



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



Aplicações das Séries de Fourier

Autor: *Luiz Guilherme Fracaroli Borin*

Orientador: *Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues*

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso B

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Prof^ª. Dr^ª. Adriana Ramos Pereira
Prof^ª. Dr^ª. Luciene Nogueira Bertencello
Prof. Dr. Luis Antonio Carvalho dos Santos

São Carlos, 10 de abril de 2023

Aplicações das Séries de Fourier

Autor: *Luiz Guilherme Fracaroli Borin*

Orientador: *Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues*

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso B

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Prof^ª. Dra. Adriana Ramos Pereira
Prof^ª. Dr^ª. Luciene Nogueira Bertongello
Prof. Dr Luis Antonio Carvalho dos Santos.

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 10 de abril de 2023

Luiz Guilherme Fracaroli Borin

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
Orientador

Guilherme Fracaroli Borin, Luiz

Aplicações das Séries de Fourier / Luiz Guilherme Fracaroli Borin -- 2023.
76f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Rodrigo da Silva Rodrigues
Banca Examinadora: Olímpio Hiroshi Miyagaki, Marcelo
José Dias Nascimento
Bibliografia

1. Séries de Fourier. 2. Problemas de calor na barra. 3.
Problema isoperimétrico. I. Guilherme Fracaroli Borin,
Luiz. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
 Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
 Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 15/2023/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso
Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

LUIZ GUILHERME FRACAROLI BORIN

APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE FOURIER

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 31 de março de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Rodrigo da Silva Rodrigues
Membro da Banca 1	Olímpio Hiroshi Miyagaki
Membro da Banca 2	Marcelo José Dias Nascimento



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo da Silva Rodrigues, Professor(a) do Ensino Superior**, em 08/06/2023, às 23:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Olimpio Hiroshi Miyagaki, Professor(a) do Ensino Superior**, em 12/06/2023, às 15:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Jose Dias Nascimento, Professor(a) do Ensino Superior**, em 13/06/2023, às 14:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1025348** e o código CRC **8E54C029**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº
23112.013515/2023-11

SEI nº 1025348

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Resumo

O foco deste projeto é a introdução ao estudo das séries de Fourier. A série de Fourier que surgiu a partir dos estudos de Jean Baptiste Joseph Fourier sobre a equação do calor é uma importante ferramenta na resolução de certos tipos de equações diferenciais parciais, tais como a equação do calor, equação da onda, etc. Neste trabalho iniciaremos o estudo sobre os conceitos básicos da série de Fourier para posteriormente, utilizar essa ferramenta no estudo de algumas equações diferenciais, tais como a equação do calor, e por fim, apresentar e demonstrar o Problema Isoperimétrico. Iniciaremos relatando um pouco da história de Jean Baptiste Joseph Fourier e seus estudos sobre o calor, para posteriormente estudar os conteúdos essenciais para introdução ao estudo das séries de Fourier. Trabalharemos a ortogonalidade de funções, em especial das funções trigonométricas seno e cosseno, e também as propriedades de periodicidade. Como motivação para o estudo das séries de Fourier vamos seguir os passos de Fourier em um de seus estudos sobre o calor e verificar que a soma finita de senos é uma solução do problema de calor. Finalmente iremos calcular e esboçar graficamente algumas séries de Fourier e as relacionar com os teoremas de convergência e também as relacionar brevemente com o fenômeno de Gibbs.

Nos capítulos finais do trabalho, será apresentado com detalhes duas aplicações das séries de Fourier, a primeira envolvendo problemas de condução do calor em uma barra delgada, com diferentes condições de fronteira, e iremos solucionar esses problemas utilizando séries de Fourier. Por fim, será trabalhado o Problema Isoperimétrico, que é essencialmente um problema geométrico, e vamos olhar para esse problema de um ponto de vista analítico para utilizar às séries em sua resolução.

Palavras chave: Jean Baptiste Joseph Fourier, Séries de Fourier, Equação do calor, Equações diferenciais, Problema Isoperimétrico.

Abstract

The focus of this project is the introduction to the study of Fourier series. The Fourier series that emerged from the studies of Jean Baptiste Joseph Fourier on the heat equation is an important tool in solving certain types of partial differential equations, such as the heat equation, wave equation, etc. In this work we intend to begin the study of the basic concepts of the Fourier series and, later, to use this tool in the study of some differential equations, such as the heat equation, and finally, to present and demonstrate the Isoperimetric Problem. We will begin by reporting a little of the history of Jean Baptiste Joseph Fourier and his studies on heat, to later study the essential contents for an introduction to the study of Fourier series. The orthogonality of functions will be worked on, in particular the trigonometric functions sine and cosine, and also the properties of periodicity. As motivation for the study of Fourier series, we will follow Fourier's steps in one of his studies on heat and verify that the finite sum of sines is a solution to the heat problem. Finally we will calculate and graphically sketch some Fourier series and relate them to the convergence theorems and also briefly relate them to the Gibbs phenomenon.

In the final chapters of the work, we will present in detail two applications of Fourier series, the first involving heat conduction problems in a thin bar, with different boundary conditions, and we will solve these problems using Fourier series. Finally, we will present the Isoperimetric Problem, which is essentially a geometric problem, and we will look at this problem from an analytical point of view to use the series in its resolution.

Keywords: Jean Baptiste Joseph Fourier, Fourier series, Heat equation, Differential equations, Isoperimetric Problem.

Sumário

1	Jean Baptiste Joseph Fourier	3
2	Conceitos fundamentais	6
2.1	Produto interno	6
2.2	Funções ortogonais	8
2.3	Funções periódicas	13
3	Série de Fourier	17
3.1	Motivação para o estudo das séries de Fourier	17
3.2	Expressão da série de Fourier	23
3.2.1	Coeficientes de Fourier	24
3.3	Série de Fourier de funções pares e ímpares	29
3.4	Convergência da Série de Fourier	35
3.4.1	Integração da série de Fourier	40
3.4.2	Derivação termo a termo de uma série	42
3.4.3	Identidade Parseval	42
4	Aplicações da série de Fourier no problema de calor	43
4.1	Temperatura de fronteira igual a 0°C	43
4.2	Estudando novas condições de fronteira	49
5	Problema Isoperimétrico	55
5.1	Curvas paramétricas no plano	55
5.2	A Desigualdade Isoperimétrica	58
6	Apêndice	64
6.1	Resultados de integral	64
6.2	Resultados de Sequência	65
6.3	Relações trigonométricas	65
	Referências Bibliográficas	67

Introdução

Jean Baptiste Joseph Fourier foi um dos precursores dos estudos envolvendo calor, publicando obras muito importantes como *Théorie Analytique de la Chaleur*, obra essa que tem grande importância histórica dentro das áreas de física e matemática. Durante um de seus trabalhos, Fourier afirma que toda função definida em um intervalo de $[-\pi, \pi]$ pode ser representada por uma soma infinita de senos e cossenos, afirmação essa que não foi aceita pelos grandes matemáticos da época, porém, apesar de não ser uma verdade absoluta, uma grande parte das funções possuem essa representação, que é chamada série de Fourier.

Faremos inicialmente durante o texto uma breve abordagem histórica sobre a vida de Fourier para logo em seguida introduzirmos os conceitos fundamentais que nos permitem dar início ao estudo das séries de Fourier. No primeiro capítulo será trabalhado o estudo da ortogonalidade de funções, que será feita a partir das definições de produto interno entre funções reais contínuas definidas em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, e posteriormente discutiremos acerca da periodicidade de funções e algumas de suas propriedades. Esses conteúdos serão essenciais para a compreensão da série, pois a série de Fourier é uma função periódica e o estudo da ortogonalidade entre funções irá nos permitir durante o texto calcular de forma mais rápida algumas séries.

No segundo capítulo motivaremos o leitor para o estudo das séries, que será feita seguindo os passos de Fourier durante seus estudos envolvendo a condução de calor em barras delgadas. Iremos introduzir um breve problema de calor em uma barra delgada para concluir que a soma finita de senos é uma solução do problema, explicitando para o leitor de onde surgem as formas trigonométricas que aparecem na série de Fourier. Dando continuidade nesse capítulo, expressaremos algumas séries de Fourier, explicitando a maneira de calcular os coeficientes que aparecem na expressão da série, para posteriormente estudar propriedades de séries de Fourier que são pares e ímpares, resultando em séries de senos e séries de cossenos. Para finalizar o capítulo, iremos apresentar teoremas de convergência (sem demonstrá-los) com a finalidade de entendê-los a partir dos exemplos trabalhados, dando destaque para algumas funções especiais, como funções descontínuas que possuem representação por série de Fourier, pois nos pontos de descontinuidade dessas funções acontece um fenômeno chamado fenômeno de Gibbs, que será brevemente apresentado.

Nos capítulos finais do trabalho vamos mostrar aplicações matemática dos estudos da série de Fourier. No quarto capítulo será apresentado os problemas de condução de calor em barra delgada com diferentes condições de fronteira, e para resolvermos tais problemas, iremos utilizar a série de Fourier como ferramenta. Após isso, será discutido o problema Isoperimétrico, que é um problema essencialmente geométrico, porém, iremos interpretá-lo numa perspectiva analítica para que seja possível utilizar as séries na demonstração do problema, que será apresentado como teorema.

No apêndice apresentaremos alguns resultados adicionais e também alguns resultados que foram utilizados durante o trabalho e após isso teremos as conclusões finais.

Capítulo 1

Jean Baptiste Joseph Fourier

Nosso estudo foi baseado no trabalho de Howard Eves em seu livro *Introdução à história da matemática*, (EVES, 1992) e também nos estudos de Anderson Pifer e Katya Margareth Aurani na obra (PIFER; AURANI, 2015).

Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre em 1768 e faleceu em Paris em 1830. Fourier era filho de um alfaiate e ficou orfão ainda quando criança aos oito anos de idade. Após esse fato, uma senhora recomendou Joseph ao Bispo de Auxerre, sendo ele educado dentro de uma escola militar dirigida por monges beneditos, escola essa no qual ele ocupou uma cadeira de matemático, conhecimento esse que o mudou completamente. Aos 13 anos Fourier era uma criança desobediente e a matemática o modelou, como uma espécie de cura, fazendo com que ele ficasse obcecado com aquilo, dando então início a sua brilhante jornada dentro da matemática.

Sua motivação dentro da escola militar era seguir carreira no ramo da artilharia ou engenharia, porém os monges beneditos fizeram com que Fourier seguisse firme dentro da religião, fazendo que ele ingressasse na abadia beneditina de St. Benoit-sur-Loire. Apesar disso, o jovem seguia firme em sua convicção na matemática, abandonando a abadia em 1789 e visitou Paris, onde apresentou um artigo à Academia Real de Ciências francesa sobre as suas pesquisas para a solução de equações numéricas.

Em 1790 tornou-se professor de matemática na escola militar de Auxerre (onde já havia estudado) e em 1793 se envolveu na política entrando no Comité Revolucionário de Auxerre. Logo após sua ajuda na promoção da Revolução Francesa, ele foi recompensado com uma cadeira de professor (cátedra) na Escola Politécnica.

Depois de acompanhar Napoleão em sua expedição ao Egito, como consultor científico, em 1798 e após as vitórias britânicas e a capitulação da França em 1801, Fourier retornou a França como prefeito de Grenoble, lugar esse onde se dá início seu trabalho com o calor.



Figura 1.1: Autorretrato de Jean Baptiste Joseph Fourier.
Fonte: Wikipédia.

Em 1807 Fourier apresenta um artigo a Academia de Ciências da França tratando do problema da propagação de calor em barras, chapas e sólidos metálicos, denominado *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, e nesse artigo ele faz uma forte afirmação de que uma função qualquer definida no intervalo $(-\pi, \pi)$ pode ser representada nesse intervalo por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

sendo a_n e b_n coeficientes reais escolhidos de forma adequada.

Nesse período a construção de máquinas térmicas e o aperfeiçoamento dos termômetros chamaram a atenção para os fenômenos relacionados ao calor, que era baseado em duas principais teorias sobre a natureza do calor, a mecânica, que concebe o calor como movimento de partículas de matéria, e a calórico, que tinha como base a ideia que o calor era um fluido. Ainda durante esse período, Laplace aprofundou as ideias do calor, influenciado pelo ideal newtoniano, criando o projeto laplaciano, que consistiu em defender uma “nova” física universal, com base na hipótese de movimentos moleculares e forças a eles associadas, de forma semelhante como na lei da gravitação universal de Newton, no qual as partículas exercem forças sobre as outras (nesse caso, força gravitacional).

Fourier com esse trabalho ignorou as ideias laplacianas e propôs um estudo do problema do calor baseado no cálculo diferencial. Essa série é uma série trigonométrica, já bem conhecida pelos matemáticos da época e inclusive já era provado que em funções suaves ela poderia ser representada por essa expressão, mas Fourier fez uma afirmação forte, pois ele disse que toda função definida no intervalo $(-\pi, \pi)$ poderia ser representada por meio dessas séries, não somente as funções “bem comportadas”, o que não convenceu os

matemáticos da academia.

Desse modo, o artigo submetido por Fourier, julgado por grandes matemáticos da época como Lagrange, Laplace e Legendre, foi rejeitado. Para que Fourier não se desmotivasse e parasse com seus estudos, a Academia atribuiu um prêmio tendo como tema a propagação do calor, assunto hoje muito conhecido e importante na Física. Dando continuidade em seus estudos, foi submetido um artigo em 1811 na academia com os estudos de Fourier sobre o calor em busca desse prêmio, e de fato o prêmio foi atribuído a ele, porém esse estudo não foi publicado de momento nas memórias da academia devido as várias críticas recebidas pela falta de rigor.

Mesmo que ressentido, Fourier deu continuidade aos estudos do calor e em 1822 publicou um dos clássicos da matemática *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoria Analítica do Calor), nesse trabalho, Fourier deduziu a equação da condução do calor por meio de equações diferenciais parciais e desenvolveu a solução através de séries trigonométricas, sendo a maior obra feita pelo matemático. Mesmo ignorando qualquer hipótese sobre a natureza do calor, Fourier descreveu um modelo físico para explicar o mecanismo de propagação do calor. Dois anos após a publicação dessa obra, tornou-se secretário da Academia, e nesse posto pode fazer com que seu artigo de 1811 fosse publicado de forma original nas memórias da academia.

Embora já tivesse sido provado que a afirmação de Fourier de que toda função pode ser expressa por uma série de Trigonométrica é falsa, sabemos que a classe de funções que possuem essa representação é extensa, tendo essas funções uma alta utilidade em campos de estudos da Física. O trajeto de Fourier com relação ao estudo dos problemas envolvendo calor tiveram momentos conturbados, mas sua insistência na resolução do problema envolvendo calor e sua perseverança nos mostram como de fato funciona um método científico. As séries de Fourier hoje fazem parte do estudo do cálculo diferencial, sendo estudadas dentro das áreas da física e matemática.

Capítulo 2

Conceitos fundamentais

Para que possamos de fato estudar as Séries de Fourier, iremos inicialmente estudar detalhadamente os conceitos essenciais para o entendimento de forma íntegra do assunto. Tais conceitos serão introduzidas de forma teórica, analisados e posteriormente serão reforçados com exemplos para o entendimento do leitor.

2.1 Produto interno

O Produto Interno (também conhecido como produto escalar) é um conceito importante de Álgebra Linear, tendo ele várias aplicações dentro desse campo de estudo. Podemos utilizar esse conceito, por exemplo, para definir o que é uma norma em um espaço vetorial, para logo em seguida definirmos o conceito de distância nesse espaço, dentre várias outras aplicações.

Nesse texto, a importância do estudo do Produto Interno se deve ao fato de que iremos estudar a ortogonalidade de funções contínuas definidas no intervalo $I = [a, b]$ com valores na reta real, sendo impossível esse estudo sem o conhecimento desse conceito. Um dos livros que estamos utilizando é o livro (ZANI, 2003).

Definição 2.1. Seja V um espaço vetorial. Um produto interno sobre V é uma aplicação que a cada par $(u, v) \in V \times V$ associa um número real denotado por $\langle u, v \rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in V$;

ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;

iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para todo $u, v \in V$;

iv) $\langle u, u \rangle > 0$ se $u \neq 0$.

Exemplo 2.2. Se $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, defina

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Mostre que a aplicação $\langle x, y \rangle$ é de fato um produto interno.

Demonstração: Para verificar que essa aplicação é de fato um produto interno, devemos verificar as propriedades descritas na definição. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que:

i)

$$\begin{aligned}\langle x + y, z \rangle &= \langle (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle \\ &= \langle ((x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n)), (z_1, \dots, z_n) \rangle \\ &= (x_1 + y_1)z_1 + \dots + (x_n + y_n)z_n \\ &= x_1z_1 + y_1z_1 + \dots + x_nz_n + y_nz_n \\ &= (x_1z_1 + \dots + x_nz_n) + (y_1z_1 + \dots + y_nz_n) \\ &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle;\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\langle \alpha x, y \rangle &= \langle \alpha(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= \langle (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= \alpha x_1 y_1 + \dots + \alpha x_n y_n \\ &= \alpha(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) \\ &= \alpha \langle x, y \rangle;\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \\ &= y_1 x_1 + \dots + y_n x_n \\ &= \langle y, x \rangle;\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &= \langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle \\ &= x_1 x_1 + \dots + x_n x_n \\ &= x_1^2 + \dots + x_n^2.\end{aligned}$$

Se $x \neq 0$, temos que existe algum $k = 1, \dots, n$ tal que $x_k^2 > 0$. Assim, a soma $x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0$, e desse modo concluímos que $\langle x, x \rangle > 0$.

□

Exemplo 2.3. Seja $u = (1, 0, 5, -1), v = (2, 23, 0, -10)$ vetores do \mathbb{R}^4 e $\langle u, v \rangle$ como no exemplo anterior. Calcule o produto interno de u por v .

Solução: Basta notar que:

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= \langle (1, 0, 5, -1), (2, 23, 0, -10) \rangle \\ &= 1.2 + 0.23 + 5.0 + (-1).(-10) \\ &= 2 + 0 + 0 + 10 \\ &= 12.\end{aligned}$$

Exemplo 2.4. Considere o conjunto formado por todas funções reais definidas em um intervalo $I = [a, b]$, que será denotado por $\mathcal{F} = \{f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é uma função}\}$ durante o decorrer do texto. Este conjunto é um espaço vetorial, ver (ZANI, 2003), munido das operações de soma e de produto por um escalar, uma vez que se $f, g \in \mathcal{F}$, temos que $(f + g) \in \mathcal{F}$ e também se $\alpha \in \mathbb{R}$, também temos que $(\alpha f) \in \mathcal{F}$. Se passarmos a considerar o subespaço vetorial $C^0([a, b], \mathbb{R})$ que corresponde ao conjunto de todas funções reais definidas no intervalo $I = [a, b]$ que são contínuas, com valores em \mathbb{R} , e definirmos a aplicação que sai de $C^0([a, b], \mathbb{R}) \times C^0([a, b], \mathbb{R})$ e chega em \mathbb{R} por:

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

teremos que $\langle f, g \rangle$ define um produto interno no espaço das funções contínuas no intervalo I com valores em \mathbb{R} .

Lema 2.5. (RUDIN, 1976) *Toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável.*

Vale notar que de acordo com o Lema o produto interno está bem definido, pois $f(x).g(x)$ é uma função contínua, já que o produto de funções contínuas é uma função contínua. Desse modo, para quaisquer $f, g \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, é possível calcular essa integral de Riemann, portanto o produto interno está bem definido.

2.2 Funções ortogonais

Em Geometria Analítica estudamos o conceito de ortogonalidade, que tanto no \mathbb{R}^2 quanto no \mathbb{R}^3 tem a interpretação geométrica de perpendicularismo, ou seja, se dois vetores são não nulos e ortogonais, eles são perpendiculares. Nesse campo de estudo, é definido que dois vetores são ortogonais se o produto interno entre esses vetores é zero.

Baseado no que foi dito, é natural que para a ortogonalidade de funções não seja diferente, porém temos que escolher um produto interno adequado para expandirmos esse conceito para funções, e a chave para isso é o produto interno definido no Exemplo 2.4.

Definição 2.6. No espaço vetorial $C^0([a, b], \mathbb{R})$ duas funções f e g são ortogonais no intervalo $I = [a, b]$ quando

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Definição 2.7. Um conjunto de funções reais $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é ortogonal em um intervalo $I = [a, b]$ se para $m \neq n$

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0.$$

Neste momento já está definido como verificar se duas funções reais definidas em um intervalo da reta são ortogonais, então faremos um importante exemplo com a finalidade de fixação do conceito.

Exemplo 2.8. Considere $A = \left\{ 1, \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Mostre que o conjunto A é ortogonal no intervalo simétrico $[-L, L] \subset \mathbb{R}$.

Solução: Para mostrar que o conjunto A é ortogonal no intervalo descrito precisaremos utilizar a Definição 2.7. Se definirmos $\phi_0 = 1$, $\phi_m = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\psi_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, com $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, temos que mostrar que:

$$i) \langle \phi_0, \phi_m \rangle = 0, m \neq 0;$$

$$ii) \langle \phi_0, \psi_n \rangle = 0, n \neq 0;$$

$$iii) \langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0, m \neq n;$$

$$iv) \langle \psi_n, \psi_m \rangle = 0, m \neq n;$$

$$v) \langle \phi_m, \psi_n \rangle = 0, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Se fizermos isso, podemos concluir que esse conjunto é ortogonal no intervalo $[-L, L]$. Então segue:

i)

$$\begin{aligned} \langle \phi_0, \phi_m \rangle &= \int_{-L}^L \phi_0 \phi_m dx \\ &= \int_{-L}^L 1 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \left[\frac{L}{m\pi} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L \\ &= \frac{L}{m\pi} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi L}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi(-L)}{L}\right) \right] \\ &\stackrel{\text{seno}}{=} \frac{L}{m\pi} \cdot [\operatorname{sen}(m\pi) + \operatorname{sen}(m\pi)] \\ &\stackrel{\text{é ímpar}}{=} \frac{L}{m\pi} \cdot [2 \operatorname{sen}(m\pi)] \\ &= \frac{L}{m\pi} \cdot [2 \operatorname{sen}(m\pi)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que $\frac{2L}{m\pi}$ é uma constante e $\operatorname{sen}(m\pi) = 0$ quando $m \in \mathbb{Z}^*$.

ii)

$$\begin{aligned}
\langle \phi_0, \psi_n \rangle &= \int_{-L}^L \phi_0 \psi_n dx \\
&= \int_{-L}^L 1 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
&= \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
&= \left[-\frac{L}{n\pi} \cdot \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]_{-L}^L \\
&= -\frac{L}{n\pi} \cdot \left[\cos \left(\frac{n\pi L}{L} \right) - \cos \left(\frac{n\pi(-L)}{L} \right) \right] \\
&\stackrel{\text{cosseno}}{\underset{\text{é par}}{=}} -\frac{L}{n\pi} \cdot [\cos(n\pi) - \cos(n\pi)] \\
&= -\frac{L}{n\pi} \cdot 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$.

iii)

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \int_{-L}^L \phi_n \phi_m dx \\
&= \int_{-L}^L \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L} \right) dx + \int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right].
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Para facilitar o entendimento do leitor, iremos resolver as integrais separadamente.

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L} \right) dx &= \left[\frac{L}{(m+n)\pi} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x + n\pi x}{L} \right) \right]_{-L}^L \\
&= \frac{L}{(m+n)\pi} \cdot \left[\operatorname{sen} \left(\frac{m\pi L + n\pi L}{L} \right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{sen} \left(\frac{-(m\pi L + n\pi L)}{L} \right) \right] \\
&= \frac{L}{(m+n)\pi} \cdot [2 \operatorname{sen}(m\pi + n\pi)] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

quando $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $m \neq n$.

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \left[\frac{L}{(m-n)\pi} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x - n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L \\
&= \frac{L}{(m-n)\pi} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi L - n\pi L}{L}\right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{sen}\left(\frac{-(m\pi L - n\pi L)}{L}\right) \right] \\
&= \frac{L}{(m-n)\pi} \cdot [2 \operatorname{sen}(m\pi - n\pi)] = 0,
\end{aligned}$$

quando $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $m \neq n$.

iv)

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \int_{-L}^L \psi_n \psi_m dx \\
&= \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) dx - \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) dx \right],
\end{aligned}$$

Resolvendo as integrais separadamente:

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \left[\frac{L}{(m-n)\pi} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x - n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L \\
&= \frac{L}{(m-n)\pi} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi L - n\pi L}{L}\right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{sen}\left(\frac{-(m\pi L - n\pi L)}{L}\right) \right] \\
&= \frac{L}{(m-n)\pi} \cdot [2 \operatorname{sen}(m\pi - n\pi)] = 0,
\end{aligned}$$

quando $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $m \neq n$.

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \left[\frac{L}{(m+n)\pi} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x + n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L \\
&= \frac{L}{(m+n)\pi} \cdot \left[\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi L + n\pi L}{L}\right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{sen}\left(\frac{-(m\pi L + n\pi L)}{L}\right) \right] \\
&= \frac{L}{(m+n)\pi} \cdot [2 \operatorname{sen}(m\pi + n\pi)] = 0,
\end{aligned}$$

quando $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $m \neq n$.

v)

$$\begin{aligned}
\langle \phi_m, \psi_n \rangle &= \int_{-L}^L \phi_m \psi_n dx \\
&= \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) dx \right].
\end{aligned}$$

Se $m = n$, teremos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\
= \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \operatorname{sen}(0) dx \right] = 0,
\end{aligned}$$

já que seno é uma função ímpar, e a integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico, como $[-L, L]$, é igual a zero (Veja o Lema 3.11). Porém, no caso em que $m \neq n$. Solucionando separadamente as integrais:

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \left[-\frac{L}{(m+n)\pi} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L \\
&= -\frac{L}{(m+n)\pi} \cdot \left[\cos\left(\frac{m\pi L + n\pi L}{L}\right) \right. \\
&\quad \left. - \cos\left(\frac{-m\pi L + n\pi L}{L}\right) \right] \\
&= -\frac{L}{(m+n)\pi} \cdot [\cos(m\pi + n\pi) - \cos(m\pi - n\pi)] = 0,
\end{aligned}$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, com $n \neq m$.

$$\begin{aligned}
\bullet \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \left[-\frac{L}{(m-n)\pi} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L \\
&= -\frac{L}{(m-n)\pi} \cdot \left[\cos\left(\frac{m\pi L - n\pi L}{L}\right) \right. \\
&\quad \left. - \cos\left(\frac{-(m\pi L - n\pi L)}{L}\right) \right] \\
&= -\frac{L}{(m-n)\pi} \cdot [\cos(m\pi - n\pi) - \cos(m\pi + n\pi)] = 0,
\end{aligned}$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, com $n \neq m$.

Desse modo, a expressão:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L} \right) dx + \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] = 0.$$

Portanto o conjunto $\left\{ 1, \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) : m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ e } m \neq n \right\}$ é ortogonal ao intervalo $[-L, L] \subset \mathbb{R}$.

□

Observação 2.9. Temos $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \langle \psi_n, \psi_m \rangle = L$ quando, $m = n$. De fato, (2.1) com $m = n$:

$$\begin{aligned} \bullet \int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L} \right) dx &= \int_{-L}^L \cos \left(\frac{2m\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{L}{2m\pi} \cdot \left[\operatorname{sen} \left(\frac{2m\pi x}{L} \right) \right]_{-L}^L \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $m \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$. Além disso, temos:

$$\bullet \int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \int_{-L}^L 1 dx = 2L.$$

Então teremos que a integral:

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L} \right) dx + \int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] = L,$$

quando $m = n \geq 1$. De forma similar, provamos que $\langle \psi_n, \psi_n \rangle = L$.

2.3 Funções periódicas

Esta seção é essencial para compreendermos o que é uma série de Fourier, pois tal série é constituída por funções que são periódicas, e sem o conhecimento desse conceito não teremos uma compreensão total do assunto em questão. Estudaremos as funções periódicas com enfoque nas funções trigonométricas seno e cosseno, por meio da definição, exemplos e figuras para ilustrar o conteúdo, já que o conceito de período está relacionado com um "comportamento padrão", sendo bem visível por meio de gráficos de função.

Ao final desse seção já teremos acumulado conhecimento suficiente para começarmos a falar de fato sobre a série de Fourier e estudarmos os conceitos relacionados a ela, como os coeficientes de Fourier e a convergência da série em si.

Definição 2.10. (DE FIGUEIREDO, 1977) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica se existe um $T \in \mathbb{R}^+$ (período da função) tal que $f(x) = f(x + T)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.11. Se existe $T \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = f(x + T)$, sendo f como na definição anterior, se T é o menor período possível de f , então T é o período fundamental de f .

Observação 2.12. Veja que se T é um período fundamental de f , $2T, 3T$ e os demais múltiplos de T também serão períodos da função. Sendo assim qualquer período de f é um múltiplo do período fundamental.

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = f(x + 3T) = \dots$$

Exemplo 2.13. As funções $\text{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\text{cos} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções periódicas com período fundamental $T = 2\pi$.

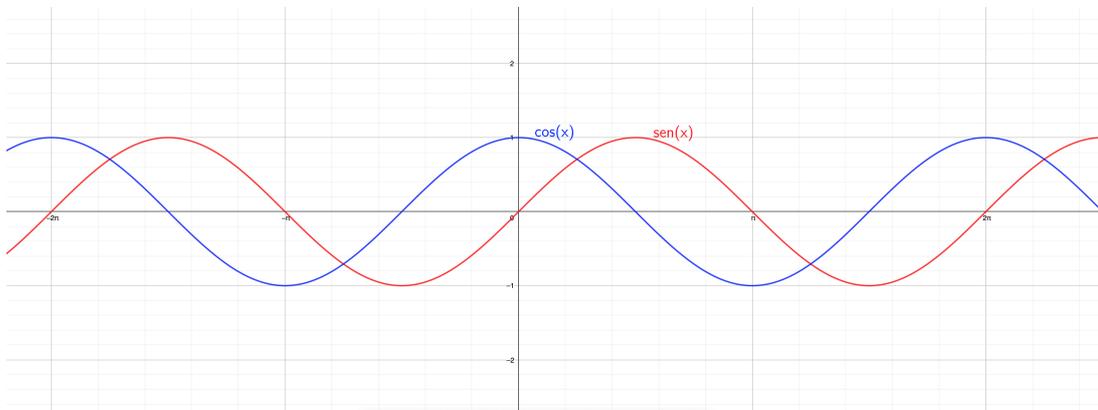


Figura 2.1: Gráfico das funções seno e cosseno.

Fonte: Autor.

Observação 2.14. Veja que se uma função é periódica, ela tem um comportamento padrão, que normalmente é identificado a partir do período fundamental. Ou seja, se fixarmos um ponto, por exemplo, $x = 0$ na função cosseno e analisarmos $f(0) = 1$, veremos que a função só atingirá novamente esse valor quando x for igual ao período fundamental ou múltiplos dele, como $2\pi, 4\pi, \dots$.

Proposição 2.15. *Sejam f_1 e f_2 duas funções reais periódicas de período T , então a combinação linear entre f_1 e f_2 também é uma função periódica.*

Demonstração: *Queremos mostrar que a combinação linear entre f_1 e f_2 é periódica, para isso considere $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$. Como T é tanto o período de f_1 quanto de f_2 , vamos calcular $h(x + T)$:*

$$\begin{aligned} h(x + T) &= \alpha_1 f_1(x + T) + \alpha_2 f_2(x + T) \\ &\stackrel{T \text{ é período}}{=} \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Portanto, existe $T \in \mathbb{R}$ de modo que $h(x) = h(x + T)$, sendo assim, a combinação linear entre duas funções periódicas de mesmo período também é uma função periódica. \square

Proposição 2.16. *Seja $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ um conjunto de funções reais periódicas de período T , então a combinação linear entre f_1, f_2, \dots, f_{n-1} e f_n é uma função periódica de período T .*

Demonstração: *Considere $\{\alpha_n \in \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ um conjunto de escalares e seja definida $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma:*

$$h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-1}(x) + \alpha_n f_n(x).$$

Para concluirmos que h é uma função periódica iremos utilizar o processo de indução finita em n . Para $n_0 = 2$ temos que $h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ é uma função periódica pela Proposição 2.15, então dessa forma podemos formular nossa hipótese de indução: Para $n_0 \leq k \in \mathbb{N}$ vale que a combinação linear $h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_{k-1} f_{k-1}(x) + \alpha_k f_k(x)$ é uma função periódica.

Quando $n = k + 1$ temos:

$$h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_{k-1} f_{k-1}(x) + \alpha_k f_k(x) + \alpha_{k+1} f_{k+1}(x),$$

porém, sabemos que por hipótese $f_{k+1}(x)$ é uma função periódica de período T e que $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_{k-1} f_{k-1}(x) + \alpha_k f_k(x)$ também é uma função periódica de período T , logo novamente pela Proposição 2.15 temos a periodicidade da combinação linear entre ambos.

Desse modo, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a combinação linear entre as funções reais periódicas f_1, f_2, \dots, f_n também é uma função periódica de período T .

\square

Se olharmos com atenção para o exemplo anterior podemos notar um fato interessante quando estamos falando sobre combinação linear de funções com mesmo período. No primeiro capítulo do texto esboçamos a expressão da série de Fourier, e se olharmos essa expressão com um pouco mais de cuidado, tendo em mente a Proposição 2.16 e os conceitos de funções periódicas, podemos observar que a expressão dentro do somatório é uma combinação linear de funções trigonométricas periódicas de período fundamental $T = 2\pi$, o que também constitui uma função periódica de período 2π .

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Se retomarmos o Capítulo 2 destacando cada seção, iremos observar que cada conceito trabalhado está diretamente ligado a série de Fourier, pois utilizamos do produto interno para definir funções ortogonais, que na próxima seção terá um pouco mais de sentido, e

agora estudamos o conceito de funções periódicas e observamos que ela está diretamente ligada a expressão da série. Dessa forma, acredito que temos conteúdo suficiente para iniciarmos de fato nosso estudo sobre a série de Fourier.

Capítulo 3

Série de Fourier

Neste capítulo daremos início ao estudo da série de Fourier tendo em mente todos os conceitos trabalhados anteriormente no texto. A ideia da série de Fourier é escrever uma função a partir de um somatório de combinações de funções trigonométricas, diferentemente das séries de potência, por exemplo, que escrevemos as funções como soma de polinômios.

Como visto no primeiro Capítulo 1, Fourier estava buscando estudar os princípios da condução de calor, sabendo disso, usaremos como motivação principal de estudo o problema da condução de calor em barras, que será modelado e solucionado. Posteriormente, iremos definir formalmente a série de Fourier, estudar sua convergência para logo em seguida discutirmos sobre os coeficientes de Fourier e terminar o capítulo com exemplos e algumas aplicações da série em si.

3.1 Motivação para o estudo das séries de Fourier

Iremos introduzir um problema trabalhado por Fourier como motivação para o estudo da série em si, o problema consiste na condução do calor em barras. Iremos inicialmente apresentar o problema e seguir os passos de Fourier adotando algumas hipóteses simplificadoras, pois o nosso objetivo é utilizar esse problema como uma motivação, não solucioná-lo por completo. A finalidade dessa seção além de motivar, é entender de onde surgem as formas trigonométricas que aparecem na expressão da série de Fourier.

Considere uma barra delgada constituída por um material condutor homogêneo de calor, com a superfície lateral da barra isolada termicamente, não permitindo trocas de calor com o meio externo à barra.

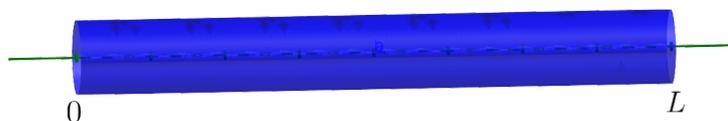


Figura 3.1: Barra delgada
Fonte: Autor.

Seja \mathcal{R} a região do plano cartesiano (x, t) descrita por $0 < x < L$ e $t > 0$ com $L \in \mathbb{R}$, e $\bar{\mathcal{R}}$ a união de \mathcal{R} com as semirretas $x = 0$ e $x = L$ quando $t > 0$, e com o segmento $0 < x < L$ quando $t = 0$, que serão nossas fronteiras da região. A região $\bar{\mathcal{R}}$ será a região no qual o problema será solucionado. Vejamos agora as ilustrações das regiões descritas.

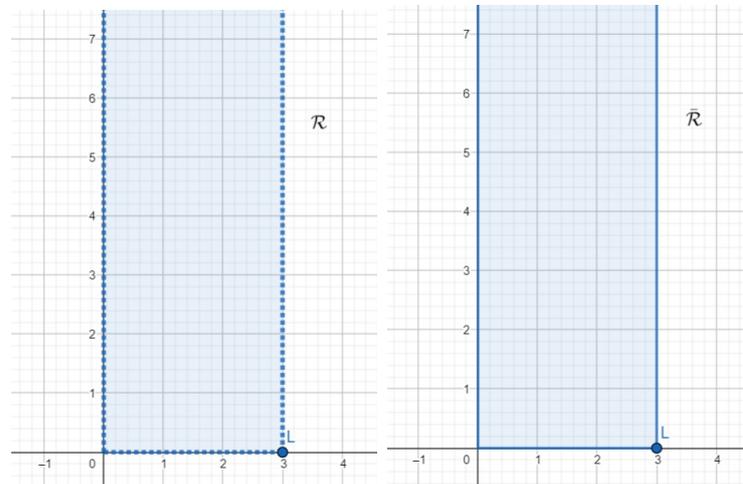


Figura 3.2: Regiões do plano

Fonte: Autor.

Para atingirmos nosso objetivo, devemos encontrar uma função definida na região plano, $\bar{\mathcal{R}}$, que satisfaça a equação do calor, que adotaremos como hipótese no texto. Mais especificamente, deveremos encontrar uma função $u(x, t)$ (função do calor na barra no ponto x e no instante t) definida em $\bar{\mathcal{R}}$ satisfazendo a seguinte equação (equação do calor) em \mathcal{R} :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

com $K > 0$ e satisfazendo a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq L$, sendo $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada e também satisfazendo as condições de fronteira $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$. Perceba que estamos considerando a função f como a função que descreve a temperatura inicial em cada ponto da barra.

Começaremos com o caso mais simples, o caso no qual conhecemos a temperatura nas extremidades da barra delgada e ambas temperaturas são nulas, ou seja, $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$, note ainda que com a variação do tempo a temperatura nas extremidades não se altera. Utilizando o método de Fourier, que consiste em analisar o problema a partir da separação de variáveis da função $u(x, t)$, passaremos a olhar o problema da seguinte forma, onde $u(x, t) = F(x)G(t)$. Como queremos buscar soluções que satisfaçam a equação do calor, iremos substituir na equação do calor nossa função levando em consideração a separação de variáveis, obtendo:

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t),$$

observe que estamos derivando com relação a t do lado esquerdo e com relação a x do lado

direito, e olhando dessa forma interpretamos $F(x)$ e $G(t)$ como constantes na derivação, respectivamente. Veja que se $F(x)$ é constante e igual a 0, teremos que a função u que buscamos também será identicamente nula, satisfazendo a equação do calor, mas ela não irá satisfazer a condição inicial, a não ser que $f(x) = 0$, e neste caso teremos que $u = 0$ é uma solução do nosso problema de calor na barra. De forma similar, temos que se a g for identicamente nula, temos que $u = 0$ será solução no caso em que f for identicamente nula. Agora vamos procurar soluções não triviais. Veja que se a $f(x)$ não for identicamente nula, então $u = 0$ não é solução do problema, então iremos agora procurar por soluções não triviais, para isso iremos considerar que F e G são diferentes de 0 para todo x . Fazendo algumas alterações na expressão, iremos obter agora:

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)},$$

e escrevendo a equação desse modo estaremos assumindo que ambas funções, $F(x)$ e $G(t)$, não se anulam para nenhum valor do domínio. Analisando essa última expressão, vemos que o lado esquerdo depende apenas de t e o lado direito apenas de x e ambos lados são iguais, ou seja, ambos lados independem tanto de x quando de t , dependendo então de um parâmetro que não depende de x e t . Seja ζ nosso parâmetro que não depende de x e t , então temos:

$$\begin{aligned} \frac{F''(x)}{F(x)} = \zeta &\implies F''(x) - F(x)\zeta = 0, \\ \frac{1}{K} \cdot \frac{G'(t)}{G(t)} = \zeta &\implies G'(t) - G(t)K\zeta = 0, \end{aligned}$$

como temos a condição inicial para $u(x, t)$, essa condição deve valer da mesma forma para as equações que obtemos, dessa forma, observe que se $u(0, t) = u(L, t) = 0$, então também teremos $F(0) = F(L) = 0$, pelo seguinte motivo, se $F(0)G(t) = 0$ para todo $t > 0$ e assumirmos que $F(x) \neq 0$, então estaríamos dizendo que $G(t) = 0$ e portanto nossa função u também seria nula, mas isso seria uma solução trivial, o que não é o que buscamos. Observe que se da condição inicial $0 = u(0, t) = F(0)G(t)$, temos que $F(0) = 0$ pois $G(t) \neq 0$ para todo t , da mesma forma, da condição $0 = u(L, t) \implies F(L) = 0$.

Estamos interessados em achar soluções para nossa modelagem, e com as informações acima já conseguimos esboçar valores para nosso parâmetro ζ que nos direcione a encontrar soluções não triviais $F(x)$ para o problema:

$$\begin{cases} F''(x) - F(x)\zeta = 0, & \text{para } 0 < x < L, \\ F(0) = F(L) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Teremos apenas três possibilidades para nosso parâmetro, ou ele será igual a zero, ou será maior que zero ou será menor que zero, então faremos as análises desses casos para conseguir chegar em uma expressão que nos ajude a encontrar as soluções desse problema,

que é um problema de equação diferencial ordinária em essência.

i) $\zeta = 0$.

Nesse caso, iremos obter $F''(x) = 0$, que é uma equação diferencial simples de ser resolvida, com solução $F(x) = k_1x + k_2$, sendo k_1 e k_2 constantes. Como temos que respeitar a condição inicial do problema, teremos que $F(0) = F(L) = 0 \implies k_2 = k_1L + k_2 = 0 \implies k_1 = k_2 = 0$ portanto F é nula, então essa solução não nos interessa.

ii) $\zeta > 0$.

Neste caso, iremos encontrar as soluções do problema utilizando o método de solução geral para equações diferenciais homogêneas de segunda ordem, para isso, iremos relacionar a equação diferencial $F''(x) - F(x)\zeta = 0$ com a equação do segundo grau $R^2 - \zeta = 0$ e iremos calcular o discriminante. Como

$$\Delta = 0^2 - 4.1(-\zeta) = 4\zeta > 0,$$

temos que o esboço da solução geral é $F(x) = c_1e^{R_1x} + c_2e^{R_2x}$, sendo R_1 e R_2 as soluções da equação do segundo grau. Calculando as soluções obtemos que $R_1 = \sqrt{\zeta}$ e $R_2 = -\sqrt{\zeta}$, então $F(x) = c_1e^{\sqrt{\zeta}x} + c_2e^{-\sqrt{\zeta}x}$. Como devemos ter $F(0) = F(L) = 0$, temos que:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1e^{\sqrt{\zeta}L} + c_2e^{-\sqrt{\zeta}L} = 0, \end{cases} \implies c_1 = c_2 = 0,$$

mas como a única solução desse sistema é $c_1 = c_2 = 0$, novamente não nos interessa, pois F seria identicamente nula.

iii) $\zeta < 0$.

Nessa situação, considere nosso parâmetro $\zeta = -\lambda^2$. Iremos buscar a solução geral da mesma maneira que no item anterior, relacionando a equação diferencial de segunda ordem com a equação do segundo grau $R^2 - \zeta = 0$, mas isto é equivalente a dizer que $R^2 + \lambda^2 = 0$. Calculando novamente o discriminante teremos que:

$$\Delta = 0^2 - 4.1(\lambda^2) = -4\lambda^2 < 0,$$

desse modo o esboço da solução geral será:

$$F(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sen(\beta x)), \text{ sendo } R = \alpha \pm i\beta.$$

Iremos agora buscar as raízes da equação do segundo grau para explicitarmos melhor

a solução geral, desse modo, segue:

$$\begin{aligned} R^2 + \lambda^2 &= 0 \\ R^2 &= -\lambda^2 \\ R &= \pm\sqrt{-\lambda^2} \\ R &= \pm i\lambda, \end{aligned}$$

e como $R = 0 \pm i\lambda$, concluímos que $\alpha = 0$ e $\beta = \lambda$. Substituindo na expressão da equação geral teremos:

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \operatorname{sen}(\lambda x).$$

Da condição inicial $F(0) = F(L) = 0$, segue que $0 = F(0) = c_1$, e conseqüentemente, $0 = F(L) = c_2 \operatorname{sen}(\lambda L)$ o que implica $c_2 = 0$ ou $\operatorname{sen}(\lambda L) = 0$. Como não queremos $c_2 = 0$, já que desse modo novamente nossa F seria idênticamente nula, o que implica u idênticamente nula, nossa única opção é que $\operatorname{sen}(\lambda L) = 0$. Portanto, como bem sabemos, a função seno se anula em múltiplos de π , desse modo, teremos que $\lambda L = n\pi, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sendo assim, indexando λ e ζ por λ_n e ζ_n , teremos:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \text{ e } \zeta_n = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Assim, concluímos que a EDO (3.2) admite a família de soluções dadas por

$$F_n(x) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 \leq x \leq L, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Como já esboçamos uma expressão para nosso parâmetro ζ_n , iremos agora olhar para a equação diferencial $G'(t) - G(t)K\zeta_n = 0$ com relação a essa expressão encontrada. Assim, a família de soluções da equação diferencial é

$$G_n(t) = ce^{\zeta_n Kt} = ce^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Como inicialmente utilizamos o método de separação de variáveis e encontramos expressões para $F_n(x)$ e $G_n(t)$, podemos expressar agora $u_n(x, t)$:

$$u_n(x, t) = ce^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.3)$$

Observe que u_n satisfaz a equação do calor e também nosso problema de fronteira que é o fato da temperatura ser igual a zero em suas extremidades. Para u satisfazer a condição inicial devemos ter $u_n(x, 0) = f(x)$ para $x \in [0, L]$. Porém, temos que

$$u_n(x, 0) = c \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde vemos que esses u_n só irão satisfazer nosso problema se f tiver a seguinte forma:

$$f(x) = c \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.4)$$

Em particular, se nossa função $f(x) = \operatorname{sen} (3\pi x/L)$, então teremos como solução:

$$u_3(x, t) = e^{\frac{-9\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi x}{L} \right), \quad (3.5)$$

pois u_3 satisfaz todas condições propostas pelo problema, já que satisfaz a equação do calor (3.1), a condição de fronteira $u_3(0, t) = u_3(L, t) = 0$ e a condição inicial:

$$u_3(x, 0) = f(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi x}{L} \right).$$

Veja que conseguimos uma solução para nosso problema no caso particular acima, mas podemos ir mais a fundo, ampliando as possíveis funções $f(x)$ a serem consideradas. Se nosso $f(x) = \alpha \cdot \operatorname{sen} (3\pi x/L)$, sendo α uma constante diferente de zero, pois não nos interessa esse caso, então teríamos que

$$\alpha u_3(x, t) = \alpha e^{\frac{-9\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi x}{L} \right),$$

é uma solução da equação do calor (3.1), que satisfaz a condição de fronteira $\alpha u_3(0, t) = \alpha u_3(L, t) = 0$ e a condição inicial:

$$f(x) = \alpha \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi x}{L} \right),$$

ou seja, o produto de uma solução por um escalar também será uma solução.

Análogo ao raciocínio que fizemos acima, se tivermos $f(x) = \operatorname{sen} (2\pi x/L)$, então nossa solução u_2 será:

$$u_2(x, t) = e^{\frac{-4\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{L} \right).$$

Agora, imagine que partimos de:

$$f(x) = \alpha_1 \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi x}{L} \right) + \alpha_2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{L} \right),$$

então dessa forma, naturalmente u terá a seguinte expressão:

$$u(x, t) = \alpha_1 e^{\frac{-9\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi x}{L} \right) + \alpha_2 e^{\frac{-4\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{L} \right),$$

que também será solução para nosso problema, pois também atende todas as condições da equação do calor (3.1). Ora, é natural mesmo que a soma seja solução, pois pelo

princípio da superposição de soluções, ver (PAULA, 2019), se $u(x, t)$ e $v(x, t)$ são soluções do problema, então também será solução:

$$\alpha_1 u(x, t) + \alpha_2 v(x, t),$$

sendo α_1 e α_2 constantes.

A partir das observações particulares que fizemos acima, e do princípio de superposição de soluções, vemos que se

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

obteremos que a solução u da equação do calor (3.1) será:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \forall t > 0 \text{ e } x \in [0, L].$$

Por fim, nos questionamos se é possível utilizar condições iniciais mais gerais; por exemplo, se $f(x)$ for da forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.6)$$

poderíamos pensar que o candidato natural à solução será:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \forall t > 0 \text{ e } x \in [0, L]. \quad (3.7)$$

Porém, surgem algumas perguntas. A f pode assumir a forma como em (3.6)? Como iremos obter os coeficientes c_n ? Nós conseguimos verificar que u como em (3.7) satisfaz a equação do calor (3.1)? Essas séries convergem?

Essas questões serão trabalhadas posteriormente quando introduzirmos o estudo de convergência mais detalhadamente, pois já cumprimos nosso papel nesse capítulo, que é a motivação para o estudo da série e entender de onde surgem as formas trigonométricas.

3.2 Expressão da série de Fourier

Para conseguirmos expressar a série de Fourier de uma função f iremos mostrar qual a relação dos coeficientes a_n e b_n com a função em si, e também as condições para que possamos expressar os coeficientes.

3.2.1 Coeficientes de Fourier

Nesta seção estaremos interessados em encontrar os coeficientes que aparecem na série de Fourier, para que possamos relacionar uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com a série em si, porém essa tarefa não é tão simples. Suponhamos que seja possível expressar uma função f como definida a cima por meio da série de Fourier, então teríamos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Como temos uma igualdade, é comum que pensemos que os coeficientes da série tem alguma relação com a função f , e o natural a se fazer é isolar ambos coeficientes para entendermos essa relação. Para isso, precisaremos supor que nossa série convirja uniformemente, e por consequência disso, como as funções trigonométricas são contínuas, f também será. Porém, antes de pensarmos nos coeficientes em si, será que podemos mesmo definir f em toda a reta, já que durante a motivação de estudo trabalhamos apenas no intervalo $[0, L]$? A resposta para isso é sim, e esse fato se deve à periodicidade das formas trigonométricas e dos resultados de funções periódicas vistos no Capítulo 2.

Primeiramente iremos encontrar o período fundamental das expressões trigonométricas que aparecem na série, dessa forma, pela Definição 2.11 teremos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x+T)}{L}\right), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Observe que o lado direito da expressão pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x+T)}{L}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi T}{L}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right). \end{aligned}$$

Logo, após expandirmos o seno da soma, substitua na expressão (3.8):

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right). \quad (3.9)$$

Lembre-se que isso deve valer para para todo $x \in \mathbb{R}$, então escolha de forma particular $x = \frac{L}{2n}$, e dessa forma iremos obter que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right), \quad (3.10)$$

e disso obtemos que:

$$\cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = 1. \quad (3.11)$$

Para que T tenha o menor valor possível, teremos que:

$$\frac{n\pi T}{L} = 2\pi \implies T = \frac{2L}{n}. \quad (3.12)$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\text{sen}(\theta)^2 + \text{cos}(\theta)^2 = 1$ na expressão (3.11), teremos:

$$\text{sen}\left(\frac{n\pi T}{L}\right) = 0, \quad (3.13)$$

que implica também em $T = \frac{2L}{n}$. Observe que se T é o período fundamental de ambas expressões trigonométricas; pelo resultado 2.16 a série de Fourier de f também terá período fundamental T , desse modo, podemos "estender" o domínio no qual f está definida, como se estivéssemos fazendo uma colagem de acordo com o período. Pela Observação 2.12 teremos que uma soma finita dos períodos fundamentais também é um período, então, somando n vezes T iremos obter um novo período $nT = n \cdot \frac{2L}{n}$ o que implica $T = 2L$, logo f tem período $2L$. Sendo assim, podemos defini-la para toda reta:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), & x \in [0, L], \\ \text{e periódica de período } 2L, \end{cases} \quad (3.14)$$

e agora faz sentido integrarmos esta função no intervalo $[-L, L]$, pois agora ela está bem definida e é contínua nesse intervalo.

Sabendo disso, considere a expressão e integre ambos os lados com relação a x de $-L$ até L e utilize o seguinte lema:

Lema 3.1. (DE FIGUEIREDO, 1977) *Sejam u_n funções integráveis em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convergindo uniformemente, então:*

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx.$$

Do lema segue que:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-L}^L 1 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right),$$

e por isso temos que:

$$a_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (3.15)$$

pois sabemos que ambas integrais com funções trigonométricas que aparecem do lado direito na expressão são iguais a zero, de acordo com os resultados *i)* e *ii)* do Exemplo 2.8,

e a integral simples que acompanha o termo a_0 é igual a $2L$. Dessa maneira justificamos o fato de escrevermos $\frac{a_0}{2}$ ao invés de somente a_0 , pois escrevendo dessa maneira a expressão para encontrar o termo fica simplificada.

Agora, para encontrar os demais coeficientes, multiplique a equação (3.14) por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ para $m > 0$ fixado com $m \in \mathbb{Z}$ e integre em relação a x no mesmo intervalo, como feito anteriormente. Estaremos utilizando implicitamente o seguinte lema:

Lema 3.2. (MASSAGO, 2014) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes, então a série da soma será convergente e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Agora, dando continuidade ao exercício, segue:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \end{aligned}$$

e finalmente chegamos a essa expressão. Lembre-se que o fato da série convergir uniformemente nos permite comutar o símbolo da integral com o símbolo do somatório. Agora iremos olhar para as expressões do lado direito da igualdade:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= 0, \\ \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= 0, \text{ com } n, m \geq 1, \\ \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \begin{cases} L, & n = m \geq 1, \\ 0, & n \neq m, \quad n, m \geq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

esses resultados são obtidos de *i*), *v*) e *iii*) no Exemplo 2.8 e da Observação 2.9, respectivamente, e dessa maneira podemos finalmente concluir que:

$$a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.16)$$

Da mesma maneira que encontramos a_n , podemos fazer o mesmo raciocínio para encontrar b_n , basta multiplicarmos ambos os lados da expressão (3.14) por $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, com m respeitando as mesmas condições de anteriormente, e integrar no mesmo intervalo.

Assim, analisando de forma análoga, concluímos que

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.17)$$

Uma vez que obtemos uma maneira de calcular os coeficientes que aparecem na série de Fourier, podemos finalmente defini-la, relacionando funções reais com a série de maneira clara, sendo assim, iremos agora trabalhar com alguns exemplos para aplicarmos os conceitos estudados até então.

Definição 3.3. (DE FIGUEIREDO, 1977) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, com os coeficientes a_0 , a_n e b_n calculados como em (3.15), (3.16) e (3.17), respectivamente, então, a série de Fourier que está relacionada com a função f é:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right). \quad (3.18)$$

Observação 3.4. Note que não utilizamos o sinal de igualdade na relação, pois nem toda série de Fourier será de fato igual a função, existem condições que tornam isso possível, mas isso será visto mais detalhadamente quando estudarmos a convergência das séries de Fourier.

Exemplo 3.5. Expresse a série de Fourier da função f sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2π , definida por partes da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [n\pi, (n+1)\pi), \text{ para } n \text{ par} \\ 0, & x \notin [n\pi, (n+1)\pi), \text{ para } n \text{ par} \end{cases},$$

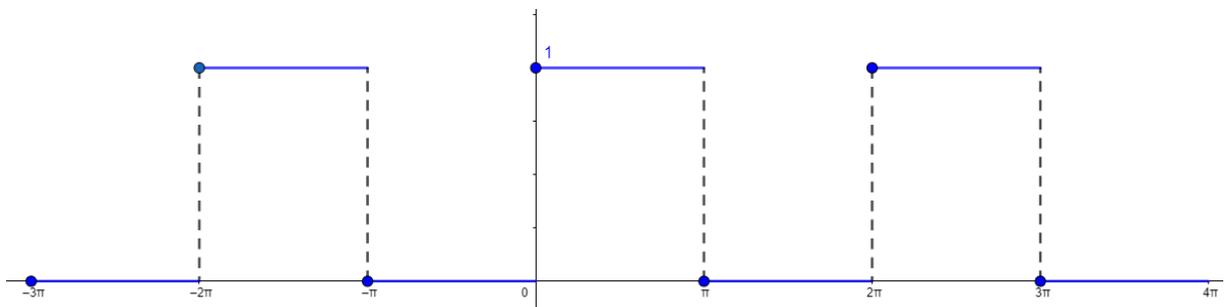


Figura 3.3: Gráfico de f

Fonte: Autor.

Solução: Calculando a_0 :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot [0 + \pi] \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.
 \end{aligned}$$

Calculando a_n , para $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\text{sen}(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = 0,
 \end{aligned}$$

Calculando b_n , para $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{-\pi}^0 0 \cdot \text{sen}(nx) dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot \text{sen}(nx) dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \text{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{n \cdot \pi} \cdot (1 - \cos(n\pi)),
 \end{aligned}$$

sendo assim, se n for par, $b_n = 0$ e se n for ímpar, então $b_n = \frac{2}{n\pi}$, logo:

$$b_{2k} = 0 \quad \text{e} \quad b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Logo, a série de Fourier que se relaciona com $f(x)$ é:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \cdot \text{sen}((2k-1)x).$$

□

Veremos que para que esse sinal seja de igualdade, precisaremos que nossa função

atenda algumas hipóteses, como a de ser seccionalmente diferenciável, ou seja, a função é seccionalmente contínua e sua derivada é seccionalmente contínua.

Definição 3.6. (DE FIGUEIREDO, 1977) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se tiver um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dado $a < b$, existem $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b$ tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, 2, \dots, n - 1$, e existem os limites:

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \text{ e } f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Podemos ver que nossa função é seccionalmente diferenciável, pois se considerarmos cada intervalo $[n\pi, (n + 1)\pi]$ com $n \in \mathbb{N}$, nossa função f possuirá apenas 1 ponto de descontinuidade para cada valor de n , e sua derivada também será seccionalmente contínua pois é nula, então para este caso, vale o sinal de igualdade nos pontos de continuidade, pois a função atende todas as hipóteses necessárias para o teorema de Fourier, que será apresentado futuramente (ver teorema 3.17).

3.3 Série de Fourier de funções pares e ímpares

Como temos uma expressão para calcular a série de Fourier, iremos agora estudar o caso especial que são as séries de Fourier de funções pares e ímpares, e isso será interessante pois poderemos utilizar as propriedades de funções pares e ímpares.

Definição 3.7. (DE FIGUEIREDO, 1977) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é par se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.8. As funções $\cos(x)$, x^2 , $\cos(n\pi x/L)$ são exemplos de funções pares. As funções $\sin(x)$, x^3 , $\sin(n\pi x/L)$ são exemplos de funções ímpares.

Observação 3.9. O gráfico de uma função par será simétrico em relação ao eixo y , já o gráfico da função ímpar será simétrico com relação a origem.

Iremos considerar os seguintes lemas para que eles possam ser utilizados pensando na aplicação da série de Fourier, os lemas e as demonstrações se encontram em (DE FIGUEIREDO, 1977).

Lema 3.10. *Operações entre funções pares e ímpares:*

- *A soma de duas funções pares é uma função par. A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.*
- *O produto de duas funções pares é uma função par.*
- *O produto de duas funções ímpares é uma função par.*

- O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

Lema 3.11. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então:*

$$\int_{-L}^L f dx = 2 \int_0^L f dx. \quad (3.19)$$

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função ímpar que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então:

$$\int_{-L}^L f dx = 0. \quad (3.20)$$

Podemos utilizar o lema para reinterpretar os coeficientes (3.15), (3.16) e (3.17) quando nossa função f for par ou ímpar, como veremos a seguir.

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função par, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, teremos:

$$a_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.21)$$

pois o produto entre funções pares, é uma função par, e utilizando (3.19) teremos essa expressão para a_n . Também teremos que:

$$b_n = 0, \quad (3.22)$$

pois o produto entre uma função par e ímpar é uma função ímpar, e utilizando (3.20) teremos que $b_n = 0$.

Analogamente, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função ímpar, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, teremos que:

$$a_n = 0, \quad (3.23)$$

e também teremos:

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.24)$$

Vamos agora utilizar os conceitos estudados para calcular as séries de Fourier de algumas funções pares e ímpares.

Exemplo 3.12. *Expresse a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função periódica de período $2L$, definida por $f(x) = x^2$ quando $-L \leq x \leq L$.*

Jean Baptiste JSoluçãooseph Fourier Note que a função f é uma função par, pois $f(x) = f(-x) \forall x \in [-L, L]$, então utilizando a expressão (3.21) iremos calcular a_n :

$$a_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

faremos a seguinte mudança de variável, $y = n\pi x/L$, desse modo:

$$a_n = \frac{2L^2}{n^3\pi^3} \cdot \int_0^{n\pi} y^2 \cos(y) dy, \quad (3.25)$$

iremos prosseguir utilizando o método de integração por partes. Olhando para a integral indefinida, teremos:

$$\begin{aligned} \int y^2 \cos(y) dy &= y^2 \sin(y) - 2 \int y \sin(y) dy \\ &= y^2 \sin(y) - 2(-y \cos(y) + \sin(y)) + C, \end{aligned} \quad (3.26)$$

sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante. Utilizando o resultado da integral imprópria para a integral definida (3.25), iremos obter:

$$a_n = \frac{2L^2}{n^3\pi^3} \cdot [y^2 \sin(y) - 2(-y \cos(y) + \sin(y))]_0^{n\pi},$$

desse modo, após realizarmos os cálculos, teremos finalmente:

$$a_n = \frac{4L^2}{n^2\pi^2} \cdot (-1)^n.$$

Como temos que a função f é par, nosso coeficiente $b_n = 0$ pelo resultado (3.22). Para calcular a_0 , segue:

$$a_0 = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L x^2 dx = \frac{2}{L} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{2}{3} \cdot L^2.$$

Como temos todos os coeficientes, a série de Fourier da função f será:

$$f(x) \sim \frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{n^2\pi^2} \cdot (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Vamos olhar agora nossa função f quando $L = \pi$, ou seja, agora nossa função $f(x) = x^2$ quando $-\pi \leq x \leq \pi$ é periódica de período 2π , e sua série de Fourier terá a seguinte expressão:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n \cos(nx).$$

Iremos agora comparar o gráfico de $f(x)$ com os gráficos das somas parciais da série de Fourier da função f , ou seja, iremos plotar os gráficos de:

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^k \frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n \cos(nx), \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 1.$$

Quando olharmos para o caso em que $k = 1$, iremos obter o seguinte resultado:

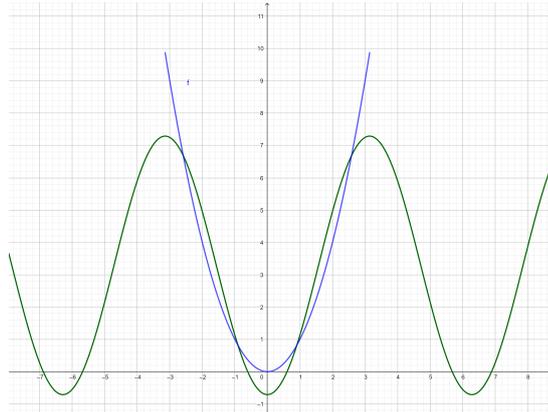


Figura 3.4: Comparações entre os gráficos
Fonte: Autor.

Note que já obtemos uma boa aproximação da função $f(x) = x^2$, que está representada em azul, por uma série de cossenos, agora iremos expandir as somas parciais para verificar se conseguimos melhorar nossa aproximação. Quando $k = 3$ teremos:

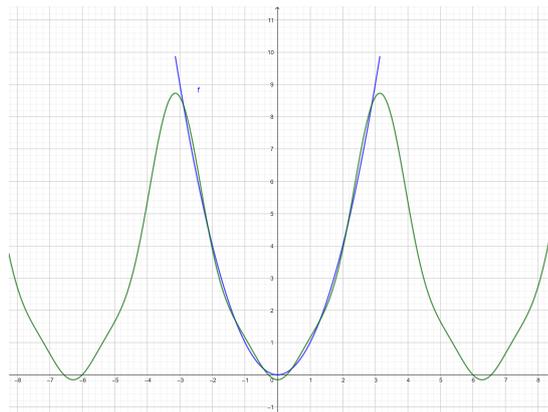


Figura 3.5: Comparações entre os gráficos
Fonte: Autor.

Em $k = 10$

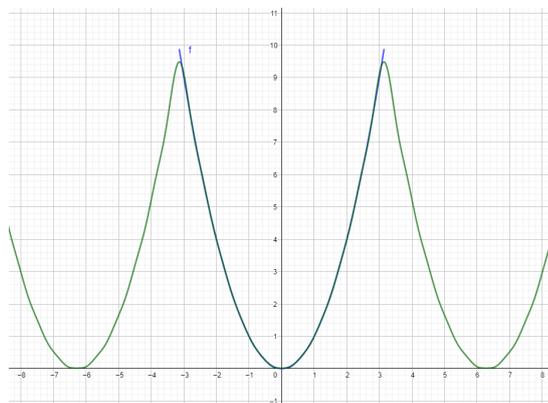


Figura 3.6: Comparações entre os gráficos
Fonte: Autor.

□

Tudo nos leva a acreditar que quando olharmos a série de Fourier no infinito, teremos que os gráficos irão coincidir no intervalo fechado $[-\pi, \pi]$, mas iremos explorar essas nuances mais detalhadamente no capítulo de convergência.

Exemplo 3.13. Expresse a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica de período 2π , definida por $f(x) = x$ se $-\pi \leq x < \pi$.

Solução: Note que nossa função é uma função ímpar, portanto podemos utilizar os resultados já estudados para calcular os coeficientes da série de Fourier, sendo assim, teremos que:

$$a_0 = 0 \text{ e } a_n = 0,$$

pois são integrais de funções ímpares em um intervalo simétrico, que nesse caso é $[-\pi, \pi]$. Calculando b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx,$$

de maneira semelhante ao exemplo anterior, iremos realizar uma mudança de variável, sendo ela $y = nx$. Dando continuidade:

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2} \cdot \int_0^{n\pi} y \operatorname{sen}(y) dy,$$

utilizando os resultados da integral imprópria que já foi calculada em (3.26), segue que:

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2} \cdot [-y \cos(y) + \operatorname{sen}(y)]_0^{n\pi},$$

e finalizando os cálculos, teremos:

$$b_n = -\frac{2}{n} \cdot (-1)^n,$$

desse modo, nossa série de Fourier da função f é a série:

$$f(x) \sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (-1)^n \operatorname{sen}(nx).$$

Como fizemos anteriormente, iremos olhar os gráficos formados pelas somas parciais da série de Fourier quando $k = 1$, $k = 3$ e $k = 10$, para observarmos que temos uma melhora quando aumentamos o valor de k .

Primeiramente, quando consideramos $k = 1$:

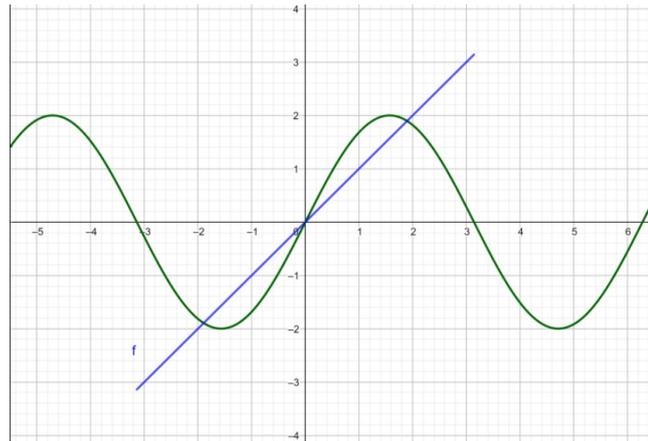


Figura 3.7: Comparações entre os gráficos
Fonte: Autor.

Do mesmo modo, para $k = 3$:

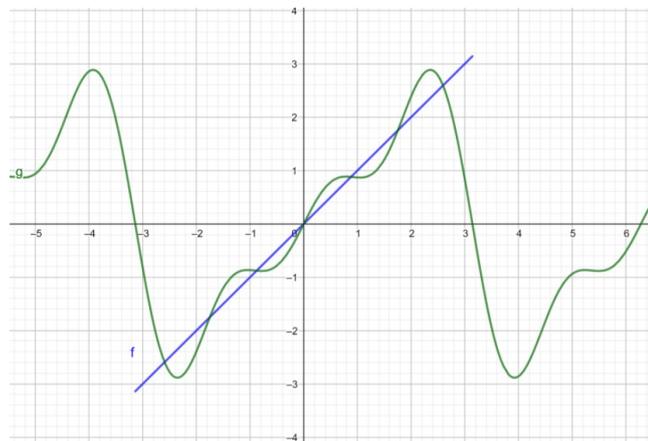


Figura 3.8: Comparações entre os gráficos
Fonte: Autor.

Finalmente, para $k = 10$:

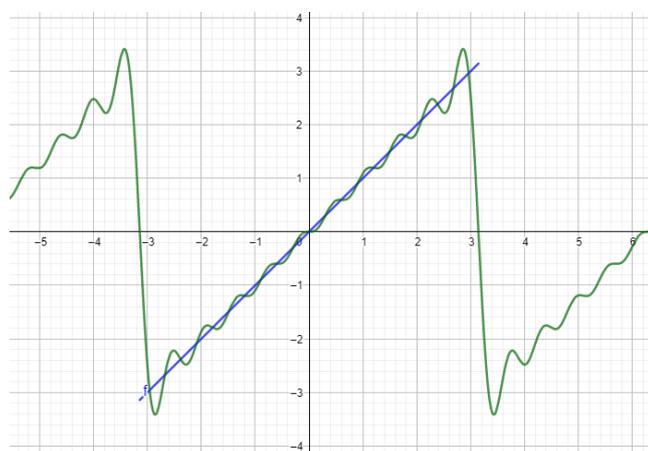


Figura 3.9: Comparações entre os gráficos
Fonte: Autor.

□

Iremos utilizar esses exemplos novamente e com mais detalhes quando iniciarmos o capítulo de convergência. Note que nos exemplos utilizados, a função par nos forneceu uma série de cossenos, enquanto a função ímpar nos forneceu uma série de senos.

3.4 Convergência da Série de Fourier

Vimos até então que não precisamos de muitas hipóteses para encontrar os coeficientes da série de Fourier de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de período $2L$, apenas que f seja integrável e absolutamente integrável no intervalo $[-L, L]$. Se f atender essas condições, conseguimos obter seus coeficientes e expressar a série de Fourier desta função como feito no Exemplo 3.5. Nosso principal objetivo agora é apresentar o teorema de Fourier para logo em seguida o relacionar com os exemplos estudados e também iremos relacionar funções que possuem representação por série de Fourier nos pontos de descontinuidade, como no Exemplo 3.17, com o fenômeno de Gibbs, vendo graficamente os saltos que essas funções apresentam nos pontos de descontinuidade. Antes disso, apresentaremos brevemente as classes de funções que podem ser representadas por uma série de Fourier.

Considere a função $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Estamos interessados em saber quando tal f pode ser expressa como uma série de Fourier, então deveremos garantir que f satisfaça as hipóteses que já foram explicitadas, ou seja, ser periódica de período $2L$, ser integrável e absolutamente integrável no intervalo $[-L, L]$. Se nossa função f for limitada no intervalo $[a, b]$, defina P o conjunto de pontos x_0, x_1, \dots, x_n de modo que:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b,$$

logo P é uma partição de $[a, b]$. Defina também:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como f é limitada em $[a, b]$, será limitada nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, então podemos também definir:

$$\begin{aligned} M_i &= \sup f(x), & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ m_i &= \inf f(x), & x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned}$$

Por fim, defina:

$$\begin{aligned} S(P, f) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \\ s(P, f) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \end{aligned}$$

dizemos que f é integrável quando $\inf_{\{P\}} S(P, f) = \sup_{\{P\}} s(P, f)$. Agora se f não for limitada, para que tenhamos a integrabilidade de f deveremos conseguir decompor o

intervalo $[a, b]$ em um finito número de intervalos $[I_1, \dots, I_n]$, sendo $I_k = [a_k, b_k]$, tais que $\forall \delta > 0, \delta' > 0$, a função é limitada e integrável em $[a_k + \delta, b_k - \delta']$ e existem os limites:

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = \lim_{(\delta, \delta') \rightarrow (0, 0)} \int_{a_k + \delta}^{b_k - \delta'} f(x)dx,$$

e a integral de f , denominada integral imprópria, será:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx.$$

Teremos que f é absolutamente integrável se $|f|$ for integrável.

Observação 3.14. Note que a função ser integrável não implica em ser absolutamente integrável, e vice-versa.

Exemplo 3.15. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ for racional com } x \in [0, 1] \\ -1, & \text{se } x \text{ for irracional com } x \in [0, 1] \end{cases}.$$

Note que f não é Riemann integrável pois $\inf_{\{P\}} S(P, f) = 1 \neq -1 = \sup_{\{P\}} s(P, f)$. Porém $|f|$ é integrável, já que:

$$|f(x)| = 1, \quad x \in [0, 1],$$

que é contínua, e pelo Lema 2.5 deve ser integrável.

Definição 3.16. Dizemos que f é uma função do tipo $\mathcal{L}^1(I)$ se, e somente se, f e $|f|$ forem integráveis no intervalo I .

Agora tendo em mente a Definição 3.16 e também os estudos feitos anteriormente sobre coeficientes de Fourier, podemos dizer que se $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, com f sendo $\mathcal{L}^1([-L, L])$, então conseguiremos encontrar os coeficientes de Fourier dessa função.

Vamos agora apresentar o Teorema de Fourier, sem demonstrá-lo, pois estamos interessados em aplicar o teorema nos exemplos estudados e compreendê-lo a partir dos gráficos das funções estudadas e das suas respectivas séries de Fourier.

Teorema 3.17. (*Teorema de Fourier*) (*DE FIGUEIREDO, 1977*) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica, de período $2L$ e seccionalmente diferenciável, então, a série de Fourier de f converge para cada ponto x para $\frac{1}{2} \cdot [f(x+0) + f(x-0)]$, isto é*

$$\frac{1}{2} \cdot [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Observação 3.18. As notações $f(x+0)$ e $f(x-0)$ são os limites laterais da função f no ponto x pela direita e pela esquerda, respectivamente.

Note que se a função f for uma função contínua teremos que os limites laterais no ponto x serão iguais ao valor da função no ponto x , então teremos que $f(x+0) = x = f(x-0)$. Ter a continuidade de f nos garante dizer que a série de Fourier da função f calculada em x irá convergir para o valor $f(x)$, de acordo com o teorema de Fourier, já que:

$$\frac{1}{2} \cdot [f(x+0) + f(x-0)] = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Exemplo 3.19. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função periódica de período $2L$, definida por $f(x) = x^2$ quando $-L \leq x < L$. Sabemos que a série de Fourier dessa função é expressa da seguinte forma:

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n \cos(nx),$$

como calculado no exemplo 3.12. De acordo com o Teorema de Fourier e com a observação 3.18, pela continuidade da função, teremos a convergência uniforme de $f(x) = x^2$ sua respectiva série de Fourier, então teremos uma relação de igualdade entre a função e sua série. Desse modo, temos:

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n \cos(nx),$$

e uma vez que temos essa relação de igualdade, garantida pelo Teorema de Fourier, temos o direito de aplicar a função nos pontos do domínio, sendo assim, seja $x = \pi$.

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n \cos(n\pi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2} \cdot (-1)^n \cos(n\pi) \\ &= 6 + \frac{6}{4} + \frac{6}{9} + \frac{6}{16} + \dots, \end{aligned}$$

e dessa forma, a partir do Teorema de Fourier, conseguimos expressar um número irracional a partir de uma soma infinita de números racionais. \square

Vamos agora aplicar o teorema no seguinte caso, seja f como no Exemplo 3.5, que é uma função seccionalmente diferenciável, porém descontínua em uma quantidade enumerável de pontos, como por exemplo no ponto de origem. Plotaremos novamente o gráfico para que fique mais claro o que será dito.

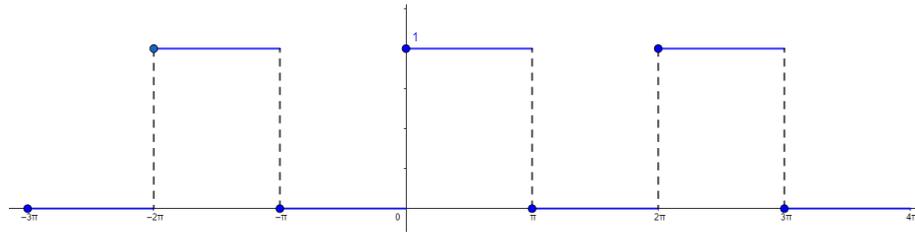


Figura 3.10: Gráfico de f no exemplo 3.5
Fonte: Autor.

Quando aplicamos o teorema de Fourier no ponto $x = 0$, note que diferentemente do caso no qual a função é contínua, a série de Fourier não irá convergir para o valor da função calculada em 0, pois nesse caso os limites laterais são diferentes. Como $f(x + 0) = 1$ e $f(x - 0) = 0$, pelo teorema de Fourier a série irá convergir para 0,5. Iremos plotar os gráficos das somas parciais da série de Fourier de f , que é:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)\pi} \cdot \text{sen}((2k-1)x), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

quando $n = 1$ e quando $n = 6$ para verificar visualmente que a série de fato está convergindo para 0,5, como apontado pelo teorema. No caso em que $n = 1$:

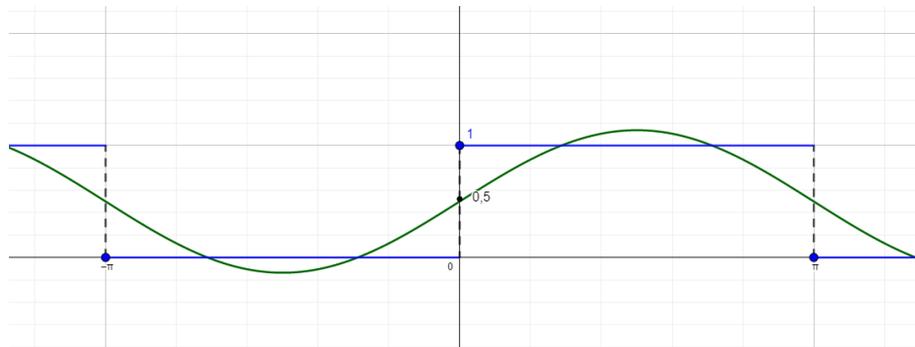


Figura 3.11: Gráfico das somas parciais
Fonte: Autor.

No caso em que $n = 6$:

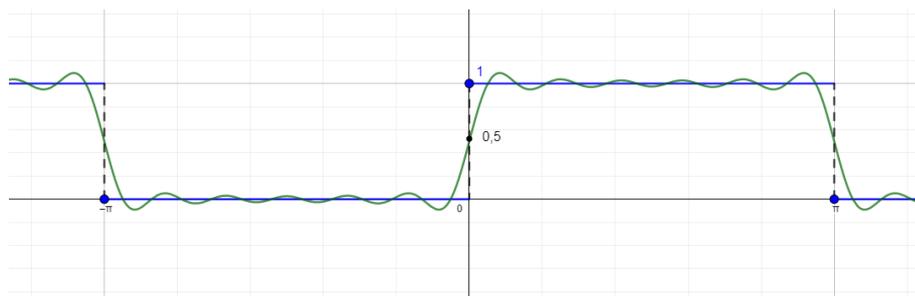


Figura 3.12: Gráfico das somas parciais
Fonte: Autor.

Podemos ver então que o teorema de Fourier, quando aplicado nos pontos de descontinuidade da função, converge para a média aritmética dos limites laterais da função no ponto de descontinuidade.

Outro fato importante que podemos notar é o comportamento da série de Fourier em pontos na qual a função é descontínua. Observe que em uma vizinhança dos pontos de descontinuidades a função dá alguns "saltos", e eles serão nosso alvo de discussão a partir de agora, porém, antes de darmos continuidade, iremos apresentar um teorema de convergência uniforme que será utilizado para compreendermos esse fenômeno.

Teorema 3.20. (*Teorema de Convergência Uniforme da Série de Fourier*)(DE FIGUEIREDO, 1977) *Seja f periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e tal que a derivada primeira é integrável e absolutamente integrável. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

Voltando para o exemplo, obviamente ela irá convergir uniformemente em todo intervalo fechado que não contém pontos de descontinuidade, mas nos pontos de descontinuidade isso não irá acontecer. Bom, sabemos que nos pontos de descontinuidade não teremos a convergência uniforme, mas e em sua vizinhança? A resposta para isso se dá nos estudos de Gibbs, pois ele estudou a convergência da série de Fourier em uma vizinhança dos pontos de descontinuidade da série, e um dos aspectos dessa convergência tem relação com os "saltos" que apontamos anteriormente, esse aspecto de convergência hoje é conhecido por *fenômeno de Gibbs*. Observe que em uma vizinhança de 0 (Exemplo 3.5) as somas parciais da função f ultrapassam o intervalo $[0, 1]$ no eixo y , esse fenômeno será apresentado a partir do seguinte teorema:

Teorema 3.21. (*Fenômeno de Gibbs*) (DE FIGUEIREDO, 1977) *Seja f uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua cuja derivada primeira seja integrável e absolutamente integrável. Então, o intervalo de Gibbs de f no ponto de descontinuidade \mathcal{E} é o conjunto dos y tais que:*

$$\left| y - \frac{f(\mathcal{E} + 0) + f(\mathcal{E} - 0)}{2} \right| \leq \frac{\omega}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\text{sen}(t)}{t} dt,$$

sendo $\omega = |f(\mathcal{E} + 0) - f(\mathcal{E} - 0)|$, que é o salto de f no ponto \mathcal{E} .

Aplicando o teorema no ponto $\mathcal{E} = 0$ do exemplo 3.5, teremos que o intervalo de Gibbs são os pontos y tais que:

$$\left| y - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\text{sen}(t)}{t} dt.$$

A função definida por:

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}(t)}{t} dt,$$

é conhecida como função *seno-integral*, que possui papel fundamental dentro das transformadas de Fourier. Essa integral é não trivial, sendo ela calculada a partir de aproximações numéricas feitas por softwares como WolframAlpha, ou por técnicas utilizadas no cálculo numérico, por exemplo. Utilizaremos a seguinte aproximação:

$$\left[-\frac{1}{\pi} Si(\pi), \frac{1}{\pi} Si(\pi) \right] \approx \left[\frac{-1,089}{2}, \frac{1,089}{2} \right], \quad (3.27)$$

logo, teremos que o intervalo de Gibbs do exemplo é, de acordo com (3.27):

$$\left| y - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1,089}{2},$$

então o conjunto de pontos y que representa o intervalo de Gibbs:

$$\left[-\frac{1,089}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1,089}{2} + \frac{1}{2} \right] = \left[-\frac{0,089}{2}, \frac{2,089}{2} \right].$$

Como já observamos, em uma vizinhança de 0 (Exemplo 3.5) as somas parciais da função f ultrapassam o intervalo $[0, 1]$ no eixo y , e isso nos induz ao seguinte questionamento, esse fato interfere de maneira significativa quando estamos interessados em integrar a função f em uma vizinhança de 0 ?

Responderemos essa pergunta introduzindo uma breve subseção relacionando a integrabilidade da série de Fourier com o fenômeno de Gibbs.

3.4.1 Integração da série de Fourier

Apresentaremos o teorema que nos garante a integração termo a termo da série de Fourier. Se nossa função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é igual sua série de Fourier, ou seja:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

com esta série convergindo uniformemente, podemos utilizar o Lema 3.1 para garantir que:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_a^b 1 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_a^b \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right).$$

Porém, nem sempre teremos que nossa função f é igual sua série de Fourier, então iremos apresentar um teorema com hipóteses mais fracas que também garantem a integração termo a termo.

Teorema 3.22. (DE FIGUEIREDO, 1977) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de*

período $2L$ e seccionalmente contínua, e sendo a sua série de Fourier a série:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right),$$

então a série de Fourier pode ser integrada termo a termo e:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_a^b 1 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx + b_n \int_a^b \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right).$$

Neste momento já possuímos as ferramentas para relacionar a integrabilidade da série com o fenômeno de Gibbs. Faremos essa relação a partir do Exemplo 3.5, integrando a função f e em uma vizinhança de 0 e também integrando sua série de Fourier em uma vizinhança de 0, para podermos comparar numericamente esses valores.

Note que nossa função utilizada no exemplo atende as hipóteses do teorema de integrabilidade.

Se integrarmos f no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ teremos que essa integral é igual a $\pi/2$, pois se trata de um gráfico de escada, então para obter o valor abaixo do gráfico basta calcular:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = -\frac{\pi}{2} \cdot 0 + \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Iremos agora utilizar do teorema de integração para integrar a série de Fourier no mesmo intervalo da função f . Desse modo, iremos obter:

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{(2k-1)\pi} \cdot \operatorname{sen}((2k-1)x) dx,$$

calculando separadamente as integrais:

- $\frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = \frac{1}{2} \cdot [x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2},$
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{(2k-1)\pi} \cdot \operatorname{sen}((2k-1)x) dx = 0,$

o fato da segunda integral ser igual a zero se deve ao fato de que $\operatorname{sen}((2k-1)x)$ é uma função ímpar definida em um intervalo simétrico.

Após integrarmos tanto f quanto sua série de Fourier no mesmo intervalo, intervalo esse que contém um ponto de descontinuidade no qual ocorre o fenômeno de Gibbs, as integrais ainda possuem mesmo valor, garantido pelo Teorema 3.22. Mesmo a função possuindo saltos em uma vizinhança do ponto de descontinuidade, que no nosso caso é 0, a integral em uma vizinhança de ponto mantém a mesma quando integramos sua série de Fourier.

3.4.2 Derivação termo a termo de uma série

Apresentaremos o teorema que nos garante a integração termo a termo de uma série, pois utilizaremos esse resultado para derivar uma série de Fourier.

Teorema 3.23. *(Derivação termo a termo)(DE FIGUEIREDO, 1977): Suponhamos que as funções $u_n(x)$ definidas em um intervalo I sejam continuamente deriváveis e que a série das derivadas $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ convirja uniformemente. Suponhamos ainda que, para um dado $x_0 \in I$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convirja. Então:*

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

3.4.3 Identidade Parseval

A identidade Parseval é uma importante ferramenta quando estamos estudando as séries de Fourier, essa identidade nos será útil quando formos estudar mais detalhadamente as soluções do problema de valor inicial e de fronteira envolvendo a condução do calor em uma barra delgada. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, com f e $|f|$ integráveis, a identidade Parseval nos garante que:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

A demonstração do resultado não será feita de forma detalhada pois o objetivo desse capítulo é utilizar os resultados de convergência. Iremos apresentar um lema que garante a validade da Identidade Parseval e aplicar um exemplo para o entendimento do leitor.

Lema 3.24. *Seja $\phi_i, i \in \mathbb{N}$ um conjunto de vetores ortonormais e seja c_1, c_2, \dots uma sequência de números complexos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$. Então para qualquer $\phi \in \mathcal{H}$ a série de vetores:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_i \phi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i \phi_i, \quad (3.28)$$

converge, e a norma do vetor limite é $(\sum_{n=1}^{\infty} |c_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.25. *(Identidade Parseval II) Sejam f e g duas funções de período $2L$ e de classe C^1 por partes em $[-2L, L]$ e $S_1(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L))$ e $S_2(x) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\pi x/L) + B_n \sin(n\pi x/L))$ suas respectivas séries de Fourier:*

$$\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(t)g(t)dt = \langle f, g \rangle.$$

Capítulo 4

Aplicações da série de Fourier no problema de calor

Neste capítulo iremos verificar como as condições iniciais influenciam na série de Fourier, trabalhando os demais problemas envolvendo condução de calor em uma barra delgada, com outras condições de fronteiras mais desafiadoras e aplicando a série de Fourier para solucionar esses problemas, pois até o momento, solucionamos o problema de condução de calor na barra apenas no caso mais simples, no qual a temperatura na fronteira é constante e igual a zero durante a variação do tempo.

Nosso objetivo ao final do capítulo é aplicar a série de Fourier para solucionar os problemas envolvendo a condução do calor em uma barra delgada e que o leitor consiga absorver os conceitos apresentados para compreender como podemos aplicar a série de Fourier para resolver problemas de ciências da natureza, que no nosso caso, será a condução de calor em uma barra delgada. Iremos explorar com mais detalhes a temperatura nula na fronteira, um novo caso onde a derivada parcial com relação a x na fronteira é igual a zero e por fim, uma condição não homogênea de fronteira.

4.1 Temperatura de fronteira igual a 0°C

No Capítulo 2 utilizamos como motivação inicial para os estudos mais detalhados da série de Fourier o problema envolvendo condução de calor em uma barra delgada, no qual sua temperatura é mantida constante igual a 0°C , que basicamente consiste em encontrar uma função $u(x, t)$ que satisfaça a equação do calor, a condição de fronteira e a condição inicial. Matematicamente falando, estamos interessados em encontrar uma função $u(x, t)$ definida no plano com $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq L$, satisfazendo as condições:

$$\begin{cases} u_t = Ku_{xx}, & t > 0, 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (4.1)$$

com $K \in \mathbb{R}$ e f uma função de distribuição do calor no instante $t = 0$ conhecidas. Quando abordamos esse problema no Capítulo 3, conseguimos expressar uma função que seria candidata a satisfazer esse problema de condução do calor na barra, e deduzimos que tal função $u(x, t)$ deve ter a seguinte expressão:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \forall t > 0 \text{ e } x \in [0, L], \quad (4.2)$$

e para que a condição inicial seja satisfeita, nossos coeficientes c_n devem ser escolhidos de forma que nossa função de distribuição de temperatura tenha a seguinte expressão, quando $t = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right). \quad (4.3)$$

Como estudamos os coeficientes de Fourier, sabemos que c_n deve ser o coeficiente de Fourier da função f em $[0, L]$, porém precisamos estender nossa f na reta toda, de modo que ela seja periódica de período $2L$ e ímpar, para conseguirmos expressar o coeficiente c_n . Sabemos que essa extensão é possível, pois isso foi feito durante o estudo dos coeficientes de Fourier, então, sendo assim, nossa expressão para o coeficiente é da seguinte forma:

$$c_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx,$$

pois utilizamos as propriedades de função ímpar para expressar c_n . Uma observação importante a ser feita é que nem sempre vamos ter a igualdade (4.3) para uma função f arbitrária, pois para que ela ocorra, algumas condições sobre f precisam ser impostas. Primeiramente temos que f deve ser contínua (condição inicial do PVIF), o que nos garante que f seja seccionalmente contínua, que $f(0) = f(L) = 0$ (condição de fronteira do PVIF) e por fim que f' seja seccionalmente contínua, pois tendo essas hipóteses conseguimos assegurar pelo Teorema de Fourier 3.17 que f irá convergir para sua série de Fourier $\forall x \in [0, L]$.

Até o momento o que fizemos foi expressar um candidato a solução do nosso problema de calor, mas ainda não verificamos que de fato a série infinita satisfaz (4.1), e nosso objetivo de agora em diante é verificar rigorosamente que tal função $u(x, t)$ descrita dessa forma é de fato uma solução. Para isso, iremos definir o que é uma solução do nosso PVIF (4.1), mas antes, iremos lembrar quem é são os conjuntos $\bar{\mathcal{R}}$ e \mathcal{R} , que são regiões do plano xt .

$$\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, \quad t > 0\},$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0\}.$$

Definição 4.1. (Solução do PVIF-Sentido I)(DE FIGUEIREDO, 1977) Uma função u :

$\bar{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do PVIF (4.1) se ela for contínua em $\bar{\mathcal{R}}$, tiver derivadas parciais u_t e u_{xx} em \mathcal{R} e satisfazer as três relações em (4.1).

Definição 4.2. (Solução do PVIF-Sentido II)(DE FIGUEIREDO, 1977) Uma função contínua $u : \bar{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução do PVIF (4.1) se:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = Ku_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\psi(x)dx = \int_0^L f(x)\psi(x)dx, \end{array} \right.$$

para toda função $\psi(x)$ seccionalmente contínua em $[0, L]$.

Se temos uma solução no sentido da primeira definição, conseguimos chegar na segunda. Se uma função u é solução no PVIF no primeiro sentido, para concluir que essa função também é solução no segundo sentido, basta verificar que ocorre a seguinte relação:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\psi(x)dx = \int_0^L f(x)\psi(x)dx.$$

Isso de fato ocorre, pois seja $\psi(x)$ uma função seccionalmente contínua e I_n , $n = 1, \dots, k$, uma partição disjunta do intervalo $[0, L]$, de forma que ψ seja contínua em cada I_n . Como em cada I_n ψ é contínua, o produto $u(x) \cdot \psi(x)$ será contínuo para todo $x \in I_n$ para cada n , então podemos integrar esse produto, porém esse produto também converge uniformemente no conjunto $\{(x, t) : x \in I_n, 0 \leq t \leq 1\}$, então olhando para o limite teremos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{I_n} u(x, t)\psi(x)dx = \int_{I_n} f(x)\psi(x)dx,$$

para cada n , porém como os I_n são uma partição de $[0, L]$, acontece que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t)\psi(x)dx = \int_0^L f(x)\psi(x)dx.$$

De fato, se u é solução do primeiro tipo, também será uma solução do tipo dois, mas a volta não é válida, olhamos como uma solução aproximada, lembrando o teorema do valor médio da integral 6.4. Antes do próximo resultado, iremos lembrar que uma função f é um quadrado integrável em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ quando a integral de f^2 em $[a, b]$ possui valor finito.

Teorema 4.3. (DE FIGUEIREDO, 1977) Se f for um quadrado integrável em $[0, L]$, então a expressão (4.2) define uma função em \mathcal{R} que é solução do PVIF (4.1) no sentido II.

Demonstração: Considere as seguintes séries para $K > 0$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \\ f_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right), \\ f_3(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right). \end{aligned}$$

Afirmamos que as três séries convergem uniformemente em qualquer sub-retângulo de $\bar{\mathcal{R}}$:

$$\bar{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t) : 0 \leq x_1 \leq x \leq x_2 \leq L, \quad 0 < t_1 < t < t_2 < \infty\}.$$

De fato as séries convergem. Conseguimos majorar as três séries, utilizando principalmente o fato de que o módulo da função trigonométrica seno é sempre menor ou igual a um e também o fato de que conseguimos majorar os c_n , pois $f(x)$ é uma função contínua em um intervalo limitado, portanto, a integral existe e é limitada, e utilizando o fato de que o módulo de f é contínua, conseguimos majorar todo c_n por uma constante $c \in \mathbb{R}$, então, dessa forma, as séries são majoradas por $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\alpha n^2}$, respectivamente, com $\alpha = \pi^2 K t_1 / L^2$. A convergência dessas séries se dá pelo teste da razão, calcularemos apenas a primeira, e as demais seguem de forma análoga:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha(n+1)^2}}{e^{-\alpha n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\alpha(n+1)^2 + \alpha n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\alpha(n^2 + 2n + 1 - n^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\alpha(2n+1)} \\ &= 0 < 1, \end{aligned}$$

portanto a série converge. Como $|f_1(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2}$ todo $x \in [0, L]$ e também temos a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2}$, pelo teste M de Weierstrass temos a convergência uniforme de f_1 em $[0, L]$, e de modo análogo, as demais séries convergem uniformemente.

Utilizamos agora o teste M de Weierstrass. Desse modo, a convergência uniforme da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t / L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right),$$

em sub-retângulos de $\bar{\mathcal{R}}$ garante a continuidade dessa série em $\bar{\mathcal{R}}$. Agora, aplicando o Teorema 3.23 para cada t fixado, teremos o seguinte resultado: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ uma série de funções continuamente diferenciáveis em um retângulo $\bar{\mathcal{R}}_{12} = \{(x, t) : 0 \leq x_1 \leq$

$x \leq x_2 \leq L$, $0 < t_1 < t < t_2 < \infty$ }, tal que ela convirja para a função $u(x, y)$ e tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \partial u_n(x, y)/\partial x$, obtida por derivação termo a termo, convirja uniformemente para uma função $v(x, y)$. Então, $\partial u/\partial x$ existe e é igual a v .

Utilizando o resultado anterior, podemos garantir que:

$$u_t(x, t) = -\frac{\pi^2 K}{L^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 K t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

e

$$u_{xx}(x, t) = -\frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 K t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

pois as séries apresentadas verificam a hipótese de convergência uniforme, pois ambas são formadas pelo produto de uma constante por uma série que converge uniformemente, como mostrado anteriormente. Logo nossa função u é uma solução da equação do calor, pois $u_t(x, t) = K u_{xx}$ em $\bar{\mathcal{R}}$. Observe que a condição $u(0, t) = u(L, t) = 0$ também é verificada, isso já foi detalhado quando fizemos a motivação para os estudos da série de Fourier.

Agora, resta mostraremos que a condição:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x) \psi(x) dx,$$

é satisfeita. Consideremos $\psi(x)$ seccionalmente contínua de coeficientes b_n estendida como função ímpar e periódica de período $2L$. Note que estendendo ψ dessa forma teremos uma série de senos. Pela Identidade Parseval 3.25, como c_n e b_n são os coeficientes das séries de Fourier de $f(x)$ e $\psi(x)$, respectivamente, teremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \psi(x) dx. \quad (4.4)$$

Por outro lado:

$$\int_0^L u(x, t) \psi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L c_n e^{-n^2 \pi^2 K t/L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \psi(x) dx, \quad (4.5)$$

para $t > 0$. Utilizando a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 K t/L^2} \operatorname{sen}(n\pi x/L) \psi(x)$ em $x \in [0, L]$, de (4.5) e novamente utilizando a Identidade Parseval 3.25:

$$\int_0^L u(x, t) \psi(x) dx = \frac{L}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 K t/L^2} c_n b_n, \quad t > 0, \quad (4.6)$$

e por fim, temos que:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} c_n b_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| |c_n| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \right) < \infty, \quad t \geq 0, \quad (4.7)$$

isso vêm da seguinte desigualdade $|\alpha||\beta| \leq (1/2)(\alpha^2 + \beta^2)$.

Desse modo, a primeira série de (4.7) converge uniformemente para $t \geq 0$, sendo assim, quando olharmos para essa série no limite com t convergindo para 0, pela continuidade em t teremos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} c_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n. \quad (4.8)$$

Olhando para o limite quando $t \rightarrow 0$ em (4.6) e utilizando o fato de que essa série converge uniformemente, junto com (4.4) teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \psi(x) dx &\stackrel{(4.6)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} c_n b_n \\ &\stackrel{(4.8)}{=} \frac{L}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n \\ &\stackrel{(4.4)}{=} \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \psi(x) dx \\ &= \int_0^L f(x) \psi(x) dx, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema. \square

Teorema 4.4. (DE FIGUEIREDO, 1977) *Seja $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(0) = f(L) = 0$ e tal que a derivada f' exista em $[0, L]$ e seja quadrado integrável. Então a expressão (4.2) define uma função contínua em $\bar{\mathcal{R}}$, que é solução do PVIF (4.1) no sentido I.*

Demonstração: Pela continuidade de f , e sabendo que o produto entre funções contínuas é uma função contínua, temos que f^2 é uma função contínua, portanto, f é um quadrado integrável de acordo com o Lema 2.5. Sendo f quadrado integrável, pelo Teorema 4.3 temos que a expressão (4.2) é solução do PVIF (4.1) no sentido II, logo, basta mostrar que tal expressão define uma função contínua em $t \geq 0$, e para isso, iremos mostrar que a série converge uniformemente e utilizar o resultado (6.10) do apêndice. Note que a (4.2) é majorada $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, pois:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left| e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \right| \left| \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.
\end{aligned}$$

Basta mostrarmos que a última série converge, pois se isso ocorrer, podemos utilizar o teste M de Weierstrass e garantir a continuidade da primeira série em $\bar{\mathcal{R}}$. Para utilizar a hipótese de f' ser quadrado integrável, precisamos de alguma forma relacionar c_n com os coeficientes de Fourier de f' , para isso, iremos utilizar a integração por partes na expressão de c_n :

$$c_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx = -\frac{2}{n \pi} \cdot f(x) \cos \left(\frac{n \pi x}{L} \right) \Big|_0^L + \frac{2}{n \pi} \cdot \int_0^L f'(x) \cos \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx,$$

e disso temos:

$$c_n = \frac{2}{n \pi} \cdot \int_0^L f'(x) \cos \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx,$$

o que nos fornece:

$$c_n = \frac{L}{n \pi} d_n, \quad d_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f'(x) \cos \left(\frac{n \pi x}{L} \right) dx.$$

Observe que d_n são os coeficientes da série de Fourier de f' estendida como função par, periódica de período $2L$. Dessa última relação, utilizando a desigualdade $|\alpha||\beta| \leq (1/2) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)$, segue:

$$|c_n| = |L/n\pi||d_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{n^2 \pi^2} \right) + \frac{1}{2} d_n^2,$$

e portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty,$$

uma vez que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge e pela desigualdade de Bessel, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \leq (2/L) \int_0^L |f'(x)|^2 dx$, que possui valor real de acordo com a hipótese de f' ser quadrado integrável, e está demonstrado. \square

4.2 Estudando novas condições de fronteira

Até o momento estudamos apenas a condução de calor em uma barra delgada na condição de fronteira mais simples possível, que é a temperatura constante e igual a

zero, porém, existem outras condições mais desafiadoras que serão trabalhadas agora. Os métodos utilizados serão semelhantes aos usados para a temperatura na fronteira constante e igual a zero, porém, com algumas sutilezas que acarretarão mudanças na série de Fourier.

Exemplo 4.5. (Derivada nula na fronteira) Considere uma barra delgada isolada termicamente em todo seu comprimento e nas extremidades. Temos o mesmo objetivo que anteriormente, queremos buscar uma função $u(x, t)$ definida em $\bar{\mathcal{R}}$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = K u_{xx}, t > 0, 0 < x < L, \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x) \psi(x) dx. \end{array} \right.$$

Note que neste problema a temperatura nas extremidades da barra tem derivada parcial com relação a x igual a zero, o que é diferente da temperatura ser zero nas extremidades. Utilizando novamente o método da separação de variáveis, temos que $u(x, t) = F(x)G(t)$, e substituindo na equação do calor teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} G'(t) - G(t)K\zeta = 0, \quad t \geq 0, \\ F''(x) - F(x)\zeta = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \end{array} \right.$$

onde ζ é um parâmetro a ser determinado, de modo que as soluções satisfaçam a condição de fronteira, que nesse caso é $F'(0) = F'(L) = 0$. Temos novamente três possibilidades para o parâmetro, ou $\zeta = 0$, ou $\zeta > 0$, ou $\zeta < 0$, e assim como no primeiro exemplo trabalhado, o único caso em que não temos uma função u identicamente nula é o caso em que $\zeta < 0$, os demais casos geram funções desse tipo, o que não nos interessa para os estudos da Série de Fourier.

Sendo $\zeta < 0$, nossa função F terá a seguinte solução geral:

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x),$$

sendo c_1 e c_2 coeficientes reais. Como precisamos atender a condição de fronteira, iremos calcular a derivada de F , desse modo:

$$F'(x) = c_2 \lambda \cos(\lambda x) - c_1 \lambda \sin(\lambda x),$$

e finalmente podemos observar que se $F'(0) = 0$, teremos que nosso coeficiente $c_2 = 0$. Quando olharmos para $F'(L) = 0$, teremos que $\sin(\lambda L) = 0$, pois se $c_1 = 0$ teremos novamente u identicamente nula e nosso parâmetro é menor que zero, desse modo, de

forma análoga ao primeiro caso trabalhado, teremos:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \text{ e } \zeta_n = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Para cada $n = 0, 1, \dots$, teremos o λ_n correspondente e conseqüentemente a $F_n(x)$ correspondente, que nesse caso, tem expressão:

$$F_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

e a partir do parâmetro ζ_n conseguimos expressar utilizando os métodos de solução de EDO temos a função $G_n(t) = e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2}$, e por fim, nossa família enumerável de soluções:

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Para cada $n = 0, 1, \dots$, teremos que u_n é solução do problema quando nossa função de distribuição de temperatura no instante inicial f é uma função possui uma expressão ideal, que nesse caso, seria o produto de uma constante por um cosseno. Utilizando a mesma ideia do primeiro exemplo trabalhado, observando o problema utilizando o princípio de superposição finita de soluções e posteriormente olhando para $n \rightarrow \infty$, teremos que:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \forall t > 0 \text{ e } x \in [0, L],$$

será solução do problema de calor quando nossa função de distribuição inicial de temperatura possuir a seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (4.9)$$

Em nossa primeira discussão sobre esse tipo de problema questionamos como obter os coeficientes c_n , porém, já temos recursos suficientes para expressá-los, pois eles são os coeficientes de Fourier da função f estendida como função par, periódica de período $2L$, e sendo assim, temos:

$$c_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L f(x) dx, \quad (4.10)$$

$$c_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

e portanto a solução do PVIF neste caso deve ser dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (4.11)$$

sendo os c_n calculados em (4.10). Bom, basta mostrarmos agora que de fato (4.11) é solução do PVIF, ou seja, u define uma função contínua em $\bar{\mathcal{R}}$ e infinitamente diferenciável em \mathcal{R} . De fato, conseguimos majorar u por $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2}$, com $\alpha = \pi^2 K^2 t / L^2$ e utilizar o teste M de Weierstrass para garantir que a convergência da série seja uniforme, e posteriormente utilizar o resultado (6.10) do apêndice, que nos garante que a convergência uniforme de u define uma função contínua em $\bar{\mathcal{R}}$, e além disso, u infinitamente diferenciável em \mathcal{R} . Tal função também satisfaz a equação do calor e também atende as condições de fronteira, porém, nos resta questionar sobre a condição inicial. Nossa função de distribuição de calor (4.9) só irá se verificar para todo $x \in [0, L]$ se atribuirmos a f algumas hipóteses como a sua continuidade e existência da derivada $f'(x)$ como uma função seccionalmente contínua. Se nossa função f não for contínua, caso f seja um quadrado integrável, (4.11) satisfaz a condição inicial no sentido mais fraco:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^L u(x, t) \psi(x) dx = \int_0^L f(x) \psi(x) dx,$$

sendo ψ uma função seccionalmente contínua. \square

Exemplo 4.6. (Condição não homogênea de fronteira) Para complementar o estudo da condução de calor em uma barra delgada, iremos estabelecer agora uma condição de fronteira não homogênea, no qual a temperatura na fronteira é não nula. Queremos determinar $u(x, t)$ de modo que:

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx}, & t > 0, 0 < x < L, \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_1(t), & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (4.12)$$

sendo f, h_0, h_1 funções dadas. Para resolver esse PVIF iremos modifica-lo de modo que ele seja semelhante a um problema de condição de fronteira homogênea, pois esse tipo de problema conseguimos resolver de forma natural utilizando o método de Fourier. Suponha que exista uma função $v(x, t)$ definida em $\bar{\mathcal{R}}$ com valores na reta, $v \in C^2$ tal que $v(0, t) = h_0(t)$ e $v(L, t) = h_1(t)$. Seja $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$, sendo u a solução do PVIF (4.12), w deve satisfazer o problema:

$$\begin{cases} w_t = K w_{xx} + g(x, t), & t > 0, 0 < x < L, \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, & t > 0, \\ w(x, 0) = f(x) - v(x, 0), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (4.13)$$

sendo $g(x, t) = K v_{xx} - v_t$. Caso seja possível determinar v de modo que ela seja uma solução da equação do calor, teríamos g identicamente nula, e isso tornaria w uma solução

do PVIF em que a temperatura na fronteira da barra é nula, o que já foi estudado. Vejamos o caso em que $h_0 = \alpha$ e $h_1 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Iremos determinar uma expressão para v solucionando o seguinte PVIF com relação a v :

$$\begin{cases} v_t = K v_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ v(0, t) = \alpha, \quad v(L, t) = \beta, & t > 0, \\ v(x, 0) = g(x), & 0 < x < L, \end{cases}$$

utilizando o método de Fourier, que consiste em expressar $v(x, t) = F(x)G(t)$, para obter as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} F''(x) - F(x)\zeta = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ G'(t) - G(t)K\zeta = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

e então, obtemos a expressão geral da solução $G(t) = ce^{K\zeta t}$, com $c \in \mathbb{R}$. Utilizando as condições de fronteira, temos:

$$\begin{aligned} \alpha &= F(0)G(t) = F(0)ce^{K\zeta t}, \\ \beta &= F(L)G(t) = F(L)ce^{K\zeta t} \implies \zeta = 0, \end{aligned}$$

pois $Ce^{K\zeta t}$ não é constante se $\zeta \neq 0$. Sabendo que nosso parâmetro é igual a zero, iremos expressar a solução geral de $F(x)$:

$$\begin{cases} F''(x) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ F(0) = \alpha/c, \\ F(L) = \beta/c, \end{cases}$$

e além disso, $g'(t) = 0$ implica que $g(t) = c$. Desse modo, $F(x) = c_1x + c_2$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Utilizando as demais informações temos que $\alpha/c = c_0$ e $c_1L + \alpha/c = \beta/c$, o que nos implica $c_1 = (\beta - \alpha)/cL$. Segue que:

$$F(x) = \frac{(\beta - \alpha)}{cL}x + \frac{\alpha}{c},$$

e por fim esboçamos a expressão de v :

$$v(x, t) = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)}{L}x.$$

Note que v é uma solução da equação do calor pois $v_t = 0$ e $v_{xx} = 0$, logo g é

identicamente nula e w deve ser solução do seguinte PVIF:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_t = Kw_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ w(x, 0) = f(x) - \alpha + (\beta - \alpha)x/L, \quad 0 < x < L, \end{array} \right.$$

no qual a solução já é conhecida, pois basicamente esse é um problema homogêneo com temperatura nula na fronteira, e a expressão de w portanto é:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right),$$

sendo c_n os coeficientes da função $f(x) - \alpha - [(\beta - \alpha)/L]x$. Portanto, u que é solução do nosso problema tem a seguinte expressão:

$$u(x, t) = \alpha + \left(\frac{\beta - \alpha}{L} \right) x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \left(\frac{n \pi x}{L} \right).$$

Note que da mesma maneira que anteriormente, precisamos atribuir a função f certas condições para que ela consiga satisfazer a condição inicial. \square

Certamente há outras condições de fronteira mais desafiadoras, como por exemplo quando $h_0(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t$ e $h_1(t) = \beta_1 + \beta_2 t$, sendo α_i e β_i constantes reais para $i = 1, 2$, porém, essas condições não serão amplamente exploradas pois o trabalho irá explorar outras aplicações da série de Fourier na resolução de problemas matemáticos. Caso o leitor se interesse e queira explorar outras condições, elas podem ser encontradas na principal referência do trabalho que é (DE FIGUEIREDO, 1977).

Capítulo 5

Problema Isoperimétrico

O Problema Isoperimétrico é um problema matemático com origem histórica ligada a fundação de Cartago, uma das principais cidades comerciais da Antiguidade, localizada no norte do continente africano. Segundo a lenda, Elisa, irmã do rei Pigmalião de Tiro, ganharia toda a terra que ela conseguisse cercar utilizando o couro de uma única vaca. Para isso, Elisa cortou o couro em pequenas tiras e cobriu um vasto terreno em forma circular, que por sinal é a curva que engloba maior área entre todas de mesmo perímetro, e tal problema hoje é conhecido como problema isoperimétrico.

Vamos fazer uma breve revisão sobre curvas paramétricas no plano, apresentar a Desigualdade Isoperimétrica como um teorema e demonstrá-lo utilizando as séries de Fourier e o Teorema de Green. Tal demonstração nos fornece mais uma aplicação da série de Fourier dentro de problemas matemáticos.

5.1 Curvas paramétricas no plano

Iremos relembrar ao leitor alguns conceitos fundamentais envolvendo curvas paramétricas no plano, já que o problema isoperimétrico se trata de um problema de geometria diferencial, e também apresentaremos o Teorema de Green para que seja possível o entendimento completo da demonstração, pois esses conceitos são fundamentais para que possamos estudar a Desigualdade Isoperimétrica. Serão apresentadas definições e alguns resultados envolvendo curvas paramétricas e por fim o Teorema de Green.

Definição 5.1. Uma curva parametrizada é uma função $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , para algum k . Notação (em termos de funções de coordenadas): $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$. Se α é derivável em t , escreve-se derivada de α em t :

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t)),$$

e $\alpha'(t)$ é o vetor tangente de α em t .

No nosso caso, para atingir nosso objetivo iremos trabalhar com curvas no plano,

ou seja, quando $n = 2$. Além disso, diremos que uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, sendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é fechada quando $\alpha(a) = \alpha(b)$, e essa curva será chamada de simples quando tivermos $\alpha(a_1) \neq \alpha(b_1)$ para $a < a_1 < b_1 < b$. Por fim, se $\alpha \in C^\infty$, a curva é dita regular.

Exemplo 5.2. Seja $\alpha : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva definida por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. A imagem da curva é a circunferência centrada na origem e de raio igual a 1:

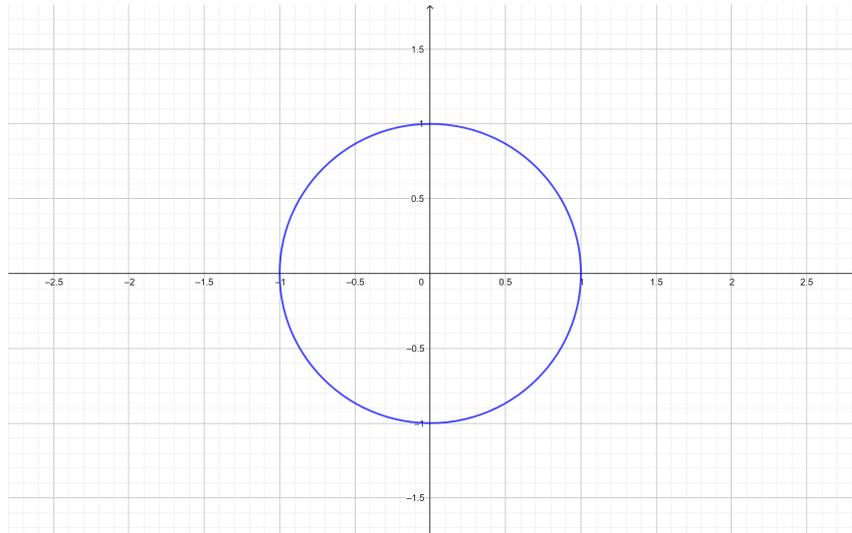


Figura 5.1: Imagem da curva α .

Fonte: Autor.

Olhando para a figura, intuitivamente temos a sensação de que essa curva é uma curva fechada, porém, isso não se verifica. Apesar da imagem parecer "fechada", note que $\alpha(0) \neq \alpha(3\pi)$, e isso nos garante que tal curva não é fechada. \square

Definiremos agora o que são curvas retificáveis, ou seja, curvas cuja a medida do percurso são finitas. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva no plano, seja $P = a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Iremos associar a curva α e a partição P o número:

$$l(\alpha, P) = \sum_{j=1}^n \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\|,$$

que é o comprimento da poligonal que liga os pontos $\alpha(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n-1, n$, que estão sobre a trajetória da curva. Finalmente temos condições de definir o que é uma curva retificável.

Definição 5.3. Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita retificável se existe $\sup_P l(\alpha, P)$, com P variando entre todas partições possíveis de $[a, b]$. Este supremo é denominado comprimento de α , que é denotado por $l(\alpha)$.

Exemplo 5.4. Uma observação importante a ser feita é que continuidade não implica

que a curva seja retificável. Seja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{cases} f(t) = t \sin\left(\frac{1}{t}\right), & t \neq 0, \\ f(t) = 0, & t = 0. \end{cases}$$

A função f é contínua no intervalo $[-1, 1]$, porém, apesar disso, ela não é retificável. Observe a imagem de f :

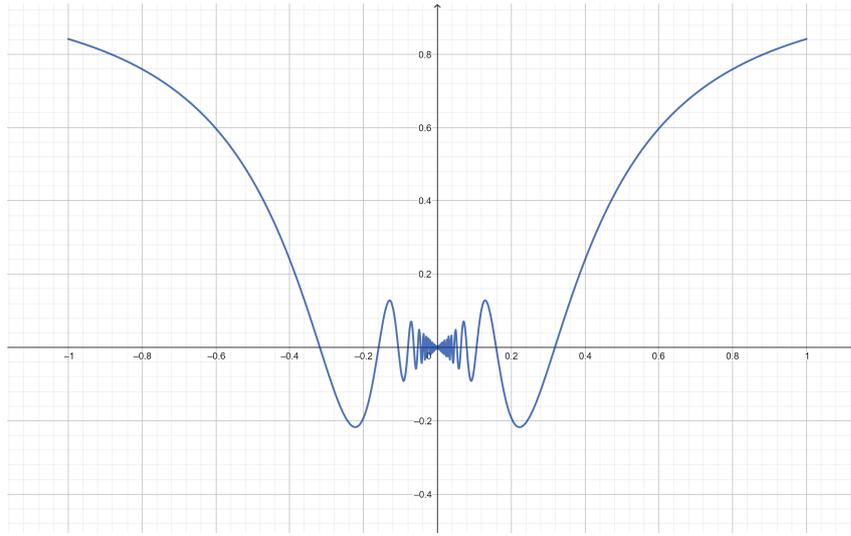


Figura 5.2: Imagem da curva f .

Fonte: Autor.

Quando t se aproxima da origem, a curva f oscila infinitamente em torno de zero, e isso faz com que nossa poligonal tenha comprimento infinito, logo, não é retificável. \square

Como estamos interessados em resolver o problema isoperimétrico utilizando séries de Fourier, estaremos interessados em estudar curvas seccionalmente diferenciáveis, que é quando as funções componentes da curva forem funções seccionalmente diferenciáveis, ou seja, uma curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ será seccionalmente diferenciável se $x(t)$ e $y(t)$ forem funções seccionalmente diferenciáveis. Sabemos que o comprimento de uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado pela integral:

$$l = \int_a^b |\alpha'(t)| dt,$$

mas como α é seccionalmente diferenciável, temos que seu comprimento é dado por:

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (5.1)$$

Desse modo, dada uma curva C , de comprimento L , que corresponde ao caminho $\alpha(t)$ quando t no domínio $[a, b]$, expressamos um parâmetro s que depende de t a partir da

integral (5.1), denominado comprimento de arco, por:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (5.2)$$

Definição 5.5. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento do arco se:

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du = t - t_0,$$

ou seja, a curva será parametrizada pelo comprimento do arco se e somente se, $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$.

Se a curva α for injetiva e de classe C^k , é possível mostrar que existe uma reparametrização β de α , de modo que β seja uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Essa informação será importante quando estivermos demonstrando o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica. Detalhes dessa demonstração podem ser encontradas em (PEREIRA, 2019).

Teorema 5.6. (Teorema de Green)(GUIDORIZZI, 2002). Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um compacto, com interior não vazio, cuja fronteira é imagem da curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, fechada, simples, C^1 por partes e orientada no sentido anti-horário. Sejam P e Q de classe C^1 num aberto contendo K . Nestas condições:

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy.$$

Definição 5.7 (Produto de Cauchy). Sejam a_n e b_n seqüências de números reais e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suas respectivas séries, sendo assim, o produto de Cauchy é definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad \text{com} \quad c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}.$$

Apresentada a última informação essencial, temos condições suficientes para começar o estudo do Problema Isoperimétrico.

5.2 A Desigualdade Isoperimétrica

Iremos apresentar agora o problema isoperimétrico, por meio de teorema.

Teorema 5.8. (Desigualdade Isoperimétrica)(DE FIGUEIREDO, 1977) A área A englobada por qualquer curva simples plana fechada retificável C , de comprimento L , satisfaz a desigualdade:

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}, \quad (5.3)$$

além disso, a igualdade ocorre, se e somente se, C for um círculo.

Demonstração: Seja $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva no plano com $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, com parametrização pelo comprimento de arco de C , que é possível, pois α é injetiva em seu interior e de classe C^k . Sabemos que α é fechada, desse modo, teremos que $\alpha(0) = \alpha(L)$, e como α é de classe C^k , também temos que $\alpha^{(k)}(0) = \alpha^{(k)}(L)$ com $k \geq 1$. Como já feito anteriormente, iremos considerar as extensões L -periódicas das funções $x(t)$ e $y(t)$, de forma que elas estejam definida na reta toda. Observe que, feito isso, agora $x(t)$ e $y(t)$ possuem expansão por séries de Fourier absolutamente convergentes pelo Teorema 3.20, já que ambas são funções de período L , contínuas (o que implica seccionalmente contínua), possuem derivada primeira integrável (já que ambas são de classe C^k) e são absolutamente integráveis pois são limitadas. Desse modo, considerando $L = 2l$, temos:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi t}{l} \right) \right),$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + d_n \sin \left(\frac{n\pi t}{l} \right) \right),$$

sendo a_n e b_n os coeficientes de Fourier de $x(t)$, e também c_n e d_n os coeficientes de Fourier de $y(t)$. Iremos utilizar o Teorema (3.23) da derivação termo a termo da série para obter:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi}{l} \cdot \left(-a_n \sin \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + b_n \cdot \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) \right) \right],$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi}{l} \cdot \left(-c_n \sin \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + d_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) \right) \right].$$
(5.4)

Pela Identidade Parseval em (5.4):

$$\frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l (x'(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cdot (a_n^2 + b_n^2) \right],$$

$$\frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l (y'(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cdot (c_n^2 + d_n^2) \right].$$

Somando ambas as expressões, utilizando as operações com integrais e também com séries, iremos obter:

$$\frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l (x'(t)^2 + (y'(t))^2) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cdot (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) \right],$$

como a curva α é parametrizada pelo comprimento de arco, temos que $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in [0, L]$, sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l (x'(t)^2) + (y'(t)^2) dt &= \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l |\alpha'(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l 1 dt \\ &= 2, \end{aligned}$$

e então:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cdot (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) \right] &= 2 \\ \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)] &= 2l^2 = \frac{L^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Como estamos interessados em relacionar a área A com comprimento L , iremos utilizar o Teorema de Green com $P = 0$ e $Q = x$, nos fornecendo que a área A satisfaz a seguinte relação:

$$A = \oint_C x dy = \int_{-l}^l x(t)y'(t) dt. \quad (5.6)$$

Calculando a integral, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l x(t)y'(t) dt &= \int_{-l}^l \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + b_n \sen \left(\frac{n\pi t}{l} \right) \right) \right] \cdot \\ &\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi}{l} \cdot \left(-c_n \sen \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + d_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) \right) \right] \right] dt. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Agora, defina as funções $A_n(t)$ e $B_n(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_n(t) &= a_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + b_n \sen \left(\frac{n\pi t}{l} \right), \\ B_n(t) &= \frac{n\pi}{l} \cdot \left(-c_n \sen \left(\frac{n\pi t}{l} \right) + d_n \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \right) \right), \end{aligned}$$

e por fim, faça a distributiva na expressão (5.7) e depois utilize a propriedade de integral da soma para obter as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} i) &\quad \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) dt; \\ ii) &\quad \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) dt. \end{aligned}$$

Note que somando as expressões *i)* e *ii)* iremos obter exatamente (5.7). Calculando separadamente as expressões:

$$i) \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) dt = \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l B_n(t) dt = \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Foram utilizados as relações de ortogonalidade do Exemplo 2.8 e também o fato das séries convergirem uniformemente, para que seja possível a comutatividade entre o símbolo da integral e do somatório. Concluimos que a primeira parcela da expressão (5.7) é nula. Agora, olhando para a segunda expressão:

$$ii) \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) dt.$$

Para dar continuidade no cálculo da expressão, iremos utilizar o produto de Cauchy 5.7 :

$$\begin{aligned} ii) \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) dt &= \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) dt, \quad \text{com } C_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k(t) B_{n-k}(t) \\ &= \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n A_k(t) B_{n-k}(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \int_{-l}^l A_k(t) B_{n-k}(t) dt, \end{aligned}$$

expandindo o somatório e utilizando novamente as relações de ortogonalidade do Exemplo 2.8, teremos após fazer todos os processos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)\pi}{l} \cdot \int_{-l}^l a_k d_{n-k} \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \cos\left(\frac{(n-k)\pi t}{l}\right) \\ &- b_k c_{n-k} \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \sin\left(\frac{(n-k)\pi t}{l}\right) dt. \end{aligned}$$

Novamente das relações de ortogonalidade, temos que quando $n = 2k$, o produto dos cossenos e o produto dos senos resulta em l , porém, quando $n \neq 2k$ os mesmos produtos são iguais a zero, sendo assim:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-k)\pi}{l} \cdot (a_k d_k l - b_k c_k l) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k d_k - b_k c_k).$$

Finalmente concluimos que a expressão (5.6) é igual a:

$$A = \oint_C x dy = \int_{-l}^l x(t) y'(t) dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n). \quad (5.8)$$

Utilizando as relações (5.5) e (5.8), iremos obter:

$$\begin{cases} L^2 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)], \\ -4\pi A = -4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [n(a_n d_n - c_n b_n)], \end{cases}$$

e somando ambas expressões, finalmente obtemos:

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)] - 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} [n(a_n d_n - c_n b_n)] \\ &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} [n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} [n(a_n d_n - c_n b_n)] \right) \\ &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} [n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2n(a_n d_n - c_n b_n)] \right) \\ &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} [n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2 + n^2 c_n^2 + n^2 d_n^2 - 2n a_n d_n + 2n c_n b_n] \right) \\ &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} [n^2 a_n^2 - 2n a_n d_n + n^2 b_n^2 + 2n c_n b_n + n^2 c_n^2 + n^2 d_n^2] \right) \\ &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} [(n a_n - d_n)^2 + (n b_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2)] \right). \end{aligned}$$

Como os termos da série são todos maiores ou iguais a zero a partir de $n = 1$, concluímos que $L^2 - 4\pi A \geq 0$ e finalmente:

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Para concluir a demonstração, basta mostrarmos que a igualdade ocorre se e somente se α é a parametrização de uma circunferência. Observe que a igualdade $L^2 - 4\pi A = 0$ ocorre quando:

$$2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} [(n a_n - d_n)^2 + (n b_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2)] \right) = 0,$$

logo, iremos obter a seguinte relação entre os coeficientes:

$$\begin{cases} a_1 = d_1 \\ b_1 = -c_1 \\ a_n = b_n = c_n = d_n = 0, \quad n \geq 2 \end{cases},$$

se substituirmos os coeficientes nas extensões por série de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$, teremos a seguinte expressão para a curva α :

$$\alpha(t) = \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) + b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{L}\right), \frac{c_0}{2} + a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{L}\right) - b_1 \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) \right).$$

Desse modo:

$$\left(x(t) - \frac{a_0}{2}\right)^2 = \left(a_1 \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right) + b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{L}\right)\right)^2,$$

$$\left(y(t) - \frac{c_0}{2}\right)^2 = \left(a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{L}\right) - b_1 \cos\left(\frac{\pi t}{L}\right)\right)^2,$$

e somando ambas parcelas e realizando as operações necessárias, concluímos que:

$$\left(x(t) - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y(t) - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

Note que isto é a parametrização de uma circunferência centrada em $(a_0/2, c_0/2)$, de raio $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$. Agora, se α for a parametrização da circunferência, a área é conhecida. Sendo R o raio da circunferência, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} A &= \pi R^2 \\ &= \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi} \\ &= \frac{(2\pi R)^2}{4\pi} \\ &= \frac{L^2}{4\pi}, \end{aligned}$$

e finalmente temos a igualdade desejada, finalizando a demonstração. □

Capítulo 6

Apêndice

6.1 Resultados de integral

Apresentaremos alguns resultados utilizados durante as integrações:

Teorema 6.1. *(Teorema Fundamental do Cálculo)(GUIDORIZZI, 2001): Seja f integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Teorema 6.2. *(Teorema da mudança de variável)(GUIDORIZZI, 2001): Seja f contínua em um intervalo I e sejam a e b dois reais quaisquer em I . Seja $g : [c, d] \rightarrow I$, com g' contínua em $[c, d]$, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Nestas condições:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du.$$

Teorema 6.3. *(Teorema da integral por partes)(GUIDORIZZI, 2001): Seja f e g definidas e deriváveis em um mesmo intervalo I , supondo que $f'(x)g(x)$ admita primitiva em I e observando que $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x).g(x)]'$, então $f(x)g'(x)$ admitirá primitiva em I e:*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Teorema 6.4. *(Fórmula do Valor Médio para integrais)(LIMA, 2009) : Sejam $f, p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f contínua, p integrável com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Existe um número $c \in [a, b]$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c) \int_a^b p(x)dx.$$

6.2 Resultados de Sequência

Teorema 6.5. (Teorema de Bolzano-Weierstrass)(LIMA, 2009) Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Teorema 6.6. (Teste de Cauchy)(LIMA, 2009) Quando existe um número real c tal que $\sqrt[n]{a_n} \leq c < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande (em particular, quando $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$), a série Σa_n é absolutamente convergente.

Teorema 6.7. (Teste da razão) (LIMA, 2009) Seja (a_n) uma sequência cujos termos são diferentes de zero. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = L$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Observação 6.8. Note que no teorema anterior, se $L < 1$ a série é absolutamente convergente, pois basta utilizar o teste de Cauchy.

Teorema 6.9. (Teste da comparação)(LIMA, 2009) Sejam Σa_n e Σb_n séries de termos não negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que: $a_n \leq c \cdot b_n$ para todo $n > n_0$ então a convergência de Σb_n implica a convergência de Σa_n e a divergência de Σa_n implica a divergência de Σb_n .

Teorema 6.10. (RUDIN, 1976) Se f_n é uma sequência de funções contínuas em $E \subset \mathbb{R}$, e f_n converge uniformemente para f , então f é uma função contínua em E .

6.3 Relações trigonométricas

Apresentaremos algumas identidades trigonométricas que foram utilizadas durante o texto:

- $\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen} (\alpha - \beta) + \operatorname{sen} (\alpha + \beta)],$
- $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)],$
- $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)].$

Conclusão

Com este trabalho podemos concluir que a matemática é uma ferramenta muito poderosa, se fazendo presente em importantes áreas da ciência, como nos estudos da condução do calor, que é um objeto de estudo da física.

Através da confecção desta monografia notamos o poder que a série de Fourier têm na resolução de problemas na área de Ciências da Natureza e também em outras áreas da matemática, como na resolução de equações diferenciais parciais, nos problemas envolvendo calor, no problema isoperimétrico e em muitos outros. Somente nos aprofundando nos estudo de cada objeto matemático, nesse caso, na série de Fourier, podemos entender a importância desse conhecimento para a história da humanidade.

Espero que esse trabalho sirva de motivação para alunos e professores que têm interesse em estudar as séries de Fourier, servindo como uma introdução de estudo. Como aluno, fico extremamente feliz de ter produzido este trabalho juntamente com meu orientador Rodrigo Rodrigues, pois com certeza os conhecimentos absorvidos para redigir este texto foram preciosos na minha formação acadêmica.

Referências Bibliográficas

- BIANCONI, R. **Séries de Fourier**. São Paulo: IME, 2016. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/mat/2456/arquivos/Fourier.pdf>>. Acesso em: 29 março 2022.
- DE FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora Unicamp, 1992. ISBN 85-268-0657-2.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos., 2001. v. 1.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos., 2002. v. 3.
- LIMA, E. L. **Análise real: Funções de uma variável**. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. v. 1.
- MASSAGO, S. **Sequências e séries**. DM_UFSCAR, 2014. Disponível em: <<https://www.dm.ufscar.br/~sadao/download/%3Ffile=student/sequencias-e-series.pdf>>. Acesso em: 08 março 2022.
- PAULA, E. W. de. **Uma introdução às equações diferenciais parciais: As séries de Fourier e a equação de ondas**. 2019. Disponível em: <<https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/comat/TCC%20Elton%20versao%20final.pdf>>. Acesso em: 05 abril 2022.
- PEREIRA, A. L. d. S. **Desigualdade perimétrica e as séries de Fourier**. Monografia - Curso de Licenciatura em Matemática. Acarape: Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - Icen, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira, 2019. Disponível em: <<https://repositorio.unilab.edu.br/jspui/handle/123456789/1597>>. Acesso em: 18 novembro 2022.
- PIFER, A.; AURANI, K. M. **A teoria analítica do calor de Joseph Fourier: uma análise das bases conceituais e epistemológicas**. Brasil: SciELO, 2015. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/V85P6jb6SDWqRgf53rcJx4k/?lang=pt&format=pdf>>. Acesso em: 29 março 2022.
- RUDIN, W. **Principles of mathematical analysis**. 3. ed. New York: McGraw-hill, 1976.
- ZANI, S. L. **Álgebra linear**. São Carlos: ICMC, 2003. Disponível em: <<https://sites.icmc.usp.br/szani/alglin.pdf>>. Acesso em: 25 fevereiro 2022.