UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campos de Yang-Mills fracamente estáveis na esfera de dimensão quatro

Claudinei Caetano Junior

São Carlos-SP
Março de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campos de Yang-Mills fracamente estáveis na esfera de dimensão quatro

Claudinei Caetano Junior

Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Março 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Claudinei Caetano Junior, realizada em 03/05/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior (UFSCar)

Prof. Dr. Dirk Toben (UFSCar)

Prof. Dr. Henrique Nogueira de Sá Earp (UNICAMP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedicado a Bruna, Hion e Zaia:
meus pontos de acumulação.
Com eles me sinto completo.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e à minha inestimável amiga Bruna por todo amor e apoio.

Tenho também muito a agradecer ao Prof. Dr. Luiz Roberto Hartmann Junior por me orientar neste trabalho, mas principalmente pela paciência, compreensão e, muitas vezes, apoio moral durante o processo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim, meu mais sincero obrigado a todos os brasileiros e brasileiras que, apesar dos tempos sombrios que vivemos, acreditam em um futuro melhor.

Resumo

Neste trabalho fizemos um rápido estudo sobre alguns resultados básicos relacionados a Grupos e Álgebras de Lie, ação de Grupos e Fibrados com o objetivo de definir conexões em Fibrados Principais e, posteriormente, em Fibrados Vetoriais Associados. Compreendidos esses conceitos, na parte principal desse trabalho, seguindo o artigo *Stability and Isolation Phenomena for Yang-Mills Fields* de J.P. Bourguignon e H. B. Lawson Jr., desenvolvemos o "ambiente geométrico" e definimos o Funcional de Yang-Mills com o objetivo de demonstrar um resultado de estabilidade, à saber: todo campo de Yang-Mills fracamente estável sobre S^4 com grupo de estrutura $G = \mathrm{SU}(2), \mathrm{SU}(3), \mathrm{U}(1)$ ou $\mathrm{U}(2)$ é auto-dual ou anti-auto-dual.

Palavras-chave: teoria de Yang-Mills, funcional de Yang-Mills, campos de Yang-Mills, teoria de calibre, fibrados, conexões, derivada covariante.

Abstract

In this work we made a quick study on some basic results related to Groups and Lie Algebras, action of Groups and Fiber Bundles with the objective of defining connections in Principal Bundles and, later, in Associated Vector Bundles. Once these concepts are understood, in the main part of this work, following the article *Stability and Isolation Phenomena for Yang-Mills Fields* by J.P. Bourguignon and H. B. Lawson Jr., we developed the "geometric environment" and defined the Yang-Mills Functional in order to demonstrate a stability result, namely: every weakly stable Yang-Mills field on S^4 with structure group $G = \mathrm{SU}(2), \mathrm{SU}(3), \mathrm{U}(1)$ or $\mathrm{U}(2)$ is self-dual or anti-self-dual.

Keywords: Yang-Mills theory, Yang-Mills functional, Yang-Mills fields, gauge theory, fiber bundles, connections, covariant derivative.

Conteúdo

Introdução

Do ponto de vista da matemática, uma teoria de calibre é uma área da geometria diferencial conhecida como a teoria de fibrados com conexão. Já do ponto de vista da física, uma teoria de calibre é um tipo de teoria de campos, na qual a dinâmica do sistema é invariante sob ação de transformações locais de uma certa família de operações suaves. Grosseiramente falando, se espera que a física não dependa de como a descrevemos.

As ideias sobre teoria de calibre tem como protótipo a eletrodinânima clássica. Sabemos que as equações de Maxwell (que descrevem toda a eletrodinâmica clássica) no vácuo são

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \qquad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \nabla \times \boldsymbol{B} = 0.$$

Além disso é sabido que os campos elétrico $\boldsymbol{E}$ e magnético $\boldsymbol{B}$ podem ser descritos por um potencial escalar φ e um potencial vetorial $\boldsymbol{A}$, respectivamente, de modo que

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

Não é difícil ver que $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ são invariantes, respectivamente, sob as seguintes *transformações de calibre*

$$\varphi \mapsto \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \qquad \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A} + f.$$

onde f é uma função escalar. Por outro lado podemos identificar $\boldsymbol{E}$ com uma 1-forma e $\boldsymbol{B}$ com uma 2-forma de modo que possamos reescrever as equações de Maxwell como abaixo

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = 0 \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{E} - \star\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$
$$\star\mathrm{d}\star\boldsymbol{E} = 0 \qquad \star\mathrm{d}\star\boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0,$$

onde $\star\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ é o operador Hodge-$\star$ e $M = \mathbb{R}^{3,1}$ é o espaço de Minkowski. Definimos o campo eletromagnético como a 2-forma

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E} \wedge \mathrm{d}t \in \Omega^2(M).$$

Disso temos que as equações de Maxwell são equivalentes a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{F} &= 0, \\ \delta\boldsymbol{F} &:= \star\mathrm{d}\star\boldsymbol{F} = 0, \end{aligned}$$

onde $\delta\colon \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$ é o adjunto da derivada exterior $\mathrm{d}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$. Como $\mathbb{R}^4$ é contrátil, pelo Lema de Poincaré podemos escrever $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{A}$, para algum $A \in \Omega^1(M)$. Observe que $\boldsymbol{F}$ é invariante sob a transformação

$$\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A} + \mathrm{d}f,$$

onde novamente f é uma função escalar. O grupo de Lie de interesse na eletrodinâmica clássica é o $\mathrm{U}(1)$ que é abeliano. Considere $\mathcal{A}_\alpha = i\boldsymbol{A}_\alpha$, onde i é a unidade imaginária. Como veremos mais adiante (Capítulo 2), o potencial $\mathcal{A}_\alpha$ satisfaz a seguinte condição de compatibilidade, i.e., se transforma como

$$\mathcal{A}_\beta(x) = t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\mathcal{A}_\alpha(x)t_{\alpha\beta}(x) + t_{\alpha\beta}(x)^{-1}\,\mathrm{d}t_{\alpha\beta}(x),$$

onde $t_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to U(1)$ é um mapa dado por $t_{\alpha\beta}(x) = \exp(if(x))$, $f(x) \in \mathbb{R}$ e $\{U_\alpha\}_\alpha$ uma cobertura aberta de M. Assim temos

$$\mathcal{A}_\beta(x) = \mathcal{A}_\alpha(x) + i\,\mathrm{d}f(x).$$

Salientamos aqui que $\mathcal{A}_\alpha$ é a forma local de uma 1-forma de conexão definida em um $\mathrm{U}(1)$-fibrado principal P sobre $M = \mathbb{R}^{3,1}$ e $\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A}$ é a curvatura associada a $\mathcal{A}$. Por fim, definindo a energia total por

$$L = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} \|\mathcal{F}\|^2\,\mathrm{d}x^4 = \|\mathcal{F}\|^2_{L^2}$$

e impondo a condição

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L = 0,$$

temos que para uma curva $\mathcal{A}^t = \mathcal{A} + tB$[1] formada por conexões, temos

$$\mathcal{F}^t = \mathrm{d}\mathcal{A} + t\,\mathrm{d}B = \mathcal{F} + t\,\mathrm{d}B$$

e portanto

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|\mathcal{F}^t\|^2_{L^2} = \langle \mathrm{d}B, \mathrm{d}\mathcal{A}\rangle_{L^2} = \langle \mathrm{d}B, \mathcal{F}\rangle_{L^2} = \langle B, \delta F\rangle_{L^2},$$

para todo B, o que implica que $\delta\mathcal{F} = 0$. Como $\mathrm{d}\mathcal{F} = \mathrm{d}^2\mathcal{A} = 0$, temos assim recuperadas as equações de Maxwell.

Faremos os cálculos acima em uma configuração mais geral no Capítulo 3.

Baseados nessas ideias os físicos Chen-Ning Yang e Robert L. Mills, em busca de compreender as interações da força forte, introduziram o grupo de Lie não-abeliano $\mathrm{SU}(2)$ e, de modo análogo ao

[1] No Capítulo 3 daremos uma explicação de podermos considerar curvas dessa forma. Por agora, assumamos que B seja uma 1-forma com valores em $\mathfrak{u}(1)$ adequada.

caso da eletrodinâmica, propuseram que o potencial deveria assumir valores em sua álgebra de Lie, ou seja, em $\mathfrak{su}_2$. Isso deu origem ao que chamamos de Teoria de Yang-Mills.

Apesar do apelo físico apresentado aqui, a Teoria de Yang-Mills tem um grande papel na matemática. Em 1982 Karen Uhlenbeck publicou dois importantes artigos em teoria de calibre. Em um deles, cujo título é *Connections with L^p bounds on curvature*, Uhlenbeck demonstrou dois resultados: um sobre a existência de uma boa escolha de calibre e outro sobre compacidade sequencial de conexões fracas com curvatura uniformemente limitada. Em 2019, Uhlenbeck foi condecorada com o prêmio Abel, sendo a única mulher até então a recebê-lo. Além disso, graças aos resultados obtidos por Uhlenbeck e outros matemáticos, Simon Donaldson demonstrou, em 1983, a existência de estruturas diferenciais em variedades de dimensão 4 diferentes da estrutura usual, o que lhe rendeu a Medalha Fields em 1986.

No Capítulo 1 estão alguns rudimentos sobre Grupos e Álgebras de Lie e ação de Grupos, além de uma breve descrição de Fibrados. No Capítulo 2 estudamos conexões em Fibrados Principais, definimos a derivada covariante oriunda de uma dada conexão e sua curvatura. Também vemos como transportar esses resultados definindo uma conexão em Fibrados Vetoriais Associados. Por fim, no Capítulo 3 utilizamos o artigo [3] para estabelecer a configuração geométrica necessária para definir o Funcional de Yang-Mills com o objetivo final de demonstrar o seguinte resultado de estabilidade

Teorema. *Todo campo de Yang-Mills fracamente estável sobre S^4 com grupo de estrutura $G = \mathrm{SU}(2), \mathrm{SU}(3), \mathrm{U}(1)$ ou $\mathrm{U}(2)$ é auto-dual ou anti-auto-dual.*

CAPÍTULO 1

Preliminares

Nesse capítulo discutiremos alguns conceitos e resultados básicos que foram necessário para o desenvolvimento do trabalho. Na Seção 1.1, seguimos como referência [1] e [5]. Para a Seção 1.2 seguimos [7] e [5].

1.1 Grupos e álgebras de Lie, representações e ação de grupo

1.1.1 Grupos de Lie

Definição 1.1. Um *grupo de Lie* é um grupo que também é uma variedade e tal que o mapa

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh^{-1} \end{aligned}$$

é suave[1].

Observação 1.2. Aqui consideramos apenas grupos de Lie de dimensão finita.

Observação 1.3. Note que a Definição 1.1 é equivalente a exigir que os mapas

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\colon G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \iota\colon G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned} \tag{1.2}$$

sejam ambos suaves. Chamamos o mapa em (1.1) de *multiplicação* e o mapa em (1.2) de *inversão*.

Mais ainda, é possível provar que a Definição 1.1 é equivalente a exigir apenas que a multiplicação seja suave, ou seja, a operação de inversão será automaticamente suave.

[1]A estrutura suave em $G \times G$ é a estrutura do produto de variedades suaves.

Exemplo 1.4. A circunferência unitária em $\mathbb{C}$

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon \|z\| = 1\}$$

é um grupo de Lie, onde a operação de grupo é o produto de números complexos. Denotamos tal grupo de Lie por $\mathrm{U}(1)$.

Definição 1.5. Um subgrupo fechado[2] do grupo linear geral $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, é chamado *grupo de matriz* ou *grupo linear*.

Exemplo 1.6. Os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \colon AA^T = \mathrm{I}_n\} \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \colon \det A = 1\} \\ \mathrm{SO}(n) &= \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

são subgrupos fechados de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ chamados *grupo ortogonal*, *grupo linear especial* e *grupo especial ortogonal*, respectivamente. Aqui A^T denota a transposta de A.

Exemplo 1.7. De forma análoga ao Exemplo 1.6 acima temos que os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \colon AA^* = \mathrm{I}_n\} \\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \colon \det A = 1\} \\ \mathrm{SU}(n) &= \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \end{aligned}$$

são subgrupos fechados de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ chamados *grupo unitário*, *grupo linear especial* e *grupo especial unitário*, respectivamente. Aqui A^* denota a transposta conjugada de A.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [4, Teorema 4.1]

Teorema 1.8. *Seja G um grupo de Lie compacto. Então existe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ e um mapa $\phi \colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ que é suave, injetor e homomorfismo de grupos.*

Definição 1.9. Sejam G e H grupos de Lie. Um *homomorfismo de grupos de Lie* é um mapa suave $\phi \colon G \to H$ tal que

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Quando ϕ for um difeomorfismo, diremos que ϕ é um *isomorfismo de grupos de Lie*. Quando $H = G$, um isomorfismo de grupos de Lie $\phi \colon G \to G$ será chamado de *automorfismo do grupo de Lie* G.

Observação 1.10. Como no decorrer do texto estaremos interessandos em homomorfismos de grupos de Lie, chamaremos apenas por homomorfismo.

[2] $H \subset G$ é dito subgrupo fechado quando for tanto um subgrupo quanto um subconjunto fechado de G.

1.1.2 Álgebras de Lie

Definição 1.11. Uma *álgebra de Lie* é um espaço vetorial V munido de um mapa

$$[\cdot,\cdot]\colon V\times V\to V$$

chamado *colchete de Lie* que satisfaz:

(i) $[\cdot,\cdot]$ é bilinear;

(ii) $[\cdot,\cdot]$ é antissimétrica, i.e.:
$$[v,w]=-[w,v],\quad \forall v,w\in V;$$

(iii) $[\cdot,\cdot]$ satisfaz a *identidade de Jacobi*, i.e.:

$$[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0,\quad \forall u,v,w\in V.$$

Exemplo 1.12. Podemos fazer com que qualquer espaço vetorial (real ou complexo) V seja uma álgebra de Lie. De fato, basta definir $[\cdot,\cdot]\equiv 0$. Tais álgebras de Lie são ditas *abelianas*.

Exemplo 1.13. O espaço vetorial $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas sobre $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ é uma álgebra de Lie com o colchete definido pelo comutador de matrizes

$$[A,B]=AB-BA,\quad \forall A,B\in M_n(\mathbb{K}).$$

Observação 1.14. No presente texto, estamos interessandos apenas em álgebras de Lie de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.15. Seja V uma álgebra de Lie com colchete de Lie $[\cdot,\cdot]$. Um subespaço vetorial $W\subset V$ é chamado *subálgebra de Lie* se para quaisquer $w,w'\in W$ tivermos $[w,w']\in W$.

Definição 1.16. Sejam V e W álgebras de Lie com colchetes de Lie $[\cdot,\cdot]_V$ e $[\cdot,\cdot]_W$, respectivamente. Um *homomorfismo de álgebras de Lie* é um mapa $\psi\colon V\to W$ tal que

$$[\psi(x),\psi(y)]_W=\psi([x,y]_V),\quad \forall x,y\in V.$$

Um *isomorfismo de álgebras de Lie* é um homomorfismo de álgebras de Lie bijetor. Um isomorfismo de álgebras de Lie é chamado de *automorfismo da álgebra de Lie V* se $W=V$.

Definição 1.17. Seja V uma álgebra de Lie e $\{T_\alpha\}$ uma base de vetores de V. Então

$$[T_\alpha,T_\beta]=f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\,T_\gamma.$$

Chamamos os coeficientes $f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ de *constantes de estrutura* da base $\{T_\alpha\}$.

Observação 1.18. Pela condição (i) da Definição 1.11, as constantes de estrutura determinam $[\cdot,\cdot]$ unicamente. Dos itens (ii) e (iii) da Definição 1.11, temos, respectivamente

$$-f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=f_{\beta\alpha}{}^{\gamma},\quad \forall\alpha,\beta,\gamma,\qquad \text{e}\qquad f_{\alpha\beta}{}^{\delta}f_{\delta\gamma}{}^{\varepsilon}+f_{\beta\gamma}{}^{\delta}f_{\delta\alpha}{}^{\varepsilon}+f_{\gamma\alpha}{}^{\delta}f_{\delta\beta}{}^{\varepsilon}=0\quad,\quad \forall\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon.$$

1.1.3 A álgebra de Lie de um grupo de Lie

Considere um grupo de Lie G. Para cada $g \in G$ definimos a *translação à esquerda* L_g e a *translação à direita* R_g sendo os mapas

$$\begin{aligned} L_g \colon G &\to G \\ x &\mapsto gx, \\ R_g \colon G &\to G \\ x &\mapsto xg. \end{aligned}$$

Note que L_g e R_g são difeomorfismos, cuja inversas são $L_{g^{-1}}$ e $R_{g^{-1}}$, respectivamente.

Para referências futuras, vamos provar a seguinte proposição.

Proposição 1.19. *Seja G um grupo de Lie com multiplicação $\mathrm{m}\colon G \times G \to G$ e inversão $\iota\colon G \to G$. Então, para todo $g,h \in G$, $X \in T_gG$ e $Y \in T_hG$*

$$\mathrm{d}\,\mathrm{m}_{(g,h)}(X,Y) = \mathrm{d}(R_h)_g X + \mathrm{d}(L_g)_h Y \tag{1.3}$$

$$\mathrm{d}\,\iota_g X = -\,\mathrm{d}(L_{g^{-1}})_e \circ \mathrm{d}(R_{g^{-1}})_g X. \tag{1.4}$$

Demonstração. Seja γ_1, γ_2 curvas suaves em G tais que $\gamma_1(0) = g$, $\gamma_2(0) = h$ e $\gamma_1'(0) = X$, $\gamma_2'(0) = Y$. Então

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\mathrm{m}_{(g,h)}(X,Y) &= \mathrm{d}\,\mathrm{m}_{(g,h)}(X,0) + \mathrm{d}\,\mathrm{m}_{(g,h)}(0,Y) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{m}(\gamma_1(t),h) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{m}(g,\gamma_2(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R_h(\gamma_1(t)) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_g(\gamma_2(t)) \\ &= \mathrm{d}(R_h)_g X + \mathrm{d}(L_g)_h Y \end{aligned}$$

o que estabelece a equação (1.3).

Agora defina o mapa

$$\begin{aligned} f\colon G &\to G \\ g &\mapsto \mathrm{m}(g,\iota(g)). \end{aligned}$$

Note que $f(g) = e$ para todo $g \in G$. Pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d} f_g(X) &= \mathrm{d}\,\mathrm{m}_{(g,g^{-1})}(X, \mathrm{d}\,\iota_g(X)) \\ &= \mathrm{d}(R_{g^{-1}})_g X + \mathrm{d}(L_g)_{g^{-1}}(\mathrm{d}\,\iota_g X). \end{aligned}$$

Como L_g é um difeomorfismo e

$$h = L_g \circ L_{g^{-1}}(h) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{id} = \mathrm{d}(L_g)_{g^{-1}} \circ \mathrm{d}(L_{g^{-1}})_e$$

temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\iota_g X &= -(\mathrm{d}(L_g)_{g^{-1}})^{-1} \circ \mathrm{d}(R_g^{-1})_g X \\ &= -\,\mathrm{d}(L_{g^{-1}})_e \circ \mathrm{d}(R_{g^{-1}})_g X \end{aligned}$$

o que prova a equação (1.4). $\square$

Definição 1.20. Seja X um campo de vetores (não necessariamente suave) definido em um grupo de Lie G. Dizemos que X é *invariante à esquerda* se, para todo $g \in G$, X for L_g-relacionado a si mesmo, i.e.,

$$\mathrm{d}L_g \circ X = X \circ L_g, \quad \forall g \in G.$$

De forma inteiramente análoga definimos um campo *invariante à direita*. Quando um campo X em G for tanto invariante à esquerda quanto à direita, diremos que X é bi-invariante.

O próximo resultado, embora de simples demonstração, é muito importante.

Proposição 1.21. *Campos de vetores invariantes à esquerda são suaves.*

Demonstração. Defina $s\colon G \to TG \times TG$ por $s(g) = ((g, 0_g), (e, X_e))$. Claramente s é suave. Além disso, da equação (1.4) temos

$$\mathrm{d}\,\mathrm{m} \circ s(g) = \mathrm{d}\,\mathrm{m}_{(g,e)}(0_g, X_e) = \mathrm{d}(R_e)_g(0_g) + d(L_g)_e(X_e) = X_g, \quad \forall g \in G,$$

onde na última igualdade foi usado que X é invariante à esquerda. Portanto temos que X é suave. □

Observação 1.22. Evidentemente a Proposição 1.21 é válida quando consideramos campos de vetores invariantes à direita.

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrado em [1, Teorema 1.12].

Teorema 1.23. *Seja $\mathfrak{g}$ o conjunto dos campos de vetores invariantes à esquerda de um grupo de Lie G. Então:*

(i) $\mathfrak{g}$, dotado do colchete de Lie de campo de vetores, é uma álgebra de Lie.

(ii) Considere o espaço tangente T_eG com o colchete $[X,Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e$, onde $\tilde{X}_g = \mathrm{d}(L_g)_e X$. Defina $\psi\colon \mathfrak{g} \to T_eG$ por $\psi(X) := X_e$. Então ψ é um isomorfismo de álgebra de Lie.

Definição 1.24. A *álgebra de Lie de um grupo de Lie G* é definido sendo a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dos campos invariantes à esquerda em G. Equivalentemente, a álgebra de Lie de G é o espaço tangente T_eG com o colchete definido no Teorema 1.23.

Exemplo 1.25. Pela definição acima, temos que a álgebra de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, denotada por $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, é o espaço $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Analogamente, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, denotada por $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, é o espaço das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.26. De acordo com o Exemplo 1.6 temos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{o}(n) &= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})\colon A + A^T = 0\},\\
\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})\colon \operatorname{tr} A = 0\},\\
\mathfrak{so}(n) &= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})\colon A + A^T = 0\}
\end{aligned}$$

são as álgebras de Lie de $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ e $\mathrm{SO}(n)$ respectivamente.

Exemplo 1.27. Pelo Exemplo 1.7 temos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}(n) &= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})\colon A + A^* = 0\},\\ \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) &= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})\colon \operatorname{tr} A = 0\},\\ \mathfrak{su}(n) &= \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})\end{aligned}$$

são as álgebras de Lie de $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ e $\mathrm{SU}(n)$, respectivamente.

O próximo teorema pode ser encontrado em [1, Teorema 1.26].

Teorema 1.28. *Seja G_1 e G_2 grupos de Lie e $\theta\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ um homomorfismo de álgebra de Lie. Então existe uma vizinhança V de e_1 e um mapa suave $\varphi\colon V \to G_2$ que é um* homomorfismo local[3] *satisfazendo $\mathrm{d}\,\varphi_{e_1} = \theta$. Além disso, se G_1 é conexo e simplesmente-conexo, então existe um único homomorfismo de grupo de Lie $\varphi\colon G_1 \to G_2$ tal que $\mathrm{d}\,\varphi_{e_1} = \theta$.*

Proposição 1.29. *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie tal que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}_2, \mathfrak{su}_3, \mathfrak{u}_1$ ou $\mathfrak{u}_2$. Se $\mathfrak{a}^+$ e $\mathfrak{a}^-$ forem subálgebras de $\mathfrak{g}$ tais que $[\mathfrak{a}^+, \mathfrak{a}^-] = 0$, então ou $\mathfrak{a}^+$ é abeliana ou $\mathfrak{a}^-$ é abeliana.*

Demonstração. Por definição temos que o centralizador de uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g}\colon [x,y] = 0, \forall y \in \mathfrak{h}\}.$$

Assim temos que $\mathfrak{a}^{\pm} \subset C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^{\mp})$. Por outro lado, podemos verificar (por exaustão) que o centralizador de qualquer subálgebra de $\mathfrak{g}$ é abeliano. □

1.1.4 O mapa exponencial e a representação adjunta

Definição 1.30. Seja G um grupo de Lie e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma *representação linear* de G em V é um homomorfismo de grupo de Lie $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

Definição 1.31. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo de álgebra de Lie $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) := \mathrm{End}(V)$.

Proposição 1.32. *Seja $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação. Então a diferencial $\mathrm{d}\,\rho_e\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ é uma representação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Pela Proposição A.6, temos apenas que mostrar que, para todo $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{d}\,\rho_e X$ é ρ-relacionado a X, i.e.

$$\mathrm{d}\,\rho_g(X_g) = (\mathrm{d}\,\rho_e X)_{\rho(g)}, \quad \forall g \in G.$$

[3]Isto é, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, para todo $a,b \in V$ tal que $ab \in V$.

Note que $T_I \operatorname{GL}(V) = \operatorname{End}(V)$. Daí $\mathrm{d}\rho_e X$ é invariante à esquerda. Disso temos

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\rho_e X)_{\rho(g)} &= (\mathrm{d}\rho_e X) \circ L_{\rho(g)}(e)\\ &= \mathrm{d}(L_{\rho(g)})_e(\mathrm{d}\rho_e X_e)\\ &= \mathrm{d}(L_{\rho(g)} \circ \rho)_e(X_e)\\ &= \mathrm{d}(\rho \circ L_g)_e(X_e)\\ &= \mathrm{d}\rho_g \circ \mathrm{d}(L_g)_e(X_e)\\ &= \mathrm{d}\rho_e(X_g),\end{aligned}$$

o que prova o afirmado. □

Definimos o mapa exponencial como segue. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dado $X \in \mathfrak{g}$ defina

$$\begin{aligned}\theta\colon \mathbb{R} &\to \mathfrak{g}\\ t &\mapsto tX.\end{aligned}$$

Claramente θ é um homomorfismo de álgebra de Lie. Pelo Teorema 1.28, temos que existe um único subgrupo a 1-parâmetro $\lambda_X\colon \mathbb{R} \to G$ tal que $\mathrm{d}(\lambda_X)_0 = \theta$ e portanto $\lambda_X'(0) = X$. Assim definimos

Definição 1.33. O *mapa exponencial* de G é dado por

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathfrak{g} &\to G\\ X &\mapsto \lambda_X(1),\end{aligned}$$

onde λ_X é o único subgrupo a 1-parâmetro de G tal que $\lambda_X'(0) = X$.

A próxima proposição, que pode ser encontrada em [1, Proposição 1.30] nos dá algumas propriedades de exp.

Proposição 1.34. *Para cada $X \in \mathfrak{g}$ e $t, s \in \mathbb{R}$, temos*

(i) $\exp(tX) = \lambda_X(t)$;

(ii) $\exp(-tX) = \exp(tX)^{-1}$;

(iii) $\exp(tX + sX) = \exp(tX)\exp(sX)$;

(iv) $\exp\colon T_eG \to G$ *é um mapa suave e* $\mathrm{d}\exp_0 = \mathrm{id}$, *i.e.*, exp *é um difeomorfismo de uma vizinhança de* $0 \in T_eG$ *em uma vizinhança de* $e \in G$.

Observação 1.35. Para o caso de $G = \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, é possível mostrar que o mapa exponencial $\exp\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \to \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ é dado pela exponencial de matrizes

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad \forall A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}).$$

Lema 1.36. *Seja G_1 e G_2 grupos de Lie e $\varphi\colon G_1 \to G_2$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então $\varphi \circ \exp_1 = \exp_2 \circ \mathrm{d}\varphi_e$.*

Demonstração. Sejam $\alpha(t) = \varphi \circ \exp_1(tX)$ e $\beta(t) = \exp_2 \circ \mathrm{d}\varphi_e(tX)$. Vamos mostrar que α e β são subgrupos a 1-parâmetro de G_2. Para todo $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha(t+s) &= \varphi \circ \exp_1(tX + sX) \\ &= \varphi(\exp_1(tX)\exp_1(sX)) \\ &= \varphi(\exp_1(tX))\varphi(\exp_1(sX)) \\ &= \alpha(t)\alpha(s). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\alpha'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha(t) = \mathrm{d}\varphi_e \circ \mathrm{d}(\exp_1)_0(X) = \mathrm{d}\varphi_e(X).$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \beta(t+s) &= \exp_2 \circ \mathrm{d}\varphi_e(tX + sX) \\ &= \exp_2(t\,\mathrm{d}\varphi_e(X) + s\,\mathrm{d}\varphi_e(X)) \\ &= \exp_2(t\,\mathrm{d}\varphi_e(X))\exp_2(s\,\mathrm{d}\varphi_e(X)) \\ &= \exp_2(\mathrm{d}\varphi_e(tX))\exp_2(\mathrm{d}\varphi_e(sX)) \\ &= \beta(t)\beta(s). \end{aligned}$$

Temos também

$$\beta'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \beta(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_2(t\,\mathrm{d}\varphi_e(X)) = \mathrm{d}(\exp_2)_0(\mathrm{d}\varphi_e(X)) = \mathrm{d}\varphi_e(X).$$

Pelo Teorema 1.28 segue o resultado. □

Vamos agora definir uma representação extremamente importante para o presente texto. Considere a ação de um grupo de Lie G em si mesmo por conjugação:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\colon G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto ghg^{-1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Considerando o mapa $\mathrm{ad}_g\colon G \to G$ dado por $\mathrm{ad}_g(h) = \mathrm{ad}(g,h)$, definimos a *representação adjunta*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}\colon G &\to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto \mathrm{Ad}_g := \mathrm{d}(\mathrm{ad}_g)_e. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Note que

$$\mathrm{Ad}_g = \mathrm{d}(\mathrm{ad}_g)_e = \mathrm{d}(L_g \circ R_{g^{-1}})_e = \mathrm{d}(L_g)_{g^{-1}} \circ \mathrm{d}(R_{g^{-1}})_e.$$

Além disso, segue da definição de Ad que, para cada $X \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_g(X) &= \mathrm{d}(\mathrm{ad}_g)_e \left(\mathrm{d}(\exp)_0 \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} tX \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{ad}_g(\exp(tX)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\exp(tX)g^{-1}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.36 segue que

$$\exp(t\,\mathrm{Ad}_g(X)) = \mathrm{ad}_g(\exp(tX)) = g\exp(tX)g^{-1}. \tag{1.7}$$

Temos ainda que a diferencial da representação adjunta Ad, é dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{ad}\colon \mathfrak{g} \to &\ \ \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ X \mapsto &\mathfrak{ad}(X)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \\ & \qquad\qquad Y \mapsto \mathfrak{ad}(X)Y := \mathrm{d}(\mathrm{Ad})_e(X)Y. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Da definição de $\mathfrak{ad}$ segue que

$$\mathfrak{ad}(X)Y = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y). \tag{1.9}$$

Novamente pelo Lema 1.36 temos

$$\mathrm{Ad}_{\exp(tX)} = \mathrm{EXP}(t\,\mathrm{ad}(X)),$$

onde $\mathrm{EXP}\,:\, \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Proposição 1.37. *Se $X,Y \in \mathfrak{g}$, então $\mathfrak{ad}(X)Y = [X,Y]$.*

Demonstração. Usaremos a seguinte igualdade de *Baker–Campbell–Hausdorff*, cuja prova pode ser encontrada em [8, Cap. 10, Teorema 14]

$$\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X,Y] + O(t^3)). \tag{1.10}$$

Pelas igualdades (1.7) e (1.10)

$$\exp(\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(tY)) = \exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X,Y] + O(t^3)).$$

Pelo item (iv) da Proposição 1.34, temos que exp é localmente injetora em uma vizinhança da origem. Disso e da igualdade acima temos

$$\begin{aligned} t\,\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y) = tY + t^2[X,Y] + O(t^3) &\Rightarrow \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y) = Y + t[X,Y] + \frac{O(t^3)}{t} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y) = [X,Y]. \end{aligned}$$

Usando (1.9), segue que $\mathfrak{ad}(X)Y = [X,Y]$. □

1.1.5 Ação de grupo

Definição 1.38. Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. Uma *ação à esquerda* de G em M é um mapa suave $\mu\colon G \times M \to M$ que satisfaz

(i) $\mu(e,x) = x, \quad \forall x \in M$;

(ii) $\mu(g_1, \mu(g_2, x)) = \mu(g_1 g_2, x), \quad \forall g_1, g_2 \in M,\ \forall x \in M$.

De maneira inteiramente análoga definimos uma ação à direita.

Observação 1.39. Em casos convenientes denotaremos a ação à esquerda por $\mu(g,x) = gx$ e, analogamente, $\mu(x,g) = xg$ a ação à direita.

Definição 1.40. Seja $\mu\colon G\times M \to M$ uma ação à esquerda e $x \in M$. Definimos o *estabilizador* ou *grupo de isotropia* de $x \in M$ por

$$G_x := \{g \in G\colon \mu(g,x) = x\}$$

e a *órbita* de $x \in M$ por

$$\mathcal{O}(x) := \{\mu(g,x) \in M\colon g \in G\}.$$

Definição 1.41. Seja $\mu\colon G\times M \to M$ uma ação à esquerda. Dizemos que μ é *livre* se $G_x = \{e\}$, para todo $x \in M$. Equivalentemente μ é livre se, e somente se, dados $x \in M$ e $g \in G$, $\mu(g,x) = x$ implica que $g = e$. Dizemos que μ é *transitiva* se para todos $x, y \in M$ existir $g \in G$ tal que $x = \mu(g,y)$.

Dada uma ação à esquerda $\mu\colon G\times M \to M$, definimos os mapas $\mu^g\colon M \to M$ e $\mu^x\colon G \to M$ dados por $\mu^g = \mu(g,x)$ e $\mu^x = \mu(g,x)$.

Observação 1.42. Note que μ^g é um difeomorfismo para todo $g \in G$. Isso segue do fato de que μ é suave e a inversa de μ^g é $\mu^{g^{-1}}$ que também é suave.

Definição 1.43. Uma ação à direita de um grupo de Lie G em uma variedade M é *principal* se é livre e o mapa

$$\begin{aligned} \psi\colon M\times G &\to M\times M \\ (x,g) &\mapsto (x,xg) \end{aligned}$$

é fechado.

Proposição 1.44. *A diferencial de uma ação à esquerda $\mu\colon G\times M \to M$ é dada por*

$$\mathrm{d}\mu_{(g,x)}(X,Y) = \mathrm{d}(\mu^x)_g(X) + \mathrm{d}(\mu^g)_x(Y), \quad \forall X \in T_gG,\ \forall Y \in T_xM.$$

Demonstração. Basta notar que se γ_1 e γ_2 são curvas em G e M, tais que $\gamma_1(0) = g$, $\gamma_1'(0) = X$ e $\gamma_2(0) = x$, $\gamma_2'(0) = Y$, então

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mu_{(g,x)}(X,Y) &= \mathrm{d}\mu_{(g,x)}(X,0) + \mathrm{d}\mu_{(g,x)}(0,Y) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\gamma_1(t),x) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(g,\gamma_2(t)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu^x(\gamma_1(t)) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu^g(\gamma_2(t)) \\ &= \mathrm{d}(\mu^x)_g(X) + \mathrm{d}(\mu^g)_x(Y). \end{aligned}$$

□

Todos os resultados acima são aplicáveis ao caso de uma ação à direita.

Exemplo 1.45 (Ação de Hopf)**.** Considere $S^1 = \mathrm{U}(1)$ agindo em $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \colon \|z\| = 1\}$ à direita por

$$\begin{aligned} \mu \colon S^{2n+1} \times S^1 &\to S^{2n+1} \\ (z,\, \lambda) &\mapsto z\lambda. \end{aligned}$$

Note que μ é livre. De fato, dados $z = (z_0, \ldots, z_n) \in S^{2n+1}$ e $\lambda \in S^1$ temos que

$$\mu(z,\lambda) = z \iff (z_0\lambda, \ldots, z_n\lambda) = (z_0, \ldots, z_n) \iff \lambda = 1.$$

1.1.6 O campo de vetores fundamental

Vamos definir um campo de vetores induzido por elementos de $\mathfrak{g}$. Como veremos no Capítulo 2, nosso interesse está no caso de ações à direita.

Definição 1.46. Seja $\mu \colon M \times G \to M$ uma ação à direita e $X \in \mathfrak{g}$. Definimos

$${X^\sharp}_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu(p, \exp(tX)).$$

$X^\sharp$ é chamado *campo de vetores fundamental* gerado por X.

Observação 1.47. Note que $X^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de vetores suave, visto que a ação à direita e o mapa exp são suaves.

Proposição 1.48. *Seja μ uma ação à direita livre. Então, para quaisquer $p \in M$ e $g \in G$, $\mathrm{d}(\mu^p)_g$ é injetora.*

Demonstração. Seja $X \in \ker(\mathrm{d}(\mu^p)_g)$. Considere γ uma curva suave em G tal que $\gamma(0) = g$ e $\gamma'(0) = X$. Por definição temos

$$0 = \mathrm{d}(\mu^p)_g(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^p(\gamma(t)) \Rightarrow \mu^p(\gamma(t)) = c,$$

onde $c \in M$ é uma constante. Como a ação é livre, segue que $\gamma(t) = g$ para todo t em seu domínio de definição. Logo $X = 0$. $\square$

Proposição 1.49. *Seja $\mu \colon M \times G \to M$ uma ação à direita livre. Então o mapa*

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathfrak{g} &\to \mathfrak{X}(M) \\ X &\mapsto X^\sharp, \end{aligned}$$

onde escrevemos $\phi_p(X) := \phi(X)(p)$, é linear e injetor. Além disso, ϕ é um homomorfismo de álgebras de Lie, ou seja, vale

$$[X,Y]^\sharp = [X^\sharp, Y^\sharp], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Demonstração. Para mostrar a linearidade basta notar que, para cada $p \in M$

$$\phi_p(X) = X^\sharp{}_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^p(\exp(tX)) = \mathrm{d}(\mu^p)_e X_e. \tag{1.11}$$

Vamos agora mostrar que ϕ é injetora. Dado $X \in \ker(\phi)$ temos, para cada $p \in M$,

$$0 = \phi_p(X) = X^\sharp{}_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^p(\exp(tX)) = \mathrm{d}(\mu^p)_e X_e.$$

Segue da Proposição 1.48 que $X = 0$.

Para provar que ϕ é homomorfismo de álgebras de Lie, basta mostrar, conforme a Proposição A.6, que $X \in \mathfrak{g}$ e $X^\sharp$ são μ^p-relacionados. Temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mu^p)_g X_g &= \mathrm{d}(\mu^p)_g \left(\mathrm{d}(L_g)_e X_e\right) \\
&= \mathrm{d}(\mu^p)_g \circ \mathrm{d}(L_g)_e \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^p(L_g(\exp(tX))) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu(p, L_g(\exp(tX))) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu(\mu(p,g), \exp(tX)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^{\mu(p,g)}(\exp(tX)) \\
&= X^\sharp{}_{\mu(p,g)} = X^\sharp{}_{\mu^p(g)}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Pelas igualdades (1.11) e (1.12) temos

$$[X^\sharp, Y^\sharp]_p = [X^\sharp, Y^\sharp]_{\mu^p(e)} = \mathrm{d}(\mu^p)_e([X,Y]_e) = [X,Y]^\sharp{}_p, \quad \forall p \in M. \qquad \square$$

Daqui em diante fixamos a seguinte notação: dada uma ação à direita $\mu\colon M \times G \to G$, definimos, para cada $g \in G$, o mapa $r_g\colon M \to M$ dado por $r_g(p) = \mu(p,g)$. Com essa notação, o campo de vetores fundamental se escreve como

$$X^\sharp{}_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r_{\exp(tX)}(p).$$

1.2 Fibrados

1.2.1 Definições

Definição 1.50. Um *fibrado* (suave) (E, π, M, F, G) consiste dos seguintes elementos:

(i) Variedade E chamada *espaço total*;

(ii) Variedade M chamada *espaço base*;

(iii) Variedade F chamada *fibra*;

(iv) Uma sobrejeção $\pi\colon E \to M$, chamada *projeção*, tal que $\pi^{-1}(p) = E_p \cong F$ é chamada *fibra* em $p \in M$;

(v) Um grupo de Lie G chamado *grupo de estrutura* que age em F pela esquerda;

(vi) Cobertura aberta $\{U_i\}$ de M e difeomorfismos $\phi_i\colon U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ tais que $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$. O mapa ϕ_i é chamado *trivialização local*;

(vii) O mapa $\phi_{i,p}\colon F \to E_p$ dado por $\phi_{i,p}(f) = \phi(p, f)$ é um difeomorfismo. Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, exigimos que $t_{ij}(p) := \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p}\colon F \to F$ seja um elemento de G. Então ϕ_i e ϕ_j estão relacionados pelo mapa suave $t_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$, chamado *função de transição*, por:

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p) f). \tag{1.13}$$

Observação 1.51. Denotaremos o fibrado (E, π, M, F, G) por $E \xrightarrow{\pi} M$ ou simplesmente por E.

Observação 1.52. Para que a Definição 1.50 não dependa da cobertura aberta adotada, fazemos a seguinte definição. Dadas coberturas $\{U_i\}$ e $\{V_i\}$ de M podemos encontrar trivializações locais ϕ_i e ψ_i, respectivamente. Diremos que os *fibrados coordenados*

$$(E, \pi, M, F, G, \{U_i\}, \{\phi_i\}) \qquad \text{e} \qquad (E, \pi, M, F, G, \{V_i\}, \{\psi_i\})$$

são equivalentes se $(E, \pi, M, F, G, \{U_i\} \cup \{V_i\}, \{\phi_i\} \cup \{\psi_i\})$ também for um fibrado coordenado. Definimos então um fibrado como sendo uma classe de equivalência de fibrados coordenados.

Da Definição 1.50 temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} t_{ii}(p) &= \mathrm{id}_F && (p \in U_i), \\ t_{ij}(p) &= t_{ji}(p)^{-1} && (p \in U_i \cap U_j), \\ t_{ij}(p) t_{jk}(p) &= t_{ik}(p) && (p \in U_i \cap U_j \cap U_k). \end{aligned}$$

Exemplo 1.53 (Fibrado tangente)**.** Seja M uma variedade suave de $\dim M = n$. Considere a união disjunta

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$$

e defina o mapa $\pi\colon TM \to M$ por $\pi(x, v) = x$. Note que π é suave, sobrejetora e $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times T_x M \cong \mathbb{R}^n$. Seja $\{U_i\}_{i \in \Lambda}$ uma cobertura de M e defina, para cada $i \in \Lambda$

$$\begin{aligned} \Phi_i\colon U_i \times \mathbb{R}^n &\to \pi^{-1}(U_i) \\ (x\,,\, v) &\mapsto (x, (\mathrm{d}\varphi_i)_{\varphi_i^{-1}(x)} v), \end{aligned}$$

onde $\varphi_i\colon V_i \to U_i$, com $V_i \subset \mathbb{R}^n$ aberto, é uma parametrização de M. Temos que Φ_i é suave e bijetora, cuja inversa $\Phi_i^{-1}\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ é dada por $\Phi_i^{-1}(x, w) = (x, (\mathrm{d}\varphi_i^{-1})_x w)$. Mais ainda,

$\pi \circ \Phi_i(x,v) = x$. Logo Φ_i é trivialização local. Por fim, se $x \in U_i \cap U_j$, então as funções de transição são

$$\begin{aligned} t_{ij}(x)v &= \Phi_{i,x}^{-1} \circ \Phi_{j,x} v \\ &= (\mathrm{d}\,\varphi_i^{-1})_x \circ (\mathrm{d}\,\varphi_j)_{\varphi_j^{-1}(x)} v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

Portanto $t_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Chamamos TM de fibrado tangente da variedade M.

Definição 1.54. Dizemos que um fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ é *trivial* se existe um difeomorfismo $f\colon M \times F \to E$ que preserva as fibras, i.e., tal que $\pi \circ f = \mathrm{pr}_1$, onde $\mathrm{pr}_1\colon M \times F \to M$ é a projeção canônica na primeira variável. Equivalentemente, um fibrado é trivial quando a única função de transição é a identidade.

Definição 1.55. Sejam $E \xrightarrow{\pi}$ M um fibrado e $U \subset M$ aberto. Dizemos que $\sigma\colon U \to E$ é uma *seção local* se for um mapa suave tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$. Denotamos por $\Gamma(U,E)$ o conjunto das seções locais em M. Quando pudermos tomar $U = M$, chamaremos σ de *seção global* de M.

Observação 1.56. Nem todo fibrado admite seções definidas globalmente.

Exemplo 1.57. Considere TM o fibrado tangente de uma variedade M do Exemplo 1.53. Podemos identificar $\Gamma(M,TM)$ com o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ dos campos vetoriais de M.

1.2.2 Reconstruindo fibrados

Suponha que tenhamos uma variedade M com cobertura aberta $\{U_i\}$. Sejam também um grupo de Lie G agindo à esquerda de uma variedade F e mapas $t_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$. Nosso objetivo é construir um fibrado (E,π,M,F,G). Para isso precisamos definir uma projeção $\pi\colon E \to M$ e uma coleção de trivializações locais $\{\phi_i\}$. Considere

$$X := \bigsqcup_i U_i \times F$$

e defina a seguinte relação de equivalência em X

$$\forall (p,f) \in U_i \times F,\ \forall (q,f') \in U_j \times F,\ (p,f) \sim (q,f') \iff p = q \text{ e } f = t_{ij}(p)f'.$$

Defina $E := X/\sim$. Denotando um elemento de E por $[p,f]$, definimos a projeção $\pi\colon E \to M$ por

$$\pi([p,f]) = p$$

e a trivialização local $\phi_i\colon U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ por

$$\phi_i(p,f) = [p,f].$$

Com essa construção é possível mostrar que E é um fibrado conforme a Definição 1.50.

1.2.3 Uma condição de trivialidade

Definição 1.58. Sejam $E \xrightarrow{\pi_E} M$ e $E' \xrightarrow{\pi_{E'}} N$ fibrados. Um mapa suave $\overline{f}\colon E' \to E$ é chamado *mapa de fibrado* se mapeia cada fibra E'_p de E' em E_q de E, i.e., se existe um mapa suave $f\colon N \to M$ tal que $\pi_E \circ \overline{f} = f \circ \pi_{E'}$ e $f(p) = q$.

Definição 1.59. Dizemos que os fibrados $E' \xrightarrow{\pi'} M$ e $E \xrightarrow{\pi} M$ são *equivalentes* se existe um mapa de fibrado $\overline{f}\colon E' \to E$ tal que o mapa induzido (conforme a Definição 1.58) $f\colon M \to M$ é a identidade e $\overline{f}$ é um difeomorfismo.

Observação 1.60. Podemos reformular a Definição 1.54 usando a Definição 1.59 dizendo que um fibrado E é trivial se, e somente se, E é equivalente a $M \times F$.

Proposição 1.61. *Sejam variedades suaves M e N. Um fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ com fibra F e um mapa suave $f\colon N \to M$ definem um fibrado sobre N com mesma fibra. Chamamos tal fibrado de* fibrado pullback *de E por f e denotamos por f^*E.*

Demonstração. Considere o subconjunto de $N \times E$

$$f^*E := \{(p,u) \in N \times E\colon f(p) = \pi(u)\}.$$

Defina $\widetilde{\pi}\colon f^*E \to N$ por $\widetilde{\pi}(p,u) = p$. Sejam $\{U_i\}$ cobertura aberta de M e $\phi_i\colon U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ trivialização local de E. Claramente $\widetilde{\pi}$ é suave e $\{f^{-1}(U_i)\}$ forma uma cobertura aberta de N. Vamos mostrar que o mapa

$$\begin{aligned} \psi_i\colon f^{-1}(U_i) \times F &\to \widetilde{\pi}^{-1}(f^{-1}(U_i)) \\ (p,x) &\mapsto (p, \phi_i(f(p),x)) \end{aligned}$$

é trivialização local de f^*E com inversa

$$\begin{aligned} \psi_i^{-1}\colon \widetilde{\pi}^{-1}(f^{-1}(U_i)) &\to f^{-1}(U_i) \times F \\ (p,u) &\mapsto (p, \mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(u))), \end{aligned}$$

onde pr_2 é a projeção canônica na segunda variável. Note que ψ_i está bem-definida, pois se $(p,x) \in f^{-1}(U_i) \times F$, então $\pi \circ \phi_i(f(p),x) = f(p)$ e $\widetilde{\pi} \circ \psi_i(p,x) = \widetilde{\pi}(p, \phi_i(f(p),x)) = p \in f^{-1}(U_i)$. Dado $(p,u) \in \widetilde{\pi}^{-1}(U_i)$, por definição temos que $f(p) = \pi(u)$ e daí $\phi(f(p),x) = u$, para algum $x \in F$. Disso segue

$$\begin{aligned} \psi_i \circ \psi_i^{-1}(p,u) &= \psi_i(p, \mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(u))) \\ &= \psi_i(p,x) \\ &= (p, \phi_i(f(p),x)) \\ &= (p,u). \end{aligned}$$

Similarmente $\psi_i^{-1} \circ \psi_i = \mathrm{id}$. Sendo composições de mapas suaves, segue que ψ_i e ψ_i^{-1} são suaves.

Por fim, se $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \neq \emptyset$, as funções de transição $t_{ij}^*\colon f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \to G$ satisfazem

$$\begin{aligned} t_{ij}^*(p)x &= \psi_{i,p}^{-1} \circ \psi_{j,p}(x) \\ &= \psi_{i,p}^{-1}(\phi_j(f(p),x)) \\ &= \mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(\phi_j(f(p),x)))) \\ &= \mathrm{pr}_2(f(p),t_{ij}(f(p))x) \\ &= t_{ij}(f(p))x, \end{aligned} \tag{1.14}$$

o que termina a demonstração. □

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em [9, Teorema 11.5].

Teorema 1.62. *Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado com fibra F e mapas $f,g\colon N \to M$ homotópicos. Então f^*E e g^*E são fibrados equivalentes sobre N.*

Corolário 1.63. *Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado com fibra F. Se M é contrátil, então E é trivial.*

Demonstração. Suponha que M seja contrátil a um ponto $p_0 \in M$. Então existe uma homotopia $F : M \times [0,1] \to M$ tal que $F(p,0) = p$ e $F(p,1) = p_0$. Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrado sobre M e considere os fibrados *pullback* h_0^*E e h_1^*E, onde $h_t(p) := F(p,t)$. Note que $h_1^*E = \{(p,u) \in M \times E\colon \pi(u) = p_0\} = M \times E_{p_0} \cong M \times F$, i.e., h_1^*E é trivial. Por outro lado $h_0^*E = \{(p,u) \in M \times E\colon \pi(u) = p\} = \{(\pi(u),u)\colon u \in E\} \cong E$. Pelo Teorema 1.62 temos que h_0^*E e h_1^*E são equivalentes, ou seja, E é trivial. □

Exemplo 1.64. No exemplo dado na introdução, tomamos como espaço base $M = \mathbb{R}^4$ e o grupo de Lie $\mathrm{U}(1)$. Pelo Corolário 1.2.3, vemos que tal $\mathrm{U}(1)$-fibrado principal P é trivial, à saber, $P = \mathbb{R}^4 \times \mathrm{U}(1)$.

1.2.4 Fibrados vetoriais

No Exemplo 1.53 definimos o fibrado tangente de uma variedade suave M. Veremos aqui um pouco sobre fibrados vetoriais dos quais o fibrado tangente pode ser tomado como um protótipo.

Definição 1.65. Um *fibrado vetorial* é um fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ (conforme Definição 1.50) cuja fibra é um espaço vetorial V, $k = \dim V < \infty$, e as funções de transição são elementos de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Chamamos k de *dimensão da fibra*.

Observação 1.66. Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial com fibra V. Dadas $\phi_i\colon U_i \times V \to E$ trivialização local e seções locais $s,s' \in \Gamma(U_i,E)$, podemos definir uma adição e um produto por escalar pontualmente:

$$\begin{aligned} (s+s')(p) &:= \phi_i(p,\mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(s(p))) + \mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(s(p)))), \\ (fs)(p) &:= \phi_i(p,f(p)\cdot \mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(s(p)))), \end{aligned}$$

onde $p \in U_i$ e $f \in C^\infty(M)$. Note que todo fibrado vetorial E admite uma seção global chamada *seção nula* $s_0 \in \Gamma(M,E)$ tal que $\phi_i^{-1}(s_0(p)) = (p,0)$ em qualquer trivialização ϕ_i.

Além disso, podemos definir uma métrica pontualmente $h_p : \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(s,s')(p) := h_p(s(p),s'(p)) = h_{\mu\nu}(p) \cdot \mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(s(p)))^\mu \cdot \mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(s'(p)))^\nu, \text{ se } V = \mathbb{R}^k$$
$$h(s,s')(p) := h_p(s(p),s'(p)) = h_{\mu\nu}(p) \cdot \overline{\mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(s(p)))^\mu} \cdot \mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(s'(p)))^\nu, \text{ se } V = \mathbb{C}^k$$

onde $(h_{\mu\nu}(p))$ é uma matriz simétrica e positiva-definida.

Vejamos alguns exemplos de fibrados vetoriais obtidos a partir de fibrados vetoriais dados.

Fibrado produto

Sejam fibrados vetoriais $E \xrightarrow{\pi} M$ e $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ com fibras V e V', respectivamente. O *fibrado produto*

$$E \times E' \xrightarrow{\pi\times\pi'} M \times M'$$

é um fibrado vetorial cuja fibra é $V \oplus V'$, logo a dimensão da fibra é $\dim V \oplus V' = \dim V + \dim V'$. A projeção é

$$\begin{aligned} \pi \times \pi' \colon E \times E' &\to M \times M' \\ (u,u') &\mapsto (\pi(u), \pi'(u')) \end{aligned}$$

e a trivialização local é dada por

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} \colon U_i \times U'_j \times V \oplus V' &\to \pi^{-1}(U_i) \times \pi'^{-1}(U'_j) \\ (p,p',v,v') &\mapsto (\phi_i(p,v), \phi'_j(p',v')), \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde $\{U_i\}, \{U'_j\}$ são coberturas abertas de M, M' e ϕ_i, ϕ'_j são trivializações locais de E, E', respectivamente. A inversa de (1.15) é dada por

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{-1} \colon \pi^{-1}(U_i) \times \pi'^{-1}(U'_j) &\to U_i \times U'_j \times V \oplus V' \\ (u,u') &\mapsto ((\pi(u), \pi'(u')), (\mathrm{pr}_2 \circ \phi_i^{-1}(u), \mathrm{pr}_2 \circ \phi_j'^{-1}(u'))). \end{aligned} \tag{1.16}$$

De (1.15) e (1.16) acima vemos que as funções de transição $\tau_{ik,jl} \colon (U_i \cap U_j) \times (U'_k \cap U'_l) \to \mathrm{GL}(V \oplus V')$ são

$$\begin{aligned} \tau_{ik,jl}(p,p')(v,v') &= \psi_{ij,(p,p')}^{-1} \circ \psi_{kl,(p,p')}(v,v') \\ &= \psi_{ij,(p,p')}^{-1}(\phi_k(p,v), \phi'_l(p',v')) \\ &= (\mathrm{pr}_2 \circ \phi_i^{-1}(\phi_k(p,v)), \mathrm{pr}_2 \circ \phi_j'^{-1}(\phi'_l(p',v'))) \\ &= (t_{ik}(p)v, t'_{jl}(p')v'), \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde $t_{ik} \colon U_i \cap U_k \to \mathrm{GL}(V)$ e $t'_{jl} \colon U'_j \cap U'_l \to \mathrm{GL}(V')$ são funções de transição de E e E', respectivamente.

Soma de Whitney

Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ e $E' \xrightarrow{\pi'} M$ fibrados vetoriais com fibras V e V', respectivamente. Chamamos de *soma de Whitney*, denotado por $E \oplus E'$, o fibrado *pullback* de $E \times E'$ pelo mapa $f \colon M \to M \times M$, $f(p) = (p,p)$. Isto é:

$$\begin{aligned} E \oplus E' := f^*(E \times E') &= \{(p,u,u') \in M \times E \times E' \colon f(p) = \pi'(u,u')\} \\ &= \{(p,u,u') \in M \times E \times E' \colon \pi \times \pi'(u,u') = (p,p)\}. \end{aligned}$$

Conforme a Proposição 1.61, temos que a fibra de $E \oplus E'$ é $V \oplus V'$, e a projeção $\widetilde{\pi} : E \oplus E' \to M$ é dado por $\widetilde{\pi}(p,u,u') = p$. Mais ainda, as funções de transição são dadas pelas igualdades (1.14) e (1.17).

Fibrado do produto tensorial

Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ e $E' \xrightarrow{\pi'} M$ fibrados vetoriais com fibras V e V', respectivamente. O *fibrado do produto tensorial* $E \otimes E'$ é obtido ao associar o produto tensorial das fibras $E_p \otimes E'_p$ a cada ponto $p \in M$, i.e.

$$E \otimes E' = \bigsqcup_{p \in M} E_p \otimes E'_p.$$

Se $\{e_\alpha\}$ e $\{f_\beta\}$ são bases de V e V', respectivamente, então $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}$ é uma base para $V \otimes V'$. Portanto $\dim(V \otimes V') = \dim V \cdot \dim V'$. Definimos a projeção $\widetilde{\pi} : E \otimes E' \to M$ sendo a projeção de um elemento de $E_p \otimes E'_p$ no seu ponto base $p \in M$. Note que se $\{U_i\}$ é cobertura aberta de M, então

$$\widetilde{\pi}^{-1}(U_i) = \{x \in E \otimes E' \colon \widetilde{\pi}(x) \in U_i\} = E_p \otimes E'_p.$$

Assim, a trivialização local é dada por

$$\begin{aligned} \psi_i \colon U_i \times (V \otimes V') &\to \widetilde{\pi}^{-1}(U_i) \\ (p, v \otimes v') &\mapsto \phi_i(p,v) \otimes \phi'_i(p,v'), \end{aligned} \tag{1.18}$$

onde ϕ_i e ϕ'_i são trivializações locais de E e E', respectivamente[4]. A inversa do mapa em (1.18) é

$$\begin{aligned} \psi_i^{-1} \colon \widetilde{\pi}^{-1}(U_i) &\to U_i \times (V \otimes V') \\ u \otimes u' &\mapsto (\widetilde{\pi}(u \otimes u'), (\phi_i^{-1}(u) \otimes \phi_i'^{-1}(u'))). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Observação 1.67. Podemos considerar um caso mais *geral* do fibrado do produto tensorial e construir o fibrado $\bigotimes^r E = E \otimes \cdots \otimes E$.

Observação 1.68. Dado um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$ com fibra V, podemos definir o fibrado dos *tensores totalmente antissimétricos* $\bigwedge^r(E) = E \wedge \cdots \wedge E$ fazendo

$$\bigwedge^r(E) := \bigsqcup_{p \in M} \underbrace{E_p \wedge \cdots \wedge E_p}_{\text{r-vezes}}.$$

Em particular, o espaço $\Omega^r(M)$ das *r-formas* em M é identificado com $\Gamma(\bigwedge^r(T^*M))$.

[4]Como o espaço base M é o mesmo para os dois fibrados vetoriais E e E', podemos assumir que as trivializações estão definidas na mesma cobertura aberta $\{U_i\}$ de M

1.2.5 Fibrados principais

Definição 1.69. Um *fibrado principal* é um fibrado $P \xrightarrow{\pi} M$ (conforme Definição 1.50) cuja fibra é $F = G$. Para um fibrado principal também usamos a notação $P(M,G)$.

Além da ação de G à esquerda da fibra $F = G$, podemos considerar uma ação à direita. Vamos definir uma ação à direita de G em P. Seja $\phi_i \colon U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ uma trivialização local dada por $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$, onde $\{U_i\}$ é cobertura aberta de M, $u \in \pi^{-1}(U_i)$ e $\pi(u) = p$. Definimos uma ação de G à direita de $\pi^{-1}(U_i)$ por

$$ua := \phi_i(p, g_i a), \quad \forall a \in G, \forall u \in \pi^{-1}(p). \tag{1.20}$$

Se $p \in U_i \cap U_j$, usando a condição (1.13), segue que

$$ua = \phi_i(p, g_i a) = \phi_i(p, t_{ij}(p) g_j a) = \phi_j(p, g_j a),$$

i.e., a ação à direita definida por (1.20) não depende da trivialização local. Então definimos a ação de G à direita de P por

$$\begin{aligned} P \times G &\to P \\ (u, a) &\mapsto ua. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Observação 1.70. Note que a ação definida por (1.21) é um mapa suave.

Vejamos algumas propriedades da ação à direita definida acima.

Proposição 1.71. *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal com a ação à direita definida por (1.21). Então*

(i) Dados $a \in G$, $p \in M$ e $u \in \pi^{-1}(p)$ com $u = \phi_i(p, g_i)$, então $\pi(ua) = \pi(u)$;

(ii) A ação à direita de G em $\pi^{-1}(p)$, $p \in M$, é transitiva;

(iii) A ação à direita é livre;

(iv) Se $\pi(u) = p$, então $\pi^{-1}(p) = \{ua \in P : a \in G\}$;

(v) Se $a \in G$ e $u = \phi_i(p, g_i) \in P$, então $\phi_i(p, g_i a) = \phi_i(p, g_i) a$.

Demonstração. (i) Por (1.20), $\pi(ua) = \pi(\phi_i(p, g_i a)) = p = \pi(u)$;

(ii) Sejam $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(p)$ tais que $u_1 = \phi_i(p, g_1)$ e $u_2 = \phi_i(p, g_2)$, $g_1, g_2 \in G$. Então existe $a \in G$ tal que $g_1 = g_2 a$. Daí $u_1 = \phi_i(p, g_1) = \phi_i(p, g_2 a) = u_2 a$;

(iii) Seja $u \in P$ tal que exista $a \in G$ satisfazendo $ua = u$. Escrevendo $u = \phi_i(p, g_i)$, temos $\phi_i(p, g_i) = u = ua = \phi_i(p, g_i a)$. Como ϕ_i é difeomorfismo, então $g_i = g_i a$. Sendo G um grupo, conclui-se que $a = e$;

(iv) Dado $a \in G$ temos, pelo item (i), que $\pi(ua) = \pi(u) = p$. Por outro lado, dado $u' \in \pi^{-1}(p)$, segue do item (ii) que existe $a \in G$ tal que $v = ua$;

(v) Basta notar que $ua = \phi_i(p, g_i)a$. Pela definição da ação à direita segue o afirmado. □

Uma consequência importante da Proposição 1.71 é que podemos definir trivializações com características convenientes.

Corolário 1.72. *Seja $s_i \in \Gamma(U_i, P)$ seção local. Então existe uma trivialização local $\phi_i \colon U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ satisfazendo*

$$s_i(p) = \phi_i(p, e), \quad \forall p \in U_i.$$

Dado $u \in \pi^{-1}(p)$, então existe único $g_u \in G$ tal que

$$u = \phi_i(p, e)g_u = s_i(p)g_u.$$

Mais ainda, se $p \in U_i \cap U_j$, então as seções $s_i \colon U_i \to P$ e $s_j \colon U_j \to P$ estão relacionadas por

$$s_j(p) = s_i(p)t_{ij}(p). \tag{1.22}$$

Chamamos ϕ_i de trivialiazação local canônica

Demonstração. Sejam $s_i \colon U_i \to P$ uma seção suave e $u \in \pi^{-1}(p)$, $p \in U_i$. Da Proposição 1.71 temos que a ação à direita é livre e transitiva, logo existe único $g_u \in G$ tal que $u = s_i(p)g_u$. Defina $\phi_i \colon U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ por $\phi_i(p, g_u) = u$. Por construção ϕ_i é uma bijeção. Combinando a Observação 1.70 e o fato de que G é grupo de Lie (e portanto a multiplicação é um mapa suave), segue que ϕ_i é suave. Analogamente, a inversa $\phi_i^{-1} \colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ dada por $\phi_i^{-1}(u) = (\pi(u), g_u)$ também é suave, ou seja, ϕ_i é um difeomorfismo. Note que $\pi \circ \phi_i(p, g_u) = \pi(u) = p$.

Como $s_i(p) = s_i(p)e$, segue da definição de ϕ_i que $s_i(p) = \phi(p, e)$. Podemos escrever $u = s_i(p)g_u = \phi_i(p, e)g_u$, sempre que $u \in \pi^{-1}(p)$.

Finalmente, se s_i, s_j são seções como no enunciado e $p \in U_i \cap U_j$, então

$$\begin{aligned} s_j(p) = \phi_j(p, e) = \phi_i(p, t_{ij}(p)e) &= \phi_i(p, t_{ij}(p)) \\ &= \phi_i(p, e)t_{ij}(p) = s_i(p)t_{ij}(p). \end{aligned}$$ □

Para uma demonstração dos próximos resultados veja [5, Teorema 4.2.10] e [5, Corolário 4.2.11].

Teorema 1.73. *Seja ϕ uma ação principal à direita de um grupo de Lie G em uma variedade suave P. Então P/G é uma variedade suave e $P \xrightarrow{\pi} P/G$ é um fibrado principal com grupo de estrutura G.*

Corolário 1.74. *Seja G um grupo de Lie compacto agindo livremente em uma variedade suave P. Então P/G é uma variedade suave e $P \xrightarrow{\pi} P/G$ é um fibrado principal com grupo de estrutura G.*

Exemplo 1.75 (Fibração de Hopf)**.** Considere a ação à direita livre que foi definida no Exemplo 1.45. Sabemos da teoria de variedades que $S^{2n+1}/S^1 \cong \mathbb{CP}^n$, o espaço projetivo complexo. Pelo Teorema 1.74 temos que $S^{2n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^n$ é um fibrado principal com grupo de estrutura S^1. Em particular, para $n = 1$, temos que $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$. Assim obtemos a fibração de Hopf

$$S^1 \to S^3 \xrightarrow{\pi} S^2.$$

1.2.6 Fibrados associados

Fibrado associado

Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal e F uma variedade suave. Suponha que G age em F à esquerda. Vamos definir um fibrado, com fibra F, associado ao fibrado principal P. Defina o seguinte mapa

$$\begin{aligned} \mu\colon (P\times F)\times G &\to P\times F \\ ((u,f),g) &\mapsto (ug, g^{-1}f). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Note que

$$\mu((u,f),e) = (ue, e^{-1}f) = (u,f), \quad \forall (u,f) \in P\times F,$$

onde $e \in G$ denota o elemento neutro, e

$$\begin{aligned} \mu(\mu((u,f),g_1),g_2) &= \mu((ug_1, g_1^{-1}f),g_2) \\ &= (ug_1g_2, (g_1g_2)^{-1}f) \\ &= \mu((u,f),g_1g_2), \qquad \forall g_1,g_2 \in G\, \forall (u,f) \in P\times F. \end{aligned}$$

O mapa μ definido por (1.23) é suave e portanto define uma ação de G à direita de $P\times F$. Mais ainda, visto que a ação de G à direita de P é livre μ também é.

Fazendo a identificação

$$(u,f) \sim (ug, g^{-1}f), \quad \forall g \in G,$$

temos que

$$(u,f) \sim (ug, g^{-1}f) \iff \mathcal{O}(u,f) = \mathcal{O}(ug, g^{-1}f),$$

onde

$$\mathcal{O}(u,f) = \{(ug, g^{-1}f) \in P\times F : g \in G\}$$

é a órbita de (u,f) definida pela ação à direita (1.23).

Considere o espaço de órbitas

$$P\times_G F := {}^{P\times F}\!/\!_{G} = \{\mathcal{O}(u,f)\colon (u,f) \in P\times F\}.$$

Então $P\times_G F$ é variedade suave, cuja estrutura suave é obtida exigindo que a projeção canônica $\mathscr{P}\colon P\times F \to P\times_G F$ seja suave. Denotaremos $[u,f] = \mathcal{O}(u,f)$. Definimos a projeção

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}\colon P\times_G F &\to M \\ [u,f] &\mapsto \pi(u), \end{aligned}$$

onde π é a projeção de P. Observe que $\widetilde{\pi}([ug, g^{-1}f]) = \pi(ug) = \pi(u) = \widetilde{\pi}([u, f])$, ou seja, $\widetilde{\pi}$ está bem-definida.

Vamos definir as trivializações locais. Sejam $\{U_i\}$ cobertura aberta de M e $\phi_i \colon U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ trivialização local de P. Defina

$$\begin{aligned} \psi_i \colon U_i \times F &\to \widetilde{\pi}^{-1}(U_i) \\ (p, f) &\mapsto [\phi_i(p, e), f] \end{aligned}$$

e sua inversa

$$\begin{aligned} \psi_i^{-1} \colon \widetilde{\pi}^{-1}(U_i) &\to U_i \times F \\ [u, f] &\mapsto (\pi(u), \mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(u))f). \end{aligned}$$

Verificar que ψ_i^{-1} é inversa de ψ_i é mais um cálculo de rotina. Ambas são suaves, pois são composições de mapas suaves. Para concluir, note que

$$\widetilde{\pi} \circ \psi_i(p, f) = \widetilde{\pi}([\phi_i(p, e), f]) = \pi(\phi_i(p, e)) = p.$$

Isso prova que ψ_i é trivialização.

Fibrado vetorial associado

Um caso particular da construção acima é quando $F = V$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal e $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ uma representação de G. Então a imagem $\rho(G) \subset \mathrm{GL}(V)$ age à esquerda de V.

O caso do fibrado vetorial associado ao fibrado principal P é análogo ao anterior. Definimos a ação de G à direita de $P \times V$ por

$$\begin{aligned} \mu \colon (P \times V) \times G &\to P \times V \\ ((u, v), g) &\mapsto (ug, \rho(g)^{-1}v). \end{aligned}$$

Fazendo a identificação

$$(u, g) \sim (ug, \rho(g)^{-1}v), \quad \forall g \in G,$$

definimos o espaço de órbitas

$$E = P \times_\rho V := {}^{(P \times V)}\!\big/\!_{G}$$

onde $[u, v] \in E$ é dado por $[u, v] = \{(ug, \rho(g)^{-1}v) \in P \times V : g \in G\}$. A projeção é

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi} \colon E &\to M \\ [u, v] &\mapsto \pi(u). \end{aligned}$$

Dadas $\{U_i\}$ cobertura aberta de M e $\phi_i \colon U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ trivialização local de P, a trivialização local é dada por

$$\begin{aligned} \psi_i \colon U_i \times V &\to \widetilde{\pi}^{-1}(U_i) \\ (p, v) &\mapsto [\phi_i(p, e), v], \end{aligned}$$

cuja inversa é

$$\begin{aligned}\psi_i^{-1}\colon \widetilde{\pi}^{-1}(U_i) &\to U_i \times V\\ [u,v] &\mapsto (\pi(u), \rho(\mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(u)))v).\end{aligned}$$

Suponha que $p \in U_i \cap U_j$. Sejam ϕ_i, ϕ_j as respectivas trivializações e $t_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$ a função de transição associada dada por $t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p}$ (e portanto $\phi_{i,p} \circ t_{ij}(p) = \phi_{j,p}$). Vamos encontrar as funções de transição de E. Como de costume temos, para todo $v \in V$

$$\begin{aligned}\tau_{ij}(p)v &= \psi_{i,p}^{-1} \circ \psi_{j,p}(v)\\ &= \psi_{i,p}^{-1}([\phi_j(p,e), v])\\ &= \psi_{i,p}^{-1}([\phi_{j,p}(e), v])\\ &= \psi_{i,p}^{-1}([\phi_{i,p}(t_{ij}(p)e), v])\\ &= \psi_{i,p}^{-1}([\phi_i(p, t_{ij}(p)), v])\\ &= \rho(\mathrm{pr}_2(\phi_i^{-1}(\phi_i(p, t_{ij}(p)))))v\\ &= \rho(t_{ij}(p))v.\end{aligned}$$

Logo $\tau_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \rho(G)$ dada por $\tau_{ij}(p) = \rho(t_{ij}(p))$ é a função de transição.

Note que para cada $x \in M$, a fibra E_x é dada por

$$E_x = \widetilde{\pi}^{-1}(x) = \{[u,v] \in E\colon \widetilde{\pi}([u,v]) = x\} = \{[u,v] \in E\colon \pi(u) = x\} = {}^{(P_x \times V)}\!\big/_{G}$$

e definimos a estrutura de espaço vetorial na fibra E_x por

$$\lambda[u,v] + [u,w] = [u, \lambda v + w], \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u,v \in V,\ \forall u \in P. \tag{1.24}$$

Vamos enunciar um resultado que será usado na Seção 2.10, cuja demonstração pode ser encontrada em [5, Proposição 4.7.6].

Proposição 1.76. *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal e $E = P \times_\rho V$ um fibrado vetorial associado. Seja $s\colon U \to P$ uma seção local. Então existe uma bijeção entre seções suaves $\tau\colon U \to E$ e mapas suaves $f\colon U \to V$, dada por*

$$\tau(x) = [s(x), f(x)], \quad \forall x \in U.$$

Fibrado principal induzido por um fibrado vetorial

Seja um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$, cuja fibra é um espaço vetorial V de dimensão k, i.e., $V = \mathbb{R}^k$ ou $\mathbb{C}^k$ e, portanto, com grupo de estrutura $G = \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$. Vamos definir um fibrado principal $P(M,G)$. Para isso usaremos a construção feita na Seção 1.2.2.

Seja $\{U_i\}$ uma cobertura aberta de M e considere o conjunto

$$X := \bigsqcup_i U_i \times G.$$

Defina a relação de equivalência em X

$$\forall (p,g) \in U_i \times G,\ \forall (q,g') \in U_j \times G,\ (p,g) \sim (q,g') \iff p = q \text{ e } g = t_{ij}(p)g'.$$

onde $t_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$ é função de transição de E. Considere $P = {}^{X}\!/\!_{\sim}$ e denote um elemento de P por $[p,g]$. A projeção em P é

$$\begin{aligned} \pi_P\colon P &\to M \\ [p,g] &\mapsto p \end{aligned}$$

e as trivializações são dadas por

$$\begin{aligned} \phi_i\colon U_i \times G &\to \pi_P^{-1}(U_i) \\ (p,g) &\mapsto [p,g]. \end{aligned}$$

As funções de transição de P, conforme a Seção 1.2.2, são as mesmas de E. De fato, se $p \in U_i \cap U_j$, as funções de transição $\tau_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$ de P são obtidas por

$$\begin{aligned} \phi_{i,p} \circ \tau_{ij}(g) = \phi_{j,p}(g) &\Rightarrow \phi_i(p, \tau_{ij}(p)g) = \phi_j(p,g) \\ &\Rightarrow [p, \tau_{ij}(p)g] = [p,g] \\ &\Rightarrow \tau_{ij}(p)g = t_{ij}(p)g, \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

Exemplo 1.77 (Fibrado referencial)**.** Vamos estudar o fibrado principal associado ao fibrado tangente TM de uma variedade suave M de dimensão n. Dado um ponto $x \in M$, seja o conjunto das bases de T_xM

$$F_{\mathrm{GL}}(M)_x := \{(v_1, \ldots, v_n) \text{ é base de } T_xM\}.$$

Note que dessa forma $F_{\mathrm{GL}}(M)_x \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de fato, basta fazer a identificação de $(v_1, \ldots, v_n)$ com a matriz $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ cujas colunas são os vetores v_i, $i = 1, \ldots, n$. Considere a união disjunta

$$F_{\mathrm{GL}}(M) := \bigsqcup_{x \in M} F_{\mathrm{GL}}(M)_x.$$

Temos uma projeção natural $\widetilde{\pi}\colon F_{\mathrm{GL}}(M) \to M$, à saber, $\widetilde{\pi}(x,P) = x$, que é sobrejetora, suave e, para cada $x \in M$, $\widetilde{\pi}^{-1}(x) = F_{\mathrm{GL}}(M)_x$. Além disso temos uma ação de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ à direita de $F_{\mathrm{GL}}(M)$ dada pelo produto de matrizes $(P,A) \mapsto P \cdot A$, onde $P \in F_{\mathrm{GL}}(M)_x$ e $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Tal ação preserva fibras, visto que se $P = (v_1, \ldots, v_n)$ é base de T_xM e $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, então $P \cdot A$ é uma nova base para T_xM. Como $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é grupo, temos que essa ação também é transitiva e livre. Considere $\Phi_i\colon U_i \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)$ uma trivialização de TM (veja o Exemplo 1.53) dada por $\Phi_i(x,v) = (x, (\mathrm{d}\varphi_i)_{\varphi_i^{-1}(x)} v)$, onde $\varphi_i\colon V_i \to U_i$ é uma parametrização local de M. Defina

$$\begin{aligned} \psi_i\colon U_i \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &\to \widetilde{\pi}^{-1}(U_i) \\ (x,A) &\mapsto (x, \Phi_{i,x} \cdot A), \end{aligned}$$

cuja inversa é

$$\begin{aligned}\psi_i^{-1}\colon \widetilde{\pi}^{-1}(U_i) &\to U_i \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\\ (x,P) &\mapsto (x, \Phi_{i,x}^{-1}\cdot P).\end{aligned}$$

Que ψ_i e ψ_i^{-1} são suaves segue do fato de que Φ_i e Φ_i^{-1} são suaves. Claramente $\widetilde{\pi}\circ\psi_i(x,A) = x$. Se $x \in U_i \cap U_j$, temos que as funções de transição são

$$g_{ij}(x)A = \psi_{i,x}^{-1}\circ\psi_{j,x}A = \Phi_{i,x}^{-1}\circ\Phi_{j,x}\cdot A = (\mathrm{d}\,\varphi_i^{-1})_x \circ (\mathrm{d}\,\varphi_j)_{\varphi_j^{-1}(x)}\cdot A, \quad \forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Note que $g_{ij}(x) = t_{ij}(x)$, para todo $x \in U_i \cap U_j$, onde t_{ij} é função de transição de TM. O fibrado principal $F_{\mathrm{GL}}(M)$ é chamado *fibrado referencial.*

Exemplo 1.78 (Fibrado referencial ortonormal)**.** No caso em que M é uma variedade Riemanniana, podemos fazer a mesma construção do Exemplo 1.77 tomando o grupo $\mathrm{O}(n)$ ao invés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (de fato, a métrica nos permite ortonormalizar os vetores de uma base), cuja a fibra em $x \in M$ é o conjunto de bases ortonormais de T_xM e dessa forma obtemos o *fibrado referencial ortonormal*, denotado por $F_{\mathrm{O}}(M)$. Se além disso M for orientável, obtemos o fibrado principal $F_{\mathrm{SO}(M)}$ com grupo $\mathrm{SO}(n)$ e cuja fibra em $x \in M$ é constituída das bases ortonormais orientadas de T_xM.

Exemplo 1.79. Considere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica usual. É possível identificar o $\mathrm{SO}(n)$-fibrado principal $F_{\mathrm{SO}}(S^n)$ com o grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(n+1)$. Com efeito, podemos definir uma orientação em T_xS^n dizendo que $(v_1,\dots,v_n)$ é base positiva de T_xS^n se, e somente se, $(x,v_1,\dots,v_n)$ é base positiva de $\mathbb{R}^{n+1}$. Agora $(x,v_1,\dots,v_n) \in F_{\mathrm{SO}}(S^n)$ se, e somente se, $(v_1,\dots,v_n)$ é base ortonormal orientada (positivamente) de T_xS^n que equivale à $(x,v_1,\dots,v_n)$ ser base ortonormal orientada (positivamente) de $\mathbb{R}^{n+1}$, ou seja, $(x,v_1,\dots,v_n) \in \mathrm{SO}(n+1)$.

1.2.7 Outra condição de trivialidade

Teorema 1.80. *Um fibrado principal $P(M,G)$ é trivial se, e somente se, admite uma seção global.*

Demonstração. Suponha que $P \cong M \times G$. Seja $\phi\colon M\times G \to P$ a trivialização (global) de P. Fixe $g \in G$ e defina

$$\begin{aligned}s_g\colon M &\to P\\ p &\mapsto \phi(p,g).\end{aligned}$$

Segue que s_g é suave e $\pi\circ s_g(p) = \pi\circ\phi(p,g) = p$, pois ϕ é trivialização. Logo s_g é seção global.

Reciprocamente seja $P(M,G)$ um fibrado principal e suponha que exista $s \in \Gamma(M,P)$ seção global. Denote a ação de G à direita de P (conforme (1.21)) por $\mu\colon P\times G \to P$. Defina

$$\begin{aligned}\phi\colon M\times G &\to P\\ (p,g) &\mapsto \mu(s(p),g).\end{aligned}$$

Como μ é livre e transitiva, segue que ϕ está bem-definida e é uma bijeção. A suavidade de ϕ é garantida pela suavidade da seção s e da ação à direita μ. Pelo item (i) da Proposição 1.71 obtemos $\pi \circ \phi(p,g) = \pi(\mu(s(p),g)) = p = \mathrm{pr}_1(p,g)$. Resta mostrar que ϕ^{-1} é suave. Pelo Teorema da Função Inversa, basta mostrar que, para todo ponto $(p,g) \in M \times G$, a diferencial de ϕ é um isomorfismo. Lembre-se que $\mu^g \colon P \to P$, dado por $\mu^g(u) = \mu(u,g)$, é um difeomorfismo, conforme a Observação 1.42 e $\mathrm{d}(\mu^g)_{s(p)}X = \mathrm{d}\mu_{(s(p),g)}(X,0)$. Temos também o mapa $\mu^{s(p)} \colon G \to P$, dado por $\mu^{s(p)}(h) = \mu(s(p),h)$ que, pela Proposição 1.48, sabemos que sua diferencial $\mathrm{d}(\mu^{s(p)})_g$ é injetora. Agora, dados $X \in T_pM$ e $Y \in T_gG$, usando a Proposição 1.44, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi_{(p,g)}(X,Y) &= \mathrm{d}\mu_{(s(p),g)}(\mathrm{d}s_pX, Y) \\ &= \mathrm{d}(\mu^g)_{s(p)}(\mathrm{d}s_pX) + \mathrm{d}(\mu^{s(p)})_gY. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Suponha que $(X,Y) \in \ker(\mathrm{d}\phi_{(p,g)})$. Sejam γ_1 e γ_2 curvas suaves em M e G, respectivamente, tais que $\gamma_1(0) = p$, $\gamma_2(0) = g$, $\gamma_1'(0) = X$ e $\gamma_2'(0) = Y$. Aplicando $\mathrm{d}\pi_{\mu(s(p),g)}$ na equação (1.25) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\pi_{\mu(s(p),g)}(\mathrm{d}(\mu^g)_{s(p)}(\mathrm{d}s_pX)) + \mathrm{d}\pi_{\mu(s(p),g)}(\mathrm{d}(\mu^{s(p)})_gY) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi \circ \mu^g \circ s \circ \gamma_1(t) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi \circ \mu^{s(p)} \circ \gamma_2(t) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_1(t) + 0 = X. \end{aligned}$$

Usando que $X = 0$ em (1.25) temos $0 = \mathrm{d}(\mu^{s(p)})_gY$, que, como já observado, é injetora. Logo $Y = 0$ e portanto $\ker(\mathrm{d}\phi_{(p,g)}) = \{(0,0)\}$. Como a dimensão de $T_{\mu(s(p),g)}P$ é igual a dimensão de $T_pM \times T_gG$, segue que $\mathrm{d}\phi_{(p,g)}$ é isomorfismo, como queríamos. □

Corolário 1.81. *Um fibrado vetorial E é trivial se, e somente se, o fibrado principal P induzido por E admite uma seção global.*

Demonstração. De acordo com o discutido na Seção 1.2.6, P tem as mesmas funções de transição de E. Pelo Teorema 1.80 acima, P admite uma seção global se, e somente se, é trivial, portanto se, e somente se, o conjunto de suas funções de transição consiste apenas da identidade, i.e., se, e somente se, E é trivial. □

CAPÍTULO 2

Conexões em Fibrados

Nesta seção trataremos de um dos principais objetos desse trabalho: as conexões em fibrados. Primeiro definiremos uma conexão em um fibrado principal $P(M,G)$ e exploraremos algumas propriedades relevantes, como a equação de estrutura de Cartan e a identidade de Bianchi. Posteriormente usaremos esses resultados e o que vimos na Seção 1.2.6 para induzir uma conexão em um fibrado vetorial E associado à P.

2.1 Definições

Definição 2.1. Seja $P(M,G)$ um fibrado principal, $u \in P$ e $G_p = \pi^{-1}(p)$, onde $\pi(u) = p$. Definimos o *subespaço vetorial vertical* $V_uP \subset T_uP$ sendo o espaço tangente à G_p em u.

O subespaço vertical V_uP é construído da seguinte forma. Seja $X \in \mathfrak{g}$. Definimos a curva $\gamma_u(t) = r_{\exp(tX)}(u) = u\exp(tX)$. De acordo com o item (i) da Proposição 1.71 temos que $\pi(u\exp(tX)) = \pi(u)$. Então γ_u é curva em G_p tal que $\gamma_u(0) = u$ e portanto o vetor

$$\gamma_u'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r_{\exp(tX)}(u) \tag{2.1}$$

é tangente à G_p. Lembre-se da Definição 1.46 onde introduzimos o campo de vetores fundamental. Disso e da equação (2.1) temos que ${X^\sharp}_u = \gamma_u'(0) \in V_uP$.

Proposição 2.2. *Dado um fibrado principal $P(M,G)$ e $u \in P$. Então o mapa*

$$\begin{aligned} \phi_u \colon \mathfrak{g} &\to V_uP \\ X &\mapsto {X^\sharp}_u \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Pela Proposição 1.49, basta notar que $\mathfrak{g}$ e V_uP são espaços vetoriais de mesma dimensão, pois $T_eG \cong \mathfrak{g}$ e V_uP é tangente à $G_p \cong G$. □

Definição 2.3. Seja $P(M,G)$ um fibrado principal. O complemento de V_uP em T_uP, denotado por H_uP, é chamado *subespaço vetorial horizontal*.

Note que o subespaço vertical é naturalmente determinado. Contudo o subespaço horizontal não tem essa propriedade. Para que ambos estejam bem determinados, fazemos a seguinte definição.

Definição 2.4. Seja $P(M,G)$ um fibrado principal. Uma *conexão* em P é uma separação do espaço tangente T_uP em subespaços V_uP e H_uP, $u \in P$, que satisfaz:

(i) $T_uP = V_uP \oplus H_uP$;

(ii) Todo campo de vetores suave $X \in \mathfrak{X}(P)$ pode ser separado em campos suaves X^H e X^V tais que, para cada $u \in P$, $X_u^H \in H_uP$ e $X_u^V \in V_uP$ com $X = X^H + X^V$;

(iii) Para cada $g \in G$ e $u \in P$, $H_{ug}P = r_{g*}(H_uP) = \mathrm{d}(r_g)_u(H_uP)$.

Observação 2.5. A condição (iii) na Definição 2.4 nos diz que os subespaços horizontais H_uP e $H_{ug}P$ na mesma fibra (pois $\pi(ug) = \pi(u)$) estão relacionados pelo mapa r_{g*} induzido pela ação à direita. Isso quer dizer que o espaço H_uP gera os subespaços horizontais que estão na mesma fibra.

2.2 A 1-forma de conexão

A Definição 2.4 não é muito prática. Por conta disso, vamos mostrar que há uma forma mais palpável de obter uma conexão em P.

Definição 2.6. Uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ é chamada *1-forma de conexão* se são satisfeitas

(i) $\omega(X^\sharp) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}$;

(ii) ${r_g}^*\omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\,\omega, \quad \forall g \in G$.

A condição (ii) quer dizer que, dado $X \in T_uP$, então

$$ {r_g}^*\omega_{ug}(X) = \omega_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u X) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(X)). $$

Exemplo 2.7. Seja o fibrado principal $P \cong M \times G$, onde $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $G = \mathbb{R}$ com a soma. Dado $(x,y) \in M$ e $g \in G$ defina

$$ \omega = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} + \mathrm{d}g. $$

Note que se $A^\sharp = A\frac{\partial}{\partial g}$, com $A \in \mathbb{R}$, então $\omega(A^\sharp) = A$. Além disso, como G é abeliano, vemos que $r_g^*\omega = \omega = g^{-1}\omega g$, ou seja, ω é uma 1-forma de conexão.

Definição 2.8. Dada uma 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$, definimos

$$ H_uP := \ker \omega_u = \{X \in T_uP \colon \, \omega_u(X) = 0\}. $$

Para que a Definição 2.6 seja útil precisamos mostrar que as definições de conexão e de 1-forma de conexão são equivalentes.

Proposição 2.9. *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal. As Definições 2.4 e 2.6 são equivalentes.*

Demonstração. Para cada $u \in P$, seja $\phi_u^{-1}\colon V_uP \to \mathfrak{g}$ a inversa do isomorfismo da Proposição 2.2.

Suponha que tenhamos uma conexão em P, ou seja, que exista uma separação conforme a Definição 2.4. Dado $X \in \mathfrak{X}(P)$, existem campos suaves X^V e X^H tais que $X_u^V \in V_uP$, $X_u^H \in H_uP$ e $X = X^H + X^V$. Defina $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ por $\omega_u(X_u) = \phi_u^{-1}(X_u^V)$. Vamos verificar que ω satisfaz os itens (i) e (ii) da Definição 2.6. Para (i), se $Y^\sharp$ é o campo fundamental gerado por $Y \in \mathfrak{g}$, então, como ${Y^\sharp}_u \in V_uP$, temos

$$\omega_u({Y^\sharp}_u) = \phi_u^{-1}({Y^\sharp}_u) = Y, \quad \forall u \in P.$$

Para o item (ii), seja $Z \in T_uP$, então $Z = Z^V + Z^H$, com $Z^V \in V_uP$ e $Z^H \in H_uP$. Por hipótese $\mathrm{d}(r_g)_u Z^H \in H_{ug}P$, então, da definição de ω, segue que

$$\omega_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u Z^H) = \phi_{ug}^{-1}(0) = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\omega_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u Z) &= \omega_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u (Z^V + Z^H)) \\
&= \omega_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u Z^V) + \omega_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u Z^H) \\
&= \omega_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u Z^V).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Seja $A = \phi_u^{-1}(Z^V) \in \mathfrak{g}$. Daí

$$Z^V = {A^\sharp}_u = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u\exp(tA). \tag{2.3}$$

e portanto $\omega_u(Z^V) = \omega_u({A^\sharp}_u) = A$. De (2.2) e (2.3) obtemos

$$\begin{aligned}
\omega_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u Z) &= \omega_{ug}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r_g(u\exp(tA))\right) \\
&= \omega_{ug}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u\exp(tA)g\right) \\
&= \omega_{ug}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ugg^{-1}\exp(tA)g\right) \\
&= \omega_{ug}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ug\,\mathrm{ad}_{g^{-1}}(\exp(tA))\right) \\
&= \omega_{ug}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ug\exp(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(tA))\right) \\
&= \omega_{ug}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ug\exp(t\,\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(A))\right) \\
&= \omega_{ug}({[\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(A)]^\sharp}_{ug}) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(A) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u({A^\sharp}_u)) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(Z^V)),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde foi usado a igualdade (1.7). Como $\omega_u(Z^H) = \phi_u^{-1}(0) = 0$ temos $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(Z^H)) = 0$. Da linearidade de ω e $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$, a equação (2.4) se torna

$$\begin{aligned}\omega_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u)(Z) &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(Z^V))\\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(Z^V)) + \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(Z^H))\\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(Z^V + Z^H))\\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(Z)).\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha definida $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ uma 1-forma de conexão. Definindo $H_uP = \ker(\omega_u)$ e V_uP o complemento de H_uP em T_uP, $u \in P$, temos $T_uP = V_uP \oplus H_uP$. Além disso, dado $X \in \mathfrak{X}(P)$ suave e $u \in P$, podemos definir campos suaves X^V e X^H por $X_u^V = \phi_u(\omega_u(X_u))$ e $X_u^H = X - X_u^V$. Essas observações provam os itens (i) e (ii) da Definição 2.6. Resta mostar o item (iii) da definição de conexão. Sejam $g \in G$ e $u \in P$. Para cada $Z \in H_uP$ temos $\omega_u(Z) = 0$. Sendo ω uma 1-forma de conexão, então

$$\omega_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u Z) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_u(Z)) = 0,$$

ou seja, $\mathrm{d}(r_g)_u Z \in H_{ug}P$. Logo $r_{g*}(H_uP) \subset H_{ug}P$. Por outro lado, sabemos da Observação 1.42 que $r_g \colon P \to P$ é um difeomorfismo e portanto $r_{g*} \colon T_uP \to T_{ug}P$ é um isomorfismo. Em particular $\dim(r_{g*}(H_uP)) = \dim H_uP$. Como $\dim H_uP = \dim \ker(\omega_u) = \dim T_uP - \dim \mathfrak{g}$, para todo $u \in P$, logo $\dim H_uP = \dim H_{ug}P$ e isso implica que $\dim r_{g*}(H_uP) = \dim H_{ug}P$. Segue que $r_{g*}(H_uP) = H_{ug}P$. □

2.3 Forma local da 1-forma de conexão

Sejam $\{U_i\}$ uma cobertura aberta de M, $P(M,G)$ um fibrado principal e $\sigma_i \in \Gamma(U_i, P)$ uma seção local. Dada uma 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ definimos

$$\mathcal{A}_i := \sigma_i{}^* \omega \in \Omega^1(U_i) \otimes \mathfrak{g}. \tag{2.5}$$

No que se segue mostraremos que, dadas $\mathcal{A}_i \in \Omega^1(U_i) \otimes \mathfrak{g}$ e $\sigma_i \in \Gamma(U_i, P)$, podemos construir uma 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ satisfazendo (2.5). Para isso, vejamos alguns resultados que serão usados na demonstração.

Lema 2.10. *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal, onde $\pi \colon P \to M$ é sua projeção. Seja $X \in \mathfrak{g}$ e considere $X^\sharp$ o campo de vetores fundamental gerado por X. Então $\mathrm{d}\pi_u(X^\sharp{}_u) = 0$, para todo $u \in P$.*

Demonstração. Se $\pi(u) = p \in M$, de um cálculo direto temos

$$\mathrm{d}\pi_u(X^\sharp{}_u) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(r_{\exp(tA)}(u)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(u) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p = 0.$$ □

Lema 2.11. *Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal, σ_i e σ_j seções locais sobre U_i e U_j, respectivamente, onde $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Então, para todo $X \in T_pM$, $p \in U_i \cap U_j$, vale*

$$\sigma_{j*}X = r_{t_{ij}(p)*} \circ \sigma_{i*}X + \left[L_{t_{ij}(p)^{-1}*} \circ t_{ij*}X\right]^\sharp_{\sigma_j(p)}. \tag{2.6}$$

Além disso, se $\omega \in \Omega^1(P)\otimes\mathfrak{g}$ é uma 1-forma de conexão, então

$$\mathcal{A}_{j|p} = \mathrm{Ad}_{t_{ij}(p)^{-1}} \circ \mathcal{A}_{i|p} + \mathrm{d}(L_{t_{ij}(p)^{-1}})_{t_{ij}(p)} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_p, \quad \forall p \in U_i \cap U_j. \tag{2.7}$$

Demonstração. Sejam $X \in T_pM$, com $p \in U_i \cap U_j$, e seções locais σ_i e σ_j como no enunciado. Considere uma curva suave $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X$. Denote a ação à direita, definida em (1.21), por $\mu\colon P\times G \to P$. Seja $t_{ij}\colon U_i\cap U_j \to G$ a função de transição. Conforme (1.22), temos

$$\sigma_j(p) = \mu(\sigma_i(p), t_{ij}(p)),$$

Pela Proposição 1.44 segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\sigma_j)_pX &= \mathrm{d}\mu(\mathrm{d}(\sigma_i)_pX, \mathrm{d}(t_{ij})_pX) \\ &= \mathrm{d}(\mu^{t_{ij}(p)})_{\sigma_i(p)} \circ \mathrm{d}(\sigma_i)_pX + \mathrm{d}(\mu^{\sigma_i(p)})_{t_{ij}(p)} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_pX \\ &= \mathrm{d}(r_{t_{ij}(p)})_{\sigma_i(p)} \circ \mathrm{d}(\sigma_i)_pX + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^{\sigma_i(p)}(t_{ij}(\gamma(t))). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^{\sigma_i(p)}(t_{ij}(\gamma(t))) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu(\sigma_i(p), t_{ij}(\gamma(t))) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu(\mu(\sigma_j(p), t_{ij}(p)^{-1}), t_{ij}(\gamma(t))) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu(\sigma_j(p), t_{ij}(p)^{-1} t_{ij}(\gamma(t))) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^{\sigma_j(p)}(L_{t_{ij}(p)^{-1}}(t_{ij}(\gamma(t)))) \\ &= \mathrm{d}(\mu^{\sigma_j(p)})_e \left(\mathrm{d}(L_{t_{ij}(p)^{-1}})_{t_{ij}(p)} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_pX\right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde observamos que $L_{t_{ij}(p)^{-1}}(t_{ij}(p)) = e$, sendo $L_g\colon G\to G$ a translação à esquerda dada por $L_g(h) = gh$. Usando a equação (1.11) em (2.9) obtemos

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mu^{\sigma_i(p)}(t_{ij}(\gamma(t))) = \left[\mathrm{d}(L_{t_{ij}(p)^{-1}})_{t_{ij}(p)} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_pX\right]^{\sharp}_{\sigma_j(p)}. \tag{2.10}$$

Por fim, usando (2.10) em (2.8), concluímos

$$\mathrm{d}(\sigma_j)_pX = \mathrm{d}(r_{t_{ij}(p)})_{\sigma_i(p)} \circ \mathrm{d}(\sigma_i)_pX + \left[\mathrm{d}(L_{t_{ij}(p)^{-1}})_{t_{ij}(p)} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_pX\right]^{\sharp}_{\sigma_j(p)},$$

o que prova a validade de (2.6).

Considere ω uma 1-forma de conexão em P. Usando o resultado acima, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{j|p}X &= \omega_{\sigma_j(p)}(\mathrm{d}(\sigma_j)_pX) \\ &= \omega_{\sigma_i(p)t_{ij}(p)}\left(\mathrm{d}(r_{t_{ij}(p)})_{\sigma_i(p)} \circ \mathrm{d}(\sigma_i)_pX) + \left[\mathrm{d}(L_{t_{ij}(p)^{-1}})_{t_{ij}(p)} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_pX\right]^{\sharp}_{\sigma_j(p)}\right) \\ &= \mathrm{Ad}_{t_{ij}(p)^{-1}}(\omega_{\sigma_i(p)}(\mathrm{d}(\sigma_i)_pX)) + \mathrm{d}(L_{t_{ij}(p)^{-1}})_{t_{ij}(p)}(\mathrm{d}(t_{ij})_pX) \\ &= \mathrm{Ad}_{t_{ij}(p)^{-1}} \circ \mathcal{A}_{i|p}X + \mathrm{d}(L_{t_{ij}(p)^{-1}})_{t_{ij}(p)} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_pX, \quad \forall p \in M,\ \forall X \in T_pM, \end{aligned}$$

que é a expressão em (2.7). □

Teorema 2.12. *Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal e $\{U_i\}$ cobertura aberta de M. Dadas $\mathcal{A}_i \in \Omega^1(U_i)\otimes\mathfrak{g}$ e $\sigma_i \in \Gamma(U_i,P)$, suponha que seja satisfeita a condição de compatibilidade expressa na equação (2.7). Então existe uma 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P)\otimes\mathfrak{g}$ tal que $\mathcal{A} = {\sigma_i}^*\omega$.*

Demonstração. Sejam $\sigma_i \in \Gamma(U_i,P)$ e $\mathcal{A}_i \in \Omega^1(U_i)\otimes\mathfrak{g}$. Considere a trivialização local canônica $\phi_i\colon U_i\times G \to \pi^{-1}(U_i)$ associada a σ_i dada pelo Corolário 1.72. Seja o mapa

$$\begin{aligned} g_i\colon \pi^{-1}(U_i) &\to G \\ u &\mapsto \mathrm{pr}_2\circ\phi_i^{-1}(u). \end{aligned}$$

Defina $\omega_i \in \Omega^1(\pi^{-1}(U_i))\otimes\mathfrak{g}$ por

$$\omega_{i|u} = \mathrm{Ad}_{g_i(u)^{-1}}\circ\mathcal{A}_{i|\pi(u)}\circ \mathrm{d}\pi_u + \mathrm{d}(L_{g_i(u)^{-1}})_{g_i(u)}\circ\mathrm{d}(g_i)_u, \quad \forall u\in\pi^{-1}(U_i).$$

Verifiquemos que ${\sigma_i}^*\omega_i = \mathcal{A}_i$. Dado $X\in T_pM$, onde $p\in U_i$. Temos

$$\begin{aligned} ({\sigma_i}^*\omega_i)_pX &= \omega_{i\,\sigma_i(p)}(\mathrm{d}(\sigma_i)_pX) \\ &= \mathrm{Ad}_{g_i(\sigma_i(p))^{-1}}\circ\mathcal{A}_{i|\pi(\sigma_i(p))}\circ\mathrm{d}(\pi\circ\sigma_i)_pX \\ &\qquad + \mathrm{d}(L_{g_i(\sigma_i(p))^{-1}})_{g_i(\sigma_i(p))}\circ\mathrm{d}(g_i\circ\sigma_i)_pX = \mathcal{A}_{i|p}X, \end{aligned}$$

onde notamos que $\pi(\sigma_i(p)) = p$ e que

$$g_i\circ\sigma_i(p) = \mathrm{pr}_2\circ\phi_i^{-1}\circ\sigma_i(p) = \mathrm{pr}_2\circ\phi_i^{-1}\circ\phi_i(p,e) = e,$$

portanto $\mathrm{d}(g_i\circ\sigma_i)_p = 0$.

Vamos verificar que ω_i satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 2.6. Seja $X\in\mathfrak{g}$ e considere o campo de vetores fundamental $X^\sharp$ gerado por X. Para cada $u\in\pi^{-1}(U_i)$ temos

$$\begin{aligned} \omega_{i|u}({X^\sharp}_u) &= \mathrm{Ad}_{g_i(u)^{-1}}\circ\mathcal{A}_{i|\pi(u)}\circ\mathrm{d}\pi_u({X^\sharp}_u) + \mathrm{d}(L_{g_i(u)^{-1}})_{g_i(u)}\circ\mathrm{d}(g_i)_u({X^\sharp}_u) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{g_i(u)^{-1}}\circ g_i(u\exp(tX)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{g_i(u)^{-1}}(\mathrm{pr}_2\circ\phi_i^{-1}\circ\phi_i(\pi(u),g_i(u)\exp(tX))) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{g_i(u)^{-1}}(g_i(u)\exp(tX)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) = X, \end{aligned}$$

onde fizemos uso do Lema 2.10, o que verifica o item (i). Para o item (ii), sejam $X\in T_uP$, $u\in P$, e $g\in G$. Por definição temos

$$\begin{aligned} ({r_g}^*\omega_i)_u(X) &= \omega_{i|ug}(\mathrm{d}(r_g)_uX) \\ &= \mathrm{Ad}_{g_i(ug)^{-1}}\circ\mathcal{A}_{i|\pi(ug)}\circ\mathrm{d}\pi_{ug}\circ\mathrm{d}(r_g)_uX \\ &\qquad + \mathrm{d}(L_{g_i(ug)^{-1}})_{g_i(ug)}\circ\mathrm{d}(g_i)_{ug}\circ\mathrm{d}(r_g)_uX \qquad (2.11) \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}g_i(u)^{-1}}\circ\mathcal{A}_{i|\pi(u)}\circ\mathrm{d}\pi_uX \\ &\qquad + \mathrm{d}(L_{g^{-1}g_i(u)^{-1}})_{g_i(ug)}\circ\mathrm{d}(g_i)_{ug}\circ\mathrm{d}(r_g)_uX, \end{aligned}$$

onde foi usado que $\pi \circ r_g(u) = \pi(ug) = \pi(u)$, o que implica que

$$\mathrm{d}\pi_{ug}(\mathrm{d}(r_g)_u X) = \mathrm{d}(\pi \circ r_g)_u X = \mathrm{d}\pi_u X.$$

Também usamos que

$$g_i(ug) = \mathrm{pr}_2 \circ \phi^{-1}(ug) = \mathrm{pr}_2 \circ \phi_i^{-1} \circ \phi_i(\pi(u), g_i(u)g) = g_i(u)g.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{ab}(Y) &= \mathrm{d}(\mathrm{ad}_{ab})_e(Y) \\ &= \mathrm{d}(\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_b)_e Y \\ &= \mathrm{d}(\mathrm{ad}_a)_e \circ \mathrm{d}(\mathrm{ad}_b)_e(Y) \\ &= \mathrm{Ad}_a \circ \mathrm{Ad}_b(Y). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Além disso, seja $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to P$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = u$ e $\gamma'(0) = X$, então

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(L_{g^{-1}g_i(u)^{-1}}) \circ \mathrm{d}(g_i)_{ug} \circ \mathrm{d}(r_g)_u X &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{g^{-1}g_i(u)^{-1}} \circ g_i \circ r_g \circ \gamma(t) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{ad}_{g^{-1}}(L_{g_i(u)^{-1}}(g_i(\gamma(t)))) \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathrm{d}(L_{g_i(u)^{-1}}) \circ \mathrm{d}(g_i)_u X. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Usando os resultados em (2.12) e (2.13), obtemos de (2.11) que

$$\begin{aligned} (r_g{}^*\omega_i)_u(X) &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathrm{Ad}_{g_i(u)^{-1}} \circ \mathcal{A}_{i|\pi(u)} \circ \mathrm{d}\pi_u X + \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \mathrm{d}(L_{g_i(u)^{-1}}) \circ \mathrm{d}(g_i)_u X \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \left(\mathrm{Ad}_{g_i(u)^{-1}} \circ \mathcal{A}_{i|\pi(u)} \circ \mathrm{d}\pi_u X + \mathrm{d}(L_{g_i(u)^{-1}}) \circ \mathrm{d}(g_i)_u X \right) \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_{i|u}). \end{aligned}$$

Precisamos definir ω globalmente. Para isso, note que se para $p \in U_i \cap U_j$ e $u \in \pi^{-1}(p)$ tivermos $\omega_{i|u} = \omega_{j|u}$ basta tomarmos $\omega_u = \omega_{i|u}$, pois cada $u \in P$ está em um $\pi^{-1}(U_i)$. Por hipótese temos que é satisfeita a condição (2.7), ou seja, a seguinte igualdade é válida

$$\mathcal{A}_{j|p} = \mathrm{Ad}_{t_{ij}(p)^{-1}} \circ \mathcal{A}_{i|p} + \mathrm{d}(L_{t_{ij}(p)^{-1}})_{t_{ij}(p)} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_p, \quad \forall p \in U_i \cap U_j.$$

Temos

$$\begin{aligned} \omega_{j|u}(X) &= \mathrm{Ad}_{g_j(u)^{-1}} \circ \mathcal{A}_{j|\pi(u)} \circ \mathrm{d}\pi_u X + \mathrm{d}(L_{g_j(u)^{-1}})_{g_j(u)} \circ \mathrm{d}(g_j)_u X \\ &= \mathrm{Ad}_{g_i(u)^{-1}} \circ \mathcal{A}_{i\pi(u)}(\mathrm{d}\pi_u X) \\ &\qquad + \mathrm{Ad}_{g_i(u)^{-1}} \circ \mathrm{Ad}_{t_{ij}(\pi(u))} \circ \mathrm{d}(L_{t_{ij}(\pi(u))^{-1}})_{t_{ij}(\pi(u))} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_{\pi(u)})(\mathrm{d}\pi_u X) \\ &\qquad\quad + \mathrm{d}(L_{g_i(u)^{-1}t_{ji}(\pi(u))^{-1}})_{t_{ji}(\pi(u)g_i(u))} \circ \mathrm{d}(g_j)_u X. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Visto que $g_j(p) = t_{ji}(p)g_i(p)$, pela equação (1.3)

$$\mathrm{d}(g_j)_u X = \mathrm{d}(R_{g_i(u)})_{t_{ji}(\pi(u))} \circ \mathrm{d}(t_{ji})_{\pi(u)} \circ \mathrm{d}\pi_u X + \mathrm{d}(L_{t_{ji}(\pi(u))})_{g_i(u)} \circ \mathrm{d}(g_i)_u X.$$

Daí

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(L_{g_i(u)^{-1}t_{ji}(\pi(u))^{-1}})_{t_{ji}(\pi(u)g_i(u))} \circ \mathrm{d}(g_j)_u X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{g_i(u)^{-1}t_{ji}(\pi(u))^{-1}}(t_{ji}(\pi(\gamma(t)))g_i(u)) \\ + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{g_i(u)^{-1}}(g_i(\gamma(t))). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Sendo que

$$L_{g_i(u)^{-1}t_{ji}(\pi(u))^{-1}}(t_{ji}(\pi(\gamma(t)))g_i(u)) = \mathrm{ad}_{g_i(u)^{-1}}(t_{ji}(\pi(u))^{-1}t_{ji}(\pi(\gamma(t))))$$

e

$$t_{ji}(\pi(u))^{-1}t_{ji}(\pi(\gamma(t))) = \left[R_{t_{ij}(\pi(u))^{-1}}(t_{ij}(\pi(\gamma(t))))\right]^{-1},$$

então (2.15) se torna

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(L_{g_i(u)^{-1}t_{ji}(\pi(u))^{-1}})_{t_{ji}(\pi(u)g_i(u))} \circ \mathrm{d}(g_j)_u X = -\mathrm{Ad}_{g_i(u)^{-1}} \circ \mathrm{d}(R_{t_{ij}(\pi(u))^{-1}}) \circ \mathrm{d}(t_{ij})_{\pi(u)} \circ \mathrm{d}\pi_u X \\ + \mathrm{d}(L_{g_i(u)^{-1}})_{g_i(u)} \circ \mathrm{d}(g_i)_u X. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}_{t_{ij}(\pi(u))} \circ \mathrm{d}(L_{t_{ij}(\pi(u))^{-1}})_{t_{ij}(\pi(u))} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_{\pi(u)})(\mathrm{d}\pi_u X) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{ad}_{t_{ij}(\pi(u))} \circ L_{t_{ij}(\pi(u))^{-1}} \circ t_{ij}(\pi(\gamma(t))) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R_{t_{ij}(\pi(u))^{-1}}(t_{ij}(\pi(\gamma(t)))) \\ &= \mathrm{d}(R_{t_{ij}(\pi(u))^{-1}})_{t_{ij}(\pi(u))} \circ \mathrm{d}(t_{ij})_{\pi(u)} \circ \mathrm{d}\pi_u X. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Substituindo (2.16) e (2.17) em (2.14) concluímos que

$$\omega_{j|u}(X) = \mathrm{Ad}_{g_i(u)^{-1}} \circ \mathcal{A}_{i|\pi(u)} \circ \mathrm{d}\pi_u X + \mathrm{d}(L_{g_i(u)^{-1}})_{g_i(u)} \circ \mathrm{d}(g_i)_u X = \omega_{i|u}(X),$$

como esperávamos. □

2.4 Levantamento horizontal e o transporte paralelo

Definição 2.13. Seja $P(M,G)$ um fibrado principal e $\gamma\colon [0,1] \to M$ curva suave. Dizemos que uma curva suave $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to P$ é um *levantamento horizontal* de γ se $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ e o vetor tangente à $\widetilde{\gamma}(t)$ pertence à $H_{\widetilde{\gamma}(t)}P$.

Observação 2.14. Na Definição 2.13 e no que segue está subentendido uma 1-forma de conexão de modo a determinar o subespaço horizontal H_uP. Como sempre fixaremos uma 1-forma de conexão e sua dependência será omitida na notação.

Teorema 2.15. *Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal, $\gamma\colon [0,1] \to M$ curva suave e $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Então existe um único levantamento horizontal $\widetilde{\gamma}$ em P tal que $\widetilde{\gamma}(0) = u_0$.*

Demonstração. Seja U_i uma carta contendo γ e seja σ_i uma seção local sobre U_i. Considerando $\phi_i\colon U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ a trivialização local canônica determinada por σ_i, então, se existir um levantamento horizontal $\widetilde{\gamma}$ em P de γ, teremos $\widetilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(t)$, $t \in [0,1]$, onde $g_i\colon [0,1] \to G$ é o mapa que define $\widetilde{\gamma}(t) = \phi_i(\pi(\widetilde{\gamma}(t)), g_i(t))$. Vamos encontrar uma condição para g_i de modo que $\widetilde{\gamma}$ seja, de fato, levantamento horizontal de γ. Derivando a expressão de $\widetilde{\gamma}$ em relação a t, onde estamos denotando a ação à direita por μ, isto é, $\mu(\sigma_i(\gamma(t)), g_i(t)) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\widetilde{\gamma}(t) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\mu(\sigma_i(\gamma(t)), g_i(t)) \\
&= \mathrm{d}(\mu^{g_i(s)})_{\sigma_i(\gamma(s))}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\sigma_i(\gamma(t))\right) + \mathrm{d}(\mu^{\widetilde{\gamma}(s)})_e\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}L_{g_i(s)^{-1}}(g_i(t))\right) \\
&= \mathrm{d}(r_{g_i(s)})_{\sigma_i(\gamma(s))}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\sigma_i(\gamma(t))\right) + \left[\mathrm{d}(L_{g_i(s)^{-1}})_{g_i(s)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}g_i(t)\right)\right]^{\sharp}_{\widetilde{\gamma}(s)}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Como $\widetilde{\gamma}$ é levantamento horizontal, aplicando a 1-forma ω na igualdade (2.18) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_{\widetilde{\gamma}(s)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\widetilde{\gamma}(t)\right) \\
&= \mathrm{Ad}_{g_i(s)^{-1}}(\omega_{\sigma_i(\gamma(s))}(\mathrm{d}(\sigma_i)_{\gamma(s)}X)) + \mathrm{d}(L_{g_i(s)^{-1}})_{g_i(s)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}g_i(t)\right),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde denotamos $X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\gamma(t)$. Usando em (2.19) que a translação à esquerda é um difeomorfismo, que

$$(\mathrm{d}(L_g)_{g^{-1}})^{-1} = \mathrm{d}(L_{g^{-1}})_e$$

e que, se c é uma curva suave em G, tal que $c(0) = e$ e $c'(0) = Y \in T_eG$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}(L_g)_{g^{-1}})^{-1} \circ \mathrm{Ad}_g(Y) &= \mathrm{d}(L_{g^{-1}})_e \circ \mathrm{Ad}_g(Y) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}L_{g^{-1}} \circ \mathrm{ad}_g(c(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}R_{g^{-1}}(c(t)) = \mathrm{d}(R_{g^{-1}})_e(Y),
\end{aligned}$$

chegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}g_i(t) &= -\mathrm{d}(R_{g_i(s)})_e(\omega_{\sigma_i(\gamma(s))}(\mathrm{d}(\sigma_i)_{\gamma(s)}X)) \\
&= -\mathrm{d}(R_{g_i(s)})_e \circ \mathcal{A}_{i|\gamma(s)}(X), \quad \forall s \in [0,1].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Note que sempre podemos considerar $g_i(0) = e$, pois caso contrário, basta tomar, ao invés de σ_i, a seção $\overline{\sigma_i}(p) = \sigma_i(p)g$, onde $g_i(0) = g$. Aplicando o teorema de existência e unicidade de soluções a equação diferencial (2.20) com condição inicial $g_i(0) = e$, obtemos o único levantamento horizontal $\widetilde{\gamma}$ de γ que é dado por $\widetilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(t)$ com $\widetilde{\gamma}(0) = u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. $\square$

Corolário 2.16. *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal e $\gamma\colon [0,1] \to M$ curva suave. Suponha que $\widetilde{\gamma}_1$ e $\widetilde{\gamma}_2$ sejam levantamentos horizontais de γ tais que $\widetilde{\gamma}_2(0) = \widetilde{\gamma}_1(0)g$, para algum $g \in G$. Então $\widetilde{\gamma}_2(t) = \widetilde{\gamma}_1(t)g$, para todo $t \in [0,1]$.*

Demonstração. Como o vetor tangente de $\widetilde{\gamma}_1$ pertence a $H_{\widetilde{\gamma}_1(t)}P$ e $\mathrm{d}(r_g)_{\widetilde{\gamma}_1(t)}(H_{\widetilde{\gamma}_1(t)}P) = H_{\widetilde{\gamma}_1(t)g}P$, então $\widetilde{\gamma}_g\colon [0,1] \to P$, dado por $\widetilde{\gamma}_g(t) = \widetilde{\gamma}_1(t)g$, também é levantamento horizontal de γ com $\widetilde{\gamma}_g(0) = \widetilde{\gamma}_1(0)g$. Pelo Teorema 2.15, segue que $\widetilde{\gamma}_2$ é único levantamento horizontal tal que $\widetilde{\gamma}_2(0) = \widetilde{\gamma}_1(0)g$. Logo $\widetilde{\gamma}_2(t) = \widetilde{\gamma}_g(t)$, para todo $t \in [0,1]$. □

Exemplo 2.17. Considere o fibrado principal P e a 1-forma de conexão do Exemplo 2.7. Seja $\gamma\colon [0,1] \to M$ a curva $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \mathrm{sen} 2\pi t)$. Fixe o ponto $((1,0),0) \in P$ e seja

$$X = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial g}$$

vetor tangente ao levantamento horizontal $\widetilde{\gamma}$ de γ. Como X é, por hipótese, horizontal, então

$$0 = \omega(X) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{y}{r^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{x}{r^2} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = -2\pi + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t},$$

o que nos dá $g(t) = 2\pi t + k$, onde k é uma constante. Logo o levantamento horizontal $\widetilde{\gamma}$ passando por $((1,0),0)$ é dado por

$$\widetilde{\gamma}(t) = ((\cos 2\pi t, \mathrm{sen} 2\pi t), 2\pi t).$$

Além disso, sob a ação do grupo aditivo $\mathbb{R}$, temos

$$\widetilde{\gamma}_h(t) = ((\cos 2\pi t, \mathrm{sen} 2\pi t), 2\pi t + h), \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Se $\gamma\colon [0,1] \to M$ é uma curva e $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Pelo Teorema 2.15 existe único levantamento horizontal $\widetilde{\gamma}_{u_0}$ de γ com $\widetilde{\gamma}_{u_0}(0) = u_0$ e daí existe único $u_1 \in \pi^{-1}(\gamma(1))$ tal que $\widetilde{\gamma}_{u_0}(1) = u_1$. Fazemos a seguinte definição.

Definição 2.18. Dado um fibrado principal $P(M,G)$ e uma curva $\gamma\colon [0,1] \to M$. Definimos o mapa

$$\begin{aligned} \Gamma(\widetilde{\gamma})\colon \pi^{-1}(\gamma(0)) &\to \pi^{-1}(\gamma(1)) \\ u &\mapsto \widetilde{\gamma}_u(1), \end{aligned}$$

chamado *transporte paralelo* ao longo de γ[1].

Para terminar essa seção, provaremos algumas propriedades.

Proposição 2.19. *Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal e $\gamma\colon [0,1] \to M$ uma curva suave. Então*

$$r_g\Gamma(\widetilde{\gamma}) = \Gamma(\widetilde{\gamma})r_g, \quad \forall g \in G.$$

Demonstração. Seja $g \in G$. Primeiro note que

$$\begin{aligned} r_g\Gamma(\widetilde{\gamma})(u_0) &= u_1 g \\ \Gamma(\widetilde{\gamma})r_g(u_0) &= \Gamma(\widetilde{\gamma})(u_0 g). \end{aligned}$$

[1]Como destacado na Observação 2.14, o transporte paralelo também depende da 1-forma de conexão empregada, mas essa dependência na notação será omitida.

Como $\widetilde{\gamma}$ é levantamento horizontal tal que $\widetilde{\gamma}(0) = u_0$ e $\widetilde{\gamma}(1) = u_1$, então $\widetilde{\gamma}(t)g$ é levantamento horizontal de γ tal que $\widetilde{\gamma}(0)g = u_0 g$ e $\widetilde{\gamma}(1)g = u_1 g$. Pela unicidade do levantamento temos que $\Gamma(\widetilde{\gamma})(u_0 g) = u_1 g$, ou seja

$$r_g \Gamma(\widetilde{\gamma})(u_0) = \Gamma(\widetilde{\gamma}) r_g(u_0), \quad \forall u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0)).$$ □

Proposição 2.20. *Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal e $\gamma\colon [0,1] \to M$ uma curva suave.*

(i) Considere o mapa $\Gamma(\widetilde{\gamma}^{-1})\colon \pi^{-1}(\gamma(1)) \to \pi^{-1}(\gamma(0))$, onde $\widetilde{\gamma}^{-1}(t) = \widetilde{\gamma}(1-t)$. Então

$$\Gamma(\widetilde{\gamma}^{-1}) = \Gamma(\widetilde{\gamma})^{-1}.$$

(ii) Sejam $\alpha, \beta\colon [0,1] \to M$ curvas suaves tais que $\alpha(1) = \beta(0)$. Defina o produto $\alpha * \beta$ por

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Seja $\Gamma(\widetilde{\alpha})\colon \pi^{-1}(\alpha(0)) \to \pi^{-1}(\alpha(1))$ e $\Gamma(\widetilde{\beta})\colon \pi^{-1}(\beta(0)) \to \pi^{-1}(\beta(1))$. Então

$$\Gamma\left(\widetilde{\alpha * \beta}\right) = \Gamma(\widetilde{\beta}) \circ \Gamma(\widetilde{\alpha}).$$

Demonstração. Primeiro note que $\widetilde{\gamma}^{-1}$ é levantamento horizontal de γ^{-1}. De fato, temos

$$\pi \circ \widetilde{\gamma}^{-1} = \pi \circ \widetilde{\gamma}(1-t) = \gamma(1-t) = \gamma^{-1}(t)$$

e

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \widetilde{\gamma}^{-1}(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \widetilde{\gamma}(1-t) = -\widetilde{\gamma}'(1-s).$$

Seja $u \in \pi^{-1}(\gamma^{-1}(0)) = \pi^{-1}(\gamma(1))$. Então $\Gamma(\widetilde{\gamma}^{-1})(u) = \widetilde{\gamma}^{-1}(1) = \widetilde{\gamma}(0)$. Por outro lado $\Gamma(\widetilde{\gamma})(\widetilde{\gamma(0)}) = \widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\gamma}^{-1}(0) = u$. Assim

$$\Gamma(\widetilde{\gamma}) \circ \Gamma(\widetilde{\gamma}^{-1})(u) = u, \quad \forall u \in \pi^{-1}(\gamma(1)).$$

Analogamente temos $\Gamma(\widetilde{\gamma}^{-1}) \circ \Gamma(\widetilde{\gamma})^{-1}(u) = u$, para todo $u \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Agora sejam α e β como no enunciado. Defina

$$\widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta} = \begin{cases} \widetilde{\alpha}(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \widetilde{\beta}(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Para cada $t \in [0,1]$ temos que $\pi \circ (\widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta})(t) = \alpha * \beta(t)$ e o vetor tangente à $\widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta}$ é horizontal, ou seja, $\widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta}$ é levantamento horizontal de $\alpha * \beta$. Da unicidade do levantamento horizontal, segue que $\widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta} = \widetilde{\alpha * \beta}$. Seja $u \in \pi^{-1}(\alpha(0))$. Como $\Gamma(\widetilde{\beta}) \circ \Gamma(\widetilde{\alpha})(u) = \widetilde{\beta}(1) = \widetilde{\alpha} * \widetilde{\beta}(1)$ e $\Gamma(\widetilde{\alpha * \beta})(u) = \widetilde{\alpha * \beta}(1)$, concluímos que $\Gamma\left(\widetilde{\alpha * \beta}\right) = \Gamma(\widetilde{\beta}) \circ \Gamma(\widetilde{\alpha})$. □

2.5 Holonomia

Considere uma curva suave $\gamma\colon [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ (uma curva γ com essas propriedades é chamada *laço* em p). Tal curva define uma transformação

$$\begin{aligned} \tau_\gamma\colon \pi^{-1}(p) &\to \pi^{-1}(p) \\ u &\mapsto \Gamma(\widetilde{\gamma})(u). \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.19 temos que

$$\tau_\gamma(ug) = \Gamma(\widetilde{\gamma})(ug) = \Gamma(\widetilde{\gamma})(u)g = \tau_\gamma(u)g.$$

Seja $u \in P$ com $\pi(u) = p$ e considere o conjunto dos laços em p

$$C_p(M) := \{\gamma \in C^\infty([0,1],M)\colon \gamma(0) = \gamma(1) = p\}.$$

Defina o conjunto

$$\Phi_u := \{g \in G\colon \exists\gamma \in C_p(M), \tau_\gamma(u) = ug\}.$$

Note que para todo $u \in \pi^{-1}(p)$, então $\tau_\gamma(u) \in \pi^{-1}(p)$ e, do fato da ação à direita ser livre e transitiva em cada fibra, temos que existe único $g_\gamma \in G$ tal que $\tau_\gamma(u) = ug_\gamma$.

Proposição 2.21. *Dado $u \in P$, Φ_u é subgrupo de G chamado* grupo de holonomia *em u.*

Demonstração. Dados laços α e β em $p \in M$, então $\gamma = \alpha * \beta$ é laço em p. Pela definição de τ_γ e da Proposição 2.20 temos que $\tau_\gamma = \tau_\beta \circ \tau_\alpha$. Sejam $g_\alpha, g_\beta \in \Phi_u$ tais que $\tau_\alpha(u) = ug_\alpha$ e $\tau_\beta(u) = ug_\beta$. Então

$$\tau_\gamma(u) = \tau_\beta \circ \tau_\alpha(u) = \tau_\beta(ug_\alpha) = \tau_\beta(u)g_\alpha = ug_\beta g_\alpha.$$

Tomando $g_\gamma = g_\beta g_\alpha$, temos $\tau_\gamma(u) = ug_\gamma$, i.e., $g_\gamma \in \Phi_u$.

Considere γ um laço em p e seja $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Seja $g_\gamma \in \Phi_u$ tal que $\tau_\gamma(u) = ug_\gamma$. Novamente pela Proposição 2.20 segue

$$u = \Gamma(\widetilde{\gamma}^{-1}) \circ \Gamma(\widetilde{\gamma})(u) = \tau_{\gamma^{-1}} \circ \tau_\gamma(u) = \tau_{\gamma^{-1}}(ug_\gamma) = \tau_{\gamma^{-1}}(u)g_\gamma,$$

o que implica que $\tau_{\gamma^{-1}}(u) = ug_\gamma^{-1}$. Como γ^{-1} também é laço em p, segue que $g_\gamma^{-1} \in \Phi_u$. Note também que $\tau_{\gamma^{-1}} = \tau_\gamma^{-1}$. □

Observação 2.22. O laço constante $c\colon [0,1] \to M$, $c(t) = p$ tem como levantamento horizontal o mapa $\widetilde{c}\colon [0,1] \to P$, $\widetilde{c}(t) = u \in \pi^{-1}(c(0))$. Logo $\tau_c\colon \pi^{-1}(c(0)) \to \pi^{-1}(c(0))$ é dado por $\tau_c(u) = ue = u$.

2.6 Derivada covariante em fibrados principais

Seja $\mathrm{d}\colon \Omega^r(P) \to \Omega^{r+1}(P)$ a derivada exterior em P. Dada $\xi \in \Omega^r(P) \otimes V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita k com base $\{e_\alpha\}$. Podemos escrever

$$\xi_u\colon \underbrace{T_uP \times \cdots \times T_uP}_{\text{r-vezes}} \to V, \quad \forall u \in P.$$

Dados $V_i \in T_uP$, $i = 1, \ldots, r$, temos

$$\xi_u(V_1, \ldots, V_r) = {\xi_u}^\alpha(V_1, \ldots, V_r)e_\alpha = {\xi_u}^\alpha \otimes e_\alpha(V_1, \ldots, V_r),$$

onde $\xi^\alpha \in \Omega^r(P)$. Assim, a forma geral de ξ é dada por

$$\xi = \xi^\alpha \otimes e_\alpha.$$

Definição 2.23. Definimos o operador $\mathrm{d}_P\colon \Omega^r(P) \otimes V \to \Omega^{r+1}(P) \otimes V$ por

$$\mathrm{d}_P\,\xi := \mathrm{d}\,\xi^\alpha \otimes e_\alpha.$$

Definição 2.24. Seja $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ uma 1-forma de conexão em um fibrado principal $P(M,G)$. Dados $u \in P$, $\xi \in \Omega^r(P) \otimes V$ e $X_i \in T_uP$, $i = 1, \ldots, r+1$, definimos a *derivada covariante* de ξ por

$$\mathrm{D}\,\xi(X_1, \ldots, X_{r+1}) := \mathrm{d}_P\,\xi(X_1^H, \ldots, X_{r+1}^H), \tag{2.21}$$

onde $X_i^H \in H_uP$ é a componente horizontal de X_i determinada pela 1-forma de conexão.

2.7 Curvatura associada a uma 1-forma de conexão

Definição 2.25. A *2-forma de curvatura* Ω é a derivada covariante da 1-forma de conexão ω, i.e.

$$\Omega := \mathrm{D}\,\omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}.$$

Lema 2.26. *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal com uma 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ e $X \in T_uP$, $u \in P$. Então*

$$(r_{a*}X)^H = r_{a*}(X^H).$$

Demonstração. Seja $X \in T_uP = H_uP \oplus V_uP$, i.e., $X = X^H + X^V$, onde $X^H \in H_uP$ e $X^V \in V_uP$. Então existe $A \in \mathfrak{g}$ tal que $X^V = {A^\sharp}_u$. Logo

$$\mathrm{d}(r_a)_u(X^V) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} u\exp(tA)a.$$

Como $\pi(u\exp(tA)a) = \pi(u) = p$, temos que $\gamma(t) = u\exp(tA)a$ é uma curva suave, com $\gamma(0) = ua$, em G_p. Portanto $\mathrm{d}(r_a)_u(X^V) \in V_{ua}P$. Como $r_{a*}(H_uP) = H_{ua}P$, segue que

$$(r_{a*}X)^H = \big(r_{a*}(X^V) + r_{a*}(X^H)\big)^H = \big(r_{a*}(X^V)\big)^H + \big(r_{a*}(X^H)\big)^H = r_{a*}(X^H). \qquad \square$$

Proposição 2.27. *A 2-forma de curvatura* Ω *satisfaz*

$$ {r_a}^*\Omega = \mathrm{Ad}_{a^{-1}}\Omega, \quad \forall a \in G. $$

Demonstração. Dados $X,Y \in T_uP$, por definição temos

$$ \begin{aligned} ({r_a}^*\Omega)_u(X,Y) &= \Omega_{ua}(\mathrm{d}(r_a)_uX, \mathrm{d}(r_a)_uY) \\ &= \mathrm{D}\,\omega_{ua}(\mathrm{d}(r_a)_uX, \mathrm{d}(r_a)_uY) \\ &= \mathrm{d}_P\,\omega_{ua}((\mathrm{d}(r_a)_uX)^H, (\mathrm{d}(r_a)_uY)^H) \\ &= \mathrm{d}_P\,\omega_{ua}(\mathrm{d}(r_a)_u(X^H), \mathrm{d}(r_a)_u(Y^H)) \\ &= {r_a}^*\,\mathrm{d}_P\,\omega_{ua}(X^H, Y^H), \end{aligned} \tag{2.22} $$

onde usamos o Lema 2.26. Pela Proposição A.1 e pela propriedade (ii) da Definição 2.6, temos que (2.22) se torna

$$ ({r_a}^*\Omega)_u(X,Y) = \mathrm{d}_P({r_a}^*\omega_{ua})(X^H,Y^H) = \mathrm{d}_P(\mathrm{Ad}_{a^{-1}}(\omega_u))(X^H,Y^H). $$

Seja $\{T_\alpha\}$ base de $\mathfrak{g}$. Escrevendo $\omega_u = \omega_u^\alpha \otimes T_\alpha$, dado $A \in T_uP$ vemos que

$$ \begin{aligned} \mathrm{Ad}_{a^{-1}}\,\omega(A) &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}}(\omega_u(A)) \\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}}(\omega_u^\alpha(A)T_\alpha) \\ &= \omega_u^\alpha(A)\,\mathrm{Ad}_{a^{-1}}(T_\alpha) \\ &= (\omega_u^\alpha \otimes \mathrm{Ad}_{a^{-1}}(T_\alpha))(A). \end{aligned} $$

Finalmente,

$$ \begin{aligned} ({r_a}^*\Omega)_u(X,Y) &= \mathrm{d}_P(\mathrm{Ad}_{a^{-1}}(\omega_u))(X^H,Y^H) \\ &= \mathrm{d}_P(\omega_u^\alpha \otimes \mathrm{Ad}_{a^{-1}}(T_\alpha))(X^H,Y^H) \\ &= \mathrm{d}\,\omega_u^\alpha(X^H,Y^H)\,\mathrm{Ad}_{a^{-1}}(T_\alpha) \\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}}(\mathrm{d}\,\omega_u^\alpha(X^H,Y^H)T_\alpha) \\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}}(\mathrm{d}\,\omega_u^\alpha \otimes T_\alpha(X^H,Y^H)) \\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}}\,\mathrm{d}_P\,\omega_u(X^H,Y^H) \\ &= \mathrm{Ad}_{a^{-1}}\,\mathrm{D}\,\omega_u(X,Y) = \mathrm{Ad}_{a^{-1}}\,\Omega_u(X,Y). \end{aligned} $$

□

Definição 2.28. Seja M uma variedade. Dadas $\zeta \in \Omega^p(M)\otimes\mathfrak{g}$ e $\eta \in \Omega^q(M)\otimes\mathfrak{g}$ podemos escrever $\zeta = \zeta^\alpha \otimes T_\alpha$ e $\eta = \eta^\alpha \otimes T_\alpha$, onde $\zeta^\alpha \in \Omega^p(M)$ e $\eta^\alpha \in \Omega^q(M)$ e $\{T_\alpha\}$ é base de $\mathfrak{g}$. Definimos o colchete

$$ [\zeta,\eta] := \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta \otimes [T_\alpha, T_\beta] = \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta {f_{\alpha\beta}}^\gamma T_\gamma, \tag{2.23} $$

onde o colchete do lado direito da equação (2.23) é o colchete da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e ${f_{\alpha\beta}}^\gamma$ são as constantes de estrutura dadas pela Definição 1.17.

Quando $\zeta,\eta \in \Omega^1(M)\otimes\mathfrak{g}$, dado $p\in M$ e vetores $X,Y\in T_pM$, obtemos

$$\begin{aligned}
[\zeta,\eta]_p(X,Y) &= \zeta_p^\alpha\wedge\eta_p^\beta\otimes[T_\alpha,T_\beta](X,Y)\\
&= (\zeta_p^\alpha(X)\eta_p^\beta(Y)-\eta_p^\beta(X)\zeta_p^\alpha(Y))[T_\alpha,T_\beta]\\
&= [\zeta^\alpha(X)T_\alpha,\eta^\beta(Y)T_\beta]-[\zeta^\alpha(Y)T_\alpha,\eta^\beta(X)T_\beta]\\
&= [\zeta^\alpha\otimes T_\alpha(X),\eta^\beta\otimes T_\beta(Y)]-[\zeta^\alpha\otimes T_\alpha(Y),\eta^\beta\otimes T_\beta(X)]\\
&= [\zeta(X),\eta(Y)]-[\zeta(Y),\eta(X)].
\end{aligned}\tag{2.24}$$

Para o caso em que $\zeta=\eta$, segue de (2.24) que

$$[\zeta,\zeta](X,Y)=2[\zeta(X),\zeta(Y)].\tag{2.25}$$

Proposição 2.29. *Seja M uma variedade. Dadas $\xi\in\Omega^r(M)\otimes\mathfrak{g}$, $\eta\in\Omega^l(M)\otimes\mathfrak{g}$ e $\zeta\in\Omega^1(M)\otimes\mathfrak{g}$. O colchete da Definição 2.28 satisfaz:*

(i) $[\xi,\eta]=-(-1)^{kl}[\eta,\xi]$;

(ii) $\mathrm{d}[\xi,\eta]=[\mathrm{d}\xi,\eta]+(-1)^k[\xi,\mathrm{d}\eta]$;

(iii) $\mathrm{d}^2=0$;

(iv) $[\zeta,[\zeta,\zeta]]=[[\zeta,\zeta],\zeta]=0$.

Demonstração. Seja $\{T_\alpha\}$ base de $\mathfrak{g}$ e escreva $\xi=\xi^\alpha\otimes T_\alpha$, $\eta=\eta^\alpha\otimes T_\alpha$ e $\zeta=\zeta^\alpha\otimes T_\alpha$, onde $\xi^\alpha\in\Omega^r(M)$, $\eta^\alpha\in\Omega^l(M)$ e $\zeta^\alpha\in\Omega^1(M)$. Para (i) temos

$$\begin{aligned}
[\xi,\eta] &= \xi^\alpha\wedge\eta^\beta\otimes[T_\alpha,T_\beta]\\
&= (-1)^{kl}\eta^\beta\wedge\xi^\alpha\otimes[T_\alpha,T_\beta]\\
&= -(-1)^{kl}\eta^\beta\wedge\xi^\alpha\otimes[T_\beta,T_\alpha]\\
&= -(-1)^{kl}[\eta,\xi].
\end{aligned}$$

Calculando o lado esquerdo de (ii), segue

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[\xi,\eta] &= \mathrm{d}(\xi^\alpha\wedge\eta^\beta)\otimes[T_\alpha,T_\beta]\\
&= (\mathrm{d}\xi^\alpha\wedge\eta^\beta+(-1)^k\xi^\alpha\wedge\mathrm{d}\eta^\beta)\otimes[T_\alpha,T_\beta]\\
&= [\mathrm{d}\xi,\eta]+(-1)^k[\xi,\mathrm{d}\eta].
\end{aligned}$$

O item (iii) vale, pois

$$\mathrm{d}^2\xi=\mathrm{d}(\mathrm{d}\xi)=\mathrm{d}(\mathrm{d}\xi^\alpha\otimes T_\alpha)=\mathrm{d}^2\xi^\alpha\otimes T_\alpha=0.$$

Finalmente para (iv) temos

$$[\zeta,[\zeta,\zeta]]=\zeta^\alpha\wedge\zeta^\beta\wedge\zeta^\gamma\otimes[T_\alpha,[T_\beta,T_\gamma]].$$

Note que, para quaisquer $i, j, k = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$ fixados vale

$$\zeta^i \wedge \zeta^j \wedge \zeta^k = \zeta^j \wedge \zeta^k \wedge \zeta^i = \zeta^k \wedge \zeta^i \wedge \zeta^j$$

e portanto, pela identidade de Jacobi

$$\zeta^i \wedge \zeta^j \wedge \zeta^k \otimes \big([T_i,[T_j,T_k]] + [T_j,[T_k,T_i]] + [T_k,[T_i,T_j]]\big) = 0. \qquad \square$$

Proposição 2.30. *Sejam X um campo de vetores horizontal e Y um campo de vetores vertical. Então $[X,Y]$ é horizontal.*

Demonstração. Por definição existe $A \in \mathfrak{g}$ tal que $Y = A^\sharp$. O fluxo de Y é dado por $\phi_t(u) = r_{\exp(tA)}(u)$, pois

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} r_{\exp(tA)}(u) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r_{\exp((s+t)A)}(u) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r_{\exp(sA)\exp(tA)}(u) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r_{\exp(tA)}(u\exp(sA)) \\
&= A^\sharp{}_{r_{\exp(sA)}(u)}.
\end{aligned}$$

Pela definição da derivada de Lie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y X = [Y,X]_u &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{d}(\phi_{-t})_{\phi_t(u)}(X_{\phi_t(u)}) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{d}(r_{\exp(-tA)})_{\phi_t(u)}\left(X_{\phi_t(u)}\right).
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{d}(r_{\exp(-tA)})_{\phi_t(u)}(H_{\phi_t(u)}P) = H_uP$ e $X_{\phi_t(u)} \in H_{\phi_t(u)}P$, segue que $\mathrm{d}(r_{\exp(-tA)})_{\phi_t(u)}\left(X_{\phi_t(u)}\right) \in H_uP$, para t suficientemente pequeno. Logo $[Y,X]_u \in H_uP$. $\square$

Teorema 2.31. *Sejam $X,Y \in T_uP$. Então Ω e ω satisfazem a* equação de estrutura de Cartan

$$\Omega(X,Y) = \mathrm{d}_P\,\omega(X,Y) + [\omega(X),\omega(Y)].$$

Demonstração. A demonstração consiste em considerar três casos e usar a linearidade de Ω.

Se $X,Y \in H_uP$, então $X^H = X$, $Y^H = Y$ e $\omega(X) = \omega(Y) = 0$. Usando a definição de Ω

$$\Omega(X,Y) = \mathrm{D}\,\omega(X,Y) = \mathrm{d}_P\,\omega(X^H,Y^H) = \mathrm{d}_P\,\omega(X,Y).$$

Como $[\omega(X),\omega(Y)] = 0$, segue a igualdade.

Se $X \in H_uP$ e $Y \in V_uP$, temos $\omega(X) = 0$ e $Y^H = 0$. Daí

$$\Omega(X,Y) = \mathrm{d}_p\,\omega(X^H,Y^H) = \mathrm{d}_P\,\omega(X,0) = 0.$$

Como $[\omega(X),\omega(Y)] = 0$, basta mostrar que $\mathrm{d}_P\,\omega(X,Y) = 0$. Pela Proposição A.3 e usando a Proposição 2.30 temos

$$\mathrm{d}_p\,\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) = X\omega(Y).$$

Como $Y \in V_uP$, existe $A \in \mathfrak{g}$ tal que $Y = A^\sharp{}_u$. Portanto $\omega(Y) = A$, que é constante. Logo $X\omega(Y) = 0$ e disso $\mathrm{d}_P\,\omega(X,Y) = 0$.

Se $X,Y \in V_uP$, então $X^H = 0$ e $Y^H = 0$. Assim

$$\Omega(X,Y) = \mathrm{d}_P\,\omega(X^H,Y^H) = 0.$$

Sejam $A,B \in \mathfrak{g}$ tais que $X = A^\sharp{}_u$ e $Y = B^\sharp{}_u$, com $\omega(X) = A$ e $\omega(Y) = B$. Novamente pela Proposição A.3

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_P\,\omega(X,Y) &= X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) \\
&= XB - YA - \omega([A^\sharp,B^\sharp]) \\
&= -\omega([A,B]^\sharp) \\
&= -[A,B] \\
&= -[\omega(A^\sharp),\omega(B^\sharp)] \\
&= -[\omega(X),\omega(Y)],
\end{aligned}$$

onde usamos que $[A,B]^\sharp = [A^\sharp,B^\sharp]$ provada na Proposição 1.49. Disso temos novamente a igualdade. Pela linearidade e antissimetria de Ω e do colchete, os três casos acima garantem a igualdade para quaisquer vetores $X,Y \in T_uP$. $\square$

Observação 2.32. Como $[\omega,\omega](X,Y) = 2[\omega(X),\omega(Y)]$, conforme (2.25), podemos escrever a equação de estrutura de Cartan como

$$\Omega = \mathrm{d}_P\,\omega + \tfrac{1}{2}[\omega,\omega]. \tag{2.26}$$

2.8 Forma local da curvatura

Definição 2.33. A forma local $\mathcal{F}$ da 2-forma de curvatura Ω é definida por

$$\mathcal{F} := \sigma^*\Omega,$$

onde $\sigma \in \Gamma(U,P)$ é seção local sobre uma carta U de M.

Pela equação de estrutura de Cartan temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \sigma^*\Omega \\
&= \sigma^*\,\mathrm{d}_P\,\omega + \tfrac{1}{2}\sigma^*[\omega,\omega] \\
&= \mathrm{d}\,\sigma^*\omega + \tfrac{1}{2}[\sigma^*\omega,\sigma^*\omega] \\
&= \mathrm{d}\mathcal{A} + \tfrac{1}{2}[\mathcal{A},\mathcal{A}].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

As componentes de $\mathcal{F}$ em uma carta U com coordenadas locais $x^\mu = \phi(p)$, onde $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu \,\mathrm{d}x^\mu$ e $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$, são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu} &= \mathcal{F}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^\mu},\tfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\\ &= \mathrm{d}\mathcal{A}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^\mu},\tfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right) + \tfrac{1}{2}[\mathcal{A},\mathcal{A}]\left(\tfrac{\partial}{\partial x^\mu},\tfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\\ &= \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial x^\beta}\,\mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\alpha\left(\tfrac{\partial}{\partial x^\mu},\tfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right) + \left[\mathcal{A}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right),\mathcal{A}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\right]\\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x^\nu}\right) + [\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu].\end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{A}_\mu$ e $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ mapas de $U \subset M$ em $\mathfrak{g}$, então podemos escrever

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu{}^\alpha T_\alpha \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^\alpha T_\alpha,$$

onde $\{T_\alpha\}$ é a base de $\mathfrak{g}$. Como $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^\alpha T_\alpha &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu]\\ &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu{}^\alpha T_\alpha - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu T_\alpha + [\mathcal{A}_\mu{}^\beta T_\beta, \mathcal{A}_\nu{}^\gamma T_\gamma]\\ &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu{}^\alpha T_\alpha - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu{}^\alpha T_\alpha + \mathcal{A}_\mu{}^\beta \mathcal{A}_\nu{}^\gamma f_{\beta\gamma}{}^\alpha T_\alpha.\end{aligned}$$

Assim obtemos

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^\alpha = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu{}^\alpha - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu{}^\alpha + f_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{A}_\mu{}^\beta \mathcal{A}_\nu{}^\gamma.$$

Teorema 2.34. *Sejam U_i e U_j cartas de M com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e sejam $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{F}_j$ as formas locais da 2-forma de curvatura Ω sobre U_i e U_j, respectivamente. Então vale a condição de compatibilidade*

$$\mathcal{F}_{j|p} = \mathrm{Ad}_{t_{ij}(p)^{-1}}\,\mathcal{F}_{i|p}, \quad \forall p \in U_i \cap U_j,$$

onde $t_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$ é a função de transição.

Demonstração. Por definição $\mathcal{F}_j = \sigma_j{}^*\Omega$ e $\mathcal{F}_i = \sigma_i{}^*\Omega$. Usando a condição (2.6) temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_j(X,Y) &= \Omega(\mathrm{d}(\sigma_j)_p(X), \mathrm{d}(\sigma_j)_p(y))\\ &= \Omega(\mathrm{d}(r_{t_{ij}(p)})_{\sigma_i(p)} \circ \mathrm{d}(\sigma_i)_p X, \mathrm{d}(r_{t_{ij}(p)})_{\sigma_i(p)} \circ \mathrm{d}(\sigma_i)_p Y),\end{aligned}$$

onde notamos que o segundo termo em (2.6) é vertical e que Ω se anula em vetores verticais por definição. Usando a Proposição 2.27, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_j(X,Y) &= r_{t_{ij}(p)}{}^*\Omega(\mathrm{d}(\sigma_i)_p X, \mathrm{d}(\sigma_i)_p Y)\\ &= \mathrm{Ad}_{t_{ij}(p)^{-1}}\,\Omega(\mathrm{d}(\sigma_i)_p X, \mathrm{d}(\sigma_i)_p Y)\\ &= \mathrm{Ad}_{t_{ij}(p)^{-1}}(\sigma_i{}^*\Omega)(X,Y)\\ &= \mathrm{Ad}_{t_{ij}(p)^{-1}}\,\mathcal{F}_i(X,Y), \qquad \forall X,Y \in T_pM, p \in U_i \cap U_j.\end{aligned}$$

□

2.9 A identidade de Bianchi

Teorema 2.35. *A 2-forma de curvatura* $\Omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}$ *satisfaz a* identidade de Bianchi

$$\mathrm{D}\Omega = 0,$$

onde D *é a derivada covariante da Definição 2.24.*

Demonstração. Pela equação de estrutura de Cartan (2.26) e os resultados da Proposição 2.29 temos

$$\mathrm{d}_P \Omega = \mathrm{d}_P{}^2 \omega + \frac{1}{2} \mathrm{d}_P [\omega, \omega] = [\mathrm{d}_P \omega, \omega]. \tag{2.28}$$

Pela Definição 2.24 da derivada covariante , dados $X, Y, Z \in T_u P$, $u \in P$

$$\mathrm{D}\Omega(X,Y,Z) = \mathrm{d}_P \Omega(X^H, Y^H, Z^H) = [\mathrm{d}_P \omega, \omega](X^H, Y^H, Z^H) = 0,$$

onde observamos que $\ker \omega_u = H_u P$. $\square$

Vamos estabelecer a forma local da identidade de Bianchi.

Teorema 2.36. *A 2-forma de curvatura* $\mathcal{F}$ *satisfaz a* identidade de Bianchi

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = 0,$$

onde definimos o operador $\mathcal{D} \colon \Omega^r(M) \otimes \mathfrak{g} \to \Omega^{r+1}(M) \otimes \mathfrak{g}$ *por*

$$\mathcal{D}\eta := \mathrm{d}\eta + [\mathcal{A}, \eta].$$

Demonstração. Seja $\sigma \in \Gamma(U, P)$ uma seção local. Pela Proposição A.1 temos

$$\sigma^* \mathrm{d}_P \Omega = \mathrm{d}\sigma^* \Omega = \mathrm{d}\mathcal{F}.$$

Por outro lado, da equação (2.28)

$$\sigma^* \mathrm{d}_P \Omega = \sigma^* [\mathrm{d}_P \omega, \omega] = [\mathrm{d}\sigma^* \omega, \sigma^* \omega] = [\mathrm{d}\mathcal{A}, \mathcal{A}].$$

Pela equação (2.27)

$$\mathrm{d}\mathcal{F} = [\mathrm{d}\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \left[\mathcal{F} - \tfrac{1}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A}\right] = [\mathcal{F}, \mathcal{A}] - \tfrac{1}{2}[[\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A}] = -[\mathcal{A}, \mathcal{F}],$$

onde usamos a propriedade (i) e (iv) da Proposição 2.29. Portanto

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0. \qquad \square$$

2.10 Conexão e a derivada covariante em fibrados vetoriais associados

Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal com projeção π_P, uma carta U_i de M e $\sigma_i \colon U_i \to P$ uma seção local sobre U_i. Considere a trivialização local canônica $\phi_i \colon U_i \times G \to \pi_P^{-1}(U_i)$, tal que $\phi_i(p,e) = \sigma_i(p)$. Além disso, seja $\widetilde{\gamma} \colon [0,1] \to P$ o levantamento horizontal de uma curva $\gamma \colon [0,1] \to M$, cuja a imagem está contida em U_i, com $\gamma(0) = p_0$ e $\widetilde{\gamma}(0) = u_0$.

Vimos na Seção 1.2.6 que associado à P, existe um fibrado vetorial $E = P \times_\rho V$ com projeção π_E, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ é uma representação de G.

Dada uma seção local $s \in \Gamma(U_i, E)$, pela Proposição 1.76, existe $\xi \colon U_i \to V$ suave tal que

$$s(p) = [\sigma_i(p), \xi(p)].$$

Como os elementos de E são da forma $[u,v] = \{(ug, \rho(g)^{-1}v) \colon g \in G\}$, e $\widetilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t))g_i(t)$, onde $g_i \colon [0,1] \to G$ é obtido como solução de (2.20), obtemos

$$s(\gamma(t)) = [\widetilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t))],$$

onde $\eta(\gamma(t)) = \rho(g_i(t))^{-1}\xi(\gamma(t))$. Com a notação acima, definimos o seguinte.

Definição 2.37. A *derivada covariante* da seção s ao longo da curva γ em $p_0 = \gamma(0) \in M$ é definida por

$$\nabla_X s := \left[\widetilde{\gamma}(0),\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(\gamma(t))\right],$$

onde $X = \gamma'(0)$ é o vetor tangente à $\gamma(t)$ em p_0.

Observamos que $\nabla_X s$ não depende do levantamento horizontal de γ. De fato, se δ é outro levantamento horizontal de γ, então, pela unicidade, existe $a \in G$ tal que que $\delta(0) = \widetilde{\gamma}(0)a$ e, pelo Corolário 2.16, $\delta(t) = \widetilde{\gamma}(t)a$, para todo $t \in [0,1]$. Como

$$[\delta(t), \rho(a)^{-1}\eta(\gamma(t))] = [\widetilde{\gamma}(t)a, \rho(a)^{-1}\eta(\gamma(t))] = [\widetilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t))]$$

temos

$$\begin{aligned}
\left[\delta(0),\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(a)^{-1}\eta(\gamma(t))\right] &= \left[\delta(0),\ \rho(a)^{-1}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(\gamma(t))\right] \\
&= \left[\delta(0)a^{-1},\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(\gamma(t))\right] \\
&= \left[\widetilde{\gamma}(0),\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(\gamma(t))\right] \\
&= \nabla_X s.
\end{aligned}$$

Disso temos que $\nabla_X s$ depende apenas do vetor tangente X da curva γ no ponto $p_0 = \gamma(0)$ e da seção $s \in \Gamma(U_i, E)$. Mais ainda, a definição da derivada covariante depende apenas da curva γ e da 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{g}$ que é responsável por determinar o levantamento horizontal $\widetilde{\gamma}$.

Definição 2.38. Dizemos que uma seção s é *transportada paralelamente* ao longo de γ se $\eta(\gamma(t))$ é constante.

Observação 2.39. Um argumento idêntico ao feito para a derivada covariante mostra que a definição de transporte paralelo, dado pela Definição 2.38, não depende do levantamento horizontal da curva γ.

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, então ∇_X leva uma seção $s \in \Gamma(M,E)$ em uma seção $\nabla_X s \in \Gamma(M,E)$ dada por $\nabla_X s(p) = \nabla_{X_p} s$ o que define um mapa $\nabla_X : \Gamma(M,E) \to \Gamma(M,E)$.

Vamos ao ponto central dessa seção.

Definição 2.40. Uma *conexão* em um fibrado vetorial E associado ao fibrado principal $P(M,G)$ é um mapa

$$\begin{aligned} \nabla \colon \Omega^0(E) &\to \Omega^1(E) \\ s &\mapsto \nabla s, \end{aligned}$$

tal que, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla s(X)(p) = \nabla_{X_p} s,$$

onde estamos denotando

$$\Omega^0(E) = \Gamma(M,E) \qquad \text{e} \qquad \Omega^1(E) = \Gamma(M, T^*M \otimes E) \cong \Omega^1(M) \otimes \Gamma(M,E).$$

Proposição 2.41. *Seja $\nabla \colon \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$ uma conexão. Então:*

(i) $\nabla_X(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla_X s_1 + a_2 \nabla_X s_2$;

(ii) $\nabla(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla s_1 + a_2 \nabla s_2$;

(iii) $\nabla_{(a_1 X_1 + a_2 X_2)} s = a_1 \nabla_{X_1} s + a_2 \nabla_{X_2} s$;

(iv) $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s$;

(v) $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$;

(vi) $\nabla_{fX} s = f\nabla_X s$,

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $s, s_1, s_2 \in \Omega^0(E)$ e $f \in C^\infty(M)$.

Demonstração. Fixe $s_i(\gamma(t)) = [\widetilde{\gamma}(t), \eta_i(\gamma(t))]$, $i = 1,2$ e $s(\gamma(t)) = [\widetilde{\gamma}(t), \eta(\gamma(t))]$. Temos

$$a_1 s_1(\gamma)(t) + a_2 s_2(\gamma(t)) = [\widetilde{\gamma}(t), a_1 \eta(\gamma(t)) + a_2 \eta(\gamma(t))].$$

Daí

$$\begin{aligned} \nabla_X(a_1 s_1 + a_2 s_2) &= \left[\widetilde{\gamma}(0),\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (a_1 \eta_1(\gamma(t)) + a_2 \eta_2(\gamma(t)))\right] \\ &= a_1 \left[\widetilde{\gamma}(0),\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta_1(\gamma(t))\right] + a_2 \left[\widetilde{\gamma}(0),\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta_2(\gamma(t))\right] \\ &= a_1 \nabla_X s_1 + a_2 \nabla_X s_2, \end{aligned}$$

o que prova (i).

Para provar o item (ii), considere $X \in \mathfrak{X}(M)$. Do item (i) temos

$$\nabla(a_1 s_1 + a_2 s_2)(X)(p) = a_1 \nabla_{X_p} s_1 + a_2 \nabla_{X_p} s_2 = (a_1 \nabla s_1 + a_2 \nabla s_2)(X)(p),$$

portanto $\nabla(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla s_1 + a_2 \nabla s_2$, isto é, (ii) é válido.

Sejam curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ em M tais que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma(0) = p$ e $\gamma_1'(0) = X_1, \gamma_2'(0) = X_2$ e $\gamma'(0) = a_1 X_1 + a_2 X_2$. Considerando $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ e $\widetilde{\gamma}$ seus respectivos levantamentos horizontais tais que $\widetilde{\gamma}_1(0) = \widetilde{\gamma}_2(0) = \widetilde{\gamma}(0)$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{(a_1 X_1 + a_2 X_2)} s &= \left[\widetilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(\gamma(t))\right] \\
&= a_1 \left[\widetilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(\gamma_1(t))\right] + a_2 \left[\widetilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(\gamma_2(t))\right] \\
&= a_1 \left[\widetilde{\gamma}_1(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(\gamma_1(t))\right] + a_2 \left[\widetilde{\gamma}_2(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(\gamma_2(t))\right] \\
&= a_1 \nabla_{X_1} s + a_2 \nabla_{X_2} s,
\end{aligned}$$

o que prova (iii).

Para provar (iv) basta notar que

$$(fs)(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) s(\gamma(t)) = [\widetilde{\gamma}(t), (f\eta)(\gamma(t))].$$

Logo, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
\nabla_X(fs)(p) = \nabla_{X_p}(fs) &= \left[\widetilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f\eta)(\gamma(t))\right] \\
&= \mathrm{d} f_p(X_p)[\widetilde{\gamma}(0), \eta(p)] + f(p) \left[\widetilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta(\gamma(t))\right] \\
&= \mathrm{d} f_p(X_p) s(p) + f(p) \nabla_{X_p} s \\
&= (\mathrm{d} f(X) s + f \nabla_X s)(p)
\end{aligned}$$

e assim $\nabla_X(fs) = \mathrm{d} f(X) s + f \nabla_X s$.

Pelo item (iv) temos, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla(fs)(X) = \nabla_X(fs) = (\mathrm{d} f(X) s + f \nabla_X s) = (\mathrm{d} f \otimes s + f \nabla s)(X)$$

e então temos (v).

Por fim, se γ_1 e γ_2 são curvas em M tais que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ e $\gamma_1'(0) = X_p$ e $\gamma_2'(0) = f(p) X_p$, onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\widetilde{\gamma}_i,\ i = 1, 2$, são os respectivos levantamentos horizontais, tais que $\widetilde{\gamma}_1(0) = \widetilde{\gamma}_2(0)$, então

$$\begin{aligned}
\nabla_{fX}s(p) &= \nabla_{f(p)X_p}s \\
&= \left[\widetilde{\gamma}_2(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\eta(\gamma_2(t))\right] \\
&= [\widetilde{\gamma}_2(0), \mathrm{d}\,\eta_p(f(p)X_p)] \\
&= f(p)\left[\widetilde{\gamma}_1(0), \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\eta(\gamma_1(t))\right] \\
&= f(p)\nabla_{X_p}s \\
&= (f\nabla_X s)(p),
\end{aligned}$$

ou seja, $\nabla_{fX}s = f\nabla_X s$. □

2.11 Forma local da derivada covariante

Considere a notação utilizada na seção anterior. Seja $e_\alpha(p) := [\sigma_i(p), {e_\alpha}^0]$ a seção de E, onde ${e_\alpha}^0$ é o α-ésimo vetor da base de V, onde $({e_\alpha}^0)^\beta = {\delta_\alpha}^\beta$. Temos

$$e_\alpha(\gamma(t)) = [\sigma_i(\gamma(t)), {e_\alpha}^0] = [\widetilde{\gamma}(t)g_i(t)^{-1}, {e_\alpha}^0] = [\widetilde{\gamma}(t), \rho(g_i(t))^{-1}{e_\alpha}^0].$$

Calculando a derivada covariante de e_α temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X e_\alpha &= \left[\widetilde{\gamma}(0),\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\rho(g_i(t))^{-1}{e_\alpha}^0\right] \\
&= \left[\widetilde{\gamma}(0),\ \mathrm{d}\,\rho_{g_i(0)^{-1}}\circ \mathrm{d}\,\iota_{g_i(0)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g_i(t)\right){e_\alpha}^0\right],
\end{aligned} \tag{2.29}$$

onde ι denota a operação de inversão do grupo de Lie G. Como observado na demonstração do Teorema 2.15, sempre podemos considerar $g_i(0) = e$. Visto que $\mathrm{d}\,\iota_e = -\,\mathrm{id}$ e $\widetilde{\gamma}(0) = \sigma_i(\gamma(0))$, temos que a equação (2.29) acima se torna

$$\begin{aligned}
\nabla_X e_\alpha &= \left[\sigma_i(\gamma(0)),\ \mathrm{d}\,\rho_e\left(-\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g_i(t)\right){e_\alpha}^0\right] \\
&= \left[\sigma_i(\gamma(0)),\ \mathrm{d}\,\rho_e(\mathrm{d}(r_e)_e\circ \mathcal{A}_{i|p}(X)){e_\alpha}^0\right] \\
&= \left[\sigma_i(\gamma(0)),\ \mathrm{d}\,\rho_e(\mathcal{A}_{i|p}(X)){e_\alpha}^0\right],
\end{aligned} \tag{2.30}$$

onde usamos a equação (2.20). Como $\mathcal{A}_i \in \Omega^1(U_i)\otimes\mathfrak{g}$, podemos escrever $\mathcal{A}_i = {\mathcal{A}_{i\mu}}^\alpha\,\mathrm{d}x^\mu\otimes T_\alpha$, onde ${\mathcal{A}_{i\mu}}^\alpha \in C^\infty(U_i)$. Pondo $X = X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, temos, de (2.30), que

$$\begin{aligned}
\nabla_X e_\alpha &= \left[\sigma_i(\gamma(0)),\ \mathrm{d}\,\rho_e(X^\mu {\mathcal{A}_{i\mu|p}}^\gamma T_\gamma){e_\alpha}^0\right] \\
&= \left[\sigma_i(\gamma(0)),\ X^\mu {\mathcal{A}_{i\mu|p}}^\gamma\,\mathrm{d}\,\rho_e(T_\gamma){e_\alpha}^0\right] \\
&= X^\mu {\mathcal{A}_{i\mu|p}}^\gamma\left[\sigma_i(\gamma(0)),\ \mathrm{d}\,\rho_e(T_\gamma){e_\alpha}^0\right],
\end{aligned}$$

onde usamos que a estrutura de espaço vetorial em cada fibra E_x, $x\in M$, é dada pela equação (1.24). Como $\mathrm{d}\,\rho_e\colon T_eG\cong\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)\cong\mathfrak{gl}(V)$ e V é espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, podemos escrever

$$\mathrm{d}\,\rho_e(T_\gamma){e_\alpha}^0 = \mathrm{d}\,\rho_e(T_\gamma)^\beta{}_\alpha {e_\beta}^0.$$

Portanto,

$$\nabla_X e_\alpha = X^\mu \mathcal{A}_{i\mu|p}{}^\gamma \mathrm{d}\rho_e(T_\gamma)^\beta{}_\alpha \left[\sigma_i(\gamma(0)),\, e_\beta{}^0\right] = \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i\mu|p}{}^\beta{}_\alpha e_\beta, \tag{2.31}$$

onde definimos

$$\mathcal{A}_{i\mu|p}{}^\beta{}_\alpha := \mathcal{A}_{i\mu|p}{}^\gamma \mathrm{d}\rho_e(T_\gamma)^\beta{}_\alpha. \tag{2.32}$$

Considerando $X = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, a equação (2.31) dá

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} e_\alpha = \mathcal{A}_{i\mu|p}{}^\beta{}_\alpha e_\beta.$$

Como $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i{}^\alpha \otimes T_\alpha$, $\mathcal{A}_i{}^\alpha \in \Omega^1(U_i)$ temos

$$\mathrm{d}\rho_e(\mathcal{A}_i{}^\gamma \otimes T_\gamma) = \mathcal{A}_i{}^\gamma \otimes \mathrm{d}\rho_e(T_\gamma) \Longrightarrow \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha = \left(\mathcal{A}_i{}^\gamma \otimes \mathrm{d}\rho_e(T_\gamma)\right)^\beta{}_\alpha,$$

que está de acordo com (2.32). Assim, conforme (2.31), temos

$$\nabla e_\alpha = \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha \otimes e_\beta. \tag{2.33}$$

Proposição 2.42. *Seja $s(p) = [\sigma_i(p),\, \xi_i(p)] = \xi_i{}^\alpha(p)e_\alpha$ uma seção de E definida em um aberto $U_i \subset M$, onde $\xi_i \colon U_i \to V$ é dada por $\xi_i(p) = \xi_i{}^\alpha(p)e_\alpha{}^0$ e $\xi_i{}^\alpha \in C^\infty(U)$. Então*

$$\begin{aligned}\nabla_X s &= \left[\sigma_i(0),\, \mathrm{d}\rho_e(\mathcal{A}_i(X))\xi_i(\gamma(0)) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\xi_i(\gamma(t))\right]\\ &= \frac{dx^\mu}{dt}\left(\frac{\partial \xi_i{}^\beta}{\partial x^\mu} + \xi_i{}^\alpha \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha\right)e_\beta.\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla s = (\mathrm{d}\xi_i{}^\beta + \xi_i{}^\alpha \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha) \otimes e_\beta. \tag{2.34}$$

Demonstração. Um cálculo direto mostra

$$\begin{aligned}\nabla_X s &= \left[\sigma_i(\gamma(0)),\, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\rho(g_i(t)^{-1})\xi_i(\gamma(t))\right]\\ &= \left[\sigma_i(\gamma(0)),\, \mathrm{d}\rho_e(\mathcal{A}_i(X))\xi_i(\gamma(0)) + \rho(g_i(0)^{-1})\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\xi_i(\gamma(t))\right]\\ &= \left[\sigma_i(0),\, \mathrm{d}\rho_e(\mathcal{A}_i(X))\xi_i(\gamma(0)) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\xi_i(\gamma(t))\right],\end{aligned}$$

onde notamos que $g_i(0) = e$ e como ρ é um homomorfismo de G em $\mathrm{GL}(V)$, então $\rho(g_i(0)^{-1}) = I$, sendo $I \in \mathrm{GL}(V)$ a matriz identidade. Isso estabelece a primeira igualdade.

Para a segunda igualdade podemos continuar o cálculo acima. Porém faremos uso de alguns resultados vistos anteriormente. Pelas propriedades (i) e (iv) da Proposição 2.41 e da equação (2.31), temos

$$\begin{aligned}\nabla_X s &= \nabla_X(\xi_i{}^\alpha e_\alpha)\\ &= X(\xi_i{}^\alpha) + \xi_i{}^\alpha \nabla_X e_\alpha\\ &= \frac{\partial \xi_i{}^\alpha}{\partial x^\mu}X^\mu e_\alpha + \xi_i{}^\alpha \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha e_\beta\\ &= \frac{dx^\mu}{dt}\left(\frac{\partial \xi_i{}^\beta}{\partial x^\mu} + \xi_i{}^\alpha \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha\right)e_\beta.\end{aligned}$$

Para provar a última igualdade, usamos os itens (i) e (v) da Proposição 2.41 e a igualdade (2.33). Temos

$$\begin{aligned}\nabla s = \nabla({\xi_i}^{\alpha} e_\alpha) &= \mathrm{d}\,{\xi_i}^{\alpha} \otimes e_\alpha + \xi_\alpha \nabla e_\alpha \\ &= \mathrm{d}\,{\xi_i}^{\alpha} + \xi^\alpha {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha} \otimes e_\beta \\ &= (\mathrm{d}\,{\xi_i}^{\beta} + \xi^\alpha {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha}) \otimes e_\beta.\end{aligned}$$

□

2.12 Curvatura

Como já vimos, a derivada covariante define um operador

$$\nabla\colon \Omega^0(E) \to \Omega^1(E).$$

Vamos fazer uma breve discussão de como estender o operador ∇ para $\Omega^p(E)$ e definiremos a 2-forma de curvatura associada à ∇. No Capítulo 3 voltaremos a discutir esse assunto.

Sejam $\eta \in \Omega^p(M)$ e $s \in \Omega^0(E)$. Exigimos que

$$\nabla(\eta \otimes s) = \mathrm{d}\,\eta \otimes s + (-1)^p \eta \wedge \nabla s \tag{2.35}$$

e estendemos para $\xi \in \Omega^p(E)$ por linearidade. Sejam U_i uma carta de M e $\sigma \in \Gamma(U_i, P)$ uma seção local. Seja também $e_\alpha(p) = [\sigma_i(p), {e_\alpha}^0] \in \Gamma(U_i, E)$. Então

$$\begin{aligned}\nabla\nabla e_\alpha &= \nabla({\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha} \otimes e_\beta) \\ &= \mathrm{d}({\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha}) \otimes e_\beta + (-1)^1 {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha} \wedge \nabla e_\beta \\ &= \mathrm{d}({\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha}) \otimes e_\beta - {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha} \wedge ({\mathcal{A}_i}^{\gamma}{}_{\beta} \otimes e_\gamma) \\ &= \left[\mathrm{d}({\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha}) + {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\gamma} \wedge {\mathcal{A}_i}^{\gamma}{}_{\alpha}\right] \otimes e_\beta \\ &= {\mathcal{F}_i}^{\beta}{}_{\alpha} \otimes e_\beta,\end{aligned} \tag{2.36}$$

onde foram usadas as equações (2.33) e (2.27).

Para o caso de uma seção $s(p) = \xi^\alpha(p) e_\alpha(p)$ de E, temos, da equação (2.34)

$$\begin{aligned}\nabla\nabla s &= \nabla(\mathrm{d}\,\xi^\beta \otimes e_\beta) + \nabla(\xi^\alpha {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha} \otimes e_\beta) \\ &= \mathrm{d}^2\,\xi^\beta \otimes e_\beta - \mathrm{d}\,\xi^\beta \wedge \nabla e_\beta + \mathrm{d}(\xi^\alpha {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha}) \otimes e_\beta - \xi^\alpha {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha} \wedge \nabla e_\beta \\ &= -\mathrm{d}\,\xi^\beta \wedge {\mathcal{A}_i}^{\alpha}{}_{\beta} \otimes e_\alpha + (\mathrm{d}\,\xi^\alpha \wedge {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha} + \xi^\alpha\,\mathrm{d}({\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha}) \otimes e_\beta - \xi^\alpha {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha} \wedge {\mathcal{A}_i}^{\gamma}{}_{\beta} \otimes e_\gamma \\ &= \xi^\alpha(\mathrm{d}({\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha}) - {\mathcal{A}_i}^{\gamma}{}_{\alpha} \wedge {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\gamma}) \otimes e_\beta \\ &= \xi^\alpha(\mathrm{d}({\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\alpha}) + {\mathcal{A}_i}^{\beta}{}_{\gamma} \wedge {\mathcal{A}_i}^{\gamma}{}_{\alpha}) \otimes e_\beta \\ &= \xi^\alpha {\mathcal{F}_i}^{\beta}{}_{\alpha} \otimes e_\beta,\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde novamente usamos as igualdades (2.33) e (2.27). Como veremos no Capítulo 3, o operador $\nabla \circ \nabla$ nos permite definir a curvatura associada a ∇.

2.13 Conexão que preserva o produto interno

Seja um fibrado vetorial $E \xrightarrow{\pi} M$ sobre $\mathbb{R}$ com um produto interno, isto é, um mapa suave que para cada $p \in M$ definimos como

$$\mathrm{g}_p \colon E_p \times E_p \to \mathbb{R}$$

e que é bilinear, simétrico e positivo-definido. Dizemos que g define uma *estrutura Riemanniana* em E.

Definição 2.43. Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial com um produto interno e ∇ uma conexão em E. Dizemos que ∇ é uma *conexão métrica* (ou *compatível com a métrica*) se preserva o produto interno, i.e.,

$$\mathrm{d}(\mathrm{g}(s,s')) = \mathrm{g}(\nabla s, s') + \mathrm{g}(s, \nabla s').$$

Se ∇ é uma conexão métrica, tomando $s = e_\alpha$ e $s' = e_\beta$ e escrevendo $\mathrm{g}(e_\alpha, e_\beta) = \mathrm{g}_{\alpha\beta}$ temos

$$\mathrm{d}\,\mathrm{g}_{\alpha\beta} = \mathrm{g}(\mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\alpha \otimes e_\gamma, e_\beta) + \mathrm{g}(e_\alpha, \mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\beta \otimes e_\gamma) = \mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\alpha \mathrm{g}_{\gamma\beta} + \mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\beta \mathrm{g}_{\alpha\gamma}.$$

Observação 2.44. Da Geometria Riemanniana, se uma conexão afim $\nabla \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é compatível com a métrica Riemanniana g, então

$$\partial_\lambda \mathrm{g}_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} \mathrm{g}_{\kappa\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu} \mathrm{g}_{\kappa\mu}.$$

Se tomarmos $E = TM$ e impondo a condição de ser livre de torção, i.e., $\Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} = \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}$, temos que a conexão em E se reduz a conexão de Levi-Civita.

Se tivermos um produto interno definido em $E \xrightarrow{\pi} M$, podemos considerar uma base ortonormal $\{\hat{e}_\alpha\}$, ou seja, de modo que $\mathrm{g}(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Então, como o grupo de estrutura de E é $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, podemos tomar $\mathrm{O}(k)$ como grupo de estrutura. Sabemos que a álgebra de Lie de $\mathrm{O}(k)$ é o espaço vetorial das matrizes antissimétricas $\mathfrak{o}(k) = \mathfrak{so}(k)$. Nesse caso uma 1-forma de conexão $\omega \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{so}(k)$ e sua forma local $\mathcal{A}_i \in \Omega^1(U_i) \otimes \mathfrak{so}(k)$ satisfazem

$$\omega^\alpha{}_\beta = -\omega^\beta{}_\alpha \qquad e \qquad \mathcal{A}_i{}^\alpha{}_\beta = -\mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha. \tag{2.38}$$

Teorema 2.45. *Seja $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial com produto interno* g *e ∇ a conexão associada com a base ortonormal $\{\hat{e}_\alpha\}$, i.e.*

$$\nabla \hat{e}_\alpha = \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha \otimes \hat{e}_\beta.$$

Então ∇ é uma conexão métrica.

Demonstração. Como g é bilinear, basta considerar seções $s = f\hat{e}_\alpha$ e $s' = f'\hat{e}_\beta$, onde $f, f' \in C^\infty(M)$.

Temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{g}(s,s')) &= \mathrm{d}(\mathrm{g}(f\hat{e}_\alpha, f'\hat{e}_\beta)) \\
&= \mathrm{d}(ff'\mathrm{g}(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta)) \\
&= \mathrm{d}(ff'\mathrm{g}_{\alpha\beta}) \\
&= \mathrm{d}(ff') \otimes \mathrm{g}_{\alpha\beta} \\
&= \mathrm{d}(ff') \otimes \delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}(\nabla s, s') + \mathrm{g}(s, \nabla s') &= \mathrm{g}(\nabla f\hat{e}_\alpha, f'\hat{e}_\beta) + \mathrm{g}(f\hat{e}_\alpha, \nabla f'\hat{e}_\beta) \\
&= \mathrm{g}(\mathrm{d}f \otimes \hat{e}_\alpha + f\mathcal{A}_i\gamma_\alpha \otimes \hat{e}_\gamma, f'\hat{e}_\beta) + \mathrm{g}(f\hat{e}_\alpha, \mathrm{d}f' \otimes \hat{e}_\beta + f'\mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\beta \otimes \hat{e}_\gamma) \\
&= \mathrm{g}(\mathrm{d}f \otimes \hat{e}_\alpha, f'\hat{e}_\beta) + \mathrm{g}(f\mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\alpha \otimes \hat{e}_\gamma, f'\hat{e}_\beta) \\
&\qquad + \mathrm{g}(f\hat{e}_\alpha, \mathrm{d}f' \otimes \hat{e}_\beta) + \mathrm{g}(f\hat{e}_\alpha, f'\mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\beta \otimes \hat{e}_\gamma) \\
&= (\mathrm{d}f)f' \otimes \mathrm{g}_{\alpha\beta} + f\mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\alpha f' \otimes \mathrm{g}_{\gamma\beta} + f(\mathrm{d}f') \otimes \mathrm{g}_{\alpha\beta} + ff'\mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\beta \otimes \mathrm{g}_{\alpha\gamma} \\
&= \left[(\mathrm{d}f)f' + f(\mathrm{d}f')\right] \otimes \delta_{\alpha\beta} \\
&= \mathrm{d}(ff') \otimes \delta_{\alpha\beta},
\end{aligned}$$

onde usamos a equação (2.38). Concluímos que ∇ é conexão métrica. $\square$

CAPÍTULO 3

Campos de Yang-Mills fracamente estáveis em S^4

Como veremos na Seção 3.1, se E é um fibrado vetorial sobre uma variedade Riemanniana compacta M e G um grupo de Lie compacto, definimos o funcional de Yang-Mills por

$$\begin{aligned}\mathscr{Y} : \mathscr{C}_E &\to \mathbb{R}\\ \nabla &\mapsto \tfrac{1}{2}\int_M \|R^\nabla\|^2 \,\mathrm{d}V_M,\end{aligned}$$

onde $\mathscr{C}_E$ é o espaço (afim) das conexões em E. O produto interno que determina a norma acima é induzido pelo traço usual. Mais precisamente

$$\langle A, B\rangle = \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(A^T \circ B), \quad \forall A, B \in \operatorname{End}(E_x),\ \forall x \in M.$$

Podemos então estudar quais conexões ∇ minimizam $\mathscr{Y}$ e, para isso buscamos por seus pontos críticos. Um ponto crítico $\nabla \in \mathscr{C}_E$ de $\mathscr{Y}$ será chamado *Conexão de Yang-Mills*.

O exemplo a seguir ilustra bem o que faremos aqui. Lembre-se que uma superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dita *mínima* se sua curvatura média se anula sempre. Além disso, uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é *mínima* se cada uma de suas parametrizões é mínima. É possível mostrar que, se $X : U \to \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada regular e $D \subset U$ é um domínio limitado em U, então X será mínima se, e somente se, $A'(0) = 0$ para cada D e toda variação normal de $X(\overline{D})$, onde

$$A(t) = \int_{\overline{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

é o funcional de área e E^t, F^t, G^t são os coeficientes da primeira forma fundamental de uma dessas variações normais. Note que isso nos diz que qualquer região limitada $X(\overline{D})$ de uma superfície regular parametrizada mínima X é um ponto crítico do funcional de área para qualquer variação normal de $X(\overline{D})$. Note, contudo, que tais pontos críticos não necessitam ser, de fato, pontos de mínimo. Contudo, temos superfícies mínimas ditas *estáveis* que, a grosso modo, são aquelas que minimizam o funcional de área, ou seja, nenhuma variação normal diminui a área da região $X(\overline{D})$.

3.1 Configuração geométrica e o funcional de Yang-Mills

Sejam G um grupo de Lie compacto e $P(M,G)$ um fibrado principal, com projeção $\pi\colon P \to M$, sobre uma variedade Riemanniana compacta M de dimensão n. Considere $E = P \times_\rho \mathbb{R}^N$ um fibrado vetorial associado à P, onde $\rho\colon G \to \mathrm{O}(N)$ é uma representação injetora.

Definição 3.1. Dizemos que $f\colon P \to P$ é um *automorfismo interno* ou *transformação de calibre* se f é um difeomorfismo tal que

(i) $\pi \circ f = \pi$;

(ii) $f(ug) = f(u)g, \quad \forall u \in P, \forall g \in G.$

Denotamos por $\mathscr{G}_P$ o conjunto dos automorfismos internos de P. Com a operação de composição, $\mathscr{G}_P$ se torna um grupo chamado *grupo de calibre* de P.

Vamos mostrar algumas outras formas de descrever $\mathscr{G}_P$. Considere o conjunto

$$C^\infty(P,G)^G = \{\sigma \in C^\infty(P,G)\colon \sigma(ug) = \mathrm{ad}_{g^{-1}}(\sigma(u)) = g^{-1}\sigma(u)g\},$$

onde definimos a operação

$$(\sigma' \cdot \sigma)(u) = \sigma'(u)\sigma(u), \quad \forall u \in P.$$

Não é difícil ver que $C^\infty(P,G)^G$ com a operação acima forma um grupo. Se $f \in \mathscr{G}_P$, então para todo $u \in P$ temos, pela hipótese de que $\pi \circ f(u) = \pi(u)$ e da transitividade da ação à direita de G em P, que existe único $g_u \in G$ tal que $f(u) = ug_u$. Assim podemos definir $\sigma_f\colon P \to G$ por $\sigma_f(u) = g_u$. Por construção σ_f é suave. Além disso

$$ug\sigma_f(ug) = f(ug) = f(u)g = u\sigma_f(u)g.$$

Visto que a ação também é livre, temos

$$\sigma_f(ug) = g^{-1}\sigma_f(u)g.$$

Assim $\sigma_f \in C^\infty(P,G)^G$. Por outro lado, dada $\sigma \in C^\infty(P,G)^G$, defina $f(u) = u\sigma(u)$. Note que $\pi \circ f = \pi$ (ver Proposição 1.71). Além disso

$$f(ug) = ug\sigma(ug) = ugg^{-1}\sigma(u)g = u\sigma(u)g = f(u)g,$$

ou seja, $f \in \mathscr{G}_P$. Isso nos dá a identificação $\mathscr{G}_P \cong C^\infty(P,G)^G$.

Agora considere o fibrado de grupos $G_P := P \times_{\mathrm{ad}} G$, onde ad é o mapa definido em (1.5). Dada $s \in \Gamma(G_P)$, podemos definir $\sigma\colon P \to G$ colocando $s(\pi(u)) = [u, \sigma(u)]$. Visto que $\pi(ug) = \pi(u)$, então

$$[u, \sigma(u)] = s(\pi(u)) = s(\pi(ug)) = [ug, \sigma(ug)]$$

e daí
$$[u,\sigma(u)] = [ug,\sigma(ug)] = [u,g\sigma(ug)g^{-1}],$$
ou seja,
$$\sigma(ug) = g^{-1}\sigma(u)g,$$
o que mostra que $\sigma \in C^\infty(P,G)^G$. Reciprocamente, dado $\sigma \in C^\infty(P,G)^G$, defina $s \in \Gamma(G_P)$ por $s(x) = [u,\sigma(u)]$, onde $\pi(u) = x$. Precisamos verificar que s não depende do $u \in P$ escolhido. Se $v \in \pi^{-1}(x)$, então pela ação à direita ser livre e transitiva, existe único $g \in G$ tal que $v = ug$. Daí
$$[v,\sigma(v)] = [ug,\sigma(ug)] = [ug,g^{-1}\sigma(u)g] = [u,\sigma(u)].$$
É claro que s definida acima é suave e daí $s \in \Gamma(G_P)$. Isso nos dá a identificação $\Gamma(G_P) \cong C^\infty(P,G)^G$. Definimos em $\Gamma(G_P)$ a operação
$$(s'\cdot s)(x) = [p,\sigma'(p)\cdot\sigma(p)] \quad \forall x \in M.$$

Podemos relacionar $\mathscr{G}_P$ à *álgebra de calibre* $\mathfrak{G}_P$ que é o conjunto das seções suaves do fibrado de álgebras de Lie $\mathfrak{g}_P := P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G e Ad é a representação adjunta definida em (1.6). Seja $\exp\colon \mathfrak{g}\to G$ o mapa exponencial. Podemos definir
$$\begin{aligned} \exp_P\colon \quad \mathfrak{g}_P &\to G_P \\ [u,X] &\mapsto [u,\exp(X)]. \end{aligned}$$
Além disso, o mapa $\exp_P$ induz o seguinte mapa exponencial
$$\mathfrak{exp}_P\colon \mathfrak{G}_P \to \mathscr{G}_P \tag{3.1}$$
definido por $\mathfrak{exp}_P(s)(p) = \exp_P(s(p))$, para todo $p \in M$, com $s \in \mathfrak{G}_P$.

É possível escrever $\mathscr{G}_P$ e $\mathfrak{G}_P$ em termos do fibrado vetorial E associado à P. No que segue daremos uma ideia de como isso pode ser feito.

Considere O_E o fibrado sobre M cujas funções de transição são os mapas $\overline{\mathrm{ad}}\circ\rho\circ g_{\alpha\beta}$, onde $\overline{\mathrm{ad}}\colon \mathrm{O}(N)\to \mathrm{Aut}(\mathrm{O}(N))$ é dado por $\overline{\mathrm{ad}}_A(B) = ABA^{-1}$ e $g_{\alpha\beta}$ são as funções de transição de P. Note que a fibra em $x\in M$ é formado pelas transformações ortogonais de E_x. Defina o mapa
$$\begin{aligned} \mathscr{L}\colon G_P &\to \mathrm{O}_E \\ [p,g] &\mapsto [\pi(p),\rho(g)]. \end{aligned}$$
Note que
$$\mathscr{L}(ph,\mathrm{ad}_{h^{-1}}(g)) = [\pi(ph),\rho(h^{-1}gh)] = [\pi(p),\overline{\mathrm{ad}}_{\rho(h)^{-1}}(\rho(g))] = [\pi(p),\rho(g)],$$
ou seja, $\mathscr{L}$ está bem-definida. Temos também que $\mathscr{L}$ é homomorfismo (fibra-a-fibra) injetor. De fato, se $[p,g] = [q,h]$, então existe único $a \in G$ tal que $q = pa$. Logo podemos escrever $[q,h] = [pa,h] =$

$[p,h']$, com $h' = \mathrm{ad}_a(h)$. Assim

$$\begin{aligned}\mathscr{L}([p,g]\cdot[p,h']) &= \mathscr{L}([p,gh]) = [\pi(p),\rho(gh)]\\ &= [\pi(p),\rho(g)]\cdot[\pi(p),\rho(h)]\\ &= \mathscr{L}(p,g)\cdot\mathscr{L}(p,h').\end{aligned}$$

Para a injetividade, suponha que $\mathscr{L}([p,g]) = \mathscr{L}([p,h'])$. Então $\mathscr{L}([p,g])\cdot\mathscr{L}([p,h'])^{-1} = [\pi(p),\mathrm{I}_N]$. Assim temos que $\rho(gh'^{-1}) = \mathrm{I}_N = \rho(e)$. Lembre-se que ρ é injetor, logo $g = h'$. Portanto

$$[p,g] = [p,h'] = [p,\mathrm{ad}_a(h)] = [pa,h] = [q,h].$$

Conforme a Definição 1.59, temos que $G_E := \mathscr{L}(G_P) \cong G_P$.

Analogamente, considere o fibrado $\mathfrak{so}_E$ sobre M com funções de transição dadas por $\overline{\mathrm{Ad}}\circ\rho\circ g_{\alpha\beta}$, onde $\overline{\mathrm{Ad}}\colon \mathrm{O}(N) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{so}_N)$ é a representação adjunta. A fibra de $\mathfrak{so}_E$ em $x \in M$ é formado pelas transformações antissimétricas de E_x. Definimos o mapa

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\colon \mathfrak{g}_P &\to \mathfrak{so}_E\\ [p,X] &\mapsto [\pi(p),\mathrm{d}\rho_e X].\end{aligned}$$

Note que $\mathrm{d}\rho_e$ é injetora, visto que $\overline{\exp}\circ\mathrm{d}\rho_e = \rho\circ\exp$, onde $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ e $\overline{\exp}\colon \mathfrak{so}_N \to \mathrm{O}(N)$ são os mapas exponenciais que são difeormorfismos na origem. Considerando o colchete definido em $\mathfrak{g}_P$ e $\mathfrak{so}_E$ ponto-a-ponto, mostra-se, de maneira bastante similar ao caso anterior, que $\mathfrak{L}$ é um homomorfismo (fibra-a-fibra) injetor. Definimos $\mathfrak{g}_E := \mathfrak{L}(\mathfrak{g}_P)$. Novamente pela Definição 1.59 temos que $\mathfrak{g}_E \cong \mathfrak{g}_P$.

Assim podemos expressar o grupo de calibre $\mathscr{G}_P$ como o espaço $\mathscr{G}_E$ das seções suaves de G_E. Analogamente, temos que $\Omega^0(\mathfrak{g}_E) = \mathfrak{G}_E$ é o espaço das seções suaves de $\mathfrak{g}_E$.

Observação 3.2. Note que G_E é simplesmente o fibrado de automorfismos de E sobre M cuja fibra em $x \in M$ é formada pelos isomorfismos de E_x tais que sua representação local é um elemento de $\rho(G) \subset \mathrm{O}(N)$. Similarmente $\mathfrak{g}_E$ é o fibrado de endomorfismos de E sobre M cuja fibra em $x \in M$ é composta dos endomorfismos de E_x tais que sua representação local é um elemento de $\mathrm{d}\rho_e(\mathfrak{g})$.

Observação 3.3. Salientamos aqui que a transcrição das definições acima em termos do fibrado vetorial E é apenas uma questão de preferência. De fato nada perdemos ao usar a Definição 3.1. Também poderíamos ter considerado logo de início G_E e $\mathfrak{g}_E$ descritos conforme a Observação 3.2 e definido o grupo (álgebra) de calibre $\mathscr{G}_E$ ($\mathfrak{G}_E$) de E sendo seções suaves de G_E ($\mathfrak{g}_E$). Aqui optamos em seguir fielmente o caminho feito em [3].

Considere $\nabla\colon \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$ uma conexão, como definida na Seção 2.10.

Proposição 3.4. *Dadas ∇ e ∇' conexões em E, então $\nabla - \nabla'$ é elemento de $\Omega^1(\mathfrak{g}_E)$.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.42 que localmente podemos escrever

$$\nabla = \mathrm{d} + \mathrm{d}\rho_e \circ \mathcal{A},$$

onde $\mathcal{A}$ é a forma local da 1-forma de conexão associada à ∇. Se $\nabla' = \mathrm{d} + \mathrm{d}\rho_e \circ \mathcal{A}'$ é outra conexão em E, então

$$\nabla - \nabla' = \mathrm{d}\rho_e \circ (\mathcal{A} - \mathcal{A}'),$$

que é (localmente) uma 1-forma com valores em $\mathrm{d}\rho_e(\mathfrak{g})$, o que prova o afirmado. □

Definição 3.5. Definimos o espaço das conexões em E, denotado por $\mathscr{C}_E$. Pela Proposição 3.4, segue que $\mathscr{C}_E$ é um espaço afim sobre $\Omega^1(\mathfrak{g}_E)$, i.e., fixada uma conexão ∇ sobre E, então

$$\mathscr{C}_E = \{\nabla + A \colon A \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)\}.$$

É possível provar que

$$T_\nabla(\mathscr{C}_E) \cong \Omega^1(\mathfrak{g}_E).$$

Como foi prometido na Seção 2.12, voltaremos a discutir uma forma de estender a conexão ∇ para o conjunto $\Omega^p(E)$, $p \geq 0$. Lembre-se que exigimos que, dadas $\eta \in \Omega^p(M)$ e $\sigma \in \Omega^0(E)$, seja satisfeita

$$\nabla(\eta \otimes \sigma) = \mathrm{d}\eta \otimes \sigma + (-1)^p \eta \wedge \nabla\sigma.$$

e estendemos para $\xi \in \Omega^p(E)$ por linearidade.

Definimos então o operador[1]

$$\mathrm{d}^\nabla \colon \Omega^p(E) \to \Omega^{p+1}(E).$$

Note que por construção, se $\sigma \in \Omega^0(E)$, então $\mathrm{d}^\nabla \sigma = \nabla\sigma$.

Definição 3.6. Dada uma conexão ∇ sobre E, definimos a 2-forma de curvatura $R^\nabla \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ por

$$R^\nabla_{X,Y} := [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]},$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Verifiquemos que de fato R^∇ acima definido é elemento de $\Omega^2(\mathfrak{g}_E)$. Primeiro note $\mathrm{d}^\nabla \circ \mathrm{d}^\nabla \sigma = R^\nabla \sigma$, para $\sigma \in \Omega^0(E)$. Pela linearidade de R^∇[2] e $\mathrm{d}^\nabla \circ \mathrm{d}^\nabla$, onde ambos são considerados mapas de $\Omega^0(E)$ para $\Omega^2(E)$, basta verificar nas seções e_α de E descritas na Seção 2.11 e vetores da base de T_pM. Sabemos da equação (2.36) que $\mathrm{d}^\nabla \circ \mathrm{d}^\nabla e_\alpha = \mathcal{F}^\beta{}_\alpha \otimes e_\beta$. Se denotarmos por ∂_μ e ∂_ν dois vetores da base de T_pM, $p \in M$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^\nabla \circ \mathrm{d}^\nabla e_\alpha &= \mathcal{F}^\beta{}_\alpha \otimes e_\beta \\
&= \left(\mathrm{d}(\mathcal{A}^\beta{}_\alpha) + \mathcal{A}^\beta{}_\gamma \wedge \mathcal{A}^\gamma{}_\alpha\right) \otimes e_\beta \\
&= \left(\partial_\delta(\mathcal{A}_\varepsilon{}^\beta{}_\alpha)\,\mathrm{d}x^\delta \wedge \mathrm{d}x^\varepsilon + \mathcal{A}^\beta{}_\gamma \wedge \mathcal{A}^\gamma{}_\alpha\right) \otimes e_\beta
\end{aligned}$$

[1] d^∇ é exatamente o operador ∇ estendido as p-formas descrito acima. Só estamos mudando a notação para ficar de acordo com a literatura.

[2] R^∇ é, por definição, a curvatura Riemanniana quando $E = TM$.

e daí

$$\mathrm{d}^\nabla \circ \mathrm{d}^\nabla e_\alpha(\partial_\mu, \partial_\nu) = \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\alpha - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu{}^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}_\mu{}^\beta{}_\gamma \mathcal{A}_\nu{}^\gamma{}_\alpha - \mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\gamma \mathcal{A}_\mu{}^\gamma{}_\alpha\right) e_\beta.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_\mu}\nabla_{\partial_\nu} e_\alpha &= \nabla_{\partial_\mu}(\mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\alpha e_\beta) \\ &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\alpha e_\beta + \mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\alpha \nabla_{\partial_\mu} e_\beta \\ &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\alpha e_\beta + \mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\alpha \mathcal{A}_\mu{}^\gamma{}_\beta e_\gamma \\ &= \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}_\mu{}^\beta{}_\gamma \mathcal{A}_\nu{}^\gamma{}_\alpha\right) e_\beta.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\nabla_{\partial\nu}\nabla_{\partial_\mu} e_\alpha = \left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu{}^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\gamma \mathcal{A}_\mu{}^\gamma{}_\alpha\right) e_\beta.$$

Como $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, temos que $\nabla_{[\partial_\mu,\partial_\nu]} e_\alpha = 0$. Disto segue

$$\begin{aligned}R^\nabla_{\partial_\mu,\partial_\nu} e_\alpha &= \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}_\mu{}^\beta{}_\gamma \mathcal{A}_\nu{}^\gamma{}_\alpha - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu{}^\beta{}_\alpha - \mathcal{A}_\nu{}^\beta{}_\gamma \mathcal{A}_\mu{}^\gamma{}_\alpha\right) e_\beta \\ &= \mathrm{d}^\nabla \circ \mathrm{d}^\nabla e_\alpha(\partial_\mu, \partial_\nu).\end{aligned}$$

Note que $\mathcal{F}^\beta{}_\alpha$ é uma 2-forma com valores em $\mathrm{d}\rho_e(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{so}_N$. Da equação (2.37) e do que foi feito acima concluímos que $R^\nabla \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$. Temos também que se $\psi \in \Omega^p(E)$, então

$$\mathrm{d}^\nabla \circ \mathrm{d}^\nabla \psi(X_1, \ldots, X_{p+2}) = \sum_{\tau \in S_{p+2}} R^\nabla_{X_{\tau(1)}, X_{\tau(2)}} \left(\psi\left(X_{\tau(3)}, \ldots, X_{\tau(p+2)}\right)\right). \tag{3.2}$$

Da equação (3.2) vemos que $\mathrm{d}^\nabla \circ \mathrm{d}^\nabla = 0$ se, e somente se, E é *plano*, i.e., se, e somente se, a curvatura R^∇ se anula.

Suponha que E tenha um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ preservado pela conexão (ver Seção 2.13). Para cada $x \in M$ definimos um produto interno em $\bigwedge^p T_x^* M \otimes E$ por

$$\langle \psi, \varphi \rangle := \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \langle \psi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}), \varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \rangle_E, \tag{3.3}$$

onde $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base ortonormal de $T_x M$.

Denotemos o elemento de volume invariante de (M, g) por $\mathrm{d}V_M = \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, onde $|\mathrm{g}| = |\det \mathrm{g}_{\mu\nu}|$. Podemos integrar o produto interno definido em (3.3) sobre M em ordem de obter o produto interno

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{L^2} := \int_M \langle \psi, \varphi \rangle \,\mathrm{d}V_M, \tag{3.4}$$

onde $\psi, \varphi \in \Omega^p(M, E)$. Note que M sendo compacta, a integral em (3.4) está bem-definida. Com este produto interno definimos o operador adjunto de d^∇

$$\delta^\nabla \colon \Omega^{p+1}(E) \to \Omega^p(E)$$

dado pela equação

$$\langle \mathrm{d}^\nabla \psi, \varphi \rangle_{L^2} = \langle \psi, \delta^\nabla \varphi \rangle_{L^2}.$$

Seja $D\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ a conexão de *Levi-Civita* em TM, i.e., D é uma conexão métrica (ver Definição 2.43) e livre de torsão, ou seja, $D_XY - D_YX - [X,Y] = 0$, para todos $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. Podemos estender D para qualquer fibrado tensorial, em particular para $\bigwedge^p T^*M$[3]. Com a conexão ∇ em E podemos definir uma nova conexão $\overline{\nabla}$ em $\bigwedge^p T^*M\otimes E$ sendo o produto tensorial dessas duas conexões. Mais precisamente

$$\overline{\nabla}_X(\eta\otimes\sigma) := (D\otimes\nabla)_X(\eta\otimes\sigma) = (D_X\eta)\otimes\sigma + \eta\otimes(\nabla_X\sigma),$$

onde $X\in\mathfrak{X}(M)$, $\eta\in\Omega^p(M)$ e $\sigma\in\Omega^0(E)$. Com a conexão $\overline{\nabla}$ temos as seguintes expressões para d^∇ e δ^∇

$$\mathrm{d}^\nabla\varphi(X_0,\dots,X_p) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k(\overline{\nabla}_{X_k}\varphi)(X_0,\dots,\widehat{X}_k,\dots,X_p), \tag{3.5}$$

$$\delta^\nabla\varphi(X_1,\dots,X_{p-1}) = -\sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(e_j,X_1,\dots,X_{p-1}), \tag{3.6}$$

onde $\varphi\in\Omega^p(E) = \Gamma(\bigwedge^p T^*M\otimes E)$, $X_i\in T_xM$, $i=0,\dots,p$ e $(e_1,\dots,e_n)$ é uma base ortonormal de T_xM.

Dada uma conexão ∇ em E, definimos uma conexão em $\mathfrak{g}_E$ por

$$\nabla(\varphi) = [\nabla,\varphi], \tag{3.7}$$

onde $\varphi\in\Omega^0(E)$. A equação (3.7) significa que, dada $\sigma\in\Omega^0(E)$, então

$$\nabla(\varphi)\sigma = \nabla(\varphi(\sigma)) - \varphi(\nabla\sigma).$$

Similarmente definimos a curvatura associada a essa conexão dada pela equação (3.7) por

$$R^\nabla_{X,Y}(\varphi) = [R^\nabla_{X,Y},\varphi]. \tag{3.8}$$

Vamos definir um produto interno no fibrado $\mathfrak{g}_E$ dos endomorfismos antissimétricos de E. Dados $x\in M$ e endomorfismos $A,B\in\mathrm{End}(E_x)$, estabelecemos

$$\langle A,B\rangle := \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(A^T\circ B), \tag{3.9}$$

onde tr é o *traço* usual. Com a conexão definida por (3.7), o produto interno definido por (3.9) e a discussão feita acima, temos a seguinte sequência de operadores em $\mathfrak{g}_E$

$$\Omega^0(\mathfrak{g}_E) \underset{\delta^\nabla}{\overset{\mathrm{d}^\nabla}{\rightleftarrows}} \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \underset{\delta^\nabla}{\overset{\mathrm{d}^\nabla}{\rightleftarrows}} \Omega^2(\mathfrak{g}_E) \underset{\delta^\nabla}{\overset{\mathrm{d}^\nabla}{\rightleftarrows}} \cdots$$

Agora descreveremos a ação do grupo de calibre $\mathscr{G}_E$ em $\mathscr{C}_E$. Dado $g\in\mathscr{G}_E$, onde estamos considerando g sendo um automorfismo de E, e seja $\nabla\in\mathscr{C}_E$. Definimos

$$\nabla^g := g\circ\nabla\circ g^{-1},$$

ou seja, se $\sigma\in\Omega^0(E)$, então

$$\nabla^g(\sigma) = g(\nabla(g^{-1}(\sigma))).$$

[3]Para uma demonstração ver [6, pg. 95, Proposition 4.15]

Proposição 3.7. *∇^g definida acima é uma conexão em E.*

Demonstração. Vejamos que ∇^g é $\mathbb{R}$-linear. Sejam $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega^0(E)$. Então

$$\begin{aligned}
\nabla^g(a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2) &= g\left(\nabla(g^{-1}(a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2))\right) \\
&= g\left(\nabla(a_1 g^{-1}(\sigma_1) + a_2 g^{-1}(\sigma_2))\right) \\
&= a_1 g\left(\nabla(g^{-1}(\sigma_1))\right) + a_2 g\left(\nabla(g^{-1}(\sigma_2))\right) \\
&= a_1\nabla^g(\sigma_1) + a_2\nabla^g(\sigma_2),
\end{aligned}$$

onde notamos que $a_i g^{-1}(\sigma_i) \in \Omega^0(E)$, $i = 1, 2$.

Falta verificar que vale a regra de Leibniz. Seja $f \in C^\infty(M)$ e $\sigma \in \Omega^0(E)$. Assim

$$\begin{aligned}
\nabla^g(f\sigma) &= g(\nabla(g^{-1}(f\sigma))) \\
&= g(\nabla(fg^{-1}(\sigma))) \\
&= g(\mathrm{d}f \otimes (g^{-1}(\sigma)) + f\nabla(g^{-1}(\sigma))) \\
&= \mathrm{d}f \otimes \sigma + fg(\nabla(g^{-1}(\sigma))) \\
&= \mathrm{d}f \otimes \sigma + f\nabla^g\sigma.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.8. *Dada $\nabla \in \mathscr{C}_E$ e $g \in \mathscr{G}_E$, então $R^{\nabla^g} = g \circ R^\nabla \circ g^{-1}$.*

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Por um cálculo direto temos

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^g}_{X,Y} &= [\nabla^g_X, \nabla^g_Y] - \nabla^g_{[X,Y]} \\
&= g \circ \nabla_X \circ g^{-1}(g \circ \nabla_Y \circ g^{-1}) - g \circ \nabla_Y \circ g^{-1}(g \circ \nabla_X \circ g^{-1}) - g \circ \nabla_{[X,Y]} \circ g^{-1} \\
&= g \circ \nabla_X(\nabla_Y \circ g^{-1}) - g \circ \nabla_Y(\nabla_X \circ g^{-1}) - g \circ \nabla_{[X,Y]} \circ g^{-1} \\
&= g \circ [\nabla_X, \nabla_Y] \circ g^{-1} - g \circ \nabla_{[X,Y]} \circ g^{-1} \\
&= g \circ \left([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\right) \circ g^{-1} \\
&= g \circ R^\nabla \circ g^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Pela equação (3.1) e o fato de $\mathscr{G}_P \cong \mathscr{G}_E$ e $\mathfrak{G}_P \cong \mathfrak{G}_E$, temos definido um mapa

$$\mathfrak{exp}_E \colon \mathfrak{G}_E \to \mathscr{G}_E.$$

Também vimos que $\Omega^0(\mathfrak{g}_E) \cong \mathfrak{G}_E$ e $\Omega^0(G_E) \cong \mathscr{G}_E$. Seja $\sigma \in \mathfrak{G}_E$ e considere a curva $g(t) = \mathfrak{exp}_E(t\sigma)$ em $\mathscr{G}_E$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \nabla^{g(t)} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(t) \circ \nabla \circ g(t)^{-1} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathfrak{exp}_E(t\sigma) \circ \nabla \circ \mathfrak{exp}_E(-t\sigma) \\
&= \mathrm{d}(\mathfrak{exp}_E)_0(\sigma) \circ \nabla \circ \left(\mathfrak{exp}_E(-t\sigma)\Big|_{t=0}\right) \\
&\qquad + \left(\mathfrak{exp}_E(t\sigma)\Big|_{t=0}\right) \circ \nabla \circ \mathrm{d}(\mathfrak{exp}_E)_0(-\sigma) \\
&= \sigma \circ \nabla - \nabla \circ \sigma = -[\nabla, \sigma] = -\nabla(\sigma) = -\mathrm{d}^\nabla(\sigma),
\end{aligned}$$

onde usamos que $\mathrm{d}(\mathfrak{exp}_E)_0 = \mathrm{id}$ e a equação (3.7). Isso mostra que o espaço tangente à $\mathcal{O}(\nabla) = \{\nabla^g : g \in \mathscr{G}_E\}$ (a órbita de ∇ pela ação de $\mathscr{G}_E$ em $\mathscr{C}_E$) em ∇, sendo subespaço de $\Omega^1(\mathfrak{g}_E) \cong T_\nabla \mathscr{C}_E$, é dada pela imagem de $\mathrm{d}^\nabla : \Omega^0(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$. Dizemos que as conexões da forma ∇^g, com $g \in \mathscr{G}_E$, são *conexões de calibre equivalente*.

Como $(\ker \delta^\nabla)^\perp = \mathrm{d}^\nabla(\Omega^0(\mathfrak{g}_E))$, então temos naturalmente que $\ker \delta^\nabla$ é subespaço transversal à $\mathrm{d}^\nabla(\Omega^0(\mathfrak{g}_E))$ em $\Omega^1(\mathfrak{g}_E)$.

Definição 3.9. O subespaço $\ker \delta^\nabla \subset \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \cong T_\nabla \mathscr{C}_E$ é chamado de espaço de *deformações infinitesimais* da conexão ∇.

Lembrando que, localmente, a 2-forma de curvatura R^∇ é dada por $\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ e, pelo Teorema 2.36, $\mathrm{d}^\nabla R^\nabla$ é dada por $\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{F} + [\mathcal{A},\mathcal{F}] = 0$, temos a identidade de Bianchi

$$\mathrm{d}^\nabla R^\nabla = 0. \tag{3.10}$$

Pela equação (3.5), temos que, para quaisquer $X,Y,Z \in T_xM$

$$0 = \mathrm{d}^\nabla R^\nabla(X,Y,Z) = \overline{\nabla}_X R^\nabla(Y,Z) + \overline{\nabla}_Y R^\nabla(Z,X) + \overline{\nabla}_Z R^\nabla(X,Y). \tag{3.11}$$

Definição 3.10. Definimos o funcional de *Yang-Mills* $\mathscr{Y} : \mathscr{C}_E \to \mathbb{R}$ por

$$\mathscr{Y}(\nabla) = \frac{1}{2}\int_M \|R^\nabla\|^2 \,\mathrm{d}V_M = \frac{1}{2}\|R^\nabla\|^2_{L^2},$$

onde

$$\|R^\nabla\|^2 = \sum_{i_1<i_2} \langle R^\nabla_{e_{i_1},e_{i_2}}, R^\nabla_{e_{i_1},e_{i_2}} \rangle = \frac{1}{2}\sum_{i_1<i_2} \mathrm{tr}\left(\left(R^\nabla_{e_{i_1},e_{i_2}}\right)^T \circ R^\nabla_{e_{i_1},e_{i_2}}\right). \tag{3.12}$$

Pela equação (3.3) vemos que

$$\|R^\nabla\|^2 \,\mathrm{d}V_M = \langle R^\nabla, R^\nabla \rangle \,\mathrm{d}V_M = \sum_{i_1<i_2} \langle R^\nabla_{e_{i_1},e_{i_2}}, R^\nabla_{e_{i_1},e_{i_2}} \rangle \,\mathrm{d}V_M = \langle R^\nabla \wedge \star R^\nabla \rangle,$$

onde $\star : \Omega^k(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^{m-k}(\mathfrak{g}_E)$ é o operador *Hodge-*$\star$ que age trivialmente na parte $\mathfrak{g}_E$, ou seja, se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\sigma \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$, então $\star(\omega \otimes \sigma) := (\star\omega) \otimes \sigma$. Logo podemos escrever

$$\mathscr{Y}(\nabla) = \frac{1}{2}\int_M \langle R^\nabla \wedge \star R^\nabla \rangle.$$

Além disso temos a seguinte relação

$$\delta^\nabla = (-1)^{m(k+1)+1} \star \mathrm{d}^\nabla \star.$$

Um *ponto crítico* $\nabla \in \mathscr{C}_E$ do funcional de Yang-Mills é chamada *conexão de Yang-Mills*. A curvatura R^∇ de uma conexão de Yang-Mills é chamada *campo de Yang-Mills*. Note que o funcional de Yang-Mills é invariante sob a ação de $\mathscr{G}_E$. De fato, dado $g \in \mathscr{G}_E \cong \Gamma(G_E)$, por definição $g_x : E_x \to$

E_x é um automorfismo para cada $x \in M$. Como discutido anteriormente $G_E \subset \mathrm{O}_E$. Portanto ${g_x}^T \circ g_x = \mathrm{id}$. Pela Proposição 3.8, pela equação (3.12) e que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(SAS^{-1})$ sempre que $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, vem

$$\begin{aligned}
\|R^{\nabla^g}\|^2 &= \tfrac{1}{2}\sum_{i_1<i_2} \operatorname{tr}\left(\left(g_x \circ R^{\nabla}_{e_{i_1},e_{i_2}} \circ g_x^{-1}\right)^T \circ g_x \circ R^{\nabla}_{e_{i_1},e_{i_2}} \circ g_x^{-1}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i_1<i_2} \operatorname{tr}\left(g_x \circ {R^{\nabla}_{e_{i_1},e_{i_2}}}^T \circ R^{\nabla}_{e_{i_1},e_{i_2}} \circ g_x^{-1}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i_1<i_2} \operatorname{tr}\left({R^{\nabla}_{e_{i_1},e_{i_2}}}^T \circ R^{\nabla}_{e_{i_1},e_{i_2}}\right)\\
&= \sum_{i_1<i_2} \langle R^{\nabla}_{e_{i_1},e_{i_2}}, R^{\nabla}_{e_{i_1},e_{i_2}}\rangle\\
&= \langle R^{\nabla}, R^{\nabla}\rangle = \|R^{\nabla}\|^2.
\end{aligned}$$

Seja $\nabla \in \mathscr{C}_E$ e considere uma família suave de conexões ∇^t, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, tal que $\nabla^0 = \nabla$, i.e., $t \mapsto \nabla^t$ é suave. Então ∇ é ponto crítico do funcional de Yang-Mills se, e somente se,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathscr{Y}(\nabla^t) = 0,$$

qualquer que seja a família ∇^t. Como $\mathscr{C}_E$ é um espaço afim, então temos $\nabla^t = \nabla + A^t$, para $A^t \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ com $A^0 = 0$.

Proposição 3.11. *Sejam $\nabla \in \mathscr{C}_E$ e $A^t \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$. Se $\nabla^t = \nabla + A^t$ é uma família suave de conexões, com $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ e $A^0 = 0$, então*

$$R^{\nabla^t} = R^{\nabla} + \mathrm{d}^{\nabla} A^t + \tfrac{1}{2}\left[A^t, A^t\right], \tag{3.13}$$

onde definimos $[\phi,\psi](X,Y) = [\phi(X),\psi(Y)] - [\phi(Y),\psi(X)]$, para quaisquer $\phi,\psi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$.

Demonstração. Sendo $\mathscr{C}_E$ espaço afim, basta considerar o caso em que $\nabla^t = \nabla + tA$, com $A \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$. Sabemos que localmente R^{∇^t} se expressa por $\mathcal{F}^t = \mathrm{d}\mathcal{A}^t + \frac{1}{2}[\mathcal{A}^t,\mathcal{A}^t]$. Seja $B \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ tal que $\mathcal{A}^t = \mathcal{A} + tB$ dado pela identificação $\mathfrak{g}_P \cong \mathfrak{g}_E$. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^t &= \mathrm{d}(\mathcal{A}+tB) + \tfrac{1}{2}[\mathcal{A}+tB,\mathcal{A}+tB]\\
&= \mathrm{d}\mathcal{A} + t\,\mathrm{d}B + \tfrac{1}{2}[\mathcal{A},\mathcal{A}] + \tfrac{t}{2}([\mathcal{A},B]+[B,\mathcal{A}]) + \tfrac{t^2}{2}[B,B]\\
&= \mathcal{F} + t\,(\mathrm{d}B + [\mathcal{A},B]) + \tfrac{t^2}{2}[B,B]\\
&= \mathcal{F} + t\mathcal{D}B + \tfrac{t^2}{2}[B,B],
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^t} &= R^{\nabla} + t\,\mathrm{d}^{\nabla}A + \tfrac{t^2}{2}[A,A]\\
&= R^{\nabla} + \mathrm{d}^{\nabla}(tA) + \tfrac{1}{2}[tA,tA]\\
&= R^{\nabla} + \mathrm{d}^{\nabla}A^t + \tfrac{1}{2}[A^t,A^t].
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.12. *A primeira variação do funcional de Yang-Mills é dada por*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathscr{Y}(\nabla^t) = \langle \delta^\nabla R^\nabla, A\rangle_{L^2},$$

onde $A := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\nabla^t$.

Demonstração. Assim como na proposição anterior, basta considerar famílias suaves de conexão da forma $\nabla^t = \nabla + tA$, para $A \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$. Pela equação (3.13) e um cálculo direto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathscr{Y}(\nabla^t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle R^{\nabla^t}, R^{\nabla^t}\rangle_{L^2}\\ &= \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}R^{\nabla^t}, R^\nabla\right\rangle_{L^2}\\ &= \langle \mathrm{d}^\nabla A, R^\nabla\rangle_{L^2}\\ &= \langle A, \delta^\nabla R^\nabla\rangle_{L^2}\\ &= \langle \delta^\nabla R^\nabla, A\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

□

Corolário 3.13. $\nabla \in \mathscr{C}_E$ *é uma conexão de Yang-Mills se, e somente se,* $\delta^\nabla R^\nabla = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.12, ∇ é ponto crítico de $\mathscr{Y}$ se, e somente se, $\langle \delta^\nabla R^\nabla, A\rangle_{L^2} = 0$ seja qual for $A \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$. Portanto ∇ é conexão de Yang-Mills se, e somente se, $\delta^\nabla R^\nabla = 0$. □

Definiremos agora dois novos operadores. O primeiro, chamado *Laplaciano Hodge-deRham generalizado*, é definido pela expressão

$$\Delta^\nabla := \mathrm{d}^\nabla\delta^\nabla + \delta^\nabla\mathrm{d}^\nabla : \Omega^p(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^p(\mathfrak{g}_E). \tag{3.14}$$

Diremos que uma forma $\phi \in \Omega^p(\mathfrak{g}_E)$ é *harmônica* se $\Delta^\nabla\phi = 0$. Note que com essa definição, se ∇ é conexão de Yang-Mills, segue do fato de que $\mathrm{d}^\nabla R^\nabla = 0 = \delta^\nabla R^\nabla$ que $\Delta^\nabla R^\nabla = 0$ e assim as conexões de Yang-Mills são aquelas que possuem curvatura harmônica.

O segundo operador, chamado *Laplaciano covariante*, é dado por

$$\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\phi := -\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{\nabla}^2_{e_j,e_j}\phi\right), \tag{3.15}$$

onde

$$\overline{\nabla}^2_{X,Y} := \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y - \overline{\nabla}_{D_XY} \tag{3.16}$$

Definimos $\overline{\nabla}^*$ sendo a L^2-adjunta de $\overline{\nabla}$. Observamos que $\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}$ é não-negativo e simétrico, isto é

$$\langle\phi, \overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\phi\rangle_{L^2} = \langle\overline{\nabla}\phi, \overline{\nabla}\phi\rangle_{L^2} = \|\overline{\nabla}\phi\|^2_{L^2} \geq 0$$

e

$$\langle\psi, \overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\phi\rangle_{L^2} = \langle\overline{\nabla}\psi, \overline{\nabla}\phi\rangle_{L^2} = \langle\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\psi, \phi\rangle_{L^2},$$

respectivamente. Além disso $\ker(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla})$ é o espaço das formas paralelas, ou seja

$$\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\phi = 0 \iff \|\overline{\nabla}\phi\|_{L^2} = 0 \iff \overline{\nabla}\phi = 0.$$

Observação 3.14. É possível mostrar que existe um isomorfismo de fibrado $\bigwedge^2 E \cong \mathfrak{so}_E$ determinado por

$$(u \wedge v)(w) = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u, \quad \forall u, v, w \in E_x,\ \forall x \in M. \tag{3.17}$$

Tal isomorfismo será muito importante na Seção 3.2.

3.2 Fórmulas de Bochner-Weitzenböck

Nesta seção faremos uma relação entre os operadores Δ^∇ e $\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}$ para p-formas com valores em $\mathfrak{g}_E$ para $p = 1, 2$.

Vamos ao caso $p = 1$. Seja $\varphi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ e defina o operador de ordem zero $\mathfrak{R}^\nabla : \Omega^1(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ por

$$\mathfrak{R}^\nabla(\varphi)_X := \sum_{j=1}^{n} [R^\nabla_{e_j,X}, \varphi(e_j)], \tag{3.18}$$

onde R^∇ é a curvatura da conexão ∇ em E, $X \in T_xM$ e $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base ortonormal de T_xM.

Considere a transformação de Ricci $\mathrm{Ric}\colon T_xM \to T_xM$ definida por

$$\mathrm{Ric}(X) := \sum_{j=1}^{n} R_{X,e_j} e_j, \tag{3.19}$$

onde R representa o tensor de curvatura riemanniano associado à conexão de Levi-Civita D. Seja $\varphi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ e defina

$$(\varphi \circ \mathrm{Ric})(X) := \varphi(\mathrm{Ric}(X)). \tag{3.20}$$

Vamos usar o seguinte fato nos próximos resultados.

Proposição 3.15. *Para a esfera S^n temos* $\mathrm{Ric}(X) = (n-1)X$.

Demonstração. Seja $\mathrm{N}\colon S^n \to S^n$ dado por $\mathrm{N}(p) = p$. Note que $\mathrm{d}\mathrm{N}_p = \mathrm{id}$. Para cada $p \in S^n$, a segunda forma fundamental é

$$\mathrm{II}(X,Y)_p = -\langle \mathrm{d}\mathrm{N}_p(X), Y\rangle_p \mathrm{N}(p).$$

Pela equação de Gauss vemos

$$\begin{aligned}
\langle R_{X,Y}Z, W\rangle &= \langle \mathrm{II}(X,W), \mathrm{II}(Y,Z)\rangle - \langle \mathrm{II}(X,Z), \mathrm{II}(Y,W)\rangle \\
&= \langle \langle X,W\rangle \mathrm{N}, \langle Y,Z\rangle \mathrm{N}\rangle - \langle \langle X,Z\rangle \mathrm{N}, \langle Y,W\rangle \mathrm{N}\rangle \\
&= (\langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle \langle Y,W\rangle)\langle \mathrm{N},\mathrm{N}\rangle \\
&= \langle \langle Y,Z\rangle X, W\rangle - \langle \langle X,Z\rangle Y, W\rangle \\
&= \langle \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y, W\rangle, \qquad \forall X,Y,Z,W \in T_pS^n.
\end{aligned}$$

Segue que

$$R_{X,Y}Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y. \tag{3.21}$$

Usando a definição da transformação de Ric

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X) &= \sum_{j=1}^{n} R_{X,e_j}e_j = \sum_{j=1}^{n} \big(\langle e_j, e_j\rangle X - \langle X, e_j\rangle e_j\big) \\ &= nX - \sum_{j=1}^{n} X_j e_j = (n-1)X, \end{aligned} \tag{3.22}$$

como afirmado. $\square$

Teorema 3.16. *Para toda $\varphi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$, temos*

$$\Delta^{\nabla}\varphi = \overline{\nabla}^{*}\overline{\nabla}\varphi + \varphi\circ\mathrm{Ric} + \mathfrak{R}^{\nabla}(\varphi). \tag{3.23}$$

Demonstração. Seja $x \in M$ e tome $X, e_1, \ldots, e_n \in T_xM$ tal que $(e_1, \ldots, e_n)$ é base ortonormal de T_xM. Podemos estender localmente X a um campo de vetores e $(e_1, \ldots, e_n)$ a um campo referencial ortonormal de modo que $DX(x) = De_1(x) = \cdots = De_n(x) = 0$, onde D é a conexão de Levi-Civita em TM. Tome $\varphi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$. Pelas igualdades (3.5), (3.6) e (3.16) temos

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}^{\nabla}\delta^{\nabla}\varphi)(X) &= -\overline{\nabla}_X\left(\sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(e_j)\right) \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(e_j) \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\Big((\overline{\nabla}^2_{X,e_j}\varphi)(e_j) + (\overline{\nabla}_{D_Xe_j}\varphi)(e_j)\Big) \\ &= -\sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}^2_{X,e_j}\varphi)(e_j), \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde usamos que $D_Xe_j(x) = 0$. Por outro lado

$$\begin{aligned} (\delta^{\nabla}\mathrm{d}^{\nabla})(X) &= -\sum_{j=1}^{n}\overline{\nabla}_{e_j}\Big((\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(X) - (\overline{\nabla}_X\varphi)(e_j)\Big) \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\Big((\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(X) - (\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_X\varphi)(e_j)\Big) \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\Big((\overline{\nabla}^2_{e_j,e_j}\varphi)(X) + (\overline{\nabla}_{D_{e_j}e_j}\varphi)(X) - (\overline{\nabla}^2_{e_j,X}\varphi)(e_j) - (\overline{\nabla}_{D_{e_j}X}\varphi)(e_j)\Big) \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\Big((\overline{\nabla}^2_{e_j,e_j}\varphi)(X) - (\overline{\nabla}^2_{e_j,X}\varphi)(e_j)\Big) \\ &= (\overline{\nabla}^{*}\overline{\nabla}\varphi)(X) + \sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}^2_{e_j,X}\varphi)(e_j), \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde novamente usamos as igualdades (3.5), (3.6), (3.16) e que $DX(x) = 0 = De_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Note que, para $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}[X,e_j]f &= X(e_j(f)) - e_j(X(f)) \\ &= \sum_i^n \left(X_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} - X_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= -\left(\sum_i^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.\end{aligned}$$

Visto que

$$0 = D_{e_j} X = D_{e_j}\left(\sum_{i=1}^n X_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} e_i + D_{e_j} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} e_i,$$

segue que $\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = 0,\ i = 1,\dots,n$ e portanto $[X,e_j] = 0$, para todo $j = 1,\dots,n$. Note que com isso

$$R^{\overline{\nabla}}_{e_j,X} = \overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_X - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_{e_j} - \overline{\nabla}_{[e_j,X]} = \overline{\nabla}^2_{e_j,X} - \overline{\nabla}^2_{X,e_j}. \tag{3.26}$$

Combinando as igualdades (3.24) e (3.25) com as observações acima vem

$$(\Delta^\nabla \varphi)(X) = (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X) + \sum_{j=1}^n (R^{\overline{\nabla}}_{e_j,X}\varphi)(e_j). \tag{3.27}$$

Lembre-se que, como $\varphi(Z) \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$, então por (3.8)

$$R^{\overline{\nabla}}_{X,Y}(\varphi(Z)) = [R^{\nabla}_{X,Y}, \varphi(Z)].$$

Além disso, R^{∇} age como derivação e assim satisfaz a regra de Leibniz

$$R^{\overline{\nabla}}_{X,Y}(\varphi(Z)) = (R^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\varphi)(Z) + \varphi(R_{X,Y}Z).$$

Portanto, temos a relação

$$(R^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\varphi)(Z) = [R^{\nabla}_{X,Y}, \varphi(Z)] - \varphi(R_{X,Y}Z). \tag{3.28}$$

Usando (3.28) em (3.27)

$$\begin{aligned}(\Delta^\nabla \varphi)(X) &= (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X) + \sum_{j=1}^n \Big([R^{\nabla}_{e_j,X}, \varphi(e_j)] - \varphi(R_{e_j,X}e_j) \Big) \\ &= (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X) + \mathfrak{R}^\nabla(\varphi)_X + \varphi(\sum_{j=1}^n R_{X,e_j}e_j) \\ &= (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X) + \mathfrak{R}^\nabla(\varphi)_X + \varphi \circ \mathrm{Ric}(X),\end{aligned}$$

onde foram usadas as definições (3.18), (3.19) e (3.20). Pela arbitrariedade de $x \in M$ e $X \in T_xM$ segue o afirmado. □

Corolário 3.17. *Se $\varphi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ é harmônica com relação à ∇ na esfera unitária S^n, então*

$$\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi = -(n-1)\varphi - \mathfrak{R}^\nabla(\varphi).$$

Demonstração. Sendo φ harmônica, vale $\Delta^{\nabla}\varphi = 0$. Do Teorema 3.16 e da expressão (3.22) temos, para todo $x \in M$ e $X \in T_xM$

$$0 = (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X) + \varphi \circ ((n-1)X) + \mathfrak{R}^{\nabla}(\varphi)_X,$$

i.e.,

$$(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X) = -(n-1)\varphi(X) - \mathfrak{R}^{\nabla}(\varphi)_X. \qquad \square$$

Faremos agora o caso para $p = 2$. Seja $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ e defina o seguinte operador de ordem zero $\mathfrak{R}^{\nabla} \colon \Omega^2(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ por

$$\mathfrak{R}^{\nabla}(\varphi)_{X,Y} := \sum_{j=1}^{n} \left([R^{\nabla}_{e_j,X}, \varphi(e_j,Y)] - [R^{\nabla}_{e_j,Y}, \varphi(e_j,X)] \right). \tag{3.29}$$

Seja $\omega \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{End}(TM)$ linear nas duas entradas. Definimos

$$(\varphi \circ \omega)(X,Y) := \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j, \omega(X,Y)e_j). \tag{3.30}$$

Pela Observação 3.14 temos que $\bigwedge^2 TM \cong \mathfrak{so}_{TM}$. Assim podemos ver $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ como um mapa linear $\varphi \colon \bigwedge^2 TM \to \mathfrak{g}_E$ definido por

$$\varphi(X \wedge Y) := \varphi(X,Y). \tag{3.31}$$

Usando a transformação de Ricci (3.19) definimos $\mathrm{Ric} \wedge \mathrm{id} \colon \bigwedge^2 TM \to \bigwedge^2 TM$

$$(\mathrm{Ric} \wedge \mathrm{id})(X,Y) := \mathrm{Ric}(X) \wedge Y + X \wedge \mathrm{Ric}(Y). \tag{3.32}$$

Usando a condição (3.17) e as igualdades (3.30) e (3.32) obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi \circ (\mathrm{Ric} \wedge \mathrm{id})(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j, (\mathrm{Ric} \wedge \mathrm{id})(X,Y)e_j) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j, (\mathrm{Ric}(X) \wedge Y + X \wedge \mathrm{Ric}(Y))e_j) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \{\varphi(e_j, (\mathrm{Ric}(X) \wedge Y)e_j) + \varphi(e_j, X \wedge \mathrm{Ric}(Y)e_j)\} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j, (\mathrm{Ric}(X) \wedge Y)e_j) + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j, X \wedge \mathrm{Ric}(Y)e_j) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j, \langle \mathrm{Ric}(X), e_j\rangle Y - \langle Y, e_j\rangle \mathrm{Ric}(X)) \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j, \langle X, e_j\rangle \mathrm{Ric}(Y) - \langle \mathrm{Ric}(Y), e_j\rangle X) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \{\varphi(e_j, \langle \mathrm{Ric}(X), e_j\rangle Y) - \varphi(e_j, \langle Y, e_j\rangle \mathrm{Ric}(X))\} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \{\varphi(e_j, \langle X, e_j\rangle \mathrm{Ric}(Y)) - \varphi(e_j, \langle \mathrm{Ric}(Y), e_j\rangle X)\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\{\varphi(\langle \mathrm{Ric}(X),e_j\rangle e_j,Y)-\varphi(\langle Y,e_j\rangle e_j,\mathrm{Ric}(X))\}\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\{\varphi(\langle X,e_j\rangle e_j,\mathrm{Ric}(Y))-\varphi(\langle \mathrm{Ric}(Y),e_j\rangle e_j,X)\}\\
&= \tfrac{1}{2}\left\{\varphi(\sum_{j=1}^{n}\langle \mathrm{Ric}(X),e_j\rangle e_j,Y)-\varphi(\sum_{j=1}^{n}\langle Y,e_j\rangle e_j,\mathrm{Ric}(X))\right\}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left\{\varphi(\sum_{j=1}^{n}\langle X,e_j\rangle e_j,\mathrm{Ric}(Y))-\varphi(\sum_{j=1}^{n}\langle \mathrm{Ric}(Y),e_j\rangle e_j,X)\right\}\\
&= \tfrac{1}{2}\{\varphi(\mathrm{Ric}(X),Y)-\varphi(Y,\mathrm{Ric}(X))\}\\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\{\varphi(X,\mathrm{Ric}(Y))-\varphi(\mathrm{Ric}(Y),X)\}\\
&= \varphi(\mathrm{Ric}(X),Y)+\varphi(X,\mathrm{Ric}(Y)),
\end{aligned}
$$

onde notamos que $\varphi(X,Y)=-\varphi(Y,X)$. Em suma

$$
\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge\mathrm{id})(X,Y)=\varphi(\mathrm{Ric}(X),Y)+\varphi(X,\mathrm{Ric}(Y)). \tag{3.33}
$$

Teorema 3.18. *Para toda $\varphi\in\Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ vale*

$$
\Delta^{\nabla}\varphi=\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi+\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge\mathrm{id}+2R)+\mathfrak{R}^{\nabla}(\varphi).
$$

Demonstração. Fixe $x\in M$ e tome $X,Y,e_1,\dots,e_n\in T_xM$, onde $(e_1,\dots,e_n)$ é base ortonormal de T_xM. Estenda localmente X,Y a campos de vetores e $(e_1,\dots,e_n)$ a um campo referencial ortonormal de forma que $DX(x)=DY(x)=De_1(x)=\cdots=De_n(x)=0$. Usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.16, temos, em $x\in M$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}^{\nabla}\delta^{\nabla}\varphi)(X,Y) &= (\overline{\nabla}_X\delta^{\nabla}\varphi)(Y)-(\overline{\nabla}_Y\delta^{\nabla}\varphi)(X)\\
&= -\overline{\nabla}_X\left(\sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(e_j,Y)\right)+\overline{\nabla}_Y\left(\sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(e_j,X)\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\left\{(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(e_j,Y)-(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(e_j,X)\right\}\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\left\{(\overline{\nabla}^2_{X,e_j}\varphi)(e_j,Y)-(\overline{\nabla}^2_{Y,e_j}\varphi)(e_j,X)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
(\delta^{\nabla}\mathrm{d}^{\nabla}\varphi)(X,Y) &= -\sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}_{e_j}\mathrm{d}^{\nabla}\varphi)(e_j,X,Y)\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\overline{\nabla}_{e_j}\left\{(\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(X,Y)-(\overline{\nabla}_X\varphi)(e_j,Y)+(\overline{\nabla}_Y\varphi)(e_j,X)\right\}\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\left\{(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(X,Y)-(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_X\varphi)(e_j,Y)+(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{\nabla}_Y\varphi)(e_j,X)\right\}\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\left\{(\overline{\nabla}^2_{e_j,e_j}\varphi)(X,Y)-(\overline{\nabla}^2_{e_j,X}\varphi)(e_j,Y)+(\overline{\nabla}^2_{e_j,Y}\varphi)(e_j,X)\right\}.
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

Somando (3.34) e (3.35) e usando a relação (3.26)

$$\begin{aligned}(\Delta^{\nabla}\varphi)(X,Y) = &-\sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}^2_{e_j,e_j}\varphi)(X,Y)+\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{\nabla}^2_{e_j,X}\varphi-\overline{\nabla}^2_{X,e_j}\varphi\right)(e_j,Y)\\ &-\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{\nabla}^2_{e_j,Y}\varphi-\overline{\nabla}^2_{Y,e_j}\varphi\right)(e_j,X)\\ =&(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X,Y)+\sum_{j=1}^{n}\left\{(R^{\overline{\nabla}}_{e_j,X}\varphi)(e_j,Y)-(R^{\overline{\nabla}}_{e_j,Y}\varphi)(e_j,X)\right\}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Como $\varphi(Z,W)\in\Omega^0(\mathfrak{g}_E)$, por 3.8 vale

$$R^{\nabla}_{X,Y}(\varphi(Z,W))=[R^{\nabla}_{X,Y},\varphi(Z,W)],$$

e visto que R^{∇} age como derivação, temos a seguinte regra de Leibiniz

$$R^{\nabla}_{X,Y}(\varphi(Z,W))=(R^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\varphi)(Z,W)+\varphi(R_{X,Y}Z,W)+\varphi(Z,R_{X,Y}W),$$

obtemos então

$$(R^{\overline{\nabla}}_{X,Y}\varphi)(Z,W)=[R^{\nabla}_{X,Y},\varphi(Z,W)]-\varphi(R_{X,Y}Z,W)-\varphi(Z,R_{X,Y}W). \tag{3.37}$$

Usando (3.37) em (3.36)

$$\begin{aligned}(\Delta^{\nabla}\varphi)(X,Y)=&(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X,Y)+\sum_{j=1}^{n}\left\{[R^{\nabla}_{e_j,X},\varphi(e_j,Y)]-\varphi(R_{e_j,X}e_j,Y)-\varphi(e_j,R_{e_j,X}Y)\right\}\\ &-\sum_{j=1}^{n}\left\{[R^{\nabla}_{e_j,Y},\varphi(e_j,X)]-\varphi(R_{e_j,Y}e_j,X)-\varphi(e_j,R_{e_j,Y}X)\right\}\\ =&(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X,Y)+\sum_{j=1}^{n}\left\{[R^{\nabla}_{e_j,X},\varphi(e_j,Y)]-[R^{\nabla}_{e_j,Y},\varphi(e_j,X)]\right\}\\ &+\varphi(\sum_{j=1}^{n}R_{X,e_j}e_j,Y)-\varphi(\sum_{j=1}^{n}R_{Y,e_j}e_j,X)+\sum_{j=1}^{n}\varphi(e_j,R_{e_j,Y}X-R_{e_j,X}Y)\\ =&(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X,Y)+\mathfrak{R}(\varphi)_{X,Y}+\varphi(\mathrm{Ric}(X),Y)\\ &-\varphi(\mathrm{Ric}(Y),X)+\sum_{j=1}^{n}\varphi(e_j,R_{X,Y}e_j)\\ =&(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X,Y)+\mathfrak{R}(\varphi)_{X,Y}+\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge\mathrm{id})(X,Y)+2(\varphi\circ R)(X,Y)\\ =&(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X,Y)+\mathfrak{R}(\varphi)_{X,Y}+\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge\mathrm{id}+2R)(X,Y),\end{aligned}$$

onde fizemos uso da identidade de Bianchi

$$R_{X,Y}Z+R_{Y,Z}X+R_{Z,X}Y=0$$

e das equações (3.29), (3.30) e (3.33). Como $x\in M$ e $X,Y\in T_xM$ foram tomados arbitrariamente, segue o resultado. □

Corolário 3.19. *Se $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ é harmônica com relação à ∇ na esfera unitária S^n, então*

$$\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi = -2(n-2)\varphi - \mathfrak{R}^\nabla(\varphi).$$

Demonstração. Pela equação (3.21) e considerando a identificação (3.17) temos

$$R_{X,Y}Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y = -(X\wedge Y)(Z).$$

Assim, por (3.22) temos

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ric}\wedge \mathrm{id}+2R)(X,Y) &= (\mathrm{Ric}\wedge \mathrm{id})(X,Y)+2R_{X,Y}\\ &= \mathrm{Ric}(X)\wedge Y + X\wedge \mathrm{Ric}(Y) - 2X\wedge Y\\ &= (n-1)X\wedge Y + X\wedge (n-1)Y - 2X\wedge Y\\ &= 2(n-2)X\wedge Y.\end{aligned}$$

Usando a identificação (3.31), vemos que

$$\begin{aligned}\varphi\circ(\mathrm{Ric}\wedge \mathrm{id}+2R)(X,Y) &= \varphi(2(n-2)X\wedge Y)\\ &= 2(n-2)\varphi(X\wedge Y)\\ &= 2(n-2)\varphi(X,Y).\end{aligned} \tag{3.38}$$

Usando que $\Delta^\nabla\varphi = 0$ e a igualdade (3.38) no Teorema 3.18 vemos que

$$(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(X,Y) = -2(n-2)\varphi(X,Y) - \mathfrak{R}^\nabla(\varphi)_{X,Y}.$$

□

3.3 A segunda variação do funcional de Yang-Mills

Teorema 3.20. *Suponha que ∇ seja uma conexão de Yang-Mills. Então a segunda variação do funcional de Yang-Mills é dada por*

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0}\mathscr{Y}(\nabla^t) = \int_M \langle \delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla B + \mathfrak{R}^\nabla(B), B\rangle\, \mathrm{d}V_M,$$

onde $B = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\nabla^t$.

Demonstração. Considere a família de conexões $\nabla^t = \nabla + tB$, onde $B\in\Omega^1(\mathfrak{g}_E)$. Sabemos da Proposição 3.11 que $R^{\nabla^t} = R^\nabla + t\,\mathrm{d}^\nabla B + \frac{t^2}{2}[B,B]$. Temos

$$\begin{aligned}\|R^{\nabla^t}\|^2_{L^2} = \langle R^\nabla, R^\nabla\rangle_{L^2} &+ 2t\langle R^\nabla, \mathrm{d}^\nabla B\rangle_{L^2} + t^2\langle R^\nabla, [B,B]\rangle_{L^2}\\ &+ t^2\langle \mathrm{d}^\nabla B, \mathrm{d}^\nabla B\rangle_{L^2} + t^3\langle \mathrm{d}^\nabla B, [B,B]\rangle_{L^2} + \tfrac{t^4}{4}\langle [B,B],[B,B]\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Visto que ∇ é de Yang-Mills e daí $\delta^\nabla R^\nabla = 0$, então $\langle R^\nabla, \mathrm{d}^\nabla B\rangle_{L^2} = \langle \delta^\nabla R^\nabla, B\rangle_{L^2} = 0$. Um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0}\mathscr{Y}(\nabla^t) &= \frac{1}{2}\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0}\|R^{\nabla^t}\|^2_{L^2}\\ &= \langle R^\nabla, [B,B]\rangle_{L^2} + \langle \mathrm{d}^\nabla B, \mathrm{d}^\nabla B\rangle_{L^2}\\ &= \langle R^\nabla, [B,B]\rangle_{L^2} + \langle \delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla B, B\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Por outro lado temos que pontualmente

$$\begin{aligned}\langle [B,B],R^\nabla\rangle &= \sum_{i<j}\langle [B,B](e_i,e_j),R^\nabla_{e_i,e_j}\rangle\\ &= \sum_{i<j}\langle [B(e_i),B(e_j)]-[B(e_j),B(e_i)],R^\nabla_{e_i,e_j}\rangle\\ &= \sum_{i<j}\langle 2[B(e_i),B(e_j)],R^\nabla_{e_i,e_j}\rangle\\ &= \sum_{i,j}\langle [B(e_i),B(e_j)],R^\nabla_{e_i,e_j}\rangle.\end{aligned}$$

Visto que

$$\begin{aligned}\langle [B(e_i),B(e_j)],R^\nabla_{e_i,e_j}\rangle &= \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}([B(e_i),B(e_j)]^T R^\nabla_{e_i,e_j})\\ &= -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}([B(e_i),B(e_j)]R^\nabla_{e_i,e_j})\\ &= -\tfrac{1}{2}\{\operatorname{tr}(B(e_i)B(e_j)R^\nabla_{e_i,e_j})-\operatorname{tr}(B(e_j)B(e_i)R^\nabla_{e_i,e_j})\}\\ &= -\tfrac{1}{2}\{\operatorname{tr}(B(e_i)B(e_j)R^\nabla_{e_i,e_j})-\operatorname{tr}(B(e_i)R^\nabla_{e_i,e_j}B(e_j))\}\\ &= -\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(B(e_i)[B(e_j),R^\nabla_{e_i,e_j}])\\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(B(e_i)^T[B(e_j),R^\nabla_{e_i,e_j}])\\ &= \langle B(e_i),[B(e_j),R^\nabla_{e_i,e_j}]\rangle\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\langle [B,B],R^\nabla\rangle &= \sum_{i,j}\langle B(e_i),[B(e_j),R^\nabla_{e_i,e_j}]\rangle\\ &= \sum_i\langle B(e_i),\sum_j[R^\nabla_{e_j,e_i},B(e_j)]\rangle\\ &= \sum_i\langle B(e_i),\mathfrak{R}^\nabla(B)_{e_i}\rangle\\ &= \langle B,\mathfrak{R}^\nabla(B)\rangle.\end{aligned}$$

Concluímos disso que

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathscr{Y}(\nabla^t) &= \langle \mathfrak{R}^\nabla(B),B\rangle_{L^2}+\langle \delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla B,B\rangle_{L^2}\\ &= \langle \delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla B+\mathfrak{R}^\nabla(B),B\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

□

Os próximos dois resultados são consequências imediatas do Teorema 3.20 e do Teorema 3.16.

Teorema 3.21. *Suponha que ∇ seja uma conexão de Yang-Mills e que $\delta^\nabla B=0$, onde $B=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\nabla^t$. Então*

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathscr{Y}(\nabla^t)=\int_M\langle \mathscr{S}^\nabla(B),B\rangle\,\mathrm{d}V_M,$$

onde definimos

$$\mathscr{S}^\nabla(B):=\Delta^\nabla B+\mathfrak{R}^\nabla(B)=\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}B+B\circ\operatorname{Ric}+2\mathfrak{R}^\nabla(B).$$

Corolário 3.22. *Supondo as hipóteses do Teorema 3.21 e que* $\mathrm{Ric} = k \cdot \mathrm{id}$, *onde k é uma constante, então*

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathscr{Y}(\nabla^t) = \int_M \langle \overline{\nabla}^*\overline{\nabla} B + kB + 2\mathfrak{R}^\nabla(B), B\rangle \, \mathrm{d}V_M.$$

Note que na definição do operador $\mathscr{S}^\nabla$ o termo de maior ordem é relacionado ao do operador $\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}$ (lembre-se que $\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}$ é não-negativo), logo $\mathscr{S}^\nabla$ é elíptico. Além disso $\mathscr{S}^\nabla$ é auto-adjunto (pela definição de $\mathscr{S}^\nabla$, basta mostrar que $\langle \mathfrak{R}^\nabla(A), B\rangle_{L^2} = \langle A, \mathfrak{R}^\nabla(B)\rangle_{L^2}$, para cada $A, B \in \ker \delta^\nabla$, que segue por um cálculo análogo ao usado na demonstração do Teorema 3.20). Pelo Teorema Espectral aplicado ao resolvente de $\mathscr{S}^\nabla$, segue que a restrição de $\mathscr{S}^\nabla$ ao subespaço $\ker(\delta^\nabla) \subset \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ possui autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$, os quais estão associados a autoespaços E_{λ_i} de dimensão finita.

Definição 3.23. O *índice* e a *nulidade* de uma conexão de Yang-Mills ∇ são definidas, respectivamente, por

$$i(\nabla) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda<0} E_\lambda\right) \qquad \text{e} \qquad n(\nabla) = \dim(E_0).$$

Definição 3.24. Seja ∇ uma conexão de Yang-Mills. Dizemos que ∇ é *estável* se $i(\nabla) = n(\nabla) = 0$, i.e., se

$$\langle \mathscr{S}^\nabla(B), B\rangle_{L^2} > 0,$$

para qualquer $B \in \ker(\delta^\nabla)$ com $B \neq 0$. Dizemos que ∇ é *fracamente estável* quando $i(\nabla) = 0$, i.e.

$$\langle \mathscr{S}^\nabla(B), B\rangle_{L^2} \geq 0,$$

para qualquer $B \in \ker(\delta^\nabla)$.

3.4 Resultados sobre estabilidade

Definição 3.25. Dizemos que $V \in \mathfrak{X}(M)$ é do *tipo gradiente* se

$$\langle D_X V, Y\rangle = \langle D_Y V, X\rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

onde D é a conexão de Levi-Civita em M.

Proposição 3.26. *Seja* $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ *tal que* $\delta^\nabla \varphi = 0$. *Dado* $V \in \mathfrak{X}(M)$ *do tipo gradiente, considere a contração* $B := i_V \varphi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$. *Então* $\delta^\nabla B = 0$.

Demonstração. Fixe $x \in M$ e seja $(e_1, \ldots, e_n)$ um referencial local ortonormal tal que $De_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Escrevendo $D_{e_i} V = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ vemos que

$$\langle D_{e_i} V, e_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ik}\langle e_k, e_j\rangle = a_{ij}.$$

Analogamente temos $\langle D_{e_j}V, e_i\rangle = a_{ji}$. Usando que V é do tipo gradiente segue que $a_{ij} = a_{ji}$. Por (3.6) aplicado à B

$$\begin{aligned}
\delta^\nabla B &= -\sum_{j=1}^{n} (\overline{\nabla}_{e_j} B)e_j \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \left\{ \nabla_{e_j}(B(e_j)) - B(D_{e_j}e_j) \right\} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \nabla_{e_j}(i_V\varphi(e_j)) \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \left\{ (\overline{\nabla}_{e_j}\varphi)(V,e_j) + \varphi(D_{e_j}V,e_j) + \varphi(V,D_{e_j}e_j) \right\} \\
&= -(\delta^\nabla\varphi)(V) - \sum_{j=1}^{n} \varphi(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}e_i, e_j) \\
&= -\sum_{i,j} a_{ij}\varphi(e_i,e_j) = 0,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\delta^\nabla\varphi = 0$, $a_{ij} = a_{ji}$ e $\varphi(e_i,e_j) = -\varphi(e_j,e_i)$. $\square$

A partir daqui estaremos restritos ao caso em que $M = S^n$ com a métrica usual. Considere o seguinte espaço de campos vetoriais de dimensão finita sobre S^n

$$\mathscr{V} := \{\operatorname{grad} f\colon\ f = F_{|S^n} \text{ e } F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \text{ é linear}\}.$$

Dado $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ podemos definir o campo de vetores

$$V(x) := v - \langle v,x\rangle x, \quad \forall x \in S^n.$$

Seja $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \langle v,x\rangle$. Note que $\langle \operatorname{grad} F, w\rangle = w(F) = \langle v,w\rangle$ para todo $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ e portanto $\operatorname{grad} F = v$. Seja $f = F_{|S^n}$ e denote a métrica em S^n por g. Como $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é subvariedade, temos, para todo $w \in T_xS^n$

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}(\operatorname{grad} f, w) = w(f) = w(F_{|S^n}) = w(F) &= \langle \operatorname{grad} F, w\rangle \\
&= \langle (\operatorname{grad} F)^T + (\operatorname{grad} F)^\perp, w\rangle \\
&= \langle (\operatorname{grad} F)^T, w\rangle \\
&= \mathrm{g}((\operatorname{grad} F)^T, w),
\end{aligned}$$

onde $(\operatorname{grad} F)^T \in T_xS^n$ e $(\operatorname{grad} F)^\perp \perp T_xS^n$. Logo $\operatorname{grad} f = (\operatorname{grad} F)^T$. Projetando v em T_xS^n vemos que

$$\operatorname{grad} f(x) = (\operatorname{grad} F)^T(x) = v^T = v - \langle v,x\rangle x = V(x).$$

Essas observações definem um isomorfismo $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathscr{V}$.

Proposição 3.27. *Todo $V \in \mathscr{V}$ satisfaz* *(i)* $D_X V = -fX$,

(i) $D^* D V = V$,

onde D é a conexão de Levi-Civita da métrica usual em S^n e f é como acima.

Demonstração. Denote por D' a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{R}^{n+1}$. Temos

$$\begin{aligned}
D_X V &= (D'_X V)^T \\
&= (D'_X (v - \langle v, x\rangle x))^T \\
&= (D'_X v)^T - (D'_X(\langle v, x\rangle x))^T \\
&= -(X(\langle v, x\rangle)x + \langle v, x\rangle D'_X x)^T \\
&= -(\langle v, X\rangle x + f(x)X(x))^T \\
&= -(\langle v, X\rangle x + f(x)X)^T \\
&= -f(x)X,
\end{aligned}$$

onde observamos que $x \in (T_x S^n)^\perp$ e $X \in T_x S^n$. Daí temos $D_X V = -fX$, que prova (i).

Para mostrar a validade de (ii), considere $(e_1, \ldots, e_n)$ base ortonormal de $T_x S^n$ e estenda a um referencial local ortonormal tal que $De_i(x) = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Por definição temos

$$D^* D V = -\sum_{j=1}^{n} D^2_{e_j, e_j} V = -\sum_{j=1}^{n} (D_{e_j} D_{e_j} V - D_{D_{e_j} e_j} V) = -\sum_{j=1}^{n} D_{e_j} D_{e_j} V.$$

Fazendo uso do item (i)

$$\begin{aligned}
D^* D V = \sum_{j=1}^{n} D_{e_j}(f e_j) &= \sum_{j=1}^{n} (e_j(f) e_j + f D_{e_j} e_j) = \sum_{j=1}^{n} e_j(\langle v, x\rangle) e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle v, e_j\rangle e_j = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j = v^T = V.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.28. *Seja $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ harmônica, ou seja, $\mathrm{d}^\nabla \varphi = \delta^\nabla \varphi = 0$. Defina a forma quadrática Q_φ em $\mathscr{V}$ associada à φ por*

$$Q_\varphi(V) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathscr{Y}(\nabla^t),$$

onde $\nabla^t = \nabla + t(i_V \varphi)$. Então

$$\mathrm{tr}(Q_\varphi) = 2(4-n) \int_{S^n} \|\varphi\|^2 \, \mathrm{d}V_{S^n}.$$

Demonstração. Sejam $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ como no enunciado e $V \in \mathscr{V}$. Pelo item (i) da Proposição 3.27, dados X, Y

$$\begin{aligned}
\langle D_X V, Y\rangle &= \langle -fX, Y\rangle = -f\langle X, Y\rangle \\
\langle D_Y V, X\rangle &= \langle -fY, X\rangle = -f\langle Y, X\rangle,
\end{aligned}$$

i.e., $V \in \mathscr{V}$ é do tipo gradiente. Pela Proposição 3.26 segue que $\delta^{\nabla}(i_V\varphi) = 0$, para todo $V \in \mathscr{V}$. Do Teorema 3.21 vem

$$Q_\varphi(V) = \int_{S^n} \langle \mathscr{S}^{\nabla}(i_V\varphi), i_V\varphi\rangle \,\mathrm{d}V_{S^n}$$

e portanto escrevemos

$$\operatorname{tr}(Q_\varphi) = \int_{S^n} \operatorname{tr}(q_\varphi)\,\mathrm{d}V_{S^n},$$

onde definimos $q_\varphi(V) := \langle \mathscr{S}^{\nabla}(i_V\varphi), i_V\varphi\rangle$. Fixemos $x \in S^n$ e seja $(e_1,\ldots,e_n)$ uma base ortonormal de T_xS^n. Considere $(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n)$ uma base ortonormal de $\mathscr{V}$ adaptada ao ponto $x \in S^n$ que, via o isomorfismo $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathscr{V}$, está em correspondência com a base ortonormal $(x, e_1,\ldots,e_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim temos as igualdades

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0(x) &= x - \langle x,x\rangle x = 0,\\
\varepsilon_j(x) &= e_j - \langle e_j,x\rangle x = e_j, \quad j = 1,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Note que $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ forma um referencial ortonormal local em uma vizinhança suficientemente pequena de x satisfazendo $D\varepsilon_j(x) = 0$. Considere $X = \sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j$. Então

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}(i_V\varphi))(X) &= -\sum_{j=1}^n (\overline{\nabla}^2_{\varepsilon_j,\varepsilon_j}(i_V\varphi))(X)\\
&= -\sum_{j=1}^n \left\{(\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}(i_V\varphi))(X) - (\overline{\nabla}_{D_{\varepsilon_j}\varepsilon_j}(i_V\varphi))(X)\right\}\\
&= -\sum_{j=1}^n \left\{\nabla_{\varepsilon_j}(\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}i_V\varphi)(X)) - (\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}i_V\varphi)(D_{\varepsilon_j}X)\right\}\\
&= -\sum_{j=1}^n \{\nabla_{\varepsilon_j}(\nabla_{\varepsilon_j}(i_V\varphi(X)) - i_V\varphi(D_{\varepsilon_j}X)) - \nabla_{\varepsilon_j}(i_V\varphi(D_{\varepsilon_j}X)) + i_V\varphi(D_{\varepsilon_j}D_{\varepsilon_j}X)\}\\
&= -\sum_{j=1}^n \{\nabla_{\varepsilon_j}\nabla_{\varepsilon_j}(\varphi(V,X)) - 2\nabla_{\varepsilon_j}(\varphi(V,D_{\varepsilon_j}X)) + \varphi(V,D_{\varepsilon_j}D_{\varepsilon_j}X)\}\\
&= -\sum_{j=1}^n \{\nabla_{\varepsilon_j}[(\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(V,X) + \varphi(D_{\varepsilon_j}V,X) + \varphi(V,D_{\varepsilon_j}X)]\\
&\qquad - 2[(\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(V,D_{\varepsilon_j}X) + \varphi(D_{\varepsilon_j}V,D_{\varepsilon_j}X) + \varphi(V,D_{\varepsilon_j}D_{\varepsilon_j}X)] + \varphi(V,D_{\varepsilon_j}D_{\varepsilon_j}X)\}\\
&= -\sum_{j=1}^n \{(\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(V,X) + (\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(D_{\varepsilon_j}V,X) + (\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(V,D_{\varepsilon_j}X) + (\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(D_{\varepsilon_j}V,X)\\
&\qquad + \varphi(D_{\varepsilon_j}D_{\varepsilon_j}V,X) + \varphi(D_{\varepsilon_j}V,D_{\varepsilon_j}X) + (\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(V,D_{\varepsilon_j}X) + \varphi(D_{\varepsilon_j}V,D_{\varepsilon_j}X)\\
&\qquad + \varphi(V,D_{\varepsilon_j}D_{\varepsilon_j}X) - 2(\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(V,D_{\varepsilon_j}X) - 2\varphi(D_{\varepsilon_j}V,D_{\varepsilon_j}X)\\
&\qquad - 2\varphi(V,D_{\varepsilon_j}D_{\varepsilon_j}X) + \varphi(V,D_{\varepsilon_j}D_{\varepsilon_j}X)\}\\
&= -\sum_{j=1}^n (\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(V,X) + 2(\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(D_{\varepsilon_j}V,X) + \varphi(D_\varepsilon D_\varepsilon V,X)\\
&= (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(V,X) - 2\sum_{j=1}^n (\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(D_{\varepsilon_j}V,X) + \varphi(D^*DV,X).
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 3.27 e que $\delta^{\nabla}\varphi = 0$ temos

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}(i_V\varphi))(X) &= (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(V,X) + 2f\sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}_{\varepsilon_j}\varphi)(\varepsilon_j,X) + \varphi(V,X) \\
&= (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(V,X) - 2f(\delta^{\nabla}\varphi)(X) + \varphi(V,X) \\
&= (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(V,X) + \varphi(V,X).
\end{aligned}$$

Já vimos que em S^n a transformação de Ricci é $\mathrm{Ric} = (n-1)\,\mathrm{id}$. Assim, pela definição de $\mathscr{S}^{\nabla}$ temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}^{\nabla}(i_V\varphi)(X) &= (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}i_V\varphi)(X) + (n-1)i_V\varphi(X) + 2\sum_{i=1}^{n}[R^{\nabla}_{e_i,X}, i_V\varphi(e_i)] \\
&= (\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(V,X) + n\varphi(V,X) + 2\sum_{i=1}^{n}[R^{\nabla}_{e_i,X}, i_V\varphi(e_i)].
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Pelo Corolário 3.19 sabemos que

$$(\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\varphi)(V,X) = -2(n-2)\varphi(V,X) - \sum_{i=1}^{n}\{[R^{\nabla}_{e_i,V}, \varphi(e_i,X)] - [R^{\nabla}_{e_i,X}, \varphi(e_i,V)]\}.$$

Disso segue que

$$\mathscr{S}^{\nabla}(i_V\varphi)(X) = (4-n)i_V\varphi(X) - \sum_{i=1}^{n}\{[R^{\nabla}_{e_i,X}, \varphi(e_i,V)] + [R^{\nabla}_{e_i,V}, \varphi(e_i,X)]\}. \tag{3.40}$$

Notando que em (3.40) o segundo termo é simétrico, enquanto φ é antissimétrica, temos que no ponto x, usando os valores de $\varepsilon_j(x)$, para $j = 0,\dots,n$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(q_\varphi) &= \sum_{j=0}^{n}\langle \mathscr{S}^{\nabla}(i_{\varepsilon_j}\varphi), i_{\varepsilon_j}\varphi\rangle \\
&= (4-n)\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle \varphi(\varepsilon_j,e_k), \varphi(\varepsilon_j,e_k)\rangle \\
&= 2(4-n)\sum_{1\le j<k\le n}\|\varphi(e_j,e_k)\|^2 \\
&= 2(4-n)\|\varphi\|^2,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Teorema 3.29 (J. Simons)**.** *Não existe campo de Yang-Mills fracamente estável em S^n para $n \geq 5$.*

Demonstração. Se ∇ é conexão de Yang-Mills, então R^{∇} é harmônica. Fazendo $\varphi = R^{\nabla}$ em (3.40) com $n \geq 5$, vemos que

$$\langle \mathscr{S}^{\nabla}(i_V R^{\nabla}), i_V R^{\nabla}\rangle_{L^2} = (4-n)\langle i_V R^{\nabla}, i_V R^{\nabla}\rangle_{L^2} < 0,$$

o que prova o afirmado. □

Observe que no caso $n=4$, um argumento similar ao usando no Teorema 3.29 nos dá que, para $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$

$$\langle \mathscr{S}^\nabla(i_V\varphi), i_V\varphi \rangle = 0.$$

Antes de enunciarmos e provarmos nosso último resultado, vejamos um

Lema 3.30. *Suponha que*

$$\tau(X,Y) = \sum_{j=1}^{4} [R^+_{e_j,X}, R^-_{e_j,Y}] = 0, \quad \forall x \in S^4, \forall X,Y \in T_xS^4,$$

onde $R^\pm := (R^\nabla)^\pm$ (conforme (A.5)). Então, para cada $x \in S^4$, vale

$$[R^+_{X,Y}, R^-_{Z,W}] = 0,$$

para quaisquer $X,Y,Z,W \in T_xS^4$. Além disso, se $\mathfrak{a}^\pm_x \subset (\mathfrak{g}_E)_x$ é a subálgebra de Lie gerada por $R^\pm_{X,Y}$, $X,Y \in T_xS^4$, então

$$[\mathfrak{a}^+_x, \mathfrak{a}^-_x] = 0.$$

Demonstração. Seja $(e_1,\ldots,e_4)$ base ortonormal de T_xS^4 e, por simplicidade, escreva $R^\pm_{ij} = R^\pm_{e_i,e_j}$. Defina, para $j,k = 1,\ldots,4$

$$C_{jk} := [R^+_{jk}, R^-_{jk}] = [-R^+_{kj}, -R^-_{kj}] = [R^+_{kj}, R^-_{kj}] = C_{kj}.$$

De $\tau = 0$, temos que $\sum_j C_{jk} = 0$, para cada $k = 1,\ldots,4$. Logo

$$\begin{aligned}
0 &= C_{11}+C_{21}+C_{31}+C_{41} = C_{12}+C_{13}+C_{14},\\
0 &= C_{12}+C_{22}+C_{32}+C_{42} = C_{12}+C_{23}+C_{24},\\
0 &= C_{13}+C_{23}+C_{33}+C_{43} = C_{13}+C_{23}+C_{34},\\
0 &= C_{14}+C_{24}+C_{34}+C_{44} = C_{14}+C_{24}+C_{34}.
\end{aligned}$$

Das identidades em (A.6) temos

$$\begin{aligned}
C_{12} &= [R^+_{12}, R^-_{12}] = [R^+_{34}, -R^-_{34}] = -[R^+_{34}, R^-_{34}] = -C_{34},\\
C_{13} &= [R^+_{13}, R^-_{13}] = [R^+_{42}, -R^-_{42}] = -[R^+_{42}, R^-_{42}] = -C_{24},\\
C_{14} &= [R^+_{14}, R^-_{14}] = [R^+_{23}, -R^-_{23}] = -[R^+_{23}, R^-_{23}] = -C_{23}.
\end{aligned}$$

Combinando as igualdades anteriores

$$C_{ij} = [R^+_{ij}, R^-_{ij}] = 0, \quad \forall i,j = 1,\ldots,4.$$

Ainda usando as identidades (A.6) vemos também que para i,j,k,l distintos entre si

$$[R^+_{ij}, R^-_{kl}] = [R^+_{ij}, -R^-_{ij}] = -C_{ij} = 0.$$

Para o caso $[R^+_{ij}, R^-_{ik}]$ com i, j, k distintos, faremos para $(i, j, k) = (1, 2, 3)$, pois o restante segue de maneira análoga. Observe que

$$0 = \tau_{23} = [R^+_{12}, R^-_{13}] + [R^+_{42}, R^-_{43}]$$

e

$$0 = \tau_{14} = [R^+_{21}, R^-_{24}] + [R^+_{31}, R^-_{34}] = -[R^+_{12}, R^-_{13}] + [R^+_{42}, R^-_{43}].$$

Logo $[R^+_{42}, R^-_{43}] = 0 = [R^+_{12}, R^-_{13}]$. □

Teorema 3.31. *Qualquer campo de Yang-Mills fracamente estável em S^4 com grupo de estrutura $G = \mathrm{SU}(2), \mathrm{SU}(3), \mathrm{U}(1)$ ou $\mathrm{U}(2)$ é auto-dual ou anti-auto-dual.*

Demonstração. Considere um campo de Yang-Mills fracamente estável como no enunciado. Seja a forma quadrática

$$\mathscr{I}(B,B) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathscr{Y}(\nabla^t),$$

onde $\nabla^t = \nabla + tB$, com $B \in \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$. Por hipótese sabemos que $\mathscr{I}(B,B) \geq 0$. Além disso, se $\mathscr{I}(B,B) = 0$ e $B \in \ker(\delta^\nabla)(i.e. \delta^\nabla B = 0)$, segue do Teorema 3.21 que

$$0 = \mathscr{I}(B,B) = \langle \mathscr{S}^\nabla(B), B \rangle_{L^2}.$$

Usando o fato que $\mathscr{S}^\nabla$ é auto-adjunto e elíptico, segue que seu resolvente é compacto. Pelo Teorema Espectral aplicado ao resolvente e a relação entre seus autovalores e os autovalores de $\mathscr{S}^\nabla$, dado $B \in \ker(\delta^\nabla)$, podemos escrever $B = \sum_j \alpha_j \xi_j$, onde $\{\xi_j\}_j$ é base ortonormal de $\ker(\delta^\nabla)$ formada de autovetores associados aos autovalores λ_j de $\mathscr{S}^\nabla$. Assim, se $B \neq 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \mathscr{S}^\nabla(B), B \rangle_{L^2} \\
&= \langle \mathscr{S}^\nabla(\sum_j \alpha_j \xi_j), \sum_i \alpha_i \xi_i \rangle_{L^2} \\
&= \langle \sum_j \alpha_j \mathscr{S}^\nabla(\xi_j), \sum_i \alpha_i \xi_i \rangle_{L^2} \\
&= \langle \sum_j \lambda_j \alpha_j \xi_j, \sum_i \alpha_i \xi_i \rangle_{L^2} \\
&= \sum_{i,j} \lambda_j \alpha_j \alpha_i \langle \xi_j, \xi_i \rangle_{L^2} \\
&= \sum_i \lambda_i \alpha_i^2,
\end{aligned}$$

o que implica que $\lambda_i = 0$, para todo i, ou seja, $\mathscr{S}^\nabla(B) = 0$. Como já vimos, segue do Teorema 3.28 que dada $\varphi \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ harmônica, então $\mathscr{I}(i_V\varphi, i_V\varphi) = Q_\varphi(V) = 0$, onde $V \in \mathscr{V}$. Disso e da discussão acima temos que $\mathscr{S}^\nabla(i_V\varphi) = 0$. Do fato de $R^\nabla \in \Omega^2(\mathfrak{g}_E)$ ser harmônica, da Proposição A.11 temos que $R^+ = (R^\nabla)^+$ e $R^- = (R^\nabla)^-$ também são e disso temos

$$\mathscr{S}^\nabla(i_V R^+) = 0 = \mathscr{S}^\nabla(i_V R^-), \quad \forall V \in \mathscr{V}.$$

Segue da equação (3.39) e de que $\mathscr{S}^{\nabla}(i_X R^+)(Y) = 0$ que

$$\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}R^+(X,Y) + 4R^+(X,Y) + 2\sum_{i=1}^{4}[R^+_{e_i,X}, R^+_{e_i,Y}] = -2\sum_{i=1}^{4}[R^+_{e_i,X}, R^-_{e_i,Y}]. \tag{3.41}$$

Note que o lado esquerdo de (3.41) é antissimétrico em X e Y. Por outro lado, o lado direito é simétrico. Para ver isso, seja $(e_1, \dots, e_4)$ base ortonormal de T_xS^4. Então

$$\sum_{j=1}^{4}[R^+_{e_j,e_1}, R^-_{e_j,e_2}] = [R^+_{e_3,e_1}, R^-_{e_3,e_2}] + [R^+_{e_4,e_1}, R^-_{e_4,e_2}]. \tag{3.42}$$

Usando as identidades (A.6), a equação (3.42) se escreve

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{4}[R^+_{e_j,e_1}, R^-_{e_j,e_2}] &= [R^+_{e_3,e_1}, R^-_{e_3,e_2}] + [R^+_{e_4,e_1}, R^-_{e_4,e_2}] \\
&= [-R^+_{e_4,e_2}, R^-_{e_1,e_4}] + [-R^+_{e_2,e_3}, -R^-_{e_1,e_3}] \\
&= [R^+_{e_4,e_2}, R^-_{e_4,e_1}] + [R^+_{e_3,e_2}, R^-_{e_3,e_1}] \\
&= \sum_{j=1}^{4}[R^+_{e_j,e_2}, R^-_{e_j,e_1}].
\end{aligned}$$

Os casos restantes são análogos. Por conta disso temos que

$$\tau(X,Y) := \sum_{j=1}^{4}[R^+_{e_j,X}, R^-_{e_j,Y}] = 0, \quad \forall x \in S^4, \forall X,Y \in T_xS^4.$$

Considere os 4-tensores $C^{\pm} = [R^{\pm}, R^{\pm}]$ com valores em $\mathfrak{g}_E$ dados por

$$C^{\pm}_{X,Y,Z,W} = [R^{\pm}_{X,Y}, R^{\pm}_{Z,W}],$$

onde $X,Y,Z,W \in T_xS^4$. Em componentes temos

$$(C^{\pm}_{ijkl})^a{}_b = (R^{\pm}_{ij} \wedge R^{\pm}_{kl})^a{}_b - (R^{\pm}_{kl} \wedge R^{\pm}_{ij})^a{}_b.$$

Note que $C^{\pm}$ são funções algébricas de $R^{\pm}$, respectivamente.

Combinando o Lema 3.30 e a Proposição 1.29, segue que, para cada $x \in S^4$, temos $C^+_x = 0$ ou $C^-_x = 0$. Suponha que $C^+_x = 0$ e que x seja isolado com relação a essa propriedade. Então existe um aberto $U \in S^4$ tal que $x \in U$ e, para todo $y \in U \setminus \{x\}$, tem-se $C^+_y \neq 0$. Mas assim temos que ter $C^-_y = 0$. Como x é ponto de acumulação de $U \setminus \{x\}$, existe uma sequência $y_n \to x$ e da suavidade de C^- e do fato de $C^-_{y_n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $C^-_x = 0$, isto é, existe aberto U de S^4 tal que $C^- = 0$. Suponha, portanto, sem perda de generalidade, que seja $C^+ = 0$ em um aberto $U \subset S^4$. Sabemos que como o Laplaciano Δ^{∇} é operador elíptico de ordem 2, então localmente Δ^{∇} tem a forma

$$\Delta^{\nabla} = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x^i} + c.$$

Sendo R^+ harmônica, usando a expressão acima e a compacidade de S^4 obtemos uma desigualdade, em cada $x \in S^4$, da forma

$$|A((R^+)^a{}_b)|^2 \leq K \sum_{k,l=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{4} \left| \frac{\partial (R^+)^k{}_l}{\partial x^i} \right|^2 + |(R^+)^k{}_l|^2 \right), \quad a,b = 1,\ldots,N, \tag{3.43}$$

onde A é composto da parte elíptica de Δ^∇ (e portanto é um operador elíptico de ordem 2) e K é uma constante positiva. Usando as desigualdades (3.43) e o fato de C^+ ser função algébrica de R^+ obtemos estimativas similares para $A((C^+)^a{}_b)$. Nessas condições podemos aplicar o Teorema de Aronszajn A.8 para concluir que $C^+ = 0$ em S^4.

Agora temos que a equação (3.41) se reduz a

$$\overline{\nabla}^*\overline{\nabla} R^+ + 4R^+ = 0$$

e portanto

$$\langle \overline{\nabla}^*\overline{\nabla} R^+, R^+ \rangle_{L^2} + 4\langle R^+, R^+ \rangle_{L^2} = 0.$$

Como $\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}$ é não-negativo, concluímos que

$$\langle R^+, R^+ \rangle_{L^2} = \|R^+\|^2_{L^2} = 0,$$

o que finalmente nos proporciona $R^+ = 0$ em S^4. Logo $R^\nabla = R^-$, ou seja, R^∇ é anti-auto-dual. $\square$

APÊNDICE A

Fatos importantes

Esse apêndice contém alguns poucos resultados básicos que foram usados no decorrer do texto.

A.1 Alguns Resultados básicos

No que segue M e N são variedades suaves e $\mathrm{d}\colon \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$, $r \geq 0$, é a derivada exterior.

Proposição A.1. *Seja $f\colon M \to N$ um mapa suave. Então*

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\,\omega), \tag{A.1}$$

para toda r-forma $\omega \in \Omega^r(N)$.

Demonstração. Por linearidade, basta considerar o caso em que $\omega \in \Omega^r(M)$ é da forma

$$\omega = u\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r},$$

onde $u \in C^\infty(M)$. Temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f^*\omega) &= \mathrm{d}(f^*u\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}) \\
&= \mathrm{d}((u \circ f)\,\mathrm{d}(x^{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(x^{i_r} \circ f)) \\
&= \mathrm{d}(u \circ f) \wedge \mathrm{d}(x^{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(x^{i_r} \circ f).
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
f^*(\mathrm{d}\,\omega) &= f^*(\mathrm{d}(u\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r})) \\
&= f^*(\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}) \\
&= \mathrm{d}(u \circ f) \wedge \mathrm{d}(x^{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(x^{i_r} \circ f),
\end{aligned}$$

o que estabelece o afirmado. $\square$

Definição A.2. Sejam $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos o *colchete de Lie* de X e Y sendo o campo de vetores $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$[X,Y]f := X(Y(f)) - Y(X(f)), \tag{A.2}$$

para todo $f \in C^\infty(M)$.

Proposição A.3. *Seja M uma variedade suave. Se $\omega \in \Omega^1(M)$, então*

$$\mathrm{d}\,\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]), \tag{A.3}$$

para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Sejam $\omega \in \Omega^1(M)$ e $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. Escrevendo $\omega = \omega_\mu \, \mathrm{d}x^\mu$, $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $Y = Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$, temos

$$\begin{aligned}
X(\omega(Y)) &= X(\omega_\mu dx^\mu(Y)) \\
&= X(Y^\nu \omega_\nu) \\
&= X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(Y^\nu \omega_\nu) \\
&= X^\mu \left(\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\omega_\nu + Y^\nu \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x^\mu} \right).
\end{aligned}$$

Analogamente temos

$$Y(\omega(X)) = Y^\nu \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\omega_\mu + X^\mu \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu} \right).$$

Além disso

$$\begin{aligned}
\omega([X,Y]) &= \omega(XY - YX) \\
&= \omega\left(X\left(Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) - Y\left(X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \right) \\
&= \omega\left(\left(\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} + Y^\nu \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) X^\mu - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^\mu \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \right) Y^\nu \right) \\
&= X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu}\omega_\nu - Y^\nu \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu}\omega_\mu.
\end{aligned}$$

Logo

$$X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu}(X^\nu Y^\mu - X^\mu Y^\nu).$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\omega(X,Y) &= \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu(X,Y) \\
&= \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu}\,(\mathrm{d}x^\nu \otimes \mathrm{d}x^\mu(X,Y) - \mathrm{d}x^\nu \otimes \mathrm{d}x^\mu(X,Y)) \\
&= \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x^\nu}(X^\nu Y^\mu - X^\mu Y^\nu)
\end{aligned}$$

e temos a igualdade desejada. □

Definição A.4. Sejam $f\colon M \to N$ um mapa suave, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Dizemos que X e Y são *f-relacionados* se

$$\mathrm{d}f \circ X = Y \circ f. \tag{A.4}$$

Proposição A.5. *Sejam $f\colon M \to N$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Então X e Y são f-relacionados se, e somente se, $(Yg) \circ f = X(g \circ f)$ para todo $g \in C^\infty(N)$.*

Demonstração. Seja $g \in C^\infty(N)$, então $g \circ f \in C^\infty(M)$. Se vale $\mathrm{d}f \circ X = Y \circ f$, então

$$\begin{aligned} X(g \circ f) &= \mathrm{d}(g \circ f) \circ X = \mathrm{d}g \circ (\mathrm{d} \circ X) \\ &= \mathrm{d}g \circ (Y \circ f) = (\mathrm{d}g \circ Y) \circ f = (Yg) \circ f. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que, para cada $g \in C^\infty(N)$, tenhamos $(Yg) \circ f = X(g \circ f)$. Visto que valem

$$\begin{aligned} X(g \circ f) &= \mathrm{d}g \circ (\mathrm{d}f \circ X), \\ (Yg) \circ f &= \mathrm{d}g \circ (Y \circ f) \end{aligned}$$

e g é arbitrário, segue que $\mathrm{d}f \circ X = Y \circ f$. □

Proposição A.6. *Sejam $f\colon M \to N$, $X^i \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y^i \in \mathfrak{X}(N)$, $i = 1,2$, tais que X^i e Y^i são f-relacionados. Então $[X^1, X^2]$ e $[Y^1, Y^2]$ são f-relacionados.*

Demonstração. Seja $g \in C^\infty(N)$. Sendo X^i e Y^i f-relacionados, $i = 1,2$, então, da Proposição A.5, temos $(Y^i g) \circ f = X^i(g \circ f)$, assim, como $Y^i \in C^\infty(N)$

$$\begin{aligned} ([Y^1, Y^2]g) \circ f &= (Y^1(Y^2 g)) \circ f - (Y^2(Y^1 g)) \circ f \\ &= X^1((Y^2 g) \circ f) - X^2((Y^1 g) \circ f) \\ &= X^1(X^2(g \circ f)) - X^2(X^1(g \circ f)) \\ &= [X^1, X^2](g \circ f). \end{aligned}$$

Usando novamente a Proposição A.5 concluímos que $[X^1, X^2]$ e $[Y^1, Y^2]$ são f-relacionados. □

A.2 Teorema de Aronszajn

Definição A.7. Uma função mensurável u definida em um domínio D de um espaço euclidiano E de dimensão n é dito ter um zero de ordem $\alpha > 0$ em $x_0 \in D$ com relação à norma p, onde $1 \le p \le \infty$, se

$$\int_{|x - x_0| < r} |u|^p dx = \mathcal{O}(r^{p\alpha + n}).$$

Um zero é dito ser de ordem infinita se é de ordem α para todo $\alpha > 0$.

Teorema A.8 (Aronszajn [2])**.** *Sejam A é um operador linear diferencial elíptico de segunda ordem e K é uma constante positiva. Se u é uma solução de*

$$|Au(x)|^2 \leq K\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 + |u(x)|^2\right),$$

em um domínio D e, se em algum ponto $x_0 \in D$, u tem um zero de ordem infinita na norma $p = 1$, então u se anula identicamente.

Observação A.9. O resultado acima pode ser estendido a um sistema $(u_1, \dots, u_m)$ de m funções satisfazendo um sistema de m desigualdades da forma

$$|Au_k|^2 \leq K\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right|^2 + |u_l|^2\right), \qquad k = 1, \dots, m.$$

Como consequência temos o mesmo resultado para formas diferenciais harmônicas $h_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$ em uma variedade Riemanniana com métrica $\mathrm{g}_{ij} dx^i dx^j$ uma vez que, em cada sistema de coordenadas locais, as componentes satisfazem

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\frac{\partial}{\partial x^k}\sqrt{\mathrm{g}} g^{kl}\frac{\partial h_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^l} = L_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots \mathrm{j}_p} h_{j_1 \dots j_p},$$

onde $L_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}$ são todos os operadores diferenciais lineares de ordem ≤ 1.

A.3 Fatos algébricos em dimensão 4

Por fim faremos algumas considerações acerca de alguns fatos algébricos em dimensão 4. Se M é uma variedade Riemanniana, a inversa do operador Hodge-$\star$ é dado por

$$\star^{-1} = (-1)^{r(m-r)}\star,$$

onde $m = \dim M$. Para o caso em que $m = 4$ e $r = 2$, temos que o operador $\star$ é uma involução de $\bigwedge^2 T^*M$, i.e., $\star\star = \mathrm{id}$. Os autovaloes de $\star$ são, portanto, $\lambda = \pm 1$. Podemos fazer a decomposição em soma direta

$$\bigwedge^2 T^*M = \bigwedge_+^2 T^*M \oplus \bigwedge_-^2 T^*M,$$

onde $\bigwedge_\pm^2 T^*M$ são os autoespaços associados aos autovalores ± 1, respectivamente. Isso nos permite considerar a decomposição

$$\Omega^2(E) = \Omega_+^2(E) \oplus \Omega_-^2(E),$$

onde E é um fibrado vetorial. Segue daí que dada $\varphi \in \Omega^2(E)$, então

$$\varphi = \varphi^+ + \varphi^-, \tag{A.5}$$

onde $\varphi^\pm = \frac{1}{2}(\mathrm{id} \pm \star)\varphi$ e $\star\varphi^\pm = \pm\varphi^\pm$.

Definição A.10. Seja $\varphi \in \Omega^2(E)$. Dizemos que φ é *auto-dual* (*anti-auto-dual*) se $\varphi = \varphi^+ (\varphi^-)$.

Proposição A.11. *Sejam M uma variedade compacta e orientável de dimensão 4 e $\varphi \in \Omega^2(E)$ sobre M. Então φ é harmônica se, e somente se, $\varphi^\pm$ são harmônicas.*

Demonstração. Se $\varphi^\pm$ são harmônicas, então

$$\Delta^\nabla \varphi = \Delta^\nabla(\varphi^+ + \varphi^-) = \Delta^\nabla(\varphi^+) + \Delta^\nabla(\varphi^-) = 0.$$

Agora suponha que φ é harmônica. Aqui temos que $\delta^\nabla = - \star \mathrm{d}^\nabla \star$. Assim

$$\delta^\nabla \varphi^+ = \delta^\nabla \star \varphi^+ = - \star \mathrm{d}^\nabla \varphi^+,$$

portanto

$$\mathrm{d}^\nabla \delta^\nabla \varphi^+ = -\mathrm{d}^\nabla \star \mathrm{d}^\nabla \varphi^+ = \star \delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla \varphi^+.$$

Analogamente vemos que

$$\mathrm{d}^\nabla \star \mathrm{d}^\nabla \varphi^- = - \star \delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla \varphi^-.$$

Assim

$$\langle \mathrm{d}^\nabla \delta^\nabla \varphi^+, \mathrm{d}^\nabla \delta^\nabla \varphi^- \rangle = -\langle \star \delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla \varphi^+, \star \delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla \varphi^- \rangle.$$

Da mesma forma temos

$$\delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla \varphi^- = - \star \mathrm{d}^\nabla \delta^\nabla \varphi^-,$$

logo

$$\langle \mathrm{d}^\nabla \delta^\nabla \varphi^+, \delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla \varphi^- \rangle = -\langle \star \delta^\nabla \mathrm{d}^\nabla \varphi^+, \star \mathrm{d}^\nabla \delta^\nabla \varphi^- \rangle.$$

Afirmamos que $\star \colon \Omega^2(E) \to \Omega^2(E)$ é uma isometria. De fato, dadas $\omega, \eta \in \Omega^2(E)$

$$\langle \star\omega, \star\eta \rangle \,\mathrm{d}V = \star\omega \wedge \star\star\eta = \star\omega \wedge \eta = \eta \wedge \star\omega = \langle \eta, \omega \rangle \,\mathrm{d}V = \langle \omega, \eta \rangle \,\mathrm{d}V,$$

ou seja, $\langle \star\omega, \star\eta \rangle = \langle \omega, \eta \rangle$. Juntando todos os resultados acima obtemos

$$\langle \Delta^\nabla \varphi^+, \Delta^\nabla \varphi^- \rangle = 0,$$

isto é, $\Delta^\nabla \varphi^+ \perp \Delta^\nabla \varphi^-$. Como $0 = \Delta^\nabla \varphi = \Delta^\nabla \varphi^+ + \Delta^\nabla \varphi^-$, segue que $\varphi^\pm$ são harmônicas. □

Ainda considerando M uma variedade Riemanniana de dimensão 4, seja $(\theta_1, \dots, \theta_4)$ base dual (ortonormal) de uma base ortonormal $(e_1, \dots, e_4)$ de T_xM, $x \in M$. É possível mostrar que

$$\theta_1 \wedge \theta_2 \pm \theta_3 \wedge \theta_4,$$
$$\theta_1 \wedge \theta_3 \pm \theta_4 \wedge \theta_2,$$
$$\theta_1 \wedge \theta_4 \pm \theta_2 \wedge \theta_3$$

formam uma base para $\bigwedge^2_{\pm} T^*_x M$, respectivamente. Seja $\varphi \in \Omega^2(E)$. Assim, para cada $x \in M$, escrevendo

$$\varphi^{\pm} = \varphi_1^{\pm}(\theta_1 \wedge \theta_2 \pm \theta_3 \wedge \theta_4) + \varphi_2^{\pm}(\theta_1 \wedge \theta_2 \pm \theta_3 \wedge \theta_4) + \varphi_3^{\pm}(\theta_1 \wedge \theta_2 \pm \theta_3 \wedge \theta_4),$$

obtemos as identidades

$$\begin{aligned} \varphi^{\pm}_{e_1,e_2} &= \pm \varphi^{\pm}_{e_3,e_4}, \\ \varphi^{\pm}_{e_1,e_3} &= \pm \varphi^{\pm}_{e_4,e_2}, \\ \varphi^{\pm}_{e_1,e_4} &= \pm \varphi^{\pm}_{e_2,e_3}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Referências Bibliográficas

[1] Marcos M. Alexandrino e Renato G. Bettiol. *Lie groups and geometric aspects of isometric actions*. Springer, Cham, 2015. ISBN: 978-3-319-16612-4. DOI: 10.1007/978-3-319-16613-1. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-16613-1.

[2] N. Aronszajn. "A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order". Em: *J. Math. Pures Appl. (9)* 36 (1957), pp. 235–249. ISSN: 0021-7824.

[3] Jean-Pierre Bourguignon e H. Blaine Lawson Jr. "Stability and Isolation Phenomena for Yang-Mills Fields". Em: *Communications in Mathematical Physics* 79.2 (1981), pp. 189–230. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01942061.

[4] Theodor Bröcker e Tammo tom Dieck. *Representations of compact Lie groups*. Vol. 98. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1985, pp. x+313. ISBN: 0-387-13678-9. DOI: 10.1007/978-3-662-12918-0. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-12918-0.

[5] Mark J. D. Hamilton. *Mathematical gauge theory*. Universitext. With applications to the standard model of particle physics. Springer, Cham, 2017. ISBN: 978-3-319-68438-3. DOI: 10.1007/978-3-319-68439-0. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-68439-0.

[6] John M. Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*. Vol. 176. Graduate Texts in Mathematics. Second edition of [MR1468735]. Springer, Cham, 2018. ISBN: 978-3-319-91754-2.

[7] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Second. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics, Bristol, 2003. ISBN: 0-7503-0606-8. DOI: 10.1201/9781420056945. URL: https://doi.org/10.1201/9781420056945.

[8] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3rd edn. Vol. 1. Publiblish or Perish, 1999.

[9] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Mathematical Series, vol. 14. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

Índice