UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Perturbações Unitárias Multiplicativas

Pablo Andŕes Díaz Araos

São Carlos-SP
Maio de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Perturbações Unitárias Multiplicativas

Pablo Andŕes Díaz Araos

Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
Maio de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinatura dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Doutor candidato(a) Pablo Andrés Díaz Araos, realizada em 24/05/2023:

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento
UFSCar

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri
UFSCar

Prof. Dr. Moacir Aloísio Nascimento dos Santos
UFVJM

Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho
UFMG

Dedico este trabalho
à minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família pelo apoio, incentivo e confiança em mim. Ao meu querida Verónica Maturana Cuevas que esteve sempre comigo durante todo esse processo e a sua família pelo carinho e incentivo aos meus estudos. Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, especialmente o professor Guillermo Lobos, pela ajuda com a minha formação durante o doutorado. Ao professor Rafael Labarca da USACH, que sempre confiou em mim e me motivou a continuar estudando. Aos amigos do DM e de São Carlos, em especial a Rossana, que me acolheu em sua casa como se fosse minha. Também agradeço ao meu orientador, o professor Dr. César Rogério de Oliveira, desde sua paciência, ajuda e apoio, tanto profissional como humano, são a base deste trabalho. Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Para o operador auto-adjunto H, a perturbação $H+A$, sendo A também um operador auto-adjunto, há uma longa lista de resultados em relação ao espectro dessa perturbação. Nós estudamos o espectro da perturbação multiplicativa UX (XU), com U e X operadores unitários. Especificamente, encontramos resultados análogos para os Teoremas de Howland, Weyl-von Neumann e em relação ao espectro singular contínuo para uma perturbação de posto um.

Palavras-chave: Operadores Auto-adjuntos, Operadores Unitários, Perturbações Multiplicativas, Decomposição Espectral, Teorema de Birman-Krein, Teorema de Weyl-von Neumann, Teorema de Howland.

Abstract

For the self-adjoint operator H, the perturbation $H+A$, with A also a self-adjoint operator, there is a long list of results regarding the spectrum of this perturbation. We study the spectrum of a multiplicative perturbation XU (UX) with U and X unitary operators. Specifically, we find similar results for the Howland, Weyl-von Neumann Theorems and the continuous singular spectrum for a perturbation of rank one.

Keywords: Self-adjoint Operators, Unitary Operators, Multiplicative Perturbations, Spectral Decomposition, Birman-Krein Theorem, Weyl-von Neumann Theorem, Howland Theorem.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$: Conjuntos dos números naturais;
$\mathbb{R}$: Conjuntos dos números reais;
$\mathbb{C}$: Conjuntos dos números complexos;
$\mathbb{K}$: Conjunto que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
$\mathbb{D}$: Denota o disco unitário aberto;
$\mathbb{T}, S^1$ ou $\partial\mathbb{D}$: Denota o toro de dimensão 1;
$\mathscr{B}, \mathscr{H}$: Denotam os espaços de Banach e Hilbert respectivamente;
$\operatorname{dom}(T)$: Domínio do operador linear T;
$\operatorname{Im}(T)$: Imagem do operador linear T;
$\Re(z)$: A parte real de um número complexo z;
$\Im(z)$: A parte imaginária de um número complexo z;
$\mathbf{1}$: Denota o operador linear identidade;
$A \sqsubseteq B$: Diz que A é um subconjunto denso de B;
$l \ll m$: A medida l é absolutamente contínua em relação à medida m:
$l \perp m$: A medida l é mutuamente singular em relação à medida m:
$l \sim m$: As medidas l e m são equivalentes:
"$q.t.p.$" : Abrevia *quase todo ponto* em relação a alguma medida.

Introdução

Estamos interessados na preservação dos diferentes tipos de espectro para operadores unitários U, em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, sob perturbações multiplicativas (de fato, são composições de operadores), ou seja, se X for outro operador unitário, a perturbação tem a forma

$$U \mapsto UX,$$

que é uma perturbação pela direita, e

$$U \mapsto XU$$

é uma perturbação pela esquerda. Observe que ambos XU e UX são operadores unitários.

A questão geral, a tentar responder nesta investigação, é em que tipo de espectro de qualquer operador unitário U é preservado, ou não, sob uma perturbação multiplicativa não trivial $X \neq \mathbf{1}$, e este estudo foi motivado pelas correspondentes perguntas feitas por Howland [10], del Rio, Makarov e Simon [9] e Weyl-von Neumann [8] (o famoso teorema que leva o mesmo nome), no contexto de perturbações aditivas para operadores auto-adjuntos.

Howland concluiu que não existe uma generalização trivial do Teorema de Kato-Rosenblum, ou seja, só o espectro absolutamente contínuo (em relação à medida Lebesgue) pode ser (sempre) preservado sob uma perturbação diferente de zero (no momento, sob perturbações de classe traço). Del Rio, Makarov e Simon concluíram que para um operador auto-adjunto A perturbado por λP, com $\lambda \in \mathbb{R}$ e P é o operador de projeção de posto 1 sobre múltiplos de φ (o qual é um vetor cíclico), resulta em espectro singular contínuo em um intervalo $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ para um G_δ denso de valores da intensidade λ da perturbação. Finalmente, Weyl-von Neumann concluíram que que para qualquer operador auto-adjunto, existe outro operador auto-adjunto e Hilbert-Schmidt tal que a perturbação aditiva entre ambos operadores tem espectro pontual puro. Nossas conclusões são semelhantes, mas agora sob perturbações multiplicativas e para operadores unitários. Nossos argumentos seguem as linhas gerais dos trabalhos originais, e não segue o argumento por meio da transformada de Cayley, já que essa não leva a soma dos operadores auto-adjuntos na forma multiplicativa $U \mapsto UX$.

Como motivação adicional, que vale a pena mencionar, temos que tais perturbações multiplicativas entre operadores unitários aparecem em sistemas quânticos [4, 6] com perturbações específicas. Seja A um operador auto-adjunto descrevendo um certo sistema quântico (um "livre"), tal que para cada instante de tempo $j\tau$, com $j \in \mathbb{Z}$, sofre uma perturbação chutada (kicked) por outro operador auto-adjunto B. O operador formal que descreve o sistema é

$$A + B\sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta(t - j\tau),$$

cujo operador de evolução temporal entre dois chutes consecutivos (de imediatamente após de um chute até imediatamente após o próximo; o operador Floquet) é dado por [4]

$$e^{-iB}e^{-iA\tau},$$

ou seja, as perturbações multiplicativas e^{-iB} dos operadores unitários $e^{-iA\tau}$. Um modelo histórico importante [4] é o chamado rotor chutado (kicked rotator) com

$$A = -\frac{d^2}{d\theta^2} \quad \text{e} \quad B = \kappa\cos(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

e um parâmetro real $\kappa > 0$ (o espaço de Hilbert é $\mathrm{L}^2(\mathbb{S})$); é esperado que, para a maioria dos períodos τ, o correspondente operador Floquet tenha um espectro pontual puro e uma dinâmica localizada, especialmente para $\kappa > 1$ (que é uma região em que a física clássica e a física quântica discordariam em termos de localização de energia), mas que atualmente existe uma demonstração matemática [3] para dinâmica quântica localizada, apenas para κ o suficientemente pequeno ($0 < \kappa \ll 1$). Uma demonstração dessa localização para $\kappa > 1$ é de grande interesse!

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 1 revisamos definições e resultados conhecidos da teoria de operadores que serão úteis ao longo do texto. No Capítulo 2 definimos detalhadamente o que se refere à preservação de uma medida, por perturbações à esquerda e à direita, de um operador unitário. Finalmente, nesse mesmo capítulo, mostraremos que não há generalização para o Teorema de Birman-Krein. No Capítulo 3 nossa contribuição é mostrar que, para o famoso Teorema de Weyl-von Neumann, existe um análogo para perturbações multiplicativas e com operadores unitários. Já no Capítulo 4, mostraremos um resultado em relação ao espectro singular contínuo, mas apenas para uma perturbação multiplicativa e unitária de posto 1. Por fim, no Capítulo 5, fazemos uma demonstração alternativa do Teorema de Birman-Krein, mas para uma perturbação multiplicativa e unitária de posto finito.

CAPÍTULO 1

Operadores Lineares e Espectro

Neste capítulo relembraremos algumas definições básicas e resultados da teoria dos operadores lineares em espaços normados, com ênfase nos espaços de Hilbert. Neste trabalho $\mathscr{B}$ e $\mathscr{H}$ representam sempre o espaço de Banach e o espaço de Hilbert respectivamente. O conjunto $B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ representa o conjunto de operadores lineares limitados e se $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2 = \mathscr{H}$ o conjunto se escreve como $B(\mathscr{H})$. Também a notação $A \sqsubseteq B$ indica que o conjunto A é um subconjunto denso em B.

Definição 1.1. O operador linear $T : \mathrm{dom}(T) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é simétrico se:

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle, \quad \text{para todo } \xi, \eta \in \mathrm{dom}(T).$$

T é hermitiano se for simétrico e $\mathrm{dom}(T)$ for um subconjunto denso em $\mathscr{H}$.

Sejam $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$ espaços de Hilbert. Seja $T : \mathrm{dom}(T) \sqsubseteq \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$, definimos $\mathrm{dom}(T^*)$ como o espaço vetorial dos elementos $\eta \in \mathscr{H}_2$ tais que o funcional linear

$$\xi \mapsto \langle \eta, T\xi \rangle, \quad \xi \in \mathrm{dom}(T),$$

pode ser representado por $\zeta \in \mathscr{H}_1$, ou seja,

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle, \quad \text{para todo } \xi \in \mathrm{dom}(T).$$

Definição 1.2. O adjunto de T é o operador T^* com domínio $\mathrm{dom}(T^*)$ definido acima e, para $\eta \in \mathrm{dom}(T^*)$, $T^*\eta := \zeta$. Assim,

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle T^*\eta, \xi \rangle,$$

para todo $\xi \in \mathrm{dom}(T)$ e para todo $\eta \in \mathrm{dom}(T^*)$.

Observação 1.3. Notar que acima, é essencial que $\mathrm{dom}(T) \sqsubseteq \mathscr{H}_1$ para que $T^* : \mathrm{dom}(T^*) \subset \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$ esteja bem definido.

Definição 1.4. 1. O operador linear $T : \mathrm{dom}(T) \sqsubseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é auto-adjunto se $T = T^*$.

2. Um operador limitado $T : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ é unitário se $\mathrm{Im}\,(T) = \mathscr{H}_2$, T é injetor e $T^* = T^{-1}$.

3. Um operador limitado $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é normal se $TT^* = T^*T$.

Observação 1.5. 1. Note que $T : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ é unitário se, e somente se,

$$\langle T\xi, T\eta\rangle = \langle \xi, T^*T\eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle, \quad \text{para todo } \xi, \eta \in \mathscr{H}_1,$$

e $\mathrm{Im}\,(T) = \mathscr{H}_2$; em particular os operadores unitários são isometrias e T^{-1} também é unitário.

2. Se T for auto-adjunto, então $\langle T\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $\xi \in \mathrm{dom}\,(T)$. De fato, dado $\xi \in \mathrm{dom}\,(T)$

$$\langle T\xi, \xi\rangle = \langle \xi, T^*\xi\rangle = \langle \xi, T\xi\rangle = \overline{\langle T\xi, \xi\rangle}.$$

Além disso, um operador auto-adjunto é simétrico. Portanto, todo operador auto-adjunto é hermitiano.

3. Se $T \in B(\mathscr{H})$, a noção de hermitiano e auto-adjunto coincidem.

Definição 1.6. Sejam T e S operadores lineares em $\mathscr{H}$, defina $\mathrm{dom}\,(T+S) := \mathrm{dom}\,(T) \cap \mathrm{dom}\,(S)$ e $\mathrm{dom}\,(ST) := \{\xi \in \mathrm{dom}\,(T) \mid T\xi \in \mathrm{dom}\,(S)\}$,

$$(S+T)\xi := T\xi + S\xi \quad \text{e} \quad (ST)\xi := S(T\xi),$$

que são chamados de operador soma e operador produto, respectivamente.

Teorema 1.7. *Sejam $T : \mathrm{dom}\,(T) \sqsubseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ um operador linear e $S \in B(\mathscr{H})$. Então $T^*S^* = (ST)^*$.*

Demonstração. [8]. □

Definição 1.8. Seja $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores em $B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ e $T : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ um operador linear. Dizemos que:

1. T_n converge uniformemente, ou em norma, para T se

$$\|T_n - T\| \to 0.$$

2. T_n converge fortemente para T se

$$\|T_n\xi - T\xi\| \to 0, \quad \text{para todo } \xi \in \mathscr{H}_1.$$

A convergência forte de operadores lineares pode ser denotada por $T_n \xrightarrow{s} T$ ou $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$.

3. T_n converge fracamente para T se

$$|f(T_n\xi)-f(T\xi)|\to 0,\quad \text{para todo } \xi\in\mathscr{H}_1 \text{ e } f\in\mathscr{H}_2^*=B(\mathscr{H}_2,\mathbb{K}),\ \text{com } K=\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

A convergência fraca de operadores lineares pode ser denotada por $T_n \xrightarrow{w} T$ ou $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$.

Teorema 1.9. *Seja $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert e $T\in B(\mathscr{H})$ com $\|T\|<1$. Então $(\mathbf{1}-T)$ tem inversa contínua e*

$$(\mathbf{1}-T)^{-1}=\mathbf{1}+\sum_{j=1}^{\infty}T^j\in B(\mathscr{H}).$$

Demonstração. Como $\|T^j\|\leq\|T\|^j$ para todo j e $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\|T\|^j<\infty$, dado que $\|T\|<1$, logo $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\|T^j\|<\infty$. Agora, dados os naturais m e n, tais que $m>n$, tem-se:

$$\left\|\sum_{j=0}^{m}T^j-\sum_{j=0}^{n}T^j\right\|=\left\|\sum_{j=n+1}^{m}T^j\right\|\leq\sum_{j=n+1}^{m}\|T^j\|\to 0$$

se $m,n\to\infty$, ou seja, $\left\{\sum\limits_{j=0}^{n}T^j\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy no espaço de Hilbert $B(\mathscr{H})$, então é convergente e portanto a série $\sum\limits_{j=0}^{\infty}T^j$ converge.

Seja $S=\sum\limits_{j=0}^{\infty}T^j\in B(\mathscr{H})$, então

$$(\mathbf{1}-T)\circ(\mathbf{1}+T+T^2+\ldots+T^n)=\mathbf{1}-T^{n+1}=(\mathbf{1}+T+T^2+\ldots+T^n)\circ(\mathbf{1}-T)$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Fazendo $n\to\infty$ e como $T^{n+1}\to 0$ se $\|T\|<1$, obtemos

$$(\mathbf{1}-T)\circ S=\mathbf{1}=S\circ(\mathbf{1}-T),$$

então $\mathbf{1}-T$ é invertível e que $(\mathbf{1}-T)^{-1}=S=\mathbf{1}+\sum\limits_{j=1}^{\infty}T^j$. □

Definição 1.10. 1. Dizemos que os espaços de Hilbert $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$ são unitariamente equivalentes se existir um operador unitário $U:\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$ (sobrejetor).

2. Dois operadores lineares $T_j:\mathrm{dom}(T)\subset\mathscr{H}_j\to\mathscr{H}_j$, $j=1,2$, são unitariamente equivalentes se existir um operador unitário $U:\mathscr{H}_1\to\mathscr{H}_2$ de forma que $\mathrm{dom}(T_2):=U\mathrm{dom}(T_1)$ e

$$T_2=UT_1U^{-1}=UT_1U^*.$$

Observação 1.11. Se T_1 e T_2 forem unitariamente equivalentes, escrevemos $T_1\cong T_2$.

Vejamos uma observação importante com respeito aos operadores auto-adjuntos. Seja $T : \mathrm{dom}\,(T) \sqsubseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ um operador auto-adjunto, tem-se

$$\|(T \pm i\mathbf{1})\xi\|^2 = \|T\xi\|^2 + \|\xi\|^2 = \|\xi\|_T^2, \text{ para todo } \xi \in \mathrm{dom}\,(T),$$

onde $\|\cdot\|_T$ é a chamada a norma do gráfico de T no $\mathrm{dom}\,(T)$. Portanto, o operador

$$U(T) := (T - i\mathbf{1})(T + i\mathbf{1})^{-1} : \mathrm{Im}\,(T + i\mathbf{1}) \to \mathrm{Im}\,(T - i\mathbf{1})$$

é linear, injetor e isométrico. Além disso, se $\mathrm{Im}\,(T + i\mathbf{1}) = \mathrm{Im}\,(T - i\mathbf{1}) = \mathscr{H}$ o operador $U(T)$ é unitário.

Definição 1.12. O operador $U(T) := (T - i\mathbf{1})(T + i\mathbf{1})^{-1} : \mathrm{Im}\,(T + i\mathbf{1}) \to \mathrm{Im}\,(T - i\mathbf{1})$ é chamado de transformada de Cayley para o operador auto-adjunto T.

Definição 1.13. Seja $T : \mathrm{dom}\,(T) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ um operador linear. O escalar λ é um valor regular do operador T se $(T - \lambda\mathbf{1})$ é bijetor e

$$R_\lambda(T) := (T - \lambda\mathbf{1})^{-1} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$$

é contínuo. O conjunto dos valores regulares de T é chamado de conjunto resolvente de T e denotado por $\rho(T)$ e o operador $R_\lambda(T)$ é chamado de operador resolvente de T. Seu complementar $(\mathbb{K} - \rho(T))$ é chamado de espectro de T e denotado por $\sigma(T)$.

Teorema 1.14. *Seja* $T : \mathrm{dom}\,(T) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ *e* $\lambda_0 \in \rho(T)$. *Então para todo* λ *no disco* $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}$ *do plano complexo,* $R_\lambda(T) \in B(\mathscr{H})$ *e*

$$R_\lambda(T) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}(T)^{j+1}.$$

Demonstração. [8] □

Corolário 1.15. *Seja* $T \in B(\mathscr{H})$. *Se* $|\lambda| > \|T\|$, *então* $\lambda \in \rho(T)$ *e* $\|R_\lambda(T)\| \to 0$ *para* $\lambda \to \infty$.

Demonstração. [8] □

Proposição 1.16. *Se* $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ *é um operador unitário, então* $\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Demonstração. Dado que $\|U\| = 1$, pelo Corolário 1.15 tem-se $|\lambda| > 1$, então $\lambda \in \rho(U)$. Agora, dado que $U^{-1} = R_0(U)$ é unitário e $UU^{-1} = \mathbf{1} = U^{-1}U$, então $0 \in \rho(U)$, e pelo Teorema 1.14, se $|\lambda| = |\lambda - 0| < \dfrac{1}{\|U^{-1}\|} = \dfrac{1}{\|R_0(U)\|} = 1$, temos que $\lambda \in \rho(U)$. Portanto, se $\lambda \in \sigma(U)$, então $|\lambda| = 1$. □

Proposição 1.17. *Seja* $T : \mathrm{dom}\,(T) \subset \mathscr{B} \to \mathscr{B}$*. Então para todo* $z, s \in \rho(T)$ *temos a primeira identidade do resolvente*

$$R_z(T) - R_s(T) = (z - s) R_z(T) R_s(T).$$

Portanto, $R_z(T)$ *comuta com* $R_s(T)$*.*

Demonstração. [8]. □

Proposição 1.18. *Sejam os operadores* $T : \mathrm{dom}\,(T) \subset \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ *e* $S : \mathrm{dom}\,(S) \subset \mathscr{B} \to \mathscr{B}$*, com* $\mathrm{dom}\,(S) \subset \mathrm{dom}\,(T)$*, e* $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$*, então temos a segunda identidade do resolvente*

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(S - T) R_\lambda(S).$$

Se $\mathrm{dom}\,(T) = \mathrm{dom}\,(S)$*, esta identidade é igual a* $R_\lambda(S)(S - T) R_\lambda(T)$*.*

Demonstração. [8]. □

1.1 Teorema Espectral para Operadores Unitários

Nesta seção, discutiremos sobre o teorema espectral para operadores unitários, que inclui introduzir os conceitos de resolução da identidade, medida espectral e lembrar este teorema para operadores auto-adjuntos.

1.1.1 Resolução de Identidade

Seja $Proj\,(\mathscr{H})$ o conjunto de operadores de projeção ortogonal em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, isto é, $P_0 \in Proj\,(\mathscr{H})$ se, e somente se, $P_0 \in B\,(\mathscr{H})$, é auto-adjunto e $P_0^2 = P_0$ (o que implica que $\mathrm{Im}\,(P_0)$ é um subespaço fechado de $\mathscr{H}$). $\mathscr{A}$ vai denotar a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ e para os conjuntos Λ_j, todos disjuntos uns dos outros, o símbolo $\sum_j \Lambda_j$ será a união deles. Finalmente, Ξ_A vai denotar a função característica do conjunto A.

Definição 1.19. A resolução (espectral) da identidade em $\mathscr{H}$ é uma aplicação

$$E : \mathscr{A} \to Proj\,(\mathscr{A})$$

que satisfaz

1. $E\,(\mathbb{R}) = \mathbf{1}$.
2. Se $\Lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j$, com $\Lambda_j \in \mathscr{A}$, para todo j, então temos o limite forte

$$E\,(\Lambda) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E\,(\Lambda_j)\,.$$

Observação 1.20. 1. A resolução da identidade é também chamada *família espectral, decomposição espectral, resolução espectral* e *medida em valores de projeção*.

2. A resolução da identidade tem as seguintes propriedades:

   (a) $E(\mathbb{R}\backslash\Lambda) = \mathbf{1} - E(\Lambda)$ e $E(\emptyset) = 0$ (o operador nulo).

   (b) $E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\Lambda_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(\Lambda_j)$ se Λ_j, Λ_k são disjuntos para $j \neq k$.

   (c) $E(\Lambda_1)(\Lambda_2) = E(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$.

Dada a resolução da identidade E, para cada $\xi \in \mathscr{H}$ associamos uma medida de Borel positiva μ_ξ em $\mathbb{R}$ por

$$\mathscr{A} \ni \Lambda \mapsto \mu_\xi(\Lambda) := \langle \xi, E(\Lambda)\xi \rangle;$$

notar que $\mu_\xi(\Lambda) = \langle \xi, E(\Lambda)E(\Lambda)\xi \rangle = \|E(\Lambda)\xi\|^2$ e $\mu_\xi(\mathbb{R}) = \|\xi\|^2$. Para o par $\xi, \eta \in \mathscr{H}$, associamos a medida de Borel complexa

$$\mu_{\xi,\eta}(\Lambda) := \langle \xi, E(\Lambda)\eta \rangle,$$

pela fórmula de polarização

$$\mu_{\xi,\eta}(\Lambda) = \frac{1}{4}\left[\mu_{\xi+\eta}(\Lambda) - \mu_{\xi-\eta}(\Lambda) + i\left(\mu_{\xi-i\eta}(\Lambda) - \mu_{\xi+i\eta}(\Lambda)\right)\right].$$

Claramente $\mu_\xi = \mu_{\xi,\xi}$ e $\left|\mu_{\xi,\eta}\right| \leq \|\xi\|\,\|\eta\|$.

Definição 1.21. As medidas μ_ξ e $\mu_{\xi,\eta}$ são chamadas *medidas espectrais* da resolução da identidade E associada com $\xi \in \mathscr{H}$ e $\xi, \eta \in \mathscr{H}$, respectivamente.

1.1.2 Teorema Espectral para Operadores Auto-Adjuntos

Suponhamos agora que o operador $T : \mathrm{dom}(T) \sqsubseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ seja auto-adjunto.

Teorema 1.22 (Teorema espectral para operadores auto-adjuntos). *Para cada operador auto-adjunto $T : \mathrm{dom}(T) \sqsubseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ corresponde a uma única resolução da identidade E^T em $\mathscr{H}$, de modo que $T = \int_{\mathbb{R}} t\,dE^T(t)$.*

Demonstração. [8]. □

Definição 1.23. A resolução da identidade E^T é chamada a *resolução da identidade* associada ao operador T e as medidas espectrais $\mu^T_{\xi,\eta}$ são chamadas *medidas espectrais* de T.

Temos para o domínio

$$\mathrm{dom}(T) := \left\{\xi \in \mathscr{H} \mid \int_{\mathbb{R}} t^2 d\mu^T_\xi(t) < \infty\right\},$$

e para cada par $\xi,\eta \in \mathscr{H}$, $\langle \xi, T\eta \rangle$ é dado por

$$\langle \xi, T\eta \rangle = \int_{\mathbb{R}} t d\mu^T_{\xi,\eta}(t), \ \ \mu \in \mathscr{H}, \tag{1.1}$$

a qual é convergente.

De forma geral, pode ser definido o operador

$$f(T) = \int_{\mathbb{R}} f dE^T(t), \tag{1.2}$$

para qualquer função de Borel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Observação 1.24. Da equação 1.2, podemos dizer que:

1. Se $f(t)$ for uma função limitada, para todo $t \in \mathbb{R}$, então $f(T)$ é um operador limitado.

2. Se $f(t)$ for uma função real, então $f(T)$ é um operador auto-adjunto.

3. Se $|f(t)| = 1$, então $f(T)$ é um operador unitário.

Se temos uma aplicação $t \mapsto f(t)$ injetora, para todo $t \in \mathbb{R}$, então a equação 1.2 pode ser reescrita como segue: seja $\mathscr{C}$ uma curva no plano complexo dada por $z = f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, e seja g a função inversa de f, ou seja, $t = g(z)$. A família de projeções ortogonais é então definida em $\mathscr{C}$, escrevendo $E^T(t) = F^T(z)$, sendo E^T a resolução da identidade associada ao operador T. Portanto a equação 1.2 torna-se

$$f(T) = \int_{\mathscr{C}} z dF^T(z). \tag{1.3}$$

Em particular, se escolhemos a função $f(t) = \dfrac{t-i}{t+i}$, demonstra-se que qualquer operador unitário, no qual 1 não é um valor próprio, é caracterizado pela resolução da identidade $F^T(z)$, definida no círculo unitário $S^1 = \mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Neste caso, $F^T(z)$ é geralmente escrito como $F^T(\theta)$, sendo $z = e^{i\theta}$ (portanto $t = -\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$), ou seja, que a representação canônica de um operador unitário U é tomada como

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} F^T(\theta), \tag{1.4}$$

em que $F^T(\theta)$ é uma resolução da identidade.

Agora vamos considerar o operador resolvente $R_\lambda(T) := (T - \lambda \mathbf{1})^{-1}$; pelo Teorema 1.22, tem-se

$$R_\lambda(T) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dE^T(t)}{t-\lambda},$$

e pela igualdade 1.1,

$$R_\mu(\lambda) := \langle \xi, R_\lambda(T)\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu^T_\xi(t)}{t-\lambda}, \tag{1.5}$$

e o lado direito de (1.5) é conhecido como transformada de Borel da medida espectral μ_ξ.

Agora, se tivermos o operador unitário U em vez do operador auto-adjunto T, a transformada de Borel da medida μ_ξ^U associada ao operador U é

$$R_\mu(\lambda) := \langle \xi, R_\lambda(U)\xi \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu_\xi^U(t)}{t-\lambda} = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu_\xi^U(t)}{e^{it}-\lambda}, \tag{1.6}$$

com $|\lambda| \neq 1$.

Da mesma forma, considere o operador $F_\lambda(U) = (U+\lambda\mathbf{1})(U-\lambda\mathbf{1})^{-1}$, sendo U um operador unitário, define-se então

$$F_\mu(\lambda) := \langle \xi, F_\lambda(U)\xi \rangle = \int_0^{2\pi} d\mu_\xi^U(t) \cdot \frac{t+\lambda}{t-\lambda} = \int_0^{2\pi} d\mu_\xi^U(t) \cdot \frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda}, \tag{1.7}$$

com $|\lambda| \neq 1$. Esta última igualdade é conhecida como transformada de Cauchy.

No Capítulo 4 e no Capítulo 5, fazemos uso extensivo das transformadas de Cauchy e Borel.

1.2 Decomposição Espectral

Nesta seção vamos discutir a decomposição espectral, ou seja, as partes pontual e contínua de operadores.

1.2.1 Redução Espectral

Seja E um subespaço fechado de $\mathscr{H}$ e P_E a projeção ortogonal em E, então

$$\mathscr{H} = E \oplus E^\perp \quad \text{e} \quad \mathbf{1} = P_E + P_{E^\perp}.$$

Se tivermos um operador linear $T : \operatorname{dom}(T) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, então

$$\operatorname{dom}(T) = P_E(\operatorname{dom}(T)) + P_{E^\perp}(\operatorname{dom}(T)).$$

Se $P_E(\operatorname{dom}(T)) \subset \operatorname{dom}(T)$, então $P_{E^\perp}(\operatorname{dom}(T)) = (\mathbf{1}-P_E)(\operatorname{dom}(T)) \subset \operatorname{dom}(T)$ e portanto

$$T(\operatorname{dom}(T)) = TP_E(\operatorname{dom}(T)) + TP_{E^\perp}(\operatorname{dom}(T)),$$

ou seja, $T\xi = TP_E\xi + TP_{E^\perp}\xi$, para todo $\xi \in \operatorname{dom}(T)$.

Definição 1.25. O subespaço fechado E é chamado subespaço redutor do operador T, ou simplesmente E reduz T, se

$$P_E(\operatorname{dom}(T)) \subset \operatorname{dom}(T), \quad TP_E(\operatorname{dom}(T)) \subset E \quad \text{e} \quad TP_{E^\perp}(\operatorname{dom}(T)) \subset E^\perp.$$

Neste caso as restrições dos operadores $T_E := T|_E = TP_E$ e $T_{E^\perp} := T|_{E^\perp} = TP_{E^\perp}$ estão bem definidas.

Lema 1.26. *Sejam o operador linear $T : \operatorname{dom}(T) \sqsubseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ e o subespaço fechado $E \subset \mathscr{H}$.*

1. *E reduz a T se, e somente se, $P_ET \subset TP_E$.*

2. *Se T for um operador hermitiano, então E reduz a T se, e somente se,*

$$P_E(\operatorname{dom}(T)) \subset T \quad e \quad TP_E(\operatorname{dom}(T)) \subset E.$$

Demonstração. [8]. □

1.2.2 Subespaços Espectrais

Dadas duas medidas finitas μ e ν, as notações

$$\mu \perp \nu \quad \text{e} \quad \mu \ll \nu$$

indicam que μ e ν são mutuamente singulares e que μ é absolutamente contínua em relação a ν, respectivamente.

Seja m a medida de Lebesgue sobre os conjuntos de Borel $\mathscr{A}$ de $\mathbb{R}$. Lembre-se que, pela decomposição de Lebesgue, a medida de Borel μ sobre $\mathbb{R}$ pode ser decomposta de forma única como $\mu = \mu_{\mathrm{p}} + \mu_{\mathrm{c}}$, com μ_{c} e μ_{p} suas partes contínuas ($\mu_{\mathrm{c}}(\{t\}) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$) e pontual (existe um conjunto contável Ω de modo que $\mu_{\mathrm{p}}(\mathbb{R}\backslash\Omega) = 0$), respectivamente. Notar que $\mu_{\mathrm{p}} \perp m$, ou seja, são mutuamente singulares. Pela decomposição de Lebesgue $\mu_{\mathrm{c}} = \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{sc}}$, com $\mu_{\mathrm{ac}} \ll m$ e $\mu_{\mathrm{sc}} \perp m$, tal que

$$\mu = \mu_{\mathrm{p}} + \mu_{\mathrm{ac}} + \mu_{\mathrm{sc}},$$

μ_{ac} é chamada a componente absolutamente contínua de μ, enquanto que μ_{sc} é a componente singular contínua de μ.

Definição 1.27. O subespaço pontual de um operador linear $T : \mathrm{dom}\,(T) \sqsubseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ é

$$\mathscr{H}_{\mathrm{p}} = \mathscr{H}_{\mathrm{p}}(T) := \left\{ \xi \in \mathscr{H} \mid \mu_{\xi}^{T}\,(\mathbb{R}\backslash\Omega) = 0 \right\},$$

sendo μ_{ξ}^{T} a medida espectral de T para $\xi \in \mathscr{H}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}$ um conjunto contável. Seu complemento ortogonal $\mathscr{H}_{\mathrm{c}} = \mathscr{H}_{\mathrm{c}}(T) := \left(\mathscr{H}_{\mathrm{p}}(T)\right)^{\perp}$ é o subespaço contínuo de T. Os operadores P_{p}^{T} e P_{c}^{T} denotam as respectivas projeções ortogonais.

Observação 1.28. 1. O subespaço $\mathscr{H}_{\mathrm{p}}$ é dado pelo fecho do subespaço gerado pelos auto-vetores de T.

2. $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathrm{p}} \oplus \mathscr{H}_{\mathrm{c}}$.

3. $T = T_{\mathrm{p}} \oplus T_{\mathrm{c}}$, sendo $T_{\mathrm{p}} := T P_{\mathrm{p}}^{T}$ e $T_{\mathrm{c}} := T P_{\mathrm{c}}^{T}$.

Seja agora $T : \mathrm{dom}\,(T) \sqsubseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ um operador linear, o especto do operador T pode ser decomposto em duas partes, sua parte pontual $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$ e em sua parte contínua $\sigma_{\mathrm{c}}(T)$.

Definição 1.29. Seja $T : \mathrm{dom}\,(T) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ um operador linear, os conjuntos:

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid T - \lambda \mathbf{1} \quad \text{não tem inversa}\}$$

e

$$\sigma_{\mathrm{c}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid T - \lambda \mathbf{1} \quad \text{tem inversa não limitada com domínio denso em } \mathscr{H}\}$$

são seus espectros pontual e contínuo respectivamente.

Observação 1.30. 1. Outra forma de definir o espectro pontual e contínuo é $\sigma_{\mathrm{p}}(T) := \sigma\left(T_{\mathrm{p}}\right)$ e $\sigma_{\mathrm{c}}(T) := \sigma\left(T_{\mathrm{c}}\right)$, respectivamente.

2. Notar que o espectro do operador T, pode ser escrito como $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}} \cup \sigma_{\mathrm{c}}$.

Definição 1.31. Seja $T : \operatorname{dom}(T) \sqsubseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ um operador linear

1. O subespaço singular de T é

$$\mathscr{H}_{\mathrm{s}} = \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(T) := \left\{\xi \in \mathscr{H} \mid \mu_\xi^T \perp m\right\}.$$

2. O subespaço absolutamente contínuo de T é

$$\mathscr{H}_{\mathrm{ac}} = \mathscr{H}_{\mathrm{ac}}(T) := \left\{\xi \in \mathscr{H} \mid \mu_\xi^T \ll m\right\}.$$

3. O subespaço singular contínuo de T é

$$\mathscr{H}_{\mathrm{sc}} = \mathscr{H}_{\mathrm{sc}}(T) := \left\{\xi \in \mathscr{H} \mid \mu_\xi^T\left(\mathbb{R}\backslash\Lambda\right) = 0\right\},$$

para algum conjunto de Borel $\Lambda \subset \mathbb{R}$ com $m(\Lambda) = 0$ e $\mu_\xi^T(\Omega) = 0$ para todo conjunto contável $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Observação 1.32. 1. Para cada um destes operadores, ou seja, T_k com $k \in \{\mathrm{s}, \mathrm{c}, \mathrm{p}, \mathrm{ac}, \mathrm{sc}\}$, podemos definir $T_k := T P_k^T$.

2. Para cada um dos subespaços $\mathscr{H}_k(T)$, com $k \in \{\mathrm{s}, \mathrm{c}, \mathrm{p}, \mathrm{ac}, \mathrm{sc}\}$, reduzem o operador T.

3. Podemos decompor $T = T_{\mathrm{p}} + T_{\mathrm{ac}} + T_{\mathrm{sc}}$.

4. Portanto $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{ac}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{sc}}(T)$. Como nomenclatura adicional temos que: o operador linear T tem espectro pontual puro se $\sigma_{\mathrm{ac}}(T) = \sigma_{\mathrm{sc}}(T) = \emptyset$; tem espectro absolutamente contínuo puro se $\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \sigma_{\mathrm{sc}}(T) = \emptyset$; e tem espectro singular contínuo puro se $\sigma_{\mathrm{ac}}(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) = \emptyset$.

1.3 Fórmula de Duhamel

Definição 1.33. A aplicação $G : \mathbb{R} \to B(\mathscr{H})$ é um grupo de evolução unitária a 1-parâmetro, ou simplesmente grupo de evolução unitária, em $\mathscr{H}$ se $G(t)$ é um operador unitário sobre $\mathscr{H}$ e $G(t+s) = G(t)G(s)$, para todos $t, s \in \mathbb{R}$.

Definição 1.34. Se G é um grupo de evolução unitária, o operador T definido por:

$$\operatorname{dom}(T) := \left\{\xi \in \mathscr{H} \mid \text{existe } \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(G(h) - \mathbf{1}\right)\xi\right\},$$

isto é, $\xi \in \mathrm{dom}\,(T)$ se, e somente se $t \mapsto G(t)\xi$ é diferenciável em $t = 0$,

$$T\xi := i \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\,(G(h) - \mathbf{1})\,,\ \ \xi \in \mathrm{dom}\,(T)$$

é chamado gerador infinitesimal de $G(t)$.

Além disso, diz-se que a aplicação $t \mapsto G(t)$ é fortemente contínua se

$$\lim_{t \to t_0} G(t)\xi = G(t_0)\xi, \quad \text{para todos} \quad t_0 \in \mathbb{R}, \xi \in \mathscr{H}.$$

Proposição 1.35. *Seja $t \mapsto G(t)$ um grupo de evolução unitária. Então seu gerador infinitesimal T é simétrico e para $\xi \in \mathrm{dom}\,(T)$ a curva $\xi(t) := G(t)\xi$ em $\mathscr{H}$ é a única solução de*

$$i\frac{d\xi}{dt}(t) = T\xi(t), \quad \xi(0) = \xi.$$

Demonstração. [8]. □

Dado um operador auto-adjunto T, tenta-se construir um grupo de evolução unitária para o qual T seja seu gerador infinitesimal. Esta situação acontece frequentemente na mecânica quântica.

Teorema 1.36. *Se T for um operador auto-adjunto, existe um grupo de evolução unitária $U(t)$ fortemente contínuo, para o qual T é seu gerador infinitesimal. Neste caso escrevemos $U(t) = e^{-itT}, t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. [8]. □

Sejam T um operador auto-adjunto e B um operador hermitiano de modo que $T + B$ é auto-adjunto com:

$$\mathrm{dom}\,(T + B) \subset \mathrm{dom}\,(T) \cap \mathrm{dom}\,(B).$$

Então os grupos de evolução unitários e^{-itT} e $e^{-it(T+B)}$ estão bem definidos (ver Teorema 1.36) e a tarefa aqui é comparar ambos. É como se perturbássemos o grupo de evolução unitária quando o gerador infinitesimal é perturbado.

As seguintes manipulações são bem justificadas (ver a Proposição 1.35). Seja $\xi \in \mathrm{dom}\,(T + B)$, a derivada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{itT}e^{-it(T+B)}\xi\right) &= iTe^{itT}e^{-it(T+B)}\xi - Ie^{itT}(T+B)e^{-it(T+B)}\xi \\ &= -\,ie^{itT}Be^{-it(T+B)}\xi, \end{aligned}$$

então integrando entre 0 e t, obtemos:

$$e^{itT}e^{-it(T+B)}\xi - \xi = -i\int_0^t e^{iuT}Be^{-iu(T+B)}du,$$

e finalmente temos a fórmula de Duhamel:

$$e^{-i(T+B)}\xi = e^{-itT}\xi - i\int_0^t e^{-iT(t-u)}Be^{-iu(T+B)}du. \tag{1.8}$$

No caso em que B for um operador limitado, temos:

$$\left\| e^{-it(T+B)}\xi - e^{-itT}\xi \right\| \le \left| \int_0^t \left\| Be^{-iu(T+B)}\xi \right\| du \right| \le |t|\,\|B\|\,\|\xi\|\,. \tag{1.9}$$

1.4 Operadores Compactos, Hilbert-Schmidt e de Classe Traço

Um dos operadores lineares mais importantes em espaços de Hilbert é constituído pelos operadores compactos, Hilbert-Schmidt e de classe traço.

Definição 1.37. Un operador linear $T : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ é compacto se $\{T\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente em $\mathscr{H}_2$ para qualquer sequência limitada $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}_1$. O conjunto de operadores compactos se denota por $B_0(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ (ou $B_0(\mathscr{H})$ no caso $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$).

Definição 1.38. Um operador $T \in B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ é Hilbert-Schmidt se existir uma base ortonormal $\{e_j\}_{j\in J}$ de $\mathscr{H}_1$ com

$$\|T\|_{\mathrm{HS}} := \left(\sum_{j\in J} \|Te_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

O conjunto dos operadores de Hilbert-Schmidt entre espaços de Hilbert será denotado por $\mathrm{HS}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$, ou se $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$, então por $\mathrm{HS}(\mathscr{H})$.

Proposição 1.39. *Seja $T \in B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$. Então*

1. $\|T\|_{\mathrm{HS}}$ *não depende da base ortonormal.*

2. $T \in \mathrm{HS}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ *se, e somente se seu adjunto* $T^* \in \mathrm{HS}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$. *Além disso,* $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \|T^*\|$.

Demonstração. [8]. □

Proposição 1.40. *Sejam os operadores limitados $T \in B(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ e $S \in \mathrm{HS}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$, então valem que:*

1. $\|S\| \leq \|S\|_{\mathrm{HS}}$.

2. $\|TS\|_{\mathrm{HS}} \leq \|T\| \, \|S\|_{\mathrm{HS}}$.

Demonstração. [8]. □

Observação 1.41. Observe que a partir dessa última proposição, temos que $\|TS\|_{\mathrm{HS}} \leq \|T\|_{\mathrm{HS}} \|S\|_{\mathrm{HS}}$ e que o resultado pode ser adaptado para ST.

Teorema 1.42. $\mathrm{HS}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2) \subset B_0(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$.

Demonstração. [8]. □

Definição 1.43. O traço de um operador linear positivo $T \in B(\mathscr{H})$ é

$$\mathrm{tr}\, T := \sum_j \left\langle e_j, Te_j \right\rangle,$$

sendo $\{e_j\}_j$ é uma base ortonormal de $\mathscr{H}$. Um operador T é classe traço se $\mathrm{tr}\,|T| < \infty$.

1.5 Medida de Clark no Toro

Seja a família de perturbações de operadores unitários de posto 1

$$U_\alpha = U + (\alpha - 1)\langle \cdot, U^*\varphi\rangle \varphi, \tag{1.10}$$

com $\alpha \in \mathbb{T}$ (toro de dimensão 1) e φ um vetor cíclico para U.

Sejam M o espaço de medida de Borel complexa em $\mathbb{T}$, μ_α a medida espectral de U_α e $\mathbb{D}$ o disco unitário aberto em $\mathbb{C}$.

Definição 1.44. Para $z \in \mathbb{D}$, $\xi \in \mathbb{T}$ a função

$$C_z(\xi) = \frac{1}{1 - z\overline{\xi}}$$

é chamada de o kernel de Cauchy em $\mathbb{D}$.

Definição 1.45. Para $z \in \mathbb{D}$, $\xi \in \mathbb{T}$ a função

$$P_z(\xi) = \frac{C_z(\xi)C_\xi(z)}{C_z(z)}$$

é o kernel de Poisson em $\mathbb{D}$.

Observação 1.46. $P_z(\xi) = \Re\left(\frac{1+z\overline{\xi}}{1-z\overline{\xi}}\right) = \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2}$, então $P_z(\xi)$ é uma função harmônica (dado que é a parte real de uma função analítica).

Definição 1.47. Se $\mu_\alpha \in M$,

$$(P\mu_\alpha)(z) := \int P_z(\xi)\mu_\alpha(\xi)$$

é a integral de Poisson de μ_α.

Para $\mu_\alpha \in M_+$ (o espaço de medida positiva de Borel complexa), a integral de Poisson $P\mu_\alpha$ é uma função harmônica positiva em $\mathbb{D}$. O teorema clássico de Herglotz diz que esta é única.

Teorema 1.48 (Herglotz). *Suponhamos que u_α é uma função harmônica positiva em $\mathbb{D}$, então $u_\alpha = P\mu_\alpha$ para uma única $\mu_\alpha \in M_+$.*

Demonstração. [5]. □

Definição 1.49. Para $\mu_\alpha \in M_+$, definimos para cada $\xi \in \mathbb{T}$:

$$(\underline{D}\mu_\alpha)(\xi) := \liminf_{t\to 0^+} \frac{\mu_\alpha(I(t,\xi))}{m(I(t,\xi))},$$
$$(\overline{D}\mu_\alpha)(\xi) := \limsup_{t\to 0^+} \frac{\mu_\alpha(I(t,\xi))}{m(I(t,\xi))},$$

com $\xi \in \mathbb{T}$, $t > 0$ e $I(t,\xi) := \left\{\xi e^{is} \mid -t < s < t\right\}$ é o arco do círcolo unitário subtendido pelos pontos ξe^{it} e ξe^{-it}.

Quando $(\underline{D}\mu_\alpha(\xi)) = (\overline{D}\mu_\alpha(\xi)) < \infty$, dizemos que μ_α é diferenciável em ξ e escrevemos $(D\mu_\alpha)(\xi) := (\underline{D}\mu_\alpha(\xi)) = (\overline{D}\mu_\alpha(\xi))$.

Proposição 1.50 (Teorema da diferenciação de Lebesgue)**.** *Se $\mu_\alpha \in M$, $(D\mu_\alpha)(\xi)$ existe para m-qtp, $\xi \in \mathbb{T}$ e $(D\mu_\alpha)(\xi) = \dfrac{d\mu_\alpha}{dm}(\xi)$.*

Demonstração. [5]. □

Proposição 1.51. *Seja $\mu_\alpha \in M_+$ e $\mu_\alpha = \mu_\alpha^{\mathrm{ac}} + \mu_\alpha^s$ é a decomposição de Lebesgue, então*

1. $(\underline{D}\mu_\alpha) = \overline{D}\mu_\alpha$ *m-qtp.*

2. *Para todo $\xi \in \mathbb{T}$*

$$(\underline{D}\mu_\alpha)(\xi) \leq \liminf_{r\to 1}(P\mu_\alpha)(r\xi) \leq \limsup_{r\to 1}(P\mu_\alpha)(r\xi) \leq (\overline{D}\mu_\alpha)(\xi).$$

3. *Se $D\mu_\alpha = \underline{D}\mu_\alpha = \overline{D}\mu_\alpha$, então se $(D\mu_\alpha)(\xi)$ existe, então $(D\mu_\alpha)(\xi) = \liminf_{r\to 1}(P\mu_\alpha)(r\xi)$.*

4. $D\mu_\alpha^s = 0$ *e* $D\mu_\alpha = D\mu_\alpha^{\mathrm{ac}}$, *m-qtp.*

5. μ_α^s *é suportada por* $\{\underline{D}\mu_\alpha = \infty\}$.

6. μ_α^{ac} *é suportada por* $\{0 < \underline{D}\mu_\alpha < \infty\}$.

Demonstração. [5]. □

Definição 1.52. Para uma função analítica $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ e para $\alpha \in \mathbb{T}$ tem-se

$$u_\alpha(z) := \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\alpha - \varphi(z)|^2} = P_{\varphi(z)}(\alpha).$$

Observação 1.53. Dado que φ é analítica e $z \mapsto P_z(\alpha)$ é harmônica, então $z \mapsto P_{\varphi(z)}(\alpha)$ é harmônica. Claramente u_α é também positiva em $\mathbb{D}$ e pelo Teorema de Herglotz

$$u_\alpha(z) = (P\mu_\alpha)(z)$$

para uma única $\mu_\alpha \in M_+$.

Vamos denotar a família $A_\varphi := \{\mu_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{T}\}$. Este conjunto é conhecido como as medidas de Aleksandrov-Clark (medidas AC) associadas com φ.

Proposição 1.54. *Se $\mu_\alpha \in M_+$, então existe uma função analítica $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ de modo que $\mu_\alpha \in A_\varphi$.*

Demonstração. Seja a transformada de Cauchy $F_{\mu_\alpha}(z) := \displaystyle\int \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu_\alpha(\xi)$ para $z \in \mathbb{D}$. Note que

$$\Re\left(F_{\mu_\alpha}(z)\right) = \int \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} d\mu_\alpha(\xi) = (P\mu_\alpha)(z) > 0.$$

Então $F_{\mu_\alpha} : \mathbb{D} \to \{z \mid \Re z > 0\}$. A função $w \mapsto \frac{w-1}{w+1}$, vai de $\Re z$ sobre $\mathbb{D}$ e portanto

$$\varphi(z) := \frac{F_{\mu_\alpha}(z) - 1}{F_{\mu_\alpha}(z) + 1},$$

ou seja, $F_{\mu_\alpha}(z) = \dfrac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)}$ que é uma função analítica em $\mathbb{D}$, então

$$(P\mu_\alpha)(z) = \Re(F_{\mu_\alpha}(z)) = \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|1 - \varphi(z)|^2}$$

que significa $\mu_\alpha = \mu_1 \in A_\varphi$. □

Proposição 1.55. *Se $\mu_\alpha \in A_\varphi$, então $\mu_\alpha = \dfrac{1 - |\varphi(0)|^2}{|\alpha - \varphi(0)|^2}$.*

Demonstração. Seja P_0 a função constante 1, tem-se que

$$\mu_\alpha(\mathbb{T}) = \int 1 d\mu_\alpha = \int P_0(\xi) d\mu_\alpha(\xi) = (P\mu_\alpha)(0) = \frac{1 - |\varphi(0)|^2}{|\alpha - \varphi(0)|^2}.$$

□

Observação 1.56. Seja $h_\alpha = D\mu_\alpha$ m-qtp, e pela Proposição 1.50, então $h_\alpha = \dfrac{d\mu_\alpha^{\mathrm{ac}}}{dm}$, ou seja, $d\mu_\alpha = h_\alpha dm + d\mu_\alpha^s$.

Proposição 1.57. *Para m-qtp, $\xi \in \mathbb{T}$*

$$h_\alpha(\xi) = \frac{1 - |\varphi(\xi)|^2}{|\alpha - \varphi(\xi)|^2}.$$

Demonstração. Dada a Proposição 1.51, tem-se que

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 1} u_\alpha(r\xi) &= \lim_{r\to 1} \frac{1 - |\varphi(r\xi)|^2}{|\alpha - \varphi(r\xi)|^2} \\
&= \lim_{r\to 1} (P\mu_\alpha)(r\xi) \\
&= (D\mu_\alpha)(\xi) \\
&= h_\alpha(\xi).
\end{aligned}$$

□

Definição 1.58. Uma aplicação φ se diz que é interna se $|\varphi(\xi)| = 1$ para m-qtp e $\xi \in \mathbb{T}$.

Proposição 1.59. *O conjunto $E_\alpha = \{\xi \in \mathbb{T} \mid \varphi(\xi) = \alpha\}$ é um conjunto de Borel e é suportada por μ_α^s.*

Demonstração. [5]. □

Observação 1.60. 1. Pela Proposição 1.51, tem-se:

$$\{\xi \in \mathbb{T} \mid (\underline{D}\mu_\alpha) = \infty\} \subset \{\xi \in \mathbb{T} \mid u_\alpha(\xi) = \infty\} \subset E_\alpha.$$

2. Se φ for interna, então $h_\alpha = 0$, ou seja, $\mu_\alpha = \mu_\alpha^s$ é singular.

Corolário 1.61. $\mu_\alpha^s \perp \mu_\beta^s$ *para* $\alpha \neq \beta$.

Demonstração. Como os conjuntos $E_\alpha = \{\xi \in \mathbb{T} \mid \varphi(\xi) = \alpha\}$ e $E_\beta = \{\xi \in \mathbb{T} \mid \varphi(\xi) = \beta\}$ são disjuntos e suportados por μ_α^s e μ_β^s, respectivamente, então $\mu_\alpha^s \perp \mu_\beta^s$, ou seja, são mutuamente singulares.

Uma demonstração alternativa é apresentada na Observação 5.10 □

CAPÍTULO 2

Sobre o Teorema de Birman-Krein

2.1 Introdução

Para desenvolver este capítulo, primeiro é conveniente recordar o que diz o clássico Teorema de Kato-Rosenblum.

Teorema 2.1 (Kato-Rosenblum)**.** *Se H e A forem operadores auto-adjuntos, e A for de classe traço, então as partes absolutamente contínuas de H e $H+A$ são unitariamente equivalentes.*

Demonstração. [8], [5] e [15]. □

Howland concluiu em [10], que não existe uma generalização não trivial do Teorema de Kato-Rosenblum, ou seja, apenas o espectro contínuo (em relação à medida de Lebesgue) pode ser preservada (sempre) sob certos tipos de perturbações (no momento, é conhecido que sob perturbações de classe traço). Neste capítulo, nossa conclusão é semelhante, ou seja, não existe uma generalização não trivial do Teorema de Birman-Krein (que é a versão para operadores unitários do Teorema de Kato-Rosenblum), a saber

Teorema 2.2 (Birman-Krein)**.** *Se U e X forem operadores unitários, e $X = e^{iY}$ com Y auto-adjunto e na classe traço, então as partes absolutamente contínuas de U e UX são unitariamente equivalentes.*

Demonstração. O enunciado original de Birman-Krein [2] é para perturbações aditivas $U+X$, mas dela segue, com certa facilidade, o enunciado acima. □

De fato, provaremos que se X for um operador unitário de modo que as partes singulares contínuas de U e UX (ou XU) são unitariamente equivalentes para todo operador unitário U, então $X = \mathbf{1}$.

Nosso principal resultado neste capítulo é resumido no Teorema 2.16; mas para enunciá-lo de forma apropriada, e também como preparação para sua demonstração, veremos detalhes e uma série de resultados preliminares sobre perturbações multiplicativas; tudo isso na próxima seção.

Como informação adicional, os resultados encontrados neste capítulo foram aceitos para publicação na forma de artigo [1].

2.2 Perturbações Multiplicativas

Estamos interessados em preservações de tipos espectrais de operadores unitários U, em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, sob perturbações multiplicativas isto é, se X for outro operador unitário, a perturbação tem a forma

$$U \mapsto UX \quad \text{e} \quad U \mapsto XU. \tag{2.1}$$

Observação 2.3. Notar que tanto os operadores UX e XU também são operadores unitários.

Se temos X operador unitário é conveniente escrevê-lo na forma $X = e^{iY}$, com Y um operador auto-adjunto limitado. Tem-se que

$$X = e^{iY} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iY)^j}{j!} = \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(iY)^j}{j!} = \mathbf{1} + W, \tag{2.2}$$

com $W = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(iY)^j}{j!}$. Assim, podemos escrever

$$UX = U(\mathbf{1} + W) = U + UW. \tag{2.3}$$

Observação 2.4. Se o operador $X = \mathbf{1} + W$ for unitário:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= (\mathbf{1}+W)(\mathbf{1}+W)^* = \mathbf{1} + W + W^* + W^*W \\ \mathbf{1} &= (\mathbf{1}+W)^*(\mathbf{1}+W) = \mathbf{1} + W^* + W + WW^*, \end{aligned}$$

ou seja, que $W^* + W + WW^* = W^* + W + W^*W = 0$ e segue que

$$W^*W = WW^*,$$

então temos que W é um operador normal. Mas tal condição não é suficiente; por exemplo, se $W = \pm I$, então X não seria unitário; precisamos que $\sigma(W) \subset \left\{ e^{it} - 1 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

Exemplo 2.5. No caso de perturbação de posto 1, temos que $||\phi|| = 1, P_\phi(\cdot) = \langle \phi, \cdot \rangle \phi$ (que é auto-adjunto) e consideramos $e^{i\lambda P_\phi}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, como $e^{i\lambda P_\varphi} = \mathbf{1} + W$, com

$$W\xi = (e^{i\lambda} - 1) \langle \phi, \xi \rangle \phi = (e^{i\lambda} - 1) P_\phi(\xi).$$

De fato,

$$e^{i\lambda P_\phi} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\lambda P_\phi)^j}{j!} = \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(i\lambda P_\phi)^j}{j!} \overset{P_\phi = P_\phi^2}{=} \mathbf{1} + (e^{i\lambda} - 1) P_\phi \Rightarrow W = (e^{i\lambda} - 1) P_\phi.$$

Para uma perturbação de posto 1

$$X_\lambda = e^{i\lambda P_\phi}, \tag{2.4}$$

tem-se:

$$U_\lambda := UX_\lambda = U(\mathbf{1} + (e^{i\lambda} - 1) P_\phi), \tag{2.5}$$

sendo $(e^{i\lambda} - 1)P_\phi$ é um operador normal. Note que há uma periodicidade no parâmetro e basta considerar $0 \leq \lambda < 2\pi$.

Agora, vamos supor que ϕ é cíclico para U, ou seja, $\overline{L(\{U^j\varphi \mid j \in \mathbb{Z}\})} = \mathscr{H}$.

Observação 2.6. Observe que se ϕ for cíclico para U, então $U^k\phi$ é cíclico para U, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Um resultado particularmente importante, que será empregado adiante, é a seguinte versão, para operadores unitários, do Teorema de Aronszajn-Donoghue para operadores auto-adjuntos. Denote por μ_ψ^λ a medida espectral no toro do par (U_λ, ψ).

Teorema 2.7. *Seja ϕ um vetor cíclico para U. Então para $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (ambos no intervalo $[0,2\pi)$), as partes singulares de U_{λ_1} e U_{λ_2} são mutuamente singulares, ou seja, para todo $0 \neq \psi \in \mathscr{H}$, as partes singulares das medidas espectrais $\mu_\psi^{\lambda_1}$ e $\mu_\psi^{\lambda_2}$ são mutuamente singulares.*

Demonstração. Corolário 1.61. □

Agora, sejam $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert separável e μ uma medida Boreliana finita e positiva em $\mathbb{T} = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Para discutir subespaços espectrais mais gerais, para $\psi \in \mathscr{H}$, será denotada por μ_ψ^U a medida espectral no toro do par (U, ψ) e, dada a medida não nula de Borel finita μ em $\mathbb{T}$, nós definimos o seguinte subespaço:

Definição 2.8. Seja U um operador unitário o conjunto

$$\mathscr{H}_\mu(U) := \left\{\psi \in \mathscr{H} \mid \mu_\psi^U \ll \mu\right\},$$

é o subespaço absolutamente contínuo de U em relação a μ.

O complemento ortogonal do subespaço $\mathscr{H}_\mu(U)$, pela Proposição 2.10, é

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathrm{s}}(U) := \left\{\psi \in \mathscr{H} \mid \mu_\psi^U \perp \mu\right\}.$$

Finalmente, denotamos por $[U]_\mu$ a restrição de U a $\mathscr{H}_\mu(U)$, i.e., $[U]_\mu := U\big|_{\mathscr{H}_\mu(U)}$.

Observação 2.9. Aqui tem-se a medida espectral $\mu_\psi^U = \langle\psi, E(S)\psi\rangle$, com S conjunto de Borel e E a resolução da identidade do operador U.

Proposição 2.10. *$\mathscr{H}_\mu(U)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathscr{H}$ e*

$$\mathscr{H}_\mu(U)^\perp = \left\{\psi \in \mathscr{H} \mid \mu_\psi^U \perp \mu\right\}.$$

Demonstração. De fato, seja $a \in \mathbb{C}$, temos que $\mu_{a\psi}^U(S) = \langle a\psi, E(S)a\psi\rangle = |a|^2\langle\psi, E(S)\psi\rangle = |a|^2\mu_\psi^U(S)$ e como $\mu_\psi^U \ll \mu$, então $|a|^2\mu_\psi^U \ll \mu$, portanto, $a\psi \in \mathscr{H}_\mu(U)$.

Agora, sejam $x, y \in \mathscr{H}_\mu(U)$, então:

$$\begin{aligned}\langle x+y, E(S)(x+y)\rangle &= \langle x, E(S)x\rangle + \langle x, E(S)y\rangle + \langle y, E(S)x\rangle + \langle y, E(S)y\rangle \\ &= \mu_x^U(S) + \mu_{x,y}^U(S) + \mu_{y,x}^U + \mu_y^U(S)\end{aligned}$$

e como $|\mu^U_{x,y}(S)|^2 = |\langle y, E(S)x\rangle|^2 \leq ||y||^2||E(S)x||^2 = ||y||^2\mu^U_x(S)$ e $\mu^U_x \ll \mu$, temos que se $\mu(S) = 0$, então $\mu^U_{x,y}(S) = 0$, o mesmo com $\mu^U_{y,x}(S) = 0$, portanto, $(x+y) \in \mathscr{H}_\mu(U)$, ou seja, $\mathscr{H}_\mu(U)$ é um subespaço.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}_\mu(U)$ com $x_n \to x$, quando $n \to \infty$, então,

$$\begin{aligned}
|\mu^U_{x_n}(S) - \mu^U_x(S)| =& |\langle x_n, E(S)x_n\rangle - \langle x, E(S)x\rangle| \\
=& |\langle x_n, E(S)x_n\rangle - \langle x, E(S)x_n\rangle + \langle x, E(S)x_n\rangle - \langle x, E(S)x\rangle| \\
=& |\langle x_n - x, E(S)x_n\rangle + \langle x, E(S)(x_n - x)\rangle| \\
\leq& |\langle x_n - x, E(S)x_n\rangle| + |\langle x, E(S)(x_n - x)\rangle| \\
\leq& ||x_n - x||||E(S)x_n|| + ||x_n - x||||E(S)x|| \\
=& ||x_n - x||\,(||E(S)x_n|| + ||E(S)x||) \to 0,
\end{aligned}$$

portanto, $\mu^U_{x_n}(S) \to \mu^U_x(S)$ e se $\mu(S) = 0$, então $\mu^U_x(S) = \lim_{n\to\infty} \mu^U_{x_n}(S) = 0$, ou seja, $\mu^U_x \ll \mu$. $\mathscr{H}_\mu(U)$ é um subespaço fechado.

Agora, seja $\mathscr{H}^s_\mu = \left\{\psi \in \mathscr{H} \mid \mu^U_\psi \perp \mu\right\}$. Vamos demonstrar que $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\mu \oplus \mathscr{H}^s_\mu$. De fato, seja $x \in \left\{\psi \in \mathscr{H} \mid \mu^U_\psi \ll \mu\right\}$ e $y \in \left\{\psi \in \mathscr{H} \mid \mu^U_\psi \perp \mu\right\}$, então existe um conjunto A com $\mu(A) = 0$ e $\mu^U_y(S \cap A) = \mu^U_y(S)$, ou seja, $(\mathbf{1} - E(A))y = 0$, portanto, $\langle x, y\rangle = \langle x, E(A)y\rangle = \langle E(A)x, y\rangle = 0$, dado que $\mu^U_x \ll \mu$, ou seja, $E(A)x = 0$.

Para qualquer $z \in \mathscr{H}$, podemos escrever z como a soma $z = x + y$ com $x \in \mathscr{H}_\mu(U)$ e $y \in \mathscr{H}^s_\mu(U)$. Para isso decompomos a medida $\mu(S)$ como a soma da medida absolutamente contínua $\mu^{\mathrm{ac}}(S)$ e a medida singular $\mu^{\mathrm{s}}(S)$. Para a medida singular μ^{s} associamos o conjunto de Borel S_0 com $\mu(S_0) = 0$ e $\mu^{\mathrm{s}}(S) = \mu^{\mathrm{s}}(S \cap S_0)$.

Denote $y = E(S_0)w$ e $x = z - y$; afirmamos que $x \in \mathscr{H}_\mu(U)$ e $y \in \mathscr{H}^s_\mu(U)$. De fato,

$$\mu_y(S) = ||E(S)y||^2 = ||E(S)E(S_0)z||^2 = ||E(S \cap S_0)z||^2 = \mu_z(S \cap S_0) = \mu^{\mathrm{s}}(S)$$

e dado que $\mu^{\mathrm{ac}}(S \cap S_0) = 0$ e $\mu^{\mathrm{s}}(S \cap S_0) = \mu^{\mathrm{s}}(S)$, temos

$$\begin{aligned}
\mu_x(S) =& ||E(S)x||^2 \\
=& ||E(S)(z - y)||^2 \\
=& ||E(S)z - E(S)y||^2 \\
=& ||E(S)z - E(S)E(S_0)z||^2 \\
=& ||E(S)(\mathbf{1} - E(S_0)z)||^2 \\
=& \langle z, E(S)z\rangle - \langle z, E(S \cap S_0)z\rangle \\
=& ||E(S)z||^2 - ||E(S \cap S_0)z||^2 \\
=& \mu_z(S) - \mu^{\mathrm{s}}(S) \\
=& \mu^{\mathrm{ac}}(S),
\end{aligned}$$

portanto, μ_x é absolutamente contínua e μ_y é singular, ou seja, $x \in \mathscr{H}_\mu(U)$ e $y \in \mathscr{H}_\mu^s(U)$. Portanto, $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\mu(U) \oplus \mathscr{H}_\mu^s(U)$ e como $\mathscr{H}_\mu(U)$ é um subespaço fechado, temos que

$$\mathscr{H}_\mu(U)^\perp = \mathscr{H}_\mu^s(U) = \left\{x \in \mathscr{H} \mid \mu_\psi^U \perp \mu\right\}.$$

Isto completa a demonstração. □

Definição 2.11. Um operador unitário X preserva μ pela direita se $[UX]_\mu \cong [U]_\mu$, para todo operador unitário U. E o operador X preserva μ pela esquerda se $[XU]_\mu \cong [U]_\mu$, para todo operador unitário U.

Observação 2.12.

1. O caso simples de $X = c\mathbf{1}$, $|c| = 1$, pela multiplicação translada os espectros em $\mathbb{T}$ e, portanto, não preserva as medidas se $c \neq 1$.

2. Como já mencionado, pelo Teorema de Birman-Krein, se $X = e^{iY}$ com Y na classe traço, então X preserva a medida de Lebesgue ℓ em $\mathbb{T}$.

3. Se $\nu \ll \mu$, então
$$[[U]_\mu]_\nu = [U]_\nu. \tag{2.6}$$
De fato, dado que $\mathscr{H}_\mu(U) := \{x \in \mathscr{H} \mid m_x \ll \mu\}$ e $\mathscr{H}_\nu(U) := \{x \in \mathscr{H} \mid m_x \ll \nu\}$ e como $\nu \ll \mu$, então $\mathscr{H}_\nu(U) \subset \mathscr{H}_\mu(U)$ e temos que $\left[[U]_\mu\right]_\nu = [U]_\nu$.

4. Para t real, definimos a medida transladada em $\mathbb{T}$
$$\mu_t(\cdot) := \mu\left(e^{it}\cdot\right). \tag{2.7}$$
Então
$$[U]_{\mu_t} = e^{it}[U]_\mu. \tag{2.8}$$

Basta discutir a preservação de uma medida pela direita ou pela esquerda, como diz a seguinte proposição. Após esta proposição diremos apenas "X preserva μ" (como já empregado acima).

Proposição 2.13. *X preserva μ pela direita se, e somente se X preserva μ pela esquerda.*

Demonstração. Seja X^* o operador adjunto de X. Se X preserva μ pela direita, então escolhemos X^*U (o qual também é um operador unitário); pela hipótese $[X^*UX]_\mu \cong [X^*U]_\mu$, e dado que X é unitário, $[X^*UX]_\mu \cong [U]_\mu$ e obtemos que $[X^*U]_\mu \cong [U]_\mu$, e portanto X^* preserva μ pela esquerda. E dado que temos $[U]_\mu = [X^*XU]_\mu \cong [XU]_\mu$, então X preserva μ pela esquerda.

Da mesma forma, conclui-se a recíproca. □

Da demonstração da Proposição 2.13, segue diretamente o

Corolário 2.14. *X preserva μ se, e somente se X^* preserva μ.*

Agora vamos ver a seguinte proposição, que será útil para provar nosso resultado principal neste capítulo.

Proposição 2.15. *Suponha que X preserva μ. Então:*

1. *Se $\nu \ll \mu$, então X preserva ν.*
2. *X preserva μ_t, para todo $t \in \mathbb{R}$.*
3. *Se $X \cong Y$, então Y preserva μ.*
4. *Se P_E for uma projeção ortogonal que reduz X, então $P_E X$ preserva μ em $P_E(\mathscr{H}) = E$.*
5. *Se Y também preservar μ, então XY preserva μ.*

Demonstração. 1. $[UX]_\nu \cong [[UX]_\mu]_\nu \cong [U_\mu]_\nu \cong [U]_\nu$.

2. $[UX]_{\mu_t} = e^{it}[UX]_\mu = [e^{it}UX]_\mu$ e dado que $e^{it}U$ é um operador unitário, tem-se $[e^{it}UX]_\mu \cong [e^{it}U]_\mu = U_{\mu_t}$; logo $[UX]_{\mu_t} = [U]_{\mu_t}$.

3. Se $X \cong Y$, isto é, $Y = VXV^*$ para algum operador unitário V, então

$$[UY]_\mu = [UVXV^*]_\mu = [V(V^*UVXV^*V)V^*]_\mu \cong [V^*UVXV^*V]_\mu = [V^*UVX]_\mu\,,$$

e dado que V^*UV é unitário e X preserva μ, obtemos

$$[V^*UVX]_\mu \cong [V^*UV]_\mu \cong [U]_\mu,$$

ou seja, $[UY]_\mu \cong [U]_\mu$.

4. Escrevendo $\mathscr{H} = E \oplus E^\perp$; então $X = X|_E \oplus X|_{E^\perp}$, o qual pode escrever-se como

$$X = \begin{pmatrix} X|_E & 0 \\ 0 & X|_{E^\perp} \end{pmatrix}.$$

Agora, if $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$ são operadores unitários atuando em E e $E^\perp$, respectivamente, então

$$U = \begin{pmatrix} \widetilde{U} & 0 \\ 0 & \widetilde{V} \end{pmatrix}$$

é unitário em $\mathscr{H}$. Portanto,

$$[U]_\mu \cong [UX]_\mu = \left[\begin{pmatrix} \widetilde{U} & 0 \\ 0 & \widetilde{V} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X|_E & 0 \\ 0 & X|_{E^\perp} \end{pmatrix}\right]_\mu = \begin{pmatrix} [\widetilde{U}X|_E]_\mu & 0 \\ 0 & [\widetilde{V}X|_{E^\perp}]_\mu \end{pmatrix},$$

e dado que $[U]_\mu = \begin{pmatrix} [\widetilde{U}]_\mu & 0 \\ 0 & [\widetilde{V}]_\mu \end{pmatrix}$, e igualando as primeiras componentes, temos $[\widetilde{U}X|_E]_\mu \cong \widetilde{U}_\mu$, dado que $X|_E$ preserva μ em $E = P_E(\mathscr{H})$.

5. De fato, se U for um operador unitário, então UX é também unitário e

$$[UXY]_\mu \cong [UX]_\mu \cong [U]_\mu.$$

□

Finalmente o enunciado de nosso principal resultado neste capítulo:

Teorema 2.16. *Se o operador unitário $X \neq \mathbf{1}$ preserva μ, então $\mu \ll \ell$.*

Demonstração. Pela Observação 2.12(1), vamos supor que $X \neq c\mathbf{1}$. Se X preserva μ, o objetivo é mostrar que $\mu \ll \ell$. Pelo item (3) da Proposição 2.15, R^*XR também preserva μ, para qualquer operador unitário R. Escolha o operador $R = X_\lambda$ de (2.5), com $\lambda = \pi$ e para algum vetor normalizado ϕ (que será selecionado mais adiante), isto é,

$$R\xi = X_\pi \xi = \xi + (e^{i\pi} - 1)\langle \phi, \xi \rangle \phi = \xi - 2\langle \phi, \xi \rangle \phi,$$

para todo $\xi \in \mathscr{H}$, e note que R é um operador unitário e auto-adjunto.

Pela Proposição 2.15, itens (3) e (5), e Corolário 2.14, os operadores R^*XR e

$$Z := X^*R^*XR$$

preservam μ também. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned}
R^*XR\xi =& R^*X(\xi - 2\langle \phi, \xi \rangle \phi) \\
=& R^*(X\xi - 2\langle \phi, \xi \rangle X\phi) \\
=& R^*(X\xi) - R^*(-2\langle \phi, \xi \rangle X\phi) \\
=& R^*(X\xi) - 2\langle \phi, \xi \rangle R^*(X\phi) \\
=& X\xi - 2\langle \phi, X\xi \rangle \phi - 2\langle \phi, \xi \rangle (X\phi - 2\langle \phi, X\phi \rangle \phi) \\
=& X\xi + \big(4\langle \phi, \xi \rangle \langle \phi, X\phi \rangle - 2\langle \phi, X\xi \rangle\big)\phi - 2\langle \phi, \xi \rangle X\phi,
\end{aligned}$$

e se $\psi = X^*\phi$,

$$Z\xi = \xi + [4\langle \phi, \xi \rangle \langle \phi, X\phi \rangle - 2\langle \phi, X\xi \rangle]\,\psi - 2\langle \phi, \xi \rangle \phi := (\mathbf{1} + W)\xi,$$

isto é,

$$W\xi = [4\langle \phi, \xi \rangle \langle \phi, X\phi \rangle - 2\langle \phi, X\xi \rangle]\,\psi - 2\langle \phi, \xi \rangle \phi\,.$$

Dado que $X \neq c\mathbf{1}$, escolhemos ϕ de forma que o conjunto $\{\phi, \psi\}$ seja linearmente independente de modo que o operador W tem posto 2 (notar que se $X = c\mathbf{1}$, então $W = 0$). Sejam e_1 e e_2 dois autovetores normalizados e independentes de W, e observe que eles também são autovetores do operador unitário Z, por isso (e supondo que) $e_1 \perp e_2$. Se E denotar o complemento ortogonal de e_1, o qual reduz Z, e segue, pela Proposição 2.15(4), que o operador $Z_2 := Z|_E$ também preserva μ em E. Agora, Z_2 tem a forma (2.5), isto é,

$$Z_2 = \mathbf{1} + (e^{i\lambda} - 1)P_{e_2},$$

para algum $\lambda \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, escolhendo um operador unitário $\dot{U}$ em E com e_2 um de seus vetores cíclicos, tem-se que

$$\dot{U}Z_2 = \dot{U} + \dot{U}(e^{i\lambda} - 1)P_{e_2}$$

tem a forma (2.4). Dado que Z_2 preserva μ,

$$[\dot{U}Z_2]_\mu \cong [\dot{U}]_\mu$$

e, pelo Teorema 2.7, se μ tem componente singular não nula, Z_2 não pode preservar μ, e concluímos que μ é absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue. $\square$

Portanto, se as partes singulares contínuas de U e UX são unitariamente equivalentes, só resta que $X = \mathbf{1}$.

CAPÍTULO 3

Perturbações de Hilbert-Schmidt Multiplicativas

3.1 Introdução

Se X e U são operadores unitários em $\mathscr{H}$, o objetivo é encontrar um resultado análogo, agora para perturbações pela direita da seguinte forma

$$U \mapsto UX, \tag{3.1}$$

do seguinte Teorema de Weyl-von Neumann

Teorema 3.1. *(Weyl-von Neumann) Seja T um operador auto-adjunto. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um operador auto-adjunto e Hilbert-Schmidt S, com $\|S\|_{\mathrm{HS}} < \varepsilon$, de modo que $T + S$ tem espectro pontual puro.*

Demonstração. [8]. □

Nosso principal resultado neste capítulo é o Teorema 3.3, mas para sua demonstração deduziremos, preliminarmente, uma versão aditiva.

3.2 Resultado Multiplicativo

Como no Capítulo 2, é conveniente escrever tais perturbações na forma $X = e^{iY}$, com Y um operador auto-adjunto e limitado, de forma que

$$X = e^{iY} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iY)^j}{j!} = \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(iY)^j}{j!} = \mathbf{1} + W, \tag{3.2}$$

com $W = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(iY)^j}{j!}$. Nesse sentido, podemos escrever,

$$UX = U(\mathbf{1} + W) = U + UW. \tag{3.3}$$

Nosso primeiro resultado aqui é uma versão de Weyl-von Neumann para perturbações aditivas de operadores unitários.

Teorema 3.2. *Dado $\varepsilon > 0$, existe um operador unitário V em $\mathscr{H}$, com espectro pontual puro, de forma que*

$$\|U - V\|_{\mathrm{HS}} < \varepsilon,$$

para todo operador unitário U.

Demonstração. Escreva o operador unitário $U = e^{iT}$, com T auto-adjunto e limitado; então usaremos o Teorema 3.1 para operadores auto-adjuntos, ou seja, que existe um operador auto-adjunto limitado B, com $\|B\|_{\mathrm{HS}} < \varepsilon$ e $T + B$ é pontual puro. Disto segue que $V = e^{i(T+B)}$ é unitário e pontual puro.

O próximo ingrediente é a Fórmula de Duhamel, discutida na Seção 1.3, que pode ser adaptada para se obter a seguinte versão:

$$V - U = e^{i(T+B)} - e^{iT} = -i \int_0^1 e^{iT(1-u)}\, B\, e^{iu(T+B)}\, \mathrm{d}u\,.$$

Usando então a Proposição 1.40, obtemos

$$\begin{aligned} \big\|V - U\big\|_{\mathrm{HS}} &\leq \int_0^1 \big\|e^{iT(1-u)}\, B\, e^{iu(T+B)}\big\|_{\mathrm{HS}}\, \mathrm{d}u \\ &\leq \int_0^1 \|e^{iT(1-u)}\|\, \|B\|_{\mathrm{HS}}\, \|e^{iu(T+B)}\|\, \mathrm{d}u \\ &\leq \|B\|_{\mathrm{HS}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Agora, com o auxílio do Teorema 3.2, estamos em condições de demonstrar nosso principal resultado neste capítulo, ou seja, uma versão do Teorema de Weyl-von Neumann para perturbações multiplicativas de operadores unitários.

Teorema 3.3. *Seja U um operador unitário em $\mathscr{H}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um operador unitário $X = \mathbf{1} + W$, com $\|W\|_{\mathrm{HS}} < \varepsilon$, de modo que o operador perturbado pela direita*

$$U \longmapsto UX$$

seja pontual puro.

Demonstração. Do Teorema 3.2, dado $0 < \delta < 1$, existe um operador unitário e pontual puro V de modo que $B = U - V$ satisfaça $\|B\|_{\mathrm{HS}} < \delta$. Assim,

$$U = V + B = V(\mathbf{1} + V^{-1}B),$$

e da Proposição 1.40, $\|V^{-1}B\|_{\mathrm{HS}} < \delta < 1$, e segue que $(\mathbf{1} + V^{-1}B)$ é invertível (em norma).

Escrevendo $X = (\mathbf{1} + V^{-1}B)^{-1}$ tem-se

$$UX = V\,,$$

concluindo que X é unitário (pois U e V são). Logo, pelo Teorema 1.9, temos que

$$X = \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{\infty} (-V^{-1}B)^j\,,$$

seguindo então que

$$\|X - \mathbf{1}\|_{\mathrm{HS}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|V^{-1}B\|_{\mathrm{HS}}^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j = \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Escolhe-se δ de modo que $\frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$ e identifica-se $W = \sum_{j=1}^{\infty}(-V^{-1}B)^j$. □

Observação 3.4. Para uma perturbação pela esquerda

$$U \mapsto XU, \tag{3.4}$$

fazemos as seguintes alterações:

$$U = V + B = (\mathbf{1} + BV^{-1})V$$

e da Proposição 1.40 $\|BV^{-1}\|_{\mathrm{HS}} < \delta < 1$, segue que $(\mathbf{1} + BV^{-1})$ é invertível; escrevendo $X = (\mathbf{1} + BV^{-1})^{-1}$ tem-se

$$XU = V\,,$$

concluindo que X é unitário (pois U e V são). Logo, pelo Teorema 1.9, temos que

$$X = \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{\infty} (-BV^{-1})^j\,,$$

seguindo então

$$\|X - \mathbf{1}\|_{\mathrm{HS}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|BV^{-1}\|_{\mathrm{HS}}^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j = \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Escolhendo δ de modo que $\frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$ e identificamos $W = \sum_{j=1}^{\infty}(-BV^{-1})^j$.

CAPÍTULO 4

Espectro Singular Contínuo Para Operadores Unitários de Posto 1

4.1 Introdução

Para um operador auto-adjunto A, na literatura já foi estudada a perturbação de posto um (com uma longa lista de resultados)

$$A_\lambda = A + \lambda P, \tag{4.1}$$

sendo $P\psi = \langle \phi, \psi \rangle \phi$ com ϕ um vetor cíclico (normalizado) para A (veja, por exemplo [15, 9]). Denote por μ a medida espectral para o par (A, ϕ) e a transformada de Borel-Stieltjes

$$R(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{x - z}, \qquad \Im z > 0.$$

Um resultado importante desta perturbação é o seguinte Teorema de Aronszajn-Donoghue:

Teorema 4.1. *E é um autovalor de A_λ se, e somente se $G(E) < \infty$ e $R(E) = -\lambda^{-1}$, sendo*

$$G(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{(x-y)^2} \quad e \quad R(y) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{x - (E + i\varepsilon)},$$

com $y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. [15]. □

Observação 4.2. Observe que definimos G como $+\infty$ se a integral diverge. Notamos também que se $G(y) < \infty$, então a integral que define R é finita em $z = y$, portanto de agora em diante falaremos sobre $R(y)$, com $y \in \mathbb{R}$.

Definição 4.3. Um conjunto G_δ é um subconjunto de um espaço topológico que é uma intersecção contável de conjuntos abertos.

Del Rio-Makarov-Simon demonstraram em [9] os seguintes teoremas:

Teorema 4.4. *$\{y \mid G(y) = \infty\}$ é um G_δ denso no espectro de A ($\sigma(A)$).*

Além disso, temos

Teorema 4.5. *$\{\lambda \mid A_\lambda$ não possui autovalores no $\sigma(A)\}$ é um G_δ denso em $\mathbb{R}$.*

Como consequência, segue que se $[a,b]$ estiver contido no espectro de A e esse operador não possuir espectro absolutamente contínuo, então A_λ possui espectro puramente singular contínuo, no intervalo (a,b), para λ um conjunto G_δ denso (genérico) em $\mathbb{R}$.

Nosso objetivo neste capítulo é enunciar e demonstrar versões unitárias multiplicativas dos Teoremas 4.4 e 4.5, que serão dadas pelos Teoremas 4.9 e 4.13, respectivamente. Mas alguma preparação será necessária.

4.2 Caso Unitário

Para o operador unitário U, consideramos a perturbação de posto 1

$$U_\lambda = Ue^{i\lambda P} = U + (e^{i\lambda} - 1)UP,$$

sendo $P\psi = \langle \phi, \psi \rangle \phi$ com ϕ um vetor cíclico (normalizado) para U e μ^λ é a medida espectral no toro associada ao par (U_λ, ϕ). Da transformada de Cauchy

$$F_\mu(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t),$$

vamos denotar para μ^λ sua transformada $F_{\mu^\lambda}(z) = F_\lambda(z) = \langle \phi, (U_\lambda + z\mathbf{1})(U_\lambda - z\mathbf{1})^{-1}\phi \rangle$.

Agora, um resultado que nos servirá mais tarde e cuja prova pode ser encontrada em [13] e o seguinte:

Teorema 4.6. *Seja ℓ a medida de Lebesgue, finita e positiva, então:*

1. *$\lim_{r\to 1} F_\lambda(re^{it})$ existe ℓ-q.t.p para $t \in [0, 2\pi)$ e se*

$$d\mu^\lambda(t) = f(t)\frac{dt}{2\pi} + d\mu_s^\lambda(t)$$

define $f(t)$, então $f(t) = \Re(F_\lambda(e^{it}))$.

2. *t_0 é um autovalor de U_λ se, e somente se*

$$\lim_{r\to 1}(1-r)\Re(F_\lambda(re^{it_0})) \neq 0$$

e em geral $\lim_{r\to 1}(1-r)\Re(F_\lambda(re^{it_0})) = \mu(\{t_0\})$.

3. *μ_s está suportada em $\left\{t \mid \lim_{r\to 1} F_\lambda(re^{it}) = \infty\right\}$.*

Por outro lado, pelos resultados de Combescure [6], considere a transformada de Borel $R_\lambda(z)$ associada ao operador unitário U_λ, dada por

$$R_\lambda(z) = \left\langle \phi, (U_\lambda - z\mathbf{1})^{-1}\phi \right\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu^\lambda(t)}{e^{it} - z}$$

e definindo

$$B_\lambda(x) = \left[\int_0^{2\pi} d\mu^\lambda(t) \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{x-t}{2}\right)\right)^{-1} \right]^{-1} = \frac{1}{G_\lambda(x)}.$$

Proposição 4.7. *Seja $\lambda \neq 0$. Então, $d\mu^\lambda$ possui um átomo no ponto $x \in [0, 2\pi)$ se, e somente se, $B_\lambda(x) \neq 0$ (ou seja, $G_\lambda(x) < \infty$) e*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} e^{i(x+i\varepsilon)}(R_0(e^{i(x+i\varepsilon)})) = \frac{e^{i\lambda}}{1 - e^{i\lambda}}$$

ou

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (F_0(e^{i(x+i\varepsilon})) = i \cot\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Demonstração. [6]. □

Observação 4.8. Para qualquer medida de Borel, diremos que a medida é pontual pura ou atômica se a medida for suportada apenas por pontos.

Estamos em condições de apresentar nossos principais resultados deste capítulo.

Teorema 4.9. *Dado o operador unitário U, o conjunto $S = \{x \mid G_\lambda(x) = \infty\}$ é um G_δ denso em $\sigma(U)$.*

Demonstração. Temos que $G_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\mu^\lambda(t) \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{x-t}{2}\right)\right)^{-1}$, então $G_\lambda(x) = \infty$ quando $x - t$ tende a 0. Por outro lado, se $r \mapsto 1$

$$\Re\left(F_\lambda(re^{ix})\right) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(x-t)} d\mu^\lambda(t) = \infty$$

quando $x - t = 0$.

Agora suponha que $G_\lambda(x) < \infty$ sobre um intervalo (a, b) em $\mathbb{T}$, consequentemente devemos ter que $x - t$ é não nulo nesse intervalo, logo $\lim_{r \to 1} \Re\left(F_\lambda\left(re^{ix}\right)\right) = 0$. Então, como

$$\lim_{r \to 1} F_\lambda\left(re^{ix}\right) = \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2) + 2ri\operatorname{sen}(x-t)}{1 + r^2 - 2r\cos(x-t)} d\mu^\lambda(t)$$

existe ℓ-q.t.p. para $t \in [0, 2\pi)$ e

$$d\mu^\lambda(t) = f(t)\frac{dt}{2\pi} + d\mu_s^\lambda(t),$$

sendo $f = \lim_{r \to 1} \Re\left(F_\lambda\left(re^{ix}\right)\right)$ e $d\mu_s^\lambda$ está suportada em $\left\{ t \mid \lim_{r \to 1} \Re\left(F_\lambda\left(re^{ix}\right)\right) = \infty \right\}$. Obtemos que $(a, b) \cap \operatorname{supp}(d\mu^\lambda) = \emptyset$. Então, $S = \{x \mid G_\lambda(x) = \infty\}$ é denso em $\sigma(U)$.

Agora, vejamos que $S = \{x \mid G_\lambda(x) = \infty\}$ é um G_δ. De fato, seja

$$G_\lambda^m(x) = \int_0^{2\pi} d\mu^\lambda(t)\left(\frac{1}{m^2} + \operatorname{sen}^2\left(\frac{x-t}{2}\right)\right)^{-1}$$

a qual é uma função C^∞ e $G_\lambda(x) = \sup_m G_\lambda^m(x)$, então

$$\begin{aligned}\{x \mid G_\lambda(x) = \infty\} &= \{x \mid \text{para todo } \ n, \text{existe } \ m \quad \text{tal que} \quad G_\lambda^m > n\}\\ &= \bigcap_n \bigcup_m \{x \mid G_\lambda^m(x) > n\}\end{aligned}$$

é um G_δ. □

Observação 4.10. 1. Pela Proposição 4.7, só os x's, com $G_\lambda(x) < \infty$ podem ser autovalores de U_λ, então diz-se que os y's com $G_\lambda(y) = \infty$ são "energias proibidas", ou seja, energias que não podem ser autovalores.

2. Se o espectro de U ($\sigma(U)$) for um conjunto perfeito (não possui pontos isolados), então o Teorema 4.9 nos diz que as "energias proibidas" são localmente não enumeráveis em $\sigma(U)$.

3. Obviamente, $\{x \mid G_\lambda(x) = \infty\} \subset \sigma(U)$.

4. Note que o Teorema 4.9 nos diz que $\{x \mid G_\lambda(x) < \infty\}$ tem interior vazio em $\sigma(U)$. Mais ainda, o interior é vazio em $[0, 2\pi)$. De fato, o teorema nos dá algo mais forte que este último, nos diz que $\sigma(U)$ poderia ter um interior vazio em $[0, 2\pi)$.

5. Observe que se $G_\lambda(x) < \infty$ implica que a integral

$$F_\lambda(x) = \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2) + 2ri\operatorname{sen}(x-t)}{1 + r^2 - 2r\cos(x-t)} d\mu^\lambda(t)$$

é absolutamente convergente e $F_\lambda(x)$ é imaginário puro quando $r \to 1$.

Lema 4.11. *Seja B un subconjunto de $\mathbb{R}$ nunca denso e seja $H : B \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo, para $x < y$,*

$$\alpha(y-x) < H(y) - H(x) < \beta(y-x), \tag{4.2}$$

fixados $\alpha, \beta > 0$. Então a imagem de H é um conjunto nunca denso.

Demonstração. Dada a Observação 4.10, definimos a função $H := iF_\lambda$. Por (4.2), H tem uma única extensão contínua para $\overline{B}$ que obedece também à desigualdade (4.2). Agora, $\mathbb{R}\backslash\overline{B}$ é uma união de intervalos (x_i, y_i), com $x_i, y_i \in \overline{B}$. Estendendo H ao intervalo, através de uma interpolação linear com inclinação $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, em qualquer um dos intervalos semi-infinitos de $\mathbb{R}\backslash\overline{B}$. Esta extensão de H também satisfaz a desigualdade (4.2) e define um homeomorfismo de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, portanto leva conjuntos nunca densos em conjuntos nunca densos. □

Teorema 4.12. *O conjunto* $S = \{F_\lambda(x) \mid G_\lambda(x) < \infty,\ x \in \operatorname{supp}(\mu)\}$ *é uma união contável de subconjuntos nunca densos de* $[0,2\pi)$ *(*$\operatorname{int}\left(\overline{S}\right) = \emptyset$*).*

Demonstração. [9]. $\square$

Teorema 4.13. $\{\lambda \mid U_\lambda$ *não possui autovalores no* $\sigma(U)\}$ *é um* G_δ *denso em* $[0,2\pi)$.

Demonstração. Seja a função (que é um homeomorfismo) $M : (0,2\pi) \to I$, sendo $I = \{a+ib \mid a = 0\}$ (eixo imaginário), definida por $M(\lambda) = i\cot\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, então pelo Teorema 4.12 vamos ter que o conjunto

$$\left\{\lambda \mid \text{existe } x, G_\lambda(x) < \infty, \quad x \in \sigma(U), M(x) = i\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right\}$$

é uma união contável de conjuntos nunca densos. Então, seu complementar é um conjunto denso pelo Teorema de categoria de Baire, mas pela Proposição 4.7 este conjunto é exatamente

$$\{\lambda \mid U_\lambda \text{ não possui autovalores no } \sigma(U)\},$$

ou seja, é denso. Agora, e pelo Teorema 1.1 de [14], temos que também é um G_δ. $\square$

Temos então, como consequência desses resultados, que

Corolário 4.14. *Se U não possuir espectro absolutamente contínuo, então para* λ *um conjunto genérico (i.e., um* G_δ *denso) em* $[0,2\pi)$*,* U_λ *possui espectro singular contínuo puro.*

Demonstração. Combine os Teoremas 2.2 e 4.13. $\square$

CAPÍTULO 5

Birman-Krein para Operadores Unitários de Posto Finito

5.1 Introdução

A ideia deste capítulo é fazer uma nova demonstração do Teorema de Birman-Krein, mas para perturbações unitárias de posto finito. Ou seja, para uma perturbação pela direita (esquerda) do tipo $U \mapsto UX$ (XU), com $X = e^{iY}$ operador unitário e Y auto-adjunto de posto finito, concluindo que as partes absolutamente contínuas de U e UX (XU) são unitariamente equivalentes.

Esta nossa demonstração evita o uso de teoria de espalhamento, embora seja mais restrita, pois o caso geral inclui operadores na classe traço. Para deixar mais clara nossa abordagem, discutiremos previamente o caso de perturbações de posto um.

5.2 Perturbação Multiplicativa

Consideremos o operador unitário $X = e^{iA}$, sendo A auto-adjunto e de classe traço, então podemos escrever

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j P_{\varphi_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \left\langle \varphi_j, \cdot \right\rangle \varphi_j,$$

com $\left\{\varphi_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ortonormal e $\sum_j |\omega_j| < \infty$.

Agora pense na perturbação

$$U \mapsto UX,$$

e como em alguns dos capítulo anteriores, escrevemos $X = e^{iA} = \mathbf{1} + W$, então $UX = U(\mathbf{1}+W) = U + UW$, com $W = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(iA)^j}{j!}$.

Agora, como $P_{\varphi_j} P_{\varphi_k} = 0$, para $j \neq k$, segue que

$$e^{i\left(\omega_1 P_{\varphi_1} + \omega_2 P_{\varphi_2}\right)} = e^{i\omega_1 P_{\varphi_2}} e^{i\omega_2 P_{\varphi_2}}.$$

Denote $X_n = e^{i\sum_{j=1}^{n}\omega_j P_{\varphi_j}}$, logo o comutador $[X_n, X_m] = 0$, para todo n, m, ou seja tais operadores comutam. Então

$$X_{n+k} = e^{i\sum_{j=1}^{n+k}\omega_j P_{\varphi_j}} = e^{i\sum_{i=1}^{n}\omega_i P_{\varphi_i}}\, e^{i\sum_{j=n+1}^{n+k}\omega_j P_{\varphi_j}}.$$

Formalmente, teríamos

$$X = e^{iA} = e^{i\omega_1 P_{\varphi_1}} \cdot e^{i\omega_2 P_{\varphi_2}} \cdots e^{i\omega_k P_{\varphi_k}} \cdots \tag{5.1}$$

$$= \cdots e^{i\omega_k P_{\varphi_k}} \cdots e^{i\omega_2 P_{\varphi_2}} \cdot e^{i\omega_1 P_{\varphi_1}}; \tag{5.2}$$

o que vamos justificar no nosso caso de interesse.

Lema 5.1. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy em* $B(\mathscr{H})$*. Isto justifica* (5.2)*, definindo* X*.*

Demonstração. Primeiro lembremos o seguinte:

$$e^{i\lambda P_\phi} = \sum_{j\geq 0}\frac{(i\lambda P_\phi)^j}{j!} = \mathbf{1} + \sum_{j\geq 1}\frac{(i\lambda P_\phi)^j}{j!} = \mathbf{1} + \sum_{j\geq 1}\frac{(i\lambda)^j P_\phi}{j!} = \mathbf{1} + (e^{i\lambda} - 1)P_\phi. \tag{5.3}$$

Seja $\beta_j \in \mathbb{C}$, e P_j um operador projeção para todo $j \in \mathbb{N}$, com $P_j P_k = 0$ para $j \neq k$, então

$$(\mathbf{1} + \beta_j P_j)(\mathbf{1} + \beta_k P_k) = \mathbf{1} + \beta_j P_j + \beta_k P_k \text{ para } j \neq k, \tag{5.4}$$

e também usaremos que

$$\left|e^{ix} - 1\right| \leq |x| \text{ para } x \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Tem-se que

$$\begin{aligned}
||X_{n+k} - X_n|| &= \left|\left|X_n e^{i\sum_{j=n+1}^{n+k}\omega_j P_{\varphi_j}} - X_n\right|\right| \\
&= \left|\left|X_n \left[e^{i\omega_{n+1}P_{\varphi_{n+1}}} \cdot e^{i\omega_{n+2}P_{\varphi_{n+2}}} \cdots e^{i\omega_{n+k}P_{\varphi_{n+k}}} - \mathbf{1}\right]\right|\right| \\
&\overset{5.3}{=} \left|\left|X_n \left[\left(\mathbf{1} + \left(e^{i\omega_{n+1}} - 1\right)P_{\varphi_{n+1}}\right) \cdots \left(\mathbf{1} + \left(e^{i\omega_{n+k}} - 1\right)P_{\varphi_{n+k}}\right) - \mathbf{1}\right]\right|\right| \text{ se } \beta_j = e^{i\omega_j} - 1 \\
&= \left|\left|X_n \left[\left(\mathbf{1} + \beta_{n+1}P_{\varphi_{n+1}}\right) \cdot \left(\mathbf{1} + \beta_{n+2}P_{\varphi_{n+2}}\right) \cdots \left(\mathbf{1} + \beta_{n+k}P_{\varphi_{n+k}}\right) - \mathbf{1}\right]\right|\right| \\
&= ||X_n|| \cdot \left|\left|\left(\mathbf{1} + \beta_{n+1}P_{\varphi_{n+1}}\right) \cdot \left(\mathbf{1} + \beta_{n+2}P_{\varphi_{n+2}}\right) \cdots \left(\mathbf{1} + \beta_{n+k}P_{\varphi_{n+k}}\right) - \mathbf{1}\right|\right| \\
&= \left|\left|\left(\mathbf{1} + \beta_{n+1}P_{\varphi_{n+1}}\right) \cdot \left(\mathbf{1} + \beta_{n+2}P_{\varphi_{n+2}}\right) \cdots \left(\mathbf{1} + \beta_{n+k}P_{\varphi_{n+k}}\right) - \mathbf{1}\right|\right| \\
&\overset{5.4}{=} \left|\left|\left(\mathbf{1} + \beta_{n+1}P_{\varphi_{n+1}}\beta_{n+2}P_{\varphi_{n+2}}\right) \cdots \left(\mathbf{1} + \beta_{n+k-1}P_{\varphi_{n+k-1}}\beta_{n+k}P_{\varphi_{n+k}}\right) - \mathbf{1}\right|\right| \\
&\overset{5.4}{=} \left|\left|\mathbf{1} + \beta_{n+1}P_{\varphi_{n+1}} + \beta_{n+2}P_{\varphi_{n+2}} \ldots \beta_{n+k}P_{\varphi_{n+k}} - \mathbf{1}\right|\right| \\
&= \left|\left|\beta_{n+1}P_{\varphi_{n+1}} + \beta_{n+2}P_{\varphi_{n+2}} \ldots \beta_{n+k}P_{\varphi_{n+k}}\right|\right| \\
&\leq ||\beta_{n+1}|| \cdot \left|\left|P_{\varphi_{n+1}}\right|\right| + ||\beta_{n+2}|| \cdot \left|\left|P_{\varphi_{n+2}}\right|\right| + \ldots + ||\beta_{n+k}|| \cdot \left|\left|P_{\varphi_{n+k}}\right|\right| \\
&= ||\beta_{n+1}|| + ||\beta_{n+2}|| + \ldots + ||\beta_{n+k}|| \\
&= \left|e^{i\omega_{n+1}} - 1\right| + \left|e^{i\omega_{n+2}} - 1\right| + \ldots + \left|e^{i\omega_{n+k}} - 1\right| \\
&\overset{5.5}{\leq} |\omega_{n+1}| + |\omega_{n+2}| + \ldots + |\omega_{n+k}| \\
&= \sum_{j=n+1}^{n+k} \left|\omega_j\right| \to 0,
\end{aligned}$$

para $n \to \infty$, por ser classe traço, ou seja, $\left\{\omega_j\right\}_{j\in\mathbb{N}} \in l^1$. □

Corolário 5.2. *$\{UX_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $B(\mathscr{H})$.*

Demonstração. Pelo lema anterior e dado que U é unitário, tem-se

$$\begin{aligned}||UX_{n+k}-UX_n|| &= ||U\,(X_{n+k}-X_n)||\\ &\leq ||U||\cdot||X_{n+k}-X_n||\\ &= ||X_{n+k}-X_n|| \to 0.\end{aligned}$$

□

Lema 5.3. *$\|UX_n-UX\|\to 0$, quando $n\to\infty$.*

Demonstração. Análogo ao Lema 5.1 e ao Corolário 5.2, tem-se

$$\begin{aligned}||X_n-X|| &= \left|\left|X_n-e^{iA}\right|\right|\\ &= \left|\left|e^{i\sum_{j=1}^n \omega_j P_{\varphi_j}} - e^{i\sum_{j=1}^n \omega_j P_{\varphi_j}}\cdot e^{i\sum_{j>n}\omega_j P_{\varphi_j}}\right|\right|\\ &= \left|\left|e^{i\sum_{i=1}^n \omega_j P_{\varphi_j}}\left(\mathbf{1}-e^{i\sum_{j>n}\omega_j P_{\varphi_j}}\right)\right|\right|\\ &\leq \left|\left|\mathbf{1}-e^{i\sum_{j>n}\omega_j P_{\varphi_j}}\right|\right|\\ &\leq \sum_{j>n}\left|\omega_j\right| \to 0,\end{aligned}$$

quando $n\to\infty$, e portanto $||UX_n-UX||\to 0$. □

Para operadores unitários sabemos que para uma medida μ em $\partial\mathbb{D}$ ($\mathbb{T}$ ou S^1), com $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$

$$\begin{aligned}F_\mu(z) &= \int_0^{2\pi}\frac{d\mu(t)}{1}\cdot\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z},\quad |z|<1,\\ R_\mu(z) &= \int_0^{2\pi}\frac{d\mu(t)}{e^{it}-z},\quad |z|<1,\end{aligned}$$

são as transformadas de Cauchy e de Borel respectivamente. Aqui é importante o Teorema 4.6, em particular, $\lim_{r\uparrow 1}\Re F_\mu\left(re^{i\theta}\right)=\dfrac{d\mu_{\mathrm{ac}}(\theta)}{d\theta}$.

No caso de medidas espectrais μ de um operador unitário U,

$$\begin{aligned}R_\mu(z) &= \left\langle\varphi,(U-z\mathbf{1})^{-1}\varphi\right\rangle = \langle\varphi,R_z(U)\varphi\rangle,\\ F_\mu(z) &= \left\langle\varphi,(U+z\mathbf{1})(U-z\mathbf{1})^{-1}\varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

Lema 5.4.

$$F_z(U)=\mathbf{1}+2zR_z(U).$$

Demonstração. Temos que $F_z(U)=(U+z\mathbf{1})(U-z\mathbf{1})^{-1}=(U-z+2z)(U-z)^{-1}=\mathbf{1}+2z(U-z)^{-1}=\mathbf{1}+2zR_z(U)$. □

Observação 5.5.

$$\begin{aligned}F_\mu(z) =& \left\langle \varphi, (U+z\mathbf{1})(U-z\mathbf{1})^{-1}\varphi \right\rangle \\ =& \langle \varphi, F_z(U)\varphi\rangle \\ =& \langle \varphi, (\mathbf{1}+2zR_z(U))\varphi\rangle \\ =& \langle \varphi, \varphi\rangle + \langle \varphi, 2zR_z(U)\varphi\rangle \\ =& 1+2z\langle \varphi, R_z(U)\varphi\rangle \\ =& 1+2zR_\mu(z).\end{aligned}$$

5.3 Caso de Posto 1

Consideremos a perturbação de posto 1 de U

$$U_\lambda = U\left(\mathbf{1}+(e^{i\lambda}-1)P_\varphi\right)$$

com $\lambda \in [0,2\pi)$. Seja μ_λ a medida espectral associada com U_λ e φ. Aqui $R_\lambda = R_{\mu_\lambda}$, $R_\mu(z) = \langle \varphi, R_z(U)\varphi\rangle$. Se mostramos que

$$\frac{\left(d\mu_\varphi^{U_\lambda}\right)_{\text{ac}}(\theta)}{d\theta} = \frac{\left(d\mu_\varphi^{U}\right)_{\text{ac}}(\theta)}{d\theta},$$

ou seja, que as medidas $\left(\mu_\varphi^{U_\lambda}\right)_{\text{ac}}$ e $\left(\mu_\varphi^{U}\right)_{\text{ac}}$ são equivalentes para um vetor cíclico φ, então os operadores $(U_\lambda)_{\text{ac}}$ e $(U)_{\text{ac}}$ são unitariamente equivalentes.

Lema 5.6. $R_z(U)(U\varphi) = (\mathbf{1}+zR_z(U))\varphi$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}R_z(U)(U\varphi)-zR_z(U))(\varphi) =& R_z(U)\left[U(\varphi)-z\varphi\right] \\ =& R_z(U)\left[U-z\mathbf{1}\right](\varphi) \\ =& (U-z\mathbf{1})^{-1}(U-z\mathbf{1})\varphi \\ =& \varphi.\end{aligned}$$

□

Observação 5.7. Pelo lema acima, tem-se

$$\begin{aligned}\langle \varphi, R_z(U)(U\varphi)\rangle =& \langle \varphi, (\mathbf{1}+zR_z(U))\varphi\rangle \\ =& \langle \varphi, \mathbf{1}\varphi\rangle + z\langle \varphi, R_z(U)\varphi\rangle \\ =& \langle \varphi, \varphi\rangle + z\langle \varphi, R_z(U)\varphi\rangle \\ =& 1+zR_\mu(z).\end{aligned}$$

Lema 5.8. *Para* $|z| \neq 1$
$$R_\lambda(z) = \frac{R_0(z)}{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda}-1)R_0(z)} \tag{5.6}$$
e
$$F_\lambda(z) = \frac{(e^{i\lambda}-1)+(e^{i\lambda}+1)F_0(z)}{(e^{i\lambda}+1)+(e^{i\lambda}-1)F_0(z)}. \tag{5.7}$$

Demonstração. Pela segunda identidade do resolvente, tem-se que

$$\begin{aligned} R_z(U) - R_z(U_\lambda) =& R_z(U)(U_\lambda - U)R_z(U_\lambda) \\ =& R_z(U)((e^{i\lambda}-1)UP_\varphi)R_z(U_\lambda), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \langle \varphi, R_z(U)\varphi\rangle - \langle \varphi, R_z(U_\lambda)\varphi\rangle =& \left\langle \varphi, R_z(U)((e^{i\lambda}-1)UP_\varphi)R_z(U_\lambda)\varphi \right\rangle \\ =& (e^{i\lambda}-1)\langle \varphi, R_z(U)U\left(\langle \varphi, R_Z(U_\lambda)\varphi\rangle \varphi\right)\rangle \\ =& (e^{i\lambda}-1)\langle \varphi, R_z(U_\lambda)\varphi\rangle \langle \varphi, R_z(U)U\varphi\rangle \\ =& (e^{i\lambda}-1)\langle \varphi, R_z(U_\lambda)\varphi\rangle \left[1 + z\langle \varphi, R_z(U)\varphi\rangle\right], \end{aligned}$$

ou seja, $R_0(z) - R_\lambda(z) = (e^{i\lambda}-1)R_\lambda(z)\left[1 + zR_0(z)\right]$, portanto,

$$R_\lambda(z) = \frac{R_0(z)}{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda}-1)R_0(z)}.$$

Pela Observação 5.5, tem-se

$$\begin{aligned} F_\lambda(z) =& 2zR_\lambda(z) + 1 \\ =& 2z\frac{R_0(z)}{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda}-1)R_0(z)} + 1 \\ =& \frac{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda}-1)R_0(z) + 2zR_0(z)}{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda}-1)R_0(z)} \\ =& \frac{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda}+1)R_0(z)}{e^{i\lambda} + z(e^{i\lambda}-1)R_0(z)} \\ =& \frac{2e^{i\lambda} + 2ze^{i\lambda}R_0(z) + 2zR_0(z)}{2e^{i\lambda} + 2ze^{i\lambda}R_0(z) - 2zR_0(z)} \\ =& \frac{e^{i\lambda} - 1 + e^{i\lambda} + 2e^{i\lambda}zR_0(z) + 1 + 2zR_0(z)}{e^{i\lambda} + 1 + e^{i\lambda} + 2e^{i\lambda}zR_0(z) - 1 - 2zR_0(z)} \\ =& \frac{(e^{i\lambda}-1) + (e^{i\lambda}+1)(1+2zR_0(z))}{(e^{i\lambda}+1) + (e^{i\lambda}-1)(1+2zR_0(z))} \\ =& \frac{(e^{i\lambda}-1)+(e^{i\lambda}+1)F_0(z)}{(e^{i\lambda}+1)+(e^{i\lambda}-1)F_0(z)}. \end{aligned}$$

□

Observação 5.9. A partir desse último lema, podemos encontrar as seguinte fórmulas, para $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 2\pi)$,

$$F_{\lambda_2}(z) = \frac{e^{i\lambda_2} - e^{i\lambda_1} + \left(e^{i\lambda_1} + e^{i\lambda_2}\right) F_{\lambda_1}(z)}{e^{i\lambda_2} + e^{i\lambda_1} + \left(e^{i\lambda_2} - e^{i\lambda_1}\right) F_{\lambda_1}(z)}$$

e

$$\Re F_{\lambda_2}(z) = \frac{(1+y^2)\Re F_{\lambda_1}(z)}{\left|1 + iyF_{\lambda_1}(z)\right|^2},$$

com $iy = \dfrac{e^{i\lambda_2} - e^{i\lambda_1}}{e^{i\lambda_2} + e^{i\lambda_1}}$.

Observação 5.10. Pelo Teorema 4.6, sabemos que a parte singular da medida μ_s está suportada em

$$S = \left\{ \lambda \mid \lim_{r\to 1} F(re^{i\lambda}) = \infty \right\}.$$

Então, sejam os conjuntos

$$S_1 = \left\{ \lambda \mid \lim_{r\to 1} F_{\lambda_1}(re^{i\lambda}) = \infty \right\} \quad \text{e} \quad S_2 = \left\{ \lambda \mid \lim_{r\to 1} F_{\lambda_2}(re^{i\lambda}) = \infty \right\},$$

que são mutuamente disjuntos. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e usando a Observação 5.9, segue que se $\lambda \in S_1$, então $\lim_{r\to 1} F_{\lambda_2}(re^{i\lambda}) = \dfrac{e^{i\lambda_2} + e^{i\lambda_1}}{e^{i\lambda_2} - e^{i\lambda_1}} \neq \infty$, portanto $\lambda \notin S_2$, ou seja, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, então as medidas $\mu_s^{\lambda_1}$ e $\mu_s^{\lambda_2}$ são mutuamente singulares. Veja que este resultado é o mesmo dado no Corolário 1.61.

Teorema 5.11. *Para todos $\lambda_1 \neq \lambda_2$, as partes absolutamente contínuas de U_{λ_1} e U_{λ_2} são unitariamente equivalentes.*

Demonstração. Dado que $U_{\lambda_1} = U_{\lambda_2} + (\lambda_1 - \lambda_2)P_\varphi$. Sejam os conjuntos

$$L_1 = \left\{ t \mid \lim_{r\to 1} F_{\lambda_1}(re^{it}) = \infty \quad \text{ou} \quad \nexists \lim_{r\to 1} F_{\lambda_1}(re^{it}) \right\}$$
$$L_2 = \left\{ t \mid \lim_{r\to 1} F_{\lambda_1}(re^{it}) = \frac{e^{i\lambda_2} + e^{i\lambda_1}}{e^{i\lambda_1} - e^{i\lambda_2}} \right\},$$

e dado o teorema 4.6, temos que as medidas desses conjuntos é nula. Se $G = L_1 \cup L_2$, então a medida de G é também nula. Pela Observação 5.9, tem se

$$\left\{ t \in \mathbb{T}\backslash G \mid \lim_{r\to 1} F_{\lambda_1}(re^{it}) = 0 \right\} = \left\{ t \in \mathbb{T}\backslash G \mid \lim_{r\to 1} F_{\lambda_2}(re^{it}) = 0 \right\},$$

portanto,

$$\lim_{r\uparrow 1} \Re F_{\lambda_1}(re^{it}) \neq 0 \iff \lim_{r\uparrow 1} \Re F_{\lambda_2}(re^{it}) \neq 0,$$

então $\mu_{ac}^{\lambda_1} \sim \mu_{ac}^{\lambda_2}$, e portanto as partes absolutamente contínuas de U_{λ_1} e U_{λ_2} são unitariamente equivalentes. □

Observação 5.12. Desse último Teorema, temos particularmente que as partes absolutamente contínuas de U e U_λ são unitariamente equivalentes. No que segue, vamos generalizar essa demonstração sobre perturbações de posto um, conhecida na literatura, para perturbações de posto finito.

5.4 Caso de Posto Finito

Voltando ao caso da perturbação $U \mapsto UX$, com $U_0X = U_0(\mathbf{1}+W) = U_0 + U_0W$ e pela segunda identidade do resolvente,

$$R_z(U_0) - R_z(U) = R_z(U_0)(U-U_0)R_z(U) = R_z(U_0)(U_0W)R_z(U),$$

com $W = \sum_{j=1}^{n} u_j P_{\varphi_j}$, $u_j = (e^{i\omega_j} - 1)$, segue que

$$R_z(U_0) - R_z(U) = WR_z(U) + zR_z(U_0)WR_z(U). \tag{5.8}$$

Agora, e usando as notações $R_{U_0} = R_0$, $R_0^{k,m}(z) = \langle \varphi_k, R_z(U_0)\varphi_m \rangle$ e $R_U^{k,m}(z) = \langle \varphi_k, R_z(U)\varphi_m \rangle$ para qualquer $k,m \in \{1,2,\dots,n\}$, e olhando como elementos de matrizes tem-se

$$R_0^{k,m}(z) - R_U^{k,m}(z) = u_k R_U^{k,m}(z) + z\sum_{j=1}^{n} R_0^{k,j}(z) u_j R_U^{j,k}(z),$$

ou seja,

$$R_0(z) - R_U(z) = MR_U(z) + zR_0(z)MR_U(z),$$

e com

$$M = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_n \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} e^{i\omega_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\omega_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\omega_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{i\omega_n} \end{bmatrix} = M + I,$$

sendo I a matriz de identidade $n \times n$, então

$$R_U(z) = (M + I + zR_0(z)M)^{-1} R_0(z),$$

$$R_U(z) = (\Omega + zR_0(z)(\Omega - I))^{-1} R_0(z). \tag{5.9}$$

Agora como $F_U(z) = I + 2zR_U(z)$, tem-se que

$$F_U(z) = (2I + M + F_0(z)M)^{-1}(M + F_0(z)(M+2I)),$$

$$F_U(z) = [(\Omega + I) + F_0(z)(\Omega - I)]^{-1}((\Omega - I) + F_0(z)(\Omega + I)). \tag{5.10}$$

Se separarmos a matriz Ω da seguinte maneira:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1) + i\mathrm{sen}(\omega_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(\omega_2) + i\mathrm{sen}(\omega_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos(\omega_n) + i\mathrm{sen}(\omega_n) \end{bmatrix} := C + iS,$$

então $\Omega+\Omega^*=2C$ e $MM^*=2(I-C)$, portanto

$$\begin{aligned}2\Re F_U(z) &= F_U(z)+F_U^*(z)\\ &= 2((\Omega+I)+F_0(z)(\Omega-I))^{-1}\Re F_0(z)((\Omega^*+I)+(\Omega^*-I)F_0^*(z))^{-1},\end{aligned}$$

$$\Re F_U(z)=((\Omega+I)+F_0(z)(\Omega-I))^{-1}\Re F_0(z)((\Omega^*+I)+(\Omega^*-I)F_0^*(z))^{-1}, \tag{5.11}$$

ou seja,

$$\Re F_0(z)=((\Omega+I)+F_0(z)(\Omega-I))\Re F_U(z)((\Omega^*+I)+(\Omega^*-I)F_0^*(z)), \tag{5.12}$$

para $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$.

Observação 5.13. Pela segunda identidade do resolvente

$$R_z(U_0)=R_z(U)+R_z(U_0)(U_0W)R_z(U) \quad\Rightarrow\quad R_z(U_0)=(I+R_z(U_0)(U_0W))R_Z(U),$$

e seja

$$A=I+R_z(U_0)(U_0W)=R_z(U_0)(U-z)=I+W+zR_z(U_0)W,$$

e como $R_z(U_0)=\dfrac{1}{2z}(F_z(U_0)-I)$, então $A=I+\dfrac{W}{2}+\dfrac{1}{2}F_z(U_0)W$ e dado que A é limitado e tem inversa limitada e $A=R_z(U_0)(U-z)$, tem-se $A^{-1}=R_z(U)(U_0-z)$. Então se $2A=T=2I+W+F_z(U_0)W$ e como A é invertível, T é invertível já que

$$T^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}=\frac{1}{2}R_z(U)(U_0-z)=\frac{1}{4z}(F_z(U)-I)(U_0-z).$$

Portanto, $(2I+M+F_0(z)M)^{-1}$ é invertível.

Sejam

$$\begin{aligned}I_{m,k}(U_0) &:= \left\{\theta\in[0,2\pi)\mid \left|\lim_{r\uparrow 1}F_0^{m,k}(re^{i\theta})\right|=\infty \text{ ou } \nexists \lim_{r\uparrow 1}F_0^{m,k}(re^{i\theta})\right\}\\ N_m(U_0) &:= \left\{\theta\in[0,2\pi)\mid \lim_{r\uparrow 1}F_0^{m,n}(re^{i\theta})(\omega_m-1)=-\Omega-I\right\}\end{aligned}$$

com $\lim_{r\uparrow 1}\omega_m F_0^{m,n}(re^{i\theta})$ algum elemento de $\lim_{r\uparrow 1}\Omega F_0^{m,n}(re^{i\theta})$, temos que $\ell\left(I_{m,k}(U_0)\right)=0$, para todo m,k e $\ell\left(N_m(U_0)\right)=0$, para todo m. Seja

$$G:=\bigcup_{m,k=1}^{n}\Big(N_m(U_0)\cup N_m(U)\cup I_{m,k}(U_0)\cup I_{m,k}(U)\Big),$$

então $\ell(G)=0$. Das equações (5.11) e (5.12), tem-se

$$\left\{\theta\in[0,2\pi)\backslash G\mid \lim_{r\uparrow 1}\Re F_U(re^{i\theta})=0\right\}\subset\left\{\theta\in[0,2\pi)\backslash G\mid \lim_{r\uparrow 1}\Re F_0(re^{i\theta})=0\right\}$$

e

$$\left\{\theta\in[0,2\pi)\backslash G\mid \lim_{r\uparrow 1}\Re F_0(re^{i\theta})=0\right\}\subset\left\{\theta\in[0,2\pi)\backslash G\mid \lim_{r\uparrow 1}\Re F_U(re^{i\theta})=0\right\},$$

portanto,

$$\lim_{r\uparrow 1}\Re F_0(re^{i\theta})\neq 0 \iff \lim_{r\uparrow 1}\Re F_U(re^{i\theta})\neq 0,$$

então $\mu_{\mathrm{ac}}^{U}\sim\mu_{\mathrm{ac}}^{U_0}$.

Observação 5.14. Da mesma forma, podemos encontrar este resultado para uma perturbação $U \mapsto XU$.

Observação 5.15. Infelizmente (ainda) não foi possível estender esse resultado para operadores na classe traço ($n = \infty$), devido a dificuldades em controlar a medida do correspondente ao conjunto G acima.

Referências Bibliográficas

[1] V. R. Bazao, C. R. de Oliveira, P. A. Diaz, **On the Birman-Krein Theorem**, Comptes Rendus Mathématique, aceito para publicação

[2] M. Sh. Birman, M. G. Krein, **On the theory of wave operators and scattering operators**, Dokl. Akad. Nauk SSSR 144, (1962) 475–478. (English translation: Soviet Math. 3, (1962) 740–744)

[3] J. Bourgain, **Estimates on Green's functions localization and the quantum kicked rotor model**, Annals Math. 156, (2002) 249–294

[4] G. Casati, L. Molinari, **"Quantum Chaos" with time-periodic Hamiltonians**, Prog. Theor. Phys. Supplement 98, (1989) 287–322

[5] J. A. Cima, A. L. Matheson, and W. T. Ross, **The Cauchy transform**, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 125, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006

[6] M. Combescure, **Spectral Properties of a Periodically Kicked Quantum Hamiltonian**, Journal of Statistical Physics, Vol. 59, (1990) 679–690

[7] S. De Bièvre and G. Forni, **Transport properties of kicked and quasiperiodic hamiltonians**, J. Stat. Phys. 90, 1201-1223 (1998)

[8] C.R. de Oliveira, **Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics**, Birkhäuser Basel, 2008

[9] R. del Rio, N. Makarov, and B. Simon, **Operators with singular continuous spectrum, II. Rank one operators**, Comm. Math. Phys, 1994

[10] J. S. Howland, **On the Kato-Rosenblum Theorem**, Pacific J. Math. 123, (1986) 329–335

[11] T. Kato, **Perturbation Theory for Linear Operators**, Springer-Verlag, New York, 1966

[12] M. Reed and B. Simon, **Methods of Modern Mathematical Physics, volumen III**, Academic Press, New York, 1979

[13] B. Simon, **Analogs of the M-Function in the Theory of Orthogonal Polynomials on the Unit Circle**, J. Comput. Appl. Math. 171 (2004), 411–424

[14] B. Simon. **Operators with singular continuous spectrum, I. General operators**, Annals of Mathematics, 141 (1995), 131–145

[15] B. Simon, **Spectral analysis of rank one perturbations and applications**, Mathematical Quantum Theory I: Field Theory and Many-Body Theory (1994)