações significativas nas tradições de ensino, como afirma Carneiro:

> A origem desta teoria está na preocupação com uma certa “ideologia da inovação” presente no domínio educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, descolada de fundamentação científica. Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor, com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do sistema e para, de alguma forma, influir na transformação das tradições de ensino. Nesta perspectiva, a questão consiste em afirmar a possibilidade de agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos, destacando a importância da realização didática na sala de aula como prática de investigação. (CARNEIRO, 2005)

A engenharia didática se divide em quatro etapas: 1) análises prévias; 2) concepção e análise a priori de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática; 3) implementação da experiência; 4) análise a posteriori e validação da experiência. Tais etapas serão descritas, brevemente, a seguir mostrando como organizar um trabalho a partir desse método

2.1 ANÁLISES PRÉVIAS.

A análise prévia se baseia na reflexão sobre a organização atual de ensino. Nela, observa-se o assunto a ser ensinado e as condições de trabalho do docente. Dada tal reflexão, são pensadas propostas para reorganizar e aprimorar o trabalho realizado.

O capítulo 2 discorrerá acerca da visão da autora sobre a história da matemática, de maneira geral, e a construção do ensino de matemática nas escolas através dos tempos. Tais levantamentos são importantes para que possamos compreender o cotidiano escolar e a organização da sala de aula.

Minha atuação profissional se dá no contexto de uma escola privada, com alunos desde o 8º ano do ensino fundamental até o ensino pré vestibular. Os professores são constantemente cobrados pelo cumprimento de todos os assuntos propostos no material apostilado utilizado, bem como a feitura de todos os exercícios. O material, por sua vez, traz poucas discussões históricas acerca dos assuntos abordados, propondo uma grande quantidade de exercícios práticos.

Analisando as dificuldades de compreensão por parte dos alunos com relação não somente ao conceito de número irracional que se inicia ao longo do 8º e 9º anos e é trabalhado até o final do ensino médio, mas também nos anos seguintes, a respeito de assuntos relacionados à ideia de continuidade e às noções relativas ao infinito, como, por exemplo, as funções, soma dos infinitos termos de uma P.G., área do círculo, entre outros, pensou-se na sequência didática aqui apresentada como forma de construir uma aprendizagem significativa desses temas.

2.2 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DE EXPERIÊNCIAS DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS A SEREM DESENVOLVIDAS NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA.

Nesta fase, a partir das ideias concebidas ao longo das análises prévias, são construídas atividades para serem aplicadas em sala de aula. Tais atividades são elaboradas pelo professor, considerando sua experiência com o ensino, tentando prever possíveis dúvidas e efeitos gerados pela atividade.

Será descrito, ao logo do capítulo 5, toda a sequência de atividades pensada, a partir das análises prévias, para possibilitar melhor compreensão dos objetos estudados. A partir do que é proposto, espera-se que os alunos sejam capazes de relacionar a noção de número irracional a partir da concepção de número racional, já conhecida por eles, fazendo com que seja relevante a construção do conhecimento.

2.3 IMPLEMENTAÇÃO DA EXPERIÊNCIA.

Esta fase ocorre na sala de aula. É o momento onde coloca-se em prática tudo aquilo que foi planejado anteriormente, comparando o que foi planejado do ponto de vista teórico e o que de fato aconteceu ao longo da atividade. Podem surgir novas situações e dúvidas para as quais o professor deve buscar soluções no próprio momento.

Ao longo da seção 5.4 descreveremos como ocorreu a implementação da atividade referente ao Hotel de Hilbert, levantando pontos que podem ser melhorados e repensados, assim como aquilo que foi proveitoso e trouxe impactos relevantes para os alunos.

2.4 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA EXPERIÊNCIA.

Por fim, feita a aplicação das atividades, o professor compara as hipóteses assumidas inicialmente (recordando detalhadamente tudo o que foi planejado) com as situações ocorridas em sala de aula. Nesse processo podem surgir novas ideias e adaptações para o aprimoramento das atividades pensadas, atingindo a validação de toda a experiência.

As considerações finais trazem o paralelo entre o que foi pensado desde as análises prévias até a análise a posteriori da experiência, explicitando os motivos que levam a autora a crer na viabilidade da proposta aqui exposta e na importância de sua aplicação e utilização em sala de aula.

3 O CONHECIMENTO HISTÓRICO AJUDANDO NA COMPREENSÃO DA MATEMÁTICA QUE SE CONSTRÓI AO LONGO DO TEMPO.

3.1 O PERIGO DE UMA MATEMÁTICA ÚNICA

> A matemática é um saber operacional, de tipo algébrico, e tem como um de seus principais objetivos a aplicação de fórmulas prontas a problemas (muitas vezes enumerados como uma lista de problemas parecidos).
>
> A matemática é uma disciplina formal e abstrata, por natureza, que ajuda a desenvolver o raciocínio, mas é destinada a poucos gênios, a quem agradecemos por nos terem legado um saber unificado e rigoroso.
>
> Ainda que possua aplicações a problemas concretos, a matemática é um saber eminentemente teórico. Parte-se, algumas vezes, de dados da experiência, mas para elaborar enunciados que os purifiquem e traduzam sua essência. (ROQUE, 2012)

Comumente nos deparamos com essas percepções acerca da matemática. Adultos e crianças compreendem essa ciência como precisa, exata, abstrata, inatingível para alguns, baseada na aplicação de fórmulas para a resolução de problemas. Essa concepção não se dá por qualquer motivo. A matemática dos livros, das publicações e da escola é apresentada dessa forma.

Chimamanda Adichie, em seu livro O perigo de uma história única, fala sobre os perigos de se contar uma história, repetidamente, a partir de uma única perspectiva. Ela afirma que a forma como histórias são contadas, quem as conta, quando e o quanto são contadas determinam se essa história vai se tornar verdadeira ou não. *O poder é a habilidade não apenas de contar a história de outra pessoa, mas de fazer que ela seja sua história definitiva.* (ADICHIE, 2018)

A história da humanidade é contada, majoritariamente, a partir da perspectiva do eurocentrismo (ideia de que a Europa é o centro da cultura mundial). A partir da colonização, construção das Américas e o capitalismo moderno, os países da Europa impuseram ao mundo sua cultura, sua economia e seu poder militar.

> É assim que se cria uma história única: mostre um povo como uma coisa, uma coisa só, sem parar, e é isso que esse povo se torna. É impossível falar sobre a história única sem falar sobre poder. Existe uma palavra em igbo na qual sempre penso quando considero as estruturas de poder no mundo: nkali. É um substantivo que, em tradução livre, quer dizer "ser maior do que outro". Assim como o mundo econômico e político, as histórias também são definidas pelo princípio de nkali: como elas são contadas, quem as conta, quando são contadas e quantas são contadas depende muito de poder. (ADICHIE, 2018)

A visão eurocêntrica coloca a Europa como elemento fundamental na constituição da sociedade moderna, como protagonista da história da humanidade. Essa concepção foi muito disseminada principalmente a partir do século XVI. Com o "descobrimento" do continente americano, os europeus se depararam com diversas sociedades, seus costumes e cultura. Além disso, nesse período as manifestações culturais europeias apresentavam influências de todas as classes sociais, inclusive a popular. Ascendia a Reforma Protestante questionando as pompas da Igreja da época e o enriquecimento dos padres e da Igreja a partir da exploração de pobres. Assim desencadeava-se a necessidade de existir uma cultura com conhecimento superior para a dominação, controle e domesticação de povos e classes populares.

Iniciou-se, portanto, uma fase de repressão física e ideológica, com a perseguição aos ciganos e a evangelização jesuítica dos camponeses. Para separar as culturas "superior" e popular e seu modo de pensar, o artesanato passa a ser exercido apenas pela classe trabalhadora (sem autonomia cultural), enquanto parte da população ascende como alta burguesia.

Para consolidar a ideia de um pensamento transcendente, as narrativas tradicionais abordam a matemática europeia como sucessão da matemática grega, vista como superior e mais bem fundamentada, graças ao método axiomático de Euclides, enquanto as matemáticas árabe e egípcia, embora fossem consideradas para problemas relacionados a questões cotidianas, era colocada em segundo plano e vista como inferior. Assim desapropriava-se a relevância da matemática ligada a problemas práticos e a matemática estrangeira (vistas como ciências de menor importância).

A álgebra começa a ser escrita de forma axiomática e após Descartes, com a união da álgebra e da geometria, ocorre a consolidação da matemática europeia, que é adotada mundialmente e ensinada até hoje. Desse modo há uma separação entre os saberes populares e superiores e a matemática é tida como fator crucial de separação entre as classes dominante e trabalhadora, a matemática pura, com seu caráter teórico e axiomático, é exaltada e considerada acessível a poucos gênios.

> A imagem da matemática como um saber superior, acessível a poucos, ainda é usada para distinguir as classes dominantes das subalternas, o saber teórico do prático. Os europeus foram erigidos em herdeiros privilegiados dos milagres gregos e a ciência passou a ser vista como uma criação específica do mundo greco-ocidental. Essa reconstrução tem dois componentes: a exaltação do caráter teórico da matemática grega, cuja face perfeita é expressa pelo método axiomático empregado por Euclides; e a depreciação das matemáticas da Antiguidade tardia e da Idade Média, associadas a problemas menores, ligados a demandas da vida comum dos homens. (ROQUE, 2012)

Embora parte dessa visão venha sendo ressignificada, a construção da matemática como um saber elitizado e destinado a poucos se perpetuou até hoje. A separação entre o que é conhecimento da classe dominante e o que é conhecimento da massa serviu para restringir a matemática a uma pequena minoria. É papel da escola promover um ensino democrático e papel do professor apresentar a matemática de forma acessível, permitindo a identificação dos alunos com essa ciência. *A história única cria estereótipos, e o problema com os estereótipos não é que sejam mentira, mas que são incompletos. Eles fazem com que uma história se torne a única história.* (ADICHIE, 2018)

3.2 MARCAS HISTÓRICAS DA MATEMÁTICA DA ESCOLA

Escola é a instituição responsável pelo processo de ensino, com o objetivo de formar e desenvolver cada indivíduo em seus aspectos cultural, social e cognitivo, que tem como função básica garantir a aprendizagem de conhecimentos, habilidades e valores necessários a socialização do indivíduo.

Ao longo da história ela passou por diversas mudanças e reformulações a partir dos costumes e ideias das civilizações onde se encontrava. Ainda que não exista uma história única sobre a construção da instituição escolar, já que essa construção se dá de maneira diferente em cada civilização, existem características que impactam de maneira geral no desenvolvimento escolar no mundo e no Brasil.

Dentre os muitos fatores que influenciaram na construção da instituição escolar podemos citar a Primeira Revolução Industrial e o capitalismo industrial que surgiram na Inglaterra, no final do século XVIII, início do século XIX e foram marcados pela "vitória" do trabalho mecânico sobre o trabalho manual.

Com a Revolução Industrial surge a necessidade de mão de obra com instrução básica para operar máquinas. As relações entre burguesia e classe trabalhadora passam a ser estabelecidas entre donos do capital financeiro, mercantil e industrial e donos da força de trabalho, respectivamente.

Percebe-se nesse momento que a educação serviria como instrumento disciplinador para milhares de trabalhadores e a escola assume papel fundamental para impôr à grande massa a ideologia e os valores da classe.

> As escolas forneceram o que se supunha que deviam fornecer: a um nível mais profundo, pessoas socializadas a seguirem as instruções e a obedecerem às ordens dos superiores, pessoas familiarizadas com a pontualidade e com o trabalho sincronizado, e, a um nível explícito, pessoas que preenchiam os requisitos cognitivos mínimos exigidos pela participação na cadeia da produção industrial. (FINO, 2011)

A escola passa a aderir o “formato de fábrica”, com uma administração hierárquica, com normas rígidas, onde o professor exerce um papel autoritário, tendo como objetivo geral e educação massificada, sem individualização, com a disposição de alunos enfileirados e os mesmos doutrinados em um esquema de comando e controle. Um único professor ensina dezenas de alunos ao mesmo tempo e os alunos exercem atividades repetitivas e mecânicas.

> As escolas a que estamos acostumados foram desenhadas para satisfazerem necessidades da sociedade industrial. A antiga ordem industrial necessitava de uma “espécie” de homem, equipada com habilidades que nem a família nem a igreja eram capazes de proporcionar. A antiga ordem precisava de crianças familiarizadas com trabalho repetitivo, capazes de permanecerem entre paredes durante dias a fio, e habituadas a um mundo de fumo, ruído, maquinaria, disciplina colectiva e espaços superpovoados.

> Além disso, o homem “industrial” deveria sentir-se à vontade num universo controlado pelo relógio e pela sirene da fábrica, em vez de ser regulado pelos ciclos naturais dos dias e das estações (TOFFLER, 1970 apud FINO, 2011).

Outro fato que afeta diretamente a estrutura escolar é a Guerra Fria, que foi um conflito político e ideológico entre Estados Unidos e União Soviética (capitalismo $\times$ socialismo), entre 1947 e 1991, marcado por disputas nos campos científico, econômico, esportivo e bélico. A disputa no campo científico ocasionou o incentivo ao estudo de disciplinas das áreas de exatas, como matemática e física.

Além disso, a partir do final do século XIX ocorre na Europa o desenvolvimento da Matemática Moderna que tinha por objetivo dar à matemática um formalismo com relação às ideias desenvolvidas nos séculos anteriores. Nesse momento toda a matemática desenvolvida ganha uma abordagem formal e rigorosa, baseada em argumentos lógicos (lógica de silogismos) para a demonstração de resultados. Desse modo a matemática se distancia das noções intuitivas e próximas da realidade.

> Nas décadas de 1960 e 1970, um acontecimento que marcou a história da Educação Matemática e provocou mudanças significativas nas práticas escolares foi o Movimento da Matemática Moderna. Desencadeado em âmbito internacional, esse movimento atingiu não somente as finalidades do ensino, como também os conteúdos tradicionais da Matemática, atribuindo uma importância primordial à axiomatização, às estruturas algébricas, à lógica e aos conjuntos. Para Schoenfeld (1991), o culto à Matemática Moderna foi uma das respostas que os americanos deram aos russos, depois do lançamento do Sputnik pela União Soviética, em outubro de 1957. (PINTO, 2005)

Ao longo dos anos 60, com o Movimento da Matemática Moderna, passa a ser introduzido nas escolas esse formalismo atribuído a matemática enquanto ciência. Assim, os currículos escolares ganham essa abordagem rigorosa. As escolas passam a utilizar o ensino mecanicista, ou seja, baseiam seu ensino na aprendizagem de regras e reprodução de algorítimos em listas de exercícios. Os alunos são então avaliados e valorizados pela assimilação dessas regras, obtendo êxito escolar quando são capazes de aplicá-las com facilidade e rapidez, enquanto aqueles que apresentam dificuldade de aplicação e memorização são classificados como "sem aptidão para a matemática".

> Ainda um tanto nebulosa, no Brasil, a matemática moderna ancora primeiramente nos grandes centros do país e começa, nos anos 60, a ser lentamente difundida nas escolas mais longínquas, a maioria delas recebendo-a de sobressalto, via livro didático. Carregada de simbolismos e enfatizando a precisão de uma nova linguagem, professores e alunos passam a conviver com a teoria dos conjuntos, com as noções de estrutura e de grupo. Repleta de promessas de um ensino mais atraente e descomplicado em superação à rigorosa matemática tradicional, no entanto, a Matemática Moderna, chega ao Brasil carregada de formalismos como destaca Búrigo (1990, p. 263), ao referir-se ao viés formalista não reconhecido naquele período: “o caminho proposto para a compreensão era, basicamente, o da representação do pensamento, segundo as regras da formalização da matemática, como disciplina acadêmica”. A excessiva preocupação com a linguagem matemática e com a simbologia da teoria dos conjuntos

> deixou marcas profundas, ainda não desveladas, nas práticas pedagógicas daquele período. Ao tratar a matemática como algo neutro, destituída de história, desligada de seus processos de produção, sem nenhuma relação com o social e o político, o ensino de Matemática, nesse período, parece ter se descuidado da possibilidade crítica e criativa dos aprendizes. O moderno dessa matemática apresenta-se, para os alunos, mais como um conjunto de novos dispositivos e nomenclaturas descolados de sentidos e significados conceituais, uma disciplina abstrata e desligada da realidade. (PINTO, 2005)

O problema dessa abordagem está no fato de que memorizar regras, decorar algorítimos e aplicá-los não significa que o aluno saiba matemática e, na grande maioria dos casos, torna a matemática desinteressante, vazia, sem sentido e distante da realidade. A matemática ensinada dessa forma retira os aspectos conceituais e filosóficos por trás do desenvolvimento dos conceitos, não expõe os problemas que motivaram esse desenvolvimento, não aponta a finalidade em se estudar tais assuntos, nem traz significado ao que se estuda, reduzindo-a a métodos que devem ser aplicados corretamente em avaliações.

É fundamental repensar a estrutura das aulas de matemática e a forma como o conhecimento é compartilhado, tornando a sala de aula um ambiente favorável ao desenvolvimento do pensamento crítico, onde seja possibilitado aos alunos a reflexão sobre as informações apresentadas, o questionamento sobre as fórmulas e algoritmos, criando conexões com outras áreas do conhecimento, promovendo contextos de aprendizagem autênticos.

No contexto atual é essencial contar aos alunos as diferentes histórias da matemática, narradas do início ao fim, nos aprofundando em todo o processo de desenvolvimento, evidenciando o rascunho, a noção intuitiva, o processo de erros, aquilo que dá certo e também o que não dá, até que uma ideia se torne completa, com todo seu formalismo. É de extrema importância resgatar o lado humano da matemática na sala de aula, restaurando em cada aluno a alegria de descobrir e aprender.

4 O INFINITO E OS NÚMEROS IRRACIONAIS: BREVE NARRATIVA SOBRE O DESENVOLVIMENTO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS.

Os números irracionais são números reais que não podem ser escritos como uma fração entre dois números inteiros.

Atualmente a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) preveem que esse conteúdo seja ensinado ao longo dos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II, mas alguns materiais apostilados já abordam tais números desde o 7º ano, apresentando aos alunos o número π a partir da razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

De maneira geral é importante apresentar para os alunos a matemática como uma ciência humana e viva, construída a partir de necessidades sociais, em diferentes momentos históricos, que apresenta novas descobertas a todo momento.

Em particular é importante apresentar para os alunos o conceito de número irracional a partir da perspectiva histórica, mostrando seu descobrimento e entendimento ao longo dos séculos e mostrando para os estudantes como se deu seu desenvolvimento nas sociedades, para que tal conceito não seja visto apenas como mera negação do conceito de número racional, sem nenhum tipo de aprofundamento.

4.1 OS GREGOS E OS NÚMEROS IRRACIONAIS.

Em meados do século V e IV a. E. C., com o crescimento populacional e a dispersão dos gregos pela bacia do Mediterrâneo, foi criada a polis, a mais importante instituição desse povo, essencial para a organização política, administrativa, militar e religiosa dos gregos. A polis surge quando os cidadãos passam a ter direito de administrar sua cidade.

Nesse período a vida pública adquire grande importância, o que recaiu sobre o debate político, as trocas comerciais, na organização racional e geométrica do território, na laicização e na expansão das formas de religiosidade. Os filósofos da escola de Mileto, os pitagóricos e os sofistas formularam argumentos para explicar a formação do universo a partir de elementos racionais, como a água, o ar e o número.

As formas de discurso como instrumento de disputa política passam a ser valorizadas, a partir do aperfeiçoamento das técnicas de reflexão, argumentação e persuasão baseadas nas regras de demonstração e no apelo a uma lógica que busca o verdadeiro, de modo que, quem fosse capaz de persuadir poderia convencer os outros de que sua tese era verdadeira.

No final d século V a. E. C., Platão e Aristóteles propuseram maneiras de distinguir raciocínios falsos de verdadeiros, para discernir quem tinha razão.. Aristóteles desenvolve a chamada lógica dedutiva, ou lógica de silogismos (lógica aristotélica), onde a partir de proposições iniciais, pode-se chegar a uma conclusão, de modo que, se as premissas assumidas inicialmente forem verdadeiras, a conclusão também será.

De acordo com a narrativa tradicional o aparecimento dos números irracionais se deu por volta de 500 a. E. C, pelos Pitagóricos. Tal descoberta seria consequência da incomensurabilidade entre a medida do lado de um quadrado e a medida de sua diagonal.

Dados dois segmentos de reta com medidas a e b dizemos que a e b são comensuráveis quando a medida a está contida um quantidade inteira, r, de vezes na medida b, ou seja, $b = a \cdot r$. Ainda, caso isso não seja possível, podemos dividir o segmento a em p segmentos menores de medida $\frac{a}{p}$ de modo que $\frac{a}{p}$ esteja contido uma quantidade de vezes inteira, l, em b, de modo que $b = l \cdot \frac{a}{p}$. Todavia, caso não ocorram nenhuma das possibilidades citadas, dizemos que a e b são incomensuráveis.

Para entendermos melhor a relação entre o lado de um quadrado e sua diagonal, consideremos, inicialmente, um quadrado de lado 1 e diagonal d. Utilizando a notação atual, pelo Teorema de Pitágoras temos que

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \tag{4.1}$$

Embora não se saiba ao certo qual o procedimento adotado para mostrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ podemos supor algumas maneiras, dentre elas: Consideremos um quadrado de lado 1 e diagonal cuja medida seja dada sob a forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e primos entre si, ou seja, sem fatores comuns. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\frac{p^2}{q} = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \tag{4.2}$$

Logo p^2 é par, e então p é par (pois o quadrado de um inteiro ímpar é ímpar), ou seja, $p = 2k$, com k inteiro e positivo. Daí, segue que

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \tag{4.3}$$

e então q é par.

Portanto, p e q são pares, possuindo 2 como fator comum. O que é uma contradição, já que, por hipótese, p e q são primos entre si. Concluímos assim que a medida da diagonal não se dá como uma fração entre dois inteiros. Portanto o lado e a diagonal de um quadrado seriam incomensuráveis e, ainda, $\sqrt{2}$ não poderia ser um número racional.

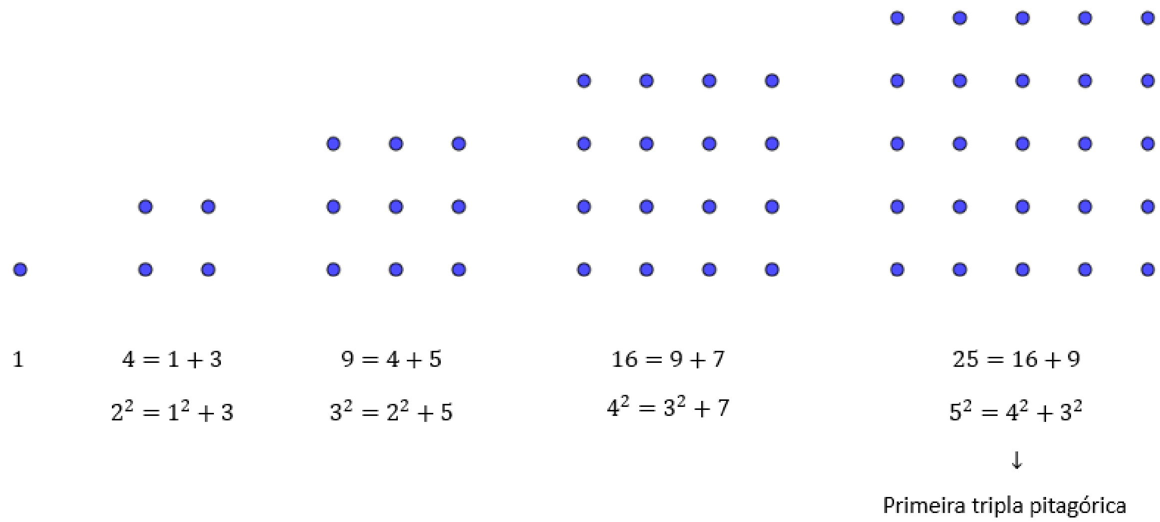
A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ teria provocado para os gregos uma crise nos fundamentos da matemática, a chamada crise dos incomensuráveis que duraria até o século XIX com a definição formal de número real elaborada por Cantor e Dedekind.

Pesquisas atuais questionam tal narrativa. O mito da descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo de catetos com medidas 1 pode ser refutado utilizando-se alguns argumentos.

O primeiro está relacionado à possibilidade de que a descoberta da incomensurabilidade não tenha sido realizada pela escola pitagórica. Existem diversos questionamentos com relação ao Teorema de Pitágoras, esse teorema assegura que para todo triângulo retângulo “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”. Atualmente é conhecido o fato de que essa relação já era conhecida por diversos povos anteriores aos pitagóricos. A demonstração desse teorema, contudo, só é encontrada nos Elementos de Euclides, utilizando-se de resultados que não eram conhecidos no período da escola pitagórica.

Acredita-se que ele não seja um resultado aplicado à geometria, mas sim a números figurados. Um costume muito presente na escola pitagórica era a de descobrir uma prática a partir de outras. Dentre elas, a propriedade de que um número quadrado poderia ser escrito como a soma do quadrado imediatamente anterior com um número ímpar. Observe:

Figura 4.1 – Números Figurados



Fonte: Elaborada pela autora[1].

Note que o quadrado de 5 é igual à soma dos quadrados de 3 e 4, esses números ficaram conhecidos como a primeira tripla pitagórica. O procedimento acima mencionado estaria relacionado diretamente ao contexto dos números figurados, o que é um resultado aritmético e não geométrico, não sendo suficiente para garantir a validade geométrica do procedimento.

> Burkert afirma que o teorema "de Pitágoras" era um resultado mais aritmético que geométrico. Quando falamos de aritmética nos referimos ao estudo de padrões numéricos que estavam no cerne da matemática pitagórica e que dizem respeito aos números figurados. Não deve ter havido um teorema geométrico sobre o triângulo retângulo demonstrado pelos pitagóricos, e sim um estudo das chamadas triplas pitagóricas. O problema das triplas pitagóricas é fornecer triplas constando de dois números quadrados e um terceiro número quadrado que seja a soma dos dois primeiros. Essas triplas são constituídas por números inteiros que podem ser associadas às medidas dos lados de um triângulo retângulo. (ROQUE, 2012)

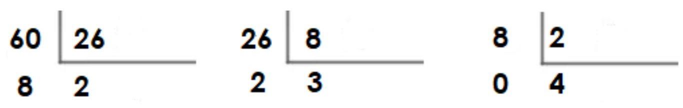
É importante compreender qual foi o contexto geométrico em que surgiu a necessidade de exprimir a medida da diagonal do quadrado como um número. Apesar de não ser conhecido o momento exato da descoberta da incomensurabilidade, conjectura-se que tenha se desenvolvido, aproximadamente, no século IV a. E. C e que os matemáticos da época tenham lidado com esse problema utilizando o método da antifairese (subtrações sucessivas), que já era conhecido para números e passou a ser utilizado para segmentos.

A antifairese eram um procedimento utilizado para comparar duas grandezas, dois números, aplicada pelos matemáticos dessa época como uma teoria de razões, desvinculada da teoria de proporções instaurada posteriormente por Euclides. Para compreendermos melhor, considere duas grandezas a e b, com $a > b$. Subtraímos b de a a maior quantidade inteira de vezes possível, k_1 e analisamos o resto, r_1. Em seguida, subtraímos r_1 de b a maior quantidade inteira de vezes possível, k_2 e olhamos para o novo resto, r_2. E assim sucessivamente, até encontrar um resto 0. Podemos concluir que a razão anifairética entre a e b seria dada por:

$$Ant(a, b) = [k_1, k_2, k_3, ...]$$

Para compreendermos melhor tal procedimento, vamos calcular a antifairese entre 26 e 60. Temos que:

Figura 4.2 – Antifairese 26 e 60



Fonte: Elaborada pela autora[2].

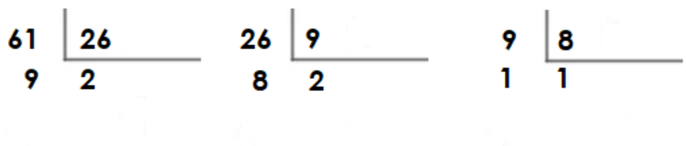
26 cabe 2 vezes em 60 e sobram 8 unidades; 8 cabe 3 vezes em 26 e sobram 2 unidades;

2 cabe 4 vezes em 8 e sobra 0. Logo,

$$Ant(26, 60) = [2, 3, 4]$$

Em casos onde, ao final do procedimento, o resto encontrado seja 1, conjectura-se que os números tomados inicialmente seriam considerados primos entre si. Vamos calcular a antifairese entre 26 e 61.

Figura 4.3 – Antifairese 26 e 61



Fonte: Elaborada pela autora[3].

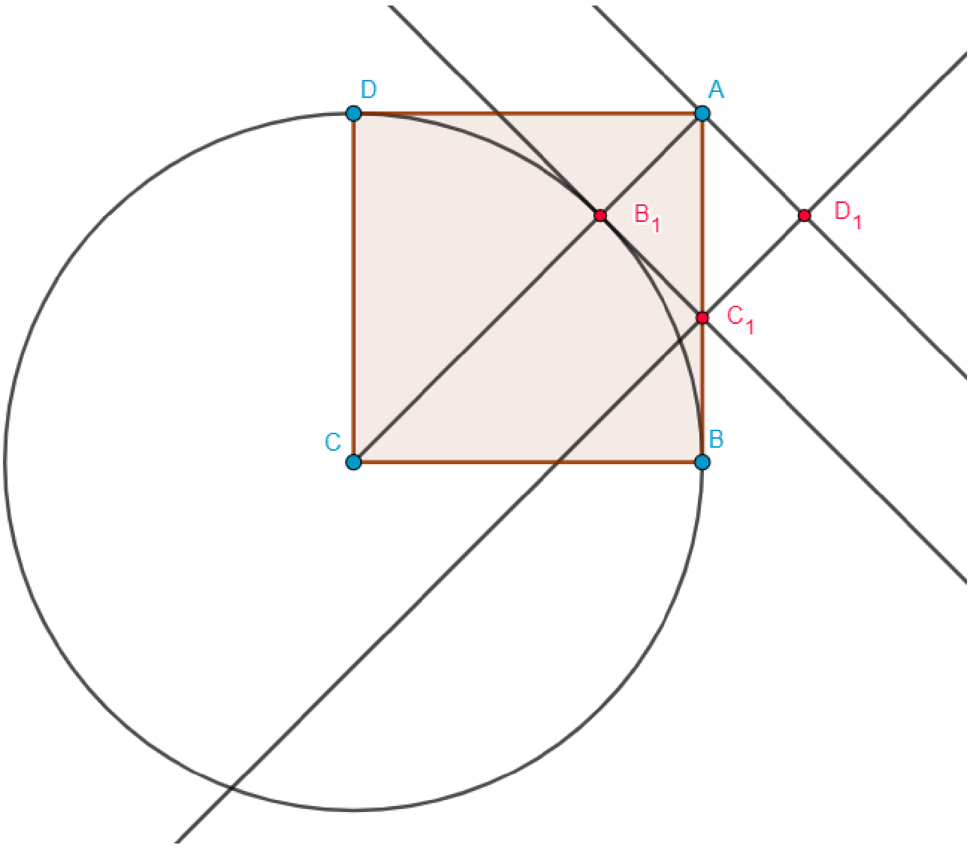
26 cabe 2 vezes em 61 e sobram 9 unidades; 9 cabe 2 vezes em 26 e sobram 8 unidades; 8 cabe 1 vez em 9 e sobra 1 unidade. Logo

$Ant(26, 61) = [2, 2, 1]$ e sobra 1.

Por volta do século IV a. E. C. a teoria dos incomensuráveis teria sido desenvolvida por matemáticos como Teeteto e o procedimento da antifairese passou a ser aplicado para grandezas. Um dos exemplos de tal aplicação era para a comparação entre o lado de um quadrado e sua diagonal.

Considere um quadrado $ABCD$ de lado com medida l e marcamos sobre a diagonal AC um ponto B_1, tal que $CB_1 = l$. Traçamos a perpendicular a AC passando por B_1 e marcamos sobre AB o ponto C_1. Ainda, traçamos as paralelas a AB_1 e B_1C_1, determinando o ponto D_1, de modo que $AB_1C_1D_1$ seja um quadrado, conforme a figura 4.4.

Figura 4.4 – Quadrado ABCD



Fonte: Elaborada pela autora[4].

Vamos mostrar que, de fato, $AB_1C_1D_1$ é um quadrado.

Por construção, o ângulo AB_1C_1 é reto e o ângulo B_1AC_1 é meio reto. Logo, o ângulo AC_1B_1 também é meio reto. Assim, o triângulo AB_1C_1 é isósceles e, portanto, $AB_1 = B_1C_1$. Como, por construção $AB_1 = C_1D_1$ e $B_1C_1 = AD_1$, então, $AB_1C_1D_1$ é um quadrado.

Suponha que AB e AC são comensuráveis, ou seja, que exista um segmento AP que possa medir AB e AC e, consequentemente, AB_1 e AC_1.

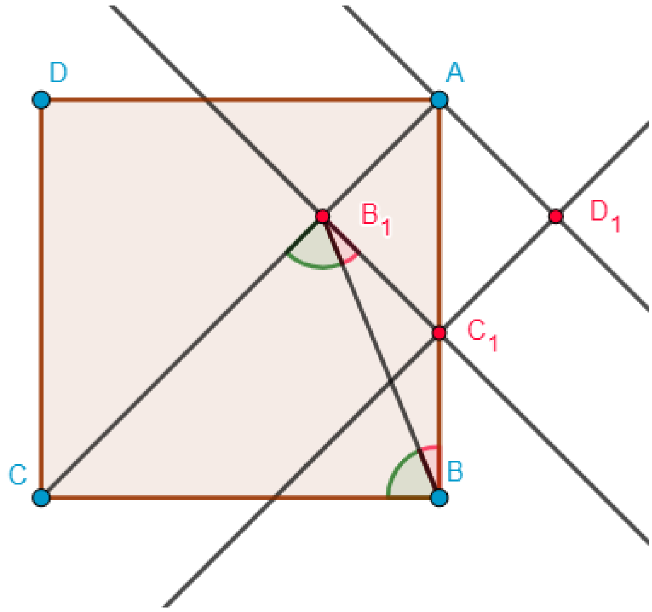
Começamos escrevendo os segmentos AB_1 e AC_1 em termos de AB e AC.

$$AB_1 = AC - B_1C = AC - AB \tag{4.4}$$

Traçamos o segmento B_1B, determinando o triângulo isósceles B_1CB, com $CB = CB_1$, conforme a figura 4.5. Logo, os ângulos $CB_1B = CBB_1$ e, consequentemente, os ângulos $B_1BC = BB_1C_1$, o que implica que o triângulo B_1C_1B é isósceles e portanto $BC_1 = B_1C_1$. Logo,

$$AC_1 = AB - BC_1 = AB - B_1C_1 = AB - AB_1 = AB - (AC - AB) = 2AB - AC \quad (4.5)$$

Figura 4.5 – Triângulo B_1CB



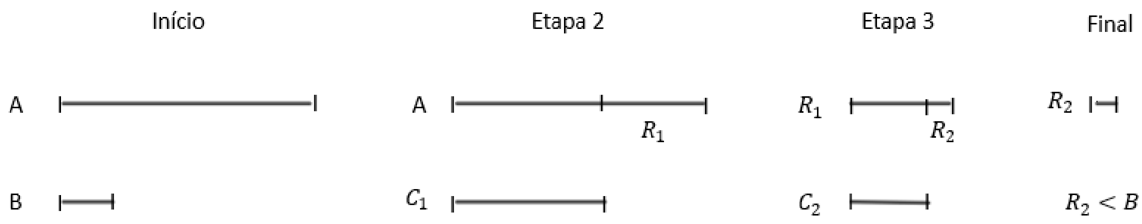
Fonte: Elaborada pela autora[5].

Utilizaremos agora o resultado conhecido como Lema de Euclides que, apesar de receber esse nome, há indícios de que seu resultado já fosse conhecido nesse período.

Lema 4.1. *(Lema de Euclides): Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta.*

Em outras palavras, dadas duas grandezas, representadas como segmentos de reta, A e B (vamos supor que $A > B$), se subtrairmos uma terceira grandezas C_1 de A, com $C_1 > \frac{A}{2}$, obteremos como resto R_1. Continuando o processo, se subtrairmos uma outra grandeza C_2 de R_1, com $C_2 > \frac{R_1}{2}$, obteremos como resto R_2. Desse modo, para k suficientemente grande, obteremos um resto R_k menor que a grandeza B dada inicialmente. A proposição garante, então, que podemos tornar a diferença R_k menor do que qualquer grandeza dada.

Figura 4.6 – Lema de Euclides



Fonte: Elaborada pela autora[6].

Utilizaremos o Lema de Euclides para mostrar que $AB_1 < \dfrac{AB}{2}$ e $AC_1 < \dfrac{AC}{2}$.

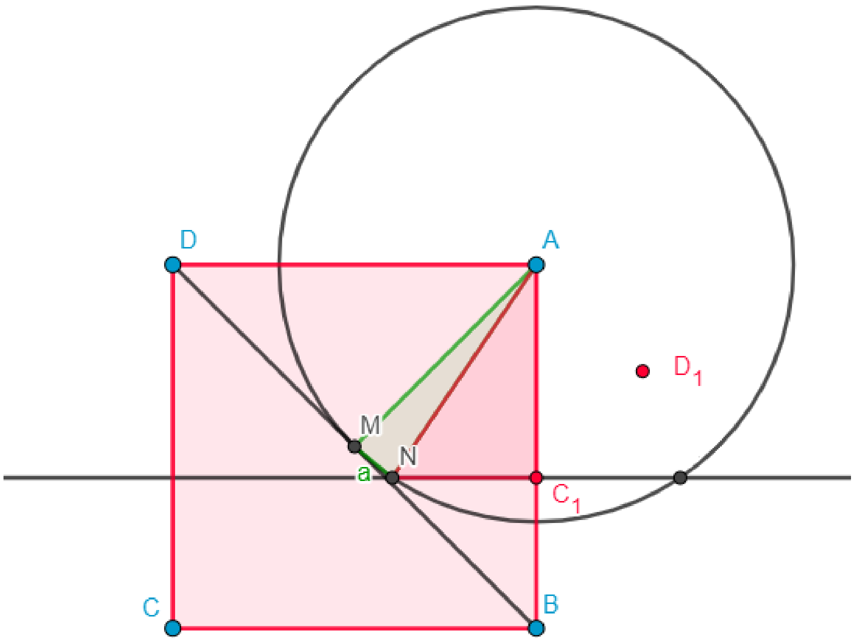
Sabemos que $AB_1 < AC_1$, pois AB_1 é o lado de um quadrado cuja diagonal é AC_1. Disso, segue que:

$$
\begin{aligned}
AB_1 + B_1C < AC_1 + BC_1 &\Rightarrow AB_1 + B_1C < AB \\
&\Rightarrow AB_1 + AB_1 < AB \Rightarrow 2AB_1 < AB \Rightarrow AB_1 < \frac{AB}{2}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Vamos traçar a reta r perpendicular a AB passando por C_1 e, em seguida, traçar a circunferência de centro em A e raio AM, tal que M é ponto médio de AC. Marcamos o ponto N na intersecção da circunferência com a reta r e construímos o triângulo isósceles AMN, com $AM = AN = \dfrac{AC}{2}$. No triângulo AC_1N de hipotenusa AN temos:

$$
AC_1 < AN = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC_1 < \frac{AC}{2} \tag{4.7}
$$

Figura 4.7 – Triângulos AMN e AC_1N



Fonte: Elaborada pela autora[7].

Repetindo o mesmo procedimento, podemos construir o quadrado de vértices $AB_2C_2D_2$, onde, pelos argumentos já utilizados, AB_2 e AC_2 são comensuráveis e podem ser medidos por AP.

Repetimos o procedimento indefinidamente até encontrarmos pontos AB_n e AC_n tomados menores que qualquer unidade dada.

Concluímos assim que, dado um quadrado, podemos construir um novo quadrado sobre o lado e a diagonal do quadrado inicial. Se o lado e a diagonal do quadrado inicial são comensuráveis, o lado e a diagonal do novo quadrado também são. Repetindo o procedimento indefinidamente, encontramos um quadrado cujo lado e a diagonal são menores que a unidade de medida suposta inicialmente. O que é uma contradição, porque não é possível medir um segmento com uma unidade de medida menor do que ele próprio. Logo, o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.

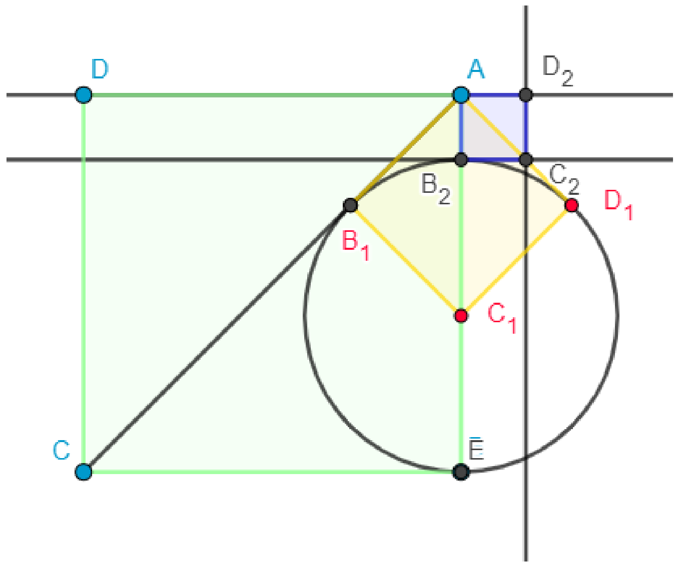
Podemos, ainda, interpretar a antifairese entre AB e AC do seguinte modo:

AB cabe 1 vez em AC e sobra AB_1;

AB_1 cabe 1 vez em AB e sobra AB_2;

AB_2 cabe 1 vez em AB_1 e sobra AB_3;

Figura 4.8 – Quadrado $AB_2C_2D_2$



Fonte: Elaborada pela autora[8].

e assim sucessivamente, de modo que o processo nunca termina. Logo

$$Ant(AB, AC) = [1, 2, 2, 2, ...]$$

o que é considerada uma má antifairese, e permitia a conclusão de que o lado e a diagonal do quadrado não são comensuráveis.

De fato, a descoberta da incomensurabilidade entre o lado de um quadrado e sua diagonal representou para a matemática grega um problema, mas a matemática, desde seu início e até a atualidade, avança por meio de problemas. Esse problema influencia no desenvolvimento de novas ferramentas, que serão profundamente exploradas no século XIX, como veremos a seguir, mas não instaura uma crise, um escândalo no contexto da matemática grega.

4.2 DOS GREGOS A DEDEKIND: A DEFINIÇÃO ATUAL DE NÚMERO REAL

Após a descoberta da incomensurabilidade de $\sqrt{2}$ os gregos continuaram com suas descobertas e tiveram contribuições importantes para matemática. Dentre tais contribuições é essencial destacar os trabalhos de Euclides, Arquimedes e Apolônio. Os Elementos de Euclides, são uma obra extremamente influente para a matemática que, de certo modo, definiram o que é e como se faz matemática. Os Elementos se utilizam do método lógico dedutivo (que é o método da argumentação matemática) a partir do qual, partindo de definições e axiomas, utilizando a lógica de silogismos, são deduzidos todos os outros resultados.

Os Elementos são divididos em 13 volumes (livros) que tratam da demonstração de teoremas e problemas envolvendo construções com régua não graduada e compasso. Dos 13 livros, os seis primeiros lidam com toda a Geometria Plana, sendo que o livro V trata sobre a teoria de grandezas, enquanto os livros de VII a X lidam com números, sendo que no livro X é tratado sobre segmentos incomensuráveis, e os livros de XI a XIII lidam com Geometria Espacial.

Apesar de existirem registros da utilização do resultado referente ao Teorema de Pitágoras desde os indianos e babilônicos (de 2000 a 1800 anos a.E.C) a primeira demonstração desse resultado só é registrada na Proposição 47 do livro I e é feita a partir de equivalência de áreas e, como dito anteriormente, tal demonstração desmente o mito da descoberta da incomensurabilidade a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo de catetos com medida 1.

Arquimedes resolvia problemas utilizando métodos com uma natureza um pouco diferente dos métodos utilizados por Euclides, como, por exemplo o método da exaustão ou princípio de Eudoxo (método utilizado para encontrar a área de uma figura através da inscrição em polígonos cujas somas das áreas convergiam para a área da figura onde estavam inscritos. Quanto maiores fossem as áreas dos polígonos inscritos, maior precisão teria a área da figura,) e a espiral de Arquimedes (se uma linha reta traçada em um plano se move uniformemente em torno de um extremidade fixa e retorna à sua posição de partida, e se ao mesmo tempo em que a reta se move (uniformemente), um ponto que parte da origem se move (uniformemente) sobre a reta, esse ponto descreverá uma espiral no plano).

Dentre suas contribuições se destaca a descoberta do número π, a formulação do princípio de Arquimedes, que afirma "*todo corpo totalmente imerso ou parcialmente imerso em um líquido qualquer fica sujeito a uma força vertical de baixo para cima, igual ao peso da porção de líquido deslocado pelo corpo.*", a demonstração da trissecção do ângulo a partir da espiral de Arquimedes e a demonstração da quadratura da parábola a partir do método da exaustão.

Por fim, Apolônio foi o responsável por unificar o estudo das secções cônicas (elipse, hipérbole e parábola), obtendo-as pela intersecção de uma superfície cônica circular, não necessariamente reta, com um plano, não necessariamente perpendicular à geratriz do cone. Esse estudo surgiu a partir do problema da duplicação do cubo (generalização do problema da duplicação do quadrado), inicialmente estudado por Hipócrates de Quios, Arquitas e Menecmo.

Ele publicou oito livros, dos quais o livro I se refere às relações entre o diâmetro e a tangente. O livro II, às relações entre as hipérboles e suas assíntotas e expõe um método para desenhar tangentes. O livro III propõe importantes teoremas que, segundo ele, completariam os Elementos de Euclides, no que diz respeito ao estudo de lugares geométricos com três ou quatro retas. Os livros V, VI e VII discutem as normais às cônicas e mostra como desenhá-las a partir de um ponto dado.

A resolução de equações como conhecemos hoje, a partir de fórmulas, com generalizações e utilização de letras para representar variáveis e incógnitas só começou a ser estabelecida a partir do século XVI. Desde aproximadamente 1650 a.E.C já é possível encontrar indícios do uso de equações no documento denominado Papiro de Rhind, porém, até o século XVI a resolução de equações era feita de maneira retórica (a matemática não se separava da gramática).

A álgebra tem seu início no estudo sistemático de equações e foi fortemente influenciada pelos árabes, com nomes como Al-Khwarizmi. A matemática árabe lidava com problemas cotidianos, fator que impulsionava seu desenvolvimento. Havia a preocupação de desenvolver um cálculo que pudesse ser a plicado a números e a grandezas geométricas. De acordo com (ROQUE, 2012) *"Esse relaxamento da distância entre grandeza e número foi fundamental para a criação de um novo domínio (a álgebra), que não estava contido nem na geometria nem na aritmética. Justamente por isso podemos dizer que, em certo sentido, a álgebra é uma invenção árabe."*

Bháskara, matemático indiano, assim como Al-Khwarizmi, também descrevia a resolução de equações de maneira retórica. De maneira geral, sua resolução propunha um método para a eliminação do termo médio da equação. Seu processo poderia ser traduzido para uma fórmula, utilizando nossa notação atual, mas, diferentemente do que os livros didáticos afirmam hoje, não é possível afirmar que Bháskara tenha desenvolvido a fórmula que carrega seu nome até os dias de hoje.

Ao longo dos séculos XV e XVI, a álgebra utilizada era essencialmente a álgebra árabe, inclusive na Europa, com a diferença de que já existia a utilização de certo simbolismo, ainda que os símbolos não fossem unificados, por exemplo, a quantidade desconhecida era representada por uma letra, o quadrado dessa quantidade por outra, o cubo desse valor por uma terceira letra, e assim sucessivamente. Se fossem reunidos todos os simbolismos utilizados na época seria possível enunciar um método bastante geral (procedimento padrão) para resolução de equações do segundo grau específicas.

> Para resumir, Diofanto já empregava técnicas de manipulação de igualdades e abreviações. As matemáticas indiana e árabe possuíam em comum o fato de enunciarem métodos de resolução que, traduzidos simbolicamente, equivalem à nossa fórmula para resolução de equações do segundo grau. Os indianos também usavam abreviações e símbolos para as operações. Al-Khwarizmi forneceu algoritmos de resolução justificados por procedimentos geométricos semelhantes aos babilônicos. Quando traduzidas em notação simbólica atual, essas técnicas são equivalentes à fórmula para resolução de equações do segundo grau. Todavia, só podemos dizer que existe realmente uma "fórmula" quando:
>
> 1. representarmos simbolicamente as incógnitas e as operações contidas em uma equação; e
>
> 2. a equação do segundo grau passar a ser considerada de modo genérico, ou seja, com todas as parcelas possíveis e com os coeficientes indeterminados. (ROQUE, 2012)

A partir do final do século XVI, com os trabalhos de Viéte, propõe-se a simbolização dos coeficientes, simplificando os procedimentos que eram enunciados de maneira retórica. Ele introduz a utilização de uma mesma letra para falar de uma incógnita, seu quadrado e o produto da incógnita por um número, tornando possível a generalização de equações. Ainda assim, não é possível dizer que existia uma fórmula para resolução de equações do segundo grau, pois as equações particulares não eram vistas como casos de uma equação geral, como se faz hoje em dia.

Com a utilização do simbolismo para coeficientes e incógnitas faz-se necessário entender as diferenças epistemológicas entre esses dois elementos, principalmente no contexto educacional, onde os alunos, comumente, confundem tais significados, esclarecendo e enfatizando a noção de incógnita como um valor desconhecido e não arbitrário enquanto os coeficientes são valores conhecidos e arbitrários, ou seja, ao escrever a expressão $ax^2 + bx + c = 0$ estamos nos referindo a uma infinidade de equações.

O século XVII foi marcado pela saída da matemática grega clássica (modelo euclidiano sintético geométrico) para os métodos analíticos (modelo algébrico analítico), que resultou no final do século XIX, início do século XX, na “aritmetização” da análise (redução da análise à aritmética descartando a intuição geométrica), mudando a prática matemática, ou seja, a maneira de pensar e fazer matemática.

O método analítico ganha grande repercussão por possibilitar a substituição do método sintético, utilizado pelos gregos, onde evidenciava-se a justificação, por um método onde é exposto o caminho da descoberta. Descartes propõe uma sistematização nova de diversos métodos a partir da via analítica.

A importância de tal processo não é observada somente para a matemática, mas reconhecida em diversas áreas do conhecimento. Nessa época havia uma procura generalizada por uma linguagem simbólica universal que permitisse resolver problemas. John Locke que estudava desde química até meteorologia e teologia, por exemplo, em seu “Ensaio acerca do entendimento humano” reconhece a importância da álgebra para diversas áreas do conhecimento que não sejam a matemática, enfatizando que a mente humana deve aproveitar os ganhos que a álgebra possibilita.

> Os que ignoram álgebra não podem imaginar as maravilhas que podem ser feitas neste tipo. Não é fácil determinar que outros aperfeiçoamentos e vantajosos auxílios para as outras partes do conhecimento a mente sagaz do homem pode ainda descobrir.
>
> E que métodos a álgebra, ou algo deste tipo, pode sugerir mais tarde, para remover as outras dificuldades, não é fácil predizer. Estou confiante que, se os homens com o mesmo método, e com a mesma indiferença, investigassem a verdade moral como o fazem com a da matemática, descobririam que eles têm entre si uma conexão mais forte, e uma consequência mais necessária de nossas ideias claras e distintas, e que se aproximam bastante da demonstração perfeita do que habitualmente se tem imaginado.
>
> Os homens, suficientemente familiarizados com estes axiomas recebidos, mas ignorantes de seu método, que inicialmente fizeram estas demonstrações, jamais poderão ser suficientemente admirados. E quem conhece que métodos para ampliar nosso

> conhecimento em outras partes da ciência podem posteriormente ser inventados, respondendo ao da álgebra em matemáticas, que tão rapidamente descobre ideias de quantidades para medir outras cuja igualdade ou proporção poderíamos de outro modo muito dificilmente, ou talvez jamais chegar a conhecer? (LOCKE, 1999)

Um dos nomes importantes para esse método é René Descartes que propõe uma nova geometria que estuda figuras a partir de proporções, logo no início de seu livro *La Géométrie* ele estimula o uso do método analítico, onde considera-se como conhecida uma quantidade desconhecida e operamos com essa quantidade do mesmo modo como operamos com uma quantidade conhecida.

> Se queremos resolver qualquer problema, primeiramente supomos que a solução já está efetuada e damos nomes a todas as linhas que parecem necessárias para construí-la. Tanto para as que são desconhecidas como para as que são conhecidas. Em seguida, sem fazer distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, devemos percorrer a dificuldade da maneira mais natural possível, mostrando as relações entre essas linhas, até que seja possível expressar uma única quantidade de dois modos. A isto chamamos uma Equação, uma vez que os termos de uma dessas duas expressões são iguais aos termos da outra. (ROQUE, 2012)

Outro nome importante para o desenvolvimento analítico é Pierre de Fermat, um dos pioneiros na construção da Teoria dos Números como se conhece hoje em dia, resolvendo e propondo muitos problemas. Segundo (ROQUE, 2012) Fermat aplicava técnicas algébricas desenvolvidas por ele para definir cônicas e estudar suas intersecções aplicando-as à resolução de problemas sólidos.

Dentre os trabalhos desenvolvidos por Fermat, destaca-se a quadratura das secções cônicas, ou seja, o problema de encontrar a área das secções cônicas. Ele “atacava” esses problemas a partir da ideia de dividir a área das secções cônicas em retângulos, de modo que, à medida em que era diminuída a medida da base do retângulo, aumentava o número de retângulos, se adequando cada vez mais à área desejada. Essa noção corresponde a ideia de integral que se tem atualmente. Os problemas de quadratura foram fortemente estudados pelos gregos, como Euclides e Apolônio e que ao longo do século XVII foram estudados por Fermat, Cavalieri e Torricelli.

Os métodos geométricos admitidos como válidos precisam ultrapassar os limites euclidianos e abranger todos os métodos que podem ser reduzidos a soluções de equações. A geometria ganha um novo sentido, ainda associado à ideia de que um problema pode ser construído, mas o tipo de solução proposta ultrapasse os instrumentos euclidianos, incluindo outras curvas (como as estudadas por Apolônio). Para cada problema era construído um sistema de coordenadas específico (não necessariamente ortogonal).

Fermat e Descartes desenvolveram trabalhos semelhantes a partir do paralelismo entre dados algébricos e construções geométricas, atacando os problemas de maneira um pouco diferente. Descartes buscava encontrar a equação correspondente a um lugar geométrico dado, enquanto Fermat procurava determinar o lugar geométrico dos pontos referentes a uma equação específica. Ambos os métodos, futuramente, caracterizarão o que conhecemos hoje como geometria analítica.

A partir da segunda metade do século XVII ocorre o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz, a partir dos trabalhos com curvas (processo de encontrar tangentes e calcular áreas). Um trabalho que revolucionou a matemática naquele século. Os resultados por eles encontrados iam muito além de todos os encontrados até o final do século XVI. Eles foram responsáveis por encontrar um método sistemático para achar tangentes, efetuar quadraturas (calcular áreas) e estabelecer um relação profunda entre o método das tangentes e o cálculo de áreas (modernamente conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo). Devido a seus trabalhos, o cálculo infinitesimal passou a usar sistematicamente as séries infinitas e a noção de que a um ponto qualquer da reta está associado um número ficava implícita.

> A maior novidade introduzida na matemática por Newton e Leibniz reside no grau de generalidade e unidade que os métodos infinitesimais adquiriram com seus trabalhos. Os matemáticos já tinham um enorme conhecimento sobre como resolver problemas específicos do cálculo infinitesimal, mas não se dedicaram a mostrar a generalidade e a potencialidade das técnicas empregadas. Além disso, esses problemas eram tratados de forma independente e as semelhanças entre os métodos não eram ressaltadas. (ROQUE, 2012)

Com intuito de legitimar os procedimentos utilizados no cálculo infinitesimal, surge a discussão sobre a noção de função. Diferentemente de como é apresentado no contexto escolar, a noção de função é posterior à noção de derivada. Para se fazer uma introdução à análise infinitesimal é necessário começar pela definição de função e nessa definição a função é identificada como uma função analítica, como definem Bernoulli e Euler.

Johann Bernoulli, em 1768, apresentou sua definição de função apresentando-a como uma quantidade composta de uma grandeza variável e de constantes, tentando escrever sua definição de maneira bastante geral, incluindo a representação em séries, funções trigonométricas e todas as funções básicas.

Definição 4.1. Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes.

Leonard Euler, apresenta a definição de variável como uma quantidade que abrange todos os valores nela mesma, incluindo todos os tipos de números, inclusive aqueles pouco aceitos como os negativos e os irracionais.

Definição 4.2. Uma quantidade variável compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentes e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários

A partir de sua definição de variável, Euler define função como uma expressão analítica composta de uma quantidade variável e constantes.

Definição 4.3. Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes.

A busca pela compreensão de fenômenos e problemas físicos culminou na ampliação da compreensão de elementos matemáticos. O "problema das cordas vibrantes", que estuda as vibrações infinitamente pequenas de uma corda presa por suas extremidades é um exemplo de situação que levou os matemáticos a ampliarem suas concepções acerca do conceito de função.

Joseph Fourier, ainda no início do século XIX, desenvolveu um trabalho acerca da teoria da propagação do calor. Seus estudos se baseavam no problema de saber como o calor se propaga em uma massa sólida, a partir de condições iniciais específicas. Sua crença estava diretamente relacionada à redefinição do conceito de função. Ele acreditava que qualquer função poderia ser escrita como uma soma de senos e cossenos (chamada série de Fourier), ou seja, existia um objeto denominado função que poderia ser representado por uma série. Nesse caso a função não seria sua expressão analítica, como se acreditava até então. Fourier definia função do seguinte modo:

Definição 4.4. Em geral, a função fx representa uma sucessão de valores, ou ordenadas, os quais cada um é arbitrário. Uma infinidade de valores sendo atribuídos à abscissa x, existe um número igual de ordenadas fx. Todas têm valores numéricos atuais, ou positivos, ou negativos, ou nulos. Não se supõe que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem uma à outra de um modo qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade

Como dito na seção anterior, o problema imposto pela descoberta dos incomensuráveis só ganha uma "solução" da forma como conhecemos hoje no século XIX. É ao longo do final do século XVIII e todo o século XIX que a noção de número deixa de ser associada à ideia de quantidade e passa a ser considerada puramente como um objeto. Há ainda, por parte dos matemáticos, um grande esforço para que ocorra a fundamentação da análise matemática até que ela se torne uma disciplina como conhecemos atualmente.

Inicialmente, o desenvolvimento da análise se dá, principalmente, na França e está intimamente ligado aos trabalhos desenvolvidos na École Polytechnique, uma instituição para a formação de engenheiros que se desenvolveu depois da Revolução Francesa, que tinha em seu corpo docente nomes como Cauchy, Laplace e Lagrange. Nesse momento já existiam os trabalhos de Newton e Leibniz com o cálculo diferencial e integral e a organização, o estabelecimento dos fundamentos da análise. O modo como as propriedades eram definidas e demonstradas foi motivado por esse contexto, por necessidades de ensino, ou seja, a organização da matemática se dá por necessidades pedagógicas, pensando em tornar o ensino de análise mais claro para os alunos. Durante a primeira década do século XIX a École Polytechnique, através do incentivo de Laplace, ministro de Napoleão, passou a basear seu ensino na mecânica e na análise que, por sua vez, seria dividida em três partes: a análise pura, o cálculo diferencial e o cálculo integral.

Em 1816 Cauchy passou a lecionar na École. Lagrange e Cauchy precisavam encontrar maneiras de ensinar o conteúdo de análise para seus estudantes (que em sua maioria eram engenheiros) e por isso a organização e os fundamentos da análise, o modo como se definiam e demonstravam propriedades foram motivadas por necessidades de ensino. Pensando nisso, Cauchy proprôs reformar drasticamente o curso de análise, exigindo que qualquer propriedade utilizada fosse definida explicitamente eliminando qualquer incerteza ligada a essas noções. A exigência de Cauchy amplifica a noção de rigor utilizada durante o século XVIII e prevê que o rigor em análise no século XIX atenda a três critérios, que segundo (ROQUE, 2012) são:

> a) todo conceito teria de ser definido explicitamente em termos de outros conceitos cujas naturezas fossem firmemente conhecidas;
>
> b) os teoremas teriam de ser provados e cada passo deveria ser justificado por outro resultado admitido como válido;
>
> c) as definições escolhidas e os teoremas provados teriam de ser suficientemente amplos para servir de base à estrutura de resultados válidos pertencentes à teoria. (ROQUE, 2012)

Baseando-se nesses aspectos e pensando nos cursos que ministrava na École, Cauchy escreveu seu livro *Cours d'analyse* (Curso de análise), onde ele estabelece um padrão, ema estrutura específica para a demonstração e validação de resultados, baseado no rigor geométrico, ou seja, no mesmo modo como a Geometria Euclidiana se baseava, no modo dedutivo axiomático. Em seu livro, inicialmente, são fornecidas definições as quais vamos precisar para demonstrar os teoremas, depois encontramos alguns lemas (que são enunciados utilizados na demonstração dos teoremas), em seguida os enunciados e demonstração dos teoremas em si e por fim alguns corolários. Essa estrutura serviu como base não só para fundamentação da análise na época, mas também para a organização dos livros de matemática que utilizamos até a atualidade.

Todo seu livro se baseava em uma noção inicial, que era a concepção de continuidade que Cauchy apresentava, segundo ele: Seja $f(x)$ uma função da variável x e suponhamos que para cada valor x entre dois limites dados, esta função admite um valor finito bem determinado. Seja um valor de x situado entre esses limites, dando à variável x um acréscimo infinitamente pequeno, a função sofrerá também um acréscimo infinitamente pequeno, ou seja, um acréscimo dado pela diferença $f(x+\alpha) - f(x)$ dependente de x e de α. A função é contínua se para um acréscimo α muito pequeno no intervalo a diferença acima se torna muito pequena, isto é, diminui indefinidamente com α.

Cauchy apresentou sua definição de função a partir da distinção entre variáveis dependentes e independentes.

Definição 4.5. Quando quantidades variáveis são ligadas de modo que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras, concebemos ordinariamente essas várias quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de "variável independente"; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que chamamos funções desta variável. (ROQUE, 2012)

Apesar de ter sido considerado como fundador do movimento do rigor da análise por muito tempo, essa definição não é a utilizada atualmente, que foi desenvolvida um pouco mais tarde por Weierstrass, mas é importante entender que essa definição foi feita a partir do que Cauchy entendia por rigor, e utilizada como base para todas os outros resultados do *Cours d'analyse* mostrando toda a construção dessa nova estrutura proposta para a análise. Isso mostra que a própria noção de rigor tem uma história e que a matemática nem sempre foi organizada da maneira rigorosa como conhecemos hoje.

> Durante muito tempo a historiografia da matemática enxergou Cauchy como o pai fundador do movimento de rigor na análise, até que começaram a ser identificados alguns erros em sua concepção de continuidade. As duas imagens são as duas faces da mesma moeda. Ao procurar na obra desse matemático francês antecedentes das noções modernas em análise, podemos nos deparar com erros que frustrarão nossas expectativas. Pensamos ser mais proveitoso ver Cauchy como um homem de seu tempo, que buscava um tipo de rigor que já não era o do século XVIII, fundado na algebrização, mas que também não era o rigor típico do século XIX. (ROQUE, 2012)

A dificuldade referente ao conceito de função apresentado por Cauchy está relacionada ao fato de que ele ainda associa esse conceito à ideia de quantidade, ou seja, os números eram considerados apenas por sua magnitude. Apesar do grande avanço na resolução de equações com as fórmulas de Tartaglia e Cardano para resolução de equações cúbicas da forma $x^3 + mx = n$ as soluções que não correspondiam a números racionais positivos (soluções negativas ou irracionais) eram desconsideradas.

De acordo com Cardano, para toda equação da forma $x^3 + mx = n$, procurando uma solução da forma $x = a - b$, teríamos

$$m = 3ab \tag{4.8}$$

$$n = a^3 - b^3 \tag{4.9}$$

com, a e b dados por:

$$a^3 = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{2} + \frac{m^3}{3}} \tag{4.10}$$

$$b^3 = \frac{-n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{2} + \frac{m^3}{3}} \tag{4.11}$$

Por fim a solução x seria

$$x = a - b \tag{4.12}$$

Apesar de eficaz, tal método permitia encontrar raízes que correspondiam a números negativos ou raízes quadradas de números negativos. Bombelli propõe uma maneira de operar (regras operacionais) com essas quantidades, sem considerá-las como números. Isso impacta, inclusive, na nomenclatura que essas quantidades recebiam. Girard já tinha proposto o Teorema Fundamental da Álgebra que garantia que toda equação teria exatamente a mesma quantidade de raízes que o termo de maior grau dessa equação, mas, para isso, era necessário considerar as quantidades negativas, ou as raízes dessas quantidades. Descartes separava essas raízes entre verdadeiras e imaginárias.

> Ainda que, desde o século XVII, as entidades algébricas tenham adquirido um lugar de destaque na matemática, até o final do século XVIII as raízes negativas e imaginárias de equações eram consideradas quantidades irreais. Os números que hoje chamamos de "irracionais" apareciam na resolução de problemas, mas também não tinham um estatuto definido. Todos os nomes utilizados para designar esses números exprimem a dificuldade de admitir sua existência ou, melhor dizendo, sua cidadania matemática: números "surdos" ou "inexprimíveis", para os irracionais; quantidades "falsas", "fictícias", "impossíveis"ou "imaginárias", para os números negativos e complexos. Isso mostra que eles, além de não possuírem uma cidadania, não eram, em última instância, sequer admitidos como números. (ROQUE, 2012)

Uma equação muito importante nesse período foi a equação $x^3 = 15x + 4$. Aplicando a fórmula de Cardano obtemos a seguinte solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \tag{4.13}$$

Mas, por substituição, é fácil verificar que $x = 4$ é solução da equação. Logo, chegamos a conclusão de que 4 é uma solução ao mesmo tempo em que o método de Cardano é válido, portanto é necessário que o método permita encontrar a solução 4.

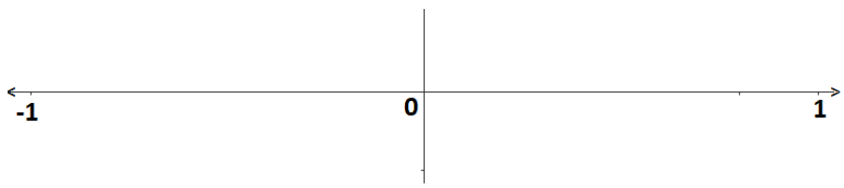
Essas quantidades (números negativos e suas raízes) ganham uma "cidadania" matemática, um estatuto, com representação no início do século XIX com os trabalhos de Argand e Gauss.

> Normalmente, a história desses números é desconectada das questões internas que apareceram em outros problemas da matemática. Mas a percepção da necessidade

> de incorporá-los envolveu etapas essenciais do processo de generalização, incluindo uma compreensão abstrata dos números e das operações. A transição do conceito de quantidade para o de número foi marcante para a noção de rigor que se constituiu a partir do século XIX. Enquanto os números eram associados a quantidades geométricas, não se concebiam operações abstratas e arbitrárias sobre eles. Os matemáticos que se deparavam com problemas relativos à fundamentação da análise estavam cientes de que seu progresso dependia de uma extensão do conceito de número. Não à toa uma parte importante desse movimento ficou conhecida como "aritmetização da análise". (ROQUE, 2012)

Argand propõe a representação geométrica dos números negativos e imaginários. Os valores $(+1)$ e (-1) passam a ser interpretados como quantidades orientadas, relativas a alguma coisa. O zero (que era utilizado para representar a ausência de quantidade) se torna um ponto de referência para uma inversão de sentido, permitindo a criação de duas orientações opostas, dois sentidos.

Figura 4.9 – Eixo orientado proposto por Argand



Fonte: Elaborada pela autora[9].

Tal representação permite dar sentido ao produto de dois números negativos. Multiplicar por $(+1)$ pode ser visto como manter o sentido enquanto a multiplicação por (-1) pode ser interpretada como uma inversão de sentido. O objeto dos números não é mais composto apenas por sua magnitude, mas também por um sentido. Passa a ser admitida a existência de números com a mesma magnitude, com sentidos diferentes, caraterizando-os como objetos diferentes.

De maneira semelhante, Argand apresenta um raciocínio semelhante para a interpretação de números complexos. Nesse período já eram conhecidas as meias proporcionais e, em nossa notação, podemos interpretar do seguinte modo

$$\frac{+1}{+1} = \frac{-1}{-1}$$

E também

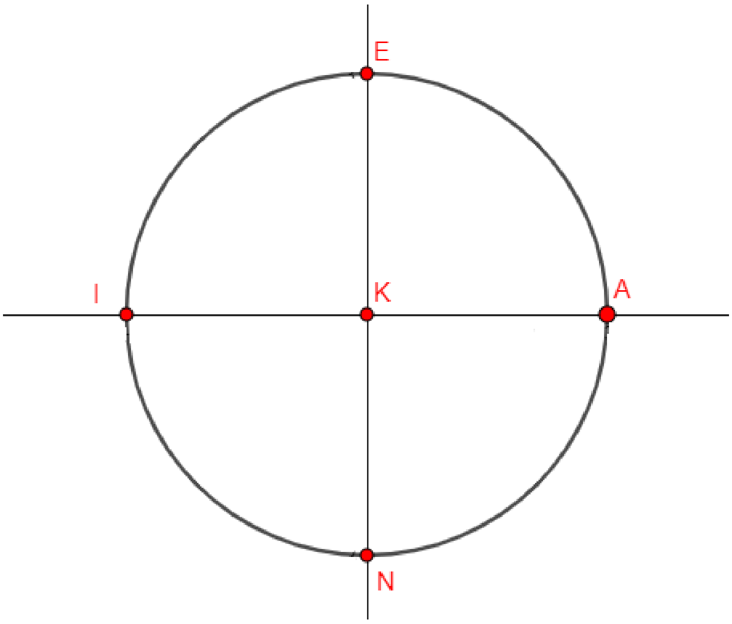
$$\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$$

O problema aparece ao tentarmos inserir uma meia proporcional, de modo que

$$\frac{+1}{+x} = \frac{+x}{-1} \longleftrightarrow x^2 = -1$$

Para resolver tal situação, Argand investigou as grandezas que satisfazem tal situação e obteve uma resposta a partir do diagrama da figura 4.10.

Figura 4.10 – Diagrama proposto por Argand



Fonte: Elaborada pela autora[10].

Podemos entender os segmentos KA e KI como direcionados de K para A e de K para I, respectivamente, representando as grandezas unitárias positiva e negativa. Traçamos a perpendicular EN, passando por K, de modo que o segmento KA está para o segmento KE, assim como o segmento KE está para KI; e o segmento KA está para o segmento KN assim como o segmento KN está para o segmento KI. Logo, os segmentos KE e KN satisfazem a relação desejada, podendo ser entendidas como representações geométricas de $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$.

Gauss foi o primeiro matemático influente a defender os números imaginários. Ele interpreta o $+1$ como a relação de acrescentar uma unidade. Tal interpretação permite conceber o objeto matemático não como uma grandeza (quantidade) em si mesmo, mas como uma relação entre magnitudes.

Os números complexos deveriam ser entendidos de modo que as relações estabelecidas entre $+1$ e -1 deveriam ser semelhantes às entre $+i$ e $-i$ (notação introduzida por Gauss). Os valores $+i$ e $-i$ serão entendidos como médias proporcionais entre $+1$ e -1.

> Gauss entendia os números complexos como relações abstratas que deveriam ser plenamente estabelecidas. Tal interpretação estava diretamente relacionada com sua visão de que a abstração era característica fundamental da matemática. Ele entendia que a generalização da álgebra passava pela extensão dos domínios numéricos. O ponto de vista defendido por Gauss exprime o início de um movimento que não considerará necessário qualificar as quantidades negativas e imaginárias pela sua natureza, como acontecia quando estas eram consideradas “sofísticas”, “absurdas”, “impossíveis”, “falsas” ou “imaginárias”. Vistos como números propriamente ditos, os negativos e complexos ganharão um lugar na aritmética e serão entidades sobre as quais é possível efetuar cálculos de modo consistente. Tal caminho não foi linear e passou pela constituição da matemática pura na Alemanha. (ROQUE, 2012)

Por volta de 1850 as universidades alemãs assumiram um protagonismo internacional, se tornando uma referência em matemática avançada. Sua principal característica era o papel inseparável entre ensino e pesquisa. Com a morte de Gauss em 1855 e a vinda de Dirichlet e Riemann a Göttingen, a interação entre ensino e pesquisa foi intensificada. Eles promoviam uma visão conceitual e abstrata da matemática. Dirichlet, Klein, Hilbert, Riemann, Dedekind, Cantor e Weierstrass foram nomes importantes nas discussões acerca do rigor matemático na segunda metade do século XIX. Nesse período a matemática passou a se basear em noções puramente aritméticas, rejeitando a abordagem proposta por Cauchy.

Essa foi a conjuntura na qual se desenvolveu o conceito de número como conhecemos hoje em dia, desvinculados da ideia de quantidade, tornando-se um dos principais objetos da matemática. Os matemáticos do século XIX observaram que as noções de limite, continuidade e convergência dependiam, diretamente, das propriedades dos números reais.

> Esse é o contexto em que o conceito de número, desvinculado da noção de quantidade e de qualquer associação com a realidade externa, tornou-se um dos objetos principais da matemática. As tentativas anteriores de assegurar as bases ontológicas dos conceitos fundamentais da matemática a partir da relação com uma certa realidade, não importa qual fosse, colocavam os alicerces dessa disciplina no mundo externo. No entanto, as dificuldades encontradas na legitimação das operações com números negativos e na conceitualização dos imaginários, juntamente com as discussões epistemológicas sobre o cálculo infinitesimal, levaram ao desenvolvimento de uma matemática baseada em conceitos abstratos que passou a ser designada de “pura”. (ROQUE, 2012)

Em 1829 Dirichlet apresentou um exemplo de função que feria todas as noções até então concebidas: não podia ser escrita como uma expressão analítica (segundo ele); não poderia ser representada por uma série de potências; não é contínua em nenhum ponto; não é derivável e nem integrável[11]. Tal exemplo só pode ser entendido como função se esse conceito for revisto e entendido como uma relação arbitrária entre variáveis numéricas.

> Na função de Dirichlet, ficava claro que sua plena compreensão dependia do modo como os racionais e irracionais estavam distribuídos sobre o eixo das abscissas, ou

[11] A função de Dirichlet é definida no conjunto $\mathbb{R}$ por: $D(x) = 1$ se x é racional, $D(x) = 0$ se x é irracional.

> seja, sobre a reta numérica. As pesquisas sobre convergência que se seguiram ao estudo das séries de Fourier estabeleciam condições que também se baseavam na distribuição dos pontos sobre uma reta. (ROQUE, 2012)

Em seu primeiro artigo, publicado em 1829 ele trata de problemas relacionados à noção de continuidade. Em 1837 esse artigo é novamente publicado, após algumas revisões, apresentando uma importante definição de função. Nessa definição ele enfatiza que para que y seja função de x não há necessidade de existir uma expressão algébrica associando essas quantidades. É enfatizado também que cada x deve estar associado a um único y, como veremos a seguir.

Definição 4.6. Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se a cada x corresponde um único y, finito, de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, $y = f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas.

Ao longo do século XIX diversos problemas matemáticos levaram ao questionamento sobre o que é um número real e como ocorre a distribuição de racionais e irracionais sobre a reta.

Buscando caracterizar a continuidade, Dedekind passou a investigar suas origens aritméticas. Tal estudo deu origem os chamados "cortes de Dedekind". Sua investigação se iniciou em verdades tidas como óbvias, sobre as relações de ordem, como por exemplo se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

Da investigação sobre propriedades evidentes, ele deduziu propriedades menos imediatas como existência de infinitos números irracionais entre dois racionais distintos. Dedekind percebeu que um racional qualquer a divide os números racionais em duas classes A_1 e A_2, de tal modo que todo elemento pertencente à classe A_1 é menor do que a e todo elemento pertencente a A_2 é maior do que a. Desse modo, qualquer número em A_1 é menor que qualquer número em A_2.

A comparação dos números racionais com os pontos da reta permitiu a conclusão de que a reta continha mais pontos dos que os que podem ser representados por números racionais. Então se fez necessário criar novos números de modo a tornar contínuo o domínio dos números racionais.

Dedekind utiliza a mesma noção de corte para definir esses novos números, transferindo para estes a mesma noção de continuidade já empregada. Dadas duas classes A_1 e A_2, já definidas anteriormente, todos os pontos da reta estão em uma das duas classes, de modo que se todo ponto da primeira classe está à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe apenas um ponto (um número) que produz essa divisão. Tal ponto pode ser racional ou irracional.

Para traduzir a continuidade da reta em termos de conjuntos, Dedekind construiu o conjunto dos números reais, de modo que, ao produzir um corte, se esse número não for racional, deve ser reunido ao conjunto dos racionais, compondo o novo conjunto. Desse modo é possível definir o conjunto do números reais de modo preciso, como a união dos números racionais e irracionais.

A característica de que os racionais podem ser enumerados, ou seja, estão em correspondência com os números naturais, levou Cantor a concluir que o conjunto dos racionais são infinitos de maneira distinta dos reais, que não podem ser enumerados. A associação entre naturais e racionais em correspondência biunívoca entre seus elementos permitirá o surgimento da ideia de função como correspondência entre dois conjuntos numéricos.

Em 1879 será constituída uma nova teoria de conjuntos. Dois conjuntos são ditos com a mesma "potência" se existir a correspondência biunívoca entre seus elementos. Conjuntos com a mesma potência do conjunto dos naturais são dito enumeráveis enquanto os outros são chamados não enumeráveis.

A definição de função, como conhecemos hoje e ensinamos em sala de aula, será atribuída por Bourbaki, em 1930, sendo definida como veremos a seguir:

Definição 4.7. Sejam E e F dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é dita uma relação funcional se, para todo x pertencente a E, existe um único y pertencente a F que possui a relação dada com x. Damos o nome função à operação que associa, desse modo, a todo elemento x pertencente a E, o elemento y pertencente a F que possui a relação dada com x; y será dito o valor da função no elemento x.

Conhecer e compreender a história da matemática, em particular a história do conjunto dos números reais permite uma reflexão profunda a respeito de como a matemática evoluiu ao longo do tempo, sendo, portanto, construída por diferentes povos e pensadores. Levar tal discussão à sala de aula, apontando os erros e acertos ao longo de seu desenvolvimento permite que os alunos adquiram identificação com tal ciência, desmitificando o senso comum da matemática como uma ciência destinada a poucos erros.

5 UMA PROPOSTA PARA A INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO REAL PARA O ENSINO BÁSICO

Ao abordar o conteúdo de números irracionais no ensino básico, comumente os professores se deparam com a dificuldade dos alunos em compreender esse conceito. Historicamente é comprovada a dificuldade que a humanidade teve em assimilar e definir a noção de número irracional. Os materiais apostilados resumem tal definição meramente à negação do conceito de número racional e, de forma bastante mecânica, sem uma reflexão sobre esse assunto, propõem que os estudantes façam listas de exercícios utilizando as operações com irracionais.

A sequência didática a seguir propõe uma série de atividades com intuito de promover, inicialmente, a discussão sobre o conceito de infinito e sua dificuldade de compreensão por parte da humanidade, a retomada do conceito de número racional com foco na representação em base decimal, em seguida, a reflexão acerca da definição de números irracionais e como interpretar esses números a partir de números racionais e, por fim, a construção do conjunto dos números reais.

Quando esta dissertação foi pensada, o intuito inicial era de que toda a sequência didática elaborada fosse aplicada em sala de aula. Situações de mudança de emprego, mudança de turmas e falta de tempo com a turma atual impediram a aplicação de toda sequência. Por isso, foi implementada somente a primeira atividade citada, sendo consideradas para as considerações finais sobre as outras atividades, apenas pesquisas teóricas.

5.1 O HOTEL DE HILBERT

Neste momento os alunos serão levados a pensar sobre o conceito de infinito. Refletindo sobre como essa noção fere nossa lógica natural e compreensão. Para isso, será proposto o dilema do hotel de Hilbert.

Imagine um hotel com infinitos quartos, numerados de acordo com os números naturais (quarto 1, quarto 2,...) , do qual você é o gerente. Em um período de alta temporada, todos os infinitos quartos desse hotel estão ocupados. Nessas condições, chega um novo hóspede procurando um quarto. Como é possível hospedar esse hóspede sem colocá-lo em nenhum quarto já ocupado? É possível fazer isso?

Após um tempo de reflexão, o professor ouvirá as respostas dos alunos, como, por exemplo, “não é possível fazer isso”, ou ainda “não sei como alojar mais um hóspede”, “acho que é possível, mas não sei como”. É possível também que algum aluno consiga encontrar um modo de resolver o problema.

Tendo ouvido todas as repostas, o professor deve expor seu modo de resolver tal problema.

É necessário começar enfatizando que, em um quarto com uma quantidade finita de quartos, tal problema não teria solução, mas esse não é um hotel comum. Por isso, basta que o gerente se dirija ao quarto 1 e peça ao hóspede ali colocado que se dirija ao quarto 2, e que o hóspede do quarto 2 se dirija ao quarto 3 e assim sucessivamente. Por se tratar de infinitos quartos, tal processo é possível e então o quarto 1 estará vago para que o novo hóspede possa ser alojado. Ou seja, existe um hotel com infinitos quartos, todos ocupados, e, ainda assim, é possível alojar um novo hóspede sem que ninguém fique sem quarto.

Continuaremos fazendo o seguinte questionamento: E se chegassem infinitos hóspedes? Como faríamos para alojar todos eles?

Nesse momento, após a primeira explicação, surgirão ideias de como alojar os infinitos novos hóspedes e o professor deverá escutá-las com atenção, acolhendo as respostas do alunos. Em seguida, será exposta a solução do professor. É possível alojar os infinitos novos hóspedes pedindo que para o hóspede do quarto 1 se dirija ao quarto 2. O hóspede do quarto 2 se dirija ao quarto 4. O hóspede do quarto 3 se dirija ao quarto 6 e assim sucessivamente. Desse modo todos os quartos pares estarão ocupados e sobrarão infinitos quartos (todos os de numeração ímpar) onde poderão ser alojados os infinitos novos hóspedes.

Nesse momento os alunos seriam levados a refletir sobre como tal situação fere totalmente nossa lógica natural. Em um hotel que já estava completamente cheio, é possível alojar não apenas um novo hóspede, mas até infinitos novos hóspedes. Isso se dá pois estamos lidando com o conceito de infinito, que talvez seja impossível de “caber” na nossa cabeça, na nossa lógica.

Para entendermos de que modo o infinito influencia na compreensão do conceito de número irracional, vamos retomar o que é um número racional.

5.2 O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS: DEFINIÇÃO E REPRESENTAÇÃO NA FORMA DE FRAÇÃO

A sequência a seguir tem por objetivo retomar com os alunos a representação de números racionais (decimais finitos e dízimas periódicas) na forma de fração, enfatizando ao longo de toda a atividade, como compreender e interpretar a representação decimal. Para que se torne claro para o aluno que todo número racional por ser representado na forma de fração, até mesmo aqueles que apresentam infinitas casas decimais. Iniciaremos retomando a definição de número racional, para, em seguida, trabalhar a representação desses números. A retomada se baseia na seguinte habilidade da BNCC:

> (EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica. (BNCC. . . , 2018)

Definição 5.1. Conjunto dos Números Racionais: é o conjunto de todos os números que podem ser escritos como uma fração da forma $\frac{a}{b}$, com a , $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Em outra palavras, são todos os números que podem ser escritos como uma fração entre dois números inteiros e denominador diferente de zero. Os números que compõem o conjunto dos números racionais são todos os inteiros, os decimais finitos e as dízimas periódicas (que são números decimais periódicos, ou seja, apresentam um ou mais algarismos que se repetem na mesma ordem infinitamente. O algarismo que se repete é chamado de período). Para que possamos entender como os números decimais finitos e as dízimas periódicas podem ser escritas na forma de fração, precisamos nos atentar à representação decimal.

Observe, por exemplo, o número 0,2. O zero antes da vírgula serve para indicar que ele representa menos que uma unidade inteira, e, após a vírgula, temos partições da unidade. O algarismo 2 na primeira casa depois da vírgula indica que a unidade foi particionada em dez partes, das quais tomamos duas. Por isso,

$$0,2 = \frac{2}{10} \tag{5.1}$$

Analogamente, se tomarmos o número 1,234, podemos interpretá-lo de modo que temos um inteiro, já que o número antes da vírgula é o algarismo um e, após a vírgula, temos as partições da unidade. O algarismo dois na primeira casa indica que a unidade foi particionada em dez partes das quais tomamos duas, o algarismo três na segunda casa indica que a unidade foi particionada em cem partes das quais tomamos três, o algarismo quatro na terceira casa indica que a unidade foi particionada em mil partes das quais tomamos quatro. Desse modo,

$$1,234 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} \tag{5.2}$$

Determinando o MMC dos denominadores e encontrando frações equivalentes, temos:

$$1,234 = \frac{1000}{1000} + \frac{200}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{4}{1000} = \frac{1234}{1000} \tag{5.3}$$

Procedendo desse modo, podemos escrever qualquer número decimal finito sob a forma de fração. Além dos números decimais finitos. Ainda, compõem o conjunto dos números racionais as dízimas periódicas, que podem surgir em situações práticas como ao tentarmos dividir 2 reais para três pessoas. Nessa situação cada pessoa receberia 0,66666. . . reais. Nos próximos exemplos vamos observar como escrever tais tipos de número na forma de fração.

Tomemos então o número 0,123412341234... Diferentemente dos números analisados anteriormente, este possui infinitas casas decimais, porém todas seguindo a sequência 12341234.... Note que a sequencia 1234 é o período da dízima periódica. Vamos chamar esse número de p de modo que

$$p = 0,123412341234\ldots \tag{5.4}$$

Se multiplicarmos esse número por 10000, obtemos a seguinte relação:

$$10000p = 1234,123412341234\ldots \tag{5.5}$$

Note que o fato de termos multiplicado p por uma potência de 10 que contém exatamente a mesma quantidade de zeros que o período da dízima periódica fez com que as casas decimais permanecessem iguais, a mesma sequência 12341234... Calculando $10000p - p$, temos:

$$10000p - p = 1234,123412341234... - 0,123412341234... \tag{5.6}$$

$$9999p = 1234 \tag{5.7}$$

$$p = \frac{1234}{9999} \tag{5.8}$$

Logo,

$$0,123412341234... = \frac{1234}{9999} \tag{5.9}$$

Podemos proceder de modo semelhante, caso a dízima periódica seja composta, ou seja, existam números além do período logo após a vírgula. Observe o número 0,122222... Vamos chamá-lo de q, ou seja

$$q = 0,122222\ldots \tag{5.10}$$

Identificamos, inicialmente, quantos algarismos estão à direita da vírgula e que não pertencem ao período da dízima periódica. No nosso exemplo, temos um algarismo e, por isso, multiplicaremos q por 10, de modo que

$$10q = 1,22222... \tag{5.11}$$

Que é uma dízima periódica simples. Multiplicamos agora essa dízima periódica simples por uma potência de 10 que possua tantos zeros quanto o período da dízima periódica, no caso 10. Assim,

$$10 \cdot 10q = 10 \cdot 1,22222 = \tag{5.12}$$

$$100q = 12,22222 \tag{5.13}$$

Calculamos então $100q - 10q$

$$100q - 10q = 12,22222... - 1,22222... \tag{5.14}$$

$$90q = 11 \tag{5.15}$$

$$q = \frac{11}{90} \tag{5.16}$$

Logo,

$$0,122222... = \frac{11}{90} \tag{5.17}$$

Por fim, observe o número 0,78123412341234.... Vamos chamá-lo de r, ou seja

$$r = 0,7812341234... \tag{5.18}$$

Identificamos, inicialmente, quantos algarismos estão à direita da vírgula e que não pertencem ao período da dízima periódica. No nosso exemplo, temos dois algarismos e, por isso, multiplicaremos r por 100, de modo que

$$100r = 78,12341234... \tag{5.19}$$

Que é uma dízima periódica simples. Multiplicamos agora essa dízima periódica simples por uma potência de 10 que possua tantos zeros quanto o período da dízima periódica, no caso 10000. Assim,

$$10000 \cdot 100r = 10000 \cdot 78,12341234 = \tag{5.20}$$

$$1000000r = 781234,12341234 \tag{5.21}$$

Calculamos então $1000000r - 100r$

$$1000000r - 100r = 781234,12341234... - 78,12341234... \tag{5.22}$$

$$999900r = 781156 \tag{5.23}$$

$$r = \frac{781156}{999900} \tag{5.24}$$

Logo,

$$0,7812341234... = \frac{781156}{999900} \tag{5.25}$$

Para compreendermos melhor as dízimas periódicas, podemos ainda propor que os alunos encontrem a fração geratriz da dízima 0,9999. . . Vamos chamá-lo de s, ou seja,

$$s = 0,9999...$$

Se multiplicarmos esse número por 10, obtemos a seguinte relação:

$$10s = 9,9999\,...$$

Note que o fato de termos multiplicado s por uma potência de 10 que contém exatamente a mesma quantidade de zeros que o período da dízima periódica fez com que as casas decimais permanecessem iguais, a mesma sequência 9999... Calculando $10s - s$, temos:

$$10s - s = 9,9999\,... - 0,9999\,... \tag{5.28}$$

$$9s = 9 \tag{5.29}$$

$$s = \frac{9}{9} \tag{5.30}$$

Logo,

$$0,9999\,... = 1 \tag{5.31}$$

O processo de determinar a fração geratriz correspondente ao número 0,9999... permite que os alunos já iniciem uma reflexão sobre o conceito de infinito, a partir da conclusão de que a dízima periódica 0,9999... é igual ao número 1.

Ao final da atividade de retomada, é importante que os alunos percebam que, por mais “variada” que seja a dízima periódica (simples ou composta, com períodos mais curtos ou mais longos), essa característica de possuir um período que repete depois da vírgula e o fato de sempre podermos determinar qual a próxima casa decimal nos permite escrevê-las na forma de fração.

5.3 PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO QUADRADO E O VALOR DE $\sqrt{2}$

O intuito dessa última sequência de atividades é levar os alunos a investigar sobre o conceito de número irracional a partir um problema clássico da geometria grega: O problema da duplicação do quadrado.

A importância dessa atividade está relacionada a necessidade de construirmos o conceito de número irracional a partir de um processo dialético, esclarecendo as dúvidas dos alunos com relação a esse tipo de número e sua representação, trazendo luz à dúvidas do tipo " *como um segmento de reta (uma linha que possui começo e fim) pode medir um valor infinito (que não termina nunca)?*"

Os Parâmetros Curriculares Nacionais preveem que:

> Ao longo do ensino fundamental os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados pelos alunos num processo dialético, em que intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos que serão estudados, considerando-se suas propriedades, relações e o modo como se configuram historicamente. Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversas categorias numéricas criadas em função de diferentes problemas que a humanidade teve que enfrentar — números naturais, números inteiros positivos e negativos, números racionais (com representações fracionárias e decimais) e números irracionais. À medida que se deparar com situações-problema — envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação —, ele irá ampliando seu conceito de número. (BRASIL, 1997, p. 39)

Os alunos deverão utilizar aproximações para determinar qual o número que elevado ao quadrado resulta em 2. Com o auxílio da calculadora poderão se aproximar do valor de $\sqrt{2}$ em aproximadamente 2 casas decimais (que é a aproximação utilizada por materiais apostilados).

Apesar de não ser um conteúdo presente no currículo de matemática, a habilidade de lidar com aproximações deve ser ensinada para os alunos, pois permite a resolução de problemas matemáticos com resultado aproximado. Segundo (MARTINS, 2019), aproximar-se é encontrar um resultado suficientemente preciso para um determinado propósito. Na aproximação existem métodos para o controle do erro; aproxima-se tanto quanto a situação exige. Os critérios de arredondamento poderão ser explorados ao longo da atividade, explicando, qual o maior algarismo que pode ser descartado, sem que haja necessidade de aumentar uma unidade ao algarismo imediatamente a sua esquerda.

É importante ressaltar que, historicamente, a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado deram origem a descoberta dos número irracionais, como citado no capítulo anterior. Por isso, os alunos desenvolverão a atividade de medição da diagonal de quadrados com medidas de lado diferentes e compararão seus resultados, para que possam vivenciar a experiência da incomensurabilidade em sala de aula, que segundo (GONÇALVES, 2019) é tão assustadora quanto a feita pelos pitagóricos e, assim, tal assunto possa ser exposto a partir do ponto de vista histórico.

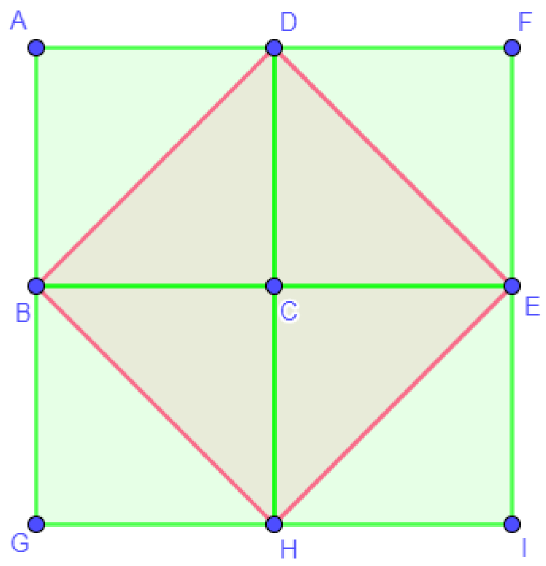
A atividade a seguir se baseia nas seguintes habilidades da BNCC:

> (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

> (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. (BNCC. . . , 2018)

A sala será dividida em grupos de quatro alunos e iniciaremos com a seguinte pergunta: Como a partir de um quadrado de lado 1 (quadrado ABCD na 5.1), consequentemente, de área 1, é possível construir um quadrado de área 2?

Figura 5.1 – Duplicação do Quadrado



Fonte: Elaborada pela autora[1].

Será dado aos alunos um tempo para pensar sobre o problema. É esperado que, após algumas tentativas, eles concluam que, basta quadruplicar o quadrado inicialmente dado e, em seguida, tomar quatro metades de quadrado de área 1, a partir das diagonais, conforme a ilustração 5.1.

Após a duplicação realizada, é inquestionável o fato de que o quadrado encontrado (no caso da imagem, quadrado BHED) possua área 2. Uma pergunta cabível então é "qual a medida do lado desse quadrado?", em outras palavras, "qual o número que elevado ao quadrado resulta em 2?".

Utilizando as noções de álgebra já conhecidas pelos alunos, e considerando como x o lado do quadrado, montaremos a equação $x^2 = 2$ que nos levará a conclusão que $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. Por estarmos lidando com segmentos, faremos uso apenas do resultado positivo $x = \sqrt{2}$.

Neste momento, os alunos farão uso da calculadora para investigar qual número elevado ao quadrado resulta em dois. O professor deverá orientá-los para que o intervalo de possibilidades vá se reduzindo.

Iniciaremos tomando o intervalo $(1, 2)$ e calcularemos $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$. Como $1^2 = 1$ é menor que 2 e $2^2 = 4$ é maior que 2, com certeza o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2. Faremos a média aritmética dos extremos do intervalo. Obtendo assim $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$. Aqui e nos cálculos subsequentes, usaremos a notação habitual das calculadoras, com o ponto sendo o separador decimal entre a parte inteira e a parte fracionária.

Calculando $1.5^2 = 2.25$, como $2,25 > 2$, com certeza o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1 e 1.5, podemos então restringir o intervalo para $(1, 1.5)$.

Analogamente, faremos novamente a média aritmética dos extremos do intervalo, obtendo $\frac{1 + 1.5}{2} = \frac{2.5}{2} = 1.25$. Fazendo $1.25^2 = 1.5625$. Como $1.5625 < 2$, com certeza o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1.25 e 1.5, podemos então restringir nosso intervalo para $(1.25, 1.5)$.

Repetiremos o procedimento fazendo a média aritmética dos extremos do intervalo, obtendo $\frac{1.25 + 1.5}{2} = \frac{2.755}{2} = 1.375$. Fazendo $1.375^2 = 1.890625$. Como $1.890625 < 2$, com certeza o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1.375 e 1.5, podemos então restringir nosso intervalo para $(1.375, 1.5)$.

Repetiremos o procedimento fazendo a média aritmética dos extremos do intervalo, obtendo $\frac{1.375 + 1.5}{2} = \frac{2.875}{2} = 1.4375$. Fazendo $1.4375^2 = 2.06640625$. Como $2.06640625 > 2$, com certeza o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1.375 e 1.4375, podemos então restringir nosso intervalo para $(1.375, 1.4375)$.

Repetiremos o procedimento fazendo a média aritmética dos extremos do intervalo, obtendo $\frac{1.375 + 1.4375}{2} = \frac{2.8125}{2} = 1.40625$. Fazendo $1.40625^2 = 1.9775390625$. Como $1.9775390625 < 2$, com certeza o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1.40625 e 1.4375, podemos então restringir nosso intervalo para $(1.40625, 1.4375)$.

Repetiremos o procedimento fazendo a média aritmética dos extremos do intervalo, obtendo $\frac{1.40625 + 1.4375}{2} = \frac{2.84375}{2} = 1.421875$. Fazendo $1.421875^2 = 2.0217285156$. Como $2.0217285175 > 2$, com certeza o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1.40625 e 1.421875, podemos então restringir nosso intervalo para $(1.40625, 1.421875)$.

Repetiremos o procedimento fazendo a média aritmética dos extremos do intervalo, obtendo $\frac{1.40625 + 1.421875}{2} = \frac{2.828125}{2} = 1.4140625$. Fazendo $1.4140625^2 = 1.9995727539$. Como $1.9995727539 < 2$, com certeza o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1.4140625 e 1.421875, podemos então restringir nosso intervalo para $(1.4140625, 1.421875)$.

Repetiremos o procedimento fazendo a média aritmética dos extremos do intervalo, obtendo $\frac{1.4140625 + 1.421875}{2} = \frac{2.8359375}{2} = 1.41796875$, tendo $1.41796875^2 = 2.010635376$. Como $2.010635376 > 2$, com certeza o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1.4140625 e 1.41796875, podemos então restringir nosso intervalo para $(1.4140625, 1.41796875)$.

Repetiremos o procedimento fazendo a média aritmética dos extremos do intervalo, obtendo $\dfrac{1.4140625 + 1.41796875}{2} = \dfrac{2.83203125}{2} = 1.416015625$. Fazendo $1.416015625^2 = 2.0051002502$, como $2.0051002502 > 2$, com certeza o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1.4140625 e 1.416015625, podemos então restringir nosso intervalo para $(1.4140625, 1.41796875)$.

O processo pode ser repetido quantas vezes forem necessárias, mas, sendo feito até aqui, já é possível verificar que os três primeiros dígitos de $\sqrt{2}$ são 1.41, que elevado ao quadrado resulta em 1.9881.

Todos os valores calculados podem ser organizados em uma tabela, permitindo melhor visualização e compreensão do processo utilizado.

Tabela 5.1 – Aproximações para $\sqrt{2}$.

Intervalo (a,b)	a^2	b^2	**Média**: $m = \dfrac{a+b}{2}$	m^2
$(1, 2)$	1	4	1.5	2.25
$(1, 1.5)$	1	2.25	1.25	1.5625
$(1.25, 1.5)$	1.5625	2.25	1.375	1.890625
$(1.375, 1.5)$	1.890625	2.25	1.4375	2.06640625
$(1.375, 1.4375)$	1.890625	2.06640625	1.40625	1.9775390625
$(1.40625, 1.4375)$	1.9775390625	2.06640625	1.421875	2.0217285156
$(1.40625, 1.421875)$	1.9775390625	2.0217285156	1.4140625	1.9995727539
$(1.4140625, 1.421875)$	1.9995727539	2.0217285156	1.41796875	2.010635376
$(1.4140625, 1.41796875)$	1.9995727539	2.010635376	1.416015625	2.0051002502

Fonte: Elaborado pela autora.

Para que os alunos vivam a experiência da incomensurabilidade em sala de aula, será pedido aos alunos que desenhem quadrados com medidas de lado variados e depois meçam a diagonal com a régua. O Teorema de Pitágoras garante que a diagonal será a medida do lado multiplicada por $\sqrt{2}$, mas mesmo que os alunos façam quadrados com lados de mesma medida, dependendo do instrumento utilizado para a medição é possível que eles encontrem medidas de diagonais diferentes. Tal atividade permite o diálogo a cerca da descoberta dos incomensuráveis no contexto da Grécia Antiga, como exposto no capítulo 4.

O procedimento até aqui utilizado é importante para que os alunos possam começar a estimar o valor e $\sqrt{2}$, e perceber noções relativas a incomensurabilidade, mas como garantir que o processo não termina nunca, ou seja, que $\sqrt{2}$ não é um número racional? Para assegurar que $\sqrt{2}$ é um número irracional, faremos uma demonstração por absurdo.

Teorema 5.1. $\sqrt{2}$ *é irracional.*

Demonstração. Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, existem inteiros m e n, com $n \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, com $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ primos entre si. Então:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \tag{5.32}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos:

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2 \tag{5.33}$$

Logo, m^2 é um número par, o que só ocorre se m for um número par. Mas, se m é um número par, podemos escrever $m = 2s$, com s um número inteiro. Logo, temos:

$$m^2 = 2n^2 \Rightarrow (2s)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 4s^2 = 2n^2 \Leftrightarrow n^2 = 2s^2 \tag{5.34}$$

Disso, segue que n^2 é um número par. Mas se n^2 é par, então n é par.

Se m é par e n é par, então m e n não são primos entre si, já que m e n possuem o número 2 como fator comum.O que é uma contradição, já que assumimos inicialmente que m e n não possuiriam fatores comuns.

Portanto $\sqrt{2}$ não é racional!

□

Utilizando, ainda, a calculadora, é possível verificar que $\sqrt{2}$ possui aproximação de 1.4142135624, mostrando que as duas primeiras casas decimais encontradas pelos alunos estão corretas.

É importante discutir sobre todos os valores encontrados serem aproximações racionais para o valor de $\sqrt{2}$, enfatizando o fato de que podemos nos aproximar desse número (e de qualquer outro irracional), tanto quanto seja necessário, a partir de valores racionais, porém sem nunca conseguir determinar todas as infinitas casas decimais desse número.

Por fim, definiremos o conceito de número irracional, e o conjunto dos números irracionais e reais do seguinte modo:

Definição 5.2. Número Irracional: é um número decimal infinito e não periódico que não pode ser escrito como uma fração entre dois números inteiros.

Definição 5.3. Conjunto dos Números Irracionais: é o conjunto de todos os números que não podem ser escritos como uma fração entre dois números inteiros.

Definição 5.4. Conjunto dos Números Reais: é a união do conjunto dos números racionais e irracionais.

5.4 DISCUSSÕES SOBRE O HOTEL DE HILBERT NO CONTEXTO ESCOLAR

A aplicação em sala, causou, inicialmente, muitas dúvidas para os alunos. É antinatural e fere nossa compreensão a ideia de que um hotel completamente cheio possa, após uma simples adaptação, abrigar novos hóspedes. O enunciado do problema já causou estranhamento. Ao projetar e ler para os alunos a seguinte situação "*Imagine um hotel com infinitos quartos, numerados de acordo com os números naturais (quarto 1, quarto 2,...) , do qual você é o gerente. Em um período de alta temporada, todos os infinitos quartos desse hotel estão ocupados. Nessas condições, chega um novo hóspede procurando um quarto. Como é possível hospedar esse hóspede sem colocá-lo em nenhum quarto já ocupado? É possível fazer isso?*" eles já começaram a questionar "*como pode existir um hotel com infinitos quartos?*" e "*como ter certeza de que os quartos estão todos cheios?*", tais questionamentos serviram como motivação para as discussões referentes ao problema.

Dado o tempo de 5 minutos, iniciamos as discussões sobre o assunto. A noção de infinito como algo que nunca acaba é bastante presente na idade em que eles se encontram, por isso visualizar as condições do hotel não era algo tão imediato e fazia com que eles pensassem ser possível colocar um novo hóspede, ainda que não soubessem como fazer isso. Depois da discussão com todos os alunos, expus minha resolução para o problema.

Primeiramente argumentei que, em um quarto com uma quantidade finita de quartos, tal problema não teria solução, mas que esse não era um hotel comum. Para resolver o problema, eu, enquanto gerente, pediria um momento para o novo hóspede, me dirigiria ao quarto 1 e diria ao hóspede que estivesse lá *"Senhor, você poderia, por gentileza, pegar suas coisas e se dirigir comigo ao quarto 2?"* Chegando ao quarto 2 pediria para que o hóspede que estava lá se dirigisse ao quarto 3 e que, pedisse ao hóspede do quarto 3 que fizesse o mesmo e passasse a informação adiante. Por se tratar de infinitos quartos, tal processo é possível e então o quarto 1 estará vago para que o novo hóspede possa ser alojado. Ou seja, existe um hotel com infinitos quartos, todos ocupados, e ainda assim, é possível alojar um novo hóspede sem que ninguém fique sem quarto.

Após minha explicação, diversos alunos questionaram o fato de que o processo de mudança de quartos não acabaria nunca, e que sempre teria um hóspede indo para o próximo quarto. Tal questionamento é extremamente válido e, minha explicação foi com relação ao meu objetivo enquanto gerente. Minha necessidade era conseguir um quarto disponível. Ao solicitar a mudança de quartos, é fato que o processo nunca termina, mas também é fato que o primeiro quarto fica vago e que as mudanças nos quartos da frente não alterariam isso.

Em seguida, propus uma nova pergunta: "*E se chegassem infinitos novos hóspedes?*"

Dado um novo tempo para discussões, começaram a aparecer as respostas. De maneira geral, influenciados pela minha primeira resposta, boa parte deles pensava em fazer as modificações de modo parecido, pedindo para que uma certa quantidade de hóspedes se dirigisse os quartos da frente. E, mais uma vez, o infinito parecia impor uma barreira, porque, mesmo tomando uma quantidade de hóspedes muita grande, essa quantidade ainda era finita e teríamos hóspedes sem quarto.

Por fim, apresentei minha solução: "*É possível alojar os infinitos novos hóspedes pedindo que o hóspede do quarto 1 se dirija ao quarto 2, o hóspede do quarto 2 se dirija ao quarto 4, o hóspede do quarto 3 se dirija ao quarto 6 e assim sucessivamente. Desse modo todos os quartos pares estarão ocupados e sobrarão infinitos quartos (todos os de numeração ímpar) onde poderão ser alojados os infinitos novos hóspedes.*" Nesse momento foi extremamente importante explicar que tanto o conjunto dos números pares, quanto o conjunto dos números naturais são infinitos e que, mesmo assim, o conjunto dos números pares está contido no conjunto dos números naturais e por isso o problema tem essa solução.

Finalizamos discutindo sobre como a noção de infinito pode ser confusa e, por vezes, não fazer sentido. Conversamos sobre todas as coisas que vemos no mundo real serem finitas e pensarmos sempre desse modo. E esse era, exatamente, o objetivo da atividade. Trazer incômodo e levantar questionamentos sobre o infinito para que toda a sequência didática pudesse ter continuidade.

Analisando o andamento da aula, percebi que, entre a pergunta sobre a chegada de um novo hóspede e a chegada de infinitos novos hóspedes, seria interessante acrescentar alguns questionamentos, como por exemplo, "*como colocar dois novos hóspedes?*", "*e se chegassem cinco novos hóspedes?*", "*e se chegassem 100 novos hóspedes?*". Tais questionamentos permitiriam uma melhor transição entre o processo de acrescentar uma quantidade finita e o de acrescentar uma quantidade infinita de hóspedes.

Como já exposto no início dessa seção, as atividades seguintes não puderam ser trabalhadas, principalmente pela falta de tempo com a turma e a necessidade de cumprir com prazos estabelecidos pela escola. Apesar disso, essa primeira atividade gerou uma série de questionamentos e, acima de tudo, o interesse por parte de toda a turma. O problema proposto foi visto por eles como um desafio, de modo que, até os alunos menos participativos, fizeram questão de expor seu modo de pensar e suas opiniões a respeito do problema. Diante disso, acredito que a atividade tenha sido de grande importância e possibilita a introdução do tema proposto de modo a despertar o interesse dos alunos e torná-los participativos ao longo da sequência didática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A escola, desde sua criação, tem por objetivo formar e desenvolver os indivíduos, em todos os aspectos (cultural, social e cognitivo) como dito anteriormente. A matemática, por sua vez, auxilia no desenvolvimento do pensamento lógico e é essencial para construção de conhecimentos em outras áreas, além de servir como base para as séries posteriores. Entretanto, ainda hoje, ela é encarada como um saber elitizado e restrito a poucas pessoas.

Diante disso, esse trabalho pretendeu, inicialmente, apresentar a história da matemática como uma alternativa ao ensino tradicional, tão presente nas escolas, trazendo essa metodologia como ferramenta de questionamento, assimilação e conhecimento, buscando através dela o desenvolvimento do pensamento crítico sobre como a matemática se constrói através dos tempos, a participação de diferentes indivíduos nessa construção, mostrando essa ciência como consequência das relações sociais, políticas e econômicas e não como fruto da genialidade de indivíduos específicos. Apresentando a matemática, acima de tudo, como uma ciência democrática e construída a partir da pluralidade de ideias e em constante desenvolvimento. De acordo com Paiva:

> A História da Matemática motiva e estimula a participação dos alunos no processo educativo, enriquece o desenvolvimento das aulas, esclarece dúvidas e questionamentos, demonstra a evolução dos conceitos e das ideias matemáticas ao longo do tempo, deixando claro que esta ciência está em constante evolução, em permanente transformação, rompendo assim com as ideias de alguns professores e alunos que concebem a Matemática como um saber estático, hermético, composto de conhecimentos inquestionáveis e imutáveis. (PAIVA, 2018)

O aprendizado do conceito de número irracional e, consequentemente, de números reais, é essencial para a formação escolar de um estudante, sendo abordado inicialmente entre o 7º e 8º ano, mas chegando a definição exata de número real no 9º ano e sendo utilizado amplamente em todos os anos posteriores do Ensino Básico, sendo base para a entendimento de outros assuntos, como, por exemplo, o conteúdo de funções, e as noções de continuidade.

Ademais, a compreensão das noções relativas ao infinito e o modo de lidarmos com essa "barreira"a partir das ideias de convergência são essenciais para que, ao longo do Ensino Médio, os alunos possam compreender a soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica, o comportamento de algumas funções Trigonométricas (como a função tangente, por exemplo), o cálculo da área do círculo a partir da inscrição e circunscrição de polígonos, entre outros.

Dado o exposto, esse texto propôs uma nova abordagem para o ensino dos números irracionais no Ensino Básico. Trazendo o contexto histórico em que se desenvolveu esse assunto, e suas relações com o conceito de infinito, proporcionando uma melhor compreensão desses dois temas para uma construção bem fundamentada do Conjunto dos Números Reais.

> Ensinar sobre números infinitos para quem não vislumbra o futuro ou para quem quer

> tudo para ontem não é uma tarefa fácil. Quando o aluno entende que os irracionais são uma parte do conjunto dos números que não é enumerável, que foi alvo de muita discussão e que foi escondida, mascarada e rechaçada, a curiosidade sobre o porquê disso vem a tona. Daí se cria um ambiente fértil, onde as perguntas são investigativas e desafiadoras.
>
> Explicar ao aluno que um segmento de reta pode representar um número infinito não é uma abstração fácil. Assim como não é fácil dizer que o π é irracional mas associá-lo a uma proposta racional, quando se diz que o mesmo é a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. (GONÇALVES; JUNIOR; BRITTO, 2018)

A primeira atividade aqui mostrada, prevê a assimilação da grandiosidade que o infinito representa, mostrando como tal assunto fere nossa lógica natural e pode, inicialmente, causar uma dificuldade de compreensão. Nesse aspecto a história se faz essencial para mostrar que tal dificuldade acompanhou o desenvolvimento desse conceito desde sua descoberta até definição formal e que não é restrita aos alunos tal dificuldade.

Em seguida, é proposta a retomada do Conjunto dos Números Racionais para que, a partir da representação em base decimal desses números possamos, na terceira atividade, aproximar valores irracionais por valores racionais tanto quanto seja necessário, mostrando assim que o problema, a barreira inicialmente colocada pela descoberta dos números irracionais ganha uma solução com a noção de convergência e pode ser superada e entendida a partir de números racionais.

Por fim, enfatizo que a sequência didática aqui proposta se faz importante para atender às demandas citadas anteriormente, porém, não se trata de uma abordagem imutável, devendo ser colocada como contexto inicial para o desenvolvimento do assunto de números reais, podendo ser complementada e adaptada a partir dos currículos específicos de cada escola, bem como a individualidade de cada turma.

REFERÊNCIAS

ADICHIE, C. **O perigo de uma história única**. 1. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

BNCC. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: Ministério da Educação. Brasil, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 13, 49 e 56.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **ZETETIKÉ**, v. 13, n. 23, 2005. Unicamp. Citado na página 16.

D'AMBROSIO, U. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA TEORIA À PRÁTICA**. 16. ed. Campinas, SP: Papirus Editora, 1996. Citado na página 12.

FINO, C. N. **Demolir os muros da fábrica de ensinar**. [S.l.]: Humanae, 2011. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

GONÇALVES, A. P. **PERGUNTAS E HISTÓRIAS SOBRE O INFINITO MATEMÁTICO: O QUE OS ESTUDANTES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DESEJAM SABER ACERCA DA HISTÓRIA CULTURAL DO INFINITO?** Dissertação (Mestrado) — UFRJ, Rio de Janeiro, 2019. Acesso em: 13 dez. 2022. Disponível em: <http://146.164.248.81/hcte/docs/dissertacoes/2019/ana_paula_goncalves.pdf>. Citado na página 55.

GONÇALVES, A. P.; JUNIOR, D. R. R.; BRITTO, S. V. S. Cenas do cotidiano escolar: um olhar sobre o conceito de infinito e a história da matemática. Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia, Campina Grande, 2018. Acesso em: 12 dez. 2022. Disponível em: <https://www.16snhct.sbhc.org.br/resources/anais/8/1535770690_ARQUIVO_CenasdoCotidiano-InfinitonaSaladeAula-Ana-Dorival-Sicleidi.pdf>. Citado na página 63.

LOCKE, J. **Ensaio acerca do entendimento humano.** São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda, 1999. Citado na página 37.

MARTINS, R. **Estimativa e aproximação em sala de aula: o caso do conceito de área no ensino fundamental.** Tese (Doutorado) — USP, São Paulo, 2019. Acesso em: 13 dez. 2022. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-15082019-223307/publico/dissertacao_renato_martins_vf2.pdf>. Citado na página 55.

MELO, L.; PAZ, F.; SOUZA, C. ResoluÇÃo de problemas segundo george polya: Uma abordagem metodolÓgica para solucionar problemas matemÁticos. Encontro Paraibano de Educação Matemática, Campina Grande, 2018. Acesso em: 22 fev. 2023. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/epbem/2018/TRABALHO_EV121_MD1_SA5_ID255_16082018190822.pdf>. Citado na página 14.

MOREIRA, M. **Ensino e aprendizagem: enfoques teóricos**. São Paulo: Editora Moraes, 1985. v. 10. (Enfoques teóricos, v. 10). Citado na página 13.

PAIVA, A. B. A. A história da matemática no ensino e na aprendizagem da multiplicação. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Rio de Janeiro, 2018. Acesso em: 10 dez. 2022. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/223>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 62.

PINTO, N. B. **Marcas históricas da Matemática Moderna no Brasil**. 5. ed. Curitiba: Revista Diálogo Educacional, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

REIS, A. K. M.; NEHRING, C. M. A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, 2017. Citado na página 12.

ROQUE, T. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. (Coleção do Professor de Matemática). Citado 14 vezes nas páginas 14, 15, 19, 20, 27, 35, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 45 e 46.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT). Citado na página 14.

TOFFLER, A. **O choque do futuro**. São Paulo: Editora Record, 1970. Citado na página 22.