UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência e Multiplicidade de Soluções para Diferentes Classes de Equações de Choquard

Eduardo de Souza Böer

São Carlos-SP
Fevereiro de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência e Multiplicidade de Soluções para Diferentes Classes de Equações de Choquard

Eduardo de Souza Böer

Orientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
Junho de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Eduardo de Souza Boer, realizada em 12/04/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFSCar)

Adilson Presoto
Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto (UFSCar)

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira (UFSCar)

Alânnio B. Nóbrega
Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nóbrega (UFCG)

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa (UFPA)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho
a Marlisa de Souza Böer e ao Eroni Paulo Böer,
meus pais.

Agradecimentos

A concretização desta Tese, que consiste no espelho dos estudos realizados durante o período de doutorado, somente foi possível mediante o auxílio de algumas pessoas. Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho e, de uma maneira especial, agradeço:

- aos meus pais, Marlisa de Souza Böer e Eroni Paulo Böer, por todo apoio e confiança que sempre depositaram em mim, especialmente, por terem feito o seu melhor para que eu tivesse acesso ao Ensino Superior e conseguisse chegar até aqui;

- a Deus, por ter sempre estado ao meu lado;

- aos demais familiares e amigos, os quais sofreram e comemoraram junto comigo cada pequeno passo que foi dado para chegar até aqui;

- ao professor Olímpio Hiroshi Miyagaki, orientador do trabalho, por todos os conselhos, sugestões e por sempre contribuir com suas experiências. Tive muita sorte em poder trabalhar com alguém tão excepcional;

- aos professores Saradia Sturza Della Flora, Maurício Fronza da Silva e Juliano Damião Bittencourt de Godoi, pela significativa contribuição ao longo de toda minha formação, em especial, pelo excelente exemplo de professores e orientadores;

- ao Curso de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar e todo seu corpo docente, pela contribuição em minha formação;

- aos professores da banca, Adilson Eduardo Presoto, Gustavo Ferron Madeira, Alânnio Barbosa Nóbrega e Augusto Cesar dos Reis Costa, muito obrigado pela revisão do trabalho e pelas contribuições;

- à CAPES e à FAPESP, projeto n° $2019/22531-4$, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro, muito obrigado.

The essence of math is not to make simple things complicated,
but to make complicated things simple

Resumo

No presente trabalho estudamos duas classes de Equações de Choquard com núcleos que apresentam comportamento ilimitado e indeterminado, considerando os operadores fracionário e de Kirchhoff e não linearidades com crescimento exponencial. Utilizando técnicas variacionais e teoremas clássicos é possível obter, sob as condições adequadas, existência e multiplicidade de soluções.

Palavras-chave: Equações de Choquard e Kirchhoff-Choquard, potenciais que mudam de sinal, crescimento exponencial, soluções *ground state*, métodos variacionais.

Abstract

In the present work we deal with two classes of Choquard Elliptic Equations with unbounded and sign-changing potentials, considering Fractional and Kirchhoff operators and nonlinearities with exponential critical growth. Applying variational techniques and classical theorems, under suitable conditions, we prove existence and multiplicity of solutions.

Keywords: Choquard and Kirchhoff-Choquard equations, sign-changing potentials, exponential growth, ground state solutions, variational techniques.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **11**

1.1 Resultados Gerais 11

1.2 Espaços de Sobolev Fracionários 12

1.3 O Espaço X 14

1.4 Desigualdades do tipo Moser-Trudinger 16

1.5 Resultados de Convergência e Limitação 19

2 Equação de Choquard Logarítmica Envolvendo o Operador p-Laplaciano Fracionário **24**

2.1 Framework e Preliminares 25

2.2 Geometria de I e Resultados Técnicos 27

2.3 Existência de Soluções 33

2.4 Multiplicidade de Soluções 35

3 Equação de Kirchhoff-Choquard com Potencial Interno Indefinido **37**

3.1 Noções Preliminares 38

3.2 Propriedades Geométricas e Resultados de Convergência 40

3.3 O caso *não degenerado* $(a > 0)$ 45

3.4 O caso *degenerado* $(a = 0)$ 48

A Resultados Técnicos **52**

A.1 Diferenciabilidade do funcional V_1 52

A.2 Diferenciabilidade do funcional V_2 56

Referências Bibliográficas **59**

Lista de Símbolos

- $\mathscr{C}(E,W)$ é o conjunto das funções contínuas de E em W;
- $|A|$ é a medida de Lebesgue do conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$;
- $||u||_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p dx \right)$ e $||u||_* = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|u(x)|^p dx \right)$;
- $[u]_{s,p}^p = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy$;
- $||u||_\infty = \inf\{a \geq 0; |\{x \in \Omega; |u(x)| > a\}| = 0\}$;
- $||\cdot||$ denotará a norma usual do espaço em questão;
- $L^p(\mathbb{R}^N) = \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}; u$ é mensurável e $||u||_p < \infty\}$;
- $L^\infty(\mathbb{R}^N) = \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}; u$ é mensurável e $||u||_\infty < \infty\}$;
- $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N)\ ;\ [u]_{s,p} < +\infty\}$, $s \in (0,1)$ e $p \geq 2$;
- $H^1(\mathbb{R}^2) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N); \exists f \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ tal que } \int\limits_{\mathbb{R}^N} u\varphi' dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N} f\varphi dx, \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \right\}$;
- s' denotará o expoente conjugado de s, para $s \in (1,\infty]$;
- $|\cdot|$ denotará a norma de um vetor no $\mathbb{R}^N$;
- $f^+ = \max\{f,0\}$ e $f^- = \max\{-f,0\}$;
- B^c, para $B \subset X$, indicará o conjunto completar de B em relação a X;
- $y * g$ indica a translação de g pelo valor real fixado y, isto é, $y * g = g(\cdot - y)$;
- $f * g$ indica a convolução de f e g, dada por $f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$.

Introdução

O estudo de equações diferenciais parciais (EDP) tem apresentado papel de destaque dentro da matemática e vem evoluindo ao longo do tempo devido ao surgimento de novas técnicas que possibilitam a abordagem de problemas mais complexos. Tal importância é justificada pelas diversas aplicações que apresenta em áreas como física, engenharia, química, biologia, economia, dentre outras.

No presente trabalho focaremos no estudo de certas classes de EDPs que apresentam um núcleo logarítmico, o qual surge, originalmente, da versão planar do sistema de Schrödinger-Poisson. Discutiremos a existência e multiplicidade de soluções para equações envolvendo operadores fraciónarios e de Kirchhoff.

O leitor deve observar que a presença do núcleo logarítmico expande consideravelmente o estudo de equações que, tradicionalmente, apresentam apenas núcleos com sinal definido. Tanto a falta de limitação superior e inferiormente, quanto a mudança de sinal, torna relevante o estudo de diferentes operadores frente a tal núcleo, com o adicional de não lineariedades do tipo Moser-Trudinger. A partir dos resultados obtidos, é possível conjecturar futuros resultados que generalizam a teoria para equações de Choquard.

Na sequência, faremos um breve estado da arte dos principais tópicos que serão abordados nesta tese, operadores laplaciano e p-laplaciano fracionários, equações de Kirchhoff, não lineariedades do tipo Moser-Trudinger e equações de Choquard. Falaremos brevemente sobre os primeiros assuntos a fim de focar no nosso tema principal que são as equações de Choquard logarítmicas.

Começamos lembrando o leitor que problemas envolvendo operadores não locais tem aplicações em diversas áreas, tais como otimização, finanças, estratificação de materiais, difusões anômalas, deslocamento de cristais, membranas semipermeáveis, propagação de chamas, leis de conservação, ondas aquáticas, entre outras. Para mais detalhes a respeito destas aplicações, nos referimos a [16,23] e às referências nelas citadas.

Inicialmente, para problemas envolvendo o operador $(-\Delta)^s$, com $N > 2s$ e $s \in (0,1)$, sem a presença do núcleo logarítmico, nos referimos a [18, 29], onde os autores provam a existência de uma solução do tipo *ground state* para uma não linearidade do tipo polinomial subcrítica e, adicionalmente, em [29], estuda-se a regularidade apresentada por tais soluções e obtêm-se algumas de suas propriedades. Além disso, em [55], os autores consideram potenciais coercivos, enquanto em [25], a equação é abordada para potenciais que tendem a zero no infinito. Finalmente, em [26], é garantida a existência de uma solução do tipo *ground state* quando a não linearidade f tem crescimento exponencial maximal.

Para problemas envolvendo o operador p-Laplaciano fracionário, da forma

$$(-\Delta)_p^s u + V(x)|u|^{p-2}u = f(x,u) + \varepsilon h(x) \text{ in } \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

mencionamos os trabalhos [21, 41, 63]. Em [63] os autores consideram a equação (1) com $N = sp$, $s \in (0,1)$, $V(x)$ uma função limitada inferiormente por um valor positivo e, adicionalmente, ou sendo coerciva ou satisfazendo $\frac{1}{V(x)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $f(x,t)$ se comportando como $e^{\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}}$ no infinito, $h \in (W^{s,p}(\mathbb{R}^N))^*$ e $\varepsilon > 0$. Considerando condições adequadas para as funções V, f, h os autores provam a existência de soluções fracas para (1). Em [41], o autor assume que $V \in C(\mathbb{R}^N)$ é limitado inferiormente por um valor positivo, $p \geq 2$, $s \in (0,1)$, $N \geq 2$, $h \equiv 0$ e f p-superlinear. Fazendo uso do Teorema do Passo da Montanha para a condição de Cerami, ele é capaz de provar que existe uma solução não trivial e radialmente simétrica para (1). Finalmente, em [21], os autores consideram $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ possivelmente indefinido, $f(x,u) = w_1(x)|u|^{q-2}u - w_2(x)|u|^{r-2}u$ uma não linearidade côncava e convexa, para $0 < s < 1 < q < p < r$, e $h \equiv 0$. Inicialmente, eles provam que $(-\Delta)_p^s u = \lambda V(x)|u|^{p-2}u$ possui uma sequência infinita de autovalores e que o primeiro autovalor é simples. Então, a partir destes resultados, garantem a existência de infinitas soluções para (1). Para este tópico, recomendamos, ainda, a referência [8].

A literatura das equações de Kirchhoff e os problemas elípticos relacionados a elas é extremamente interessante e consideravelmente grande. Como um exemplo, podemos citar [37] onde os autores consideram a seguinte equação

$$\begin{cases} -\left(a + b\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + u = f(x,u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

e provam a existência de uma sequência de funções radiais $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $I(u_k) \to \infty$, quando $k \to \infty$. Para mais detalhes a respeito de equações de Kirchhoff e sua vasta bibliografia, referimos o leitor aos trabalhos [43, 44, 49, 54] e as referências neles citadas.

Na sequência, discutiremos referências envolvendo equações de Choquard que são a principal característica abordada neste trabalho. Inicialmente, lembramos o leitor que a seguinte equação de Choquard, ou equação não linear de Schrödinger-Newton

$$-\Delta u + Q(x)u + \gamma(\Gamma_N * |u|^2)u = f(u), \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

$p > 2, b > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, onde Γ_N é a solução fundamental do Laplaciano,

$$\Gamma_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{N(2-N)\sigma_N}|x|^{2-N} & \text{se } N \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln|x| & \text{se } N = 2, \end{cases}$$

tem sido extensivamente estudada ao longo dos anos, no caso $N = 3$, devido a sua relevância na Física. Curiosamente, apesar do nome atribuído a tais equações, as mesmas foram estudas pela primeira vez por Fröhlich e Pekar em [31, 32, 61], como forma de descrever a mecânica quântica de polaron em repouso, no caso particular em que $Q(x) \equiv Constante > 0$ e $\gamma > 0$. Então, em 1976, Choquard introduziu o mesmo tipo de equação no estudo de um elétron preso em seu buraco. Além disso, Penrose derivou a equação (2) enquanto discutia a respeito do auto colapso gravitacional de um sistema mecânico-quântico em [51]. Recomendamos, ainda, o trabalho [47].

Por outro lado, no caso $N = 2$, a bibliografia encontrada é mais escassa. Em [20], os autores provam a existência de uma solução do tipo *ground state*, usando a variedade de Nehari, e garantem a existência de infinitas soluções geometricamente distintas, quando $Q : \mathbb{R}^2 \to (0,\infty)$ é contínuo e $\mathbb{Z}^2$-periódico, $\mu > 0$ e a não linearidade f é da forma $f(u) = b|u|^{p-2}u$, com $b \geq 0$ e $p \geq 4$. Assim, na intenção de preencher a lacuna deixada, a saber, o caso $2 < p < 4$, o trabalho [28] considera a equação (3) quando $Q(x) \equiv Constante > 0$, $\mu > 0$ e $f(u) = |u|^{p-2}u$, com $2 < p < 4$, e prova a existência de uma soluções no nível do Passo da Montanha e do tipo *ground state*. Além disso, garantem que, no caso em que $p \geq 3$, ambos os níveis coincidem e provêm uma caracterização para o mesmo. Finalmente, mencionamos o trabalho [19], onde os autores provam a existência de solução do tipo *stationary waves* com norma prescrita, considerando $\gamma \in \mathbb{R}$. Tais problemas tem grande relevância dentro do estudo de sistemas onde há conservação de massa.

É interessante destacar que, do ponto de vista físico, os termos locais presentes do lado direito da equação (2), tais como $b|u|^{p-2}u$, com $b \in \mathbb{R}$ e $p > 2$, usualmente aparecem nas equações de Schrödinger como uma forma de modelar a interação entre as partículas.

Finalmente, enfatizamos que não linearidades com comportamento exponencial frequentemente aparecem em problemas de áreas aplicadas, por exemplo, física e biologia, o que sugere a importância da inclusão das mesmas no estudo de novas classes de EDPs. Neste sentido, citamos alguns trabalhos que abordam não linearidades do tipo Moser-Trudinger [17, 39, 49, 50] e as referências nelas citadas.

Como mencionado anteriormente, neste trabalho abordaremos diferentes classes de equações logarítmicas de Choquard, com a presença de não linearidades de crescimento exponencial. Na sequência apresentaremos os principais resultados obtidos neste trabalho e algumas características básicas necessárias ao estudo.

Começaremos estudando a existência e multiplicidade de soluções para a seguinte equação de Choquard logarítmica

$$(-\Delta)^s_p u + |u|^{p-2}u + (\ln|\cdot| * |u|^p)|u|^{p-2}u = f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

onde $N = sp$, $s \in (0,1)$, $p > 2$, $a = 1$, $\lambda = 1$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, com primitiva $F(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$. Mais precisamente, considerando uma não linearidade com crescimento exponencial crítico, garantiremos uma solução no nível do Passo da Montanha e uma solução do tipo *ground state*, no sentido de que esta solução será aquela não trivial com o menor nível de energia. Por outro lado, considerando um crescimento subcrítico, provaremos que (3) possuem infinitas soluções, via a teoria de gênero.

Para obter os resultados de existência, faremos uso de técnicas variacionais, a qual consiste, basicamente, em associar um funcional adequado a equação estuda e procurar por pontos críticos para o mesmo. Como veremos com mais detalhes no Capítulo 2, o funcional associado a (3), $I : W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, é dado por

$$I(u) = \frac{1}{p}||u||^p + \frac{1}{2p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(|x-y|)|u(x)|^p |u(y)|^p dxdy - \int\limits_{\mathbb{R}^N} F(u)dx. \tag{4}$$

O leitor pode observar que, devido ao termo envolvendo a função logarítmica, tal funcional não está bem definido em todo o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Como consequência, precisaremos considerar um subespaço deste, a saber,

$$X = \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \; ; \; \int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|u(x)|^p dx < +\infty \right\}. \tag{5}$$

É possível verificar que,

$$||u||_* = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|u(x)|^p dx$$

define uma norma em X, assim como $||\cdot||_X^p = ||\cdot||^p + ||\cdot||_*^p$, e que $(X, ||\cdot||_X)$ é um espaço de Banach reflexivo, separável e uniformemente convexo. Tal definição será usual no estudo dos demais operadores, visto que este é o espaço mais adequado para a busca de soluções de problemas logarítmicos.

Na sequência relembramos aos leitores as definições de funções com comportamento exponencial crítico e subcrítico. Tendo em vista o caso fracionário, com $p > 2$, $s \in (0,1)$ e $sp = N$, introduzimos a seguinte notação, para $\alpha > 0$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$R(\alpha,t) = \exp(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}}) - S_{k_p-2}(\alpha,t) = \sum_{k_p-1}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} |t|^{\frac{N}{N-s}k}, \tag{6}$$

onde $S_{k_p-2}(\alpha,t) = \sum\limits_{k=0}^{k_p-2} \frac{\alpha^k}{k!} |t|^{\frac{N}{N-s}k}$ e $k_p = \min\{k \in \mathbb{N} \; ; \; k \geq p\}$.

Dizemos que uma função h tem crescimento exponencial **subcrítico** no infinito se

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{h(t)}{R(\alpha,t)} = 0 \;\; \text{, para todo } \; \alpha > 0,$$

e dizemos que h tem crescimento exponencial **crítico** (ou α_0-crítico) no infinito, se existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{h(t)}{R(\alpha,t)} = \begin{cases} 0 \;, & \forall \; \alpha > \alpha_0. \\ +\infty, & \forall \; \alpha < \alpha_0, \end{cases}$$

No caso particular do espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$ (de maneira similar para $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$) dizemos que a função h tem crescimento exponencial **subcrítico** no infinito, se

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{h(t)}{e^{\alpha |t|^2} - 1} = 0 \;\; \text{, para todo } \; \alpha > 0,$$

e dizemos que h tem crescimento exponencial α_0**-crítico** no infinito, se

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{h(t)}{e^{\alpha|t|^2}-1}=\begin{cases}0, & \forall\ \alpha>\alpha_0\\ \infty, & \forall\ \alpha<\alpha_0\end{cases}.$$

No que segue, apresentaremos algumas condições sobre a função f usualmente encontradas em trabalhos envolvendo não linearidades do tipo Moser-Trudinger, tais como [10,26,27]. Assumiremos que f satisfaz:

(f_1) $$f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0)=0, \text{tem crescimento exponencial crítico.}$$

(f_2) $$\lim_{|t|\to 0}\frac{f(t)}{|t|^{p-2}t}=0.$$

(f_3) $$\text{Existe }\ \theta>2p\ \text{ tal que }\ f(t)t\geq\theta F(t)>0, \forall\ t>0.$$

(f_4) $$\text{Existem }\ q>2p\ \text{ e }\ C_q>\frac{[2(q-p)]^{\frac{q-p}{p}}}{q^{\frac{q}{p}}}\frac{S_q^q}{\rho_0^{q-p}}\ \text{ tais que }\ F(t)\geq C_q|t|^q, \forall t\in\mathbb{R},$$

onde

$$S_q(v)=\frac{||v||}{||v||_q}\quad \text{e}\quad S_q=\inf_{v\in\mathscr{A}}S_q(v)\geq\inf_{v\neq 0}S_q(v)>0,$$

com $S_q>0$ sendo a constante obtida pelas imersões de Sobolev, Teorema 1.10, $\mathscr{A}=\{u\in X\setminus\{0\}\ ;\ V_0(u)\leq 0\}$ e $\rho_0>0$ é um valor real suficientemente pequeno, conforme vamos conferir no Lema 2.5.

Desta forma, estamos aptos a enunciar nosso primeiro resultado.

Teorema 0.1. *Suponha* $(f_1)-(f_4)$, $q>2p$ *e* $C_q>0$ *suficientemente grande. Então,*

(i) O problema (2.3) tem uma solução não trivial $u\in X$ *tal que*

$$I(u)=c_{mp}=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],X)\ ;\ \gamma(0)\ ,\ I(\gamma(1))<0\}$.

(ii) O problema (2.3) tem uma solução ground state não trivial $u\in X$*, isto é,* u *satisfaz*

$$I(u)=c_g=\inf\{I(v)\ ;\ v\in X\ \text{ é uma solução de (2.3)}\}.$$

Nossa estratégia para provar o Teorema 0.1 consiste em encontrar uma sequência de Cerami no nível do Passo da Montanha para I. A fim de provar a limitação de tal sequência em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, a condição (f_3) será essencial.

Além disso, tendo em vista a presença do termo com não linearidade exponencial, a condição (f_4) se faz necessária para garantir que as sequências de Cerami em questão satisfazem as estimativas envolvendo Moser-Trudinger.

Para o segundo resultado principal, estaremos interessados na multiplicidade de soluções. Como faremos uso da teoria de gênero, devido a natureza de nossa não linearidade, precisaremos alterar algumas hipóteses sobre f, como segue.

(f_1') $\quad f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0) = 0, f$ é ímpar e possui crescimento exponencial crítico.

Consequentemente, temos o seguinte resultado.

Teorema 0.2. *Suponha que* $(f_1'),(f_2),(f_3),(f_4)$. *Então, o problema (2.3) tem infinitas soluções.*

Apesar de considerarmos $p > 2$ acima, provamos também teoremas análogos para o operador Laplaciano fracionário. Algumas demonstrações diferem no que envolve resultados técnicos clássicos enquanto o *framework* apresenta uma estrutura que facilita a obtenção de alguns outros lemas.

Observação 0.3. Os resultados apresentados nos Teoremas 0.1 e 0.2 são provenientes do artigo [10]. Mais ainda, o caso particular em que consideramos o operador Laplaciano fracionário se encontra no artigo [11], aceito para publicação em *Palestine Journal of Mathematics* e a versão com o operador Laplaciano pode ser encontrada em [12], aceito para publicação em *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. Ressaltamos, ainda, que na presente tese abordaremos a questão da multiplicidade de soluções para o problema (3) de um modo distinto ao do artigo [10], visto que posteriormente foi possível obter um resultado que nos permitiu utilizar teoremas do tipo Passo da Montanha, a saber Lema 2.14.

Na sequência, apresentaremos os principais resultados envolvendo o operador de Kirchhoff. Nesta parte do trabalho, além de considerarmos um operador mais geral, também buscamos generalizar o potencial interno que aparece na equação, de modo que a função logarítmica aparece como um caso particular. Esta é uma primeira tentativa de generalização, esperamos que com este primeiro passo muitos novos resultados possam surgir na literatura.

Nos dedicaremos a estudar a existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de Equações de Kirchhoff-Choquard

$$-M(||\nabla u||_2^2)\Delta u + Q(x)u + \mu(V(|\cdot|) * u^2)u = f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \tag{7}$$

onde $\mu > 0$, $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Kirchhoff, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é um potencial não-negativo, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um potencial contínuo, que muda de sinal e possivelmente ilimitado superior e inferiormente e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com primitiva $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

Para tanto, necessitaremos impor algumas condições sobre Q, V, M e f. Primeiramente, relembramos a seguinte notação $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ t > 0\}$. Neste trabalho, consideraremos a seguinte função de Kirchhoff

(M) $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $M(t) = a + bt$, para todo $t \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $b \geq 0$ ou $a = 0$ e $b > 0$.

O caso em que $a > 0$ é chamado de **não degenerado**, enquanto que a situação em que $a = 0$ é dita ser o caso **degenerado**. Neste trabalho estaremos considerando ambos os casos, devidamente assinalados em casa passo.

Visto que nossa intenção é resolver problemas que apresentam um potencial interno que muda de sinal e é ilimitado inferiormente, consideraremos que V possui parte negativa não trivial, $V^- = \max\{-V, 0\}$. Mas, observamos que alguns dos argumentos e técnicas aplicadas podem ser adaptados para potenciais positivos. Lembramos, ainda, que a parte positiva de V é definida como $\max\{V, 0\}$. Assim, assumimos que $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua verificando as seguintes condições:

(V_1) Existem funções reais $a_1, a_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tais que $a_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $a_{1,0} = \inf\limits_{t \geq 2} a_1(t) > 0$, $a_{2,0} = \inf\limits_{t \in \mathbb{R}^+} a_2(t) > 0$ e

$$a_1(t)\ln(1+t) \leq V^+(t) \leq a_2(t)\ln(1+t), \forall\, t > 0.$$

(V_2) Existe uma função real $a_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $a_3(t) > 0$ em um subconjunto de $\mathbb{R}^+$ com medida positiva,

$$V^-(t) \leq \frac{a_3(t)}{t} \quad \forall\, t > 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} a_3 \in L^\infty(\mathbb{R}), \\ \text{ou} \\ a_3(t) = t^{-\lambda}, \text{ para algum } \lambda \in [1,3) \text{ e para todo } t > 0, \end{cases}$$

(V_3) Existe um subconjunto aberto $\mathscr{I} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $V(t) < 0$ para todo $t \in \mathscr{I}$.

É interessante observar que, exemplos naturais para potenciais V, satisfazendo as condições $(V_1) - (V_3)$, possuem a seguinte geometria: $V(|x|) \to \infty$ com $|x| \to \infty$ e, ou sua parte negativa é limitada ou $V(|x|) \to -\infty$ com $|x| \to 0$. Tal comportamento será estudado no Lema 1.20.

Antes de discutirmos o restante das condições impostas sobre a equação (7), apresentamos alguns exemplos para V. Observe que, no exemplo **(b)**, a parte negativa do potencial é limitada.

Exemplo 0.4. **(a)** O exemplo mais importante para o potencial V é o núcleo logarítmico, $V(|x|) = \ln|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, devido a seu surgimento natural no sistema de Schrödinger-Poisson em $\mathbb{R}^2$. Note que a condição (V_1) é satisfeita com $a_2(t) \equiv 1$ e

$$a_1(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln t}{2\ln(1+t)} & , \text{ se } t \geq 2, \\ \dfrac{\ln 2}{2\ln 3}(t-1), & \text{ se } 1 \leq t \leq 2, \\ 0 & , \text{ se } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

De fato, considere as funções $g,h:[1,2]\to\mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por

$$g(t)=\frac{\ln 2}{2\ln 3}(t-1)\ln(t+1) \quad \text{e} \quad h(t)=\ln t, \forall t\in[1,2].$$

Derivando tais funções, obtemos

$$g'(t)=\frac{\ln 2}{2\ln 3}\ln(t+1)+\frac{\ln 2}{2\ln 3}\frac{t-1}{t+1} \quad \text{e} \quad h(t)=\frac{1}{t}, \forall t\in[1,2].$$

Consequentemente, $g'(t)>0$ e $h'(t)>0$ para todo $t\in[1,2]$, donde g e h são crescentes. Mais ainda, note que $g(1)=h(1)=0$, $g(2)=\dfrac{(\ln 2)^2}{2\ln 3}\approx 0,22$ e $h(2)=\ln 2\approx 0,69$. Tais considerações nos deixam com duas possibilidades:

(1) $g(t)\le h(t)$ para todo $t\in[1,2]$;

(2) Existe $t_0\in(1,2)$ tal que $g(t_0)=h(t_0)$ e $h(t)<g(t)$ para todo $t\in(1,t_0)$.

Se o caso **(1)** ocorre, então não há o que demonstrar. Suponhamos que vale **(2)**. Observe que

$$\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\ln t}=1, \quad \lim_{t\to 1}\ln(t+1)=\ln 2 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 1}\frac{g(t)}{h(t)}=\frac{(\ln 2)^2}{2\ln 3}.$$

Mas, $\dfrac{g(t)}{h(t)}>1$ para todo $t\in(1,t_0)$ e, por conseguinte, $0,22\ge 1$ quando $t\to 1$, o que é um absurdo. Logo, tal valor t_0 não existe e temos o resultado desejado.

As condições (V_2) e (V_3) são verificadas considerando $a_3,a_4,a_5\equiv 1$.

(b) Defina $V(|x|)=|x|^\alpha-|x|^\beta$, para $0<\beta<\alpha<1$ escolhidos de maneira adequada.

(c) É possível, ainda, considerar exemplos mais "exóticos" para V, tal como $V:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ dado por

$$V(|x|)=\begin{cases} -\dfrac{1}{|x|}, & \text{if } 0<|x|\le 1\\ 2|x|-3, & \text{if } 1\le |x|\le \dfrac{3}{2}\\ \ln\left(|x|-\dfrac{1}{2}\right), & \text{if } \dfrac{3}{2}\le |x|.\end{cases}$$

Agora, para o potencial externo, $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, consideramos a sequinte condição.

(Q) $Q\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^2}Q(x)=Q_0>0$ e existe $p\in(1,\infty]$ tal que $Q\in L^p(\mathbb{R}^2)$.

Finalmente, para a não linearidade f, como no primeiro problema, consideramos:

(f_1) $\quad f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0)=0$ e possui crescimento exponencial crítico com $\alpha_0=4\pi$.

(f_2) $$\lim_{|t|\to 0}\frac{|f(t)|}{|t|^\tau}=0, \text{ para algum } \tau>1.$$

(f_3) $\quad$ Existe $\theta\ge 4$ tal que $f(t)t\ge\theta F(t)>0$, para todo $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(f_4) Existem $q > 4$ e $C_q > 0$ tais que $F(t) \geq C_q|t|^q$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora estamos aptos a enunciar nosso primeiro resultado principal para esta classe de equações. Consideraremos inicialmente o caso não degenerado.

Teorema 0.5. *Suponha* $(V_1)-(V_3)$, (Q), $(f_1)-(f_4)$, $a > 0$, $b \geq 0$, $\mu > 0$, $q > 4$ *e* $C_q > 0$ *suficientemente grande. Então,*

(a) o problema (7) *tem uma solução não trivial no nível do Passo da Montanha, isto é, existe* $u \in X \setminus \{0\}$ *tal que* u *é um ponto crítico para* I *e* $I(u) = c_{mp}$, *com*

$$c_{mp} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)), \tag{8}$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],X)\ ;\ \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\}$.

(b) O problema (7) *possui uma solução não trivial do tipo ground state, no sentido que, existe* $u \in X \setminus \{0\}$ *um ponto crítico para* I *que satisfaz*

$$I(u) = c_g = \inf\{I(v)\ ;\ v \in \mathscr{K}\}, \text{ onde } \mathscr{K} = \{v \in X \setminus \{0\}\ ;\ I'(v) = 0\}.$$

Agora, a fim de obter a multiplicidade de soluções para o problema (7), iremos aplicar uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. Para que isto seja possível, precisamos alterar a condição (f_1) como segue.

(f_1') $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0) = 0, f$ é ímpar e possui crescimento exponencial crítico com $\alpha_0 = 4\pi$.

Exemplo 0.6. Como um protótipo para a não linearidade f que satisfaça as condições $(f_1)-(f_4)$, podemos considerar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = C_q \begin{cases} t^q & , \text{ se } 0 \leq t \leq 1 \\ t^q e^{4\pi(t^2-1)}, & \text{se } t > 1 \end{cases},$$

para $C_q > 0$ suficientemente grande e $q > 3$, e considerando sua extensão ímpar.

Teorema 0.7. *Suponha* $(V_1)-(V_3)$, (Q), (f_1'), $(f_2)-(f_4)$, $a > 0$, $b \geq 0$, $\mu > 0$, $q > 4$ *e* $C_q > 0$ *suficientemente grande. Então, o problema* (7) *possui infinitas soluções.*

No caso degenerado, será necessário fazer algumas alterações nas condições impostas sobre a função f. Primeiramente, a fim de garantir que I satisfaça a geometria do Passo da Montanha, pedimos que

(f_2') $$\lim_{|t|\to 0} \frac{|f(t)|}{|t|^\tau} = 0, \text{ para algum } \tau > 3.$$

Além disso, a fim de garantir a limitação de sequências de Cerami em $H^1(\mathbb{R}^2)$, precisamos considerar que

(f_3') existe $\theta \geq 8$ tal que $f(t)t \geq \theta F(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teorema 0.8. *Suponha $(V_1)-(V_3)$, (Q), $(f_1),(f_2'),(f_3'),(f_4)$, $a=0$, $b>0$, $q>4$ e $C_q>0$ suficientemente grande. Então,*

(a) existe um valor $\mu_*>0$ tal que, para todo $\mu \in (0,\mu_*)$, o problema (7) possui uma solução não trivial no nível do Passo da Montanha, isto é, existe $u \in X \setminus \{0\}$ um ponto crítico para I satisfazendo $I(u)=c_{mp}$, onde

$$c_{mp} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

com $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],X) \ ; \ \gamma(0)=0 \text{ e } I(\gamma(1))<0\}$.

(b) Existe um valor $\mu_{**} \in (0,\mu_*]$ tal que, para todo $\mu \in (0,\mu_{**})$, o problema (7) possui uma solução não trivial do tipo ground state, no sentido que, existe uma função $u \in X \setminus \{0\}$ que é um ponto crítico para I e satisfaz

$$I(u) = c_g = \inf\{I(v) \ ; \ v \in \mathscr{K}\}, \quad \text{onde} \quad \mathscr{K} = \{v \in X \setminus \{0\} \ ; \ I'(v)=0\}.$$

Observação 0.9. Os Teoremas 0.5, 0.7 e 0.8 se encontram na referência [13], aceito para publicação em *Rendiconti Lincei Matematica e Applicazioni*.

Para finalizar esta introdução, apresentaremos a estrutura do trabalho. No Capítulo 1, faremos uma exposição do *framework* dos problemas e de resultados clássicos e técnicos essenciais na obtenção de nossos resultados principais. No Capítulo 2, focaremos na equação (3), com as demonstrações dos primeiros dois resultados principais. Além disso, discutiremos o caso do operador Laplaciano fracionário. Finalmente, no Capítulo 3, apresentaremos as demonstrações dos resultados principais envolvendo a equação de Kirchhoff.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados básicos que utilizaremos no decorrer do trabalho. Dividiremos entre resultados clássicos encontrados na bibliografia e resultados técnicos relativos ao *framework* dos problemas apresentados nos capítulos subsequentes.

1.1 Resultados Gerais

Nesta primeira seção apresentaremos alguns resultados gerais utilizados ao longo do trabalho, clássicos encontrados em livros e artigos das áreas de análise funcional, métodos variacionais e EDPs.

Definição 1.1. Sejam E um espaço de Banach e $J : E \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que $(u_n) \subset E$ é uma sequência de **Palais-Smale** para J no nível $d \in \mathbb{R}$, abreviadamente uma sequência $(PS)_d$, se $J(u_n) \to d$ e $||J'(u_n)|| \to 0$, quando $n \to +\infty$.

Definição 1.2. Sejam E um espaço de Banach e $J : E \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que $(u_n) \subset E$ é uma sequência de **Cerami** para J no nível $d \in \mathbb{R}$, abreviadamente uma sequência $(PSC)_d$, se $J(u_n) \to d$ e $||J'(u_n)||(1+||u_n||_E) \to 0$, quando $n \to +\infty$.

Definição 1.3. Dizemos que o funcional J satisfaz a condição $(PS)_d$ se, qualquer sequência $(PS)_d$ para J possui uma subsequência que converge forte em E. Analogamente, para sequências de Cerami.

O próximo resultado é, essencialmente, um corolário do Teorema de Egorov.

Lema 1.4. *Sejam $p \geq 2$, $u \in L^p(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e $(u_n) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ tais que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Então, existem $R > 0$, $\delta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset B_R$, tais que Ω é mensurável, $|\Omega| > 0$ e $|u_n(x)| > \delta$, para todo $x \in \Omega$ e para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Veja o Teorema 2.33 de [30] $\square$

Teorema 1.5. *Sejam $\mathscr{M}$ um espaço de medida σ-finito e $(u_k) \subset L^p(\mathscr{M})$, com $1 \leq p < +\infty$, satisfazendo:*

(i) $u_k(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* $\mathscr{M}$*;*

(ii) $||u_k||_p \to ||u||_p$*, quando* $k \to \infty$*.*

Então, $||u_k - u||_p \to 0$*, quando* $k \to \infty$*.*

Demonstração. Veja [38, Lema 4.6, Corolário 4.7] □

Teorema 1.6 (Desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev (HLS))**.** *Sejam* $0 \leq \alpha < N/p'$*,* $0 \leq \beta < N/t'$ *e* $0 < \lambda < N$ *satisfazendo* $1/p + 1/t + (\lambda + \alpha + \beta)/N = 2$*. Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^t(\mathbb{R}^N)$*, então existe uma constante* $P_{\alpha,\beta,p,\lambda,N} > 0$*, tal que*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} g(x)V(x,y)f(y)dxdy \right| \leq P_{\alpha,\beta,p,\lambda,N}||f||_p||g||_t,$$

onde $V(x,y) = |x|^{-\beta}|x-y|^{-\lambda}|y|^{-\alpha}$*, para todo* $x,y \in \mathbb{R}^N$*.*

Demonstração. Veja [45, 58]. □

Definição 1.7. Sejam $(E, ||\cdot||)$ um espaço de Banach real reflexivo de dimensão d, com $1 \leq d \leq +\infty$, e $(E^*, ||\cdot||^*)$ seu dual. Considere a equação não linear

$$T_p u = f(u)$$

para um operador $T \in C(E, E^*)$ e $p \in (1, +\infty)$. Dizemos que T_p tem a propriedade (S) se, para qualquer sequência $(u_n) \subset E$ satisfazendo $u_n \rightharpoonup u$ em E e $T(u_n)(u_n - u) \to 0$, existe uma subsequência, (u_{n_k}), tal que $u_{n_k} \to u$ em E.

Proposição 1.8. *Sejam* $(E, ||\cdot||)$ *um espaço de Banach real reflexivo de dimensão d, com* $1 \leq d \leq +\infty$*,* $p \in (1, +\infty)$ *e* $T_p \in C(E, E^*)$ *um operador. Se E é uniformemente convexo e* T_p *verifica*

$$\langle Tu, v\rangle \leq r||u||^{p-1}||v|| \quad e \quad \langle T_p u, u\rangle = r||u||^p, \forall\, u, v \in E,$$

para algum $r > 0$*, então* T_p *tem a propriedade* (S)*.*

Demonstração. Veja [52, Proposição 1.3]. □

1.2 Espaços de Sobolev Fracionários

Começaremos esta seção apresentando a definição dos operadores fracionários e construindo os espaços adequados para, em seguida, apresentar os resultados mais relevantes para nosso trabalho. Relembramos que, dada $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, o operador p-Laplaciano fracionário, $(-\Delta)_p^s$, é dado por

$$(-\Delta)_p^s u(x) = C(N,s) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x-y|^{N+ps}} dy\ , \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

onde a constante de normalização $C(N,s)$ é dada por

$$C(N,s) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(x_1)}{|x|^{N+2s}}\, dx \right)^{-1},$$

veja em [23].

No caso particular em que $p = 2$ e $s = 1/2$, definimos $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ por

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u(x) = C\left(1, \frac{1}{2}\right) \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}\backslash B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^2} dy \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

onde, uma vez mais, a constante de normalização $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$ é devidamente definida em [23] e $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ denota o espaço de Schwartz. Equivalentemente, para $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, por [23, Proposição 3.3], se $\mathscr{F}$ denota a Transformada de Fourier, então

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = \mathscr{F}^{-1}(|\xi|(\mathscr{F}u)) \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, considerando [23, Proposição 3.6], temos

$$||(-\Delta)^{\frac{1}{4}} u||_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^2} dxdy \ , \ \forall\, u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}),$$

ainda que, usualmente, a constante de normalização $\frac{1}{2\pi}$ seja omitida nos trabalhos da área.

Agora, para cada $s \in (0,1)$ e $p \geq 2$, consideramos o espaço de Sobolev

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) \ ; \ [u]_{s,p} < +\infty\}, \quad \text{onde} \quad [u]_{s,p}^p = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}} dxdy,$$

é a conhecida semi-norma de Gagliardo. É conhecido da literatura que o espaço $(W^{s,p}(\mathbb{R}^N), ||\cdot||)$, onde $||\cdot||^p = [\cdot]_{s,p}^p + ||\cdot||_p^p$, é um espaço de Banach uniformemente convexo, reflexivo e separável (veja, por exemplo, [54, Teorema A.3]). No caso em que $p = 2$ e $s = 1/2$, o espaço $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ é também um espaço de Hilbert. Relembramos, ainda, que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ (veja [1, Teorema 7.38]).

Para mais detalhes a respeito dos operadores $(-\Delta)_p^s$ e os espaços $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, com $p \geq 2$ e $s \in (0,1)$, nos referimos a $[1,5,22,23,35,53]$.

Ao longo de todo este trabalho, omitiremos as constantes de normalização envolvidas com os operadores fracionários, por simplicidade. A seguir apresentamos um resultado de imersão.

Definição 1.9. Para quaisquer $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$, dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um **Domínio de Extensão** para $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ se existe uma constante positiva $C = C(N,p,s,\Omega)$ tal que, para toda função $u \in W^{s,p}(\Omega)$ existe $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ com $\tilde{u}(x) = u(x)$, para todo $x \in \Omega$, e $||\tilde{u}|| \leq C||u||_{W^{s,p}(\Omega)}$.

Teorema 1.10. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp = N$. Então, o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso no espaço $L^\omega(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $\omega \in [p,+\infty)$.*

Demonstração. Veja [23, Teorema 6.9]. □

Teorema 1.11. *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$, $q \in [1,p]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio de extensão para $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e $\mathscr{I} \subset L^p(\Omega)$ um subconjunto limitado. Suponha que*

$$\sup_{g \in \mathscr{I}} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|g(x)-g(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy < +\infty.$$

Então, $\mathscr{I}$ é pré-compacto em $L^q(\Omega)$.

Demonstração. Veja [23, Teorema 7.1]. □

Para que possamos provar a existência de pontos críticos para o funcional associado ao problema 3, utilizar a propriedade (S) será essencial. Para tanto, consideramos o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ com a norma usual estabelecida acima e definimos os operadores $A : W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \to [W^{s,p}(\mathbb{R}^N)]^*$ dado por

$$A(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \ , \ \forall\, u,v \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$$

e $\tilde{A} : W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \to [W^{s,p}(\mathbb{R}^N)]^*$ definido por

$$\tilde{A}(u)(v) = A(u)(v) + \int_{\mathbb{R}^N} a|u|^{p-2}uvdx \ , \ \forall\, u,v \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N),$$

para $a > 0$. É possível verificar que $\tilde{A}(u)(v) \leq ||u||^{p-1}||v||$ e $\tilde{A}(u)(u) = ||u||^p$, para todas $u,v \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, como $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ é uniformemente convexo, da Proposição 1.8, $\tilde{A}$ tem a propriedade (S).

1.3 O Espaço X

Na presente seção, abordaremos com mais detalhes a construção do espaço X mencionado na introdução. Lembramos que, devido a presença do logarítmo, este passa a ser o espaço ideal para a busca de soluções. Faremos a construção para os espaços $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, com $p \geq 2$, $s \in (0,1)$ e $N \geq 2$, mas resultados análogos são válidos considerando os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $p \geq 2$, $N \geq 2$.

Inspirados pelas ideias de [20, 60], consideramos o seguinte espaço

$$X = \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \ ; \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|u(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Lema 1.12. *Considere $||\cdot||_* : X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$||u||_* = \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|u(x)|^p dx.$$

Então, $||\cdot||_*$ define uma norma em X.

Um próximo passo natural é garantir que X possui as propriedades essenciais de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Para tanto, uma norma mais adequada se faz necessária. Começaremos definindo a medida $\eta : \mathscr{L} \to [0,+\infty]$ por

$$\eta(E) = \int_E \ln(1+|x|)\, dx,$$

onde $\mathscr{L}$ é a σ-álgebra de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$. Assim, podemos considerar o seguinte espaço de medida $L^p(\mathbb{R}^N, \mathscr{L}, \eta)$.

Lema 1.13. *Para cada função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, Lebesgue mensurável, verifica-se*

$$||u||_{L^p(\mathbb{R}^N,\mathscr{L},\eta)} = ||u||_*.$$

Corolário 1.14. *X é um espaço de Banach munido com a norma $||\cdot||_X^p = ||\cdot||^p + ||\cdot||_*^p$.*

Demonstração. Do Teorema de Riesz-Fischer [30], da definição dos espaços L^p e do fato de que $X = W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N, \mathscr{L}, \eta)$, segue a validade do corolário. □

Lema 1.15. *O espaço X é uniformemente convexo e reflexivo.*

Demonstração. A prova de que X é uniformemente convexo pode ser feita como em [5, Proposição A.6]. Mais ainda, de [15, Teorema 3.31], vê-se que X é reflexivo. □

Observação 1.16. No caso particular do espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$ (de modo similar, $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$), temos que X é um espaço de Hilbert com o termo $||\cdot||_*$ da norma de X sendo proveniente do seguinte produto interno

$$\langle u,v\rangle_* = \int_{\mathbb{R}^2} \ln(1+|x|)u(x)v(x)\, dx.$$

Proposição 1.17. *Sejam $p \geq 2$ e $s \in (0,1)$ tais que $sp = N$. Então, o espaço X está continuamente imerso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e compactamente imerso em $L^\omega(\mathbb{R}^N)$, para todo $\omega \geq p$.*

Demonstração. A imersão contínua segue de maneira natural do fato de $||\cdot|| \leq ||\cdot||_X$. Vejamos que vale a imersão compacta. Observe que é suficiente provar para uma sequência que converge fraco para zero.

Caso $\omega = p$: Seja $(u_n) \subset X$ tal que $u_n \rightharpoonup 0$ em X. Agora, como $\ln(1+|x|) \to +\infty$ quando $|x| \to +\infty$, podemos considerar uma sequência $(R_k) \subset \mathbb{R}^+$ ilimitada e crescente tal que $\ln(1+|x|) > k$ se $|x| \geq R_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\int_{B_{R_k}^c} |u_n|^p dx \leq \frac{1}{k} \int_{B_{R_k}^c} \ln(1+|x|)|u_n|^p dx \leq \frac{||u_n||_*^p}{k} \leq \frac{C}{k},$$

para todos $n,k \in \mathbb{N}$ e uma constante positiva C tal que $||u_n||_X \leq C$.

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup 0$ em X, da imersão contínua, $u_n \rightharpoonup 0$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, para todo $R > 0$, arbitrário porém fixado, $u_n \rightharpoonup 0$ em $W^{s,p}(B_R)$. Pelo Teorema 1.11, $u_n \to 0$ em $L^p(B_R)$. Consequentemente, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos $R_j \in \mathbb{R}^+$ e existe $u_{n_j} \in \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\int_{B_{R_j}} |u_{n_j}|^p dx < \frac{1}{j}.$$

Desta forma, obtemos uma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$||u_{n_j}||_p = \int_{B_{R_j}^c} |u_{n_j}|^p dx + \int_{B_{R_j}} |u_{n_j}|^p dx \leq \frac{C}{j} + \frac{1}{j} \to 0,$$

quando $j \to +\infty$. Logo, o lema é válido para $\omega = p$.

Caso $\omega > p$: Sejam $u \in X$ e $(u_n) \subset X$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ em X. Defina $v_n = u_n - u$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $v_n \rightharpoonup 0$ em X.

Agora, como $X \hookrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema 1.10, $(v_n) \subset L^{t+1}(\mathbb{R}^N)$, para todo $t \geq 2$, e existe uma constante $C > 0$ tal que $||v_n||_{t+1} \leq C||v_n||$, para cada t fixado e todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela desigualdade de interpolação, existe $\theta \in [0,1]$ tal que

$$||v_n||_t \leq ||v_n||_p^\theta ||v_n||_{t+1}^{1-\theta} \leq C||v_n||_p^\theta ||v_n||^{1-\theta}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mais ainda, como $v_n \rightharpoonup 0$ em X, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que $||v_n|| \leq C_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$||v_n||_t \leq CC_2^{1-\theta}||v_n||_p^\theta \to 0,$$

pelo caso anterior. Logo, $u_n \to u$ em $L^t(\mathbb{R}^N)$, como queríamos demonstrar.

Observação 1.18. O resultado análogo para os espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é feito utilizando as imersão clássicas dos espaços de Sobolev e Rellich-Kondrachov, seguindo os mesmos passos da demonstração anterior.

□

1.4 Desigualdades do tipo Moser-Trudinger

Nesta seção relembramos os celebrados resultados de Moser-Trudinger que tornaram possível o estudo de EDPs com não linearidades com comportamento exponencial crítico. Além disso, apresentaremos algumas desigualdades importantes envolvendo os termos exponenciais.

Lema 1.19. *(Lema de Moser-Trudinger [63, Teorema 1.1]) Seja $s \in (0,1)$ satisfazendo $sp = N$. Então, existe $\alpha_{s,N}^* > 0$ tal que, para todo $0 \leq \alpha < \alpha_{s,N}^*$, a seguinte desigualdade é válida*

$$\sup_{u\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N),||u||\leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} R(\alpha,u)dx < +\infty,$$

onde

$$R(\alpha,t) = \exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}) - S_{k_p-2}(\alpha,t) = \sum_{k_p-1}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}|t|^{\frac{N}{N-s}k},$$

com $S_{k_p-2}(\alpha,t) = \sum_{k=0}^{k_p-2} \frac{\alpha^k}{k!}|t|^{\frac{N}{N-s}k}$ *e* $k_p = \min\{k \in \mathbb{N}\ ;\ k \geq p\}$.

Lema 1.20. *[17] Se* $\alpha > 0$ *e* $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(e^{\alpha|u|^2} - 1\right)\, dx < \infty.$$

Além disso, se $||\nabla u||_2^2 \leq 1$*,* $||u||_2^2 \leq M < \infty$ *e* $\alpha < 4\pi$*, então existe uma constante* $K_{\alpha,M} = K(M,\alpha)$*, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(e^{\alpha|u|^2} - 1\right) dx < K_{\alpha,M}.$$

O lema a seguir torna possível verificar a boa definição do termo envolvendo a não linearidade no funcional associado.

Lema 1.21. *([42, Lemma 2.3]) Sejam* $\alpha > 0$ *e* $r > 1$*. Então, para todo* $\beta > r$*, existe uma constante* $C_\beta = C(\beta) > 0$ *tal que*

$$(\exp(\alpha|t|^{p'}) - S_{k_p-2}(\alpha,t))^r \leq C_\beta(\exp(\beta\alpha|t|^{p'} - S_{k_p-2}(\beta\alpha,t)),$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lema 1.22. *Seja* $\alpha > 0$*. Então,* $R(\alpha,u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$*, para todo* $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$*.*

Demonstração. Sejam $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e $\varepsilon > 0$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, existe $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $||u - \phi|| < \varepsilon$. Observe que, para cada $k \geq k_p - 1$,

$$|u|^{\frac{N}{N-s}k} \leq 2^{\frac{N}{N-s}k}\varepsilon^{\frac{N}{N-s}k}\left|\frac{u-\phi}{||u-\phi||}\right|^{\frac{N}{N-s}k} + 2^{\frac{N}{N-s}k}|\phi|^{\frac{N}{N-s}k}.$$

Consequentemente,

$$R(\alpha,u) \leq R\left(\alpha 2^{\frac{N}{N-s}}\varepsilon^{\frac{N}{N-s}}, \left|\frac{u-\phi}{||u-\phi||}\right|^{\frac{N}{N-s}}\right) + R(\alpha 2^{\frac{N}{N-s}}, |\phi|^{\frac{N}{N-s}}).$$

Agora, pelo Lema 1.19, escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\alpha 2^{\frac{N}{N-s}}\varepsilon^{\frac{N}{N-s}} < \alpha_{s,N}^*$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} R\left(\alpha 2^{\frac{N}{N-s}}\varepsilon^{\frac{N}{N-s}}, \left|\frac{u-\phi}{||u-\phi||}\right|^{\frac{N}{N-s}}\right) dx < +\infty.$$

Por outro lado, visto que $\exp(\alpha 2^{\frac{N}{N-s}}|\phi|^{\frac{N}{N-s}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}2^{\frac{N}{N-s}k}|\phi|^{\frac{N}{N-s}k}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}2^{\frac{N}{N-s}k}|\phi|^{\frac{N}{N-s}k} < \varepsilon.$$

Isto, combinado com o fato de que $\frac{N}{N-s}k > 0$ para todo $k_p - 1 \leq k \leq k_0$, nos garante que

$$\int_{\mathbb{R}^N} R(\alpha 2^{\frac{N}{N-s}}, |\phi|^{\frac{N}{N-s}})dx = \int_{supp\phi} R(\alpha 2^{\frac{N}{N-s}}, |\phi|^{\frac{N}{N-s}})dx < +\infty.$$

Portanto, $R(\alpha,u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, para toda $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. □

Observação 1.23. Pelos Lemas 1.21 and 1.22, concluímos que $R(\alpha,u)^l \in L^1(\mathbb{R}^N)$, para toda $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha > 0$ e $l \geq 1$. Além disso, resultados análogos são válidos para os espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, com $p \geq 2$.

Para as próximas desigualdades não há alterações de argumentos independentemente do espaço de Sobolev base, portanto, denotaremos apenas por W, este podendo ser $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ ou $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 1.24. *Sejam $p \geq 2$, $u \in W$, $r > p$, $l \geq 1$, $\beta > 0$ e $||u|| \leq M$, para $M > 0$ suficientemente pequeno. Então, existe uma constante $K_1 = K_1(\beta,N,M,l,s) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r R(\beta,u)^l dx \leq K_1 ||u||_{t_0}^r,$$

para algum $t_0 > p$.

Demonstração. Pelo Lema 1.21, para $\beta_1 = \beta_1(l) > l$ com $\beta_1 \sim l$, existe uma constante $C_1 = C_1(\beta_1) > 0$ tal que $R(\beta,u)^l \leq C_1 R(\beta_1\beta,u)$.

Sejam $t,t' > 1$ com $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = 1$. Da desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r R(\beta,u)^l dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^r R(\beta_1\beta,u)dx \leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} R(\beta_1\beta,u)^t dx \right)^{\frac{1}{t}} ||u||_{rt'}^r.$$

Novamente, pelo Lema 1.21, para $\beta_2 = \beta_2(t) > t$ com $\beta_2 \sim t$, existe uma constante $C_2 = C_2(\beta_2) > 0$ satisfazendo $R(\beta_1\beta,u)^t \leq C_2 R(\beta_2\beta_1\beta,u)$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r R(\beta,u)^l dx \leq C_1 C_2^{\frac{1}{t}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} R(\beta_2\beta_1\beta,u)dx \right)^{\frac{1}{t}} ||u||_{rt'}^r.$$

Escreva $R(\beta_2\beta_1\beta,u) = R\left(\beta_2\beta_1\beta||u||^{\frac{N}{N-s}}, \frac{u}{||u||}\right)$. Então, escolhendo $M > 0$ suficientemente pequeno tal que $\beta_2\beta_1\beta||u||^{\frac{N}{N-s}} < \alpha_{s,N}^*$, do Lema 1.19 (ou 1.20), escontramos uma constante $K_1 = K_1(\beta,N,M,l,s) > 0$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r R(\beta,u)^l dx \leq K_1 ||u||_{rt'}^r.$$

Fazendo $t_0 = rt' > p$, obtemos o resultado desejado. □

Observação 1.25. Nas hipóteses do Lema 1.24, pelo Teorema 1.10 e $t_0 > p$, existe uma constante $K_2 = K_2(\beta, N, M, l, s) > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r R(\beta, u)^l dx \leq K_2 ||u||^r.$$

Mais ainda, como $||\cdot|| \leq ||\cdot||_X$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^r R(\beta, u)^l dx \leq K_2 ||u||_X^r.$$

Observação 1.26. Observe que, as estimativas obtidas no Lema 1.24 e na Observação 1.25 podem ser aplicadas para uma função, arbitrária porém fixada, $u \in X \setminus \{0\}$ considerando $\beta > 0$ suficientemente pequeno de modo a ser possível aplicar as desigualdades de Moser-Trudinger.

1.5 Resultados de Convergência e Limitação

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que permitirão demonstrar que o funcional associado I é de classe C^1 bem como determinar quando há limitação e convergência de sequências de Cerami nos espaços de solução.

Lema 1.27. *Sejam $(u_n) \subset X$ e $u \in X$. Então,*

(a) se $u_n \to u$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ ou $u_n \rightharpoonup \varphi$ em X, então existem uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e uma função $h \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tais que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

(b) Se $u_n \to u$ em X, então existem uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e uma função $h \in X$ tais que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Demonstração. Para demonstrar esse lema, nos inspiramos na construção apresentada em [24, Proposição 2.7]. Seja (u_n) uma sequência em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Em particular, $u_n \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. É possível construir uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que, para todo $k \geq 1$

$$||u_{n_{k+1}} - u_{n_k}|| \leq \frac{1}{2k}. \tag{1.1}$$

Por simplicidade, denotaremos a subsequência (u_{n_k}) por (u_k), para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, defina

$$w_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $n \in \mathbb{N}$. Como consequência desta definição e de (1.1), $w_n \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e $||w_n|| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Disto, $||\nabla w_n||_p \leq 1$ e $||w_n||_p \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como (w_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência, $w_n \rightharpoonup w$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para alguma função $w \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Monótona, $w_n \to w$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada, $w_n \to w$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Vejamos que $w \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Como (w_n) é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência, $w_n \rightharpoonup v$, para alguma função $v \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Então, pelo [23, Teorema 7.1], $w_n \to v$ em $L^p(B_R)$, para todo $R > 0$. Passando a uma subsequência, se necessário, $w_n(x) \to v(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Mas, visto que $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, concluímos que $w = v$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Logo, $w \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Agora, para $l > k \geq 2$, temos

$$|u_l(x) - u_k(x)| \leq |u_l(x) - u_{l-1}(x)| + \cdots + |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq w_{l-1}(x) - w_{k-1}(x)$$

e, fazendo $l \to +\infty$, obtemos, para qualquer $k \geq 2$,

$$|u(x) - u_k(x)| \leq w(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Portanto, $|u_k(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, com $g = |u| + w \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Para finalizar a demonstração, resta ver por que, no item (b), a função obtida pertence ao espaço X. Construindo de modo similar ao acima, obtemos que $||w_n||_* \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $w_{n+1}(x) \geq w_n(x)$ e $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, segue que $\ln(1+|x|)|g_j(x)|^p \to \ln(1+|x|)|g(x)|^p$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Do Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|w(x)|^p dx = \lim \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|w_n(x)|^p dx \leq 1 < +\infty.$$

Logo, $w \in X$. □

Observação 1.28. Resultados análogos são válidos para os espaços $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Tal resultado é essencial para garantir que o funcional associado I é de classe C^1, uma vez que a função que domina a sequência precisa, obrigatoriamente, estar no espaço X.

Lema 1.29. *Sejam $(u_n) \subset X$ e $u \in X$ tais que $u_n \to u$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) \to \int_{\mathbb{R}^N} F(u) \ , \ \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)v \to \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v \ , \ \forall\, v \in X.$$

Demonstração. Como $u_n \to u$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e, pelo Teorema 1.10, $u_n \to u$ em $L^{\omega}(\mathbb{R}^N)$ para todo $\omega \geq p$. Pelo Lema 1.31 e pelo Teorema da Convergência Dominada, o resultado segue. □

A seguir apresentamos dois importantes resultados técnicos essenciais no estudo de convergências em X e que independem do espaço de Sobolev onde X está inserido. O primeiro resultdo determina quando temos limitação ou convergência em X e o segundo garante uma importante convergência integral. Provaremos neste trabalho uma versão mais geral de tais resultados, de modo que as mesmas possam ser aplicadas em outros casos. Neste sentido, consideramos uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição:

(g) $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), g(0) = 0$ e existem constantes $K_5 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, K_6 > 0$ tais que

$$K_5|t|^{p-1} \leq |g(t)| \leq K_6|t|^{p-1}, \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Pela condição (g), temos

$$\frac{K_5}{p}|t|^p \leq G(t) \leq \frac{K_6}{p}|t|^p, \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Exemplo 1.30. **(1)** Claramente, um protótipo para g é dado por $g(t) = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(2) Podemos considerar, ainda, exemplos mais exóticos para g, tais como $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} t^p \text{ , if } t \in [0,1] \\ t^{p+2}, \text{ if } t \in (1,2] \\ 4t^p, \text{ if } t \in (2,\infty) \end{cases}.$$

Lema 1.31. *Seja $u \in L^p(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}$. Suponha que $(u_n), (v_n) \subset X$ são duas sequências satisfazendo $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e (v_n) é limitada em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Vamos designar*

$$\omega_n = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} V^+(|x-y|)G(u_n(x))G(v_n(y))\, dxdy.$$

Então, se $\sup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n < \infty$, $(||v_n||_*) \subset \mathbb{R}$ é limitada. Além disso, se $\omega_n \to 0$ e $v_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, então $||v_n||_* \to 0$.

Demonstração. Pelo Teorema de Egorov, existem $R \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $A \subset B_R$ tais que A é um conjunto mensurável com $|A| > 0$ e $|u_n(x)| > \delta$, para todo $n \geq n_0$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $R > 2$. Assim, se $x \in B_R$ e $y \in B_{2R}^c$, temos $1+|x-y| \geq \sqrt{1+|y|}$ e $|x-y| > 2$. Portanto, para cada $n \geq n_0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\omega_n &\geq \frac{K_5^2}{4}\int_{B_{2R}^c}\int_A a_1(|x-y|)\ln(1+|x-y|)u_n^2(x)v_n^2(y)\, dxdy \\
&\geq \frac{K_5^2 a_{1,0}\delta^2|A|}{8}\int_{B_{2R}^c} \ln(1+|y|)v_n^2(y)\, dy \\
&= \frac{K_5^2 a_{1,0}\delta^2|A|}{8}(||v_n||_*^2 - \ln(1+2R)||v_n||_2^2),
\end{aligned}$$

e o resultado desejado segue. □

Lema 1.32. *Seja $(u_n) \subset X$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X. Então,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} V^+(|x-y|)G(u_n(x))g(u(y))(u_n(y)-u(y))\, dxdy = 0.$$

Demonstração. Por simplicidade, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$A_n = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} V^+(|x-y|)|G(u_n(x))||g(u(y))||(u_n(y)-u(y))|\, dxdy.$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em X, pelo Lema 2.2, $u_n \to u$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \geq 2$. Disto, da condição (g) e da (2.1), temos

$$\begin{aligned} A_n &\leq ||a_2||_\infty \frac{K_6^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2(x)|u(y)||u_n(y)-u(y)|\; dxdy \\ &\leq \frac{K_6^2||a_2||_\infty}{2}\left[||u_n||_*^2||u||_2^2||u_n-u||_2^2 + ||u_n||_2^2\left(\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)|u(y)||u_n(y)-u(y)|\; dy\right)\right]. \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração, basta argumentar como feito em [20, Lema 2.6]. □

Lema 1.33. *Sejam $p \geq 2$ e $(u_n) \subset X$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X. Então,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)(u_n(y)-u(y))dxdy = 0.$$

Demonstração. Inicialmente, vemos que

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)(u_n(y)-u(y))dxdy\right| \\ &\leq ||u_n||_*^p||u||_p^{p-1}||u_n-u||_p + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)|u_n(x)|^p|u(y)|^{p-1}|u_n(y)-u(y)|dxdy. \end{aligned}$$

Agora, para $R > 0$, arbitrário porém fixado, definimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)|u(y)|^{p-1}|u_n(y)-u(y)|dy = h_n(R) + g_n(R),$$

onde

$$h_n(R) = \int_{B_R} \ln(1+|y|)|u(y)|^{p-1}|u_n(y)-u(y)|dy$$

e

$$g_n(R) = \int_{B_R^c} \ln(1+|y|)|u(y)|^{p-1}|u_n(y)-u(y)|dy.$$

Lembra que, para $y \in B_R$, $\ln(1+|y|) \leq \ln(1+R)$. Como $u_n \rightharpoonup u$ em X, da Proposição 1.17, $u_n \to u$ em $L^\omega(\mathbb{R}^N)$, para todo $\omega \geq p$. Assim,

$$|h_n(R)| \leq \ln(1+R)||u||_p^{p-1}||u_n-u||_p \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. Por outro lado,

$$g_n(R) \leq \Big(\int_{B_R^c} \ln(1+|y|)|u(y)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\int_{B_R^c} \ln(1+|y|)|u_n(y)-u(y)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

Observe que,

$$\Big(\int_{B_R^c} \ln(1+|y|)|u_n(y)-u(y)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C_1(||u_n||_* + ||u||_*) \leq C_2,$$

pois $(u_n) \subset X$ é limitada. Então, de (1.3),

$$g_n(R) \leq C_1 \left(\int_{B_R^c} \ln(1+|y|)|u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p'}} = C_1\varphi(R) \to 0 \ \text{, as } \ R \to +\infty.$$

Consequentemente, para todo $R > 0$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p |u(y)|^{p-2} u(y)(u_n(y)-u(y))dxdy \right| \leq C_1\varphi(R).$$

Assim, fazendo $R \to +\infty$, $\varphi(R) \to 0$ e concluímos a demonstração. $\square$

Proposição 1.34. *Sejam $p \geq 2$, $u \in L^p(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, $(u_n) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $(v_n) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ limitada. Se*

$$\alpha = \sup_n \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p |v_n(y)|^p dxdy < +\infty, \tag{1.4}$$

então $||v_n||_*$ é limitada. Além disso, definindo

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p |v_n(y)|^p dxdy,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, se $\alpha_n \to 0$ e $||v_n||_p \to 0$, então $||v_n||_* \to 0$.

Demonstração. Sejam n_0, R, δ e Ω dados pelo Lema 1.4. Então, $u_n(x) > \delta$, para todo $n \geq n_0$. Assim, das propriedades da função ln e do fato que $\alpha_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha_n &\geq \int_{B_{2R}^c} \int_{\Omega} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p |v(y)|^p dxdy \\
&> \delta^p \int_{B_{2R}^c} \int_{\Omega} \ln(\sqrt{1+|y|})|v_n(y)|^p dxdy \\
&= \frac{\delta^p|\Omega|}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)|v_n(y)|^p dy - \int_{B_{2R}} \ln(1+|y|)|v_n(y)|^p dy \right) \\
&\geq \frac{\delta^p|\Omega|}{2} (||v||_*^p - \ln(1+2R)||v_n||_p^p).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$0 \leq ||v_n||_* \leq \left(\frac{2}{|\Omega|\delta^p}\alpha_n + \ln(1+2R)||v_n||_p^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.5}$$

Portanto, da hipótese, $(||v_n||_*) \subset \mathbb{R}$ é limitado. Além disso, se $\alpha_n \to 0$ e $||v_n||_p \to 0$, da equação (1.5), $||v_n||_* \to 0$. $\square$

CAPÍTULO 2

Equação de Choquard Logarítmica Envolvendo o Operador p-Laplaciano Fracionário

No presente capítulo, focaremos na resolução da equação de Choquard logarítmica apresentada em 3, isto é, estudaremos existência e multiplicidade de soluções para

$$(-\Delta)_p^s u + |u|^{p-2}u + (\ln|\cdot| * |u|^p)|u|^{p-2}u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

onde $N = sp$, $s \in (0,1)$, $p > 2$, $a = 1$, $\lambda = 1$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, com primitiva $F(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$. Este capítulo será baseado no artigo publicado [10].

Relembramos que, ao longo deste capítulo assumiremos as seguintes condições para a não linearidade f

(f_1) $\quad f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0) = 0,$ tem crescimento exponencial crítico.

(f_2)
$$\lim_{|t|\to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} = 0.$$

(f_3) $\quad$ Existe $\theta > 2p$ tal que $f(t)t \geq \theta F(t) > 0, \forall\, t > 0.$

(f_4) $\quad$ Existem $q > 2p$ e $C_q > \dfrac{[2(q-p)]^{\frac{q-p}{p}}}{q^{\frac{q}{p}}} \dfrac{S_q^q}{\rho_0^{q-p}}$ tais que $F(t) \geq C_q|t|^q, \forall t \in \mathbb{R},$

onde

$$S_q(v)=\frac{||v||}{||v||_q} \quad \text{e} \quad S_q=\inf_{v\in\mathscr{A}} S_q(v)\geq \inf_{v\neq 0} S_q(v)>0,$$

com $S_q>0$ sendo a constante obtida pelas imersões de Sobolev, Teorema 1.10, $\mathscr{A}=\{u\in X\setminus\{0\}\ ;\ V_0(u)\leq 0\}$ e $\rho_0>0$ é um valor real suficientemente pequeno, conforme vamos conferir no Lema 2.5.

E, para o caso de multiplicidade, consideraremos a seguinte condição

(f_1') $\qquad f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0)=0, f$ é ímpar e possui crescimento exponencial crítico.

2.1 Framework e Preliminares

Nesta primeira seção, apresentaremos as ferramentas necessárias para a demonstração do Teorema 0.1. Como mencionado anteriormente, estamos interessados na existência de soluções fracas não triviais para (2.1), relembrando que uma função $u\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ é dita ser uma solução fraca para (3) se satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}uvdx$$
$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\ln(|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)v(y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^N}f(u)vdx\ ,\ \forall\, v\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N). \tag{2.2}$$

Neste sentido, definimos o funcional associado a (3), $I:W^{s,p}(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, por

$$I(u)=\frac{1}{p}||u||^p+\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\ln(|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^p dxdy-\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx. \tag{2.3}$$

Desta forma, veremos que pontos críticos de I serão soluções fracas para (3). Consequentemente, nosso primeiro objetivo será verificar que I está bem definido e é de classe C^1.

Inicialmente, nos concentraremos no termo do funcional que apresenta a função logarítmica. Para tanto, inspirados em [20], definimos três funcionais auxiliares $V_1:W^{s,p}(\mathbb{R}^N)\to[0,\infty]$, $V_2: L^{\frac{2N}{2N-1}p}(\mathbb{R}^N)\to[0,\infty)$ e $V_0:W^{s,p}(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, respectivamente, por

$$u\mapsto V_1(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\ln(1+|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^p dxdy,$$

$$u\mapsto V_2(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|u(x)|^p|u(y)|^p dxdy,$$

$$u\mapsto V_0(u)=V_1(u)-V_2(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\ln(|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^p dxdy,$$

onde as integrais são tomadas sobre funções mensuráveis $u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ e estão definidas no sentido de Lebesgue.

Observação 2.1. **(i)** Relembre que $\ln(1+|x-y|) \leq \ln(1+|x|)+\ln(1+|y|)$, para todos $x,y \in \mathbb{R}^N$, e $\ln r \leq r$, para todo $r \geq 1$.
(ii) Pelo item (i) e aplicando o Teorema 1.6 com $\alpha=\beta=0$ e $\lambda=1$, e fazendo uma escolha natural para p e t, a saber $p=t=\frac{2N}{2N-1}$, obtemos

$$|V_2(u)| \leq K_0||u||^{2p}_{\frac{2N}{2N-1}p}\ , \ \ \forall\, u \in L^{\frac{2N}{2N-1}p}(\mathbb{R}^N), \tag{2.4}$$

onde K_0 é a melhor constante para (HLS). Desta forma, podemos concluir que V_2 assume valores finitos em $L^{\frac{2N}{2N-1}p}(\mathbb{R}^N)$.
(iii) Novamente, pelo item (i), concluímos que $V_1(u) \leq 2||u||^p_*||u||^p_p$, para toda $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Como consequência da Observação 2.1, vemos que os funcionais V_1, V_2 e V_0 estão bem definidos sobre X. Resta verificar que estes funcionais são de classe C^1.

Lema 2.2. *Os funcionais V_1, V_2 e V_0 são de classe $C^1(X,\mathbb{R})$, com*

$$V_1'(u)(v) = 2p\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)v(y)\ dxdy \tag{2.5}$$

e

$$V_2'(u)(v) = 2p\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)v(y)\ dxdy. \tag{2.6}$$

Observação 2.3. Observe que, pelo item (ii) da Observação 2.1, é possível demonstrar que, na realidade, $V_2 \in C^1(L^{\frac{2N}{2N-1}p}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$. Desta forma, como $X \subset L^{\frac{2N}{2N-1}p}(\mathbb{R}^N)$, a regularidade em X vem como consequência.

Na sequência, verificaremos que o termo envolvendo a não linearidade f é de classe C^1. Primeiramente, dado $\varepsilon>0$, de (f_2), existe $\delta>0$ tal que $|f(u)| \leq \varepsilon|u|^{p-1}$, sempre que $|u| \leq \delta$. Agora, como $q>p$, existe $r>0$ tal que $q=p+r$. Então, visto que as funções $z^{q-1}, z^{\frac{N}{N-s}k}$, para todo $k \geq k_p-1$, e z^r são crescentes, para $|u| \geq \delta$,

$$|F(u)| \leq \frac{\varepsilon}{p}|u|^p + b_1|u|R(\alpha,u) \leq \frac{\varepsilon}{p}|u|^p\frac{|u|^rR(\alpha,u)}{\delta^rR(\alpha,\delta)} + b_1|u|\frac{|u|^{q-1}}{\delta^{q-1}}R(\alpha,u) = b_2|u|^qR(\alpha,u),$$

onde $b_2 = \frac{\varepsilon}{p\delta^rR(\alpha,\delta)}+\frac{b_1}{\delta^{q-1}}>0$. Portanto, para $\alpha>\alpha_0$,

$$|F(u)| \leq \frac{\varepsilon}{p}|u|^p + b_2|u|^qR(\alpha,u)\ ,\ \forall\, u \in X. \tag{2.7}$$

Sejam, agora, $t,t'>1$, com $\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}=1$. Da desigualdade (2.7), da Observação 1.23, de $X \hookrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\omega}(\mathbb{R}^N)$, para todo $\omega \geq p$, e da desigualdade de Hölder, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(u)|dx \leq \frac{\varepsilon}{p}||u||^p_p + b_2||u||^q_{qt}\left(\int_{\mathbb{R}^N} R(\alpha,u)^{t'}dx\right)^{\frac{1}{t'}} < +\infty\ ,\ \forall\, u \in X. \tag{2.8}$$

De modo análogo, dados $\varepsilon>0$, $\alpha>\alpha_0$, $q>p$ e $u \in X$, obtemos que

$$|f(u)| \leq \varepsilon|u|^{p-1} + b_1|u|^{q-1}R(\alpha,u). \tag{2.9}$$

Lema 2.4. *(i) O funcional V_1 é fracamente semicontínuo inferiormente em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

(ii) O funcional I é fracamente semicontínuo inferiormente em X.

(iii) O funcional I é semicontínuo inferiormente em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. *(i)* Seja $(u_n) \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$. Então, para todo $R > 0$, $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{s,p}(B_R)$ e, pelo Teorema 1.11, $u_n \to u$ em $L^p(B_R)$. Afirmamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_R}\int_{B_R} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p|u_n(y)|^p dxdy = \int_{B_R}\int_{B_R} \ln(1+|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^p dxdy.$$

De fato, passando a uma subsequência se necessário, é possível ver que $\int_{B_R} ||u_n(y)|^p - |u(y)|^p|dy \to 0.$

Então,

$$\left|\int_{B_R}\int_{B_R} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p|u_n(y)|^p dxdy - \int_{B_R}\int_{B_R} \ln(1+|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^p dxdy\right|$$
$$\leq [\ln(1+2R)||u_n||_p^p + \ln(1+2R)||u||_p^p] \int_{B_R} ||u_n(x)|^p - |u(x)|^p|dx \to 0.$$

Consequentemente, para cada $R > 0$,

$$\liminf V_1(u_n) \geq \int_{B_R}\int_{B_R} \ln(1+|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^p dxdy.$$

Portanto, do Teorema da Convergência Monótona,

$$\liminf V_1(u_n) \geq \lim_{R\to+\infty} \int_{B_R}\int_{B_R} \ln(1+|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^p dxdy = V_1(u).$$

(ii) Segue diretamente dos seguintes fatos $V_2 \in C^1(L^{\frac{2N}{2N-1}p}, \mathbb{R})$, (2.4), $X \hookrightarrow W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, Proposição 1.17 e o item (i).

(iii) Basta ver que $I(u) - \frac{1}{2p}V_1(u)$ é contínuo com respeito a $||\cdot||$ e utilizar (2.4), Teorema 1.10, e o item (i). □

2.2 Geometria de I e Resultados Técnicos

Nesta seção apresentaremos a geometria apresentada pelo funcional I, bem como alguns resultados importantes de limitação. Os primeiros dois lemas nos garantem que o funcional I possui a geometria do Passo da Montanha.

Lema 2.5. *Existe $\rho > 0$ tal que*

$$m_\beta = \inf\{I(u) \, ; \, u \in X \, , \, ||u|| = \beta\} > 0 \, , \, \forall \, \beta \in (0,\rho] \tag{2.10}$$

e

$$n_\beta = \inf\{I'(u)(u) \, ; \, u \in X \, , \, ||u|| = \beta\} > 0 \, , \, \forall \, \beta \in (0,\rho]. \tag{2.11}$$

Demonstração. Seja $u \in X \setminus \{0\}$, com $||u||$ suficientemente pequena de modo que seja possível aplicar o Lema 1.24, e $q > p$. Então, por (2.4), Observação 1.25, (2.7) e Teorema 1.10, temos

$$I(u) \geq \frac{1}{p}||u||^p - \frac{K_0}{2p}||u||^{2p}_{\frac{2N}{2N-1}p} - \frac{\varepsilon}{p}||u||_p^p - K_2||u||^q \geq \frac{||u||^p}{p}[1 - \varepsilon - C_1||u||^p - C_2||u||^{q-p}].$$

Portanto, para $\varepsilon > 0$ e $\rho > 0$ suficientemente pequenos, obtemos (2.10). De maneira similar, por (2.9), (2.4), Observação 1.25 e o Teorema 1.10, segue que

$$I'(u)(u) = ||u||^p + V_1(u) - V_2(u) - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx \geq ||u||^p[1 - \varepsilon - C_3||u||^p - C_4||u||^{q-p}].$$

Logo, tomando $\varepsilon, \rho > 0$ suficientemente pequenos, vale (2.11). □

Lema 2.6. *Sejam $u \in X \setminus \{0\}$, $t > 0$ e $q > 2p$. Então,*

$$\lim_{t\to 0} I(tu) = 0 \ \ , \ \ \sup_{t>0} I(tu) < +\infty \ \ e \ \ I(tu) \to -\infty \ \ as \ \ t \to +\infty.$$

Demonstração. Seja $u \in X \setminus \{0\}$. Primeiramente, de (f_4),

$$I(tu) = \frac{t^p}{p}||u||^p + \frac{t^{2p}}{2p}V_0(u) - \int_{\mathbb{R}^N} F(tu)dx \leq \frac{t^p}{p}||u||^p + \frac{t^{2p}}{2p}V_0(u) - C_q t^q ||u||_q^q \to -\infty,$$

quando $t \to +\infty$. Agora, de (2.7) e do Lema 1.24, para $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $||tu||$ está nas condições do Lema 1.24, temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} F(tu)dx \right| \leq \frac{t^p}{p}||u||^p + K_1 t^q ||u||_{t_0}^q \to 0,$$

quando $t \to 0$. Portanto, $I(tu) \to 0$ quando $t \to 0$. Finalmente, como $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, dos dois fatos já demonstrados, segue que $\sup\limits_{t>0} I(tu) < +\infty$. □

Consideremos, agora, uma sequência $(u_n) \subset X$ satisfazendo

$$\exists\, d > 0 \ \text{ tal que } \ I(u_n) < d \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ ||I'(u_n)||_{X'}(1 + ||u_n||_X) \to 0 \ \text{ , quando } \ n \to +\infty. \tag{2.12}$$

Lema 2.7. *Seja $(u_n) \subset X$ satisfazendo (2.12). Então, (u_n) é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. De (2.12) e (f_3), temos

$$d + o(1) \geq I(u_n) - \frac{1}{2p}I'(u_n)(u_n) \geq \frac{1}{2p}||u_n||^p + \left(\frac{\theta}{2p} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \geq \frac{1}{2p}||u_n||^p,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $2pd + o(1) \geq ||u_n||^p$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde segue o lema. □

Observação 2.8. **(1)** Observe que, trocando a condição $I(u_n) \leq d$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pela condição $I(u_n) \to d$, para algum valor $d > 0$, o Lema 2.7 continua válido.
(2) Utilizando o Lema 2.6 e o Teorema do Valor Intermediário, é possível verificar que o valor c_{mp} satisfaz $0 < m_\rho \leq c_{mp} < +\infty$.
(3) Como I possui a geometria do Passo da Montanha e $c_{mp} > 0$, sabemos que existe uma sequência de Cerami para I no nível do Passo da Montanha, isto é, existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to c_{mp} \quad \text{e} \quad ||I'(u_n)||_{X'}(1+||u_n||_X) \to 0. \tag{2.13}$$

Além disso, tal sequência claramente satisfaz (2.12).

O último lema desta seção garante que é possível tornar a massa de uma sequência de Cerami associada a c_{mp} tão pequena quanto se queira, de modo a ser possível utilizar os resultados envolvendo Moser-Trudinger.

Lema 2.9. *Sejam $(u_n) \subset X$ satisfazendo (2.13) e $q > 2p$. Então, para algum valor $\rho_0 > 0$ suficientemente pequeno,*

$$\limsup_n ||u_n||^p < \rho_0^p.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.7, $2pc_{mp} + o(1) \geq ||u_n||^p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $\limsup_n ||u_n||^p \leq 2pc_{mp}$. Desta forma, um passo natural será procurar uma estimativa adequada para o valor c_{mp}.

Inicialmente, considere o conjunto $\mathscr{A} = \{u \in X \setminus \{0\}\ ;\ V_0(u) \leq 0\}$. Para cada $u \in X \setminus \{0\}$, $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$, definimos $u_t(x) = t^2 u(tx)$. Então,

$$V_0(u_t) = t^{4p-2N} V_0(u) - t^{4p-2N} \ln t ||u||_p^{2p} \to -\infty,$$

quando $t \to +\infty$, visto que $4p - 2N = 2p(2-s) > 0$. Portanto, $\mathscr{A} \neq \emptyset$.

Além disso, das imersões dadas no Teorema 1.10, existe uma constante $C > 0$ tal que $||u|| \geq C||u||_q$. Deste modo, as seguintes definições fazem sentido

$$S_q(v) = \frac{||v||}{||v||_q} \quad \text{and} \quad S_q = \inf_{v \in \mathscr{A}} S_q(v) \geq \inf_{v \neq 0} S_q(v) > 0.$$

Agora, pelo Lema 2.6, para $v \in \mathscr{A}$ e $T > 0$ suficientemente grande, $I(Tv) < 0$. Assim, definindo $\gamma : [0,1] \to X$ por $\gamma(t) = tTv$, temos que $\gamma \in \Gamma$ e

$$c_{mp} \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) = \max_{0 \leq t \leq 1} I(tTv) \leq \max_{t \geq 0} I(tv).$$

Consequentemente, para $\psi \in \mathscr{A}$,

$$c_{mp} \leq \max_{t \geq 0} I(t\psi) \leq \max_{t \geq 0} \left\{ \frac{t^p}{2p} ||\psi||^p - C_q t^q ||\psi||_q^q \right\} \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \frac{S_q(\psi)^{\frac{pq}{q-p}}}{(qC_q)^{\frac{p}{q-p}}}.$$

Tomando o ínfimo sobre as funções $\psi \in \mathscr{A}$, obtemos

$$\limsup_n ||u_n||^p \leq \frac{2(q-p)}{q} \frac{S_q^{\frac{pq}{q-p}}}{(qC_q)^{\frac{p}{q-p}}} \leq \rho_0^p,$$

para $C_q > 0$ suficientemente grande. □

Observação 2.10. Pelo Lema 2.7, é possível observar que, fazendo $C_q > 0$ suficientemente grande tornamos o valor ρ_0 tão pequeno quanto desejarmos. Isto nos garante que é possível utilizar todos os resultados de estimativas para o termo com crescimento exponencial para qualquer sequência que satisfaça (2.12), com $d = c_{mp}$, ou (2.13).

No restante desta seção, focaremos em determinar quando uma sequência de funções nos moldes de (2.12) é limitada no espaço X.

Lema 2.11. *Seja $(u_n) \subset X$ uma sequêcia limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\liminf \sup_{y \in \mathbb{Z}^N} \int_{B_2(y)} |u_n(x)|^p dx > 0. \tag{2.14}$$

Então, existem $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$ tais que, a menos de subsequência, $y_n * u_n = \tilde{u}_n \rightharpoonup u$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Da equação (2.14) e propriedades do lim inf, sabemos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que, passando a uma subsequência se necessário,

$$\sup_{y \in \mathbb{Z}^N} \int_{B_2(y)} |u_n(x)|^p dx > C_1 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, da definição de sup, existe uma sequência $(y_k^n) \subset \mathbb{Z}^N$ satisfazendo

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{B_2(y_k^n)} |u_n(x)|^p dx = \sup_{y \in \mathbb{Z}^N} \int_{B_2(y)} |u_n(x)|^p dx > C_1.$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k_0^n \in \mathbb{N}$ que verifica

$$\int_{B_2(y_{k_0^n}^n)} |u_n(x)|^p dx > C_1.$$

Além disso, como (u_n) é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, existe $C_2 > 0$ tal que

$$C_2 > ||u_n||^p \geq ||u_n||_p^p \geq \int_{B_2(y_{k_0^n}^n)} |u_n(x)|^p dx > C_1.$$

Portanto, obtemos uma sequência indexada em $n \in \mathbb{N}$ que satisfaz

$$\left(\int_{B_2(y_{k_0^n}^n)} |u_n(x)|^p dx \right) \subset [C_2, C_1]. \tag{2.15}$$

Considere (u_n) e (y_n) as subsequências das sequências originais obtidas pela construção acima. Ponha $\tilde{u}_n = y_n * u_n$. Então, como $||\cdot||$ é $\mathbb{Z}^N$-invariante, $(\tilde{u}_n)$ é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Logo, existe uma função $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\tilde{u}_n \rightharpoonup u$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Como consequência, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\tilde{u}_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Mostremos que $u \neq 0$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

Primeiramente, como o operador restrição é contínuo de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ para $W^{s,p}(B_2)$, temos que $\tilde{u}_n\big|_{B_2} \rightharpoonup u\big|_{B_2}$ em $W^{s,p}(B_2)$. Então, pelo Teorema 1.11, $\tilde{u}_n\big|_{B_2} \to u\big|_{B_2}$ in $L^p(B_2)$. Assim,

$$C_1 < \int_{B_2} |\tilde{u}_n|^p dx = \int_{B_2} |\tilde{u}_n\big|_{B_2}|^p dx \to \int_{B_2} |u\big|_{B_2}|^p dx \leq ||u||_p^p.$$

Logo, $||u||^p > C_1$ o que implica que $u \neq 0$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, como queríamos. □

Lema 2.12. *Sejam $q > 2p$ e $(u_n) \subset X$ uma sequência satisfazendo (2.12) com $d \in (0, c_{mp}]$ ou (2.13), para a qual não ocorre $||u_n|| \to 0$ e $I(u_n) \to 0$. Então,*

$$\liminf \sup_{y \in \mathbb{Z}^N} \int_{B_2(y)} |u_n(x)|^p dx > 0.$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que

$$\liminf \sup_{y \in \mathbb{Z}^N} \int_{B_2(y)} |u_n(x)|^p dx = 0.$$

Então, pelo Lema de Lions, $u_n \to 0$ em $L^\omega(\mathbb{R}^N)$, para todo $\omega \geq p$. Assim, como $\frac{2N}{2N-1} p > p$, de (2.4), $V_2(u_n) \to 0$. Além disso, por (2.9) e pela Observação 1.25,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u_n dx \right| \leq \varepsilon ||u_n||_p^p + C_1 ||u_n||_{qt_0}^q \leq \varepsilon C_2 + C_1 ||u_n||_{qt_0}^q \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$ e $n \to +\infty$. Consequentemente,

$$||u_n||^p + V_1(u_n) = I'(u_n)(u_n) + V_2(u_n) + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u_n dx \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. Logo, como se tratam de termos não-negativos, $||u_n|| \to 0$ e $V_1(u_n) \to 0$ e, pelo Teorema 1.10, $||u_n||_p \to 0$ e $||u_n||_{qt_0} \to 0$. Finalmente, de (2.7), Observação 1.25 e Teorema 1.10, concluímos que $\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n) dx \to 0$.

Portanto, $I(u_n) \to 0$, o que é uma contradição com a hipótese, provando o lema. □

Corolário 2.13. *Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência nas hipóteses do Lema 2.12. Então, $(\tilde{u}_n) \subset X$ é limitada.*

Demonstração. Pelo Lema 2.12, $\liminf \sup_{y \in \mathbb{Z}^N} \int_{B_2(y)} |u_n(x)|^p dx > 0$. Então, do Lema 2.11, existe uma sequência de pontos $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$ tais que, a menos de subsequência, $\tilde{u}_n \rightharpoonup u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. Agora, pelo Lema 2.7 e pela norma $||\cdot||$ ser $\mathbb{Z}^N$-invariante, $(\tilde{u}_n)$ é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e, pelo Teorema

1.10, $(\tilde{u}_n)$ é limitada em $L^{\omega}(\mathbb{R}^N)$, para todo $\omega \geq p$. Além disso, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\tilde{u}_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Consequentemente, por (2.9) e pelo Lema 1.24,

$$V_1(\tilde{u}_n) = I'(u_n)(u_n) + V_2(u_n) + \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx + o(1) \leq C \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_1(\tilde{u}_n) < +\infty$ e, da Proposição 1.34, concluímos que $(\tilde{u}_n)$ é limitada em X. $\square$

O último resultado desta seção é o ponto chave para utilizar teoremas clássicos para obter multiplicidade de soluções sem ser necessário utilizar teoria de gênero, uma vez que ele torna possível verificar a validade da condição (PS) em níveis adequados.

Lema 2.14. *Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência nas hipóteses do Lema 2.12. Então, a menos de subsequência, (u_n) é limitada em X.*

Demonstração. Primeiramente, do Lema 2.7 (u_n) é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e, do Corolário 2.13, passando a uma subsequência se necessário, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$ tal que $\tilde{u}_n \rightharpoonup u$ em X, com $u \neq 0$ em X, e $\tilde{u}_n(x) \to u(x)$ pontualmente q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Além disso, pela Proposiçao 1.17 $\tilde{u}_n \to u$ em $L^{\omega}(\mathbb{R}^N)$, para todo $\omega \geq p$. Observe que, em particular, $u \neq 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Afirmação 1: Existem $R_1, C_1 > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que $||u_n||^p_{p,B_{R_1}} \geq C_1 > 0$, para todo $n \geq n_1$.

Como $u \in L^p(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, existe $R_2 > 0$ tal que $||u||^p_{p,B_{R_2}} > 0$. Suponha que a afirmação não é válida. Então, podemos construir uma sequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ satisfazendo

$$\frac{1}{Nk} > \int_{B_{R_2}} |u_{n_k}(x)|^p dx.$$

Fazendo $k \to +\infty$, concluímos que $u_{n_k} \to 0$ em $L^p(B_{R_2})$ e, consequentemente, $||u||^p_{p,B_{R_2}} = 0$, o que é uma contradição. Portanto, a afirmação é válida.

Afirmação 2: A menos de subsequência, $(y_n) \subset \mathbb{Z}^N$ é limitada.

Suponha, por absurdo, que qualquer subsequência de (y_n) verifica $|y_n| \to +\infty$. Assim, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| \geq 2R_1$, para todo $n \geq n_2$, onde R_1 é o raio dado na Afirmação 1.

Lembramos ainda, que $1+|x+y_n| \geq \sqrt{1+|y_n|}$, para todo $x \in B_{R_1}$ e $n \geq n_2$. Portanto, considerando uma subsequência se necessário, temos que

$$\begin{aligned} ||\tilde{u}_n||^p_* &= \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x+y_n|)|u_n(x)|^p dx \\ &\geq C_2 ||u_n||^p_{p,B_{R_1}} \ln(1+|y_n|) = C_3 \ln(1+|y_n|), \forall \ n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de que $(\tilde{u}_n)$ é limitada em X, provando a afirmação 2.

Agora, observe que

$$||u_n||^p_* = \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y_n|)|\tilde{u}_n(x)|^p dx \leq ||\tilde{u}_n||^p_* + \ln(1+|y_n|)||\tilde{u}_n||^p_p, \forall \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Pela Afirmação 2, existem $y_0 \in \mathbb{Z}^N$ e $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tais que $y_n = y_0$, para todo $n \geq \overline{n}$. Então, da equação (2.16) e do fato de $(\tilde{u}_n)$ ser limitada em X,

$$||u_n||_*^p \leq C_4 \quad \text{onde} \quad C_4 = \max\{\ln(1+|y_{n_1}|), ..., \ln(1+|y_{\overline{n}}|), \ln(1+|y_0|)\} > 0.$$

Portanto, como (u_n) é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, o resultado segue. □

2.3 Existência de Soluções

Na presente seção concluíremos a demonstração do Teorema 0.1. Começamos provando uma proposição chave, a qual determina sob quais condições o funcional I possui pontos críticos não triviais.

Proposição 2.15. *Sejam $q \geq 2p$ e $(u_n) \subset X$ uma sequência ou satisfazendo a equação (2.12), com $d \in (0, c_{mp}]$, ou sendo uma sequência de Cerami para I no nível c_{mp}. Então, considerando uma subsequência se necessário, apenas uma dentre as seguintes alternativas ocorre:*
(a) *$||u_n|| \to 0$ e $I(u_n) \to 0$.*
(b) *Existe uma função $u \in X \setminus \{0\}$ tal que $u_n \to u$ in X, um ponto crítico não trivial $u \in X$ em I.*

Demonstração. Suponha que (a) não ocorre. Então, pelo Lema 2.7, (u_n) é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda, pelo Lema 2.14, a menos de subsequência, (u_n) é limitada em X e $u_n \rightharpoonup u$ em X. Aplicando a Proposição 1.17 temos que $u_n \to u$ em $L^{\omega}(\mathbb{R}^N)$, para todo $\omega \geq N$.

Agora, observemos que:
(i) $|I'(u_n)(u_n-u)| \leq ||I'(u_n)||_{X'}||u_n-u||_X \leq C_1||I'(u_n)||_{X'} \to 0$, quando $n \to +\infty$.
(ii) Note que $\frac{1}{2p} + \frac{2p-1}{2p} = 1$, $\frac{2p}{2p-1}(q-1) > p$ e $\omega_0 = \frac{2p}{2p-1}(q-1)t_0 > p$. Assim, da limitação de (u_n) em $L^{\omega_0}(\mathbb{R}^N)$ e em $L^p(\mathbb{R}^N)$, Observação 1.25, Proposição 1.17, (2.9) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n-u)dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n|^{p-1}|u_n-u|dx + b_1\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q-1}|u_n-u|R(\alpha,u_n)dx \\
&\leq C||u_n-u||_p + b_1||u_n-u||_{2p}\left(\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} R(\alpha,u_n)^{\frac{2p}{2p-1}}|u_n|^{\frac{2p}{2p-1}(q-1)}dx\right)^{\frac{2p-1}{2p}} \\
&\leq C||u_n-u||_p + b_1K_1||u_n-u||_{2p}||u_n||_{\omega_0}^{q-1} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$
(iii) Por (HLS), a desigualdade de Hölder e a Proposição 1.17,

$$|V_2'(u_n)(u_n-u)| \leq K_0||u_n||^{2p-1}_{\frac{2N}{2N-1}p}||u_n-u||_{\frac{2N}{2N-1}p} \to 0.$$

quando $n \to +\infty$.

(iv) Da Proposição 1.17,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2}u_n(u_n-u)dx \right| \leq ||\tilde{u}_n||_p^{p-1}||\tilde{u}_n-u||_p \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

(v) Relembramos que, existe uma constante $D_1 > 0$, dependendo apenas de p, tal que

$$|a-b|^p \leq D_1(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b)\ ,\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\, p \geq 2. \tag{2.17}$$

Então,

$$\begin{aligned} V_1'(u_n)(u_n-u) &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p|u_n(y)|^{p-2}u_n(y)(u_n(y)-u(y))dxdy \\ &\geq C_9 \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p|u_n(y)-u(y)|^p dxdy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u_n(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)(u_n(y)-u(y))dxdy \\ &= C_9A_1 + B_1. \end{aligned}$$

Observe que $A_1 \geq 0$ e, pelo Lema 1.33, $B_1 \to 0$, quando $n \to +\infty$. Consequentemente, $V_1'(u_n)(u_n - u) \geq o(1)$.

Das observações anteriores, vem que

$$\begin{aligned} o(1) = I'(u_n)(u_n-u) &= \tilde{A}(u_n)(u_n-u) + V_0'(u_n(u_n-u) - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)(u_n-u)dx \\ &\geq \tilde{A}(u_n)(u_n-u) + o(1). \end{aligned}$$

Isto é, $\tilde{A}(u_n)(u_n-u) \to 0$. Então, como $\tilde{A}$ satisfaz a propriedade (S), $u_n \to u$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, podemos obter que $A_1 \to 0$ e, da Proposição 1.34, $||u_n-u||_* \to 0$, provando que $u_n \to u$ in X.

Finalmente, resta provar que u é um ponto crítico de I. De fato, seja $v \in X$. Então,

$$|I'(u)(v)| = \lim |I'(u_n)(v)| \leq ||v|| \lim ||I'(u_n)||_{X'} = 0.$$

□

Demonstração do Teorema 0.1. **(i)** Pelo Lema 2.5 e a Proposição 2.15 existe um ponto crítico não trivial para I, $u_0 \in X$, tal que $I(u_0) = c_{mp}$.

(ii) Inicialmente, defina o conjunto $\mathscr{K} = \{v \in X \setminus \{0\}\ ;\ I'(v) = 0\}$. Como $u_0 \in \mathscr{K}$, $\mathscr{K} \neq \emptyset$. Assim, podemos considerar uma sequência $(u_n) \subset \mathscr{K}$ satisfazendo $I(u_n) \to c_g = \inf_{v \in \mathscr{K}} I'(v)$.

Observe que $c_g \in [-\infty, c_{mp}]$. Agora, se $c_q = c_{mp}$ não há o que demonstrar. Por outro lado, se $c_g < c_{mp}$, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $I(u_n) \leq c_{mp}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, pela definição do conjunto $\mathscr{K}$, vemos que (u_n) verifica $||I'(u_n)||_{X'}(1+||u_n||_X) \to 0$. Além disso, como $I'(u_n)(u_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, da equação (2.11), $||u_n|| > \rho$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, da Proposição 2.15 existe uma função u_1 em X que é um ponto crítico não trivial de I em X. Logo, concluímos que $u_1 \in \mathscr{K}$ e $I(u_1) = c_g$. Particularmente, vê-se que $c_g > -\infty$. □

2.4 Multiplicidade de Soluções

Esta seção será devotada a demonstrarmos o Teorema 0.2. Para tanto, aplicaremos uma versão Simétrica do Teorema do Passo da Montanha de Rabinowitz [4] (veja também [6, 56]).

Teorema 2.16. *([2, Teorema 4.1]) Seja $E = E_1 \oplus E_2$, onde E é um espaço de Banach real e E_1 é um subespaço de dimensão finita. Suponha que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ é par, $J(0) = 0$, e J verifica as seguintes condições*

(J_1) *existem $\tau, r > 0$ tais que $J(u) \geq \tau$ se $||u||_E = r$, $u \in E_2$,*

(J_2) *existem um subespaço de dimensão finita $\mathscr{F} \subset E$, com $\dim E_1 < \dim \mathscr{F}$, e uma constante $\mathscr{B} > 0$ tais que $\max\limits_{u \in \mathscr{F}} J(u) \leq \mathscr{B}$,*

(J_3) *J satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, \mathscr{B})$.*

Então, J possui ao menos $\dim \mathscr{F} - \dim E_1$ pares de pontos críticos distintos.

Inicialmente, observamos que, pelas condições $(f_1') - (f_4)$, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, I é par, $I(0) = 0$ e, pelo Lema 2.5, I verifica (J_1). Deste modo, resta provar que I também verifica as condições (J_2) e (J_3).

Para tanto, tome $k \in \mathbb{N}$ e considere $Z \subset X$ um subespaço de dimensão k, com norma usual denotada por $|| \cdot ||_Z$. Lembramos que tal subespaço pode ser construído de modo *standard*.

Lema 2.17. *Existe $R > 0$ tal que $I(u) \leq 0$ para toda $u \in Z$ com $||u||_Z \geq R$.*

Demonstração. Como $\dim Z < +\infty$ todas as normas em Z são equivalentes, então, da condição (f_4), da Observação 1.25 e do item (iii) da Observação 2.1, vem que

$$I(u) \leq C_1 ||u||_Z^p + C_2 ||u||_Z^{2p} - C_3 ||u||_Z^q \to -\infty,$$

quando $||u||_Z \to +\infty$, pois $q > 2p$. $\square$

Lema 2.18. *Suponha $C_q > 0$ suficientemente grande. Então, existe $\eta > 0$, suficientemente pequeno, tal que $\max\limits_{u \in Z} I(u) \leq \eta$ e $\eta < M$, onde M é dado no Lema 1.24.*

Demonstração. Seja $u \in Z \setminus \{0\}$. Então, por $\dim Z < +\infty$ e pela condição (f_4), é possível encontrar constantes positivas tais que

$$I(u) \leq C_1 ||u||_Z^p + C_2 ||u||_Z^{2p} - 2 C_q A_q ||u||_Z^q,$$

onde $||u||_q \geq A_q ||u||_Z$. Assim, de modo análogo ao Lema 3.1, obtemos um limitante superior que pode ser tornado suficientemente pequeno a medida que escolhemos C_q grande. $\square$

Finalmente, resta verificar que I satisfaz a a condição $(PS)_d$, o que é garantido no próximo lema. Omitiremos a demonstração visto que consiste em repetir argumentos similares aos lemas de limitação e a Proposição 2.15. O leitor apenas deve observar que, os argumentos utilizados para sequências (PSC) continuam válidos para sequências (PS) uma vez que, essencialmente, utilizamos o fato que $||I'(u_n)|| \to 0$. Além disso, observa-se que a condição $\eta < M$, onde M é dado no Lema 1.24, é necessária para que seja possível controlar as expressões envolvendo f e F. Para finalizar, destacamos que este é um resultado importante, o qual possibilitou resolver também o problema com norma prescrita, visto que lá não era possível trabalhar com uma subsequência transladada, como fizemos aqui, no trabalho original.

Lema 2.19. *O funcional I satisfaz a condição $(PS)_d$ para todo $d \in (0, \eta)$.*

Demonstração do Teorema 0.2. Dos Lemas 2.5, 2.18 e 2.19 uma aplicação direta do Teorema 2.16, com $E = X$, $E_1 = \{0\}$, $\mathscr{F} = Z$, $J = I$, $\tau = m_\rho$, $r = \rho$ e $\mathscr{B} = \eta$, nos garante que I possui ao menos k pontos críticos não triviais. Portanto, fazendo k tão grande quanto se queira, concluímos que (3) possui infinitas soluções. $\square$

CAPÍTULO 3

Equação de Kirchhoff-Choquard com Potencial Interno Indefinido

Neste capítulo discutiremos a existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de equações de Kirchhoff-Choquard

$$-M(||\nabla u||_2^2)\Delta u + Q(x)u + \mu(V(|\cdot|) * u^2)u = f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2,$$

onde $\mu > 0$, $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um função de Kirchhoff, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é um potencial não-negativo, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um potencial contínuo, indeterminado e possivelmente ilimitado superior e inferiormente e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com primitiva $F(t) = \int\limits_0^t f(s)ds$. O presente capítulo será baseado no artigo [13].

Relembramos ao leitor que, ao longo deste capítulo, consideraremos as seguintes condições sobre M, V, Q e f:

(M) $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $M(t) = a + bt$, para todo $t \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $b \geq 0$ ou $a = 0$ e $b > 0$.

(V_1) Existem funções reais $a_1, a_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tais que $a_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$, $a_{1,0} = \inf\limits_{t \geq 2} a_1(t) > 0$, $a_{2,0} = \inf\limits_{t \in \mathbb{R}^+} a_2(t) > 0$ e

$$a_1(t)\ln(1+t) \leq V^+(t) \leq a_2(t)\ln(1+t), \forall\, t > 0.$$

(V_2) Existe uma função real $a_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $a_3(t) > 0$ em um subconjunto de $\mathbb{R}^+$ com medida positiva,

$$V^-(t) \leq \frac{a_3(t)}{t} \quad \forall\, t > 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} a_3 \in L^\infty(\mathbb{R}), \\ \text{ou} \\ a_3(t) = t^{-\lambda}, \text{ para algum } \lambda \in [1,3) \text{ e para todo } t > 0, \end{cases}$$

(V_3) Existe um subconjunto aberto $\mathscr{I} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $V(t) < 0$ para todo $t \in \mathscr{I}$.

(Q) $Q \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^2} Q(x) = Q_0 > 0$ e existe $p \in (1, \infty]$ tal que $Q \in L^p(\mathbb{R}^2)$.

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = 0$ e possui crescimento exponencial crítico com $\alpha_0 = 4\pi$.

(f_2)
$$\lim_{|t| \to 0} \frac{|f(t)|}{|t|^\tau} = 0, \text{ para algum } \tau > 1.$$

(f_3) Existe $\theta \geq 4$ tal que $f(t)t \geq \theta F(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f_4) Existem $q > 4$ e $C_q > 0$ tais que $F(t) \geq C_q |t|^q$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para conseguir provar a multiplicidade de soluções, necessitamos da seguinte condição:

(f_1') $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = 0, f$ é ímpar e possui crescimento exponencial crítico com $\alpha_0 = 4\pi$.

Finalmente, para garantirmos a existência de soluções no caso degenerado, iremos assumir as seguintes condições:

(f_2')
$$\lim_{|t| \to 0} \frac{|f(t)|}{|t|^\tau} = 0, \text{ para algum } \tau > 3.$$

(f_3') existe $\theta \geq 8$ tal que $f(t)t \geq \theta F(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.1 Noções Preliminares

Assim como no capítulo anterior, faremos uso de técnicas variacionais para obter soluções para (7). Relembremos que, uma **solução fraca** para (7) é uma função $u \in X \setminus \{0\}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} &a \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + b \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right) \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) u v dx \\ &+ \mu \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x-y|) u^2(x) u(y) v(y) \, dx dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(u) v dx, \forall\, v \in X, \end{aligned}$$

onde X é o espaço adequado. Neste sentido, introduzimos o funcional de Euler-Lagrange associado a (7), $I : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, dado por

$$I(u) = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{b}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) u^2(x) dx + \frac{\mu}{4} P(u) - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx, \tag{3.1}$$

onde $P : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é definido como

$$P(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x-y|)u^2(x)u^2(y)dxdy. \tag{3.2}$$

Portanto, pontos críticos para o funcional I serão soluções fracas para (7).

Para auxiliar em nosso estudo, consideramos, ainda, duas formas bilineares positivas e simétricas $\overline{P}_1, \overline{P}_2 : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dadas, respectivamente, por

$$\overline{P}_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} V^+(|x-y|)u(x)v(y)dxdy \text{ and } \overline{P}_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} V^-(|x-y|)u(x)v(y)dxdy, \tag{3.3}$$

e os funcionais delas provenientes $P_1, P_2 : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definidos como $P_1(u) = \overline{P}_1(u^2, u^2)$ e $P_2(u) = \overline{P}_2(u^2, u^2)$. Observe que $P(u) = P_1(u) - P_2(u)$.

Como mencionado anteriormente, a fim de que I esteja bem definido, consideramos o espaço de Hilbert

$$X = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \ ; \ ||u||_* < \infty\}, \quad \text{onde} \quad ||u||_*^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)u^2(x)dx,$$

munido com a norma $||\cdot||_X^2 = ||\cdot||^2 + ||\cdot||_*^2$, onde $||\cdot||$ é a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^2)$, e $||\cdot||_*$ é a norma proveniente do produto interno

$$\langle u, v \rangle_* = \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)u(x)v(x)\, dx.$$

Nosso primeiro passo neste capítulo é provar que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Para tanto, iniciamos discutindo algumas desigualdades importantes.

Pelas condições (f_1) e (f_2), dados $\varepsilon > 0$, $\alpha > 4\pi$, fixado, para todo $p > 2$, podemos encontrar duas constantes $K_1 = K_1(p, \alpha, \varepsilon) > 0$ e $K_2 = K_2(p, \alpha, \varepsilon) > 0$ tais que

$$f(t) \leq \varepsilon |t|^\tau + K_1 |t|^{p-1}(e^{\alpha t^2} - 1)\ , \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

e

$$F(t) \leq \varepsilon |t|^{\tau+1} + K_2 |t|^p (e^{\alpha t^2} - 1)\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Então, combinando o Lema 1.20, a equação (3.5) e a desigualdade de Hölder, para $r_1, r_2 > 1$, $r_1 \sim 1$ e $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\, dx \leq \varepsilon ||u||_{\tau+1}^{\tau+1} + K_2 ||u||_{pr_2}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} (e^{r_1 \alpha |u|^2} - 1) dx \right)^{\frac{1}{r_1}} < \infty, \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{3.6}$$

Além disso, da condição (V_1), existe uma constante $K_3 > 0$ tal que

$$P_1(u) \leq ||a_2||_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)u^2(x)u^2(y)dxdy \leq K_3 ||u||_*^2 ||u||_2^2, \tag{3.7}$$

e, pela condição (V_2) e Teorema 1.6, existe uma constante $K_4 > 0$ satisfazendo

$$P_2(u) \leq ||a_3||_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|} u^2(x)u^2(y)dxdy \leq K_4 ||u||^4_{\frac{8}{3}},$$

se $a_3 \in L^\infty(\mathbb{R})$, e

$$P_2(u) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{\lambda+1}} u^2(x)u^2(y)dxdy \leq K_{HLS} ||u||^4_{\frac{8}{3-\lambda}}, \tag{3.8}$$

se $a_3(t) = t^{-\lambda}$, para todo $t > 0$ e $\lambda \in [-1,3)$. Observe que a constante K_4 também depende da melhor constante para a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev, denotada, aqui, por K_{HLS}. partir deste momento, consideraremos apenas o segundo caso na condição (V_2), visto que o caso em que $a_3 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pode ser tratado de modo similar.

Finalmente, da condição (Q), obtemos, para $p > 1$ dado em (Q), com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} Q(x)u^2\, dx \leq ||Q||_p ||u||^2_{2p'} \quad \text{e} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} Q(x)uv\, dx \leq ||Q||_p ||u||_{2p'} ||v||_{2p'}. \tag{3.9}$$

Das considerações anteriores, e argumentos clássicos, concluímos que I está bem definido em X, $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ e

$$P'(u)(v) = 4 \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} V(|x-y|)u^2(x)u(y)v(y)\, dxdy, \forall\, v \in X.$$

3.2 Propriedades Geométricas e Resultados de Convergência

Na primeira parte desta seção, verificaremos que o funcional I tem a geometria do Passo da Montanha e provaremos que, a menos da passagem a uma subsequência, sequências de Cerami são limitadas em X. Num segundo momento, analisaremos as geometrias do potencial V e do funcional P.

Nos próximos resultados, precisaremos fazer uso da seguinte desigualdade

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(u)u\, dx \leq \varepsilon ||u||^{\tau+1}_{\tau+1} + K_2 ||u||^q_{qr_2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} (e^{r_1\alpha|u|^2} - 1)dx \right)^{\frac{1}{r_1}}. \tag{3.10}$$

Lema 3.1. *Existe um número real $\rho > 0$, suficientemente pequeno, tal que*

$$m_\beta = \inf\{I(u)\, ;\, u \in X, ||u|| = \beta\} > 0\ ,\ \forall \beta \in (0,\rho]$$

e

$$l_\beta = \inf\{I'(u)(u)\, ;\, u \in X, ||u|| = \beta\} > 0\ ,\ \forall \beta \in (0,\rho].$$

Demonstração. Sejam $\alpha > 4\pi$ e $u \in X$ tais que $r_1\alpha||u||^2 < 4\pi$.

Caso $a > 0$: Por (Q), pelas equações (3.6), (3.10) e (3.8), pelo Lema 1.20 e pelas imersões dos espaços, obtemos

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{a}{2}||\nabla u||_2^2 + \frac{b}{4}||\nabla u||_2^4 + \frac{Q_0}{2}||u||_2^2 - \frac{\mu}{4}K_4||u||^4_{\frac{8}{3-\lambda}} - \varepsilon||u||_{\tau+1}^{\tau+1} - K_2K_\alpha||u||^q_{qr_2} \\
&\geq C_1||u||^2[1 - \mu C_2||u||^2 - \varepsilon C_3||u||^{\tau-1} - C_4||u||^{q-2}] + \frac{b}{4}||\nabla u||_2^4,
\end{aligned}
$$

onde $C_1 = \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{Q_0}{2}\right\} > 0$ e, de modo similar,

$$
I'(u)(u) \geq C_5||u||^2[1 - \mu C_6||u||^2 - \varepsilon C_7||u||^{\tau-1} - C_8||u||^{q-2}] + b||\nabla u||_2^4,
$$

onde $C_5 = \min\{a, Q_0\}$. Portanto, para $\mu > 0$ qualquer e $\rho, \varepsilon > 0$ suficientemente pequenos, o resultado é válido neste caso.

Caso $a = 0$: Como estaremos considerando o valor real $\rho > 0$ pequeno, podemos assumir que $||u||^2 < 1$. Então, $||u||_2^2 \geq ||u||_2^4$. Além disso,

$$
\frac{b}{4}||\nabla u||_2^4 + \frac{Q_0}{2}||u||_2^4 \geq C_9(||\nabla u||_2^4 + ||u||_2^4) \geq \frac{C_9}{4}||u||^4,
$$

onde $C_9 = \min\left\{\frac{b}{4}, \frac{Q_0}{2}\right\}$. Consequentemente,

$$
I(u) \geq ||u||^4\left(\frac{C_9}{4} - C_{10}\mu - \varepsilon C_{11}||u||^{\tau-3} - C_{12}||u||^{q-4}\right). \tag{3.11}
$$

Portanto, para $\rho, \varepsilon, \mu > 0$ suficientemente pequenos, novamente temos a validade do lema. □

Observação 3.2. Na desigualdade (3.11), podemos escrever o lado direito da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
&\frac{C_9}{4} - C_{10}\mu - \varepsilon C_{11}||u||^{\tau-3} - C_{12}||u||^{q-4} \\
&\qquad = \left(\frac{C_9}{8} - C_{10}\mu\right) + \left(\frac{C_9}{8} - \varepsilon C_{11}||u||^{\tau-3} - C_{12}||u||^{q-4}\right).
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Para que o primeiro termo seja positivo, devemos exigir que

$$
\frac{C_9}{8C_{10}} > \mu.
$$

Mais precisamente, podemos explicitar um limitante para μ. Para tanto, da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg inequality, vemos que

$$
||u||^4_{\frac{8}{3-\lambda}} \leq K_{GN}^{\frac{3-\lambda}{2}}||u||^4,
$$

onde $K_{GN} > 0$ denota a melhor constante. Assim, levando em conta que

$$
C_9 = \min\left\{\frac{b}{4}, \frac{Q_0}{2}\right\} \quad \text{e} \quad C_{10} = K_{HLS}K_{GN}^{\frac{3-\lambda}{2}},
$$

obtemos

$$
\frac{\min\left\{\frac{b}{4}, \frac{Q_0}{2}\right\}}{8K_{HLS}K_{GN}^{\frac{3-\lambda}{2}}} > \mu.
$$

Portanto, considerando $\mu_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que a equação acima é satisfeita e o segundo termo em (3.12) é positivo, temos que o Lema 3.1 é válido no caso *degenerado* para todo $\mu \in (0, \mu_0)$.

Finalmente, ressaltamos que, no caso em que $a_3 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtem-se

$$\frac{\min\left\{\frac{b}{4}, \frac{Q_0}{2}\right\}}{8||a_3||_\infty K_{HLS} K_{GN}^{\frac{3}{2}}} > \mu.$$

Lema 3.3. *Sejam $u \in X \setminus \{0\}$ e $q > 4$. Então,*

$$I(tu) \searrow 0, \text{ as } t \to 0 \ , \ \sup_{t>0} I(tu) < \infty \ \text{ e } \ I(tu) \to -\infty, \text{ quando } t \to \infty.$$

Demonstração. Sejam $u \in X \setminus \{0\}$, $q > 4$ e $t > 0$. Por (f_4), (3.9) e (3.7), temos

$$I(tu) \leq \frac{a}{2} t^2 ||\nabla u||_2^2 + \frac{b}{4} t^4 ||\nabla u||_2^4 + \frac{t^2}{2} ||Q||_p ||u||_{2p'}^2 + \frac{\mu K_3}{4} t^4 ||u||_X^4 - C_q t^q ||u||_q^q \to -\infty,$$

quando $t \to \infty$. Agora, considere $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $r_1 \alpha t^2 ||u||^2 < 4\pi$. Então, do Lema 1.20 e da equação (3.6),

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(tu)\, dx \leq \varepsilon t^{\tau+1} ||u||_{\tau+1}^{\tau+1} + C_1 t^q ||u||_{qr_2}^q \to 0, \text{ quando } \ t \to 0.$$

Assim, concluímos que $I(tu) \to 0$ quando $t \to 0$ e, como $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $\sup_{t>0} I(tu) < \infty$. □

Pelos Lemas 3.1 e 3.3, o valor real c_{mp} definido em (8) está bem definido e satisfaz $0 < m_\rho \leq c_{mp} < \infty$. Além disso, como I possui a geometria do Passo da Montanha, existe uma sequência de Cerami para I no nível c_{mp}, isto é, existe $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \to c_{mp} \quad \text{e} \quad ||I'(u_n)||_{X'}(1 + ||u_n||_X) \to 0, \text{ quando } \ n \to \infty. \tag{3.13}$$

Antes de investigarmos limitação e convergência de sequência, estudaremos brevemente a geometria de P e V.

Lema 3.4. *Para o potencial V e para o funcional P, verificam-se as seguintes propriedades:*

(i) $V^+(t) \to \infty$, *quando* $t \to \infty$, *e* $V^+(t) \to 0$, *as* $t \to 0$*;*

(ii) $V^-(t) \to 0$, *quando* $t \to \infty$*;*

(iii) $V(t) \to \infty$, *quando* $t \to \infty$.

(iv) Existe uma função $u_0 \in X \setminus \{0\}$ *tal que* $P(u_0) < 0$.

Demonstração. Da condição (V_1), para $t \geq 2$, temos

$$0 < a_{1,0}\ln(1+t) < a_1(t)\ln(1+t) \leq V^+(t) \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

Por outro lado, novamente da condição (V_1),

$$0 \leq V^+(t) \leq ||a_2||_\infty \ln(1+t) \to 0, \text{ quando } t \to 0.$$

(ii) Utilizando a condição (V_2), vemos que

$$0 \leq V^-(t) \leq \frac{a_3(t)}{t} \leq \begin{cases} \dfrac{||a_3||_\infty}{t}, \text{ se } a_3 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \\ \dfrac{1}{t^{1+\lambda}} \quad, \text{ se } a_3(t) = t^{-\lambda} \end{cases} \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

(iii) Segue imediatamente da aplicação dos itens (i) e (ii).
(iv) Pela condição (V_3) podemos considerar um intervalo aberto $(c,d) \subset \mathscr{I}$ no qual $V(t) < 0$. Tome $x_0 \in (B_c^c \cap B_d)$. Seja ψ uma função tal que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ e *supp* $\psi \subset B_{\frac{|c-d|}{4}}(x_0)$. Então, $\psi \in X \setminus \{0\}$ e $P(\psi) < 0$. □

Como uma consequência imediata, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.5. *O conjunto* $\mathscr{A} = \{u \in X \ ; \ u \neq 0, P(u) \leq 0\}$ *não é vazio.*

Portanto, é possível encontrar um limitante superior para o nível do Passo da Montanha, o que tornará possível obter nossos teoremas principais.

Lema 3.6. *Existe uma constante* $K_7 = K_7(a,b,q,Q,p) > 0$ *tal que* $c_{mp} \leq \dfrac{K_7}{C_q^{\frac{2}{q-2}}}$.

Demonstração. Pelas imersões contínuas de Sobolev, para $q > 4$, existe uma constante $C > 0$ tal que $||u|| \geq C||u||_q$, para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$. Assim, pelo Corolário 3.5, faz sentido definir

$$S_q(v) = \frac{||v||}{||v||_q} \quad \text{and} \quad S_q = \inf_{v \in \mathscr{A}} S_q(v) \geq \inf_{v \neq 0} S_q(v) > 0.$$

Agora, pelo Lema 3.3, para $v \in \mathscr{A}$ e $T > 0$ suficientemente grande, $I(Tv) < 0$. Então, podemos definir o caminho $\gamma \in \Gamma$ por $\gamma(t) = tTv$, para $t \in [0,1]$, tal que

$$c_{mp} \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) = \max_{0 \leq t \leq 1} I(tTv) \leq \max_{t > 0} I(tv).$$

Consequentemente, de (Q), (f_4) e da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, para $\psi \in \mathscr{A}$, temos

$$c_{mp} \leq \max_{t>0} \left\{ \left(\frac{a + ||Q||_p K_{GN}^{\frac{p-1}{p}}}{2} \right) S_q(\psi)^2 t^2 ||\psi||_q^2 - \frac{C_q}{2} t^q ||\psi||_q^q \right\}$$
$$+ \max_{t>0} \left\{ \frac{b}{4} S_q(\psi)^4 t^4 ||\psi||_q^4 - \frac{C_q}{2} t^q ||\psi||_q^q \right\}.$$

Considerando as funções auxiliares $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por $h_1(t) = \mathfrak{a}t^2 - \mathfrak{b}t^q$ e $h_2(t) = \mathfrak{c}t^4 + \mathfrak{d}t^q$, para $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} > 0$, obtemos

$$c_{mp} \leq \left(2^{\frac{4-q}{q-2}} - \frac{2^{\frac{2}{q-2}}}{q} \right) (a + ||Q||_p K_{GN}^{\frac{p-1}{p}})^{\frac{q}{q-2}} S_q(\psi)^{\frac{2q}{q-2}} \left(\frac{1}{qC_q} \right)^{\frac{2}{q-2}}.$$

Portanto, considerando o ínfimo sobre todas $\psi \in \mathscr{A}$, segue o resultado. □

Para finalizar esta seção, apresentaremos resultados que determinam quando uma sequência de Cerami será, a menos de considerarmos uma subsequência, limitada no espaço X. Para o que segue, seja $(u_n) \subset X$ uma sequência satisfazendo

$$\exists\, d > 0 \;\text{ s.t. }\; I(u_n) \leq d, \text{ for all } n \in \mathbb{N} \text{ e } ||I'(u_n)||_{X'}(1 + ||u_n||_X) \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.14}$$

Lema 3.7. *Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{Z}^2} \int_{B_2(x)} u_n^2(x)dx > 0.$$

Então, existem uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ e uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{Z}^2$ tais que, a menos da passagem a uma subsequência, $y_n * u_n = \tilde{u}_n \rightharpoonup u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Particularmente, $u \neq 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Lema 3.8. *Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência satisfazendo (3.14), limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e tal que $||\nabla u_n||_2 < 2\sqrt{\frac{\pi}{r_1\alpha}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e*

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{Z}^2} \int_{B_2(y)} u_n^2(x)dx > 0.$$

Então, a menos de uma subsequência, $(\tilde{u}_n)$ é limitada em X.

Demonstração. A demonstração segue dos Lemas 1.17, 1.31 e 3.7, das equações (3.6) e (3.8), do fato de P_1 ser invariante por translações em $\mathbb{Z}^2$ e pelo fato de que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\mu}{4}P_1(u_n) = I(u_n) - \frac{a}{2}||\nabla u_n||_2^2 - \frac{b}{4}||\nabla u_n||_2^4 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)u_n^2(x)dx + \frac{\mu}{4}P_2(u_n) + \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx.$$

□

Destacamos que o próximo lema é um resultado técnico chave para a obtenção de múltiplas soluções para o problema (3), uma vez que este torna possível verificar a validade da condição (PS) para níveis reais adequados.

Corolário 3.9. *Seja $(u_n) \subset X$ sob as hipóteses do Lema 3.8. Então, a menos da passagem a uma subsequência, (u_n) é limitada em X.*

Demonstração. Inicialmente, pelo Lema 3.8, passando a uma subsequência, se necessário, existe $(y_n) \subset \mathbb{Z}^2$ tal que $\tilde{u}_n \rightharpoonup u$ em X, com $u \neq 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{u}_n(x) \to u(x)$ pontualmente q.t.p. em $\mathbb{R}^2$ e, pelo Lema 1.17, $\tilde{u}_n \to u$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$, para todo $s \geq 2$.

Mais ainda, é possível ver que existem constantes $R_1, C_1 > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que $||u_n||_{p,B_{R_1}}^p \geq C_1 > 0$, para todo $n \geq n_1$. Desta forma, concluímos que (y_n) é limitada em $\mathbb{Z}^2$ e, como

$$||u_n||_*^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y_n|)\tilde{u}_n^2(x)dx \leq ||\tilde{u}_n||_*^2 + \ln(1+|y_n|)||\tilde{u}_n||_2^2, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, o resultado segue. □

Lema 3.10. *Suponha $q > 4$ e $\alpha > 4\pi$ arbitrários, porem fixados. Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência satisfazendo (3.14), $||\nabla u_n||_2 < 2\sqrt{\frac{\pi}{r_1\alpha}}$ e que não verifica $||u_n|| \to 0$ and $I(u_n) \to 0$. Então,*

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{Z}^2} \int_{B_2(y)} u_n^2(x)dx > 0.$$

Demonstração. A demonstração é feita por contradição, aplicando o Lema de Lion e utilizando as equações (3.8) e (3.10), a desigualdade de Moser-Trudinger e o fato de que $I'(u_n)(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. □

3.3 O caso *não degenerado* $(a > 0)$

A presente seção será dedicada a demonstração dos Teoremas 0.5 e 0.7. Uma vez que estaremos tratando do caso *não degenerado*, ao longo de toda esta seção iremos assumir que $a > 0$ e $b \geq 0$. Nossa estratégia consiste em provar a limitação de sequência de Cerami em $H^1(\mathbb{R}^2)$, garantindo que será possível aplicar a desigualdade de Moser-Trudinger para tais sequências e, sob quais condições, I tem pontos críticos não triviais em X. Para finalizar a seção, verificaremos que (3) tem infinitas soluções.

Lema 3.11. *Suponha que $a > 0$ e $b \geq 0$. Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência satisfazendo* (3.14). *Então, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Da condição (f_3) e da equação (3.14), temos

$$\begin{aligned} d+o(1) &\geq I(u_n) - \frac{1}{4}I'(u_n)(u_n) = \frac{a}{4}||\nabla u_n||_2^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)u_n^2dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(u_n)u_n}{4} - F(u_n)\right]dx \\ &\geq \frac{\min\{a, Q_0\}}{4}||u_n||^2, \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{4d}{\min\{a, Q_0\}}\right)^{\frac{1}{2}} + o(1) \geq ||u_n||, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e o lema segue. □

Corolário 3.12. *Seja $(u_n)\subset X$ uma sequência satisfazendo* (3.14)*, com $d\in(0,c_{mp}]$, ou uma sequência de Cerami no nível c_{mp}. Então, a menos de considerarmos uma subsequência, existe uma constante $K_8=K_8(a,b,q,Q,p)>0$ tal que $||u_n||\leq \dfrac{K_8}{C_q^{\frac{1}{q-2}}}$, para todo $n\in\mathbb{N}$.*

Demonstração. A demonstração segue diretamente dos Lemas 3.6 e 3.11 e das propriedades de $\limsup$. □

Proposição 3.13. *Suponha $q>4$ e $C_q>0$ é suficientemente grande. Seja $(u_n)\subset X$ uma sequência satisfazendo* (3.14)*, com $d\in(0,c_{mp}]$, ou uma sequência de Cerami no nível c_{mp}. Então, passando a uma subsequência se necessário, apenas um dentre os seguintes itens ocorre:*

(a) $||u_n||\to 0$ e $I(u_n)\to 0$.

(b) Existe uma função $u\in X\setminus\{0\}$ tal que $u_n\to u$ em X e u é um ponto crítico de I em X.

Demonstração. Suponhamos que o item (a) não ocorre. Então, pelos Lemas 3.11, 3.7, 3.10, 3.8 e pelo Corolário 3.9, considerando uma subsequência se necessário, $u_n\rightharpoonup u$ em X, para $u\in X\setminus\{0\}$. Além disso, pelo Lema 1.17, $u_n\to u$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$, para todo $s\geq 2$.

Agora, pelo Corolário 3.12, a menos de subsequência, podemos assumir que $r_1\alpha||u_n||^2<4\pi$, para todo $n\in\mathbb{N}$ e $C_q>0$ suficientemente grande. Assim, pelas equações (3.14) e (3.12), pelo Lema 1.20 e pela desigualdade (HLS), obtemos as seguintes convergências

(i) $|I'(u_n)(u_n-u)|\leq ||I'(u_n)||_{X'}||u_n-u||_X\to 0$, quando $n\to\infty$;

(ii) $P_2'(u_n)(u_n-u)\to 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} Q(x)u_n^2dx\to 0$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_ndx\to 0$, quando $n\to\infty$.

Mais ainda, por $u_n\rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, por $||\cdot||_2$ ser fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente e as propriedades de $\liminf$, passando a uma subsequência se necessário, temos

$$\langle\nabla u_n,\nabla(u_n-u)\rangle=||\nabla u_n||_2^2-||\nabla u||_2^2+o(1).$$

Consequentemente, do Lema 1.32 com $g(t)=t$ e dos itens (i) e (ii), segue que

$$\begin{aligned}
o(1)&=I'(u_n)(u_n-u)\\
&\geq a(||\nabla u_n||_2^2-||\nabla u||_2^2)+b||\nabla u_n||_2^2(||\nabla u_n||_2^2-||\nabla u||_2^2+o(1))P_1'(u_n)(u_n-u)+o(1)\\
&=a(||\nabla u_n||_2^2-||\nabla u||_2^2)+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} V^+(|x-y|)u_n^2(x)(u_n-u)^2(y)dxdy\\
&+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} V^+(|x-y|)u_n^2(x)u(y)(u_n(y)-u(y))dxdy+o(1)\\
&\geq a(||\nabla u_n||_2^2-||\nabla u||_2^2)+o(1)\geq o(1).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos que $||\nabla u_n||_2^2-||\nabla u||_2^2\to 0$ e, como $u_n\to u$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, $u_n\to u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, retornando na desigualdade acima, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} V^+(|x-y|)u_n^2(x)(u_n-u)^2(y)dxdy\to 0$$

e, pelo Lema 1.31, $||u_n - u||_* \to 0$, donde $u_n \to u$ em X. Finalmente, para $v \in X$,

$$|I'(u)(v)| \leq |I'(u)(v) - I'(u_n)(v)| + ||I'(u_n)||_{X'}||v|| \to 0, \text{ as } n \to \infty.$$

Logo, u é um ponto crítico não tivial para I em X. □

Demonstração do Teorema 0.5. O item (a) segue imediatamente da equação (3.13), do Lema 3.1 e da Proposição 3.13. Vamos provar a validade do item (b). Pelo item (a), $\mathscr{K} \neq \emptyset$. Considere $(u_n) \subset \mathscr{K}$ uma sequência tal que $I(u_n) \to c_g$.

Observe que $c_g \in [-\infty, c_{mp}]$. Se $c_g = c_{mp}$ não resta nada a ser provado. Assuma, então, que $c_g < c_{mp}$. Assim, utilizando a definição do conjunto $\mathscr{K}$, temos que (u_n) satisfaz (3.14) com $d = c_{mp}$.

Portando, pelo Lema 3.1 e pela Proposição 3.13, existe $u \in X \setminus \{0\}$ tal que $u_n \to u$ em X e u é um ponto crítico para I. Mais ainda, temos $I(u) = c_g$ o que implica, particularmente, que $c_g > -\infty$. □

Para provarmos o segundo resultado principal, consideraremos $k \in \mathbb{N}$, arbitrário porém fixado, e $Z \subset X$ um subespaço com $\dim Z = k$ e norma denotada por $|| \cdot ||_Z$. Nosso objetivo será aplicar uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha, originariamente desenvolvido por Ambrosetti e Rabinowitz [4](citamos também [6, 56]).

Teorema 3.14. *([2, Teorema 4.1]) Seja $E = E_1 \oplus E_2$, onde E é um espaço de Banach real e E_1 tem dimensão finita. Suponha que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ é ímpar, $J(0) = 0$, e que ele verifica as seguintes condições:*

(J_1) *existem $\tau, r > 0$ tais que $J(u) \geq \tau$ se $||u||_E = r$, $u \in E_2$,*

(J_2) *existem um subespaço de dimensão finita $\mathscr{F} \subset E$, com $\dim E_1 < \dim \mathscr{F}$, e uma constante $\mathscr{B} > 0$ tais que $\max_{u \in \mathscr{F}} J(u) \leq \mathscr{B}$,*

(J_3) *J satisfaz a condição $(PS)_c$ para $c \in (0, \mathscr{B})$.*

Então, J possui ao menos $\dim \mathscr{F} - \dim E_1$ pares de pontos críticos não triviais.

Neste momento, nosso objetivo será verificar a validade das condições do Teorema 3.14. Primeiramente, observe que, das condições $(f_1') - (f_4)$, (Q), (M) e $(V_1) - (V_3)$ já sabemos que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, I é ímpar, $I(0) = 0$ e, pelo Lema 3.1, I satisfaz (J_1). Então, resta provar que I também verifica (J_2) e (J_3).

Lema 3.15. *Seja $q > 4$. Então, existe $R > 0$ tal que $I(u) \leq 0$ para toda $u \in X$ verificando $||u||_Z \geq R$.*

Demonstração. Como $\dim Z < \infty$, todas normas são equivalentes em Z. Assim, da condição (f_4) e da equação (3.7), temos

$$I(u) \leq C_1||u||_Z^2 + C_2||u||_Z^4 - C_3||u||_Z^q \to -\infty, \text{ quando } ||u||_Z \to \infty.$$

□

Lema 3.16. *Seja $q > 4$. Então, existe $\eta > 0$, suficientemente pequeno, tal que $\max_{u \in Z} I(u) \leq \eta$ e $r_1 \alpha \frac{\eta}{\min\{a, Q_0\}} < \pi$.*

Demonstração. Seja $u \in Z \setminus \{0\}$. Assim, por $\dim Z < \infty$, pela condição (f_4) e pela equação (3.7), existem constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$, dependendo apenas de a, b, q e Q tais que

$$I(u) \leq C_1 ||u||_Z^2 + C_2 ||u||_Z^4 - C_q C_3 ||u||_Z^q.$$

Argumentando de forma similar como a feita no Lema 3.6, podemos encontrar uma constante $C_4 > 0$ satisfazendo

$$I(u) \leq \frac{C_4}{C_q^\beta}, \text{ para algum expoente } \beta = \beta(q) > 1.$$

Consequentemente,

$$\max_{u \in Z} I(u) \leq \frac{C_4}{C_q^\beta}$$

e, tomando $C_q > 0$ suficientemente grande, encontramos um valor $\eta > 0$ suficientemente pequeno como desejado. □

No próximo lema iremos garantir que o funcional I satisfaz a condição $(PS)_d$ para todos valores $d \in (0, \eta)$. Observe que a demonstração deste lema pode ser feita de modo similar aquela apresentada para a Proposição 3.13 e, por este motivo, a mesma será omitida aqui. Destacamos que, a validade deste resultado só é possível graças a existência do Lema 3.9.

Lema 3.17. *O funcional I satisfaz a condição $(PSC)_d$ para todos $d \in (0, \eta)$.*

Demonstração do Teorema 0.7. Pelos Lemas 3.1, 3.16 e 3.17 e uma aplicação imediata do Teorema 3.14, com $E = X$, $E_1 = \{0\}$, $\mathscr{F} = Z$, $J = I$, $\tau = m_\rho$, $r = \rho$ e $\mathscr{B} = \eta$, obtemos que I possui ao menos k pontos críticos não triviais. Portanto, como podemos tornar k tão grande quando se queira, concluímos que (3) possui infinitas soluções. □

3.4 O caso *degenerado* ($a = 0$)

Nesta seção, investigaremos a existência de soluções para (3) no caso *degenerado*. Desta forma, assumiremos que $a = 0$ e $b > 0$ ao longo de toda esta seção. Agora, como a constante multiplicativa $\frac{1}{4}$ aparece em ambos os termos, a saber $||\nabla \cdot||_2$ e V, precisaremos de uma abordagem distinta daquela utilizada na Seção 3.3. A técnica adotada será baseada nos Lemas 3.18 e 3.19, os quais são inspirados em resultados encontrados em [20].

Lema 3.18. *Sejam $(u_n) \subset X$ uma sequência satisfazendo (3.14) e $(t_n) \subset \left(0, \left(\frac{\theta - 4}{\theta}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$. Então, $I(t_n u_n) \leq I(u_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Observe que

$$I(t_nu_n)=\frac{b}{4}t_n^4||\nabla u_n||_2^4+\frac{t_n^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)u_n^2dx+\frac{\mu}{4}t_n^4P(u_n)-\int_{\mathbb{R}^N}F(t_nu_n)dx \tag{3.15}$$

e

$$\mu P'(u_n)(u_n)=I'(u_n)(u_n)-b||\nabla u_n||_2^4-\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)u_n^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}f(u_n)u_ndx. \tag{3.16}$$

Assim, combinando (3.15) e (3.16),

$$\begin{aligned}I(t_nu_n)-I(u_n)&=\frac{b}{4}(t_n^4-1)||\nabla u_n||_2^4+\frac{t_n^2-1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)u_n^2dx+\frac{\mu}{4}(t_n^4-1)P(u_n)\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^N}[F(u_n)-F(t_nu_n)]dx\\&=\frac{1}{2}\left(t_n^2-\frac{t_n^4}{2}-\frac{1}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)u_n^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}\left[F(u_n)-F(t_nu_n)+\frac{t_n^4-1}{4}f(u_n)u_n\right]dx\\&\leq 0,\end{aligned}$$

como $t_n^2-\frac{t_n^4}{2}-\frac{1}{2}\leq 0$, para todo $n\in\mathbb{N}$, e

$$F(u_n)+\frac{t_n^4-1}{4}f(u_n)u_n\leq\left(\frac{1}{\theta}+\frac{t_n^4-1}{4}\right)f(u_n)u_n\leq 0,\forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Portanto, $I(t_nu_n)\leq I(u_n)$, para todo $n\in\mathbb{N}$. □

Lema 3.19. *Seja $(u_n)\subset X$ satisfazendo* (3.14)*. Então, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $||u_n||\to\infty$. Para um valor fixado $\alpha>4\pi$, defina $v_n=\sqrt{\frac{\pi}{r_1\alpha}}\frac{u_n}{||u_n||}$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Assim, $||v_n||=\sqrt{\frac{\pi}{r_1\alpha}}$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Consequentemente, (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Afirmação: $\liminf_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{Z}^2}\int_{B_2(y)}v_n^2(x)dx>0.$

Caso isto não ocorra, pelo Lema de Lion, $v_n\to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$, para todo $s\in(2,\infty)$. Disto, pelas equações (3.8), (3.10), (3.14) e pelo Lema 1.20, temos

$$\begin{aligned}0\leq\mu P_1(v_n)+b||\nabla v_n||_2^4+\frac{1}{2}Q(x)v_n^2dx&=I'(v_n)(v_n)+\mu P_2(v_n)+\int_{\mathbb{R}^N}f(v_n)v_ndx\\&\leq\mu K_5||v_n||^4_{\frac{8}{3-\lambda}}+\varepsilon||v_n||_{\tau+1}^{\tau+1}+C_1||v_n||_{qr_2}^q\to 0,\end{aligned}$$

quando $n\to\infty$. Consequentemente, $P_1(v_n)\to 0$, $||\nabla v_n||_2\to 0$ e, por (Q), $||v_n||_2\to 0$. Portanto, $||v_n||\to 0$, o que é uma contradição.

Logo, pelo Lema 3.9, a menos de subsequência, $v_n\rightharpoonup v$ em X, para $v\in X\setminus\{0\}$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $v_n(x)\to v(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$. Mais ainda, das imersões contínuas de Sobolev, $v_n\rightharpoonup v$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$. Assim, por ser fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente, da limitação em X, da equação (3.9), da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg e da condição (f_4), existem um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $t > 0$,

$$I(tv_n) \leq t^4 \frac{b}{4} \left(\frac{\pi}{r_1 \alpha} \right)^2 + \frac{t^2}{2} \frac{\pi}{r_1 \alpha} ||Q||_p K_{GN}^{\frac{1}{p'}} + t^4 C_2 - C_q t^q ||v||_q^q, \forall\, n \geq n_0.$$

Então, escolhendo um valor $t_0 > 0$ suficientemente grande, $I(t_0 v_n) \leq -1$, para todo $n \geq n_0$. Mas, por outro lado,

$$t_0 \sqrt{\frac{\pi}{r_1 \alpha}} \frac{1}{||u_n||} \to 0, \text{ as } n \to \infty,$$

o que contraria o Lema 3.3. Logo, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. □

Considere $(u_n) \subset X$ uma sequência dada pela equação (3.13). Pelo Lema 3.19, existe uma constante $K_{mp} > 0$ tal que, passando a uma subsequência se necessário, $||u_n|| \leq K_{mp}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ainda que já tenhamos obtido uma limitação superior para a sequência de Cerami, precisamos de uma constante suficientemente pequena que limite $||\nabla u_n||_2$ para ser possível aplicar o Lema 3.4.

Lema 3.20. *Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência satisfazendo* (3.13). *Então, existem $\mu_{mp} > 0$ suficientemente pequeno e uma constante $K_9 > 0$ tais que, passando a uma subsequência, $||\nabla u_n||_2 \leq K_9 c_{mp}^{\frac{1}{4}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu \in (0, \mu_{mp})$.*

Demonstração. Pela equação (3.8) e a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, temos

$$P_2(u_n) \leq K_5 ||u_n||^4_{\frac{8}{3-\lambda}} \leq K_5 K_{GN}^{\frac{3-\lambda}{2}} ||u_n||^4 \leq K_5 K_{GN}^{\frac{3-\lambda}{2}} K_{mp}^4, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} c_{mp} + o(1) &\geq I(u_n) - \frac{1}{8} I'(u_n)(u_n) \\ &\geq \frac{b}{8} ||\nabla u_n||_2^4 + \frac{3}{8} Q_0 ||u_n||_2^2 - \mu \frac{K_5 K_{GN}^{\frac{3-\lambda}{2}} K_{mp}^4}{4} + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{8} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) dx \\ &\geq \frac{b}{8} ||\nabla u_n||_2^4 - \mu \frac{K_5 K_{GN}^{\frac{3-\lambda}{2}} K_{mp}^4}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, considerando $\mu_{mp} > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$c_{mp} + o(1) \geq \mathfrak{e} b ||\nabla u_n||_2^4,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in (0, \mu_{mp})$ e um valor $\mathfrak{e} \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$, dependendo de μ_{mp}.

Logo, o resultado segue considerando $K_9 = \left(\frac{1}{\mathfrak{e} b}\right)^{\frac{1}{4}} > 0$. □

Demonstração do Teorema 0.5 - (a). A prova segue dos Lemas 1.32, 1.20, 3.1, 3.7, 3.10, 3.8, 3.19 e 3.20 e do Corolário 3.9, argumentando de um modo similar aquele utilizado na Proposição 3.13 e no Teorema 0.1. □

Como o item (a) já foi demonstrado, podemos considerar o conjunto não vazio $\mathscr{K} = \{v \in X \setminus \{0\}\ ;\ I'(v) = 0\}$. Disto, $c_g \in [-\infty, c_{mp}]$ e existe uma sequência $(u_n) \subset \mathscr{K}$ tal que $I(u_n) \to c_g$. Assumiremos que $c_g < c_{mp}$. Além disso, pela definição de $\mathscr{K}$, vemos que (u_n) satisfaz

$$||I'(u_n)||_{X'}(1 + ||u_n||_X) \to 0, \text{ as } n \to \infty.$$

Consequentemente, do Lema 3.19, existe uma constante $K_g > 0$ tal que $||u_n|| \leq K_g$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 3.21. *Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência em $\mathscr{K}$ que converge para c_g. Então, existem $\mu_g > 0$ suficientemente pequeno e uma constante $K_{10} > 0$ tais que, a menos de subsequência, $||\nabla u_n||_2 \leq K_{10} c_{mp}^{\frac{1}{4}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu \in (0, \mu_g)$.*

Demonstração. De modo similar ao feito no Lema 3.20, como $c_g < c_{mp}$, considerando uma subsequência se necessário, obtemos

$$c_{mp} + o(1) \geq \frac{b}{8}||\nabla u_n||_2^4 - \mu \frac{K_5 K_{GN}^{\frac{3-\lambda}{2}} K_g^4}{4}.$$

Assim, tomando $\mu_g > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$c_{mp} + o(1) \geq \mathfrak{r} b ||\nabla u_n||_2^4,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in (0, \mu_g)$ e um valor $\mathfrak{r} \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$, dependendo de μ_g.

Portanto, o resultado segue para $K_{10} = \left(\frac{1}{\mathfrak{r} b}\right)^{\frac{1}{4}} > 0$. □

Observação 3.22. É interessante observar que o fato do conjunto $\mathscr{K}$ não ser vazio depende da existência de uma solução no nível do passo da montanha. O valor μ_g deve satisfazer também $\mu_g \leq \mu_{mp}$.

Demonstração do Teorema 0.5-(b). A prova segue da aplicação dos Lemas 1.32, 1.20, 3.1, 3.7, 3.10, 3.8, 3.19 e 3.21 e do Corolário 3.9, argumentando de modo análogo a Proposição 3.13 e ao Teorema 0.1. □

APÊNDICE A

Resultados Técnicos

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados que complementam a tese e elucidam alguns pontos abordados.

A.1 Diferenciabilidade do funcional V_1

Nesta seção garantiremos que o funcional $V_1 : W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty)$, definido por

$$u \mapsto V_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^p dxdy, \tag{A.1}$$

é diferenciável no sentido de Frechét.

Lema A.1. *Sejam $u,v \in X$. Então, a derivada de Gateux de V_1 existe e é dada por*

$$V_1'(u)(v) = 2p\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)v(y)dxdy.$$

Demonstração. Comecemos definindo a função $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x,y,t) = \ln(1+|x-y|)|u(x)+tv(x)|^p|u(y)+tv(y)|^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}g(x,y,t) &= p\ln(1+|x-y|)|u(x)+tv(x)|^{p-2}(u(x)+tv(x))v(x)|u(y)+tv(y)|^p \\ &\quad + p\ln(1+|x-y|)|u(x)+tv(x)|^p|u(y)+tv(y)|^{p-2}(u(y)+tv(y))v(y).\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, para $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, fixado, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$g(x,y,t) - g(x,y,0) = \frac{\partial g}{\partial t}g(x,y,t_0).$$

Ainda, como $t_0 \in (0,1)$, podemos escrever $t_0 = \varepsilon t$, para algum $\varepsilon \in (0,1)$ e $t \in (0,1]$. Disto,

$$\begin{aligned}
&\frac{|\ln(1+|x-y|)[|u(x)+tv(x)|^p|u(y)+tv(y)|^p - |u(x)|^p|u(y)|^p]|}{|t|}\\
&= p\ln(1+|x-y|)|[|u(x)+t\varepsilon v(x)|^{p-2}(u(x)+t\varepsilon v(x))v(x)|u(y)+t\varepsilon v(y)|^p\\
&+|u(x)+t\varepsilon v(x)|^p|u(y)+t\varepsilon v(y)|^{p-2}(u(y)+t\varepsilon v(y))v(y)]|\\
&\le p\ln(1+|x-y|)[|u(x)|+|v(x)|]^{p-1}|v(x)|[|u(y)|+|v(y)|]^p\\
&+p\ln(1+|x-y|)[|u(x)|+|v(x)|]^p[|u(y)|+|v(y)|]^{p-1}|v(y)| = A+B.
\end{aligned}$$

Pelo Lema ...,

$$(|u(x)|+|v(x)|)^{p-1} \le 2^{p-2}[|u(x)|^{p-1}+|v(x)|^{p-1}] \text{ e } (|u(x)|+|v(x)|)^p \le 2^{p-1}[|u(x)|^p+|v(x)|^p].$$

Pondo $C = 2^{p-2}2^{p-1}$, temos

$$\begin{aligned}
A &\le Cp\ln(1+|x-y|)[|u(x)|^{p-1}+|v(x)|^{p-1}]|v(x)|[|u(y)|^p+|v(y)|^p]\\
&\le Cp[\ln(1+|x|)+\ln(1+|y|)][|u(x)|^{p-1}|v(x)||u(y)|^p+|u(x)|^{p-1}|v(x)||v(y)|^p+|v(x)|^p|u(y)|^p+|v(x)|^p|v(y)|^p].
\end{aligned}$$

Observe que,

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|u(x)|^{p-1}|v(x)||u(y)|^p dxdy \le ||v||_*||u||_*^{p-1}||u||_p^p.$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)|u(x)|^{p-1}|v(x)||u(y)|^p dxdy \le ||v||_*||u||_*^p||u||_p^{p-1}.$

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|u(x)|^{p-1}|v(x)||v(y)|^p dxdy \le ||v||_*||u||_*^{p-1}||v||_p^p.$

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)|u(x)|^{p-1}|v(x)||v(y)|^p dxdy \le ||v||_p||u||_p^{p-1}||v||_*^p.$

(v) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|u(y)|^p|v(x)|^p dxdy = ||u||_p^p||v||_*^p.$

(vi) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)|u(y)|^p|v(x)|^p dxdy = ||v||_p^p||u||_*^p.$

(vii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|v(y)|^p|v(x)|^p dxdy = ||v||_p^p||v||_*^p.$

(viii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)|v(y)|^p|v(x)|^p dxdy = ||v||_p^p||v||_*^p.$

Para a expressão B podemos proceder de modo similar. Disto decorre que $A+B \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Denote

$$\begin{aligned}
&p\ln(1+|x-y|)[|u(x)+t\varepsilon v(x)|^{p-2}(u(x)+t\varepsilon v(x))v(x)|u(y)+t\varepsilon v(y)|^p\\
&+|u(x)+t\varepsilon v(x)|^p|u(y)+t\varepsilon v(y)|^{p-2}(u(y)+t\varepsilon v(y))v(y)] = D.
\end{aligned}$$

Consequentemente, como $u+\varepsilon tv \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ quando $t \to 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{t\to 0}\frac{V_1(u+tv)-V_1(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} D = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\lim_{t\to 0} D = 2p\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\ln(1+|x-y|)|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)v(y)dxdy.$$

Agora, para $v \in X$, temos

$$\begin{aligned}|V_1'(u)(v)| &\leq 2p\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|u(x)|^p|u(y)|^{p-1}v(y)|dxdy\\ &+2p\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)|u(x)|^p|u(y)|^{p-1}v(y)|dxdy\\ &\leq 2p||u||_*^p||u||_p^{p-1}||v||_p+2p||u||_p^p||u||_*^{p-1}||v||_*.\end{aligned}$$

Como as funções $z^{\frac{1}{p}}$ e z^{p-1}, $p>2$, são crescentes para $z \geq 0$, temos

$$||v|| \leq (||v||^p+||v||_*^p)^{\frac{1}{p}} = ||v||_X, ||v||_* \leq ||v||_X \quad \text{e} \quad ||u||_p^{p-1} \leq ||u||^{p-1} \leq ||u||_X^{p-1}.$$

Por conseguinte,

$$||u||_*^p||u||_p^{p-1}||v||_p \leq ||u||_X^{2p-1}||v||_X \quad \text{e} \quad ||u||_*^{p-1}||u||_p^p||v||_X \leq ||u||_X^{2p-1}||v||_X.$$

Portanto,

$$|V_1'(u)(v)| \leq 2p||u||_X^{2p-1}||v||_X.$$

Logo, $V_1'(u) \in X^*$ e $||V_1'(u)|| \leq 2p||u||_X^{2p-1}$. □

Lema A.2. *A derivada de Gateux V_1' é contínua em X.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset X$ tal que $u_n \to u$ em X. Das imersões contínuas, obtemos que $u_n \to u$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \geq p$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{|V_1'(u_n)(v)-V_1'(u)(v)|}{2p} &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)[|u_n(x)|^p|u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)]v(y)dxdy\\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x-y|)||u_n(x)|^p|u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)|v(y)dxdy\\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)||u_n(x)|^p|u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)|v(y)dxdy\\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)||u_n(x)|^p|u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)|v(y)dxdy\\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)|u_n(x)|^p||u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-|u(y)|^{p-2}u(y)||v(y)|dxdy\\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|x|)||u_n(x)|^p-|u(x)|^p|||u_n(y)|^{p-1}|v(y)|dxdy\\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)|u_n(x)|^p||u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-|u(y)|^{p-2}u(y)||v(y)|dxdy\\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \ln(1+|y|)||u_n(x)|^p-|u(x)|^p|||u_n(y)|^{p-1}|v(y)|dxdy\\ &= A+B+C+D.\end{aligned}$$

Vejamos que $A,B,C,D \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Para A**:** Defina $g:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ por $g(x,s)=|s|^{p-2}s$. Note que g é uma função de Carathéodory e $|g(x,s)|=|s|^{p-1}$. Então, o operador de Nemytskii $N_g:L^p(\mathbb{R}^N)\to L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, dado por $N_g(u)=g(x,u)$, está bem definido, é contínuo e limitado. Assim, como $u_n\to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $N_g(u_n)\to N_g(u)$ em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Por Hölder,

$$A\leq ||u_n||_*^p||N_g(u_n)-N_g(u)||_{p'}||v||_p\to 0.$$

Para B**:** Como $u_n\to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. A menos de subsequência, $u_n(x)\to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e existe $h\in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $|u_n(x)|\leq h(x)\leq|h(x)|$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e para todo $n\in\mathbb{N}$. Consequentemente, $|u_n(x)|^p\to|u(x)|^p$ e $|u_n(x)|^p\leq|h(x)|^p$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Note que

$$||u_n(x)|^p-|u(x)|^p|\leq|u_n(x)|^p+|u(x)|^p\leq|h(x)|^p+|u(x)|^p=g(x)$$

e

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|h(x)|^p+|u(x)|^pdx\leq\int\limits_{\mathbb{R}^N}|h(x)|^pdx+\int\limits_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^pdx<+\infty,$$

donde $g\in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $||u_n(x)|^p-|u(x)|^p|\leq g(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e para todo $n\in\mathbb{N}$. Deste fato, de $||u_n(x)|^p-|u(x)|^p|\to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\ln(1+|x|)||u_n(x)|^p-|u(x)|^p|dx\to 0\quad\text{e}\quad\int\limits_{\mathbb{R}^N}||u_n(x)|^p-|u(x)|^p|dx\to 0.$$

Portanto,

$$B\leq||u||_p^{p-1}||v||_p\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\ln(1+|x|)||u_n(x)|^p-|u(x)|^p|dx\right)\to 0.$$

Para C**:** Sabemos que existe uma constante $C_1>0$ tal que

$$||u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-|u(y)|^{p-2}u(y)|\leq C_1|u_n(y)-u(y)|(|u_n(y)|+|u(y)|)^{p-2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
C&\leq C_1||u_n||_p^p\int\limits_{\mathbb{R}^N}\ln(1+|y|)|u_n(y)-u(y)|(|u_n(y)|+|u(y)|)^{p-2}|v(y)|dy\\
&\leq C_1||u_n||_p^p\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\ln(1+|y|)|u_n(y)-u(y)|^{p'}||u_n(y)|+|u(y)||^{(p-2)p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}||v||_*\\
&\leq C_1||u_n||_p^p||v||_*\left[\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\ln(1+|y|)|u_n(y)-u(y)|^pdy\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\ln(1+|y|)||u_n(y)|+|u(y)||^p\right)^{\frac{p-2}{p-1}}\right]^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq C_1||u_n||_p^p||v||_*||u_n-u||_*(||u_n||_*^{p-2}+||u||_*^{p-2})\to 0,
\end{aligned}$$

quando $n\to+\infty$.

Para D**:** Por Hölder e pelas convergências vistas em C,

$$D\leq||u||_*^{p-1}||v||_*\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}||u_n(x)|^p-|u(x)|^p|dx\right)\to 0.$$

Logo, existe uma subsequência $(u_{n_j})\subset(u_n)$ tal que $V_1'(u_{n_j})(v)\to V_1'(u)(v)$ para todo $v\in X$.

Vejamos, agora, que $V_1'(u_n)(v) \to V_1'(u)(v)$ para todo $v \in X$. Suponhamos, por absurdo, que isto não ocorre. Então, existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tais que

$$|V_1'(u_{n_k})(v) - V_1'(u)(v)| > \varepsilon, \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{A.2}$$

Mas, como $u_n \to u$ em X, $u_{n_k} \to u$ em X e, repetindo os argumentos anteriores, obtemos $(u_{n_{k_l}}) \subset (u_{n_k})$ tal que $|V_1'(u_{n_k})(v) - V_1'(u)(v)| \to 0$ quando $k \to +\infty$, para todo $v \in X$, contrariando (A.2). Portanto, $V_1'(u_n)(v) \to V_1'(u)(v)$ para todo $v \in X$.

Logo, $V_1'(u_n) \to V_1'(u)$ V_1' é contínuo. □

Corolário A.3. $V_1 \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Demonstração. Pelo Teorema ..., como a derivada de Gateux de V_1 é contínua, V_1 é diferenciável a Frechét e $V_1 \in C^1(X, \mathbb{R})$. □

A.2 Diferenciabilidade do funcional V_2

Nesta seção discutiremos a diferenciabilidade do funcional $V_2 : L^{\frac{2N}{2N-1}p}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty)$, dado por,

$$u \mapsto V_2(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) |u(x)|^p |u(y)|^p dxdy, \tag{A.3}$$

em relação a Frechét.

Lema A.4. *Sejam $u, v \in L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N)$. Então, a derivada de Gateux de V_2 existe e é dada por*

$$V_2'(u)(v) = 2p \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \ln(1 + \frac{1}{|x-y|}) |u(x)|^p |u(y)|^{p-2} u(y) v(y) dxdy.$$

Demonstração. Comecemos definindo a função $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x,y,t) = \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) |u(x) + tv(x)|^p |u(y) + tv(y)|^p.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} g(x,y,t) = {} & p \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) |u(x) + tv(x)|^{p-2} (u(x) + tv(x)) v(x) |u(y) + tv(y)|^p \\ & + p \ln\left(1 + \frac{1}{|x-y|}\right) |u(x) + tv(x)|^p |u(y) + tv(y)|^{p-2} (u(y) + tv(y)) v(y). \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, para $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, fixado, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$g(x,y,t) - g(x,y,0) = \frac{\partial g}{\partial t} g(x,y,t_0).$$

Ainda, como $t_0 \in (0,1)$, podemos escrever $t_0 = \varepsilon t$, para algum $\varepsilon \in (0,1)$ e $t \in (0,1]$. Disto,

$$\frac{\left|\ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)[|u(x)+tv(x)|^p|u(y)+tv(y)|^p - |u(x)|^p|u(y)|^p]\right|}{|t|}$$
$$= p\ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|[|u(x)+t\varepsilon v(x)|^{p-2}(u(x)+t\varepsilon v(x))v(x)|u(y)+t\varepsilon v(y)|^p$$
$$+|u(x)+t\varepsilon v(x)|^p|u(y)+t\varepsilon v(y)|^{p-2}(u(y)+t\varepsilon v(y))v(y)]|$$
$$\leq p\ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)[|u(x)|+|v(x)|]^{p-1}|v(x)|[|u(y)|+|v(y)|]^p$$
$$+p\ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)[|u(x)|+|v(x)|]^p[|u(y)|+|v(y)|]^{p-1}|v(y)| = A+B.$$

Pelo Lema ...,

$$(|u(y)|+|v(y)|)^{p-1} \leq 2^{p-2}[|u(y)|^{p-1}+|v(y)|^{p-1}] \text{ e } (|u(x)|+|v(x)|)^p \leq 2^{p-1}[|u(x)|^p+|v(x)|^p].$$

Pondo $C = 2^{p-2}2^{p-1}$, temos

$$A \leq Cp\ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)[|u(x)|^{p-1}+|v(x)|^{p-1}]|v(x)|[|u(y)|^p+|v(y)|^p]$$
$$\leq \frac{Cp}{|x-y|}[|u(x)|^{p-1}|v(x)||u(y)|^p+|u(x)|^{p-1}|v(x)||v(y)|^p+|v(x)|^p|u(y)|^p+|v(x)|^p|v(y)|^p].$$

Resta, ainda, observar que
(i) Por (HLS),

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|}|u(x)|^{p-1}|v(x)||u(y)|^p dxdy \leq C_0|||u|^{p-1}|v|||_{\frac{2N}{2N-1}}|||u|^p||_{\frac{2N}{2N-1}} = D$$

e, aplicando Hölder,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{\frac{2N}{2N-1}(p-1)}|v(x)|^{\frac{2N}{2N-1}}dx\right)^{\frac{2N-1}{2N}} \leq \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(x)|^{\frac{2N}{2N-1}(p-1)p1}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|v(x)|^{\frac{2N}{2N-1}p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{2N-1}{2N}}$$
$$\leq ||u||^{p-1}_{\frac{2N}{2N-1}p}||v||_{\frac{2N}{2N-1}p}.$$

Consequentemente,

$$D \leq C_0||u||^{2p-1}_{\frac{2N}{2N-1}p}||v||_{\frac{2N}{2N-1}p} < +\infty.$$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|}|u(x)|^{p-1}|v(x)||v(y)|^p dxdy \leq C_0||u||^{p-1}_{\frac{2N}{2N-1}p}||v||^{p+1}_{\frac{2N}{2N-1}p} < +\infty$, por (HLS).

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|}|u(y)|^p|v(x)|^p dxdy \leq C_0||u||^p_{\frac{2N}{2N-1}p}||v||^p_{\frac{2N}{2N-1}p} < +\infty$, aplicando (HLS).

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|}|v(y)|^p|v(x)|^p dxdy \leq C_0||v||^{2p}_{\frac{2N}{2N-1}p} < +\infty$, por (HLS).

De modo análogo, podemos provar que $B < +\infty$. Portanto, $A+B \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Disto, de $u+\varepsilon tv \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ quando $t \to 0$ e pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{V_2(u+tv)-V_2(u)}{t} = 2p\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)v(y)dxdy.$$

Agora, para $v \in L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}|V_2'(u)(v)| &\leq 2p \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)|u(x)|^p|u(y)|^{p-1}|v(y)|dxdy \\ &\leq C_1||u||^{2p-1}_{\frac{2N}{2N-1}p}||v||_{\frac{2N}{2N-1}p}.\end{aligned}$$

Logo, $V_2'(u) \in (L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N))^*$ e $||V_2'(u)|| \leq C_1||u||^{2p-1}_{\frac{2N}{2N-1}p}$, para todo $u \in L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N)$. □

Lema A.5. *A derivada de Gateux de V_2, V_2', é contínua em $L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Sejam $(u_n) \subset L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N)$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{|V_2'(u_n)(v)-V_2'(u)(v)|}{2p} &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \ln\left(1+\frac{1}{|x-y|}\right)||u_n(x)|^p|u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-|u(x)|^p|u(y)|^{p-2}u(y)||v(y)|dxdy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|}|u(x)|^p||u_n(y)|^{p-2}u_n(y)-|u(y)|^{p-2}u(y)||v(y)|dxdy \\ &+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|}||u_n(x)|^p-|u(x)|^p||u(y)|^{p-1}|v(y)|dxdy = A+B.\end{aligned}$$

Para A: Aplicando (HLS), obtemos

$$\begin{aligned}A &\leq C_1\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|}|u_n(x)|^p|u_n(y)-u(y)|(|u_n(y)|+|u(y)|)^{p-2}|v(y)|dxdy \\ &\leq C_1 2^{p-3}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|}|u_n(x)|^p|u_n(y)-u(y)||u_n(y)|^{p-2}|v(y)|dxdy \\ &+C_1 2^{p-3}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|}|u_n(x)|^p|u_n(y)-u(y)||u(y)|^{p-2}|v(y)|dxdy = A_1+A_2.\end{aligned}$$

Agora, aplicando (HLS) e Hölder, temos

$$A_1 \leq C_0||u_n||^{2(p-1)}_{\frac{2N}{2N-1}p}||u_n-u||_{\frac{2N}{2N-1}p}||v||_{\frac{2N}{2N-1}p} \to 0,$$

quando $n\, RA + \infty$. Da mesma forma, vem

$$A_2 \leq C_0||u_n||^{p}_{\frac{2N}{2N-1}p}||u_n-u||_{\frac{2N}{2N-1}p}||u||^{p-2}_{\frac{2N}{2N-1}p}||v||_{\frac{2N}{2N-1}p} \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. Logo, $A \to 0$.

Para B: Como $u_n \to u$ em $L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N)$, existe $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Consequentemente, $|u_{n_k}(x)|^p \to |u(x)|^p$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ quando $k \to +\infty$.

Agora, por $||u_{n_k}-u||_{\frac{2N}{2N-1}p} \to 0$, sabemos que $||u_{n_k}||_{\frac{2N}{2N-1}p} \to ||u||_{\frac{2N}{2N-1}p}$ e, por conseguinte, $|||u_{n_k}|^p||_{\frac{2N}{2N-1}p} \to |||u|^p||_{\frac{2N}{2N-1}p}$. Portanto, pelo Teorema 1.5,

$$|||u_{n_k}|^p-|u|^p||_{\frac{2N}{2N-1}p} \to 0.$$

Disto, de (HLS) e da desigualdade de Hölder,

$$B \leq |||u_{n_k}|^p-|u|^p||_{\frac{2N}{2N-1}p}||u||^{p-1}_{\frac{2N}{2N-1}p}||v||_{\frac{2N}{2N-1}p} \to 0,$$

quando $k \to +\infty$. Logo, como $A+B \to 0$,

$$|V_2'(u_{n_k})(v) - V_2'(u)(v)| \to 0, \forall\, v \in L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N).$$

Argumentando como no Lema A.2, concluímos que

$$|V_2'(u_n)(v) - V_2'(u)(v)| \to 0, \forall\, v \in L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N).$$

e, consequentemente, $||V_2'(u_n) - V_2(u)|| \to 0$, provando que V_2' é contínua. □

Corolário A.6. $V_2 \in C^1(L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Demonstração. Pelo Teorema ..., como a derivada de Gateux de V_2 é contínua, V_2 é diferenciável no sentido de Frechét e $V_2 \in C^1(L^{\frac{2N}{2N-1}}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. □

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, Robert A.; FOURNIER, John J. F. **Sobolev Spaces**. Elsevier Science, Oxford, 2014.

[2] ALBUQUERQUE, Francisco. S. B. Nonlinear Schrodinger elliptic systems involving exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$, **Electronic Journal of Differential Equations**. v. 2014, n. 59, p. 1-12, 2014.

[3] ALVES, Claudianor O.; YANG, Minbo. Investigating the multiplicity and concentration behaviour sf solutions for a quasi-linear Choquard equation via the penalization method, **Proc. Royal Soc. Edinburg Sect. A**. v. 146, 23-58, 2016.

[4] AMBROSETTI, Antonio; RABINOWITZ Paul H. Dual variational methods in critical point theory and applications, **Journal of Functional Analysis**. v. 14, p. 349–381, 1973.

[5] AUTUORI, Giuseppina; PUCCI, Patrizia. Elliptic problems involving the fractional Laplacian in $\mathbb{R}^N$, **Journal of Differential Equations**. v. 255, p. 2340–2362, 2013.

[6] BARTOLO, Paolo; BENCI, Vieri; FORTUNATO, Donato. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity, **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**. v. 7, p. 981–1012, 1983.

[7] BARTSCH Thomas;WETH, Tobias. Three nodal solutions of singularly perturbed elliptic equations on domains without topology, **Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis**. v. 22, p. 259–281, 2005.

[8] BISCI, Giovanni M.; RĂDULESCU, Vicentiu D.; SERVADEI, Raffaella. **Variational methods for nonlocal fractional problems**, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[9] BELCHIOR, Pedro; BUENO, Hamilton P.; MIYAGAKI, Olímpio H.; PEREIRA, Gyzah A. B. P. Remarks about a fractional Choquard equation: Ground state, regularity and polynomial decay, **Nolinear Analysis**, v. 164, p. 38-53, 2017.

[10] BÖER, Eduardo de S.; MIYAGAKI, Olímpio H. Existence and multiplicity of solutions for the fractional p -Laplacian Choquard logarithmic equation involving a nonlinearity with exponential critical and subcritical growth, **Journal of Mathematical Physics**, v. 62, n. 5, 2021.

[11] BÖER, Eduardo de S.; MIYAGAKI, Olímpio H. The Choquard logarithmic equation involving fractional Laplacian operator and a nonlinearity with exponential critical growth. **https://doi.org/10.48550/ARXIV.2011.12806**, 2020, aceito para publicação.

[12] BÖER, Eduardo de S.; MIYAGAKI, Olímpio H. The Choquard logarithmic equation involving a nonlinearity with exponential growth. **https://doi.org/10.48550/ARXIV.2011.01260**, 2020, aceito para publicação.

[13] BÖER, Eduardo de S.; MIYAGAKI, Olímpio H.; PUCCI, Patrizia. Existence and multiplicity results for a class of Kirchhoff-Choquard equations with a generalized sign-changing potential, **https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.12472**, 2022, aceito para publicação.

[14] BONHEURE, Denis; CINGOLANI, Silvia; SCHAFTINGEN, Jean V. The logarithmic Choquard equation: sharp asymptotics and nondegeneracy of the groundstate, **J. Funct. Anal.**, v. 272, p. 5244-5281, 2017.

[15] BRÉZIS, Haim. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**, Springer, New York-London, 2011.

[16] CAFFARELLI, Luis. Non-local Diffusions, Drifts and Games, in: H. Holden, K.H. Karlsen (Eds.), **Nonlinear Partial Differential Equations**, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, p. 37–52, 2012.

[17] CAO, Daomin M. Nontrivial solution of semilinear elliptic equations with critical exponent in $\mathbb{R}^2$. **Communications in Partial Differential Equations**, v. 17, p. 407–435, 1992.

[18] CHANG, Xiaojun; WANG, Zhiqiang. Ground state of scalar field equations involving a fractional Laplacian with general nonlinearity, **Nonlinearity**, v. 26, n.2, p. 479–49, 2013.

[19] CINGOLANI, Silvia; JEANJEAN, Louis Stationary waves with prescribed L^2 norm for the planar Schrödinger Poisson system, **SIAM J. Math. Anal.**, v. 51, p. 3533-3568, 2019.

[20] CINGOLANI, Silvia; WETH, Tobias On the planar Schrödinger–Poisson system, **Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis**, v. 33, p. 169–197, 2016.

[21] CUI, Na; SUN, Hong-Rui. Fractional p-Laplacian problem with indefinite weight in $\mathbb{R}^N$: Eigenvalues and existence, **Math Meth Appl Sci.**, mma.6323, p. 1-15, 2020.

[22] DEMENGEL, Françoise; DEMENGEL, Gilbert; ERNÉ, Reinie. **Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations**, Springer [u.a.], London, 2012.

[23] DI NEZZA, Eleonora; PALATUCCI, Giampiero; VALDINOCI Enrico. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, **Bulletin Des Sciences Mathématiques**, v. 136, p. 521–573, 2012.

[24] DO Ó, João M., MEDEIROS, Everaldo; SEVERO, Uberlândio. A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two, **J. Math. Anal. Appl.** 345, 286-304, 2008.

[25] DO Ó, João M.; MIYAGAKI, Olímpio H.; SQUASSINA, Marco. Critical and subcritical fractional problems with vanishing potentials, **Commun. Contemp. Math.** v. 18, n. 6, p. 1-20, 2016.

[26] DO Ó, João M.; MIYAGAKI Olímpio H.; SQUASSINA, Marco. Ground states of nonlocal scalar field equations with Trudinger-Moser critical nonlinearity, **Topological Methods in Nonlinear Analysis**, v. 48(2), p. 477–492, 2016.

[27] DO Ó, João M.; MIYAGAKI, Olímpio H.; SQUASSINA, Marco. Nonautonomous fractional problems with exponential growth, **Nonlinear Differential Equations and Applications No-DEA**, v. 22, p. 1395–1410, 2015.

[28] DU, Miao; WETH, Tobias. Ground states and high energy solutions of the planar Schrödinger–Poisson system, **Nonlinearity**, v. 30, p. 3492–3515, 2017.

[29] FELMER, Patricio; QUAAS, Alexander; TAN, Jinggang. Positive solutions of the nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian, **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics**. v. 142, issue 6, p. 1237–1262, 2012.

[30] FOLLAND, Gerald B. **Real analysis: modern techniques and their applications**, 2 ed, Wiley, New York, 1999.

[31] FRÖHLICH, Herbert. Theory of electrical breakdown in Ionic crystals. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, v. 160, p. 230–241, 1937.

[32] FRÖHLICH, Herbert. Electrons in lattice fields. **Advances in Physics**, v. 3, issue 11, p. 325–361, 1954.

[33] GRAHAM, Ronald L.; KNUTH, Donald E.; PATASHNIK, Oren. **Concrete mathematics: a foundation for computer science**, 2nd ed, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1994.

[34] HARRISON, Robert; MOROZ, Irene; TOD, Paul. A numerical study of the Schrödinger -Newton equation, **Nonlinearity**, v. 16, p. 101-122, 2003.

[35] IANNIZZOTTO, Antonio; SQUASSINA, Marco. Weyl-type laws for fractional p-eigenvalue problems, **Asymptotic Analysis**. v. 88, p. 233–245, 2014.

[36] JEANJEAN, Louis. On the existence of bounded Palais Smale and application to a Landezman Lazer problems set on $\mathbb{R}^N$, **Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A**, v. 129, p. 787-809, 1999.

[37] JIN, Jiahua; WU, Xian. Infinitely many radial solutions for Kirchhoff-type problems in $\mathbb{R}^N$, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. v. 369, issue 2, p. 564–574, 2010.

[38] KAVIAN, Otared. **Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques**, Springer-Verlag, Paris; New York, 1993.

[39] LAM, Nguyen; LU, Guozhen. Elliptic equations and systems with subcritical and critical exponential growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition, **J. Geom. Anal.**, v. 24, p, 118-143, 2014.

[40] LASKIN, Nick. Fractional Schrödinger equation, **Phys. Rev. E**, v. 66, article n. 056108, 2002.

[41] LEDESMA, César E. T. Existence and symmetry result for fractional p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$, **Communications on Pure and Applied Analysis**, v. 16, p. 99-113, 2017.

[42] LI, Qin; YANG, Zuodong. Multiple solutions for a class of fractional quasi-linear equations with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$, **Complex Variables and Elliptic Equations**, v. 61, p. 969–983, 2016.

[43] LIANG, Sihua; PUCCI, Patrizia; ZHANG, Binlin. Multiple solutions for critical Choquard-Kirchhoff type equations, **Advances in Nonlinear Analysis**. v. 10, n. 1, p. 400–419, 2020.

[44] LIANG, Sihua; ZHANG, Jihui. Existence of solutions for Kirchhoff type problems with critical nonlinearity in $\mathbb{R}^N$, **Z. Angew. Math. Phys.** v. 66, p. 47–562, 2015.

[45] LIEB, Elliott H. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities, **The Annals of Mathematics**, v. 118, 349-374, 1983.

[46] LIEB, Elliott H. Existence and uniqueness of minimizing solutio of Choquardś nonlinear equations, **Stud. Appl. Math.**, v. 52(2), p. 93-105, 1996.

[47] LIONS, Pierre-Louis. Solutions of Hartree-Fock equations for Coulomb systems. **Communications in Mathematical Physics**, v. 109, p. 33–97, 1987.

[48] MA, Li; ZHAO, Lin. Classification of positive solitary solutions of the nonlinear Choquard equation, **Arch. Rat. Mech.Anal.**, v. 195, p. 455-467, 2010.

[49] MIYAGAKI, Olímpio H.; PUCCI, Patrizia. Nonlocal Kirchhoff problems with Trudinger–Moser critical nonlinearities, **Nonlinear Differ. Equ. Appl.**, v. 26, p. 1-26, 2019.

[50] MOSER, Jürgen. A Sharp form of an inequality by N. Trudinger. **Indiana University Mathematics Journal**, v. 20, p. 1077–1092, 1971.

[51] PENROSE, Roger. On gravity's role in quantum state reduction. **General Relativity and Gravitation**, v. 28, p. 581–600, 1996.

[52] PERERA, Kanishka; AGARWAL, Ravi P.; O'REGAN, Donal. **Morse theoretic aspects of p-Laplacian type operators**, American Mathematical Society, Providence, R.I, 2010.

[53] PUCCI, Patrizia; XIANG, Mingqi; ZHANG, Binlin. Multiple solutions for nonhomogeneous Schrödinger–Kirchhoff type equations involving the fractional p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$, **Calc. Var.** v. 54, p. 2785–2806, 2015.

[54] PUCCI, Patrizia; XIANG, Mingqi; ZHANG, Binlin. Existence results for Schrödinger–Choquard–Kirchhoff equations involving the fractional p-Laplacian, **Advances in Calculus of Variations**, v. 12, n.3, p. 253–275, 2019.

[55] SECCHI, Simone. Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$, **Journal of Mathematical Physics**. v. 54, p. 1-17, 2013.

[56] SILVA, Elves A. B. **Critical point theorems and applications to differential equations**, PhD. Thesis, University of Wisconsin-Madison, 1988.

[57] SOUTO, Marco A.; DE LIMA, Romildo N. Choquard equation with mixed potential, **doi.org/10.48550/arXiv.1506.0817**, p. 1-21, 2015.

[58] STEIN, Elias M.; WEISS, Guido. Fractional Integrals on n-dimensional Euclidean Space. **Journal of Mathematics and Mechanics**, v. 7, n. 4, p.503-514, 1958.

[59] STRUWE, Michael. **Variational Methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems**, 3rd ed, Springer, Berlin; New York, 2000.

[60] STUBBE, Joachim. Bound states of two-dimensional Schrödinger-Newton equations. **arXiv:0807.4059 [math-ph]**, arXiv: 0807.4059, 2008.

[61] WILSON, Arthur J. C. Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle by S. I. Pekar. **Acta Crystallographica**, v. 8, p. 70–70, 1955.

[62] YU, Mei; ZHANG, Meina; ZHANG, Xia. Fractional Minimization Problem on the Nehari Manifold. **Electronic Journal of Differential Equations**, v. 82, p. 1-21, 2018.

[63] ZHANG, Caifeng. Trudinger–Moser Inequalities in Fractional Sobolev–Slobodeckij Spaces and Multiplicity of Weak Solutions to the Fractional-Laplacian Equation, **Advanced Nonlinear Studies**, v. 19, p. 197–217, 2019.

[64] ZHANG, Hui; ZHANG, Fubao. Multiplicity and concentration of solutions for Choquard equations with critical growth, **J. Math. Anal. Appl.**, v. 481, no. 1, 2020.