Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Matemática

Os teoremas de existência e unicidade de solução de um PVI e do fluxo tubular

Victor Lima das Virgens

São Carlos-SP
2023

Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Matemática

Os teoremas de existência e unicidade de solução de um PVI e do fluxo tubular

Victor Lima das Virgens

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende.

São Carlos-SP
2023

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - http://www.ufscar.br

DP-TCC-FA nº 21/2023/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

VICTOR LIMA DAS VIRGENS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS AUTÔNOMAS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 03 de abril de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	**Nome Completo**
Orientador	Alex Carlucci Rezende
Membro da Banca 1	Karina Schiabel
Membro da Banca 2	Selma Helena de Jesus Nicola

Documento assinado eletronicamente por **Alex Carlucci Rezende**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 12/06/2023, às 16:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Karina Schiabel**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 20/06/2023, às 09:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Selma Helena de Jesus Nicola**, **Professor(a) do Ensino Superior**, em 21/06/2023, às 18:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador **1025851** e o código CRC **63C7D528**.

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho de conclusão de curso é apresentar os fundamentos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, ramo da Matemática que é considerado um dos mais aplicados. O presente trabalho abarca as definições elementares e parte dos principais resultados da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, tendo como base conceitos prévios referentes a Espaços Métricos, que são empregados ao longo de todo o texto. Apresentamos e demonstramos com detalhes dois dos principais resultados da teoria: o Teorema de Existência e Unicidade de Solução de um Problema de Valor Inicial e o Teorema do Fluxo Tubular.

Palavras-chave: *equações diferenciais ordinárias, teoria qualitativa, problemas de valor inicial, soluções, existência e unicidade, equações autônomas, campos de vetores, fluxo tubular.*

ABSTRACT

The main goal of this course conclusion monograph is to present the basic topics of the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations, a branch of Mathematics that is considered one of the most applied. The present monograph covers the elementary definitions and part of the main results of the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations, based on previous concepts referring to Metric Spaces, which are used throughout the text. We present and prove in detail two of the main results of the theory: the Existence and Uniqueness Theorem of the Solution of an Initial Value Problem and the Tubular Flow Theorem.

Keywords: *ordinary differential equations, qualitative theory, initial value problems, solutions, existence and uniqueness, autonomous equations, vector fields, tubular flow.*

Sumário

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais ordinárias constituem uma ferramenta matemática fundamental para a modelagem de diversos fenômenos da natureza, como problemas físicos, químicos, biológicos, meteorológicos, populacionais e econômicos. Logo, o estudo das propriedades locais e globais das soluções dessas equações torna-se imprescindível para a compreensão de tais questões e de assuntos pertencentes à Matemática em si.

A origem dos estudos das equações diferenciais deu-se juntamente com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Ao longo do tempo, foram concebidas diversas técnicas para a resolução de equações diferenciais ordinárias, como a multiplicação por um fator integrante ou o método da separação de variáveis.

Por outro lado, notou-se a impossibilidade de resolver explicitamente a maioria das equações, visto que as mais simples delas já apresentam um certo grau de complexidade em suas respectivas soluções. Nesse sentido, surge a necessidade de identificar quando uma equação diferencial ordinária admite solução e se essa solução é única, além, é claro, de descrever o comportamento dessa solução.

Com o propósito de explorar essas propriedades das equações, estabeleceu-se, então, a partir dos trabalhos de Jules Henri Poincaré (1854-1912) e Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), um ramo da Matemática que hoje é conhecido como *Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias*.

Os conceitos abordados nessa teoria visam a descrição de comportamentos locais e globais das soluções de equações diferenciais ordinárias. Dentre eles, destacam-se tópicos relacionados à existência, unicidade, dependência contínua e ao prolongamento de soluções, ao fluxo de campos de vetores, às características e classificações de pontos de equilíbrio (singularidades), ao efeito de pequenas perturbações nas condições iniciais (estabilidade) e a diversas propriedades topológicas das soluções.

Este texto abordará cada uma das definições fundamentais e os principais resultados da

Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, como também suas respectivas demonstrações, destacando o teorema central das questões relacionadas à existência e unicidade de solução dessas equações. Em alguns casos, serão exibidos exemplos para auxiliar a compreensão de determinadas ideias. Cabe destacar que, para a elaboração deste trabalho, foram necessárias noções prévias sobre Espaços Métricos, que se encontram no primeiro capítulo.

Também serão abordados alguns conceitos relacionados às equações diferenciais autônomas, principalmente aqueles necessários para a demonstração do Teorema do Fluxo Tubular, além de definições e resultados auxiliares. Esse teorema auxilia o estudo do comportamento local de soluções próximas de pontos regulares, garantindo que, na vizinhança desses pontos, existirá um difeomorfismo que conjuga um fluxo do campo vetorial dessas soluções com o campo cconstante.

CAPÍTULO 1

ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste capítulo, apresentaremos conceitos e resultados relacionados a Espaços Métricos, que serão empregados ao longo do texto. O leitor que já tiver conhecimento sobre o assunto pode avançar ao Capítulo 2.

Definição 1.1 (Métrica em um conjunto)**.** Seja M um conjunto. Uma *métrica em M* é uma função

$$\begin{array}{rrcl} d: & M \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$$

em que $d(x,y)$ é chamada *distância de x a y*, de modo que d goza das seguintes propriedades para quaisquer $x, y, z \in M$:

$(d1)$ $d(x,y) \geq 0$, ocorrendo igualdade se, e somente se, $x = y$;

$(d2)$ $d(x,y) = d(y,x)$;

$(d3)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Definição 1.2 (Espaço métrico)**.** Um *espaço métrico* é um par (M,d), em que M é um conjunto e d é uma métrica em M.

Observação 1.1. É comum dizer "*o espaço métrico M*", deixando, assim, implícita qual a métrica d que está sendo considerada.

Definição 1.3 (Bola aberta e bola fechada)**.** Seja M um espaço métrico. A *bola aberta* de centro $a \in M$ e raio $r > 0$ é o conjunto

$$B(a;r) = \{x \in M \mid d(x,a) < r\}.$$

A *bola fechada* de centro a e raio r é o conjunto

$$B[a;r] = \{x \in M \mid d(x,a) \leq r\}.$$

Observação 1.2. Outras notações para bolas abertas ou fechadas centradas em a e de raio r são: $\overline{B}(a;r)$ (fechada), $B_r(a)$ (aberta), $\overline{B}_r(a)$ (fechada). A Figura 1.1 ilustra exemplos de bola aberta e bola fechada de um espaço métrico M.

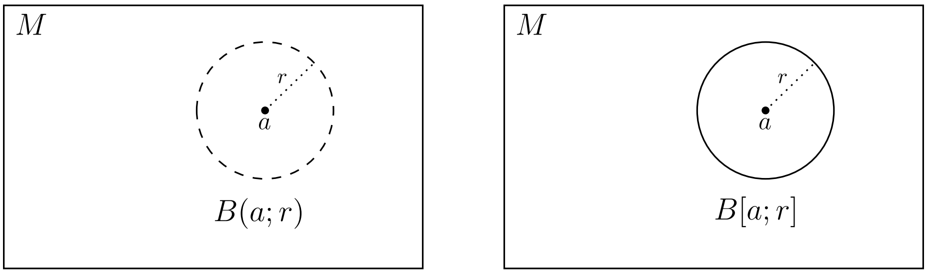


Figura 1.1: Representações de bolas aberta e fechada em M.

Definição 1.4 (Conjunto aberto e conjunto fechado)**.** Um subconjunto X de um espaço métrico M é *aberto* se, para todo $x \in X$, existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset X$. Um subconjunto Y de um espaço métrico M é *fechado* se seu complementar é aberto, isto é, se $M \setminus Y$ é aberto.

Proposição 1.1. Toda bola aberta é um conjunto aberto, em todo espaço métrico.

Demonstração. Sejam um espaço métrico M e uma bola aberta $B(a;r)$ em M. Tomando um ponto qualquer $x \in B(a;r)$, temos $d(a,x) < r$. Consequentemente, $s := r - d(a,x) > 0$. Considerando, agora, $B(x;s)$ e um ponto $y \in B(x;s)$, tem-se $d(x,y) < s$. Logo, $d(a,y) \overset{(d3)}{\leq} d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s = r$. Portanto, $y \in B(a;r)$ e, assim, $B(x;s) \subset B(a;r)$. ∎

Definição 1.5 (Conjunto compacto)**.** Um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é *compacto* se é fechado e limitado.

Definição 1.6 (Ponto aderente)**.** Seja X um subconjunto do espaço métrico M. Um ponto $a \in M$ é *aderente* a X se, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a;\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

A Figura 1.2 traz um exemplo de ponto aderente ao conjunto X.

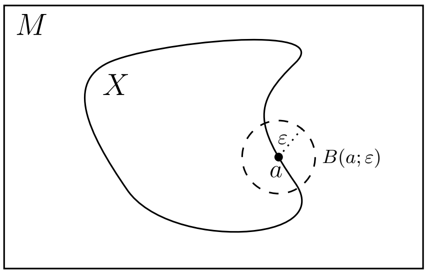


Figura 1.2: Representação de um ponto aderente a X.

Definição 1.7 (Fecho)**.** O conjunto de todos os pontos aderentes a um subconjunto X de um espaço métrico M é chamado de *fecho* de X, e é denotado por $\overline{X}$.

Definição 1.8 (Cisão)**.** Seja M um espaço métrico. Uma *cisão* de M é uma decomposição $M = A \cup B$, de M como união de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B.

Observação 1.3. Notemos que as condições $M = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ são equivalentes a dizer que $A = M \setminus B$ e $B = M \setminus A$, o que implica que, numa cisão $M = A \cup B$, os conjuntos A e B são abertos e fechados em M. Com efeito, o complementar de A em relação a M é B, que, por definição, é aberto. Logo, por definição, A é fechado em M. Analogamente, B é fechado em M.

Observação 1.4. A cisão $M = A \cup B$ é *trivial* se $A = \emptyset$ e $B = M$ ou vice-versa. Assim, a cisão trivial é $M = M \cup \emptyset$.

Definição 1.9 (Espaço métrico conexo e conjunto conexo)**.** Um espaço métrico M é *conexo* se a única cisão possível em M é a trivial. Um subconjunto X de M é um *conjunto conexo* se o subespaço $X \subseteq M$ é conexo. Se X admite pelo menos uma cisão não-trivial, então X é dito *desconexo*.

Definição 1.10 (Aplicação contínua)**.** Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é *contínua* quando, para todos $a \in M$ e $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, se $d(x, a) < \delta$, então $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, isto é, dada qualquer bola $B' = B(f(a); \varepsilon)$, existe $B = B(a; \delta)$ tal que $f(B) \subset B'$.

Definição 1.11 (Aplicação lipschitziana)**.** Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é *lipschitziana* quando existe uma constante $L > 0$ (chamada *constante de Lipschitz)* tal que $d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.

Teorema 1.1. Dados os espaços métricos M e N, se uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é lipschitziana, então f é contínua.

Demonstração. Sejam $x, y \in M$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$, em que L é a constante de Lipschitz de f. Assim,

$$d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) < L\delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

■

Definição 1.12 (Sequência de Cauchy)**.** Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico M é uma *sequência de Cauchy* se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para quaisquer $m, n \geq n_0$. Equivalentemente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_{n+r}) < \varepsilon$ para todos $n \geq n_0$ e $r \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge para $a \in M$. Por definição, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$ para todo $n \geq N(\varepsilon)$. Tomando $N(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, temos, para todos $n, m \geq N(\varepsilon)$, pelas propriedades $(d3)$ e $(d4)$ da Definição 1.1,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Definição 1.13 (Espaço métrico completo)**.** Um espaço métrico M é chamado de *espaço métrico completo* quando todas as sequências de Cauchy de M convergem para elementos de M.

Definição 1.14 (Contração)**.** Sejam M um espaço métrico. Uma aplicação $f : M \longrightarrow M$ é uma *contração* quando existe uma constante $\lambda \in (0, 1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.

Observação 1.5. É imediato que toda contração é uma aplicação lipschitziana.

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO À TEORIA QUALITATIVA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Em um curso básico de Cálculo Diferencial e Integral, as equações diferenciais ordinárias são comumente definidas como "equações que envolvem funções de uma variável real e suas derivadas". Porém, podemos defini-las de uma maneira mais geral.

Definição 2.1 (Equação diferencial ordinária)**.** Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Uma *equação diferencial ordinária (EDO)* em $\mathbb{R}^n$ é uma equação da forma

$$x^{(k)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(k-1)}), \tag{2.1}$$

em que k é chamado *ordem* da EDO e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua definida em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{kn+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{kn}$.

Definição 2.2 (Solução de uma EDO)**.** Uma *solução* da equação (2.1) é uma função (curva) $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, k vezes diferenciável, tal que

(i) $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in U \subseteq \mathbb{R}^{kn+1} \quad \forall\, t \in I$;

(ii) $f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(k-1)}(t)) = \varphi^{(k)}(t) \quad \forall\, t \in I$.

Dada uma equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}^n$ de ordem k,

$$y^{(k)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),$$

e $y(t)$ uma de suas soluções, definimos a aplicação contínua $f : U \subseteq \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ como $f(t, x_1, x_2, \ldots, x_k) := (x_2, x_3, \ldots, x_k, g(t, y, y', \ldots, y^{(k-1)}))$ de modo que $x_1 = y, x_2 =$

$y', \ldots, x_k = y^{(k-1)}$. Assim,

$$x_1{}' = y' = x_2, x_2{}' = y'' = x_3, \ldots, x_k{}' = y^{(k)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),$$

o que significa que $x(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_k)(t)$ é solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$x' = f(t, x). \tag{2.2}$$

Em outras palavras, as soluções de uma EDO de ordem k em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes às soluções de uma EDO de primeira ordem em $\mathbb{R}^k$. Por esse motivo, concentraremos nossos estudos nas equações do tipo (2.2) em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.3 (Problema de valor inicial)**.** Dado $(t_0, x_0) \in U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que um *problema de valor inicial (PVI)* para a equação (2.2) é o sistema

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

em que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua.

Uma solução do PVI (2.3) é uma função $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz tanto a equação diferencial $x' = f(t, x)$ quanto a *condição inicial* $x(t_0) = x_0$.

2.1 Existência e unicidade de soluções

Dado um problema de valor inicial, surgem, naturalmente, duas questões:

- Quando um PVI tem solução?
- Se um PVI tem solução, ela é única?

Exemplo 2.1. Consideremos o PVI

$$\begin{cases} x' = t\sqrt{x}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

É evidente que $\varphi_1(t) = 0$ é solução de (2.4). Por outro lado, $\varphi_2(t) = \dfrac{t^4}{16}$ também é. De fato,

$$t\sqrt{\varphi_2(t)} = t\sqrt{\frac{t^4}{16}} = t \cdot \frac{t^2}{4} = \frac{t^3}{4} = \varphi_2{}'(t) \quad \text{e} \quad \varphi_2(0) = \frac{0^4}{16} = 0.$$

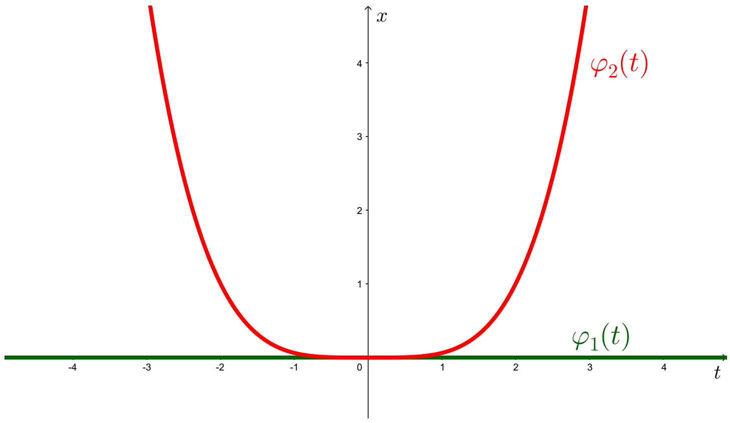


Figura 2.1: Soluções do PVI (2.4).

A Figura 2.1 ilustra os gráficos das soluções $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$. Notemos que ambas as soluções passam pelo ponto $(0,0)$.

No exemplo acima, pudemos ver que o problema de valor inicial (2.4) possui duas soluções no ponto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Um dos principais teoremas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias nos dá condições suficientes, mas não necessárias, para existência e unicidade de solução de um PVI.

Para demonstrá-lo, são utilizados outros três resultados, sendo dois deles relacionados a *pontos fixos* de uma *contração* e um à equivalência entre as soluções de um PVI e uma *equação integral*. As demonstrações que apresentaremos na sequência são baseadas nos resultados de [9].

Antes, apresentemos uma definição.

Definição 2.4. Seja $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação. Definimos $f^{n+1}(x) := f(f^n(x))$ como a n-ésima *iterada* de f em $x \in M$ para todo $n \geq 0$. Naturalmente, definimos $f^0(x) := x$.

Teorema 2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** Sejam M um espaço métrico completo e $f : M \longrightarrow M$ uma contração. Existe um único *ponto fixo* p por f, isto é, existe um único $p \in M$ tal que $f(p) = p$. Mais do que isso, p é um *atrator* de f, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p \quad \forall\, x \in M.$$

Demonstração. (Existência) Sejam $x \in M$ e $x_n := f^n(x)$. Como f é uma contração, temos que existe $\lambda \in (0,1)$ tal que, para todos $n, r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+r}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{(n+r)-1})) \leq \lambda \cdot d(x_{n-1}, x_{(n+r)-1}) = \\ &= \lambda \cdot d(f(x_{n-2}), f(x_{(n+r)-2})) \leq \lambda^2 \cdot d(x_{n-2}, x_{(n+r)-2}) = \\ &\ \ \vdots \\ &= \lambda^{n-1} \cdot d(f(x), f(x_r)) \leq \lambda^n \cdot d(x, x_r). \end{aligned}$$

Pela propriedade ($d3$) da definição de métrica (ver Capítulo 1),

$$\begin{aligned} d(x, x_r) &\leq d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{r-1}, x_r) \\ &\leq d(x, x_1) + \lambda \cdot d(x, x_1) + \lambda^2 \cdot d(x, x_1) + \cdots + \lambda^{r-1} \cdot d(x, x_1) = \\ &= (1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{r-1}) \cdot d(x, x_1) \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{i=0}^{r-1} \lambda^i = \frac{1}{1-\lambda} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0.$$

Assim,

$$d(x_n, x_{n+r}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, x_1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

o que implica que $(x_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente, visto que M é completo. Suponhamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$. Dessa forma, pela continuidade de f,

$$f(p) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p.$$

(Unicidade) Sejam p e p' pontos fixos por f. Por definição,

$$d(p, p') = d(f(p), f(p')) \leq \lambda \cdot d(p, p') \Rightarrow (1-\lambda) \cdot d(p, p') \leq 0 \Rightarrow d(p, p') \leq 0.$$

Sabe-se que $d(p, p') \geq 0$. Logo, $d(p, p') = 0$, donde se infere que $p = p'$, pela propriedade ($d1$) da definição de métrica. ■

Para a demonstração do principal resultado deste capítulo, utilizaremos outra versão do Teorema do Ponto Fixo, enunciada e demonstrada a seguir.

Corolário 2.1 (Corolário do Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** Sejam M um espaço métrico completo e $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação contínua. Suponha que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que f^k é uma contração. Então, existe um único ponto fixo e atrator de f.

Demonstração. Seja p o único ponto fixo e atrator de f^k dado pelo Teorema do Ponto Fixo. Queremos mostrar, primeiramente, que $f(p) = p$. Se q é um ponto fixo de f, então é evidente que q também é ponto fixo de f^k. Como f^k possui um único ponto fixo, decorre que f possui, no máximo, um ponto fixo. Notemos que

$$f^k(f(p)) = f^{k+1}(p) = f(f^k(p)) = f(p),$$

ou seja, $f(p)$ é ponto fixo de f^k. Por outro lado, o ponto fixo de f^k é único. Logo,

$$f(p) = p,$$

isto é, p é o único ponto fixo de f. Mostremos, agora, que p é atrator de f. Consideremos $x \in M$. Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever $n = mk + r$, em que $0 \leq r < k$ é o resto da divisão euclidiana de n por k. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \lim_{m\to\infty} f^{mk+r}(x) = \lim_{m\to\infty} (f^k)^m(f^r(x)) = p.$$

■

Uma solução de um PVI pode ser caracterizada por meio de uma equação envolvendo uma integral, de acordo com o próximo resultado.

Lema 2.1. Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Então, uma função diferenciável $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução do problema de valor inicial (2.3) se, e somente se, for uma solução da equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in I. \tag{2.5}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução do PVI (2.3). Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, integramos a equação diferencial do PVI de t_0 a t, obtendo

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}[\varphi(s)]\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\, ds \Leftrightarrow \varphi(t) - \varphi(t_0) &= \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\, ds \\ \Leftrightarrow \varphi(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\, ds.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Supondo $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma solução da equação integral (2.5) e calculando $\varphi(t_0)$, temos

$$\varphi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s,\varphi(s))\ ds = x_0.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, φ é derivável e, portanto, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. ■

Para, finalmente, demonstrarmos o Teorema de Existência e Unicidade, necessitamos do conceito de uma função localmente lipschitziana.

Definição 2.5. Uma aplicação $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é *localmente lipschitziana na segunda variável* se, para cada compacto $K \subseteq U$, existe $L > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall\,(t,x),(t,y) \in K.$$

Exemplo 2.2. Pela desigualdade triangular, verifica-se facilmente que $f(t,x) = |x|$, definida em $\mathbb{R}^2$, é localmente lipschitziana em x. Por outro lado, $g(t,x) = x^{\frac{2}{3}}$, também definida em $\mathbb{R}^2$, não é localmente lipschitziana em x. Com efeito,

$$\lim_{x\to 0} \|g(t,x) - g(t,0)\| = \lim_{x\to 0} \|x^{\frac{2}{3}} - 0\| = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\|x^{\frac{1}{3}}\|} \cdot \|x - 0\|,$$

e $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\|x^{\frac{1}{3}}\|} = +\infty$, o que significa que, dado qualquer compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ com $(t,0) \in K$, não existe $L > 0$ tal que

$$\|g(t,x) - g(t,0)\| \leq L \cdot \|x - 0\|.$$

Agora, enunciaremos e demonstraremos o teorema central da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, que estabelece condições suficientes para a existência e unicidade de soluções de um problema de valor inicial.

Teorema 2.2 (Teorema de Picard ou de Existência e Unicidade de Soluções de um PVI)**.** Dado $(t_0, x_0) \in U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e localmente lipschitziana na segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b$, em que $a, b > 0$ e $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ e $B_b = \overline{B}(x_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\|f(t,x)\| \leq M$ em Ω, então existe uma única solução do problema de valor inicial (2.3) em $I_\alpha = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subseteq I_a$, em que $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.

Demonstração. Consideremos o espaço métrico completo $X = \{\varphi : I_\alpha \longrightarrow B_b \mid \varphi \text{ é contínua}\}$ munido da métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$$

para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in X$. Para $\varphi \in X$, definamos

$$\begin{array}{rccl} F(\varphi): & I_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & F(\varphi)(t) := x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \end{array}$$

e notemos que:

(i) $F(X) \subseteq X$. Com efeito, para todo $t \in I_\alpha$, tem-se

$$\begin{aligned}\|F(\varphi)(t) - x_0\| &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\ ds - x_0 \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\ ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \varphi(s))\|\ ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} M\ ds \right| = M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b.\end{aligned}$$

(ii) Para m suficientemente grande, F^m é uma contração de X. De fato, mostremos por indução sobre m que, para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e $m \geq 0$,

$$\|F^m(\varphi_1)(t) - F^m(\varphi_2)(t)\| \leq \frac{L^m|t - t_0|^m}{m!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha,$$

em que L é a constante de Lipschitz de f. É fácil ver que a desigualdade é verdadeira para $m = 0$ (diretamente da definição da métrica de X). Agora, suponhamos que

$$|F^k(\varphi_1)(t) - F^k(\varphi_2)(t)| \leq \frac{L^k|t - t_0|^k}{k!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2)$$

para algum $k \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\|F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)\| &= \|F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, F^k(\varphi_1)(s))\, ds - \int_{t_0}^{t} f(s, F^k(\varphi_2)(s))\, ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))\ ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))\|\ ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L \cdot \|F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)\|\ ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} \frac{L^k|s - t_0|^k}{k!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2)\ ds \right| \\ &= \frac{L^{k+1}}{k!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^k\ ds \right| \\ &= \frac{L^{k+1}}{k!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \frac{|s - t_0|^{k+1}}{k+1} \Bigg|_{t_0}^{t} \\ &= \frac{L^{k+1}|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2).\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade é válida e, dessa forma,

$$d(F^m(\varphi_1), F^m(\varphi_2)) \leq \frac{L^m\alpha^m}{m!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{(L\alpha)^m}{m!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Para m suficientemente grande, temos $\dfrac{(L\alpha)^m}{m!} \longrightarrow 0$, o que implica que F^m é uma contração de X.

Logo, com as propriedades (i) e (ii), decorre do Corolário 2.1 que existe uma única função $\varphi \in X$ tal que $F(\varphi)(t) = \varphi(t)$, isto é, existe uma única função $\varphi \in X$ tal que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad t \in I_\alpha.$$

Pelo Lema 2.1, temos o resultado. ■

O Teorema 2.2 leva o nome do matemático francês Charles Émile Picard (1856-1941) por utilizar, em sua demonstração, o chamado método iterativo de Picard.

Observação 2.1. A condição de Lipschitz na variável espacial no Teorema 2.2 pode ser substituída pela continuidade da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$, que implica na primeira. Com efeito, consideremos $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto U com $\frac{\partial f}{\partial x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ também contínua em U. Dado um ponto $(t_0, x_0) \in U$, seja $\Omega = I_a \times B_b$, em que $a, b > 0$, $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ e $B_b = \overline{B}(x_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$. Como a aplicação $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua e Ω é compacto, existe $K > 0$ tal que $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right\| \leq K$ para todo $(t, x) \in \Omega$. Pela Desigualdade do Valor Médio,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K\|x - y\|$$

para quaisquer $(t, x), (t, y) \in \Omega$.

A partir da Observação 2.1, o Teorema 2.2 pode ser reformulado da maneira seguinte, trocando a condição de Lipschitz pela condição da continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Teorema 2.3 (Teorema 2.2 reformulado). Se $f, \frac{\partial f}{\partial x} : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são aplicações contínuas em $\Omega = I_a \times B_b$, em que $a, b > 0$, $I_a = [t_0 - a, t_0 + a] \subseteq \mathbb{R}$ e $B_b = \overline{B}(x_0, b) \subseteq \mathbb{R}^n$, então existe uma única solução do problema de valor inicial (2.3) em $I_\alpha = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \subseteq I_a$, para certo $\alpha > 0$.

A demonstração do Teorema 2.3 é análoga à demonstração do Teorema 2.2, observando que a constante de Lipschitz L será substituída por uma constante M referente à limitação da aplicação $\frac{\partial f}{\partial x}$ em um conjunto compacto. Essa versão é mais utilizada para verificar se um PVI admite solução única do que a anterior, pois, em geral, é mais simples verificar a continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ do que a condição de Lipschitz.

Exemplo 2.3. No Exemplo 2.1, notemos que a função $f(t, x) = t\sqrt{x}$ é contínua em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Porém,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{t}{2\sqrt{x}},$$

que é contínua em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Portanto, pelo Teorema 2.3, PVIs para $x' = t\sqrt{x}$ possuem solução única se $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Exemplo 2.4. Vamos aplicar o Teorema de Picard para determinar em que região do plano o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = \dfrac{t-x}{2t+5x}, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

admite uma única solução, isto é, em que pontos $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ as funções f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são simultaneamente contínuas. Vemos que $f(t,x) = \dfrac{t-x}{2t+5x}$ é contínua se, e somente se,

$$2t + 5x \neq 0 \Leftrightarrow 5x \neq -2t \Leftrightarrow x \neq -\frac{2t}{5}.$$

Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2t - 5x - 5t + 5x}{(2t+5x)^2} = -\frac{7t}{(2t+5x)^2},$$

que também é contínua se, e somente se, $x \neq -\dfrac{2t}{5}$. Portanto, o PVI (2.6) admite solução se

$$(t_0, x_0) \in \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -\frac{2t}{5}\right\}.$$

A Figura 2.2 mostra, em cinza, a região na qual o PVI (2.6) admite uma única solução.

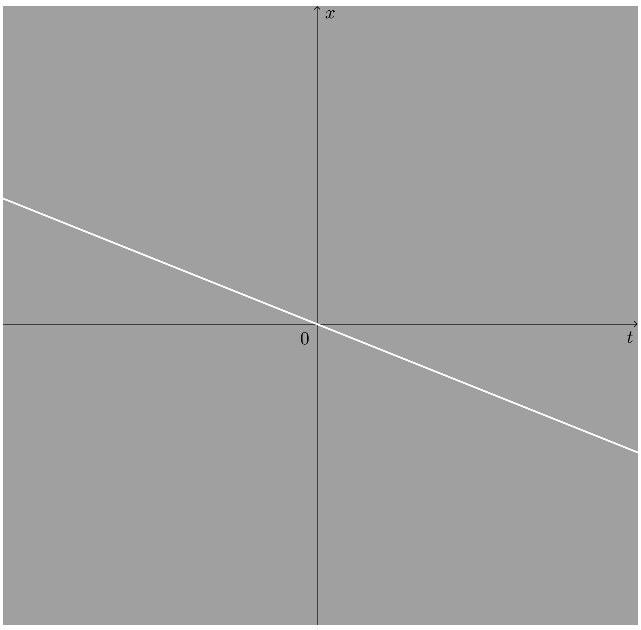


Figura 2.2: Ilustração da região na qual o PVI (2.6) admite solução única.

Vejamos uma definição que nos auxiliará no decorrer do texto.

Definição 2.6 (Aplicação de classe C^k)**.** Uma aplicação $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k, $k \in \mathbb{N}$, quando k é o maior natural para o qual todas as derivadas parciais de ordem k de f existem e são contínuas.

Se a aplicação $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, então, dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ qualquer, existe uma única solução do problema de valor inicial (2.3) definida em um intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$, uma vez que o fato de f ser de classe C^1 implica diretamente na existência e na continuidade da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Assim, daqui em diante, consideraremos que $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sempre será uma aplicação de classe C^1. Dessa forma, a existência e a unicidade da solução de cada PVI apresentado estarão garantidas pelo Teorema 2.3.

2.2 Soluções maximais

Ao garantir a existência e a unicidade da solução de um PVI, é natural que nos perguntemos qual é o intervalo de definição dessa solução. Para responder a essa pergunta, vamos estudar o conceito e alguns resultados sobre *soluções maximais*.

Definição 2.7 (Solução maximal)**.** Uma solução $x : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ do PVI (2.3) em U é uma *solução maximal* se, dada qualquer solução $\overline{x} : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ do PVI (2.3), necessariamente $J \subseteq I$ e $\overline{x}(t) = x(t)$ para todo $t \in J$.

Pela Definição 2.7, podemos levantar a seguinte questão: será que há algum intervalo em que duas soluções definidas em intervalos distintos coincidem?

Lema 2.2. Se $x_1 : I_1 \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $x_2 : I_2 \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são soluções de (2.3), então $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

Demonstração. Seja $S = \{t \in I_1 \cap I_2 \mid x_1(t) = x_2(t)\} \subseteq I_1 \cap I_2$. É evidente que $S \neq \emptyset$, uma vez que $t_0 \in S$. Tomando $t \in S$ arbitrário, segue da unicidade de soluções do PVI

$$x' = f(t, x), x(t) = x_1(t) = x_2(t)$$

que existe um intervalo aberto centrado em t no qual x_1 e x_2 coincidem. Logo, pela Proposição 1.1, S é um subconjunto aberto de $I_1 \cap I_2$. Além disso, S é fechado em $I_1 \cap I_2$, pois $S = (x_1 - x_2)^{-1}(\{0\})$. Por fim, como $I_1 \cap I_2$ é conexo, então $S = I_1 \cap I_2$. ∎

Assim como a solução de um PVI que satisfaça as condições do Teorema 2.3 é única, o intervalo maximal que a define também o é, e isso é garantido pelo teorema seguinte.

Teorema 2.4 (Unicidade de soluções maximais)**.** Se f é uma aplicação de classe C^1, então, para cada $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução maximal do PVI (2.3), necessariamente definida em um intervalo aberto.

Demonstração. Seja $I = \cup J$ a união de todos os intervalos abertos J tais que, para cada um deles, existe uma solução $\overline{x} : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ do PVI (2.3). Pelo Teorema 2.3, I é não-vazio. Pelo Lema 2.2, dados dois intervalos dessa união, as soluções associadas coincidem na interseção dos intervalos. Dessa forma, dado $t \in I$, tomamos um intervalo aberto J da coleção tal que $t \in J$ com solução associada $\overline{x} : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e definimos $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $x(t) = \overline{x}(t)$. Por construção, $x\big|_J = \overline{x}$ e, portanto, x é solução maximal de (2.3), definida no intervalo aberto I. ∎

2.3 Dependência contínua em relação às condições iniciais

Nesta seção, mostraremos uma propriedade relacionada às soluções de um problema de valor inicial que diz respeito à dependência contínua destas em relação às condições iniciais.

Antes, vejamos um resultado que será utilizado para a verificação dessa propriedade.

Lema 2.3 (Desigualdade de Gronwall)**.** Se $f, g, h : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas não-negativas tais que

$$f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(s)f(s)\, ds, \tag{2.7}$$

então

$$f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(s)h(s)e^{\int_s^t g(u)\, du}\, ds.$$

Em particular, se $h(t) = k \in \mathbb{R}_+^*$, então

$$f(t) \leq ke^{\int_a^t g(s)\, ds}.$$

Demonstração. Definamos

$$p(t) := \int_a^t g(s)f(s)\, ds,$$

o que implica $p'(t) = g(t)f(t)$. Pela desigualdade (2.7), temos

$$f(t) \leq h(t) + p(t) \Leftrightarrow g(t)f(t) \leq g(t)h(t) + g(t)p(t) \Leftrightarrow p'(t) \leq g(t)h(t) + g(t)p(t).$$

Multiplicando esta última desigualdade por $e^{-\int_a^t g(s)\, ds}$, obtemos

$$p'(t)e^{-\int_a^t g(s)\, ds} \leq g(t)h(t)e^{-\int_a^t g(s)\, ds} + g(t)p(t)e^{-\int_a^t g(s)\, ds}$$

$$\Updownarrow$$

$$p'(t)e^{-\int_a^t g(s)\, ds} - p(t)g(t)e^{-\int_a^t g(s)\, ds} \leq g(t)h(t)e^{-\int_a^t g(s)\, ds}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left[p(t)e^{-\int_a^t g(s)\,ds}\right] \leq g(t)h(t)e^{-\int_a^t g(s)\,ds}. \tag{2.8}$$

Integrando (2.8) de a a t, tem-se

$$p(t)e^{-\int_a^t g(s)\,ds} \leq \int_a^t g(s)h(s)e^{-\int_a^s g(u)\,du}\,ds \Leftrightarrow p(t) \leq e^{\int_a^t g(s)\,ds}\int_a^t g(s)h(s)e^{\int_s^a g(u)\,du}\,ds.$$

Logo,

$$f(t)-h(t) \leq p(t) \leq \int_a^t g(s)h(s)e^{\int_s^t g(u)\,du}\,ds \Leftrightarrow f(t) \leq h(t) + \int_a^t g(s)h(s)e^{\int_s^t g(u)\,du}\,ds.$$

Se $h(t) = k \in \mathbb{R}_+^*$, então, integrando (2.8) de a a t, obtemos

$$\begin{aligned} p(t)e^{-\int_a^t g(s)\,ds} \leq k\int_a^t g(s)e^{-\int_a^s g(u)\,du}\,ds &\Leftrightarrow p(t)e^{-\int_a^t g(s)\,ds} \leq k\int_a^t \frac{d}{ds}\left[-e^{-\int_a^s g(u)\,du}\right]\,ds \\ &\Leftrightarrow p(t)e^{-\int_a^t g(s)\,ds} \leq k\left(-e^{-\int_a^t g(s)\,ds}+1\right) \\ &\Leftrightarrow p(t) \leq ke^{\int_a^t g(s)\,ds} - k. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(t)-k \leq p(t) \leq ke^{\int_a^t g(s)\,ds} - k \Leftrightarrow f(t) \leq ke^{\int_a^t g(s)\,ds}.$$

■

Teorema 2.5 (Dependência contínua)**.** Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e lipschitziana na segunda variável. Se $\varphi_1 : I_1 \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : I_2 \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são as respectivas soluções únicas dos problemas de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_0) = x_2, \end{cases}$$

então

$$\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\| \leq e^{L|t-t_0|}\cdot\|x_1-x_2\|, \quad \forall\, t \in I_1 \cap I_2,$$

em que L é a constante de lipschitz de f.

Demonstração. Como φ_1 e φ_2 são as respectivas soluções únicas dos PVIs, então

$$\begin{aligned}
\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\| &= \left\|x_1+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s))\,ds - x_2 - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_2(s))\,ds\right\| \\
&\leq \|x_1-x_2\| + \left\|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))\,ds\right\| \\
&\leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))\|\,ds \\
&\leq \|x_1-x_2\| + \int_{t_0}^{t} L\|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)\|\,ds.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Gronwall,

$$\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\| \leq \|x_1-x_2\|\cdot e^{\int_{t_0}^{t} L\,ds} = \|x_1-x_2\|\cdot e^{L|t-t_0|}$$

■

Em suma, o Teorema 2.5 garante que, ao tomar condições iniciais próximas no mesmo instante t_0 para uma mesma equação diferencial, as respectivas soluções dos PVIs dependem continuamente dessas condições iniciais, ou seja, a cada t, as soluções também estarão próximas uma da outra.

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS AUTÔNOMAS

A fim de tornar nossos estudos mais simples, mostraremos que as soluções de uma equação diferencial que não depende diretamente da variável t são equivalentes às soluções de uma equação do tipo $x' = f(t, x)$.

Definição 3.1 (Campo vetorial)**.** Seja E um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Um *campo vetorial* de classe C^k, $k \in \mathbb{N}$, em E é uma aplicação $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k.

Exemplo 3.1. Na Figura 3.1 a seguir, temos a representação gráfica do campo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (-2x, 3y)$.

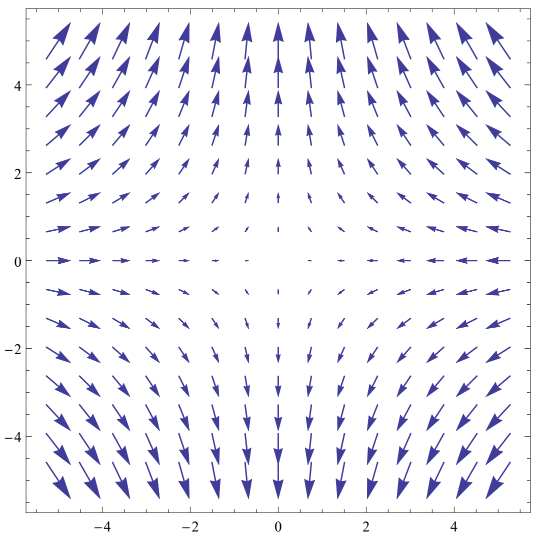


Figura 3.1: Exemplo de campo vetorial em $\mathbb{R}^2$.

Definição 3.2 (Equação diferencial autônoma)**.** Uma equação diferencial do tipo

$$x' = f(x) \tag{3.1}$$

é chamada *equação diferencial autônoma*, em que $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial.

Observação 3.1. É comum que o conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ seja chamado de "espaço de fase"do campo f.

Definição 3.3 (Trajetórias ou curvas integrais)**.** As soluções da equação (3.1), isto é, as aplicações diferenciáveis $x : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E$ tais que $x'(t) = f(x(t))$ para todo $t \in I$, são chamadas *trajetórias* ou *curvas integrais* de f ou da equação diferencial (3.1). Quando houver uma condição inicial $x(t_0) = x_0$, diremos que x é a *trajetória de f por x_0*.

Definição 3.4 (Curva integral máxima)**.** Uma curva integral $x : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E$ diz-se *máxima* se, para toda curva integral $y : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E$, tem-se $J \subseteq I$ e $y = x\big|_J$. Neste caso, I é chamado *intervalo maximal*.

Geometricamente, x é uma curva integral de f se, e somente se, seu vetor velocidade $x'(t)$ em $t \in I$ for exatamente o valor do campo f em $x(t)$.

Proposição 3.1. Se $x(t)$ é uma solução da equação diferencial autônoma $x' = f(x)$, então $y(t) = x(t + c)$, com $c \in \mathbb{R}$, também é.

Demonstração. Derivando $y(t)$, temos

$$y'(t) = x'(t + c) = f(x(t + c)) = f(y(t)).$$

■

Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no aberto U. Se tomarmos $X = (t, x) \in U$ e definirmos o campo vetorial

$$\begin{array}{rccl} F: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & X & \longmapsto & F(X) := (1, f(t, x)), \end{array}$$

então as soluções da equação diferencial $x' = f(t, x)$ em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes às soluções da equação diferencial autônoma $X' = F(X)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Com efeito, se $x(t)$ é tal que $x'(t) = f(t, x(t))$, então

$$X'(t) = \left(\frac{d}{dt}(t), \frac{d}{dt}(x(t))\right) = (1, x'(t)) = (1, f(t, x(t))) = F(X(t)).$$

Reciprocamente, se $X(u) = (t(u), x(u))$ é solução do PVI

$$\begin{cases} X'(u) = F(X(u)), \\ X(t_0) = (t_0, x_0), \end{cases} \tag{3.2}$$

então

$$X'(u) = (t'(u), x'(u)) = F(X(u)) = (1, f(t(u), x(u))),$$

isto é,

$$t'(u) = 1 \Rightarrow t(u) = u + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Pela condição inicial do PVI (3.2),

$$t_0 = t_0 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow t(u) = u$$

e, consequentemente, $x'(u) = f(u, x(u))$.

Proposição 3.2 (Propriedade de translação ou invariância de soluções)**.** Dada uma solução qualquer $x : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ da equação diferencial autônoma $x' = f(x)$, pode-se determinar soluções com qualquer condição inicial temporal em $\mathbb{R}$ e qualquer condição inicial espacial em $\mathrm{Im}(x)$.

Demonstração. Sejam $t_1 \in \mathbb{R}$ e $x(t^*) = x_1$ para algum $t^* \in I$. Definindo o caminho derivável

$$\begin{array}{rccl} \overline{x}: & J \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & t & \longmapsto & \overline{x}(t) := x(t - t_1 + t^*), \end{array}$$

em que $J = \{t \in \mathbb{R} \mid t - t_1 + t^* \in I\}$, tem-se $\overline{x}(t_1) = x_1$ e

$$\overline{x}'(t) = x'(t - t_1 + t^*) = f(x(t - t_1 + t^*)) = f(\overline{x}(t)), \quad t \in J.$$

■

A partir de agora, sempre consideraremos $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 para que a solução do problema de valor inicial (3.3) sempre exista e seja única. A propriedade acima possibilita que a solução do PVI

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

possa ser estudada tomando qualquer condição inicial temporal t_0. Convenientemente, toma-se $t_0 = 0$ na maioria dos casos. Dessa forma, pode-se dizer que, se $x(t)$ é solução de

(3.3), então $x(t + t_0)$ é solução do PVI

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

3.1 Fluxo

Algumas das principais propriedades das equações diferenciais ordinárias autônomas dizem respeito aos fluxos relacionados aos campos vetoriais que as definem.

Definição 3.5 (Fluxo no tempo t)**.** Dado $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$, seja $x : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E$ a solução máxima do problema de valor inicial $x' = f(x)$, $x(0) = x$. Dizemos que o *fluxo no tempo* t associado ao campo $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \phi_t : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & \phi_t(x) := x(t). \end{array}$$

Definição 3.6 (Fluxo de um campo vetorial)**.** A união de todos os fluxos nos tempos t é chamada de *fluxo do campo vetorial* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que é definido pela aplicação

$$\begin{array}{rccl} \phi : & I \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (t,x) & \longmapsto & \phi(t,x) := \phi_t(x) \end{array}$$

para cada $t \in I$.

Proposição 3.3. O fluxo ϕ de um campo vetorial f satisfaz a equação

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = f(\phi(t,x)),$$

para cada $t \in I$.

Demonstração. Tomemos a solução $x(t)$ do PVI $x' = f(x)$, $x(0) = x$. Por definição, para cada $t \in I$, tem-se $\phi(t,x) = \phi_t(x) = x(t)$. Derivando $\phi(t,x)$ parcialmente em relação a t, obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = x'(t) = f(x(t)) = f(\phi_t(x)) = f(\phi(t,x)).$$

■

Proposição 3.4 (Propriedade de grupo)**.** Se $\phi : \mathbb{R} \times E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é o fluxo do campo $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que é de classe C^1, então

$$\phi(t, \phi(s,x)) = \phi(t+s, x),$$

para quaisquer $s,t \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ tais que $s, t+s \in I$.

Demonstração. Considerando o PVI

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = \phi(s,x), \end{cases} \tag{3.5}$$

tem-se que $x_1(t) = \phi(t, \phi(s,x))$ e $x_2(t) = \phi(t+s, x)$ são soluções desse PVI, pela Proposição 3.3 e pelas Definições 3.6 e 3.5. Por outro lado, f é, por hipótese, de classe C^1, o que implica que a unicidade da solução do PVI (3.5) está garantida pelo Teorema 2.3. Logo, $x_1(t) = x_2(t)$. ■

Geometricamente, supondo que o fluxo represente a trajetória de uma partícula em movimento, partimos do ponto x, andamos com o fluxo ϕ um tempo s e chegamos no ponto $\phi(s,x)$. Em seguida, andamos sobre o mesmo fluxo por um tempo t e chegamos no ponto $\phi(t, \phi(s,x))$. A Proposição 3.4 nos garante que esse ponto $\phi(t, \phi(s,x))$ que obtivemos é equivalente a caminhar pelo fluxo ϕ partindo do ponto x durante um tempo $t+s$, como mostra a Figura 3.2.

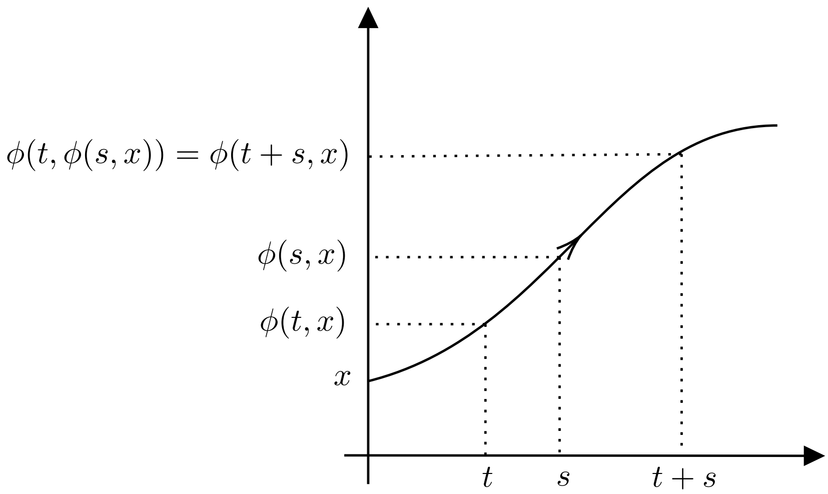


Figura 3.2: Representação geométrica da Proposição 3.4.

Um dos principais resultados da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias é uma outra propriedade do fluxo de um campo vetorial que define uma equação diferencial autônoma. Porém, para enunciá-lo e demonstrá-lo, precisamos introduzir os conceitos da próxima seção.

3.2 Singularidades

As *singularidades* são pontos de um campo vetorial cuja análise é bastante importante para auxiliar na compreensão do comportamento global das trajetórias no espaço de fase de em campo f.

Definição 3.7 (Ponto singular e ponto regular)**.** Um ponto $x_0 \in E$ é dito *ponto singular*, *singularidade* ou *ponto de equilíbrio* do campo $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se $f(x_0) = 0$ e *ponto regular* de f se $f(x_0) \neq 0$. Se x_0 é a única singularidade em uma vizinhança, dizemos que x_0 é uma *singularidade isolada*.

Proposição 3.5. Se $x_0 \in E$ é uma singularidade do campo $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$, então $x(t) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é a única solução do problema de valor inicial (3.4).

Demonstração. É imediato que $x(0) = x_0$, uma vez que $x(t) = x_0 \; \forall \, t \in \mathbb{R}$. Notemos que $x(t) = x_0$ é constante em relação a t. Como $x_0 \in E$ é um ponto singular de f, então

$$f(x(t)) = f(x_0) = 0 = x'(t).$$

■

Em suma, a Proposição 3.5 nos diz que uma singularidade x_0 de um campo f é um ponto tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$, o fluxo no tempo t associado a f em x_0 é o próprio ponto x_0, que pode ser chamado de *ponto fixo* do campo.

Definição 3.8 (Órbita)**.** Seja $x : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a solução máxima do problema de valor inicial (3.4). O conjunto $\mathcal{O}(x) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\}$ é chamado *órbita* de f por x_0, e é orientada no sentido do tempo crescente.

Definição 3.9 (Órbita periódica)**.** Uma órbita de uma solução máxima $x : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ do problema de valor inicial (3.4) é dita *periódica* se $f(x_0) \neq 0$ e existe $t^* > 0$ tal que $x(t^*) = x(0) = x_0$. O *período* T é definido como $T := \min\{t^*\}$. Neste caso, x_0 é chamado *ponto periódico* de f.

Notemos que, por definição, uma singularidade nunca será um ponto periódico.

Definição 3.10 (Retrato de fase)**.** Um *retrato de fase* de uma equação diferencial autônoma definida pelo campo $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é o conjunto E munido da decomposição em órbitas.

O domínio aberto E do campo f é completamente decomposto em órbitas do campo, uma vez que, pela existência e unicidade da solução de um PVI, por cada ponto de E passa uma única órbita. Além disso, é imediato que órbitas distintas não podem se cruzar.

3.3 O Teorema do Fluxo Tubular

Para enunciar e demonstrar um dos principais teoremas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, vamos, primeiramente, apresentar algumas definições e outros resultados auxiliares.

Definição 3.11 (Homeomorfismo). Um *homeomorfismo* do espaço métrico M sobre o espaço métrico N é uma bijeção contínua $g : M \longrightarrow N$ cuja inversa $g^{-1} : N \longrightarrow M$ é também contínua (adaptado de [6]).

Definição 3.12 (Difeomorfismo). Um *difeomorfismo* é uma bijeção diferenciável $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ (U e V abertos) cuja inversa é também diferenciável (adaptado de [7]).

Definição 3.13 (Conjugação local entre campos vetoriais). O campo $f_1 : E_1 \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em $x_1 \in E_1$ é dito *localmente topologicamente/diferenciavelmente conjugado* ao campo $f_2 : E_2 \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em $x_2 \in E_1$ se existem vizinhanças V_1 de x_1 em E_1 e V_2 de x_2 em E_2 e um homeomorfismo/difeomorfismo $g : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que $g(x_1) = x_2$ e $\phi_{(2)}(t, g(x)) = g(\phi_{(1)}(t, x))$ para qualquer $x \in V_1$ e cada t no intervalo máximo da trajetória por x de f_1 restrito a V_1. Nesse caso, dizemos que o homeomorfismo/difeomorfismo g é uma *conjugação local* entre f_1 e f_2 em x_1 e x_2, respectivamente.

Definição 3.14 (Hiperplano afim). Seja V um espaço vetorial real. Um *hiperplano afim* de V é um conjunto da forma

$$H = \{x \in V \mid f(x) = c\},$$

em que $c \in \mathbb{R}$ e $f \in V^*$. O hiperplano H tem equação $[f = c]$ (adaptado de [1]).

Seja $\overline{f} : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o campo vetorial constante definido por $\overline{f}(y) := (1, 0, \ldots, 0)$ para todo $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$. Dizemos que o fluxo de $\overline{f}$ é *tubular* ou *laminar*, uma vez que todas as trajetórias que estão no hiperplano afim $y_1 = c$ estarão também no hiperplano afim $y_1 = c + t$.

Exemplo 3.2. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = \overline{f}(x), \\ x(0) = (x_1, x_2, x_3), \end{cases}$$

em que

$$\begin{array}{rccl} \overline{f} : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \overline{f}(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0), \end{array}$$

sua solução é $x(t) = (x_1 + t, x_2, x_3)$. Na Figura 3.3, vemos o fluxo tubular $\phi_t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + t, x_2, x_3)$ de $\overline{f}$ entre os hiperplanos $x_1 = k$ e $x_1 = k + t$.

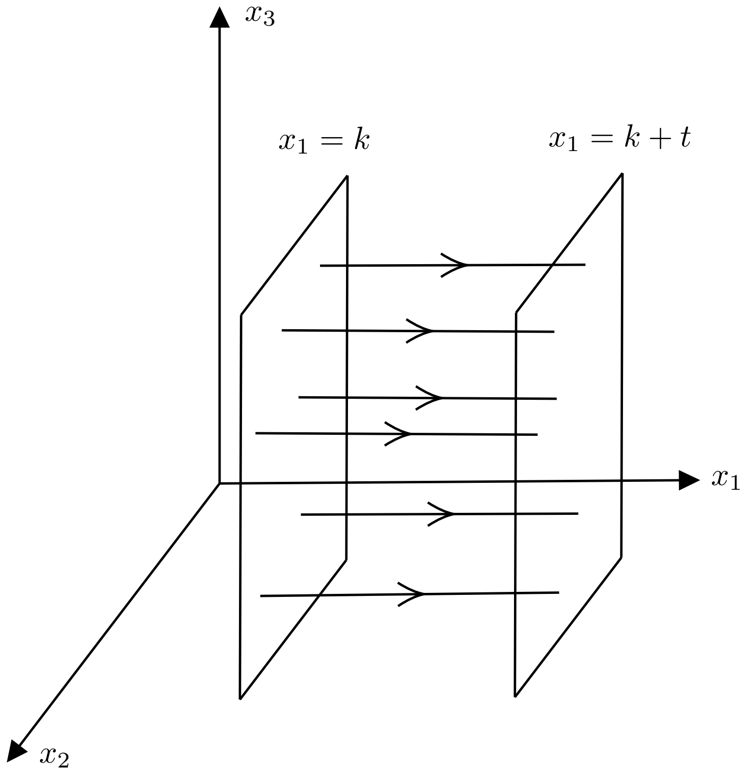


Figura 3.3: Exemplo de fluxo tubular em $\mathbb{R}^3$.

Definição 3.15 (Seção transversal)**.** Um hiperplano H contendo x_0 é chamado *seção transversal* de f por x_0 se o vetor $f(x_0)$, com origem em x_0, é tal que $f(x_0) \notin H$.

Pela continuidade de campos de vetores, para cada $x \in H$ próximo de x_0, o vetor $f(x) \notin H$. Porém, isto ocorre apenas localmente, ou seja, para x suficientemente próximo de x_0.

Exemplo 3.3. Uma seção transversal em $\mathbb{R}^3$ pode ser vista geometricamente na Figura 3.4.

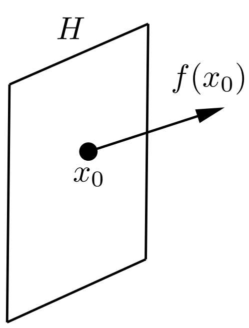


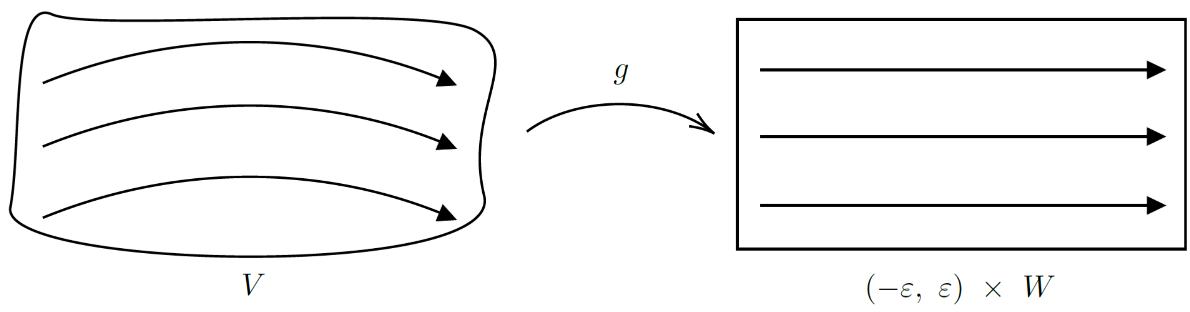
Figura 3.4: Exemplo de seção transversal em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.1 (Teorema da Função Inversa)**.** Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (U aberto) uma função de classe C^k. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível, então existe

$B(a,r) \subseteq U$ tal que $f\big|_{B(a,r)}$ é um difeomorfismo sobre um aberto V que contém $f(a)$ (adaptado de [5])

O principal resultado desta seção nos dá a garantia de que, localmente em torno de um ponto regular, todo campo se comporta como o campo constante $\overline{f}$, isto é, possui fluxo tubular.

Teorema 3.2 (Teorema do Fluxo Tubular)**.** Seja $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 definido no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $x_0 \in E$ é um ponto regular, isto é, $f(x_0) \neq 0$, então existem uma vizinhança $V \subseteq E$ de x_0, um aberto $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, uma constante $\varepsilon > 0$ e um difeomorfismo $g : V \longrightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times W$ que conjuga o fluxo ϕ_t de f em V localmente com o fluxo ψ_t de $\overline{f}$ em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$.



Demonstração. Tomemos uma seção transversal H dada por $H = x_0 + U$, em que $U = [f(x_0)]^\perp$ é o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ perpendicular a $f(x_0)$. Por simplicidade de notação, façamos uma mudança de coordenadas pela translação por $-x_0$. Dessa forma, teremos $x_0 = 0 \in E$ e $f(0) = \alpha e_1 = (\alpha, 0, ..., 0)$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, assim, o conjunto $\{(0, x_2, \ldots, x_n) \mid x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} = [e_1]^\perp = H$ é uma seção transversal de f por $x_0 = 0 \in E$. Nosso objetivo é construir uma mudança local de coordenadas $g(x) = y$ que coloque f na forma tubular. Pela continuidade do campo f, escolhemos uma bola aberta $W \subseteq H$ tal que $0 \in W$, $\overline{W} \subseteq H \cap E$ e, para cada $y \in W$, vale $f(y) \notin H$. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} h: & (-\varepsilon, \varepsilon) \times W & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (t, (0, x_2, \ldots, x_n)) & \longmapsto & \phi(t, (0, x_2, \ldots, x_n)) = \phi_t(0, x_2, \ldots, x_n). \end{array}$$

Assim, h é o fluxo de f restrito a uma vizinhança da seção transversal e, portanto, é de classe C^1. Pela Proposição 3.3,

$$\frac{\partial h}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(\phi(0,0)) = f(0) = \alpha e_1.$$

Além disso, temos

$$h(0, (0, x_2, \ldots, x_n)) = (0, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_i} = 1 \quad \forall\, i \in \{2, \ldots, n\},$$

o que implica que o determinante da matriz jacobiana de h no ponto $(0,0)$ é igual a $\alpha \neq 0$, isto é, essa matriz é invertível. Pelo Teorema da Função Inversa, h é localmente invertível em torno de $t = 0$. Como $\varepsilon > 0$ é um valor arbitrário tão pequeno quanto se queira, podemos supor, sem perda de generalidade, que h é um difeomorfismo sobre um aberto $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Notemos que V é uma vizinhança tubular da origem. Com efeito, o fluxo tubular ψ_t do campo $\overline{f}$ é dado, na decomposição de $\mathbb{R} \times H$, por $\psi_t(s,(0,x_2,\ldots,x_n)) = (s+t,(0,x_2,\ldots,x_n))$. Assim,

$$\begin{aligned} h(\psi_t(0,(0,x_2,\ldots,x_n))) &= h(t,(0,x_2,\ldots,x_n)) \\ &= \phi_t(0,x_2,\ldots,x_n) \\ &= \phi_t(h(0,(0,x_2,\ldots,x_n))). \end{aligned}$$

Por fim, mostremos que $g := h^{-1}$ conjuga localmente em V o campo f com o campo $\overline{f}$. Por construção,

$$g(0,x_2,\ldots,x_n) = (0,(0,x_2,\ldots,x_n) \quad \text{e} \quad g^{-1}(\{0\} \times (W \cap H)) = W \cap H.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \psi(t,g(0,x_2,\ldots,x_n)) &= \psi_t(0,(0,x_2,\ldots,x_n)) \\ &= g(\phi_t(0,x_2,\ldots,x_n)) \\ &= g(\phi(t,(0,x_2,\ldots,x_n)). \end{aligned}$$

■

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizar este trabalho, foi possível compreender como a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias é relevante no que diz respeito à existência e unicidade de soluções de uma problema de valor inicial e às vizinhanças de pontos regulares, pois nos permite analisar o PVI sem conhecer, explicitamente, sua solução, inferindo sobre o comportamento do campos vetoriais de equações autônomas.

Através da demonstração do Teorema de Picard e da análise dos exemplos, ficou clara a importância dessa teoria na Matemática em geral. Além de sua importância teórica, fornecendo condições necessárias para a existência e unicidade de solução, também tem sua relevância intrínseca, pois utiliza um método originalmente numérico para demonstrar analiticamente um teorema. Observamos que o método iterativo de Picard demonstra o teorema e nos fornece um algoritmo para determinar a única solução de um PVI.

Como consequência do Teorema de Picard, fizemos uma abordagem sucinta do conceito de soluções maximais, com o objetivo de explorar o domínio de soluções de um dado PVI. Além disso, vimos que essas soluções são continuamente dependentes das condições iniciais pertencentes a regiões nas quais a solução existe e é única.

Com essas ferramentas em mãos, pudemos explorar as equações diferenciais autônomas, estudando campos de vetores e singularidades, fornecendo, assim, recursos para a demonstração do Teorema do Fluxo Tubular.

Tendo em vista a riqueza de resultados da Teoria Qualitativa, bem como suas aplicações em diversas áreas, pode-se dizer que ela constitui uma forte base para inúmeras outras áreas também dentro da própria Matemática.

A elaboração do trabalho contribuiu significativamente para uma conclusão integral do curso de Licenciatura em Matemática, haja vista que proporcionou maior afinidade com leitura e interpretação de textos acadêmicos e apresentação em público, e o fortalecimento da base matemática explorada ao longo da graduação.

REFERÊNCIAS

[1] CAVALVANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. ; KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: Eduem, 2011.

[2] DOERING, C. I. e LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 6ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[3] DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTÉS, J. C. **Qualitative Theory of Planar Differential Systems**. 1ª ed. Heidelberg: Springer Berlin, 2006.

[4] FIGUEIREDO, D. G. e NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[5] LIMA, E. L. **Análise no espaço $\mathbb{R}^n$**. 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[6] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[7] LIMA, E. L. **Variedades diferenciáveis**. 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[8] SCÁRDUA, B. C. A. **Tópicos de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA (22º Colóquio Brasileiro de Matemática), 1999.

[9] SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[10] STEWART, J. **Cálculo**. Vol. 2. 7ª ed. Cengage Learning, São Paulo-SP, 2013.