UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teorema da Esfera Suave via Fluxo de Ricci

Rafael da Silva Belli

São Carlos-SP
Agosto de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teorema da Esfera Suave via Fluxo de Ricci

Rafael da Silva Belli

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Agosto de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Rafael da Silva Belli, realizada em 04/08/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Alexandre Paiva Barreto (UFSCar)

Prof. Dr. Jose Nazareno Vieira Gomes (UFSCar)

Prof. Dr. Fernando Manfio (USP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho

a Elivaine e ao Reginaldo,

meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me guiado em todos os momentos da minha vida desde de minha primeira medalha de bronze na OBMEP, em 2010, até a conclusão desta dissertação, 13 anos depois. Agradeço aos meus colegas matemáticos por tornar minha trajetória muito mais leve, divertida e especial. Agradeço ao meu orientador Alexandre Paiva Barreto, que me guiou ao mais alto nível de aprendizagem matemática, sempre me ajudando na resolução dos problemas matemáticos e, principalmente, dos problemas burocráticos . Agradeço aos meus pais, Reginaldo Lopes Belli e Elivaine Gisele da Silva Belli, por nunca questionarem o caminho que escolhi, me apoiando em tudo o que foi necessário. Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, Processo No. 2021/09177-7, pelo apoio financeiro durante o curso de Mestrado em Matemática, pois sem ele este trabalho não teria sido possível. Lembro que as opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

Resumo

O objetivo desta dissertação é o desenvolvimento teórico do fluxo de Ricci, uma equação diferencial sobre uma família de métricas riemannianas sobre uma variedade diferenciável arbitrária, e sua utilização na demonstração do chamado Teorema da Esfera Suave, que afirma que toda variedade riemanniana compacta, simplesmente conexa de dimensão maior ou igual a 4, com curvatura seccional pinçada entre 0,25 e 1 é difeomorfa a uma esfera.

Palavras-chave: Teorema da Esfera; Fluxo de Ricci; Curvatura Seccional.

Abstract

The goal of this dissertation is the theoretical development of the Ricci flow, a differential equation over a family of Riemannian metrics on an arbitrary differentiable manifold, and its use in the proof of the so-called Smooth Sphere Theorem, which states that every compact, simply connected Riemannian manifold with dimension greater than or equal to 4, with sectional curvature pinched between 0.25 and 1, is diffeomorphic to a sphere.

Conteúdo

Introdução

Em 1925, o matemático alemão Heinz Hopf demonstrou, em sua tese de doutorado, que qualquer variedade riemanniana tridimensional completa, simplesmente conexa de curvatura seccional constante é globalmente isométrica ao espaço euclidiano, esférico ou hiperbólico. Esse resultado abriu espaço para novos questionamentos. Mais precisamente, Hopf conjecturou que uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional positiva e delimitada em um certo intervalo, era uma esfera. Essa foi a chamada **Conjectura da Esfera Pinçada.** Tal conjectura atraiu a atenção da comunidade acadêmica no mundo e se iniciou uma busca pela sua demonstração. A primeira descoberta foi publicada pelo matemático americano Harry Rauch, que conseguiu demonstrar, em 1951, que se uma variedade riemanniana completa e simplesmente conexa possuísse curvatura seccional (normalizada) entre 0.76 e 1, então a mesma era homeomorfa a uma esfera. Com o passar do tempo, outros matemáticos buscaram relaxar essa hipótese sobre a curvatura seccional: Em 1960, o matemático alemão Wilhelm Klingenberg conseguiu um avanço considerável, demonstrando a mesma conjectura, mas com a curvatura seccional variando entre 0.55 e 1. Logo após isso, Klingenberg e o matemático francês Marcel Berger, demonstraram que a Conjectura da Esfera Pinçada era verdadeira para a curvatura seccional variando no intervalo $(1/4, 1]$. Tal resultado ficou conhecido como o **Teorema da Esfera 1/4-Pinçada**.

O espaço projetivo $\mathbb{CP}^n$ munido da chamada métrica Fubini-Study é uma variedade riemanniana que não é homeomorfa a uma esfera, porém, se $K_{\mathbb{CP}^n}$ é a curvatura seccional desse espaço, segue que

$$\min_{\mathbb{CP}^n} K_{\mathbb{CP}^n} = \frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad \max_{\mathbb{CP}^n} K_{\mathbb{CP}^n} = 1.$$

Ou seja, o Teorema da Esfera 1/4-Pinçada era um resultado "ótimo", no sentido de que a hipótese sobre a curvatura seccional já não podia mais ser relaxada. Uma vez que as condições sobre a curvatura foram resolvidas, iniciou-se uma busca para tentar "melhorar a bijeção"entre a variedade em questão e a esfera, no sentido de verificar se o teorema ainda é válido ao substituír a palavra "homeomorfismo"por "difeomorfismo", aqui chamaremos esse resultado de Teorema da Esfera Suave. Uma complicação a respeito desse problema é que as esferas de alta dimensão apresentam várias estruturas suaves que não são difeomorfas.

No início da década de 80 que novas estratégias para demonstrações de resultados geométricos de rigidez foram descobertas graças a introdução do chamado fluxo de Ricci realizada pelo matemático americano Richard Streit Hamilton (para mais detalhes veja [1]). Nas áreas de Análise Geométrica e Geometria Diferencial, o fluxo de Ricci é uma equação diferencial parcial para uma família suave a um parâmetro de métricas riemannianas. Por causa das semelhanças formais na estrutura matemática da equação, ela é tratada como uma forma análoga à Equação do Calor da Física, no entanto, o fluxo de Ricci é não-linear e exibe muitos fenômenos não presentes no estudo da Equação do Calor. Ao longo da década de 80, Hamilton utilizou esse fluxo para demonstrar novos resultados de relevância na Geometria Riemanniana. Uma das muitas aplicações do fluxo de Ricci foi feita pelo matemático russo Grigori Perelman, em 2003, na demonstração de um dos problemas mais importantes da matemática: A Conjectura de Poincaré.

A introdução do fluxo de Ricci feita por Hamilton veio com demonstrações de uma série de resultados de convergência, principalmente para espaços bidimensionais e tridimensionais e outros resultados parciais em altas dimensões, possibilitando novas estratégias para a resolução do Teorema da Esfera Suave, principalmente nas dimensões 3 e 4. Foi só ano de 2007 que os matemáticos Simon Brendle (alemão) e Richard Schoen (norte americano), em parceria, conseguiram arrematar o problema: Brendle e Schoen conseguiram demonstrar que a positividade da "curvatura isotrópica"era invariante sob o fluxo de Ricci (Teorema 10.1), resultado esse que foi demonstração também, de forma independente, pelo matemático vietnamita Luc Nguyen. Além disso, Brendle e Schoen conseguiram relacionar a positividade da curvatura isotrópica com a positividade da curvatura seccional (Corolário 9.1). Com isso, eles puderam se utilizar dos cones algébricos, construídos inicialmente pelos matemáticos alemães Christoph Böhm e Burkhard Wilking, para demonstrar um novo resultado de convergência para o fluxo de Ricci (Observação 11.1). O Teorema da Esfera Suave é um simples corolário desse resultado.

A monografia está dividida em 11 capítulos: O capítulo 1 apresenta a definição do fluxo de Ricci, alguns exemplos que facilitam sua compreensão e por fim, algumas equações de evolução de quantidades geométricas de uma variedade arbitrária sob uma família de métricas geral, e outras equações para uma família de métricas que evolue pelo o fluxo de Ricci. Os capítulos 2, 3 e 4 nos mostram as condições necessárias para que o fluxo de Ricci admita uma única solução em um tempo maximal. O capítulo 5 tem como meta utilizar a convergência C^∞ de Cheeger-Gromov para demonstrar o chamado Teorema de Compacidade para Fluxos, que nos diz, sob algumas condições nos tensores de curvatura riemanniana e nos raios de injetividade, que toda sequência de soluções completas do fluxo de Ricci possui uma subsequência convergente para uma solução completa do mesmo fluxo. Os capítulos 6 e 7, através de um desenvolvimento teórico de certos funcionais, procura demonstrar que variedades fechadas que são soluções do fluxo de Ricci não colapsam (Teorema 7.1), e provar também que toda solução do fluxo de Ricci produz uma solução completa (isto é, definida em um intervalo ilimitado) do mesmo (Teorema 7.3). O capítulo 8 apresenta ao leitor a teoria por trás dos cones de Böhm e Wilking, cujas propriedades foram utilizadas na demonstração do teorema final. Já os capítulos 9 e 10 apresentam, através da complexificação de espaços vetoriais, três cones no "espaço das curvaturas", suas propriedades, invariâncias sob o fluxo de Ricci e sua relação com a limitação da curvatura seccional, uma das hipóteses do teorema final. Por fim, o capítulo 11 tem como meta apenas enunciar e demonstrar o Teorema da Esfera Suave. A monografia possui um apêndice que auxilia o leitor em alguns temas, como a teoria de fibrados, noções incomuns de diferenciabilidade, e definições e resultados básicos da teoria da medida, análise funcional e álgebra linear.

Capítulo 1

Introdução ao Fluxo de Ricci

Nesse capítulo, vamos introduzir o conceito de fluxo de Ricci, uma equação diferencial parcial que envolve quantidades geométricas de uma dada variedade riemanniana. Vamos mostrar alguns exemplos e propriedades para ganhar intuição no assunto. Por fim, vamos buscar entender como algumas quantidades geométricas (como curvatura riemanniana, tensor de Ricci e curvatura escalar, por exemplo) evoluem sob uma família suave generalizada de métricas e também, como corolário, sob uma família suave de métricas que satisfaz o fluxo de Ricci. Algumas das expressões que encontraremos serão muito úteis no desenvolvimento da teoria, outras servirão para satisfazer a curiosidade do leitor.

1.1 Definição e Exemplos

Seja M uma variedade riemanniana e considere uma família suave a um parâmetro de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ em M, em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Definimos as funções $g_{ij} : M \times I \to \mathbb{R}$, em que

$$g_{ij}(x,t) = (g(t))_{ij}(x) = (g(t))_x (\partial_i(x), \partial_j(x)),$$

onde $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ é a base coordenada em torno de $x \in M$.

Além disso, considere uma variedade riemanniana (M,g) e um ponto $p \in M$. Definimos o **tensor de Ricci** em p como

$$Ric^g : (X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R(X, \partial_i, Y, \partial_j) \in \mathbb{R},$$

em que $\mathfrak{X}(M)$ é o espaço dos campos vetoriais em M, $\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1}$ é a inversa da matriz da métrica

g e R é a curvatura riemanniana de M (para mais detalhes, veja a expressão (A.13) e a Seção A.0.1). Quando $X = \partial_k$ e $Y = \partial_l$, denotamos $Ric^g(\partial_k, \partial_l)$ simplesmente por Ric^g_{kl}.

Com esses elementos bem definidos, podemos entender o conceito de fluxo de Ricci, nosso objeto central de estudo:

Definição 1.1 (Fluxo de Ricci) *Dizemos que uma família a um parâmetro de métricas suaves $\{g(t)\}_{t\in I}$ satisfaz o **fluxo de Ricci** (ou evolui sob o fluxo de Ricci) se*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric^{g(t)}_{ij}, \tag{1.1}$$

onde I é o domínio de definição das métricas e $Ric^{g(t)}$ é o tensor de Ricci da métrica $g(t)$.

Como a curvatura riemanniana depende da conexão de Levi-Civita de M (para mais detalhes veja a expressão (A.13)) que, por sua vez, depende dos símbolos de Christoffel (para mais detalhes veja a expressão (A.11)), que dependem da métrica (para mais detalhes veja a expressão (A.12)), vê-se que o fluxo de Ricci é um sistema de equações diferenciais parciais em $\{g_{kl}\}_{k,l=1}^{n}$.

Para ganharmos intuição com relação a essa equação de evolução, vamos apresentar algumas soluções do fluxo de Ricci, começando com variedades riemannianas cuja métrica inicial é Einstein, isto é, uma variedade Einstein, que é uma importante classe de variedades riemannianas que tem aplicações em física (teoria da relatividade geral) e matemática. E finalizando com variedades produto, isto é, variedades que são produtos de outras variedades.

Exemplo 1.1 (Métricas Einstein) *Comecemos caracterizando as soluções do fluxo de Ricci cuja métrica inicial, g_0, é Einstein, isto é,se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$Ric^{g_0}(X, Y) = \lambda g_0(X, Y),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric^{g(t)}_{ij} \\ g(0) = g_0 \end{cases},$$

onde $i, j = 1, ..., n$ e a métrica inicial g_0 é Einstein.

Suponhamos, primeiramente que $\lambda \neq 0$ e definimos $g : I \to \mathcal{T}^2_0(M)$, isto é, $g(t)$ é um (2,0) - tensor em M (para mais detalhes veja a Definição A.10), em que $g(t) := h(t)g_0$, onde $h : I \to \mathbb{R}^+$. Notemos que

$g(t)$ é uma métrica em M, para todo $t \in I$, pois g_0 o é e h é uma função positiva. Segue da definição de g e do fato de g_0 ser Einstein que

$$\begin{cases} -2Ric_{ij}^{g(t)} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = h'(t)\,(g_0)_{ij} = \frac{h'(t)}{\lambda} Ric_{ij}^{g_0} = \frac{h'(t)}{\lambda} Ric_{ij}^{g(t)} \\ g_0 = g(0) = h(0) g_0 \end{cases}.$$

Como $\lambda \neq 0$ e g_0 é Einstein, vemos que a igualdade $Ric^{g_0} \equiv 0$ é absurda. Portanto existe uma vizinhança de $0 \in I$ tal que $Ric^{g(t)}$ não é o tensor nulo.Nessa vizinhança temos o seguinte problema de valor inicial (PVI) em h:

$$\begin{cases} h'(t) = -2\lambda \\ h(0) = 1 \end{cases}.$$

Integrando ambos os lados da equação, vemos que a única solução desse PVI é

$$h(t) := -2\lambda t + 1,$$

em que o domínio de h é um subconjunto de I tal que $Ric^{g(t)}$ não é o tensor nulo e $h(t)$ é positivo, isto é, um subconjunto de $\left(-\infty, \frac{1}{2\lambda}\right)$. Neste mesmo domínio vemos que

$$g(t) = h(t) g_0 = (-2\lambda t + 1)\, g_0$$

é solução do fluxo de Ricci.

Se $\lambda = 0$, então $Ric_{ij}^{g_0} \equiv 0$, pois g_0 é Einstein. Como $Ric_{ij}^{g_0} = Ric_{ij}^{h(t)g_0}$ (para mais detalhes veja a expressão (A.14)), segue que

$$Ric_{ij}^{g(t)} \equiv 0,$$

para todo $t \in I$. Portanto

$$\begin{cases} 0 = -2Ric_{ij}^{g(t)} = \frac{\partial}{\partial t} g(t) \\ g(0) = g_0 \end{cases}.$$

Assim, $g(t) \equiv g_0$, para todo $t \in I$ (nesse caso, $I = \mathbb{R}$), ou seja, uma família de soluções do fluxo de Ricci cuja métrica inicial g_0 é Einstein é dada pela expressão

$$g(t) = (-2\lambda t + 1)\, g_0.$$

Pela expressão de $g(t)$, vemos que se $\lambda > 0$, a variedade encolhe, se $\lambda = 0$, a variedade permanece *constante e se $\lambda < 0$, a variedade expande.*

Exemplo 1.2 (Métricas Produto) *Sejam $(M_1^{n_1}, g_1(t))$ e $(M_2^{n_2}, g_2(t))$ variedades riemannianas que são soluções do fluxo de Ricci em um mesmo intervalo I. Segue que*

$$(M_1^{n_1} \times M_2^{n_2}, g_1(t) + g_2(t))$$

é uma solução do fluxo de Ricci. De fato, pela definição do tensor de Ricci, pela linearidade do traço e pela linearidade das métricas, vemos que

$$Ric^{g_1(t)+g_2(t)} = Ric^{g_1(t)} + Ric^{g_2(t)}.$$

Considere uma carta canônica de $M_1 \times M_2$ e denote por $\{\partial_1, ..., \partial_{n_1+n_2}\}$ a base coordenada canônica (em que $\{\partial_i\}_{i=1}^{n_1}$ é a base coordenada referente a $M_1^{n_1}$ e $\{\partial_j\}_{i=n_1+1}^{n_1+n_2}$ é a referente a $M_2^{n_2}$). Temos três casos:

Se $\partial_i, \partial_j \in T_pM_1^{n_1}$

$$\begin{aligned}
-2\left(Ric^{g_1(t)+g_2(t)}\right)((\partial_i,0),(\partial_j,0)) &= -2\left(Ric^{g_1(t)}\right)_{ij} - 2\left(Ric^{g_2(t)}\right)(0,0) \\
&= -2\left(Ric^{g_1(t)}\right)_{ij} = \frac{\partial (g_1)_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (g_2)}{\partial t}(0,0) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(g_1+g_2)((\partial_i,0),(\partial_j,0))
\end{aligned}$$

Se $\partial_i, \partial_j \in T_pM_2^{n_2}$

$$\begin{aligned}
-2\left(Ric^{g_1(t)+g_2(t)}\right)((0,\partial_i),(0,\partial_j)) &= -2\left(Ric^{g_1(t)}\right)(0,0) - 2\left(Ric^{g_2(t)}\right)_{ij} \\
&= -2\left(Ric^{g_2(t)}\right)_{ij} = \frac{\partial (g_1)_{00}}{\partial t} + \frac{\partial (g_2)_{ij}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(g_1+g_2)((0,\partial_i),(0,\partial_j)).
\end{aligned}$$

Por fim, se $\partial_i \in T_pM_1^{n_1}$ e $\partial_j \in T_pM_2^{n_2}$, então

$$\begin{aligned}
-2\left(Ric^{g_1(t)+g_2(t)}\right)((\partial_i,0),(0,\partial_j)) &= -2\left(Ric^{g_1(t)}\right)(\partial_i,0) - 2\left(Ric^{g_2(t)}\right)(0,\partial_j) \\
&= \frac{\partial (g_1)}{\partial t}(\partial_i,0) + \frac{\partial (g_2)}{\partial t}(0,\partial_j) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(g_1+g_2)((\partial_i,0),(0,\partial_j)).
\end{aligned}$$

Ou seja, $(M_1 \times M_2, g_1(t) + g_2(t))$ é solução do fluxo de Ricci.

Invariância e Reescalonamento

A curvatura riemanniana de uma variedade riemannianna M pode ser pensada como um valor que mede a obstrução da mesma de ser localmente isométrico ao espaço euclidiano. Mais ainda, lembremos que

Proposição 1.1 (Invariância por Isometrias) *A curvatura riemanniana R é invariante por isometrias locais: Considere duas variedades riemannianas (M, g), $\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}\right)$ e uma isometria $\varphi : (M, g) \to \left(\widetilde{M}, \widetilde{g}\right)$ entre elas. Então $\varphi^* \widetilde{R} = R$, em que R e $\widetilde{R}$ são as curvaturas riemannianas de M e de $\widetilde{M}$, respectivamente (para mais detalhes veja a Seção A.0.1)*

Demonstração. De fato, dado $x \in M$, pelo fato de φ ser uma isometria, vemos que

$$\begin{aligned}
\left(\varphi^* \widetilde{R}\right)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) &= \widetilde{R}(\varphi_*\partial_i, \varphi_*\partial_j, \varphi_*\partial_k, \varphi_*\partial_l) = \widetilde{g}\left(\widetilde{R}(\varphi_*\partial_i, \varphi_*\partial_j)\varphi_*\partial_k, \varphi_*\partial_l\right) \\
&= g\left(\varphi^*\left(\widetilde{R}(\varphi_*\partial_i, \varphi_*\partial_j)\varphi_*\partial_k\right), \partial_l\right) \\
&= g\left(\varphi^*\left(\widetilde{\nabla}_{\varphi_*\partial_i}\left(\widetilde{\nabla}_{\varphi_*\partial_j}\varphi_*\partial_k\right) - \widetilde{\nabla}_{\varphi_*\partial_j}\left(\widetilde{\nabla}_{\varphi_*\partial_i}\varphi_*\partial_k\right) - \widetilde{\nabla}_{[\varphi_*\partial_i, \varphi_*\partial_j]}\varphi_*\partial_k\right), \partial_l\right) \\
&= g\left(\varphi^*\left(\widetilde{\nabla}_{\varphi_*\partial_i}\varphi_*\varphi^*\left(\widetilde{\nabla}_{\varphi_*\partial_j}\varphi_*\partial_k\right) - \widetilde{\nabla}_{\varphi_*\partial_j}\varphi_*\varphi^*\left(\widetilde{\nabla}_{\varphi_*\partial_i}\varphi_*\partial_k\right) - \widetilde{\nabla}_{[\varphi_*\partial_i, \varphi_*\partial_j]}\varphi_*\partial_k\right), \partial_l\right) \\
&= g\left(\left(\nabla_{\partial_i}\varphi^*\left(\widetilde{\nabla}_{\varphi_*\partial_j}\varphi_*\partial_k\right) - \nabla_{\partial_j}\varphi^*\left(\widetilde{\nabla}_{\varphi_*\partial_i}\varphi_*\partial_k\right) - \varphi^*\widetilde{\nabla}_{\varphi_*[\partial_i, \partial_j]}\varphi_*\partial_k\right), \partial_l\right) \\
&= g\left(\left(\nabla_{\partial_i}\left(\nabla_{\partial_j}\partial_k\right) - \nabla_{\partial_j}\left(\nabla_{\partial_i}\partial_k\right) - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]}\partial_k\right), \partial_l\right) = g\left(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l\right) \\
&= R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l),
\end{aligned}$$

em que $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ é uma base coordenada em torno de $x \in M$. ■

Segue disso que se $\varphi : (M, g(t)) \to \left(\widetilde{M}, \widetilde{g}(t)\right)$ é um difeomorfismo que não depende do tempo tal que $g(t) = (\varphi^*\widetilde{g})(t)$ e $\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}(t)\right)$ é solução do fluxo de Ricci, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial (\varphi^*\widetilde{g})_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left((\varphi^*\widetilde{g})(\partial_i, \partial_j)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{g}(\varphi_*\partial_i, \varphi_*\partial_j)\right) \\
&= \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial t}(\varphi_*\partial_i, \varphi_*\partial_j) + \widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi_*\partial_i, \varphi_*\partial_j\right) + \widetilde{g}\left(\varphi_*\partial_i, \frac{\partial}{\partial t}\varphi_*\partial_j\right) \\
&= \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial t}(\varphi_*\partial_i, \varphi_*\partial_j) = \varphi^*\frac{\partial \widetilde{g}_{ij}}{\partial t} = \varphi^*\left(-2Ric^{\widetilde{g}}_{ij}\right) = -2\varphi^*\left(Tr_{\widetilde{g}}\widetilde{R}(\partial_i, \cdot, \partial_j, \cdot)\right) \\
&= -2\left(Tr_g\varphi^*\widetilde{R}(\partial_i, \cdot, \partial_j, \cdot)\right) = -2Tr_g R(\varphi^*\partial_i, \cdot, \varphi^*\partial_j, \cdot) \\
&= -2Ric^g_{ij},
\end{aligned}$$

em que, para a 4^a igualdade foi usado que g é um (2,0) - tensor e a Proposição A.7. Ou seja, $(M, g(t))$ também é solução do fluxo de Ricci, e assim conluímos que o fluxo de Ricci é invariante por difeomorfismos.

Podemos realizar uma análise das singularidades (se houver) do fluxo de Ricci. A invariância por difeomorfismos que não dependem do tempo nos permite mudar o sistema de coordenadas: Se $g(x,t)$ satisfaz o fluxo de Ricci, então $g(x, t-t_0)$ também satisfará, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $t - t_0 \in I$ com $t \in I$. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g\left(x, t-t_0\right)\right) = \frac{\partial g}{\partial t}\left(x, t-t_0\right) = -2Ric^{g(x,t-t_0)},$$

para todo $(x,t) \in M \times I$. Mais ainda, se g é uma solução do fluxo de Ricci e $\lambda \neq 0$, segue que podemos definir

$$g_\lambda\left(x,t\right) := \lambda^2 g\left(x, \frac{t}{\lambda^2}\right).$$

Como $\lambda^2 > 0$, vemos que $g_\lambda(x,t)$ é uma métrica, para todo $(x,t) \in M \times I$. Além disso, g_λ também é solução do fluxo de Ricci, pois

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g_\lambda\left(x,t\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda^2 g\left(x, \frac{t}{\lambda^2}\right)\right) = \frac{\partial g}{\partial t}\left(x, \frac{t}{\lambda^2}\right) = -2Ric^{g\left(x, \frac{t}{\lambda^2}\right)} = -2Ric^{g_\lambda(x,t)},$$

para todo $(x,t) \in M \times I$. O principal uso desse reescalonamento é para analisar singularidades do fluxo de Ricci. Nessas situações, a curvatura riemanniana tende ao infinito, portanto reescalonamos a métrica de modo a obter uma curvatura limitada e um limite suave para ela.

1.2 O Laplaciano da Curvatura Riemanniana

Dada uma variedade riemanniana (M,g), o laplaciano do (4,0) - tensor de curvatura (curvatura riemannianna) R é dado pelo seguinte (4,0) - tensor:

$$\Delta R = Tr_g \nabla^2 R,$$

em que Tr_g é a contração métrica (ou traço métrico) (para mais detalhes veja a Seção A) e ∇^2 é a segunda derivada covariante de R (para mais detalhes veja a Seção A.0.1). Agora vamos nos dedicar a encontrar uma expressão do laplaciano de R que dependa do tensor de Ricci. Essa expressão será utilizada no cálculo da variação da curvatura sob o fluxo de Ricci. Para fazer isso, comecemos introduzindo os termos quadráticos B_{ijkl} que serão úteis na simplificação dos cálculos.

Definição 1.2 (Tensor de Curvatura Quadrática) *Seja M uma variedade riemanniana. Definimos* *o* ***tensor de curvatura quadrática*** *como o (4,0) - tensor* $B \in \mathcal{T}_0^4(M)$, *em que*

$$B(X,Y,W,Z) = g(R(X,\cdot,Y,\bigstar), R(W,\cdot,Z,\bigstar)),$$

em que g *é um produto interno de tensores de mesma natureza (para mais detalhes veja o Exemplo A.5) ou seja,*

$$B(X,Y,W,Z) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ij}g^{kl}R(X,\partial_i,Y,\partial_k)R(W,\partial_j,Z,\partial_l).$$

Em coordenadas locais, temos que

$$X = \sum_{a=1}^{n} x^a\partial_a \ , \ Y = \sum_{b=1}^{n} y^b\partial_b \ , \ W = \sum_{c=1}^{n} w^c\partial_c \text{ e } Z = \sum_{d=1}^{n} z^d\partial_d.$$

Usando essas igualdades na definição de B, vemos que

$$\begin{aligned}
B(X,Y,W,Z) &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ij}g^{kl}R(X,\partial_i,Y,\partial_k)R(W,\partial_j,Z,\partial_l) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ij}g^{kl}R\left(\sum_{a=1}^{n} x^a\partial_a,\partial_i,\sum_{b=1}^{n} y^b\partial_b,\partial_k\right)R\left(\sum_{c=1}^{n} w^c\partial_c,\partial_j,\sum_{d=1}^{n} z^d\partial_d,\partial_l\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l,a,b,c,d=1}^{n} x^a y^b w^c z^d g^{ij}g^{kl}R(\partial_a,\partial_i,\partial_b,\partial_k)R(\partial_c,\partial_j,\partial_d,\partial_l) \\
&= \sum_{i,j,k,l,a,b,c,d=1}^{n} x^a y^b w^c z^d g^{ij}g^{kl}R_{aibk}R_{cjdl}.
\end{aligned}$$

Segue disso que

$$B_{efgh} = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ij}g^{kl}R_{eifk}R_{gjhl}.$$

Estamos aptos ao cálculo (e à compreensão da expressão) do laplaciano do (4,0) - tensor de curvatura:

Proposição 1.2 (Laplaciano da curvatura) *Em uma variedade riemanniana* (M,g), *o laplaciano do (4,0) - tensor de curvatura* R *satisfaz*

$$\begin{aligned}
(\Delta R)_{ijkl} &= \left(\nabla^2 Ric\right)_{ikjl} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{iljk} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{jkil} + \left(\nabla^2 Ric\right)_{jlik} + 2\left(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}\right) \\
&\quad + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}Ric_{iq}R_{pjkl} - \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}Ric_{jq}R_{pikl}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Comecemos mostrando que

$$\left(\nabla^2 R\right)_{pqijkl} + \left(\nabla^2 R\right)_{pijqkl} + \left(\nabla^2 R\right)_{pjqikl} = 0$$

Como é uma igualdade tensorial (o lado esquerdo é, obviamente, um tensor e o lado esquerdo é o tensor nulo), podemos prová-la em coordenadas normais. Utilizando a Proposição A.7, concluímos que

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2 R\right)_{pqijkl} + \left(\nabla^2 R\right)_{pijqkl} + \left(\nabla^2 R\right)_{pjqikl} &= \left(\nabla_{\partial_p}\left(\nabla R\right)\right)_{qijkl} + \left(\nabla_{\partial_p}\left(\nabla R\right)\right)_{ijqkl} + \left(\nabla_{\partial_p}\left(\nabla R\right)\right)_{jqikl} \\
&= \nabla_{\partial_p}\left(\left(\nabla R\right)_{qijkl}\right) + \nabla_{\partial_p}\left(\left(\nabla R\right)_{ijqkl}\right) + \nabla_{\partial_p}\left(\left(\nabla R\right)_{jqikl}\right) \\
&= \nabla_{\partial_p}\left(\left(\nabla R\right)_{qijkl} + \left(\nabla R\right)_{ijqkl} + \left(\nabla R\right)_{jqikl}\right) \\
&= \nabla_{\partial_p}\left(0\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

em que foram utilizadas as propriedades de coordenadas normais na segunda igualdade e a segunda identidade de Bianchi (para mais detalhes veja a expressão (A.23)) na penúltima igualdade. Segue disso e da definição de laplaciano para tensores (para mais detalhes veja a Seção A.0.1) que o laplaciano da curvatura riemanniana é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\left(\Delta R\right)_{ijkl} &= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\nabla^2 R\right)_{pqijkl} = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(-\left(\nabla^2 R\right)_{pijqkl} - \left(\nabla^2 R\right)_{pjqikl}\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\left(\nabla^2 R\right)_{piqjkl} - \left(\nabla^2 R\right)_{pjqikl}\right).
\end{aligned}$$

Trocando q com j no primeiro termo, concluímos que

$$\left(\Delta R\right)_{ijkl} = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\left(\nabla^2 R\right)_{piqjkl} - \left(\nabla^2 R\right)_{pjqikl}\right).$$

Pela expressão (A.13) e pela Proposição A.13, vemos que

$$\left(R\left(\partial_i, \partial_p\right) R\right)_{qjkl} = \left(\nabla^2 R\right)_{piqjkl} - \left(\nabla^2 R\right)_{ipqjkl},$$

ou seja, isolando um dos termos do lado direito da igualdade acima concluímos que

$$\left(\nabla^2 R\right)_{piqjkl} = \left(R\left(\partial_i, \partial_p\right) R\right)_{qjkl} + \left(\nabla^2 R\right)_{ipqjkl}. \tag{1.2}$$

Pela segunda identidade de Bianchi, segue que o segundo termo do lado direito da igualdade acima pode ser escrito como a seguinte diferença:

$$\left(\nabla^2 R\right)_{ipqjkl} = \left(\nabla^2 R\right)_{ikjqlp} - \left(\nabla^2 R\right)_{iljqkp}.$$

Tomando a contração métrica (ou traço métrico) e usando a Proposição A.15, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\nabla^2 R\right)_{ipqjkl} &= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\nabla^2 R\right)_{ikjqlp} - \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\nabla^2 R\right)_{iljqkp} \\ &= \left(\nabla^2 Ric\right)_{ikjl} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{iljk}.\end{aligned}$$

Como R_{qjkl} é uma função suave em M, segue do teorema de Schwarz que $R\left(\partial_i, \partial_p\right)\left(R_{qjkl}\right) = 0$. Olhando agora para o primeiro termo do lado direito da expressão (1.2), segue da Proposição A.12 que:

$$\begin{aligned}\left(R\left(\partial_i, \partial_p\right) R\right)_{qjkl} &= R\left(\partial_i, \partial_p\right)\left(R_{qjkl}\right) - R\left(R\left(\partial_i, \partial_p\right)\partial_q, \partial_j, \partial_k, \partial_l\right) - R\left(\partial_q, R\left(\partial_i, \partial_p\right)\partial_j, \partial_k, \partial_l\right) \\ &\quad - R\left(\partial_q, \partial_j, R\left(\partial_i, \partial_p\right)\partial_k, \partial_l\right) - R\left(\partial_q, \partial_j, \partial_k, R\left(\partial_i, \partial_p\right)\partial_l\right) \\ &= -R\left(R\left(\partial_i, \partial_p\right)\partial_q, \partial_j, \partial_k, \partial_l\right) - R\left(\partial_q, R\left(\partial_i, \partial_p\right)\partial_j, \partial_k, \partial_l\right) \\ &\quad - R\left(\partial_q, \partial_j, R\left(\partial_i, \partial_p\right)\partial_k, \partial_l\right) - R\left(\partial_q, \partial_j, \partial_k, R\left(\partial_i, \partial_p\right)\partial_l\right) \\ &= -R\left(\sum_{s=1}^{n} R_{ipq}^{s}\partial_s, \partial_j, \partial_k, \partial_l\right) - R\left(\partial_q, \sum_{s=1}^{n} R_{ipj}^{s}\partial_s, \partial_k, \partial_l\right) \\ &\quad - R\left(\partial_q, \partial_j, \sum_{s=1}^{n} R_{ipk}^{s}\partial_s, \partial_l\right) - R\left(\partial_q, \partial_j, \partial_k, \sum_{s=1}^{n} R_{ipl}^{s}\partial_s\right) \\ &= \sum_{s=1}^{n} -R_{ipq}^{s} R_{sjkl} - R_{ipj}^{s} R_{qskl} - R_{ipk}^{s} R_{qjsl} - R_{ipl}^{s} R_{qjks}.\end{aligned}$$

Pela definição do (3,1) - tensor de curvatura (para mais detalhes veja a expressão (A.14)), vemos que

$$\left(R\left(\partial_i, \partial_p\right) R\right)_{qjkl} = \sum_{m,s=1}^{n} g^{ms}\left(R_{piqm} R_{sjkl} + R_{pijm} R_{qskl} + R_{pikm} R_{qjsl} + R_{pilm} R_{qjks}\right).$$

onde usamos que

$$\sum_{m,s=1}^{n} g^{ms} R_{piqm} R_{sjkl} = \sum_{m,s,a=1}^{n} R_{piq}^{a} g^{ms} g_{am} R_{sjkl} = \sum_{s,a=1}^{n} R_{piq}^{a} R_{sjkl}\delta_{sa} = \sum_{s=1}^{n} R_{piq}^{s} R_{sjkl}.$$

Portanto, temos que

$$\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \left(R\left(\partial_i, \partial_p\right) R\right)_{qjkl} = \sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} \left(R_{piqm} R_{sjkl} + R_{pijm} R_{qskl} + R_{pikm} R_{qjsl} + R_{pilm} R_{qjks}\right).$$

Vamos tentar simplificar essa expressão: Para o primeiro termo, temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} R_{piqm} R_{sjkl} &= \sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} R_{ipmq} R_{sjkl} = \sum_{p,q,m,s,a=1}^{n} g^{pq} g^{ms} R_{ipm}^{a} g_{aq} R_{sjkl} \\
&= \sum_{p,m,s,a=1}^{n} g^{ms} R_{ipm}^{a} \delta_{ap} R_{sjkl} = \sum_{p,m,s=1}^{n} g^{ms} R_{ipm}^{p} R_{sjkl} \\
&= \sum_{m,s=1}^{n} g^{ms} Ric_{im} R_{sjkl} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{iq} R_{pjkl}.
\end{aligned}$$

Para o segundo termo, usando a primeira identidade de Bianchi (para mais detalhes veja a expressão (A.22)), obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} R_{pijm} R_{qskl} &= \sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} R_{pijm} \left(-R_{skql} - R_{kqsl}\right) \\
&= \sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} \left(-R_{pijm} R_{skql} - R_{pijm} R_{kqsl}\right) \\
&= \sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} \left(R_{pimj} R_{qlsk} - R_{pimj} R_{qksl}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} R_{qlsk} R_{pimj} - \sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} R_{pimj} R_{qksl} \\
&= \sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} R_{ipjm} R_{lqks} - \sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} R_{ipjm} R_{kqls} \\
&= B_{ijlk} - B_{ijkl}.
\end{aligned}$$

Para o terceiro e o quarto termos, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} \left(R_{pikm} R_{qjsl} + R_{pilm} R_{qjks}\right) &= \sum_{p,q,m,s=1}^{n} g^{pq} g^{ms} \left(-R_{ipkm} R_{jqls} + R_{iplm} R_{jqks}\right) \\
&= -B_{ikjl} + B_{iljk}.
\end{aligned}$$

Ou seja, de tudo isso concluímos que

$$\begin{aligned}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\nabla^2 R\right)_{piqjkl} &= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\nabla^2 R\right)_{ipqjkl} + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(R\left(\partial_i,\partial_p\right)R\right)_{qjkl} \\ &= \left(\nabla^2 Ric\right)_{ikjl} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{iljk} + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{iq} R_{pjkl} + B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}.\end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\nabla^2 R\right)_{pjqikl} = \left(\nabla^2 Ric\right)_{jkil} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{jlik} + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{jq} R_{pikl} + B_{jilk} - B_{jikl} - B_{jkil} + B_{jlik}$$

Usando que $B_{ijlk} = B_{jilk} = B_{lkij}$, concluímos que

$$\begin{aligned}(\Delta R)_{ijkl} &= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\left(\nabla^2 R\right)_{piqjkl} - \left(\nabla^2 R\right)_{pjqikl}\right) \\ &= \left(\nabla^2 Ric\right)_{ikjl} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{iljk} + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{iq} R_{pjkl} + B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk} \\ &\quad - \left(\left(\nabla^2 Ric\right)_{jkil} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{jlik} + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{jq} R_{pikl} + B_{jilk} - B_{jikl} - B_{jkil} + B_{jlik}\right) \\ &= \left(\nabla^2 Ric\right)_{ikjl} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{iljk} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{jkil} + \left(\nabla^2 Ric\right)_{jlik} + 2\left(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}\right) \\ &\quad + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{iq} R_{pjkl} - \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{jq} R_{pikl}.\end{aligned}$$

∎

1.3 Variação de Algumas Quantidades Geométricas

Nesta seção, estabelecemos o cálculo da derivada temporal de uma métrica e da conexão de Levi-Civita associada. A partir disso obtemos expressões variacionais para a curvatura riemanniana e para várias outras quantidades geométricas.

Seja $\{g(t)\}_{t\in I}$ uma família suave de métricas em uma variedade M. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, defina

$$g(X,Y) : (x,t) \in M \times I \mapsto g(x,t)(X(x),Y(x)) \in \mathbb{R}.$$

Definimos a derivada temporal de $g(t)$ como sendo a família de (2,0) - tensores $\left\{\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_t\right\}_{t\in I}$, suave no parâmetro t, onde

$$\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{t_0}(X,Y) := \frac{\partial}{\partial t}\left(g\left(X,Y\right)\right)_{|t=t_0},$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (campos vetoriais em M que não dependem do tempo) e todo $t_0 \in I$. Como os campos não dependem do tempo, a definição acima concorda com a Proposição A.7.

Com isso, temos a aplicação

$$\frac{\partial g}{\partial t} : (X, Y, t) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times I \to \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_t (X, Y) \in C^\infty(M).$$

Sabemos que, em coordenadas locais, a métrica pode ser expressada por (para mais detalhes veja a Seção A)

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Segue disso que

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} dx^i \otimes dx^j.$$

Logo, derivar a métrica pode ser tratada como derivar suas componentes de acordo com uma base fixada.

Como a conexão de Levi-Civita pode ser expressada em termos da métrica, segue que ela também depende do tempo. De modo similar, definimos a derivada temporal da conexão $\nabla = \nabla^{(t)}$ fazendo

$$\frac{\partial \nabla}{\partial t}(X, Y) := \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_X Y\right),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (concordando novamente com a Proposição A.7). Como a conexão satisfaz a regra do produto, segue que ∇ não é tensor. Porém, de acordo com o próximo resultado, a derivada temporal de ∇ é um tensor.

Lema 1.1 ($\frac{\partial \nabla}{\partial t}$ é um tensor) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g\left(t\right)\}_{t \in I}$ sobre uma variedade diferenciável M e seja $\nabla^{(t)}$ a conexão de Levi-Civita de $(M, g(t))$, então $\frac{\partial \nabla}{\partial t} \in \mathcal{T}_1^2(M)$. Em outras palavras, apesar de ∇ não ser um tensor (pois vale a regra do produto), $\frac{\partial \nabla}{\partial t}$ é um tensor.*

Demonstração. A linearidade da soma vale devido à linearidade da soma da própria conexão ∇ e da linearidade de $\frac{\partial}{\partial t}$. Dado $f \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos que independem do tempo, segue que:

$$\frac{\partial \nabla}{\partial t}(X, fY) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_X (fY)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(X(f)\,Y + f\nabla_X Y\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(f\nabla_X Y\right) = f\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_X Y\right) = f\frac{\partial \nabla}{\partial t}(X, Y)$$

Além disso f sai também na primeira coordenada, pois

$$\frac{\partial\nabla}{\partial t}(fX,Y)=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{fX}Y)=\frac{\partial}{\partial t}(f\nabla_X Y)=f\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_X Y)=f\frac{\partial\nabla}{\partial t}(X,Y).$$

■

Uma observação relevante a se fazer é que **o lema acima vale apenas para campos que independem do tempo.** O próximo lema nos dá uma generalização do conceito de $\frac{\partial\nabla}{\partial t}$:

Lema 1.2 (Variação da conexão (generalizada)) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M e seja $\nabla^{(t)}$ a conexão de Levi-Civita de $(M,g(t))$. Se $X\in\mathfrak{X}(M)$ é independente do tempo e $V:I\to\mathfrak{X}(M)$ é um campo que depende do tempo, então:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_X V)=\frac{\partial\nabla}{\partial t}(X,Y)+\nabla_X\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right).$$

Demonstração. Fixe um campo $X\in\mathfrak{X}(M)$ que independe do tempo. Como $\nabla_X=\nabla_X^{(t)}:\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$, segue que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_X^{(t)}V(t)\right)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\nabla_X^{(t+\delta)}(V(t+\delta))-\nabla_X^{(t)}(V(t))}{\delta},$$

ou em uma outra forma de escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_X^{(t)}V(t)\right)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\nabla^{(t+\delta)}(X,V(t+\delta))-\nabla^{(t)}(X,V(t))}{\delta}.$$

Mas temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}\nabla^{(t+\delta)}(X,V(t+\delta))-\nabla^{(t)}(X,V(t)) &= \nabla^{(t+\delta)}(X,V(t+\delta))-\nabla^{(t+\delta)}(X,V(t))\\ &\quad+\nabla^{(t+\delta)}(X,V(t))-\nabla^{(t)}(X,V(t))\\ \\ &= \nabla^{(t+\delta)}(X,V(t+\delta))-\nabla^{(t+\delta)}(X,V(t))\\ &\quad+\left(\nabla^{(t+\delta)}-\nabla^{(t)}\right)(X,V(t)).\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a derivada $\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_X^{(t)} V(t)\right)$ tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_X^{(t)} V(t)\right) &= \lim_{\delta\to 0}\frac{\nabla_X^{(t+\delta)}(V(t+\delta)) - \nabla_X^{(t)}(V(t))}{\delta} \\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{\nabla^{(t+\delta)}(X, V(t+\delta)) - \nabla^{(t+\delta)}(X, V(t)) + \left(\nabla^{(t+\delta)} - \nabla^{(t)}\right)(X, V(t))}{\delta} \\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{\nabla^{(t+\delta)}(X, V(t+\delta)) - \nabla^{(t+\delta)}(X, V(t))}{\delta} + \lim_{\delta\to 0}\frac{\left(\nabla^{(t+\delta)} - \nabla^{(t)}\right)(X, V(t))}{\delta} \\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{\nabla^{(t+\delta)}(X, V(t+\delta) - V(t))}{\delta} + \left(\lim_{\delta\to 0}\frac{\left(\nabla^{(t+\delta)} - \nabla^{(t)}\right)}{\delta}\right)(X, V(t)) \\
&= \nabla^{(t)}\left(X, \lim_{\delta\to 0}\frac{V(t+\delta) - V(t)}{\delta}\right) + \left(\lim_{\delta\to 0}\frac{\left(\nabla^{(t+\delta)} - \nabla^{(t)}\right)}{\delta}\right)(X, V(t)) \\
&= \nabla^{(t)}\left(X, \frac{\partial V}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla\right)(X, V(t)),
\end{aligned}$$

em que foram usados na penúltima igualdade que δ é uma constante, portanto podemos colocá-lo dentro do segundo argumento de $\nabla^{(t)}$, e que $\nabla^{(t)}$ é suave, logo o limite também entra no argumento. ∎

Mais ainda, gostaríamos de derivar os símbolos de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = dx^k\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j\right)$ da conexão de Levi-Civita ∇. Para fazer isso, consideremos então a aplicação

$$\Gamma : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \to C^\infty(M),$$

em que

$$\Gamma(X, Y, \omega) := \omega(\nabla_X Y), \tag{1.3}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \mathcal{T}_0^1(M)$. Notemos que, localmente, $\Gamma\left(\partial_i, \partial_j, dx^k\right)$ é justamente o símbolo de Christoffel Γ_{ij}^k. Portanto, de modo análogo podemos definir a derivada temporal dessa aplicação:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(X, Y, \omega) := \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma(X, Y, \omega)),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \mathcal{T}_0^1(M)$. Como veremos, tal derivada temporal é um tensor:

Proposição 1.3 (Variação de gama) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M e Γ a aplicação definida pela expressão (1.3). Então $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ é tensorial.*

Demonstração. De fato, temos que a aplicação Γ se resume a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(X,Y,\omega) &= \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma(X,Y,\omega)) = \frac{\partial}{\partial t}(\omega(\nabla_X Y)) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla_X Y\right) \\ &= \omega\left(\frac{\partial \nabla}{\partial t}(X,Y)\right), \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \mathcal{T}_0^1(M)$. Basta usar esta igualdade e o fato de que $\frac{\partial \nabla}{\partial t}$ é tensor e obtemos o resultado. ■

Agora vamos encontrar algumas equações de evolução de quantidades geométricas sob uma família arbitrária de métricas. Sendo que algumas delas serão úteis no desenvolvimento teórico para a demonstração do teorema da esfera suave. Comecemos com a variação da matriz inversa da métrica, passando pelos simbolos de Christoffel, alguns coeficientes da curvatura riemanniana, pelo tensor de Ricci e chegando finalmente na curvatura escalar e na forma de volume:

Proposição 1.4 (Variação da inversa da métrica) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M. A variação de $(g(t))^{-1}$, a matriz inversa da métrica $g(t)$, com relação ao tempo é dada por*

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} = -\sum_{k,l=1}^{n} g^{ik} g^{jl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial t}. \tag{1.4}$$

Demonstração. Por definição de matriz inversa, $\sum_{j=1}^{n} g^{ij} g_{jk} = \delta_{ik}$. Derivando essa expressão, vemos que

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij} g_{jk}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}\right) g_{jk} + g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}(g_{jk}),$$

portanto, isolando o primeiro termo do lado direito da igualdade concluímos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}\right) g_{jk} = -\sum_{j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}(g_{jk}).$$

Em termos matriciais, a igualdade acima se resume ao seguinte:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}(g^{11}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}(g^{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t}(g^{n1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}(g^{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}(g_{11}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}(g_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial s}(g_{n1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}(g_{nn}) \end{pmatrix},$$

ou seja, isolando a primeira matriz do lado esquerdo da igualdade acima, vemos que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{11}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{1n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{n1}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{nn}\right) \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\left(g_{11}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}\left(g_{1n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(g_{n1}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t}\left(g_{nn}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n g^{1j}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{j1}\right) & \cdots & \sum_{j=1}^n g^{1j}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{jn}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n g^{nj}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{j1}\right) & \cdots & \sum_{j=1}^n g^{nj}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{jn}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} \sum_{j,k=1}^n g^{1j}g^{k1}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{jk}\right) & \cdots & \sum_{j,k=1}^n g^{1j}g^{kn}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{jk}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j,k=1}^n g^{nj}g^{k1}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{jk}\right) & \cdots & \sum_{j,k=1}^n g^{nj}g^{kn}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{jk}\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, olhando cada coordenada das matrizes vemos a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ab}\right) = -\sum_{k,l=1}^{n} g^{ak}g^{bl}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{kl}\right).$$

∎

Lema 1.3 (Variação dos símbolos de Christoffel) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M. A variação dos símbolos de Christoffel com relação ao tempo é dada por*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_{ij}^{k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left\{\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijl} + \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jil} - \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lij}\right\}.$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana (Teorema A.1), os símbolos de Christoffel são dados, localmente, pela seguinte expressão:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left\{\partial_i\left(g_{jl}\right) + \partial_j\left(g_{il}\right) - \partial_l\left(g_{ij}\right)\right\}.$$

Portanto ao usar a regra do produto e o teorema de Schwarz, segue que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_{ij}^{k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left\{g^{lk}\left\{\partial_i\left(g_{jl}\right) + \partial_j\left(g_{il}\right) - \partial_l\left(g_{ij}\right)\right\}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\left(g^{lk}\right)}{\partial t}\left\{\partial_i\left(g_{jl}\right)+\partial_j\left(g_{il}\right)-\partial_l\left(g_{ij}\right)\right\}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{lk}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\partial_i\left(g_{jl}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\partial_j\left(g_{il}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\partial_l\left(g_{ij}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\left(g^{lk}\right)}{\partial t}\left\{\partial_i\left(g_{jl}\right)+\partial_j\left(g_{il}\right)-\partial_l\left(g_{ij}\right)\right\}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{lk}\left\{\partial_i\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial t}\right)+\partial_j\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right)-\partial_l\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Como o Lema que queremos provar é uma igualdade de tensores, podemos prová-la em qualquer base. Tomemos coordenadas normais em torno de um ponto $x \in M$ fixo. Para o primeiro termo, temos que:

$$
\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\left(g^{lk}\right)}{\partial t}\left\{\partial_i\left(g_{jl}\right)+\partial_j\left(g_{il}\right)-\partial_l\left(g_{ij}\right)\right\}(x,t)=0,
$$

para todo $t \in I$, pois $\partial_i\left(g_{jl}\right)(x,t)=0$, para todo $i,j,l=1,...,n$, portanto o primeiro termo é zero, ou seja, em coordenadas normais em torno de um ponto $x \in M$ fixo:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_{ij}^{k}\right)(x,t)=\left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{lk}\left\{\partial_i\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial t}\right)+\partial_j\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right)-\partial_l\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right)\right\}\right)(x,t),
$$

para todo $t \in I$. Por outro lado, em coordenadas normais em torno de x temos que:

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijl}(x,t) &= \left(\nabla_{\partial_i}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)_{jl}(x,t)\\
&= \nabla_{\partial_i}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jl}(x,t)-\frac{\partial g}{\partial t}\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_l\right)(x,t)-\frac{\partial g}{\partial t}\left(\partial_j,\nabla_{\partial_i}\partial_l\right)(x,t)\\
&= \nabla_{\partial_i}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jl}(x,t)=\partial_i\left(\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jl}\right)(x,t)\\
&= \partial_i\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial t}\right)(x,t),
\end{aligned}
$$

para todo $i,j,l=1,...,n$ e todo $t \in [0,T)$. Portanto, em $x \in M$, temos que

$$
\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{lk}\left\{\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijl}+\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jil}-\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lij}\right\}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{lk}\left\{\partial_i\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial t}\right)+\partial_j\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right)-\partial_l\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right)\right\},
$$

para todo $t \in I$. Ou seja, temos a igualdade do teorema em coordenadas normais no ponto x. Como a igualdade é tensorial, basta que a igualdade seja provada em um sistema de coordenadas. Como $x \in M$ é qualquer, segue o teorema. ∎

Proposição 1.5 (Variação das componentes do (3,1) - tensor de curvatura) *Considere uma família suave de métricas riemannianas* $\{g(t)\}_{t\in I}$ *sobre uma variedade diferenciável* M*. As componentes do ten-*

sor de curvatura (para mais detalhes veja as expressões (A.14) e (A.21)) evoluem da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{l}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk}\right\}\\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{n} g^{la}\left\{R_{ijk}^{b}\frac{\partial g_{ba}}{\partial t} + R_{ija}^{b}\frac{\partial g_{kb}}{\partial t}\right\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Como a expressão é tensorial, estamos aptos a trabalhar com coordenadas normais em torno de um ponto $x \in M$ fixo. Utilizando a expressão (A.21) em coordenadas normais, segue que

$$\begin{aligned}R_{ijk}^{l}(x,t) &= \partial_j\left(\Gamma_{ik}^{l}\right)(x,t) - \partial_i\left(\Gamma_{jk}^{l}\right)(x,t) + \sum_{p=1}^{n}\Gamma_{ik}^{p}\Gamma_{jp}^{l}(x,t) - \Gamma_{jk}^{p}\Gamma_{ip}^{l}(x,t)\\ &= \partial_j\left(\Gamma_{ik}^{l}\right)(x,t) - \partial_i\left(\Gamma_{jk}^{l}\right)(x,t),\end{aligned}$$

para todo $t \in I$. Portanto, derivando ambas as extremidades da igualdade acima e utilizando o Lema 1.3 segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{l}\right)(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\partial_j\left(\Gamma_{ik}^{l}\right) - \partial_i\left(\Gamma_{jk}^{l}\right)\right)(x,t) = \partial_j\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ik}^{l}\right)(x,t) - \partial_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{jk}^{l}\right)(x,t)\\ &= \partial_j\left(\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ika} + \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{kia} - \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{aik}\right\}\right)(x,t)\\ &\quad -\partial_i\left(\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jka} + \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{kja} - \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ajk}\right\}\right)(x,t)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\partial_j\left(g^{la}\right)\left\{\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ika} + \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{kia} - \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{aik}\right\}(x,t)\\ &\quad +g^{la}\left\{\partial_j\left(\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ika}\right) + \partial_j\left(\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{kia}\right) - \partial_j\left(\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{aik}\right)\right\}(x,t)\\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\partial_i\left(g^{la}\right)\left\{\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jka} + \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{kja} - \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ajk}\right\}(x,t)\\ &\quad +g^{la}\left\{\partial_i\left(\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jka}\right) + \partial_i\left(\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{kja}\right) - \partial_i\left(\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ajk}\right)\right\}(x,t).\end{aligned}$$

Utilizando coordenadas normais nessa expressão, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{l}\right)(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\partial_j\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ika} + \partial_j\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{kia} - \partial_j\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{aik}\right\}(x,t)\\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\partial_i\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jka} + \partial_i\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{kja} - \partial_i\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ajk}\right\}(x,t)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jika}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik}\right\}(x,t)\\
& -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijka}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk}\right\}(x,t),
\end{aligned}
$$

para todo $t \in I$, onde, na última igualdade, usamos a definição de conexão dupla e que as coordenadas são normais, isto é:

$$
\begin{aligned}
\partial_i\left(\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jka}\right)(x,t) &= \left(\nabla_{\partial_i}\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)_{jka}(x,t)+\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_k,\partial_a\right)(x,t)\\
&\quad+\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)\left(\partial_j,\nabla_{\partial_i}\partial_k,\partial_a\right)(x,t)+\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)\left(\partial_j,\partial_k,\nabla_{\partial_i}\partial_a\right)(x,t)\\
&= \left(\nabla_{\partial_i}\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)_{jka}(x,t)=\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijka}(x,t),
\end{aligned}
$$

para todo $t \in I$ e todo $i, j, k, a = 1, ..., n$. Portanto, vemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(R^l_{ijk}\right)(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jika}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik}\right\}(x,t)\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijka}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk}\right\}(x,t)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jika}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik}\right\}(x,t)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijka}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk}\right\}(x,t)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jika}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijka}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia}\right\}(x,t)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk}\right\}(x,t).
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Pela Proposição A.13, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(R^l_{ijk}\right)(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(R\left(\partial_i,\partial_j\right)\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ka}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia}\right\}(x,t)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk}\right\}(x,t),
\end{aligned}
$$

para todo $t \in I$.

Por fim, segue da Proposição A.12 e do teorema de Schwarz aplicado em $\frac{\partial g_{ka}}{\partial t}$ que

$$\begin{aligned}
\left(R(\partial_i,\partial_j)\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ka} &= R(\partial_i,\partial_j)\left(\frac{\partial g_{ka}}{\partial t}\right) - \frac{\partial g}{\partial t}\left(R(\partial_i,\partial_j)\partial_k,\partial_a\right) - \frac{\partial g}{\partial t}\left(\partial_k, R(\partial_i,\partial_j)\partial_a\right) \\
&= -\frac{\partial g}{\partial t}\left(R(\partial_i,\partial_j)\partial_k,\partial_a\right) - \frac{\partial g}{\partial t}\left(\partial_k, R(\partial_i,\partial_j)\partial_a\right) \\
&= -\frac{\partial g}{\partial t}\left(\sum_{b=1}^{n} R_{ijk}^{b}\partial_b,\partial_a\right) - \frac{\partial g}{\partial t}\left(\partial_k,\sum_{b=1}^{n} R_{ija}^{b}\partial_b\right) \\
&= \sum_{b=1}^{n} -R_{ijk}^{b}\frac{\partial g}{\partial t}(\partial_b,\partial_a) - R_{ija}^{b}\frac{\partial g}{\partial t}(\partial_k,\partial_b) \\
&= \sum_{b=1}^{n} -R_{ijk}^{b}\frac{\partial g_{ba}}{\partial t} - R_{ija}^{b}\frac{\partial g_{kb}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Ou seja, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{l}\right)(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(R(\partial_i,\partial_j)\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ka} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia}\right\}(x,t) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk}\right\}(x,t) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja}\right\}(x,t) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk} - \sum_{b=1}^{n}\left(R_{ijk}^{b}\frac{\partial g_{ba}}{\partial t} + R_{ija}^{b}\frac{\partial g_{kb}}{\partial t}\right)\right\}(x,t),
\end{aligned}$$

para todo $t \in I$. Como a igualdade é tensorial, basta que a igualdade seja demonstrada em um sistema de coordenadas qualquer. Como $x \in M$ é arbitrário, segue o teorema. ■

Proposição 1.6 (Variação do (4,0) - tensor de curvatura) *Considere uma família suave de métricas riemannianas* $\{g(t)\}_{t\in I}$ *sobre uma variedade diferenciável* M. *O (4,0) - tensor de curvatura evolui da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl}) &= \frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkil} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jlik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikjl} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iljk}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left\{R_{ijkp}\frac{\partial g_{ql}}{\partial t} - R_{ijlp}\frac{\partial g_{qk}}{\partial t}\right\}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Por definição da curvatura riemanniana,

$$R_{ijkl} = \langle R_{ijk}, \partial_l \rangle = \left\langle \sum_{m=1}^{n} R_{ijk}^{m} \partial_m, \partial_l \right\rangle = \sum_{m=1}^{n} R_{ijk}^{m} g_{ml}.$$

Derivando ambos os extremos, obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijkl}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{m=1}^{n} R_{ijk}^{m} g_{ml}\right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{m} g_{ml}\right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{m}\right) g_{ml} + R_{ijk}^{m} \frac{\partial g_{ml}}{\partial t} \tag{1.6}$$

Notemos também que

$$\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} R_{ijkp} \frac{\partial g_{ql}}{\partial t} = \sum_{p,q,m=1}^{n} g^{pq} R_{ijk}^{m} g_{mp} \frac{\partial g_{ql}}{\partial t} = \sum_{q,m=1}^{n} \delta_{qm} R_{ijk}^{m} \frac{\partial g_{ql}}{\partial t} = \sum_{m=1}^{n} R_{ijk}^{m} \frac{\partial g_{ml}}{\partial t}. \tag{1.7}$$

Usando esse fato na expressão (1.6), segue que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijkl}\right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{m}\right) g_{ml} + R_{ijk}^{m} \frac{\partial g_{ml}}{\partial t} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{m}\right) g_{ml} + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} R_{ijkp} \frac{\partial g_{ql}}{\partial t}.$$

E pela Proposição anterior,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijkl}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{m,a=1}^{n} g_{ml} g^{ma} \left\{ \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia} - \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik} - \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja} + \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{m,a,b=1}^{n} g_{ml} g^{ma} \left\{ R_{ijk}^{b} \frac{\partial g_{ba}}{\partial t} + R_{ija}^{b} \frac{\partial g_{kb}}{\partial t} \right\} + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} R_{ijkp} \frac{\partial g_{ql}}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{n} \delta_{la} \left\{ \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia} - \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik} - \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja} + \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{n} \delta_{la} \left\{ R_{ijk}^{b} \frac{\partial g_{ba}}{\partial t} + R_{ija}^{b} \frac{\partial g_{kb}}{\partial t} \right\} + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} R_{ijkp} \frac{\partial g_{ql}}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkil} - \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jlik} - \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikjl} + \left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iljk} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{n} \left\{ R_{ijk}^{b} \frac{\partial g_{bl}}{\partial t} + R_{ijl}^{b} \frac{\partial g_{kb}}{\partial t} \right\} + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} R_{ijkp} \frac{\partial g_{ql}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Pela expressão (1.7), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl}) = \frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkil} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jlik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikjl} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iljk}\right\} \\
&-\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\left\{g^{pq}R_{ijkp}\frac{\partial g_{ql}}{\partial t} + g^{pq}R_{ijlp}\frac{\partial g_{qk}}{\partial t}\right\} + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}R_{ijkp}\frac{\partial g_{ql}}{\partial t} \\
= \; &\frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkil} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jlik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikjl} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iljk}\right\} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\left\{g^{pq}R_{ijkp}\frac{\partial g_{ql}}{\partial t} - g^{pq}R_{ijlp}\frac{\partial g_{qk}}{\partial t}\right\} \\
= \; &\frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkil} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jlik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikjl} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iljk}\right\} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left\{R_{ijkp}\frac{\partial g_{ql}}{\partial t} - R_{ijlp}\frac{\partial g_{qk}}{\partial t}\right\}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.7 (Variação do tensor de Ricci) *Considere uma família suave de métricas riemannianas* $\{g(t)\}_{t\in I}$ *sobre uma variedade diferenciável* M*. A variação do tensor de Ricci com relação ao tempo é dada pela seguinte expressão:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(Ric_{ik}) = \frac{1}{2}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lika} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lkia} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikla}\right\}.$$

Demonstração. Da igualdade (1.5) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(R^l_{ijk}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jika} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik}\right\} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijka} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk}\right\}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Em particular, se $j = l$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(R^l_{ilk}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lika} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lkia} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laik}\right\} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ilka} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikla} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ialk}\right\}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Mas, pela expressão (A.24), vemos que

$$Ric_{ik} = \sum_{l=1}^{n} R^l_{ilk}.$$

Derivando ambos os lados, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(Ric_{ik}) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{l=1}^{n} R^l_{ilk}\right) = \frac{1}{2}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lika} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lkia} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laik}\right\} \\ &+\frac{1}{2}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ilka} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikla} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ialk}\right\}.\end{aligned}$$

Usando a simetria de $\frac{\partial g}{\partial t}$, e trocando as variáveis $l \leftrightarrow a$ quando necessário, obtemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ialk} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ilka}\right\} &= \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ialk} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iakl}\right\} \\ &= \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla_{\partial_i}\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{alk} - \left(\nabla_{\partial_i}\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{akl}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\nabla_{\partial_i}\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{alk} - \nabla_{\partial_i}\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{akl}\right\} \\ &= \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\nabla_{\partial_i}\left(\left(\nabla_{\partial_a}\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lk}\right) - \nabla_{\partial_i}\left(\left(\nabla_{\partial_a}\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{kl}\right)\right\} \\ &= \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\nabla_{\partial_i}\left(\partial_a\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial t}\right) - \frac{\partial g}{\partial t}(\nabla_{\partial_a}\partial_l, \partial_k) - \frac{\partial g}{\partial t}(\partial_l, \nabla_{\partial_a}\partial_k)\right) \\ &\quad - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\nabla_{\partial_i}\left(\partial_a\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial t}\right) - \frac{\partial g}{\partial t}(\nabla_{\partial_a}\partial_k, \partial_l) - \frac{\partial g}{\partial t}(\partial_k, \nabla_{\partial_a}\partial_l)\right).\end{aligned}$$

Pela simetria da métrica g, vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ialk} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ilka}\right\} &= \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\nabla_{\partial_i}\left(\partial_a\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial t}\right) - \frac{\partial g}{\partial t}(\partial_k, \nabla_{\partial_a}\partial_l) - \frac{\partial g}{\partial t}(\nabla_{\partial_a}\partial_k, \partial_l)\right) \\ &\quad - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\nabla_{\partial_i}\left(\partial_a\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial t}\right) - \frac{\partial g}{\partial t}(\nabla_{\partial_a}\partial_k, \partial_l) - \frac{\partial g}{\partial t}(\partial_k, \nabla_{\partial_a}\partial_l)\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Segue disso que a derivada do tensor de Ricci tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(Ric_{ik}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lika}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lkia}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laik}\right\}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ilka}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikla}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ialk}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lika}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lkia}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laik}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikla}\right\}.\end{aligned}$$

■

Lema 1.4 (Variação da Curvatura Escalar) *Considere uma família suave de métricas riemannianas* $\{g(t)\}_{t\in I}$ *sobre uma variedade diferenciável* M*. A variação da curvatura escalar é dada pela seguinte expressão:*

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\Delta\left(Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)-\left\langle\frac{\partial g}{\partial t}, Ric\right\rangle+\delta^2\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) \tag{1.10}$$

onde $\delta^2\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)=\sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ljia}=Tr_{14}\left(Tr_{23}\nabla^2\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)$ *(para mais detalhes veja os Exemplos A.3 e A.4).*

Demonstração. Usando as fórmulas de evolução de g^{ij} e Ric_{ij} obtidas nas Proposições 1.4 e 1.7, respectivamente, e trocando as variáveis do somatório se necessário for, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}Ric_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}Ric_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}\right)Ric_{ij}+g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}\left(Ric_{ij}\right)\right\}\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\left\{-\sum_{k,l=1}^{n} g^{ik}g^{jl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial t}Ric_{ij}\right\}\\ &\quad+\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{1}{2}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ljia}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laij}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijla}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lija}\right\}\\ &= -\sum_{k,l,i,j=1}^{n} g^{ik}g^{jl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial t}Ric_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ljia}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lija}\right\}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left\{-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laij}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijla}\right\}\\ &= -\sum_{k,l,i,j=1}^{n} g^{ik}g^{jl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial t}Ric_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{l,a,i,j=1}^{n} 2g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ljia}-\frac{1}{2}\sum_{l,a,i,j=1}^{n} 2g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laij}\\ &= -\sum_{k,l,i,j=1}^{n} g^{ik}g^{jl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial t}Ric_{ij}+\sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ljia}-\sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laij}.\end{aligned}$$

Usando a definição de produto interno de tensores (para mais detalhes veja o Exemplo A.5),

$$\sum_{k,l,i,j=1}^{n} g^{ik}g^{jl}\frac{\partial g_{kl}}{\partial t}Ric_{ij} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial t}, Ric \right\rangle.$$

Portanto, concluímos que a derivada da curvatura escalar é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} &= -\left\langle \frac{\partial g}{\partial t}, Ric \right\rangle + \sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ljia} - \sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laij} \\
&= -\left\langle \frac{\partial g}{\partial t}, Ric \right\rangle + \sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ljia} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{la}\right)_{ij} \\
&= -\left\langle \frac{\partial g}{\partial t}, Ric \right\rangle + \sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ljia} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}Tr_g\left(\left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{la}\right) \\
&= -\left\langle \frac{\partial g}{\partial t}, Ric \right\rangle + \sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ljia} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Tr\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)_{la} \\
&= -\left\langle \frac{\partial g}{\partial t}, Ric \right\rangle + \sum_{l,a,i,j=1}^{n} g^{ij}g^{la}\left(\nabla^2 \frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ljia} - \Delta\left(Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) \\
&= -\left\langle \frac{\partial g}{\partial t}, Ric \right\rangle + \delta^2\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) - \Delta\left(Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right).
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.8 (Variação da forma de volume) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M. A forma de volume $d\mu(g(t))$ evolui da seguinte maneira:*

$$\frac{\partial}{\partial t}d\mu = \frac{1}{2}Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)d\mu.$$

Demonstração. De fato, utilizando a expressão local da forma de volume, derivando-a e usando a expressão da derivada da função logarítmica, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(d\mu) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial t}(\det(g_{ij}))}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n = \frac{\frac{\partial}{\partial t}(\det(g_{ij}))}{2\det(g_{ij})}\sqrt{\det(g_{ij})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial t}(\det(g_{ij}))}{2\det(g_{ij})}d\mu = \frac{\det(g_{ij})\,Tr\left(\left(g^{ij}\right)\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right)\right)}{2\det(g_{ij})}d\mu = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}(g_{ij})\,d\mu \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}d\mu = \frac{1}{2}Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)d\mu,
\end{aligned}$$

onde, na sexta igualdade, utilizamos a fórmula de Jacobi da matriz (g_{ij}), que é dada pelo seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det A(t)) = (\det A(t))\, Tr\left((A(t))^{-1} A'(t)\right),$$

em que $\{A(t)\}_{t\in I}$ é uma família suave de matrizes inversíveis. ■

Portanto, em uma família qualquer de métricas suaves, temos o seguinte:

Evolução de Algumas Quantidades Geométricas

$\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} = -\sum_{k,l=1}^{n} g^{ik} g^{jl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial t}$
$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_{ij}^{k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left\{\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijl} + \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jil} - \left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lij}\right\}$
$\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{l}\right) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk}\right\}$ $-\frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{n} g^{la}\left\{R_{ijk}^{b}\frac{\partial g_{ba}}{\partial t} + R_{ija}^{b}\frac{\partial g_{kb}}{\partial t}\right\}$
$\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijkl}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkil} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jlik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikjl} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iljk}\right\}$ $+\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left\{R_{ijkp}\frac{\partial g_{ql}}{\partial t} - R_{ijlp}\frac{\partial g_{qk}}{\partial t}\right\}$
$\frac{\partial}{\partial t}\left(Ric_{ik}\right) = \frac{1}{2}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lika} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lkia} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikla}\right\}$
$\frac{\partial S}{\partial t} = -\Delta\left(Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) - \left\langle\frac{\partial g}{\partial t}, Ric\right\rangle + \delta^2\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)$
$\frac{\partial}{\partial t}d\mu = \frac{1}{2}Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)d\mu.$

1.4 Evolução das Quantidades Geométricas Sob o Fluxo de Ricci

Nesta seção, vamos supor que uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M, satisfaz a equação do fluxo de Ricci, isto é,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric_{ij}^{g(t)}.$$

E sob essa hipótese, vamos encontrar as expressões das respectivas variações das quantidades geométricas utilizando a seção anterior:

Corolário 1.1 (Símbolos de Christoffel sob o fluxo de Ricci) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M que satisfaz a equação do fluxo de Ricci, isto é, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric_{ij}^{g(t)}$, então*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_{ij}^{k}\right) = -\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left\{(\nabla Ric)_{ijl} + (\nabla Ric)_{jil} - (\nabla Ric)_{lij}\right\}.$$

Demonstração. Usando a equação do fluxo de Ricci e o Lema 1.3, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_{ij}^{k}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left\{\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ijl}+\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jil}-\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lij}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left\{\left(\nabla\left(-2Ric\right)\right)_{ijl}+\left(\nabla\left(-2Ric\right)\right)_{jil}-\left(\nabla\left(-2Ric\right)\right)_{lij}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left\{-2\left(\nabla Ric\right)_{ijl}-2\left(\nabla Ric\right)_{jil}+2\left(\nabla Ric\right)_{lij}\right\}\\
&= -\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left\{\left(\nabla Ric\right)_{ijl}+\left(\nabla Ric\right)_{jil}-\left(\nabla Ric\right)_{lij}\right\}.
\end{aligned}$$

∎

Corolário 1.2 (Componentes do (3,1) - tensor de curvatura sob o fluxo de Ricci) *Considere uma família suave de métricas riemannianas* $\{g(t)\}_{t\in I}$ *sobre uma variedade diferenciável* M *que satisfaz a equação do fluxo de Ricci, isto é,* $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}=-2Ric_{ij}^{g(t)}$*, então*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{l}\right) &= \sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2 Ric\right)_{jkia}+\left(\nabla^2 Ric\right)_{jaik}+\left(\nabla^2 Ric\right)_{ikja}-\left(\nabla^2 Ric\right)_{iajk}\right\}\\
&\quad+\sum_{a,b=1}^{n} g^{la}\left\{R_{ijk}^{b}Ric_{ba}+R_{ija}^{b}Ric_{kb}\right\}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Usando novamente a equação do fluxo de Ricci e o Lema A.3, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^{l}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkia}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jaik}-\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikja}+\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{iajk}\right\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{n} g^{la}\left\{R_{ijk}^{b}\frac{\partial g_{ba}}{\partial t}+R_{ija}^{b}\frac{\partial g_{kb}}{\partial t}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\left(-2Ric\right)\right)_{jkia}-\left(\nabla^2\left(-2Ric\right)\right)_{jaik}-\left(\nabla^2\left(-2Ric\right)\right)_{ikja}+\left(\nabla^2\left(-2Ric\right)\right)_{iajk}\right\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{n} g^{la}\left\{R_{ijk}^{b}\left(-2Ric_{ba}\right)+R_{ija}^{b}\left(-2Ric_{kb}\right)\right\}\\
&= \sum_{a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2 Ric\right)_{jkia}+\left(\nabla^2 Ric\right)_{jaik}+\left(\nabla^2 Ric\right)_{ikja}-\left(\nabla^2 Ric\right)_{iajk}\right\}\\
&\quad+\sum_{a,b=1}^{n} g^{la}\left\{R_{ijk}^{b}Ric_{ba}+R_{ija}^{b}Ric_{kb}\right\}.
\end{aligned}$$

∎

Corolário 1.3 ((4,0) - tensor de curvatura sob o fluxo de Ricci) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M que satisfaz a equação do fluxo de Ricci, isto é, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric_{ij}^{g(t)}$, então*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl}) &= (\Delta R)_{ijkl} - 2(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}) \\ &+ \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}(Ric_{jq}R_{pikl} - Ric_{iq}R_{pjkl} - R_{ijkp}Ric_{ql} - R_{ijpl}Ric_{qk}).\end{aligned} \tag{1.11}$$

Demonstração. Pela Proposição 1.6, segue que a derivada da curvatura riemanniana é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl}) - \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(R_{ijkp}\frac{\partial g_{ql}}{\partial t} + R_{ijpl}\frac{\partial g_{qk}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl}) - \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(R_{ijkp}\frac{\partial g_{ql}}{\partial t} - R_{ijlp}\frac{\partial g_{qk}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{(\nabla^2 h)_{jkil} - (\nabla^2 h)_{jlik} - (\nabla^2 h)_{ikjl} + (\nabla^2 h)_{iljk}\right\},\end{aligned}$$

em que $h := \frac{\partial g}{\partial t}$. Multiplicando por -1, obtemos que

$$-\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl}) + \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(R_{ijkp}\frac{\partial g_{ql}}{\partial t} + R_{ijpl}\frac{\partial g_{qk}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\left\{-(\nabla^2 h)_{jkil} + (\nabla^2 h)_{jlik} + (\nabla^2 h)_{ikjl} - (\nabla^2 h)_{iljk}\right\}.$$

Usando a equação do fluxo de Ricci na igualdade acima, obtemos que

$$-\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl}) - \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}(R_{ijkp}Ric_{ql} + R_{ijpl}Ric_{qk}) = (\nabla^2 Ric)_{jkil} - (\nabla^2 Ric)_{jlik} - (\nabla^2 Ric)_{ikjl} + (\nabla^2 Ric)_{iljk}.$$

Utilizando a Proposição 1.2 no lado direito da igualdade, vemos que

$$\begin{aligned}(\nabla^2 Ric)_{jkil} - (\nabla^2 Ric)_{jlik} - (\nabla^2 Ric)_{ikjl} + (\nabla^2 Ric)_{iljk} &= -(\Delta R)_{ijkl} + 2(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}) \\ &+ \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}Ric_{iq}R_{pjkl} - \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}Ric_{jq}R_{pikl}.\end{aligned}$$

Combinando essas equações, encontramos o seguinte:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl}) - \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}(R_{ijkp}Ric_{ql} + R_{ijpl}Ric_{qk}) &= -(\Delta R)_{ijkl} + 2(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}) \\ &+ \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}Ric_{iq}R_{pjkl} - \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}Ric_{jq}R_{pikl}.\end{aligned}$$

Isolando $\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl})$ na equação acima, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl}) &= (\Delta R)_{ijkl} - 2\left(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}\right) \\ &\quad + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(Ric_{jq}R_{pikl} - Ric_{iq}R_{pjkl} - R_{ijkp}Ric_{ql} - R_{ijpl}Ric_{qk}\right).\end{aligned}$$

■

Corolário 1.4 (Volume sob o fluxo de Ricci) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M que satisfaz a equação do fluxo de Ricci, isto é, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric_{ij}^{g(t)}$, então*

$$\frac{\partial}{\partial t}d\mu = -Sd\mu.$$

Demonstração. De fato, já sabemos que, sob uma família qualquer de métricas suaves, vale

$$\frac{\partial}{\partial t}d\mu = \frac{1}{2}Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)d\mu.$$

Usando a equação do fluxo de Ricci, concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial t}d\mu = \frac{1}{2}Tr_g(-2Ric)\,d\mu = -Tr_g(Ric)\,d\mu = -Sd\mu.$$

■

Corolário 1.5 (Tensor de Ricci sob o fluxo de Ricci) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M que satisfaz a equação do fluxo de Ricci, isto é, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric_{ij}^{g(t)}$, então*

$$\frac{\partial}{\partial t}(Ric_{ik}) = (\Delta Ric)_{ik} + \left(\nabla^2 S\right)_{ik} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lkia}. \tag{1.12}$$

Demonstração. Utilizando a Proposição 1.7 e a equação do fluxo de Ricci, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(Ric_{ik}) &= \frac{1}{2}\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{\left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lika} + \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{lkia} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{laik} - \left(\nabla^2\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{ikla}\right\} \\ &= \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left\{-\left(\nabla^2 Ric\right)_{lika} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{lkia} + \left(\nabla^2 Ric\right)_{laik} + \left(\nabla^2 Ric\right)_{ikla}\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lkia} + \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{laik} + \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{ikla} \\
&= -\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lkia} + \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{laik} + (\Delta Ric)_{ik} \\
&= (\Delta Ric)_{ik} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lkia} + \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{laik}.
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que a seguinte igualdade é válida:

$$
\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{laik} = \left(\nabla^2 S\right)_{ik}. \tag{1.13}
$$

De fato, pela definição da curvatura escalar, vemos que

$$
\left(\nabla^2 S\right)_{ik} = \left(\nabla^2 Tr_g\left(Ric\right)\right)_{ik} = \left(Tr_g \nabla^2\left(Ric\right)\right)_{ik} = \left(\sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{la}\right)_{ik} = \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{laik}.
$$

Pela equação (1.13), concluímos que a derivada do tensor de Ricci tem a seguinte expressão:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(Ric_{ik}\right) = (\Delta Ric)_{ik} + \left(\nabla^2 S\right)_{ik} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lkia}.
$$

■

Notemos que a expressão do último corolário pode ser simplificada da seguinte maneira:

Corolário 1.6 (Ricci (versão simplificada)) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g\left(t\right)\}_{t\in I}$ sobre uma variedade diferenciável M que satisfaz a equação do fluxo de Ricci, isto é, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric_{ij}^{g(t)}$, então*

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(Ric_{ik}\right) = (\Delta Ric)_{ik} + 2\sum_{j,l,a,b=1}^{n} g^{ja}g^{lb}Ric_{ab}R_{ijkl} - 2\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}Ric_{pi}Ric_{qk}.
$$

Demonstração. De fato, pela definição do tensor de Ricci

$$
Ric_{ik} = \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}R_{ijkl}.
$$

Derivando em t, obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Ric_{ik}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}R_{ijkl}\right) = \sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{jl}R_{ijkl}\right) = \sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{jl}\right)R_{ijkl} + \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl})$$

Usando as expressões (1.4), (1.11) e a equação do fluxo de Ricci, vemos que

$$\sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{jl}\right)R_{ijkl} = -\sum_{j,l,a,b=1}^{n} g^{ja}g^{lb}\frac{\partial}{\partial t}(g_{ab})R_{ijkl} = 2\sum_{j,l,a,b=1}^{n} g^{ja}g^{lb}Ric_{ab}R_{ijkl},$$

além disso,

$$\begin{aligned}\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}\frac{\partial}{\partial t}(R_{ijkl}) &= \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}(\Delta R)_{ijkl} - 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}) \\ &+ \sum_{j,l,p,q=1}^{n} g^{jl}g^{pq}(Ric_{jq}R_{pikl} - Ric_{iq}R_{pjkl} - R_{ijkp}Ric_{ql} - R_{ijpl}Ric_{qk}).\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a derivada do tensor de Ricci é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(Ric_{ik}) &= 2\sum_{j,l,a,b=1}^{n} g^{ja}g^{lb}Ric_{ab}R_{ijkl} + \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}(\Delta R)_{ijkl} - 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}) \\ &+ \sum_{j,l,p,q=1}^{n} g^{jl}g^{pq}(Ric_{jq}R_{pikl} - Ric_{iq}R_{pjkl} - R_{ijkp}Ric_{ql} - R_{ijpl}Ric_{qk}).\end{aligned}$$

Manipulando a terceira soma, vemos que

$$\begin{aligned}X_{ik} &= 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}B_{ijkl} - 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}(B_{iljk} + B_{ijlk}) + 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}B_{ikjl} \\ &= 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}B_{ijkl} - 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}(B_{iljk} + B_{ijlk}) + 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}\left(\sum_{p,q,r,s=1}^{n} g^{pr}g^{qs}R_{piqk}R_{rjsl}\right) \\ &= 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}B_{ijkl} - 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}(B_{iljk} + B_{ijlk}) + 2\sum_{j,l,p,q,r,s=1}^{n} g^{jl}g^{pr}g^{qs}R_{piqk}R_{rjsl} \\ &= 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}B_{ijkl} - 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}(B_{iljk} + B_{ijlk}) + 2\sum_{p,q,r,s=1}^{n} g^{pr}g^{qs}R_{piqk}Ric_{rs} \\ &= 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}B_{ijkl} - 4\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}B_{ijlk} + 2\sum_{p,q,r,s=1}^{n} g^{pr}g^{qs}R_{piqk}Ric_{rs} \\ &= 2\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}(B_{ijkl} - 2B_{ijlk}) + 2\sum_{p,q,r,s=1}^{n} g^{pr}g^{qs}R_{piqk}Ric_{rs},\end{aligned}$$

onde X_{ik} denota a seguinte expressão:

$$X_{ik} = -2 \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \left(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk} \right).$$

Manipulando a quarta soma, utilizando mundanças de variável nas somas e trocando as variáveis dos somatórios se necessário for, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} A &= -2 \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{pi} Ric_{qk} + \sum_{p,q,j,l=1}^{n} g^{jl} g^{pq} Ric_{jq} R_{pikl} - \sum_{p,q,j,l=1}^{n} g^{jl} g^{pq} R_{ijkp} Ric_{lq} \\ &= -2 \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{pi} Ric_{qk} - 2 \sum_{p,r,q,s=1}^{n} g^{pr} g^{ps} R_{piqk} Ric_{rs}, \end{aligned}$$

sendo que A denota a seguinte expressão:

$$\sum_{p,q,j,l=1}^{n} g^{jl} g^{pq} \left(Ric_{jq} R_{pikl} - Ric_{iq} R_{pjkl} - R_{ijkp} Ric_{ql} - R_{ijpl} Ric_{qk} \right)$$

Portanto, utilizando mudança de variáveis, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(Ric_{ik} \right) &= 2 \sum_{j,l,a,b=1}^{n} g^{ja} g^{lb} Ric_{ab} R_{ijkl} + \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \left(\Delta R \right)_{ijkl} - 2 \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \left(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk} \right) \\ &\quad + \sum_{j,l,p,q=1}^{n} g^{jl} g^{pq} \left(Ric_{jq} R_{pikl} - Ric_{iq} R_{pjkl} - R_{ijkp} Ric_{ql} - R_{ijpl} Ric_{qk} \right) \\ &= 2 \sum_{j,l,a,b=1}^{n} g^{ja} g^{lb} Ric_{ab} R_{ijkl} + \left(\Delta Ric \right)_{ik} + 2 \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \left(B_{ijkl} - 2 B_{ijlk} \right) + 2 \sum_{p,q,r,s=1}^{n} g^{pr} g^{qs} R_{piqk} Ric_{rs} \\ &\quad -2 \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{pi} Ric_{qk} - 2 \sum_{p,r,q,s=1}^{n} g^{pr} g^{ps} R_{piqk} Ric_{rs} \\ &= \left(\Delta Ric \right)_{ik} + 2 \sum_{j,l,a,b=1}^{n} g^{ja} g^{lb} Ric_{ab} R_{ijkl} + 2 \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \left(B_{ijkl} - 2 B_{ijlk} \right) - 2 \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} Ric_{pi} Ric_{qk}. \end{aligned}$$

Resta-nos demonstrar que a seguinte igualdade é válida:

$$\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \left(B_{ijkl} - 2 B_{ijlk} \right) = 0.$$

De fato, utilizando a primeira identidade de Bianchi concluímos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} B_{ijkl} &= \sum_{j,l,p,q,r,s=1}^{n} g^{jl} g^{pr} g^{qs} R_{piqj} R_{rksl} = \sum_{j,l,p,q,r,s=1}^{n} g^{jl} g^{pr} g^{qs} R_{pqij} R_{rskl} \\
&= \sum_{j,l,p,q,r,s=1}^{n} g^{jl} g^{pr} g^{qs} \left(R_{piqj} - R_{pjqi}\right)\left(R_{rksl} - R_{rlsk}\right) \\
&= \sum_{j,l,p,q,r,s=1}^{n} g^{jl} g^{pr} g^{qs} \left(R_{piqj} R_{rksl} - R_{piqj} R_{rlsk} - R_{pjqi} R_{rksl} + R_{pjqi} R_{rlsk}\right).
\end{aligned}$$

Os dois termos do meio são iguais e os dois termos das pontas também, basta trocar p e q, r e s para ver. Com isso, vemos que

$$\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} B_{ijkl} = 2 \sum_{j,l,p,q,r,s=1}^{n} g^{jl} g^{pr} g^{qs} \left(R_{piqj} R_{rksl} - R_{piqj} R_{rlsk}\right) = 2 \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \left(B_{ijkl} - B_{ijlk}\right).$$

Passando $\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} B_{ijkl}$ do lado direito para o esquerdo, segue que

$$0 = \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \left(B_{ijkl} - 2B_{ijlk}\right).$$

■

Proposição 1.9 (Curvatura escalar sob o fluxo de Ricci) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t \in I}$ sobre uma variedade diferenciável M que satisfaz a equação do fluxo de Ricci, isto é, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2Ric_{ij}^{g(t)}$, então*

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Delta S + 2\left|Ric\right|^2. \tag{1.14}$$

Demonstração. Para demonstrar a equação de evolução da curvatura escalar, primeiramente notemos que

$$\Delta\left(Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) = \Delta\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right) = \Delta\left(-2\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} Ric_{ij}\right) = -2\Delta\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} Ric_{ij}\right) = -2\Delta S.$$

Agora vamos calcular $\operatorname{div}\left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)$. Primeiramente, notemos que como $\frac{\partial g}{\partial t} \in \mathcal{T}_0^2(M)$, então $\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) \in \mathcal{T}_0^1(M)$ e, consequentemente, $\operatorname{div}\left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) \in C^\infty(M)$. Já que o divergente é definido como o traço de um tensor e o traço independe da base, podemos tomar um sistema de coordenadas normais denotando por $\{\partial_j\}_{j=1}^{n}$ a sua respectiva base coordenada . Com ela, as conexões $\nabla_{\partial_k}\partial_i$ se anulam (no ponto, apenas) facilitando no cálculo de div $\left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)$:

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) = \sum_{l,m=1}^{n} g^{lm}\left(\nabla \operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)_{lm} = \sum_{m=1}^{n}\left(\nabla \operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)_{mm}$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\left(\nabla_m \operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)(\partial_m) = \sum_{m=1}^{n}\left[\nabla_m\left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)(\partial_m)\right) - \left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)(\nabla_m \partial_m)\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \nabla_m\left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)(\partial_m)\right) = \sum_{m=1}^{n}\nabla_m\left(\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{jkm}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\nabla_m\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\nabla\frac{\partial g}{\partial t}\right)_{kkm}\right) = \sum_{m=1}^{n}\nabla_m\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\nabla_k\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)(\partial_k,\partial_m)\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\nabla_m\left(\sum_{k=1}^{n}\nabla_k\left(\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial t}\right)\right)\right) - \sum_{m=1}^{n}\nabla_m\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial t}(\nabla_k\partial_k,\partial_m)\right) - \sum_{m=1}^{n}\nabla_m\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial t}(\partial_k,\nabla_k\partial_m)\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\nabla_m\left(\sum_{k=1}^{n}\nabla_k\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial t}\right)\right) = \sum_{m,k=1}^{n}\nabla_m\nabla_k\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial t}\right) = \sum_{m,k=1}^{n}\nabla_m\nabla_k\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial t}\right)$$

$$= \sum_{m,k=1}^{n}\nabla_m\nabla_k\left(-2Ric_{mk}\right) = -\sum_{m,k=1}^{n}\nabla_m\left[2\nabla_k\left(Ric_{mk}\right)\right] = -\sum_{m=1}^{n}\nabla_m\nabla_m S,$$

em que foi utilizada a **segunda identidade de Bianchi contraída** (para mais detalhes veja a expressão (A.27)) na última igualdade. Além disso, note que

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \operatorname{div}(\nabla S) := \operatorname{div}\left((\nabla S)^*\right) = \sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}\left(\nabla\left((\nabla S)^*\right)\right)_{jk} = \sum_{j=1}^{n}\left(\nabla\left((\nabla S)^*\right)\right)_{jj} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\nabla_j\left((\nabla S)^*\right)\right)(\partial_j) = \sum_{j=1}^{n}\left(\nabla_j\left((\nabla S)^*(\partial_j)\right)\right) - \sum_{j=1}^{n}(\nabla S)^*(\nabla_j\partial_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\nabla_j\left(\langle\nabla S,\partial_j\rangle\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\nabla_j\nabla_j S,
\end{aligned}$$

em que foi utilizado na quarta e napenúltima igualdade o fato de estarmos em coordenadas normais.Ou seja, concluímos que

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) = -\Delta S.$$

Vamos mostrar que div $\left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) = \delta^2\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)$. De fato, pela Proposição A.6 item 4, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) &= \sum_{l,m=1}^{n} g^{lm}\left(\nabla \operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)_{lm} = Tr_g\left(\nabla \operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) = Tr_g\left(\nabla Tr_{12}\left(\nabla\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)\right)\\
&= Tr_{14}\left(\nabla Tr_{12}\left(\nabla\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)\right) = Tr_{14}\left(Tr_{23}\nabla^2\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) = \delta^2\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo tudo na equação do Lema 1.4, concluímos que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\Delta Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) + \operatorname{div}\left(\operatorname{div}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) - \left\langle\frac{\partial g}{\partial t}, Ric\right\rangle = 2\Delta S - \Delta S - \left\langle\frac{\partial g}{\partial t}, Ric\right\rangle = \Delta S + 2\left|Ric\right|^2.$$

■

Portanto, sob o fluxo de Ricci, temos a seguinte tabela:

Evolução de Algumas Quantidades Geométricas sob o Fluxo de Ricci

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma_{ij}^k\right) = -\sum_{l=1}^n g^{lk}\left\{(\nabla Ric)_{ijl} + (\nabla Ric)_{jil} - (\nabla Ric)_{lij}\right\}$
$\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijk}^l\right) = \sum_{a=1}^n g^{la}\left\{-\left(\nabla^2 Ric\right)_{jkia} + \left(\nabla^2 Ric\right)_{jaik} + \left(\nabla^2 Ric\right)_{ikja} - \left(\nabla^2 Ric\right)_{iajk}\right\}$ $+\sum_{a,b=1}^n g^{la}\left\{R_{ijk}^b Ric_{ba} + R_{ija}^b Ric_{kb}\right\}$
$\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijkl}\right) = (\Delta R)_{ijkl} - 2\left(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}\right)$ $+\sum_{p,q=1}^n g^{pq}\left(Ric_{jq}R_{pikl} - Ric_{iq}R_{pjkl} - R_{ijkp}Ric_{ql} - R_{ijpl}Ric_{qk}\right)$
$\frac{\partial}{\partial t}\left(Ric_{ik}\right) = (\Delta Ric)_{ik} + \left(\nabla^2 S\right)_{ik} - \sum_{l,a=1}^n g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^n g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lkia}$
$\frac{\partial}{\partial t}\left(Ric_{ik}\right) = (\Delta Ric)_{ik} + 2\sum_{j,l,a,b=1}^n g^{ja}g^{lb}Ric_{ab}R_{ijkl} - 2\sum_{p,q=1}^n g^{pq}Ric_{pi}Ric_{qk}$
$\frac{\partial S}{\partial t} = \Delta S + 2\left|Ric\right|^2$
$\frac{\partial}{\partial t}d\mu = -S d\mu$

Capítulo 2

Existência e Unicidade em Curto Prazo

No primeiro capítulo foi introduzido o fluxo de Ricci, que nada mais é que uma família de métricas que é solução de uma equação diferencial parcial que envolve o tensor de Ricci da variedade. Não faz nenhum sentido estudar propriedades de soluções de certas equações se as tais não possuem soluções! O objetivo desse capítulo é demonstrar que, sob certas condições, faz sentido estudar tal fluxo, isto é, pelo menos em um curto espaço de tempo a Equação (1.1) possui solução (mais ainda, vamos demonstrar que ela é única), isto é, o objetivo desse capítulo é a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Se (M, g_0) é uma variedade riemanniana compacta, então existe uma única solução $g(t)$, $t \in [0, \varepsilon)$ do fluxo de Ricci tal que $g(0) = g_0$, para algum $\varepsilon > 0$.*

O Símbolo

Para investigar a existência e a unicidade de curto prazo para o fluxo de Ricci, naturalmente se olha para a teoria de EDP's não lineares em fibrados vetoriais. Aqui estabelecemos o símbolo que será usado para determinar o tipo de uma EDP.

Sejam E e F fibrados vetoriais sobre uma variedade M e $\Gamma(E), \Gamma(F)$ os espaços das seções suaves de E e F, respectivamente (para mais detalhes veja a Definição A.6). Dizemos que $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ é um **operador diferencial linear de ordem k** se ele é da forma

$$L(u) = \sum_{|\alpha| \leq k} L_\alpha (\partial^\alpha u),$$

em que $L_\alpha \in Hom(E, F)$ é um homomorfismo de fibrados e α é um multi-índice.

Segue um exemplo de um operador diferencial linear:

Exemplo 2.1 *Seja* $\{e_k\}_{k=1}^n$ *um referencial local em* E *em uma vizinhança de* $p \in M$ *com coordenadas locais* $\left(x^i\right)$. *Então o operador diferencial de segunda ordem* $\mathcal{P} : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ *possui a forma*

$$\mathcal{P}(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j,l=1}^{n} (\lambda_{ij})_l^k \frac{\partial^2 u^l}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i,l=1}^{n} (\mu_i)_l^k \frac{\partial u^l}{\partial x^i} + \sum_{l=1}^{n} \upsilon_l^k u^l \right) e_k.$$

Aqui $\lambda \in \Gamma\left(Sym^2(T^*M) \otimes Hom(E,E)\right)$, *em que* $Sym^2(T^*M)$ *é o espaço dos (2,0)-tensores simétricos em* M *e* $Hom(E,E)$ *é o espaço dos homomorfismos de* E, *enquanto que* $\mu \in \Gamma(T^*M \otimes Hom(E,E))$ *e* $\upsilon \in \Gamma(Hom(E,E))$.

O **símbolo total** σ de L na direção de $\zeta \in \mathfrak{X}(M)$ é o seguinte homomorfismo de fibrados:

$$\sigma[L](\zeta) = \sum_{|\alpha| \le k} \zeta^\alpha L_\alpha : E \longrightarrow F$$

Assim, no Exemplo 2.1

$$\sigma[L](\zeta)(u) = \sum_{|\alpha| \le 2} \zeta^\alpha L_\alpha(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j,l=1}^{n} \zeta^i \zeta^j (\lambda_{ij})_l^k u^l + \sum_{i,l=1}^{n} \zeta^i (\mu_i)_l^k u^l + \sum_{l=1}^{n} \upsilon_l^k u^l \right) e_k.$$

No caso familiar das equações escalares, o fibrado é simplesmente $M \times \mathbb{R}$, e assim, $Hom(M \times \mathbb{R}, M \times \mathbb{R})$ é unidimensional e podemos pensar em λ como uma seção de $Sym^2(T^*M)$, em μ um campo vetorial e em υ como uma função escalar.

O **símbolo principal** $\widehat{\sigma}$ de L na direção de ζ é definido pelo homomorfismo de fibrados que utiliza apenas os termos de maior ordem, isto é,

$$\widehat{\sigma}[L](\zeta) = \sum_{|\alpha| = k} \zeta^\alpha L_\alpha.$$

O símbolo principal captura algebricamente as propriedades analíticas de L que dependem apenas das derivadas de ordem mais alta. No Exemplo 2.1 vemos que

$$\widehat{\sigma}[L](\zeta)(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j,l,=1}^{n} \zeta^i \zeta^j (\lambda_{ij})_l^k u^l \right) e_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j,l,=1}^{n} \zeta^i \zeta^j (\lambda_{ij})_l^k e_l^*(u) \right) e_k,$$

isto é, vemos que

$$\widehat{\sigma}[L](\zeta) = \sum_{i,j,l,k=1}^{n} \zeta^i \zeta^j (\lambda_{ij})_l^k e_l^* \otimes e_k.$$

O cálculo do símbolo é facilmente obtido (de forma heurística) pela substituição das derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial x^i}$ pelos elementos ζ^i.

O símbolo principal determina "o tipo"de uma equação de evolução: Dizemos que um operador diferencial L de ordem $2m$ é **elíptico** se para toda direção $\zeta \in T_xM$ existe $c > 0$ tal que para todo ζ e todo u,

$$\langle \widehat{\sigma}\left[L\right](\zeta)(u), u\rangle \geq c\left|\zeta\right|^{2m}\left|u\right|^2$$

Isso implica, em particular, que o símbolo principal em toda direção é um isomorfismo linear da fibra. De fato, se $u \in Nuc\left(\widehat{\sigma}\left[L\right](\zeta)\right)$, segue que

$$0 = \langle 0, u\rangle = \langle \widehat{\sigma}\left[L\right](\zeta)(u), u\rangle \geq c\left|\zeta\right|^{2m}\left|u\right|^2,$$

ou seja, $c\left|\zeta\right|^{2m}\left|u\right|^2 = 0$ e isso implica que $u = 0$, o Teorema do Núcleo e da Imagem conclui a demonstração da afirmação. Uma equação linear da forma $\partial_t u = Lu$ é dita **parabólica** se L é elíptica.

2.1 Motivação

A ideia da demonstração (de autoria do matemático americano Dennis DeTurck) é modificar um pouco a equação do fluxo de Ricci, de modo a torná-la elíptica, daí garantimos existência e unicidade de solução. A partir da solução dessa equação modificada, encontramos a solução do fluxo de Ricci original. Aqui vamos examinar o tensor de Ricci de perto. Para motivar a ideia de DeTurck, reescrevemos a linearização do tensor de Ricci como

$$\begin{aligned}
-2\left[DRic_g(h)\right]_{ik} \quad : \quad &= -2\frac{\partial Ric_{ik}}{\partial t} = -2\left((\triangle Ric)_{ik} + \left(\nabla^2 S\right)_{ik} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 Ric\right)_{lkia}\right) \\
&= \left(\triangle(-2Ric)\right)_{ik} + \left(\nabla^2(-2S)\right)_{ik} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2(-2Ric)\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2(-2Ric)\right)_{lkia} \\
&= (\triangle h)_{ik} + \left(\nabla^2\left(-2Tr_g(Ric)\right)\right)_{ik} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 h\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 h\right)_{lkia} \\
&= (\triangle h)_{ik} + Tr_g\left(\left(\nabla^2 h\right)_{ik}\right) - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 h\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 h\right)_{lkia} \\
&= (\triangle h)_{ik} + \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 h\right)_{ikla} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 h\right)_{lika} - \sum_{l,a=1}^{n} g^{la}\left(\nabla^2 h\right)_{lkia}
\end{aligned}$$

$$= (\triangle h)_{ik} + \sum_{l,a=1}^{n} g^{la} \left(\left(\nabla^2 h\right)_{ikla} - \left(\nabla^2 h\right)_{lika} - \left(\nabla^2 h\right)_{lkia} \right),$$

em que $h := \frac{\partial g}{\partial t}$, na segunda igualdade foi usado a expressão (1.12) e na quinta igualdade foi utilizado o item 4 da Proposição A.6.

Seja $Sym^2 T^* M$ o espaço dos (2,0) - tensores simétricos de M e consideremos o operador linear definido por $B_g : \Gamma\left(Sym^2 T^* M\right) \to \Gamma\left(T^* M\right)$ em que

$$c \in \Gamma\left(Sym^2 T^* M\right) \mapsto \left(B_g\left(c\right)\right)_k := \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left((\nabla c)_{ijk} - \frac{1}{2} (\nabla c)_{kij} \right) \in \Gamma\left(T^* M\right). \tag{2.1}$$

Defina a 1-forma (ou (1,0) - tensor) $V = B_g\left(h\right) \in \Gamma\left(T^* M\right)$ e notemos que

$$V_k = B_g\left(h\right)_k = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \left((\nabla h)_{pqk} - \frac{1}{2} (\nabla h)_{kpq} \right)$$

Derivando o tensor V vemos que (para mais detalhes sobre o traço veja a Seção A)

$$\begin{aligned} (\nabla V)_{ik} &= \left(\nabla B_g\left(h\right)\right)_{ik} = \left(\nabla \left(Tr_{12}\left(\nabla h\right) - \frac{1}{2} Tr_{23}\left(\nabla h\right) \right) \right)_{ik} \\ &= \left(\nabla\left(Tr_{12}\left(\nabla h\right)\right) - \frac{1}{2} \nabla\left(Tr_{23}\left(\nabla h\right)\right) \right)_{ik} \\ &= \left(Tr_{23}\left(\nabla^2 h\right) - \frac{1}{2} Tr_{34}\left(\nabla^2 h\right) \right)_{ik} \\ &= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \left(\left(\nabla^2 h\right)_{ipqk} - \frac{1}{2} \left(\nabla^2 h\right)_{ikpq} \right). \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$-2\left[DRic_g\left(h\right)\right]_{ik} = (\triangle h)_{ik} - (\nabla V)_{ik} - (\nabla V)_{ki} + S_{ik}, \tag{2.2}$$

em que S possui a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} S_{ik} &= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\nabla^2 h\right)_{ikqp} - \left(\nabla^2 h\right)_{kiqp} \right) + \left(\left(\nabla^2 h\right)_{iqkp} - \left(\nabla^2 h\right)_{qikp} \right) + \left(\left(\nabla^2 h\right)_{kqip} - \left(\nabla^2 h\right)_{qkip} \right) \right) \\ &\overset{(!)}{=} \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{r=1}^{n} R^r_{ikq} h_{rp} + \sum_{r=1}^{n} R^r_{ikp} h_{rq} \right) + \left(\sum_{r=1}^{n} R^r_{iqp} h_{rk} + \sum_{r=1}^{n} R^r_{iqk} h_{rp} \right) \right) \\ &+ \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \left(\sum_{r=1}^{n} R^r_{kqi} h_{rp} + \sum_{r=1}^{n} R^r_{kqp} h_{ri} \right) \end{aligned}$$

Trocando as variáveis $p \leftrightarrow q$, vemos que

$$\begin{aligned}
S_{ik} &= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\left(\sum_{r=1}^{n} R_{ikq}^{r} h_{rp}\right) + \left(\sum_{r=1}^{n} R_{iqp}^{r} h_{rk} + \sum_{r=1}^{n} R_{iqk}^{r} h_{rp}\right) + \left(\sum_{r=1}^{n} R_{kqi}^{r} h_{rp} + \sum_{r=1}^{n} R_{kqp}^{r} h_{ri}\right)\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\sum_{r=1}^{n} h_{rp}\left(R_{ikq}^{r} + R_{iqk}^{r}\right) + \sum_{r=1}^{n} R_{iqp}^{r} h_{rk} + \sum_{r=1}^{n} R_{kqi}^{r} h_{rp} + \sum_{r=1}^{n} R_{kqp}^{r} h_{ri}\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\sum_{r=1}^{n} h_{rp}\left(R_{ikq}^{r} - R_{qik}^{r}\right) + \sum_{r=1}^{n} R_{iqp}^{r} h_{rk} + \sum_{r=1}^{n} R_{kqi}^{r} h_{rp} + \sum_{r=1}^{n} R_{kqp}^{r} h_{ri}\right).
\end{aligned}$$

Pela primeira identidade de Bianchi, segue que

$$\begin{aligned}
S_{ik} &= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\sum_{r=1}^{n} h_{rp}\left(-R_{qik}^{r} - R_{kqi}^{r} - R_{qik}^{r}\right) + \sum_{r=1}^{n} R_{iqp}^{r} h_{rk} + \sum_{r=1}^{n} R_{kqi}^{r} h_{rp} + \sum_{r=1}^{n} R_{kqp}^{r} h_{ri}\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\sum_{r=1}^{n} h_{rp}\left(-2R_{qik}^{r}\right) + \sum_{r=1}^{n} R_{iqp}^{r} h_{rk} + \sum_{r=1}^{n} R_{kqp}^{r} h_{ri}\right) \\
&= \sum_{p,q,r=1}^{n} g^{pq}\left(-2R_{qik}^{r} h_{rp} + R_{iqp}^{r} h_{rk} + R_{kqp}^{r} h_{ri}\right),
\end{aligned}$$

em que, pela Proposição A.12 foi usado em (!) que

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2 h\right)_{ijpq} - \left(\nabla^2 h\right)_{jipq} &= -\left(R\left(\partial_i, \partial_j\right)(h)\right)_{pq} = -R\left(\partial_i, \partial_j\right)\left(h_{pq}\right) + h\left(R\left(\partial_i, \partial_j\right)\partial_p, \partial_q\right) + h\left(\partial_p, R\left(\partial_i, \partial_j\right)\partial_q\right) \\
&= 0 + h\left(R\left(\partial_i, \partial_j\right)\partial_p, \partial_q\right) + h\left(\partial_p, R\left(\partial_i, \partial_j\right)\partial_q\right) \\
&= h\left(\sum_{r=1}^{n} R_{ijp}^{r}\partial_r, \partial_q\right) + h\left(\partial_p, \sum_{r=1}^{n} R_{ijq}^{r}\partial_r\right) \\
&= \sum_{r=1}^{n} R_{ijp}^{r} h_{rq} + \sum_{r=1}^{n} R_{ijq}^{r} h_{pr} \\
&= \sum_{r=1}^{n} R_{ijp}^{r} h_{rq} + R_{ijq}^{r} h_{pr}.
\end{aligned}$$

Mais ainda, pela Proposição 1.3 e trocando os índices dos somatórios se necessário for, podemos escrever V (pelo menos localmente) como

$$V_k = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left((\nabla h)_{pqk} - \frac{1}{2}(\nabla h)_{kpq}\right) = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\frac{1}{2}(\nabla h)_{pqk} + \frac{1}{2}(\nabla h)_{pqk} - \frac{1}{2}(\nabla h)_{kpq}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left((\nabla h)_{pqk} + (\nabla h)_{qpk} - (\nabla h)_{kpq}\right) \\
&= \sum_{p,q,r=1}^{n} g^{pq} g_{kr}\left(D\Gamma_g(h)\right)^{r}_{pq},
\end{aligned}
$$

em que

$$D\Gamma_g : \Gamma\left(Sym^2 T^*M\right) \to \Gamma\left(Sym^2 T^*M \otimes TM\right)$$

é a linearização da conexão de Levi-Civita $\Gamma(g)$. Agora gostaríamos de adicionar um termo apropriado de correção para tornar o fluxo de Ricci elíptico.

Para isso, fixemos uma métrica $\widetilde{g}$ em M com conexão de Levi-Civita $\widetilde{\Gamma}$. Pela nossa investigação acima, definimos o campo vetorial W por

$$W := \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\Gamma^k_{pq} - \widetilde{\Gamma}^k_{pq}\right)\right)\partial_k. \tag{2.3}$$

Como temos uma diferença entre duas conexões (em suma), vemos que W é um campo globalmente bem definido. Como W possui apenas derivadas da métrica g, o operador

$$P = P\left(\widetilde{\Gamma}\right) : c \in \Gamma\left(Sym^2T^*M\right) \mapsto P(g) = \mathcal{L}_W c \in \Gamma\left(Sym^2T^*M\right),$$

em que $\mathcal{L}_W c$ é a **derivada de Lie** de c com relação a W (para mais detalhes veja sua definição na expressão (A.34)) é um operador diferencial de segunda ordem em c. A linearização de P é dada por

$$
\begin{aligned}
(DP(h))_{ik} &= \frac{d}{dt}_{|t=0}(\mathcal{L}_W g)_{ik} = \frac{d}{dt}_{|t=0}\nabla_i W_k + \frac{d}{dt}_{|t=0}\nabla_k W_i = \frac{d}{dt}_{|t=0}\nabla_i\left(\sum_{l=1}^{n} g_{kl}W^l\right) + \frac{d}{dt}_{|t=0}\nabla_k\left(\sum_{l=1}^{n} g_{il}W^l\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}_{|t=0}\nabla_i\left(g_{kl}W^l\right) + \frac{d}{dt}_{|t=0}\nabla_k\left(g_{il}W^l\right)\right\} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}_{|t=0}\nabla_i\left(g_{kl}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\Gamma^l_{pq} - \widetilde{\Gamma}^l_{pq}\right)\right) + \frac{d}{dt}_{|t=0}\nabla_k\left(g_{il}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\Gamma^l_{pq} - \widetilde{\Gamma}^l_{pq}\right)\right)\right\} \qquad (2.4) \\
&= \sum_{l,p,q=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}_{|t=0}\nabla_i\left(g_{kl}g^{pq}\left(\Gamma^l_{pq} - \widetilde{\Gamma}^l_{pq}\right)\right) + \frac{d}{dt}_{|t=0}\nabla_k\left(g_{il}g^{pq}\left(\Gamma^l_{pq} - \widetilde{\Gamma}^l_{pq}\right)\right)\right\} \\
&= \sum_{l,p,q=1}^{n}\left\{\nabla_i\frac{d}{dt}_{|t=0}\left(g_{kl}g^{pq}\left(\Gamma^l_{pq} - \widetilde{\Gamma}^l_{pq}\right)\right) + \nabla_k\frac{d}{dt}_{|t=0}\left(g_{il}g^{pq}\left(\Gamma^l_{pq} - \widetilde{\Gamma}^l_{pq}\right)\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Pela expressão da derivada de g^{ij} (para mais detalhes veja (1.4)), segue que

$$\begin{aligned}
(DP(h))_{ik} &= \sum_{l,p,q=1}^{n} \nabla_i \left(\left(h_{kl} g^{pq} - g_{kl} \sum_{a,b=1}^{n} g^{pa} g^{qb} h_{ab} \right) \left(\Gamma_{pq}^{l} - \widetilde{\Gamma}_{pq}^{l} \right) + g_{kl} g^{pq} \frac{\partial \Gamma_{pq}^{l}}{\partial t} \right) \\
&\quad + \sum_{l,p,q=1}^{n} \nabla_k \left(\left(h_{il} g^{pq} + g_{il} \sum_{a,b=1}^{n} g^{pa} g^{qb} h_{ab} \right) \left(\Gamma_{pq}^{l} - \widetilde{\Gamma}_{pq}^{l} \right) + g_{il} g^{pq} \frac{\partial \Gamma_{pq}^{l}}{\partial t} \right) \\
&= \sum_{l,p,q=1}^{n} \nabla_i \left(\left(h_{kl} g^{pq} - g_{kl} \sum_{a,b=1}^{n} g^{pa} g^{qb} h_{ab} \right) \left(\Gamma_{pq}^{l} - \widetilde{\Gamma}_{pq}^{l} \right) + V_k \right) \\
&\quad + \sum_{l,p,q=1}^{n} \nabla_k \left(\left(h_{il} g^{pq} + g_{il} \sum_{a,b=1}^{n} g^{pa} g^{qb} h_{ab} \right) \left(\Gamma_{pq}^{l} - \widetilde{\Gamma}_{pq}^{l} \right) + V_i \right) \\
&= \nabla_i V_k + \nabla_k V_i + \sum_{l,p,q=1}^{n} \left\{ \nabla_i \left(\left(h_{kl} g^{pq} - g_{kl} \sum_{a,b=1}^{n} g^{pa} g^{qb} h_{ab} \right) \left(\Gamma_{pq}^{l} - \widetilde{\Gamma}_{pq}^{l} \right) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{l,p,q=1}^{n} \nabla_k \left(\left(h_{il} g^{pq} + g_{il} \sum_{a,b=1}^{n} g^{pa} g^{qb} h_{ab} \right) \left(\Gamma_{pq}^{l} - \widetilde{\Gamma}_{pq}^{l} \right) \right) \\
&= \nabla_i V_k + \nabla_k V_i + T_{ik},
\end{aligned}$$

em que $h := \frac{\partial g}{\partial t}$ e T_{ik} possui a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
T_{ik} \; : &= \sum_{l,p,q=1}^{n} \left\{ \nabla_i \left(\left(h_{kl} g^{pq} - g_{kl} \sum_{a,b=1}^{n} g^{pa} g^{qb} h_{ab} \right) \left(\Gamma_{pq}^{l} - \widetilde{\Gamma}_{pq}^{l} \right) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{l,p,q=1}^{n} \nabla_k \left(\left(h_{il} g^{pq} + g_{il} \sum_{a,b=1}^{n} g^{pa} g^{qb} h_{ab} \right) \left(\Gamma_{pq}^{l} - \widetilde{\Gamma}_{pq}^{l} \right) \right).
\end{aligned}$$

Notemos que T_{ik} é uma expressão linear de primeira ordem com relação à h. Comparando a igualdade acima com a expressão (2.2), podemos considerar o operador

$$Q := -2Ric + P : \Gamma\left(Sym^2 T^* M\right) \to \Gamma\left(Sym^2 T^* M\right).$$

Segue das expressões (2.2) e (2.4) que

$$\begin{aligned}
DQ(h)_{ik} &= -2DRic(h)_{ik} + DP(h)_{ik} = (\triangle h)_{ik} - \nabla_i V_k - \nabla_k V_i + S_{ik} + \nabla_i V_k + \nabla_k V_i + T_{ik} \\
&= (\triangle h)_{ik} + S_{ik} + T_{ik} \\
&= (\triangle h)_{ik} + A_{ik},
\end{aligned}$$

em que $A_{ik} := S_{ik} + T_{ik}$. Assim, o símbolo principal de DQ é

$$\widehat{\sigma}\left[DQ\right]\left(\zeta\right)\left(h\right)_{ik} = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\zeta_p\zeta_q h_{ik} = |\zeta|^2 h_{ik}. \tag{2.5}$$

Portanto, Q é elíptica, e assim a teoria de equações diferenciais parciais nos diz que o fluxo de Ricci modificado,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric(g) + P(g) = -2Ric\left(g\right) + \mathcal{L}_W g, \tag{2.6}$$

também chamado de **fluxo de Ricci-DeTurck,** possui uma única solução em um curto prazo.

2.2 Relacionando os Fluxos de Ricci-DeTurck e de Ricci

Antes de demonstrar o Teorema 2.1, vamos enunciar um resultado que será utilizado em sua demonstração:

Lema 2.1 (de Escape) *Considere uma variedade diferenciável M e seja $V \in \mathfrak{X}\left(M\right)$. Se γ é uma curva integral de V cujo domínio maximal não é toda reta $\mathbb{R}$, então a imagem de γ não pode morar em nenhum subconjunto compacto de M.*

Demonstração. Denote por (a, b) o domínio maximal de γ, em que $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$. Seja $p = \gamma\left(0\right)$ e denote por θ o fluxo do campo V, ou seja, pela unicidade das curvas integrais (teorema de existência e unicidade de EDO) $\gamma = \theta(p)$. Assuma que $b < \infty$ e suponha, por absurdo, que $\gamma\left(a, b\right) \subset K \subset M$, sendo K um subconjunto compacto. Vamos estender γ além de b contradizendo b ser o extremo superior do domínio maximal de γ. De fato, se $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset (a, b)$ uma sequência tal que $t_i \overset{i\to\infty}{\to} b$, então $\{\gamma\left(t_i\right)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset K$ é uma sequência em K, que é compacto. Logo possui uma subsequência convergente $\gamma\left(t_{i_k}\right) \overset{k\to\infty}{\to} q \in M$. Existe uma vizinhança $U \subset M$ de q e um número $\varepsilon > 0$ tal que θ está definida em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$. Tome um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma\left(t_{i_k}\right) \in U$ e $t_{i_k} > b - \varepsilon$ (tal k existe por causa da convergência). Defina $\sigma : (a, t_{i_k} + \varepsilon) \to M$, em que

$$\sigma\left(t\right) = \begin{cases} \gamma\left(t\right), & a < t < b \\ \left(\theta_{t-t_{i_k}} \circ \theta_{t_{i_k}}\right)\left(p\right), & t_{i_k} - \varepsilon < t < t_{i_k} + \varepsilon \end{cases}.$$

Temos que σ é suave, $\left(\theta_{t-t_{i_k}} \circ \theta_{t_{i_k}}\right)\left(p\right) = \theta_t\left(p\right) = \gamma\left(t\right)$. Assim, σ é uma curva integral de V que estende γ, absurdo. ∎

Demonstração do Teorema 2.1. Vamos demonstrá-lo em alguns passos, começando com a existência.

Passo 1: Fixe uma métrica $\widetilde{g}$ em M e defina o campo W como na expressão (2.3). Seja o fluxo de Ricci-DeTurck dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2\left(Ric\left(g\right)\right)_{ij} + \left(\mathcal{L}_W g\right)_{ij} = -2\left(Ric\left(g\right)\right)_{ij} + \nabla_i W_k + \nabla_k W_i, \\ g\left(0\right) = g_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

em que $W_j = \sum_{k=1}^{n} g_{jk} W^k$. Segue da expressão (2.5) que o fluxo de Ricci-DeTurck é estritamente parabólico. Logo, para toda métrica inicial g_0 existe $\varepsilon > 0$ e uma única solução $g\left(t\right)$ de (2.7) definida para todo $0 \leq t < \varepsilon$.

Passo 2: Como existe uma solução do fluxo de Ricci-DeTurck, a família a um parâmetro de campos $W(t)$ definida pela expressão (2.3) existe para todo $0 \leq t < \varepsilon$. Nesse caso, existe uma família a um parâmetro $\varphi_t : M \to M$ (isto é, o fluxo ao longo do campo $-W$) definida pela seguinte EDO:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t\left(p\right) = -W\left(\varphi_t\left(p\right), t\right), \\ \varphi_0\left(p\right) = Id_M. \end{cases}$$

Como M é compacta, o Lema de Escape garante que não há curvas integrais de $W(t)$ que não estejam definidas em todo $\mathbb{R}$. Com isso, e com o teorema de existência e unicidade para fluxos dependentes do tempo concluímos que existe uma única família de difeomorfismos φ_t que está definida para todo $0 \leq t < \varepsilon$.

Passo 3:

Afirmação: A família de métricas $\overline{g}\left(t\right) := \varphi_t^* g\left(t\right)$, $0 \leq t < \varepsilon$, é a única solução do fluxo de Ricci

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{g}}{\partial t} = -2Ric\left(\overline{g}\right), \\ \overline{g}\left(0\right) = g_0. \end{cases} \tag{2.8}$$

De fato, primeiramente notemos que

$$\overline{g}\left(0\right) = \varphi_0^* g\left(0\right) = Id_M^* g\left(0\right) = g\left(0\right) = g_0.$$

Além disso, a derivada de $\overline{g}$ possui a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{g}_{ik}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_t^* g\left(t\right)_{ik}\right) = \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\left(\varphi_{t+s}^* g\left(t+s\right)_{ik}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(g_{t+s}\left(d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_i\right), d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_k\right)\right)\right)_{|s=0} \\ &= \left[\left(\frac{\partial g_{t+s}}{\partial s}\right)\left(d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_i\right), d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_k\right)\right)\right]_{s=0} + \left[g_{t+s}\left(\frac{\partial}{\partial s}d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_i\right), d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_k\right)\right)\right]_{s=0} \\ &\quad + \left[g_{t+s}\left(d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_i\right), \frac{\partial}{\partial s}d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_k\right)\right)\right]_{s=0} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\left(d\left(\varphi_t\right)\left(\partial_i\right), d\left(\varphi_t\right)\left(\partial_k\right)\right) + \left[g_{t+s}\left(\frac{\partial}{\partial s} d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_i\right), d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_k\right)\right)\right]_{s=0} \\
&\quad + \left[g_{t+s}\left(d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_i\right), \frac{\partial}{\partial s} d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_k\right)\right)\right]_{s=0} \\
&= \left(\varphi_t^*\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)_{ik} + g_t\left(\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_i\right), d\left(\varphi_t\right)\left(\partial_k\right)\right) + g_t\left(d\left(\varphi_t\right)\left(\partial_i\right), \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_k\right)\right) \\
&= \left(\varphi_t^*\left(-2Ric\left(g\right) + \mathcal{L}_W g\right)\right)_{ik} + g_t\left(\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_i\right), d\left(\varphi_t\right)\left(\partial_k\right)\right) + g_t\left(d\left(\varphi_t\right)\left(\partial_i\right), \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_k\right)\right).
\end{aligned}
$$

Usando o bom comportamento do pull-back do tensor de Ricci e a simetria de g, vemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{g}_{ik}}{\partial t} &= -2\left(Ric\left(\varphi_t^* g\right)\right)_{ik} + \left(\varphi_t^* \mathcal{L}_{W(t)} g\left(t\right)\right)_{ik} + g_t\left(\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_i\right), d\left(\varphi_t\right)\left(\partial_k\right)\right) \\
&\quad + g_t\left(d\left(\varphi_t\right)\left(\partial_i\right), \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} d\left(\varphi_{t+s}\right)\left(\partial_k\right)\right) \\
&= -2\left(Ric\left(\varphi_t^* g\right)\right)_{ik} + \left(\varphi_t^* \mathcal{L}_{W(t)} g\left(t\right)\right)_{ik} + \left(\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\left(\varphi_{t+s}^* g\left(t\right)\right)\right)_{ik}.
\end{aligned}
$$

Agora notemos que

$$
\varphi_{t+s}^* = \left(\varphi_t^{-1} \circ \varphi_{t+s} \circ \varphi_t\right)^* = \left(\varphi_t^{-1} \circ \varphi_{t+s}\right)^* \circ \varphi_t^*
$$

e que

$$
\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\left(\varphi_t^{-1} \circ \varphi_{t+s}\right) = d\left(\varphi_t^{-1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} \varphi_{t+s}\right) = \left(\varphi_t^{-1}\right)_*\left(\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0} \varphi_{t+s}\right) = \left(\varphi_t^{-1}\right)_*\left(W\left(t\right)\right).
$$

Segue da definição de derivada de Lie (para mais detalhes veja a expressão (A.34)) que

$$
\left(\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\left(\varphi_{t+s}^* g\left(t\right)\right)\right)_{ik} = \left(\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\left(\left(\varphi_t^{-1} \circ \varphi_{t+s}\right)^*\left(\varphi_t^* g\left(t\right)\right)\right)\right)_{ik} = \left(\mathcal{L}_{\left(\varphi_t^{-1}\right)_*\left(W(t)\right)}\left(\varphi_t^* g\left(t\right)\right)\right)_{ik},
$$

e portanto a derivada de $\overline{g}$ é um múltiplo do tensor de Ricci, pois

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{g}_{ik}}{\partial t} &= -2\left(Ric\left(\varphi_t^* g\right)\right)_{ik} + \left(\varphi_t^* \mathcal{L}_{W(t)} g\left(t\right)\right)_{ik} + \left(\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\left(\varphi_{t+s}^* g\left(t\right)\right)\right)_{ik} \\
&= -2\left(Ric\left(\varphi_t^* g\right)\right)_{ik} + \left(\varphi_t^* \mathcal{L}_{W(t)} g\left(t\right)\right)_{ik} + \left(\mathcal{L}_{\left(\varphi_t^{-1}\right)_*\left(W(t)\right)}\left(\varphi_t^* g\left(t\right)\right)\right)_{ik} \\
&= -2\left(Ric\left(\varphi_t^* g\right)\right)_{ik}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\overline{g}\left(t\right) = \varphi_t^* g\left(t\right)$ é de fato uma solução de (2.8) para $t \in \left(0, \varepsilon\right]$. Isso completa a demonstração da existência.

Passo 4: Nos resta apenas mostrar a unicidade da solução do fluxo de Ricci. Para isso, é suficiente mostrar que toda solução do fluxo de Ricci-DeTurck pode ser produzida a partir de uma solução do fluxo de Ricci após uma reparametrização definida por um fluxo de calor de uma aplicação harmônica.

Mais precisamente, seja $\{(M, \overline{g}(t))\}_{t\in[0,T)}$ uma família de variedades riemannianas satisfazendo o fluxo de Ricci. Fixe $\left(N, \widetilde{h}, \widetilde{\nabla}\right)$ outra variedade riemanniana e seja $\varphi_0 : M \to N$ um difeomorfismo. Defina $\varphi : M \times [0,T) \to N$ como um fluxo de calor de uma aplicação harmônica de modo que

$$\varphi_* \partial_t = \triangle_{\overline{g}(t),\widetilde{h}} \varphi := \sum_{i,j=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left({}^{\varphi(t)}\widetilde{\nabla}\right)_{\partial_i} \varphi(t)_* \left(\partial_j\right),$$

onde tomamos ∇ como a conexão de Levi-Civita $\nabla^{\overline{g}}$ (no tempo t) em T^*M e a conexão pullback ${}^{\varphi(t)}\widetilde{\nabla}$ em $\varphi\left(t\right)^* TN$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}
\triangle_{\overline{g}(t),\widetilde{h}} \varphi &= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left({}^{\varphi(t)}\widetilde{\nabla}\right)_{\partial_i} \varphi(t)_* \left(\partial_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left({}^{\varphi(t)}\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \left(\varphi(t)_* \left(\partial_j\right)\right) - \varphi(t)_* \left(\nabla^{\overline{g}}_{\partial_i} \partial_j\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left({}^{\varphi(t)}\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \left(\sum_{\beta=1}^{n} \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \partial_\beta \circ \varphi\left(t\right)\right) - \sum_{\gamma=1}^{n} \left(\left(\nabla^{\overline{g}}_{\partial_i} \partial_j\right) \left(\varphi^{\gamma}\right)\right) \partial_\gamma\right) \\
&= \sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\beta=1}^{n} \left({}^{\varphi(t)}\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\right) \left(\partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \partial_\beta \circ \varphi\left(t\right)\right) - \left(\left(\nabla^{\overline{g}}_{\partial_i} \partial_j\right) \left(\varphi^{\gamma}\right)\right) \partial_\gamma\right) \\
&= \sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\beta=1}^{n} \partial_i \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \partial_\beta + \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \left({}^{\varphi(t)}\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \left(\partial_\beta \circ \varphi\left(t\right)\right)\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\Gamma}_{ij}^{k} \partial_k \left(\varphi^{\gamma}\right)\right) \partial_\gamma \circ \varphi\left(t\right)\right) \\
&= \sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\beta=1}^{n} \partial_i \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \partial_\beta + \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \left(\left(\widetilde{\nabla}_{\varphi(t)_* \partial_i} \left(\partial_\beta\right)\right)\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\Gamma}_{ij}^{k} \partial_k \left(\varphi^{\gamma}\right)\right) \partial_\gamma\right).
\end{aligned}$$

Decompondo $\varphi\left(t\right)_* \partial_i$ em termos da base coordenada, segue que

$$\begin{aligned}
\triangle_{\overline{g}(t),\widetilde{h}} \varphi &= \sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\beta=1}^{n} \partial_i \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \partial_\beta + \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \left(\widetilde{\nabla}_{\sum_{\alpha=1}^{n} \partial_i \varphi^\alpha \partial_\alpha} \partial_\beta\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\Gamma}_{ij}^{k} \partial_k \left(\varphi^{\gamma}\right)\right) \partial_\gamma\right) \\
&= \sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\beta=1}^{n} \partial_i \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \partial_\beta + \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\partial_i \varphi^{\alpha}\right) \left(\widetilde{\nabla}_{\partial_\alpha} \partial_\beta\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\Gamma}_{ij}^{k} \partial_k \left(\varphi^{\gamma}\right)\right) \partial_\gamma\right) \\
&= \sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\beta=1}^{n} \partial_i \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \partial_\beta + \partial_j \left(\varphi^{\beta}\right) \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\partial_i \varphi^{\alpha}\right) \sum_{\gamma=1}^{n} \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} \partial_\gamma - \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\Gamma}_{ij}^{k} \partial_k \left(\varphi^{\gamma}\right)\right) \partial_\gamma\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\gamma=1}^{n} \partial_i \partial_j (\varphi^\gamma) + \sum_{\beta,\alpha,\gamma=1}^{n} \partial_j \left(\varphi^\beta\right) (\partial_i \varphi^\alpha) \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma - \sum_{k=1}^{n} \overline{\Gamma}_{ij}^k \partial_k (\varphi^\gamma) \right) \partial_\gamma. \quad (2.9)$$

Passo 5: Agora vamos definir

$$g(t) := \left(\varphi(t)^{-1}\right)^* \overline{g}(t), \quad (2.10)$$

uma métrica que depende do tempo em N. Afirmamos que essa métrica é solução do fluxo de Ricci-DeTurck. Para mostrar isso, observe que um cálculo direto, semelhante ao do Passo 3, fornece o seguinte:

Lema 2.2 *Se g é uma métrica que depende do tempo em N definida pela expressão (2.10), então*

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \left(\varphi(t)^{-1}\right)^* \left(\frac{\partial \overline{g}}{\partial t}\right) + \mathcal{L}_V g,$$

em que $V_p = -(\varphi_* \partial_t)_{|\varphi^{-1}(p)}$, para todo $p \in N$.

Demonstração do Lema: A invariância geométrica da curvatura implica que

$$\begin{aligned} \left(\varphi(t)^{-1}\right)^* \left(\frac{\partial \overline{g}}{\partial t}\right) &= \varphi(t)_* \left(\frac{\partial \overline{g}}{\partial t}\right) = -2\varphi(t)_* Ric(\overline{g}) = -2Ric(\varphi(t)_* \overline{g}) \\ &= -2Ric\left(\left(\varphi(t)^{-1}\right)^* \overline{g}\right) \\ &= -2Ric(g). \end{aligned}$$

A demonstração segue da expressão do fluxo de Ricci - DeTurck (2.6).

Logo, tudo o que precisamos é relacionar o termo derivado de Lie ao da equação de Ricci-DeTurck, ou seja, queremos mostrar que $V = W$. A observação chave aqui é a invariância geométrica da "aplicação Laplaciano"refletido na seguinte proposição.

Proposição 2.1 *Considere K, M e N variedades diferenciáveis com um difeomorfismo $\psi : K \to M$ e uma aplicação suave $\varphi : M \to N$. Seja $\overline{g}$ uma métrica em M, $\widetilde{h}$ uma métrica em N e $g := \psi^* \overline{g}$. Então*

$$\triangle_{g,\widetilde{h}} (\varphi \circ \psi) = \left(\triangle_{\overline{g},\widetilde{h}} \varphi\right) \circ \psi.$$

Note que $\triangle_{\overline{g},\widetilde{h}} \varphi \in \Gamma(\varphi^* TN)$, e portanto $\left(\triangle_{\overline{g},\widetilde{h}} \varphi\right) \circ \psi \in \Gamma(\psi^* \varphi^* TN) = \Gamma((\varphi \circ \psi)^* TN)$. O resultado não é surpreendente: Ele afirma que a aplicação harmônica Laplaciana de uma aplicação de K a M permanece inalterada se aplicarmos uma isometria a M.

Demonstração da Proposição: Para todo $p \in K$, precisamos mostrar que

$$\left(\triangle_{g,\widetilde{h}}(\varphi \circ \psi)\right)(p) = \left(\triangle_{\overline{g},\widetilde{h}}\varphi\right)(\psi(p)).$$

Para fazer isso para todo ponto p fixado, escolha um sistema de coordenadas $\left(x^i\right)$ para M em torno de $\psi(p)$ e induza um sistema de coordenadas $\left(y^i = x^i \circ \psi\right)$. Fixe um sistema de coordenadas (z^α) para N em torno de $(\varphi \circ \psi)(p)$. Nesses sistemas, temos que

$$z \circ \varphi \circ x^{-1} = z \circ \varphi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ x^{-1} = z \circ \varphi \circ \psi \circ (x \circ \psi)^{-1} = z \circ (\varphi \circ \psi) \circ y^{-1}. \tag{2.11}$$

Além disso,

$$\overline{g}_{ij} = (\psi_* g)(\partial_i, \partial_j) = g(\psi^* \partial_i, \psi^* \partial_j) = g_{ij}.$$

Segue da igualdade das métricas e da expressão dos símbolos de Christoffel em termos das mesmas que $\overline{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$. Segue de (2.11) que $\varphi^\alpha = (\varphi \circ \psi)^\alpha$, e portanto,

$$\begin{aligned}
\left(\triangle_{\overline{g},\widetilde{h}}\varphi\right)(\psi(p)) &= \sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\gamma=1}^{n} \partial_i \partial_j (\varphi^\gamma) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\Gamma}_{ij}^k \partial_k (\varphi^\gamma) + \sum_{\beta,\alpha,\gamma=1}^{n} \partial_j \left(\varphi^\beta\right) \partial_i (\varphi^\alpha) \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \right) \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \\
= & \sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\gamma=1}^{n} \partial_i \partial_j ((\varphi \circ \psi)^\gamma) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\Gamma}_{ij}^k \partial_k ((\varphi \circ \psi)^\gamma) + \sum_{\beta,\alpha,\gamma=1}^{n} \partial_j \left((\varphi \circ \psi)^\beta\right) \partial_i ((\varphi \circ \psi)^\alpha) \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \right) \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \\
= & \left(\triangle_{\overline{g},\widetilde{h}}(\varphi \circ \psi)\right)(p).
\end{aligned}$$

Agora podemos completar o argumento. Como $V(p) = -(\varphi_* \partial_t)\left(\varphi^{-1}(p)\right) = -\left(\triangle_{\overline{g},\widetilde{h}}\varphi\right)\left(\varphi^{-1}(p)\right)$, a Proposição 2.1 (com $\psi = \varphi^{-1}$ e $N = M$) e da igualdade (2.9) nos dá que

$$\begin{aligned}
V &= -\left(\triangle_{\overline{g},\widetilde{h}}\varphi\right) \circ \varphi^{-1} = -\triangle_{\overline{g},\widetilde{h}}\left(\varphi \circ \varphi^{-1}\right) = -\triangle_{\overline{g},\widetilde{h}}(Id_M) \\
&= -\sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\gamma=1}^{n} \partial_i \partial_j \left(Id_M^\gamma\right) + \sum_{\beta,\alpha,\gamma=1}^{n} \partial_j \left(Id_M^\beta\right) (\partial_i Id_M^\alpha) \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma - \sum_{k=1}^{n} \overline{\Gamma}_{ij}^k \partial_k \left(Id_M^\gamma\right) \right) \partial_\gamma \\
&= -\sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\sum_{\beta,\alpha,\gamma=1}^{n} \delta_{j\beta} \delta_{\alpha i} \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma - \sum_{k=1}^{n} \overline{\Gamma}_{ij}^k \delta_{\gamma k} \right) \partial_\gamma \\
&= -\sum_{i,j,\gamma=1}^{n} \overline{g}^{ij} \left(\widetilde{\Gamma}_{ij}^\gamma - \overline{\Gamma}_{ij}^\gamma\right) \partial_\gamma \\
&= W.
\end{aligned}$$

Passo 6: Finalmente vamos mostrar a unicidade de solução para o fluxo de Ricci. Suponha que existam $\overline{g}_i(t)$ soluções do fluxo de Ricci, em que $i = 1, 2$ e com condição inicial $\overline{g}_1(0) = \overline{g}_2(0)$. Tomando $N = M$ e $\varphi_0(x) = x$, produzimos soluções $g_i(t)$ do fluxo de Ricci-DeTurck, com $g_1(0) = \overline{g}_1(0) = \overline{g}_2(0) = g_2(0)$. Pela unicidade de soluções do fluxo de Ricci-DeTurck, temos que $g_1(t) = g_2(t)$, para todo t no intervalo comum de existência. Ou seja, $W = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\left(\Gamma_{ij}^k - \widetilde{\Gamma}_{ij}^k\right)$ é o mesmo para as duas soluções. Os difeomorfismos $\varphi_i\left(t\right)$ são dados pelo fluxo de calor de uma aplicação harmônica, e como antes, a Proposição 2.1 nos dá que

$$\begin{cases} \left(\partial_t \varphi_i\right)(x,t) = \left(\triangle_{\overline{g}_i,\widetilde{h}} \varphi_i\right)(x,t) = -W\left(\varphi_i\left(x,t\right)\right); \\ \varphi_i\left(x,0\right) = x. \end{cases}$$

Assim, φ_1 e φ_2 são soluções do mesmo PVI, assim $\varphi_1\left(x,t\right) = \varphi_2\left(x,t\right)$ e portanto,

$$\overline{g}_2 = \varphi_2^* g_2 = \varphi_1^* g_1 = \overline{g}_1.$$

■

Capítulo 3

O Princípio do Máximo

Logo mais (no próximo capítulo), vamos demonstrar que dada uma variedade M, a única solução $(M, g(t))$ do fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$ existe em um intervalo maximal $0 \leq t < T \leq \infty$. Além disso, na demonstração do Teorema da Esfera Suave, vamos submeter nossa variedade M ao fluxo de Ricci, isto é, teremos uma família $\{(M, g(t))\}_{t \in I}$, em que t pertence a um intervalo maximal de existência $I = [0, T)$. Veremos que a variedade $(M, g(0))$ possui uma "certa propriedade"e gostaríamos que essa propriedade se estendesse para todo $t \in I$. Esses resultados são possíveis graças ao chamado Princípio do Máximo, uma ferramenta que, em nossas aplicações, garante a preservação de um limitante inferior de uma dada função definida em um intervalo semiaberto limitado da reta, desde que essa limitação aconteça em um extremo e essa função satisfaça uma certa equação diferencial parcial. Este capítulo tem por objetivo enunciar e demonstrar esse princípio, que será muito útil na demonstração do teorema final.

3.1 Resultados Preliminares

Iniciemos com algumas definições e resultados preliminares que contribuirão para a coompreensão do Princípio do Máximo, bem como sua demonstração e eventuais aplicações.

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e E^* seu respectivo espaço dual. Um subconjunto $A \subset E$ é um **conjunto convexo** se $tv + (1-t)w \in A$, para todo $v, w \in A$ e todo $t \in [0, 1]$. Um subconjunto $\Gamma \subset E$ é um **cone com vértice** $u \in E$ se $u + t(v - u) \in \Gamma$, para todo $v \in \Gamma$ e todo $t \geq 0$. Um **semiespaço** é um conjunto da forma $\{x \in E : l(x) \leq c\}$, em que l é um funcional não nulo de E.

Nesse caso, temos que

$$l(x) \leq c = \frac{c}{||l||}||l|| \Rightarrow \frac{l}{||l||}(x) \leq \frac{c}{||l||} =: \widetilde{c},$$

para todo x pertencente ao semiespaço. Isto é, podemos nos restringir apenas aos funcionais do conjunto $S^* = \{\omega \in E^* : \|\omega\| = 1\}$.

Considere um conjunto convexo fechado $A \subset E$ e seja l um funcional linear em E. Um **semiespaço de suporte** para A é um semiespaço $\{x \in E : l(x) \leq c\}$ em que c é o supremo do conjunto $\{l(x) : x \in A\}$. O bordo do semiespaço de suporte, isto é, $\{x \in E : l(x) = c\}$, é chamado de **hiperplano de suporte** para A . A **função suporte** de A é uma função $s = s^A : E^* - \{0\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida por

$$s\left(l\right) = \sup\left\{l\left(x\right) : x \in A\right\} \tag{3.1}$$

Temos a seguinte caracterização de conjuntos convexos fechados:

Teorema 3.1 *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Um conjunto convexo fechado $A \subset E$ é dado pela interseção de seus semiespaços de suporte, isto é,*

$$A = \bigcap_{l \in S^*} \left\{x \in E : l\left(x\right) \leq s\left(l\right)\right\}.$$

Demonstração. De fato, pela própria definição de $s\left(l\right)$ vemos que A está contido em cada um dos semiespaços de suporte, portanto,

$$A \subset \bigcap_{l \in S^*} \left\{x \in E : l\left(x\right) \leq s\left(l\right)\right\}.$$

Para provar a outra inclusão é suficiente mostrar que se $y \notin A$ então $y \notin \bigcap\limits_{l \in S^*} \left\{x \in E : l\left(x\right) \leq s\left(l\right)\right\}$, isto é, existe $l \in S^*$ tal que $l(y) > s(l)$. Seja $x \in A$ um ponto de A que realiza a distância entre y e A (tal x existe pela definição de distância entre um ponto e um conjunto e pelo fato de A ser fechado) e defina

$$l : z \in E \mapsto \langle z, y - x\rangle \in \mathbb{R}.$$

A linearidade de $\langle \cdot, y - x\rangle$ nos garante a linearidade de l. Além disso, como $x \in A$ e $y \notin A$, então

$$l(y - x) = \|y - x\|^2 > 0,$$

ou seja, $l \in E^* - \{0\}$. Defina $\widetilde{l} := \frac{l}{\|l\|} \in S^*$. Se $\widetilde{l}(w) > \widetilde{l}(x)$ para algum $w \in A$, como $tw + (1 - t)x \in A$, para todo $0 \leq t \leq 1$ (pois A é convexo), e além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}_{|t=0} \|y - (tw + (1-t)x)\|^2 &= -2\langle w - x, y - (tw + (1-t)x)\rangle_{|t=0} = -2\langle w - x, y - x\rangle \\
&= -2\langle w, y - x\rangle - 2\langle -x, y - x\rangle \\
&= -2\left(l(w) - l(x)\right) \\
&= -2||l|| \left(\widetilde{l}(w) - \widetilde{l}(x)\right) < 0.
\end{aligned}$$

ou seja, para pontos p suficientemente próximos de x no segmento $\overline{xw}$, temos que $d(y,p) < d(y,x)$ mas como A é convexo, segue que $p \in A$, e isso é um absurdo pela definição de x. Portanto, $\widetilde{l}(x) = s(\widetilde{l})$. Porém,

$$\widetilde{l}(y) - \widetilde{l}(x) = \widetilde{l}(y - x) = \frac{l(y-x)}{||l||} = \frac{||y-x||^2}{|l||} > 0.$$

■

Para um conjunto fechado e convexo $A \subset E$, a função $d_A : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_A(y) = \inf\{\|y - x\| : x \in A\}$$

possui uma caracterização em termos da função suporte de A:

Teorema 3.2 *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e $A \subset E$ um subconjunto convexo e fechado. Para todo $y \notin A$,*

$$d_A(y) = \sup\{l(y) - s(l) : l \in S^*\}$$

Demonstração. Como A é fechado, existe $x \in A$ tal que $d_A(y) = \|y - x\|$. Para todo $l \in S^*$,

$$\begin{aligned}
l(y) - s(l) &= l(y) - \sup_A \{l(v) : v \in A\} \leq l(y) - l(x) = l(y-x) \leq |l(y-x)| \leq \|l\| \, \|y - x\| = \|y - x\| \\
&= d_A(y),
\end{aligned}$$

ou seja, $d_A(y)$ é um limitante superior para o conjunto $\{l(y) - s(l) : l \in S^*\}$. Tome o seguinte funcional definido em E:

$$l(\cdot) = \frac{\langle y - x, \cdot\rangle}{\|y - x\|}.$$

Como l é contínua, então $|l(v)| \leq \|l\| \, \|v\|$, para todo $v \in A$. Notemos que se $\|v\| = 1$, então

$$|l\,(v)| = \frac{|\langle y - x, v\rangle|}{\|y - x\|} \leq \frac{\|y - x\| \, \|v\|}{\|y - x\|} = \|v\| = 1,$$

ou seja, pela definição de norma de uma transformação linear, $\|l\| \leq 1$. Tomando $v = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, obtemos a igualdade, portanto $l \in S^{*}$. Queremos mostrar que

$$\|y - x\| = l\,(y) - s\,(l)\,.$$

Se isolarmos $s\,(l)$, veremos que

$$\begin{aligned} s\,(l) &= l\,(y) - \|y - x\| = \frac{\langle y - x, y\rangle}{\|y - x\|} - \|y - x\| = \frac{\langle y - x, y\rangle}{\|y - x\|} - \frac{\|y - x\|^{2}}{\|y - x\|} \\ &= \frac{\langle y - x, y - (y - x)\rangle}{\|y - x\|} = \frac{\langle y - x, x\rangle}{\|y - x\|} \\ &= l\,(x)\,, \end{aligned}$$

isto é, basta mostrarmos que $s\,(l) = l\,(x)$.

Primeiramente, usando o teorema do completamento e o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, podemos escrever $x \in A$ da seguinte maneira:

$$x = \alpha\,(y - x) + \beta N,$$

em que $\langle (y - x)\,, N\rangle = 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Isolando α vemos que

$$\alpha = \frac{\langle x, y - x\rangle}{\|y - x\|^{2}} = \frac{l\,(x)}{\|y - x\|},$$

ou seja, $l\,(x)$ é justamente a norma da componente de x na direção do vetor unitário $\frac{y-x}{\|y-x\|}$.

Seja $C \subset E$ o subconjunto dos pontos de E cuja projeção na direção de $\frac{y-x}{\|y-x\|}$ possui norma igual a $l\,(x)$. Portanto C separa E em dois semiespaços, E^{+} e E^{-}, em que

$$\begin{aligned} E^{+} &= \{z \in E : l\,(z) > l(x)\}\,, \\ E^{-} &= \{z \in E : l\,(z) < l(x)\}\,, \end{aligned}$$

isto é, $E = E^{+} \cup C \cup E^{-}$ em que os subconjuntos são disjuntos dois a dois. Vamos mostrar que $A \subset E^{-} \cup C$

(que é a própria definição de $s\,(l)$): De fato,

$$l\,(y) - l(x) = l\,(y-x) = \frac{\langle y-x, y-x\rangle}{\|y-x\|} = \|y-x\| > 0,$$

isto é, $y \in E^{+}$. Seja $B \subset E$ a bola de centro y e raio $||y-x||$. Por construção, C é tangente à B em x. Se existe um ponto $x' \in (A \cap E^{+}) - \{x\}$, segue que $x' \notin C$, logo a reta r que passa por x cujo vetor diretor é $x - x'$ não é tangente à B, e como B e x' estão no mesmo semiespaço E^{+}, então existe um ponto do segmento $\overline{xx'}$ que está em ∂B. Como B é convexa (mais que isso: é uma bola) então um ponto qualquer p no interior de $\overline{xx'}$ está no interior de B, ou seja, $d\,(y,p) < d\,(y,x)$. Mas x e x' estão em A, que é convexo, logo $p \in A$. Absurdo, pois $x = d\,(A,y)$. Portanto $A \subset E^{-} \cup C$. ∎

Considere agora $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se f possui um mínimo local em algum ponto $p \in U$, segue que $\nabla f\,(p) = 0$ e $\Delta f\,(p) \geq 0$. Isso segue do teste da segunda derivada para funções de uma variável: Dado $v \in \mathbb{R}^n$, a função $t \mapsto f_v(t) := f(p+tv)$ possui um mínimo local em $t = 0$, ou seja, segue que

$$\begin{cases} f_v'(0) = 0; \\ f_v''(0) \geq 0. \end{cases}$$

portanto, temos que

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=0} \{f(p+tv)\} = g\,(\nabla f(p), v)\,,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $\nabla f(p) = 0$. Além disso, note que a derivada de f_v pode ser escrita como

$$f_v'(t) = \frac{d}{dt}\,(f \circ \gamma)\,(t) = df_{\gamma(t)}.\gamma'\,(t)\,,$$

onde $\gamma\,(t) := p + te_i$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue disso que

$$\begin{aligned} f_v''(t) &= \frac{d}{dt}\left(df_{\gamma(t)}.\gamma'\,(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(g\left(\nabla f\,(\gamma\,(t))\,, \gamma'\,(t)\right)\right) \\ &= g\left(\frac{d}{dt}\,(\nabla f\,(\gamma\,(t)))\,, \gamma'\,(t)\right) + g\left(\nabla f\,(p)\,, \gamma''\,(t)\right) \\ &= g\left(\frac{d}{dt}\,((\nabla f) \circ \gamma)\,(t)\,, e_i\right) \\ &= g\left(d\,(\nabla f)_{\gamma(t)}\,.\gamma'\,(t)\,, e_i\right) \\ &= g\left(\gamma'\,(t)\,(\nabla f)\,, e_i\right). \end{aligned}$$

Portanto, segue do teorema de Schwarz que em $t = 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_v''(0) = g\left(\frac{\partial}{\partial e_i}(\nabla f)(p), v\right) = g\left(\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial e_i}\right)(p), v\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\partial f}{\partial e_i}\right)(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial e_i^2}(p), \end{aligned}$$

para todo $i = 1, ..., n$, onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Logo, temos que

$$(\Delta f)(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial e_i^2}(p) \geq 0.$$

Em uma variedade riemanniana qualquer, utilizamos um argumento generalizado baseado nas geodésicas do ambiente, ou seja, utilizando a função $t \mapsto f_v(t) := f(\exp_p(tv))$ obtendo o seguinte resultado:

Lema 3.1 (Teste da Segunda Derivada) *Seja M uma variedade riemanniana n-dimensional e seja $u : M \to \mathbb{R}$ uma função C^2. Se u possui um ponto de mínimo local $p \in M$, então*

$$\nabla u(p) = 0 \qquad e \qquad (\Delta u)(p) \geq 0.$$

Demonstração. Dado $v \in T_pM$, defina a seguinte função: $t \mapsto u_v(t) := u \circ \gamma(t)$, em que $\gamma(t) := \exp_p(tv)$. Segue que u_v possui um ponto de mínimo local em $t = 0$, logo

$$\begin{cases} u_v'(0) = 0; \\ u_v''(0) \geq 0. \end{cases}$$

ou seja, temos que

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=0}\left\{u(\exp_p(tv))\right\} = du_p.\left(\frac{d}{dt}_{|t=0}\exp_p(tv)\right) = du_p.v = g(\nabla u(p), v)$$

para todo $v \in T_pM$, ou seja,

$$\nabla u(p) = 0.$$

Segue do raciocínio já efetuado antes do lema que

$$u_v''(t) = g\left(\frac{D}{dt}(\nabla u \circ \gamma)(t), \gamma'(t)\right) + g\left(\nabla(u \circ \gamma)(t), \frac{D\gamma'}{dt}(t)\right).$$

Como $\gamma(t)$ é uma geodésica, segue que $\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0$, ou seja,

$$u_v''(t) = g\left(\frac{D}{dt}(\nabla u \circ \gamma)(t), \gamma'(t)\right) = g\left(\left(\nabla_{\gamma'(t)}(\nabla u)\right) \circ \gamma(t), \gamma'(t)\right) = \left(\nabla^2 u\right)_{\gamma(t)}\left(\gamma'(t), \gamma'(t)\right)$$

logo, em $t = 0$:

$$0 \leq u_v''(0) = \left(\nabla^2 u\right)_{\gamma(0)}\left(\gamma'(0), \gamma'(0)\right) = \left(\nabla^2 u\right)_p(v, v).$$

para todo $v \in T_pM$. Logo, usando a definição do Laplaciano e que o traço independe da base, segue que:

$$(\Delta u)(p) = Tr\left(\nabla^2 u\right)_p = \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla^2 u\right)_p(E_i, E_i) \geq 0,$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM. ■

3.2 Duas Versões do Princípio do Máximo

O Princípio do Máximo é uma ferramenta muito útil na resolução de equações diferenciais e será utilizada na demonstração do Teorema da Esfera Suave. Usaremos tal princípio em sua versão mais geral para campos vetoriais. O Princípio do Máximo mais simples é o escalar, para métricas que dependem do tempo:

Proposição 3.1 (Princípio do Máximo Escalar) *Considere uma família suave de métricas riemannianas $\{g(t)\}_{t\in[0,T)}$ sobre uma variedade diferenciável compacta M tal que $u : M \times [0,T) \to \mathbb{R}$ satisfaz*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{g(t)} u \geq 0.$$

Se $u(\cdot, 0) \geq c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, então $u(x,t) \geq c$ para todo $(x,t) \in M \times [0,T)$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ defina $u_\varepsilon(x,t) := u(x,t) + \varepsilon(1+t)$, em que $(x,t) \in M \times [0,T)$. Notemos que

$$u_\varepsilon(x,0) = u(x,0) + \varepsilon(1+0) = u(x,0) + \varepsilon > u(x,0) \geq c, \tag{3.2}$$

para todo $x \in M$.

Afirmação 1: Existe $T_0 \in (0,T)$ tal que $u_\varepsilon(x,t) > c$, para todo $(x,t) \in M \times [0,T_0)$.

Como u_ε é contínua, segue da desigualdade (3.2) que, para todo $x \in M$, existe um aberto $A_x \subset M$ e $t_x > 0$ tal que $u_\varepsilon(p,t) > c$, para todo $(p,t) \in A_x \times [0,t_x)$. Como M é compacta e $M = \cup_{x\in M} A_x$, então existem $\{x_1, ..., x_n\} \subset M$ tal que $M = \bigcup_{i=1}^{n} A_{x_i}$. Escolhendo $T_0 = \min\{t_1, ..., t_n\}$, obtemos $u_\varepsilon(x,t) > c$, para todo $(x,t) \in M \times [0, T_0)$, isso demonstra a Afirmação 1.

Agora defina o seguinte:

$$T_s = \sup\{t_0 \in [0,T) : u_\varepsilon(x,t) > c, \text{ para todo } (x,t) \in M \times [0,t_0)\}$$

Por construção, temos que $T_s \geq T_0$.

Afirmação 2: $T_s = T$.

De fato, suponha, por absurdo, que $T_s < T$. Segue da definição de T_s e da continuidade de u que existe $x_0 \in M$ tal que

i. $u_\varepsilon(x_0, T_s) = c$

ii. $u_\varepsilon(x,t) > c$, para todo $(x,t) \in M \times [0, T_s)$.

iii. $u_\varepsilon(x, T_s) \geq c$, para todo $x \in M$.

Como T_s é mínimo da função $u_\varepsilon(x_0, \cdot) : [0, T_s] \to \mathbb{R}$, segue que

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0, T_s) = \frac{d}{dt}(u_\varepsilon(x_0, \cdot))(T_s) \leq 0.$$

Por outro lado, a função $u_\varepsilon(\cdot, T_s) : M \to \mathbb{R}$, possui um ponto de mínimo em x_0. Logo, pelo Lema anterior:

$$0 \leq \Delta_{g(t)}(u_\varepsilon(\cdot, T_s))(x_0) = \left(\Delta_{g(t)} u_\varepsilon\right)(x_0, T_s).$$

Como

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta_{g(t)} u_\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon - \Delta_{g(t)} u \geq \varepsilon > 0$$

segue que

$$0 \geq \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x_0, T_s) > \left(\Delta_{g(t)} u_\varepsilon\right)(x_0, T_s) \geq 0,$$

o que é um absurdo. Essa contradição conclui a demonstração da Afirmação 2.

Segue da Afirmação 2 e da definição de T_s que

$$u_\varepsilon(x,t) > c, \text{ para todo } (x,t) \in M \times [0,T).$$

Como ε foi escolhido arbitrariamente, fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$u\,(x,t) \geq c, \qquad (x,t) \in M \times [0,T).$$

■

Antes de enunciar o Princípio do Máximo para campos de vetores, precisamos das seguintes definições (que são adaptações de definições mais gerais para uma variedade diferenciável da forma $M \times \mathbb{R}$):

Seja E um fibrado vetorial (para mais detalhes veja as Definições A.3 e A.4) sobre uma variedade diferenciável da forma $M \times \mathbb{R}$. Um subconjunto $\Omega \subset E$ é dito **convexo na fibra** se, para cada $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$, o conjunto $\Omega_{(x,t)} := \Omega \cap E_{(x,t)}$ é um subconjunto convexo do espaço vetorial $E_{(x,t)}$. Seja E^* o fibrado dual referente a E (para mais detalhes veja a Seção A). Definimos a **função suporte** $s : E^* \to \mathbb{R}$ de Ω por

$$s\,(x,t,l) := \sup\left\{l(v) : v \in \Omega_{(x,t)} \subset E_{(x,t)}\right\}. \tag{3.3}$$

Dado $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$, o **cone normal,** $\mathcal{N}_v\Omega_{(x,t)} \subset E^*_{(x,t)}$, de $\Omega_{(x,t)}$ em um ponto $v \in \partial\Omega_{(x,t)}$ é definido pelo seguinte conjunto:

$$\mathcal{N}_v\Omega_{(x,t)} := \left\{l \in E^*_{(x,t)} : l(v) = s\,(x,t,l)\right\}.$$

Dado $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$, o **cone tangente**, $T_v\Omega_{(x,t)} \subset E_{(x,t)}$, é definido pelo seguinte conjunto:

$$T_v\Omega_{(x,t)} := \bigcap_{l \in \mathcal{N}_v\Omega_{(x,t)}} \left\{z \in E_{(x,t)} : l(z) \leq 0\right\}. \tag{3.4}$$

Definição 3.1 *Seja E um fibrado vetorial em uma variedade diferenciável da forma $M \times \mathbb{R}$, e $\Omega \subset E$ convexo na fibra. Seja $F : E \to E$ uma aplicação tal que $F\left(E_{(x,t)}\right) \subset E_{(x,t)}$, para todo $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$. Dizemos que F **aponta para dentro** de Ω se $F\,(x,t,v) \in T_v\Omega_{(x,t)}$, para todo $(x,t,v) \in \partial\Omega_{(x,t)} \cap E_{(x,t)}$. Mais ainda, dizemos que F **aponta estritamente para dentro de** Ω se $F\,(x,t,v)$ está no interior de $T_v\Omega_{(x,t)}$, para todo $(x,t,v) \in \partial\Omega_{(x,t)} \cap E_{(x,t)}$.*

Suponha que o fibrado vetorial E seja munido de uma conexão ∇ (para mais detalhes veja a Definição A.14). Dizemos que $\Omega \subset E$ é **invariante por transporte paralelo** pela conexão ∇ se para toda curva suave γ em $M \times \mathbb{R}$ e todo vetor $V_0 \in \Omega_{\gamma(0)}$, o campo transporte paralelo de V_0 ao longo de γ está contido em Ω.

Além disso, vamos definir o operador $L : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, em que

$$L(u)(x,t) = (\nabla_{\partial_t} u)(x,t) - (\Delta u)(x,t) - (\nabla_V u)(x,t) - F(x,t,u(x,t)), \tag{3.5}$$

para todo $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$, em que V é uma seção suave do fibrado tangente espacial $\mathcal{G}$ (para mais detalhes veja a expressão (A.17)) e $F : E \to E$ uma aplicação tal que $F\left(E_{(x,t)}\right) \subset E_{(x,t)}$.

Com estas noções em mente, conseguimos compreender o seguinte resultado:

Teorema 3.3 (Princípio do Máximo para Fibrados Vetoriais) *Seja (E, ∇) um fibrado vetorial com conexão de Levi-Civita em uma variedade riemanniana da forma $M \times \mathbb{R}$ com M compacta, $\Omega \subset E$ um subconjunto fechado, convexo na fibra e invariante por transporte paralelo com respeito a ∇. Seja $F : E \to E$ uma aplicação tal que $F\left(E_{(x,t)}\right) \subset E_{(x,t)}$, para todo $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$ e que aponta para dentro de Ω. Se $u \in \Gamma(E)$ é solução da equação diferencial parcial $L(u) = 0$, isto é, tal que*

$$(\nabla_{\partial_t} u)(x,t) = (\Delta u)(x,t) + (\nabla_V u)(x,t) + F(x,t,u(x,t)), \tag{3.6}$$

em que V é uma seção suave do fibrado tangente espacial $\mathcal{G}$, e $u(x,t_0) \in \Omega$, para todo $x \in M$, então $u(x,t) \in \Omega$, para todo $(x,t) \in M \times [t_0, T)$.

Demonstração. Seja o chamado fibrado esférico $S^* \subset E^*$, definido por

$$S^*_{(x,t)} := \left\{ l \in E^*_{(x,t)} : \|l\| = 1 \right\},$$

para todo $(x,t) \in M \times [t_0, T)$. Seja $f : S^* \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,t,l) := l(u(x,t)) - s_{(x,t)}(x,t,l),$$

em que $s_{(x,t)}$ é a função suporte de $\Omega_{(x,t)}$ definida pela expressão (3.1). Pelo Teorema 3.2, para cada $(x,t) \in M \times [t_0, T)$, o supremo de $\{f(x,t,l) : l \in S^*\}$ nos dá a distância de $u(x,t)$ ao conjunto $\Omega_{(x,t)}$. Portanto basta mostrar que $f \leq 0$ em S^*. Em particular, a condição $u(x,t_0) \in \Omega_{(x,t_0)}$ nos diz que

$$f(x,t_0,l) = l(u(x,t_0)) - s_{(x,t_0)}(x,t_0,l) \leq 0, \qquad (x,t_0,l) \in S^*.$$

Vamos mostrar que a desigualdade acima se mantém para todo $t \in [t_0, T)$. Nossa estratégia será mostrar que existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f - e^{\varepsilon C t} \leq 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Primeiramente, vamos nos restringir a um domínio compacto: Sabemos que u é suave em $M \times [t_0, t_1]$, para todo $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $T > t_1 > t_0$. Como esse novo conjunto é compacto (produto de compactos), existe $K > 0$ tal que $\|u(x,t)\| \leq K$, em $M \times [t_0, t_1]$. Dados $v_1, v_2 \in E_{(x,t)}$ tais que $\|v_1\|, \|v_2\| \leq 2K$, como F é suave, existe $L > 0$ tal que

$$\|F(x,t,v_2) - F(x,t,v_1)\| \leq L \|v_2 - v_1\|.$$

De fato, se $v_1 = v_2$ temos uma igualdade trivial. Caso contrário, a função

$$(x,t) \in M \times [t_0, t_1] \mapsto \frac{\|F(x,t,v_2) - F(x,t,v_1)\|}{\|v_2 - v_1\|} \in \mathbb{R}$$

é suave e definida em um compacto, logo é limitada.

Escolhendo $\varepsilon_0 > 0$ de modo que

$$\varepsilon_0 e^{(L+1)(t_1 - t_0)} \leq K,$$

vamos demonstrar que

$$f - \varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)} \leq 0 \text{ em } M \times [t_0, t_1],$$

para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$: Como $f(x, t_0, l) \leq 0$ a desigualdade acima é estrita em $t = t_0$. Suponhamos, por absurdo, que a desigualdade acima não valha sempre. Segue de um raciocínio análogo ao efetuado na demonstração da Proposição 3.1 que existe $\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}, \widetilde{l}\right) \in S^*$ tal que

$$f\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}, \widetilde{l}\right) - \varepsilon e^{(L+1)\left(\widetilde{t} - t_0\right)} = 0 \tag{3.7}$$

e além disso,

$$f(x,t,l) - \varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)} \leq 0, \tag{3.8}$$

para todo $(x,t,l) \in S^*_{(x,t)}$ com $t_0 \leq t \leq \widetilde{t}$. Como $\Omega_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}$ é fechado, existe $v \in \Omega_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}$ tal que v é o ponto de $\Omega_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}$ que está mais próximo de $u\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}\right)$. Pelo Teorema 3.2

$$\left\|v - u\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}\right)\right\| = \sup\left\{f\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}, l\right) : l \in S^*\right\} \leq \varepsilon e^{(L+1)\left(\widetilde{t} - t_0\right)} \leq K,$$

para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, onde foi usado a expressão (3.8) na primeira desigualdade. Como $\left\|u\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}\right)\right\| \leq K$, então

$$\|v\| = \left\|v - u\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}\right) + u\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}\right)\right\| \leq \left\|v - u\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}\right)\right\| + \left\|u\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}\right)\right\| \leq 2K.$$

Pela definição de L, obtemos

$$\left\|F(x,t,v) - F\left(x,t,u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)\right)\right\| \leq L\left\|v - u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)\right\| \leq L\varepsilon e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)}.$$

Afirmação 1: $l \in \mathcal{N}_v\Omega_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}$.

De fato, pela demonstração do Teorema 3.2, para termos o máximo de f, devemos tomar

$$l(\cdot) = \frac{\left\langle u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) - v, \cdot\right\rangle}{\left\|u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) - v\right\|}.$$

A demonstração do Teorema 3.1 nos diz que v é o ponto de máximo de l, isto é, $l(v) = s\left(\widetilde{x},\widetilde{t},l\right)$, portanto $l \in \mathcal{N}_v\Omega_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}$, isso demonstra a Afirmação 1.

A condição de que F aponta para dentro de Ω implica que

$$l\left(F\left(\widetilde{x},\widetilde{t},v\right)\right) \leq 0.$$

Em uma vizinhança U de $\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)$, estenda $\widetilde{l}$ a uma seção suave de E^* por transporte paralelo ao longo de geodésicas em M que partem de $\widetilde{x}$. Como a conexão em E é compatível com a métrica, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left\|l_{(x,t)}(v)\right\|^2 &= 2\left\langle \frac{D}{dt}l_{(x,t)}(v), l_{(x,t)}(v)\right\rangle = 2\left\langle \nabla_{\partial_t}l_{(x,t)}(v), l_{(x,t)}(v)\right\rangle \\ &= 2\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

ou seja, em U ainda temos que $l_{(x,t)} \in S^*$. Dentro da Afirmação 1, também afirmamos o seguinte:

Afirmação 2: Para esse l, a função $(x,t) \mapsto s\left(x,t,l_{(x,t)}\right)$ é constante em U.

O transporte paralelo ao longo das curvas indicadas acima induzem as seguintes aplicações:

$$\begin{cases} P : (x,t,v_0) \in U \times E_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)} \to v \in E, \\ P^* : \left(x,t,\widetilde{l}\right) \in U \times E^*_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)} \mapsto l_{(x,t)} \in E^*, \end{cases}$$

onde $v \in E_{(x,t)}$ é o transporte paralelo de v_0 ao longo das geodésicas e $l_{(x,t)}(v) := \widetilde{l}_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}(v_0)$. A invariância de Ω pelo transporte paralelo implica que

$$P\left(x,t,\Omega_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right) = \Omega_{(x,t)}, \tag{3.9}$$

para todo $(x,t) \in U$. A definição da **conexão dual** (para mais detalhes veja a Proposição A.9) implica que

$$\begin{aligned}
\nabla^*_{\partial_t}\left(P^*\left(x,t,\widetilde{l}\right)\right)\left(P\left(x,t,v_0\right)\right) &= \nabla^*_{\partial_t} l_{(x,t)}\left(P\left(x,t,v_0\right)\right) = \nabla^*_{\partial_t} l_{(x,t)}\left(P\left(x,t,v_0\right)\right) \\
&= \nabla^*_{\partial_t}\left(l_{(x,t)}\left(v\right)\right) := \nabla_{\partial_t} v = 0,
\end{aligned}$$

pois v é o transporte paralelo de v_0, ou seja, $\left(P^*\left(x,t,\widetilde{l}\right)\right)\left(P\left(x,t,v_0\right)\right)$ é constante ao longo das geodésicas. Em particular, isso implica que

$$\begin{aligned}
s\left(x,t,P^*\left(x,t,\widetilde{l}\right)\right) &= \sup\left\{P^*\left(x,t,\widetilde{l}\right)(v) : v \in \Omega_{(x,t)}\right\} \\
&= \sup\left\{P^*\left(x,t,\widetilde{l}\right)\left(P\left(x,t,v_0\right)\right) : v_0 \in \Omega_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right\} \\
&= \sup\left\{\widetilde{l}_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\left(v_0\right) : v_0 \in \Omega_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right\} \\
&= s\left(\widetilde{x},\widetilde{t},\widetilde{l}\right),
\end{aligned}$$

onde foi usado a expressão (3.9) na segunda igualdade. Isso demonstra a afirmação 2.

Defina uma função $\overline{f}$ em U da seguinte maneira:

$$\overline{f} : (x,t) \in U \mapsto f\left(x,t,l_{(x,t)}\right) \in \mathbb{R}.$$

Pela construção de l, $\overline{f}$ é suave em U. Mais ainda,

$$\overline{f}\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) = f\left(\widetilde{x},\widetilde{t},l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right) = f\left(\widetilde{x},\widetilde{t},\widetilde{l}_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right) = \varepsilon e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)},$$

onde foi usada a expressão (3.7) na última igualdade, além disso,

$$\overline{f}(x,t) = f\left(x,t,l_{(x,t)}\right) \le \varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)}, \qquad (x,t) \in M \times [t_0,\widetilde{t}],$$

onde foi usada a expressão (3.8) na desigualdade. Segue do Lema 3.1 que as derivadas espaciais de $\overline{f}$ se anulam em $\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)$ e $\left(\Delta\overline{f}\right)\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) \le 0$. Além disso, como $\overline{f}$ é suave em U, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{f}}{\partial t}\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) - \frac{d}{dt}_{|t=\widetilde{t}}\left\{\varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)}\right\} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{f} - \varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)}\right)\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) \\
&= \lim_{h^-\to 0}\frac{\overline{f}\left(\widetilde{x},\widetilde{t}+h\right) - \varepsilon e^{(L+1)\left(\widetilde{t}+h-t_0\right)} - \overline{f}\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) + \varepsilon e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)}}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h^- \to 0} \frac{\overline{f}\left(\widetilde{x}, \widetilde{t} + h\right) - \varepsilon e^{(L+1)\left(\widetilde{t}+h-t_0\right)}}{h} \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

onde foi usada a expressão (3.7) na terceira igualdade e a expressão (3.8) na desigualdade, ou seja,

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t}\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}\right) - \varepsilon\left(L+1\right) e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \geq 0.$$

Como l é paralela ao longo das geodésicas espaciais que partem de $\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}\right)$, temos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(V,V,W) &= \left(\nabla_V \nabla\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(V,W) = \nabla_V\left(\nabla\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)(V,W)\right) \\
&\quad - \left(\nabla\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\left(\widehat{\nabla}_V V, W\right)\right) - \left(\nabla\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right) V, \nabla_V W\right) \\
&= \nabla_V\left(\nabla\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)(V,W)\right) - \nabla\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)(V, \nabla_V W) \\
&= \nabla_V\left(\nabla_V\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)(W)\right) - \nabla_V\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)(\nabla_V W) \\
&= \nabla_V \nabla_V\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)(W) + \left(\nabla_V\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)(\nabla_V w)\right) - \nabla_V\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)(\nabla_V W) \\
&= \nabla_V \nabla_V\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)(w) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $V \in TM$ e $W \in E$. Como ∇ é simétrica, o operador ∇^2 é simétrico (pela expressão (A.10)), segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\nabla^2\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(V-U, V-U, W) \\
&= \left(\nabla^2\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(V,V,W) - \left(\nabla^2\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(V,U,W) - \left(\nabla^2\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(U,V,W) \\
&\quad + \left(\nabla^2\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(U,U,W) \\
&= \left(\nabla^2\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(V,V,W) - 2\left(\nabla^2\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(U,V,W) + \left(\nabla^2\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(U,U,W) \\
&= -2\left(\nabla^2\left(l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right)\right)(U,V,W),
\end{aligned}$$

para todo $U, V \in TM$ e $W \in E$, ou seja, $\nabla^2 l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)} = 0$. Em particular,

$$\Delta l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)} = Tr_g\left(\nabla^2 l_{\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)}\right) = Tr_g(0) = 0.$$

Pela definição de $\overline{f}$, e pelo fato de l ser constante ao longo das geodésicas espaciais

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{f}}{\partial t}_{|(\widetilde{x},\widetilde{t})} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(l\left(u\right)-s\left(l\right)\right)=\left(\nabla_{\partial_t} l\right)\left(u\right)+l\left(\nabla_{\partial_t} u\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(s\left(l\right)\right) \\
&= l\left(\nabla_{\partial_t} u\right) \\
&= l\left(\left(\Delta u\right)+\left(\nabla_V u\right)+F(u)\right),
\end{aligned}$$

onde foi usada a expressão (3.2) na penúltima igualdade e a expressão (3.6) na última. Além disso, temos as seguintes equações:

$$\nabla \overline{f}=\nabla\left(l\circ u-s\circ l\right)=\left(\nabla l\right)\left(u\right)+l\left(\nabla u\right)-\nabla\left(s\circ l\right)=l\left(\nabla u\right),$$

onde foi usada a Afirmação 3.2 na última igualdade. Tomando $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ uma base ortonormal em E, vemos que

$$\begin{aligned}
\Delta \overline{f} &= \Delta\left(l\circ u-s\circ l\right)=\Delta\left(l\circ u-s\circ l\right)-\Delta\left(s\left(l\right)\right)=\Delta\left(l\circ u\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i E_i\left(l\circ u\right)=\sum_{i=1}^{n} E_i\left(E_i\left(l\circ u\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\left(\left(\nabla_{E_i} l\right)\left(u\right)+l\left(\nabla_{E_i} u\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i} l\right)\circ u+\left(\nabla_{E_i} l\right)\left(\nabla_{E_i} u\right)+\left(\nabla_{E_i} l\right)\left(\nabla_{E_i} u\right)+l\left(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i} u\right)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i} l\right)\circ u+2\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_{E_i} l\right)\left(\nabla_{E_i} u\right)+l\left(\sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}\nabla_{E_i} u\right) \\
&= \left(\Delta l\right)\left(u\right)+2\sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_{E_i} l\right)\left(\nabla_{E_i} u\right)+l\left(\Delta u\right) \\
&= l\left(\Delta u\right),
\end{aligned}$$

onde foi usada a Afirmação 3.2 na terceira igualdade. Usando estas duas equações, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{f}}{\partial t}_{|(\widetilde{x},\widetilde{t})} &= l\left(\left(\Delta u\right)+\left(\nabla_V u\right)+F(u)\right) \\
&= \left(\Delta \overline{f}\right)\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)+\left(\nabla_V \overline{f}\right)\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)+l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right))\right) \\
&= \left(\Delta \overline{f}\right)\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)+\left(\nabla_V \overline{f}\right)\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)+l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right))-F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right)+l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right).
\end{aligned}$$

Combinando esta equação com as outras seguintes

$$\begin{cases} \left(\Delta\overline{f}\right)\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) \leq 0 \\ \nabla\overline{f} = 0 \\ \frac{\partial\overline{f}}{\partial t}\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \geq 0 \\ \left\|F\left(\widetilde{x},\widetilde{t},v\right) - F\left(\widetilde{x},\widetilde{t},u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)\right)\right\| \leq L\left\|v - u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)\right\| = L\varepsilon e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \\ l\left(F\left(\widetilde{x},\widetilde{t},v\right)\right) \leq 0 \\ \|l\| = 1 \end{cases},$$

concluímos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\partial\overline{f}}{\partial t}\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \\ &= \left(\Delta\overline{f}\right)\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) + \left(\nabla_V\overline{f}\right)\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) + l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)) - F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right) + l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right) - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \\ &\leq \left(\nabla_V\overline{f}\right)\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right) + l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)) - F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right) + l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right) - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \\ &= l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)) - F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right) + l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right) - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \\ &\leq l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)) - F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right) - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \\ &\leq \left|l\left(F(\widetilde{x},\widetilde{t},u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)) - F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right)\right| - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)}. \end{aligned}$$

Pela definição da norma de um funcional linear, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|l\|\left\|F(\widetilde{x},\widetilde{t},u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)) - F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right\| - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \\ &= \left\|F(\widetilde{x},\widetilde{t},u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)) - F(\widetilde{x},\widetilde{t},v)\right\| - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \\ &\leq L\left\|v - u\left(\widetilde{x},\widetilde{t}\right)\right\| - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \\ &= L\varepsilon e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} - \varepsilon\left(L+1\right)e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} \\ &= -\varepsilon e^{(L+1)\left(\widetilde{t}-t_0\right)} < 0. \end{aligned}$$

Chegamos em uma contradição. Ou seja, a inequação

$$f - \varepsilon e^{(L+1)(t-t_0)} \leq 0 \text{ em } M \times [t_0, t_1]$$

vale para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Portanto $f \leq 0$ em $M \times [t_0, t_1]$. A arbitrariedade de t_1 nos mostra que $f \leq 0$ em $M \times [t_0, T)$. Portanto $u\left(x,t\right) \in \Omega_{(x,t)}$, para todo $(x,t) \in M \times [t_0, T)$, como queríamos demonstrar. ■

3.3 Algumas Aplicações

Como uma primeira aplicação do Princípio do Máximo para Fibrados Vetoriais, vamos usar o teorema no caso mais simples possível para provar a seguinte caracterização do fluxo quando um campo de vetores preserva um conjunto convexo:

Corolário 3.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, $\Omega \subset V$ um subconjunto fechado e convexo, e $F : [0,T] \times V \to V$ uma aplicação tal que, para todo $t \in [0,T]$, $F(t,\cdot)$ aponta para dentro de Ω, isto é, $F(t,v) \in T_v\Omega$, para todo $v \in \partial\Omega$. Então o fluxo de F preserva Ω, no sentido de que para todo $u_0 \in \Omega$, a solução da equação diferencial ordinária*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t)) = F(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \tag{3.10}$$

tem $u(t) \in \Omega$, para todo $t \in [0,T]$ no intervalo de existência de u.

Demonstração. Seja $M = \{x\}$ uma variedade de dimensão zero e seja o fibrado vetorial trivial

$$E = \{x\} \times [0,T) \times V = \left\{(x,t,v) : t \in [0,T)\ ,\ v \in E_{(x,t)}\right\}$$

com a conexão trivial dada pela derivação na direção de t, ou seja,

$$\left(\nabla_{\partial_t} u\right)(t) := u'(t)$$

para todo $u \in \Gamma(E) \approx C^\infty([0,T), V)$. Como V tem dimensão finita, existe um produto interno em V. Fixe h, um produto interno em V e seja $\{h(t)\}_{t\in[0,T)}$, onde $h(t) = h$, para todo $t \in [0,T)$ uma métrica em E. Tome também $\widetilde{\Omega} = \Omega \times [0,T) \subset E$. Como produto de um convexo com um intervalo, é convexo, garantimos a convexidade de $\widetilde{\Omega}$. Como u depende apenas do tempo, segue que $\Delta u = 0$. Portanto u satisfaz a equação (3.6) com $X \equiv 0$, ou seja,

$$\left(\nabla_{\partial_t} u\right)(x,t) = \frac{du}{dt}(t) = F(t, u(t)) = (\Delta u)(x,t) + (\nabla_X u)(x,t) + F(x,t,u(x,t)),$$

com $x \in M$ fixo, para todo $t \in [0,T)$. Como $u(0) = u_0 \in \Omega$, segue do Teorema 3.3 que $u(t) \in \Omega$, para todo $t \in [0,T)$. ■

Como uma ilustração simples de como o Princípio do Máximo Escalar pode ser aplicado ao fluxo de Ricci, consideremos a equação de evolução da curvatura escalar dada pela expressão (1.14). Como

$2\,|Ric|^2 \geq 0$, segue que

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} S.$$

Pelo Princípio do Máximo Escalar, se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $S(\cdot, 0) \geq c$, então $S \geq c$. Não conseguimos dizer nada sobre limitantes superiores para S. Um resultado mais forte pode ser obtido ao notar a seguinte desigualdade:

$$|Ric|^2 \geq \frac{1}{n}\left(Tr\left(Ric\right)\right)^2 = \frac{1}{n} S^2,$$

devido ao seguinte resultado:

Afirmação 3.3.1 *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana de dimensão n. Se $T \in \mathcal{T}_0^2(M^n)$, então*

$$|T|^2 \geq \frac{1}{n}\left(Tr_g\left(T\right)\right)^2,$$

ou seja, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(T\left(E_i, E_j\right)\right)^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} T_{ij}\right)^2,$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM, para algum $p \in M$ arbitrário.

Demonstração. De fato, como o traço independe da base em questão, escolhendo a carta normal, segue que $g^{ij} = \delta_{ij}$, portanto temos que

$$\left(Tr_g\left(T\right)\right)^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} T_{ij}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} T_{ii}\right)^2.$$

Portanto, concluímos que :

$$\begin{aligned} \left(Tr_g\left(T\right)\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} T_{ii}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} T_{ii}.1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} T_{ii}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right) \\ &= n\left(\sum_{i=1}^{n} T_{ii}^2\right) = n|T|^2. \end{aligned}$$

Para mais detalhes a respeito da desigualdade, veja o exercício 7 do livro [7], na página 20. ■

Usando esse fato, temos que

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} S + \frac{2}{n} S^2.$$

Defina $\mathcal{J}_0 := \inf\{S(x,0) : x \in M\}$. Usando o Corolário 3.1, obtemos que $S(\cdot,t) \geq \phi(t)$, onde $\phi(t)$ é solução da seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \frac{2}{n}\phi^2 \\ \phi(0) = \mathcal{J}_0 \end{cases}$$

Suponha $\mathcal{J}_0 \neq 0$. Nesse caso,por existência e unicidade de EDO, ϕ não se anula em nenhum ponto. Logo

$$\frac{\frac{d\phi}{dt}}{\phi^2} = \frac{2}{n}.$$

Integrando em t em ambos os lados, obtemos que

$$-\frac{1}{\phi(t)} = \frac{2}{n}t + K, \qquad K \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

onde K é dado pela seguinte expressão:

$$-\frac{1}{\mathcal{J}_0} = -\frac{1}{\phi(0)} = \frac{2}{n}.0 + K = K.$$

Ou seja, substituindo o valor de K na expressão (3.11), vemos que

$$-\frac{1}{\phi(t)} = \frac{2}{n}t - \frac{1}{\mathcal{J}_0} = \frac{2t\mathcal{J}_0 - n}{n\mathcal{J}_0}$$

e portanto ϕ é dado pela seguinte igualdade:

$$\phi(t) = \frac{n\mathcal{J}_0}{n - 2t\mathcal{J}_0}. \tag{3.12}$$

Se $\mathcal{J}_0 = 0$, então a EDO se resume ao seguinte:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \frac{2}{n}\phi^2 \\ \phi(0) = 0 \end{cases}$$

Como $\phi \equiv 0$ é solução e pelo teorema de existência e unicidade para EDO's, vemos que é a única solução. Notemos também que se substituirmos $\mathcal{J}_0 = 0$ na expressão (3.12) concluiremos que $\phi \equiv 0$. Portanto

$S(x,t) \geq \phi(t)$, para todo $(x,t) \in M \times [0,T)$, onde

$$\phi(t) = \frac{n\mathcal{J}_0}{n - 2t\mathcal{J}_0}.$$

Em particular, vemos que se $\mathcal{J}_0 > 0$, então

$$n - 2t\mathcal{J}_0 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{n}{2\mathcal{J}_0},$$

ou seja, $\phi(t) \to \infty$ quando $t \to \frac{n}{2\mathcal{J}_0}$, logo o intervalo de existência do fluxo de Ricci não pode conter "estritamente"o intervalo $\left[0, \frac{n}{2\mathcal{J}_0}\right)$.

Estimativa de Tempo de Duplicação

Outra aplicação útil do Princípio do Máximo Escalar é a chamada estimativa de tempo de duplicação, que nos dá um limitante inferior no tempo necessário para a curvatura se tornar suficientemente grande. Da equação de evolução da curvatura (demonstração do Lema 4.1), segue que

$$\frac{\partial}{\partial t}|R|^2 \leq \triangle_{g(t)}|R|^2 + C(n)|R|^3.$$

Portanto, se $|R(\cdot,0)| \leq K$, então pelo Princípio do Máximo Escalar, segue que $|R(x,t)|^2 \leq \phi(t)$, $(x,t) \in M \times [0,T)$, onde $\phi : [0,T) \to \mathbb{R}$ é solução da seguinte EDO:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = C(n)\,\phi^{\frac{3}{2}} \\ \phi(0) = K^2 \end{cases}$$

Se $K = 0$, então $\phi \equiv 0$, ou seja $R \equiv 0$. Suponhamos então que $K > 0$ (nunca é menor!), logo ϕ não se anula em nenhum ponto. Portanto podemos fazer

$$\frac{\frac{d\phi}{dt}}{\phi^{\frac{3}{2}}} = C(n).$$

Integrando em t em ambos os lados, obtemos que

$$-\frac{2}{\sqrt{\phi(t)}} = C(n)\,t + J, \qquad J \in \mathbb{R}.$$

Notemos que

$$-\frac{2}{K} = -\frac{2}{|K|} = -\frac{2}{\sqrt{K^2}} = -\frac{2}{\sqrt{\phi(0)}} = C(n).0 + J = J,$$

ou seja,

$$-\frac{2}{\sqrt{\phi(t)}} = C(n)\,t - \frac{2}{K} = \frac{C(n)\,Kt - 2}{K}.$$

Isolando $\phi(t)$, segue que

$$\phi(t) = \left(\frac{2K}{C(n)\,Kt - 2}\right)^2.$$

Como $K > 0$,

$$|R|^2 \leq \left(\frac{2K}{C(n)\,Kt - 2}\right)^2, \tag{3.13}$$

ou seja,

$$|R| \leq \frac{2K}{|C(n)\,Kt - 2|}. \tag{3.14}$$

Notemos que

$$|C(n)\,Kt - 2| \geq 1 \Leftrightarrow C(n)\,Kt - 2 \geq 1 \text{ ou } C(n)\,Kt - 2 \leq -1.$$

Para o primeiro caso, temos que

$$t \geq \frac{3}{C(n)\,K}.$$

Como ϕ está definida até $t = \frac{2}{C(n)K}$, desconsideramos este caso. Para o segundo caso, temos que

$$t \leq \frac{1}{C(n)\,K}.$$

Ou seja, temos que $|R(x,t)| \leq 2K$, em $M \times \left[0, \frac{1}{C(n)K}\right]$, onde $[0,T)$ é o intervalo maximal de existência da solução do fluxo de Ricci. Isso demonstra o seguinte resultado:

Teorema 3.4 (Estimativa de Tempo de Duplicação) *Seja $g(t)$, $t \in [0,T)$, uma solução do fluxo de Ricci em uma variedade compacta M, com $\left|R_{g(0)}\right| \leq K$. Então $\left|R_{g(t)}\right| \leq 2K$, para todo $t \in \left[0, \frac{1}{C(n)K}\right]$..*

Capítulo 4

Existência a Longo Prazo

Nesse capítulo, vamos mostrar dois resultados (ou melhor, vamos apenas esboçar a demonstração do primeiro deles): O primeiro nos diz que se a curvatura riemanniana de uma solução do fluxo de Ricci é limitada, então podemos limitar suas derivadas covariantes também por uma constante, porém a mesma depende do tempo. Além disso, mostraremos a existência de solução para o fluxo de Ricci em um intervalo de tempo maximal.

4.1 Regularidade: Estimativas Globais de Shi

Comecemos estimando as derivadas covariantes da curvatura riemanniana sob certas condições:

Teorema 4.1 (Estimativa de Bernstein - Bando - Shi) *Considere uma variedade diferenciável compacta M^n e seja $\{g(t)\}$, $t \in [0,T)$, uma família suave de métricas riemannianas sobre M^n que é solução do fluxo de Ricci. Então, para cada $p \in \mathbb{N}$ existe uma constante C_p, dependendo apenas de n, tal que se a curvatura riemanniana é limitada por uma constante $K \geq 0$, isto é, se $|R(x,t)|_{g(t)} \leq K$ em $M^n \times (0,T)$, então*

$$|(\nabla^p R)(x,t)|_{g(t)} \leq \min\left\{ e^{C_p K t} \sup_{M\times\{0\}} |(\nabla^p R)(x,0)|_{g(0)}; C_p \max\left\{ K^{\frac{p+2}{2}}; \frac{K}{t^{\frac{p}{2}}} \right\} \right\},$$

para todo $(x,t) \in M^n \times (0,T)$.

Observação 4.1 *Para evitar uma notação carregada na demonstração adotaremos a seguinte convenção: Se A e B são dois tensores em uma variedade riemanniana, denotemos por $A * B$ qualquer combinação linear de tensores obtida do produto tensorial $A \otimes B$ por uma ou mais das seguintes operações:*

1. *Soma sobre pares de índices superiores e inferiores correspondentes;*

2. *Contração nos índices superiores em relação à métrica;*

3. *Contração nos índices inferiores em relação à métrica dual.*

Para a (ideia da) demonstração do Teorema 4.1, precisamos do seguinte resultado preliminar:

Lema 4.1 *Suponha que, sob o fluxo de Ricci, o tensor A satisfaz*

$$\nabla_{\partial_t} A = \Delta A + B,$$

onde B é um tensor do mesmo tipo de A, e ∇ é a conexão no fibrado tangente espacial $\mathcal{G}$ definido por (A.17). Então o quadrado de sua norma satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} |A|^2 = \Delta |A|^2 - 2 |\nabla A|^2 + 2 \langle B, A \rangle .$$

Demonstração. De fato, usando o referencial geodésico notemos que

$$\begin{aligned}
\Delta |A|^2 &= Tr_g \left(\nabla^2 |A|^2 \right) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g \left(\nabla_{\partial_i} \nabla |A|^2 , \partial_j \right) = \sum_{i=1}^{n} g \left(\nabla_{\partial_i} \nabla |A|^2 , \partial_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g \left(\nabla_{\partial_i} \nabla \left(\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} (A_{i_1\cdots i_k})^2 \right), \partial_i \right) \\
&= \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} g \left(\nabla_{\partial_i} \nabla \left((A_{i_1\cdots i_k})^2 \right), \partial_i \right) = \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} g \left(\nabla_{\partial_i} \left\{ 2 A_{i_1\cdots i_k} \nabla \left(A_{i_1\cdots i_k} \right) \right\}, \partial_i \right) \\
&= 2 \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \left\{ g \left(\partial_i \left(A_{i_1\cdots i_k} \right) \nabla \left(A_{i_1\cdots i_k} \right), \partial_i \right) + g \left(A_{i_1\cdots i_k} \nabla_{\partial_i} \nabla \left(A_{i_1\cdots i_k} \right), \partial_i \right) \right\} \\
&= 2 \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \partial_i \left(A_{i_1\cdots i_k} \right) g \left(\nabla \left(A_{i_1\cdots i_k} \right), \partial_i \right) + 2 \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} A_{i_1\cdots i_k} g \left(\nabla_{\partial_i} \nabla \left(A_{i_1\cdots i_k} \right), \partial_i \right) \\
&= 2 \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \partial_i \left(A_{i_1\cdots i_k} \right) g \left(\sum_{a=1}^{n} \partial_a \left(A_{i_1\cdots i_k} \right) \partial_a, \partial_i \right) + 2 \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} A_{i_1\cdots i_k} \Delta \left(A_{i_1\cdots i_k} \right) \\
&= 2 \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \left(\partial_i \left(A_{i_1\cdots i_k} \right) \right)^2 + 2 \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} A_{i_1\cdots i_k} \Delta \left(A_{i_1\cdots i_k} \right).
\end{aligned}$$

Usando coordenadas normais, vemos que

$$\begin{aligned}
\Delta |A|^2 &= 2 \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \left(\partial_i \left(A_{i_1\cdots i_k} \right) \right)^2 + 2 \sum_{i,i_1,\cdots,i_k=1}^{n} A_{i_1\cdots i_k} \left(\Delta A \right)_{i_1\cdots i_k} \\
&= 2 \langle \nabla A, \nabla A \rangle + 2 \langle A, \Delta A \rangle .
\end{aligned}$$

Segue dessa igualdade e da hipótese que

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 = \frac{\partial}{\partial t}\langle A, A\rangle = 2\left\langle \frac{\partial}{\partial t}A, A\right\rangle = 2\langle \Delta A + B, A\rangle = \Delta |A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2\langle B, A\rangle .$$

■

Mais ainda, usando a expressão

$$[\nabla_t, \nabla_i] A = \nabla_t \nabla_i A - \nabla_i \nabla_t A = R(\nabla_t, \nabla_i) A = \nabla R * A$$

do Teorema A.5 e usando que

$$[\nabla, \Delta] A = \nabla \Delta A - \Delta \nabla A = R * \nabla A + \nabla R * A$$

vemos que ∇A também satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t} \nabla A &= \nabla R * A + \nabla \nabla_t A = \nabla R * A + \nabla(\Delta A + B) = \nabla R * A + \nabla \Delta A + \nabla B \qquad (4.1) \\ &= \nabla R * A + R * \nabla A + \nabla R * A + \Delta \nabla A + \nabla B \\ &\approx \nabla R * A + R * \nabla A + \Delta \nabla A + \nabla B. \end{aligned}$$

Ideia da demonstração do Teorema 4.1. A prova será feita por indução em p. Primeiramente comecemos com $p = 1$: Usando a $*$-convenção e o Teorema 1.3, vemos que

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + R * R.$$

Usando o Lema 4.1 com $A = R$ e $B = R * R$, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}|R|^2 = \Delta |R|^2 - 2|\nabla R|^2 + 2\langle B, R\rangle = \Delta |R|^2 - 2|\nabla R|^2 + R * R * R. \qquad (4.2)$$

Mais ainda, usando o Lema 4.1 novamente, agora com $A = \nabla R$ e $B = R * \nabla R$, é possível mostrar que (em conjunção com a expressão (4.1)) que

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla R|^2 = \Delta |\nabla R|^2 - 2\left|\nabla^2 R\right|^2 + 2\langle B, \nabla R\rangle = \Delta |\nabla R|^2 - 2\left|\nabla^2 R\right|^2 + R * \nabla R * \nabla R. \qquad (4.3)$$

Gostaríamos de estimar $|\nabla R|^2$ com estas equações. Contudo há uma ou duas dificuldades: A primeira é o termo $R * \nabla R * \nabla R$, que é potencialmente difícil de estimar. O segundo é que não temos controle de $|\nabla R|^2$ em $t = 0$. Para limpar estes obstáculos, vamos definir

$$F := t\,|\nabla R|^2 + |R|^2 \,.$$

Com essa escolha, vemos que o termo incontrolável $|\nabla R|^2$ desaparece em $t = 0$. Segue da hipótese que

$$F_{|t=0} = |R|^2 \leq K^2.$$

E para t suficientemente pequeno, o termo ruim na expressão (4.3) pode ser controlado pelo termo bom $-2\,|\nabla R|^2$ da expressão (4.2). Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= |\nabla R|^2 + t\frac{\partial}{\partial t}\,|\nabla R|^2 + \frac{\partial}{\partial t}\,|R|^2 = |\nabla R|^2 + t\Delta\,|\nabla R|^2 - 2t\left|\nabla^2 R\right|^2 \\
&\quad + tR * \nabla R * \nabla R + \Delta\,|R|^2 - 2\,|\nabla R|^2 + R * R * R \\
&= \Delta\left(t\,|\nabla R|^2\right) - 2t\left|\nabla^2 R\right|^2 + tR * \nabla R * \nabla R + \Delta\,|R|^2 - |\nabla R|^2 + R * R * R \\
&= \Delta\left(t\,|\nabla R|^2 + |R|^2\right) - 2t\left|\nabla^2 R\right|^2 + tR * \nabla R * \nabla R - |\nabla R|^2 + R * R * R \\
&= \Delta F - 2t\left|\nabla^2 R\right|^2 + tR * \nabla R * \nabla R - |\nabla R|^2 + R * R * R.
\end{aligned}$$

Com essa igualdade, pode-se mostrar que existem constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{\partial F}{\partial t} \leq \Delta F + (tC_1K - 1)\,|\nabla R|^2 + C_2K^3.$$

Para $0 < t \leq \frac{1}{C_1K}$ segue que

$$\frac{\partial F}{\partial t} \leq \Delta F + (tC_1K - 1)\,|\nabla R|^2 + C_2K^3 \leq \Delta F + C_2K^3,$$

ou seja, vemos que $L(F) \leq L\left(K^2 + tC_2K^3\right)$, onde L é o operador do Princípio do Máximo (para mais detalhes veja a expressão (3.5)). E como $F_{|t=0} \leq K^2 = K^2 + 0C_2K^3$, segue do Princípio do Máximo que

$$t\,|\nabla R|^2 + |R|^2 \leq K^2 + tC_2K^3,$$

ou seja,

$$t\left|\nabla R\right|^{2}\leq K^{2}+tC_{2}K^{3}\leq K^{2}+\frac{1}{C_{1}K}C_{2}K^{3}=\left(1+\frac{C_{2}}{C_{1}}\right)K^{2}.$$

Se $t>\frac{1}{C_{1}K}$, olhemos para o intervalo $\left[t-\frac{1}{C_{1}K},t\right]$. Como esse intervalo é apenas a translação do intervalo $\left[0,\frac{1}{C_{1}K}\right]$ pela constante $t-\frac{1}{C_{1}K}$, vemos que todas as derivadas terão o mesmo valor de antes, ou seja, se $j\in\left[t-\frac{1}{C_{1}K},t\right]$, então

$$\frac{\partial F}{\partial t}\left(j\right)\leq\Delta F+C_{2}K^{3},$$

usando novamente o Princípio do Máximo, vemos que

$$j\left|\nabla R\right|^{2}\leq\left(1+\frac{C_{2}}{C_{1}}\right)K^{2},$$

em particular, a desigualdade acima é válida para $j=t$. Logo

$$\frac{1}{C_{1}K}\left|\nabla R\right|^{2}<t\left|\nabla R\right|^{2}\leq\left(1+\frac{C_{2}}{C_{1}}\right)K^{2},$$

ou seja, isolando $\left|\nabla R\right|^{2}$ vemos que

$$\left|\nabla R\right|^{2}\leq\left(C_{1}+C_{2}\right)K^{3},$$

para todo $t>\frac{1}{C_{1}K}$. Segue disso que

$$\left|\nabla R\right|^{2}\leq\max\left\{\frac{\left(1+\frac{C_{2}}{C_{1}}\right)K^{2}}{t};\left(C_{1}+C_{2}\right)K^{3}\right\}.$$

Logo, provamos o caso em que $p=1$. Usando a expressão (4.1), podemos provar por indução que

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^{k}R=\Delta\left(\nabla^{k}R\right)+\sum_{j=0}^{k}\nabla^{j}R*\nabla^{k-j}R.$$

Segue do Lema 4.1 que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\nabla^{k}R\right|^{2}=\Delta\left|\nabla^{k}R\right|^{2}-2\left|\nabla^{k+1}R\right|^{2}+\sum_{j=0}^{k}\nabla^{j}R*\nabla^{k-j}R*\nabla^{k}R.$$

Agora seja
$$G = t^p \left|\nabla^p R\right|^2 + \beta_p \sum_{k=1}^{p} \alpha_p t^{p-k} \left|\nabla^{p-k} R\right|^2.$$
Procuramos aplicar as mesmas técnicas de EDP como antes, com escolhas adequadas das constantes $\beta_p^{'}$s. De fato, em $\left[0, \frac{1}{CK}\right]$ podemos mostrar que $\frac{\partial G}{\partial t} \leq \Delta G + \beta_p K^3$. Segue do Princípio do Máximo, conseguimos encontrar uma constante $\widehat{C_p}$ dependendo de p e n tal que
$$\sup_x G(x,t) \leq \widehat{C_p}^2 K^2.$$
Se $t > \frac{1}{CK}$, o mesmo argumento em $\left[t - \frac{1}{CK}, t\right]$ nos dá que
$$\left|\nabla^p R\right|^2 \leq \left(\widetilde{C}(p) K\right) K^{\frac{p}{2}} = \widetilde{C}(p) K^{1+\frac{p}{2}}.$$
■

4.2 Existência a Longo Prazo

Nesta seção, vamos mostrar a existência da única solução para o fluxo de Ricci em um intervalo de tempo maximal.

Considere $(M, g(t))$, $t \in [0,T)$, uma solução do fluxo de Ricci. Dizemos que $[0,T)$ é o **intervalo maximal de existência** se $T = \infty$ ou $T < \infty$ e não existir $\varepsilon > 0$ e uma solução suave $\widetilde{g}(t)$, $t \in [0, T+\varepsilon)$ tal que $\widetilde{g}(t) = g(t)$ em $[0,T)$. Para o segundo caso, quando T é finito, dizemos que $g(t)$ tem uma **singularidade** em T, ou simplesmente que $g(t)$, $t \in [0,T)$, é uma **solução singular**. De agora em diante, vamos falar sobre o fluxo de Ricci com métrica inicial g_0 em um intervalo maximal de tempo $[0,T)$.

Teorema 4.2 (Existência a Longo Prazo) *Em uma variedade compacta M com métrica inicial suave g_0, a única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$ existe em um intervalo maximal $0 \leq t < T \leq \infty$. Mais ainda, $T < \infty$ apenas se a curvatura riemanniana respeita o seguinte limite:*
$$\lim_{t \to T} \sup_{x \in M} |R(x,t)| = \infty.$$

Para demonstrar esse teorema, precisamos de limitantes para a métrica e suas derivadas:

Lema 4.2 *Considere uma família de variedades riemannianas* $(M, g(t))$, $t \in [0, \tau]$ *que é solução do fluxo de Ricci, onde* $\tau \leq \infty$. *Se o tensor de Ricci é limitado por uma constante* K, *isto é,* $|Ric| \leq K$ *em* $M \times [0, \tau]$ *então*

$$e^{-2Kt} g(0) \leq g(t) \leq e^{2Kt} g(0),$$

para todo $t \in [0, \tau]$. *Onde entendemos por* $g_2 \geq g_1$ *se* $g_2 - g_1$ *é uma métrica* ***fracamente positiva definida.***

Demonstração. Seja $x \in M$. Para todo $v \in T_x M$ não nulo, temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{(x,t)}(v, v) = -2Ric_{(x,t)}(v, v),$$

e portanto, pela teoria de Análise Funcional,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} g_{(x,t)}(v, v) \right|_{g(t)} = 2 \left| Ric_{(x,t)}(v, v) \right| \leq 2 |Ric| \, g_{(x,t)}(v, v).$$

Segue disso que

$$\begin{aligned} \left| \ln \frac{g_{(x,t_2)}(v,v)}{g_{(x,t_1)}(v,v)} \right| &= \left| \ln g_{(x,t_2)}(v,v) - \ln g_{(x,t_1)}(v,v) \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{\partial}{\partial t} g_{(x,t)}(v,v)}{g_{(x,t)}(v,v)} dt \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\frac{\partial}{\partial t} g_{(x,t)}(v,v)}{g_{(x,t)}(v,v)} \right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\left| \frac{\partial}{\partial t} g_{(x,t)}(v,v) \right|}{g_{(x,t)}(v,v)} dt \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{2 |Ric| \, g_{(x,t)}(v,v)}{g_{(x,t)}(v,v)} dt = 2 |Ric| \int_{t_1}^{t_2} dt = 2 |Ric| (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Fazendo $t_1 = 0$ e $t_2 = t$, vemos que

$$\left| \ln \frac{g_{(x,t)}(v,v)}{g_{(x,0)}(v,v)} \right| \leq 2 |Ric| \, t \leq 2Kt.$$

Portanto temos que

$$-2Kt \leq \ln \left(\frac{g_{(x,t)}(v,v)}{g_{(x,0)}(v,v)} \right) \leq 2Kt.$$

Aplicando a exponencial obtemos o resultado. ■

Lema 4.3 *Considere uma variedade diferenciável* M *e fixe uma métrica* $\overline{g}$ *e uma conexão* $\overline{\nabla}$ *em* M. *Para toda solução suave* $g(t)$ *do fluxo de Ricci em* $M \times [0, T)$, *tal que o supremo da norma da curvatura riemanniana é limitada por uma constante* $K \geq 0$, *isto é,* $\sup_{M \times [0,T)} |R| \leq K$, *existem constantes* C_q,

$q \in \mathbb{N}$, *tais que*

$$\sup_{M\times[0,T)} \left|\overline{\nabla}^{(q)} g\,(x,t)\right|_{\overline{g}} \leq C_q$$

Demonstração. É suficiente provar por indução que

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}^{(q)} g = \sum_{j_0+\cdots+j_m=q} \nabla^{j_0} R * \overline{\nabla}^{(j_1)} g * \cdots * \overline{\nabla}^{(j_m)} g. \tag{4.4}$$

O caso $q=1$ será provado como segue: Como $\overline{\nabla}$ independe do tempo, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}_{\partial_i}(g_{kl}) &= \overline{\nabla}_{\partial_i}\left(\frac{\partial}{\partial t} g_{kl}\right) = \overline{\nabla}_{\partial_i}(-2Ric_{kl}) = -2\overline{\nabla}_{\partial_i}(Ric_{kl}) \\
&= -2\left(\overline{\nabla}_{\partial_i} Ric\right)_{kl} - 2Ric\left(\overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_k, \partial_l\right) - 2Ric\left(\partial_k, \overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_l\right) \\
&= -2\left(\overline{\nabla} Ric\right)_{ikl} - 2Ric\left(\overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_k, \partial_l\right) - 2Ric\left(\partial_k, \overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_l\right) \\
&= -2\left(\overline{\nabla} Ric\right)_{ikl} - 2Ric\left(\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{ik}^{m}\partial_m, \partial_l\right) - 2Ric\left(\partial_k, \sum_{m=1}^{n}\Gamma_{il}^{m}\partial_m\right) \\
&= -2\left(\overline{\nabla} Ric\right)_{ikl} - 2\sum_{m=1}^{n} Ric\left(\Gamma_{ik}^{m}\partial_m, \partial_l\right) - 2\sum_{m=1}^{n} Ric\left(\partial_k, \Gamma_{il}^{m}\partial_m\right),
\end{aligned}$$

e como os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right\} g^{km},$$

segue que

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}_{\partial_i}(g_{kl}) = \overline{\nabla} R + R * \overline{\nabla} g.$$

O passo de indução agora é simples, se a igualdade (4.4) é válida para algum $q \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}^{(q+1)} g &= \overline{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}^{(q)} g = \overline{\nabla}\left(\sum_{j_0+\cdots+j_m=q}\overline{\nabla}^{(j_0)} R * \overline{\nabla}^{(j_1)} g * \cdots * \overline{\nabla}^{(j_m)} g\right) \\
&= \sum_{j_0+\cdots+j_m=q}\left(\overline{\nabla}^{(j_0+1)} R + \overline{\nabla}^{(j_0)} R * \overline{\nabla} g\right) * \overline{\nabla}^{(j_1)} g * \cdots * \overline{\nabla}^{(j_m)} g \\
&\quad + \sum_{j_0+\cdots+j_m=q}\overline{\nabla}^{(j_0)} R * \overline{\nabla}^{(j_1+1)} g * \cdots * \overline{\nabla}^{(j_m)} g + \cdots + \sum_{j_0+\cdots+j_m=q}\nabla^{j_0} R * \overline{\nabla}^{(j_1)} g * \cdots * \overline{\nabla}^{(j_m+1)} g \\
&= \sum_{j_0+\cdots+j_m=q+1}\overline{\nabla}^{(j_0)} R * \overline{\nabla}^{(j_1)} g * \cdots * \overline{\nabla}^{(j_m)} g
\end{aligned}$$

Agora podemos usar a expressão (4.4) para deduzir os limites necessários para o Lema por indução em q. Isto é, se controlamos $\overline{\nabla}$-derivadas de g até a ordem q, então temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\overline{\nabla}^{(q+1)}g\right|_{\overline{g}}^{2} \leq C\left(1+\left|\overline{\nabla}^{(q+1)}g\right|_{\overline{g}}\right),$$

o que implica em um limite nas derivadas de ordem $q+1$ já que o intervalo de tempo é finito. ■

Demonstração do Teorema 8.4. Por contrapositiva, suponha que existe uma sequência $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $t_i \overset{i\to\infty}{\to} T$ e uma constante $K\in\mathbb{R}$ independente de i tal que

$$\sup_{M}|R(\cdot,t_i)| \leq K,$$

em particular, para pelo **tempo de duplicação** (expressão (3.13)), segue que

$$|R(\cdot,t)| \leq \frac{2K}{2-KC(n)\,(t-t_i)},$$

para todo $t\geq t_i$ e todo $x\in M$. Segue que, para i suficientemente grande de modo que $t_i = T-\varepsilon$, $\varepsilon>0$:

$$|R(\cdot,t)| \leq \frac{2K}{2-KC(n)\,(t-(T-\varepsilon))},$$

para todo $t\in[T-\varepsilon,T]$. Assim, $|R|\leq\widetilde{K}$ em $[0,T)$.

Afirmação: A métrica $g(t)$ pode ser estendida suavemente de $[0,T)$ para $[0,T]$.

De fato, pelos Lemas 4.2 e 4.3, segue que

$$\left|\ln g_{(x,t_2)}(v,v)-\ln g_{(x,t_1)}(v,v)\right| = \left|\ln\frac{g_{(x,t_2)}(v,v)}{g_{(x,t_1)}(v,v)}\right| \leq 2\,|Ric|\,t \leq 2\widetilde{K}\,|t_2-t_1|\,.$$

Ou seja, vemos que $g_{(x,t)}(v,v)$ é de Cauchy para $t\to T$. E pelo Lema 4.3, vemos que $g_{(x,t)}(v,v)$ é de Cauchy em C^k, para todo k, quando $t\to T$.

Então, a partir desse resultado, tomamos $g(T)$ como a métrica "inicial". Pelo Teorema 2.1, a existência para curtos períodos de tempo implica que podemos estender o fluxo para tempos $t\in[0,T+\epsilon)$, contradizendo assim a maximalidade do tempo final finito T. ■

Capítulo 5

Teorema de Compacidade para Fluxos

Nesse capítulo vamos demonstrar que o conjunto de métricas completas, em uma variedade M, que satisfazem o fluxo de Ricci é "compacto"em algum sentido: O objetivo desse Capítulo é a demonstração do Teorema de Compacidade Para Fluxos, que nos garante que, sob certas condições impostas sobre a variedade M, toda sequência de soluções completas do fluxo de Ricci possui uma subsequência que converge para uma outra solução do fluxo de Ricci de mesma natureza, onde essa convergência é conhecida como convergência C^∞ de Cheeger-Gromov.

5.1 Conceitos Preliminares

Estamos interessados na convergência de métricas, que são seções de um certo fibrado vetorial. Para isso fazer sentido, vamos definir o que se entende por convergência C^p, ou convergência C^∞ para sequências de seções de um fibrado vetorial.

Definição 5.1 (Convergência C^p) *Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável M, e suponha que E esteja munido de uma métrica suave g e de uma conexão ∇. Seja $\Omega \subset M$ um aberto tal que $\overline{\Omega} \subset M$ é compacto, e seja $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de seções de E. Para todo inteiro $p \geq 0$ dizemos que $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$* ***converge em C^p para*** *$\xi_\infty \in \Gamma\left(E_{|_{\overline{\Omega}}}\right)$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tal que*

$$\sup_{0\leq\alpha\leq p} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left|\left(\nabla^\alpha\left(\xi_k - \xi_\infty\right)\right)(x)\right|_g < \varepsilon,$$

para todo $k \geq k_0$. Dizemos que $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ***converge em C^∞ para*** *ξ_∞ em $\overline{\Omega}$ se $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge em C^p para ξ_∞, para todo $p \in \mathbb{N}$.*

Agora vamos definir a noção de convergência suave em subconjuntos compactos para uma sequência de seções: Seja M uma variedade diferenciável. Uma **exaustão** em M é uma sequência de abertos $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em M tal que $\overline{U_k}$ é compacto e $\overline{U_k} \subset U_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k = M.$$

Note que se $K \subset M$ é compacto, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset U_k$, para todo $k \geq k_0$ (em particular, se M é compacto então $M = U_k$, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande). De fato,

$$K \subset M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k,$$

ou seja, $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, existe $\{k_1, ..., k_j\}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{j} U_{k_m}.$$

Seja $k_0 = \max\{k_1, ..., k_j\}$, segue da construção de $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que

$$K \subset \bigcup_{m=1}^{j} U_{k_m} \subset \bigcup_{m=1}^{j} \overline{U_{k_m}} \subset U_{k_0}.$$

Definição 5.2 (Convergência C^∞ em conjuntos compactos) *Seja $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma exaustão em uma variedade diferenciável M, e E um fibrado vetorial sobre M. Fixe uma métrica suave g e uma conexão ∇ em E. Seja $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de seções de E definidas em abertos $A_i \subset M$, e seja $\xi_\infty \in \Gamma(E)$. Dizemos que $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge suavemente em compactos para ξ_∞ se, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{U_k} \subset A_i$, para todo $i \geq i_0$, e a sequência $\left(\xi_{i|_{\overline{U_k}}}\right)_{i\geq i_0}$ converge em C^∞ para ξ_∞ em $\overline{U_k}$.*

Em uma sequência de variedades, é frequentemente útil verificar sua convergência local e não global. Para entendermos melhor essa noção, temos a seguinte definição:

Definição 5.3 (Variedades Pontuadas) *Uma **variedade riemanniana pontuada** é uma variedade riemanniana (M, g) com um **ponto base** (ou ponto de origem) $O \in M$ escolhido de modo arbitrário. Se a métrica g é completa, dizemos que o par (M, O) é uma variedade riemanniana pontuada completa. Se $(M, g(t))$ é uma solução do fluxo de Ricci, $t \in (a, b)$, dizemos que $(M, g(t), O)$ é uma **solução pontuada** do fluxo de Ricci.*

Gostaríamos de uma noção de convergência para uma sequência $\{(M_k, g_k, O_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de variedades riemannianas pontuadas que leve em consideração a ação de preservação do ponto base por difeomorfismos no **espaço das métricas**, espaço esse que será denotado por $\mathfrak{Met}$.

Definição 5.4 (Convergência C^∞ de Cheeger-Gromov) *Uma sequência $\{(M_k, g_k, O_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de variedades pontuadas completas converge para uma variedade pontuada completa $(M_\infty, g_\infty, O_\infty)$ se existir:*

1. *Uma exaustão $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de M_∞ com $O_\infty \in U_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$;*
2. *Uma sequência de difeomorfismos $\{\Phi_k : U_k \to V_k \subset M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $\Phi_k(O_\infty) = O_k$ tal que $(\Phi_k^* g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge em C^∞ para g_∞ em conjuntos compactos em M_∞.*

Essa noção de convergência é frequentemente chamada de **convergência suave de Cheeger-Gromov**. A convergência correspondente para uma sequência de soluções pontuadas do fluxo de Ricci é definida como segue:

Definição 5.5 *Uma sequência $\{(M_k^n, g_k(t), O_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, para $t \in (a,b)$, de soluções pontuadas do fluxo de Ricci converge para uma solução pontuada do fluxo de Ricci, $(M_\infty^n, g_\infty(t), O_\infty)$ para $t \in (a,b)$, se existir*

i) *Uma exaustão $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de M_∞ com $O_\infty \in U_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$;*

ii) *Uma sequência de difeomorfismos $\{\Phi_k : U_k \to V_k \subset M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $\Phi_k(O_\infty) = O_k$ tal que $(\Phi_k^* g_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge em C^∞ para $g_\infty(t)$ em conjuntos compactos em $M_\infty \times (a,b)$.*

Tendo definido a convergência de uma sequência de variedades pontuadas $\{(M_k, g_k, O_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, gostaríamos de estabelecer condições necessárias para garantir que essa sequência possua uma subsequência convergente. Como veremos, há duas condições para isso ocorrer: A primeira é a garantia de um limitante uniforme (global) para a curvatura riemanniana e suas derivadas; a segunda é a limitação inferior dos raios de injetividade no ponto base, isto é:

1. $|\nabla^p R^{g_k}| \leq C_p$ em M_k, para todo $p \geq 0$;
2. $inj_{g_k}(O_k) \geq \kappa_0$, para algum $\kappa_0 > 0$ (para mais detalhes veja a Definição A.17)

Dizemos que uma sequência de variedades riemannianas possui uma **geometria limitada** sempre que a curvatura riemanniana e suas derivadas de todas as ordens possuem limitantes uniformes.

O teorema de compacidade resultante para métricas é apresentado a seguir. É um resultado fundamental na Geometria Riemanniana, independente do fluxo de Ricci, cuja demonstração não é trivial e não tem haver com o fluxo de Ricci, portanto não será demonstrado.

Teorema 5.1 (Compacidade Para Métricas) *Seja $\{(M_k, g_k, O_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variedades riemannianas pontuadas completas satisfazendo (1) e (2) acima. Então existe uma subsequência $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{(M_{j_k}, g_{j_k}, O_{j_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge no sentido de Cheeger-Gromov para uma variedade riemanniana pontuada completa $(M_\infty, g_\infty, O_\infty)$ quando $k \to \infty$.*

É claro que ambas as condições são necessárias: Por exemplo, se não houver limitações na curvatura, então podemos tomar a sequência da Figura **??**. Explicitamente, tome variedades M_k como hipersuperfícies de $\mathbb{R}^{n+1}$ dadas pelos gráficos de $f_k(x) = \sqrt{1/k^2 + |x|^2}$ com a métrica induzida e $O_k = f_k(0)$. Vemos que o limite não é suave no ponto base O_∞, logo não é variedade diferenciável. Similarmente, pode-se construir exemplos onde a convergência suave falha se a p-ésima derivada não for uniformemente limitada, para todo $p > 0$. Como veremos, as excelentes propriedades de regularidade do fluxo de Ricci nos pouparão de dificuldades na análise das curvaturas, isto é, se possuirmos a curvatura riemanniana limitada ($p = 0$) então as limitações em suas derivadas estarão garantidas.

Um assunto mais sutil é a limitação inferior dos raios de injetividade por um limitante positivo, como na Figura **??**. Para um exemplo explícito sobre o que pode dar errado, consideremos a sequência dada por

$$M_k = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2,$$

com métricas dadas, respectivamente, por

$$g_k(x, y) = dx^2 + k^{-1}dy^2,$$

e um ponto base qualquer O_k. Todas essas métricas possuem curvatura riemanniana nula, portanto, a primeira condição do teorema é satisfeita com $C_p = 0$, para todo $p \in M_k$. Contudo, (M_k, g_k) possui uma geodésica fechada (uma circunferência na direção y) de comprimento $1/\sqrt{k}$, logo os raios de injetividade não podem ser maiores que $1/\left(2\sqrt{k}\right)$. Esta sequência "colapsa", em certo sentido convergindo para o S^1 (uma variedade de dimensão menor). Esta condição provou ser um grande obstáculo na análise do fluxo de Ricci. Estabelecer um limite adequado é altamente não trivial e foi um dos avanços fundamentais no trabalho de **Perel'man**, por exemplo.

Quando consideramos uma sequência de soluções completas do fluxo de Ricci, temos o seguinte teorema de compacidade:

Teorema 5.2 (Teorema de Compacidade para Fluxos) *Seja $\{(M_k, g_k(t), O_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ para $t \in (a, b)$, onde $-\infty \leq a < 0 < b \leq \infty$, uma sequência de soluções completas do fluxo de Ricci respeitando os* *seguintes:*

1. *Limitação uniforme da curvatura riemanniana, isto é:*

$$\left|R^{g_k(t)}\right|_{g_k(t)} \leq C_0 \text{ em } M_k \times (a,b).$$

2. *Estimativa dos raios de injetividade em $t = 0$, isto é:*

$$inj_{g_k(0)}(O_k) \geq \kappa_0,$$

para alguma constante $\kappa_0 > 0$.

Então existe uma subsequência $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{(M_{j_k}, g_{j_k}(t), O_{j_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para uma solução completa do fluxo de Ricci $(M_\infty, g_\infty(t), O_\infty)$ quando $k \to \infty$, para $t \in (a,b)$.

Observação 5.1 *Como já observamos, não há exigências para a limitação das derivadas da curvatura riemanniana, já que elas são deduzidas do Teorema 4.1. Notemos também que a limitação da curvatura riemanniana pode ser substituída por limitantes uniformes locais, no sentido de que precisamos apenas de limitantes que independem de k em cada conjunto da forma $B_r(O_k) \times I \subset M_k \times (a,b)$, onde $r \geq 0$ e $B_r(O_k)$ é a bola de centro O_k e raio r na métrica g_k em $t = 0$, e $I \subset (a,b)$ é um intervalo compacto.*

5.2 Demonstração do Teorema e Aplicações

Nesta seção vamos demonstrar o Teorema de Compacidade para Fluxos, para isso usaremos o Teorema de Compacidade para Métricas (Teorema 5.1). Daremos a prova apenas para o caso em que as variedades M_k são compactas (embora não exista tal suposição no limite M_∞). A prova para o caso mais geral não é muito mais difícil, mas requer uma versão mais forte do resultado de regularidade do Teorema 4.1, que não desejamos provar. Algumas das principais ferramentas da demonstração do são o **Teorema de Arzelà–Ascoli** e os resultados de regularidade apresentados no Capítulo 4**.**

Sejam X, Y espaços métricos e $C(X,Y) := \{f : X \to Y : f \text{ é contínua}\}$. Dizemos que $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ é **equicontínuo** se, para todo $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ existir $\delta > 0$ tal que $y \in X$ e $d_X(x,y) < \delta$ implicam $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$, para toda $f \in \mathcal{F}$. Fixando $y_0 \in Y$, também dizemos que $\mathcal{F}$ é **pontualmente limitada** se para todo $x \in X$ existir $C = C(x) < \infty$ tal que $d_Y(f(x), y_0) \leq C(x)$, para toda $f \in \mathcal{F}$. Além disso, dizemos que X é chamado **localmente compacto** se todo ponto x de X tem uma vizinhança compacta, isto é, existe um conjunto aberto U e um conjunto compacto K, tal que $x \in U \subset K$.

Antes de enunciar o Teorema de Arzelà - Ascoli, façamos a seguinte observação:

Observação 5.2 *Considere X, Y espaços métricos. Notemos que uma família de conjuntos da forma $\mathcal{U}_{K,U} := \{f : X \to Y : f(K) \subset U\}$, onde $K \subset X$ é compacto e $U \subset Y$ é aberto, define uma subbase para uma topologia em $C(X,Y)$, a chamada* ***topologia compacto-aberta.***

Teorema 5.3 (Teorema de Arzelà-Ascoli) *Sejam X, Y espaços métricos localmente compactos. Então um subconjunto $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ é compacto na topologia compacto-aberta se, e somente se, é equicontínuo, limitado pontualmente e fechado.*

Notemos que se $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ é compacto, então toda sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ converge uniformemente em todo subconjunto compacto de X. De fato, como $\mathcal{F}$ é compacto, se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ é uma sequência, então existe subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} f$, onde a convergência é na topologia compacto-aberta. Seja $K \subset X$ um subconjunto compacto. Dado $\varepsilon > 0$, seja o aberto

$$U = \bigcup_{x\in K} B_{f(x)}(\varepsilon) \supset f(K).$$

Como f é contínua, $f(K)$ é compacto, ou seja, existe $\{x_1, ..., x_j\} \subset K$ tal que

$$\widetilde{U} = \bigcup_{i=1}^{j} B_{f(x_i)}(\varepsilon) \supset f(K).$$

Por construção de $\widetilde{U}$, $f \in \mathcal{U}_{K,\widetilde{U}}$. Segue da convergência $f_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} f$ que existe $K > 0$ tal que $k \geq K$ implica $f_{n_k} \in \mathcal{U}_{K,\widetilde{U}}$. Se $i_0 \in \{1, .., j\}$ e se $x \in K$, então

$$d(f_{n_k}(x), f(x)) \leq d(f_{n_k}(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) \leq j\varepsilon + j\varepsilon = 2j\varepsilon,$$

para todo $x \in K$. Logo $f_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} f$ uniformemente em compactos.

Podemos aplicar esse resultado para extrair uma subsequência convergente de uma sequência de seções de um fibrado com derivadas limitadas.

Corolário 5.1 *Seja M uma variedade riemanniana, E um fibrado vetorial sobre M, e fixe uma métrica g e uma conexão ∇ em E. Seja $\Omega \subset M$ um aberto tal que $\overline{\Omega}$ é compacto e $p \geq 0$ um inteiro. Seja $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de seções de E sobre $\overline{\Omega}$ tal que*

$$\sup_{0\leq\alpha\leq p+1} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left|(\nabla^\alpha \xi_k)(x)\right|_g \leq C < \infty.$$

Então existe uma seção ξ_∞ de $E_{|\overline{\Omega}}$ e uma subsequência de $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para ξ_∞ (convergência C^p) em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Como $\overline{\Omega}$ é compacto, podemos fixar um número finito, h, de cartas definidas em subconjuntos compactos $\overline{\Omega}_i$ de $\overline{\Omega}$ tais que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{h}\overline{\Omega}_i = \overline{\Omega}$. Se E for um fibrado vetorial de dimensão j, então estas cartas induzem a trivializações locais $E_i \approx \overline{\Omega}_i \times \mathbb{R}^j$ (para mais detalhes veja as Definições A.3 e A.4). Nestas condições temos as seguintes associações:

$$(\nabla^\alpha \xi_k)_{m_1\ldots m_j}(x) \in (E_i)_x \approx \left(\left(\xi_k^{\alpha,1}\right)_{m_1\ldots m_j}(x), ..., \left(\xi_k^{\alpha,j}\right)_{m_1\ldots m_j}(x)\right) \in \mathbb{R}^j,$$

para todo $x \in \overline{\Omega}_i$. Como estamos em dimensão finita, podemos utilizar a norma do máximo. Dado $\varepsilon > 0$, usando a desigualdade do valor médio, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\xi_k^{\alpha,1}(x) - \xi_k^{\alpha,1}(y)\right| &\leq \sup_{\theta\in(0,1)}\left|d\left(\xi_k^{\alpha,1}\right)_{\theta x+(1-\theta)y}\right||x-y| \leq \sup_{\theta\in(0,1)}\left|\nabla^{\alpha+1}\xi_k\right||x-y| \\
&\leq \sup_{0\leq\alpha\leq p+1}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla^\alpha \xi_k||x-y| \\
&\leq C|x-y|,
\end{aligned}$$

em que foi usado a norma do máximo na segunda desigualdade. Como a constante de Lipschitz é a mesma para todo k e todo α, segue a equicontinuidade da família $\left\{\left(\xi_k^{\alpha,1}, ..., \xi_k^{\alpha,j}\right)\right\}$. A própria hipótese já garante a limitação uniforme dessa família de funções. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli a sequência $\left(\xi_k^{\alpha,1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\left(\xi_{k_l}^{\alpha,1}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ tal que $\xi_{k_l}^{\alpha,1} \overset{l\to\infty}{\to} \xi_\infty^{\alpha,1}$. A subsequência $(k_l)_{l\in\mathbb{N}}$ é, em particular, uma sequência, logo podemos aplicar o Teorema de Arzelà-Ascoli para a sequência $\left(\xi_{k_l}^{\alpha,2}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ produzindo outra subsequência convergente (e preserva a convergência da primeira sequência pois se ela converge, então toda subsequência dela converge para o mesmo limite). Repetindo este procedimento j vezes, conseguimos uma subsequência $(k_h)_{h\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\left(\xi_{k_h}^{\alpha,1}, ..., \xi_{k_h}^{\alpha,n+j}\right) \overset{h\to\infty}{\to} \left(\xi_\infty^{\alpha,1}, ..., \xi_\infty^{\alpha,n+j}\right).$$

■

Há duas situações em que o corolário anterior é diretamente aplicável aos teoremas de compacidade que estamos discutindo: A primeira é onde E é o fibrado de formas bilineares simétricas em TM, e as seções ξ_k são métricas riemannianas em M. A segunda é onde E é o fibrado de formas bilineares simétricas no fibrado tangente espacial S sobre $M \times I$, onde I é um intervalo de tempo (para mais detalhes veja

(A.17)). Então as seções ξ_k correspondem a uma sequência de métricas dependentes do tempo em M, como uma sequência de soluções para o fluxo de Ricci.

Com o Teorema de Arzelà-Ascoli e a regularidade do fluxo de Ricci discutida no Capítulo 4 estamos aptos a demonstrar o Teorema de Compacidade para Fluxos usando o Teorema de Compacidade para Métricas:

Demonstração do teorema de compacidade para fluxos. Vamos provar apenas o caso em que cada M_k é compacta (esse é o caso que nos interessa, afinal, vamos demonstrar o Teorema da Esfera Suave). Considere uma sequência de soluções pontuadas $\{(M_k, g_k(t), O_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, para $t \in (a,b)$, para o fluxo de Ricci onde $\sup_{M_k\times(a,b)} \left|R^{g_k(t)}\right|_{g_k(t)} \leq K$ (hipótese 1). As estimativas de Berstein-Bando-Shi (Teorema 4.1) nos dá limitações da forma

$$|\nabla^p R(x,t)| \leq C(p,\varepsilon,K),$$

para todo $x \in M_k$ e $t \in [a+\varepsilon, b)$, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. A hipótese 2 dos raios de injetividade em O_k, quando $t=0$, cumpre as condições do Teorema de Compacidade para Métricas (Teorema 5.1) aplicado na sequência $\{(M_k, g_k(0), O_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Assim existe uma subsequência que converge no sentido de Cheeger-Gromov para uma variedade limite completa $\left(\overline{M}, \overline{g}, \overline{O}\right)$. Isto é, (passando a uma subsequência, se necessário) existe uma exaustão $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\overline{M}$, e uma sequência de injeções suaves $\{\Phi_k : U_k \to M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tais que $\Phi_k\left(\overline{O}\right) = O_k$. tal que $\Phi_k^*(g_k(0)) \overset{k\to\infty}{\to} \overline{g}$, onde a convergência é C^∞ em conjuntos compactos de $\overline{M}$. A ideia agora é obter um controle C^∞ e uniforme em $\widetilde{g_k}(t) := \Phi_k^*(g_k(t))$ em subconjuntos compactos de $\overline{M}\times(a,b)$ (pelo Teorema 1.1 $\widetilde{g_k}(t)$ também é solução do fluxo de Ricci). Para fazer isso, fixe um conjunto compacto Z em $\overline{M}$ e considere apenas k suficientemente grande tal que $Z \subset U_k$. Notemos que, pelo Lema 4.2, existe $J > 0$ tal que

$$e^{-2Jt}\widetilde{g_k}(0) \leq \widetilde{g_k}(t) \leq e^{2Jt}\widetilde{g_k}(0)$$

Como $\widetilde{g_k}(0) \overset{k\to\infty}{\to} \overline{g}$, então o módulo da diferença é limitado por uma constante H, digamos. Logo:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{g_k}(t) - \overline{g}| &\leq \max\left\{\left|e^{2Jt}\widetilde{g_k}(0) - \overline{g}\right| ; \left|e^{-2Jt}\widetilde{g_k}(0) - \overline{g}\right|\right\} \\
&\leq \max\left\{e^{2Jt}\left|\widetilde{g_k}(0) - \overline{g}\right| + \left|e^{2Jt}\overline{g} - \overline{g}\right| ; e^{-2Jt}\left|\widetilde{g_k}(0) - \overline{g}\right| + \left|e^{-2Jt}\overline{g} - \overline{g}\right|\right\} \\
&\leq \max\left\{e^{2Jt}H + \left|e^{2Jt}\overline{g} - \overline{g}\right| ; e^{-2Jt}H + \left|e^{-2Jt}\overline{g} - \overline{g}\right|\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\left\{e^{2Jt}H + \left|e^{2Jt}-1\right| |\overline{g}| \,; e^{-2Jt}H + \left|e^{-2Jt}-1\right| |\overline{g}|\right\}\\
&\leq \sup_{t\in[\alpha,\beta]\subset(a,b)} \max\left\{e^{2Jt}H + \left|e^{2Jt}\overline{g}-\overline{g}\right| ; e^{-2Jt}H + \left|e^{-2Jt}\overline{g}-\overline{g}\right|\right\} =: \Theta
\end{aligned}
$$

Portanto $|\widetilde{g_k}(t) - \overline{g}|$ é uniformemente limitado em subconjuntos compactos de (a,b). Para limitar as derivadas, vamos aplicar, para cada k, a equação de evolução (4.4) deduzida na demonstração do teorema de existência em longos períodos de tempo:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}^q \widetilde{g_k} = \sum_{j_0+j_1+\ldots+j_m=q} \nabla^{j_0} R^{\widetilde{g_k}} * \overline{\nabla}^{j_1}\widetilde{g_k} * \ldots * \overline{\nabla}^{j_m}\widetilde{g_k}. \tag{5.1}
$$

No caso $q=1$, a expressão acima se resume ao seguinte:

$$
\left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}\widetilde{g_k}\right| \leq C\left(1 + \left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k}\right|\right) \leq C\left(1 + \left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k} - \overline{\nabla}\overline{g}\right| + \left|\overline{\nabla}\overline{g}\right|\right)
$$

onde C depende de K e de ε, mas não de k. Como os extremos de (a,b) são finitos e $\overline{\nabla}\widetilde{g_k}(0) \overset{k\to\infty}{\to} \overline{\nabla}\overline{g}$, que é limitado em subconjuntos compactos de $\overline{M}$, isso implica que $\left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k}(t)\right| \leq \widetilde{\Delta}$ independente de k. De fato, primeiramente vamos mostrar que $|\widetilde{g_k}(t) - \overline{g}| \leq \Theta$ implica que $\left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k} - \overline{\nabla}\overline{g}\right| \leq \widetilde{\Theta}$. Isso ocorre pois a aplicação $\overline{\nabla} : \mathcal{T}_0^2\left(\overline{M}\right) \to \mathcal{T}_0^3\left(\overline{M}\right)$ é contínua. Suponhamos que $\left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k} - \overline{\nabla}\overline{g}\right|$ não possua um limitante que independe de k. Logo, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $k_n\in\mathbb{N}$ tal que

$$
\left|\overline{\nabla}\widetilde{g_{k_n}} - \overline{\nabla}\overline{g}\right| > n.
$$

Mas notemos que

$$
|\widetilde{g_k}| = |\widetilde{g_k} - \overline{g} + \overline{g}| \leq |\widetilde{g_k} - \overline{g}| + |\overline{g}| \leq \Theta + |\overline{g}|,
$$

isto é, $\{\widetilde{g_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ está contido no disco de centro 0 ((2,0) - tensor nulo) e raio $\Theta + |\overline{g}|$, que é um compacto de $\mathcal{T}_0^2\left(\overline{M}\right)$. Portanto, a menos de tomar uma subsequência, podemos supor que $\widetilde{g_{k_n}} \to y \in \mathcal{T}_0^2\left(\overline{M}\right)$. Nesse caso, seja

$$
J := \left|\overline{\nabla}y - \overline{\nabla}\overline{g}\right|.
$$

Segue que existe $k_J\in\mathbb{N}$ tal que $\left|\overline{\nabla}\widetilde{g_{k_J}} - \overline{\nabla}\overline{g}\right| > J$. Portanto definitivamente a sequência $\widetilde{g_{k_n}}$ é tal que

$$
\left|\overline{\nabla}\widetilde{g_{k_n}} - \overline{\nabla}\overline{g}\right| > J+1,
$$

mas tomando o limite vemos que

$$J+1 \leq \lim_{n\to\infty} \left|\overline{\nabla}\widetilde{g_{k_n}} - \overline{\nabla}\overline{g}\right| = \left|\overline{\nabla}y - \overline{\nabla}\overline{g}\right| = J,$$

o que é um absurdo. Logo existe $\widetilde{\Theta} > 0$ (independente de k) tal que $\left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k} - \overline{\nabla}\overline{g}\right| \leq \widetilde{\Theta}$.

E com isso,

$$\begin{aligned}
\left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k}(t) - \overline{\nabla}\widetilde{g_k}(0)\right| &\leq \sup_{\theta\in(0,t)} \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}\widetilde{g_k}\right)(\theta)\right| |t-0| \leq |t| \sup_{\theta\in(0,t)} \left|C\left(1+\left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k} - \overline{\nabla}\overline{g}\right| + \left|\overline{\nabla}\overline{g}\right|\right)(\theta)\right| \\
&\leq |t|\, C \left|\left(1+\left\{\sup_{\theta\in(0,t)} \left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k} - \overline{\nabla}\overline{g}\right|(\theta)\right\} + \left|\overline{\nabla}\overline{g}\right|\right)\right| \\
&\leq |t|\, C \left|\left(1+\widetilde{\Theta} + \left|\overline{\nabla}\overline{g}\right|\right)\right| \\
&\leq \Delta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

E assim,

$$\left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k}(t)\right| \leq \left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k}(t) - \overline{\nabla}\widetilde{g_k}(0)\right| + \left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k}(0)\right| \leq \Delta + \left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k}(0)\right| \leq \Delta + \left|\overline{\nabla}\widetilde{g_k}(0) - \overline{\nabla}\overline{g}\right| + \left|\overline{\nabla}\overline{g}\right| =: \widetilde{\Delta} \in \mathbb{R}$$

Procedendo por indução em q: Suponha que $\left|\overline{\nabla}^j \widetilde{g_k}(t)\right|$ é limitado por uma constante que independe de k, para todo $j = 1, ..., q$. A expressão (5.1) nos dá novamente que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{\nabla}^{q+1}\widetilde{g_k}\right| \leq C\left(1+\left|\overline{\nabla}^{q+1}\widetilde{g_k}\right|\right),$$

que implica em uma limitação independente de k em $Z\times[a+\varepsilon, b)$. Note que as derivadas na direção do tempo também são limitadas (basta olhar a expressão acima e usar a limitação de $\left|\overline{\nabla}^{q+1}\widetilde{g_k}\right|$). Segue do teorema de Arzelà-Ascoli (na forma do Corolário 5.1) que existe uma subsequência que converge em C^∞ em $Z\times[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ (subconjunto compacto) Como todo subconjunto compacto de $\overline{M}\times(a,b)$ está contido em um conjunto da forma $Z\times[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, provamos que $\{(M_k, g_k(t), O_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge no sentido de Cheeger-Gromov para uma variedade $\left(\overline{M}, \overline{g}(t), \overline{O}\right)$. ■

Procedimento "Blow Up"

Aplicaremos os resultados de compacidade deste capítulo, em particular o Teorema 5.2, a uma solução do fluxo de Ricci com um tempo de existência máximo finito T . Como a curvatura explode nesta situação, precisamos escolher uma sequência de $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \overset{i\to\infty}{\to} T$ e reescalonar a métrica para tornar as curvaturas limitadas. Ao fazer isso, esperamos que a variedade limitante nos informe sobre a natureza da singularidade e, talvez, algumas informações topológicas desejáveis.

Suponha que uma solução do fluxo de Ricci $(M, g(t))$ exista em um intervalo maximal $[0, T)$ com $T < \infty$. Pelo Teorema 4.2

$$\limsup_{t \to T} |R|(\cdot, t) = +\infty,$$

portanto o máximo valor de $|R|$ na variedade compacta M explode para $+\infty$ quando $t \to T$. Nesse caso, escolha $O_i \in M$ e tempos $t_i \to T$ tais que

$$Q_i := |R|(O_i, t_i) = \max_{(x,t) \in M \times [0, t_i]} |R|(x, t).$$

Aplicando o reescalonamento parabólico do fluxo de Ricci discutido na Seção 1.1, vamos definir

$$g_i(t) := Q_i^{-1} g\left(t_i + Q_i^{-1} t\right)$$

tal que $(M, g_i(t))$ satisfaz o fluxo de Ricci no intervalo $[-t_i Q_i, (T - t_i) Q_i]$. Para cada i e cada $t \leq 0$ temos que:

$$\left|R^{g_i(t)}\right| = \left|R^{Q_i^{-1} g\left(t_i + Q_i^{-1} t\right)}\right| = \frac{1}{Q_i} \left|R^{g\left(t_i + Q_i^{-1} t\right)}\right| \leq 1 \tag{5.2}$$

pela definição de Q_i. Também observe que, para cada i e cada $t > 0$:

$$\sup_M \left|R^{g_i(t)}\right| \leq \frac{1}{\left|\frac{C(n)t}{2} - 1\right|} \qquad \text{(independe de } i\text{)}, \tag{5.3}$$

(basta utilizar a expressão (3.14) com $K = 1$ devido a expressão (5.2)). Portanto $g_i(t)$ é tal que

$$\sup_i \sup_{M \times (a,b)} \left|R^{g_i(t)}\right| < \infty,$$

onde $a < 0$ (onde a curvatura foi controlada em (5.2)) e $b = b(n) \in \left(0, \frac{2}{C(n)}\right)$ (b depende de n é escolhido de modo que o limitante em (5.3) não vá para o infinito). Nesse caso, a sequência $\{(M, g_i(t), O_i), t \in (a, b)\}$ possui uma geometria uniformemente limitada. Segue do Teorema 5.2 que, passando uma subsequência se necessário for, vemos que $\{(M, g_i(t), O_i)\} \overset{k \to \infty}{\to} (M_\infty, g_\infty(t), O_\infty)$, uma solução pontuada completa do fluxo de Ricci, para todo $t \in (a, b)$, desde que possamos estabelecer um limitante inferior uniforme para os raios de injetividade de O_k, para todo k.

Capítulo 6

O $\mathcal{F}$-Funcional e os Fluxos Gradientes

Esse é um capítulo mais técnico e tem como objetivo preparar o leitor para entender os conceitos e demonstrações do capítulo seguinte. Introduziremos o conceito de $\mathcal{F}$-Funcional bem como suas propriedades A junção desse capítulo com o próximo nos possibilita entender que soluções do fluxo de Ricci não colapsam e que podemos modificar a métrica solução desse mesmo fluxo de modo a produzir uma solução completa, isto é, definida em um intervalo ilimitado.

6.1 Fluxo Gradiente

Vamos introduzir o **fluxo gradiente** associado a um funcional de energia em termos gerais. O conceito surge naturalmente da física, das equações diferenciais, da análise numérica e de outras áreas relacionadas.

Definição 6.1 *Se $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço de Hilbert com um funcional suave $E : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, o campo gradiente, $\nabla E : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, é dado em cada $u \in \mathcal{H}$ pelo único vetor $\nabla E(u) \in \mathcal{H}$ tal que*

$$\langle \nabla E(u), v \rangle = dE_u.v,$$

para todo $v \in \mathcal{H}$.

Uma consequência direta dessa definição é que $\|dE_u\| = \|\nabla E(u)\|$, para todo $u \in \mathcal{H}$. De fato, se $\nabla E(u) = 0$, então a igualdade é imediata. Vamos trabalhar no caso em que $\nabla E(u) \neq 0$. Se $v \in \mathcal{H}$ é tal que $\|v\| = 1$, então segue da desigualdade Cauchy-Schwarz que

$$|dE_u.v| = |\langle \nabla E(u), v \rangle| \leq \|\nabla E(u)\| \|v\| = \|\nabla E(u)\|,$$

e portanto,

$$\|dE_u\| \leq \|\nabla E\,(u)\|$$

Por outro lado, tome $\frac{\nabla E(u)}{\|\nabla E(u)\|} \in \mathcal{H}$. Logo

$$\begin{aligned}
\|\nabla E\,(u)\| &= \frac{\langle \nabla E\,(u)\,, \nabla E\,(u)\rangle}{\|\nabla E\,(u)\|} = \left\langle \nabla E\,(u)\,, \frac{\nabla E\,(u)}{\|\nabla E\,(u)\|}\right\rangle = dE_u.\left(\frac{\nabla E\,(u)}{\|\nabla E\,(u)\|}\right) \\
&\leq \left| dE_u.\left(\frac{\nabla E\,(u)}{\|\nabla E\,(u)\|}\right)\right| \leq \sup_{\|v\|=1} |dE_u.v| = \|dE_u\|\,.
\end{aligned}$$

Mais ainda, ∇E define um **fluxo gradiente** $\Phi : \mathcal{H} \times I \to \mathcal{H}$, em que $I \subset \mathbb{R}$, dado pela seguinte EDO:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi_u(t) = -\nabla E\,(\Phi_u(t)) \\ \Phi_u(0) = u \end{cases},$$

para todo $u \in \mathcal{H}$. Para interpretar esse fluxo, observe que as curvas integrais com respeito ao gráfico $Gr(E) = \{(u, E(u)) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}\}$ são caminhos com uma "descida mais íngreme". De fato, se $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ é uma curva em $\mathcal{H}$, então

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = dE_u.(u'(t)) = \left\langle \nabla E\,(u(t))\,, u'(t)\right\rangle \geq -\|\nabla E\,(u(t))\|\,\left\|u'(t)\right\|,$$

onde a última desigualdade decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Além disso, vê-se que a igualdade ocorre se e somente se $u'(t) = -\lambda\nabla E(u(t))$, $\lambda > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
dE_u.(u'(t)) &= -\|\nabla E\,(u(t))\|\,\left\|u'(t)\right\| \\
&\Leftrightarrow\ dE_u.\left(\frac{u'(t)}{\|u'(t)\|}\right) = -\|\nabla E\,(u(t))\| = -\frac{\langle \nabla E\,(u)\,, \nabla E\,(u)\rangle}{\|\nabla E\,(u)\|} \\
&= \left\langle \nabla E\,(u)\,, -\frac{\nabla E\,(u)}{\|\nabla E\,(u)\|}\right\rangle = dE_u.\left(-\frac{\nabla E\,(u)}{\|\nabla E\,(u)\|}\right).
\end{aligned}$$

Em particular, note que a derivada de $E \circ \Phi_u$ é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\Phi_u(t)) &= dE_u.(\Phi'_u(t)) \\
&= \left\langle \nabla E\,(\Phi_u(t))\,, \Phi'_u(t)\right\rangle \\
&= \langle \nabla E\,(\Phi_u(t))\,, -\nabla E\,(\Phi_u(t))\rangle \\
&= -\|\nabla E\,(\Phi_u(t))\|^2\,,
\end{aligned}$$

logo vemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(u(t_0)) &\geq -\left\|\nabla E\left(u(t_0)\right)\right\|\left\|u'(t_0)\right\| = -\left\|\nabla E\left(u(t_0)\right)\right\|\left\|\Phi_u'(t_0)\right\| = -\left\|\nabla E\left(\Phi_u(t_0)\right)\right\|^2 \\ &= \frac{d}{dt}E(\Phi_u(t_0)),\end{aligned}$$

para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ e toda curva $u\left(t\right)$ tal que $\left\|u'\left(t_0\right)\right\| = \left\|\Phi_u'(t_0)\right\|$.

Considere (M, g) uma variedade riemanniana. Temos o seguinte produto interno de formas bilineares simétricas:

$$\left\langle h, h'\right\rangle_{L^2} := \int_M \left\langle h, h'\right\rangle d\mu\left(g\right) = \int_M \sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ik}g^{jl}h_{ij}h'_{kl}d\mu\left(g\right), \tag{6.1}$$

onde $\langle h, h'\rangle$ é o produto interno de tensores usual (para mais detalhes, veja o Exemplo A.5). Ela é comumente referida como **métrica riemanniana canônica** no espaço das métricas riemannianas $\mathfrak{Met}$.

De modo análogo, se $X, Y \in \mathfrak{X}\left(M\right)$, definimos o seguinte produto interno:

$$\langle X, Y\rangle_{L^2} := \int_M g\left(X, Y\right) d\mu\left(g\right).$$

Por fim, se $f, h \in C^\infty\left(M\right)$, definimos o seguinte produto interno:

$$\langle f, h\rangle_{L^2} := \int_M \left(fh\right) d\mu\left(g\right).$$

Utilizamos a mesma notação, porém o contexto nos dirá se o produto interno é de formas bilineares simétricas, de campos vetoriais ou simplesmente de funções suaves em M.

O fluxo gradiente mais natural em EDP é o que está associado ao **funcional de energia de Dirichlet**: Uma aplicação $E : C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{R}$ que é definida pelo seguinte**:**

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla u\right|^2 dx = \frac{1}{2}\left\|\nabla u\right\|_{L^2}^2,$$

De fato, pela Proposição A.23 no item c) e pelo Teorema de Schwarz, se u é suave em $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ e em $t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(u(t)) &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla u\right|^2 dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \langle\nabla u, \nabla u\rangle\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} 2\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\nabla u, \nabla u\right\rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\nabla u, \nabla u\right\rangle dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} u \right), \nabla u \right\rangle dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} \triangle u dx \\
&= \left\langle -\triangle u, \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, de modo formal, o fluxo gradiente é a **equação de calor** padrão $\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u$. Observe que esse exemplo (em comum com a maioria dos outros exemplos que surgem em EDP e cálculo de variações) não se encaixa perfeitamente na estrutura de fluxo gradiente definida acima, uma vez que a energia E nem é definida no espaço de Hilbert $L^2(C^\infty(\mathbb{R}^n))$ (para mais detalhes veja a Seção E.0.3). Podemos entender E no espaço menor $L^2(C^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap C^\infty(C^\infty(\mathbb{R}^n))$, mas neste espaço o produto interno não é completo e E não é diferenciável no sentido de Fréchet (para mais detalhes veja a Seção C). De fato, usando a Proposição A.23 vemos que

$$\begin{aligned}
E(u+v) - E(u) - (\delta_v E)(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u+v)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} v \triangle u dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u+v)|^2 - |\nabla u|^2 + 2v\triangle u dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u + \nabla v, \nabla u + \nabla v\rangle - |\nabla u|^2 + 2v\triangle u dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 + 2\langle \nabla u, \nabla v\rangle + 2v\triangle u dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx,
\end{aligned}$$

que não é necessariamente limitado nem se $\|v\|_{L^2} \to 0$ em $L^2(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$, muito menos se dividirmos ambos os lados por $\|v\|_{L^2}$ e fizermos $\|v\|_{L^2} \to 0$. Contudo E é Gâteaux diferenciável (para mais detalhes veja a Seção C) neste espaço, e a derivada $(\delta_v E)(u)$ é uma aplicação contínua na norma de L^2, então o vetor gradiente ainda está bem definido.

Funcional de Einstein-Hilbert

Seja (M, g) uma variedade riemanniana fechada (compacta e sem bordo). Um dos funcionais mais naturais que podemos construir em $\mathfrak{Met}$ é o chamado **funcional de Einstein-Hilbert** $E : \mathfrak{Met} \to \mathbb{R}$ que é a integral da curvatura escalar:

$$E(g) := \int_M S d\mu$$

Vamos calcular a variação de E em g na direção de $h = \frac{dg}{dt}$. Usando o fato de M ser compacto e as

Proposições 1.4 e 1.8 obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\delta_h E(g) &= \delta_h \int_M S d\mu = \int_M \delta_h (S d\mu) = \int_M (\delta_h S)\, d\mu + \int_M S\,(\delta_h d\mu) \\
&= \int_M \left\{-\triangle (Tr_g h) + \left(\delta^2 h\right) - \langle h, Ric\rangle\right\} d\mu + \int_M \frac{S}{2}\,(Tr_g h)\, d\mu \\
&= \int_M \left\{-\operatorname{div}(\nabla (Tr_g h)) + \operatorname{div}(\operatorname{div} h) - \langle h, Ric\rangle\right\} d\mu + \int_M \frac{S}{2}\,(Tr_g h)\, d\mu
\end{aligned}$$

Usando que M não possui bordo e o Teorema da Divergência (para mais detalhes veja o Teorema A.8), obtemos

$$\begin{aligned}
dE_g.h &= \delta_h E(g) = \int_M \left\{-\operatorname{div}(\nabla (Tr_g h)) + \operatorname{div}(\operatorname{div} h) - \langle h, Ric\rangle\right\} d\mu + \int_M \frac{S}{2}\,(Tr_g h)\, d\mu \\
&= -\int_M \langle h, Ric\rangle\, d\mu + \int_M \frac{S}{2}\,(Tr_g h)\, d\mu = -\int_M \langle h, Ric\rangle\, d\mu + \int_M \frac{S}{2}\,\langle h, g\rangle\, d\mu \\
&= \int_M \left\langle h, \frac{S}{2} g - Ric \right\rangle d\mu \\
&= \left\langle h, \frac{S}{2} g - Ric \right\rangle_{L^2},
\end{aligned}$$

É importante notar que o termo $\frac{S}{2}g$ é devido à variação do elemento de volume $d\mu$. Segue da expressão acima e da definição do gradiente que

$$\nabla E = \frac{S}{2} g - Ric.$$

Logo, o fluxo (do dobro do) gradiente de E é dado por

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = 2\,(\nabla E)_{ij} = S g_{ij} - 2Ric_{ij}.$$

Note que esta equação é similar ao fluxo de Ricci (a menos do termo $S g_{ij}$).

6.2 O $\mathcal{F}$-funcional

Considere uma variedade riemanniana fechada M. Para superar os problemas associados ao funcional de Einstein-Hibert, consideremos um **funcional** $\mathcal{F}$ no espaço $\mathfrak{Met} \times C^\infty(M)$, definido por

$$\mathcal{F}(g, f) := \int_M \left(S + |\nabla f|^2\right) e^{-f} d\mu.$$

É importante notar que $\mathcal{F}$ também pode ser escrita como

$$\mathcal{F}(g,f)=\int_M (S+\triangle f)\,e^{-f}d\mu$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
\triangle\left(e^{-f}\right) &= Tr_g\left(\nabla^2\left(e^{-f}\right)\right)=\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\nabla^2\left(e^{-f}\right)(\partial_i,\partial_j)=\sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(\nabla_{\partial_i}\left(\nabla e^{-f}\right),\partial_j\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(\nabla_{\partial_i}\left(\sum_{k,l=1}^n g^{kl}\partial_k\left(e^{-f}\right)\partial_l\right),\partial_j\right)=\sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(\nabla_{\partial_i}\left(-\sum_{k,l=1}^n g^{kl}\partial_k(f)\,e^{-f}\partial_l\right),\partial_j\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(\nabla_{\partial_i}\left(-e^{-f}\sum_{k,l=1}^n g^{kl}\partial_k(f)\,\partial_l\right),\partial_j\right)=\sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(\nabla_{\partial_i}\left(-e^{-f}\nabla f\right),\partial_j\right)\\
&= -\sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(\partial_i\left(e^{-f}\right)\nabla f+e^{-f}\nabla_{\partial_i}(\nabla f),\partial_j\right)=-\sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(-\partial_i(f)\,e^{-f}\nabla f+e^{-f}\nabla_{\partial_i}(\nabla f),\partial_j\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(\partial_i(f)\,e^{-f}\nabla f,\partial_j\right)-e^{-f}\sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(\nabla_{\partial_i}(\nabla f),\partial_j\right)\\
&= e^{-f}\sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(\partial_i(f)\,\nabla f,\partial_j\right)-e^{-f}\triangle f=e^{-f}\sum_{i,j=1}^n g^{ij}g\left(\partial_i(f)\sum_{k,l=1}^n g^{kl}\partial_k(f)\,\partial_l,\partial_j\right)-e^{-f}\triangle f.
\end{aligned}$$

Pela linearidade da métrica, segue que

$$\begin{aligned}
\triangle\left(e^{-f}\right) &= e^{-f}\sum_{i,j,k,l=1}^n \partial_i(f)\,g^{kl}\partial_k(f)\,g^{ij}g_{lj}-e^{-f}\triangle f\\
&= e^{-f}\sum_{i,k,l=1}^n \partial_i(f)\,g^{kl}\partial_k(f)\,\delta_{il}-e^{-f}\triangle f\\
&= e^{-f}\sum_{i,k=1}^n g^{ki}\partial_i(f)\,\partial_k(f)-e^{-f}\triangle f.
\end{aligned}$$

Mas notemos também que

$$\begin{aligned}
|\nabla f|^2 &= \left\langle\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\partial_j(f)\,\partial_i,\sum_{k,l=1}^n g^{kl}\partial_k(f)\,\partial_l\right\rangle\\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij}\partial_j(f)\,g^{kl}\partial_k(f)\,g_{il}\\
&= \sum_{j,k=1}^n g^{kj}\partial_j(f)\,\partial_k(f)\,,
\end{aligned}$$

ou seja, acabamos de mostrar que o laplaciano de e^{-f} é dado pela seguinte expressão:

$$\triangle\left(e^{-f}\right) = e^{-f}\sum_{i,k=1}^{n} g^{ki}\partial_i(f)\,\partial_k(f) - e^{-f}\triangle f = e^{-f}\left|\nabla f\right|^2 - e^{-f}\triangle f = \left(\left|\nabla f\right|^2 - \triangle f\right)e^{-f}. \tag{6.2}$$

Como M não tem bordo, segue do Teorema da Divergência que

$$\int_M \left(\left|\nabla f\right|^2 - \triangle f\right)e^{-f}d\mu = \int_M \triangle\left(e^{-f}\right)d\mu = \int_M \operatorname{div}\nabla\left(e^{-f}\right)d\mu = 0,$$

ou seja, temos a seguinte igualdade:

$$\int_M \left|\nabla f\right|^2 e^{-f}d\mu = \int_M (\triangle f)\,e^{-f}d\mu.$$

Observação 6.1 *Temos algumas propriedades elementares de simetrias associadas a $\mathcal{F}$:*

1. *A primeira delas é que $\mathcal{F}$ é invariante por difeomorfismos: Seja M uma variedade riemanniana fechada e φ um difeomorfismo de M, então $\mathcal{F}(\varphi^* g, f\circ\varphi) = \mathcal{F}(g,f)$.*

   De fato, façamos as seguintes notações:

$$\widetilde{M} = (M, \varphi^* g) \qquad e \qquad \widetilde{S}(x) = S^{\varphi^* g}(x) = S(\varphi(x)).$$

   Temos que $d\varphi_x.\widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)(x) = (\nabla f)(\varphi(x))$. Com efeito, por um lado, a definição de gradiente nos diz que

$$g\left((\nabla f)(\varphi(x)), X(\varphi(x))\right) = X(\varphi(x))(f).$$

   Por outro lado,

$$\begin{aligned}
g\left(d\varphi_x.\widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)(x), X(\varphi(x))\right) &= g\left(d\varphi_x.\widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)(x), d\varphi_x\left(d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)))\right)\right)\\
&= \varphi^*_x g\left(\widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)(x), d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)))\right)\\
&= d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)))(f\circ\varphi) = d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)))(f\circ\varphi)\\
&= d(f\circ\varphi)_x\left(d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)))\right)\\
&= df_{\varphi(x)}\circ d\varphi_x\left(d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)))\right)\\
&= df_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)))\\
&= X(\varphi(x))(f).
\end{aligned}$$

Usando esse fato, vemos que

$$\begin{aligned}
\|(\nabla f)(\varphi(x))\|_g^2 &= \left\| d\varphi_x . \widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)(x)\right\|_g^2 = g\left(d\varphi_x.\widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)(x), d\varphi_x.\widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)(x)\right) \\
&= (\varphi^* g)\left(\widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)(x), \widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)(x)\right) \\
&= \left\|\widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)\right\|_{\varphi^* g}^2 .
\end{aligned}$$

Assim, fazendo a mudança de váriáveis e usando as igualdades acima, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g,f) &= \int_M \left(S + |\nabla f|_g^2\right) e^{-f} d\mu(g) = \int_{\widetilde{M}} \left\{\left(S + |\nabla f|_g^2\right) e^{-f}\right\} \circ \varphi d\mu(\varphi^* g) \\
&= \int_{\widetilde{M}} \left\{\left(S\circ\varphi + |\nabla f|_g^2 \circ \varphi\right) e^{-f\circ\varphi}\right\} d\mu(\varphi^* g) \\
&= \int_{\widetilde{M}} \left\{\left(S\circ\varphi + |(\nabla f)\circ\varphi|_g^2\right) e^{-f\circ\varphi}\right\} d\mu(\varphi^* g) \\
&= \int_{\widetilde{M}} \left\{\left(S\circ\varphi + \left\|\widetilde{\nabla}(f\circ\varphi)\right\|_{\varphi^* g}\right) e^{-f\circ\varphi}\right\} d\mu(\varphi^* g) \\
&= \mathcal{F}(\varphi^* g, f\circ\varphi).
\end{aligned}$$

2. *A segunda propriedade é o comportamento de escala: Para todos os escalares $b, c > 0$, temos que $\mathcal{F}\left(c^2 g, f+b\right) = c^{n-2} e^{-b} \mathcal{F}(g,f)$.*

   De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(c^2 g, f+b\right) &= \int_M \left(S^{c^2 g} + |\nabla(f+b)|_{c^2 g}^2\right) e^{-f-b} d\mu\left(c^2 g\right) \\
&= \int_M \left(c^{-2} S^g + |\nabla f|_{c^2 g}^2\right) e^{-f-b} \sqrt{\det\left(c^2 g\right)_{ij}} dx_1 ... dx_n \\
&= \int_M \left(c^{-2} S^g + |\nabla f|_{c^2 g}^2\right) e^{-f-b} \sqrt{c^{2n} \det(g_{ij})} dx_1 ... dx_n \\
&= e^{-b} \int_M \left(c^{-2} S^g + c^2 g(\nabla f, \nabla f)\right) e^{-f} c^n \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 ... dx_n \\
&= e^{-b} \int_M \left(c^{-2} S^g + c^2 g\left(\sum_{i,j=1}^n \left(c^2 g\right)^{ij} (\partial_i f)\partial_j, \sum_{k,l=1}^n \left(c^2 g\right)^{kl} (\partial_k f)\partial_l\right)\right) e^{-f} c^n d\mu(g) \\
&= e^{-b} \int_M \left(c^{-2} S^g + c^2 g\left(\sum_{i,j=1}^n c^{-2} g^{ij} (\partial_i f)\partial_j, \sum_{k,l=1}^n c^{-2} g^{kl} (\partial_k f)\partial_l\right)\right) e^{-f} c^n d\mu(g).
\end{aligned}$$

Colocando c^{-2} em evidência, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(c^2 g, f+b\right) &= e^{-b}\int_M\left(c^{-2}S^g + c^{-2}g\left(\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\left(\partial_i f\right)\partial_j, \sum_{k,l=1}^n g^{kl}\left(\partial_k f\right)\partial_l\right)\right)e^{-f}c^n d\mu\left(g\right)\\
&= e^{-b}\int_M\left(c^{-2}S^g + c^{-2}g\left(\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\left(\partial_i f\right)\partial_j, \sum_{k,l=1}^n g^{kl}\left(\partial_k f\right)\partial_l\right)\right)e^{-f}c^n d\mu\left(g\right)\\
&= e^{-b}\int_M\left(c^{-2}S^g + c^{-2}g\left(\nabla f, \nabla f\right)\right)e^{-f}c^n d\mu\left(g\right)\\
&= e^{-b}c^{n-2}\int_M\left(S^g + g\left(\nabla f, \nabla f\right)\right)e^{-f}d\mu\left(g\right)\\
&= e^{-b}c^{n-2}\mathcal{F}\left(g,f\right).
\end{aligned}$$

Agora vamos obter uma expressão para a variação do $\mathcal{F}$-funcional:

Proposição 6.1 (Variação de $\mathcal{F}$) *Em uma variedade riemanniana fechada M, a variação de $\mathcal{F}$ é dada pela seguinte expressão:*

$$\delta_{(h,k)}\mathcal{F}\left(g,f\right) = -\int_M\left\langle Ric + Hess\left(f\right), h\right\rangle e^{-f}d\mu + \int_M\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k\right)\left(2\triangle f - \left|\nabla f\right|^2 + S\right)e^{-f}d\mu,$$

em que $\delta_{(h,k)}\mathcal{F}\left(g,f\right)$ denota $\frac{d}{ds}_{|s=0}\mathcal{F}\left(g+sh, f+sk\right)$.

Demonstração. Seja $v=(h,k)$ o vetor no qual vamos fazer a derivada direcional. Segue da definição da variação acima que

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k)}\mathcal{F}\left(g,f\right) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathcal{F}\left(g,f\right)\right) = \frac{\partial}{\partial v}\int_M\left(S+\left|\nabla f\right|^2\right)e^{-f}d\mu \qquad (6.3)\\
&= \int_M\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(S+\left|\nabla f\right|^2\right)e^{-f}d\mu\right\}\\
&= \int_M\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(S+\left|\nabla f\right|^2\right)\right\}e^{-f}d\mu + \left(S+\left|\nabla f\right|^2\right)\frac{\partial}{\partial v}\left\{e^{-f}d\mu\right\}.
\end{aligned}$$

Segue da Proposição 1.8 que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(e^{-f}d\mu\right)\left(f,g\right)\right\} &= \frac{d}{ds}_{|s=0}\left\{e^{-(f+sk)}d\mu\left(g+sh\right)\right\}\\
&= \left\{\frac{d}{ds}e^{-(f+sk)}\right\}d\mu\left(g+sh\right)_{|s=0} + e^{-(f+sk)}\frac{d}{ds}\left\{d\mu\left(g+sh\right)\right\}_{|s=0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{-ke^{-(f+sk)}d\mu\left(g+sh\right)+e^{-(f+sk)}\frac{1}{2}\left(Tr_g h\right)d\mu\left(g+sh\right)\right\}_{|s=0}\\
&= -ke^{-f}d\mu\left(g\right)+e^{-f}\frac{1}{2}\left(Tr_g h\right)d\mu\left(g\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\left(Tr_g h\right)-k\right)e^{-f}d\mu\left(g\right).
\end{aligned}
$$

Além disso, segue da expressão (1.4) e do teorema de Schwarz que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}\left(|\nabla f|^2(f,g)\right) &= \delta_{(h,k)}\left(|\nabla f|^2(f,g)\right) = \delta_{(h,k)}\left(\left\langle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial_i(f)\,\partial_j,\ \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl}\partial_k(f)\,\partial_l\right\rangle(f,g)\right)\\
&= \delta_{(h,k)}\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{n} g^{ij}g^{kl}\partial_k(f)\,\partial_i(f)\,g_{jl}(f,g)\right) = \delta_{(h,k)}\left(\sum_{i,k,l=1}^{n} g^{kl}\partial_k(f)\,\partial_i(f)\,\delta_{il}(f,g)\right)\\
&= \delta_{(h,k)}\left(\sum_{i,k=1}^{n} g^{ki}\partial_k(f)\,\partial_i(f)\,(f,g)\right) = \frac{d}{ds}_{|s=0}\left(\sum_{i,k=1}^{n} g^{ki}\partial_k(f)\,\partial_i(f)\right)(f+sk,g+sh)\\
&= \frac{d}{ds}_{|s=0}\left(\sum_{i,k=1}^{n}(g+sh)^{ki}\,\partial_k(f+sk)\,\partial_i(f+sk)\right)\\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\frac{d}{ds}_{|s=0}\left\{(g+sh)^{ki}\right\}\partial_k(f+sk)\,\partial_i(f+sk)\\
&\quad+\sum_{i,k=1}^{n}(g+sk)^{ki}\,\frac{d}{ds}_{|s=0}\left\{\partial_k(f+sk)\,\partial_i(f+sk)\right\}
\end{aligned}
$$

Pela expressão (1.4) e pelo Teorema de Schwarz, temos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}\left(|\nabla f|^2(f,g)\right) &= \sum_{i,k=1}^{n}\left\{\sum_{a,b=1}^{n}-(g+sk)^{ia}(g+sk)^{kb}\,h_{ab}\partial_k(f+sk)\,\partial_i(f+sk)\right\}_{|s=0}\\
&\quad+\sum_{i,k=1}^{n}\left\{\sum_{a,b=1}^{n}(g+sk)^{ki}\left\{\frac{d}{ds}\left(\partial_k(f+sk)\right)\partial_i(f+sk)+\partial_k(f+sk)\,\frac{d}{ds}\left(\partial_i(f+sk)\right)\right\}\right\}_{|s=0}\\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\left\{\sum_{a,b=1}^{n}-(g+sk)^{ia}(g+sk)^{kb}\,h_{ab}\partial_k(f+sk)\,\partial_i(f+sk)\right\}_{|s=0}\\
&\quad+\sum_{i,k=1}^{n}\left\{\sum_{a,b=1}^{n}(g+sk)^{ki}\left\{\partial_k(k)\,\partial_i(f+sk)+\partial_k(f+sk)\,\partial_i(k)\right\}\right\}_{|s=0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,k=1}^{n} \left\{ \sum_{a,b=1}^{n} -g^{ia} g^{kb} h_{ab} \partial_k (f) \partial_i (f) + g^{ki} \partial_k (k) \partial_i (f) + g^{ki} \partial_k (f) \partial_i (k) \right\} \\
&= - \sum_{a,b,i,k=1}^{n} g^{ia} g^{kb} h_{ab} \partial_k (f) \partial_i (f) + 2 \sum_{i,k=1}^{n} g^{ki} \partial_i (k) \partial_k (f) \\
&= - \sum_{a,b,i,k=1}^{n} g^{ia} g^{kb} h_{ab} \partial_k (f) \partial_i (f) + 2 \langle \nabla k, \nabla f \rangle .
\end{aligned}
$$

Segue destas expressões que

$$
\begin{aligned}
\delta_{(h,k)} \mathcal{F}(g,f) &= \int_M \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \left(S + |\nabla f|^2 \right) \right\} e^{-f} d\mu + \left(S + |\nabla f|^2 \right) \frac{\partial}{\partial v} \left\{ e^{-f} d\mu \right\} \\
&= \int_M \left\{ -\triangle Tr_g h + \operatorname{div} (\operatorname{div} h) - \langle h, Ric \rangle - \sum_{a,b,i,k=1}^{n} g^{ia} g^{kb} h_{ab} \partial_k (f) \partial_i (f) + 2 \langle \nabla k, \nabla f \rangle \right\} e^{-f} d\mu \\
&\quad + \int_M \left(S + |\nabla f|^2 \right) \left(\frac{1}{2} (Tr_g h) - k \right) e^{-f} d\mu (g) .
\end{aligned}
$$

Pela expressão (6.2), e pela Proposição A.23 no item b) e do fato de M não possuir bordo que

$$
\int_M -\triangle (Tr_g h) e^{-f} d\mu = - \int_M (Tr_g h) \triangle e^{-f} d\mu = - \int_M (Tr_g h) \left(|\nabla f|^2 - \triangle f \right) e^{-f} d\mu.
$$

Notemos também que

$$
\nabla e^{-f} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \partial_i \left(e^{-f} \right) \partial_j = - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \partial_i (f) e^{-f} \partial_j = -e^{-f} \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \partial_i (f) \partial_j = -e^{-f} \nabla f.
$$

Portanto a Proposição A.23 no item c) e a expressão (6.2) nos mostra que

$$
\begin{aligned}
\int_M \langle \nabla k, \nabla f \rangle e^{-f} d\mu &= - \int_M \left\langle \nabla k, \nabla e^{-f} \right\rangle d\mu = - \left(- \int_M k \triangle e^{-f} d\mu \right) \\
&= \int_M k \triangle e^{-f} d\mu = \int_M k \left(|\nabla f|^2 - \triangle f \right) e^{-f} d\mu.
\end{aligned}
$$

Das duas expressões que conseguimos acima, vemos que

$$
\begin{aligned}
\int_M \left\{ -\triangle Tr_g h + 2 \langle \nabla k, \nabla f \rangle \right\} e^{-f} d\mu &= - \int_M (Tr_g h) \left(|\nabla f|^2 - \triangle f \right) e^{-f} d\mu + 2 \int_M k \left(|\nabla f|^2 - \triangle f \right) e^{-f} d\mu \\
&= \int_M (2k - Tr_g h) \left(|\nabla f|^2 - \triangle f \right) e^{-f} d\mu \\
&= 2 \int_M \left(k - \frac{Tr_g h}{2} \right) \left(|\nabla f|^2 - \triangle f \right) e^{-f} d\mu.
\end{aligned}
$$

Além disso, notemos que se $T \in \mathcal{T}_0^2(M)$ e $f \in C^\infty(M)$ então

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} fT)(\cdot) &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\nabla(fT)(\partial_i,\partial_j,\cdot) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\nabla_i(fT)(\partial_j,\cdot) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\nabla_i(fT(\partial_j,\cdot)) - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(fT)(\nabla_i\partial_j,\cdot) - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(fT)(\partial_j,\nabla_i\cdot) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\partial_i f)(T(\partial_j,\cdot)) + fg^{ij}\nabla_i(T(\partial_j,\cdot)) - f\sum_{i=1}^{n} g^{ij}T(\nabla_i\partial_j,\cdot) - f\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}T(\partial_j,\nabla_i\cdot) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\partial_i f)T(\partial_j,\cdot) + (f\operatorname{div}T)(\cdot) = T\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\partial_i f)\partial_j,\cdot\right) + (f\operatorname{div}T)(\cdot) \\
&= T(\nabla f,\cdot) + (f\operatorname{div}T)(\cdot) = T_{\nabla f}(\cdot) + (f\operatorname{div}T)(\cdot).
\end{aligned}$$

Segue disso que

$$\operatorname{div}\operatorname{div}(fT) = \operatorname{div}(T_{\nabla f} + f\operatorname{div}T) = \operatorname{div}(T_{\nabla f}) + \operatorname{div}(f\operatorname{div}T).$$

A expressão do segundo termo do lado direito é dada por

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\operatorname{div}T) &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\nabla(f\operatorname{div}T))_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(\nabla_i(f\operatorname{div}T))_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial_i((f\operatorname{div}T)(\partial_j)) - g^{ij}(f\operatorname{div}T)(\nabla_{\partial_i}\partial_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial_i(f)\operatorname{div}T(\partial_j) + fg^{ij}\partial_i((\operatorname{div}T)(\partial_j)) - fg^{ij}(\operatorname{div}T)(\nabla_{\partial_i}\partial_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial_i(f)\operatorname{div}T(\partial_j) + f\operatorname{div}\operatorname{div}T \\
&= \operatorname{div}T\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial_i(f)\partial_j\right) + f\operatorname{div}\operatorname{div}T \\
&= (\operatorname{div}T)(\nabla f) + f\operatorname{div}\operatorname{div}T,
\end{aligned}$$

ou seja, temos a seguinte igualdade:

$$\operatorname{div}\operatorname{div}(fT) = \operatorname{div}(T_{\nabla f}) + (\operatorname{div}T)(\nabla f) + f\operatorname{div}\operatorname{div}T.$$

Integrando em M em ambos os lados, usando o teorema da divergência e o fato de M não possuir bordo, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M \operatorname{div}\operatorname{div}(fT)\,d\mu = \int_M \operatorname{div}(T_{\nabla f})\,d\mu + \int_M (\operatorname{div}T)(\nabla f)\,d\mu + \int_M f\operatorname{div}\operatorname{div}T d\mu \\
&= \int_M (\operatorname{div}T)(\nabla f)\,d\mu + \int_M f\operatorname{div}\operatorname{div}T d\mu,
\end{aligned}$$

e logo vemos que

$$\int_M f\operatorname{div}\operatorname{div}T d\mu = -\int_M (\operatorname{div}T)(\nabla f)\,d\mu.$$

Vamos analisar a expressão a direita:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}T)(\nabla f) &= (\operatorname{div}T)\left(\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\partial_i(f)\,\partial_j\right) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\partial_i(f)(\operatorname{div}T)(\partial_j) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\partial_i(f)\sum_{a,b=1}^n g^{ab}(\nabla T)_{abj} \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^n g^{ij}\partial_i(f)\,g^{ab}(\nabla T)_{abj} = \sum_{i,j,a,b=1}^n g^{ij}\partial_i(f)\,g^{ab}(\nabla_a T)_{bj} \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^n g^{ij}\partial_i(f)\,g^{ab}(\partial_a(T_{bj})) - g^{ij}\partial_i(f)\,g^{ab}T(\nabla_{\partial_a}\partial_b,\partial_j) - g^{ij}\partial_i(f)\,g^{ab}T(\partial_b,\nabla_{\partial_a}\partial_j).
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{div}T$ é, a princípio, é o traço do operador $v\mapsto(\nabla T)(\cdot,\cdot,v)$, segue que em cada ponto, podemos tomar uma carta normal e obter uma expressão simplificada dela (afinal, o traço não depende da base escolhida), ou seja, tomando uma carta normal vemos que os termos $\nabla_{\partial_a}\partial_b$ e $\nabla_{\partial_a}\partial_j$ se anulam, e portanto:

$$(\operatorname{div}T)(\nabla f) = \sum_{i,j,a,b=1}^n g^{ij}\partial_i(f)\,g^{ab}(\partial_a(T_{bj})).$$

Além disso, usando que a primeira derivada da métrica se anula no ponto, vemos que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}T)(\nabla f) &= \sum_{i,j,a,b=1}^n g^{ij}\partial_i(f)\,g^{ab}(\partial_a(T_{bj})) \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^n \partial_a\left(g^{ij}\partial_i(f)\,g^{ab}T_{bj}\right) - \partial_a\left(g^{ij}\right)\partial_i(f)\,g^{ab}T_{bj} - \partial_a\left(g^{ab}\right)g^{ij}\partial_i(f)\,T_{bj} \\
&\quad - \sum_{i,j,a,b=1}^n g^{ij}\partial_a(\partial_i(f))\,g^{ab}T_{bj} \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^n \partial_a\left(g^{ij}\partial_i(f)\,g^{ab}T_{bj}\right) - g^{ij}g^{ab}\partial_a(\partial_i(f))\,T_{bj}.
\end{aligned}$$

Usando a expressão do determinante de uma matriz qualquer e o fato de que primeira derivada da métrica se anula no ponto, segue que $\partial_k\left(\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\right)=0$ no ponto central da carta normal. Portanto, segue desse fato, da expressão (A.36) para o divergente e do fato de que M é fechada, que

Mas segue do Teorema da Divergência que

$$\begin{aligned}
\int_M \sum_{i,j,a,b=1}^{n} \partial_a\left(g^{ij}\partial_i\left(f\right)g^{ab}T_{bj}\right)d\mu &= \int_M \sum_{a=1}^{n}\partial_a\left(\sum_{i,j,b=1}^{n} g^{ij}g^{ab}T_{bj}\partial_i\left(f\right)\right)d\mu \\
&= \int_M \sum_{a=1}^{n}\partial_a\left(\widetilde{X}^a\right)d\mu \\
&= \int_M \operatorname{div}\widetilde{X}d\mu \\
&= 0,
\end{aligned}$$

em que o campo $\widetilde{X}\in\mathfrak{X}\left(M\right)$ é dado pela seguinte expressão:

$$\widetilde{X}=\sum_{a=1}^{n}\widetilde{X}^a\partial_a=\sum_{a=1}^{n}\left(\sum_{i,j,b=1}^{n} g^{ij}g^{ab}T_{bj}\partial_i\left(f\right)\right)\partial_a.$$

Portanto, em um sistema de coordenadas qualquer, concluímos que

$$\left(\operatorname{div}T\right)\left(\nabla f\right)=-\sum_{i,j,a,b=1}^{n} g^{ij}g^{ab}\left(\nabla^2 f\right)_{ai}T_{bj}$$

Logo temos a seguinte expressão:

$$\int_M f\operatorname{div}\operatorname{div}Td\mu=-\int_M\left(\operatorname{div}T\right)\left(\nabla f\right)d\mu=\sum_{i,j,a,b=1}^{n}\int_M g^{ij}g^{ab}\partial_a\left(\partial_i\left(f\right)\right)T_{bj}d\mu.$$

Neste momento, podemos voltar ao nosso real problema fazendo as seguintes substituições: $T\leftrightarrow h$ e $f\leftrightarrow e^{-f}$. Logo

$$\begin{aligned}
\int_M e^{-f}\left(\operatorname{div}\left(\operatorname{div}h\right)\right)d\mu &= \sum_{i,j,a,b=1}^{n}\int_M g^{ij}g^{ab}\left(\nabla^2 e^{-f}\right)_{ai}h_{bj}=\sum_{i,j,a,b=1}^{n}\int_M g^{ij}g^{ab}\left(\left(\nabla_a\left(\nabla e^{-f}\right)\right)_i\right)h_{bj}d\mu \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n}\int_M g^{ij}g^{ab}\left(\nabla_a\left(\nabla_i e^{-f}\right)-\nabla_{\nabla_a\partial_i}e^{-f}\right)h_{bj}d\mu \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n}\int_M g^{ij}g^{ab}\left(\partial_a\partial_i\left(e^{-f}\right)-\left(\nabla_a\partial_i\right)\left(e^{-f}\right)\right)h_{bj}d\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} \int_M g^{ij} g^{ab} \left(-\partial_a \left(e^{-f} \partial_i f \right) - \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{ai}^{p} \partial_p \left(e^{-f} \right) \right) h_{bj} d\mu \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} \int_M g^{ij} g^{ab} \left(e^{-f} \partial_a (f) \partial_i (f) - e^{-f} \partial_a (\partial_i (f)) + \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{ai}^{p} \partial_p (f) e^{-f} \right) h_{bj} d\mu \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} \int_M e^{-f} g^{ij} g^{ab} \left(\partial_a (f) \partial_i (f) - \partial_a (\partial_i (f)) + \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{ai}^{p} \partial_p (f) \right) h_{bj} d\mu.
\end{aligned}
$$

Notemos que o produto interno entre a hessiana de f e h é dado pela seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
\langle Hess(f), h \rangle &= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} g^{ia} g^{jb} Hess(f)_{ij} h_{ab} \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} g^{ia} g^{jb} \langle \nabla_{\partial_i} (\nabla f), \partial_j \rangle h_{ab} \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} g^{ia} g^{jb} \left(\partial_i \langle (\nabla f), \partial_j \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{\partial_i} \partial_j \rangle \right) h_{ab} \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} g^{ia} g^{jb} \left(\partial_i \left\langle \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} (\partial_p f) \partial_q, \partial_j \right\rangle - \left\langle \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} (\partial_p f) \partial_q, \nabla_{\partial_i} \partial_j \right\rangle \right) h_{ab} \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} g^{ia} g^{jb} \left(\partial_i \left\langle \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} (\partial_p f) \partial_q, \partial_j \right\rangle - \left\langle \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} (\partial_p f) \partial_q, \sum_{u=1}^{n} \Gamma_{ij}^{u} \partial_u \right\rangle \right) h_{ab} \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} g^{ia} g^{jb} \left(\partial_i \left(\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} g_{qj} (\partial_p f) \right) - \sum_{p,q,u=1}^{n} g^{pq} \Gamma_{ij}^{u} (\partial_p f) g_{qu} \right) h_{ab} \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} g^{ia} g^{jb} \left(\partial_i ((\partial_j f)) - \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{ij}^{p} (\partial_p f) \right) h_{ab}.
\end{aligned}
$$

Segue desse raciocínio que

$$
\begin{aligned}
\int_M e^{-f} (\operatorname{div} (\operatorname{div} h)) d\mu &= \sum_{i,j,a,b=1}^{n} \int_M e^{-f} g^{ij} g^{ab} \partial_a (f) \partial_i (f) h_{bj} d\mu \\
&\quad - \int_M e^{-f} \langle Hess(f), h \rangle d\mu.
\end{aligned}
$$

E portanto temos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\delta_{(h,k)}\mathcal{F}(g,f) &= \int_M \left\{ -\triangle Tr_g h + \operatorname{div}(\operatorname{div} h) - \langle h, Ric\rangle - \sum_{a,b,i,k=1}^{n} g^{ia}g^{kb}h_{ab}\partial_k(f)\partial_i(f) + 2\langle \nabla k, \nabla f\rangle \right\} e^{-f}d\mu \\
&\quad + \int_M \left(S + |\nabla f|^2\right)\left(\frac{1}{2}(Tr_g h) - k\right) e^{-f} d\mu(g) \\
&= 2\int_M \left(k - \frac{Tr_g h}{2}\right)\left(|\nabla f|^2 - \triangle f\right) e^{-f} d\mu + \sum_{i,j,a,b=1}^{n} \int_M e^{-f} g^{ij} g^{ab} \partial_a(f)\partial_i(f) h_{bj} d\mu \\
&\quad - \int_M e^{-f}\langle Hess(f), h\rangle d\mu + \int_M \left\{ -\langle h, Ric\rangle - \sum_{a,b,i,k=1}^{n} g^{ia}g^{kb}h_{ab}\partial_k(f)\partial_i(f) \right\} e^{-f} d\mu \\
&\quad + \int_M \left(S + |\nabla f|^2\right)\left(\frac{1}{2}(Tr_g h) - k\right) e^{-f} d\mu \\
&= 2\int_M \left(k - \frac{Tr_g h}{2}\right)\left(|\nabla f|^2 - \triangle f\right) e^{-f} d\mu - \int_M e^{-f}\langle Hess(f), h\rangle d\mu \\
&\quad - \int_M \langle h, Ric\rangle e^{-f} d\mu + \int_M \left(S + |\nabla f|^2\right)\left(\frac{1}{2}(Tr_g h) - k\right) e^{-f} d\mu.
\end{aligned}
$$

Pela linearidade do produto interno, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\delta_{(h,k)}\mathcal{F}(g,f) &= 2\int_M \left(k - \frac{Tr_g h}{2}\right)\left(|\nabla f|^2 - \triangle f\right) e^{-f} d\mu - \int_M e^{-f}\langle Ric + Hess(f), h\rangle d\mu \\
&\quad + \int_M \left(S + |\nabla f|^2\right)\left(\frac{1}{2}(Tr_g h) - k\right) e^{-f} d\mu \\
&= \int_M \left\{ \left(\frac{Tr_g h}{2} - k\right)\left(2\triangle f - 2|\nabla f|^2\right) - \langle Ric + Hess(f), h\rangle \right\} e^{-f} d\mu \\
&\quad + \int_M \left\{ \left(S + |\nabla f|^2\right)\left(\frac{1}{2}(Tr_g h) - k\right) \right\} e^{-f} d\mu \\
&= \int_M \left\{ \left(\frac{Tr_g h}{2} - k\right)\left(2\triangle f - |\nabla f|^2 + S\right) - \langle Ric + Hess(f), h\rangle \right\} e^{-f} d\mu.
\end{aligned}
$$

■

Se a medida $dm := e^{-f}d\mu$ não variar, a expressão da variação de $\mathcal{F}$ se reduz consideravelmente:

Corolário 6.1 (Variação de $\mathcal{F}$ preservando medida) *Considere uma variedade riemanniana fechada M e um vetor de variação $v = (h,k)$ satisfazendo $\delta_{(h,k)}\left(e^{-f}d\mu\right)(g,f) = 0$. Nesse caso a variação de $\mathcal{F}$ é dada pela seguinte expressão:*

$$
\delta_{(h,k)}\mathcal{F}(g,f) = -\int_M \langle Ric + Hess(f), h\rangle e^{-f} d\mu.
$$

Demonstração. De fato, segue da expressão (6.3) e da hipótese que

$$\delta_{(h,k)}\mathcal{F}(g,f) = \int_M \frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(S + |\nabla f|^2\right)\right\} e^{-f} d\mu.$$

E pelos cálculos feitos no teorema acima,

$$\int_M \frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(S + |\nabla f|^2\right)\right\} e^{-f} d\mu = \int_M \left\{\left(\frac{Tr_g h}{2} - k\right)\left(2\triangle f - 2\,|\nabla f|^2\right) - \langle Ric + Hess(f), h\rangle\right\} e^{-f} d\mu.$$

Porém, na demonstração do teorema anterior vimos que

$$\delta_{(h,k)}\left(e^{-f} d\mu\right) = \left(\frac{1}{2}\left(Tr_g h\right) - k\right) e^{-f} d\mu\,(g)\,.$$

Portanto, concluímos o seguinte:

$$\begin{aligned}\int_M \frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(S + |\nabla f|^2\right)\right\} e^{-f} d\mu &= \int_M \left\{\left(\frac{Tr_g h}{2} - k\right)\left(2\triangle f - 2\,|\nabla f|^2\right) - \langle Ric + Hess(f), h\rangle\right\} e^{-f} d\mu \\ &= -\int_M \langle Ric + Hess(f), h\rangle\, e^{-f} d\mu.\end{aligned}$$

■

Fluxo Gradiente de $\mathcal{F}^m$ e um Sistema de Equações Associado

Com a Proposição 6.1 em mente,vamos formular um fluxo gradiente apropriado na forma de um sistema de equações, que pode ser relacionado ao fluxo de Ricci. Para ver isso, considere uma variedade riemanniana fechada M, fixe uma medida positiva suave $d\omega$ em M e defina um gráfico suave $X : \mathfrak{Met} \to \mathfrak{Met} \times C^\infty(M)$ fazendo

$$X : g \mapsto \left(g, \ln\frac{d\mu\,(g)}{d\omega}\right)$$

Aqui entendemos por uma medida, uma n-forma positiva. Observe que se dm é qualquer n-forma positiva, então para qualquer $U \subset M$ aberto podemos definir $m(U) := \int_M dm$. Portanto $m : \mathcal{B}(M) \to [0, \infty)$ é uma medida positiva (no sentido estrito) definida na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M)$ (para mais detalhes veja a Seção D)

A composição resultante $\mathcal{F}^m := \mathcal{F} \circ X : \mathfrak{Met} \to \mathbb{R}$ é um funcional em $\mathfrak{Met}$ que modifica $\mathcal{F}$. Este funcional é dado pela seguinte expressão:

$$\mathcal{F}^m(g) = \mathcal{F} \circ X(g) = \mathcal{F}\left(g, \ln \frac{d\mu(g)}{d\omega}\right) = \int_M \left(S + \left|\nabla \ln \frac{d\mu(g)}{d\omega}\right|^2\right) e^{-f} d\omega = \int_M \left(S + |\nabla f|^2\right) e^{-f} d\omega,$$

onde $f := \ln \frac{d\mu(g)}{d\omega}$. Notemos que

$$e^{-f} d\mu(g) = e^{-\ln \frac{d\mu(g)}{d\omega}} d\mu(g) = \left(\frac{d\mu(g)}{d\omega}\right)^{-1} d\mu(g) = \frac{d\omega}{d\mu(g)} d\mu(g) = d\omega,$$

como $d\omega$ é uma n-forma positiva fixada, segue que

$$\delta_{(h,k)}\left(e^{-f} d\mu\right)(g, f) = \delta_{(h,k)}(d\omega) = 0.$$

E pelo Corolário 6.1, vemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{(h)}\mathcal{F}^m(g) &= -\int_M \langle Ric + Hess(f), h\rangle e^{-f} d\mu = -\int_M \langle Ric + Hess(f), h\rangle d\omega \\
&= -\int_M \langle Ric + Hess(f), h\rangle d\omega \\
&= -\int_M \sum_{a,b,c,d=1}^n g^{ac} g^{bd} Ric_{ab} h_{cd} + \sum_{a,b,c,d=1}^n g^{ac} g^{bd} Hess(f)_{ab} h_{cd} d\omega \\
&= -\int_M \sum_{a,b,c,d=1}^n g^{ac} g^{bd} \left(Ric_{ab} h_{cd} + Hess(f)_{ab} h_{cd}\right) d\omega.
\end{aligned}$$

Notemos que pelo produto interno em (6.1) e pela Proposição C.2 segue que

$$d\mathcal{F}^m_g.h = \delta_{(h)}\mathcal{F}^m(g) = \langle -Ric - Hess(f), h\rangle_{L^2},$$

e pela definição de gradiente:

$$(\nabla \mathcal{F}^m)(g) = -Ric - Hess(f).$$

Assim, o (2 vezes) fluxo gradiente positivo de $\mathcal{F}^m$ em $\mathfrak{Met}$ é dado por

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = 2(\nabla \mathcal{F}^m)(g)_{ij} = -2\left(Ric_{ij} + Hess(f)_{ij}\right).$$

Além disso, usando a Proposição 1.8 vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\ln\frac{d\mu\left(g\right)}{d\omega}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\ln d\mu\left(g\right) - \ln d\omega\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\ln d\mu\left(g\right)\right) = \frac{1}{d\mu\left(g\right)}\frac{\partial d\mu}{\partial t} \\
&= \frac{1}{d\mu\left(g\right)}\frac{1}{2}Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)d\mu\left(g\right) = \frac{1}{2}Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{2}Tr_g\left(-2\left(Ric + Hess(f)\right)\right) \\
&= -\left(S + \triangle f\right).
\end{aligned}$$

Ou seja, consideremos o seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial t} = -2\left(Ric + Hess(f)\right) \\ \frac{\partial f}{\partial t} = -\left(S + \triangle f\right) \end{array}\right. . \tag{6.4}$$

Para (g, f) solução do sistema (6.4) a derivada de $\mathcal{F}^m$ possui uma expressão muito simples:

Proposição 6.2 *Seja M uma variedade riemanniana fechada. Se $\left(g\left(t\right), f\left(t\right)\right) \in \mathfrak{Met} \times C^{\infty}\left(M\right)$, $t \in I$, é uma solução do sistema (6.4), então*

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F}^m\left(g\left(t\right)\right)\right) = 2\int_M \left|Ric + Hess(f)\right|^2 d\omega.$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\mathcal{F}^m\left(g\left(t\right)\right)\right) &= d\mathcal{F}^m_{g(t)}.g'(t) = \left\langle -Ric - Hess(f), -2\left(Ric + Hess(f)\right)\right\rangle_{L^2} \\
&= 2\left\langle Ric + Hess(f), Ric + Hess(f)\right\rangle_{L^2} \\
&= 2\int_M \left|Ric + Hess(f)\right|^2 d\omega.
\end{aligned}$$

■

Sistema Acoplado e Fluxo de Ricci

Notemos que o fluxo de gradiente (6.4) é (a menos de difeomorfismo) equivalente ao fluxo de Ricci. Isso é alcançado simplesmente executando um difeomorfismo dependente do tempo que transforma o sistema (6.4) no fluxo de Ricci. Intuitivamente, se o difeomorfismo é gerado pelo fluxo ao longo de um campo que depende do tempo, $V(t)$, então teríamos um novo sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2\left(Ric + Hess(f)\right) + \mathcal{L}_V g \\ \frac{\partial f}{\partial t} = -S - \triangle f + \mathcal{L}_V f \end{cases}.$$

Vamos usar o seguinte lema:

Lema 6.1 *Considere uma variedade riemanniana fechada M. Para toda $1-$forma ω e todo campo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\left(\mathcal{L}_{\omega^{\#}} g\right)(X,Y) = (\nabla\omega)(X,Y) + (\nabla\omega)(Y,X),$$

em que $\omega^{\#} \in \mathfrak{X}(M)$ é o campo associado a 1-forma ω (para mais detalhes veja A.3).

Demonstração. Pela compatibilidade com a métrica, temos que

$$X(\omega(Y)) = X\left(g\left(\omega^{\#}, Y\right)\right) = g\left(\nabla_X \omega^{\#}, Y\right) + g\left(\omega^{\#}, \nabla_X Y\right),$$

e portanto, temos a seguinte expressão:

$$g\left(\nabla_X \omega^{\#}, Y\right) = g\left(\omega^{\#}, \nabla_X Y\right) - X(\omega(Y)) = \omega(\nabla_X Y) - X(\omega(Y)) = (\nabla\omega)(X,Y).$$

Segue da igualdade acima que

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}_{\omega^{\#}} g\right)(X,Y) &= \omega^{\#}(g(X,Y)) - g\left(\left[\omega^{\#}, X\right], Y\right) - g\left(X, \left[\omega^{\#}, Y\right]\right) \\ &= g\left(\nabla_{\omega^{\#}} X, Y\right) + g\left(X, \nabla_{\omega^{\#}} Y\right) - g\left(\nabla_{\omega^{\#}} X - \nabla_X \omega^{\#}, Y\right) - g\left(X, \nabla_{\omega^{\#}} Y - \nabla_Y \omega^{\#}\right) \\ &= g\left(\nabla_X \omega^{\#}, Y\right) + g\left(X, \nabla_Y \omega^{\#}\right) = (\nabla\omega)(X,Y) + (\nabla\omega)(Y,X). \end{aligned}$$

■

Corolário 6.2 *Considere uma variedade riemanniana fechada M. Para todo campo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\left(\mathcal{L}_{\nabla f} g\right)(X,Y) = 2Hess(f)(X,Y).$$

Demonstração. Basta tomar $\omega = df$. Segue que $\omega^{\#} = (df)^{\#} = \nabla f$. Como $Hess(f)$ é simétrica (para mais detalhes veja A.10), segue que

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_{\nabla f} g\right)(X,Y) &= \left(\mathcal{L}_{\omega^{\#}} g\right)(X,Y) = (\nabla df)(X,Y) + (\nabla df)(Y,X) \\
&= Hess\,(f)(X,Y) + Hess\,(f)(Y,X) \\
&= 2Hess(f).
\end{aligned}$$

■

Pelo Lema 6.1 e pelo Corolário 6.2 que, se tomarmos $V(t) := \nabla f$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V g &= \mathcal{L}_{\nabla f} g = 2Hess(f); \\
\left(\mathcal{L}_{\nabla f} f\right) &= (\nabla f)(f) = \langle \nabla f, \nabla f \rangle = |\nabla f|^2 .
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Segue disso o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2\left(Ric + Hess(f)\right) + 2Hess(f) = -2Ric \\ \frac{\partial f}{\partial t} = -S - \triangle f + |\nabla f|^2 \end{cases} . \tag{6.6}$$

Convertendo o Fluxo Gradiente no Fluxo de Ricci

Considere $\left(\overline{g}(t), \overline{f}(t)\right) \in \mathfrak{Met} \times C^{\infty}(M)$, $t \in I$ uma solução do fluxo gradiente (6.4), vamos mostrar que existe uma solução $(g(t), f(t)) \in \mathfrak{Met} \times C^{\infty}(M)$, $t \in I$ do sistema (6.6) fluindo ao longo do gradiente de $\overline{f}$:

Lema 6.2 *Seja $\left(\overline{g}(t), \overline{f}(t)\right)$, $t \in [0,T)$, uma solução de (6.4). Defina uma família suave $\{\Phi(t)\}_{t\in[0,T)}$ de difeomorfismos de M por*

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt}(t) = \left(\nabla^{\overline{g}(t)} \overline{f}\right)(t) \\ \Phi(0) = Id_M \end{cases} . \tag{6.7}$$

Então o pullback da métrica, $g(t) := \left(\Phi^{*}\overline{g}\right)(t)$, e a função $f(t) := \left(\overline{f} \circ \Phi\right)(t)$ satisfazem o sistema (6.6).

Demonstração. Pela teoria das equações diferenciais que dependem do tempo, o PVI (6.7) sempre tem solução. Nesse caso, segue do sistema (6.4) e das expressões em (6.5) que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi^{*}\overline{g}\right) = \left(\Phi^{*}\frac{\partial \overline{g}}{\partial t}\right) + \Phi^{*}\left(\mathcal{L}_{\frac{d\Phi}{dt}}\overline{g}\right) = \left(\Phi^{*}\frac{\partial \overline{g}}{\partial t}\right) + \Phi^{*}\left(\mathcal{L}_{\left(\nabla^{\overline{g}(t)}\overline{f}\right)}\overline{g}\right) \\
&= -2\Phi^{*}\left(Ric^{\overline{g}}\right) - 2\Phi^{*}\left(Hess(\overline{f})\right) + 2\Phi^{*}\left(Hess(\overline{f})\right) = -2\Phi^{*}\left(Ric^{\overline{g}}\right) = -2Ric^{g}.
\end{aligned}$$

E portanto, novamente pelos sistemas (6.4) e (6.7), vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{f}\circ\Phi\right)(t) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial t}\circ\Phi(t) + \left\langle \nabla^{\overline{g}}\,\overline{f}, \frac{d\Phi}{dt}\right\rangle \\
&= \frac{\partial \overline{f}}{\partial t}\circ\Phi(t) + \left\langle \nabla^{\overline{g}}\,\overline{f}, \nabla^{\overline{g}}\,\overline{f}\right\rangle\circ\Phi \\
&= \frac{\partial \overline{f}}{\partial t}\circ\Phi(t) + \left|\nabla^{\overline{g}}\,\overline{f}\circ\Phi\right|^2 = -\left(\overline{S}\circ\Phi + \left(\overline{\triangle}\,\overline{f}\right)\circ\Phi\right) + \left|\nabla^{\overline{g}}\,\overline{f}\circ\Phi\right|^2 \\
&= -\left(S + \triangle f\right) + \left|\nabla f\right|^2,
\end{aligned}$$

onde $\overline{S}$ e $\overline{\triangle}$ são a curvatura escalar e o laplaciano, respectivamente, na métrica $\overline{g}(t)$. ■

Convertendo o Fluxo de Ricci no Fluxo Gradiente

Agora vamos fazer o contrário, dada uma solução $(g(t), f(t))$ de (6.6), vamos mostrar que existe uma solução $\left(\overline{g}(t), \overline{f}(t)\right)$ do fluxo gradiente (6.4).

Lema 6.3 *Seja $g(t)$, $t\in[0,T)$ uma solução do fluxo de Ricci e seja f_T uma função arbitrária em M. Então:*

1. *Existe uma única solução da equação do calor **"backward"***

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = -\triangle f - S + |\nabla f|^2, & t\in[0,T] \\ f(T) = f_T \end{cases}$$

2. *Mais ainda, dada uma solução $f(t)$ do sistema acima, defina uma família suave $\{\Phi(t)\}_{t\in[0,T)}$ de difeomorfismos de M por*

$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{dt}(t) = -\left(\nabla^{g(t)} f\right)(t); \\ \Psi(0) = Id_M. \end{cases}$$

Então a métrica pullback $\overline{g}(t) = (\Psi^* g)(t)$ e o pullback da função $\overline{f}(t) := (f\circ\Psi)(t)$ satisfazem o sistema (6.4).

Demonstração. 1. Façamos a seguinte reparametrização: $\tau = T - t$, seja $u = e^{-f}$. Notemos que

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-f}\frac{\partial f}{\partial t} = u\frac{\partial f}{\partial t} = \left(-\triangle f - S + |\nabla f|^2\right)u.$$

Já sabemos que o laplaciano de u é dado por

$$\triangle u = \triangle\left(e^{-f}\right) = \left(|\nabla f|^2 - \triangle f\right)e^{-f} = \left(|\nabla f|^2 - \triangle f\right)u.$$

Portanto segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \triangle u - Su.$$

Como esta é uma **equação linear parabólica** no tempo e com dado inicial em $\tau = 0$, a teoria de equações diferenciais nos garante que existe uma única solução em $[0, T]$.

2. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{g}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\Phi^* g) = \left(\Phi^* \frac{\partial g}{\partial t}\right) + \Phi^*\left(\mathcal{L}_{\frac{d\Phi}{dt}} g\right) = \left(\Phi^* \frac{\partial g}{\partial t}\right) + \Phi^*\left(\mathcal{L}_{-\left(\nabla^{g(t)} f\right)} g\right) \\
&= -2\Phi^*\left(Ric^g\right) - 2\Phi^*\left(Hess(f)\right) \\
&= -2\Phi^*\left(Ric^g + Hess(f)\right).
\end{aligned}$$

E além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi)(t) = \frac{\partial f}{\partial t} \circ \Phi(t) + \left\langle \nabla^{\overline{g}} f, \frac{d\Phi}{dt} \right\rangle \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} \circ \Phi(t) - \langle \nabla^g f, \nabla^g f \rangle \circ \Phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial t} \circ \Phi(t) - |\nabla^g f \circ \Phi|^2 = \left(-\triangle f - S + |\nabla f|^2\right) \circ \Phi + |\nabla^g f \circ \Phi|^2 \\
&= (-\triangle f - S) \circ \Phi.
\end{aligned}$$

■

Monotonicidade de $\mathcal{F}$ a partir da Monotonicidade de $\mathcal{F}^m$

A invariância do difeomorfismo de todas as quantidades em consideração implica a fórmula de monotonicidade para o fluxo de Ricci:

Proposição 6.3 *Considere uma variedade riemanniana fechada M. Se $(g(t), f(t)) \in \mathfrak{Met} \times C^\infty(M)$, $t \in I$, é uma solução do sistema (6.6), então:*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(g(t), f(t)) = 2\int_M |Ric + Hess(f)|^2 e^{-f} d\mu.$$

Demonstração. Como $(g(t), f(t))$ é solução do sistema (6.6), segue do Lema 6.3 que $\overline{g}(t) := (\Psi^* g)(t)$ e $\overline{f}(t) := (f \circ \Psi)(t)$ são soluções do sistema (6.4). Pela Observação 6.1 $\mathcal{F}$ é invariante por difeomorfismos. Assim, temos que

$$\mathcal{F}(g(t), f(t)) = \mathcal{F}\left(\overline{g}(t), \overline{f}(t)\right),$$

e portanto, derivando ambos os lados vemos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(g(t), f(t)) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}\left(\overline{g}(t), \overline{f}(t)\right).$$

Mais ainda, pela Proposição 6.2 vemos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}\left(\overline{g}(t), \overline{f}(t)\right) = 2\int_M \left|\overline{Ric} + \overline{Hess}(\overline{f})\right|^2 e^{-\overline{f}} d\mu(\overline{g}) = 2\int_M |Ric + Hess(f)|^2 e^{-f} d\mu(g).$$

■

Capítulo 7

O $\mathcal{W}$-Funcional e o Não Colapso Local

Os objetivos principais desse capítulo são as demonstrações dos Teoremas 7.1 e 7.3. O primeiro deles garante que se a solução do fluxo de Ricci é uma família de variedades fechadas, então essa família nunca colapsa. Já o segundo nos garante uma forma de sempre lidar com soluções completas do fluxo de Ricci, isto é, a menos de modificar a família solução, $\{g(t)\}_{t\in[0,T)}$, do fluxo de Ricci, podemos supor que $t \in (-\infty, b)$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Mais ainda, essa nova solução possui curvatura riemanniana limitada.

7.1 O $\mathcal{W}$-Funcional

Considere uma variedade diferenciável M fechada (isto é, uma variedade diferenciável compacta e sem bordo) de dimensão n. Definimos o **$\mathcal{W}$-funcional de entropia de Perel'man** como uma aplicação $\mathcal{W} : \mathfrak{Met} \times C^{\infty}(M) \times \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, em que

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) := \int_M \left(\tau \left(S + |\nabla f|^2\right) + f - n\right) u d\mu,$$

em que $u = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f}$, $\tau > 0$ é o **parâmetro de escala**, ∇f é o gradiente de f (para mais detalhes veja (A.7)) e S é a curvatura escalar de M. Notemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(g, f, \tau) - \frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} \mathcal{F}(g, f) &= \int_M \left(\tau \left(S + |\nabla f|^2\right) + f - n\right) u d\mu - \frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} \int_M \left(S + |\nabla f|^2\right) e^{-f} d\mu \\
&= \int_M \left(\tau \left(S + |\nabla f|^2\right) + f - n\right) (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} d\mu \\
&\quad - \frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} \int_M \left(S + |\nabla f|^2\right) e^{-f} d\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_M \tau\left(S+|\nabla f|^2\right)(4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-f} d\mu + \int_M (f-n)\,(4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-f} d\mu \\
&\quad - \int_M \frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\left(S+|\nabla f|^2\right) e^{-f} d\mu \\
&= \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} \int_M (f-n)\, e^{-f} d\mu.
\end{aligned}
$$

Esta equação relaciona os dois funcionais. De modo semelhante ao do Capítulo 6, procuramos encontrar um fluxo de gradiente para $\mathcal{W}$ que inclua o fluxo de Ricci de modo a tornar $\mathcal{W}$ monótono. Com isso, provamos o não colapso local para o fluxo de Ricci. Em seguida, provamos os limites inferiores de injetividade desejados.

Observação 7.1 *Assim como $\mathcal{F}$, o funcional $\mathcal{W}$ é invariante por difeomorfismos: De fato, sejam M e N variedades diferenciáveis (N riemanniana com métrica g), $F : M \to N$ um difeomorfismo e (φ, M, U) , (ψ, N, V) cartas locais. Localmente, sendo $f : N \to \mathbb{R}$ suave, a definição de integral em uma variedade nos dá que*

$$\int_{\psi^{-1}(V)} f d\mu := \int_V f\circ\psi^{-1}\sqrt{\det g}\,dy_1...dy_n.$$

Da mesma maneira,

$$\int_{\varphi^{-1}(U)} f\circ F d\mu := \int_U f\circ F\circ\varphi^{-1}\sqrt{\det\left(F^*g\right)}\,dx_1...dx_n$$

Pelo teorema de mudança de variáveis no espaço euclidiano, temos que:

$$
\begin{aligned}
\int_V f\circ\psi^{-1}\sqrt{\det g}\,dy_1...dy_n &= \int_U f\circ\psi^{-1}\circ\widehat{F}\left(\sqrt{\det g}\right)\circ\widehat{F}\times\left|\det J_{\widehat{F}}\right| dx_1...dx_n \\
&= \int_U f\circ F\circ\varphi^{-1}\left(\sqrt{\det g}\right)\circ\widehat{F}\times\left|\det J_{\widehat{F}}\right| dx_1...dx_n
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

em que $\widehat{F} := \psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ e $J_{\widehat{F}}$ é a matriz jacobiana de $\widehat{F}$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
F^*g &= F^*\sum_{i,j=1}^n g_{ij}dy^i\otimes dy^j = \sum_{i,j=1}^n \left(g_{ij}\circ F\right)F^*\left(dy^i\otimes dy^j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \left(g_{ij}\circ F\right)\left(F^*dy^i\right)\otimes\left(F^*dy^j\right) = \sum_{i,j=1}^n \left(g_{ij}\circ F\right) d\left(F^*y^i\right)\otimes d\left(F^*y^j\right) \\
&= \sum_{i,j,a,b=1}^n \left(g_{ij}\circ F\right)\frac{\partial\widehat{F}_i}{\partial x_a}\frac{\partial\widehat{F}_j}{\partial x_b}\left(dx^a\otimes dx^b\right) \\
&= \sum_{a,b=1}^n\left(\sum_{i,j=1}^n \left(g_{ij}\circ F\right)\frac{\partial\widehat{F}_i}{\partial x_a}\frac{\partial\widehat{F}_j}{\partial x_b}\right)\left(dx^a\otimes dx^b\right).
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

A 5ª igualdade é válida, pois

$$d\left(F^*y^i\right) = d\left(\pi_i \circ \widehat{F} \circ \varphi\right) = \pi_i \circ d\widehat{F} \circ d\varphi,$$

e portanto,

$$d\left(F^*y^i\right)(\partial_k) = \pi_i \circ d\widehat{F} \circ d\varphi\,(\partial_k) = \pi_i \circ d\widehat{F}\,(e_k) = \frac{\partial \widehat{F}_i}{\partial x_k}.$$

Logo temos a seguinte igualdade:

$$\left(d\left(F^*y^i\right) \otimes d\left(F^*y^j\right)\right)(v,w) = \sum_{a,b=1}^{n} v^a w^b \frac{\partial \widehat{F}_i}{\partial x_a}\frac{\partial \widehat{F}_j}{\partial x_b} = \sum_{a,b=1}^{n} \frac{\partial \widehat{F}_i}{\partial x_a}\frac{\partial \widehat{F}_j}{\partial x_b}\left(dx^a \otimes dx^b\right)(v,w),$$

para todo $v, w \in TM$. Segue da expressão (7.2) que a matriz da métrica F^*g é justamente

$$\left(F^*g\right) = \left(J_{\widehat{F}}\right)^T (g_{ij}) \left(J_{\widehat{F}}\right).$$

Portanto, vemos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det\left(F^*g\right)} &= \sqrt{\det\left(J_{\widehat{F}}\right)^T (g_{ij}) \left(J_{\widehat{F}}\right)} = \sqrt{\det\left(J_{\widehat{F}}\right)^T \det(g_{ij}) \det\left(J_{\widehat{F}}\right)} \\
&= \sqrt{\det(g_{ij}) \left(\det\left(J_{\widehat{F}}\right)\right)^2} = \sqrt{\det(g_{ij})}\left|\det\left(J_{\widehat{F}}\right)\right|.
\end{aligned}$$

E pela igualdade (7.1), concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\psi^{-1}(V)} f d\mu_g &= \int_V f \circ \psi^{-1} \sqrt{\det g}\, dy_1 \ldots dy_n = \int_U f \circ F \circ \varphi^{-1}\left(\sqrt{\det g}\right) \circ \widehat{F} \times \left|\det J_{\widehat{F}}\right| dx_1 \ldots dx_n \\
&= \int_U f \circ F \circ \varphi^{-1} \sqrt{\det\left(F^*g\right)}\, dx_1 \ldots dx_n \\
&= \int_{\varphi^{-1}(U)} f \circ F d\mu_{F^*g}.
\end{aligned}$$

Com isso em mente, vamos mostrar que, assim como $\mathcal{F}$, o funcional $\mathcal{W}$ é invariante por difeomorfismos: Seja M uma variedade diferenciável fechada e considere Φ um difeomorfismo de M. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}\left(\Phi^*g, \Phi^*f, \tau\right) &= \frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F}\left(\Phi^*g, \Phi^*f\right) + \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(\Phi^*f - n\right) e^{-\Phi^*f} d\mu_{\Phi^*g} \\
&= \frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F}(g, f) + \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(\Phi^*f - n\right) e^{-\Phi^*f} d\mu_{\Phi^*g}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F}(g,f) + \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M (f-n)\,e^{-f}d\mu_g \\
&= \mathcal{W}(g,f,\tau).
\end{aligned}
$$

Além disso, para todo $c>0$ temos a seguinte invariância:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}(cg,f,c\tau) &= \frac{c\tau}{(4\pi c\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(S^{cg} + |\nabla f|^2_{cg}\right)e^{-f}d\mu_{cg} + \frac{c^{\frac{n}{2}}}{(4\pi c\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M (f-n)\,e^{-f}d\mu_g \\
&= \frac{c\tau c^{\frac{n}{2}}}{(4\pi c\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(\frac{1}{c}S^{g} + |\nabla f|^2_{cg}\right)e^{-f}d\mu_{g} + \frac{c^{\frac{n}{2}}}{(4\pi c\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M (f-n)\,e^{-f}d\mu_g \\
&= \frac{c\tau}{(4\pi \tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(\frac{1}{c}S^{g} + |\nabla f|^2_{cg}\right)e^{-f}d\mu_{g} + \frac{1}{(4\pi \tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M (f-n)\,e^{-f}d\mu_g \\
&= \frac{c\tau}{(4\pi \tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(\frac{1}{c}S^{g} + cg\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{c}g^{ij}\partial_i(f)\partial_j, \sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{c}g^{ij}\partial_i(f)\partial_j\right)\right)e^{-f}d\mu_{g} \\
&\quad + \frac{1}{(4\pi \tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M (f-n)\,e^{-f}d\mu_g
\end{aligned}
$$

Colocando $\frac{1}{c}$ em evidência, segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}(cg,f,c\tau) &= \frac{c\tau}{(4\pi \tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(\frac{1}{c}S^{g} + \frac{1}{c}g\left(\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\partial_i(f)\partial_j, \sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\partial_i(f)\partial_j\right)\right)e^{-f}d\mu_{g} \\
&\quad + \frac{1}{(4\pi \tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M (f-n)\,e^{-f}d\mu_g \\
&= \frac{c\tau}{(4\pi \tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(\frac{1}{c}S^{g} + \frac{1}{c}|\nabla f|^2_{g}\right)e^{-f}d\mu_{g} + \frac{1}{(4\pi \tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M (f-n)\,e^{-f}d\mu_g \\
&= \frac{\tau}{(4\pi \tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(S^{g} + |\nabla f|^2_{g}\right)e^{-f}d\mu_{g} + \frac{1}{(4\pi \tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M (f-n)\,e^{-f}d\mu_g \\
&= \mathcal{W}(g,f,\tau).
\end{aligned}
$$

Agora vamos encontrar uma expressão para a variação de $\mathcal{W}$:

Proposição 7.1 (Variação de $\mathcal{W}$) *Em uma variedade fechada M, a variação de $\mathcal{W}$ é dada pela seguinte expressão:*

$$
\begin{aligned}
\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}(g,f,\tau) &= \int_M \left\langle Ric + Hess(f) - \frac{1}{2\tau}g, -\tau h + \varsigma g\right\rangle u d\mu \\
&\quad + \int_M \tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k - \frac{n}{2\tau}\varsigma\right)\left(S + 2\Delta f - |\nabla f|^2 + \frac{f-n-1}{\tau}\right)u d\mu.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Vamos calcular a variação, $\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}(g,f,\tau)$, de $\mathcal{W}$ em (g,f,τ) na direção de (h,k,ς) via dois passos: Vamos realizar a separação

$$\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}(g,f,\tau)=\delta_{(h,k,0)}\mathcal{W}(g,f,\tau)+\delta_{(0,0,\varsigma)}\mathcal{W}(g,f,\tau).$$

Para cada $\tau\in\mathbb{R}^{+}$ fixado, vamos calcular $\delta_{(h,k,0)}\mathcal{W}(g,f,\tau)$. Pela Proposição 6.1**,** temos que

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,0)}\left(\frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F}(g,f)\right)(g,f,\tau) &= \frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\delta_{(h,k,0)}(\mathcal{F}(g,f))(g,f,\tau)\\
&= -\frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M\langle Ric+Hess(f),h\rangle e^{-f}d\mu\\
&\quad+\frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M\left(\frac{1}{2}Tr_gh-k\right)\left(2\Delta f-|\nabla f|^2+S\right)e^{-f}d\mu\\
&= -\int_M\tau\langle Ric+Hess(f),h\rangle ud\mu\\
&\quad+\int_M\tau\left(\frac{1}{2}Tr_gh-k\right)\left(2\Delta f-|\nabla f|^2+S\right)ud\mu,
\end{aligned}$$

e por um cálculo direto,

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,0)}\left(\frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M(f-n)e^{-f}d\mu\right)(g,f,\tau) &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\delta_{(h,k,0)}\left(\int_M(f-n)e^{-f}d\mu\right)(g,f,\tau)\\
&= \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\frac{d}{ds}_{|s=0}\int_M(f+sk-n)e^{-f-sk}d\mu_{g+sh}\\
&= \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M\frac{d}{ds}_{|s=0}\left((f+sk-n)e^{-f-sk}d\mu_{g+sh}\right)\\
&= \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M\left(\frac{d}{ds}_{|s=0}(f+sk-n)\right)e^{-f}d\mu_g\\
&\quad+(f-n)\left(\frac{d}{ds}_{|s=0}e^{-f-sk}\right)d\mu_g+(f-n)e^{-f}\left(\frac{d}{ds}_{|s=0}d\mu_{g+sh}\right)\\
&= \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M ke^{-f}d\mu_g+\frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M(f-n)\left(-ke^{-f}\right)d\mu_g\\
&\quad+\frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M(f-n)e^{-f}\left(\frac{1}{2}Tr_g(h)d\mu_g\right).
\end{aligned}$$

Usando que $u=(4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}}e^{-f}$, segue que

$$\delta_{(h,k,0)}\left(\frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M(f-n)e^{-f}d\mu\right)(g,f,\tau)=\int_M kud\mu_g+\int_M(f-n)(-k)ud\mu_g+\int_M(f-n)\frac{1}{2}Tr_g(h)ud\mu_g$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M \left(k - k\left(f-n\right) + \left(f-n\right)\frac{1}{2}Tr_g\left(h\right)\right) ud\mu_g \\
&= \int_M \left(k + \left(\frac{1}{2}Tr_g\left(h\right) - k\right)\left(f-n\right)\right) ud\mu_g.
\end{aligned}$$

Para o cálculo de $\delta_{(0,0,\varsigma)}\mathcal{W}\left(g,f,\tau\right)$ com g e f fixados, vemos diretamente que

$$\begin{aligned}
\delta_{(0,0,\varsigma)}\mathcal{W}\left(g,f,\tau\right) &= \delta_{(0,0,\varsigma)}\left(\frac{\tau}{\left(4\pi\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F}\left(g,f\right) + \frac{1}{\left(4\pi\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(f-n\right)e^{-f}d\mu\right) \\
&= \left(\delta_{(0,0,\varsigma)}\frac{\tau}{\left(4\pi\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\right)\mathcal{F}\left(g,f\right) + \left(\delta_{(0,0,\varsigma)}\frac{1}{\left(4\pi\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\right)\int_M \left(f-n\right)e^{-f}d\mu \\
&= \left(\frac{d}{ds}\frac{\tau+s\varsigma}{\left(4\pi\left(\tau+s\varsigma\right)\right)^{\frac{n}{2}}}\right)_{|s=0}\mathcal{F}\left(g,f\right) + \left(\frac{d}{ds}\frac{1}{\left(4\pi\left(\tau+s\varsigma\right)\right)^{\frac{n}{2}}}\right)_{|s=0}\int_M \left(f-n\right)e^{-f}d\mu \\
&= \frac{\varsigma\left(4\pi\left(\tau+s\varsigma\right)\right)^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2}\left(4\pi\left(\tau+s\varsigma\right)\right)^{\frac{n}{2}-1}4\pi\varsigma\left(\tau+s\varsigma\right)}{\left(4\pi\left(\tau+s\varsigma\right)\right)^{n}}_{|s=0}\mathcal{F}\left(g,f\right) \\
&\quad + \left(-\frac{n}{2}\left(4\pi\left(\tau+s\varsigma\right)\right)^{-\frac{n}{2}-1}4\pi\varsigma\right)_{|s=0}\int_M \left(f-n\right)e^{-f}d\mu.
\end{aligned}$$

Fazendo $s=0$ nessa expressão, vemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{(0,0,\varsigma)}\mathcal{W}\left(g,f,\tau\right) &= \frac{\varsigma\left(4\pi\tau\right)^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2}\left(4\pi\tau\right)^{\frac{n-2}{2}}4\pi\varsigma\tau}{\left(4\pi\tau\right)^{n}}\mathcal{F}\left(g,f\right) + \left(-\frac{4\pi\varsigma n}{2\left(4\pi\tau\right)^{\frac{n+2}{2}}}\right)\int_M \left(f-n\right)e^{-f}d\mu \\
&= \frac{\varsigma - \frac{n}{2}\left(4\pi\tau\right)^{-1}4\pi\varsigma\tau}{\left(4\pi\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(S+\left|\nabla f\right|^2\right)e^{-f}d\mu - \frac{2\pi\varsigma n}{\left(4\pi\tau\right)}\int_M \left(f-n\right)ud\mu \\
&= \left(\varsigma - \frac{n}{2}\varsigma\right)\int_M \left(S+\left|\nabla f\right|^2\right)ud\mu - \frac{\varsigma n}{2\tau}\int_M \left(f-n\right)ud\mu \\
&= \int_M \left(\varsigma\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(S+\left|\nabla f\right|^2\right) - \frac{\varsigma n}{2\tau}\left(f-n\right)\right)ud\mu.
\end{aligned}$$

Somando todos os termos, segue que

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}\left(g,f,\tau\right) &= \delta_{(h,k,0)}\mathcal{W}\left(g,f,\tau\right) + \delta_{(0,0,\varsigma)}\mathcal{W}\left(g,f,\tau\right) \\
&= \delta_{(h,k,0)}\left(\frac{\tau}{\left(4\pi\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F}\left(g,f\right)\right)\left(g,f,\tau\right) + \delta_{(h,k,0)}\left(\frac{1}{\left(4\pi\tau\right)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(f-n\right)e^{-f}d\mu\right)\left(g,f,\tau\right) \\
&\quad + \delta_{(0,0,\varsigma)}\mathcal{W}\left(g,f,\tau\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_M \tau \left\langle Ric + Hess\left(f\right), h\right\rangle ud\mu + \int_M \tau \left(\frac{1}{2}Tr_g h - k\right)\left(2\Delta f - \left|\nabla f\right|^2 + S\right) ud\mu \\
&\quad + \int_M \left(k + \left(\frac{1}{2}Tr_g\left(h\right) - k\right)\left(f-n\right)\right) ud\mu + \int_M \left(\varsigma\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(S + \left|\nabla f\right|^2\right) - \frac{\varsigma n}{2\tau}\left(f-n\right)\right) ud\mu \\
&= \int_M \left(-\left\langle Ric + Hess\left(f\right), \tau h\right\rangle + \tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k\right)\left(2\Delta f - \left|\nabla f\right|^2 + S\right)\right) ud\mu \\
&\quad + \int_M \left(\left(k + \left(\frac{1}{2}Tr_g\left(h\right) - k\right)\left(f-n\right)\right) + \left(\varsigma\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(S+\left|\nabla f\right|^2\right) - \frac{\varsigma n}{2\tau}\left(f-n\right)\right)\right) ud\mu
\end{aligned}$$

Mas como valem as seguintes igualdades:

$$S = \left\langle Ric, g\right\rangle \qquad \text{e} \qquad \Delta f = \left\langle Hess\left(f\right), g\right\rangle,$$

segue que a variação de $\mathcal{W}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}\left(g,f,\tau\right) &= \int_M \left(\left\langle Ric + Hess\left(f\right), -\tau h\right\rangle + \tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k\right)\left(2\Delta f - \left|\nabla f\right|^2 + S\right)\right) ud\mu \\
&\quad + \int_M \left(\left(k + \left(\frac{1}{2}Tr_g\left(h\right) - k\right)\left(f-n\right)\right) + \left(\varsigma\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(S+\left|\nabla f\right|^2\right) - \frac{\varsigma n}{2\tau}\left(f-n\right)\right)\right) ud\mu \\
&= \int_M \left[\left\langle Ric + Hess\left(f\right), -\tau h + \varsigma g\right\rangle + \tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k\right)\left(2\Delta f - \left|\nabla f\right|^2 + S + \frac{f-n}{\tau}\right)\right] ud\mu \\
&\quad + \int_M \left[k + \varsigma\left(\left|\nabla f\right|^2 - \Delta f\right) - \frac{n\varsigma}{2}\left(S + \left|\nabla f\right|^2\right) - \frac{\varsigma n}{2\tau}\left(f-n\right)\right] ud\mu.
\end{aligned}$$

Colocando o termo $-\frac{n\varsigma}{2}$ dentro do primeiro parênteses, segue que

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}\left(g,f,\tau\right) &= \int_M \left[\left\langle Ric + Hess\left(f\right), -\tau h + \varsigma g\right\rangle + \tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k\right)\left(2\Delta f - \left|\nabla f\right|^2 + S + \frac{f-n}{\tau}\right)\right] ud\mu \\
&\quad + \int_M \left[k + \varsigma\left(\left|\nabla f\right|^2 - \Delta f\right) - \frac{n\varsigma}{2}\left(S + \left|\nabla f\right|^2\right) - \frac{\varsigma n}{2\tau}\left(f-n\right)\right] ud\mu \\
&= \int_M \left[\left\langle Ric + Hess\left(f\right), -\tau h + \varsigma g\right\rangle + \tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k - \frac{n\varsigma}{2\tau}\right)\left(2\Delta f - \left|\nabla f\right|^2 + S + \frac{f-n}{\tau}\right)\right] ud\mu \\
&\quad + \int_M \left[k + \varsigma\left(\left|\nabla f\right|^2 - \Delta f\right) - n\varsigma\left|\nabla f\right|^2 + n\varsigma\Delta f\right] ud\mu \\
&= \int_M \left[\left\langle Ric + Hess\left(f\right), -\tau h + \varsigma g\right\rangle + \tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k - \frac{n\varsigma}{2\tau}\right)\left(2\Delta f - \left|\nabla f\right|^2 + S + \frac{f-n}{\tau}\right)\right] ud\mu \\
&\quad + \int_M \left[k + \left(n-1\right)\varsigma\left(\Delta f - \left|\nabla f\right|^2\right)\right] ud\mu.
\end{aligned}$$

Agora notemos que

$$\left\langle -\frac{g}{2\tau}, -\tau h + \varsigma g\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle g, h\right\rangle - \frac{\varsigma}{2\tau}\left\langle g, g\right\rangle = \frac{1}{2}Tr_g h - \frac{n\varsigma}{2\tau}.$$

Logo, a variação de $\mathcal{W}$ tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}(g,f,\tau) &= \int_M \left[\langle Ric + Hess(f), -\tau h + \varsigma g\rangle\right] ud\mu \\
&+ \int_M \left[\tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k - \frac{n\varsigma}{2\tau}\right)\left(2\Delta f - |\nabla f|^2 + S + \frac{f-n}{\tau}\right)\right] ud\mu \\
&+ \int_M \left[k + (n-1)\varsigma\left(\Delta f - |\nabla f|^2\right)\right] ud\mu.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo um mesmo termo, vemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}(g,f,\tau) &= \int_M \left[\langle Ric + Hess(f), -\tau h + \varsigma g\rangle\right] ud\mu \\
&+ \int_M \left[\tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k - \frac{n\varsigma}{2\tau}\right)\left(2\Delta f - |\nabla f|^2 + S + \frac{f-n-1}{\tau}\right)\right] ud\mu \\
&+ \int_M \left[k + (n-1)\varsigma\left(\Delta f - |\nabla f|^2\right) + \left(\frac{1}{2}Tr_g h - k - \frac{n\varsigma}{2\tau}\right)\right] ud\mu \\
&= \int_M \left[\left\langle Ric + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}, -\tau h + \varsigma g\right\rangle\right] ud\mu \\
&+ \int_M \left[\tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k - \frac{n\varsigma}{2\tau}\right)\left(2\Delta f - |\nabla f|^2 + S + \frac{f-n-1}{\tau}\right)\right] ud\mu \\
&+ \int_M (n-1)\varsigma\left(\Delta f - |\nabla f|^2\right) ud\mu.
\end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$\int_M (n-1)\varsigma\left(\Delta f - |\nabla f|^2\right) ud\mu = \frac{(n-1)\varsigma}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \left(\Delta f - |\nabla f|^2\right) e^{-f} d\mu = \frac{(n-1)\varsigma}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \Delta\left(e^{-f}\right) d\mu = 0.$$

Logo, concluímos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}(g,f,\tau) &= \int_M \left[\left\langle Ric + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}, -\tau h + \varsigma g\right\rangle\right] ud\mu \\
&+ \int_M \left[\tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k - \frac{n\varsigma}{2\tau}\right)\left(2\Delta f - |\nabla f|^2 + S + \frac{f-n-1}{\tau}\right)\right] ud\mu \\
&+ \int_M \left[(n-1)\varsigma\left(\Delta f - |\nabla f|^2\right)\right] ud\mu \\
&= \int_M \left[\left\langle Ric + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}, -\tau h + \varsigma g\right\rangle\right] ud\mu \\
&+ \int_M \left[\tau\left(\frac{1}{2}Tr_g h - k - \frac{n\varsigma}{2\tau}\right)\left(2\Delta f - |\nabla f|^2 + S + \frac{f-n-1}{\tau}\right)\right] ud\mu.
\end{aligned}$$

■

Novamente, se a medida $dm := ud\mu$ não variar, obtemos a seguinte expressão simplificada para a variação de $\mathcal{W}$:

Corolário 7.1 (Variação de $\mathcal{W}$ que Preserva Medida) *Considere uma variedade fechada M. Para variações (h, k, ς) tais que $\delta_{(h,k,\varsigma)}(ud\mu)(g, f, \tau) = 0$, temos que*

$$\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int_M \left(\left\langle Ric + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}, -\tau h + \varsigma g\right\rangle\right) ud\mu.$$

Demonstração. De fato, usando o Corolário 6.1, obtemos que

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}(g, f, \tau) &= \delta_{(h,k,\varsigma)}\left(\frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F}(g, f)\right) + \delta_{(h,k,\varsigma)}\left(\frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M (f-n)\, e^{-f} d\mu\right) \\
&= \delta_{(h,k,\varsigma)}\int_M \tau\left(S + |\nabla f|^2\right) ud\mu + \delta_{(h,k,\varsigma)}\left(\int_M (f-n)\, ud\mu\right) \\
&= \int_M \delta_{(h,k,\varsigma)}\left[\tau\left(S + |\nabla f|^2\right)\right] ud\mu + \left(\int_M \delta_{(h,k,\varsigma)}[f-n]\, ud\mu\right) \\
&= \int_M \frac{d}{ds}_{|s=0}(\tau + s\varsigma)\left(S + |\nabla f|^2\right) ud\mu + \tau\int_M \delta_{(h,k,\varsigma)}\left[\left(S + |\nabla f|^2\right)\right] ud\mu \\
&\quad + \int_M \frac{d}{ds}_{|s=0}[f + sk - n]\, ud\mu \\
&= \int_M \varsigma\left(S + |\nabla f|^2\right) ud\mu + \tau\int_M \delta_{(h,k,\varsigma)}\left[\left(S + |\nabla f|^2\right)\right] ud\mu + \int_M kud\mu \\
&= \int_M \varsigma\left(S + |\nabla f|^2\right) ud\mu + \frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \delta_{(h,k,\varsigma)}\left[\left(S + |\nabla f|^2\right)\right] e^{-f} d\mu + \int_M kud\mu.
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 6.1 novamente, segue que

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}(g, f, \tau) &= \int_M \varsigma\left(S + |\nabla f|^2\right) ud\mu - \frac{\tau}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\int_M \langle Ric + Hess(f), h\rangle\, e^{-f} d\mu + \int_M kud\mu \\
&= \int_M \left(\varsigma\left(S + |\nabla f|^2\right) - \tau\langle Ric + Hess(f), h\rangle + k\right) ud\mu \\
&= \int_M \left(\varsigma\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) + \langle Ric + Hess(f), -\tau h + \varsigma g\rangle + k\right) ud\mu \\
&= \int_M \varsigma\left(|\nabla f|^2 - \Delta f\right) ud\mu + \int_M (\langle Ric + Hess(f), -\tau h + \varsigma g\rangle + k)\, ud\mu \\
&= \int_M (\langle Ric + Hess(f), -\tau h + \varsigma g\rangle + k)\, ud\mu..
\end{aligned}$$

Por fim, notemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_{(h,k,\varsigma)}\left(ud\mu\right)(g,f,\tau) = \delta_{(h,k,\varsigma)}\left(\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}d\mu_g\right)(g,f,\tau) = \left(\frac{d}{ds}_{|s=0}\frac{e^{-f-sk}}{(4\pi(\tau+s\varsigma))^{\frac{n}{2}}}\right)d\mu_g \\
&\quad +\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{d}{ds}_{|s=0}d\mu_{g+sh}\right) \\
&= \frac{-ke^{-f-sk}\left(4\pi(\tau+s\varsigma)\right)^{\frac{n}{2}}-\frac{n}{2}\left(4\pi(\tau+s\varsigma)\right)^{\frac{n}{2}-1}4\pi\varsigma e^{-f-sk}}{\left(4\pi(\tau+s\varsigma)\right)^{n}}_{|s=0}d\mu_g+\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{2}Tr_g(h)\,d\mu \\
&= \frac{-ke^{-f}(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}-\frac{n}{2}(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}-1}4\pi\varsigma e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n}}d\mu_g+\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{2}Tr_g(h)\,d\mu \\
&= \frac{-ke^{-f}-\frac{n\varsigma}{2\tau}e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}d\mu_g+\frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}\frac{1}{2}Tr_g(h)\,d\mu \\
&= \left(-k-\frac{n\varsigma}{2\tau}+\frac{1}{2}Tr_g(h)\right)ud\mu,
\end{aligned}$$

e como u e $d\mu$ não são nulos, então $-\frac{n\varsigma}{2\tau}+\frac{1}{2}Tr_g(h)=k$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\delta_{(h,k,\varsigma)}\mathcal{W}(g,f,\tau) &= \int_M\left(\langle Ric+Hess(f),-\tau h+\varsigma g\rangle+k\right)ud\mu \\
&= \int_M\left(\langle Ric+Hess(f),-\tau h+\varsigma g\rangle-\frac{n\varsigma}{2\tau}+\frac{1}{2}Tr_g(h)\right)ud\mu \\
&= \int_M\left(\left\langle Ric+Hess(f)-\frac{g}{2\tau},-\tau h+\varsigma g\right\rangle\right)ud\mu.
\end{aligned}$$

■

Fluxo Gradiente de $\mathcal{W}$ e Monotonicidade

Nesta seção, queremos formular um fluxo gradiente apropriado para $\mathcal{W}$ que o torne um funcional monótono. Considerando que na Seção 6.2 foi possível fazer isso formalmente para o funcional $\mathcal{F}$, aqui encontraremos o fluxo gradiente para $\mathcal{W}$ heuristicamente.

Primeiramente fixemos uma medida

$$dm := \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}d\mu$$

de modo que a variação $\frac{\partial dm}{\partial t}=\delta_{(g',f',\tau')}(dm)(g,f,\tau)$ se anule, isto é,

$$-\frac{n\tau'}{2\tau}+\frac{1}{2}Tr_g(g')=f'.$$

Isolemos f na definição de dm:

$$\begin{aligned}
dm &= \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}d\mu \\
&\Rightarrow\ e^{-f} = (4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}\frac{dm}{d\mu} \\
&\Rightarrow\ -f = \ln\left((4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}\frac{dm}{d\mu}\right) = \ln\left(\frac{dm}{d\mu}\right) + \ln\left((4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}\right) = \ln\left(\frac{dm}{d\mu}\right) + \frac{n}{2}\ln(4\pi\tau) \\
&\Rightarrow\ f = -\ln\left(\frac{dm}{d\mu}\right) - \frac{n}{2}\ln(4\pi\tau) = \ln\left(\frac{d\mu}{dm}\right) - \frac{n}{2}\ln(4\pi\tau).
\end{aligned}$$

Usando que $\tau' = -1$ (para garantir a monotonicidade), e derivando em t,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\ln\left(\frac{d\mu}{dm}\right) - \frac{n}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\ln(4\pi\tau)) = \frac{\partial}{\partial t}(\ln(d\mu) - \ln(dm)) - \frac{n}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ln(4\pi\tau) = \frac{\partial}{\partial t}(\ln(d\mu)) - \frac{n(-4\pi)}{8\pi\tau} \\
&= \frac{1}{d\mu}\left(\frac{\partial}{\partial t}d\mu\right) - \frac{n(-4\pi)}{8\pi\tau} = \frac{1}{d\mu}\frac{1}{2}(Tr_g h)\, d\mu + \frac{n}{2\tau} \\
&= \frac{1}{2}(Tr_g h) + \frac{n}{2\tau} = \frac{1}{2}\left(Tr_g\frac{\partial g}{\partial t}\right) + \frac{n}{2\tau} = \frac{1}{2}(Tr_g(-2Ric - 2Hess(f))) + \frac{n}{2\tau} \\
&= -S - \Delta f + \frac{n}{2\tau}.
\end{aligned}$$

Logo temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric - 2Hess(f) \\ \frac{\partial f}{\partial t} = -S - \Delta f + \frac{n}{2\tau} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} = -1 \end{cases}. \tag{7.3}$$

Pelo Corolário 7.1, $\tau' = -1$ implica que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{W} &= \delta_{(h,f',\tau')}\mathcal{W}(g,f,\tau) = \int_M \left\langle Ric + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}, -\tau\frac{\partial g}{\partial t} + \tau' g\right\rangle dm \\
&= \int_M \left(\left\langle Ric + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}, -\tau(-2Ric - 2Hess(f)) - g\right\rangle\right) dm \\
&= \int_M \left(\left\langle Ric + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}, 2\tau(Ric + Hess(f)) - \frac{2\tau}{2\tau}g\right\rangle\right) dm \\
&= 2\tau\int_M \left(\left\langle Ric + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}, Ric + Hess(f) - \frac{1}{2\tau}g\right\rangle\right) dm \\
&= 2\tau\int_M \left|Ric + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}\right|^2 dm \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

ou seja, sob o conjunto das soluções do sistema (7.3), $\mathcal{W}$ é uma função monótona. Fazendo a mesma mudança por difeomorfismo efetuada na Seção 6.2, obtemos diretamente o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{g}}{\partial t} = -2Ric \\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = -S - \Delta \overline{f} + \left|\nabla \overline{f}\right|^2 + \frac{n}{2\tau} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} = -1 \end{cases} . \tag{7.4}$$

Este sistema inclue o fluxo de Ricci. Segue agora, por um argumento semelhante ao da Seção 6.2, que temos o seguinte resultado de monotonicidade para o funcional $\mathcal{W}$:

Proposição 7.2 *Se* $\left(\overline{g}(t), \overline{f}(t), \tau(t)\right) \in \mathfrak{Met} \times C^{\infty}(M) \times \mathbb{R}^{+}$, $t \in I$, *é uma solução de (7.4) em uma variedade fechada* M, *então*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}\left(\overline{g}(t), \overline{f}(t), \tau(t)\right) = \int_M 2\tau \left| Ric + Hess(\overline{f}) - \frac{\overline{g}}{2\tau}\right|^2 dm.$$

Demonstração. De fato, pela Observação 7.1, $\mathcal{W}\left(\overline{g}(t), \overline{f}(t), \tau(t)\right) = \mathcal{W}(g(t), f(t), \tau(t))$. Portanto, fazendo mudança de variáveis, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{W}\left(\overline{g}(t), \overline{f}(t), \tau(t)\right) &= \frac{d}{dt}\mathcal{W}(g(t), f(t), \tau(t)) = \int_M 2\tau \left| Ric + Hess(f) - \frac{g}{2\tau}\right|^2 dm \\ &= \int_M 2\tau \left| Ric + Hess(\overline{f}) - \frac{\overline{g}}{2\tau}\right|^2 dm. \end{aligned}$$

■

O μ - Funcional

Considere uma variedade diferenciável M e seja $\mathfrak{Met}$ o espaço das métricas suaves em M. Vamos olhar agora para o funcional $\mu : \mathfrak{Met} \times \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mu(g, \tau) := \inf \left\{\mathcal{W}(g, f, \tau) : f \in C^{\infty}(M) \text{ é compatível com } g \text{ e } \tau\right\},$$

em que (g, f, τ) é dita **compatível** se

$$\int_M u d\mu = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} \int_M e^{-f} d\mu = 1.$$

Como veremos, o funcional μ desempenha um papel importante na prova do resultado do não colapso local da próxima seção. Antes de podermos fazer isso, precisamos verificar que μ é monótono e limitado por baixo e que o ínfimo é alcançado.

Observação 7.2 *Seja M uma variedade diferenciável e $c \in \mathbb{R}$ um escalar. Temos que $\mu(cg, c\tau) = \mu(g, \tau)$. De fato, pela definição de μ e pela Observação 7.1,*

$$\begin{aligned} \mu(cg, c\tau) &= \inf\{\mathcal{W}(cg, f, c\tau) : f \in C^{\infty}(M) \text{ é compatível com } g \text{ e } \tau\} \\ &= \inf\{\mathcal{W}(g, f, \tau) : f \in C^{\infty}(M) \text{ é compatível com } g \text{ e } \tau\} \\ &= \mu(g, \tau). \end{aligned}$$

Além disso, $\mu(\Phi^* g, \tau) = \mu(g, \tau)$, para todo difeomorfismo, Φ, de M. De fato,

$$\begin{aligned} \mu(\Phi^* g, \tau) &= \inf\{\mathcal{W}(\Phi^* g, f, \tau) : f \in C^{\infty}(M) \text{ é compatível com } g \text{ e } \tau\} \\ &= \inf\{\mathcal{W}(\Phi^* g, \Phi^* f, \tau) : f \in C^{\infty}(M) \text{ é compatível com } g \text{ e } \tau\} \\ &= \inf\{\mathcal{W}(g, f, \tau) : f \in C^{\infty}(M) \text{ é compatível com } g \text{ e } \tau\} \\ &= \mu(g, \tau). \end{aligned}$$

A próxima Proposição nos garante uma limitação inferior para μ :

Proposição 7.3 (μ é Limitada por Baixo) *Considere uma variedade diferenciável fechada M, $g \in \mathfrak{Met}$ uma métrica suave em M e $\tau > 0$. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{W}(g, f, \tau) \geq c$, para todo $f \in C^{\infty}(M)$ compatível com g e τ. Consequentemente, $\mu(g, \tau) \geq c$.*

Demonstração. Pela propriedade de reescalonamento, $\mu(g, 1) = \mu(\tau g, \tau)$. Logo podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tau = 1$. Seja $w := \sqrt{u} = (4\pi\tau)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{f}{2}} > 0$ com $\int_M w^2 d\mu = 1$ (de fato, f é compatível com g e τ). Segue da definição de w que $f = -2 \ln w - \frac{n}{2} \ln 4\pi$ e com isso,

$$\nabla f = -\frac{2}{w} \nabla w.$$

Assim, podemos escrever $\mathcal{W}(g,f,\tau)$ em termos de w da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(g,f,1) &= \int_M \left(\left(S+|\nabla f|^2\right)+f-n\right)ud\mu \qquad (7.5)\\
&= \int_M \left(\left(S+\left|-\frac{2}{w}\nabla w\right|^2\right)+\left(-2\ln w-\frac{n}{2}\ln 4\pi\right)-n\right)w^2d\mu\\
&= \int_M \left(\left(S+\frac{4}{w^2}|\nabla w|^2\right)+\left(-2\ln w-\frac{n}{2}\ln 4\pi\right)-n\right)w^2d\mu\\
&= \int_M 4|\nabla w|^2+\left(S-2\ln w-\frac{n}{2}\ln 4\pi-n\right)w^2d\mu\\
&=: \mathcal{H}(g,w).
\end{aligned}$$

Como M é fechada, segue que

$$S-n-\frac{n}{2}\ln 4\pi \geq \inf_{x\in M} S-n-\frac{n}{2}\ln 4\pi > C > -\infty.$$

O único termo que é um problema é $w^2\ln w$. Felizmente, a **desigualdade do logarítmo de Sobolev** nos permite limitá-lo por um termo do **tipo Dirichlet**. Segue do Lema abaixo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(g,w) &= \int_M 4|\nabla w|^2+\left(S-2\ln w-\frac{n}{2}\ln 4\pi-n\right)w^2d\mu\\
&= \int_M \left(4|\nabla w|^2-2w^2\ln w\right)d\mu+\int_M\left(S-\frac{n}{2}\ln 4\pi-n\right)w^2d\mu\\
&\geq \int_M \left(4|\nabla w|^2-2w^2\ln w\right)d\mu+\int_M Cw^2d\mu\\
&= \int_M 4|\nabla w|^2d\mu-2\int_M w^2\ln w d\mu+\int_M Cw^2d\mu \qquad (7.6)\\
&\geq \int_M 4|\nabla w|^2d\mu-2\int_M|\nabla w|^2d\mu-C(1,g)+\int_M Cw^2d\mu\\
&= 2\int_M|\nabla w|^2d\mu-C(1,g)+C\\
&\geq C-C(1,g).
\end{aligned}$$

■

Lema 7.1 (Desigualdade do logarítmo de Sobolev) *Seja (M,g) uma variedade riemanniana fechada. Para todo $a>0$ existe uma constante $C=C(a,g)\in\mathbb{R}$ tal que se $\varphi>0$ satisfaz a identidade $\int_M\varphi^2d\mu=1$, então*

$$\int_M \varphi^2(\ln\varphi)\,d\mu \leq a\int_M|\nabla\varphi|^2d\mu+C(a,g).$$

Demonstração. Devido aos vários resultados preliminares necessários e a sua baixa importância para o desenvolvimento da teoria, vamos omitir sua demonstração. O leitor pode encontrá-la no livro Bennett Chow, Peng Lu, and Lei Ni, Hamilton's Ricci flow, Graduate Studies in Mathematics, vol. 77, AMS, 2006. p.184. ■

Agora vamos exibir uma esboço da demonstração de que a aplicação $\mathcal{W}(g, \cdot, \tau)$ é sempre minimizada por uma função suave:

Proposição 7.4 (Existência de um Minimizante Suave) *Para toda métrica suave $g \in \mathfrak{Met}$ em uma variedade fechada M e $\tau > 0$, o ínfimo de $\mathcal{W}$ sobre todas as funções f compatíveis é alcançado por uma função minimizante suave compatível f_∞.*

Um esboço da demonstração. Novamente, sem perda de generalidade, podemos supor que $\tau = 1$ e vamos definir $\mathcal{H}(g, w)$ como na expressão (7.5). Vamos utilizar métodos diretos do cálculo das variações para mostrar que $\mathcal{H}$ possui um minimizante. Segue da estimativa (7.6) que toda sequência minimizante $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funções compatíveis para $\mathcal{H}(g, \cdot)$ (isto é, funções que são positivas e satisfazem $\int_M w^2 = 1$) possuem **energia de Dirichlet** limitada, isto é, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{2}\int_M |\nabla w_k|^2 \leq C_k.$$

Além disso, existe uma subsequência que converge fracamente para o limite $w \in W^{1,2}$, o $(1,2)$-espaço de Sobolev (para mais detalhes veja a Definição E.2), isto é, $w, Dw \in L^2(M)$ (em que Dw é a derivada de w no sentido das distribuições). Pelas boas propriedades da energia de Dirichlet, segue que

$$\int_M |\nabla w|^2 \leq \int_M \left|\nabla \liminf_{k\to\infty} w_k\right|^2 = \liminf_{k\to\infty} \int_M |\nabla w_k|^2 = \liminf_{k\to\infty} \|w_k\|^2_{W^{1,2}}$$

Vamos utilizar o **teorema de compacidade de Rellich**, que nos diz o seguinte: "Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio regular limitado com $1 \leq p < n$ e $\subset 1 \leq q < p^* = np/(n-p)$, os conjuntos limitados em $W^{1,p}(\Omega)$ são pré-compactos em $L^q(\Omega)$ (para mais detalhes veja a Seção E.0.3). Em particular, se $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções em $W^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C$, onde C independe de k, então existe uma subsequência de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge em $L^q(\Omega)$".

Segue da desigualdade e do teorema de compacidade de Rellich que $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge em $L^q(\Omega)$, para todo $q < 2n/(n-2)$. Em particular, para $q = 2$ temos que

$$\int_M w^2 = 1.$$

De fato, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no produto interno canônico por integração, vemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k\to\infty} \|w_k - w\|_2^2 = \lim_{k\to\infty} \int_M |w_k - w|^2 \, d\mu \geq \lim_{k\to\infty} \int_M (|w_k| - |w|)^2 \, d\mu \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_M |w_k|^2 \, d\mu - 2 \int_M |w_k| \, |w| \, d\mu + \int_M |w|^2 \, d\mu \\
&\geq \lim_{k\to\infty} \int_M |w_k|^2 \, d\mu - 2 \int_M |w_k|^2 \, d\mu \int_M |w|^2 \, d\mu + \int_M |w|^2 \, d\mu \\
&= 1 - 2 \int_M |w|^2 \, d\mu + \int_M |w|^2 \, d\mu \\
&= 1 - \int_M w^2 d\mu.
\end{aligned}$$

Além disso, como $\|w_k - w\|_2^2 \to 0$ (em que $\|\cdot\|_2$ é a norma do espaço L^2), segue que $\left|\int_M Sw_k^2 d\mu - \int_M Sw^2 d\mu\right|$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_M |S| \left|w_k^2 - w^2\right| d\mu \\
&\leq \max_M |S| \int_M \left|w_k^2 - w^2\right| d\mu = \left(\max_M S\right) \int_M |w_k - w| \, |w_k + w| \, d\mu \\
&\leq \left(\max_M |S|\right) \sqrt{\int_M (w_k - w)^2 \, d\mu} \sqrt{\int_M (w_k + w)^2 \, d\mu} \\
&\leq \left(\max_M |S|\right) \sqrt{\int_M (w_k - w)^2 \, d\mu} \sqrt{\int_M (w_k - w + 2w)^2 \, d\mu} \\
&= \left(\max_M |S|\right) \sqrt{\int_M (w_k - w)^2 \, d\mu} \sqrt{\int_M (w_k - w)^2 + 4 (w_k - w) \, w + 4w^2 d\mu} \\
&= \left(\max_M |S|\right) \sqrt{\int_M (w_k - w)^2 \, d\mu} \sqrt{\int_M (w_k - w)^2 \, d\mu + 4 \int_M (w_k - w) \, w d\mu + 4 \int_M w^2 d\mu}
\end{aligned}$$

Tomando o módulo no quarto termo, vemos que

$$\left|\int_M Sw_k^2 d\mu - \int_M Sw^2 d\mu\right| \leq \left(\max_M |S|\right) \sqrt{\int_M (w_k - w)^2 \, d\mu} \sqrt{\int_M (w_k - w)^2 \, d\mu + 4 \int_M |w_k - w| \, |w| \, d\mu + 4 \int_M w^2 d\mu}$$

$$\leq \left(\max_M |S|\right) \sqrt{\int_M (w_k - w)^2 \, d\mu} \left(\sqrt{\int_M (w_k - w)^2 \, d\mu} + \sqrt{4 \int_M |w_k - w| \, |w| \, d\mu} + \sqrt{4 \int_M w^2 d\mu}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\max_M |S|\right)\sqrt{\int_M (w_k-w)^2\,d\mu}\left(\sqrt{\int_M (w_k-w)^2\,d\mu}+2\sqrt{\sqrt{\int_M |w_k-w|^2\,d\mu}\sqrt{\int_M |w|^2\,d\mu}}+\sqrt{4\int_M w^2 d\mu}\right)\\
&\leq \left(\max_M |S|\right)\sqrt{\int_M (w_k-w)^2\,d\mu}\left(\sqrt{\int_M (w_k-w)^2\,d\mu}+2\left(\int_M |w_k-w|^2\,d\mu\int_M |w|^2\,d\mu\right)^{1/4}+\sqrt{4\int_M w^2 d\mu}\right)\\
&\overset{k\to\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

em que as integrais sempre existem pois M é compacta. Ou seja,

$$\lim_{k\to\infty}\int_M S w_k^2 d\mu = \int_M S w^2 d\mu.$$

Queremos mostrar que a integral de $w^2 \ln w$ na definição de $\mathcal{H}$ também converge. Para ver isso, seja $\rho := w^2 \ln w$ e note que

$$\nabla\rho = (2w\ln w + w)\,\nabla w.$$

Para todo $\varepsilon > 0$ existem $c_1, c_2 > 0$ suficientemente grandes tais que

$$|w \ln w| \leq c_1 + c_2 w^{1+\varepsilon/2},$$

logo, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla\rho|\,d\mu &= \int_M |(2w\ln w + w)\,\nabla w|\,d\mu \leq \int_M \left|\left(2c_1+2c_2w^{1+\varepsilon/2}+w\right)\nabla w\right| d\mu\\
&\leq \int_M |(2c_1+w)\,\nabla w|\,d\mu + 2\int_M \left|c_2 w^{1+\varepsilon/2}\nabla w\right| d\mu\\
&\leq \left(\int_M |2c_1+w|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M |\nabla w|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad +2\left(\int_M \left|c_2 w^{1+\varepsilon/2}\right|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M |\nabla w|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int_M |2c_1+w|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M |\nabla w|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}} + 2c_2\left(\int_M |w|^{2+\varepsilon}\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M |\nabla w|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Trivialmente, $\left(\int_M |\nabla w|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}} = \|w\|_{W^{1,2}}$ é limitado por $\|w\|_{W^{1,2}}$. E usando as **desigualdades de Sobolev**, isto é, $\|w\|_{L^{p^*}} \leq C\,\|w\|_{W^{1,p}}$ em que $1 \leq p < n$, pode-se mostrar que os outros termos são limitados por $\|w\|_{W^{1,2}}$ também. Usando o teorema de compacidade de Rellich novamente, vemos que a sequência $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que convergente em L^1, isto é, à menos de passar o limite em uma subsequência,

$$\int_M \rho_k d\mu \overset{k\to\infty}{\to} \int_M \rho d\mu.$$

Segue disso que, fixando uma métrica $g \in \mathfrak{Met}$, $\mathcal{H}(w) \leq \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}(w_k) = \inf \mathcal{H}$, isto é, w é um minimizante de $\mathcal{H}$ e é compatível. Assim, por definição, vemos que $\mathcal{H}(g, w) = \mu(g, 1)$.

Como w é limite de funções positivas, segue que $w \geq 0$. A primeira fórmula de variação nos mostra que w é uma solução fraca da equação de Euler-Lagrange para $\mathcal{H}$, que é a seguinte equação:

$$\Delta w + \left(2 \ln w + n + \frac{n}{2} \ln 4\pi - S + \mu\right) w/4 = 0.$$

Usando técnicas da teoria de EDP, queremos mostrar que w é suave e positiva. Isso é um pouco sutil devido à presença da não linearidade logarítmica.

Pode-se mostrar que w pertence ao **espaço de Holder** $C^{0,\alpha}$, para algum $\alpha > 0$ (para mais detalhes veja a Seção E.0.4). Agora vamos mostrar que $w \ln w$ pertence ao **espaço de Holder** $C^{0,\beta}$, para todo $\beta < \alpha$: Como $0 \leq w \leq K$ (pois $\int_M w^2 d\mu = 1 < \infty$), para algum $K \geq 0$, nós temos, para todo $\varepsilon > 0$, uma constante $C(\varepsilon)$ tal que $|\ln w| \leq C(\varepsilon) + w^{-\varepsilon}$. Mas então, escrevendo $w_s := (1-s)\,w(x) + sw(y)$ e assumindo que $w(y) > w(x)$, vale a seguinte igualdade:

$$|(w \ln w)(x) - (w \ln w)(y)| = \left| \int_0^1 (1 + \ln w_s)(w(y) - w(x))\, ds \right|.$$

De fato, desenvolvendo o lado direito da igualdade, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1 + \ln w_s)(w(y) - w(x))\, ds &= (w(y) - w(x)) \int_0^1 ds + (w(y) - w(x)) \int_0^1 \ln w_s ds \\
&= w(y) - w(x) + (w(y) - w(x)) \int_0^1 \ln\left((1-s)w(x) + sw(y)\right) ds \\
&= w(y) - w(x) + (w(y) - w(x)) \left.\frac{((1-s)\,w(x) \ln\left((1-s)w(x) + sw(y)\right))}{w(y) - w(x)}\right|_{s=0}^{s=1} \\
&\quad + (w(y) - w(x)) \left.\frac{(sw(y) \ln\left((1-s)w(x) + sw(y)\right) - (1-s)w(x) - sw(y))}{w(y) - w(x)}\right|_{s=0}^{s=1} \\
&= w(y) - w(x) + (w(y) \ln(w(y)) - w(y) - w(x) \ln(w(x)) + w(x)) \\
&= w(y) \ln(w(y)) - w(x) \ln(w(x)).
\end{aligned}$$

Trabalhando essa igualdade, vemos que

$$|(w \ln w)(x) - (w \ln w)(y)| = \left| \int_0^1 (1 + \ln w_s)(w(y) - w(x))\, ds \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 (1 + |\ln w_s|)\,|w(y) - w(x)|\,ds \\
&\leq \int_0^1 \left(C(\varepsilon) + w_s^{-\varepsilon}\right)|w(y) - w(x)|\,ds \\
&= |w(y) - w(x)| \int_0^1 \left(C(\varepsilon) + w_s^{-\varepsilon}\right) ds \\
&= (w(y) - w(x)) \left(C(\varepsilon) + \left(\frac{w_s^{-\varepsilon+1}}{(1-\varepsilon)\,(w(y) - w(x))}\right)_{s=0}^{s=1}\right) \\
&= (w(y) - w(x))\,C(\varepsilon) + \frac{1}{(1-\varepsilon)}\left((w(y))^{1-\varepsilon} - (w(x))^{1-\varepsilon}\right).
\end{aligned}
$$

Agora notemos que

$$
\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\int_0^1 w_s^{-\varepsilon}\,(w(y) - w(x))\,ds &= (1-\varepsilon)\,(w(y) - w(x)) \left(\frac{w_s^{1-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)\,(w(y) - w(x))}\right)_{s=0}^{s=1} \\
&= w_1^{1-\varepsilon} - w_0^{1-\varepsilon} \\
&= w(y) - w(x).
\end{aligned}
$$

Como $w \in C^{0,\alpha}$, então w é Hölder contínua com expoente α, logo

$$
\begin{aligned}
|(w \ln w)\,(x) - (w \ln w)\,(y)| &\leq (w(y) - w(x))\,C(\varepsilon) + \frac{1}{(1-\varepsilon)}\left((w(y))^{1-\varepsilon} - (w(x))^{1-\varepsilon}\right) \\
&= (w(y) - w(x))\,C(\varepsilon) + \frac{1}{(1-\varepsilon)}\,(1-\varepsilon)\int_0^1 w_s^{-\varepsilon}\,(w(y) - w(x))\,ds.
\end{aligned}
$$

Simplificando a expressão, vemos que

$$
\begin{aligned}
|(w \ln w)\,(x) - (w \ln w)\,(y)| &\leq (w(y) - w(x))\,C(\varepsilon) + \int_0^1 w_s^{-\varepsilon}\,(w(y) - w(x))\,ds \\
&= (w(y) - w(x))\,C(\varepsilon) + (w(y) - w(x))^{1-\varepsilon} \\
&\leq (d\,(y,x))^{\alpha}\,C(\varepsilon) + (d\,(y,x))^{\alpha(1-\varepsilon)} \\
&= (d\,(y,x))^{\alpha(1-\varepsilon)}\,(d\,(y,x))^{\alpha\varepsilon}\,C(\varepsilon) + (d\,(y,x))^{\alpha(1-\varepsilon)} \\
&= (d\,(y,x))^{\alpha(1-\varepsilon)}\,((d\,(y,x))^{\alpha\varepsilon}\,C(\varepsilon) + 1) \\
&=: C\,(d\,(y,x))^{\alpha(1-\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Assim, $w \ln w$ é Holder contínua com expoente $\alpha\,(1-\varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$, como queríamos. Algumas estimativas, as chamadas estimativas de Schauder, (para mais detalhes veja [10, Teorema 6.2]) podem então ser utilizadas para vermos que $w \in C^{2,\beta}$. Em particular, w é uma solução clássica da equação.

Um princípio de máximo forte implica que w tem um limite positivo abaixo, de modo que $w \ln w$ é uma função suave de w, e então $C^{2,\beta}$. Uma maior regularidade segue das estimativas de Schauder, logo $w \in C^{\infty}(M)$. ■

Agora vamos demonstrar que o μ-funcional é monótono, para isso precisamos entender a noção de "operador de calor conjugado"e uma propriedade específica:

Definindo o operador $\square := \frac{\partial}{\partial t} - \triangle$ agindo em $C^{\infty}(M \times [0,T))$, e calculando $\frac{d}{dt}\int vw$, vemos que o **operador de calor conjugado** $\square^* := -\frac{\partial}{\partial t} - \triangle + S$, em que S é a curvatura escalar, é conjulgado à $\square$ no seguinte sentido:

Lema 7.2 *Seja M uma variedade diferenciável compacta. Se $g(t)$, $t \in [0,T)$ é uma solução do fluxo de Ricci e $v, w \in C^{\infty}(M \times [0,T))$, então*

$$\int_0^T \left(\int_M (\square v)\, w d\mu \right) dt = \left[\int_M vwd\mu \right]_0^T + \int_0^T \left(\int_M v\, (\square^* w)\, d\mu \right) dt.$$

Demonstração. Usando o fato de $g(t)$ ser solução do fluxo de Ricci e o Teorema de Stokes, vemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_M (\square v)\, wd\mu &= \int_0^T \int_M \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \triangle v \right) wd\mu = \int_0^T \int_M \frac{\partial v}{\partial t} wd\mu - \int_0^T \int_M (\triangle v)\, wd\mu \\
&= \int_0^T \int_M \frac{\partial v}{\partial t} wd\mu - \int_0^T \int_M v \triangle wd\mu \\
&= \int_0^T \int_M \left(\frac{\partial}{\partial t}(vwd\mu) - v\frac{\partial w}{\partial t} d\mu - vw\frac{\partial d\mu}{\partial t} \right) - \int_0^T \int_M v\triangle wd\mu \\
&= \int_0^T \int_M \left(\frac{\partial}{\partial t}(vwd\mu) - v\frac{\partial w}{\partial t} d\mu + vwSd\mu \right) - \int_0^T \int_M v\triangle wd\mu \\
&= \int_0^T \int_M \frac{\partial}{\partial t}(vwd\mu) - \int_0^T \int_M v\frac{\partial w}{\partial t} d\mu + \int_0^T \int_M vwSd\mu - \int_0^T \int_M v\triangle wd\mu \\
&= \left(\int_M vwd\mu \right)_0^T + \int_0^T \int_M v \left(-\frac{\partial w}{\partial t} - \triangle w + Sw \right) d\mu \\
&= \left(\int_M vwd\mu \right)_0^T + \int_0^T \int_M v\, (\square^* w)\, d\mu.
\end{aligned}$$

■

Com esse Lema, podemos demonstrar a monotonicidade da aplicação μ:

Proposição 7.5 (Monotonicidade de μ) *Se $(g(t), \tau(t))$, $t \in [0,T)$, é solução do sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} = -1 \end{cases},$$

em uma variedade fechada M com $\tau(t) > 0$, então $\mu(g,\tau)$ é uma aplicação monótona decrescente, isto é,

$$\mu(g(t_2), \tau(t_2)) \leq \mu(g(t_1), \tau(t_1)),$$

para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 < T$.

Demonstração. Para todo $t_0 \in [0,T)$, seja f solução da segunda equação do sistema (7.4) definida no intervalo $[0, t_0]$ com

$$f_{|t=t_0} = \arg\min \left\{ \mathcal{W}\left(g(t_0), \widehat{f}, \tau(t_0)\right) : \widehat{f} \in C^\infty(M) \text{ compatível com } g \text{ e } \tau \right\}.$$

Pela Proposição 7.2, a monotonicidade de $\mathcal{W}$ implica que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{W}(g(t), f(t), \tau(t)) \geq 0,$$

para todo $t \in [0, t_0]$. Notemos que a compatibilidade é preservada pelo fluxo no sistema (7.4), já que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} d\mu &= \int_M \frac{d}{dt}\left((4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} d\mu\right) \\
&= \int_M \frac{d}{dt}\left((4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}}\right) e^{-f} d\mu \\
&\quad + \int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} \frac{d}{dt}\left(e^{-f}\right) d\mu + \int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} \frac{d}{dt}(d\mu) \\
&= \int_M -\frac{n}{2}(4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}-1} \frac{\partial \tau}{\partial t} e^{-f} d\mu + \int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial t} e^{-f}\right) d\mu \\
&\quad + \int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} \left(\frac{1}{2} Tr_g\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right) d\mu \\
&= \int_M \frac{n}{2}(4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}-1} e^{-f} d\mu + \int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial t} e^{-f}\right) d\mu \\
&\quad + \int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} \left(\frac{1}{2} Tr_g(-2Ric)\right) d\mu.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} d\mu &= \int_M \left(\frac{n}{2}(4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}-1} e^{-f} + (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}}\left(-\frac{\partial f}{\partial t}e^{-f}\right) + (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f}\left(\frac{1}{2}Tr_g(-2Ric)\right)\right) d\mu \\
&= \int_M \left(\frac{n}{2}(4\pi\tau)^{-1} - \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}Tr_g(-2Ric)\right)\right) u d\mu \\
&= \int_M \left(\frac{n}{2}(4\pi\tau)^{-1} - \frac{\partial f}{\partial t} - S\right) u d\mu \\
&= \int_M \left(\frac{\partial u}{\partial t} - Su\right) d\mu \\
&= \int_M (-\Delta u - \Box^* u)\, d\mu \\
&= \int_M (-\Delta u)\, d\mu \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde usamos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{n}{2}(4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}-1} e^{-f} - \frac{\partial f}{\partial t}(4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} = \frac{n}{2}(4\pi\tau)^{-1} u - \frac{\partial f}{\partial t} u = \left(\frac{n}{8\pi\tau} - \frac{\partial f}{\partial t}\right) u,$$

e além disso, pelo Lema 7.2 e pelo fato de f ser compatível,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left(\int_M (\Box^* u)\, d\mu\right) dt &= \int_0^t \left(\int_M (\Box^* u) \times 1 d\mu\right) dt \overset{\text{Lema } 7.2}{=} \int_0^t \left(\int_M (\Box 1)\, u d\mu\right) dt - \left(\int_M u d\mu\right)_0^t \\
&= \int_0^t \left(\int_M 0 u d\mu\right) dt - (1)_0^t = 0 - (1-1) = 0,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T)$, logo $\int_M (\Box^* u)\, d\mu = 0$.

Assim, para todo $t \in [0,T)$ temos que

$$\mu(g(t), \tau(t)) \leq \mathcal{W}(g(t), f(t), \tau(t)) \leq \mathcal{W}(g(t_0), f(t_0), \tau(t_0)) = \mu(g(t_0), \tau(t_0)),$$

onde a última igualdade é por construção. ■

Em particular, fazendo $\tau(s) = -s + r^2 + t_2$, em que $t_1 = 0$ e $t_2 = t$, obtemos a seguinte desigualdade:

Corolário 7.2 *Se $g(t)$, $t \in [0,T)$, é solução do fluxo de Ricci em uma variedade fechada M. Então para todo $t \in [0,T)$ e todo $r > 0$, temos que*

$$\mu\left(g(0), r^2 + t\right) \leq \mu\left(g(t), r^2\right). \tag{7.7}$$

7.2 O Não Colapso Local

Para provar os limites de injetividade desejados, basta trabalhar com o volume. Isso é necessário, pois é difícil trabalhar diretamente com o raio de injetividade. Mostraremos que existe um limitante inferior na razão de colapso de volume sob o fluxo de Ricci, estabelecendo um limite superior em μ em termos de várias quantidades geométricas. A partir disso, demonstraremos uma versão mais forte do resultado de "não colapso local", onde apenas um limite pontual na curvatura escalar S é necessário em vez do tensor de curvatura riemanniana R.

Proposição 7.6 *Seja (M, g) uma variedade riemanniana fechada. Então existe $A > 0$ tal que, para todo ponto $p \in M$ e todo $r > 0$,*

$$\mu\left(g, r^2\right) \leq \ln\left(\frac{Vol\left(B\left(p, r\right)\right)}{r^n}\right) + \left(36A^2 + r^2 \int_{B(p,r)} |S| d\mu\right) \frac{Vol\left(B\left(p, r\right)\right)}{Vol\left(B\left(p, r/2\right)\right)}. \tag{7.8}$$

Observação 7.3 *Observe que o primeiro termo do lado direito da desigualdade é a razão de volume desejada. Procuremos vincular os outros termos sob condições razoáveis nos dados iniciais.*

Demonstração. Escolha $\tau := r^2$ e seja $w := \sqrt{u}$ de forma que $\int_M w^2 d\mu = 1$. Como

$$\sqrt{u} = \left(4\pi\tau\right)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{f}{2}} = \left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{f}{2}},$$

ao isolar f vemos que

$$f = -2 \ln w - \frac{n}{2} \ln\left(4\pi r^2\right),$$

e por consequência,

$$\nabla f = -\frac{2}{w} \nabla w.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as funções $f \in C^\infty(M)$ compatíveis com g e τ, vemos que

$$\begin{aligned}
\mu\left(g, r^2\right) &\leq \mathcal{W}\left(g, f, r^2\right) = \int_M \left(\tau\left(S + |\nabla f|^2\right) + f - n\right) u d\mu \\
&= \int_M \left(r^2\left(S + \left|-\frac{2}{w}\nabla w\right|^2\right) + f - n\right) w^2 d\mu \\
&= \int_M \left(r^2\left(S + \frac{4}{w^2}|\nabla w|^2\right) + f - n\right) w^2 d\mu \\
&= \int_M \left(r^2\left(S w^2 + 4|\nabla w|^2\right) + (f - n) w^2\right) d\mu. \qquad (7.9)
\end{aligned}$$

Agora fazemos uma escolha criteriosa de f compatível de modo que o lado direito da igualdade (7.9) reflita a geometria local em um ponto $p \in M$ em relação à métrica g. Em particular, seja

$$f\left(x\right) := c - \ln\left(\left(\phi\left(\frac{d_g\left(x,p\right)}{r}\right)\right)^2\right),$$

segue disso que

$$\begin{aligned} \left(w\left(x\right)\right)^2 &= \left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} \\ &= \left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-c} e^{\ln\left(\left(\phi\left(\frac{d_g(x,p)}{r}\right)\right)^2\right)} \\ &= \left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-c}\left(\phi\left(\frac{d_g\left(x,p\right)}{r}\right)\right)^2, \end{aligned} \tag{7.10}$$

em que $c\left(n,g,x,r\right)$ é escolhido de modo que $\int_M w^2 d\mu = 1$, $d_g\left(x,p\right)$ é a distância de x à p na métrica g e $\phi : [0,\infty) \to [0,1]$ é a **função de corte suave** distribuída de modo que $\phi\left(y\right) = 1$, para todo $y \in [0,1/2]$ e $\phi\left(y\right) = 0$, para todo $y \in [1,\infty)$ com uma inclinação escolhida de modo que $\left|\phi'\left(y\right)\right| \leq 3$, para todo $1/2 \leq y \leq 1$.

Afirmação: A constante $c \in \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{Vol\left(B\left(p,r\right)\right)} \leq \left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-c} \leq \frac{1}{Vol\left(B\left(p,r/2\right)\right)} \tag{7.11}$$

Demonstração da Afirmação: Como $|\phi| \leq 1$ e $supp\left(w\right) \subset B\left(p,r\right)$ (vide a expressão (7.10)), então

$$\begin{aligned} 1 &= \int_M w^2 d\mu = \int_{B(p,r)} w^2 d\mu = \int_{B(p,r)} \left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-c}\left(\phi\left(\frac{d_g\left(x,p\right)}{r}\right)\right)^2 d\mu \\ &\leq \left|\int_{B(p,r)} \left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-c}\left(\phi\left(\frac{d_g\left(x,p\right)}{r}\right)\right)^2 d\mu\right| \\ &\leq \int_{B(p,r)} \left|\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-c}\left(\phi\left(\frac{d_g\left(x,p\right)}{r}\right)\right)^2\right| d\mu \\ &\leq \int_{B(p,r)} \left|\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-c}\right| d\mu \\ &= \int_{B(p,r)} \left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-c} d\mu \\ &= \left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-c}\int_{B(p,r)} d\mu \\ &= \left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-c} Vol\left(B\left(p,r\right)\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{Vol\left(B\left(p,r\right)\right)}\leq\left(4\pi r^{2}\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}$$

Mais ainda, como $\varphi\left(y\right)=1$, para $0\leq y\leq 1/2$, segue que

$$\begin{aligned}1 &= \int_{M}w^{2}d\mu=\int_{B(p,r)}w^{2}d\mu\geq\int_{B(p,r/2)}w^{2}d\mu=\int_{B(p,r/2)}\left(4\pi r^{2}\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}\left(\phi\left(\frac{d_{g}\left(x,p\right)}{r}\right)\right)^{2}d\mu\\ &= \int_{B(p,r/2)}\left(4\pi r^{2}\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}d\mu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left(4\pi r^{2}\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}\int_{B(p,r/2)}d\mu\\ &= \left(4\pi r^{2}\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}Vol\left(B\left(p,r/2\right)\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(4\pi r^{2}\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}\leq\frac{1}{Vol\left(B\left(p,r/2\right)\right)}.$$

Agora vamos estimar cada um dos termos da expressão (7.9) separadamente:

Termo 1: Seja $\psi\left(x\right):=\phi\left(d_{g}\left(x,p\right)/r\right).$ Primeiramente notemos que

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\nabla\psi\right)\left(x\right),Y\right\rangle &= d\left(\phi\circ\frac{d_{g}\left(\cdot,p\right)}{r}\right)_{x}\left(Y\right)=d\phi_{\frac{d_{g}(x,p)}{r}}\circ d\left(\frac{d_{g}\left(\cdot,p\right)}{r}\right)_{x}\left(Y\right)=\phi'\left(\frac{d_{g}\left(x,p\right)}{r}\right)d\left(\frac{d_{g}\left(\cdot,p\right)}{r}\right)_{x}\left(Y\right)\\ &= \phi'\left(\frac{d_{g}\left(x,p\right)}{r}\right)\left\langle\nabla\left(\frac{d_{g}\left(\cdot,p\right)}{r}\right),Y\right\rangle=\frac{\phi'\left(\frac{d_{g}(x,p)}{r}\right)}{r}\left\langle\nabla\left(d_{g}\left(\cdot,p\right)\right),Y\right\rangle\\ &= \left\langle\frac{\phi'\left(\frac{d_{g}(x,p)}{r}\right)}{r}\nabla\left(d_{g}\left(\cdot,p\right)\right),Y\right\rangle,\end{aligned}$$

para todo $Y\in T_{x}M$, isto é,

$$\left(\nabla\psi\right)\left(x\right)=\frac{1}{r}\phi'\left(\frac{d_{g}\left(x,p\right)}{r}\right)\nabla\left(d_{g}\left(\cdot,p\right)\right).$$

Segue disso que

$$\left|\left(\nabla\psi\right)\left(x\right)\right|=\left|\frac{1}{r}\phi'\left(\frac{d_{g}\left(x,p\right)}{r}\right)\nabla\left(d_{g}\left(\cdot,p\right)\right)\right|\leq\frac{1}{r}\sup\left|\phi'\right|\sup_{M}\left|\nabla\left(d_{g}\left(\cdot,p\right)\right)\right|\leq\frac{3}{r}\sup_{M}\left|\nabla\left(d_{g}\left(\cdot,p\right)\right)\right|$$

Como tal desigualdade é válida para todo $p\in M$, vemos que

$$\left|\left(\nabla\psi\right)\right|\leq\frac{1}{r}\sup\left|\phi'\right|\min_{p\in M}\sup_{M}\left|\nabla\left(d_{g}\left(\cdot,p\right)\right)\right|=:\frac{3}{r}A$$

Segue da igualdade (7.10) e da definição de ψ, que

$$\nabla w=\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{4}}e^{-\frac{c}{2}}\nabla\psi.$$

Como o suporte do gradiente de ψ está dentro de $B\left(p,r\right)$,vemos da expressão (7.11) que

$$\begin{aligned}4r^2\int_M\left|\nabla w\right|^2d\mu &= 4r^2\int_M\left|\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{4}}e^{-\frac{c}{2}}\nabla\psi\right|^2d\mu=4r^2\int_M\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}\left|\nabla\psi\right|^2d\mu\\ &= 4r^2\int_{B(p,r)}\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}\left|\nabla\psi\right|^2d\mu\\ &\leq 4r^2\int_{B(p,r)}\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}\left(\frac{3}{r}A\right)^2d\mu\\ &= 36A^2\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}\int_{B(p,r)}d\mu\\ &= 36A^2\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}Vol\left(B\left(p,r\right)\right)\\ &\leq \frac{36A^2Vol\left(B\left(p,r\right)\right)}{Vol\left(B\left(p,r/2\right)\right)}.\end{aligned}$$

Termo 2: Como $\phi\equiv 0$ fora de $B\left(p,r\right)$ então pela desigualdade (7.11) concluímos que

$$\begin{aligned}r^2\int_M Sw^2d\mu &= r^2\int_M S\left(\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}\psi^2\right)d\mu=r^2\int_{B(p,r)}S\left(\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}\psi^2\right)d\mu\\ &= r^2\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-c}\int_{B(p,r)}S\psi^2d\mu\leq\frac{r^2}{Vol\left(B\left(p,r/2\right)\right)}\int_{B(p,r)}S\psi^2d\mu\\ &\leq \frac{r^2}{Vol\left(B\left(p,r/2\right)\right)}\int_{B(p,r)}\left|S\psi^2\right|d\mu\leq\frac{r^2}{Vol\left(B\left(p,r/2\right)\right)}\int_{B(p,r)}\left|S\right|d\mu.\end{aligned}$$

Termo 3: Como o suporte $supp\left(w\right)\subset B\left(p,r\right)$ e como $\ln\left(\left(4\pi\right)^{-\frac{n}{2}}\right)<0$, segue que

$$\begin{aligned}\int_M fw^2d\mu &= \int_M\left(-2\ln w-\frac{n}{2}\ln\left(4\pi r^2\right)\right)w^2d\mu\\ &= -\int_M 2\left(\ln w\right)w^2d\mu+\int_M\left(-\frac{n}{2}\ln\left(4\pi r^2\right)\right)w^2d\mu\\ &= -\int_M\left(\ln\left(w^2\right)\right)w^2d\mu+\ln\left(\left(4\pi r^2\right)^{-\frac{n}{2}}\right)\int_M w^2d\mu\\ &= -\int_M\left(\ln\left(w^2\right)\right)w^2d\mu+\left(\ln\left(\left(4\pi\right)^{-\frac{n}{2}}\right)+\ln\left(r^2\right)^{-\frac{n}{2}}\right)\int_M w^2d\mu\\ &< -\int_M\left(\ln\left(w^2\right)\right)w^2d\mu+\ln\left(r^{-n}\right)\int_M w^2d\mu\\ &= -\int_M\left(\ln\left(w^2\right)\right)w^2d\mu+\ln\left(r^{-n}\right)=-\int_{B(p,r)}\left(\ln\left(w^2\right)\right)w^2d\mu+\ln\left(r^{-n}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ln\left(r^{-n}\right) + \ln\left(Vol\left(B\left(p,r\right)\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{Vol\left(B\left(p,r\right)\right)}{r^n}\right),
\end{aligned}
$$

em que a última desigualdade é devido à **desigualdade de Jensen,** que afirma o seguinte: Seja N uma variedade diferenciável, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e $\psi \in L^1\left(N\right)$. Então vale a seguinte desigualdade:

$$
\frac{1}{vol\left(N\right)} \int_N \left(\varphi \circ \psi\right) d\mu \geq \varphi\left(\frac{1}{vol\left(N\right)} \int_N \psi d\mu\right).
$$

Em particular, se $\varphi\left(x\right) = x\ln x$ e $\psi \geq 0$ com $\int_N \psi d\mu = 1$, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_N \left(\psi\ln\psi\right) d\mu &= vol(N)\left(\frac{1}{vol(N)} \int_N \left(\psi\ln\psi\right) d\mu\right) \\
&\geq vol(N)\varphi\left(\frac{1}{vol(N)} \int_N \psi d\mu\right) = vol(N)\varphi\left(\frac{1}{vol(N)}\right) \\
&= vol(N)\frac{1}{vol(N)} \ln\left(\frac{1}{vol(N)}\right) \\
&= -\ln\left(vol(N)\right).
\end{aligned}
$$

■

Motivados pelo lado direito da expressão (7.8), definimos

$$
\begin{aligned}
\upsilon_r\left(g\right) &:= \inf_{\tau \in (0,r^2]} \mu\left(g,\tau\right), \\
M_R\left(p,r\right) &:= \sup_{0<s\leq r} s^2 \int_{B(p,s)} |S| d\mu.
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade (7.8) novamente, segue que

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{Vol\left(B\left(p,s\right)\right)}{s^n}\right) &\geq \mu\left(g,s^2\right) - \left(36A^2 + s^2 \int_{B(p,s)} |S| d\mu\right) \frac{Vol\left(B\left(p,s\right)\right)}{Vol\left(B\left(p,s/2\right)\right)} \\
&\geq \mu\left(g,s^2\right) - \left(36A^2 + M_R\left(p,s\right)\right) \frac{Vol\left(B\left(p,s\right)\right)}{Vol\left(B\left(p,s/2\right)\right)}
\end{aligned}
$$

e assim, concluímos o seguinte:

$$
\frac{Vol\left(B\left(p,s\right)\right)}{s^n} \geq e^{\mu\left(g,s^2\right)} \exp\left(-\left(36A^2 + M_R\left(p,s\right)\right) \frac{Vol\left(B\left(p,s\right)\right)}{Vol\left(B\left(p,s/2\right)\right)}\right). \tag{7.12}
$$

Observação 7.4 *Como* $s^2 \int_{B(p,s)} |S| d\mu \overset{s\to 0}{\to} 0$, *a aplicação* M_R *está bem definida, para todo* $r > 0$. *Como*

$s^2 \geq 0$ *e* $|S| \geq 0$, *segue que se* $r_1 \leq r_2$, *então*

$$M_R(p, r_1) = \sup_{0<s\leq r_1} s^2 \int_{B(p,s)} |S| d\mu \leq \sup_{0<s\leq r_2} s^2 \int_{B(p,s)} |S| d\mu = M_R(p, r_2).$$

Agora procuramos limitar as razões de volume usando υ_r e M_R.

Corolário 7.3 *Se* (M, g) *é uma variedade riemanniana fechada e* $0 < s \leq r$, *então*

$$\frac{Vol(B(p,s))}{s^n} \geq e^{\upsilon_r(g)} \exp\left(-3^n \left(36A^2 + M_R(p,r)\right)\right).$$

Demonstração. Primeiramente, se $\frac{Vol(B(p,s))}{Vol(B(p,s/2))} \leq 3^n$, segue do fato de que $\upsilon_r(g) \leq \mu(g,s)$ e da desigualdade (7.12) que

$$\begin{aligned} \frac{Vol(B(p,s))}{s^n} &\geq e^{\mu\left(g,s^2\right)} \exp\left(-\left(36A^2 + M_R(p,s)\right) \frac{Vol(B(p,s))}{Vol(B(p,s/2))}\right) \\ &\geq e^{\mu\left(g,s^2\right)} \exp\left(-3^n \left(36A^2 + M_R(p,s)\right)\right) \\ &\geq e^{\upsilon_r(g)} \exp\left(-3^n \left(36A^2 + M_R(p,s)\right)\right) \\ &\geq e^{\upsilon_r(g)} \exp\left(-3^n \left(36A^2 + M_R(p,r)\right)\right). \end{aligned}$$

Agora suponhamos que $\frac{Vol(B(p,s))}{Vol(B(p,s/2))} > 3^n$, então

$$\frac{Vol\left(B\left(p, \frac{s}{2^k}\right)\right)}{Vol\left(B\left(p, \frac{s}{2^{k+1}}\right)\right)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 2^n,$$

pois quanto menor o raio, mais próximo da bola euclidiana ambas ficam. Daí basta calcular a fração olhando ambas as bolas como bolas euclidianas e sua expressão resultará em um número tão próximo de 2^n quanto se queira. Logo existe $k > 0$ tal que

$$\frac{Vol\left(B\left(p, \frac{s}{2^k}\right)\right)}{Vol\left(B\left(p, \frac{s}{2^{k+1}}\right)\right)} \leq 3^n.$$

Contudo, $\frac{Vol\left(B\left(p, \frac{s}{2^k}\right)\right)}{Vol\left(B\left(p, \frac{s}{2^{k+1}}\right)\right)} > 3^n$, para todo $0 \leq i < k$ (isto é, este é o primeiro valor k tal que o quociente se torna menor que 3^n). Agora, utilizando a Proposição 7.6 com raio de $\frac{s}{2^k}$, vemos que

$$\mu\left(g, \left(\frac{s}{2^k}\right)^2\right) \leq \ln\left(\frac{Vol\left(B\left(p, \frac{s}{2^k}\right)\right)}{\left(\frac{s}{2^k}\right)^n}\right) + \left(36A^2 + \left(\frac{s}{2^k}\right)^2 \int_{B\left(p, \frac{s}{2^k}\right)} |S| d\mu\right) \frac{Vol\left(B\left(p, \frac{s}{2^k}\right)\right)}{Vol\left(B\left(p, \frac{s}{2^{k+1}}\right)\right)}$$

$$\leq \ln\left(\frac{Vol\left(B\left(p,\frac{s}{2^k}\right)\right)}{\left(\frac{s}{2^k}\right)^n}\right)+3^n\left(36A^2+\left(\frac{s}{2^k}\right)^2\int_{B\left(p,\frac{s}{2^k}\right)}|S|d\mu\right)$$
$$\leq \ln\left(\frac{Vol\left(B\left(p,\frac{s}{2^k}\right)\right)}{\left(\frac{s}{2^k}\right)^n}\right)+3^n\left(36A^2+M_R\left(p,\frac{s}{2^k}\right)\right),$$

e isso implica que

$$e^{\mu\left(g,\left(\frac{s}{2^k}\right)^2\right)}\leq \frac{Vol\left(B\left(p,\frac{s}{2^k}\right)\right)}{\left(\frac{s}{2^k}\right)^n}e^{3^n\left(36A^2+M_R\left(p,\frac{s}{2^k}\right)\right)}.$$

Assim, vemos que

$$\frac{Vol\left(B\left(p,s\right)\right)}{s^n}=\frac{Vol\left(B\left(p,s\right)\right)}{Vol\left(B\left(p,\frac{s}{2}\right)\right)}\frac{Vol\left(B\left(p,\frac{s}{2}\right)\right)}{s^n}>3^n\frac{Vol\left(B\left(p,\frac{s}{2}\right)\right)}{s^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{Vol\left(B\left(p,\frac{s}{2}\right)\right)}{\left(\frac{s}{2}\right)^n}.$$

Fazendo o mesmo procedimento acima k vezes, vemos que

$$\frac{Vol\left(B\left(p,s\right)\right)}{s^n}>\left(\frac{3}{2}\right)^{nk}\frac{Vol\left(B\left(p,\frac{s}{2^k}\right)\right)}{\left(\frac{s}{2^k}\right)^n}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{nk}e^{\mu\left(g,\left(\frac{s}{2^k}\right)^2\right)}e^{-3^n\left(36A^2+M_R\left(p,\frac{s}{2^k}\right)\right)}$$

$$\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{nk}\exp\left(\upsilon_{\frac{s}{2^k}}\left(g\right)\right)\exp\left(-3^n\left(36A^2+M_R\left(p,\frac{s}{2^k}\right)\right)\right)$$
$$\geq \left(\frac{3}{2}\right)^{nk}\exp\left(\upsilon_r\left(g\right)\right)\exp\left(-3^n\left(36A^2+M_R\left(p,r\right)\right)\right)$$
$$\geq \exp\left(\upsilon_r\left(g\right)\right)\exp\left(-3^n\left(36A^2+M_R\left(p,r\right)\right)\right).$$

■

Com isso, temos o seguinte Corolário imediato:

Corolário 7.4 *Seja (M,g) uma variedade fechada com $0\leq s\leq r$. Se $S\leq K\left(n\right)r^{-2}$ em $B\left(p,r\right)$, então $M_R\left(p,r\right)\leq K(n)$, e portanto,*

$$\frac{Vol\left(B\left(p,s\right)\right)}{s^n}\geq e^{\upsilon_r(g)}\exp\left(-3^n\left(36A^2+K(n)\right)\right) \tag{7.13}$$

Por fim, podemos demonstrar o Teorema do Não Colapso Local:

Teorema 7.1 (Não Colapso Local) *Seja $(M,g\left(t\right))$, $t\in[0,T)$, uma solução do fluxo de Ricci em uma variedade fechada com $T<\infty$ e seja $\rho\in(0,\infty)$. Então existe uma constante $\kappa=\kappa\left(n,g\left(0\right),T,\rho\right)>0$ tal* *que, para todo* $p \in M$, $t \in [0,T)$ *e* $r \in (0,\rho]$ *com*

$$S \leq \frac{1}{r^2}$$

em $B_{g(t)}(p,r)$, *vale*

$$\frac{Vol_{g(t)}\left(B_{g(t)}(p,s)\right)}{s^n} \geq \kappa,$$

para todo $0 < s < r$.

Demonstração. Primeiramente, utilizando a definição de υ e a expressão (7.7), vemos que

$$\upsilon_{\sqrt{\rho^2+T}}(g(0)) = \inf_{\tau\in(0,\rho^2+T]} \mu(g(0),\tau) \leq \mu\left(g(0), r^2+t\right) \leq \mu\left(g(t), r^2\right),$$

para todo $r \in (0,\rho]$. Ou seja, $\upsilon_{\sqrt{\rho^2+T}}(g(0))$ é cota inferior para o conjunto

$$\left\{\mu(g(t),\tau) : \tau \in \left(0,\rho^2\right]\right\}.$$

Como, $r \in (0,\rho]$, temos que

$$\left\{\mu(g(t),\tau) : \tau \in \left(0,r^2\right]\right\} \subset \left\{\mu(g(t),\tau) : \tau \in \left(0,\rho^2\right]\right\},$$

ou seja,

$$\upsilon_{\sqrt{\rho^2+T}}(g(0)) \leq \inf\left\{\mu(g(t),\tau) : \tau \in \left(0,r^2\right]\right\} = \upsilon_r(g(t)),$$

para todo $r \in (0,\rho]$ e todo $t \in [0,T)$. o resultado segue da expressão (7.13). ■

O Não Colapso Local Implica em Limitações dos Raios de Injetividade

Pelo Teorema 7.1 podemos agora deduzir um limite inferior positivo no raio de injetividade. Isso completará nossa discussão sobre a explosão de singularidades.

Em uma variedade riemanniana (M,g), lembremos que o **raio de injetividade** $inj(p)$ de um ponto $p \in M$ é definido como o supremo de todo $r > 0$ tal que $\exp_p$ é um mergulho quando restrito à $B_r(0) \subset T_pM$, isto é,

$$inj(p) = \sup\left\{r > 0 : \exp_p \text{ está definida em } D_r(0) \subset T_pM \text{ e é injetiva}\right\}.$$

Além disso, lembremos que o raio de injetividade de uma variedade riemanniana (M, g) é dado por $inj\,(M) = \inf_{p \in M} inj(p)$.

Com isso, estamos aptos a entender o principal resultado dessa seção:

Teorema 7.2 *Seja (M^n, g) uma variedade riemannianna fechada satisfazendo $|R| \leq 1$, então existem escalares $\rho > 0$, $K = K(n) > 0$ e um ponto $p \in M$ tais que*

$$\frac{Vol\,(B\,(p,r))}{r^n} \leq \frac{K}{r} inj\,(M)\,,$$

para todo $r \in (0, \rho]$.

Faremos apenas um esboço do argumento principal. Precisamos apenas considerar o caso em que o raio de injetividade é pequeno (na escala da curvatura), pois de outra forma não há nada a provar. Em tal configuração pode-se aplicar o seguinte **lema de Klingenberg**:

Lema 7.3 (de Klingenberg) *Se M é uma variedade riemanniana compacta cuja curvatura seccional é sempre menor ou igual a 1 e $inj(M) \leq \pi$, então existe uma geodésica fechada de velocidade unitária $\gamma : \frac{\mathbb{R}}{\lambda\mathbb{Z}} \to M$ com $\lambda = 2inj(M)$.*

Usando esse Lema, vamos mostrar que para todo $p \in \gamma$, o volume de $B\,(p, r)$ é pequeno se o raio de injetividade é pequeno. Notemos que $Vol\,(B\,(p, r)) \leq Vol\,(B\,(\gamma, r))$, em que

$$B\,(\gamma, r) = \{q \in M : d\,(q, \gamma\,(s)) \leq r \text{ para algum } s\}\,.$$

Todo ponto $q \in B\,(\gamma, r)$ pode ser alcançado por uma geodésica que sai de um ponto de γ em uma direção ortogonal com uma distância de no máximo r (veja a Figura **??**). Seja $\{E_1(s), ..., E_{n-1}(s), E_n(s) = \gamma'(s)\}$ um referencial ortonormal em $T_{\gamma(s)}M$ obtido por transporte paralelo (para mais detalhes veja a Seção A.0.1), para $0 \leq s < \lambda$. Então defina $f : [0, \lambda) \times B_r^{n-1}\,(0) \to M$ por

$$f\left(s, V^1, ..., V^{n-1}\right) := \exp_{\gamma(s)}\left(\sum_{i=1}^{n-1} V^i E_i(s)\right),$$

isto é, se $V = \left(V^1, ..., V^{n-1}\right)$, $f\,(s, V)$ é obtido andando na geodésica que parte de $\gamma\,(s)$ na direção $\sum_{i=1}^{n-1} V^i E_i(s)$ (ortogonal a $\gamma'(s)$) com tempo 1 e andando a uma distância menor que r. Como a aplicação

f é suave e $\mathrm{Im}(f) = B(\gamma, r)$, segue do teorema de mudança de variáveis que

$$Vol\left(B\left(\gamma,r\right)\right)=\int_{B(\gamma,r)}d\mu=\int_{\mathrm{Im}(f)}d\mu=\int_{[0,\lambda)\times B_r^{n-1}(0)}\left|\det\left(Df\right)\right|d\mu.$$

O jacobiano de f pode ser expressado em termos dos campos de Jacobi (para mais detalhes veja a Definição A.18), cujo comportamento pode ser controlado, uma vez que a curvatura seja controlada. A estimativa requerida é fornecida pelo **teorema de comparação de Rauch** (para mais detalhes veja o Teorema 2.3 do livro Manfredo Perdigão do Carmo, Riemannian geometry, Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, 1992.**)**. Em particular, para $r \leq 1$, temos que $|\det(Df)| \leq 1$. E portanto, para $r \leq 1$,

$$\begin{aligned}Vol\left(B\left(\gamma,r\right)\right) &= \int_{[0,\lambda)\times B_r^{n-1}(0)}\left|\det\left(Df\right)\right|d\mu \leq \int_{[0,\lambda)\times B_r^{n-1}(0)}d\mu \\ &= Vol\left([0,\lambda)\times B_r^{n-1}\left(0\right)\right) \\ &= \lambda Vol\left(B_r^{n-1}\left(0\right)\right) \\ &= c_n r^{n-1}\lambda,\end{aligned}$$

em que $c_n \in \mathbb{R}^+$ é uma constante. Dividindo ambos os lados por r^n, vemos que

$$\frac{Vol\left(B\left(\gamma,r\right)\right)}{r^n}\leq\frac{c_n\lambda}{r},$$

para algum $c_n > 0$, em que o que $\lambda = 2inj(M)$ nos garante o resultado.

A Explosão de Singularidades e o Não Colapso Local

Estamos agora em condições de completar o resultado da explosão de singularidades usando o Teorema do Não Colapso Local para obter o limite de injetividade desejado discutido na Seção 5.2**.**

Como antes, suponha que exista uma solução $(M, g(t))$ do fluxo de Ricci em um intervalo de tempo maximal $t \in [0, T)$ com $T < \infty$. Pelo Teorema 4.2**,** existem pontos $O_i \in M$ e tempos $t_i \overset{i\to\infty}{\to} T$ tais que

$$|R|\left(O_i,t_i\right)=\sup_{M\times[0,t_i]}|R|\left(x,t\right).$$

Com essa sequência, definimos as **métricas de explosão**

$$g_i\left(t\right)=Q_i^{-1}g\left(t_i+Q_i^{-1}t\right),$$

em que $t \in [0,T)$ e $Q_i = |R|(O_i,t_i)$. Como discutido na Seção 5.2, para todo $a < 0$ e para algum $b = b(n) > 0$, a curvatura de g_i é limitada. Em particular,

$$\sup_{M\times(a,b)} |S(g_i(t))| < C$$

para todo $i = i(a)$ suficientemente grande e para alguma constante $C = C(n) < \infty$. Agora se $0 < r < 1/\sqrt{C} \Rightarrow \frac{1}{r^2} > C$, então

$$|S(g_i(0))| < \frac{1}{r^2}.$$

Agora, se $0 < r \leq 1/\sqrt{Q_iC} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \geq Q_iC$, e então

$$|S(g(t_i))| = Q_i\left|\frac{1}{Q_i}S(g(t_i))\right| = Q_i|S(Q_ig_i(0))| = Q_i|S(g_i(0))| < Q_iC \leq \frac{1}{r^2}.$$

Pelo Teorema 7.1, para todo $p \in M$, $0 < r \leq 1/\sqrt{Q_iC}$ com i suficientemente grande, existe um limitante inferior

$$\frac{Vol\left(B_{g_i(t)}(p,r)\right)}{r^n} > \kappa,$$

para todo $0 < r \leq 1/\sqrt{C}$. E pelo Teorema 7.2, fixe $r := \min\left\{1/\sqrt{C},\rho\right\} > 0$ de modo que

$$inj(M,g_i(0)) \geq \frac{r}{K}\frac{Vol\left(B_{g_i(0)}(p,r)\right)}{r^n} > \frac{\kappa}{K}r > 0.$$

Em particular, $\frac{\kappa}{K}r$ é um limitante inferior positivo dependendo apenas de n, $g(0)$ e T. Portanto, o teorema de compacidade para fluxos (Teorema 5.2) nos dá o seguinte:

Teorema 7.3 (Explosão de Singularidades) *Suponha que $(M,g(t))$ seja uma solução do fluxo de Ricci em um intervalo maximal $[0,T)$ em que $T < \infty$. Então existe uma sequência $O_i \in M$ e $t_i \to T$ com*

$$|R|(O_i,t_i) = \sup_{M\times[0,t_i]} |R|(x,t) \overset{i\to\infty}{\to} \infty$$

de modo que, definindo $g_i(t) = Q_i^{-1}g\left(t_i + Q_i^{-1}t\right)$, onde $Q_i = |R|(O_i,t_i)$, existe $b = b(n) > 0$ e um fluxo de Ricci completo $(M_\infty, g_\infty(t))$, $t \in (-\infty, b)$, e um ponto $O_\infty \in M_\infty$ tal que

$$(M,g_i(t),O_i) \overset{i\to\infty}{\to} (M_\infty,g_\infty(t),O_\infty),$$

onde a convergência é no sentido de Cheeger-Gromov (para mais detalhes veja a Definição 5.4). Mais *ainda,* $|R|\left(g_\infty(0), O_\infty\right) = 1$ *e* $|R|\left(g_\infty(t), \cdot\right) \leq 1$ *para todo* $t \leq 0$.

Demonstração. A primeira parte do teorema decorre diretamente da construção feita acima e do Teorema 5.2. Além disso, temos que

$$g_i(0) = Q_i^{-1} g(t_i),$$

portanto,

$$|R|\left(g_i(0), O_i\right) = |R|\left(Q_i^{-1} g(t_i), O_i\right) = Q_i^{-1} |R|\left(g(t_i), O_i\right) = Q_i^{-1} Q_i = 1.$$

Tomando o limite, vemos que

$$|R|\left(g_\infty(0), O_\infty\right) = 1.$$

Mais ainda, na Seção 5.2 vemos que $|R|\left(g_i(t), \cdot\right) \leq 1$. Fazendo $i \to \infty$ e usando a continuidade de $|R|(\cdot, \cdot)$, vemos que $|R|\left(g_\infty(t), \cdot\right) \leq 1$. ■

7.3 Produto de Kulkarni - Nomizu e Lema de Schur

O principal objetivo dessa seção é a demonstração do Lema de Schur, que será utilizado como argumento final na demonstração do Teorema da Esfera Suave. Para compreender sua demonstração, temos de entender uma certa operação entre (2,0)-tensores simétricos de uma variedade M, o chamado Produto de Kulkarni - Nomizu.

Dados dois (2,0)-tensores em uma variedade diferenciável M, gostaríamos de construir um (4,0)-tensor, A, que tenha as mesmas propriedades do tensor de curvatura riemanniana, ou seja:

1. $A_{ijkl} = -A_{jikl}$;
2. $A_{ijkl} = -A_{ijlk}$;
3. $A_{ijkl} = A_{klij}$;
4. $A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0$.

Para fazer isso, precisamos de uma aplicação, chamada de **produto de Kulkarni - Nomizu**, da seguinte forma:

$$\odot : Sym^2(M) \times Sym^2(M) \to Curv(M), \tag{7.14}$$

em que $Sym^2(M)$ é o conjunto dos (2,0) - tensores simétricos de M e $Curv(M)$ é o conjunto dos (4,0) - tensores de M que respeitam as propriedades 1 a 4 descritas logo acima. Dados $\alpha, \beta \in Sym^2(M)$, vamos exigir então que:

1. $(\alpha \odot \beta)_{ijkl} = -(\alpha \odot \beta)_{jikl}$;

2. $(\alpha \odot \beta)_{ijkl} = -(\alpha \odot \beta)_{ijlk}$;

3. $(\alpha \odot \beta)_{ijkl} = (\alpha \odot \beta)_{klij}$;

4. $(\alpha \odot \beta)_{ijkl} + (\alpha \odot \beta)_{jkil} + (\alpha \odot \beta)_{kijl} = 0.$

Um caminho bem natural é definir $\odot$ a partir do produto tensorial $\otimes$. Por linearidade, esperamos que $(\alpha \odot \beta)$ seja a soma de $(\alpha \otimes \beta)$ com os componentes permutados de tal forma que as simetrias coincidam com as simetrias do tensor de curvatura riemanniana. Assim, tudo o que é necessário é encontrar as permutações adequadas.

Como α e β são simétricos, termos como $\alpha_{ij}\beta_{kl}$ não são permitidos, já que esses termos contradirão os itens 1. e 2. acima. Portanto, precisamos misturar os índices i, j com os índices k, l. Se supusermos, ingenuamente que há o termo $\alpha_{ik}\beta_{jl}$, então o item 3 implica que precisamos ter também o termo $\alpha_{jl}\beta_{ik}$. De fato, pelo item 3 acima

$$\alpha_{ik}\beta_{jl} + \alpha_{jl}\beta_{ik} = (\alpha \odot \beta)_{ijkl} = (\alpha \odot \beta)_{klij} = \alpha_{ki}\beta_{lj} + \alpha_{lj}\beta_{ki}.$$

Por um lado, a igualdade acima ocorre devido ao item 3, e por outro, devido à simetria de α e β. E pelos itens 1 e 2, devemos adicionar também os termos $-\alpha_{jk}\beta_{il}$ e $-\alpha_{il}\beta_{jk}$. Dessa forma temos

$$(\alpha \odot \beta)_{ijkl} := \alpha_{ik}\beta_{jl} + \alpha_{jl}\beta_{ik} - \alpha_{jk}\beta_{il} - \alpha_{il}\beta_{jk},$$

ou de outra forma,

$$\begin{aligned}(\alpha \odot \beta)_p (v_1, v_2, v_3, v_4) \quad : \quad &= (\alpha \otimes \beta)_p (v_1, v_3, v_2, v_4) + (\alpha \otimes \beta)_p (v_2, v_4, v_1, v_3) \\ &- (\alpha \otimes \beta)_p (v_2, v_3, v_1, v_4) - (\alpha \otimes \beta)_p (v_1, v_4, v_2, v_3),\end{aligned}$$

para todo $p \in M$ e $v_1, v_2, v_3, v_4 \in T_pM$.

Vamos demonstrar que $(\alpha \odot \beta)$ respeita as 4 simetrias acima:

Para a primeira:

$$\begin{aligned}(\alpha \odot \beta)_{ijkl} &= \alpha_{ik}\beta_{jl} + \alpha_{jl}\beta_{ik} - \alpha_{jk}\beta_{il} - \alpha_{il}\beta_{jk} = -\left(-\alpha_{ik}\beta_{jl} - \alpha_{jl}\beta_{ik} + \alpha_{jk}\beta_{il} + \alpha_{il}\beta_{jk}\right) \\ &= -\left(\alpha_{jk}\beta_{il} + \alpha_{il}\beta_{jk} - \alpha_{ik}\beta_{jl} - \alpha_{jl}\beta_{ik}\right) = -(\alpha \odot \beta)_{jikl}.\end{aligned}$$

Para a segunda:

$$\begin{aligned}
(\alpha \odot \beta)_{ijkl} &= \alpha_{ik}\beta_{jl} + \alpha_{jl}\beta_{ik} - \alpha_{jk}\beta_{il} - \alpha_{il}\beta_{jk} = -\left(-\alpha_{ik}\beta_{jl} - \alpha_{jl}\beta_{ik} + \alpha_{jk}\beta_{il} + \alpha_{il}\beta_{jk}\right) \\
&= -\left(\alpha_{il}\beta_{jk} + \alpha_{jk}\beta_{il} - \alpha_{jl}\beta_{ik} - \alpha_{ik}\beta_{jl}\right) \\
&= -(\alpha \odot \beta)_{ijlk}.
\end{aligned}$$

Para a terceira:

$$\begin{aligned}
(\alpha \odot \beta)_{ijkl} &= \alpha_{ik}\beta_{jl} + \alpha_{jl}\beta_{ik} - \alpha_{jk}\beta_{il} - \alpha_{il}\beta_{jk} = \alpha_{ki}\beta_{lj} + \alpha_{jl}\beta_{ik} - \alpha_{il}\beta_{jk} - \alpha_{jk}\beta_{il} \\
&= \alpha_{ki}\beta_{lj} + \alpha_{jl}\beta_{ik} - \alpha_{li}\beta_{kj} - \alpha_{kj}\beta_{li} = (\alpha \odot \beta)_{klij}.
\end{aligned}$$

E para a quarta:

$$\begin{aligned}
(\alpha \odot \beta)_{ijkl} + (\alpha \odot \beta)_{jkil} + (\alpha \odot \beta)_{kijl} &= \alpha_{ik}\beta_{jl} + \alpha_{jl}\beta_{ik} - \alpha_{jk}\beta_{il} - \alpha_{il}\beta_{jk} + \alpha_{ji}\beta_{kl} \\
&\quad + \alpha_{kl}\beta_{ji} - \alpha_{ki}\beta_{jl} - \alpha_{jl}\beta_{ki} + \alpha_{kj}\beta_{il} + \alpha_{il}\beta_{kj} - \alpha_{ij}\beta_{kl} - \alpha_{kl}\beta_{ij} \\
&= \left(\alpha_{ik}\beta_{jl} - \alpha_{ki}\beta_{jl}\right) + \left(\alpha_{jl}\beta_{ik} - \alpha_{jl}\beta_{ki}\right) + \left(-\alpha_{jk}\beta_{il} + \alpha_{kj}\beta_{il}\right) \\
&\quad + \left(-\alpha_{il}\beta_{jk} + \alpha_{il}\beta_{kj}\right) + \left(\alpha_{ji}\beta_{kl} - \alpha_{ij}\beta_{kl}\right) + \left(\alpha_{kl}\beta_{ji} - \alpha_{kl}\beta_{ij}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Uma observação importante é que, quando restrito ao espaço dos $(2,0)$ - tensores simétricos, o produto wedge (para mais detalhes veja a Seção B) é (à menos de uma constante) igual ao produto de Kulkarni-Nomizu. De fato, (para mais detalhes sobre o produto interno $g^{\wedge}$ veja a Seção B)

$$\begin{aligned}
g^{\wedge}\left((A \wedge B)(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l\right) &= g^{\wedge}\left(\frac{1}{2}\left(A(e_i) \wedge B(e_j) + B(e_i) \wedge A(e_j)\right), e_k \wedge e_l\right) \qquad (7.15) \\
&= \frac{1}{2} g^{\wedge}\left(\sum_{p=1}^{n} A_{ip} e_p \wedge \sum_{q=1}^{n} B_{jq} e_q + \sum_{p=1}^{n} B_{ip} e_p \wedge \sum_{q=1}^{n} A_{jq} e_q, e_k \wedge e_l\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\wedge}\left(\sum_{p,q=1}^{n} A_{ip} B_{jq} (e_p \wedge e_q) + \sum_{p,q=1}^{n} B_{ip} A_{jq} (e_p \wedge e_q), e_k \wedge e_l\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\wedge}\left(\sum_{p,q=1}^{n} (A_{ip} B_{jq} + B_{ip} A_{jq}) e_p \wedge e_q, e_k \wedge e_l\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\left(A_{ip}B_{jq}+B_{ip}A_{jq}\right)g^{\wedge}\left(e_p\wedge e_q, e_k\wedge e_l\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\left(A_{ip}B_{jq}+B_{ip}A_{jq}\right)\left(\langle e_p,e_k\rangle\langle e_q,e_l\rangle-\langle e_p,e_l\rangle\langle e_q,e_k\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\left(A_{ip}B_{jq}+B_{ip}A_{jq}\right)\left(\delta_{pk}\delta_{ql}-\delta_{pl}\delta_{qk}\right).
\end{aligned}
$$

Distribuindo os termos, vemos que

$$
\begin{aligned}
g^{\wedge}\left(\left(A\wedge B\right)\left(e_i\wedge e_j\right), e_k\wedge e_l\right) &= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\left(A_{ip}B_{jq}+B_{ip}A_{jq}\right)\delta_{pk}\delta_{ql}-\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\left(A_{ip}B_{jq}+B_{ip}A_{jq}\right)\delta_{pl}\delta_{qk}\\
&= \frac{1}{2}\left(A_{ik}B_{jl}+B_{ik}A_{jl}\right)-\frac{1}{2}\left(A_{il}B_{jk}+B_{il}A_{jk}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(A_{ik}B_{jl}+B_{ik}A_{jl}-A_{il}B_{jk}-B_{il}A_{jk}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(A\odot B\right)_{ijkl}.
\end{aligned}
$$

Em particular, se $\alpha=\beta=g$ em que g é uma métrica riemanniana de uma variedade diferenciável M, então

$$
\begin{aligned}
\left(g\odot g\right)_{ijkl} &= g_{ik}g_{jl}+g_{jl}g_{ik}-g_{jk}g_{il}-g_{il}g_{jk} \qquad (7.16)\\
&= 2\left(g_{ik}g_{jl}-g_{jk}g_{il}\right).
\end{aligned}
$$

Tensor de Curvatura de Weyl

Dada uma variedade diferenciável M, o **tensor de curvatura de Weyl** de M é definido como a componente sem traço do tensor de curvatura riemanniana de M. Para chegar nele, comecemos definindo o seguinte (4,0) - tensor:

$$C_{ijkl} := c_1 S\left(g\odot g\right)_{ijkl}+c_2\left(\overset{\circ}{Ric}\odot g\right)_{ijkl}, \qquad (7.17)$$

em que $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, S é a curvatura escalar, g é uma métrica riemanniana e

$$\overset{\circ}{Ric} := Ric-\frac{1}{n}Sg \qquad (7.18)$$

é dito **tensor de Ricci livre de traço**. De fato, temos que

$$Tr_g\left(\overset{\circ}{Ric}\right)=Tr_g\left(Ric-\frac{1}{n}Sg\right)=Tr_g\left(Ric\right)-\frac{1}{n}STr_g\left(g\right)=\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}Ric_{ij}-\frac{1}{n}S\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}g_{ij}$$

$$\begin{aligned} &= S - \frac{1}{n} S \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} = S - \frac{1}{n} S \sum_{i=1}^{n} 1 = S - S \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além da expressão (7.17), vamos exigir que $Tr_{24}(C) = Ric$. Com essa condição, segue que

$$Ric_{ik} = (Tr_{24}(C))_{ik} = \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} C_{ijkl}.$$

Pela definição de $\odot$ e pela igualdade (7.16), segue que

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= c_1 S (g \odot g)_{ijkl} + c_2 \left(\overset{\circ}{Ric} \odot g \right)_{ijkl} \\ &= 2c_1 S (g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il}) + c_2 \left(\overset{\circ}{Ric}_{ik} g_{jl} + \overset{\circ}{Ric}_{jl} g_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{jk} g_{il} - \overset{\circ}{Ric}_{il} g_{jk} \right). \end{aligned}$$

Isolando Ric na equação (7.18) e usando a igualdade acima, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} S g_{ik} + \overset{\circ}{Ric}_{ik} &= Ric_{ik} = \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} C_{ijkl} \\ &= \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \left(2c_1 S (g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il}) + c_2 \left(\overset{\circ}{Ric}_{ik} g_{jl} + \overset{\circ}{Ric}_{jl} g_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{jk} g_{il} - \overset{\circ}{Ric}_{il} g_{jk} \right) \right) \\ &= 2c_1 S \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} (g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il}) + c_2 \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \left(\overset{\circ}{Ric}_{ik} g_{jl} + \overset{\circ}{Ric}_{jl} g_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{jk} g_{il} - \overset{\circ}{Ric}_{il} g_{jk} \right) \\ &= 2c_1 S \sum_{j,l=1}^{n} \left(g^{jl} g_{ik} g_{jl} - g^{jl} g_{jk} g_{il} \right) + c_2 \sum_{j,l=1}^{n} \overset{\circ}{Ric}_{ik} g^{jl} g_{jl} + c_2 \sum_{j,l=1}^{n} \overset{\circ}{Ric}_{jl} g^{jl} g_{ik} \\ &\quad - c_2 \sum_{j,l=1}^{n} \overset{\circ}{Ric}_{jk} g^{jl} g_{il} - c_2 \sum_{j,l=1}^{n} \overset{\circ}{Ric}_{il} g^{jl} g_{jk} \end{aligned}$$

Pela definição das matrizes (g_{ij}) e $\left(g^{ij}\right)$, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} S g_{ik} + \overset{\circ}{Ric}_{ik} &= 2c_1 S \left(\sum_{l=1}^{n} \delta_{ll} g_{ik} - \delta_{lk} g_{il} \right) + c_2 \sum_{l=1}^{n} \overset{\circ}{Ric}_{ik} \delta_{ll} + c_2 \sum_{j,l=1}^{n} \overset{\circ}{Ric}_{jl} g^{jl} g_{ik} \\ &\quad - c_2 \sum_{j=1}^{n} \overset{\circ}{Ric}_{jk} \delta_{ij} - c_2 \sum_{l=1}^{n} \overset{\circ}{Ric}_{il} \delta_{lk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2c_1 S(n-1)\, g_{ik} + c_2\left(n\overset{\circ}{Ric}_{ik} + g_{ik} Tr_g\left(\overset{\circ}{Ric}\right) - \overset{\circ}{Ric}_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{ik}\right) \\ &= 2c_1 S(n-1)\, g_{ik} + c_2 (n-2)\, \overset{\circ}{Ric}_{ik}. \end{aligned}$$

Isso nos diz quais valores c_1 e c_2 podem ser tomados:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}S &= 2c_1 S(n-1) \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{1}{2n(n-1)} \\ c_2(n-2) &= 1 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = \frac{1}{n-2}. \end{aligned}$$

Portanto definimos o **tensor de curvatura de Weyl** da seguinte maneira:

$$(Weyl)_{ijkl} := R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric} \odot g\right)_{ijkl} - \frac{S}{2n(n-1)}(g \odot g)_{ijkl} \tag{7.19}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \left(\overset{\circ}{Ric} \odot g\right)_{ijkl} &= \left(\left(Ric - \frac{1}{n}Sg\right) \odot g\right)_{ijkl} \\ &= \left(Ric - \frac{1}{n}Sg\right)_{ik} g_{jl} + \left(Ric - \frac{1}{n}Sg\right)_{jl} g_{ik} - \left(Ric - \frac{1}{n}Sg\right)_{jk} g_{il} - \left(Ric - \frac{1}{n}Sg\right)_{il} g_{jk} \\ &= \left(Ric_{ik} - \frac{1}{n}Sg_{ik}\right) g_{jl} + \left(Ric_{jl} - \frac{1}{n}Sg_{jl}\right) g_{ik} - \left(Ric_{jk} - \frac{1}{n}Sg_{jk}\right) g_{il} \\ &\quad - \left(Ric_{il} - \frac{1}{n}Sg_{il}\right) g_{jk} \\ &= Ric_{ik}g_{jl} - \frac{1}{n}Sg_{ik}g_{jl} + Ric_{jl}g_{ik} - \frac{1}{n}Sg_{jl}g_{ik} - Ric_{jk}g_{il} \\ &\quad + \frac{1}{n}Sg_{jk}g_{il} - Ric_{il}g_{jk} + \frac{1}{n}Sg_{il}g_{jk} \\ &= \left(Ric_{ik}g_{jl} + Ric_{jl}g_{ik} - Ric_{jk}g_{il} - Ric_{il}g_{jk}\right) - \frac{S}{n}\left(g_{ik}g_{jl} + g_{jl}g_{ik} - g_{jk}g_{il} - g_{il}g_{jk}\right). \end{aligned}$$

Pela definição do produto de Kulkarni - Nomizu, segue que

$$\left(\overset{\circ}{Ric} \odot g\right)_{ijkl} = (Ric \odot g)_{ijkl} - \frac{S}{n}(g \odot g)_{ijkl},$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
(Weyl)_{ijkl} &= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric} \odot g\right)_{ijkl} - \frac{S}{2n(n-1)}(g \odot g)_{ijkl} \\
&= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(Ric \odot g)_{ijkl} + \frac{S}{n(n-2)}(g \odot g)_{ijkl} - \frac{S}{2n(n-1)}(g \odot g)_{ijkl} \\
&= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(Ric \odot g)_{ijkl} + \frac{S}{2(n-1)(n-2)}(g \odot g)_{ijkl}\,.
\end{aligned} \tag{7.20}
$$

Já que $Weyl$ é definido como uma combinação linear de produtos de Kulkarni - Nomizu (somado com o tensor de curvatura riemanniana), então ele possui as mesmas propriedades de simetria do (4,0) - tensor de curvatura riemanniana R, mas por definição, todos os seus traços se anulam. De fato, para o traço 1,2, temos que

$$
\begin{aligned}
(Tr_{12}(Weyl))_{kl} &= (Tr_{12}R)_{kl} - \frac{1}{n-2}(Tr_{12}(Ric \odot g))_{kl} + \frac{S}{2(n-1)(n-2)}(Tr_{12}(g \odot g))_{kl} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(Ric \odot g)_{ijkl} + \frac{S}{2(n-1)(n-2)}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(g \odot g)_{ijkl}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= &\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left\{Ric_{ik}g_{jl} + Ric_{jl}g_{ik} - Ric_{jk}g_{il} - Ric_{il}g_{jk}\right\} \\
&+ \frac{S}{2(n-1)(n-2)}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left\{2(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il})\right\} \\
= &\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} Ric_{ik}g_{jl} + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} Ric_{jl}g_{ik} - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} Ric_{jk}g_{il} - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} Ric_{il}g_{jk}\right\} \\
&+ \frac{S}{(n-1)(n-2)}\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g_{ik}g_{jl} - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g_{jk}g_{il}\right).
\end{aligned}
$$

Pela definição das matrizes (g_{ij}) e (g^{ij}), e pela primeira identidade de Bianchi, vemos que

$$
\begin{aligned}
(Tr_{12}(Weyl))_{kl} &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left\{\sum_{i=1}^{n} \delta_{il} Ric_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{jk} Ric_{jl} - \sum_{j=1}^{n} \delta_{jl} Ric_{jk} - \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} Ric_{il}\right\} \\
&+ \frac{S}{(n-1)(n-2)}\left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{jk} g_{jl} - \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} g_{il}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left\{Ric_{lk} + Ric_{kl} - Ric_{lk} - Ric_{kl}\right\} + \frac{S}{(n-1)(n-2)}\left(g_{kl} - g_{kl}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ijkl} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(-R_{kijl} - R_{jkil}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(R_{ikjl} - R_{jkil}\right) \\
&= Ric_{kl} - Ric_{kl} = 0.
\end{aligned}
$$

Para o Traço 1,3 segue que

$$
\begin{aligned}
\left(Tr_{13}\left(Weyl\right)\right)_{kl} &= \left(Tr_{13}R\right)_{kl} - \frac{1}{n-2}\left(Tr_{13}\left(Ric \odot g\right)\right)_{kl} + \frac{S}{2(n-1)(n-2)}\left(Tr_{13}\left(g \odot g\right)\right)_{kl} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ikjl} - \frac{1}{n-2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(Ric \odot g\right)_{ikjl} + \frac{S}{2(n-1)(n-2)}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(g \odot g\right)_{ikjl} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ikjl} - \frac{1}{n-2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left\{Ric_{ij}g_{kl} + Ric_{kl}g_{ij} - Ric_{kj}g_{il} - Ric_{il}g_{kj}\right\} \\
&\quad + \frac{S}{2(n-1)(n-2)}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left\{2\left(g_{ij}g_{kl} - g_{kj}g_{il}\right)\right\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ikjl} + \frac{S}{(n-1)(n-2)}\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}g_{ij}g_{kl} - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}g_{kj}g_{il}\right) \\
&\quad - \frac{1}{n-2}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}Ric_{ij}g_{kl} + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}Ric_{kl}g_{ij} - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}Ric_{kj}g_{il} - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}Ric_{il}g_{kj}\right\}.
\end{aligned}
$$

Novamente, pela definição das matrizes (g_{ij}) e $\left(g^{ij}\right)$ vemos que

$$
\begin{aligned}
\left(Tr_{13}\left(Weyl\right)\right)_{kl} &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ikjl} - \frac{1}{n-2}\left\{Sg_{kl} + \sum_{j=1}^{n}\delta_{jj}Ric_{kl} - \sum_{j=1}^{n}\delta_{jl}Ric_{kj} - \sum_{i=1}^{n}\delta_{ik}Ric_{il}\right\} \\
&\quad + \frac{S}{(n-1)(n-2)}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_{jj}g_{kl} - \sum_{i=1}^{n}\delta_{ik}g_{il}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ikjl} - \frac{1}{n-2}\left\{Sg_{kl} + nRic_{kl} - Ric_{kl} - Ric_{kl}\right\} + \frac{S\left(ng_{kl} - g_{kl}\right)}{(n-1)(n-2)} \\
&= Ric_{kl} - \frac{1}{n-2}Sg_{kl} - Ric_{kl} + \frac{Sg_{kl}}{n-2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Pelas simetrias de $Weyl$, concluímos que

$$\begin{aligned}
(Tr_{14}(Weyl))_{kl} &= -(Tr_{13}(Weyl))_{kl} = 0,\\
(Tr_{23}(Weyl))_{kl} &= -(Tr_{13}(Weyl))_{kl} = 0,\\
(Tr_{24}(Weyl))_{kl} &= -(Tr_{14}(Weyl))_{kl} = 0,\\
(Tr_{34}(Weyl))_{kl} &= (Tr_{12}(Weyl))_{kl} = 0.
\end{aligned}$$

Além disso, notemos que:

$$|Weyl|^2 = |R|^2 - \frac{1}{(n-2)^2}\left|\overset{\circ}{Ric} \odot g\right|^2 - \left(\frac{S}{2n(n-1)}\right)^2 |g \odot g|^2 .$$

Para demonstrar essa igualdade, basta utilizar a definição de produto interno de tensores do Exemplo A.5, e abrir o termo $|Weyl|^2$. Como teremos expressões muito grandes, vamos evitar as contas.

Lema de Schur

Consideremos uma variedade diferenciável M e um ponto $p \in M$. Definimos a função $Id \wedge Id : \bigwedge^2 T_pM \to \bigwedge^2 T_pM$, em que

$$(Id \wedge Id)(u \wedge v) = u \wedge v.$$

Para cada $u \wedge v \in \bigwedge^2 T_pM$ temos também o seguinte funcional associado: $Id_{u\wedge v} : \bigwedge^2 T_pM \to \mathbb{R}$, em que

$$Id_{u\wedge v}(z \wedge w) = g^{\wedge}((Id \wedge Id)(u \wedge v), z \wedge w) = g^{\wedge}(u \wedge v, z \wedge w).$$

A menos que haja ambiguidade, vamos denotar $Id_{u\wedge v}$ simplesmente por $(Id \wedge Id)(u \wedge v)$.

O operador de curvatura de M é dado por $R : \bigwedge^2 T_pM \to \mathcal{T}_0^2(M)$, em que

$$R(u \wedge v) = R(u, v) : \bigwedge^2 T_pM \to \mathbb{R},$$

em que tal aplicação é definida por

$$R(u \wedge v)(w \wedge z) := R(u, v, w, z), \tag{7.21}$$

para todo $u, v, w, z \in T_pM$, sendo o lado direito da igualdade o $(4, 0)$-tensor de curvatura riemanniana de

M. As simetrias do tensor de curvatura riemanniana garantem que o operador está bem definido.

Lema 7.4 *Uma variedade riemanniana M possui curvatura seccional constante em T_pM, igual a $\kappa_0(p)$, se e somente se $R_{|p} = \kappa_0(p) Id \wedge Id$, em que R é o operador de curvatura de M ,isto é*

$$R(u \wedge v) = \kappa_0 Id_{u \wedge v},$$

para todo $u \wedge v \in \bigwedge^2 T_pM$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha, para cada $p \in M$, que a curvatura seccional de M é constante, isto é, $K(\Pi) = \kappa_0$ para todos os subespaços bidimensionais $\Pi \leq T_pM$. Segue da definição geral de curvatura seccional (para mais detalhes veja a Proposição A.16) que

$$\frac{R(x,y,x,y)}{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2} = \kappa_0,$$

ou seja, manipulando a expressão e usando a definição da métrica $g^\wedge$ em $\bigwedge^2 T_pM$ (para mais detalhes veja B.1), vemos que

$$\begin{aligned} R(x \wedge y)(x \wedge y) &= R(x,y,x,y) = \kappa_0 \left(|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2 \right) = \kappa_0 g^\wedge (x \wedge y, x \wedge y) \\ &= \kappa_0 g^\wedge ((Id \wedge Id)(x \wedge y), x \wedge y) \\ &= \kappa_0 Id_{x \wedge y}(x \wedge y) \end{aligned}$$

para todo $x, y \in T_pM$ vetores L.I's. Segue da expressão (8.4) que $Id \wedge Id$ possui as mesmas propriedades de simetria de R. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} \kappa_0 Id_{x \wedge y + z \wedge w}(x \wedge y + z \wedge w) &= \kappa_0 g^\wedge ((Id \wedge Id)(x \wedge y + z \wedge w), x \wedge y + z \wedge w) \\ &= R(x \wedge y + z \wedge w)(x \wedge y + z \wedge w) \\ &= R(x \wedge y)(x \wedge y) + R(x \wedge y)(z \wedge w) + R(z \wedge w)(x \wedge y) + R(z \wedge w)(z \wedge w) \\ &= \kappa_0 Id_{x \wedge y}(x \wedge y) + R(x,y,z,w) + R(z,w,x,y) + \kappa_0 Id_{z \wedge w}(z \wedge w) \\ &= \kappa_0 Id_{x \wedge y}(x \wedge y) + 2R(x,y,z,w) + \kappa_0 Id_{z \wedge w}(z \wedge w) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$g^\wedge (\kappa_0 (Id \wedge Id)(x \wedge y + z \wedge w), x \wedge y + z \wedge w) = g^\wedge (\kappa_0 (Id \wedge Id)(x \wedge y), x \wedge y)$$

$$+g^{\wedge}\left(\kappa_0\left(Id\wedge Id\right)\left(x\wedge y\right),z\wedge w\right)+g^{\wedge}\left(\kappa_0\left(Id\wedge Id\right)\left(z\wedge w\right),x\wedge y\right)+g^{\wedge}\left(\kappa_0\left(Id\wedge Id\right)\left(z\wedge w\right),z\wedge w\right)$$
$$=g^{\wedge}\left(\kappa_0\left(Id\wedge Id\right)\left(x\wedge y\right),x\wedge y\right)+2g^{\wedge}\left(\kappa_0\left(Id\wedge Id\right)\left(x\wedge y\right),z\wedge w\right)+g^{\wedge}\left(\kappa_0\left(Id\wedge Id\right)\left(z\wedge w\right),z\wedge w\right)$$
$$=\kappa_0 Id_{x\wedge y}\left(x\wedge y\right)+2g^{\wedge}\left(\kappa_0\left(Id\wedge Id\right)\left(x\wedge y\right),z\wedge w\right)+\kappa_0 Id_{z\wedge w}\left(z\wedge w\right).$$

Das duas igualdades vemos que

$$\kappa_0 Id_{x\wedge y}\left(z\wedge w\right)=g^{\wedge}\left(\kappa_0\left(Id\wedge Id\right)\left(x\wedge y\right),z\wedge w\right)=R\left(x,y,z,w\right)=g^{\wedge}\left(R\left(x\wedge y\right),z\wedge w\right),$$

para todo $x,y,z,w\in T_pM$, ou seja, $\kappa_0\left(Id\wedge Id\right)\left(x\wedge y\right)=R\left(x\wedge y\right)$, para todo $x,y\in T_pM$.

($\Leftarrow$) Para a volta, suponhamos que $R=\kappa_0 Id\wedge Id$, para algum $\kappa_0\in\mathbb{R}$. Logo,

$$R\left(x,y,x,y\right)=g^{\wedge}\left(\kappa_0 Id\wedge Id\left(x\wedge y\right),x\wedge y\right)=\kappa_0 g^{\wedge}\left(x\wedge y,x\wedge y\right)=\kappa_0\left(\left|x\right|^2\left|y\right|^2-\left\langle x,y\right\rangle^2\right).$$

■

Uma variedade M é dita **isotrópica** se, para todo $p\in M$, a curvatura seccional $K_p\left(\Pi\right)$ é constante sob todos os subespaços bidimensionais em T_pM.

O seguinte lema mostra que a discussão entre variedades isotrópicas e variedades com curvatura seccional constante não é necessária:

Teorema 7.4 (Lema de Schur) *Seja M^n uma variedade riemanniana conexa com $n\geq 3$. Se $K_p\left(\Pi\right)=f(p)$, para todo subespaço bidimensional $\Pi\leq T_pM$ e todo $p\in M$, então f é constante. Em outras palavras, toda variedade isotrópica possui curvatura seccional constante.*

Demonstração. Para todo $p\in M$, nossa hipótese implica que

$$R_{|p}\left(x,y,x,y\right)=f(p)\left(\left|x\right|^2\left|y\right|^2-\left\langle x,y\right\rangle^2\right),$$

para todo $x,y\in T_pM$ vetores L.I.'s. Notemos que

$$\begin{aligned}
g^{\wedge}\left(\left(Id\wedge Id\right)\left(\partial_i\wedge\partial_j\right),\partial_k\wedge\partial_l\right) &= g^{\wedge}\left(\frac{1}{2}\left(Id(\partial_i)\wedge Id(\partial_j)+Id(\partial_i)\wedge Id(\partial_j)\right),\partial_k\wedge\partial_l\right) \qquad (7.22)\\
&= g^{\wedge}\left(\frac{1}{2}\left(\partial_i\wedge\partial_j+\partial_i\wedge\partial_j\right),\partial_k\wedge\partial_l\right)\\
&= \frac{1}{2}g^{\wedge}\left(\partial_i\wedge\partial_j,\partial_k\wedge\partial_l\right)+\frac{1}{2}g^{\wedge}\left(\partial_i\wedge\partial_j,\partial_k\wedge\partial_l\right)\\
&= \left\langle\partial_i,\partial_k\right\rangle\left\langle\partial_j,\partial_l\right\rangle-\left\langle\partial_i,\partial_l\right\rangle\left\langle\partial_j,\partial_k\right\rangle\\
&= \frac{1}{2}\left(g\odot g\right)_{ijkl},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é devido a expressão (7.16). Segue do Lema 7.4 e da expressão (7.22) que

$$R = \left(\frac{1}{2}f\right) g \odot g.$$

Nesse caso, o gradiente da curvatura riemanniana é dado pelo seguinte:

$$\begin{aligned} 2\nabla R &= 2\nabla\left(\left(\frac{1}{2}f\right) g \odot g\right) = \nabla\left(fg \odot g\right) = \left(\nabla f\right) g \odot g + f\nabla\left(g \odot g\right) \\ &= \left(\nabla f\right) g \odot g + f\left(\nabla g\right) \odot g + fg \odot \left(\nabla g\right) \\ &= \left(\nabla f\right) g \odot g. \end{aligned}$$

Usando a segunda identidade de Bianchi, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= 2\left(\left(\nabla R\right)\left(U,X,Y,Z,W\right) + \left(\nabla R\right)\left(Z,X,Y,W,U\right) + \left(\nabla R\right)\left(W,X,Y,U,Z\right)\right) \\ &= \left(\nabla f\right)\left(g \odot g\right)\left(U,X,Y,Z,W\right) + \left(\nabla f\right)\left(g \odot g\right)\left(Z,X,Y,W,U\right) + \left(\nabla f\right)\left(g \odot g\right)\left(W,X,Y,U,Z\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\nabla_U f\right)\left(2g\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right) - 2g\left(Y,Z\right)g\left(X,W\right)\right) + \left(\nabla_Z f\right)\left(2g\left(X,W\right)g\left(Y,U\right) - 2g\left(Y,W\right)g\left(X,U\right)\right) \\ &\quad + \left(\nabla_W f\right)\left(2g\left(X,U\right)g\left(Y,Z\right) - 2g\left(Y,U\right)g\left(X,Z\right)\right), \end{aligned}$$

para todo $X, Y, W, Z, U \in \mathfrak{X}\left(M\right)$.

Se $Z \in T_pM$ é arbitrário, então é possível escolher $Y, W \in T_pM$ de modo que $\{Z, W, Y\}$ seja ortogonal (pois $\dim M \geq 3$). Fazendo $U = Y$ em p, a equação acima implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\nabla_Y f\right)\left(2g\left(X,Z\right)g\left(Y,W\right) - 2g\left(Y,Z\right)g\left(X,W\right)\right) + \left(\nabla_Z f\right)\left(2g\left(X,W\right)g\left(Y,Y\right) - 2g\left(Y,W\right)g\left(X,Y\right)\right) \\ &\quad + \left(\nabla_W f\right)\left(2g\left(X,Y\right)g\left(Y,Z\right) - 2g\left(Y,Y\right)g\left(X,Z\right)\right) \\ &= \left(\nabla_Z f\right)\left(2g\left(X,W\right)g\left(Y,Y\right)\right) + \left(\nabla_W f\right)\left(-2g\left(Y,Y\right)g\left(X,Z\right)\right) \\ &= \left(\nabla_Z f\right)\left(2g\left(X,W\right)g\left(Y,Y\right)\right) + \left(\nabla_W f\right)\left(-2g\left(Y,Y\right)g\left(X,Z\right)\right) \\ &= 2g\left(Y,Y\right)\left(\left(\nabla_Z f\right)g\left(X,W\right) - \left(\nabla_W f\right)\left(g\left(X,Z\right)\right)\right) \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= Z(f)g\left(X,W\right) - W(f)\left(g\left(X,Z\right)\right) \\ &= g\left(X, Z(f)W - W(f)Z\right). \end{aligned}$$

para todo $X \in T_pM$, portanto, $Z(f)W - W(f)Z = 0$. Mas como $\{W, Z\}$ é L.I., segue que $Z(f) = W(f) = 0$. Mas Z é arbitrário com $Z(f) = 0$. Segue disso que f é constante. $\blacksquare$

Capítulo 8

Os Cones de Böhm e Wilking

Na demonstração do Teorema da Esfera Suave, vamos recorrer a uma certa família de cones no espaço vetorial $Curv$. Essa família (construída em primeira mão pelos matemáticos Böhm e Wilking) possui algumas propriedades que ajudam a entender a geometria da variedade riemanniana em questão. O comportamento dessa família ao longo da evolução da variedade sob o fluxo de Ricci nos ajudará caracterizá-la. Embora extenso, o presente capítulo tem por objetivo explicar ao leitor toda a teoria de modo a capacitá-lo à entender a definição dessa família de cones, bem como a demonstração de que tal família realmente existe.

8.1 Operadores de Curvatura Algébrica

Consideremos uma variedade riemanniana da forma $M \times \mathbb{R}$. O tensor de curvatura (espacial) pode ser considerado como um $(4,0)$-tensor no fibrado tangente espacial, isto é, uma seção do espaço tensorial $\mathcal{T}_0^4(\mathcal{G})$. Contudo, as simetrias do tensor de curvatura significam que ele mora, de fato, dentro de um subfibrado invariante, que chamamos de **Fibrado dos Operadores de Curvatura Algébrica** $Curv(\mathcal{G})$ que possui um subespaço invariante correspondente $Curv < \mathcal{T}_0^4(\mathbb{R}^n)$ consistindo dos tensores $R \in \mathcal{T}_0^4(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\begin{cases} R(u,v,w,z) = -R(v,u,w,z), \\ R(u,v,w,z) = -R(u,v,z,w), \\ R(u,v,w,z) = R(w,z,u,v), \\ R(u,v,w,z) + R(w,u,v,z) + R(v,w,u,z) = 0, \end{cases}$$

para todo $u,v,w,z \in \mathbb{R}^n$.

Dado um subconjunto $S \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$, dizemos que $Curv$ é **S-invariante** se $R^A \in Curv$, para todo

$A \in S$, em que

$$R^A(u,v,w,z) := R(Au,Av,Aw,Az),$$

para todo $u,v,w,z \in \mathbb{R}^n$.

Podemos verificar diretamente que esse subespaço é $O(n)$-invariante (mais que isso, é $GL(n)$-invariante): Dados $R \in Curv(\mathcal{G})$, $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\det A \neq 0$ e $u,v,w,z \in \mathbb{R}^n$, vemos que

$$\begin{aligned}
R^A(u,v,w,z) &= R(Au,Av,Aw,Az) = -R(Av,Au,Aw,Az) = -R^A(v,u,w,z),\\
R^A(u,v,w,z) &= R(Au,Av,Aw,Az) = -R(Au,Av,Az,Aw) = -R^A(u,v,z,w),\\
R^A(u,v,w,z) &= R(Au,Av,Aw,Az) = R(Aw,Az,Au,Av) = R^A(w,z,u,v),
\end{aligned}$$

e por fim,

$$\begin{aligned}
R^A(u,v,w,z) + R^A(w,u,v,z) + R^A(v,w,u,z) &= R(Au,Av,Aw,Az) + R(Aw,Au,Av,Az)\\
&\quad +R(Av,Aw,Au,Az)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal em T_pM, o operador de curvatura R leva $e_i \wedge e_j$ em $\sum_{p<q=1}^n A_{pq} e_p \wedge e_q$, onde $A_{pq} = R_{ijpq}$, isto é,

$$R(e_i \wedge e_j) = \sum_{p<q=1}^{n} A_{pq} e_p \wedge e_q = \sum_{p<q=1}^{n} R_{ijpq} e_p \wedge e_q.$$

Como os elementos de $Curv$ são antissimétricos no primeiro e no último par de argumentos e são simétricos na troca do primeiro com o último par, é natural interpretá-los como formas bilineares simétricas agindo no espaço $\bigwedge^2(\mathbb{R}^n)$, com cada par antissimétrico de argumentos em $\mathbb{R}^n$ correspondendo a apenas um elemento de $\bigwedge^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, $Curv \subset Sym^2\left(\bigwedge^2(\mathbb{R}^n)\right)$. De fato, a curvatura pode ser vista como um endomorfismo auto-adjunto de $\bigwedge^2(\mathcal{G})$, definido pela expressão

$$R(x \wedge y, u \wedge v) := \langle R(x \wedge y), u \wedge v \rangle,$$

para todo $x,y,u,v \in \mathcal{G}_{(p,t)} \simeq \mathbb{R}^n$, onde $\langle \cdot,\cdot \rangle = g^{\wedge}$ está definido pelas expressões (B.1) e (B.2). Observe que ambas as formas são equivalentes, pois

$$\begin{aligned}
R\left(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l\right) &= \left\langle \sum_{p<q=1}^{n} R_{ijpq} e_p \wedge e_q, e_k \wedge e_l \right\rangle = \sum_{p<q=1}^{n} R_{ijpq} \left\langle e_p \wedge e_q, e_k \wedge e_l \right\rangle \\
&= \sum_{p<q=1}^{n} R_{ijpq} \left(\left\langle e_p, e_k \right\rangle \left\langle e_q, e_l \right\rangle - \left\langle e_p, e_l \right\rangle \left\langle e_q, e_k \right\rangle \right) \\
&= \sum_{p<q=1}^{n} R_{ijpq} \left(\delta_{pk}\delta_{ql} - \delta_{pl}\delta_{qk} \right) \\
&= R_{ijkl}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos expressar R como uma forma bilinear simétrica, isto é, como um elemento de $Sym^2\left(\bigwedge^2 T_p^* M\right)$:

$$R = \sum_{i<j,k<l} R_{ijkl} \left(e_i^* \wedge e_j^*\right) \otimes \left(e_k^* \wedge e_l^*\right).$$

De fato, toda forma bilinear simétrica $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ define uma aplicação

$$v \in V \mapsto \left(w \mapsto \beta\left(v, w\right)\right) \in V^*$$

e vice-versa. Agora consideremos uma outra base ortonormal $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha=1}^{N}$ para $\bigwedge^2 T_p M$, em que N é a dimensão desse espaço, com correspondente base dual $\{\sigma_\alpha^*\}_{\alpha=1}^{N}$. Com respeito a essa base, a curvatura R (como forma bilinear) pode ser expressada como

$$R = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} R_{\alpha\beta} \sigma_\alpha^* \otimes \sigma_\beta^*,$$

em que $R_{\alpha\beta} = R\left(\sigma_\alpha, \sigma_\beta\right)$. Fazendo a mudança de base, vemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha^* &= \sum_{i<j=1}^{n} \sigma_\alpha^* \left(e_i \wedge e_j\right) e_i^* \wedge e_j^* = \sum_{i<j=1}^{n} \left(\sigma_\alpha^*\right)_{ij} e_i^* \wedge e_j^*, \\
\sigma_\alpha &= \sum_{i<j=1}^{n} \left\langle \sigma_\alpha, e_i \wedge e_j \right\rangle e_i \wedge e_j = \sum_{i<j=1}^{n} \left(\sigma_\alpha\right)^{ij} e_i \wedge e_j.
\end{aligned}$$

Portanto encontramos as componentes de R com respeito a duas bases ortonormais e elas se relacionam por

$$R_{ijkl} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} R_{\alpha\beta} \left(\sigma_\alpha\right)_{ij} \left(\sigma_\beta\right)_{kl} \qquad \text{e} \qquad R_{\alpha\beta} = \sum_{i<j,k<l=1}^{n} \left(\sigma_\alpha\right)^{ij} \left(\sigma_\beta\right)^{kl} R_{ijkl}$$

Lembremos que a equação de evolução do (4,0)-tensor de curvatura obtida do Corolário 1.3 é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(R_{ijkl}\right) &= (\Delta R)_{ijkl} - 2\left(B_{ijlk} - B_{ijkl} - B_{ikjl} + B_{iljk}\right) \\ &\quad + \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(Ric_{jq}R_{pikl} - Ric_{iq}R_{pjkl} - R_{ijkp}Ric_{ql} - R_{ijpl}Ric_{qk}\right)\end{aligned}$$

Busquemos entender os chamados **termos quadráticos de reação**, que são definidos por

$$Q_{ijkl} := B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}$$

Para isso, nos usaremos dos chamados **termos quadráticos de curvatura**, que são definidos por

$$R^2_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^{N} R_{\alpha\lambda}R_{\lambda\beta} \qquad \text{e} \qquad R^{\#}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N} c_{\alpha}^{\gamma\eta}c_{\beta}^{\delta\theta}R_{\gamma\delta}R_{\eta\theta},$$

onde $c_{\alpha}^{\gamma\eta}$ são as **constantes estruturais** (para mais detalhes veja a Seção B) para $\mathfrak{so}(n)$, a álgebra de Lie de $SO(n)$, com respeito a base $\{\sigma_{\alpha}^{*}\}_{\alpha=1}^{N}$.

Com essas identificações, vemos que o campo $Q \in Curv$ pode ser escrito como

$$Q\left(R\right) = R^2 + R^{\#}. \tag{8.1}$$

Isso é uma consequência imediata dos seguintes lemas:

Lema 8.1 *Para todo $R \in Curv$,*

$$R^2_{ijkl} = B_{ijkl} - B_{ijlk}.$$

Demonstração. Pela sua definição, sabemos que $B_{ijkl} = B_{jilk} = B_{klij}$. Portanto, tomando coordenadas normais, usando que B é uma contração métrica (isto é, um traço), que é invariante por mudança de base e usando a primeira identidade de Bianchi, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}R_{klpq} &= \sum_{p,q=1}^{n} R_{pqij}R_{pqkl} = \sum_{p,q=1}^{n}\left(-R_{ipqj} - R_{qipj}\right)\left(-R_{kpql} - R_{qkpl}\right) \\ &= \sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{ipqj} + R_{iqjp}\right)\left(R_{kpql} + R_{kqlp}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left(R_{iqjp} - R_{ipjq}\right)\left(R_{kqlp} - R_{kplq}\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} R_{iqjp}R_{kqlp} - \sum_{p,q=1}^{n} R_{iqjp}R_{kplq} - \sum_{p,q=1}^{n} R_{ipjq}R_{kqlp} + \sum_{p,q=1}^{n} R_{ipjq}R_{kplq} \\
&= B_{ijkl} - B_{ijlk} - B_{ijlk} + B_{ijkl} \\
&= 2\left(B_{ijkl} - B_{ijlk}\right).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}R_{klpq} &= \sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}R_{pqkl} = \sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} R_{\alpha\beta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ij}\left(\sigma_\beta\right)_{pq}\right)\left(\sum_{\gamma,\delta=1}^{N} R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\gamma\right)_{pq}\left(\sigma_\delta\right)_{kl}\right) \\
&= \sum_{p,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{n} R_{\alpha\beta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ij}\left(\sigma_\beta\right)_{pq} R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\gamma\right)_{pq}\left(\sigma_\delta\right)_{kl} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{n} R_{\alpha\beta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ij} R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\delta\right)_{kl} \sum_{p,q=1}^{n}\left(\sigma_\beta\right)_{pq}\left(\sigma_\gamma\right)_{pq} \\
&= 2\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{n} R_{\alpha\beta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ij} R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\delta\right)_{kl}\delta_{\beta\gamma} \\
&= 2\sum_{\alpha,\beta,\delta=1}^{n} R_{\alpha\beta}R_{\beta\delta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ij}\left(\sigma_\delta\right)_{kl} \\
&= 2R^2_{ijkl},
\end{aligned}
$$

em que, na quinta igualdade, foi usado a seguinte igualdade:

$$
\begin{aligned}
\delta_{\beta\gamma} &= \left\langle \sigma^*_\beta, \sigma^*_\gamma \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sigma_\beta\right)_{ij} e^*_i \wedge e^*_j, \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\sigma_\gamma\right)_{kl} e^*_k \wedge e^*_l \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\left(\sigma_\beta\right)_{ij}\left(\sigma_\gamma\right)_{kl}\left\langle e^*_i \wedge e^*_j, e^*_k \wedge e^*_l\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i<j,k<l=1}^{n}\left(\sigma_\beta\right)_{ij}\left(\sigma_\gamma\right)_{kl}\left\langle e^*_i \wedge e^*_j, e^*_k \wedge e^*_l\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i<j,k<l=1}^{n}\left(\sigma_\beta\right)_{ij}\left(\sigma_\gamma\right)_{kl}\delta_{(i,j)(k,l)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\left(\sigma_\beta\right)_{pq}\left(\sigma_\gamma\right)_{pq}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 8.2 *Para todo $R \in Curv$,*

$$R^{\#}_{ijkl} = B_{ikjl} - B_{iljk}.$$

Demonstração. Como no Lema anterior, tomando coordenadas normais e usando a expressão (B.5), temos que

$$\begin{aligned}
B_{ikjl} - B_{iljk} &= \sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}R_{jplq} - \sum_{p,q=1}^{n} R_{iplq}R_{jpkq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left(R_{ipkq}R_{jplq} - R_{iplq}R_{jpkq}\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} R_{\alpha\beta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ip}\left(\sigma_\beta\right)_{kq} \sum_{\gamma,\delta=1}^{N} R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\gamma\right)_{jp}\left(\sigma_\delta\right)_{lq}\right) \\
&\quad - \sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} R_{\alpha\beta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ip}\left(\sigma_\beta\right)_{lq} \sum_{\gamma,\delta=1}^{N} R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\gamma\right)_{jp}\left(\sigma_\delta\right)_{kq}\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ip}\left(\sigma_\beta\right)_{kq}\left(\sigma_\gamma\right)_{jp}\left(\sigma_\delta\right)_{lq} - R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ip}\left(\sigma_\beta\right)_{lq}\left(\sigma_\gamma\right)_{jp}\left(\sigma_\delta\right)_{kq}\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ip}\left(\sigma_\gamma\right)_{jp}\left(\left(\sigma_\beta\right)_{kq}\left(\sigma_\delta\right)_{lq} - \left(\sigma_\beta\right)_{lq}\left(\sigma_\delta\right)_{kq}\right)\right).
\end{aligned}$$

Usando a igualdade (B.5), vemos que

$$\begin{aligned}
B_{ikjl} - B_{iljk} &= \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ip}\left(\sigma_\gamma\right)_{jp}\left[\left(\sigma_\beta^*\right),\left(\sigma_\delta^*\right)\right]_{kl}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ip}\left(\sigma_\gamma\right)_{jp} \sum_{\eta=1}^{n} c_\eta^{\beta\delta}\left(\sigma_\eta\right)_{lk}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\left(\left(\sigma_\alpha\right)_{ip}\left(\sigma_\gamma\right)_{jp} - \left(\sigma_\gamma\right)_{ip}\left(\sigma_\alpha\right)_{jp}\right) \sum_{\eta=1}^{n} c_\eta^{\beta\delta}\left(\sigma_\eta\right)_{lk}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\left[\left(\sigma_\alpha^*\right),\left(\sigma_\gamma^*\right)\right]_{ij} \sum_{\eta=1}^{n} c_\eta^{\beta\delta}\left(\sigma_\eta\right)_{lk} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta} \sum_{\theta=1}^{n} c_\theta^{\alpha\gamma}\left(\sigma_\theta\right)_{ij} \sum_{\eta=1}^{n} c_\eta^{\beta\delta}\left(\sigma_\eta\right)_{lk} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta,\eta=1}^{N} c_\theta^{\alpha\gamma}c_\eta^{\beta\delta}R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}\left(\sigma_\theta\right)_{ij}\left(\sigma_\eta\right)_{lk} = R^{\#}\left(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l\right) \\
&= R^{\#}_{ijkl}.
\end{aligned}$$

■

Para apresentar os resultados de Böhm e Wilking precisamos estender um pouco os produtos $\circ$ e $\#$: Tomando $V = \mathbb{R}^n$, definimos os operadores **círculo e sharp**, respectivamente por

$$\circ, \# : Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right) \times Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right) \to Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right),$$

em que

$$\begin{aligned} (R \circ S)_{\alpha\beta} &= \left(\frac{RS+SR}{2}\right)_{\alpha\beta} := \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{N} R_{\alpha\lambda}S_{\lambda\beta} + S_{\alpha\lambda}R_{\lambda\beta}, \\ (R\#S)_{\alpha\beta} &: = \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N} c_\alpha^{\gamma\eta}c_\beta^{\delta\theta}R_{\gamma\delta}S_{\eta\theta}. \end{aligned}$$

Observação 8.1 *Segue da antissimetria das constantes estruturais (para mais detalhes veja a Seção B) que*

$$\begin{aligned} (R\#S)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N} c_\alpha^{\gamma\eta}c_\beta^{\delta\theta}R_{\gamma\delta}S_{\eta\theta} = \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N}\left(-c_\alpha^{\eta\gamma}\right)\left(-c_\beta^{\theta\delta}\right)S_{\eta\theta}R_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N} c_\alpha^{\eta\gamma}c_\beta^{\theta\delta}S_{\eta\theta}R_{\gamma\delta} \\ &= (S\#R)_{\alpha\beta}\,. \end{aligned}$$

Além disso,

$$(R \circ S)_{\alpha\beta} = \left(\frac{RS+SR}{2}\right)_{\alpha\beta} = \left(\frac{SR+RS}{2}\right)_{\alpha\beta} = (S \circ R)_{\alpha\beta}\,.$$

Mais ainda, vamos denotar por I o elemento identidade de $Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)$. Contudo, devemos notar que $R\#I$ não é igual a R, em geral.

Com essas definições, podemos estender os Lemas 8.1 e 8.2 da seguinte maneira:

Lema 8.3 *Para todo $R, S \in Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)$, valem as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned} (R \circ S)_{ijkl} &= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}S_{pqkl}, \\ (R\#S)_{ijkl} &= \sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}S_{jplq} - R_{iplq}S_{jpkq}. \end{aligned}$$

Demonstração. De fato, desenvolvendo o lado direito da segunda igualdade, vemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}S_{jplq} - \sum_{p,q=1}^{n} S_{iplq}R_{jpkq} \\
= &\sum_{p,q=1}^{n} \left(R_{ipkq}S_{jplq} - S_{iplq}R_{jpkq}\right) \\
= &\sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} R_{\alpha\beta} \left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\beta\right)_{kq} \sum_{\gamma,\delta=1}^{N} S_{\gamma\delta} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp} \left(\sigma_\delta\right)_{lq} - \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} S_{\alpha\beta} \left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\beta\right)_{lq} \sum_{\gamma,\delta=1}^{N} R_{\gamma\delta} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp} \left(\sigma_\delta\right)_{kq}\right) \\
= &\sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta} \left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\beta\right)_{kq} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp} \left(\sigma_\delta\right)_{lq} - S_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta} \left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\beta\right)_{lq} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp} \left(\sigma_\delta\right)_{kq}\right) \\
= &\sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta} \left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\beta\right)_{kq} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp} \left(\sigma_\delta\right)_{lq} - S_{\gamma\delta}R_{\alpha\beta} \left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\beta\right)_{lq} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp} \left(\sigma_\delta\right)_{kq}\right) \\
= &\sum_{p,q=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta} \left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp} \left(\left(\sigma_\beta\right)_{kq} \left(\sigma_\delta\right)_{lq} - \left(\sigma_\beta\right)_{lq} \left(\sigma_\delta\right)_{kq}\right)\right).
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão (B.5), vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}S_{jplq} - \sum_{p,q=1}^{n} S_{iplq}R_{jpkq} &= \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta} \left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp} \left[\left(\sigma_\beta^*\right), \left(\sigma_\delta^*\right)\right]_{kl}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta} \left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp} \sum_{\eta=1}^{n} c_\eta^{\beta\delta} \left(\sigma_\eta\right)_{lk}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta} \left(\left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp} - \left(\sigma_\alpha\right)_{ip} \left(\sigma_\gamma\right)_{jp}\right) \sum_{\eta=1}^{n} c_\eta^{\beta\delta} \left(\sigma_\eta\right)_{lk}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta} \left[\left(\sigma_\alpha^*\right), \left(\sigma_\gamma^*\right)\right]_{ij} \sum_{\eta=1}^{n} c_\eta^{\beta\delta} \left(\sigma_\eta\right)_{lk} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} R_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta} \sum_{\theta=1}^{n} c_\theta^{\alpha\gamma} \left(\sigma_\theta\right)_{ij} \sum_{\eta=1}^{n} c_\eta^{\beta\delta} \left(\sigma_\eta\right)_{lk} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta,\eta=1}^{N} c_\theta^{\alpha\gamma} c_\eta^{\beta\delta} R_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta} \left(\sigma_\theta\right)_{ij} \left(\sigma_\eta\right)_{lk} = (R\#S)\left(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l\right) \\
&= (R\#S)_{ijkl}\,.
\end{aligned}$$

E além disso, a respeito da segunda igualdade, vemos que ela também é verdadeira, pois

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q=1}^{n} R_{ijpq}S_{pqkl} &= \sum_{p,q=1}^{n}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} R_{\alpha\beta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ij}\left(\sigma_\beta\right)_{pq}\right)\left(\sum_{\gamma,\delta=1}^{N} S_{\gamma\delta}\left(\sigma_\gamma\right)_{pq}\left(\sigma_\delta\right)_{kl}\right)\\
&= \sum_{p,q,\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{n} R_{\alpha\beta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ij}\left(\sigma_\beta\right)_{pq} S_{\gamma\delta}\left(\sigma_\gamma\right)_{pq}\left(\sigma_\delta\right)_{kl}\\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{n} R_{\alpha\beta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ij} S_{\gamma\delta}\left(\sigma_\delta\right)_{kl}\sum_{p,q=1}^{n}\left(\sigma_\beta\right)_{pq}\left(\sigma_\gamma\right)_{pq}\\
&= 2\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{n} R_{\alpha\beta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ij} S_{\gamma\delta}\left(\sigma_\delta\right)_{kl}\delta_{\beta\gamma}\\
&= 2\sum_{\alpha,\beta,\delta=1}^{n} R_{\alpha\beta}S_{\beta\delta}\left(\sigma_\alpha\right)_{ij}\left(\sigma_\delta\right)_{kl}\\
&= 2\left(R\circ S\right)\left(e_i\wedge e_j, e_k\wedge e_l\right)\\
&= 2\left(R\circ S\right)_{ijkl}.
\end{aligned}$$

■

Mais ainda, a partir do termo quadrático de curvatura, definimos um operador bilinear

$$Q:(R,S)\in Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)\times Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)\to Q\left(R,S\right):=R\circ S+R\#S\in Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right) \tag{8.2}$$

Induzido por ele, temos o operador $\widetilde{Q}:Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)\to Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)$ em que

$$\widetilde{Q}\left(R\right):=Q\left(R,R\right).$$

Se não houver ambiguidade, vamos denotar $\widetilde{Q}$ por Q também.

Os produtos $\circ$ e $\#$ nos habilitam à construir um novo elemento de $Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)$ a partir de dois elementos dados. É importante notar que existe outro método para construir elementos de $Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)$ a partir de dois elementos de $Sym^2\left(V\right)$: Dados dois elementos $A,B\in gl\left(n,\mathbb{R}\right)\simeq V\otimes V$ podemos enxergar o **produto wedge** de A com B como uma aplicação $A\wedge B:\bigwedge^2 V\to\bigwedge^2 V$, em que

$$\left(A\wedge B\right)\left(x\wedge y\right):=\frac{1}{2}\left(A(x)\wedge B(y)+B(x)\wedge A(y)\right). \tag{8.3}$$

Notemos que

$$(A \wedge B)(x \wedge y) = \frac{1}{2}(A(x) \wedge B(y) + B(x) \wedge A(y)) = \frac{1}{2}(B(x) \wedge A(y) + A(x) \wedge B(y)) = (B \wedge A)(x \wedge y),$$

para todo $x \wedge y \in \bigwedge^2 V$. Usando o wedge, podemos construir uma aplicação de inclusão natural

$$Id_{\wedge} : A \in Sym^2(V) \mapsto A \wedge Id \in Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right).$$

Note que se $I = Id \wedge Id$, então $I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ é o tensor de curvatura da esfera canônica. Quando restrito ao espaço dos (2,0)-tensores simétricos, o produto wedge é (à menos de uma constante) igual ao produto de Kulkarni-Nomizu, ou seja, temos que

$$\begin{aligned}
g^{\wedge}\left((A \wedge B)(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l\right) &= g^{\wedge}\left(\frac{1}{2}\left(A(e_i) \wedge B(e_j) + B(e_i) \wedge A(e_j)\right), e_k \wedge e_l\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\wedge}\left(\sum_{p=1}^{n} A_{ip} e_p \wedge \sum_{q=1}^{n} B_{jq} e_q + \sum_{p=1}^{n} B_{ip} e_p \wedge \sum_{q=1}^{n} A_{jq} e_q, e_k \wedge e_l\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\wedge}\left(\sum_{p,q=1}^{n} A_{ip} B_{jq}\left(e_p \wedge e_q\right) + \sum_{p,q=1}^{n} B_{ip} A_{jq}\left(e_p \wedge e_q\right), e_k \wedge e_l\right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\wedge}\left(\sum_{p,q=1}^{n} \left(A_{ip} B_{jq} + B_{ip} A_{jq}\right) e_p \wedge e_q, e_k \wedge e_l\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{n} \left(A_{ip} B_{jq} + B_{ip} A_{jq}\right) g^{\wedge}\left(e_p \wedge e_q, e_k \wedge e_l\right),
\end{aligned}$$

e pela definição de $g^{\wedge}$, segue que

$$\begin{aligned}
g^{\wedge}\left((A \wedge B)(e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l\right) &= \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{n} \left(A_{ip} B_{jq} + B_{ip} A_{jq}\right)\left(\langle e_p, e_k \rangle \langle e_q, e_l \rangle - \langle e_p, e_l \rangle \langle e_q, e_k \rangle\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{n} \left(A_{ip} B_{jq} + B_{ip} A_{jq}\right)\left(\delta_{pk}\delta_{ql} - \delta_{pl}\delta_{qk}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{n} \left(A_{ip} B_{jq} + B_{ip} A_{jq}\right)\delta_{pk}\delta_{ql} - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{n} \left(A_{ip} B_{jq} + B_{ip} A_{jq}\right)\delta_{pl}\delta_{qk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left(A_{ik}B_{jl}+B_{ik}A_{jl}\right)-\frac{1}{2}\left(A_{il}B_{jk}+B_{il}A_{jk}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(A_{ik}B_{jl}+B_{ik}A_{jl}-A_{il}B_{jk}-B_{il}A_{jk}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(A\odot B\right)_{ijkl}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Em particular, se $A = B = Id$, então temos que

$$\begin{aligned} I_{ijkl} &= g^{\wedge}\left(\left(Id\wedge Id\right)\left(e_i\wedge e_j\right), e_k\wedge e_l\right) = g^{\wedge}\left(\frac{1}{2}\left(Id(e_i)\wedge Id(e_j)+Id(e_i)\wedge Id(e_j)\right), e_k\wedge e_l\right) \\ &= g^{\wedge}\left(\frac{1}{2}\left(e_i\wedge e_j+e_i\wedge e_j\right), e_k\wedge e_l\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{\wedge}\left(e_i\wedge e_j, e_k\wedge e_l\right)+\frac{1}{2}g^{\wedge}\left(e_i\wedge e_j, e_k\wedge e_l\right) \\ &= \langle e_i,e_k\rangle\langle e_j,e_l\rangle-\langle e_i,e_l\rangle\langle e_j,e_k\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(g\odot g\right)_{ijkl}, \end{aligned} \tag{8.5}$$

para mais detalhes sobre a última igualdade veja a Seção 7.3.

É vantajoso definir o **operador de Ricci** $Ric : Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right) \to Sym^2\left(V\right)$, em que

$$Ric\left(R\right)\left(e_i,e_j\right) := \sum_{k=1}^{n}\left\langle R\left(e_i\wedge e_k\right), e_j\wedge e_k\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} R_{ikjk},$$

para todo $R \in Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)$. Se R é a curvatura riemanniana, então a operação acima recupera a curvatura de Ricci. Similarmente, definimos o **operador escalar** por

$$S(R) = Tr\left(Ric\left(R\right)\right) = \sum_{i,k=1}^{n} R_{ikik},$$

para todo $R \in S^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)$, e se R é a curvatura de Riemann, então recuperamos a curvatura escalar.

É interessante notar que o seguinte resultado é válido:

Proposição 8.1 *O operador $2Id_\wedge$ é a adjunta do operador de Ric, isto é,*

$$\left\langle 2Id_\wedge\left(A\right), R\right\rangle = \left\langle A, Ric\left(R\right)\right\rangle,$$

para todo (2,0)-tensor A.

Demonstração. Usando a norma do traço em $Sym^2(V)$ e $Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle 2Id_{\wedge}(A), R\rangle &= \langle 2A\wedge Id, R\rangle = 2\sum_{\alpha,\lambda=1}^{n}(A\wedge Id)_{\alpha\lambda}R_{\lambda\alpha} = \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}(A\odot Id)_{ijkl}R_{klij}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}(A_{ik}\delta_{jl}+A_{jl}\delta_{ik}-A_{il}\delta_{jk}-A_{jk}\delta_{il})R_{klij}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}A_{ik}\delta_{jl}R_{klij}+\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}A_{jl}\delta_{ik}R_{klij}-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}A_{il}\delta_{jk}R_{klij}-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}A_{jk}\delta_{il}R_{klij}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,k,l=1}^{n}A_{ik}R_{klil}+\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}A_{jl}R_{ilij}-\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}A_{il}R_{jlij}-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}A_{jk}R_{kiij}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,k,l=1}^{n}A_{ik}R_{klil}+\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}A_{jl}R_{liji}+\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}A_{il}R_{ljij}-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}A_{jk}R_{kiji}\\
&= \frac{4}{4}\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}Ric_{ki}\\
&= \langle A, Ric(R)\rangle.
\end{aligned}$$

■

Para cálculos futuros, notemos também que: Se $A,B\in Sym^2(V)$ então

$$\begin{aligned}
\langle (Ric(A\wedge B))(e_i), e_j\rangle &= \sum_{k=1}^{n}\langle (A\wedge B)(e_i\wedge e_k), e_j\wedge e_k\rangle = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\langle A(e_i)\wedge B(e_k)+B(e_i)\wedge A(e_k), e_j\wedge e_k\rangle\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\langle A(e_i)\wedge B(e_k), e_j\wedge e_k\rangle+\langle B(e_i)\wedge A(e_k), e_j\wedge e_k\rangle\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\langle A(e_i),e_j\rangle\langle B(e_k),e_k\rangle-\langle A(e_i),e_k\rangle\langle B(e_k),e_j\rangle\\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\langle B(e_i),e_j\rangle\langle A(e_k),e_k\rangle-\langle B(e_i),e_k\rangle\langle A(e_k),e_j\rangle\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}A_{ij}B_{kk}-A_{ik}B_{kj}+B_{ij}A_{kk}-B_{ik}A_{kj}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}A_{ij}B_{kk}+B_{ij}A_{kk}-A_{ik}B_{kj}-B_{ik}A_{kj}\\
&= \frac{1}{2}A_{ij}Tr(B)+\frac{1}{2}B_{ij}Tr(A)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}B_{ik}A_{kj}.
\end{aligned}$$

E isso implica que

$$Ric\,(A\wedge B)=\frac{1}{2}A\,(Tr\,(B)\,Id-B)+\frac{1}{2}B\,(Tr\,(A)\,Id-A)\,.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} Ric\,(A\wedge A) &= \frac{1}{2}A\,(Tr\,(A)\,Id-A)+\frac{1}{2}A\,(Tr\,(A)\,Id-A)=A\,(Tr\,(A)\,Id-A) \\ &= Tr\,(A)\,A-A^2, \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned} Ric\,(A\wedge Id) &= \frac{1}{2}A\,(Tr\,(Id)\,Id-Id)+\frac{1}{2}Id\,(Tr\,(A)\,Id-A)=\frac{1}{2}A\,(nId-Id)+\frac{1}{2}Id\,(Tr\,(A)\,Id-A) \\ &= \frac{n-1}{2}A+\frac{Tr\,(A)}{2}Id-\frac{1}{2}A=\frac{n-2}{2}A+\frac{Tr\,(A)}{2}Id, \end{aligned}$$

logo, se $Tr(A)=0$, então

$$\begin{cases} Ric\,(A\wedge A)=Tr\,(A)\,A-A^2=-A^2 \\ Ric\,(A\wedge Id)=\frac{n-2}{2}A+\frac{Tr(A)}{2}Id=\frac{n-2}{2}A \end{cases}. \tag{8.7}$$

8.2 Decomposição dos Operadores de Curvatura Algébrica

O espaço dos operadores de curvatura, $Curv$, pode ser decomposto de uma maneira análoga à feita na Seção 7.3. Identificando $\bigwedge^2 V^*\simeq\mathfrak{so}\,(n)$ (para mais detalhes veja a Seção B), existe uma decomposição natural,

$$Sym^2\,(\mathfrak{so}\,(n))=\langle I\rangle\oplus\left\langle \overset{\circ}{Ric}\right\rangle\oplus\langle W\rangle\oplus\bigwedge^4\mathbb{R}^n,$$

em subespaços $O(n)$-invariantes e irredutíveis. Aqui, $\langle I\rangle$ denota o subespaço gerado pela identidade $I=Id\wedge Id$, $\left\langle \overset{\circ}{Ric}\right\rangle$ denota o subespaço gerado pelo Ricci sem traço e $\langle W\rangle$ denota o subespaço gerado pelo tensor Weyl. A demonstração desse fato pode ser encontrada em [9] na Seção 10.3**.**

Um elemento $R\in Sym^2\,(\mathfrak{so}\,(n))$ satisfaz a primeira identidade de Bianchi se e somente se não possui nenhum componente no último fator. Isto é, temos que

$$Curv=\langle I\rangle\oplus\left\langle \overset{\circ}{Ric}\right\rangle\oplus\langle W\rangle\,.$$

Dado um operador de curvatura $R\in Curv$, sejam $R_I\in\langle I\rangle$, $R_{\overset{\circ}{Ric}}\in\left\langle \overset{\circ}{Ric}\right\rangle$ e $R_W\in\langle W\rangle$ as componentes de R, isto é,

$$R = R_I + R_{\overset{\circ}{Ric}} + R_W.$$

Para tal R, definamos também

$$\overline{\lambda} = \frac{S(R)}{n} \qquad \text{e} \qquad \sigma = \frac{\left\| \overset{0}{Ric}\,(R) \right\|^2}{n}$$

Em uma comparação direta com as expressões (7.19) e (7.20), um operador de curvatura pode ser decomposto como

$$\begin{aligned} R &= \frac{\overline{\lambda}}{n-1} I + \frac{2}{n-2} Ric_0\,(R) \wedge Id + R_W \qquad (8.8) \\ &= \frac{S(R)}{n\,(n-1)} I + \frac{2}{n-2} \left(Ric(R) - \frac{S(R)}{n} Id \right) \wedge Id + R_W \\ &= \left(\frac{S(R)}{n\,(n-1)} - 2 \frac{S(R)}{n\,(n-2)} \right) I + \frac{2}{n-2} Ric(R) \wedge Id + R_W \\ &= \left(\frac{(n-2)\,S(R) - 2\,(n-1)\,S(R)}{n\,(n-1)\,(n-2)} \right) I + \frac{2}{n-2} Ric(R) \wedge Id + R_W \\ &= \left(\frac{-S(R)}{(n-1)\,(n-2)} \right) I + \frac{2}{n-2} Ric(R) \wedge Id + R_W. \end{aligned}$$

Por essa decomposição, vemos que a classe dos tensores sem traço possui a seguinte expressão:

Proposição 8.2 *Para todo $A \in Sym^2(V)$ com $Tr(A) = 0$, vale a seguinte igualdade:*

$$A \wedge A = -\frac{Tr\left(A^2\right)}{n(n-1)} I - \frac{2}{n-2} \left(A^2\right)_0 \wedge Id + (A \wedge A)_W\,,$$

em que $\left(A^2\right)_0$ é a parte sem traço de A^2.

Demonstração. Usando as expressões **(**8.7**)** e **(**8.8**),** vemos que

$$\begin{aligned} A \wedge A &= \frac{S(A \wedge A)}{n\,(n-1)} I + \frac{2}{n-2} \left(Ric(A \wedge A) - \frac{S(A \wedge A)}{n} Id \right) \wedge Id + (A \wedge A)_W \\ &= \frac{TrRic\,((A \wedge A))}{n\,(n-1)} I + \frac{2}{n-2} \left(Ric(A \wedge A) - \frac{TrRic\,((A \wedge A))}{n} Id \right) \wedge Id + (A \wedge A)_W \\ &= \frac{Tr\left(-A^2\right)}{n\,(n-1)} I + \frac{2}{n-2} \left(-A^2 - \frac{Tr\left(-A^2\right)}{n} Id \right) \wedge Id + (A \wedge A)_W \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{Tr\left(-A^2\right)}{n\left(n-1\right)} I - \frac{2}{n-2}\left(A^2 - \frac{Tr\left(A^2\right)}{n} Id\right) \wedge Id + \left(A \wedge A\right)_W \\
&= \frac{Tr\left(-A^2\right)}{n\left(n-1\right)} I - \frac{2}{n-2}\left(A^2\right)_0 \wedge Id + \left(A \wedge A\right)_W .
\end{aligned}
$$

■

8.3 O Operador Q e o Subespaço Weyl

Um importante passo para Böhm e Wilking foi estabelecer a relação entre Q, definido em (8.2), e os vários subespaços de curvatura definidos acima.

Proposição 8.3 *Para todo $R \in Curv$, valem as seguintes igualdades:*

$$
\begin{aligned}
Ric\left(R^2 + R^{\#}\right)_{ij} &= \sum_{k,l=1}^{n} Ric\left(R\right)_{kl} R_{ikjl}, \\
S\left(R^2 + R^{\#}\right) &= \sum_{k,l=1}^{n} Ric\left(R\right)_{kl} Ric\left(R\right)_{kl} .
\end{aligned}
$$

Em particular, se $R \in \langle W \rangle$ então $Q = R^2 + R^{\#} \in \langle W \rangle$.

Demonstração. Segue dos Lemas 8.1 e 8.2 que

$$
\begin{aligned}
Ric\left(R^2 + R^{\#}\right)_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} \left(R^2 + R^{\#}\right)_{ijkj} = \sum_{j=1}^{n} Q_{ijkj} = \sum_{j=1}^{n} B_{ijkj} - B_{ijjk} + B_{ikjj} - B_{ijjk} \\
&= \sum_{p,q,j=1}^{n} R_{piqj} R_{pkqj} - 2R_{piqj} R_{pjqk} + R_{piqk} R_{pjqj} .
\end{aligned}
$$

Usando a primeira identidade de Bianchi, e invertendo os índices dos somatórios se necessário for, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{p,j=1}^{n} R_{iqpj} R_{krpj} &= \sum_{p,j=1}^{n} \left(-R_{piqj} - R_{qpij}\right) R_{krpj} = \sum_{p,j=1}^{n} \left(R_{ipqj} + R_{ijpq}\right) R_{krpj} \\
&= \sum_{p,j=1}^{n} R_{ipqj} R_{krpj} + \sum_{p,j=1}^{n} R_{ipjq} R_{krjp} \\
&= 2 \sum_{p,j=1}^{n} R_{ipqj} R_{krpj}
\end{aligned}
$$

Nesse caso,

$$\sum_{p,q,j=1}^{n} R_{piqj}R_{pjqk} = \sum_{p,q,j=1}^{n} R_{ipqj}R_{krpj} = \frac{1}{2}\sum_{p,q,j=1}^{n} R_{iqpj}R_{kqpj} = \frac{1}{2}\sum_{p,q,j=1}^{n} R_{qipj}R_{qkpj}.$$

Assim, invertendo os índices dos somatórios se necessário for, o operador de Ricci aplicado em Q nos dá que

$$\begin{aligned}
Ric\left(R^2+R^{\#}\right)_{ik} &= \sum_{p,q,j=1}^{n} R_{piqj}R_{pkqj} - 2R_{piqj}R_{pjqk} + R_{piqk}R_{pjqj} \\
&= \sum_{p,q,j=1}^{n} R_{piqj}R_{pkqj} - R_{qipj}R_{qkpj} + R_{piqk}R_{pjqj} \\
&= \sum_{p,q,j=1}^{n} R_{piqj}R_{pkqj} - \sum_{p,q,j=1}^{n} R_{piqj}R_{pkqj} + \sum_{p,q,j=1}^{n} R_{piqk}R_{pjqj} \\
&= \sum_{p,q,j=1}^{n} R_{piqk}R_{pjqj} = \sum_{p,q=1}^{n} R_{piqk}Ric_{pq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} Ric_{pq}R_{ipkq}.
\end{aligned}$$

Além disso, o operador escalar aplicado em Q nos dá que

$$S\left(R^2+R^{\#}\right) = Tr\left(Ric\left(R^2+R^{\#}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} Ric\left(R^2+R^{\#}\right)_{ii} = \sum_{p,q=1}^{n} Ric_{pq}R_{ipiq} = \sum_{p,q=1}^{n} Ric_{pq}Ric_{pq}.$$

Agora suponha que $R \in \langle W \rangle$ e note que se tomarmos uma base ortonormal de T_pM,

$$\begin{aligned}
Ric\,(W)_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} R_{ijkj} - \frac{1}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric}\odot g\right)_{ijkj} - \frac{S}{2n\,(n-1)}\,(g\odot g)_{ijkj} \\
&= Ric(R)_{ik} - \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(\overset{\circ}{Ric}_{ik}g_{jj} + \overset{\circ}{Ric}_{jj}g_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{jk}g_{ij} - \overset{\circ}{Ric}_{ij}g_{jk}\right) \\
&\quad - \frac{S}{2n\,(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(g_{ik}g_{jj} + g_{jj}g_{ik} - g_{jk}g_{ij} - g_{ij}g_{jk}\right) \\
&= Ric(R)_{ik} - \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(\overset{\circ}{Ric}_{ik}\delta_{jj} + \overset{\circ}{Ric}_{jj}\delta_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{jk}\delta_{ij} - \overset{\circ}{Ric}_{ij}\delta_{jk}\right) \\
&\quad - \frac{S}{2n\,(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{ik}\delta_{jj} + \delta_{jj}\delta_{ik} - \delta_{jk}\delta_{ij} - \delta_{ij}\delta_{jk}\right).
\end{aligned}$$

Pela definição de δ_{ij}, vemos que

$$\begin{aligned}
Ric\,(W)_{ik} &= Ric(R)_{ik} - \frac{1}{n-2}\left(n\overset{\circ}{Ric}_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{ik}\right) - \frac{S}{n\,(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{ik}\delta_{jj} - \delta_{jk}\delta_{ij}\right) \\
&= Ric(R)_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{ik} - \frac{S}{n\,(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{ik}\delta_{jj} - \delta_{ik}\right) \\
&= Ric(R)_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{ik} - \frac{S}{n\,(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ik}\left(\delta_{jj} - 1\right) \\
&= Ric(R)_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{ik} - \frac{S}{n}\delta_{ik} \\
&= \overset{\circ}{Ric}_{ik} - \overset{\circ}{Ric}_{ik} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ou seja, se $R \in \langle W \rangle$,então $Ric\,(R) = 0$, logo

$$\begin{aligned}
Ric\,(Q)_{ik} &= Ric\left(R^2 + R^{\#}\right)_{ik} = \sum_{p,q=1}^{n} Ric_{pq}R_{ipkq} = 0, \\
S(Q) &= S\left(R^2 + R^{\#}\right) = \sum_{i=1}^{n} Ric\left(R^2 + R^{\#}\right)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, segue da expressão (8.8) que

$$Q(R) = \frac{-S(Q)}{(n-1)\,(n-2)} Id \wedge Id + \frac{2}{n-2} Ric\,(Q) \wedge Id + Q_W = Q_W \in \langle W \rangle\,.$$

■

Definimos a **forma trilinear de Huisken** por

$$tri : (R, S, T) \in \left(Sym^2\left(\bigwedge^2 V^*\right)\right)^3 \mapsto 2\,\langle Q\,(R, S)\,, T\rangle \in \mathbb{R},$$

ou seja, como $Q\,(R, S)$ é simétrico, segue que

$$tri\,(R, S, T) = 2Tr\left((Q\,(R, S))^T\,T\right) = 2Tr\,(Q\,(R, S)\,T) = 2Tr\,((R \circ S + R\#S)\,T)\,.$$

Vamos mostrar a simetria total da aplicação tri:

$$tri\,(R, S, T) = 2\,\langle Q\,(R, S)\,, T\rangle = 2\,\langle Q\,(S, R)\,, T\rangle = tri\,(S, R, T)\,.$$

Além disso, notemos que

$$\begin{aligned}
tri\,(R,S,T) &= 2Tr\,((R\circ S)\,T) + 2Tr\,((R\#S)\,T) \\
&= 2Tr\left(\left((R\circ S)_{\alpha\beta}\right)(T_{\gamma\delta})\right) + 2Tr\left(\left((R\#S)_{\alpha\beta}\right)(T_{\gamma\delta})\right) \\
&= 2Tr\left(\sum_{k=1}^{N}(R\circ S)_{\alpha k}\,T_{k\delta}\right) + 2Tr\left(\sum_{k=1}^{N}(R\#S)_{\alpha k}\,T_{k\delta}\right) \\
&= 2\sum_{k,\alpha=1}^{N}(R\circ S)_{\alpha k}\,T_{k\alpha} + 2\sum_{k,\alpha=1}^{N}(R\#S)_{\alpha k}\,T_{k\alpha} \\
&= 2\sum_{k,\alpha=1}^{N}\left((R\circ S)_{\alpha k} + (R\#S)_{\alpha k}\right)T_{k\alpha} \\
&= 2\sum_{k,\alpha=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{N}(R_{\alpha\lambda}S_{\lambda k} + S_{\alpha\lambda}R_{\lambda k}) + \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N}c_{\alpha}^{\gamma\eta}c_{k}^{\delta\theta}R_{\gamma\delta}S_{\eta\theta}\right)T_{k\alpha} \\
&= \sum_{k,\alpha,\lambda,\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N}\left(R_{\alpha\lambda}S_{\lambda k}T_{k\alpha} + S_{\alpha\lambda}R_{\lambda k}T_{k\alpha} + c_{\alpha}^{\gamma\eta}c_{k}^{\delta\theta}R_{\gamma\delta}S_{\eta\theta}T_{k\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Fazendo a seguinte troca de índices: $(k,\alpha)\leftrightarrow(\eta,\theta)$, e usando a simetria de R, vemos que

$$\begin{aligned}
tri\,(R,S,T) &= \sum_{k,\alpha,\lambda,\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N}\left(R_{\theta\lambda}T_{\eta\theta}S_{\lambda\eta} + T_{\eta\theta}R_{\lambda\eta}S_{\theta\lambda} + c_{\theta}^{\gamma k}c_{\eta}^{\delta\alpha}R_{\gamma\delta}T_{\eta\theta}S_{k\alpha}\right) \\
&= \sum_{k,\alpha,\lambda,\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N}\left(R_{\lambda\eta}T_{\eta\theta}S_{\theta\lambda} + T_{\eta\theta}R_{\theta\lambda}S_{\lambda\eta} + \left(-c_{k}^{\gamma\theta}\right)\left(-c_{\alpha}^{\delta\eta}\right)R_{\gamma\delta}T_{\eta\theta}S_{k\alpha}\right) \\
&= \sum_{k,\alpha,\lambda,\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N}\left(R_{\lambda\eta}T_{\eta\theta}S_{\theta\lambda} + T_{\eta\theta}R_{\theta\lambda}S_{\lambda\eta} + c_{\alpha}^{\delta\eta}c_{k}^{\gamma\theta}R_{\delta\gamma}T_{\eta\theta}S_{k\alpha}\right) \\
&= tri\,(R,T,S)\,.
\end{aligned}$$

E por fim, usando as duas simetrias mostradas acima, segue que

$$tri\,(R,S,T) = tri\,(S,R,T) = tri\,(S,T,R) = tri\,(T,S,R)\,.$$

Esse conceito nos ajuda na demonstração do seguinte resultado:

Proposição 8.4 *Se* $R\in\left\langle \overset{\circ}{Ric}\right\rangle$ *e* $S\in\langle W\rangle$*, então* $Q\,(R,S)\in\left\langle \overset{\circ}{Ric}\right\rangle$.

Demonstração. Como $S, W \in \langle W \rangle$, e $R \in \left\langle \overset{\circ}{Ric} \right\rangle$, é suficiente mostrar que

$$\begin{aligned} tri\,(S, R, W) &= 0 \\ tri\,(S, R, I) &= 0 \end{aligned}$$

Para provar o primeiro, lembremos que tri é totalmente simétrico, portanto $tri\,(S, R, W) = tri\,(W, S, R)$. Como $S, W \in \langle W \rangle$, então $S + W \in \langle W \rangle$, logo, pela Proposição 8.3

$$(S+W)^2 + (S+W)^{\#} = Q\,(S+W) \in \langle W \rangle\,,$$

Mas notemos que

$$\begin{aligned} (S+W)^2_{\alpha\beta} + (S+W)^{\#}_{\alpha\beta} &= \sum_{\lambda=1}^{N} (S+W)_{\alpha\lambda}\,(S+W)_{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{N} c_{\alpha}^{\gamma\eta} c_{\beta}^{\delta\theta}\,(S+W)_{\gamma\delta}\,(S+W)_{\eta\theta} \\ &= \sum_{\lambda=1}^{N} (S_{\alpha\lambda}S_{\lambda\beta} + S_{\alpha\lambda}W_{\lambda\beta} + W_{\alpha\lambda}S_{\lambda\beta} + W_{\alpha\lambda}W_{\lambda\beta}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{\gamma,\eta,\delta,\theta=1}^{N} c_{\alpha}^{\gamma\eta} c_{\beta}^{\delta\theta}\,(S_{\gamma\delta}S_{\eta\theta} + S_{\gamma\delta}W_{\eta\theta} + W_{\gamma\delta}S_{\eta\theta} + W_{\gamma\delta}W_{\eta\theta}) \\ &= S^2_{\alpha\beta} + S \circ W_{\alpha\beta} + W \circ S_{\alpha\beta} + W^2_{\alpha\beta} + S\#S + S\#W + W\#S + W\#W \\ &= S^2_{\alpha\beta} + 2S \circ W_{\alpha\beta} + W^2_{\alpha\beta} + S^{\#}_{\alpha\beta} + 2S\#W_{\alpha\beta} + W^{\#}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Como $\langle W \rangle$ é um espaço vetorial e $S^2, W^2, S^{\#}, W^{\#} \in \langle W \rangle$, segue que

$$2\,(S \circ W + S\#W) \in \langle W \rangle\,.$$

Portanto, como $R \in \left\langle \overset{\circ}{Ric} \right\rangle$, segue que

$$0 = \langle S \circ W + S\#W, R \rangle = Tr\,((S \circ W + S\#W)\,R) = tri\,(W, S, R)\,.$$

O Lema 8.5 que veremos nos dá que $tri\,(S, R, I) = 0$, pois

$$tri\,(S, R, I) = tri\,(R, I, S)$$

onde a última igualdade é devido ao abaixo. Como as identidades podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} 0 &= \langle SR + RS + 2R\#S, W\rangle = 2\langle Q(R,S), W\rangle, \\ 0 &= \langle SR + RS + 2R\#S, I\rangle = 2\langle Q(R,S), I\rangle. \end{aligned}$$

vemos que $Q(R,S) \in \left\langle \overset{\circ}{Ric} \right\rangle$. ∎

8.4 Uma Família de Transformações Para o Fluxo de Ricci

Na próxima seção, falaremos da "família pinçada"de cones e discutiremos sua existência. Embora mais técnico a presente seção tem por objetivo construir ferramentas que nos auxiliem na demonstração da família de cones em questão.

Definição 8.1 *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ defina a transformação linear $O(n)$-invariante $l_{a,b} : Curv \to Curv$ em que*

$$l_{a,b}(R) = R + 2(n-1)aR_I + (n-2)bR_{\overset{\circ}{Ric}}.$$

Observação 8.2 *Notemos que cada $l_{a,b}$ preserva a componente Weyl no seguinte sentido:*

$$(l_{a,b}(R))_W = R_W + (2(n-1)aR_I)_W + \left((n-2)bR_{\overset{\circ}{Ric}}\right)_W = R_W,$$

para todo $R \in Curv$. Decompondo R, podemos ver $l_{a,b}(R)$ da seguinte maneira:

$$l_{a,b}(R) = (1 + 2(n-1)a)R_I + (1 + (n-2)b)R_{\overset{\circ}{Ric}} + R_W.$$

Além disso, note que

$$l_{0,0}(R) = R + 2(n-1)0R_I + (n-2)0R_{\overset{\circ}{Ric}} = R.$$

Também observe que $l_{a,b}$ é invertível desde que todas as três componentes de $l_{a,b}(R)$ sejam não nulas, isto é, desde que $a \neq -\frac{1}{2(n-1)}$ e $b \neq -\frac{1}{n-2}$ (vamos sempre assumir que valem estas identidades).

A partir de $l_{a,b}$, definamos o seguinte campo em $Curv$:

$$X_{a,b}(R) := l_{a,b}^{-1}\left((l_{a,b}(R))^2 + (l_{a,b}(R))^{\#}\right) = \left(l_{a,b}^{-1} \circ Q \circ l_{a,b}\right)(R).$$

E denotemos por $D_{a,b}$ a diferença entre $X_{a,b}$ e o campo vetorial original para o fluxo de Ricci é definida por

$$D_{a,b}(R) := \left(l_{a,b}^{-1} \circ Q \circ l_{a,b}\right)(R) - Q(R) = X_{a,b}(R) - Q(R).$$

Segue dessas nomenclaturas o seguinte resultado:

Lema 8.4 *O campo vetorial Q aponta estritamente para $l_{a,b}(C)$ (no sentido da Definição 3.1) se e somente se o campo vetorial $X_{a,b}$ aponta estritamente para C.*

Demonstração. Como $l_{a,b}$ é contínua, se existe uma sequência $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Curv$ tal que $R_n \to R$, então

$$l_{a,b}(R) = l_{a,b}\left(\lim_{n\to\infty} R_n\right) = \lim_{n\to\infty} l_{a,b}(R_n).$$

Segue diretamente disso que $\partial(l_{a,b}(C)) = l_{a,b}(\partial C)$. Desse modo, os pontos de $\partial(l_{a,b}(C))$ são da forma $l_{a,b}(R)$ para algum $R \in \partial C$. Por definição, Q aponta estritamente para $l_{a,b}(C)$ se $l_{a,b}(R) \in \partial(l_{a,b}(C))$ implicar $Q(l_{a,b}(R)) \in Int\left(T_{l_{a,b}(R)} l_{a,b}(C)\right)$. Agora notemos que devido à linearidade de $l_{a,b}$,

$$T_{l_{a,b}(R)} l_{a,b}(C) = \bigcup_{h>0} h^{-1}(l_{a,b}(C) - l_{a,b}(R)) = l_{a,b}\left(\bigcup_{h>0} h^{-1}(C - R)\right) = l_{a,b}(T_R C).$$

E a mesma igualdade vale para os interiores, isto é,

$$Int\left(T_{l_{a,b}(R)} l_{a,b}(C)\right) = l_{a,b}(Int(T_R C)).$$

Assim,

$$Q(l_{a,b}(R)) \in Int\left(T_{l_{a,b}(R)} l_{a,b}(C)\right) = l_{a,b}(Int(T_R C)) \Longleftrightarrow l_{a,b}^{-1}(Q(l_{a,b}(R))) = D_{a,b}(R) \in Int(T_R C),$$

isto é, se e somente se $X_{a,b}$ aponta estritamente para C. ■

A ideia agora é a seguinte: Suponha que C seja um **cone preservado pelo fluxo de Ricci**, isto é, o campo Q aponta para dentro de C. Queremos que $X_{a,b} = Q + D_{a,b}$ aponte estritamente para C. Pelo lema anterior, basta mostrar que $D_{a,b}$ aponta estritamente para C.

A descoberta de Böhm e Wilking é que o operador $D_{a,b}(R)$ são possui componente na direção Weyl (ou seja, não possui a componente R_W), portanto pode ser simplesmente calculado em termos dos autovalores de $Ric(R)$. Isso simplifica nossa tarefa de entender como $Q(R)$ muda sob a ação de $l_{a,b}$.

Teorema 8.1 (Fórmula Principal para $D_{a,b}$) *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} D_{a,b}(R) &= \left((n-2)b^2 - 2(a-b)\right) \overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric} + 2aRic \wedge Ric + 2b^2 \left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2 \wedge Id \\ &+ \frac{Tr\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\left(nb^2(1-2b) - 2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{n+2n(n-1)a} I. \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos denotar a componente de um elemento de $R \in Curv$ que está em $\left\langle \overset{0}{Ric} \right\rangle$ por $R_{\overset{0}{Ric}}$ ou simplesmente por R_0. Primeiramente, estabeleceremos que $D_{a,b}(R)$ independe da componente Weyl de R. Logo, podemos calcular $D_{a,b}(R)$ de forma explícita a partir das componentes de R que independem de R_W :

Afirmamos que

$$D_{a,b}(R+S) = D_{a,b}(R),$$

para todo $S \in \langle W \rangle$ e todo $R \in Curv$.

De fato, primeiramente notemos que se $S \in \langle W \rangle$, então

$$l_{a,b}(S) = S + 2(n-1)aS_I + (n-2)bS_{\overset{\circ}{Ric}} = S + 0 + 0 = S,$$

e assim, $D_{a,b}(S)$ se anula, já que

$$D_{a,b}(S) = \left(l_{a,b}^{-1} \circ Q \circ l_{a,b}\right)(S) - Q(S) = l_{a,b}^{-1}(Q(S)) - Q(S) = Q(S) - Q(S) = 0, \tag{8.9}$$

pois $Q(S) \in \langle W \rangle$ (Proposição 8.3), $l_{a,b}(Q(S)) = Q(S)$. Olhemos $D = D_{a,b}$ como uma forma quadrática em R e seja

$$B(R,S) := \frac{1}{4}\left(D(R+S) - D(R-S)\right).$$

Desenvolvendo essa expressão, vemos que

$$\begin{aligned} B(R,S) &= \frac{1}{4}\left(l_{a,b}^{-1} \circ Q\right)\left(l_{a,b}(R+S), l_{a,b}(R+S)\right) - \frac{1}{4}Q(R+S,R+S) \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(l_{a,b}^{-1} \circ Q\right)\left(l_{a,b}(R-S), l_{a,b}(R-S)\right) + \frac{1}{4}Q(R-S,R-S) \\ &= \frac{1}{4}\left(l_{a,b}^{-1} \circ Q\right)\left(l_{a,b}(R) + l_{a,b}(S), l_{a,b}(R) + l_{a,b}(S)\right) - \frac{1}{4}Q(R+S,R+S) \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(l_{a,b}^{-1} \circ Q\right)\left(l_{a,b}(R) - l_{a,b}(S), l_{a,b}(R) - l_{a,b}(S)\right) + \frac{1}{4}Q(R-S,R-S) \end{aligned}$$

Usando a bilinearidade e a simetria de Q, segue que

$$\begin{aligned}
B(R,S) &= \frac{1}{4} l_{a,b}^{-1}\left(Q\left(l_{a,b}\left(R\right)\right)+2Q\left(l_{a,b}\left(R\right),l_{a,b}\left(S\right)\right)+Q\left(l_{a,b}\left(S\right)\right)\right)-\frac{1}{4}Q(R)-\frac{1}{4}2Q(R,S)-\frac{1}{4}Q(S)\\
&\quad -\frac{1}{4}\left(l_{a,b}^{-1}\circ Q\right)\left(l_{a,b}\left(R\right)\right)+\frac{1}{4}2\left(l_{a,b}^{-1}\circ Q\right)\left(l_{a,b}\left(R\right),l_{a,b}\left(S\right)\right)-\frac{1}{4}\left(l_{a,b}^{-1}\circ Q\right)\left(l_{a,b}\left(S\right)\right)+\frac{1}{4}Q(R)\\
&\quad -\frac{1}{4}2Q(R,S)+\frac{1}{4}Q(S)\\
&= l_{a,b}^{-1}\left(Q\left(l_{a,b}\left(R\right),l_{a,b}\left(S\right)\right)\right)-Q(R,S)\\
&= l_{a,b}^{-1}\left(Q\left(l_{a,b}\left(R\right),S\right)\right)-Q(R,S).
\end{aligned}$$

É suficiente mostrar que $B(R,S)=0$, para todo $S\in\langle W\rangle$ e todo $R\in Curv$: Nesse caso,

$$D(R+S)-D(R)=(D(R)+2B(R,S)+D(S))-D(R)=2B(R,S)+D(S)=2B(R,S)=0.$$

Fixe $S=W\in\langle W\rangle$ e provemos que $B(S,\cdot)=0$ considerando $B(R,S)$ em que R está em cada componente de $Curv$ que é $O(n)$-irredutível.

1. Suponha que $R\in\langle W\rangle$. Então, pela expressão (8.9) $D(R+S)=D(R-S)=0$, e portanto $B(R,S)=0$.

2. Suponha que $R=I$ é a identidade,

$$l_{a,b}\left(I\right)=I+2\left(n-1\right)aI_I+\left(n-2\right)bI_{\overset{\circ}{Ric}}=I+2\left(n-1\right)aI=\left(1+2\left(n-1\right)a\right)I=:\left(1+\alpha\right)I.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
B\left(W,I\right) &= l_{a,b}^{-1}\left(Q\left(l_{a,b}\left(I\right),W\right)\right)-Q(I,W)=l_{a,b}^{-1}\left(Q\left(\left(1+\alpha\right)I,W\right)\right)-Q(I,W)\\
&= l_{a,b}^{-1}\left(\left(1+\alpha\right)Q\left(I,W\right)\right)-Q(I,W).
\end{aligned}$$

Contudo, segue da identidade de polarização que

$$\begin{aligned}
Q\left(I,W\right) &= \frac{1}{4}\left(Q\left(W+I,W+I\right)-Q\left(W-I,W-I\right)\right)=\frac{1}{4}\left(Q\left(W+I\right)-Q\left(W-I\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\left(W+I\right)^2+\left(W+I\right)^{\#}-\left(W-I\right)^2-\left(W-I\right)^{\#}\right).
\end{aligned}$$

Desenvolvendo essa expressão pela sua definição, vemos que

$$\begin{aligned} Q(I,W) &= \frac{1}{4}\left(W^2+2W\circ I+I^2+W^{\#}+2W\#I+I^{\#}\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}\left(W^2+2W\circ(-I)+(-I)^2+W^{\#}+2W\#(-I)+(-I)^{\#}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(W^2+2W\circ I+I^2+W^{\#}+2W\#I+I^{\#}\right) \\ &\quad -\frac{1}{4}\left(W^2-2W\circ I+I^2+W^{\#}-2W\#I+I^{\#}\right) \\ &= \frac{1}{4}(4W\circ I+4W\#I) \\ &= W\circ I+W\#I=W+W\#I \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é devido ao Lema 8.5

3. Resta considerar o caso em que $R\in\left\langle \overset{\circ}{Ric}\right\rangle$. Segue da definição de $B(W,R)$ que é suficiente mostrar que $Q(W,l_{a,b}(R))=l_{a,b}Q(W,R)$: Nesse caso,

$$\begin{aligned} B(W,R) &= l_{a,b}^{-1}\left(Q\left(l_{a,b}(W),R\right)\right)-Q(W,R)=l_{a,b}^{-1}\left(Q\left(W,l_{a,b}(R)\right)\right)-Q(W,R) \\ &= l_{a,b}^{-1}\left(l_{a,b}Q(W,R)\right)-Q(W,R) \\ &= Q(W,R)-Q(W,R) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para isso, notemos que como $R\in\left\langle \overset{\circ}{Ric}\right\rangle$, então

$$\begin{aligned} l_{a,b}(R) &= R+2(n-1)aR_I+(n-2)bR_{\overset{\circ}{Ric}}=R+(n-2)bR_{\overset{\circ}{Ric}}=(1+(n-2)b)R_{\overset{\circ}{Ric}} \\ &= (1+(n-2)b)R=:(1+\beta)R \end{aligned}$$

E portanto,

$$Q(W,l_{a,b}(R))=Q(W,(1+\beta)R)=(1+\beta)Q(W,R)=l_{a,b}(Q(W,R)),$$

pois $Q(W,R)\in\left\langle \overset{\circ}{Ric}\right\rangle$ pela Proposição 8.4

Isso completa a demonstração de que $B(W,\cdot)=0$ e assim, $D(R)$ independe de R_W.

Agora podemos mostrar o teorema assumindo que $R_W = 0$, isto é, $R = R_I + R_{\overset{\circ}{Ric}}$. Seja $\alpha = 2(n-1)a$, $\beta = (n-2)b$ e $R_0 = R_{\overset{\circ}{Ric}} = \frac{2}{n-2}\overset{\circ}{Ric} \wedge Id$. Temos que

$$\begin{aligned} l_{a,b}(R) &= R + 2(n-1)aR_I + (n-2)bR_{\overset{\circ}{Ric}} = R + \alpha R_I + \beta R_{\overset{\circ}{Ric}} \\ &= (1+\alpha)R_I + (1+\beta)R_{\overset{\circ}{Ric}} \\ &= \frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}I + (1+\beta)R_0. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Usando isso e o Lema 8.5 vemos que

$$\begin{aligned} D_{a,b}(R) &= \left(l_{a,b}^{-1} \circ Q \circ l_{a,b}\right)(R) - Q(R) = \left(l_{a,b}^{-1} \circ Q\right)\left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}I + (1+\beta)R_0\right) - Q(R) \\ &= l_{a,b}^{-1}\left(\left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}I + (1+\beta)R_0\right)^2 + \left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}I + (1+\beta)R_0\right)^{\#}\right) - Q(R) \\ &= l_{a,b}^{-1}\left(\left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}I\right)^2 + 2\left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}I \circ (1+\beta)R_0\right) + ((1+\beta)R_0)^2\right) \\ &+ l_{a,b}^{-1}\left(\left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}I\right)^{\#} + 2\left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}I\#(1+\beta)R_0\right) + ((1+\beta)R_0)^{\#}\right) - Q(R) \\ &= l_{a,b}^{-1}\left(\left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}\right)^2 I^2 + 2\frac{(1+\alpha)(1+\beta)\overline{\lambda}}{n-1}I \circ R_0\right) \\ &+ l_{a,b}^{-1}\left((1+\beta)^2 R_0^2 + \left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}\right)^2 I\#I + 2\frac{(1+\alpha)(1+\beta)\overline{\lambda}}{n-1}I\#R_0 + (1+\beta)^2(R_0)^{\#}\right) - Q(R). \end{aligned}$$

Usando a linearidade de $l_{a,b}^{-1}$ e colocando os termos certos em evidência, vemos que

$$\begin{aligned} D_{a,b}(R) &= l_{a,b}^{-1}\left(\left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}\right)^2\left(I^2 + I\#I\right) + 2\frac{(1+\alpha)(1+\beta)\overline{\lambda}}{n-1}(I \circ R_0 + I\#R_0) + (1+\beta)^2\left(R_0^2 + (R_0)^{\#}\right)\right) \\ &\quad - Q(R) \\ &= l_{a,b}^{-1}\left(\left(\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}\right)^2\left((n-1)I_I + \frac{n-2}{2}I_{\overset{\circ}{Ric}}\right) + 2\frac{(1+\alpha)(1+\beta)\overline{\lambda}}{n-1}(R_0 + I\#R_0) + (1+\beta)^2 Q(R_0)\right) \\ &\quad - Q(R) \\ &= l_{a,b}^{-1}\left(\frac{\left((1+\alpha)\overline{\lambda}\right)^2}{n-1}I + 2\frac{(1+\alpha)(1+\beta)\overline{\lambda}}{n-1}\left(\overset{\circ}{Ric} \wedge Id\right) + (1+\beta)^2 Q(R_0)\right) - Q(R). \end{aligned}$$

Pela Proposição 8.2 com $A = \overset{\circ}{Ric}$, segue que

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric} &= \frac{Tr\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)}{n(n-1)} Id \wedge Id - \frac{2}{n-2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right) \wedge Id + \left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right)_W \qquad (8.11)\\
&= -\frac{\sigma}{n-1} Id \wedge Id - \frac{2}{n-2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right) \wedge Id + \left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right)_W .
\end{aligned}$$

E pela Afirmação 8.1.1,

$$\begin{aligned}
Q(R_0) &= \frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric} - \frac{2}{(n-2)^2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right) \wedge Id + \frac{\sigma}{n-2} I\\
&= \frac{1}{n-2}\left(-\frac{\sigma}{n-1} Id \wedge Id - \frac{2}{n-2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right) \wedge Id + \left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right)_W\right)\\
&\quad -\frac{2}{(n-2)^2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right) \wedge Id + \frac{\sigma}{n-2} I\\
&= -\frac{\sigma}{(n-1)(n-2)} Id \wedge Id + \frac{1}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right)_W - \frac{4}{(n-2)^2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right) \wedge Id + \frac{\sigma(n-1)}{(n-2)(n-1)} I\\
&= \frac{\sigma}{n-1} I - \frac{4}{(n-2)^2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right) \wedge Id + \frac{1}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right)_W .
\end{aligned}$$

Dessa forma, sabemos que $l_{a,b}^{-1}$ atua em cada termo Também pelo Lema 8.6 temos que

$$Q(R) = R^2 + R^{\#} = \frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric} + \frac{2\overline{\lambda}}{n-1}\overset{\circ}{Ric} \wedge Id - \frac{2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \wedge Id + \left(\frac{\overline{\lambda}^2}{n-1} + \frac{\sigma}{n-2}\right) I.$$

Notemos que

$$l_{a,b}^{-1}(R) = \frac{1}{1+\alpha}\frac{\overline{\lambda}}{n-1} I + (1+\beta) R_0 = \frac{1}{1+\alpha} R_I + \frac{1}{1+\beta} R_0$$

de fato, usando a expressão (8.10) vemos que

$$\begin{aligned}
l_{a,b}^{-1} \circ l_{a,b}(R) &= l_{a,b}^{-1}\left((1+\alpha)\overline{\lambda} R_I + (1+\beta) R_0\right)\\
&= \frac{1}{1+\alpha}\left((1+\alpha)\overline{\lambda} R_I + (1+\beta) R_0\right)_I + \frac{1}{1+\beta}\left((1+\alpha)\overline{\lambda} R_I + (1+\beta) R_0\right)_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+\alpha}(1+\alpha)\overline{\lambda}R_I + \frac{1}{1+\beta}(1+\beta)R_0 \\
&= R_I + R_0 \\
&= R,
\end{aligned}$$

mais ainda, notemos que

$$\begin{aligned}
l_{a,b} \circ l_{a,b}^{-1}(R) &= l_{a,b}\left(\frac{1}{1+\alpha}R_I + \frac{1}{1+\beta}R_0\right) \\
&= (1+\alpha)\left(\frac{1}{1+\alpha}R_I + \frac{1}{1+\beta}R_0\right)_I + (1+\beta)\left(\frac{1}{1+\alpha}R_I + \frac{1}{1+\beta}R_0\right)_{\overset{0}{Ric}} \\
&= (1+\alpha)\frac{1}{1+\alpha}R_I + (1+\beta)\frac{1}{1+\beta}R_0 \\
&= R_I + R_0 \\
&= R.
\end{aligned}$$

Usando as expressões de $Q(R)$, $Q(R_0)$, e de $l_{a,b}^{-1}$, segue que

$$\begin{aligned}
D_{a,b}(R) &= l_{a,b}^{-1}\left(\frac{\left((1+\alpha)\overline{\lambda}\right)^2}{n-1}I + 2\frac{(1+\alpha)(1+\beta)\overline{\lambda}}{n-1}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge Id\right) + (1+\beta)^2 Q(R_0)\right) - Q(R) \\
&= \frac{\left((1+\alpha)\overline{\lambda}\right)^2}{n-1}l_{a,b}^{-1}(I) + 2\frac{(1+\alpha)(1+\beta)\overline{\lambda}}{n-1}l_{a,b}^{-1}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge Id\right) + (1+\beta)^2 l_{a,b}^{-1}(Q(R_0)) - Q(R).
\end{aligned}$$

Pela definição de $l_{a,b}^{-1}$, vemos que

$$\begin{aligned}
D_{a,b}(R) &= \frac{\left((1+\alpha)\overline{\lambda}\right)^2}{n-1}\left(\frac{1}{1+\alpha}I_I + \frac{1}{1+\beta}I_0\right) + 2\frac{(1+\alpha)(1+\beta)\overline{\lambda}}{n-1}\left(\frac{1}{1+\alpha}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge Id\right)_I + \frac{1}{1+\beta}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge Id\right)_0\right) \\
&\quad + (1+\beta)^2 l_{a,b}^{-1}\left(\frac{\sigma}{n-1}I - \frac{4}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2}\right)\wedge Id + \frac{1}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)_W\right) - Q(R) \\
&= \frac{\left((1+\alpha)\overline{\lambda}\right)^2}{n-1}\frac{1}{1+\alpha}I + 2\frac{(1+\alpha)(1+\beta)\overline{\lambda}}{n-1}\frac{1}{1+\beta}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge Id\right) \\
&\quad + (1+\beta)^2\left(\frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{\sigma}{n-1}I_I - \frac{4}{(n-2)^2}\left(\left(\overset{\circ}{\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2}\right)\wedge Id\right)_I + \frac{1}{n-2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)_W\right)_I\right)\right) \\
&\quad + (1+\beta)^2\left(\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{\sigma}{n-1}I_0 - \frac{4}{(n-2)^2}\left(\left(\overset{\circ}{\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2}\right)\wedge Id\right)_0 + \frac{1}{n-2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)_W\right)_0\right)\right) \\
&\quad - Q(R).
\end{aligned}$$

Simplificando os termos, segue que

$$
\begin{aligned}
D_{a,b}(R) &= \frac{\left((1+\alpha)\overline{\lambda}\right)^2}{n-1}\frac{1}{1+\alpha}I + 2\frac{(1+\alpha)(1+\beta)\overline{\lambda}}{n-1}\frac{1}{1+\beta}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge Id\right) \\
&\quad + \left(\frac{(1+\beta)^2}{1+\alpha}\left(\frac{\sigma}{n-1}I_I\right) + (1+\beta)\left(-\frac{4}{(n-2)^2}\left(\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\wedge Id\right)_0\right)\right) \\
&\quad -\frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric} - \frac{2\overline{\lambda}}{n-1}\overset{\circ}{Ric}\wedge Id + \frac{2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0\wedge Id - \left(\frac{\overline{\lambda}^2}{n-1}+\frac{\sigma}{n-2}\right)I \\
&= \frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}^2}{n-1}I + 2\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge Id\right) + \frac{(1+\beta)^2}{1+\alpha}\frac{\sigma}{n-1}I - \frac{4(1+\beta)}{(n-2)^2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\wedge Id \\
&\quad -\frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric} - \frac{2\overline{\lambda}}{n-1}\overset{\circ}{Ric}\wedge Id + \frac{2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0\wedge Id - \left(\frac{\overline{\lambda}^2}{n-1}+\frac{\sigma}{n-2}\right)I.
\end{aligned}
$$

Usando as igualdades (8.11)

$$
Ric\wedge Ric - \overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric} = \overline{\lambda}^2 I + 2\overline{\lambda}\overset{\circ}{Ric}\wedge Id,
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
D_{a,b}(R) &= \frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}^2}{n-1}I + 2\frac{(1+\alpha)\overline{\lambda}}{n-1}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge Id\right) + \frac{(1+\beta)^2}{1+\alpha}\frac{\sigma}{n-1}I - \frac{4(1+\beta)}{(n-2)^2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\wedge Id \\
&\quad -\frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric} - \frac{2\overline{\lambda}}{n-1}\overset{\circ}{Ric}\wedge Id + \frac{2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0\wedge Id - \left(\frac{\overline{\lambda}^2}{n-1}+\frac{\sigma}{n-2}\right)I \\
&\quad +\frac{(1+\beta)^2}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)_W.
\end{aligned}
$$

Colocando os termos corretos em evidência, vemos que

$$
\begin{aligned}
D_{a,b}(R) &= \frac{(1+\alpha)}{n-1}\left(\overline{\lambda}^2 I + 2\overline{\lambda}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge Id\right)\right) + \frac{(1+\beta)^2}{1+\alpha}\frac{\sigma}{n-1}I - \frac{4(1+\beta)}{(n-2)^2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\wedge Id - \frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric} \\
&\quad -\frac{1}{n-1}\left(\overline{\lambda}^2 I + 2\overline{\lambda}\overset{\circ}{Ric}\wedge Id\right) + \frac{2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0\wedge Id - \left(\frac{\sigma}{n-2}\right)I \\
&\quad +\frac{(1+\beta)^2}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric} - \left(-\frac{\sigma}{n-1}Id\wedge Id - \frac{2}{n-2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\wedge Id\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \frac{(1+\alpha)}{n-1}\left(Ric\wedge Ric-\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)+\frac{(1+\beta)^2}{1+\alpha}\frac{\sigma}{n-1}I-\frac{4(1+\beta)}{(n-2)^2}\overset{\circ}{\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)}\wedge Id \\
& -\frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}-\frac{1}{n-1}\left(Ric\wedge Ric-\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)+\frac{2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0\wedge Id-\frac{\sigma}{n-2}I \\
& +\frac{(1+\beta)^2}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}+\frac{(1+\beta)^2}{n-2}\frac{\sigma}{n-1}I+\frac{2}{n-2}\frac{(1+\beta)^2}{n-2}\overset{\circ}{\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)}\wedge Id.
\end{aligned}
$$

Simplificando os termos, segue que

$$
\begin{aligned}
D_{a,b}(R) = & \frac{\alpha}{n-1}\left(Ric\wedge Ric-\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)+\left(\frac{(1+\beta)^2}{1+\alpha}\frac{\sigma}{n-1}+\frac{(1+\beta)^2}{n-2}\frac{\sigma}{n-1}-\frac{\sigma}{n-2}\right)I \\
& +\left(-\frac{4(1+\beta)}{(n-2)^2}+\frac{2}{n-2}\frac{(1+\beta)^2}{n-2}+\frac{2}{(n-2)^2}\right)\overset{\circ}{\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)}\wedge Id+\left(\frac{(1+\beta)^2}{n-2}-\frac{1}{n-2}\right)\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric} \\
= & \frac{\alpha}{n-1}\left(Ric\wedge Ric-\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)+\left(\frac{(1+\beta)^2}{1+\alpha}+\frac{(1+\beta)^2}{n-2}-\frac{n-1}{n-2}\right)\frac{\sigma}{n-1}I \\
& +\left(\frac{2(1+\beta)^2-4(1+\beta)+2}{(n-2)^2}\right)\overset{\circ}{\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)}\wedge Id+\frac{\beta^2+2\beta}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right) \\
= & \frac{\alpha}{n-1}\left(Ric\wedge Ric-\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)+\left(\frac{(1+\beta)^2}{1+\alpha}+\frac{\beta^2+2\beta+1}{n-2}-\frac{n-1}{n-2}\right)\frac{\sigma}{n-1}I \\
& +\frac{2\beta^2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)}\wedge Id\right)+\frac{\beta^2+2\beta}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right).
\end{aligned}
$$

ou seja, conluímos que

$$
\begin{aligned}
D_{a,b}(R) = & \frac{\alpha}{n-1}\left(Ric\wedge Ric-\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)+\left(\frac{(1+\beta)^2}{1+\alpha}+\frac{\beta^2+2\beta}{n-2}-1\right)\frac{\sigma}{n-1}I \\
& +\frac{2\beta^2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)}\wedge Id\right)+\frac{\beta^2+2\beta}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right),
\end{aligned}
$$

Por fim, usemos os seguintes fatos:

$$
\begin{cases}
\alpha = 2(n-1)a \\
\beta = (n-2)
\end{cases}.
$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)} = \left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2 - \sigma Id \\ Tr\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right) = Tr\left(\overset{\circ}{\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)}\right) + \sigma Tr\left(Id\right) = \sigma Tr\left(Id\right) = \sigma n \end{array}\right. ,$$

Com isso, vemos que $D_{a,b}(R)$ é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} D_{a,b}(R) &= \frac{\alpha}{n-1}\left(Ric \wedge Ric - \overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right) + \left(\frac{(1+\beta)^2}{1+\alpha} + \frac{\beta^2+2\beta}{n-2} - 1\right)\frac{\sigma}{n-1}I + \frac{2\beta^2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)} \wedge Id\right) \\ &\quad + \frac{\beta^2+2\beta}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right) \\ &= \frac{2(n-1)a}{n-1}\left(Ric \wedge Ric - \overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right) + \left(\frac{(1+(n-2)b)^2}{1+2(n-1)a} + \frac{((n-2)b)^2 + 2(n-2)b}{n-2} - 1\right)\frac{\sigma}{n-1}I \\ &\quad + \frac{2((n-2)b)^2}{(n-2)^2}\left(\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2 - \sigma Id\right) \wedge Id\right) + \frac{((n-2)b)^2 + 2(n-2)b}{n-2}\left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right) \\ &= 2a\left(Ric \wedge Ric - \overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right) + \left(\frac{(1+(n-2)b)^2}{1+2(n-1)a} + (n-2)b^2 + 2b - 1\right)\frac{\sigma}{n-1}I \\ &\quad + 2b^2\left(\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2 - \sigma Id\right) \wedge Id\right) + \left((n-2)b^2 + 2b\right)\left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right). \end{aligned}$$

Colocando os termos corretos em evidência, vemos que

$$\begin{aligned} D_{a,b}(R) &= 2aRic \wedge Ric + \left(\frac{(1+(n-2)b)^2}{1+2(n-1)a}\frac{\sigma}{n-1} + \left((n-2)b^2 + 2b - 1\right)\frac{\sigma}{n-1} - 2b^2\sigma\right)I \\ &\quad + \left(2b^2\right)\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2 \wedge Id + \left((n-2)b^2 + 2b - 2a\right)\left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right) \\ &= 2aRic \wedge Ric + \left(\frac{(1+(n-2)b)^2\sigma}{(1+2(n-1)a)(n-1)} + \frac{\left((n-2)b^2 + 2b - 1 - 2b^2(n-1)\right)\sigma}{n-1}\right)I \\ &\quad + \left(2b^2\right)\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2 \wedge Id + \left((n-2)b^2 - 2(a-b)\right)\left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right) \\ &= 2aRic \wedge Ric + \left(\sigma\frac{2a - 2b - b^2n - 4ab + 4b^2 + 2ab^2n}{2a - 2an - 1}\right)I + \left(2b^2\right)\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2 \wedge Id \\ &\quad + \left((n-2)b^2 - 2(a-b)\right)\left(\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric}\right). \end{aligned}$$

Por fim, pela definição de σ concluímos que

$$\begin{aligned} D_{a,b}(R) &= 2aRic\wedge Ric+\left(Tr\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\frac{2a-2b-b^2n-4ab+4b^2+2ab^2n}{2an-2an^2-n}\right)I \\ &\quad +\left(2b^2\right)\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\wedge Id+\left((n-2)\,b^2-2\,(a-b)\right)\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right). \end{aligned}$$

■

Corolário 8.1 (Autovalores de $D_{a,b}$ e de $Ric\,(D_{a,b})$.) *Suponha que $\{e_i\}_{i=1}^n$ seja uma base ortonormal de auvetores de $\overset{\circ}{Ric}$ em que $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ são os seus respectivos autovalores. Então $e_i\wedge e_j$, $i<j$, é um autovetor de $D_{a,b}$ com autovalor correspondente dado pela seguinte expressão:*

$$d_{ij}=\left((n-2)\,b^2-2\,(a-b)\right)\lambda_i\lambda_j+2a\left(\overline{\lambda}+\lambda_i\right)\left(\overline{\lambda}+\lambda_j\right)+b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right)+\frac{\sigma\left(nb^2-2\,(n-1)\,(a-b)\,(1-2b)\right)}{1+2\,(n-1)\,a}.$$

Mais ainda, e_i é autovetor de $Ric\,(D_{a,b})$ com autovalor

$$r_i=-2b\lambda_i^2+2a\overline{\lambda}\,(n-2)\,\lambda_i+2a\overline{\lambda}^2\,(n-1)+\frac{\sigma\left(n^2b^2-2\,(n-1)\,(a-b)\,(1-2b)\right)}{1+2\,(n-1)\,a}.$$

Observação 8.3 *$\lambda_i+\overline{\lambda}$ é autovalor de Ric.*

Demonstração. Escolha uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ de autovetores de $\overset{\circ}{Ric}$ com autovalores correspondentes $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Segue da expressão (8.3) que

$$\begin{aligned} \left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)(e_i\wedge e_j) &= \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{Ric}\,(e_i)\wedge\overset{\circ}{Ric}\,(e_j)+\overset{\circ}{Ric}\,(e_i)\wedge\overset{\circ}{Ric}\,(e_j)\right)=\overset{\circ}{Ric}\,(e_i)\wedge\overset{\circ}{Ric}\,(e_j) \\ &= \lambda_ie_i\wedge\lambda_je_j=\lambda_i\lambda_j\,(e_i\wedge e_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\wedge Id\right)(e_i\wedge e_j) &= \frac{1}{2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2(e_i)\wedge Id\,(e_j)+Id\,(e_i)\wedge\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2(e_j)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda_i^2e_i\wedge e_j+e_i\wedge\lambda_j^2e_j\right)=\frac{\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right)}{2}\,(e_i\wedge e_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Ric\wedge Ric)\,(e_i\wedge e_j) &= \frac{1}{2}\left(Ric\,(e_i)\wedge Ric\,(e_j)+Ric\,(e_i)\wedge Ric\,(e_j)\right)=\left(\lambda_i+\overline{\lambda}\right)e_i\wedge\left(\lambda_j+\overline{\lambda}\right)e_j \\ &= \left(\lambda_i+\overline{\lambda}\right)\left(\lambda_j+\overline{\lambda}\right)(e_i\wedge e_j) \end{aligned}$$

Segue destas igualdades e do teorema anterior, que

$$D_{a,b}(R)(e_i\wedge e_j)=\left((n-2)b^2-2(a-b)\right)\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)(e_i\wedge e_j)+2aRic\wedge Ric(e_i\wedge e_j)$$
$$+2b^2\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\wedge Id\right)(e_i\wedge e_j)+\frac{Tr\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{n+2n(n-1)a}I(e_i\wedge e_j)$$
$$=\left((n-2)b^2-2(a-b)\right)\lambda_i\lambda_j(e_i\wedge e_j)+2a\left(\lambda_i+\overline{\lambda}\right)\left(\lambda_j+\overline{\lambda}\right)(e_i\wedge e_j)+2b^2\frac{\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right)}{2}(e_i\wedge e_j)$$
$$+\frac{Tr\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{n+2n(n-1)a}(e_i\wedge e_j)$$
$$=\left(\left((n-2)b^2-2(a-b)\right)\lambda_i\lambda_j+2a\left(\lambda_i+\overline{\lambda}\right)\left(\lambda_j+\overline{\lambda}\right)+2b^2\frac{\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right)}{2}\right)e_i\wedge e_j$$
$$+\frac{\sigma n\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{n+2n(n-1)a}e_i\wedge e_j$$
$$=\left(\left((n-2)b^2-2(a-b)\right)\lambda_i\lambda_j+2a\left(\lambda_i+\overline{\lambda}\right)\left(\lambda_j+\overline{\lambda}\right)+b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right)\right)e_i\wedge e_j$$
$$+\frac{\sigma\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a}e_i\wedge e_j.$$

Para a segunda expressão, usemos as igualdades (8.6), (8.7) e (8.4). Com isso, encontramos que

$$\begin{aligned}
Ric(Ric\wedge Ric) &= (Tr(Ric))Ric-Ric^2=\left(Tr\left(\overset{\circ}{Ric}+\overline{\lambda}Id\right)\right)\left(\overset{\circ}{Ric}+\overline{\lambda}Id\right)-\left(\overset{\circ}{Ric}+\overline{\lambda}Id\right)^2\\
&= \overline{\lambda}n\left(\overset{\circ}{Ric}+\overline{\lambda}Id\right)-\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2-\overset{\circ}{Ric}\circ\overline{\lambda}Id-\overline{\lambda}Id\circ\overset{\circ}{Ric}-\left(\overline{\lambda}Id\right)^2\\
&= \overline{\lambda}n\overset{\circ}{Ric}+n\overline{\lambda}^2Id-\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2-\overline{\lambda}\overset{\circ}{Ric}-\overline{\lambda}\overset{\circ}{Ric}-\overline{\lambda}^2Id\\
&= (n-2)\overline{\lambda}\overset{\circ}{Ric}+(n-1)\overline{\lambda}^2Id-\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2,\\
Ric(Id\wedge Id) &= (Tr(Id))Id-Id^2=nId-Id=(n-1)Id,\\
Ric\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right) &= \left(Tr\left(\overset{\circ}{Ric}\right)\right)\overset{\circ}{Ric}-\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2=-\left(\overset{\circ}{Ric}\right),\\
Ric\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\wedge Id\right) &= \frac{n-2}{2}\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2+\frac{Tr\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)}{2}Id=\frac{n-2}{2}\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2+\frac{n\sigma}{2}Id.
\end{aligned}$$

E portanto, temos que

$$Rc\left(D_{a,b}(R)\right)=Rc\left(\left((n-2)b^2-2(a-b)\right)\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}+2aRic\wedge Ric+2b^2\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\wedge Id\right)$$
$$+Rc\left(\frac{Tr\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{n+2n(n-1)a}I\right)$$
$$=\left((n-2)b^2-2(a-b)\right)Rc\left(\overset{\circ}{Ric}\wedge\overset{\circ}{Ric}\right)+2aRc(Ric\wedge Ric)+2b^2Rc\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\wedge Id\right)$$

$+\frac{Tr\left(\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\right)\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{n+2n(n-1)a}Rc\left(I\right)$

$= -\left(\left(n-2\right)b^2-2\left(a-b\right)\right)\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2+2a\left(n-2\right)\overline{\lambda}\overset{\circ}{Ric}+2a\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2Id-2a\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2+b^2\left(n-2\right)\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2+$ $b^2n\sigma Id$

$+\frac{\sigma\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a}\left(n-1\right)Id$

Simplificando essa expressão, vemos que

$$\begin{aligned}
Rc\left(D_{a,b}\left(R\right)\right) &= -2b\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2+2a\left(n-2\right)\overline{\lambda}\overset{\circ}{Ric}+2a\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2Id \\
&\quad +b^2n\sigma Id+\frac{\sigma\left(nb^2\left(1-2b\right)-2\left(a-b\right)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a}\left(n-1\right)Id \\
&= -2b\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2+2a\left(n-2\right)\overline{\lambda}\overset{\circ}{Ric}+2a\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2Id \\
&\quad +\frac{\sigma\left(\left(nb^2\left(1-2b\right)-2\left(a-b\right)\left(1-2b+nb^2\right)\right)\left(n-1\right)+\left(1+2(n-1)a\right)b^2n\right)}{1+2(n-1)a}Id.
\end{aligned}$$

Por fim, conclui-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
Rc\left(D_{a,b}\left(R\right)\right)\left(e_i\right) &= -2b\left(\overset{\circ}{Ric}\right)^2\left(e_i\right)+2a\left(n-2\right)\overline{\lambda}\overset{\circ}{Ric}\left(e_i\right)+2a\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2Id\left(e_i\right) \\
&\quad +\frac{\sigma\left(\left(nb^2\left(1-2b\right)-2\left(a-b\right)\left(1-2b+nb^2\right)\right)\left(n-1\right)+\left(1+2(n-1)a\right)b^2n\right)}{1+2(n-1)a}Id\left(e_i\right) \\
&= -2b\lambda_i^2e_i+2a\left(n-2\right)\overline{\lambda}\lambda_ie_i+2a\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2e_i \\
&\quad +\frac{\sigma\left(\left(nb^2\left(1-2b\right)-2\left(a-b\right)\left(1-2b+nb^2\right)\right)\left(n-1\right)+\left(1+2(n-1)a\right)b^2n\right)}{1+2(n-1)a}e_i
\end{aligned}$$

$= \left(-2b\lambda_i^2+2a\left(n-2\right)\overline{\lambda}\lambda_i+2a\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2+\frac{\sigma\left(\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)(n-1)+(1+2(n-1)a)b^2n\right)}{1+2(n-1)a}\right)e_i$

$= \left(-2b\lambda_i^2+2a\overline{\lambda}\left(n-2\right)\lambda_i+2a\overline{\lambda}^2\left(n-1\right)+\frac{\sigma\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a}\right)e_i.$ ■

Lemas Algébricos de Böhm e Wilking

Pelos cálculos que serão realizados na próxima seção, se faz necessária a análise dos seguintes lemas:

Lema 8.5 *Para todo $R \in Curv$, vale a seguinte igualdade:*

$$R+R\#I=\left(n-1\right)R_I+\frac{n-2}{2}R_{\overset{\circ}{Ric}}=Ric\wedge Id.$$

Observação 8.4 *O lema implica que $Q(R,I)=R+R\#I$, não possui nenhuma componente em $\langle W\rangle$,* *isto é,* $(R + R\#I)_W = 0.$

Demonstração. Pelo Lema 8.3 e pela primeira identidade de Bianchi, vemos que

$$\begin{aligned}
(R\#I)_{ijkl} &= \sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}I_{jplq} - R_{iplq}I_{jpkq} = \sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}\left(\delta_{jl}\delta_{pq} - \delta_{pl}\delta_{jq}\right) - R_{iplq}\left(\delta_{jk}\delta_{pq} - \delta_{pk}\delta_{jq}\right) \\
&= \left(\sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}\delta_{jl}\delta_{pq} - \sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}\delta_{pl}\delta_{jq}\right) - \left(\sum_{p,q=1}^{n} R_{iplq}\delta_{jk}\delta_{pq} - \sum_{p,q=1}^{n} R_{iplq}\delta_{pk}\delta_{jq}\right) \\
&= \delta_{jl}Ric_{ik} - R_{ilkj} - \delta_{jk}Ric_{il} + R_{iklj} \\
&= \delta_{jl}Ric_{ik} - R_{ilkj} - \delta_{jk}Ric_{il} + R_{iklj} \\
&= \delta_{jl}Ric_{ik} - \delta_{jk}Ric_{il} - R_{klij} \\
&= \delta_{jl}Ric_{ik} - \delta_{jk}Ric_{il} - R_{ijkl}
\end{aligned}$$

em que $I_{ijkl} = \langle Id\left(e_i \wedge e_j\right), e_k \wedge e_l\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$. Usando isso, segue das expressões (8.3) **e** (8.4) que

$$\begin{aligned}
(Ric \wedge Id)_{ijkl} &= \frac{1}{2}\left(Ric_{ij}Id_{kl} - Ric_{jl}Id_{ik} - Ric_{il}Id_{jk} - Ric_{jk}Id_{il}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Ric_{ij}\delta_{kl} - Ric_{jl}\delta_{ik} - Ric_{il}\delta_{jk} - Ric_{jk}\delta_{il}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Ric_{ij}\delta_{kl} - Ric_{jl}\delta_{ik} - Ric_{il}\delta_{jk} - Ric_{jk}\delta_{il} + R_{jikl} - R_{ijkl}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Ric_{ij}\delta_{kl} - Ric_{jl}\delta_{ik} - Ric_{il}\delta_{jk} - Ric_{jk}\delta_{il} + R_{jikl} - R_{jikl} + R_{ijkl} - R_{ijkl}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(R + (R\#I)\right)_{ijkl} - \left(R + (R\#I)\right)_{jikl}\right) \\
&= \left(R + (R\#I)\right)_{ijkl},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o seguinte fato:

$$(R\#I)_{ijkl} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (R\#I)_{\alpha\beta}\,\varphi_{ij}^{\alpha}\varphi_{kl}^{\beta} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (R\#I)_{\alpha\beta}\,\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{kl}^{\beta} = -\left(R\#I\right)_{jikl}.$$

■

Dizemos que um operador de curvatura é do **tipo Ricci** se $R = R_I + R_{\overset{\circ}{Ric}}$, isto é, se $R_W = 0$. A partir dessa nomenclatura, temos o seguinte resultado:

Lema 8.6 *Se $R \in Curv$ é um operador de curvatura do tipo Ricci, então*

$$R^2 + R^{\#} = \frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric} + \frac{2\overline{\lambda}}{n-1}\overset{\circ}{Ric} \wedge Id - \frac{2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{Ric}{}^2\right)_0 \wedge Id + \left(\frac{\overline{\lambda}^2}{n-1} - \frac{\sigma}{n-2}\right) I.$$

Demonstração. *Lembremos que* $R_I = \frac{\overline{\lambda}}{n-1} I$ *e* $R_0 := R_{\overset{\circ}{Ric}} = \frac{2}{n-2} \overset{\circ}{Ric} \wedge Id$. *Logo,*

$$\begin{aligned}
R^2 + R^{\#} &= (R_I + R_0)^2 + (R_I + R_0)^{\#} = R_I^2 + 2R_I \circ R_0 + R_0^2 + R_I^{\#} + 2R_I \# R_0 + R_0^{\#} \\
&= R_0^2 + R_0^{\#} + \frac{\overline{\lambda}}{n-1} I \circ \frac{\overline{\lambda}}{n-1} I + 2\frac{\overline{\lambda}}{n-1} I \circ R_0 + \frac{\overline{\lambda}}{n-1} I \# \frac{\overline{\lambda}}{n-1} I + 2\frac{\overline{\lambda}}{n-1} I \# R_0 \\
&= R_0^2 + R_0^{\#} + \left(\frac{\overline{\lambda}}{n-1}\right)^2 I + 2\frac{\overline{\lambda}}{n-1} R_0 + \left(\frac{\overline{\lambda}}{n-1}\right)^2 I \# I + 2\frac{\overline{\lambda}}{n-1} I \# R_0 \\
&= R_0^2 + R_0^{\#} + \left(\frac{\overline{\lambda}}{n-1}\right)^2 (I + I\#I) + 2\frac{\overline{\lambda}}{n-1} (R_0 + I \# R_0).
\end{aligned}$$

Como os dois últimos termos são conhecidos pelo Lema 8.5, é suficiente mostrar a seguinte afirmação:

Afirmação 8.1.1 *Se* $R \in Curv$ *é um operador de curvatura do tipo Ricci, então*

$$R_0^2 + R_0^{\#} = \frac{1}{n-2} \overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric} - \frac{2}{(n-2)^2} \left(\overset{\circ}{Ric}{}^2\right)_0 \wedge Id + \frac{\sigma}{n-2} I. \tag{8.12}$$

Para provar esta afirmação, escolha uma base oortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ *de autovetores de* $\overset{\circ}{Ric}$ *(sempre podemos fazer isso devido a simetria de* $\overset{\circ}{Ric}$ *e pelo Teorema Espectral de Álgebra Linear) com autovalores correspondentes* λ_i, $i = 1, ..., n$. *O operador de curvatura* R_0 *é diagonal com respeito a base* $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ $\left(\text{de fato, pertence à } \left\langle \overset{\circ}{Ric} \right\rangle\right)$, *com autovalores dados pela equação*

$$\begin{aligned}
R_0 (e_i \wedge e_j) &= \frac{2}{n-2} \left(\overset{\circ}{Ric} \wedge Id\right)(e_i \wedge e_j) = \frac{2}{n-2}\frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{Ric}(e_i) \wedge Id(e_j) - \overset{\circ}{Ric}(e_j) \wedge Id(e_i)\right) \\
&= \frac{1}{n-2} \left(\overset{\circ}{Ric}(e_i) \wedge e_j - \overset{\circ}{Ric}(e_j) \wedge e_i\right) = \frac{1}{n-2} (\lambda_i e_i \wedge e_j - \lambda_j e_j \wedge e_i) \\
&= \frac{\lambda_i + \lambda_j}{n-2} e_i \wedge e_j.
\end{aligned}$$

Segue disso que

$$R_0^2 (e_i \wedge e_j) = \frac{\lambda_i + \lambda_j}{n-2} e_i \wedge e_j \circ \frac{\lambda_i + \lambda_j}{n-2} e_i \wedge e_j = \left(\frac{\lambda_i + \lambda_j}{n-2}\right)^2 e_i \wedge e_j.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(R_0)_{ijkl} &= \langle R_0 (e_i \wedge e_j), e_k \wedge e_l \rangle = \left\langle \frac{\lambda_i + \lambda_j}{n-2} e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l \right\rangle = \frac{\lambda_i + \lambda_j}{n-2} \langle e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l \rangle \\
&= \frac{\lambda_i + \lambda_j}{n-2} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}).
\end{aligned}$$

E pelo Lema 8.3, temos as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
(R\#S)_{ijkl} &= \sum_{p,q=1}^{n} R_{ipkq}S_{jplq} - R_{iplq}S_{jpkq}. \\
R_0^{\#}(e_i\wedge e_j) &= \frac{1}{2}\sum_{k<l=1}^{n}\left\langle R_0^{\#}(e_i\wedge e_j), e_k\wedge e_l\right\rangle e_k\wedge e_l = \frac{1}{2}\sum_{k<l=1}^{n}\left(R_0^{\#}\right)_{ijkl} e_k\wedge e_l \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k<l,p<q=1}^{n}\left((R_0)_{ipkq}(R_0)_{jplq} - (R_0)_{iplq}(R_0)_{jpkq}\right) e_k\wedge e_l \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k<l,p<q=1}^{n}\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}(\delta_{ik}\delta_{pq}-\delta_{iq}\delta_{pk})\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}(\delta_{jl}\delta_{pq}-\delta_{jq}\delta_{pl})\, e_k\wedge e_l \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{k<l,p<q=1}^{n}\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}(\delta_{il}\delta_{pq}-\delta_{iq}\delta_{pl})\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}(\delta_{jk}\delta_{pq}-\delta_{jq}\delta_{pk})\, e_k\wedge e_l \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k<l,p<q=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{ik}\delta_{pq}e_k\wedge e_l - \frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{iq}\delta_{pk}e_k\wedge e_l\right)(\delta_{jl}\delta_{pq}-\delta_{jq}\delta_{pl}) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{k<l,p<q=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{il}\delta_{pq}e_k\wedge e_l - \frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{iq}\delta_{pl}e_k\wedge e_l\right)(\delta_{jk}\delta_{pq}-\delta_{jq}\delta_{pk}).
\end{aligned}
$$

Distribuindo os termos, vemos que

$$
\begin{aligned}
R_0^{\#}(e_i\wedge e_j) &= \frac{1}{2}\sum_{k<l,p<q=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{ik}\delta_{pq}\delta_{jl}\delta_{pq}e_k\wedge e_l - \frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{iq}\delta_{pk}\delta_{jl}\delta_{pq}e_k\wedge e_l\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{k<l,p<q=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{ik}\delta_{pq}\delta_{jq}\delta_{pl}e_k\wedge e_l - \frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{iq}\delta_{pk}\delta_{jq}\delta_{pl}e_k\wedge e_l\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{k<l,p<q=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{il}\delta_{pq}\delta_{jk}\delta_{pq}e_k\wedge e_l - \frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{iq}\delta_{pl}\delta_{jk}\delta_{pq}e_k\wedge e_l\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{k<l,p<q=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{il}\delta_{pq}\delta_{jq}\delta_{pk}e_k\wedge e_l - \frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}\delta_{iq}\delta_{pl}\delta_{jq}\delta_{pk}e_k\wedge e_l\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}e_i\wedge e_j - \frac{1}{2}\frac{\lambda_i+\lambda_i}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_i}{n-2}e_i\wedge e_j - \frac{1}{2}\frac{\lambda_i+\lambda_j}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_j}{n-2}e_i\wedge e_j \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}e_j\wedge e_i + \frac{1}{2}\frac{\lambda_i+\lambda_i}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_i}{n-2}e_j\wedge e_i + \frac{1}{2}\frac{\lambda_i+\lambda_j}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_j}{n-2}e_j\wedge e_i \\
&= \sum_{p=1}^{n}\frac{\lambda_i+\lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_p}{n-2}e_i\wedge e_j - \frac{\lambda_i+\lambda_i}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_i}{n-2}e_i\wedge e_j - \frac{\lambda_i+\lambda_j}{n-2}\frac{\lambda_j+\lambda_j}{n-2}e_i\wedge e_j.
\end{aligned}
$$

Ao somar os termos, concluímos que

$$R_0^{\#}\left(e_i \wedge e_j\right) = \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq i,j}}^{n} \frac{\lambda_i + \lambda_p}{n-2}\frac{\lambda_j + \lambda_p}{n-2} e_i \wedge e_j..$$

E no lado direito da Equação 8.12, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \wedge Id\right)\left(e_i \wedge e_j\right) &= \frac{1}{2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \left(e_i\right) \wedge Id\left(e_j\right) - \left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \left(e_j\right) \wedge Id\left(e_i\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \left(e_i\right) \wedge e_j + e_i \wedge \left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \left(e_j\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \left(e_i\right) \wedge e_j + e_i \wedge \left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \left(e_j\right)\right).
\end{aligned}$$

Mas pela definição de $\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0$*,*

$$\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \left(e_i\right) = \left(\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)\left(e_i\right) - \sigma\right) e_i = \left(\lambda_i^2 - \sigma\right) e_i$$

e portanto, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \left(e_i\right) \wedge e_j + e_i \wedge \left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \left(e_j\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(\left(\lambda_i^2 - \sigma\right) e_i \wedge e_j + e_i \wedge \left(\lambda_j^2 - \sigma\right) e_j\right) \\
&= \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\sigma}{2} e_i \wedge e_j.
\end{aligned}$$

Segue disso que se denotarmos por A_{ij} *a expressão*

$$\left(\frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric} \wedge \overset{\circ}{Ric} - \frac{2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \wedge Id + \frac{\sigma}{n-2} I\right)\left(e_i \wedge e_j\right),$$

concluímos que

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\left(e_i\right) \wedge \overset{\circ}{Ric}\left(e_j\right) - \frac{2}{(n-2)^2}\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0 \wedge Id\left(e_i \wedge e_j\right) + \frac{\sigma}{n-2} I\left(e_i \wedge e_j\right) \\
&= \frac{1}{n-2}\lambda_i e_i \wedge \lambda_j e_j - \frac{2}{(n-2)^2}\frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\sigma}{2} e_i \wedge e_j + \frac{\sigma}{n-2} e_i \wedge e_j \\
&= \left(\frac{\lambda_i \lambda_j}{n-2} - \frac{2}{(n-2)^2}\frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2 - 2\sigma}{2} + \frac{\sigma}{n-2}\right) e_i \wedge e_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\lambda_i\lambda_j}{n-2} - \frac{\lambda_i^2+\lambda_j^2-2\sigma+}{(n-2)^2} + \frac{(n-2)\,\sigma}{(n-2)^2}\right) e_i\wedge e_j \\ &= \left(\frac{\lambda_i\lambda_j}{n-2} + \frac{n\sigma-\lambda_i^2-\lambda_j^2}{(n-2)^2}\right) e_i\wedge e_j. \end{aligned}$$

Como λ_k é o k-ésimo autovalor de $\overset{\circ}{Ric}$, a soma dos autovalores (que é o traço de $\overset{\circ}{Ric}$) é zero. Assim,

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\lambda_k = -\lambda_i-\lambda_j.$$

E como $\left(\lambda_k^2-\sigma\right)$ é o k-ésimo autovalor $\left(\overset{\circ}{Ric^2}\right)_0$ (que também tem traço nulo), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^2-\sigma\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\right) - n\sigma \\ &\Rightarrow \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\lambda_k^2 = n\sigma-\lambda_i^2-\lambda_j^2. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_i+\lambda_j}{n-2}\right)^2 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\left(\frac{\lambda_i+\lambda_k}{n-2}\right)\left(\frac{\lambda_j+\lambda_k}{n-2}\right) &= \frac{\lambda_i^2+2\lambda_i\lambda_j+\lambda_j^2}{(n-2)^2} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\frac{\lambda_i\lambda_j+\lambda_i\lambda_k}{(n-2)^2} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n}\frac{\lambda_k\lambda_j+\lambda_k\lambda_k}{(n-2)^2} \\ &= \frac{\lambda_i^2+2\lambda_i\lambda_j+\lambda_j^2}{(n-2)^2} + \frac{(n-2)\,\lambda_i\lambda_j+\lambda_i\left(-\lambda_i-\lambda_j\right)}{(n-2)^2} \\ &\quad + \frac{\left(-\lambda_i-\lambda_j\right)\lambda_j+n\sigma-\lambda_i^2-\lambda_j^2}{(n-2)^2} \\ &= \frac{(n-2)\,\lambda_i\lambda_j+n\sigma-\lambda_i^2-\lambda_j^2}{(n-2)^2}. \end{aligned}$$

■

8.5 Construção dos Cones

Dada uma variedade riemanniana M e um ponto $p\in M$ arbitrário, lembremos que se $R\in Curv$ e $\mathbb{O}\in O(n)$, a aplicação $R^{\mathbb{O}}\in Curv$ é definida por

$$R^{\mathbb{O}}(u,v,w,z) := R\left(\mathbb{O}u,\mathbb{O}v,\mathbb{O}w,\mathbb{O}z\right),$$

para todo $u, v, w, z \in T_pM$.

Definição 8.2 (Família Pinçada de Cones Convexos) *Dizemos que uma família contínua $C(s) \subset Curv$ de cones convexos fechados top-dimensionais (isto é, de mesma dimensão que $Curv$), parametrizados por $s \in [0, \infty)$, é uma **família pinçada** (com respeito ao campo $Q(R) = R^2 + R^{\#}$) se*

1. *$C(s)$ é um cone $O(n)$-invariante para todo $s \geq 0$, isto é, $R \in C(s)$ implica $R^{\mathbb{O}} \in C(s)$, para todo $\mathbb{O} \in O(n)$;*

2. *Cada $R \in C(s) - \{0\}$ possui curvatura escalar positiva;*

3. *$Q(R)$ aponta estritamente para $C(s)$, para todo $R \in \partial (C(s)) - \{0\}$, para todo $s > 0$, isto é, $Q(R)$ está no interior de do cone tangente $\mathcal{T}_R C(s)$;*

4. *$C(s)$ converge (em conjuntos compactos, na topologia Hausdorff) ao cone unidimensional $\mathbb{R}^+ I$ quando $s \to \infty$.*

Vamos assumir que temos um cone convexo fechado preservado inicial, $C(0)$, no espaço vetorial $Curv$, que é $O(n)$-invariante, contido no cone das curvaturas seccionais positivas, e que contém o cone dos operadores de curvatura positivos. Vamos mostrar que vale o seguinte resultado:

Teorema 8.2 *Existe uma família pinçada $C(s)$, $0 \leq s < \infty$, de cones convexos fechados partindo de um cone $C(0)$.*

A construção usa as identidades já demonstradas para produzir uma família de cones pinçados, dada pela aplicação dos operadores $l_{a,b}$ (para a e b cuidadosamente escolhidos) à interseção de $C(0)$ com um cone de operadores com tensor de Ricci pinçado (definido por uma "razão pinçada"p). A definição dessa família está em dois estágios: O primeiro aumenta b até um valor crítico e o segundo aumenta a até o infinito, ou seja, temos os seguintes lemas:

Lema 8.7 *Considere uma variedade riemanniana M. Para $s \in [0, 1/2]$, sejam*

$$a = \frac{(n-2)\, s^2 + 2s}{2 + 2\,(n-2)\, s^2} \qquad , \qquad b = s \qquad e \qquad p = \frac{(n-2)\, s^2}{1 + (n-2)\, s^2}.$$

O campo Q aponta estritamente para dentro do cone (no sentido da Definição 3.1)

$$C(s) = l_{a,b}\left(\left\{R \in Curv : R \in C(0),\ Ric \geq p\frac{Tr\,(Ric)}{n}\right\}\right), \qquad s \in [0, 1/2]\,.$$

Demonstração. Segue do Lema 8.4 que bastar mostrar que o campo $X_{a,b}$ aponta estritamente para o cone $C(0) \cap C_p$ para todo elemento R não nulo do bordo, em que

$$C_p = \left\{ R \in Curv : Ric \geq p \frac{Tr\,(Ric)}{n} \right\}.$$

Isto é, devemos verificar que $X_{a,b}(R)$ está no interior do cone tangente $\mathcal{T}_R(C(0) \cap C_p)$. Pelo Teorema F.3, é suficiente mostrar que $X_{a,b}(R) \in \mathcal{T}_R(C(0))$, para todo $R \in \partial C(0) \cap C_p$ e que $X_{a,b}(R) \in \mathcal{T}_R(C_p)$, para todo $R \in C(0) \cap \partial C_p$. Vamos considerar esses dois casos:

1. Bordo de $C(0)$: Suponhamos que $R \in \partial C(0) \cap C_p$. Por suposição, $C(0)$ contém o cone C_+ dos operadores de curvatura positivos, e assim, $R + C_+ \subset C(0)$, e assim,

$$C_+ \subset C(0) - R \subset \bigcup_{h>0} \frac{C(0) - R}{h} = \mathcal{T}_R(C(0)).$$

   Já que sabemos, por suposição, que Q aponta para $C(0)$, e como $X_{a,b} = D_{a,b} + Q$, é suficiente mostrar que $D_{a,b}$ aponta estritamente para $C(0)$ e portanto é suficiente mostrar que $D_{a,b}$ está em C_+. Podemos fazer isso verificando a positividade dos autovalores de $D_{a,b}$ (dados pelo Corolário 8.1). De fato,

$$\begin{aligned}
(D_{a,b})(R,R) &= \langle D_{a,b}(R), R\rangle = \left\langle D_{a,b}\left(\sum_{k<l=1}^{n} \alpha_{kl} e_k \wedge e_l\right), R\right\rangle = \sum_{k<l=1}^{n} \alpha_{kl} \langle D_{a,b}(e_k \wedge e_l), R\rangle \\
&= \sum_{k<l=1}^{n} \alpha_{kl} \langle d_{kl} e_k \wedge e_l, R\rangle = \sum_{k<l=1}^{n} \alpha_{kl} \left\langle d_{kl} e_k \wedge e_l, \sum_{i<j=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \wedge e_j \right\rangle \\
&= \sum_{k<l,i<j=1}^{n} d_{kl}\alpha_{kl}\alpha_{ij} \langle e_k \wedge e_l, e_i \wedge e_j\rangle = \sum_{k<l,i<j=1}^{n} d_{kl}\alpha_{kl}\alpha_{ij} (\delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}) \\
&= \sum_{i<j=1}^{n} d_{ij}\alpha_{ij}\alpha_{ij} - \sum_{i<j=1}^{n} d_{ji}\alpha_{ji}\alpha_{ij} = \sum_{i<j=1}^{n} d_{ij}\alpha_{ij}^2 - d_{ij}\alpha_{ji}\alpha_{ij} \\
&= \sum_{i<j=1}^{n} d_{ij}\alpha_{ij}^2 + d_{ij}\alpha_{ij}\alpha_{ij} \\
&= 2\sum_{i<j=1}^{n} d_{ij}\alpha_{ij}^2.
\end{aligned}$$

   Como $R \in C_p$, temos as seguintes estimativas para os autovalores de Ric_0 :

$$\lambda_i e_i = Ric_0(e_i) = Ric(e_i) - \frac{S(R)}{n} Id(e_i) = Ric(e_i) - \frac{S(R)}{n} e_i,$$

logo, λ_i tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \lambda_i \langle e_i, e_i \rangle = \left\langle Ric\,(e_i) - \frac{S(R)}{n} e_i, e_i \right\rangle = \langle Ric\,(e_i)\,, e_i \rangle - \frac{S(R)}{n} \langle e_i, e_i \rangle \\
&= \langle Ric\,(e_i)\,, e_i \rangle - \frac{S(R)}{n} \\
&\geq p \frac{Tr\,(Ric)}{n} - \frac{S(R)}{n} \\
&= -\,(1-p)\,\frac{S(R)}{n} \\
&= -\,(1-p)\,\overline{\lambda}.
\end{aligned}$$

Observe, com a nossa parametrização, que

$$\begin{aligned}
\frac{(1-2b)\,(n-2)\,b^2}{1+(n-2)\,b^2} - 2(a-b) &= \frac{(1-2s)\,(n-2)\,s^2}{1+(n-2)\,s^2} - 2\left(\frac{(n-2)\,s^2+2s}{2+2\,(n-2)\,s^2} - s\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e que

$$(n-2)b^2 + 2b - \frac{2a}{1-p} = (n-2)s^2 + 2s - \frac{2\frac{(n-2)s^2+2s}{2+2(n-2)s^2}}{1-\frac{(n-2)s^2}{1+(n-2)s^2}} = 0.$$

Nesse caso, o Corolário 8.1 implica que

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= \left((n-2)\,b^2 - 2\,(a-b)\right)\lambda_i\lambda_j + 2a\left(\overline{\lambda}+\lambda_i\right)\left(\overline{\lambda}+\lambda_j\right) + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a} \\
&= \left(\tfrac{2a}{1-p} - 2b - 2\,(a-b)\right)\lambda_i\lambda_j + 2a\left(\overline{\lambda}+\lambda_i\right)\left(\overline{\lambda}+\lambda_j\right) + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma\left(nb^2(1-2b)-\frac{(1-2b)(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a} \\
&= \left(\tfrac{2a}{1-p} - 2a\right)\lambda_i\lambda_j + 2a\left(\overline{\lambda}+\lambda_i\right)\left(\overline{\lambda}+\lambda_j\right) + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma(1-2b)\left(nb^2-\frac{(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a} \\
&= \tfrac{2ap}{1-p}\lambda_i\lambda_j + 2a\left(\overline{\lambda}+\lambda_i\right)\left(\overline{\lambda}+\lambda_j\right) + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma(1-2b)\left(nb^2-\frac{(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a} \\
&= \tfrac{2ap}{1-p}\lambda_i\lambda_j + 2a\overline{\lambda}^2 + 2a\overline{\lambda}\lambda_j + 2a\lambda_i\overline{\lambda} + 2a\lambda_i\lambda_j + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma(1-2b)\left(nb^2-\frac{(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a} \\
&= 2a\overline{\lambda}^2 + 2a\overline{\lambda}\lambda_j + 2a\lambda_i\overline{\lambda} + \tfrac{2a}{1-p}\lambda_i\lambda_j + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma(1-2b)\left(nb^2-\frac{(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a} \\
&= 2a\left(\overline{\lambda}^2 + \overline{\lambda}\,(\lambda_j+\lambda_i) + \tfrac{1}{1-p}\lambda_i\lambda_j\right) + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma(1-2b)\left(nb^2-\frac{(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a}.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $2ap\overline{\lambda}^2$, segue que

$$d_{ij} = 2a\left((1-p)\,\overline{\lambda}^2 + \overline{\lambda}\,(\lambda_j+\lambda_i) + \tfrac{1}{1-p}\lambda_i\lambda_j\right) + 2ap\overline{\lambda}^2 + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma(1-2b)\left(nb^2-\frac{(n-2)b^2}{1+(n-2)b^2}\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a}$$

$$= 2a\left((1-p)\overline{\lambda}^2 + \overline{\lambda}(\lambda_j+\lambda_i) + \tfrac{1}{1-p}\lambda_i\lambda_j\right) + 2ap\overline{\lambda}^2 + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \tfrac{\sigma(1-2b)\left(2b^2\frac{-2b+bn+1}{b^2n-2b^2+1}\right)}{1+2(n-1)a}$$
$$= 2a\left((1-p)\overline{\lambda}^2 + \overline{\lambda}(\lambda_j+\lambda_i) + \tfrac{1}{1-p}\lambda_i\lambda_j\right) + 2ap\overline{\lambda}^2 + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \tfrac{2b^2\sigma(1-2b)}{1+2(n-1)a}\left(\tfrac{1+(n-2)b}{1+(n-2)b^2}\right)$$
$$> 2a\left((1-p)\overline{\lambda}^2 + \overline{\lambda}(\lambda_j+\lambda_i) + \tfrac{1}{1-p}\lambda_i\lambda_j\right)$$
$$= \tfrac{2a}{1-p}\left(\lambda_i+(1-p)\overline{\lambda}\right)\left(\lambda_j+(1-p)\overline{\lambda}\right)$$
$$= \left((n-2)b^2+2b\right)\left(\lambda_i+(1-p)\overline{\lambda}\right)\left(\lambda_j+(1-p)\overline{\lambda}\right)$$
$$\geq 0,$$

pois $0 < s = b \leq 1/2$.

2. Bordo de C_p: O cone C_p pode ser dado pela interseção de semiespaços da seguinte maneira

$$C_p = \bigcap_{\mathbb{O}\in O(n)} \left\{R \in Curv : l\left(R^{\mathbb{O}}\right) \leq 0\right\},$$

em que

$$l(R) := p\frac{S(R)}{n} - Ric(R)(e_1,e_1).$$

Por simetria, podemos assumir que estamos trabalhando em um ponto R do bordo tal que $l(R) = 0$ e $R \in C(0)$. Pelo Teorema F.3, é suficiente mostrar que $l(X_{a,b}(R)) < 0$ (para $R \neq 0$). Como $l\left(R^{\mathbb{O}}\right) \leq 0$, para todo $\mathbb{O} \in O(n)$, variando os elementos de $O(n)$ de modo termos todos os elementos $e_1, ..., e_n$ concluímos que

$$\begin{aligned}
0 \quad &\geq \quad p\frac{S(R)}{n} - Ric(R)(e_i,e_i) = p\overline{\lambda} - \langle Ric(e_i), e_i\rangle = p\overline{\lambda} - \left\langle Ric(e_i) - \frac{S(R)}{n}e_i + \frac{S(R)}{n}e_i, e_i\right\rangle \\
&= \quad p\overline{\lambda} - \left\langle Ric(e_i) - \frac{S(R)}{n}e_i, e_i\right\rangle - \frac{S(R)}{n}\langle e_i, e_i\rangle \\
&= \quad p\overline{\lambda} - \langle Ric_0(e_i), e_i\rangle - \frac{S(R)}{n} \\
&= \quad p\overline{\lambda} - \lambda_i - \overline{\lambda} \\
&= \quad (p-1)\overline{\lambda} - \lambda_i,
\end{aligned}$$

isto é, temos a seguinte desigualdade:

$$\lambda_i \geq -(1-p)\overline{\lambda}.$$

Com a igualdade em $i = 1$ (pois $l(R) = 0$). Temos que mostrar que $l\left(X_{a,b}\left(R\right)\right) < 0$, isto é, que

$$Ric\left(X_{a,b}\left(R\right)\right)_{11} > p\frac{S\left(X_{a,b}\left(R\right)\right)}{n}.$$

Primeiramente, pela Proposição 8.3 temos que (em uma base ortonormal)

$$\begin{aligned}
S\left(Q(R)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(Ric\left(R\right)_{kk}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k + \overline{\lambda}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^2 + 2\lambda_k\overline{\lambda} + \overline{\lambda}^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 + 2\overline{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k + n\overline{\lambda}^2 \\
&= Tr\left(\left(\overset{0}{Ric}\right)^2\right) + 2\overline{\lambda}Tr\left(\overset{0}{Ric}\right) + n\overline{\lambda}^2 \\
&= Tr\left(\left(\overset{0}{Ric}\right)^2\right) + n\overline{\lambda}^2 \qquad (8.13)\\
&= n\sigma + n\overline{\lambda}^2 \\
&= n\left(\sigma + \overline{\lambda}^2\right).
\end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 = n\sigma$, segue do Corolário 8.1 que

$$\begin{aligned}
S\left(D_{a,b}\left(R\right)\right) &= \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} -2b\lambda_i^2 + 2a\overline{\lambda}\left(n-2\right)\lambda_i + 2a\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2 + \frac{\sigma\left(n^2b^2 - 2\left(n-1\right)\left(a-b\right)\left(1-2b\right)\right)}{1+2\left(n-1\right)a} \\
&= -2b\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + 2a\overline{\lambda}\left(n-2\right)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + \sum_{i=1}^{n}2a\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2 + \frac{\sigma\left(n^2b^2 - 2\left(n-1\right)\left(a-b\right)\left(1-2b\right)\right)}{1+2\left(n-1\right)a} \\
&= -2bn\sigma + 2an\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2 + \frac{\sigma n\left(n^2b^2 - 2\left(n-1\right)\left(a-b\right)\left(1-2b\right)\right)}{1+2\left(n-1\right)a} \\
&= 2an\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2 + \frac{\sigma n\left(n^2b^2 - 2\left(n-1\right)\left(a-b\right)\left(1-2b\right)\right) - 2bn\sigma\left(1+2\left(n-1\right)a\right)}{1+2\left(n-1\right)a} \\
&= 2an\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2 + \frac{\sigma n\left(n^2b^2 - 2\left(n-1\right)\left(a-b\right)\left(1-2b\right) - 2b\left(1+2\left(n-1\right)a\right)\right)}{1+2\left(n-1\right)a} \\
&= 2an\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2 - n\sigma + \frac{n\left(1+\left(n-2\right)b\right)^2}{1+2\left(n-1\right)a}\sigma.
\end{aligned}$$

Combinando esse resultado com a expressão (8.13), vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{S\left(X_{a,b}\left(R\right)\right)}{n} &= \frac{S\left(D_{a,b}\left(R\right)\right)}{n} + \frac{S\left(Q\left(R\right)\right)}{n} = \left(2a\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2 - \sigma + \frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^2}{1+2\left(n-1\right)a}\sigma\right) + \left(\sigma + \overline{\lambda}^2\right) \\
&= 2a\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2 + \frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^2}{1+2\left(n-1\right)a}\sigma + \overline{\lambda}^2 \qquad (8.14)\\
&= \left(1+2a\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^2 + \frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^2}{1+2\left(n-1\right)a}\sigma.
\end{aligned}$$

Note que essa equação se mantém para todo $a \neq -\frac{1}{2(n-1)}$ e independe da escolha da parametrização. Agora, pela Proposição 8.3 com

$$
\begin{aligned}
Ric_{kk} &= \langle Ric\,(e_k)\,, e_k\rangle = \left\langle \overset{0}{Ric}\,(e_k)\,, e_k\right\rangle + \left\langle \frac{S\,(R)}{n} e_k, e_k\right\rangle = \lambda_k + \frac{S\,(R)}{n}\langle e_k, e_k\rangle = \lambda_k + \overline{\lambda} \\
&\geq -\left(1-p\right)\overline{\lambda} + \overline{\lambda} = p\overline{\lambda},
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

segue que

$$
Ric\,(Q(R))_{ii} = \sum_{k=1}^{n} Ric_{ii} R_{ikik} \geq \sum_{k=1}^{n} p\overline{\lambda} R_{ikik} = p\overline{\lambda}\sum_{k=1}^{n} R_{ikik} = p\overline{\lambda} Ric_{ii} \geq p^2\overline{\lambda}^2. \tag{8.16}
$$

Além disso, pelo passo anterior, nossa parametrização implica que

$$
\begin{aligned}
d_{ij} &= 2a\left(\left(1-p\right)\overline{\lambda}^2 + \overline{\lambda}\left(\lambda_j + \lambda_i\right) + \frac{1}{1-p}\lambda_i\lambda_j\right) + 2ap\overline{\lambda}^2 + b^2\left(\lambda_i^2 + \lambda_j^2\right) \\
&\quad + \frac{\sigma\left(nb^2\left(1-2b\right) - 2\left(a-b\right)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2\left(n-1\right)a} \\
&= \frac{2a}{1-p}\left(\lambda_i + \left(1-p\right)\overline{\lambda}\right)\left(\lambda_j + \left(1-p\right)\overline{\lambda}\right) + 2ap\overline{\lambda}^2 + b^2\left(\lambda_i^2 + \lambda_j^2\right) \\
&\quad + \frac{\sigma\left(nb^2\left(1-2b\right) - 2\left(a-b\right)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2\left(n-1\right)a} \\
&\geq 2ap\overline{\lambda}^2 + b^2\left(\lambda_i^2 + \lambda_j^2\right) + \frac{\sigma\left(nb^2\left(1-2b\right) - 2\left(a-b\right)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2\left(n-1\right)a}.
\end{aligned}
$$

Nesse caso temos que

$$
\begin{aligned}
&Ric\,(X_{a,b}\,(R))_{ii} = Ric\,(D_{a,b}\,(R))_{ii} + Ric\,(Q\,(R))_{ii} = \textstyle\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} d_{ij} + Ric\,(Q\,(R))_{ii} \\
&\geq Ric\,(Q\,(R))_{ii} + \textstyle\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\left\{2ap\overline{\lambda}^2 + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a}\right\} \\
&\geq p^2\overline{\lambda}^2 + \textstyle\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\left\{2ap\overline{\lambda}^2 + b^2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a}\right\} \\
&= p^2\overline{\lambda}^2 + \left\{2ap\overline{\lambda}^2\left(n-1\right) + b^2\left(\left(n-1\right)\lambda_i^2 + \textstyle\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\lambda_j^2\right) + \frac{\sigma(n-1)\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a}\right\} \\
&= p^2\overline{\lambda}^2 + \left\{2ap\overline{\lambda}^2\left(n-1\right) + b^2\left(\left(n-1\right)\lambda_i^2 + n\sigma - \lambda_i^2\right) + \frac{\sigma(n-1)\left(nb^2(1-2b)-2(a-b)\left(1-2b+nb^2\right)\right)}{1+2(n-1)a}\right\} \\
&= p^2\overline{\lambda}^2 + 2ap\overline{\lambda}^2\left(n-1\right) + \left(n-2\right)b^2\lambda_i^2 + \left(\frac{(1+(n-2)b)^2}{1+2(n-1)a} + 2b - 1\right)\sigma.
\end{aligned}
$$

Combinando esse resultado com a expressão (8.14) obtemos

$$
\begin{aligned}
Ric\left(X_{a,b}\left(R\right)\right)_{ii}-p\frac{S\left(X_{a,b}\left(R\right)\right)}{n} &\geq p^{2}\overline{\lambda}^{2}+2ap\overline{\lambda}^{2}\left(n-1\right)+\left(n-2\right)b^{2}\lambda_{i}^{2}+\left(\frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^{2}}{1+2\left(n-1\right)a}+2b-1\right)\sigma \\
&\quad -\left(1+2a\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^{2}-p\frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^{2}}{1+2\left(n-1\right)a}\sigma \\
&= \left(p^{2}-1\right)\overline{\lambda}^{2}+2a\left(p-1\right)\overline{\lambda}^{2}\left(n-1\right)+\left(n-2\right)b^{2}\lambda_{i}^{2} \\
&\quad +\left(\left(1-p\right)\frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^{2}}{1+2\left(n-1\right)a}+2b-1\right)\sigma \\
&\geq \left(p^{2}-p\right)\overline{\lambda}^{2}+2a\left(p-1\right)\overline{\lambda}^{2}\left(n-1\right)+\left(n-2\right)b^{2}\lambda_{i}^{2} \\
&\quad +\left(\left(1-p\right)\frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^{2}}{1+2\left(n-1\right)a}+2b-1\right)\sigma \\
&\geq p\left(p-1\right)\overline{\lambda}^{2}+\left(n-2\right)b^{2}\lambda_{i}^{2}+\left(\left(1-p\right)\frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^{2}}{1+2\left(n-1\right)a}+2b-1\right)\sigma.
\end{aligned}
$$

Segue da nossa parametrização $p=p\left(b\right)$ e $a=a\left(b\right)$ que

$$
\begin{aligned}
p-\left(1-p\right)\left(n-2\right)b^{2} &= \frac{\left(n-2\right)s^{2}}{1+\left(n-2\right)s^{2}}-\left(1-\frac{\left(n-2\right)s^{2}}{1+\left(n-2\right)s^{2}}\right)\left(n-2\right)s^{2} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Logo, temos a seguinte igualdade:

$$
\begin{aligned}
p\left(p-1\right)\overline{\lambda}^{2}+\left(n-2\right)b^{2}\lambda_{i}^{2} &= \left(1-p\right)\left(n-2\right)b^{2}\left(p-1\right)\overline{\lambda}^{2}+\left(n-2\right)b^{2}\lambda_{i}^{2} \\
&= \left(n-2\right)b^{2}\left(\lambda_{i}^{2}-\left(1-p\right)^{2}\overline{\lambda}^{2}\right).
\end{aligned}
$$

e além disso,

$$
\begin{aligned}
\left(1-p\right)\frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^{2}}{1+2\left(n-1\right)a}+2b-1 &= \left(1-\frac{\left(n-2\right)b^{2}}{1+\left(n-2\right)b^{2}}\right)\frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^{2}}{1+2\left(n-1\right)\left(\frac{\left(n-2\right)b^{2}+2b}{2+2\left(n-2\right)b^{2}}\right)}+2b-1 \\
&= \frac{2nb^{2}}{nb+1}.
\end{aligned}
$$

Por fim, concluímos que

$$
Ric\left(X_{a,b}\left(R\right)\right)_{ii}-p\frac{S\left(X_{a,b}\left(R\right)\right)}{n}\geq p\left(p-1\right)\overline{\lambda}^{2}+\left(n-2\right)b^{2}\lambda_{i}^{2}+\left(\left(1-p\right)\frac{\left(1+\left(n-2\right)b\right)^{2}}{1+2\left(n-1\right)a}+2b-1\right)\sigma
$$

$$
\begin{aligned}
&= (n-2)\, b^2 \left(\lambda_i^2 - (1-p)^2 \overline{\lambda}^2\right) + \frac{2nb^2}{nb+1}\sigma \\
&\geq \frac{2nb^2}{nb+1}\sigma \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

■

Lema 8.8 *Considere uma variedade riemanniana M . Para todo $s \in (1/2, \infty)$, seja*

$$
a = \frac{1+2s}{4} \qquad , \qquad b = \frac{1}{2} \qquad , \qquad p = 1 - \frac{4}{n+4s},
$$

então o campo $Q(R)$ aponta estritamente para dentro do cone $C(s) = l_{a,b}\left(C\left(0\right) \cap C_p\right)$, para todo $R \in \partial C\left(s\right) - \{0\}$.

Demonstração. A demonstração é muito similar à feita no lema anterior: Temos dois casos para verificar: O primeiro é para $R \in \left(\partial C\left(0\right)\right) \cap C_p$ e o segundo é para $R \in C\left(0\right) \cap \left(\partial C_p\right)$. Por conveniência , vamos definir $u := s - \frac{1}{2} \geq 0$.

1. Se $R \in \left(\partial C\left(0\right)\right) \cap C_p$: Como antes, é suficiente mostrar que os autovalores de $D_{a,b}$ são positivos. Segue do Corolário 8.1 com

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1+2s}{4} = \frac{1+2\left(u+1/2\right)}{4} = \frac{2+2u}{4} = \frac{1+u}{2} \\
b &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

que d_{ij} possui a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
d_{ij} &= \left(\left(n-2\right) b^2 - 2\left(a-b\right)\right) \lambda_i \lambda_j + 2a\left(\overline{\lambda} + \lambda_i\right)\left(\overline{\lambda} + \lambda_j\right) + b^2\left(\lambda_i^2 + \lambda_j^2\right) \\
&\quad + \frac{\sigma\left(nb^2 - 2\left(n-1\right)\left(a-b\right)\left(1-2b\right)\right)}{1+2\left(n-1\right)a} \\
&= \left(\left(n-2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1+u}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)\lambda_i\lambda_j + 2\frac{1+u}{2}\left(\overline{\lambda} + \lambda_i\right)\left(\overline{\lambda} + \lambda_j\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\lambda_i^2 + \lambda_j^2\right) \\
&\quad + \frac{\sigma\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(n-1\right)\left(\frac{1+u}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(1 - 2\frac{1}{2}\right)\right)}{1+2\left(n-1\right)\frac{1+u}{2}} \\
&= \left(\frac{n-2}{4} - u\right)\lambda_i\lambda_j + \left(1+u\right)\left(\overline{\lambda} + \lambda_i\right)\left(\overline{\lambda} + \lambda_j\right) + \frac{1}{4}\left(\lambda_i^2 + \lambda_j^2\right) + \frac{\sigma n}{4+4\left(n-1\right)\left(1+u\right)}.
\end{aligned}
$$

Notemos que vale a seguinte afirmação:

Afirmação 8.2.1 *A quantidade* $\sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ *é limitada por cima em termos de* $\overline{\lambda}$*, isto é,*

$$\sigma \leq \frac{16\,(n-1)\,\overline{\lambda}^2}{(n+2+4u)^2}.$$

Demonstração. Como $\lambda_i + \overline{\lambda} \geq p\overline{\lambda}$, para todo $i = 1, ..., n$, considere o problema de otimização $\sigma = \sigma\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ sob a restrição

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} Hess\,(\sigma)\,(v,v) &= (v_1, ..., v_n)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda_1\partial\lambda_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda_n\partial\lambda_1} & \cdots & \frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda_n^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= (v_1, ..., v_n)\begin{pmatrix} \frac{2}{n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{2}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i^2 > 0, \end{aligned}$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Como $Hess\,(\sigma) > 0$, segue que σ atinge seu ponto de máximo no bordo do conjunto

$$\left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) : \lambda_i + \overline{\lambda} \geq p\overline{\lambda}, \text{ para todo } i = 1, ..., n \text{ e } \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 0\right\}$$

e mais ainda, nos vértices. Portanto, os pontos extremos de σ são da forma

$$\left(-(1-p)\,\overline{\lambda}, -(1-p)\,\overline{\lambda}, ..., (n-1)\,(1-p)\,\overline{\lambda}\right)$$

e as permutações de suas coordenadas. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \sigma &\leq \sigma\left(-(1-p)\,\overline{\lambda}, ..., (n-1)\,(1-p)\,\overline{\lambda}\right) = \frac{1}{n}\left\{(1-p)^2\,\overline{\lambda}^2 + (1-p)^2\,\overline{\lambda}^2 + ... + (n-1)^2\,(1-p)^2\,\overline{\lambda}^2\right\} \\ &= \frac{1}{n}\,(1-p)^2\,\overline{\lambda}^2\left\{1 + 1 + ... + (n-1)^2\right\} \\ &= \frac{1}{n}\,(1-p)^2\,\overline{\lambda}^2\left\{n - 1 + (n-1)^2\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\left(1-p\right)^2 \overline{\lambda}^2 \left\{n-1+n^2-2n+1\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left(1-p\right)^2 \overline{\lambda}^2 \left\{n^2-n\right\} \\
&= \frac{n\left(n-1\right)}{n}\left(1-p\right)^2 \overline{\lambda}^2 \left\{n^2-n\right\} \\
&= \left(n-1\right)\left(1-p\right)^2 \overline{\lambda}^2.
\end{aligned}$$

Mais ainda, como $\lambda_i + \overline{\lambda} \geq p\overline{\lambda}$ e

$$1-p = 1-1+\frac{4}{n+4s} = \frac{4}{n+4s} = \frac{4}{n+4\left(u+1/2\right)} = \frac{4}{n+4u+2},$$

concluímos a demonstração da afirmação. ■

Além disso, temos que

$$\lambda_i + \frac{4\overline{\lambda}}{n+2} \geq \lambda_i + \frac{4\overline{\lambda}}{n+2+4u} = \lambda_i + \left(1-p\right)\overline{\lambda} \geq 0.$$

Segue dessas desigualdades que

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= \left(\frac{n-2}{4} - u\right)\lambda_i\lambda_j + \left(1+u\right)\left(\overline{\lambda}+\lambda_i\right)\left(\overline{\lambda}+\lambda_j\right) + \frac{1}{4}\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) - \frac{\sigma n u}{4+4\left(n-1\right)\left(1+u\right)} \\
&= \frac{n-2}{4}\lambda_i\lambda_j - u\lambda_i\lambda_j + \overline{\lambda}^2 + \overline{\lambda}\lambda_j + \lambda_i\overline{\lambda} + \lambda_i\lambda_j + u\overline{\lambda}^2 + u\overline{\lambda}\lambda_j + u\lambda_i\overline{\lambda} + u\lambda_i\lambda_j + \frac{1}{4}\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) \\
&\quad - \frac{\sigma n u}{4+4\left(n-1\right)\left(1+u\right)} \\
&= \frac{n+2}{4}\lambda_i\lambda_j + \overline{\lambda}^2 + \overline{\lambda}\lambda_j + \lambda_i\overline{\lambda} + u\overline{\lambda}^2 + u\overline{\lambda}\lambda_j + u\lambda_i\overline{\lambda} + \frac{1}{4}\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) - \frac{\sigma n u}{4+4\left(n-1\right)\left(1+u\right)} \\
&= \frac{n+2}{4}\lambda_i\lambda_j + \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2 + \overline{\lambda}\left(\lambda_j+\lambda_i\right) + u\overline{\lambda}\left(\lambda_j+\lambda_i\right) + \frac{1}{4}\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) - \frac{\sigma n u}{4+4\left(n-1\right)\left(1+u\right)} \\
&= \frac{n+2}{4}\lambda_i\lambda_j + \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2 + \left(1+u\right)\overline{\lambda}\left(\lambda_j+\lambda_i\right) + \frac{1}{4}\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) - \frac{\sigma n u}{4+4\left(n-1\right)\left(1+u\right)},
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{n+2}{4}\left(\lambda_i + \frac{4\overline{\lambda}}{n+2}\right)\left(\lambda_j + \frac{4\overline{\lambda}}{n+2}\right) + \overline{\lambda}^2\left(\frac{n-2}{n+2}+u\right) &= \left(\frac{n+2}{4}\right)\lambda_i\lambda_j + \left(\frac{n+2}{4}\right)\lambda_i\frac{4\overline{\lambda}}{n+2} \\
&\quad + \overline{\lambda}\lambda_j + \frac{4\overline{\lambda}^2}{n+2} + \frac{n-2}{n+2}\overline{\lambda}^2 + u\overline{\lambda}^2 \\
&= \left(\frac{n+2}{4}\right)\lambda_i\lambda_j + \lambda_i\overline{\lambda} + \overline{\lambda}\lambda_j + \overline{\lambda}^2 + u\overline{\lambda}^2 \\
&= \left(\frac{n+2}{4}\right)\lambda_i\lambda_j + \overline{\lambda}\left(\lambda_i+\lambda_j\right) + \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, pela afirmação que acabamos de demonstrar,

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= \frac{n+2}{4}\left(\lambda_i+\frac{4\overline{\lambda}}{n+2}\right)\left(\lambda_j+\frac{4\overline{\lambda}}{n+2}\right)+\overline{\lambda}^2\left(\frac{n-2}{n+2}+u\right)+u\overline{\lambda}\left(\lambda_j+\lambda_i\right)+\frac{1}{4}\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right)+\frac{\sigma n u}{4+4\left(n-1\right)\left(1+u\right)} \\
&\geq \overline{\lambda}^2\left(\frac{n-2}{n+2}+u\right)+u\overline{\lambda}\left(\lambda_j+\lambda_i\right)-\frac{\sigma n u}{4+4\left(n-1\right)\left(1+u\right)} \\
&\geq \overline{\lambda}^2\left(\frac{n-2}{n+2}+u\right)+u\overline{\lambda}\left(\lambda_j+\lambda_i\right)-\frac{16n\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2u}{\left(4+4\left(n-1\right)\left(1+u\right)\right)\left(n+2+4u\right)^2} \\
&= \overline{\lambda}^2\left(\frac{n-2}{n+2}+u\right)+u\overline{\lambda}\left(\lambda_j+\lambda_i\right)-\frac{4n\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2u}{\left(n+u\left(n-1\right)\right)\left(n+2+4u\right)^2} \\
&\geq \overline{\lambda}^2\left(\frac{n-2}{n+2}+u\right)+u\overline{\lambda}\left(-\left(1-p\right)\overline{\lambda}+-\left(1-p\right)\overline{\lambda}\right)-\frac{4n\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2u}{\left(n+u\left(n-1\right)\right)\left(n+2+4u\right)^2} \\
&= \overline{\lambda}^2\left(\frac{n-2}{n+2}+u\right)-2\left(1-p\right)u\overline{\lambda}^2-\frac{4n\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2u}{\left(n+u\left(n-1\right)\right)\left(n+2+4u\right)^2} \\
&= \overline{\lambda}^2\left(\frac{n-2}{n+2}+u\right)-2\left(\frac{4}{n+4u+2}\right)u\overline{\lambda}^2-\frac{4n\left(n-1\right)\overline{\lambda}^2u}{\left(n+u\left(n-1\right)\right)\left(n+2+4u\right)^2} \\
&= \left(\frac{n-2}{n+2}+u-\frac{8u}{n+4u+2}-\frac{4n\left(n-1\right)u}{\left(n+u\left(n-1\right)\right)\left(n+2+4u\right)^2}\right)\overline{\lambda}^2.
\end{aligned}$$

Colocando $\overline{\lambda}^2$ em evidência, vemos que

$$d_{ij}=\left(\frac{n-2}{n+2}+u-\frac{8u}{n+4u+2}-\frac{4n\left(n-1\right)u}{\left(n+u\left(n-1\right)\right)\left(n+2+4u\right)^2}\right)\overline{\lambda}^2.$$

Juntando o segundo e o terceiro termo, segue que

$$\begin{aligned}
d_{ij} &= \left(\frac{n-2}{n+2}+\frac{u\left(n+4u-6\right)}{n+4u+2}-\frac{4n\left(n-1\right)u}{\left(n+u\left(n-1\right)\right)\left(n+2+4u\right)^2}\right)\overline{\lambda}^2 \\
&\overset{(!)}{\geq} \left(\frac{n-2}{n+2}+\frac{u\left(n+4u-6\right)}{n+4u+2}-\frac{4\left(n-1\right)u}{\left(n+2\right)\left(n+2+4u\right)}\right)\overline{\lambda}^2 \\
&= \left(\frac{\left(n-2\right)\left(n+2+4u\right)}{n+2}+u\left(n+4u-6\right)-\frac{4\left(n-1\right)u}{n+2}\right)\frac{\overline{\lambda}^2}{n+2+4u} \\
&= \left(\frac{\left(n-2\right)\left(n+2+4u\right)}{n+2}+un+4u^2-6u-\frac{4\left(n-1\right)u}{n+2}\right)\frac{\overline{\lambda}^2}{n+2+4u} \\
&= \left(n-2+4u^2+un-6u-\frac{4u}{n+2}\right)\frac{\overline{\lambda}^2}{n+2+4u} \\
&= \left(4u^2+n-2+\left(n-6-\frac{4}{n+2}\right)u\right)\frac{\overline{\lambda}^2}{n+2+4u},
\end{aligned}$$

onde usamos em (!) que

$$\frac{n}{(n+u(n-1))(n+2+4u)} \leq \frac{1}{n+2},$$

para todo $n \geq 1$ e todo $u \geq 0$.

Mais ainda, se $n=3$ então

$$4u^2+n-2+\left(n-6-\frac{4}{n+2}\right)u = 4u^2+1+\left(-3-\frac{4}{5}\right)u = 4u^2-\frac{19}{5}u+1>0.$$

Além disso, para todo $u \geq 0$ fixado, a função $4u^2+n-2+\left(n-6-\frac{4}{n+2}\right)u$ é monótona e crescente em n, logo $d_{ij}>0$, para todo $n \geq 3$ e todo $u \geq 0$

2 Se $R \in C(0) \cap \partial C_p$: Pelo mesmo argumento do caso anterior (ou seja, usando o Teorema F.3 novamente) é suficiente mostrar que

$$Ric\left(X_{a,b}\right)_{ii} = Ric\left(D_{a,b}\right)_{ii} + Ric\left(Q(R)\right)_{ii} > p\frac{S\left(X_{a,b}\right)}{n}.$$

Pelo Corolário 8.1, com $a=\frac{1+u}{2}$ e $b=1/2$, vemos que

$$\begin{aligned}
r_i &= -2b\lambda_i^2+2a\overline{\lambda}(n-2)\lambda_i+2a\overline{\lambda}^2(n-1)+\frac{\sigma\left(n^2b^2-2(n-1)(a-b)(1-2b)\right)}{1+2(n-1)a} \\
&= -2\frac{1}{2}\lambda_i^2+2\left(\frac{1+u}{2}\right)\overline{\lambda}(n-2)\lambda_i+2\left(\frac{1+u}{2}\right)\overline{\lambda}^2(n-1) \\
&\quad +\frac{\sigma\left(n^2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2(n-1)\left(\left(\frac{1+u}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)\left(1-2\frac{1}{2}\right)\right)}{1+2(n-1)\left(\frac{1+u}{2}\right)} \\
&= -\lambda_i^2+(1+u)\overline{\lambda}(n-2)\lambda_i+(1+u)\overline{\lambda}^2(n-1)+\frac{\sigma n^2\frac{1}{4}}{1+2(n-1)\left(\frac{1+u}{2}\right)} \\
&= -\lambda_i^2+(1+u)\overline{\lambda}(n-2)\lambda_i+(1+u)\overline{\lambda}^2(n-1)+\frac{\sigma n^2}{4+4(n-1)(1+u)}.
\end{aligned}$$

Além disso, pelas expressões (8.16) e (8.14) vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{S\left(X_{a,b}(R)\right)}{n} &= \left(1+2a(n-1)\right)\overline{\lambda}^2+\frac{\left(1+(n-2)b\right)^2}{1+2(n-1)a}\sigma \\
&= \left(1+2\left(\frac{1+u}{2}\right)(n-1)\right)\overline{\lambda}^2+\frac{\left(1+\frac{(n-2)}{2}\right)^2}{1+2(n-1)\left(\frac{1+u}{2}\right)}\sigma \\
&= \left(1+(1+u)(n-1)\right)\overline{\lambda}^2+\frac{n^2\sigma}{4n+4u(n-1)}.
\end{aligned}$$

Nesse caso, podemos supor que $\lambda_i = -\left(1-p\right)\overline{\lambda}$, logo, é suficiente mostrar que

$$r_i + p^2\overline{\lambda} > p\left(\left(1+\left(1+u\right)\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^2 + \frac{n^2\sigma}{4n+4u\left(n-1\right)}\right).$$

Se mostrarmos esse fato, então veremos que

$$\begin{aligned} Ric\left(X_{a,b}\right)_{ii} &= Ric\left(D_{a,b}\right)_{ii} + Ric\left(Q(R)\right)_{ii} = r_i + Ric\left(Q(R)\right)_{ii} \geq r_i + p^2\overline{\lambda} \\ &> p\left(\left(1+\left(1+u\right)\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^2 + \frac{n^2\sigma}{4n+4u\left(n-1\right)}\right) \\ &= p\frac{S\left(X_{a,b}\left(R\right)\right)}{n}. \end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$r_i + p^2\overline{\lambda}^2 - p\left(\left(1+\left(1+u\right)\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^2 + \tfrac{n^2\sigma}{4n+4u(n-1)}\right) = -\lambda_i^2 + \left(1+u\right)\overline{\lambda}\left(n-2\right)\lambda_i + \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2\left(n-1\right) + \tfrac{\sigma n^2}{4+4(n-1)(1+u)}$$

$$+p^2\overline{\lambda}^2 - p\left(\left(1+\left(1+u\right)\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^2 + \tfrac{n^2\sigma}{4n+4u(n-1)}\right)$$

$$= -\left(1-p\right)^2\overline{\lambda}^2 - \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2\left(n-2\right)\left(1-p\right) + \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2\left(n-1\right) + \tfrac{\sigma n^2}{4+4(n-1)(1+u)}$$

$$+p^2\overline{\lambda}^2 - p\left(\left(1+\left(1+u\right)\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^2 + \tfrac{n^2\sigma}{4n+4u(n-1)}\right).$$

Juntando os termos corretos, vemos que

$$r_i + p^2\overline{\lambda}^2 - p\left(\left(1+\left(1+u\right)\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^2 + \tfrac{n^2\sigma}{4n+4u(n-1)}\right) = -\left(1-p\right)^2\overline{\lambda}^2 - \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2\left(n-2\right)\left(1-p\right) + \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2\left(n-1\right)$$

$$+\tfrac{(1-p)\sigma n^2}{4+4(n-1)(1+u)} + p^2\overline{\lambda}^2 - p\left(1+\left(1+u\right)\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^2$$

$$= -\left(1-p\right)^2\overline{\lambda}^2 - \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2\left(n-2\right)\left(1-p\right) + \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2\left(n-1\right) + \tfrac{\left(\frac{4}{n+4s}\right)\sigma n^2}{4+4(n-1)(1+u)} + p^2\overline{\lambda}^2 - p\left(1+\left(1+u\right)\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^2$$

$$\geq -\left(1-p\right)^2\overline{\lambda}^2 - \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2\left(n-2\right)\left(1-p\right) + \left(1+u\right)\overline{\lambda}^2\left(n-1\right) + p^2\overline{\lambda}^2 - p\left(1+\left(1+u\right)\left(n-1\right)\right)\overline{\lambda}^2.$$

Dividindo essa expressão pelo valor positivo $\overline{\lambda}^2$, temos

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{4u}{n+4s} = u\left(1-p\right) \\ &= -\left(1-p\right)^2 - \left(1+u\right)\left(n-2\right)\left(1-p\right) + \left(1+u\right)\left(n-1\right) + p^2 - p\left(1+\left(1+u\right)\left(n-1\right)\right), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar

■

Ou seja, a família de cones que satisfaz o Teorema 8.2 é dada por

$$C(s) = l_{a,b}\left(\left\{R \in Curv : R \in C(0),\, Ric \geq p\frac{Tr\,(Ric)}{n}\right\}\right), \qquad s \in [0, \infty)\,,$$

em que a, b e p são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} a = \frac{(n-2)s^2+2s}{2+2(n-2)s^2} \quad , \quad b = s \quad , \quad p = \frac{(n-2)s^2}{1+(n-2)s^2} \quad , \quad s \in [0, 1/2] \\ a = \frac{1+2s}{4} \quad , \quad b = \frac{1}{2} \quad , \quad p = 1 - \frac{4}{n+4s} \quad , \quad s \in (0, \infty) \end{cases}.$$

8.6 Conjuntos Pinçados Generalizados

Dada uma família de cones $C(s) \subset Curv$, com algumas propriedades, precisamos garantir a existência de um certo conjunto em $C(0)$ que "converse"com os termos quadráticos de reação, $Q(R)$. Para isso, precisamos da seguinte definição:

Definição 8.3 (Conjunto Pinçado) *Considere uma variedade riemanniana M. Um subconjunto $Z \subset Curv$ é dito um **conjunto pinçado** se*

1. *Z é fechado e convexo;*

2. *Z é $O(n)$-invariante;*

3. *Z é preservado pela EDO $\frac{dR}{dt} = Q(R)$, em que*

$$(Q\,(R))_{ijkl} := B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk},$$

   onde $B = B\,(R)$ é o tensor de curvatura quadrática (para mais detalhes veja a Definição 1.2 que se generaliza trivialmente para todo $R \in Curv$)

4. *Existem $\delta > 0$ e $K < \infty$ tais que*

$$\left|\widetilde{R}\right| \leq K\,|R|^{1-\delta}\,,$$

   para todo $R \in Z$, em que $\widetilde{R} = R - \frac{1}{N}Tr\,(R)$ é a parte de R livre de traço.

O próximo teorema fornece um conjunto que garante a compressão para curvaturas seccionais constantes onde a curvatura escalar é suficientemente grande. O resultado é uma ferramenta útil, pois comprova a existência do conjunto pinçado simplesmente a partir da existência de uma família adequada de cones. Comecemos lembrando algumas definições preliminares:

Seja E um fibrado vetorial em uma variedade diferenciável $M \times \mathbb{R}$. Um subconjunto $\Omega \subset E$ é dito **convexo na fibra** se, para cada $(x,t) \in M \times \mathbb{R}$, o conjunto $\Omega_{(x,t)} = \Omega \cap E_{(x,t)}$ é um subconjunto convexo do espaço vetorial $E_{(x,t)}$.

Definimos a **função suporte** $s : E^* \to \mathbb{R}$ **de** Ω por

$$s(x,t,l) := \sup\left\{l(v) : v \in \Omega_{(x,t)} \subset E_{(x,t)}\right\}. \tag{8.17}$$

O **cone normal** $\mathcal{N}_v\Omega_{(x,t)}$ de $\Omega_{(x,t)}$ em um ponto $v \in \partial\Omega_{(x,t)}$ é definido por

$$\mathcal{N}_v\Omega_{(x,t)} := \left\{l \in E^*_{(x,t)} : l(v) = s(x,t,l)\right\}.$$

O **cone tangente** é definido por

$$\mathcal{T}_v\Omega_{(x,t)} := \bigcap_{l \in \mathcal{N}_v\Omega_{(x,t)}} \left\{z \in E_{(x,t)} : l(z) \leq 0\right\}. \tag{8.18}$$

Seja $\Omega \subset E$ convexo na fibra. Dizemos que uma função $F : E \to E$ **aponta para dentro de** Ω se $F(x,t,v) \in T_v\Omega_{(x,t)}$, para todo $(x,t,v) \in E$ com $v \in \partial\Omega_{(x,t)}$. Mais ainda, dizemos que F **aponta estritamente para dentro de** Ω se $F(x,t,v)$ está no interior de $T_v\Omega_{(x,t)}$, para todo $(x,t,v) \in E$ com $v \in \partial\Omega_{(x,t)}$.

Vejamos agora algumas conclusões a respeito de $Q(R) = R^2 + R^\#$:

Observação 8.5 *Notemos que $R^2 + R^\#$ satisfaz a primeira identidade de Bianchi. De fato, usando os dois lemas acima e as simetrias dos tensores de curvatura quadrática, vemos que*

$$\begin{aligned}
\left(R^2+R^\#\right)_{ijkl} + \left(R^2+R^\#\right)_{kijl} + \left(R^2+R^\#\right)_{jkil} &= R^2_{ijkl} + R^\#_{ijkl} + R^2_{kijl} + R^\#_{kijl} + R^2_{jkil} + R^\#_{jkil} \\
&= (B_{ijkl} - B_{ijlk}) + (B_{ikjl} - B_{iljk}) + (B_{kijl} - B_{kilj}) \\
&\quad + (B_{kjil} - B_{klij}) + (B_{jkil} - B_{jkli}) + (B_{jikl} - B_{jlki}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Proposição 8.5 *Se $R \in Curv$, então $Q(R) \in Curv$.*

Demonstração. De fato, como $B_{ijkl} = B_{jilk} = B_{klij}$, então

$$\begin{aligned} Q_{ijkl} + Q_{jikl} &= B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk} + B_{jikl} - B_{jilk} + B_{jkil} - B_{jlik} \\ &= B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk} + B_{jikl} - B_{jilk} + B_{iljk} - B_{ikjl} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} Q_{ijkl} + Q_{ijlk} &= B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk} + B_{ijlk} - B_{ijkl} + B_{iljk} - B_{ikjl} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} Q_{ijkl} - Q_{klij} &= B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk} - (B_{klij} - B_{klji} + B_{kilj} - B_{kjli}) \\ &= B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk} - (B_{ijkl} - B_{lkij} + B_{ikjl} - B_{jkil}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} Q_{ijkl} + Q_{kijl} + Q_{jkil} &= (B_{ijkl} - B_{ijlk} + B_{ikjl} - B_{iljk}) + (B_{kijl} - B_{kilj} + B_{kjil} - B_{klij}) \\ &\quad + (B_{jkil} - B_{jkli} + B_{jikl} - B_{jlki}) \\ &= (B_{ijkl} - B_{klij}) + (-B_{ijlk} + B_{jikl}) + (B_{ikjl} - B_{kilj}) + (-B_{iljk} + B_{jkil}) \\ &\quad + (B_{kijl} - B_{jlki}) + (B_{kjil} - B_{jkli}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Se houver ambiguidade, vamos denotar a curvatura escalar por $Scal$. Concluímos agora com o principal resultado dessa seção:

Teorema 8.3 *Seja $\{C(s)\}_{s\in[0,\infty)} \subset Curv$ uma família contínua de cones $O(n)$-invariantes, fechados e convexos de máxima dimensão, contido no semiespaço dos operadores de curvatura com curvatura escalar positiva. Suponha que, para todo $s > 0$ e todo $R \in (\partial C(s)) - \{0\}$, o vetor $Q(R) = R^2 + R^\#$ está contido no interior do cone tangente $\mathcal{T}_R C(s)$. Então se K é um conjunto compacto contido no interior de $C(0)$,* *existe um conjunto $O(n)$-invariante, fechado e convexo $F \subset C(0)$ com as seguintes propriedades:*

1. *$Q(R) \in \mathcal{T}_R F$, para todo $R \in \partial F$;*

2. *$K \subset F$;*

3. *Para todo $s > 0$, existe $\rho(s)$ tal que $F + \rho(s) I \subset C(s)$, em que*

$$I(u, v, w, x) := g^{\wedge}(u \wedge v, w \wedge x),$$

para todo $u, v, w, x \in T_p M$, $p \in M$.

Demonstração. Pela continuidade da família $\{C(s)\}_{s \in [0,\infty)}$, dado um compacto K no interior de $C(0)$, segue que $K \subset C(s_0)$ para algum $s_0 > 0$. Construímos o conjunto F da seguinte forma:

$$F := C(s_0) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \left\{R : R + 2^i h I \in C(s_i)\right\},$$

em que $h > 0$ e $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente que tende ao infinito. Assim, F é dado por uma interseção de cópias transladadas de $C(s_i)$. Temos que F é convexo, pois é uma interseção de cones, ou seja, uma interseção de convexos, que é convexo. Vamos escolher $s_0 > 0$ e $h > 0$ tal que

$$K \subset C(s_0) \cap \{Scal(R) \leq h\}$$

■

Lema 8.9 *Para todo $\overline{s} \geq s_0$, existe $N(\overline{s}) \geq 1$ (não-decrescente em $\overline{s}$) tal que se $s \in [s_0, \overline{s}]$ e $R \in \partial C(s)$ com $Scal(R) \geq N(\overline{s})$, sendo $Scal(R)$ a curvatura escalar que depende da curvatura riemanniana R, então $Q(S) \in \mathcal{T}_R C(s)$, para todo S com $|S - R| \leq 2|I|$.*

Demonstração. Seja Z o seguinte conjunto compacto:

$$Z = \{(s, R) : s \in [s_0, \overline{s}],\ R \in \partial C(s) \text{ e } Scal(R) = 1\}.$$

Afirmação: Existe $r > 0$ tal que $(s, R) \in Z$, $|S - R| \leq r$ implica que $Q(S) \in \mathcal{T}_R C(s)$

De fato, suponhamos que a afirmação seja falsa. Logo existe uma sequência $(s_i R_i, S_i)$ tal que $(s_i R_i) \in Z$ e $|S_i - R_i| \to 0$, mas $Q(S_i) \notin \mathcal{T}_R C(s_i)$. Assim, pela definição de cone tangente (para mais detalhes veja a Expressão (8.18)), para cada i existe uma transformação linear de norma unitária l_i tal que

$l_i(R_i) = \sup_{C(s_i)} l_i$ com $l_i \in \mathcal{N}_{R_i} C(s_i)$, mas $l_i(Q(S_i)) > 0$. Por compacidade, à menos de passar a uma subsequência, podemos supor que $s_i \to s \in [s_0, \overline{s}]$, e (pela continuidade da família $\{C(s)\}$) $R_i \to R \in \partial C(s) \cap \{R \in Curv : S(R) = 1\}$. Por compacidade do conjunto das transformações lineares com norma unitária, também temos que $l_i \to l$ e

$$l(R) = \lim_{i\to\infty} l_i(R_i) = \lim_{i\to\infty} \sup_{C(s_i)} l_i = \sup_{C(s)} l,$$

isto é, $l \in \mathcal{N}_R C(s)$. Como $|S_i - R_i| \to 0$, segue que $S_i \to R$. E pela continuidade de Q e pelo fato de que $l(Q(S_i)) > 0$ que $l(Q(R)) \geq 0$. Mas isso contradiz o fato de que $l(Q(R)) < 0$, para todo $l \in \mathcal{N}_R C(s)$ demonstrando a afirmação.

Afirmamos que o lema é válido para $N(\overline{s}) := \frac{2|I|}{r}$. Se $R \in \partial C(s)$ com $S(R) \geq N(\overline{s})$, então $\left(s, \frac{R}{S(R)}\right) \in Z$. De fato, como $C(s)$ é um cone e $R \in \partial C(s)$, segue que $\frac{R}{S(R)} \in \partial C(s)$ e mais ainda, $S\left(\frac{R}{S(R)}\right) = \frac{1}{S(R)} S(R) = 1$. Temos que $|S - R| \leq 2|I|$ nos dá que

$$\left|\frac{S}{S(R)} - \frac{R}{S(R)}\right| \leq \frac{2|I|}{S(R)} \leq \frac{2|I|}{N(\overline{s})} = r.$$

Assim, $Q\left(\frac{S}{S(R)}\right) \in \mathcal{T}_{\frac{S}{S(R)}} C(s)$ (afirmação anterior). O resultado segue, já que

$$\begin{aligned}
Q(S) &= Q\left(S(R)\frac{S}{S(R)}\right) = \left(S(R)\frac{S}{S(R)}\right) \circ \left(S(R)\frac{S}{S(R)}\right) + \left(S(R)\frac{S}{S(R)}\right) \# \left(S(R)\frac{S}{S(R)}\right) \\
&= (S(R))^2 \left(\frac{S}{S(R)}\right) \circ \left(\frac{S}{S(R)}\right) + (S(R))^2 \left(\frac{S}{S(R)}\right) \# \left(\frac{S}{S(R)}\right) \\
&= (S(R))^2 Q\left(\frac{S}{S(R)}\right).
\end{aligned}$$

e o cone tangente $\mathcal{T}_R C(s)$ é o mesmo que $\mathcal{T}_{\frac{S}{S(R)}} C(s)$ (isso segue direto da definição de cone tangente e do fato de que $S(R) \geq 0$. ∎

Lema 8.10 *Existe uma função não-crescente* $\delta : [s_0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ *tal que, sempre que* $s \in [s_0, \overline{s}]$ *e* $R + I \in C(s)$ *com* $Scal(R) \leq N(\overline{s})$*, então* $R + 2I \in C(s + \delta(\overline{s}))$.

Demonstração. O conjunto compacto

$$Z = \{(s, R + 2I) : s \in [s_0, \overline{s}],\ Scal(R) \leq N(\overline{s}) \text{ e } R + I \in C(s)\}$$

está no interior do conjunto $\{(s,A) : s \in [s_0, \overline{s}] \text{ e } A \in C(s)\}$. Pela continuidade da família de cones $\{C(s)\}_{s\in[s_0,\overline{s}]}$, existe $\delta > 0$ tal que $Z \subset \{(s,A) : s \in [s_0, \overline{s}] \text{ e } A \in C(s+\delta)\}$. Obviamente, para cada $\overline{s} \in \mathbb{R}$ temos um $\delta > 0$ diferente. E isso completa a demonstração. ■

Continuação a demonstração do teorema. Com esse resultado, vamos construir uma sequência $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, em que $s_{i+1} = s_i + \delta(s_i)$, para cada $i \geq 1$. Suponhamos que $s_i \overset{i\to\infty}{\to} p < \infty$. Como δ é uma função não-crescente e positiva, segue que $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é também uma sequência crescente. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p > s_i + \varepsilon$, portanto, $\delta(s_i) < \varepsilon$, pois $s_{i+1} = s_i + \delta(s_i) < s_i + \varepsilon < p$. Ou seja, $\delta(p) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Assim, $\delta(p) = 0$ o que é um absurdo. Portanto, $\lim_{i\to\infty} s_i = \infty$. Seja

$$F_j := C(s_0) \cap \bigcap_{i=1}^{j} \left\{R \in Curv : R + 2^i hI \in C(s_i)\right\}.$$

Vamos provar que para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$F_{j+1} \cap \left\{R \in Curv : Scal(R) \leq 2^j N(s_j)h\right\} = F_j \cap \left\{R \in Curv : Scal(R) \leq 2^j N(s_j)h\right\} \tag{8.19}$$

Para ver isso, basta mostrar que

$$F_{j+1} \cap \left\{R \in Curv : Scal(R) \leq 2^j N(s_j)h\right\} \supset F_j \cap \left\{R \in Curv : Scal(R) \leq 2^j N(s_j)h\right\},$$

afinal $F_{j+1} \subset F_j$, portanto já temos que

$$F_{j+1} \cap \left\{R \in Curv : Scal(R) \leq 2^j N(s_j)h\right\} \subset F_j \cap \left\{R \in Curv : Scal(R) \leq 2^j N(s_j)h\right\}.$$

Se $R \in F_j \cap \left\{Scal(R) \leq 2^j N(s_j)h\right\}$, então $R + 2^i hI \in C(s_i)$, para todo $i = 1, ..., j$ e além disso $Scal(R) \leq 2^j N(s_j)h$. Portanto,

$$\frac{R}{2^j h} + I = \frac{1}{2^j h}\left(R + 2^j hI\right) \in C(s_j)$$

e além disso,

$$Scal\left(\frac{R}{2^j h}\right) = \frac{1}{2^j h} Scal(R) \leq \frac{1}{2^j h} 2^j N(s_j)h = N(s_j).$$

Segue do Lema 8.10 que

$$\frac{R}{2^j h} + 2I \in C(s_j + \delta(s_j)) = C(s_{j+1}),$$

e portanto,

$$R + 2^{j+1}hI = 2^j h\,(R + 2I) \in C\,(s_{j+1})\,.$$

Assim, $R \in F_{j+1}$, como queríamos demonstrar.

A expressão (8.19) nos diz que quando j aumenta acima de um índice i, a parte de F_j com $Scal(R) \leq 2^i N\,(s_i)\,h$ não muda. Segue disso que

$$F \cap \left\{R \in Curv : Scal(R) \leq 2^i N\,(s_i)\,h\right\} = F_i \cap \left\{R \in Curv : Scal(R) \leq 2^i N\,(s_i)\,h\right\}, \qquad i \in \mathbb{N},$$

em particular, para $i = 0$ temos a seguinte igualdade:

$$F \cap \{R \in Curv : Scal(R) \leq h\} = C\,(s_0) \cap \{R \in Curv : Scal(R) \leq h\}$$

Notemos que F é localmente interseção de uma quantidade finita de conjuntos fechados. Portanto, F é fechado. Além disso, temos que

$$K \subset C\,(s_0) \cap \{R \in Curv : Scal(R) \leq h\} = F \cap \{R \in Curv : Scal(R) \leq h\} \subset F.$$

Resta mostrar que $Q\,(R)$ pertence ao cone tangente de F, para todo $R \in \partial F$. Pela definição de F, $R \in \partial F$ implica que $R \in \partial C\,(s_0)$ ou $R \in \partial\left(C\,(s_i) - 2^i hI\right)$ para uma quantidade finita de valores de i, onde necessariamente $Scal(R) \geq 2^{i-1}N(s_i)h$ pela inclusão (8.19). Vamos mostrar que $Q\,(R) \in \mathcal{T}_R\left(C\,(s_i) - 2^i hI\right) = \mathcal{T}_{R+2^i hI}C\,(s_i)$, para cada i já mencionado. Primeiramente definamos

$$R' := 2^{1-i}h^{-1}\left(R + 2^i hI\right) \qquad \text{e} \qquad S = 2^{1-i}h^{-1}R.$$

Dessa forma, temos que

$$\left|S - R'\right| = \left|2^{1-i}h^{-1}R - 2^{1-i}h^{-1}\left(R + 2^i hI\right)\right| = \left|\left(2^{1-i} - 2^{1-i}\right)h^{-1}R - 2I\right| = 2\,|I|\,,$$

e além disso,

$$\begin{aligned}
Scal\left(R'\right) &= Scal\left(2^{1-i}h^{-1}\left(R+2^{i}hI\right)\right) = Scal\left(2^{1-i}h^{-1}R+I\right)\\
&= 2^{1-i}h^{-1}Scal\left(R\right)+Scal\left(I\right)\\
&\geq 2^{1-i}h^{-1}2^{i-1}N(s_i)h+Scal\left(I\right)\\
&= N(s_i)+Scal\left(I\right)\\
&\geq N(s_i).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 8.9, $Q(S) \in \mathcal{T}_{R'}C\left(s_i\right)$ e assim, $Q(R) \in \mathcal{T}_R\left(C\left(s_i\right)-2^{i}hI\right)$ como queríamos demonstrar. ■

Capítulo 9

Condições de Curvatura

Para demonstrar o Teorema da Esfera Suave, precisamos garantir que os operadores de curvatura da variedade riemanniana M estão contidos em um certo cone convexo, fechado e preservado pelo fluxo de Ricci (isto é, o campo Q aponta para dentro do cone). Um dos objetivos desse capítulo é encontrar (através do Teorema 9.1 e da Proposição 9.1) algumas características desse cone que possibilitam compreender melhor a geometria da variedade M. Além disso, vamos demonstrar um resultado mais geral que o Teorema da Esfera Suave, e o Corolário 9.1 nos mostrará essa generalização.

9.1 Condições PCSC e PIC

Para compreender algumas condições de curvatura, precisamos da noção de complexificação de um espaço vetorial:

Seja V um espaço vetorial real. Vamos realizar uma **complexificação** em V da seguinte maneira: Defina $V_{\mathbb{C}} := \{u + vi : u, v \in V\} \simeq \{(u, v) : u, v \in V\}$. Vamos munir $V_{\mathbb{C}}$ das seguintes operações: Se $a + bi \in \mathbb{C}$ e $u + vi \in V_{\mathbb{C}}$ defina:

$$(a + bi)(u + vi) = (au - bv) + (av + bu)\, i \in V_{\mathbb{C}}.$$

Além disso, se $u + vi, x + zi \in V_{\mathbb{C}}$, defina:

$$(u + vi) + (x + zi) := (u + x) + (v + z)\, i \in V_{\mathbb{C}}.$$

Note que $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$. De fato, seja $B = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V. Dado $u + vi \in V_{\mathbb{C}}$, segue que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \qquad \text{e} \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i,$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$. Logo temos que

$$u + vi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \right) i = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j + i\beta_j \right) v_j,$$

ou seja, B gera $V_{\mathbb{C}}$.

Dado um espaço vetorial munido de um produto interno $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, podemos extender o produto interno a uma transformação complexo-linear em $V_{\mathbb{C}}$ definida por:

$$(x + iy) \cdot (u + iv) := \langle x, u \rangle - \langle y, v \rangle + i \langle y, u \rangle + i \langle x, v \rangle . \tag{9.1}$$

Essa é realmente uma transformação complexo-linear, pois dados $x + iy, u_1 + iv_1, u_2 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, segue que

$$\begin{aligned}
(x + iy) \cdot \{\alpha (u_1 + iv_1) + \beta (u_2 + iv_2)\} &= (x + iy) \cdot \{(\alpha u_1 + \beta u_2) + i (\alpha v_1 + \beta v_2)\} \\
&= \langle x, \alpha u_1 + \beta u_2 \rangle - \langle y, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle + i \langle y, \alpha u_1 + \beta u_2 \rangle + i \langle x, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle \\
&= \overline{\alpha} \langle x, u_1 \rangle + \overline{\beta} \langle x, u_2 \rangle - \overline{\alpha} \langle y, v_1 \rangle - \overline{\beta} \langle y, v_2 \rangle + i\overline{\alpha} \langle y, u_1 \rangle + i\overline{\beta} \langle y, u_2 \rangle \\
&\quad + i\overline{\alpha} \langle x, v_1 \rangle + i\overline{\beta} \langle x, v_2 \rangle \\
&= \overline{\alpha} (\langle x, u_1 \rangle - \langle y, v_1 \rangle + i \langle y, u_1 \rangle + i \langle x, v_1 \rangle) \\
&\quad + \overline{\beta} (\langle x, u_2 \rangle - \langle y, v_2 \rangle + i \langle y, u_2 \rangle + i \langle x, v_2 \rangle) \\
&= \overline{\alpha} \{(x + iy) \cdot (u_1 + iv_1)\} + \overline{\beta} \{(x + iy) \cdot (u_2 + iv_2)\} .
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\{\alpha (u_1 + iv_1) + \beta (u_2 + iv_2)\} \cdot (x + iy) &= \{(\alpha u_1 + \beta u_2) + i (\alpha v_1 + \beta v_2)\} \cdot (x + iy) \\
&= \langle \alpha u_1 + \beta u_2, x \rangle - \langle \alpha v_1 + \beta v_2, y \rangle + i \langle \alpha v_1 + \beta v_2, x \rangle + i \langle \alpha u_1 + \beta u_2, y \rangle \\
&= \alpha \langle u_1, x \rangle + \beta \langle u_2, x \rangle - \alpha \langle v_1, y \rangle - \beta \langle v_2, y \rangle + \alpha i \langle v_1, x \rangle + \beta i \langle v_2, x \rangle \\
&\quad + \alpha i \langle u_1, y \rangle + \beta i \langle u_2, y \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha \left(\langle u_1, x \rangle - \langle v_1, y \rangle + i \langle v_1, x \rangle + i \langle u_1, y \rangle \right) \\ &\quad + \beta \left(\langle u_2, x \rangle - \langle v_2, y \rangle + i \langle v_2, x \rangle + i \langle u_2, y \rangle \right) \\ &= \alpha \left\{ (u_1 + iv_1) \cdot (x + iy) \right\} + \beta \left\{ (u_2 + iv_2) \cdot (x + iy) \right\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, há uma maneira natural de estender o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a um produto interno Hermitiano $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ da seguinte maneira:

$$\langle \langle (x + iy), (u + iv) \rangle \rangle := (x + iy) \cdot (u - iv) = \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle + i \langle y, u \rangle - i \langle x, v \rangle .$$

A bilinearidade de $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ de dá pela bilinearidade de $(\cdot, \cdot)$. Além disso,

$$\langle \langle (x + iy), (x + iy) \rangle \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + i \langle y, x \rangle - i \langle x, y \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = 0 \\ \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle = 0 \end{cases}$$

A segunda igualdade é trivial, e como $\langle x, x \rangle, \langle y, y \rangle \geq 0$, segue que $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 0$ e como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é produto interno, segue que isso ocorre se e somente se $x = y = 0$. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} \langle \langle (x + iy), (u + iv) \rangle \rangle &= \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle + i \langle y, u \rangle - i \langle x, v \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle + i \left(\langle y, u \rangle - \langle x, v \rangle \right) \\ &= \overline{\langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle - i \left(\langle y, u \rangle - \langle x, v \rangle \right)} = \overline{\langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle + i \left(\langle x, v \rangle - \langle y, u \rangle \right)} \\ &= \overline{\langle u, x \rangle + \langle v, y \rangle + i \left(\langle v, x \rangle - \langle u, y \rangle \right)} = \overline{\langle \langle (u + iv), (x + iy) \rangle \rangle}. \end{aligned}$$

Outros tensores que agem em V podem ser estendidos de várias maneiras, com cada argumento se estendendo de uma maneira linear ou conjulgado-linear. Em particular, se R um operador de curvatura algébrico, e $V = \mathbb{R}^n$, há uma extensão natural de R a uma forma bilinear Hermitiana agindo em $\bigwedge^2 V_{\mathbb{C}}$. Em particular, para todo subespaço de dimensão 2, Π, de $V_{\mathbb{C}}$, R define uma **curvatura seccional complexa** de Π dada por

$$K_{\mathbb{C}} (\Pi) := R \left(Z, W, \overline{Z}, \overline{W} \right),$$

onde W e Z formam uma base ortonormal de Π com respeito ao produto interno Hermitiano $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ de $V_{\mathbb{C}}$. Note que as simetrias de R implicam que $K_{\mathbb{C}} (\Pi) \in \mathbb{R}$. De fato, por um lado, ao usar que R é uma forma bilinear Hermitiana agindo em $\bigwedge^2 V_{\mathbb{C}}$, vê-se que:

$$K_{\mathbb{C}} (\Pi) = R \left(Z, W, \overline{Z}, \overline{W} \right) = \overline{R \left(W, Z, \overline{W}, \overline{Z} \right)}.$$

Por outro lado, usando as simetrias de R segue que

$$\overline{K_{\mathbb{C}}(\Pi)} = \overline{R\left(Z, W, \overline{Z}, \overline{W}\right)} = \overline{R\left(W, Z, \overline{W}, \overline{Z}\right)} = K_{\mathbb{C}}(\Pi).$$

Além disso, se $\{X, Y\}$ é uma outra base ortonormal para Π, segue que

$$\begin{cases} X = aZ + bW \\ Y = cZ + dW \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R\left(X, Y, \overline{X}, \overline{Y}\right) &= \widetilde{R}(X, Y) = \widetilde{R}(aZ + bW, cZ + dW) \\ &= \widetilde{R}(aZ, dW) + \widetilde{R}(bW, cZ) \\ &= a\overline{d}\widetilde{R}(Z, W) + b\overline{c}\widetilde{R}(W, Z) \\ &= a\overline{d}\widetilde{R}(Z, W) + b\overline{c}\widetilde{R}(Z, W) \\ &= \left(a\overline{d} + b\overline{c}\right)\widetilde{R}(Z, W) \\ &= \det\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}\widetilde{R}(Z, W). \end{aligned}$$

Mas notemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \|X\|^2 = \langle\langle aZ + bW, aZ + bW\rangle\rangle = a^2 + b^2 \\ 1 &= \|Y\|^2 = \langle\langle cZ + dW, cZ + dW\rangle\rangle = c^2 + d^2 \end{aligned}$$

Ou seja, os vetores (a, b) e (c, d) são unitários. Portanto $(a, -b)$ e $\overline{(c, d)} = \left(\overline{c}, \overline{d}\right)$ também são, logo

$$\det\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}\widetilde{R}(Z, W) = \widetilde{R}(Z, W) = R\left(Z, W, \overline{Z}, \overline{W}\right).$$

Vemos que $K_{\mathbb{C}}(\Pi)$ independe da escolha da base ortonormal.

Escrevendo $Z = X + iY$, $W = U + iV$ e usando a primeira identidade de Bianchi, vemos que

$$\begin{aligned}
K_{\mathbb{C}}(\Pi) &= R\left(Z,W,\overline{Z},\overline{W}\right) = R\left(X+iY,U+iV,\overline{X+iY},\overline{U+iV}\right) = R\left(X+iY,U+iV,X-iY,U-iV\right) \\
&= R(X,U,X,U) - iR(X,U,X,V) - iR(X,U,Y,U) - R(X,U,Y,V) + iR(X,V,X,U) \\
&\quad + R(X,V,X,V) + R(X,V,Y,U) - iR(X,V,Y,V) \\
&\quad + iR(Y,U,X,U) + R(Y,U,X,V) + R(Y,U,Y,U) - iR(Y,U,Y,V) - R(Y,V,X,U) \\
&\quad + iR(Y,V,X,V) + iR(Y,V,Y,U) + R(Y,V,Y,V).
\end{aligned}$$

Separando os termos com i e sem i, vemos que

$$\begin{aligned}
K_{\mathbb{C}}(\Pi) &= R(X,U,X,U) + R(X,V,X,V) + R(Y,U,Y,U) + R(Y,V,Y,V) + R(X,V,Y,U) \\
&\quad + R(Y,U,X,V) - R(X,U,Y,V) - R(Y,V,X,U) \\
&\quad + iR(Y,U,X,U) - iR(Y,U,Y,V) + iR(Y,V,X,V) + iR(Y,V,Y,U) - iR(X,V,Y,V) \\
&\quad - iR(X,U,Y,U) - iR(X,U,X,V) + iR(X,V,X,U).
\end{aligned}$$

Pelas simetrias de R e pela primeira identidade de Bianchi, concluímos que

$$\begin{aligned}
K_{\mathbb{C}}(\Pi) &= R(X,U,X,U) + R(X,V,X,V) + R(Y,U,Y,U) + R(Y,V,Y,V) \\
&\quad + 2R(X,V,Y,U) - 2R(X,U,Y,V) \\
&= R(X,U,X,U) + R(X,V,X,V) + R(Y,U,Y,U) + R(Y,V,Y,V) \\
&\quad - 2R(V,X,Y,U) - 2R(Y,V,X,U) \\
&= R(X,U,X,U) + R(X,V,X,V) + R(Y,U,Y,U) + R(Y,V,Y,V) - 2R(X,Y,V,U).
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Com estas noções em mente, compreendemos a ideia de subespaço (e vetor) isotrópico:

Definição 9.1 *Um subespaço complexo, U, de $V_{\mathbb{C}}$ é dito* ***isotrópico*** *com respeito a forma complexa definida pela expressão (9.1), se existir pelo menos um vetor não nulo $u \in U$ tal que $u \cdot v = 0$, para todo $v \in U$. O subespaço é dito* ***totalmente isotrópico*** *se essa condição é verdadeira para todo $u \in U$ (ou seja, se a forma complexa (9.1) se anula em U). Em particular, dizemos que um* ***vetor*** *$z \neq 0$ é* ***isotrópico*** *se o subespaço $\langle z \rangle < V_{\mathbb{C}}$ é isotrópico (ou seja, se $z \cdot z = 0$).*

Note que se $z = x + iy$, então

$$z \cdot z = (x + iy) \cdot (x + iy) = \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle + i\langle y, x\rangle + i\langle x, y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2i\langle x, y\rangle .$$

Por igualdade de números complexos vemos que z é isotrópico se, e somente se $z \cdot z = 0$ se, e somente se $\|x\| = \|y\|$ e $x \perp y$. Um subespaço é totalmente isotrópico quando é composto inteiramente de vetores isotrópicos. De fato, se um subespaço $U < V_{\mathbb{C}}$ é totalmente isotrópico, então $u \cdot v = 0$, para todo $u, v \in U$, em particular, se $u = v$ segue que $u \cdot u = 0$, para todo $u \in U$. Por outro lado, se $u \cdot u = 0$, para todo $u \in U$, então segue que

$$0 = (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + 2(u \cdot v) + v \cdot v = 2(u \cdot v),$$

ou seja, $u \cdot v = 0$, para todo $u, v \in U$ e U é, portanto, totalmente isotrópico.

Estamos interessados nos 2-planos totalmente isotrópicos, isto é, os subespaços complexos de dimensão 2 de $\mathbb{R}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ que são totalmente isotrópicos. Todo 2-plano pode ser gerado por vetores da forma $Z = X + iY$ e $W = U + iV$, onde U, V, X, Y são todos ortonormais. De fato, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, temos que $\alpha Z + \beta W = 0$ se e somente se

$$0 + 0i = \alpha(X + iY) + \beta(U + iV) = \alpha X + \beta U + i(\alpha Y + \beta V),$$

por igualdade de números complexos, vemos que isso ocorre se, e somente se

$$\begin{aligned} \alpha X + \beta U &= 0 \\ \alpha Y + \beta V &= 0 \end{aligned}$$

Como são ortonormais, $\{X, U\}$ e $\{Y, V\}$ são dois conjuntos L.I's, portanto isso ocorre se, e somente se $\alpha = \beta = 0$. Logo $\{Z, W\}$ gera o 2-plano.

Neste capítulo, estamos interessados nas seguintes condições de curvatura:

Definição 9.2 (Condição PCSC) *Dizemos que $R \in Curv$ possui **curvatura seccional complexa positiva (PCSC)** se todas as curvaturas seccionais complexas de R são positivas. O conjunto dessas* *curvaturas é o seguinte cone convexo fechado em Curv:*

$$\begin{aligned} C_{PCSC} \quad : \quad &= \left\{R \in Curv : R\left(X, Y, \overline{X}, \overline{Y}\right) \geq 0, \text{ para todo } X, Y \in \mathbb{C}^n\right\} \\ &= \bigcap_{X,Y \in \mathbb{C}^n} \left\{R \in Curv : l_{X,Y}\left(R\right) \geq 0\right\}, \end{aligned}$$

onde $l_{X,Y}\left(R\right) := R\left(X, Y, \overline{X}, \overline{Y}\right)$. *Dizemos que uma variedade riemanniana* M *possui curvatura seccional complexa positiva se* $R \in Int\left(C_{PCSC}\left(T_pM\right)\right)$, *para todo* $p \in M$.

Observação 9.1 *Notemos que* C_{PCSC} *é de fato, convexo, uma vez que* $l_{X,Y}$ *é uma transformação linear e* C_{PCSC} *é a interseção dos semiespaços superiores de todos os* $l_{X,Y}$. *Logo é uma interseção de convexos, que é convexo. Além disso,* C_{PCSC} *é fechado, pois*

$$\begin{aligned} \left(C_{PCSC}\right)^c \quad &= \quad \left(\bigcap_{X,Y \in \mathbb{C}^n} \left\{R \in Curv : l_{X,Y}\left(R\right) \geq 0\right\}\right)^c = \bigcup_{X,Y \in \mathbb{C}^n} \left\{R \in Curv : l_{X,Y}\left(R\right) \geq 0\right\}^c \\ &= \quad \bigcup_{X,Y \in \mathbb{C}^n} \left\{R \in Curv : l_{X,Y}\left(R\right) < 0\right\}, \end{aligned}$$

ou seja, C^c_{PCSC} *é uma união de abertos, portanto é aberto. Além disso, observemos que* C_{PCSC} *é um cone positivo, pois Curv é um espaço vetorial, logo* $tR \in Curv$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e se* $t \geq 0$ *então* $\left(tR\right)\left(X, Y, \overline{X}, \overline{Y}\right) = tR\left(X, Y, \overline{X}, \overline{Y}\right) \geq 0$, *para todo* $X, Y \in \mathbb{C}^n$, *ou seja,* $tR \in C_{PCSC}$ *para todo* $t \geq 0$. *Por fim, temos que* C_{PCSC} *é* $O(n)$*-invariante: Dados* $X, Y \in \mathbb{C}^n$ *e* $\mathbb{O} \in O(n)$, *segue que* $\mathbb{O}X$ *e* $\mathbb{O}Y \in \mathbb{C}^n$, *logo, se* $R \in C_{PCSC}$, *pela definição de* C_{PCSC} *segue que*

$$R^{\mathbb{O}}\left(X, Y, \overline{X}, \overline{Y}\right) = R\left(\mathbb{O}X, \mathbb{O}Y, \overline{\mathbb{O}X}, \overline{\mathbb{O}Y}\right) \geq 0$$

Como $R \in C_{PCSC}$ *implicou que* $R^{\mathbb{O}} \in C_{PCSC}$, *então* C_{PCSC} *é* $O(n)$*-invariante. Além disso,* $R \in Int\left(C_{PCSC}\left(T_pM\right)\right)$ *significa que* $R\left(X, Y, \overline{X}, \overline{Y}\right) > 0$, *para todo* $X, Y \in \mathbb{C}^n$.

Definição 9.3 (Condição PIC) *Dizemos que* $R \in Curv$ *possui* ***curvatura isotrópica positiva (PIC)*** *se as curvaturas seccionais complexas de todos os 2-planos totalmente isotrópicos em* $\mathbb{C}^n$ *são positivas. A partir disso, definimos o cone* C_{PIC} *por*

$$C_{PIC} = \bigcap_{\mathbb{O} \in O(n)} \left\{R \in Curv : \widetilde{l}\left(R^{\mathbb{O}}\right) \geq 0\right\},$$

em que $\widetilde{l} := l_{e_1+ie_2, e_3+ie_4}$. *Dizemos que uma variedade riemanniana* M *possui curvatura isotrópica positiva* *se* $R \in Int\left(C_{PIC}\left(T_pM\right)\right)$, *para todo* $p \in M$.

Observação 9.2 *Da mesma forma feita na Observação 9.1 vemos que* C_{PIC} *é, de fato, um cone convexo, fechado e* $O(n)$*-invariante. Além disso, notemos que, pela expressão (9.2)*

$$\begin{aligned}
\widetilde{l}\left(R^{\mathbb{O}}\right) &= l_{e_1+ie_2,e_3+ie_4}\left(R^{\mathbb{O}}\right)\\
&= R\left(e_1,e_3,e_1,e_3\right)+R\left(e_1,e_4,e_1,e_4\right)+R\left(e_2,e_3,e_2,e_3\right)+R\left(e_2,e_4,e_2,e_4\right)-2R\left(e_1,e_2,e_3,e_4\right)\\
&= R_{1313}+R_{1414}+R_{2323}+R_{2424}-2R_{1234}.
\end{aligned}$$

O operador de curvatura $\widehat{R}_k$ de $M\times\mathbb{R}^k$ induzido por R (curvatura de M) e pela projeção ortogonal natural $\pi_k:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^n$ é um elemento de $Curv\left(TM\times\mathbb{R}^k\right)$ em que

$$\widehat{R}_k\left(u,v,w,z\right) := \left(\pi_k^*R\right)\left(u,v,w,z\right) := R\left(\pi_k\left(u\right),\pi_k\left(v\right),\pi_k\left(w\right),\pi_k\left(z\right)\right), \qquad u,v,w,z\in\mathbb{R}^{n+k}.$$

Se não houver ambiguidade, vamos denotar $\widehat{R}_k$ simplesmente por $\widehat{R}$ omitindo a dimensão.

Definição 9.4 *Definimos o cone* $\widehat{C}_{PIC_k}$ *como o cone de todos os operadores de curvatura de* M *cuja curvatura induzida em* $M\times\mathbb{R}^k$ *produz curvatura isotrópica positiva, isto é,*

$$\widehat{C}_{PIC_k} = \left\{R\in Curv\left(\mathbb{R}^n\right):\widehat{R}_k\in C_{PIC}\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)\right\} = \left(\pi_k^*\right)^{-1}\left(C_{PIC}\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)\right).$$

O próximo resultado nos mostrar um bom comportamento do pullback da projeção π_k^* em $Q\left(R\right)$:

Lema 9.1 *Se* $R\in Curv$, *então* $\pi_k^*\left(Q\left(R\right)\right) = Q\left(\pi_k^*\left(R\right)\right)$.

Demonstração. Já que Q é $O\left(n+k\right)$- invariante (pois é uma soma de traços, invariantes por mudança de base), podemos calcular $\pi_k^*\left(Q\left(R\right)\right)$ em $\{e_i\}_{i=1}^{n+k}$ tal que $e_1,...,e_n$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ e $e_{n+1},...,e_{n+k}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^k$. Então, para $1\leq a,b,c,d\leq n$ segue que:

$$\begin{aligned}
B\left(\pi_k^*\left(R\right)\right)_{abcd} &= \sum_{1\leq p,q\leq n+k}\widehat{R}_{apbq}\widehat{R}_{cpdq}\\
&= \sum_{1\leq p,q\leq n+k} R\left(\pi_k\left(e_a\right),\pi_k\left(e_p\right),\pi_k\left(e_b\right),\pi_k\left(e_q\right)\right)R\left(\pi_k\left(e_c\right),\pi_k\left(e_p\right),\pi_k\left(e_d\right),\pi_k\left(e_q\right)\right)\\
&= \sum_{1\leq p,q\leq n} R\left(\pi_k\left(e_a\right),\pi_k\left(e_p\right),\pi_k\left(e_b\right),\pi_k\left(e_q\right)\right)R\left(\pi_k\left(e_c\right),\pi_k\left(e_p\right),\pi_k\left(e_d\right),\pi_k\left(e_q\right)\right)\\
&= B\left(R\right)\left(\pi_k\left(e_a\right),\pi_k\left(e_b\right),\pi_k\left(e_c\right),\pi_k\left(e_d\right)\right)\\
&= \left(\pi_k^*\left(B\left(R\right)\right)\right)_{abcd},
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é devido ao fato de que $e_{n+1},...,e_{n+k}$ possui as n primeiras coordenadas nulas. Se a,b,c ou $d>n$, teremos $0=0$, ou seja, a igualdade é imediata. Como $Q\left(\pi_k^*\left(R\right)\right)$ é soma de termos da forma $B\left(\pi_k^*\left(R\right)\right)_{abcd}$, temos o resultado. ■

Por outro lado, $\left(\pi_k^*\right)^{-1}$ se comporta bem com relação ao cone tangente de C_{PIC}:

Lema 9.2 *Para todo $R\in\partial\widehat{C}_{PIC_k}$, vale a seguinte igualdade:*

$$\mathcal{T}_R\widehat{C}_{PIC_k}=\left(\pi_k^*\right)^{-1}\left(\mathcal{T}_{\widehat{R_k}}C_{PIC}\right).$$

Demonstração. A aplicação π_k^* é um isomorfismo linear de $Curv\left(\mathbb{R}^n\right)$ no subespaço

$$L=\bigcap_{v\in\{0\}\times\mathbb{R}^k}\left\{R\in Curv\left(\mathbb{R}^{n+k}\right):R\left(v,\cdot,\cdot,\cdot\right)=0\right\}$$

De fato, primeiramente verifiquemos que a imagem de π_k^* está em L : Dado $R\in Curv\left(\mathbb{R}^n\right)$, $v\in\{0\}\times\mathbb{R}^k$ e $u,w,z\in\mathbb{R}^{n+k}$, segue que

$$\left(\pi_k^*R\right)\left(v,u,w,z\right)=R\left(\pi_k\left(v\right),\pi_k\left(u\right),\pi_k\left(w\right),\pi_k\left(z\right)\right)=R\left(0,\pi_k\left(u\right),\pi_k\left(w\right),\pi_k\left(z\right)\right)=0.$$

Dados $R,S\in Curv\left(\mathbb{R}^n\right)$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned}\pi_k^*\left(\alpha R+\beta S\right)\left(u,v,w,z\right)&=\left(\alpha R+\beta S\right)\left(\pi_k\left(u\right),\pi_k\left(v\right),\pi_k\left(w\right),\pi_k\left(z\right)\right)\\&=\alpha R\left(\pi_k\left(u\right),\pi_k\left(v\right),\pi_k\left(w\right),\pi_k\left(z\right)\right)+\beta S\left(\pi_k\left(u\right),\pi_k\left(v\right),\pi_k\left(w\right),\pi_k\left(z\right)\right)\\&=\alpha\left(\pi_k^*R\right)\left(u,v,w,z\right)+\beta\left(\pi_k^*S\right)\left(u,v,w,z\right),\end{aligned}$$

para todo $u,v,w,z\in TM\times\mathbb{R}^k$. Além disso, se $\pi_k^*\left(R\right)=\pi_k^*\left(S\right)$, então existem $a,b,c,d\in\mathbb{R}^n$ tais que $R\left(a,b,c,d\right)\neq S\left(a,b,c,d\right)$. Sejam $\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c},\widetilde{d}\in\mathbb{R}^{n+k}$ extensões canônicas de a,b,c,d, respectivamente, logo

$$\begin{aligned}\pi_k^*\left(R\right)\left(\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c},\widetilde{d}\right)&=R\left(\pi_k\left(\widetilde{a}\right),\pi_k\left(\widetilde{b}\right),\pi_k\left(\widetilde{c}\right),\pi_k\left(\widetilde{d}\right)\right)=R\left(a,b,c,d\right)\neq S\left(a,b,c,d\right)\\&=S\left(\pi_k\left(\widetilde{a}\right),\pi_k\left(\widetilde{b}\right),\pi_k\left(\widetilde{c}\right),\pi_k\left(\widetilde{d}\right)\right)\\&=\pi_k^*\left(S\right)\left(\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c},\widetilde{d}\right),\end{aligned}$$

ou seja, $\pi_k^*\left(R\right)\left(\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c},\widetilde{d}\right)\neq\pi_k^*\left(S\right)\left(\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c},\widetilde{d}\right)$ mas isso é um absurdo, logo $R=S$ e portanto π_k^* é injetora.

Por fim, dado $\widetilde{R} \in L$, queremos definir $R \in Curv\left(\mathbb{R}^n\right)$ tal que $\pi_k^* R = \widetilde{R}$. Definimos R por

$$R\left(a,b,c,d\right) := \widetilde{R}\left(\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c},\widetilde{d}\right)$$

em que $\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c},\widetilde{d} \in \mathbb{R}^{n+k}$ são as respectivas extensões canônicas de $a,b,c,d \in \mathbb{R}^n$. Se tratarmos os vetores de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ como tangente e os vetores de $\{0\} \times \mathbb{R}^k$ como perpendiculares e usarmos a definição do conjunto L, então pontualmente temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\left(\pi_k^* R\right)\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta\right) &= \left(\pi_k^* R\right)\left(\alpha^\top + \alpha^\perp, \beta^\top + \beta^\perp, \gamma^\top + \gamma^\perp, \delta^\top + \delta^\perp\right) \\
&= R\left(\pi_k\alpha^\top + \pi_k\alpha^\perp, \pi_k\beta^\top + \pi_k\beta^\perp, \pi_k\gamma^\top + \pi_k\gamma^\perp, \pi_k\delta^\top + \pi_k\delta^\perp\right) \\
&= R\left(\pi_k\alpha^\top, \pi_k\beta^\top, \pi_k\gamma^\top, \pi_k\delta^\top\right) = \widetilde{R}\left(\widetilde{\pi_k\alpha^\top}, \widetilde{\pi_k\beta^\top}, \widetilde{\pi_k\gamma^\top}, \widetilde{\pi_k\delta^\top}\right) \\
&= \widetilde{R}\left(\alpha^\top, \beta^\top, \gamma^\top, \delta^\top\right) = \widetilde{R}\left(\alpha^\top, \beta^\top, \gamma^\top, \delta^\top\right) + \widetilde{R}\left(\alpha^\perp, \beta^\top, \gamma^\top, \delta^\top\right) \\
&= \widetilde{R}\left(\alpha^\top + \alpha^\perp, \beta^\top, \gamma^\top, \delta^\top\right) = \widetilde{R}\left(\alpha, \beta^\top, \gamma^\top, \delta^\top\right) \\
&= \widetilde{R}\left(\alpha, \beta^\top, \gamma^\top, \delta^\top\right) + \widetilde{R}\left(\alpha, \beta^\perp, \gamma^\top, \delta^\top\right).
\end{aligned}$$

Notando que $\beta^\top + \beta^\perp = \beta$ e usando o fato de que $\widetilde{R} \in L$, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\pi_k^* R\right)\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta\right) &= \widetilde{R}\left(\alpha,\beta,\gamma^\top,\delta^\top\right) \\
&= \widetilde{R}\left(\alpha,\beta,\gamma^\top,\delta^\top\right) + \widetilde{R}\left(\alpha,\beta,\gamma^\perp,\delta^\top\right) \\
&= \widetilde{R}\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta^\top\right) \\
&= \widetilde{R}\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta^\top\right) + \widetilde{R}\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta^\perp\right) \\
&= \widetilde{R}\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta\right),
\end{aligned}$$

para todo $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}^{n+k}$. Logo temos o isomorfismo.

Em particular, π_k^* leva $\widehat{C}_{PIC_k}$ em $L \cap C_{PIC}$. Portanto, pela definição de cone tangente (para mais detalhes veja a expressão (F.1))

$$\begin{aligned}
\pi_k^*\left(\mathcal{T}_R \widehat{C}_{PIC_k}\right) &= \pi_k^*\left(\bigcup_{h>0} \frac{\widehat{C}_{PIC_k} - R}{h}\right) \\
&= \bigcup_{h>0}\left(\frac{\pi_k^*\left(\widehat{C}_{PIC_k}\right) - \pi_k^*\left(R\right)}{h}\right) = \bigcup_{h>0}\left(\frac{L \cap C_{PIC} - \widehat{R_k}}{h}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \bigcup_{h>0} \left(L \cap \left(\frac{C_{PIC} - \widehat{R_k}}{h} \right) \right) \\ &= L \cap \left(\bigcup_{h>0} \frac{C_{PIC} - \widehat{R_k}}{h} \right) \\ &= L \cap \mathcal{T}_{\widehat{R_k}} C_{PIC} \end{aligned}$$

onde a última igualdade é devido ao fato de que $\mathcal{T}_{\widehat{R_k}} C_{PIC} \subset Curv\left(\mathbb{R}^n\right)$, ou seja, os elementos são tensores. Portanto, usando o fato de que $\mathcal{T}_{\widehat{R_k}} C_{PIC} \subset Curv\left(\mathbb{R}^n\right)$ e aplicando $\left(\pi_k^*\right)^{-1}$ em ambos os extremos, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_R \widehat{C}_{PIC_k} &= \left(\pi_k^*\right)^{-1} \left(L \cap \mathcal{T}_{\widehat{R_k}} C_{PIC} \right) = \left(\pi_k^*\right)^{-1} (L) \cap \left(\pi_k^*\right)^{-1} \left(\mathcal{T}_{\widehat{R_k}} C_{PIC} \right) \\ &= Curv\left(\mathbb{R}^n\right) \cap \left(\pi_k^*\right)^{-1} \left(\mathcal{T}_{\widehat{R_k}} C_{PIC} \right) \\ &= \left(\pi_k^*\right)^{-1} \left(\mathcal{T}_{\widehat{R_k}} C_{PIC} \right). \end{aligned}$$

■

Para o teorema conclusivo, precisamos entender o conceito de cone preservado:

Seja $A \subset Curv$ um subconjunto convexo do espaço vetorial $Curv$ para o qual o campo vetorial Q aponta para dentro (para mais detalhes veja o início da Seção 8.6). Chamamos tal conjunto de **conjunto preservado** e, em particular, um cone que é preservado é chamado de **cone preservado**.

Teorema 9.1 *Se $C_{PIC}\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$ é um cone preservado, então $\widehat{C}_{PIC_k}\left(\mathbb{R}^n\right)$ também é.*

Demonstração. Segue dos Lemas 9.1 e 9.2 que

$$\pi_k^* \left(Q\left(R\right)\right) = Q\left(\pi_k^* R\right) = Q\left(\widehat{R}_k\right) \in L \cap \mathcal{T}_{\widehat{R_k}} C_{PIC} = \pi_k^* \left(\mathcal{T}_R \widehat{C}_{PIC_k} \right),$$

onde $R \in \partial \widehat{C}_{PIC_k}$. Portanto, para todo $v \in \{0\} \times \mathbb{R}^k$

$$\widehat{R_k}\left(v, \cdot, \cdot, \cdot\right) = R\left(\pi_k\left(v\right), \pi_k\left(\cdot\right), \pi_k\left(\cdot\right), \pi_k\left(\cdot\right)\right) = R\left(0, \pi_k\left(\cdot\right), \pi_k\left(\cdot\right), \pi_k\left(\cdot\right)\right) = 0,$$

ou seja, $\widehat{R}_k \in L$ e assim $Q\left(\widehat{R}_k\right) \in L$ (esse fato segue diretamente da expressão (8.1)). Pela definição do cone tangente $\mathcal{T}_{\widehat{R_k}} C_{PIC}$ e de supremo, vemos que $\widehat{R}_k \in \mathcal{T}_{\widehat{R_k}} C_{PIC}$. Como $\pi_k^* \left(Q\left(R\right)\right) \in \pi_k^* \left(\mathcal{T}_R \widehat{C}_{PIC_k} \right)$, se $Q\left(R\right) \notin \mathcal{T}_R \widehat{C}_{PIC_k}$, então haveria $D \in \mathcal{T}_R \widehat{C}_{PIC_k}$ tal que $\pi_k^* \left(Q\left(R\right)\right) = \pi_k^* \left(D\right)$ com $D \neq Q\left(R\right)$, isso é um absurdo pois π_k^* é injetora. Logo $Q\left(R\right) \in \mathcal{T}_R \widehat{C}_{PIC_k}$. ■

Considere uma variedade riemanniana M. Dizemos que um operador de curvatura $\widetilde{R}:\bigwedge^2(\mathbb{R}^n)\times\bigwedge^2(\mathbb{R}^n)\to C^\infty(M)$ é não negativo se

$$\widetilde{R}(\varphi,\varphi)\geq 0,$$

para todo $\varphi\in\bigwedge^2(\mathbb{R}^n)$. Nesse caso, denotamos $\widetilde{R}\geq 0$. A partir dessa definição, temos o seguinte resultado:

Proposição 9.1 *O cone $\widehat{C}_{PIC_k}$ contém o cone dos* ***operadores de curvatura*** *não negativos $\left\{R\in Curv:\widetilde{R}\geq 0\right\}$, para todo k. E todo $R\in\widehat{C}_{PIC_2}$ possui curvatura seccional não negativa.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $\left\{R:\widetilde{R}\geq 0\right\}\subset C_{PIC}$. Dado $R\in Curv$ um operador de curvatura não negativo e $\{e_1,....,e_4\}$ um 4-referencial ortonormal em $\mathbb{R}^n$. Seja $\varphi,\psi\in\bigwedge^2(\mathbb{R}^n)$, onde

$$\begin{cases}\varphi=e_1\wedge e_3+e_4\wedge e_2\\ \psi=e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3\end{cases}$$

segue da primeira identidade de Bianchi que

$$0\leq\widetilde{R}(\varphi,\varphi)+\widetilde{R}(\psi,\psi)=\widetilde{R}(e_1\wedge e_3+e_4\wedge e_2,e_1\wedge e_3+e_4\wedge e_2)+\widetilde{R}(e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3,e_1\wedge e_4+e_2\wedge e_3)$$

$$\begin{aligned}
&= \widetilde{R}(e_1\wedge e_3,e_1\wedge e_3)+\widetilde{R}(e_1\wedge e_3,e_4\wedge e_2)+\widetilde{R}(e_4\wedge e_2,e_1\wedge e_3)+\widetilde{R}(e_4\wedge e_2,e_4\wedge e_2)+\widetilde{R}(e_1\wedge e_4,e_1\wedge e_4)\\
&\quad+\widetilde{R}(e_1\wedge e_4,e_2\wedge e_3)+\widetilde{R}(e_2\wedge e_3,e_1\wedge e_4)+\widetilde{R}(e_2\wedge e_3,e_2\wedge e_3)\\
&= R_{1313}+R_{1342}+R_{4213}+R_{4242}+R_{1414}+R_{1423}+R_{2314}+R_{2323}\\
&= R_{1313}+R_{2323}+R_{4242}+R_{1414}+2R_{1342}+2R_{1423}\\
&= R_{1313}+R_{2323}+R_{4242}+R_{1414}+2R_{1342}+2R_{4132}\\
&= R_{1313}+R_{2323}+R_{4242}+R_{1414}-2R_{3412}.
\end{aligned}$$

Ou seja, pela definição de C_{PIC} (para mais detalhes veja a Definição 9.3) vemos que $R\in C_{PIC}$.

Definindo $\widehat{e_i}:=(e_i,0,...,0)\in\mathbb{R}^{n+k}$, $i=1,...,4$, temos que $\{\widehat{e_i}\}_{i=1}^4$ é um subconjunto ortonormal de $\mathbb{R}^{n+k}$. Denotando $\widehat{R}_{\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}\widehat{d}}:=\widehat{R}(\widehat{e_a},\widehat{e_b},\widehat{e_c},\widehat{e_d})$ vemos, pela definição de $\widehat{R}$, que

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{\widehat{1313}}+\widehat{R}_{\widehat{2323}}+\widehat{R}_{\widehat{4242}}+\widehat{R}_{\widehat{1414}}-2\widehat{R}_{\widehat{3412}} &= \widehat{R}(\widehat{e_1},\widehat{e_3},\widehat{e_1},\widehat{e_3})+\widehat{R}(\widehat{e_2},\widehat{e_3},\widehat{e_2},\widehat{e_3})+\widehat{R}(\widehat{e_4},\widehat{e_2},\widehat{e_4},\widehat{e_2})\\
&\quad+\widehat{R}(\widehat{e_1},\widehat{e_4},\widehat{e_1},\widehat{e_4})-2\widehat{R}(\widehat{e_3},\widehat{e_4},\widehat{e_1},\widehat{e_2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R\left(\pi_k\left(\widehat{e_1}\right), \pi_k\left(\widehat{e_3}\right), \pi_k\left(\widehat{e_1}\right), \pi_k\left(\widehat{e_3}\right)\right) + R\left(\pi_k\left(\widehat{e_2}\right), \pi_k\left(\widehat{e_3}\right), \pi_k\left(\widehat{e_2}\right), \pi_k\left(\widehat{e_3}\right)\right) \\
&\quad + R\left(\pi_k\left(\widehat{e_4}\right), \pi_k\left(\widehat{e_2}\right), \pi_k\left(\widehat{e_4}\right), \pi_k\left(\widehat{e_2}\right)\right) + R\left(\pi_k\left(\widehat{e_1}\right), \pi_k\left(\widehat{e_4}\right), \pi_k\left(\widehat{e_1}\right), \pi_k\left(\widehat{e_4}\right)\right) \\
&\quad - 2R\left(\pi_k\left(\widehat{e_3}\right), \pi_k\left(\widehat{e_4}\right), \pi_k\left(\widehat{e_1}\right), \pi_k\left(\widehat{e_2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Projetando, vemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_{\widehat{1313}} + \widehat{R}_{\widehat{2323}} + \widehat{R}_{\widehat{4242}} + \widehat{R}_{\widehat{1414}} - 2\widehat{R}_{\widehat{3412}} &= R_{1313} + R_{2323} + R_{4242} + R_{1414} - 2R_{3412} \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

isto é, $R \in \widehat{C}_{PIC_k}$.

Agora vamos mostrar que $\widehat{C}_{PIC_2}$ está contido no cone dos operadores de curvatura seccional positiva: Seja $R \in \widehat{C}_{PIC_2}$ e $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^n$ um 2-referencial ortonormal, e defina

$$\widehat{e_1} = (e_1, 0, 0) \quad , \quad \widehat{e_3} = (e_2, 0, 0) \quad , \quad \widehat{e_2} = \left(\overrightarrow{0}, 0, 1\right) \quad , \quad \widehat{e_4} = \left(\overrightarrow{0}, 1, 0\right)$$

um 4-referencial ortonormal em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$. Como $R \in \widehat{C}_{PIC_2}$, então $\widehat{R}_2 \in C_{PIC}$, ou seja,

$$0 \leq \left(\widehat{R}_2\right)_{1313} + \left(\widehat{R}_2\right)_{2323} + \left(\widehat{R}_2\right)_{4242} + \left(\widehat{R}_2\right)_{1414} - 2\left(\widehat{R}_2\right)_{3412}.$$

Mas temos que

$$\begin{cases}
\left(\widehat{R}_2\right)_{1313} = \left(\widehat{R}_2\right)\left(\widehat{e_1}, \widehat{e_3}, \widehat{e_1}, \widehat{e_3}\right) = R\left(\pi_2\left(\widehat{e_1}\right), \pi_2\left(\widehat{e_3}\right), \pi_2\left(\widehat{e_1}\right), \pi_2\left(\widehat{e_3}\right)\right) = R\left(e_1, e_2, e_1, e_2\right) \\
\left(\widehat{R}_2\right)_{2323} = \left(\widehat{R}_2\right)\left(\widehat{e_2}, \widehat{e_3}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}\right) = R\left(\pi_2\left(\widehat{e_2}\right), \pi_2\left(\widehat{e_3}\right), \pi_2\left(\widehat{e_2}\right), \pi_2\left(\widehat{e_3}\right)\right) = R\left(0, e_2, 0, e_2\right) = 0 \\
\left(\widehat{R}_2\right)_{4242} = \left(\widehat{R}_2\right)\left(\widehat{e_4}, \widehat{e_2}, \widehat{e_4}, \widehat{e_2}\right) = R\left(\pi_2\left(\widehat{e_4}\right), \pi_2\left(\widehat{e_2}\right), \pi_2\left(\widehat{e_4}\right), \pi_2\left(\widehat{e_2}\right)\right) = R\left(0, 0, 0, 0\right) = 0 \\
\left(\widehat{R}_2\right)_{1414} = \left(\widehat{R}_2\right)\left(\widehat{e_1}, \widehat{e_4}, \widehat{e_1}, \widehat{e_4}\right) = R\left(\pi_2\left(\widehat{e_1}\right), \pi_2\left(\widehat{e_4}\right), \pi_2\left(\widehat{e_1}\right), \pi_2\left(\widehat{e_4}\right)\right) = R\left(e_1, 0, e_1, 0\right) = 0
\end{cases}$$

ou seja,

$$0 \leq \left(\widehat{R}_2\right)_{1313} + \left(\widehat{R}_2\right)_{2323} + \left(\widehat{R}_2\right)_{4242} + \left(\widehat{R}_2\right)_{1414} - 2\left(\widehat{R}_2\right)_{3412} = R_{1212},$$

portanto R possui curvaturas seccionais não negativas. ∎

9.2 Lema de Berger e Aplicações

Um resultado simples mas muito importante na demonstração do Teorema da Esfera Suave é o chamado Lema de Berger. Mostraremos que o tensor de curvatura pode ser limitado sempre que a curvatura seccional é limitada (superior e inferiormente):

Lema 9.3 (de Berger) *Dada uma variedade riemanniana (M,g). Suponha que em algum ponto p a curvatura seccional é limitada. Seja $\Delta := \max_{u,v\in T_pM}\{K(u\wedge v)\}$ e $\delta := \min_{u,v\in T_pM}\{K(u\wedge v)\}$. Se $u,v,w,x\in T_pM$ são vetores ortonormais, então*

$$|R(u,v,w,v)| \leq \frac{1}{2}(\Delta-\delta) \qquad e \qquad |R(u,v,w,x)| \leq \frac{2}{3}(\Delta-\delta).$$

Demonstração. Dados $u,v,w\in T_pM$. Primeiramente, a multilinearidade de R garante que

$$\begin{aligned} R(u+w,v,u+w,v) &= R(u,v,u+w,v)+R(w,v,u+w,v) \\ &= R(u,v,u,v)+R(u,v,w,v)+R(w,v,u,v)+R(w,v,w,v). \end{aligned}$$

Além disso, temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} R(u-w,v,u-w,v) &= R(u,v,u-w,v)-R(w,v,u-w,v) \\ &= R(u,v,u,v)-R(u,v,w,v)-R(w,v,u,v)+R(w,v,w,v). \end{aligned}$$

Portanto, destas duas igualdades vemos que

$$\begin{aligned} R(u+w,v,u+w,v)-R(u-w,v,u-w,v) &= 2R(u,v,w,v)+2R(w,v,u,v) \\ &= 2R(u,v,w,v)+2R(u,v,w,v) \\ &= 4R(u,v,w,v). \end{aligned}$$

Segue dessa identidade e da definição de curvatura seccional (para mais detalhes veja a Seção A.0.1) que:

$$\begin{aligned} &2|R(u,v,w,v)| = \tfrac{1}{2}|R(u+w,v,u+w,v)-R(u-w,v,u-w,v)| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|K((u+w)\wedge v)\left(|u+w|^2|v|^2-\langle u+w,v\rangle\right)-K((u-w)\wedge v)\left(|u-w|^2|v|^2-\langle u-w,v\rangle\right)\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|K((u+w)\wedge v)|u+w|^2-K((u-w)\wedge v)|u-w|^2\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|K((u+w)\wedge v)\left(\sqrt{2}\right)^2-K((u-w)\wedge v)\left(\sqrt{2}\right)^2\right| \\ &= |K((u+w)\wedge v)-K((u-w)\wedge v)| \end{aligned}$$

$\leq \Delta - \delta.$

Para a segunda desigualdade da Proposição, notemos que

$$\begin{aligned} R(u, v+x, w, v+x) &= R(u,v,w,v+x) + R(u,x,w,v+x) \\ &= R(u,v,w,v) + R(u,v,w,x) + R(u,x,w,v) + R(u,x,w,x). \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} R(u, v-x, w, v-x) &= R(u,v,w,v-x) - R(u,x,w,v-x) \\ &= R(u,v,w,v) - R(u,v,w,x) - R(u,x,w,v) + R(u,x,w,x). \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$R(u, v+x, w, v+x) - R(u, v-x, w, v-x) = 2R(u,v,w,x) + 2R(u,x,w,v).$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} R(v, u-x, w, u-x) &= R(v,u,w,u-x) - R(v,x,w,u-x) \\ &= R(v,u,w,u) - R(v,u,w,x) - R(v,x,w,u) + R(v,x,w,x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} R(v, u+x, w, u+x) &= R(v,u,w,u+x) + R(v,x,w,u+x) \\ &= R(v,u,w,u) + R(v,u,w,x) + R(v,x,w,u) + R(v,x,w,x). \end{aligned}$$

Portanto, usando as duas últimas expressões vemos que

$$R(v, u-x, w, u-x) - R(v, u+x, w, u+x) = -2R(v,u,w,x) - 2R(v,x,w,u).$$

Logo, obtemos que:

$$\begin{aligned} & R(u, v+x, w, v+x) - R(u, v-x, w, v-x) + R(v, u-x, w, u-x) - R(v, u+x, w, u+x) \\ = \;& 2R(u,v,w,x) + 2R(u,x,w,v) - 2R(v,u,w,x) - 2R(v,x,w,u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2R(u,v,w,x) + 2R(u,x,w,v) + 2R(u,v,w,x) - 2R(v,x,w,u) \\
&= 4R(u,v,w,x) + 2R(u,x,w,v) - 2R(v,x,w,u).
\end{aligned}$$

Olhando para os dois últimos termos e usando a primeira identidade de Bianchi, vemos que

$$\begin{aligned}
2R(u,x,w,v) - 2R(v,x,w,u) &= 2R(u,x,w,v) - 2R(w,u,v,x) = 2R(u,x,w,v) + 2R(w,u,x,v) \\
&= 2(R(u,x,w,v) + R(w,u,x,v)) = 2(-R(x,w,u,v)) \\
&= -2R(x,w,u,v).
\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned}
&R(u,v+x,w,v+x) - R(u,v-x,w,v-x) + R(v,u-x,w,u-x) - R(v,u+x,w,u+x) \\
&= 4R(u,v,w,x) + 2R(u,x,w,v) - 2R(v,x,w,u) = 4R(u,v,w,x) - 2R(x,w,u,v) \\
&= 4R(u,v,w,x) - 2R(u,v,x,w) \\
&= 4R(u,v,w,x) + 2R(u,v,w,x) \\
&= 6R(u,v,w,x).
\end{aligned}$$

Usando essa igualdade e a primeira desigualdade demonstrada, segue que:

$$\begin{aligned}
&6\left|R(u,v,w,x)\right| = |R(u,v+x,w,v+x) - R(u,v-x,w,v-x) \\
&+R(v,u-x,w,u-x) - R(v,u+x,w,u+x)| \\
&= \left|2R\left(u,\tfrac{v+x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{v+x}{\sqrt{2}}\right) - 2R\left(u,\tfrac{v-x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{v-x}{\sqrt{2}}\right) + 2R\left(v,\tfrac{u-x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{u-x}{\sqrt{2}}\right) - 2R\left(v,\tfrac{u+x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{u+x}{\sqrt{2}}\right)\right| \\
&\leq 2\left|R\left(u,\tfrac{v+x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{v+x}{\sqrt{2}}\right)\right| + 2\left|R\left(u,\tfrac{v-x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{v-x}{\sqrt{2}}\right)\right| + 2\left|R\left(v,\tfrac{u-x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{u-x}{\sqrt{2}}\right)\right| + 2\left|R\left(v,\tfrac{u+x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{u+x}{\sqrt{2}}\right)\right| \\
&\leq (\Delta-\delta) + (\Delta-\delta) + (\Delta-\delta) + (\Delta-\delta) \\
&= 4(\Delta-\delta),
\end{aligned}$$

onde multiplicamos e dividimos por 2 todos os termos na segunda igualdade. ■

Busquemos alguma caracterização do cone $\widehat{C}_{PIC_2}$ que o torne mais compreensível. Para isso, comecemos demonstrando o seguinte resultado:

Lema 9.4 *Suponha* $\varphi, \psi \in \bigwedge^2 \left(\mathbb{R}^4\right)$ *satisfazem* $\varphi \wedge \psi = 0$, $\varphi \wedge \varphi = \psi \wedge \psi$ *e* $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$. *Então existe uma base ortonormal* $\{e_1, ..., e_4\}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *tal que*

$$\varphi = a_1 e_1 \wedge e_3 + a_2 e_4 \wedge e_2 \qquad , \qquad \psi = b_1 e_1 \wedge e_4 + b_2 e_2 \wedge e_3,$$

onde $a_1a_2 = b_1b_2$.

Demonstração. Primeiramente, vamos considerar o caso em que φ ou ψ não é nem autodual nem anti-autodual (para mais detalhes veja a Seção B). Suponhamos, sem perda de generalidade que φ não é nem autodual nem anti-autodual. Considere a seguinte forma bilinear antissimétrica definida em $\mathbb{R}^4$ (para mais detalhes sobre o produto interno $g^\wedge$ veja a Seção B)

$$(v,w) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mapsto g^\wedge\left(\varphi, v \wedge w\right).$$

Por um resultado de Álgebra Linear, sempre é possível encontrar uma base ortonormal positivamente orientada $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tal que

$$\varphi = a_1 v_1 \wedge v_3 + a_2 v_4 \wedge v_2,$$

em que $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. A condição $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ implica que

$$0 = g^\wedge\left(\varphi, \psi\right) = g^\wedge\left(a_1\left(v_1 \wedge v_3\right) + a_2\left(v_4 \wedge v_2\right), \psi\right) = a_1 g^\wedge\left(v_1 \wedge v_3, \psi\right) + a_2 g^\wedge\left(v_4 \wedge v_2, \psi\right).$$

A condição $\varphi \wedge \psi = 0$ implica que

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi \wedge \psi = \left(a_1\left(v_1 \wedge v_3\right) + a_2\left(v_4 \wedge v_2\right)\right) \wedge \psi = a_1\left(v_1 \wedge v_3\right) \wedge \psi + a_2\left(v_4 \wedge v_2\right) \wedge \psi \\
&= a_1 c_{24}\left(v_1 \wedge v_3\right) \wedge \left(v_2 \wedge v_4\right) + a_2 c_{13}\left(v_4 \wedge v_2\right) \wedge \left(v_1 \wedge v_3\right) \\
&= \left(-a_1 c_{24} + a_2 c_{13}\right) v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4 \\
&= \big(a_1 g^\wedge\left(\psi, v_4 \wedge v_2\right) + a_2 g^\wedge\left(\psi, v_1 \wedge v_3\right)\big) v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$a_1 g^\wedge\left(\psi, v_4 \wedge v_2\right) + a_2 g^\wedge\left(\psi, v_1 \wedge v_3\right) = 0.$$

Agora pela definição do operador Hodge Star, segue que

$$\begin{aligned}
\left(v_1 \wedge v_3\right) \wedge \left(*\varphi\right) &= g^\wedge\left(\varphi, v_1 \wedge v_3\right) \\
&= g^\wedge\left(a_1 v_1 \wedge v_3 + a_2 v_4 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3\right) \\
&= a_1 v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left(v_1 \wedge v_2\right) \wedge \pm\varphi = \pm a_2 v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4.$$

Como φ não é nem autodual nem anti-autodual, segue que $a_1 \neq \pm a_2$, e portanto,

$$a_1^2 - a_2^2 \neq 0.$$

Agora temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 g^{\wedge}(\psi, v_1 \wedge v_3) + a_2 g^{\wedge}(\psi, v_4 \wedge v_2) = 0 \\ a_2 g^{\wedge}(\psi, v_1 \wedge v_3) + a_1 g^{\wedge}(\psi, v_4 \wedge v_2) = 0 \end{cases},$$

cujo determinante é $a_1^2 - a_2^2 \neq 0$. Portanto, a única solução desse sistema é a solução trivial, isto é,

$$g^{\wedge}(\psi, v_1 \wedge v_3) = g^{\wedge}(\psi, v_4 \wedge v_2) = 0.$$

Agora consideremos dois subespaços bidimensionais de $Z, W < \mathbb{R}^4$, em que $W = \langle \{v_1, v_3\} \rangle$ e $Z = \langle \{v_4, v_2\} \rangle$. Tomemos as suas orientações de modo que as respectivas base mencionadas sejam positivamente orientadas. Consideremos a seguinte forma bilinear:

$$\sigma : (w, z) \in W \times Z \mapsto g^{\wedge}(\psi, v \wedge w).$$

Pela decomposição do valor singular (resultado de álgebra linear), podemos encontrar uma base ortonormal positivamente orientada $\{e_1, e_3\}$ de W e $\{e_4, e_2\}$ de Z tal que

$$\sigma(e_1, e_2) = 0 = \sigma(e_3, e_4).$$

Juntando as bases nessa ordem, vemos que $\{e_1, e_3, e_4, e_2\}$ é uma base positivamente orientada de $\mathbb{R}^4$. Efetuando duas trocas: $e_4 \leftrightarrow e_2$ e $e_2 \leftrightarrow e_3$, vemos que a base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é também positivamente orientada. Como $W = \langle \{v_1, v_3\} \rangle = \langle \{e_1, e_3\} \rangle$ e $Z = \langle \{v_4, v_2\} \rangle = \langle \{e_4, e_2\} \rangle$, essas duas informações nos dão, respectivamente, que $v_1 \wedge v_3 = e_1 \wedge e_3$ e $v_4 \wedge v_2 = e_4 \wedge e_2$. Portano,

$$\varphi = a_1 v_1 \wedge v_3 + a_2 v_4 \wedge v_2 = a_1 e_1 \wedge e_3 + a_2 e_4 \wedge e_2.$$

Mais ainda, temos que

$$\begin{aligned} g^{\wedge}(\psi, e_1 \wedge e_3) &= g^{\wedge}(\psi, v_1 \wedge v_3) = 0, \\ g^{\wedge}(\psi, e_4 \wedge e_2) &= g^{\wedge}(\psi, v_4 \wedge v_2) = 0. \end{aligned}$$

Usando a forma σ, também obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} g^{\wedge}(\psi, e_1 \wedge e_2) &= \sigma(e_1, e_2) = 0, \\ g^{\wedge}(\psi, e_3 \wedge e_4) &= \sigma(e_3, e_4) = 0. \end{aligned}$$

Usando que $\{e_i \wedge e_j\}_{i \neq j=1}^{4}$ é uma base ortonormal para $\bigwedge^2 (\mathbb{R}^4)$ e que todos os produtos internos acima dão zero, vemos que existem constantes $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\psi = b_1 e_1 \wedge e_4 + b_2 e_2 \wedge e_3.$$

Por fim, notemos que

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \varphi &= (a_1 e_1 \wedge e_3 + a_2 e_4 \wedge e_2) \wedge (a_1 e_1 \wedge e_3 + a_2 e_4 \wedge e_2) \\ &= (a_1 a_2)\, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_2 + (a_2 a_1)\, e_4 \wedge e_2 \wedge e_1 \wedge e_3 \\ &= (2a_1 a_2)\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \end{aligned}$$

e mais ainda,

$$\begin{aligned} \psi \wedge \psi &= (b_1 e_1 \wedge e_4 + b_2 e_2 \wedge e_3) \wedge (b_1 e_1 \wedge e_4 + b_2 e_2 \wedge e_3) \\ &= (b_1 b_2)\, e_1 \wedge e_4 \wedge e_2 \wedge e_3 + (b_2 b_1)\, e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 \wedge e_4 \\ &= (2b_1 b_2)\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\varphi \wedge \varphi = \psi \wedge \psi$, ou seja, vemos que $a_1 a_2 = b_1 b_2$.

Agora consideremos o caso em que φ e ψ são ou autodual ou anti-autodual. Suponha que um deles, digamos φ, seja autodual e o outro, digamos ψ, seja anti-autodual. Se $\{e_1, ..., e_4\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$, segue que

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \varphi &= \varphi \wedge (*\varphi) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \\ \psi \wedge \psi &= -\psi \wedge (*\psi) = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4. \end{aligned}$$

Mas isso é um absurdo, por hipótese, pois $\varphi \wedge \varphi = \psi \wedge \psi$. Portanto, ou ambos são autoduais ou ambos são anti-autoduais. Suponhamos, sem perda de generalidade que ambos sejam autoduais. Se $\varphi = \psi = 0$, então o Lema está demonstrado trivialmente. Suponhamos então que $\varphi \neq 0$. Como foi feito acima, escolha uma base ortonormal positivamente orientada $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$\varphi = a_1 v_1 \wedge v_3 + a_2 v_4 \wedge v_2.$$

Como φ é autodual, então $*\varphi = \varphi$. Portanto,

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge v_3) \wedge (*\varphi) &= (a_1)\, v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4, \\ (v_1 \wedge v_3) \wedge \varphi &= (a_2)\, v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4. \end{aligned}$$

Assim, $a_1 = a_2 = a \neq 0$, ou seja,

$$\varphi = a\,(v_1 \wedge v_3 + v_4 \wedge v_2)\,.$$

A condição $g^{\wedge}(\varphi, \psi) = 0$ implica que

$$g^{\wedge}(v_1 \wedge v_3 + v_4 \wedge v_2, \psi) = 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge v_3) \wedge (*\psi) &= g^{\wedge}(v_1 \wedge v_3, \psi)\, v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4, \\ (v_1 \wedge v_3) \wedge \psi &= g^{\wedge}(v_4 \wedge v_2, \psi)\, v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4. \end{aligned}$$

Como ψ também é autodual, segue que $g^{\wedge}(v_1 \wedge v_3, \psi) = g^{\wedge}(v_4 \wedge v_2, \psi)$, ou seja,

$$0 = g^{\wedge}(v_1 \wedge v_3 + v_4 \wedge v_2, \psi) = 2g^{\wedge}(v_1 \wedge v_3, \psi)\,.$$

Assim, concluímos que $g^{\wedge}(v_1 \wedge v_3, \psi) = g^{\wedge}(v_4 \wedge v_2, \psi) = 0$. Criando a função σ novamente, de modo análogo encontramos a mesma expressão para ψ. ■

Com isso podemos provar a seguinte "versão rotacionada"deste mesmo resultado:

Lema 9.5 *Suponha* $\varphi, \psi \in \bigwedge^2 (\mathbb{R}^4)$ *satisfazem* $\varphi \wedge \psi = 0$ *e* $\varphi \wedge \varphi = \psi \wedge \psi$. *Então existe um referencial ortonormal* $\{e_1, ..., e_4\}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *e* $\theta \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{cases} (\cos\theta)\,\varphi + (\sin\theta)\,\psi = a_1 e_1 \wedge e_3 + a_2 e_4 \wedge e_2 \\ -(\sin\theta)\,\varphi + (\cos\theta)\,\psi = b_1 e_1 \wedge e_4 + b_2 e_2 \wedge e_3 \end{cases}$$

onde $a_1a_2 = b_1b_2$.

Demonstração. Primeiramente defina $\theta \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\frac{1}{2}(\sin 2\theta)\left(|\varphi|^2 - |\psi|^2\right) = \langle \varphi, \psi \rangle \cos 2\theta.$$

É sempre possível encontrar tal θ, pois podemos olha-lo como solução de

$$g\left((\sin 2\theta, \cos 2\theta), \left(\frac{|\varphi|^2 - |\psi|^2}{2}, -\langle \varphi, \psi \rangle\right)\right) = 0,$$

em que g é o produto interno canônico do $\mathbb{R}^2$, e sempre pode-se encontrar θ de modo que $(\sin 2\theta, \cos 2\theta)$ seja ortogonal ao vetor $\left(\frac{|\varphi|^2-|\psi|^2}{2}, -\langle \varphi, \psi \rangle\right) \in \mathbb{R}^2$.

Agora se $\varphi' = (\cos\theta)\,\varphi + (\sin\theta)\,\psi$ e $\psi' = -(\sin\theta)\,\varphi + (\cos\theta)\,\psi$. Por hipótese, segue que

$$\begin{aligned}
\varphi' \wedge \varphi' - \psi' \wedge \psi' &= ((\cos\theta)\,\varphi + (\sin\theta)\,\psi) \wedge ((\cos\theta)\,\varphi + (\sin\theta)\,\psi) \\
&\quad - (-(\sin\theta)\,\varphi + (\cos\theta)\,\psi) \wedge (-(\sin\theta)\,\varphi + (\cos\theta)\,\psi) \\
&= (\cos\theta)\,\varphi \wedge (\cos\theta)\,\varphi + (\cos\theta)\,\varphi \wedge (\sin\theta)\,\psi + (\sin\theta)\,\psi \wedge (\cos\theta)\,\varphi \\
&\quad + (\sin\theta)\,\psi \wedge (\sin\theta)\,\psi - (-(\sin\theta)\,\varphi) \wedge (-(\sin\theta)\,\varphi) - (-(\sin\theta)\,\varphi) \wedge ((\cos\theta)\,\psi) \\
&\quad - ((\cos\theta)\,\psi) \wedge (-(\sin\theta)\,\varphi) - ((\cos\theta)\,\psi) \wedge ((\cos\theta)\,\psi).
\end{aligned}$$

Juntando os escalares, vemos que

$$\begin{aligned}
\varphi' \wedge \varphi' - \psi' \wedge \psi' &= \left(\cos^2\theta\right)\varphi \wedge \varphi + (\cos\theta)(\sin\theta)\,\varphi \wedge \psi + (\sin\theta)(\cos\theta)\,\psi \wedge \varphi + \left(\sin^2\theta\right)\psi \wedge \psi \\
&\quad - \left(\sin^2\theta\right)\varphi \wedge \varphi + (\sin\theta)(\cos\theta)\,\varphi \wedge \psi + (\cos\theta)(\sin\theta)\,\psi \wedge \varphi - \left(\cos^2\theta\right)\psi \wedge \psi \\
&= \left(\cos^2\theta\right)\varphi \wedge \varphi + \left(\sin^2\theta\right)\psi \wedge \psi - \left(\sin^2\theta\right)\varphi \wedge \varphi - \left(\cos^2\theta\right)\psi \wedge \psi \\
&= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\psi \wedge \psi \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $\varphi' \wedge \varphi' = \psi' \wedge \psi'$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\varphi' \wedge \psi' &= ((\cos\theta)\,\varphi + (\sin\theta)\,\psi) \wedge (-(\sin\theta)\,\varphi + (\cos\theta)\,\psi) \\
&= ((\cos\theta)\,\varphi) \wedge (-(\sin\theta)\,\varphi) + (\cos\theta)\,\varphi \wedge (\cos\theta)\,\psi + (\sin\theta)\,\psi \wedge (-(\sin\theta)\,\varphi) + (\sin\theta)\,\psi \wedge (\cos\theta)\,\psi \\
&= -(\cos\theta)(\sin\theta)\,\varphi \wedge \varphi + \left(\cos^2\theta\right)\varphi \wedge \psi - \left(\sin^2\theta\right)\psi \wedge \varphi + (\sin\theta)(\cos\theta)\,\psi \wedge \psi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\cos\theta)(\sin\theta)\,\varphi\wedge\varphi + (\sin\theta)(\cos\theta)\,\psi\wedge\psi \\
&= (-(\cos\theta)(\sin\theta) + (\sin\theta)(\cos\theta))\,\psi\wedge\psi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Mais ainda, pela definição de θ vemos que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \varphi', \psi' \right\rangle &= \langle (\cos\theta)\,\varphi + (\sin\theta)\,\psi, -(\sin\theta)\,\varphi + (\cos\theta)\,\psi \rangle = \langle (\cos\theta)\,\varphi, -(\sin\theta)\,\varphi\rangle + \langle (\cos\theta)\,\varphi, (\cos\theta)\,\psi\rangle \\
&\quad + \langle (\sin\theta)\,\psi, -(\sin\theta)\,\varphi\rangle + \langle (\sin\theta)\,\psi, (\cos\theta)\,\psi\rangle \\
&= -(\sin\theta)(\cos\theta)\,|\varphi|^2 + \left(\cos^2\theta\right)\langle\varphi,\psi\rangle - \left(\sin^2\theta\right)\langle\psi,\varphi\rangle + (\sin\theta)(\cos\theta)\,|\psi|^2 \\
&= -\frac{1}{2}2(\sin\theta)(\cos\theta)\,|\varphi|^2 + \frac{1}{2}2(\sin\theta)(\cos\theta)\,|\psi|^2 + (\cos 2\theta)\langle\psi,\varphi\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\sin 2\theta)\left(|\psi|^2 - |\varphi|^2\right) + (\cos 2\theta)\langle\psi,\varphi\rangle \\
&= -(\cos 2\theta)\langle\psi,\varphi\rangle + (\cos 2\theta)\langle\psi,\varphi\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Aplicando o lema anterior para $\left\{\varphi', \psi'\right\}$ temos o resultado. ∎

Com isso em mente, podemos caracterizar o cone $\widehat{C}_{PIC_2}$ da seguinte maneira:

Proposição 9.2 (Caracterização de $\widehat{C}_{PIC_2}$) *$R \in \widehat{C}_{PIC_2}$ se, e somente se*

$$R_{1313} + \lambda^2 R_{1414} + \mu^2 R_{2323} + \lambda^2\mu^2 R_{2424} - 2\lambda\mu R_{1234} \geq 0,$$

para todo 4-referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_4\}$ e todo $\lambda, \mu \in [-1, 1]$.

Demonstração. Suponha que $R \in \widehat{C}_{PIC_2}$, ou seja, que $\widehat{R} \in C_{PIC}$. Seja $\{e_1, ..., e_4\} \subset \mathbb{R}^n$ um 4-referencial ortonormal, e seja $\lambda, \mu \in [-1, 1]$. Definamos

$$\widehat{e_1} = (e_1, 0, 0) \quad , \quad \widehat{e_2} = \left(\mu e_2, 0, \sqrt{1-\mu^2}\right) \quad , \quad \widehat{e_3} = (e_3, 0, 0) \quad , \quad \widehat{e_4} = \left(\lambda e_4, \sqrt{1-\lambda^2}, 0\right).$$

Deste modo vemos que $\{\widehat{e_1}, ..., \widehat{e_4}\}$ forma um 4-referencial ortonormal para $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$. Com isso e pelo fato de $\widehat{R} \in C_{PIC}$, segue que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \widehat{R}_{1313} + \widehat{R}_{1414} + \widehat{R}_{2323} + \widehat{R}_{2424} - 2\widehat{R}_{1234} \\
&= \widehat{R}(\widehat{e_1}, \widehat{e_3}, \widehat{e_1}, \widehat{e_3}) + \widehat{R}(\widehat{e_1}, \widehat{e_4}, \widehat{e_1}, \widehat{e_4}) + \widehat{R}(\widehat{e_2}, \widehat{e_3}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}) + \widehat{R}(\widehat{e_2}, \widehat{e_4}, \widehat{e_2}, \widehat{e_4}) - 2\widehat{R}(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}, \widehat{e_4})
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= R\left(\pi_2\left(\widehat{e_1}\right),\pi_2\left(\widehat{e_3}\right),\pi_2\left(\widehat{e_1}\right),\pi_2\left(\widehat{e_3}\right)\right)+R\left(\pi_2\left(\widehat{e_1}\right),\pi_2\left(\widehat{e_4}\right),\pi_2\left(\widehat{e_1}\right),\pi_2\left(\widehat{e_4}\right)\right)\\
&\quad +R\left(\pi_2\left(\widehat{e_2}\right),\pi_2\left(\widehat{e_3}\right),\pi_2\left(\widehat{e_2}\right),\pi_2\left(\widehat{e_3}\right)\right)+R\left(\pi_2\left(\widehat{e_2}\right),\pi_2\left(\widehat{e_4}\right),\pi_2\left(\widehat{e_2}\right),\pi_2\left(\widehat{e_4}\right)\right)\\
&\quad -2R\left(\pi_2\left(\widehat{e_1}\right),\pi_2\left(\widehat{e_2}\right),\pi_2\left(\widehat{e_3}\right),\pi_2\left(\widehat{e_4}\right)\right)\\
&= R\left(e_1,e_3,e_1,e_3\right)+R\left(e_1,\lambda e_4,e_1,\lambda e_4\right)+R\left(\mu e_2,e_3,\mu e_2,e_3\right)+R\left(\mu e_2,\lambda e_4,\mu e_2,\lambda e_4\right)-2R\left(e_1,\mu e_2,e_3,\lambda e_4\right)\\
&= R_{1313}+\lambda^2R_{1414}+\mu^2R_{2323}+\mu^2\lambda^2R_{2424}-2\mu\lambda R_{1234}.
\end{aligned}$$

Agora vamos demonstrar a volta: Dado $\{\widehat{e_1},...,\widehat{e_4}\}$ um 4-referencial ortonormal para $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^2$. Por definição, $\widehat{e_j}=(v_j,x_j)$, onde $v_j\in\mathbb{R}^n$ e $x_j\in\mathbb{R}^2$, $j=1,...,4$. Seja V um subespaço de dimensão 4 contendo $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ e (fixada uma base de V) defina $\varphi,\psi\in\wedge^2(V)$ por

$$\begin{cases}\varphi=v_1\wedge v_3+v_4\wedge v_2\\ \psi=v_1\wedge v_4+v_2\wedge v_3.\end{cases}$$

seja $\{e_1,...,e_4\}$ uma base ortonormal de V. Segue que

$$\begin{aligned}
\varphi &= v_1\wedge v_3+v_4\wedge v_2=\left(v_1\otimes v_3-v_3\otimes v_1\right)+\left(v_4\otimes v_2-v_2\otimes v_4\right)\\
&= \sum_{i=1}^4 v_1^ie_i\otimes\sum_{j=1}^4 v_3^je_j-\sum_{i=1}^4 v_3^ie_i\otimes\sum_{j=1}^4 v_1^je_j+\sum_{i=1}^4 v_4^ie_i\otimes\sum_{j=1}^4 v_2^je_j-\sum_{i=1}^4 v_2^ie_i\otimes\sum_{j=1}^4 v_4^je_j\\
&= \sum_{i,j=1}^4\left(v_1^iv_3^j-v_3^iv_1^j\right)e_i\otimes e_j+\sum_{i,j=1}^4\left(v_4^iv_2^j-v_2^iv_4^j\right)e_i\otimes e_j\\
&= \sum_{i,j=1}^4\left(v_1^iv_3^j-v_3^iv_1^j+v_4^iv_2^j-v_2^iv_4^j\right)e_i\otimes e_j.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\psi=\sum_{i,j=1}^4\left(v_1^iv_4^j-v_4^iv_1^j+v_2^iv_3^j-v_3^iv_2^j\right)e_i\otimes e_j.$$

Vamos denotar $\varphi\wedge\varphi\left(e_a,e_b,e_c,e_d\right)$ por $\left(\varphi\wedge\varphi\right)_{abcd}$ e $\varphi\left(e_a,e_b\right)$ por φ_{ab}. Segue da expressão de φ que.

$$\begin{aligned}
\left(\varphi\wedge\varphi\right)_{abcd} &= \varphi_{ab}\varphi_{cd}-\varphi_{ab}\varphi_{dc}-\varphi_{ac}\varphi_{bd}+\varphi_{ac}\varphi_{db}+\varphi_{ad}\varphi_{bc}-\varphi_{ad}\varphi_{cb}\\
&\quad -\varphi_{ba}\varphi_{cd}+\varphi_{ba}\varphi_{dc}+\varphi_{bc}\varphi_{ad}-\varphi_{bc}\varphi_{da}-\varphi_{bd}\varphi_{ac}+\varphi_{bd}\varphi_{ca}\\
&\quad -\varphi_{cb}\varphi_{ad}+\varphi_{cb}\varphi_{da}+\varphi_{ca}\varphi_{bd}-\varphi_{ca}\varphi_{db}-\varphi_{cd}\varphi_{ba}+\varphi_{cd}\varphi_{ab}\\
&\quad -\varphi_{db}\varphi_{ca}+\varphi_{db}\varphi_{ac}+\varphi_{dc}\varphi_{ba}-\varphi_{dc}\varphi_{ab}-\varphi_{da}\varphi_{bc}+\varphi_{da}\varphi_{cb}.
\end{aligned}$$

Juntando os termos iguais, vemos que

$$\begin{aligned}
(\varphi\wedge\varphi)_{abcd} &= 2\varphi_{ab}\varphi_{cd}-2\varphi_{ab}\varphi_{dc}-2\varphi_{ac}\varphi_{bd}+2\varphi_{ac}\varphi_{db}+2\varphi_{ad}\varphi_{bc}-2\varphi_{ad}\varphi_{cb}\\
&\quad -2\varphi_{ba}\varphi_{cd}+2\varphi_{ba}\varphi_{dc}-2\varphi_{bc}\varphi_{da}+2\varphi_{bd}\varphi_{ca}+2\varphi_{cb}\varphi_{da}-2\varphi_{ca}\varphi_{db}\\
&= 2j_1k_1-2j_2k_2-2j_3k_3+2j_4k_4+2j_5k_5-2j_6k_6-2j_7k_7+2j_8k_8\\
&\quad -2j_9k_9+2j_{10}k_{10}+2j_{11}k_{11}-2j_{12}k_{12},
\end{aligned}$$

em que os coeficientes j_i, $i=1,...,12$, são dados por

$$\begin{cases}
j_1=v_1^av_3^b-v_3^av_1^b+v_4^av_2^b-v_2^av_4^b\\
j_2=v_1^av_3^b-v_3^av_1^b+v_4^av_2^b-v_2^av_4^b\\
j_3=v_1^av_3^c-v_3^av_1^c+v_4^av_2^c-v_2^av_4^c\\
j_4=v_1^av_3^c-v_3^av_1^c+v_4^av_2^c-v_2^av_4^c\\
j_5=v_1^av_3^d-v_3^av_1^d+v_4^av_2^d-v_2^av_4^d\\
j_6=v_1^av_3^d-v_3^av_1^d+v_4^av_2^d-v_2^av_4^d
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
j_7=v_1^bv_3^a-v_3^bv_1^a+v_4^bv_2^a-v_2^bv_4^a\\
j_8=v_1^bv_3^a-v_3^bv_1^a+v_4^bv_2^a-v_2^bv_4^a\\
j_9=v_1^bv_3^c-v_3^bv_1^c+v_4^bv_2^c-v_2^bv_4^c\\
j_{10}=v_1^bv_3^d-v_3^bv_1^d+v_4^bv_2^d-v_2^bv_4^d\\
j_{11}=v_1^cv_3^b-v_3^cv_1^b+v_4^cv_2^b-v_2^cv_4^b\\
j_{12}=v_1^cv_3^a-v_3^cv_1^a+v_4^cv_2^a-v_2^cv_4^a
\end{cases}$$

e os coeficientes k_i, $i=1,...,12$, têm as seguintes expressões:

$$\begin{cases}
k_1=v_1^cv_3^d-v_3^cv_1^d+v_4^cv_2^d-v_2^cv_4^d\\
k_2=v_1^dv_3^c-v_3^dv_1^c+v_4^dv_2^c-v_2^dv_4^c\\
k_3=v_1^bv_3^d-v_3^bv_1^d+v_4^bv_2^d-v_2^bv_4^d\\
k_4=v_1^dv_3^b-v_3^dv_1^b+v_4^dv_2^b-v_2^dv_4^b\\
k_5=v_1^bv_3^c-v_3^bv_1^c+v_4^bv_2^c-v_2^bv_4^c\\
k_6=v_1^cv_3^b-v_3^cv_1^b+v_4^cv_2^b-v_2^cv_4^b
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
k_7=v_1^cv_3^d-v_3^cv_1^d+v_4^cv_2^d-v_2^cv_4^d\\
k_8=v_1^dv_3^c-v_3^dv_1^c+v_4^dv_2^c-v_2^dv_4^c\\
k_9=v_1^dv_3^a-v_3^dv_1^a+v_4^dv_2^a-v_2^dv_4^a\\
k_{10}=v_1^cv_3^a-v_3^cv_1^a+v_4^cv_2^a-v_2^cv_4^a\\
k_{11}=v_1^dv_3^a-v_3^dv_1^a+v_4^dv_2^a-v_2^dv_4^a\\
k_{12}=v_1^dv_3^b-v_3^dv_1^b+v_4^dv_2^b-v_2^dv_4^b
\end{cases}$$

Da mesma forma, denotando $\psi\wedge\psi\,(e_a,e_b,e_c,e_d)$ por $(\psi\wedge\psi)_{abcd}$ e $\psi\,(e_a,e_b)$ por ψ_{ab}, segue que

$$\begin{aligned}
(\psi\wedge\psi)_{abcd} &= \psi_{ab}\psi_{cd}-\psi_{ab}\psi_{dc}-\psi_{ac}\psi_{bd}+\psi_{ac}\psi_{db}+\psi_{ad}\psi_{bc}-\psi_{ad}\psi_{cb}\\
&\quad -\psi_{ba}\psi_{cd}+\psi_{ba}\psi_{dc}+\psi_{bc}\psi_{ad}-\psi_{bc}\psi_{da}-\psi_{bd}\psi_{ac}+\psi_{bd}\psi_{ca}\\
&\quad -\psi_{cb}\psi_{ad}+\psi_{cb}\psi_{da}+\psi_{ca}\psi_{bd}-\psi_{ca}\psi_{db}-\psi_{cd}\psi_{ba}+\psi_{cd}\psi_{ab}\\
&\quad -\psi_{db}\psi_{ca}+\psi_{db}\psi_{ac}+\psi_{dc}\psi_{ba}-\psi_{dc}\psi_{ab}-\psi_{da}\psi_{bc}+\psi_{da}\psi_{cb}.
\end{aligned}$$

Juntando os termos iguais, vemos que

$$\begin{aligned}(\psi\wedge\psi)_{abcd} &= 2\psi_{ab}\psi_{cd}-2\psi_{ab}\psi_{dc}-2\psi_{ac}\psi_{bd}+2\psi_{ac}\psi_{db}+2\psi_{ad}\psi_{bc}-2\psi_{ad}\psi_{cb}\\ &\quad -2\psi_{ba}\psi_{cd}+2\psi_{ba}\psi_{dc}-2\psi_{bc}\psi_{da}+2\psi_{bd}\psi_{ca}+2\psi_{cb}\psi_{da}-2\psi_{ca}\psi_{db}\\ &= 2l_1m_1-2l_2m_2-2l_3m_3+2l_4m_4+2l_5m_5-2l_6m_6-2l_7m_7+2l_8m_8\\ &\quad -2l_9m_9+2l_{10}m_{10}+2l_{11}m_{11}-2l_{12}m_{12},\end{aligned}$$

em que os coeficientes l_i, $i=1,...,12$, são dados por

$$\begin{cases} l_1 = v_1^a v_4^b - v_4^a v_1^b + v_2^a v_3^b - v_3^a v_2^b\\ l_2 = v_1^a v_4^b - v_4^a v_1^b + v_2^a v_3^b - v_3^a v_2^b\\ l_3 = v_1^a v_4^c - v_4^a v_1^c + v_2^a v_3^c - v_3^a v_2^c\\ l_4 = v_1^a v_4^c - v_4^a v_1^c + v_2^a v_3^c - v_3^a v_2^c\\ l_5 = v_1^a v_4^d - v_4^a v_1^d + v_2^a v_3^d - v_3^a v_2^d\\ l_6 = v_1^a v_4^d - v_4^a v_1^d + v_2^a v_3^d - v_3^a v_2^d\end{cases} \qquad \begin{cases} l_7 = v_1^b v_4^a - v_4^b v_1^a + v_2^b v_3^a - v_3^b v_2^a\\ l_8 = v_1^b v_4^a - v_4^b v_1^a + v_2^b v_3^a - v_3^b v_2^a\\ l_9 = v_1^b v_4^c - v_4^b v_1^c + v_2^b v_3^c - v_3^b v_2^c\\ l_{10} = v_1^b v_4^d - v_4^b v_1^d + v_2^b v_3^d - v_3^b v_2^d\\ l_{11} = v_1^c v_4^b - v_4^c v_1^b + v_2^c v_3^b - v_3^c v_2^b\\ l_{12} = v_1^c v_4^a - v_4^c v_1^a + v_2^c v_3^a - v_3^c v_2^a\end{cases}$$

e os coeficientes m_i, $i=1,...,12$, têm as seguintes expressões:

$$\begin{cases} m_1 = v_1^c v_4^d - v_4^c v_1^d + v_2^c v_3^d - v_3^c v_2^d\\ m_2 = v_1^d v_4^c - v_4^d v_1^c + v_2^d v_3^c - v_3^d v_2^c\\ m_3 = v_1^b v_4^d - v_4^b v_1^d + v_2^b v_3^d - v_3^b v_2^d\\ m_4 = v_1^d v_4^b - v_4^d v_1^b + v_2^d v_3^b - v_3^d v_2^b\\ m_5 = v_1^b v_4^c - v_4^b v_1^c + v_2^b v_3^c - v_3^b v_2^c\\ m_6 = v_1^c v_4^b - v_4^c v_1^b + v_2^c v_3^b - v_3^c v_2^b\end{cases} \qquad \begin{cases} m_7 = v_1^c v_4^d - v_4^c v_1^d + v_2^c v_3^d - v_3^c v_2^d\\ m_8 = v_1^d v_4^c - v_4^d v_1^c + v_2^d v_3^c - v_3^d v_2^c\\ m_9 = v_1^d v_4^a - v_4^d v_1^a + v_2^d v_3^a - v_3^d v_2^a\\ m_{10} = v_1^c v_4^a - v_4^c v_1^a + v_2^c v_3^a - v_3^c v_2^a\\ m_{11} = v_1^d v_4^a - v_4^d v_1^a + v_2^d v_3^a - v_3^d v_2^a\\ m_{12} = v_1^d v_4^b - v_4^d v_1^b + v_2^d v_3^b - v_3^d v_2^b\end{cases}$$

Com isso, vemos que $\psi\wedge\psi=\varphi\wedge\varphi$. Mais ainda, denotando $\varphi\wedge\psi\,(e_a,e_b,e_c,e_d)$ por $(\varphi\wedge\psi)_{abcd}$, $\varphi\,(e_a,e_b)$ por φ_{ab} e $\psi\,(e_c,e_d)$ por ψ_{cd}, temos que

$$\begin{aligned}(\varphi\wedge\psi)_{abcd} &= \varphi_{ab}\psi_{cd}-\varphi_{ab}\psi_{dc}-\varphi_{ac}\psi_{bd}+\varphi_{ac}\psi_{db}+\varphi_{ad}\psi_{bc}-\varphi_{ad}\psi_{cb}-\varphi_{ba}\psi_{cd}+\varphi_{ba}\psi_{dc}\\ &\quad +\varphi_{bc}\psi_{ad}-\varphi_{bc}\psi_{da}-\varphi_{bd}\psi_{ac}+\varphi_{bd}\psi_{ca}-\varphi_{cb}\psi_{ad}+\varphi_{cb}\psi_{da}+\varphi_{ca}\psi_{bd}-\varphi_{ca}\psi_{db}\\ &\quad -\varphi_{cd}\psi_{ba}+\varphi_{cd}\psi_{ab}-\varphi_{db}\psi_{ca}+\varphi_{db}\psi_{ac}+\varphi_{dc}\psi_{ba}-\varphi_{dc}\psi_{ab}-\varphi_{da}\psi_{bc}+\varphi_{da}\psi_{cb}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n_1o_1 - n_2o_2 - n_3o_3 + n_4o_4 + n_5o_5 - n_6o_6 - n_7o_7 + n_8o_8 \\
&\quad + n_9o_9 - n_{10}o_{10} - n_{11}o_{11} + n_{12}o_{12} - n_{13}o_{13} + n_{14}o_{14} + n_{15}o_{15} - n_{16}o_{16} \\
&\quad - n_{17}o_{17} + n_{18}o_{18} - n_{19}o_{19} + n_{20}o_{20} + n_{21}o_{21} - n_{22}o_{22} - n_{23}o_{23} + n_{24}o_{24} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

em que os coeficientes n_i, $i = 1, ..., 12$, são dados por

$$\begin{cases}
n_1 = v_1^a v_3^b - v_3^a v_1^b + v_4^a v_2^b - v_2^a v_4^b \\
n_2 = v_1^a v_3^b - v_3^a v_1^b + v_4^a v_2^b - v_2^a v_4^b \\
n_3 = v_1^a v_3^c - v_3^a v_1^c + v_4^a v_2^c - v_2^a v_4^c \\
n_4 = v_1^a v_3^c - v_3^a v_1^c + v_4^a v_2^c - v_2^a v_4^c \\
n_5 = v_1^a v_3^d - v_3^a v_1^d + v_4^a v_2^d - v_2^a v_4^d \\
n_6 = v_1^a v_3^d - v_3^a v_1^d + v_4^a v_2^d - v_2^a v_4^d
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
n_7 = v_1^b v_3^a - v_3^b v_1^a + v_4^b v_2^a - v_2^b v_4^a \\
n_8 = v_1^b v_3^a - v_3^b v_1^a + v_4^b v_2^a - v_2^b v_4^a \\
n_9 = v_1^b v_3^c - v_3^b v_1^c + v_4^b v_2^c - v_2^b v_4^c \\
n_{10} = v_1^b v_3^c - v_3^b v_1^c + v_4^b v_2^c - v_2^b v_4^c \\
n_{11} = v_1^b v_3^d - v_3^b v_1^d + v_4^b v_2^d - v_2^b v_4^d \\
n_{12} = v_1^b v_3^d - v_3^b v_1^d + v_4^b v_2^d - v_2^b v_4^d
\end{cases},$$

os coeficientes n_i, $i = 13, ..., 24$, têm as seguintes expressões:

$$\begin{cases}
n_{13} = v_1^c v_3^b - v_3^c v_1^b + v_4^c v_2^b - v_2^c v_4^b \\
n_{14} = v_1^c v_3^b - v_3^c v_1^b + v_4^c v_2^b - v_2^c v_4^b \\
n_{15} = v_1^c v_3^a - v_3^c v_1^a + v_4^c v_2^a - v_2^c v_4^a \\
n_{16} = v_1^c v_3^a - v_3^c v_1^a + v_4^c v_2^a - v_2^c v_4^a \\
n_{17} = v_1^c v_3^d - v_3^c v_1^d + v_4^c v_2^d - v_2^c v_4^d \\
n_{18} = v_1^c v_3^d - v_3^c v_1^d + v_4^c v_2^d - v_2^c v_4^d
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
n_{19} = v_1^d v_3^b - v_3^d v_1^b + v_4^d v_2^b - v_2^d v_4^b \\
n_{20} = v_1^d v_3^b - v_3^d v_1^b + v_4^d v_2^b - v_2^d v_4^b \\
n_{21} = v_1^d v_3^c - v_3^d v_1^c + v_4^d v_2^c - v_2^d v_4^c \\
n_{22} = v_1^d v_3^c - v_3^d v_1^c + v_4^d v_2^c - v_2^d v_4^c \\
n_{23} = v_1^d v_3^a - v_3^d v_1^a + v_4^d v_2^a - v_2^d v_4^a \\
n_{24} = v_1^d v_3^a - v_3^d v_1^a + v_4^d v_2^a - v_2^d v_4^a
\end{cases},$$

os coeficientes o_i, $i = 1, ..., 12$, são dados por

$$\begin{cases}
o_1 = \left(v_1^c v_4^d - v_4^c v_1^d + v_2^c v_3^d - v_3^c v_2^d\right) \\
o_2 = \left(v_1^d v_4^c - v_4^d v_1^c + v_2^d v_3^c - v_3^d v_2^c\right) \\
o_3 = \left(v_1^b v_4^d - v_4^b v_1^d + v_2^b v_3^d - v_3^b v_2^d\right) \\
o_4 = \left(v_1^d v_4^b - v_4^d v_1^b + v_2^d v_3^b - v_3^d v_2^b\right) \\
o_5 = \left(v_1^b v_4^c - v_4^b v_1^c + v_2^b v_3^c - v_3^b v_2^c\right) \\
o_6 = \left(v_1^c v_4^b - v_4^c v_1^b + v_2^c v_3^b - v_3^c v_2^b\right)
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
o_7 = \left(v_1^c v_4^d - v_4^c v_1^d + v_2^c v_3^d - v_3^c v_2^d\right) \\
o_8 = \left(v_1^d v_4^c - v_4^d v_1^c + v_2^d v_3^c - v_3^d v_2^c\right) \\
o_9 = \left(v_1^a v_4^d - v_4^a v_1^d + v_2^a v_3^d - v_3^a v_2^d\right) \\
o_{10} = \left(v_1^d v_4^a - v_4^d v_1^a + v_2^d v_3^a - v_3^d v_2^a\right) \\
o_{11} = (v_1^a v_4^c - v_4^a v_1^c + v_2^a v_3^c - v_3^a v_2^c) \\
o_{12} = (v_1^c v_4^a - v_4^c v_1^a + v_2^c v_3^a - v_3^c v_2^a)
\end{cases},$$

e os coeficientes o_i, $i = 13, ..., 24$, têm as seguintes expressões:

$$\begin{cases} o_{13} = \left(v_1^a v_4^d - v_4^a v_1^d + v_2^a v_3^d - v_3^a v_2^d\right) \\ o_{14} = \left(v_1^d v_4^a - v_4^d v_1^a + v_2^d v_3^a - v_3^d v_2^a\right) \\ o_{15} = \left(v_1^b v_4^d - v_4^b v_1^d + v_2^b v_3^d - v_3^b v_2^d\right) \\ o_{16} = \left(v_1^d v_4^b - v_4^d v_1^b + v_2^d v_3^b - v_3^d v_2^b\right) \\ o_{17} = \left(v_1^b v_4^a - v_4^b v_1^a + v_2^b v_3^a - v_3^b v_2^a\right) \\ o_{18} = \left(v_1^a v_4^b - v_4^a v_1^b + v_2^a v_3^b - v_3^a v_2^b\right) \end{cases} \quad \begin{cases} o_{19} = \left(v_1^c v_4^a - v_4^c v_1^a + v_2^c v_3^a - v_3^c v_2^a\right) \\ o_{20} = \left(v_1^a v_4^c - v_4^a v_1^c + v_2^a v_3^c - v_3^a v_2^c\right) \\ o_{21} = \left(v_1^b v_4^a - v_4^b v_1^a + v_2^b v_3^a - v_3^b v_2^a\right) \\ o_{22} = \left(v_1^a v_4^b - v_4^a v_1^b + v_2^a v_3^b - v_3^a v_2^b\right) \\ o_{23} = \left(v_1^b v_4^c - v_4^b v_1^c + v_2^b v_3^c - v_3^b v_2^c\right) \\ o_{24} = \left(v_1^c v_4^b - v_4^c v_1^b + v_2^c v_3^b - v_3^c v_2^b\right) \end{cases}.$$

Como $\dim V = 4$, temos que $V \approx \mathbb{R}^4$. Segue do Lema 9.5 que existe um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_4\}$ para V e $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \varphi' = (\cos\theta)\,\varphi + (\sin\theta)\,\psi = a_1 e_1 \wedge e_3 + a_2 e_4 \wedge e_2 \\ \psi' = -(\sin\theta)\,\varphi + (\cos\theta)\,\psi = b_1 e_1 \wedge e_4 + b_2 e_2 \wedge e_3 \end{cases}$$

onde $a_1 a_2 = b_1 b_2$. Primeiramente notemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{R}\left(\varphi', \varphi'\right) + \widetilde{R}\left(\psi', \psi'\right) &= \widetilde{R}\left((\cos\theta)\,\varphi + (\sin\theta)\,\psi, (\cos\theta)\,\varphi + (\sin\theta)\,\psi\right) \\ &\quad + \widetilde{R}\left(-(\sin\theta)\,\varphi + (\cos\theta)\,\psi, -(\sin\theta)\,\varphi + (\cos\theta)\,\psi\right) \\ &= \left(\cos^2\theta\right)\widetilde{R}(\varphi,\varphi) + 2(\cos\theta)(\sin\theta)\,\widetilde{R}(\varphi,\psi) + \left(\sin^2\theta\right)\widetilde{R}(\psi,\psi) \\ &\quad + \left(\sin^2\theta\right)\widetilde{R}(\varphi,\varphi) - 2(\sin\theta)(\cos\theta)\,\widetilde{R}(\varphi,\psi) + \left(\cos^2\theta\right)\widetilde{R}(\psi,\psi) \\ &= \left(\left(\cos^2\theta\right) + \left(\sin^2\theta\right)\right)\widetilde{R}(\varphi,\varphi) + \left(\left(\sin^2\theta\right) + \left(\cos^2\theta\right)\right)\widetilde{R}(\psi,\psi) \\ &= \widetilde{R}(\varphi,\varphi) + \widetilde{R}(\psi,\psi)\,. \end{aligned}$$

Pela linearidade de $\widetilde{R}$, vemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{R}\left(\varphi', \varphi'\right) + \widetilde{R}\left(\psi', \psi'\right) &= \widetilde{R}\left(a_1 e_1 \wedge e_3 + a_2 e_4 \wedge e_2, a_1 e_1 \wedge e_3 + a_2 e_4 \wedge e_2\right) \\ &\quad + \widetilde{R}\left(b_1 e_1 \wedge e_4 + b_2 e_2 \wedge e_3, b_1 e_1 \wedge e_4 + b_2 e_2 \wedge e_3\right) \\ &= a_1^2 \widetilde{R}\left(e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3\right) + a_1 a_2 \widetilde{R}\left(e_1 \wedge e_3, e_4 \wedge e_2\right) \\ &\quad + a_1 a_2 \widetilde{R}\left(e_4 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3\right) + a_2^2 \widetilde{R}\left(e_4 \wedge e_2, e_4 \wedge e_2\right) \\ &\quad + b_1^2 \widetilde{R}\left(e_1 \wedge e_4, e_1 \wedge e_4\right) + b_1 b_2 \widetilde{R}\left(e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3\right) \\ &\quad + b_1 b_2 \widetilde{R}\left(e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4\right) + b_2^2 \widetilde{R}\left(e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\right). \end{aligned}$$

Usando primeira identidade de Bianchi e que $a_1a_2 = b_1b_2$, vemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}\left(\varphi',\varphi'\right)+\widetilde{R}\left(\psi',\psi'\right) &= a_1^2R_{1313}+a_1a_2R_{1342}+a_1a_2R_{4213}+a_2^2R_{4242}+b_1^2R_{1414}+b_1b_2R_{1423}\\
&\quad +b_1b_2R_{2314}+b_2^2R_{2323}\\
&= a_1^2R_{1313}+2a_1a_2R_{1342}+a_2^2R_{2424}+b_1^2R_{1414}+2b_1b_2R_{1423}+b_2^2R_{2323}\\
&= a_1^2R_{1313}+b_1^2R_{1414}+a_2^2R_{2424}+b_2^2R_{2323}+2a_1a_2\left(R_{1342}+R_{1423}\right)\\
&= a_1^2R_{1313}+b_1^2R_{1414}+a_2^2R_{2424}+b_2^2R_{2323}+2a_1a_2\left(R_{4213}+R_{1423}\right)\\
&= a_1^2R_{1313}+b_1^2R_{1414}+a_2^2R_{2424}+b_2^2R_{2323}-2a_1a_2R_{2143}\\
&= a_1^2R_{1313}+b_1^2R_{1414}+a_2^2R_{2424}+b_2^2R_{2323}-2a_1a_2R_{1234}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\lambda = b_1/a_1$ e $\mu = b_2/a_1$ nossa hipótese implica que o extremo direito é não negativo, de fato, dividindo a expressão por a_1^2 temos.

$$R_{1313}+\frac{b_1^2}{a_1^2}R_{1414}+\frac{a_2^2}{a_1^2}R_{2424}+\frac{b_2^2}{a_1^2}R_{2323}-2\frac{a_2}{a_1}R_{1234}=R_{1313}+\lambda^2R_{1414}+\frac{a_2^2}{a_1^2}R_{2424}+\mu^2R_{2323}-2\frac{a_2}{a_1}R_{1234}.$$

Notemos também que

$$\lambda\mu=\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_1}=\frac{b_1b_2}{a_1^2}=\frac{a_1a_2}{a_1^2}=\frac{a_2}{a_1},$$

e portanto, utilizando a hipótese vemos que

$$\begin{aligned}
R_{1313}+\lambda^2R_{1414}+\frac{a_2^2}{a_1^2}R_{2424}+\mu^2R_{2323}-2\frac{a_2}{a_1}R_{1234} &= R_{1313}+\lambda^2R_{1414}+\lambda^2\mu^2R_{2424}+\mu^2R_{2323}-2\lambda\mu R_{1234}\\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

ou seja, a seguinte desigualdade é válida:

$$\begin{aligned}
0 &\leq a_1^2R_{1313}+b_1^2R_{1414}+a_2^2R_{2424}+b_2^2R_{2323}-2a_1a_2R_{1234}=\widetilde{R}\left(\varphi',\varphi'\right)+\widetilde{R}\left(\psi',\psi'\right)\\
&= \widetilde{R}\left(\varphi,\varphi\right)+\widetilde{R}\left(\psi,\psi\right)=\widetilde{R}\left(v_1\wedge v_3+v_4\wedge v_2,v_1\wedge v_3+v_4\wedge v_2\right)+\widetilde{R}\left(v_1\wedge v_4+v_2\wedge v_3,v_1\wedge v_4+v_2\wedge v_3\right)\\
&= \widetilde{R}\left(v_1\wedge v_3,v_1\wedge v_3\right)+\widetilde{R}\left(v_1\wedge v_3,v_4\wedge v_2\right)+\widetilde{R}\left(v_4\wedge v_2,v_1\wedge v_3\right)+\widetilde{R}\left(v_4\wedge v_2,v_4\wedge v_2\right)\\
&\quad +\widetilde{R}\left(v_1\wedge v_4,v_1\wedge v_4\right)+\widetilde{R}\left(v_1\wedge v_4,v_2\wedge v_3\right)+\widetilde{R}\left(v_2\wedge v_3,v_1\wedge v_4\right)+\widetilde{R}\left(v_2\wedge v_3,v_2\wedge v_3\right)\\
&= R\left(v_1,v_3,v_1,v_3\right)+R\left(v_1,v_3,v_4,v_2\right)+R\left(v_4,v_2,v_1,v_3\right)+R\left(v_4,v_2,v_4,v_2\right)\\
&\quad +R\left(v_1,v_4,v_1,v_4\right)+R\left(v_1,v_4,v_2,v_3\right)+R\left(v_2,v_3,v_1,v_4\right)+R\left(v_2,v_3,v_2,v_3\right).
\end{aligned}$$

Segue da definição de $\widehat{e_j}$ que

$$\begin{aligned}
0 &\le R\left(\pi_2\left(\widehat{e_1}\right),\pi_2\left(\widehat{e_3}\right),\pi_2\left(\widehat{e_1}\right),\pi_2\left(\widehat{e_3}\right)\right)+R\left(\pi_2\left(\widehat{e_1}\right),\pi_2\left(\widehat{e_4}\right),\pi_2\left(\widehat{e_1}\right),\pi_2\left(\widehat{e_4}\right)\right)\\
&\quad +R\left(\pi_2\left(\widehat{e_2}\right),\pi_2\left(\widehat{e_3}\right),\pi_2\left(\widehat{e_2}\right),\pi_2\left(\widehat{e_3}\right)\right)+R\left(\pi_2\left(\widehat{e_2}\right),\pi_2\left(\widehat{e_4}\right),\pi_2\left(\widehat{e_2}\right),\pi_2\left(\widehat{e_4}\right)\right)\\
&\quad -2R\left(\pi_2\left(\widehat{e_1}\right),\pi_2\left(\widehat{e_2}\right),\pi_2\left(\widehat{e_3}\right),\pi_2\left(\widehat{e_4}\right)\right)\\
&= \widehat{R}\left(\widehat{e_1},\widehat{e_3},\widehat{e_1},\widehat{e_3}\right)+\widehat{R}\left(\widehat{e_1},\widehat{e_4},\widehat{e_1},\widehat{e_4}\right)+\widehat{R}\left(\widehat{e_2},\widehat{e_3},\widehat{e_2},\widehat{e_3}\right)+\widehat{R}\left(\widehat{e_2},\widehat{e_4},\widehat{e_2},\widehat{e_4}\right)-2\widehat{R}\left(\widehat{e_1},\widehat{e_2},\widehat{e_3},\widehat{e_4}\right)\\
&= \widehat{R}_{1313}+\widehat{R}_{1414}+\widehat{R}_{2323}+\widehat{R}_{2424}-2\widehat{R}_{1234},
\end{aligned}$$

ou seja, $\widehat{R}\in C_{PIC}$ e portanto $R\in\widehat{C}_{PIC_2}$. ■

Vamos concluir o capítulo com o resultado, demonstrado por Brendle e Schoen, que relaciona a positividade da curvatura isotrópica com a "condição 1/4", isto é, a positividade e a restrição da curvatura seccional. Resultado esse que é fundamental na demonstração Teorema da Esfera Suave.

Corolário 9.1 *Seja $R\in Curv$. Se a curvatura seccional de R satisfaz a "condição 1/4", isto é, se*

$$\frac{1}{4}K_{\max}<K\le K_{\max},$$

então $\widehat{R}_2\in C_{PIC}$ e portanto $R\in\widehat{C}_{PIC_2}$.

Demonstração. Se for necessário, reescalone a métrica de modo que a curvatura secional de R morem no intervalo $[1,4]$. Seja $\{e_1,...,e_4\}$ um 4-referencial ortonormal em $\mathbb{R}^n$ e seja $\lambda,\mu\in[-1,1]$. Pelo Lema de Berger (para mais detalhes veja a Seção A.0.1) vemos que

$$\left|R\left(e_1,e_2,e_3,e_4\right)\right|\le\frac{2}{3}\left(4-1\right)=\frac{2}{3}\times 3=2.$$

Nesse caso, o resultado segue da proposição anterior, já que

$$\begin{aligned}
R_{1313}+\lambda^2R_{1414}+\mu^2R_{2323}+\lambda^2\mu^2R_{2424}-2\lambda\mu R_{1234} &\ge 1+\lambda^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2-2\lambda\mu R_{1234}\\
&\ge 1+\lambda^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2-2\left|\lambda\mu R_{1234}\right|\\
&\ge 1+\lambda^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2-4\left|\lambda\mu\right|\\
&= 1+\lambda^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2-2\left|\lambda\mu\right|-2\left|\lambda\mu\right|\\
&= \left(1-\left|\lambda\mu\right|\right)^2+\left(\left|\lambda\right|-\left|\mu\right|\right)^2\\
&\ge 0.
\end{aligned}$$

Assim, pela proposição anterior, $R \in \widehat{C}_{PIC_2}$. ■

Capítulo 10

Condição PIC sob o Fluxo de Ricci

Este capítulo visa a demonstração da preservação pelo fluxo de Ricci da positividade da curvatura isotrópica. Resultado esse que foi demonstrado por Brendle e Schoen, em parceria, e de forma independente por Nguyen. Em suma, queremos demonstrar o Teorema 10.1.

10.1 Analisando a Decomposição de Brendle e Schoen

Comecemos enunciando o resultado principal a ser demonstrado:

Teorema 10.1 (Brendle, Schoen, Nguyen) *Seja M uma variedade compacta de dimensão $n \geq 4$ com uma família de métricas $\{g\,(t)\}_{t\in[0,T)}$ evoluindo pelo fluxo de Ricci. Se $g\,(0)$ possui curvatura isotrópica positiva, então $g\,(t)$ possui curvatura isotrópica positiva, para todo $t \in [0,T)$.*

Pelas considerações prévias, a demonstração segue apenas um passo: Demonstrar que C_{PIC} é um cone preservado pelo fluxo de Ricci, isto é, que o campo vetorial Q em $Curv$ pertence ao cone tangente para C_{PIC} em todo ponto do bordo do mesmo. Pela Definição 9.3 e pela Observação 9.2,

$$C_{PIC} = \bigcap_{\mathbb{O}\in O(n)} \left\{R \in Curv : \widetilde{l}\left(R^{\mathbb{O}}\right) \geq 0\right\},$$

onde $\widetilde{l}\,(R) = R_{1313}+R_{2424}+R_{1414}+R_{2323}-2R_{1234}$. Já que C_{PIC} é um cone $O(n)$-invariante apresentado explicitamente como uma interseção de semiespaços, o Teorema F.3 implica que é o bastante verificar que

$$\widetilde{l}\,(Q\,(R)) \geq 0 \tag{10.1}$$

para todo $R \in \partial C_{PIC}$, isto é, com $\widetilde{l}\,(R) = 0$ e $\widetilde{l}\left(R^{\mathbb{O}}\right) \geq 0$ para todo $\mathbb{O} \in O(n)$.

Para demonstrar a expressão (10.1) comecemos com o seguinte resultado:

Lema 10.1 (Decomposição de Brendle e Schoen) *Para todo $R \in Curv$,*

$$\begin{aligned}
\widetilde{l}\,(Q\,(R)) &= \frac{1}{2}\left((R_{13pq}-R_{24pq})^2+(R_{14pq}+R_{23pq})^2\right)+(R_{1p1q}+R_{2p2q})\,(R_{3p3q}+R_{4p4q}) \\
&\quad -R_{12pq}R_{34pq}-(R_{1p3q}+R_{2p4q})\,(R_{3p1q}+R_{4p2q})-(R_{1p4q}-R_{2p3q})\,(R_{4p1q}-R_{3p2q})\,.
\end{aligned}$$

Demonstração. Pela Observação 8.5, $Q = Q\,(R)$ satisfaz a primeira identidade de Bianchi (apesar de R^2 e $R^{\#}$ não satisfazerem). Usando esse fato, vemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{l}\,(Q\,(R)) &= Q_{1313}+Q_{2424}+Q_{1414}+Q_{2323}-2Q_{1234} \\
&= Q_{1313}+Q_{2424}+Q_{1414}+Q_{2323}+2Q_{3124}+2Q_{2314} \\
&= Q_{1313}+Q_{2424}+Q_{1414}+Q_{2323}+2Q_{1342}+2Q_{1423}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 8.3, vemos que

$$\begin{aligned}
R^2_{1313}+R^2_{2424}+R^2_{1414}+R^2_{2323}+2R^2_{1342}+2R^2_{1423} &= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}R_{13pq}R_{13pq}+\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}R_{24pq}R_{24pq}+\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}R_{14pq}R_{14pq} \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}R_{23pq}R_{23pq}+\sum_{p,q=1}^{n}R_{13pq}R_{42pq}+\sum_{p,q=1}^{n}R_{14pq}R_{23pq} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}(R_{13pq})^2+\sum_{p,q=1}^{n}R_{13pq}R_{42pq}+\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}(R_{24pq})^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}(R_{14pq})^2+\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}(R_{23pq})^2+\sum_{p,q=1}^{n}R_{14pq}R_{23pq} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}(R_{13pq})^2-2R_{13pq}R_{24pq}+(R_{24pq})^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}(R_{14pq})^2+2R_{14pq}R_{23pq}+(R_{23pq})^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\left\{(R_{13pq}-R_{24pq})^2+(R_{14pq}+R_{23pq})^2\right\}, \qquad (10.2)
\end{aligned}$$

e além disso, usando a primeira identidade de Bianchi vemos que

$$
\begin{aligned}
R^{\#}_{1313}+R^{\#}_{2424}+R^{\#}_{1414}+R^{\#}_{2323}+2R^{\#}_{1342}+2R^{\#}_{1423} &= \sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{1p1q}R_{3p3q}-R_{1p3q}R_{3p1q}\right)\\
&+\sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{2p2q}R_{4p4q}-R_{2p4q}R_{4p2q}\right)\\
&+\sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{1p1q}R_{4p4q}-R_{1p4q}R_{4p1q}\right)\\
&+\sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{2p2q}R_{3p3q}-R_{2p3q}R_{3p2q}\right) \qquad (10.3)\\
&+2\sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{1p4q}R_{3p2q}-R_{1p2q}R_{3p4q}\right)\\
&+2\sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{1p2q}R_{4p3q}-R_{1p3q}R_{4p2q}\right).
\end{aligned}
$$

Trocando as variáveis do somatório, vemos que

$$
\begin{aligned}
R^{\#}_{1313}+R^{\#}_{2424}+R^{\#}_{1414}+R^{\#}_{2323}+2R^{\#}_{1342}+2R^{\#}_{1423} &= \sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{1p1q}+R_{2p2q}\right)\left(R_{3p3q}+R_{4p4q}\right)\\
&-\sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{1p3q}+R_{2p4q}\right)\left(R_{3p1q}+R_{4p2q}\right)\\
&-\sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{1p4q}-R_{2p3q}\right)\left(R_{4p1q}-R_{3p2q}\right)\\
&-2\sum_{p,q=1}^{n}R_{1p2q}R_{3p4q}+2R_{1p2q}R_{4p3q}\\
&= \sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{1p1q}+R_{2p2q}\right)\left(R_{3p3q}+R_{4p4q}\right)\\
&-\sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{1p3q}+R_{2p4q}\right)\left(R_{3p1q}+R_{4p2q}\right)\\
&-\sum_{p,q=1}^{n}\left(R_{1p4q}-R_{2p3q}\right)\left(R_{4p1q}-R_{3p2q}\right)+R_{12pq}R_{34pq},
\end{aligned}
$$

em que a última igualdade é devido à seguinte igualdade:

$$
\sum_{p,q=1}^{n}-2R_{1p2q}R_{3p4q}+2R_{1p2q}R_{4p3q}=-\sum_{p,q=1}^{n}R_{12pq}R_{34pq}.
$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q=1}^{n} -2R_{1p2q}R_{3p4q} + 2R_{1p2q}R_{4p3q} &= \sum_{p,q=1}^{n} -2R_{1p2q}\left(R_{3p4q} - R_{4p3q}\right) = \sum_{p,q=1}^{n} -2R_{1p2q}\left(-R_{p34q} - R_{4p3q}\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} -2R_{1p2q}R_{34pq} = \sum_{p,q=1}^{n} -2\left(-R_{p12q}\right)R_{34pq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} 2\left(-R_{2p1q} - R_{12pq}\right)R_{34pq} = \sum_{p,q=1}^{n} -2\left(R_{2p1q} + R_{12pq}\right)R_{34pq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} -2R_{2p1q}R_{34pq} - 2R_{12pq}R_{34pq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} -2R_{2p1q}R_{34pq} - R_{12pq}R_{34pq} - R_{12pq}R_{34pq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left(-2R_{2p1q} - R_{12pq}\right)R_{34pq} - R_{12pq}R_{34pq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left(-R_{2p1q} - R_{2p1q} - R_{12pq}\right)R_{34pq} - R_{12pq}R_{34pq}.
\end{aligned}$$

Por fim, utilizando a primeira identidade de Bianchi e trocando as variáveis dos somatórios se necessário for, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q=1}^{n} -2R_{1p2q}R_{3p4q} + 2R_{1p2q}R_{4p3q} &= \sum_{p,q=1}^{n} \left(-R_{2p1q} + R_{p12q}\right)R_{34pq} - R_{12pq}R_{34pq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left(-R_{2p1q} - R_{1p2q}\right)R_{34pq} - R_{12pq}R_{34pq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left(-R_{2p1q} - R_{2q1p}\right)R_{34pq} - R_{12pq}R_{34pq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} -R_{2p1q}R_{34pq} - R_{2q1p}R_{34pq} - R_{12pq}R_{34pq} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} \left(-R_{2p1q}R_{34pq} + R_{2q1p}R_{34qp}\right) - R_{12pq}R_{34pq} \\
&= -\sum_{p,q=1}^{n} R_{12pq}R_{34pq}.
\end{aligned}$$

Usando que $Q = R^2 + R^{\#}$ e somando as expressões (10.2) e (10.3) temos o resultado. ∎

Por esse lema, vemos que

$$R_{1313}^2 + R_{2424}^2 + R_{1414}^2 + R_{2323}^2 + 2R_{1342}^2 + 2R_{1423}^2 = \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\left\{(R_{13pq} - R_{24pq})^2 + (R_{14pq} + R_{23pq})^2\right\} \geq 0.$$

Portanto, para provar o Teorema 10.1, resta apenas mostrar o seguinte:

Afirmação 10.1.1 *Se $R \in C_{PIC}$ com $\widetilde{l}(R) \geq 0$, então*

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ & \sum_{p,q=1}^{n} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) \\ & - \sum_{p,q=1}^{n} (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}) + R_{12pq}R_{34pq}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Observação 10.1 *Notemos que há uma redundância em nossa descrição de C_{PIC}, já que nem todos os semiespaços dados por*

$$\left\{R \in Curv : \widetilde{l}\left(R^{\mathbb{O}}\right) \geq 0,\ \mathbb{O} \in O(n) \text{ fixado}\right\}$$

são distintos: Notemos que, pela expressão (9.2), $\widetilde{l}(R)$ calcula a curvatura seccional complexa de R no plano gerado por $e_1 + ie_2$ e $e_3 + ie_4$. Mas isso não é alterado se escolhermos uma base diferente para o mesmo subespaço bidimensional. Em particular, teremos o mesmo resultado se fizermos a seguinte mudança:

$$e_1 + ie_2 \to e_2 - ie_1 = -i\,(e_1 + ie_2) \qquad ou \qquad e_3 + ie_4 \to e_4 - ie_3 = -i\,(e_3 + ie_4)\,.$$

Ou se apenas trocarmos $e_1 + ie_2$ por $e_3 + ie_4$ e vice-versa. Assim, para toda desigualdade que provarmos para $\widetilde{l}(R)$, existem desigualdades correspondentes para $\widetilde{l}\left(R^{\mathbb{O}}\right)$, onde $\mathbb{O}$ é uma matriz 4×4 dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad ou \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por exemplo.

10.2 Desigualdades do Teste da Segunda Derivada

Nesta seção vamos demonstrar a Afirmação 10.1.1. Faremos isso aplicando o teste da segunda derivada para a função Z em $O(n)$, onde

$$Z(\mathbb{O}) := \widetilde{l}\left(R^{\mathbb{O}}\right),$$

ao longo das curvas integrais no grupo de Lie $O(n)$ que passam pela matriz identidade.

Comecemos com as seguintes definições e resultados preliminares:

Definição 10.1 *Um **grupo de Lie clássico ou grupo de Lie de matrizes** é um subgrupo fechado de* $GL(n)$

Definição 10.2 *A **álgebra de Lie** de um grupo de Lie $G < GL(n)$ é o conjunto*

$$\mathfrak{g} := T_{Id}G = \left\{\gamma'(0) \in M_{n\times n}\ ;\ \gamma \in C^{\infty}\left((-\varepsilon,\varepsilon), G\right)\ \text{ e } \gamma(0) = Id\right\},$$

em que $M_{n\times n}$ é o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Definimos a dimensão de G por $\dim G = \dim \mathfrak{g}$.

Definição 10.3 *Um **campo de vetores** em um grupo de Lie de matrizes G é uma aplicação suave $X : G \to M_{n\times n}$ tal que $X(A) \in T_AG$, para todo $A \in G$. O conjunto dos campos vetoriais em G será denotado pelo símbolo $\mathfrak{X}(G)$. Dizemos que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(G)$ é invariante à esquerda (resp. à direita), se*

$$X(AB) = AX(B) \qquad \text{(resp. } X(AB) = X(A)B\text{)}$$

Denotaremos os conjuntos dos campos invariantes a esquerda e a direita por $\mathfrak{X}_L(G)$ e $\mathfrak{X}_R(G)$, respectivamente.

A proposição abaixo relaciona a álgebra de Lie de um grupo de Lie G com o conjunto dos seus campos invariantes a esquerda:

Proposição 10.1 *A aplicação $\Psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}_L(G)$ definida por*

$$\Psi(A)(B) = BA, \qquad A \in \mathfrak{g} \text{ e } B \in G$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais, isto é, $\mathfrak{X}_L(G)$ e $\mathfrak{g}$ são isomorfos.

Demonstração. Dado $A \in \mathfrak{g}$, defina $V = \Psi(A) \in \mathfrak{X}_L(G)$. Primeiramente vamos mostrar que V está bem definida, isto é, mostrar que $BA \in T_B G$, para todo $B \in G$. Com efeito, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = Id$ e $\alpha'(0) = A$. A partir de α, defina a curva $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$, onde $\beta(t) = B\alpha(t)$. Note que

$$\beta(0) = B\alpha(0) = B(Id) = B \qquad \text{e} \qquad \beta'(0) = B\alpha'(0) = BA,$$

portanto $BA \in T_B G$. Temos que o campo V é diferenciável, pois cada coordenada é uma função polinomial (ja que V se resume a multiplicar matrizes). Agora vamos verificar que V é um campo invariante à esquerda. De fato,

$$V(CB) = (CB)A = C(BA) = CV(B),$$

para todo $BC \in G$. Nos resta verificar a linearidade, injetividade e a sobrejetividade de Ψ. Com relação a linearidade, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $J, K \in \mathfrak{g}$ e $B \in G$, segue que

$$\Psi(\alpha J + \beta K)(B) = (\alpha J + \beta K) B = \alpha JB + \beta KB = \alpha \Psi(J) B + \beta \Psi(K) B.$$

Vamos provar a injetividade. Dados $J, K \in \mathfrak{g}$ tais que $\Psi(J) = \Psi(K)$, segue que

$$J = J(Id) = \Psi(J)(Id) = \Psi(K)(Id) = K,$$

portanto Ψ é injetora. Por fim, dado $V \in \mathfrak{X}_L(G)$, vamos provar que $V = \Psi(V(Id))$. De fato, dado que V é invariante à esquerda, segue que

$$\Psi(V(Id))(B) = BV(Id) = V(B),$$

para todo $B \in G$ isso prova a sobrejetividade de Ψ e conclui a demonstração. ■

Lembramos que, para toda matriz $A \in M_{n\times n}$, a aplicação

$$\exp : A \in M_{n\times n} \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \in M_{n\times n}$$

é denominada aplicação exponencial matricial. Além disso, as seguintes propriedades são verdadeiras:

1. $e^0 = Id$;

2. $e^{aA}e^{bA} = e^{(a+b)A}$;

3. $e^{A}e^{-A} = Id$;

4. Se $AB = BA$, então $e^{A}e^{B} = e^{A+B}$;

5. Se $AB = BA$, então $e^{A}B = Be^{A}$. Em particular $Ae^{A} = e^{A}A$;

6. Se B é uma matriz inversível, então $e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1}$;

7. $\det\left(e^{A}\right) = e^{Tr(A)}$;

8. $e^{\left(A^{T}\right)} = \left(e^{A}\right)^{T}$;

9. $\frac{d}{dt}\left\{\exp\left(tB\right)\right\} = B\exp\left(tB\right)$. Em particular, para toda matriz $A_0 \in M_{n\times n}$, a aplicação

$$A : t \in \mathbb{R} \longmapsto \exp\left(tB\right)A_0 \in M_{n\times n}$$

verifica

$$A\left(0\right) = A_0$$

$$A'\left(t\right) = \frac{d}{dt}\left\{\exp\left(tB\right)A_0\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\exp\left(tB\right)\right\}A_0 = B\exp\left(tB\right)A_0 = BA\left(t\right)$$

portanto A é a única solução do PVI

$$\begin{cases} A'\left(t\right) = B.A\left(t\right) \\ A\left(0\right) = A_0 \end{cases} \tag{10.5}$$

Lema 10.2 *Considere um grupo de Lie de matrizes G. Se $X \in \mathfrak{X}_L\left(G\right)$, então seu fluxo maximal é*

$$\theta_X : \left(t, A\right) \in \mathbb{R}\times G \to A\exp\left(tX_0\right) \in G$$

onde $X_0 = X\left(Id\right) \in \mathfrak{g}$.

Demonstração. Considere um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}_L\left(G\right)$ e observe que

$$X\left(A\right) = X\left(AId\right) = AX\left(Id\right) = AX_0$$

para toda matriz $A \in G$. Podemos então considerar a extensão natural $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}_L\left(GL\left(n\right)\right)$ de X definida por

$$\widetilde{X}\left(A\right) = AX_0$$

para toda $A \in GL\left(n\right)$. Em particular, $\widetilde{X}\left(Id\right) = X_0$.

Decorre da igualdade acima e das propriedades (9), (5) e (7) que, para toda matriz $A_0 \in G$, a aplicação

$$A : t \in \mathbb{R} \longmapsto A_0 \exp\left(tX_0\right) \in GL\left(n\right)$$

verifica

$$A'\left(t\right) = A_0 X_0 \exp\left(tX_0\right) = A_0 \exp\left(tX_0\right) X_0 = A\left(t\right) X_0 = \widetilde{X}\left(A\left(t\right)\right).$$

Portanto $A\left(t\right)$ é a única solução do PVI

$$\begin{cases} A'\left(t\right) = \widetilde{X}\left(A\left(t\right)\right), \\ A\left(0\right) = A_0. \end{cases}$$

Com isso, temos o fluxo global

$$\widetilde{\theta_X} : \left(t, A_0\right) \in \mathbb{R} \times GL\left(n\right) \longrightarrow A_0 \exp\left(tX_0\right) \in GL\left(n\right).$$

do campo $\widetilde{X}$ em $GL\left(n\right)$.

Como G é uma subvariedade fechada de $GL\left(n\right)$ concluímos que o fluxo maximal θ_X de X sobre G está definido em $\mathbb{R} \times G$ e vale que $\theta_X = \widetilde{\theta_X}_{|_{\mathbb{R}\times G}}$. Mais precisamente,

$$\theta_X : \left(t, A_0\right) \in \mathbb{R} \times G \longrightarrow \widetilde{\theta_X}\left(t, A_0\right) = A_0 \exp\left(tX_0\right) \in G.$$

■

Teorema 10.2 *Dado um grupo de Lie de matrizes $G < GL\left(n\right)$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, segue que*

$$\mathfrak{g} = \left\{A \in M_{n\times n} \; ; \; \exp\left(tA\right) \in G\right\}$$

Demonstração. Dado $A \in \mathfrak{g}$, segue da Proposição 10.1 que existe um único campo invariante à esquerda $X_A \in \mathfrak{g}$ tal que

$$X_A\left(Id\right) = A.$$

Além disso, segue do lema anterior que $\exp(tA) \in G$ para todo t. Por fim, dado $B \in M_{n\times n}$ tal que $\exp(tB) \in G$, temos que

$$\exp(0.B) = \exp(0) = Id,$$

e além disso,

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}(\exp(tB)) = B\exp(tB)_{|t=0} = B\exp(0) = B.Id = B.$$

Portanto $B \in T_{Id}G$ e isso conclui a demonstração. ■

Agora vamos mostrar alguns exemplos de álgebras de Lie em grupos de Lie específicos:

Exemplo 10.1 *Vamos encontrar a álgebra de Lie do grupo de Lie*

$$GL(n) = \{A \in M_{n\times n} : \det A \neq 0\}.$$

Pela Propriedade 7 vemos que

$$\det(\exp(tA)) = \exp(Tr(tA)) \neq 0,$$

para todo $A \in M_{n\times n}$*. Portanto, a álgebra de Lie de* $GL(n)$*, denotada por* $\mathfrak{gl}(n)$*, é simplesmente o conjunto* $M_{n\times n}$ *de todas as matrizes com entradas reais.*

Exemplo 10.2 *Vamos encontrar a álgebra de Lie do grupo de Lie*

$$SO(n) = \left\{A \in M_{n\times n}\ ;\ \det A = 1 \qquad e \qquad AA^T = Id\right\}$$

Segue do teorema anterior que

$$\mathfrak{so}(n) \approx \{A \in M_{n\times n}\ ;\ \exp(tA) \in SO(n)\}$$

Tome $A \in \mathfrak{so}(n)$*. Como* $\exp(tA) \in SO(n)$*, pela Propriedade 7 obtemos que*

$$e^{Tr(A)} = \det[\exp(tA)] = 1 \Longrightarrow Tr(A) = 0.$$

Além disso, pelas Propriedades 8 e 3 e pelo fato de que $\exp(tA) \in SO(n)$ *concluímos o seguinte:*

$$\exp\left(-tA^T\right) = \exp\left((-tA)^T\right) = \exp((-tA))^T = \exp((-tA))^{-1} = \exp(tA)$$

Derivando ambos os extremos, segue que

$$-A^T \exp\left(-tA^T\right) = A \exp(tA)$$

Fazendo $t = 0$, concluímos que

$$A = -A^T.$$

Logo A é antissimetrica.

Tome B antisimétrica. Vamos provar que $\exp(tB) \in SO(n)$. De fato, como B é antissimétrica, segue que os elementos da diagonal de B tem que ser todos nulos, assim $Tr(B) = 0$. Usando esse fato e a Propriedade 7, obtemos que

$$\det(\exp(tB)) = \exp(Tr(tB)) = \exp(0) = 1.$$

Além disso, segue da Propriedades 8, 3 e da definição de B que

$$\exp(tB)^{-1} = \exp(-tB) = \exp\left(tB^T\right) = \exp\left((tB)^T\right) = \exp(tB)^T.$$

Portanto concluímos que

$$\mathfrak{so}(n) \approx \left\{A \in M_{n\times n} \ ; \ A = -A^T \ e \ Tr(A) = 0\right\}.$$

Exemplo 10.3 *Vamos encontrar a álgebra de Lie do grupo de Lie*

$$O(n) = \left\{A \ ; \ AA^T = Id\right\}$$

Segue do teorema anterior que

$$\mathfrak{o}(n) \approx \{A \in M_{n\times n} \ ; \ \exp(tA) \in O(n)\}$$

Tome $A \in \mathfrak{o}(n)$. Como $\exp(tA) \in O(n)$ e pelas Propriedades 8 e 3, concluímos o seguinte:

$$\exp\left(-tA^T\right) = \exp\left((-tA)^T\right) = \exp((-tA))^T = \exp((-tA))^{-1} = \exp(tA)$$

Derivando ambos os extremos, segue que

$$-A^T \exp\left(-tA^T\right) = A \exp(tA)$$

Fazendo $t = 0$, *concluímos que*

$$A = -A^T.$$

Logo A *é antisimetrica.*

Tome B *antisimétrica. Vamos provar que* $\exp(tB) \in O(n)$. *De fato, segue da Propriedades 8, 3 e da definição de* B *que*

$$\exp(tB)^{-1} = \exp(-tB) = \exp\left(tB^T\right) = \exp\left((tB)^T\right) = \exp(tB)^T.$$

Portanto concluímos que

$$\mathfrak{o}(n) \approx \left\{A \in M_{n\times n}\ ;\ A = -A^T\right\}.$$

Voltando ao nosso problema, as curvas integrais de $O(n)$ podem ser convenientemente calculadas usando os fluxos dos seguintes campos invariantes à esquerda: Dado $\Lambda \in \mathfrak{so}(n)$, o campo vetorial invariante à esquerda correspondente $X \in \mathfrak{X}(O(n))$ é dado por

$$X(\mathbb{O}) := \mathbb{O}\Lambda$$

Notemos que $X \in \mathfrak{X}(O(n))$. Como $\Lambda \in \mathfrak{so}(n)$, segue dos exemplos anteriores que

$$\mathbb{O}\Lambda \in \mathbb{O}\mathfrak{so}(n) \subset \mathbb{O}\mathfrak{o}(n) = \mathbb{O}T_{Id}O(n) = T_{\mathbb{O}}O(n).$$

A curva integral na direção de Λ e que passa pela identidade é solução da seguinte EDO:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\mathbb{O}(s) = X(\mathbb{O}) = \mathbb{O}(s)\Lambda \\ \mathbb{O}(0) = Id_n. \end{cases}$$

Equivalentemente, se escrevermos $\frac{d}{ds}v_i(s) = \frac{d}{ds}\mathbb{O}(s)\,e_i$, $i = 1, ..., n$, então a EDO acima é equivalente ao seguinte sistema:

$$\frac{dv_i}{ds}(s) = \frac{d}{ds}(\mathbb{O}(s))\,e_i = (\mathbb{O}\Lambda)(s)\,e_i = \mathbb{O}(s)\left(\sum_{j=1}^{n}\Lambda_i^j e_j\right)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{O}(s)\left(\sum_{j=1}^{n}\Lambda_i^j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\Lambda_i^j \mathbb{O}(s)(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\Lambda_i^j v_j(s), \end{aligned} \tag{10.6}$$

com $v_i(0) = \mathbb{O}(0)e_i = Id_n e_i = e_i$.

Notemos que $Z(\mathbb{O}(0)) = Z(Id) = \widetilde{l}\left(R^{Id}\right) = \widetilde{l}(R) = 0$ pela hipótese da Afirmação 10.1.1, enquanto que $Z(\mathbb{O}(s)) = \widetilde{l}\left(R^{\mathbb{O}(s)}\right) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$.. Segue que $s = 0$ é um ponto de mínimo local (mais que isso, é mínimo global) para $Z(\mathbb{O}(s))$, portanto

$$\frac{d}{ds}Z(\mathbb{O}(s))_{|s=0} = 0.$$

Se $\frac{d^2}{ds^2}Z(\mathbb{O}(s))_{|s=0} < 0$ então pelo teste da segunda derivada, teríamos que $s = 0$ seria um máximo local, mas isso é um absurdo. Portanto

$$\frac{d^2}{ds^2}Z(\mathbb{O}(s))_{|s=0} \geq 0. \tag{10.7}$$

Avaliando explicitamente as condições da 1^a e 2^a derivadas, mostraremos que a soma sobre os índices $p \leq 4 < q$, $q \leq 4 < p$ e sobre $1 \leq p$, $q \leq 4$ da expressão (10.4) se anula. Após isso, mostraremos que a soma sobre os índices $p, q \geq 5$ da expressão (10.4) é não negativa, provando assim a Afirmação 10.1.1.

Termos de Primeira Ordem

Vamos escrever $Z(\mathbb{O}(s))$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Z(\mathbb{O}(s)) &= \widetilde{l}\left(R^{\mathbb{O}(s)}\right) \\ &= R^{\mathbb{O}(s)}(e_1, e_3, e_1, e_3) + R^{\mathbb{O}(s)}(e_2, e_4, e_2, e_4) + R^{\mathbb{O}(s)}(e_1, e_4, e_1, e_4) \\ &\quad + R^{\mathbb{O}(s)}(e_2, e_3, e_2, e_3) - 2R^{\mathbb{O}(s)}(e_1, e_2, e_3, e_4) \\ &= R(\mathbb{O}e_1, \mathbb{O}e_3, \mathbb{O}e_1, \mathbb{O}e_3)(s) + R(\mathbb{O}e_2, \mathbb{O}e_4, \mathbb{O}e_2, \mathbb{O}e_4)(s) + R(\mathbb{O}e_1, \mathbb{O}e_4, \mathbb{O}e_1, \mathbb{O}e_4)(s) \\ &\quad + R(\mathbb{O}e_2, \mathbb{O}e_3, \mathbb{O}e_2, \mathbb{O}e_3)(s) - 2R(\mathbb{O}e_1, \mathbb{O}e_2, \mathbb{O}e_3, \mathbb{O}e_4)(s) \\ &= R(v_1, v_3, v_1, v_3) + R(v_2, v_4, v_2, v_4) + R(v_1, v_4, v_1, v_4) + R(v_2, v_3, v_2, v_3) - 2R(v_1, v_2, v_3, v_4). \end{aligned}$$

Derivando essa expressão diretamente e usando a expressão (10.6) obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(Z\left(\mathbb{O}\left(s\right)\right)\right)_{|s=0} &= \frac{d}{ds}\left(R\left(v_1,v_3,v_1,v_3\right)\right)_{|s=0}+\frac{d}{ds}\left(R\left(v_2,v_4,v_2,v_4\right)\right)_{|s=0}+\frac{d}{ds}\left(R\left(v_1,v_4,v_1,v_4\right)\right)_{|s=0} \\
&\quad +\frac{d}{ds}\left(R\left(v_2,v_3,v_2,v_3\right)\right)_{|s=0}-2\frac{d}{ds}\left(R\left(v_1,v_2,v_3,v_4\right)\right)_{|s=0} \\
&= A+B+C+D+E,
\end{aligned}$$

em que as letras maiúsculas denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases}
A=\left(R\left(\frac{dv_1}{ds},v_3,v_1,v_3\right)+R\left(v_1,\frac{dv_3}{ds},v_1,v_3\right)+R\left(v_1,v_3,\frac{dv_1}{ds},v_3\right)+R\left(v_1,v_3,v_1,\frac{dv_3}{ds}\right)\right)_{|s=0} \\
B=+\left(R\left(\frac{dv_2}{ds},v_4,v_2,v_4\right)+R\left(v_2,\frac{dv_4}{ds},v_2,v_4\right)+R\left(v_2,v_4,\frac{dv_2}{ds},v_4\right)+R\left(v_2,v_4,v_2,\frac{dv_4}{ds}\right)\right)_{|s=0} \\
C=+\left(R\left(\frac{dv_1}{ds},v_4,v_1,v_4\right)+R\left(v_1,\frac{dv_4}{ds},v_1,v_4\right)+R\left(v_1,v_4,\frac{dv_1}{ds},v_4\right)+R\left(v_1,v_4,v_1,\frac{dv_4}{ds}\right)\right)_{|s=0} \\
D=+\left(R\left(\frac{dv_2}{ds},v_3,v_2,v_3\right)+R\left(v_2,\frac{dv_3}{ds},v_2,v_3\right)+R\left(v_2,v_3,\frac{dv_2}{ds},v_3\right)+R\left(v_2,v_3,v_2,\frac{dv_3}{ds}\right)\right)_{|s=0} \\
E=-2\left(R\left(\frac{dv_1}{ds},v_2,v_3,v_4\right)+R\left(v_1,\frac{dv_2}{ds},v_3,v_4\right)+R\left(v_1,v_2,\frac{dv_3}{ds},v_4\right)+R\left(v_1,v_2,v_3,\frac{dv_4}{ds}\right)\right)_{|s=0}
\end{cases}$$

Usando que $\frac{dv_i}{ds}=\sum_{p=1}^n\Lambda_i^p v_p$ e a linearidade do tensor R, concluímos que

$$\begin{cases}
A=\left(\sum_{p=1}^n\Lambda_1^pR\left(v_p,v_3,v_1,v_3\right)+\Lambda_3^pR\left(v_1,v_p,v_1,v_3\right)+\Lambda_1^pR\left(v_1,v_3,v_p,v_3\right)+\Lambda_3^pR\left(v_1,v_3,v_1,v_p\right)\right)_{|s=0} \\
B=\left(\sum_{p=1}^n\Lambda_2^pR\left(v_p,v_4,v_2,v_4\right)+\Lambda_4^pR\left(v_2,v_p,v_2,v_4\right)+\Lambda_2^pR\left(v_2,v_4,v_p,v_4\right)+\Lambda_4^pR\left(v_2,v_4,v_2,v_p\right)\right)_{|s=0} \\
C=\left(\sum_{p=1}^n\Lambda_1^pR\left(v_p,v_4,v_1,v_4\right)+\Lambda_4^pR\left(v_1,v_p,v_1,v_4\right)+\Lambda_1^pR\left(v_1,v_4,v_p,v_4\right)+\Lambda_4^pR\left(v_1,v_4,v_1,v_p\right)\right)_{|s=0} \\
D=\left(\sum_{p=1}^n\Lambda_2^pR\left(v_p,v_3,v_2,v_3\right)+\Lambda_3^pR\left(v_2,v_p,v_2,v_3\right)+\Lambda_2^pR\left(v_2,v_3,v_p,v_3\right)+\Lambda_3^pR\left(v_2,v_3,v_2,v_p\right)\right)_{|s=0} \\
E=-2\left(\sum_{p=1}^n\Lambda_1^pR\left(v_p,v_2,v_3,v_4\right)+\Lambda_2^pR\left(v_1,v_p,v_3,v_4\right)+\Lambda_3^pR\left(v_1,v_2,v_p,v_4\right)+\Lambda_4^pR\left(v_1,v_2,v_3,v_p\right)\right)_{|s=0}
\end{cases}.$$

Portanto, usando que $v_i(0)=e_i$, conluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(Z\left(\mathbb{O}\left(s\right)\right)\right)_{|s=0} &= \sum_{p=1}^n\Lambda_1^pR_{p313}+\Lambda_3^pR_{1p13}+\Lambda_1^pR_{13p3}+\Lambda_3^pR_{131p}+\Lambda_2^pR_{p424}+\Lambda_4^pR_{2p24}+\Lambda_2^pR_{24p4}+\Lambda_4^pR_{242p} \\
&\quad +\sum_{p=1}^n\Lambda_1^pR_{p414}+\Lambda_4^pR_{1p14}+\Lambda_1^pR_{14p4}+\Lambda_4^pR_{141p}+\Lambda_2^pR_{p323}+\Lambda_3^pR_{2p23} \\
&\quad +\sum_{p=1}^n\Lambda_2^pR_{23p3}+\Lambda_3^pR_{232p}-2\left(\Lambda_1^pR_{p234}+\Lambda_2^pR_{1p34}+\Lambda_3^pR_{12p4}+\Lambda_4^pR_{123p}\right).
\end{aligned}$$

Fatorando os termos apropriadamente, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(Z\left(\mathbb{O}\left(s\right)\right)\right)_{|s=0} &= \sum_{p=1}^{n}\Lambda_1^p\left(R_{p313}+R_{13p3}+R_{p414}+R_{14p4}-2R_{p234}\right)\\
&+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_3^p\left(R_{1p13}+R_{131p}+R_{2p23}+R_{232p}-2R_{12p4}\right)\\
&+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_2^p\left(R_{p424}+R_{24p4}+R_{p323}+R_{23p3}-2R_{1p34}\right)\\
&+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_4^p\left(R_{2p24}+R_{242p}+R_{1p14}+R_{141p}-2R_{123p}\right)\\
&= \sum_{p=1}^{n}2\Lambda_1^p\left(R_{p313}+R_{p414}-R_{p234}\right)+2\Lambda_3^p\left(R_{1p13}+R_{2p23}-R_{12p4}\right)\\
&+\sum_{p=1}^{n}2\Lambda_2^p\left(R_{24p4}+R_{23p3}-R_{1p34}\right)+2\Lambda_4^p\left(R_{242p}+R_{141p}-R_{123p}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(R\left(v_a,v_b,v_c,v_d\right)\right) &= \frac{dR}{ds}\left(v_a,v_b,v_c,v_d\right)+R\left(\frac{d}{ds}v_a,v_b,v_c,v_d\right)+R\left(v_a,\frac{d}{ds}v_b,v_c,v_d\right)\\
&+R\left(v_a,v_b,\frac{d}{ds}v_c,v_d\right)+R\left(v_a,v_b,v_c,\frac{d}{ds}v_d\right)\\
&= R\left(\frac{d}{ds}v_a,v_b,v_c,v_d\right)+R\left(v_a,\frac{d}{ds}v_b,v_c,v_d\right)+R\left(v_a,v_b,\frac{d}{ds}v_c,v_d\right)\\
&+R\left(v_a,v_b,v_c,\frac{d}{ds}v_d\right).
\end{aligned}$$

Segue da condição da primeira derivada de $Z\left(\mathbb{O}\left(s\right)\right)$ que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{p=1}^{n}\Lambda_1^p\left(R_{p313}+R_{p414}-R_{p234}\right)+\Lambda_2^p\left(R_{24p4}+R_{23p3}-R_{1p34}\right)\\
&+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_3^p\left(R_{1p13}+R_{2p23}-R_{12p4}\right)+\Lambda_4^p\left(R_{242p}+R_{141p}-R_{123p}\right),
\end{aligned} \tag{10.8}$$

para toda matriz antissimétrica Λ. Escolha $\Lambda = e_p \circledast e_q$, isto é, Λ é uma matriz da seguinte forma:

- Linha i e coluna $j \Rightarrow e_{pi}e_{qj} - e_{pj}e_{qi}$ para $i < j$;
- Linha i e coluna $j \Rightarrow e_{pj}e_{qi} - e_{pi}e_{qj}$ para $i > j$;
- 0 na diagonal.

Logo, para $e_p \circledast e_q$ só teremos termos potenciais não nulos nas linhas e colunas p e q:

Para $p < 4 < q$: linha p e coluna p: $0 - 0 = 0$; linha p e coluna q: $1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$; linha q e coluna p: $0 \times 0 - 1 \times 1 = -1$; linha q e coluna q: $0 \times 0 - 0 \times 0 = 0$. Portanto, se fizermos a associação $p \leftrightarrow q$ na expressão (10.8) e supormos que $p \leq 4 < q$, então teremos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} p &= 1 : 0 = R_{q313} + R_{q414} - R_{q234} = R_{133q} + R_{144q} + R_{432q} \\ p &= 2 : 0 = R_{24q4} + R_{23q3} - R_{1q34} = -\left(R_{233q} + R_{244q} + R_{341q}\right) \\ p &= 3 : 0 = R_{1q13} + R_{2q23} - R_{12q4} = R_{131q} + R_{232q} + R_{124q} \\ p &= 4 : 0 = R_{242q} + R_{141q} - R_{123q} = R_{242q} + R_{141q} + R_{213q} \end{aligned} \tag{10.9}$$

Além disso, vamos tomar $\Lambda = e_1 \circledast e_3$ e $\Lambda = e_1 \circledast e_4$. Se fizermos a associação $p \leftrightarrow q$ em (10.8), teremos que

$$\begin{aligned} e_1 \circledast e_3 \quad &: \quad 0 = \Lambda_1^3 \left(R_{3313} + R_{3414} - R_{3234}\right) + \Lambda_3^1 \left(R_{1113} + R_{2123} - R_{1214}\right) \\ &= \left(R_{3313} + R_{3414} - R_{3234}\right) - \left(R_{1113} + R_{2123} - R_{1214}\right) \\ &= \left(R_{3414} - R_{3234}\right) - \left(R_{2123} - R_{1214}\right) \\ &= R_{3414} + R_{3423} + R_{1223} + R_{1214}, \\ e_1 \circledast e_4 \quad &: \quad 0 = \Lambda_1^4 \left(R_{4313} + R_{4414} - R_{4234}\right) + \Lambda_4^1 \left(R_{2421} + R_{1411} - R_{1231}\right) \\ &= \left(R_{4313} + R_{4414} - R_{4234}\right) - \left(R_{2421} + R_{1411} - R_{1231}\right) \\ &= \left(R_{4313} - R_{4234}\right) - \left(R_{2421} - R_{1231}\right) \\ &= R_{3134} + R_{3424} + R_{1224} + R_{2113}. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Provemos agora que alguns termos da Afirmação 10.1.1 se anulam:

Lema 10.3

$$\sum_{p,q=1}^{4} \alpha_{pq} - \beta_{pq} - \gamma_{pq} - \eta_{pq} = 0,$$

em que as letras gregas denotam as seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha_{pq} = \left(R_{1p1q} + R_{2p2q}\right)\left(R_{3p3q} + R_{4p4q}\right) & , & \beta_{pq} = \left(R_{1p3q} + R_{2p4q}\right)\left(R_{3p1q} + R_{4p2q}\right) \\ \gamma_{pq} = \left(R_{1p4q} - R_{2p3q}\right)\left(R_{4p1q} - R_{3p2q}\right) & , & \eta_{pq} = R_{12pq}R_{34pq}. \end{array} \right. .$$

Demonstração. Por um cálculo direto, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q=1}^{4} \alpha_{pq} - \beta_{pq} - \gamma_{pq} - \eta_{pq} \quad = \quad & A_1 - R_{1211}R_{3411} + A_2 - R_{1212}R_{3412} + A_3 - R_{1213}R_{3413} + A_4 - R_{1214}R_{3414} \\
& + B_1 - R_{1221}R_{3421} + B_2 - R_{1222}R_{3422} + B_3 - R_{1223}R_{3423} + B_4 - R_{1224}R_{3424} \\
& + C_1 - R_{1231}R_{3431} + C_2 - R_{1232}R_{3432} + C_3 - R_{1233}R_{3433} + C_4 - R_{1234}R_{3434} \\
& + D_1 - R_{1241}R_{3441} + D_2 - R_{1242}R_{3442} + D_3 - R_{1243}R_{3443} + D_4 - R_{1244}R_{3444}.
\end{aligned}$$

Em que as letras $A_1, ..., A_4$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases}
A_1 = (R_{1111} + R_{2121})(R_{3131} + R_{4141}) - (R_{1131} + R_{2141})(R_{3111} + R_{4121}) - (R_{1141} - R_{2131})(R_{4111} - R_{3121}) \\
A_2 = (R_{1112} + R_{2122})(R_{3132} + R_{4142}) - (R_{1132} + R_{2142})(R_{3112} + R_{4122}) - (R_{1142} - R_{2132})(R_{4112} - R_{3122}) \\
A_3 = (R_{1113} + R_{2123})(R_{3133} + R_{4143}) - (R_{1133} + R_{2143})(R_{3113} + R_{4123}) - (R_{1143} - R_{2133})(R_{4113} - R_{3123}) \\
A_4 = (R_{1114} + R_{2124})(R_{3134} + R_{4144}) - (R_{1134} + R_{2144})(R_{3114} + R_{4124}) - (R_{1144} - R_{2134})(R_{4114} - R_{3124})
\end{cases},$$

as letras $B_1, ..., B_4$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases}
B_1 = (R_{1211} + R_{2221})(R_{3231} + R_{4241}) - (R_{1231} + R_{2241})(R_{3211} + R_{4221}) - (R_{1241} - R_{2231})(R_{4211} - R_{3221}) \\
B_2 = (R_{1212} + R_{2222})(R_{3232} + R_{4242}) - (R_{1232} + R_{2242})(R_{3212} + R_{4222}) - (R_{1242} - R_{2232})(R_{4212} - R_{3222}) \\
B_3 = (R_{1213} + R_{2223})(R_{3233} + R_{4243}) - (R_{1233} + R_{2243})(R_{3213} + R_{4223}) - (R_{1243} - R_{2233})(R_{4213} - R_{3223}) \\
B_4 = (R_{1214} + R_{2224})(R_{3234} + R_{4244}) - (R_{1234} + R_{2244})(R_{3214} + R_{4224}) - (R_{1244} - R_{2234})(R_{4214} - R_{3224})
\end{cases},$$

as letras $C_1, ..., C_4$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases}
C_1 = (R_{1311} + R_{2321})(R_{3331} + R_{4341}) - (R_{1331} + R_{2341})(R_{3311} + R_{4321}) - (R_{1341} - R_{2331})(R_{4311} - R_{3321}) \\
C_2 = (R_{1312} + R_{2322})(R_{3332} + R_{4342}) - (R_{1332} + R_{2342})(R_{3312} + R_{4322}) - (R_{1342} - R_{2332})(R_{4312} - R_{3322}) \\
C_3 = (R_{1313} + R_{2323})(R_{3333} + R_{4343}) - (R_{1333} + R_{2343})(R_{3313} + R_{4323}) - (R_{1343} - R_{2333})(R_{4313} - R_{3323}) \\
C_4 = (R_{1314} + R_{2324})(R_{3334} + R_{4344}) - (R_{1334} + R_{2344})(R_{3314} + R_{4324}) - (R_{1344} - R_{2334})(R_{4314} - R_{3324})
\end{cases},$$

e as letras $D_1, ..., D_4$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases}
D_1 = (R_{1411} + R_{2421})(R_{3431} + R_{4441}) - (R_{1431} + R_{2441})(R_{3411} + R_{4421}) - (R_{1441} - R_{2431})(R_{4411} - R_{3421}) \\
D_2 = (R_{1412} + R_{2422})(R_{3432} + R_{4442}) - (R_{1432} + R_{2442})(R_{3412} + R_{4422}) - (R_{1442} - R_{2432})(R_{4412} - R_{3422}) \\
D_3 = (R_{1413} + R_{2423})(R_{3433} + R_{4443}) - (R_{1433} + R_{2443})(R_{3413} + R_{4423}) - (R_{1443} - R_{2433})(R_{4413} - R_{3423}) \\
D_4 = (R_{1414} + R_{2424})(R_{3434} + R_{4444}) - (R_{1434} + R_{2444})(R_{3414} + R_{4424}) - (R_{1444} - R_{2434})(R_{4414} - R_{3424})
\end{cases},$$

Simplificando os termos, vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{p,q=1}^{4}\alpha_{pq}-\beta_{pq}-\gamma_{pq}-\eta_{pq} &= A_1'+A_2'+A_3'+A_4'+B_1'+B_2'+B_3'+B_4'\\ &\quad +C_1'+C_2'+C_3'+C_4'+D_1'+D_2'+D_3'+D_4',\end{aligned}$$

em que as letras $A_1',...,A_4'$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} A_1' = R_{2121}\left(R_{3131}+R_{4141}\right)-R_{2141}R_{4121}-R_{2131}R_{3121}\\ A_2' = -R_{2142}R_{3112}+R_{2132}R_{4112}-R_{1212}R_{3412}\\ A_3' = R_{2123}R_{4143}-R_{2143}\left(R_{3113}+R_{4123}\right)-R_{1213}R_{3413}\\ A_4' = R_{2124}R_{3134}+R_{2134}\left(R_{4114}-R_{3124}\right)-R_{1214}R_{3414}\end{cases},$$

as letras $B_1',...,B_4'$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} B_1' = -R_{1231}R_{4221}+R_{1241}R_{3221}-R_{1221}R_{3421}\\ B_2' = R_{1212}\left(R_{3232}+R_{4242}\right)-R_{1232}R_{3212}-R_{1242}R_{4212}\\ B_3' = R_{1213}R_{4243}-R_{1243}\left(R_{4213}-R_{3223}\right)-R_{1223}R_{3423}\\ B_4' = R_{1214}R_{3234}-R_{1234}\left(R_{3214}+R_{4224}\right)-R_{1224}R_{3424}\end{cases},$$

as letras $C_1',...,C_4'$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} C_1' = R_{2321}R_{4341}-\left(R_{1331}+R_{2341}\right)R_{4321}-\left(R_{1341}-R_{2331}\right)R_{4311}-R_{1231}R_{3431}\\ C_2' = R_{1312}R_{4342}-\left(R_{1342}-R_{2332}\right)R_{4312}-R_{1232}R_{3432}\\ C_3' = \left(R_{1313}+R_{2323}\right)R_{4343}-R_{2343}R_{4323}-R_{1343}\left(R_{4313}-R_{3323}\right)\\ C_4' = -R_{1334}R_{4324}+R_{2334}R_{4314}-R_{1234}R_{3434}\end{cases},$$

e as letras $D_1',...,D_4'$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} D_1' = R_{2421}R_{3431}-\left(R_{1431}+R_{2441}\right)R_{3411}+\left(R_{1441}-R_{2431}\right)R_{3421}-R_{1241}R_{3441}\\ D_2' = R_{1412}R_{3432}-\left(R_{1432}+R_{2442}\right)R_{3412}-R_{1242}R_{3442}\\ D_3' = -\left(R_{1433}+R_{2443}\right)R_{3413}+R_{1443}R_{3423}-R_{1243}R_{3443}\\ D_4' = \left(R_{1414}+R_{2424}\right)R_{3434}-R_{1434}R_{3414}-R_{2434}R_{3424}\end{cases}.$$

Agrupando os termos adequadamente, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q=1}^{4} \alpha_{pq} - \beta_{pq} - \gamma_{pq} - \eta_{pq} &= (R_{1212} + R_{3434})(R_{3131} + R_{4141} + R_{3232} + R_{4242} + 2R_{3421}) \\
&+ R_{1213}(-R_{1213} - R_{3413} - R_{1242} - R_{3442}) - R_{1242}(R_{1213} + R_{3413} + R_{3442} + R_{1242}) \\
&+ R_{3413}(-R_{1213} - R_{1242} - R_{3442} - R_{3442}) + R_{3442}(-R_{1213} - R_{1242} - R_{3442}) \\
&+ 2R_{1234}(R_{2323} + R_{1414} + R_{1313} + R_{2424} + 2R_{1342} + 2R_{1423}) \\
&+ R_{1214}(-R_{3414} - R_{1223} - R_{1214} - R_{3423}) \\
&+ R_{3414}(-R_{1223} - R_{2334} - R_{3414} - R_{3423}) - R_{3423}(R_{1223} + R_{2334} + R_{3414} + R_{3423}) \\
&+ R_{1223}(-R_{1223} - R_{3414} - R_{3423} - R_{1214}).
\end{aligned}$$

Notemos que alguns desses termos são quadrados perfeitos. Por esse motivo e pelas igualdades em (10.10), segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q=1}^{4} \alpha_{pq} - \beta_{pq} - \gamma_{pq} - \eta_{pq} &= (R_{1212} + R_{3434})(R_{3131} + R_{4141} + R_{3232} + R_{4242} + 2R_{3421}) \\
&- (R_{1213} + R_{3413} + R_{1242} + R_{3442})^2 - (R_{3414} + R_{1223} + R_{1214} + R_{3423})^2 \\
&+ 2R_{1234}(R_{2323} + R_{1414} + R_{1313} + R_{2424} + 2R_{1342} + 2R_{1423}) \\
&= (R_{1212} + R_{3434})(R_{3131} + R_{4141} + R_{3232} + R_{4242} + 2R_{3421}) \\
&- (R_{1213} + R_{3413} + R_{1242} + R_{3442})^2 - 0 \\
&+ 2R_{1234}(R_{2323} + R_{1414} + R_{1313} + R_{2424} + 2R_{1342} + 2R_{1423}).
\end{aligned}$$

Novamente, pelas igualdades em (10.10), pela primeira identidade de Bianchi e pelo fato de $\widetilde{l}(R) = 0$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\sum_{p,q=1}^{4} \alpha_{pq} - \beta_{pq} - \gamma_{pq} - \eta_{pq} &= (R_{1212} + R_{3434})(R_{3131} + R_{4141} + R_{3232} + R_{4242} + 2R_{3421}) - 0 - 0 \\
&+ 2R_{1234}(R_{2323} + R_{1414} + R_{1313} + R_{2424} + 2R_{1342} + 2R_{1423}) \\
&= (R_{1212} + R_{3434})(R_{3131} + R_{4141} + R_{3232} + R_{4242} + 2R_{3421}) \\
&+ 2R_{1234}(R_{2323} + R_{1414} + R_{1313} + R_{2424} + 2R_{4312}) \\
&= (R_{1212} + R_{3434} + 2R_{1234})(R_{3131} + R_{4141} + R_{3232} + R_{4242} - 2R_{1234})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (R_{1212} + R_{3434} + 2R_{1234}) \times 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

■

Lema 10.4 *Para todo $q \geq 5$ fixado, temos*

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \sum_{p=1}^{4} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) \\
& - \sum_{p=1}^{4} (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}) + R_{12pq}R_{34pq}
\end{aligned}
$$

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{2} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - R_{12pq}R_{34pq} \;=\; & (R_{111q} + R_{212q})(R_{313q} + R_{414q}) - R_{121q}R_{341q} \\
& + (R_{121q} + R_{222q})(R_{323q} + R_{424q}) - R_{122q}R_{342q} \\
=\; & (R_{111q} + R_{212q})(-R_{133q} - R_{144q}) - R_{121q}R_{341q} \\
& + (R_{121q} + R_{222q})(-R_{233q} - R_{244q}) - R_{122q}R_{342q}.
\end{aligned}
$$

Pelas igualdades em (10.9), vemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{2} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - R_{12pq}R_{34pq} \;=\; & (R_{111q} + R_{212q}) R_{432q} - R_{121q}R_{341q} \\
& + (R_{121q} + R_{222q}) R_{341q} - R_{122q}R_{342q} \\
=\; & R_{212q}R_{432q} - R_{121q}R_{341q} + R_{121q}R_{341q} - R_{122q}R_{342q} \\
=\; & R_{212q}(R_{432q} + R_{342q}) + R_{121q}(R_{341q} - R_{341q}) \\
=\; & 0 + 0 \\
=\; & 0.
\end{aligned}
$$

Além disso, se φ_{pq} denotar $(R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q})$ e ψ_{pq} denotar $(R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q})$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{p=3}^{4} \varphi_{pq} + \psi_{pq} &= (R_{133q} + R_{234q})(R_{331q} + R_{432q}) + (R_{134q} - R_{233q})(R_{431q} - R_{332q}) \\
&\quad + (R_{143q} + R_{244q})(R_{341q} + R_{442q}) + (R_{144q} - R_{243q})(R_{441q} - R_{342q}) \\
&= (R_{133q} + R_{234q}) R_{432q} + (R_{134q} - R_{233q}) R_{431q} + (R_{143q} + R_{244q}) R_{341q} \\
&\quad - (R_{144q} - R_{243q}) R_{342q} \\
&= (R_{133q} + R_{234q} + (R_{144q} - R_{243q})) R_{432q} \\
&\quad + (R_{143q} + R_{244q} - (R_{134q} - R_{233q})) R_{341q}.
\end{aligned}$$

Pela primeira identidade de Bianchi e pelas igualdade em (10.9), segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{p=3}^{4} (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) + (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}) &= (R_{133q} + R_{144q} - R_{342q}) R_{432q} \\
&\quad + (R_{431q} + R_{244q} + R_{233q}) R_{341q} \\
&= (R_{133q} + R_{144q} - R_{342q}) R_{432q} \\
&\quad + (R_{431q} + R_{244q} + R_{233q}) R_{341q} \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ para $\{e_3, e_4, e_1, e_2\}$ (podemos fazê-la, pois não alterará $\widetilde{l}(Q(R))$ pela Observação 10.1). Segue da simetria de ambas as somas que

$$\begin{cases} \sum_{p=3}^{4} (R_{1p1q} + R_{2p2q})(R_{3p3q} + R_{4p4q}) - R_{12pq} R_{34pq} = 0, \\ \sum_{p=1}^{2} (R_{1p3q} + R_{2p4q})(R_{3p1q} + R_{4p2q}) + (R_{1p4q} - R_{2p3q})(R_{4p1q} - R_{3p2q}) = 0. \end{cases}$$

Isso conclui o resultado. ■

Termos de Segunda Ordem

Agora vamos calcular os termos que compõe a segunda derivada de Z e estabelicer a não negatividade da soma final sobre os índices $p, q \geq 5$. da expressão na Afirmação 10.1.1. Agrupando termos similares , encontramos que a derivada de segunda ordem de Z, é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d^2Z}{ds^2}_{|s=0} &= \frac{d}{ds}\left(\sum_{p=1}^{n}\Lambda_1^pR\left(v_p,v_3,v_1,v_3\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_3^pR\left(v_1,v_p,v_1,v_3\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_1^pR\left(v_1,v_3,v_p,v_3\right)\right)_{|s=0}\\
&+\frac{d}{ds}\left(\sum_{p=1}^{n}\Lambda_3^pR\left(v_1,v_3,v_1,v_p\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_2^pR\left(v_p,v_4,v_2,v_4\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_4^pR\left(v_2,v_p,v_2,v_4\right)\right)_{|s=0}\\
&+\frac{d}{ds}\left(\sum_{p=1}^{n}\Lambda_2^pR\left(v_2,v_4,v_p,v_4\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_4^pR\left(v_2,v_4,v_2,v_p\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_1^pR\left(v_p,v_4,v_1,v_4\right)\right)_{|s=0}\\
&+\frac{d}{ds}\left(\sum_{p=1}^{n}\Lambda_4^pR\left(v_1,v_p,v_1,v_4\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_1^pR\left(v_1,v_4,v_p,v_4\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_4^pR\left(v_1,v_4,v_1,v_p\right)\right)_{|s=0}\\
&+\frac{d}{ds}\left(\sum_{p=1}^{n}\Lambda_2^pR\left(v_p,v_3,v_2,v_3\right)_{|s=0}+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_3^pR\left(v_2,v_p,v_2,v_3\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_2^pR\left(v_2,v_3,v_p,v_3\right)\right)_{|s=0}\\
&+\frac{d}{ds}\sum_{p=1}^{n}\Lambda_3^pR\left(v_2,v_3,v_2,v_p\right)_{|s=0}-2\frac{d}{ds}\left(\sum_{p=1}^{n}\Lambda_1^pR\left(v_p,v_2,v_3,v_4\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_2^pR\left(v_1,v_p,v_3,v_4\right)\right)_{|s=0}\\
&-2\frac{d}{ds}\left(\sum_{p=1}^{n}\Lambda_3^pR\left(v_1,v_2,v_p,v_4\right)+\sum_{p=1}^{n}\Lambda_4^pR\left(v_1,v_2,v_3,v_p\right)\right)_{|s=0}.
\end{aligned}$$

Distribuindo a derivada e usando a expressão da derivada de um tensor (para mais detalhes veja a Proposição A.7), vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2Z}{ds^2}_{|s=0} &= \left(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7\right)_{|s=0}+\left(A_8+A_9+A_{10}+A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}\right)_{|s=0}\\
&+\left(A_{15}+A_{16}+A_{17}+A_{18}+A_{19}+A_{20}\right)_{|s=0}.
\end{aligned}$$

em que as letras $A_1,...,A_7$ denotam as seguintes expressões:

$$\left\{\begin{array}{l}
A_1=\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_p^qR\left(v_q,v_3,v_1,v_3\right)+\Lambda_1^p\Lambda_3^qR\left(v_p,v_q,v_1,v_3\right)+\Lambda_1^p\Lambda_1^qR\left(v_p,v_3,v_q,v_3\right)+\Lambda_1^p\Lambda_3^qR\left(v_p,v_3,v_1,v_q\right)\\
A_2=\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_1^qR\left(v_q,v_p,v_1,v_3\right)+\Lambda_3^p\Lambda_p^qR\left(v_1,v_q,v_1,v_3\right)+\Lambda_3^p\Lambda_1^qR\left(v_1,v_p,v_q,v_3\right)+\Lambda_3^p\Lambda_3^qR\left(v_1,v_p,v_1,v_q\right)\\
A_3=\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_1^qR\left(v_q,v_3,v_p,v_3\right)+\Lambda_1^p\Lambda_3^qR\left(v_1,v_q,v_p,v_3\right)+\Lambda_1^p\Lambda_p^qR\left(v_1,v_3,v_q,v_3\right)+\Lambda_1^p\Lambda_3^qR\left(v_1,v_3,v_p,v_q\right)\\
A_4=\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_1^qR\left(v_q,v_3,v_1,v_p\right)+\Lambda_3^p\Lambda_3^qR\left(v_1,v_q,v_1,v_p\right)+\Lambda_3^p\Lambda_1^qR\left(v_1,v_3,v_q,v_p\right)+\Lambda_3^p\Lambda_p^qR\left(v_1,v_3,v_1,v_q\right)\\
A_5=\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_2^p\Lambda_p^qR\left(v_q,v_4,v_2,v_4\right)+\Lambda_2^p\Lambda_4^qR\left(v_p,v_q,v_2,v_4\right)+\Lambda_2^p\Lambda_2^qR\left(v_p,v_4,v_q,v_4\right)+\Lambda_2^p\Lambda_4^qR\left(v_p,v_4,v_2,v_q\right)\\
A_6=\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_2^qR\left(v_q,v_p,v_2,v_4\right)+\Lambda_4^p\Lambda_p^qR\left(v_2,v_q,v_2,v_4\right)+\Lambda_4^p\Lambda_2^qR\left(v_2,v_p,v_q,v_4\right)+\Lambda_4^p\Lambda_4^qR\left(v_2,v_p,v_2,v_q\right)\\
A_7=\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_2^p\Lambda_2^qR\left(v_q,v_4,v_p,v_4\right)+\Lambda_2^p\Lambda_4^qR\left(v_2,v_q,v_p,v_4\right)+\Lambda_2^p\Lambda_p^qR\left(v_2,v_4,v_q,v_4\right)+\Lambda_2^p\Lambda_4^qR\left(v_2,v_4,v_p,v_q\right)
\end{array}\right. ,$$

as letras $A_8, ..., A_{14}$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} A_8 = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_4^p\Lambda_2^q R\left(v_q,v_4,v_2,v_p\right) + \Lambda_4^p\Lambda_4^q R\left(v_2,v_q,v_2,v_p\right) + \Lambda_4^p\Lambda_2^q R\left(v_2,v_4,v_q,v_p\right) + \Lambda_4^p\Lambda_p^q R\left(v_2,v_4,v_2,v_q\right) \\ A_9 = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_1^p\Lambda_p^q R\left(v_q,v_4,v_1,v_4\right) + \Lambda_1^p\Lambda_4^q R\left(v_p,v_q,v_1,v_4\right) + \Lambda_1^p\Lambda_1^q R\left(v_p,v_4,v_q,v_4\right) + \Lambda_1^p\Lambda_4^q R\left(v_p,v_4,v_1,v_q\right) \\ A_{10} = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_4^p\Lambda_1^q R\left(v_q,v_p,v_1,v_4\right) + \Lambda_4^p\Lambda_p^q R\left(v_1,v_q,v_1,v_4\right) + \Lambda_4^p\Lambda_1^q R\left(v_1,v_p,v_q,v_4\right) + \Lambda_4^p\Lambda_4^q R\left(v_1,v_p,v_1,v_q\right) \\ A_{11} = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_1^p\Lambda_1^q R\left(v_q,v_4,v_p,v_4\right) + \Lambda_1^p\Lambda_4^q R\left(v_1,v_q,v_p,v_4\right) + \Lambda_1^p\Lambda_p^q R\left(v_1,v_4,v_q,v_4\right) + \Lambda_1^p\Lambda_4^q R\left(v_1,v_4,v_p,v_q\right) \\ A_{12} = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_4^p\Lambda_1^q R\left(v_q,v_4,v_1,v_p\right) + \Lambda_4^p\Lambda_4^q R\left(v_1,v_q,v_1,v_p\right) + \Lambda_4^p\Lambda_1^q R\left(v_1,v_4,v_q,v_p\right) + \Lambda_4^p\Lambda_p^q R\left(v_1,v_4,v_1,v_q\right) \\ A_{13} = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_2^p\Lambda_p^q R\left(v_q,v_3,v_2,v_3\right) + \Lambda_2^p\Lambda_3^q R\left(v_p,v_q,v_2,v_3\right) + \Lambda_2^p\Lambda_2^q R\left(v_p,v_3,v_q,v_3\right) + \Lambda_2^p\Lambda_3^q R\left(v_p,v_3,v_2,v_q\right) \\ A_{14} = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_3^p\Lambda_2^q R\left(v_q,v_p,v_2,v_3\right) + \Lambda_3^p\Lambda_p^q R\left(v_2,v_q,v_2,v_3\right) + \Lambda_3^p\Lambda_2^q R\left(v_2,v_p,v_q,v_3\right) + \Lambda_3^p\Lambda_3^q R\left(v_2,v_p,v_2,v_q\right) \end{cases},$$

e as letras $A_{15}, ..., A_{20}$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} A_{15} = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_2^p\Lambda_2^q R\left(v_q,v_3,v_p,v_3\right) + \Lambda_2^p\Lambda_3^q R\left(v_2,v_q,v_p,v_3\right) + \Lambda_2^p\Lambda_p^q R\left(v_2,v_3,v_q,v_3\right) + \Lambda_2^p\Lambda_3^q R\left(v_2,v_3,v_p,v_q\right) \\ A_{16} = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_3^p\Lambda_2^q R\left(v_q,v_3,v_2,v_p\right) + \Lambda_3^p\Lambda_3^q R\left(v_2,v_q,v_2,v_p\right) + \Lambda_3^p\Lambda_2^q R\left(v_2,v_3,v_q,v_p\right) + \Lambda_3^p\Lambda_p^q R\left(v_2,v_3,v_2,v_q\right) \\ A_{17} = -2\sum_{p,q=1}^n \Lambda_1^p\Lambda_p^q R\left(v_q,v_2,v_3,v_4\right) - 2\Lambda_1^p\Lambda_2^q R\left(v_p,v_q,v_3,v_4\right) - 2\Lambda_1^p\Lambda_3^q R\left(v_p,v_2,v_q,v_4\right) - 2\Lambda_1^p\Lambda_4^q R\left(v_p,v_2,v_3,v_q\right) \\ A_{18} = -2\sum_{p,q=1}^n \Lambda_2^p\Lambda_1^q R\left(v_q,v_p,v_3,v_4\right) - 2\Lambda_2^p\Lambda_p^q R\left(v_1,v_q,v_3,v_4\right) - 2\Lambda_2^p\Lambda_3^q R\left(v_1,v_p,v_q,v_4\right) - 2\Lambda_2^p\Lambda_4^q R\left(v_1,v_p,v_3,v_q\right) \\ A_{19} = -2\sum_{p,q=1}^n \Lambda_3^p\Lambda_1^q R\left(v_q,v_2,v_p,v_4\right) - 2\Lambda_3^p\Lambda_2^q R\left(v_1,v_q,v_p,v_4\right) - 2\Lambda_3^p\Lambda_p^q R\left(v_1,v_2,v_q,v_4\right) - 2\Lambda_3^p\Lambda_4^q R\left(v_1,v_2,v_p,v_q\right) \\ A_{20} = -2\sum_{p,q=1}^n \Lambda_4^p\Lambda_1^q R\left(v_q,v_2,v_3,v_p\right) - 2\Lambda_4^p\Lambda_2^q R\left(v_1,v_q,v_3,v_p\right) - 2\Lambda_4^p\Lambda_3^q R\left(v_1,v_2,v_q,v_p\right) - 2\Lambda_4^p\Lambda_4^q R\left(v_1,v_2,v_3,v_q\right) \end{cases}.$$

Usando que $v_i(0) = e_i$, vemos que as letras $A_1, ..., A_7$, em $s = 0$, denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} A_1 = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_1^p\Lambda_p^q R_{q313} + \Lambda_1^p\Lambda_3^q R_{pq13} + \Lambda_1^p\Lambda_1^q R_{p3q3} + \Lambda_1^p\Lambda_3^q R_{p31q} \\ A_2 = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_3^p\Lambda_1^q R_{qp13} + \Lambda_3^p\Lambda_p^q R_{1q13} + \Lambda_3^p\Lambda_1^q R_{1pq3} + \Lambda_3^p\Lambda_3^q R_{1p1q} \\ A_3 = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_1^p\Lambda_1^q R_{q3p3} + \Lambda_1^p\Lambda_3^q R_{1qp3} + \Lambda_1^p\Lambda_p^q R_{13q3} + \Lambda_1^p\Lambda_3^q R_{13pq} \\ A_4 = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_3^p\Lambda_1^q R_{q31p} + \Lambda_3^p\Lambda_3^q R_{1q1p} + \Lambda_3^p\Lambda_1^q R_{13qp} + \Lambda_3^p\Lambda_p^q R_{131q} \\ A_5 = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_2^p\Lambda_p^q R_{q424} + \Lambda_2^p\Lambda_4^q R_{pq24} + \Lambda_2^p\Lambda_2^q R_{p4q4} + \Lambda_2^p\Lambda_4^q R_{p42q} \\ A_6 = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_4^p\Lambda_2^q R_{qp24} + \Lambda_4^p\Lambda_p^q R_{2q24} + \Lambda_4^p\Lambda_2^q R_{2pq4} + \Lambda_4^p\Lambda_4^q R_{2p2q} \\ A_7 = \sum_{p,q=1}^n \Lambda_2^p\Lambda_2^q R_{q4p4} + \Lambda_2^p\Lambda_4^q R_{2qp4} + \Lambda_2^p\Lambda_p^q R_{24q4} + \Lambda_2^p\Lambda_4^q R_{24pq} \end{cases},$$

as letras $A_8, ..., A_{14}$, em $s = 0$, denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} A_8 = \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p \Lambda_2^q R_{q42p} + \Lambda_4^p \Lambda_4^q R_{2q2p} + \Lambda_4^p \Lambda_2^q R_{24qp} + \Lambda_4^p \Lambda_p^q R_{242q} \\ A_9 = \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p \Lambda_p^q R_{q414} + \Lambda_1^p \Lambda_4^q R_{pq14} + \Lambda_1^p \Lambda_1^q R_{p4q4} + \Lambda_1^p \Lambda_4^q R_{p41q} \\ A_{10} = \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p \Lambda_1^q R_{qp14} + \Lambda_4^p \Lambda_p^q R_{1q14} + \Lambda_4^p \Lambda_1^q R_{1pq4} + \Lambda_4^p \Lambda_4^q R_{1p1q} \\ A_{11} = \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p \Lambda_1^q R_{q4p4} + \Lambda_1^p \Lambda_4^q R_{1qp4} + \Lambda_1^p \Lambda_p^q R_{14q4} + \Lambda_1^p \Lambda_4^q R_{14pq} \\ A_{12} = \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p \Lambda_1^q R_{q41p} + \Lambda_4^p \Lambda_4^q R_{1q1p} + \Lambda_4^p \Lambda_1^q R_{14qp} + \Lambda_4^p \Lambda_p^q R_{141q} \\ A_{13} = \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p \Lambda_p^q R_{q323} + \Lambda_2^p \Lambda_3^q R_{pq23} + \Lambda_2^p \Lambda_2^q R_{p3q3} + \Lambda_2^p \Lambda_3^q R_{p32q} \\ A_{14} = \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p \Lambda_2^q R_{qp23} + \Lambda_3^p \Lambda_p^q R_{2q23} + \Lambda_3^p \Lambda_2^q R_{2pq3} + \Lambda_3^p \Lambda_3^q R_{2p2q} \end{cases},$$

e as letras $A_{15}, ..., A_{20}$, em $s = 0$, denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} A_{15} = \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p \Lambda_2^q R_{q3p3} + \Lambda_2^p \Lambda_3^q R_{2qp3} + \Lambda_2^p \Lambda_p^q R_{23q3} + \Lambda_2^p \Lambda_3^q R_{23pq} \\ A_{16} = \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p \Lambda_2^q R_{q32p} + \Lambda_3^p \Lambda_3^q R_{2q2p} + \Lambda_3^p \Lambda_2^q R_{23qp} + \Lambda_3^p \Lambda_p^q R_{232q} \\ A_{17} = -2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p \Lambda_p^q R_{q234} - 2\Lambda_1^p \Lambda_2^q R_{pq34} - 2\Lambda_1^p \Lambda_3^q R_{p2q4} - 2\Lambda_1^p \Lambda_4^q R_{p23q} \\ A_{18} = -2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p \Lambda_1^q R_{qp34} - 2\Lambda_2^p \Lambda_p^q R_{1q34} - 2\Lambda_2^p \Lambda_3^q R_{1pq4} - 2\Lambda_2^p \Lambda_4^q R_{1p3q} \\ A_{19} = -2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p \Lambda_1^q R_{q2p4} - 2\Lambda_3^p \Lambda_2^q R_{1qp4} - 2\Lambda_3^p \Lambda_p^q R_{12q4} - 2\Lambda_3^p \Lambda_4^q R_{12pq} \\ A_{20} = -2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p \Lambda_1^q R_{q23p} - 2\Lambda_4^p \Lambda_2^q R_{1q3p} - 2\Lambda_4^p \Lambda_3^q R_{12qp} - 2\Lambda_4^p \Lambda_4^q R_{123q} \end{cases}.$$

Agrupando os termos adequadamente, vemos que

$$\frac{d^2 Z}{ds^2}_{|s=0} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7 + B_8 + B_9 + B_{10},$$

em que as letras $B_1, ..., B_5$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} B_1 = 2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p \Lambda_1^q \left(R_{p3q3} + R_{q4p4}\right) + 2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p \Lambda_2^q \left(R_{p4q4} + R_{p3q3}\right) \\ B_2 = 2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p \Lambda_3^q \left(R_{1q1p} + R_{2q2p}\right) + 2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p \Lambda_4^q \left(R_{2q2p} + R_{1p1q} - R_{123q}\right) \\ B_3 = 2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p \Lambda_3^q \left(R_{pq13} + R_{1qp3} - R_{p2q4}\right) + 2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p \Lambda_1^q \left(R_{13qp} + R_{1pq3} - R_{q2p4}\right) \\ B_4 = 2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p \Lambda_4^q \left(R_{24pq} + R_{2qp4}\right) + 2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p \Lambda_2^q \left(R_{24qp} + R_{q42p} - R_{1q3p}\right) \\ B_5 = 2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p \Lambda_4^q \left(R_{14pq} + R_{1qp4} - R_{p23q}\right) + 2 \sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p \Lambda_1^q \left(R_{14qp} + R_{q41p} - R_{q23p}\right) \end{cases}$$

e as letras $B_6, ..., B_{10}$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} B_6 = 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p\Lambda_3^q\left(R_{23pq} + R_{2qp3} - R_{1pq4}\right) + 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_2^q\left(R_{23qp} + R_{q32p} - R_{1qp4}\right) \\ B_7 = 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p\Lambda_p^q\left(R_{13q3} + R_{14q4} - R_{q234}\right) + 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p\Lambda_p^q\left(R_{24q4} + R_{23q3} - R_{1q34}\right) \\ B_8 = 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_p^q\left(R_{131q} + R_{232q} - R_{12q4}\right) + 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p\Lambda_p^q\left(R_{242q} + R_{141q}\right) \\ B_9 = -2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p\Lambda_2^q R_{pq34} - 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p\Lambda_1^q R_{qp34} \\ B_{10} = -2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p\Lambda_4^q R_{1p3q} - 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_4^q R_{12pq} - 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p\Lambda_3^q R_{12qp} \end{cases}$$

Trocando as variáveis $p \leftrightarrow q$ podemos agrupar alguns termos e concluir que

$$\frac{d^2Z}{ds^2}_{|s=0} = B_1' + B_2' + B_3' + B_4' + B_5' + B_6' + B_7',$$

em que as letras $B_1', ..., B_7'$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} B_1' = 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p\Lambda_1^q\left(R_{p3q3} + R_{q4p4}\right) + 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p\Lambda_2^q\left(R_{p4q4} + R_{p3q3}\right) \\ B_2' = 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_3^q\left(R_{1q1p} + R_{2q2p}\right) + 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p\Lambda_4^q\left(R_{2q2p} + R_{1p1q} - R_{123q}\right) \\ B_3' = 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_1^q\left(R_{13qp} + R_{1pq3} - R_{q2p4}\right) + 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p\Lambda_2^q\left(R_{24qp} + R_{q42p} - R_{1q3p}\right) \\ B_4' = 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p\Lambda_1^q\left(R_{14qp} + R_{q41p} - R_{q23p}\right) + 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_2^q\left(R_{23qp} + R_{q32p} - R_{1qp4}\right) \\ B_5' = 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p\Lambda_p^q\left(R_{13q3} + R_{14q4} - R_{q234}\right) + 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p\Lambda_p^q\left(R_{24q4} + R_{23q3} - R_{1q34}\right) \\ B_6' = 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_p^q\left(R_{131q} + R_{232q} - R_{12q4}\right) + 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p\Lambda_p^q\left(R_{242q} + R_{141q}\right) \\ B_7' = -4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p\Lambda_2^q R_{pq34} - 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_4^q R_{12pq} \end{cases}$$

Façamos a seguinte identificação:

$$\begin{aligned} a_{pq} &= R_{1p1q} + R_{2p2q} \quad , \quad b_{pq} = R_{3p3q} + R_{4p4q} \\ c_{pq} &= R_{3p1q} + R_{4p2q} \quad , \quad d_{pq} = R_{4p1q} - R_{3p2q} \\ e_{pq} &= R_{12pq} \quad , \quad f_{pq} = R_{34pq} \end{aligned} \tag{10.11}$$

Com essa identificação e utilizando as igualdades em (10.9), podemos escrever a segunda derivada de Z da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2Z}{ds^2}_{|s=0} &= 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq}\\
&+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_1^q\left(R_{13qp}+R_{1pq3}-R_{q2p4}\right) + 4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_2^q\left(R_{24qp}+R_{q42p}-R_{1q3p}\right)\\
&+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_1^q\left(R_{14qp}+R_{q41p}-R_{q23p}\right) + 4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_2^q\left(R_{23qp}+R_{q32p}-R_{1qp4}\right)\\
&+2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_p^q 0 + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_2^p\Lambda_p^q 0 + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_p^q 0 + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_p^q 0\\
&-4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq} - 4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq}.
\end{aligned}$$

Excluindo os termos que valem zero, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2Z}{ds^2}_{|s=0} &= 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq}\\
&+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_1^q\left(R_{13qp}+R_{1pq3}-R_{q2p4}\right) + 4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_2^q\left(R_{24qp}+R_{q42p}-R_{1q3p}\right)\\
&+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_1^q\left(R_{14qp}+R_{q41p}-R_{q23p}\right) + 4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_2^q\left(R_{23qp}+R_{q32p}-R_{1qp4}\right)\\
&-4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq} - 4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq}.
\end{aligned}$$

Além disso, pela primeira identidade de Bianchi concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2Z}{ds^2}_{|s=0} &= 4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_2^q\left(\left[R_{3p2q}+R_{4p1q}\right]-2R_{3q2p}\right) + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq}\\
&+2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq} - 4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq} - 4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq}.
\end{aligned}$$

Note que se fizermos a mudança $\{e_i\}_{i=1}^4 \to \{\widetilde{e_1}=e_2, \widetilde{e_2}=-e_1, \widetilde{e_3}=e_4, \widetilde{e_4}=-e_3\}$, os coeficientes a_{pq}, b_{pq}, e_{pq} e f_{pq} permanecem invariantes. De fato, se denotarmos $R\left(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j,\widetilde{e}_k,\widetilde{e}_l\right)$ por $\widetilde{R}_{ijkl}$ sendo seus respectivos coeficientes denotados por $\widetilde{a}_{pq}, \widetilde{b}_{pq}, \widetilde{e}_{pq}$ e $\widetilde{f}_{pq}$, e usando as simetrias da curvatura riemanniana, segue que

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{pq} = \widetilde{R}_{1p1q} + \widetilde{R}_{2p2q} = R_{2p2q} + R_{(-1)p(-1)q} = R_{2p2q} + R_{1p1q} = a_{pq} \\ \widetilde{b}_{pq} = \widetilde{R}_{3p3q} + \widetilde{R}_{4p4q} = R_{4p4q} + R_{(-3)p(-3)q} = R_{4p4q} + R_{3p3q} = b_{pq} \\ \widetilde{c}_{pq} = \widetilde{R}_{3p1q} + \widetilde{R}_{4p2q} = R_{4p2q} + R_{(-3)p(-1)q} = R_{4p2q} + R_{3p1q} = c_{pq} \\ \widetilde{d}_{pq} = \widetilde{R}_{4p1q} - \widetilde{R}_{3p2q} = \widetilde{R}_{(-3)p2q} - \widetilde{R}_{4p(-1)q} = -\widetilde{R}_{3p2q} + \widetilde{R}_{4p1q} = d_{pq} \\ \widetilde{e}_{pq} = \widetilde{R}_{12pq} = R_{2(-1)pq} = -R_{21pq} = R_{12pq} = e_{pq} \\ \widetilde{f}_{pq} = \widetilde{R}_{34pq} = R_{4(-3)pq} = -R_{43pq} = R_{34pq} = f_{pq} \end{cases}.$$

E se denotarmos por $\mathbb{O}'(s)$ a matriz do novo referencial ortonormal, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} Z\left(\mathbb{O}'(s)\right)_{|s=0} &= 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_1^q\left([R_{4p2q} - R_{3p1q}] - 2R_{4q2p}\right) + 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p\Lambda_2^q\left([R_{3p1q} - R_{4p2q}] - 2R_{3q1p}\right) \\ &+4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p\Lambda_1^q\left([-R_{3p2q} - R_{4p1q}] + 2R_{3q2p}\right) + 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_2^q\left([-R_{4p1q} - R_{3p2q}] + 2R_{4q1p}\right) \\ &+2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq} + 2\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq} \\ &-4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq} - 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq}. \end{aligned}$$

E portanto, se denotarmos $Z\left(\mathbb{O}\left(s\right)\right)$ por $Z_{\mathbb{O}}$ e $Z\left(\mathbb{O}'\left(s\right)\right)$ por $Z_{\mathbb{O}'}$, concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}\left(Z_{\mathbb{O}} + Z_{\mathbb{O}'}\right)_{|s=0} &= \sum_{p,q=1}^{n} 4\Lambda_3^p\Lambda_1^q\left([R_{3p1q} - R_{4p2q}] - 2R_{3q1p}\right) + 4\Lambda_4^p\Lambda_2^q\left([R_{4p2q} - R_{3p1q}] - 2R_{4q2p}\right) \\ &+ \sum_{p,q=1}^{n} 4\Lambda_4^p\Lambda_1^q\left([R_{4p1q} + R_{3p2q}] - 2R_{4q1p}\right) \\ &+ \sum_{p,q=1}^{n} 4\Lambda_3^p\Lambda_2^q\left([R_{3p2q} + R_{4p1q}] - 2R_{3q2p}\right) + 2\Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq} + 2\Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq} + 2\Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq} + 2\Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq} \\ &-4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq} - 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq} + 4\sum_{p,q=1}^{n} \Lambda_3^p\Lambda_1^q\left([R_{4p2q} - R_{3p1q}] - 2R_{4q2p}\right) \\ &+ \sum_{p,q=1}^{n} 4\Lambda_4^p\Lambda_2^q\left([R_{3p1q} - R_{4p2q}] - 2R_{3q1p}\right) + 4\Lambda_4^p\Lambda_1^q\left([-R_{3p2q} - R_{4p1q}] + 2R_{3q2p}\right) \\ &+ \sum_{p,q=1}^{n} 4\Lambda_3^p\Lambda_2^q\left([-R_{4p1q} - R_{3p2q}] + 2R_{4q1p}\right) \\ &+ \sum_{p,q=1}^{n} 2\Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq} + 2\Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq} + 2\Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq} + 2\Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq} - 4\Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq} - 4\Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq}. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos e utilizando as identificações feitas em (10.11), vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\left(Z_{\mathbb{O}}+Z_{\mathbb{O}'}\right)_{|s=0} \;=\;& 4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_1^q\left([R_{3p1q}-R_{4p2q}]-2R_{3q1p}\right)+\Lambda_3^p\Lambda_1^q\left([R_{4p2q}-R_{3p1q}]-2R_{4q2p}\right)\\
&+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_2^q\left([R_{4p2q}-R_{3p1q}]-2R_{4q2p}\right)+\Lambda_4^p\Lambda_2^q\left([R_{3p1q}-R_{4p2q}]-2R_{3q1p}\right)\\
&+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_1^q\left([R_{4p1q}+R_{3p2q}]-2R_{4q1p}\right)+\Lambda_4^p\Lambda_1^q\left([-R_{3p2q}-R_{4p1q}]+2R_{3q2p}\right)\\
&+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_2^q\left([R_{3p2q}+R_{4p1q}]-2R_{3q2p}\right)+\Lambda_3^p\Lambda_2^q\left([-R_{4p1q}-R_{3p2q}]+2R_{4q1p}\right)\\
&+2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq}+\Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq}+\Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq}+\Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq}\\
&+2\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq}+\Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq}+\Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq}+\Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq}\\
&-4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq}+\Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq}+\Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq}+\Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq}.
\end{aligned}$$

Juntando os termos adequadamente, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\left(Z_{\mathbb{O}}+Z_{\mathbb{O}'}\right)_{|s=0} \;=\;& -8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_1^q R_{3q1p}-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_1^q R_{4q2p}-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_2^q R_{4q2p}-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_2^q R_{3q1p}\\
&-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_1^q R_{4q1p}+8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_1^q R_{3q2p}-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_2^q R_{3q2p}+8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_2^q R_{4q1p}\\
&+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq}+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq}+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq}+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq}\\
&-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq}-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq}.
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\left(Z_{\mathbb{O}}+Z_{\mathbb{O}'}\right)_{|s=0} \;=\;& -8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_1^q\left(R_{3q1p}+R_{4q2p}\right)+\Lambda_4^p\Lambda_2^q\left(R_{4q2p}+R_{3q1p}\right)+\Lambda_4^p\Lambda_1^q\left(R_{4q1p}-R_{3q2p}\right)\\
&-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_2^q\left(R_{3q2p}-R_{4q1p}\right)+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq}+\Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq}+\Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq}\\
&+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq}-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq}+\Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq}.
\end{aligned}$$

Por fim, segue das identificações feitas em (10.11) que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\left(Z_{\mathbb{O}}+Z_{\mathbb{O}'}\right)_{|s=0} \quad = \quad & -8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_1^q c_{pq}-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_2^q c_{pq}-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_1^q d_{pq}+8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_2^q d_{pq}\\
&+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_1^q b_{pq}+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_2^p\Lambda_2^q b_{pq}+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_3^q a_{pq}+4\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_4^p\Lambda_4^q a_{pq}\\
&-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_1^p\Lambda_2^q f_{pq}-8\sum_{p,q=1}^{n}\Lambda_3^p\Lambda_4^q e_{pq}.
\end{aligned}
$$

Esta é uma expressão muito mais simples, envolvendo apenas $a_{pq}, b_{pq}, c_{pq}, d_{pq}, e_{pq}$ e f_{pq}. Mais ainda, já que $Z\left(\mathbb{O}\left(0\right)\right)=Z\left(\mathbb{O}'\left(0\right)\right)=0$ e $Z\left(\mathbb{O}\left(s\right)\right)\geq 0$, para todo $\mathbb{O}$, segue que a soma

$$
\frac{d^2}{ds^2}\left(Z\left(\mathbb{O}\left(s\right)\right)\right)_{|s=0}+\frac{d^2}{ds^2}\left(Z\left(\mathbb{O}'\left(s\right)\right)\right)_{|s=0}
$$

é positiva semi-definida por construção. Notemos que

$$
L=\frac{d^2}{ds^2}\left(Z\left(\mathbb{O}\left(s\right)\right)+Z\left(\mathbb{O}'\left(s\right)\right)\right)_{|s=0}=2\Lambda_v\begin{pmatrix} B & -F & -C & -D\\ F & B & D & -C\\ -C^T & D^T & A & -E\\ -D^T & -C^T & E & A\end{pmatrix}\Lambda_v^T,
$$

onde as letras maiúsculas são dadas pelas seguintes expressões:

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ d_{n1} & \cdots & d_{nn}\end{pmatrix}\\
E &= \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ e_{n1} & \cdots & e_{nn}\end{pmatrix} \quad , \quad F=\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{n1} & \cdots & f_{nn}\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

e a letra Λ_v é dada por

$$
\Lambda_v=\left(\Lambda_1^1,\Lambda_1^2,...,\Lambda_2^1,\Lambda_2^2,...,\Lambda_n^1,\Lambda_n^2,...,\Lambda_n^n\right),
$$

ou seja, a matriz

$$L = 2\begin{pmatrix} B & -F & -C & -D \\ F & B & D & -C \\ -C^T & D^T & A & -E \\ -D^T & -C^T & E & A \end{pmatrix}$$

é positiva semi-definida. Notemos que

$$e_{pq} = R_{12pq} = -R_{12qp} = -e_{qp} \qquad \text{e} \qquad f_{pq} = R_{34pq} = -R_{34qp} = -f_{qp},$$

ou seja, $E^T = -E$ e $F^T = -F$. Com isso vemos que a matriz L é simétrica. Definindo a matriz

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a conjulgação de L por U é dada por

$$\begin{aligned} ULU^{-1} &= ULU^T = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & -F & -C & -D \\ F & B & D & -C \\ -C^T & D^T & A & -E \\ -D^T & -C^T & E & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} A & E & C^T & D^T \\ -E & A & -D^T & C^T \\ C & -D & B & F \\ D & C & -F & B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nesse caso, a propriedade de ser positiva semi-definida nos garante que

$$0 \leq \frac{Tr\left(L\left(ULU^{-1}\right)\right)}{16} = \frac{1}{16}Tr\left(4\begin{pmatrix} B & -F & -C & -D \\ F & B & D & -C \\ -C^T & D^T & A & -E \\ -D^T & -C^T & E & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & E & C^T & D^T \\ -E & A & -D^T & C^T \\ C & -D & B & F \\ D & C & -F & B \end{pmatrix}\right) = \frac{Tr\left(4\xi_{ij}\right)}{16},$$

em que as letras gregas $\xi_{11},...,\xi_{14},\xi_{21},...,\xi_{24}$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} \xi_{11} = FE - D^2 + AB - C^2 \\ \xi_{12} = BE - AF \\ \xi_{13} = FD + BC^T + FD^T - BC \\ \xi_{14} = -\left(BD + C^T F - BD^T + CF\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_{21} = -BE + AF \\ \xi_{22} = FE - D^2 + AB - C^2 \\ \xi_{23} = BD + C^T F - BD^T + CF \\ \xi_{24} = FD + BC^T + FD^T - BC \end{cases}$$

e as letras $\xi_{31},...,\xi_{34},\xi_{41},...,\xi_{44}$ denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases} \xi_{31} = -DE - AC^T - D^T E + AC \\ \xi_{32} = -\left(AD + CE - AD^T + C^T E\right) \\ \xi_{33} = FE - \left(C^T\right)^2 - \left(D^T\right)^2 + AB \\ \xi_{34} = -BE + AF \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_{41} = AD + CE - AD^T + C^T E \\ \xi_{42} = -DE - AC^T - D^T E + AC \\ \xi_{43} = BE - AF \\ \xi_{44} = FE - \left(C^T\right)^2 - \left(D^T\right)^2 + AB \end{cases}.$$

Tomando o traço e usando sua linearidade, vemos que

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \frac{1}{4}\left\{TrFE - TrD^2 + TrAB - TrC^2 + TrFE - TrD^2 + TrAB - TrC^2\right\} \\ &\quad + \frac{1}{4}\left\{TrFE - Tr\left(C^T\right)^2 - Tr\left(D^T\right)^2 + TrAB + TrFE - Tr\left(C^T\right)^2 - Tr\left(D^T\right)^2 + TrAB\right\} \\ &= \quad TrFE + TrAB - TrC^2 - TrD^2 \\ &= \quad \sum_{j,k=5}^{n} a_{jk}b_{kj} + \sum_{j,k=5}^{n} e_{jk}f_{kj} - \sum_{j,k=5}^{n} c_{jk}c_{kj} - \sum_{j,k=5}^{n} d_{jk}d_{kj} \\ &= \quad \sum_{j,k=5}^{n} a_{jk}b_{kj} - \sum_{j,k=5}^{n} \left(e_{jk}f_{jk} + c_{jk}c_{kj} + d_{jk}d_{kj}\right), \end{aligned}$$

portanto temos que

$$\sum_{j,k=5}^{n} a_{jk}b_{kj} - \sum_{j,k=5}^{n} \left(e_{jk}f_{jk} + c_{jk}c_{kj} + d_{jk}d_{kj}\right) \geq 0$$

e isso demonstra a Afirmação 10.1.1. O Teorema 10.1 segue diretamente do Princípio do Máximo.

Finalizaremos o Capítulo com um resultado que relaciona os cones C_{PCSC} e $\widehat{C}_{PIC_k}$ para uma determinada dimensão:

Proposição 10.2 *Se $k = 2$, então os cones C_{PCSC} e $\widehat{C}_{PIC_k}$ são iguais, isto é,*

$$C_{PCSC} = \widehat{C}_{PIC_2}$$

Demonstração. Dado $R \in C_{PCSC}$ e dados $X, Y \in A_k$, sejam $\widehat{X}, \widehat{Y}$ extensões de X e Y, respectivamente, para $M \times \mathbb{R}^k$ tal que $\widehat{X} \cdot \widehat{X} = \widehat{X} \cdot \widehat{Y} = \widehat{Y} \cdot \widehat{Y} = 0$, segue que

$$0 \leq R\left(X, Y, \overline{X}, \overline{Y}\right) = R\left(\pi_k\left(\widehat{X}\right), \pi_k\left(Y\right), \pi_k\left(\overline{\widehat{X}}\right), \pi_k\left(\overline{\widehat{X}}\right)\right) = \widetilde{R}_k\left(\widehat{X}, \widehat{Y}, \overline{\widehat{X}}, \overline{\widehat{X}}\right),$$

ou seja, $R \in \widehat{C}_{PIC_k}$. Para provar a volta é suficiente mostrar que dados $Z, W \in \mathbb{C}^n$ linearmente independentes, existem extensões $\widetilde{Z}, \widetilde{W}$ em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2$ tal que o 2-plano complexo que eles geram é totalmente isotrópico e

$$K_M\left(Z, W\right) = K_{M \times \mathbb{R}^2}\left(\widetilde{Z}, \widetilde{W}.\right) \tag{10.12}$$

Para mostrar isso, sejam

$$\begin{cases} \widetilde{Z} := Z + ue_1 + ve_2 \\ \widetilde{W} := W + xe_1 + ye_2 \end{cases}$$

tais que geram um plano totalmente isotrópico. Como $\mathbb{R}^2$ é flat é imediata a igualdade das curvaturas seccionais na expressão (10.12). Precisamos apenas encontrar $u, v, x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\widetilde{Z} \cdot \widetilde{Z} = \widetilde{Z} \cdot \widetilde{W} = \widetilde{W} \cdot \widetilde{W} = 0$. Expandindo o produto, vemos que

$$\begin{cases} \widetilde{Z} \cdot \widetilde{Z} = Z \cdot Z + u^2 + v^2 = 0 \\ \widetilde{Z} \cdot \widetilde{W} = Z \cdot W + ux + vy = 0 \\ \widetilde{W} \cdot \widetilde{W} = W \cdot W + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

ou em termos matriciais:

$$\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & x \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z \cdot Z & -Z \cdot W \\ -Z \cdot W & -W \cdot W \end{pmatrix}.$$

Esta equação matricial pode ser resolvida, já que a matriz do lado direito da igualdade pode ser diagonalizada pois é simétrica. ■

Capítulo 11

O Teorema da Esfera Suave

Uma das questões sobre a relação entre curvatura e topologia é o problema de classificar variedades riemannianas completas com curvatura seccional constante. Em 1925, Heinz Hopf estudou as propriedades globais de tais variedades e provou, em sua dissertação de doutorado, o seguinte:

Teorema 11.1 (de Hopf) *Seja M^n uma variedade riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional, K, constante. Logo,*

1. *Se $K = 0$, então M^n é isométrico ao $\mathbb{R}^n$;*
2. *Se $K > 0$, então M^n é isométrico ao $\mathbb{S}^n$;*
3. *Se $K < 0$, então M^n é isométrico ao $\mathbb{H}^n$.*

Agora possuímos todos os ingredientes necessários para a demonstração do Teorema da Esfera Suave:

Teorema 11.2 (Teorema da Esfera Suave) *Uma variedade riemanniana compacta, completa e simplesmente conexa de dimensão $n \geq 4$ e com "condição 1/4", isto é, cuja curvatura seccional K satisfaz*

$$\frac{1}{4}K_{\max} < K \leq K_{\max},$$

é difeomorfa a um espaço esférico.

Observação 11.1 *De fato, vamos demonstrar um resultado mais forte, que qualquer variedade riemanniana compacta (M, g) tal que $M \times \mathbb{R}^2$ tem curvatura seccional positiva em subespaços bidimensionais totalmente isotrópicos (isto é, seu tensor de curvatura riemanniana R pertence ao cone $\widehat{C}_{PIC_2}$) é difeomorfa a um espaço esférico. Isso implica o Teorema da Esfera Suave pelo Corolário 9.1.*

Demonstração. Considere (M, g_0) uma variedade riemanniana compacta com curvaturas seccionais complexas estritamente positivas, ou seja, de modo que o tensor de curvatura riemanniana R está no interior do cone $C_{PCSC} = \widehat{C}_{PIC_2}$, para todo $p \in M$ (onde a igualdade é devida a Proposição 10.2). Seja $(M, g(t))$ a solução do fluxo de Ricci em um intervalo maximal $[0, T)$ tal que $(M, g(0)) = (M, g_0)$ (lembremos que a existência é garantida pelos resultados dos Capítulos 2 e 4). Além disso, notemos que $T < \infty$, já que o Princípio do Máximo nos dá um limitante inferior na curvatura escalar, o qual se aproxima de infinito em um tempo finito (demonstramos esse fato na Seção 3.3). Os tensores de curvatura em (M, g_0) moram em um conjunto compacto K no interior do cone C_{PCSC}. Pelos Teoremas 9.1 e 10.1, o cone C_{PCSC} é um cone preservado pelo fluxo de Ricci, que está contido no cone das curvaturas seccionais positivas e contém o cone dos operadores de curvatura não negativos (Proposição 9.1). Portanto, pelo Teorema 8.2 existe uma "família pinçada"de cones $C(s)$, $0 \leq s < 1$ com $C(0) = C_{PCSC}$, e pelo Teorema 8.3 existe um conjunto convexo fechado e preservado F contendo o compacto K, e números $\rho(s)$ tais que $F + \rho(s) I \subset C(s)$, para todo $s > 0$. Pelo Princípio do Máximo para Fibrados Vetoriais (Teorema 3.3), os tensores de curvatura em $g(t)$ moram em F, para todo $t \in [0, T)$, de fato, podemos aplicar esse princípio para os operadores de curvatura, pois sua variação sob o fluxo de Ricci é dado pela expressão (1.11), um caso particular da expressão (3.6) que é uma das hipóteses do Teorema 3.3. Agora vamos fazer o "procedimento blow-up"descrito na Seção 5.2. Como indicado no Teorema 7.3, pelo teorema de compacidade do Capítulo 5, junto com a limitação inferior do raio de injetividade do Capítulo 7 (junto com as estimativas de regularidade do Capítulo 4) existe um limite $(M_\infty, g_\infty, O_\infty)$ de uma sequência de "métricas blow-up"$g_i(t) := Q_i g\left(t_i + Q_i^{-1} t\right)$ sobre pontos O_i com $Q_i := |R|(O_i, t_i) = \sup_{M \times [0, t_i]} |R| \to \infty$ e o limite possui $|R|(x, t) \leq 1$, para todo $t \leq 0$. Portanto as curvaturas de g_i são dadas por Q_i^{-1} vezes a curvatura de g, e portanto moram no conjunto $Q_i^{-1} F$. Em uma vizinhança de O_∞ as métricas pullback $\{\Phi_i^* g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, em que $\{\Phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é a sequência de difeomorfismos da convergência de Cheeger-Gromov (para mais detalhes veja a Definição 5.4), possuem curvatura escalar limitada longe do zero, logo $R(g_\infty)$ moram na linha $\mathbb{R}^+ I$ (Esse símbolo quer dizer que a curvatura só depende do ponto e não dos campos) pela condição (3) do Teorema 8.3. O Lema de Schur (Teorema 7.4) diz que uma variedade diferenciável de dimensão maior ou igual a 3 para a qual $R(x) = \alpha(x) I$ possui $\alpha(x)$ constante, e portanto R é constante. De fato, se $\{e_i, e_j\}$ é uma base ortonormal de um 2-plano qualquer em $T_x M$, então a curvatura seccional é dada por

$$K = R_x(e_i, e_j, e_i, e_j) = \alpha(x) I(e_i, e_j, e_i, e_j) = \alpha(x) g^{\wedge}(Id \wedge Id(e_i \wedge e_j), e_i \wedge e_j) = \alpha(x),$$

o Lema de Schur nos dá o que queremos. Portanto (M_∞, g_∞) é uma variedade riemanniana completa com curvatura seccional constante positiva, logo é um espaço esférico pelo Teorema de Hopf (Teorema 11.2). Como M_∞ é compacto, a convergência é no sentido C^∞, ao invés de apenas C^∞ em subconjuntos compactos. Em particular, M é difeomorfa a um espaço esférico. ■

Apêndice A

Teoria de Fibrados

Separamos este apêndice para descrever os conceitos preliminares necessários para o desenvolvimento da teoria do fluxo de Ricci, bem como resultados que ajudam na demonstração do Teorema da Esfera Suave. Vamos partir do pressuposto de que o leitor é conhecedor da teoria de variedades diferenciáveis, do Cálculo Diferencial e da Álgebra Linear. Comecemos definindo o conceito de fibrado, o alicerce de todo conteúdo desenvolvido.

Definição A.1 (Imersão) *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Então f é dita ser uma **imersão** se sua diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é injetora.*

Definição A.2 (Submersão) *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Então f é dita ser uma **submersão** se sua diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ é sobrejetora, para todo $p \in M$.*

Com a definição de diferencial e de submersão em mãos, estamos aptos à definir um conceito extremamente útil para fazer os cálculos e desenvolver a teoria:

Definição A.3 (Fibrado) *Sejam F e M duas variedades diferenciáveis. Um **fibrado sobre** M **com fibra** F é uma variedade diferenciável E junto com uma submersão sobrejetora $\pi : E \to M$ satisfazendo a seguinte condição de trivialidade local: Para todo $p \in M$ existe um aberto $U \subset M$ e um difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ (chamada **trivialização local**) tal que $\pi = \pi_1 \circ \phi$, onde $\pi_1(x, y) := x$ é a projeção na primeira coordenada.*

A fibra em p, denotada por E_p, é o conjunto $\pi^{-1}(p)$, que é difeomorfo a F, para cada p. De fato, como $\pi^{-1}(U)$ é difeomorfo à $U \times F$, como restrição de difeomorfismo também o é, segue que $\pi^{-1}(\{p\})$ é difeomorfo a $\{p\} \times F$, que é difeomorfo a F.

Embora um fibrado E seja localmente um produto $U \times F$, isso pode não ser verdade globalmente (um exemplo disso é o chamado fibrado de Möbius). O espaço E é chamado de **espaço total**, M de **espaço de base** e π de **projeção**. Ocasionalmente nos referimos ao fibrado dizendo: "seja $\pi : E \to M$ um fibrado". Na maioria dos casos os fibrados que consideramos serão "fibrados vetoriais"em que a fibra F é um espaço vetorial e as trivializações locais induzem uma estrutura linear bem definida em E_p para cada p:

Definição A.4 (Fibrado Vetorial) *Seja M uma variedade diferenciável. Um **fibrado vetorial suave** (ou simplesmente **fibrado vetorial**) **de dimensão** k **sobre** M é um fibrado $\pi : E \to M$ com fibra $\mathbb{R}^k$, tal que*

i) *As fibras $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$ possuem uma estrutura de espaço vetorial de dimensão k;*

ii) *As trivializações locais $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ são tais que $\pi_2 \circ \phi_{|E_p} : E_p \to \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo linear, para cada $p \in U$, onde $\pi_2(x, y) := y$.*

Exemplo A.1 (Fibrado Tangente) *Seja M uma variedade diferenciável. Um dos exemplos mais importantes de fibrados vetoriais sobre M é o **fibrado tangente** TM.*

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) \ \ (ou \ v_p) : v \in T_pM\}.$$

Assim, podemos definir a aplicação $\pi : (p, u) \in TM \to p \in M$. Notemos que π é sobrejetora, já que para todo $p \in M$ vale $p = \pi(p, 0)$. Agora vamos analisar a aplicação

$$d\pi_{(p,u)} : T_{(p,u)}(TM) \to T_pM,$$

para algum $(u, p) \in TM$. Dado $v_p \in T_pM$, seja $\gamma : I \to M$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v_p$ e defina $\lambda : I \to TM$, em que $\lambda(t) = \left(\gamma(t), u_{\gamma(t)}\right)$, $u_{\gamma(t)}$ é o transporte paralelo de u_p ao longo de γ. Temos que

$$\lambda(0) = \left(\gamma(0), u_{\gamma(0)}\right) = (p, u) = u_p \qquad e \qquad \lambda'(0) = \left(\gamma'(0), D\left(u_{\gamma(t)}\right)(0)\right) = (v_p, 0) \simeq v_p$$

Por definição de diferencial, segue que

$$d\pi_{(p,u)}(v_p) = (\pi \circ \lambda)'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\left(\pi\left(\gamma(t), u_{\gamma(t)}\right)\right) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma(t) = \gamma'(0) = v_p,$$

ou seja, $d\pi_{(p,u)}$ *é sobrejetora, para todo* $(p,u) \in TM$*. Portanto,* π *é uma submersão. Além disso, dado* $p \in M$ *seja* (U,φ) *uma carta em* M *tal que* $p \in U$*. Defina a aplicação* $\phi : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U) = TU$*, onde* $\phi(p,\alpha_1,...,\alpha_n) = (p, \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i) \in TU$*. Vamos mostrar que* ϕ *é um difeomorfismo. De fato, se* $\phi(p,\alpha_1,...,\alpha_n) = \phi(q,\beta_1,...,\beta_n)$*, então*

$$\begin{aligned} \left(p, \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i\right) &= \left(q, \sum_{i=1}^n \beta_i \partial_i\right) \Rightarrow p = q \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i &= \sum_{i=1}^n \beta_i \partial_i \Rightarrow \alpha_i = \beta_i, \text{ para todo } i = 1,...,n, \end{aligned}$$

onde foi usado a unicidade dos escalares. Ou seja, ϕ *é injetora. Dado* $(p,v) \in TU$*, segue que* $v = \sum_{i=1}^n v_i \partial_i$*, ou seja, temos que*

$$(p,v) = \phi(p,v_1,...,v_n),$$

isto é, ϕ *é uma bijeção. Como* ϕ *e* ϕ^{-1} *são suaves, temos um difeomorfismo. Note também que*

$$\pi_1(\phi(p,\alpha_1,...,\alpha_n)) = \pi_1\left(\left(p, \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i\right)\right) = p = \pi(p,\alpha_1,...,\alpha_n).$$

Mais ainda, já vimos que $\pi^{-1}(\{p\}) = T_pM$ *é um espaço vetorial de dimensão* n*. E se nos restringirmos à* T_pM*, segue que*

$$\left(\pi_2 \circ \phi_{|T_pM}\right)(\alpha_1,...,\alpha_n) = \pi_2\left(p, \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i \in T_pM.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \left(\pi_2 \circ \phi_{|T_pM}\right)(j(\alpha_1,...,\alpha_n) + k(\beta_1,...,\beta_n)) &= \left(\pi_2 \circ \phi_{|T_pM}\right)(j\alpha_1 + k\beta_1,...,j\alpha_n + k\beta_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (j\alpha_i + k\beta_i)\partial_i \\ &= j\sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i + k\sum_{i=1}^n \beta_i \partial_i \\ &= j\left(\pi_2 \circ \phi_{|T_pM}\right)(\alpha_1,...,\alpha_n) + k\left(\pi_2 \circ \phi_{|T_pM}\right)(\beta_1,...,\beta_n). \end{aligned}$$

Se $\left(\pi_2 \circ \phi_{|T_pM}\right)(\alpha_1,...,\alpha_n) = \left(\pi_2 \circ \phi_{|T_pM}\right)(\beta_1,...,\beta_n)$*, então* $\sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \partial_i$ *é por unicidade dos escalares em uma base, segue que* $(\alpha_1,...,\alpha_n) = (\beta_1,...,\beta_n)$*. A igualdade das dimensões e o teorema do núcleo e da imagem garantem que* $\pi_2 \circ \phi_{|T_pM}$ *é um isomorfismo entre* $\mathbb{R}^n$ *e* T_pM*.*

Definição A.5 (Pushforward) *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e $f : M \to N$ uma aplicação suave. A aplicação*

$$f_* : (p, v) \in TM \to (f(p), df_p.v) \in TN$$

*é denominada **pushforward** de f.*

Vamos definir agora uma generalização de campos vetoriais em um fibrado qualquer:

Definição A.6 (Seções de Fibrados) *Uma **seção** de um fibrado $\pi : E \to M$ é uma aplicação suave $X : M \to E$, tal que $\pi \circ X = Id_M : M \to M$, ou seja, $(\pi \circ X)(p) = p$, para todo $p \in M$. Em alguns momentos usaremos a notação X_p ao invés de $X(p)$. Denotaremos por $\Gamma(E)$ o conjunto de todas as seções suaves de E.*

Se E é um fibrado vetorial, então $\Gamma(E)$ é um espaço vetorial real. De fato, sejam as operações

$$\begin{aligned} (X+Y)(p) &:= X(p) + Y(p), \\ (\lambda X)(p) &= \lambda X(p), \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \Gamma(E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, onde a soma e a multiplicação no lado direito das igualdades é com relação a soma e a multiplicação no espaço vetorial E_p. Como E_p é espaço vetorial real, estas operações tornam $\Gamma(E)$ automaticamente um espaço vetorial real.

É comum resolvermos problemas trabalhando apenas com uma base de determinado espaço vetorial. Isso motiva a seguinte definição:

Definição A.7 (Referencial Local) *Um **referencial local** para um fibrado vetorial E de dimensão k é uma k-upla $\{\xi_1, ..., \xi_k\}$ de seções de E que são pontualmente L.I's. em algum aberto $U \subset M$, isto é, $\{\xi_1, ..., \xi_k\} \subset \Gamma(E_{|U})$ um subconjunto L.I.*

Dado um referencial local, toda seção α de E (dimensão k) sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}$ pode ser escrita como $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i \xi_i$, onde $\{\xi_1, ..., \xi_k\}$ é um referencial local em E. De fato, para cada $p \in U$, $\alpha(p) \in E_p$, que é um espaço vetorial de dimensão k, com uma base $\{\xi_1(p), ..., \xi_k(p)\}$, segue que existem escalares $\alpha^i(p)$, $i = 1, ..., k$ tais que

$$\alpha(p) = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i(p)\, \xi_i(p) \in E_p$$

Como os campos em M, uma seção $\alpha \in \Gamma\left(E_{|U}\right)$ é suave se e somente se cada componente $\alpha^i : U \subset M \to \mathbb{R}$ é suave.

Como $C^\infty(M)$, com as operações usuais de soma e multipicação de funções, é um anel, segue que $\Gamma(E)$ é um módulo sobre $C^\infty(M)$, a multiplicação é definida por

$$(fX)(p) := f(p)X(p),$$

para todo $f \in C^\infty(M)$, $X \in \Gamma(E)$ e todo $p \in M$. Este resultado sai diretamente do fato de $\mathbb{R}$ ser um corpo e da definição da operação acima.

Definição A.8 (Campos Vetoriais) *Seja M uma variedade diferenciável. As seções suaves de TM serão chamadas de* ***campos vetoriais*** *(ou simplesmente campos) e o espaço vetorial dos campos vetoriais de M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$, ou seja, $\mathfrak{X}(M) := \Gamma(TM)$.*

Subfibrados

Há subconjuntos de fibrados vetoriais que também são fibrados. Veremos um exemplo muito importante desse caso: Os "(2,0)-tensores simétricos", um subconjunto dos "(2,0)-tensores". Comecemos definindo melhor esse conceito:

Definição A.9 (Subfibrado) *Seja M uma variedade diferenciável. Para um fibrado vetorial E, um* ***subfibrado*** *de E é um fibrado vetorial E' sobre M com um homomorfismo injetor de fibrados vetoriais $i : E' \to E$ tal que $\pi_E \circ i = \pi_{E'}$, onde π_E e $\pi_{E'}$ são as submersões sobrejetivas de E e E', respectivamente, em M.*

Notemos que $i : E' \to E$ ser um homomorfismo injetor de fibrados vetoriais significa que i é injetora e

$$i(\alpha x + \beta y) = \alpha i(x) + \beta i(y),$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in E'_p$, $p \in M$.

Se retirarmos a condição "vetorial"dos fibrados, então retirando a condição "homomorfismo"de i, temos uma definição de subfibrados para fibrados quaisquer.

A ideia essencial de um subfibrado de um fibrado vetorial E é sua visão como uma família de subespaços E'_p das fibras E_p que variam suavemente em p. Contudo, é conveniente distinguir seções de um subfibrado das seções do fibrado vetorial maior, e é por isso que utilizamos a definição acima. Podemos pensar a aplicação i como simplesmente a inclusão de E' em E.

Exemplo A.2 (Fibrado Pull-Back) *Seja $f : M \to N$ uma imersão suave entre duas variedades diferenciáveis. A aplicação pushforward $f_* : TM \to TN$ nos permite definir o conjunto*

$$f^*(TN) := \bigsqcup_{p \in M} T_{f(p)}N = \left\{(p, w) : w \in T_{f(p)}N\right\},$$

e o fibrado

$$\pi_{f^*(TN)} : (p, w) \in f^*(TN) \to p \in M.$$

A aplicação f induz a aplicação entre fibrados

$$i : (p, v) \in TM \to (p, df_p.v) \in f^*(TN)$$

Notemos que se $(p, u), (p, v) \in TM$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} i(\alpha(p, u) + \beta(p, v)) &= i(p, \alpha u + \beta v) = (p, df_p.(\alpha u + \beta v)) = (p, \alpha df_p.u + \beta df_p.v) \\ &= \alpha(p, df_p.u) + \beta(p, df_p.v) \\ &= \alpha i(p, u) + \beta i(p, v). \end{aligned}$$

Além disso, se $i(p, u) = i(q, v)$, então $(p, df_p.u) = (q, df_q.v)$. Logo $p = q$ e portanto

$$df_p.u = df_q.v = df_p.v.$$

Como f é imersão, segue que $u = v$, ou seja, i é injetora.

Além disso,

$$\left(\pi_{f^*(TN)} \circ i\right)(p, v) = \pi_{f^*(TN)}(p, df_p.v) = p = \pi_{TM}(p, v).$$

Portanto i nos permite ver TM como um subfibrado de $f^*(TN)$ sobre M.

Fibrados Referenciais

Denotamos por $GL(k)$ o grupo das matrizes $k \times k$ que são inversíveis.

Para um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ de dimensão k, existe um fibrado associado sobre M com fibra $GL(k)$, chamado de **fibrado referencial linear generalizado.** Esse fibrado é denotado por $F(E)$. A fibra $F(E)_x$ sobre $x \in M$ consiste de todos os isomorfismos lineares $Y_x : \mathbb{R}^k \to E_x$, ou equivalentemente, o conjunto de todas as bases ordenadas para E_x (identificando a aplicação Y com a base $\{Y_1, ..., Y_k\}$, onde $Y_i = Y(e_i)$, $i = 1, ..., k$). O grupo $GL(k)$ age em cada fibra pela composição, ou seja, para cada ponto $x \in M$ fixado temos

$$(\mathbb{A}, Y) \in GL(k) \times F(E)_x \mapsto Y^{\mathbb{A}} = Y \circ \mathbb{A} : \mathbb{R}^k \to E_x.$$

Note que $Y^{\mathbb{A}} \in F(E)_x$, pois composição de isomorfismos ainda o é. Notemos que uma trivialização local $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ ($U \subset M$ é um subconjunto aberto) para E, junto com uma carta local $\eta : U \to \mathbb{R}^n$ para M, produz uma carta para E compatível com a estrutura de fibrado: De fato, temos

$$(x, v) \in \pi^{-1}(U) \mapsto \phi(x, v) = (x, \pi_2(\phi(x, v))) \mapsto (\eta(x), \pi_2(\phi(x, v))) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,$$

isso nos dá uma carta em E. Além disso, toda carta em E dessa forma também induz uma carta em $F(E)$ dando a ela uma estrutura de variedade de dimensão $n + k^2$: De fato, temos

$$(x, Y) \mapsto (\eta(x), \pi_2 \circ \phi_x \circ Y_x) \in \mathbb{R}^n \times GL(k) \subset \mathbb{R}^{n+k^2},$$

onde $\phi_x(\cdot) := \phi(x, \cdot)$. Notemos que se

$$\left(\eta(x_1), \pi_2 \circ \phi_{x_1} \circ Y_{x_1}\right) = \left(\eta(x_2), \pi_2 \circ \phi_{x_2} \circ Y_{x_2}\right),$$

como η é injetora vemos que $x_1 = x_2$. Segue que $Y_{x_1}, Y_{x_2} \in F(E)_{x_1}$, mas em cada fibra $\pi_2 \circ \phi_{x_2} = \pi_2 \circ \phi_{x_1}$ é injetora, mais que isso é uma composição de homeomorfismos locais, e portanto uma carta.

Além disso, definamos $\Pi : F(E) \to M$, sendo que $\Pi(F(E)_x) = \{x\}$, $x \in M$. Como π é sobrejetora, dado $x \in M$, existe $E_x \subset E$ tal que $\pi(E_x) = \{x\}$. Como E é um fibrado vetorial existe pelo menos um isomorfismo $Y : \mathbb{R}^k \to E_x$, e portanto $\Pi^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$, ou seja, Π é sobrejetora. Dado $Y \in F(E)$ e $v \in T_pM$, seja a curva suave $\gamma : I \to M$ em que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Defina a curva $\beta : I \to F(E)$ em que $\beta(t) = \left(\gamma(t), Y_{\gamma(t)}\right)$. Segue que

$$(\Pi \circ \beta)'(0) = \gamma'(0) = v,$$

isto é, Π é uma submersão sobrejetiva. Portanto vemos que $F(E)$ é, de fato, um fibrado vetorial sobre M.

Tensores: Definição e Isomorfismos

Dado um espaço vetorial V, denotamos por $V^* = \{f : V \to \mathbb{R} : f \text{ é linear}\}$ o espaço dual de V.

Definição A.10 (Tensor Covariante e Contravariante) *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um k-**tensor covariante** em V é uma aplicação multilinear $F : V^k \to \mathbb{R}$. Similarmente, um l-**tensor contravariante** é uma aplicação multilinear $F : (V^*)^l \to \mathbb{R}$. Um **tensor misto** do tipo $\binom{k}{l}$ ou (k,l) é uma aplicação multilinear*

$$F : (V^*)^l \times V^k \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Vamos denotar o espaço de todos os k-tensores covariantes em V por $\mathcal{T}^k(V)$. O espaço dos l-tensores contravariantes em V será denotado por $\mathcal{T}_l(V)$. Mais ainda, o espaço dos (k,l)-tensores mistos em V será denotado por $\mathcal{T}_l^k(V)$.

Definimos o conjunto $End(V)$ como o conjunto de todas as transformações lineares de V em V.

O seguinte isomorfismo é frequentemente útil:

Lema A.1 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita. O espaço $\mathcal{T}_1^1(V)$ é canonicamente isomorfo a $End(V)$, onde o isomorfismo $\Phi : End(V) \to \mathcal{T}_1^1(V)$ é dado por*

$$\Phi(A) : (\omega, X) \in V^* \times V \to \omega(A(X)) \in \mathbb{R},$$

para todo $A \in End(V)$.

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que $\Phi(A) \in \mathcal{T}_1^1(V)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\Phi(A)(f_1\omega_1 + f_2\omega_2, g_1X_1 + g_2X_2) &= (f_1\omega_1 + f_2\omega_2)(A(g_1X_1 + g_2X_2)) \\
&= f_1\omega_1(A(g_1X_1 + g_2X_2)) + f_2\omega_2(A(g_1X_1 + g_2X_2)) \\
&= f_1\omega_1(g_1A(X_1) + g_2A(X_2)) + f_2\omega_2(g_1A(X_1) + g_2A(X_2)) \\
&= f_1g_1\omega_1(A(X_1)) + f_1g_2\omega_1(A(X_2)) \\
&\quad + f_2g_1\omega_2(A(X_1)) + f_2g_2\omega_2(A(X_2)) \\
&= f_1g_1\Phi(A)(\omega_1, X_1) + f_1g_2\Phi(A)(\omega_1, X_2) \\
&\quad + f_2g_1\Phi(A)(\omega_2, X_1) + f_2g_2\Phi(A)(\omega_2, X_2),
\end{aligned}$$

para todo $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{K}$, $\omega_1, \omega_2 \in V^*$ e $X_1, X_2 \in V$.

Dados $A, B \in End(V)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha A + \beta B)(\omega, X) &= \omega((\alpha A + \beta B)(X)) = \omega(\alpha A(X) + \beta B(X)) = \alpha\omega(A(X)) + \beta\omega(B(X)) \\ &= \alpha\Phi(A)(\omega, X) + \beta\Phi(B)(\omega, X), \end{aligned}$$

para todo $(\omega, X) \in V^* \times V$, ou seja, $\Phi(\alpha A + \beta B) = \alpha\Phi(A) + \beta\Phi(B)$. Além disso, se $\Phi(A) = \Phi(B)$, seja $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base qualquer de V e suponha que $\mathbb{A}$ seja a matriz de A na base $\mathcal{B}$ e $\mathbb{B}$ seja a matriz de B na base $\mathcal{B}$, e seja $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, ..., v_n^*\}$ a base dual de V^* sobre $\mathcal{B}$, segue que

$$\Phi(A)(v_i^*, v_j) = \Phi(B)(v_i^*, v_j),$$

mas temos que

$$\mathbb{A} = (v_i^*(Av_j)) = (\Phi(A)(v_i^*, v_j)) = (\Phi(B)(v_i^*, v_j)) = (v_i^*(Bv_j)) = \mathbb{B},$$

como as matrizes com relação à mesma base $\mathcal{B}$ são iguais, concluímos que $A = B$. Logo temos a injetividade de Φ.

Segue de álgebra linear que

$$\dim \mathcal{T}_1^1(V) = \dim V \times \dim V^* = (\dim V)^2 = \dim End(V).$$

Portanto, pelo teorema do núcleo e da imagem, segue que Φ é um isomorfismo. ■

Seja V um espaço vetorial e V^* seu respectivo espaço dual. Denotamos o espaço das transformações multilineares de $(V^*)^l \times V^k$ em V por $Mult\left((V^*)^l \times V^k, V\right)$

Uma generalização dessa identificação é expressada como segue:

Lema A.2 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita. O espaço $\mathcal{T}_{l+1}^k(V)$ é canonicamente isomorfo ao espaço $Mult\left((V^*)^l \times V^k, V\right)$, onde o isomorfismo $\Phi : Mult\left((V^*)^l \times V^k, V\right) \to \mathcal{T}_{l+1}^k(V)$ é dado por*

$$\Phi(A) : \left(\omega^0, \omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right) \in (V^*)^{l+1} \times V^k \mapsto \omega^0\left(A\left(\omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right)\right) \in \mathbb{R},$$

onde $Mult\left((V^*)^l \times V^k, V\right)$ é o espaço das transformações multilineares de $(V^*)^l \times V^k$ em V.

Demonstração. Dados $A, B \in Mult\left((V^*)^l \times V^k, V\right)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha A + \beta B)\left(\omega^0, \omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right) &= \omega^0\left((\alpha A + \beta B)\left(\omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right)\right) \\
&= \omega^0\left(\alpha A\left(\omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right) + \beta B\left(\omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right)\right) \\
&= \alpha\omega^0\left(A\left(\omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right)\right) \\
&\quad + \beta\omega^0\left(B\left(\omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right)\right) \\
&= \alpha\Phi(A)\left(\omega^0, \omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right) \\
&\quad + \beta\Phi(B)\left(\omega^0, \omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right)
\end{aligned}$$

para todo $\left(\omega^0, \omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right) \in (V^*)^{l+1} \times V^k$, ou seja, $\Phi(\alpha A + \beta B) = \alpha\Phi(A) + \beta\Phi(B)$. Além disso, suponhamos que $\Phi(A) = \Phi(B)$, seja

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \left\{\underbrace{(0, ..., v_i^*, ..., 0)}_{\text{de } 1 \text{ a } n} : i = 1, .., n\right\}_{i=1}^{n} \cup \left\{\underbrace{(0, ..., v_i^*, ..., 0)}_{\text{de } n+1 \text{ a } 2n} : i = 1, .., n\right\}_{i=1}^{n} \\
&\quad \cup ... \cup \left\{\underbrace{(0, ..., v_i^*, ..., 0)}_{\text{de } (l-1)n+1 \text{ a } nl} : i = 1, .., n\right\}_{i=1}^{n} \\
&\quad \cup \left\{\underbrace{(0, ..., v_i, ..., 0)}_{\text{de } nl+1 \text{ a } nl+n=n(l+1)} : i = 1, .., n\right\} \cup ... \cup \left\{\underbrace{(0, ..., v_i, ..., 0)}_{\text{de } n(l+k-1)+1 \text{ a } n(l+k)} : i = 1, .., n\right\} \\
&= :\left\{\varphi_1, ..., \varphi_{n(l+k)}\right\}
\end{aligned}$$

uma base de $(V^*)^l \times V^k$ tal que $\{v_i^*\}_{i=1}^n$ é base dual de $\{v_i\}_{i=1}^n$ e suponha que $\mathbb{A}$ seja a matriz de A na base $\mathcal{B}$ e $\mathbb{B}$ seja a matriz de B na base $\mathcal{B}$, segue que

$$\Phi(A)\left(v_i^*, \varphi_j\right) = \Phi(B)\left(v_i^*, \varphi_j\right),$$

mas, pela definição de Φ, temos que

$$\mathbb{A} = \left(\Phi(A)\left(v_i^*, \varphi_j\right)\right) = \left(\Phi(B)\left(v_i^*, \varphi_j\right)\right) = \mathbb{B},$$

logo temos a injetividade de Φ. Segue da teoria de Álgebra Linear que

$$\dim \mathcal{T}_{l+1}^k(V) = (l+1)\dim V^* + k\dim V = (l+1)n + kn = n(l+k+1).$$

Por outro lado,

$$\dim Mult\left((V^*)^l \times V^k, V\right) = \dim (V^*)^l \times \dim V^k \times \dim V = nl + nk + n = n\,(l+k+1)\,.$$

Portanto, pelo teorema do núcleo e da imagem, segue que Φ é um isomorfismo. ■

Produto de Tensores

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita.Há um produto natural nos espaços dos tensores em V:

Definição A.11 (Produto Tensorial) *Dados $F \in \mathcal{T}_l^k(V)$ e $G \in \mathcal{T}_q^p(V)$, definimos o* ***produto tensorial*** *$F \otimes G \in \mathcal{T}_{l+q}^{k+p}(V)$ por*

$$(F \otimes G)\left(\omega^1, ..., \omega^{l+q}, X_1, ..., X_{k+p}\right) := F\left(\omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right) G\left(\omega^{l+1}, ..., \omega^{l+q}, X_{k+1}, ..., X_{k+p}\right),$$

para todo $\left(\omega^1, ..., \omega^{l+q}, X_1, ..., X_{k+p}\right) \in (V^*)^{l+q} \times V^{k+p}$.

A multilinearidade de $F \otimes G$ decorre diretamente da multilinearidade de F e G.

Mais ainda, se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de V e $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ sua correspondente base dual, então o conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_l} \otimes e_{i_1}^* ... \otimes e_{i_k}^* : j_1, ..., j_l, i_1, ..., i_k = 1, ..., n\right\}$$

é base para $\mathcal{T}_l^k(V)$, onde

$e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_l} \otimes e_{i_1}^* ... \otimes e_{i_k}^*\left(e_{s_1}^*, ..., e_{s_l}^*, e_{r_1}, ..., e_{r_k}\right) = e_{j_1}\left(e_{s_1}^*\right) ... e_{j_l}\left(e_{s_l}^*\right) e_{i_1}^*\left(e_{r_1}\right) ... e_{i_k}^*\left(e_{r_k}\right)$

$:= e_{s_1}^*\left(e_{j_1}\right) ... e_{s_l}^*\left(e_{j_l}\right) e_{i_1}^*\left(e_{r_1}\right) ... e_{i_k}^*\left(e_{r_k}\right)$

$= \delta_{j_1}^{s_1} ... \delta_{j_l}^{s_l} \delta_{r_1}^{i_1} ... \delta_{r_k}^{i_k}.$

De fato, basta mostrar que $\mathcal{A}$ é um conjunto linearmente independente (L.I.), já que $\mathcal{A}$ possui n^{l+k} elementos, que é a dimensão de $\mathcal{T}_l^k(V)$. Se

$$\sum_{j_1, ..., j_l, i_1, ..., i_k = 1}^{n} \alpha_{j_1, ..., j_l, i_1, ..., i_k} e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_l} \otimes e_{i_1}^* ... \otimes e_{i_k}^* = 0,$$

ao aplicarmos esse tensor soma no ponto $\left(e_{j_1}^*, ..., e_{j_l}^*, e_{i_1}, ..., e_{i_k}\right) \in (V^*)^l \times V^k$ seguirá que

$$0 = \sum_{j_1, ..., j_l, i_1, ..., i_k = 1}^{n} \alpha_{j_1, ..., j_l, i_1, ..., i_k} e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_l} \otimes e_{i_1}^* ... \otimes e_{i_k}^*\left(e_{j_1}^*, ..., e_{j_l}^*, e_{i_1}, ..., e_{i_k}\right) = \alpha_{j_1, ..., j_l, i_1, ..., i_k}, \quad \text{(A.1)}$$

e como $j_1, ..., j_l, i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$ são arbitrários segue o resultado.

Portanto, todo tensor $F \in \mathcal{T}_l^k(V)$ pode ser escrito , com respeito a esta base, por

$$F = \sum_{j_1,...,j_l,i_1,...,i_k=1}^{n} F^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_l} \otimes e^*_{i_1} ... \otimes e^*_{i_k},$$

onde introduzimos a seguinte notação pela expressão (A.1):

$$F^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} := F\left(e^*_{j_1}, ..., e^*_{j_l}, e_{i_1}, ..., e_{i_k}\right).$$

Contração Tensorial

Uma **contração tensorial** é uma operação em um ou mais tensores que surge das relações naturais de um espaço vetorial de dimensão finita com seu dual.

Intuitivamente, há uma noção natural do "traço de uma matriz"$A = \left(A^i_j\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, em que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Essa noção é dada por

$$Tr(A) := \sum_{i=1}^{n} A^i_i.$$

O traço é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear e comutativa no sentido de que $Tr(AB) = Tr(BA)$. De fato, se $A = \left(A^i_j\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B = \left(B^i_j\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
Tr(\alpha A + \beta B) &= Tr\left(\alpha\left(A^i_j\right) + \beta\left(B^i_j\right)\right) = Tr\left(\left(\alpha A^i_j\right) + \left(\beta B^i_j\right)\right) = Tr\left(\left(\alpha A^i_j + \beta B^i_j\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha A^i_i + \beta B^i_i\right) = \alpha\sum_{i=1}^{n} A^i_i + \beta\sum_{i=1}^{n} B^i_i \\
&= \alpha Tr(A) + \beta Tr(B).
\end{aligned}$$

Além disso, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

Então a multiplicação dessas matrizes resulta em

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

em que as entradas de AB possuem a seguinte expressão:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Os elementos da diagonal de AB são dados por

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}.$$

Por outro lado, se fizermos a multiplicação invertida, obteremos a matriz

$$BA = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

em que os novos coeficientes são dados pela seguinte expressão:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}.$$

Os elementos da diagonal são os que possuem os dois índices iguais, ou seja,

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = c_{ii}.$$

Portanto,

$$Tr\left(AB\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = Tr\left(BA\right).$$

Segue disso um corolário muito útil em nossos estudos:

Corolário A.1 (Traço é invariante) *O traço de uma matriz é invariante por conjugação.*

Demonstração. De fato, dado $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversível defina $A = PBP^{-1} \in$

$M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Calculando o traço de A, obtemos a seguinte igualdade:

$$Tr(A) = Tr\left(PBP^{-1}\right) = Tr\left(BP^{-1}P\right) = Tr(B).$$

■

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Com esse corolário, fica bem definido o **traço de uma transformação linear** $T : V \to V$ por

$$Tr(T) := Tr(A),$$

em que A é a matriz de T em uma base qualquer.

Mais ainda, segue do Lema A.1 que o traço pode agir em tensores também.

Naturalmente, definimos a **contração** de $F \in \mathcal{T}_1^1(V)$ como o traço de $\Phi^{-1}(F) \in End(V)$, onde $\Phi : End(V) \to \mathcal{T}_1^1(V)$ é o isomorfismo do Lema A.1. Fixada uma base $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ de V, considere o endomorfismo de V dado pela matriz $(F(e_i^*, e_j))$. Então

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\left(F\left(e_i^*, e_j\right)\right)\right)(\omega, X) &= \omega\left(\left(F\left(e_i^*, e_j\right)\right) X\right) = \omega\left(\left(F\left(e_i^*, e_j\right)\right)\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k \omega\left(\left(F\left(e_i^*, e_j\right)\right) e_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \omega\left(F\left(e_1^*, e_k\right), ..., F\left(e_n^*, e_k\right)\right) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} x_k \omega^l e_l^*\left(F\left(e_1^*, e_k\right), ..., F\left(e_n^*, e_k\right)\right) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} x_k \omega^l F\left(e_l^*, e_k\right) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} F\left(e_l^*, e_k\right) e_k \otimes e_l^*(\omega, X) \\
&= F(\omega, X),
\end{aligned}$$

para todo $(\omega, X) \in V^* \times V$, ou seja, $(F(e_i^*, e_j))$ é a matriz de $\Phi^{-1}(F)$. Portanto temos a aplicação $Tr : \mathcal{T}_1^1(V) \to \mathbb{R}$, onde

$$Tr(F) = \sum_{i=1}^{n} F\left(e_i^*, e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} F^i_{\ i}.$$

Usando essa definição, podemos generalizá-la da seguinte maneira: Definimos a aplicação $Tr : \mathcal{T}_{l+1}^{k+1}(V) \to$

$\mathcal{T}_l^k(V)$ por
$$Tr(F)\left(\omega^1,...,\omega^l,X_1,...,X_k\right):=Tr\left(F\left(\omega^1,...,\omega^l,\cdot,X_1,...,X_k,\cdot\right)\right).$$

Em componentes, isso é equivalente ao seguinte:

$$\begin{aligned} Tr(F)^{j_1\cdots j_l}{}_{i_1\cdots i_k} &:= Tr(F)\left(e^*_{j_1},...,e^*_{j_l},e_{i_1},...,e_{i_k}\right)=Tr\left(F\left(e^*_{j_1},...,e^*_{j_l},\cdot,e_{i_1},...,e_{i_k},\cdot\right)\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n} F\left(e^*_{j_1},...,e^*_{j_l},e^*_m,e_{i_1},...,e_{i_k},e_m\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n} F^{j_1\cdots j_k m}{}_{i_1\cdots i_l m}. \end{aligned}$$

Dados $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, se $N_j:=F\left(\omega^1,...,\omega^j,...,\omega^l,\cdot,X_1,...,X_k,\cdot\right)$, então

$$\begin{aligned} Tr(F)\left(\omega^1,...,\alpha\omega^i+\beta\omega^j,...,\omega^l,X_1,...,X_k\right) &= Tr\left(F\left(\omega^1,...,\alpha\omega^i+\beta\omega^j,...,\omega^l,\cdot,X_1,...,X_k,\cdot\right)\right) \\ &= Tr\left(\alpha N_i+\beta N_j\right) \\ &= \alpha Tr\left(N_i\right)+\beta Tr\left(N_j\right) \\ &= \alpha Tr(F)\left(\omega^1,...,\omega^i,...,\omega^l,X_1,...,X_k\right) \\ &\quad +\beta Tr(F)\left(\omega^1,...,\omega^j,...,\omega^l,X_1,...,X_k\right), \end{aligned}$$

onde foi usado a multilinearidade de F na segunda igualdade. E de modo análogo, se L_j é definido pelo seguinte:
$$L_j:=F\left(\omega^1,...,\omega^l,\cdot,X_1,...,X_j,...,X_k,\cdot\right),$$

então temos que

$$\begin{aligned} Tr(F)\left(\omega^1,...,\omega^l,X_1,...,\alpha X_i+\beta X_j,...,X_k\right) &= Tr\left(F\left(\omega^1,...,\omega^l,\cdot,X_1,...,\alpha X_i+\beta X_j,...,X_k,\cdot\right)\right) \\ &= Tr\left(\alpha L_i+\beta L_j\right) \\ &= \alpha Tr\left(L_i\right)+\beta Tr\left(L_j\right) \\ &= \alpha Tr(F)\left(\omega^1,...,\omega^l,X_1,...,X_i,...,X_k\right) \\ &\quad +\beta Tr(F)\left(\omega^1,...,\omega^l,X_1,...,X_j,...,X_k\right), \end{aligned}$$

onde foi usado a multilinearidade F na segunda igualdade. Ou seja, realmente $Tr(F)\in\mathcal{T}_l^k(V)$.

Notemos que o par de componentes que escolhemos para calcular o traço foram: o último da parte de contravariante e o último da parte covariante. Mas isso não é uma regra, ou seja, há vários tipos de traços, por exemplo:

Exemplo A.3 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $F := \sum_{i,j,k=1}^{n} F_i{}^j{}_k e_i^* \otimes e_j \otimes e_k^* \in \mathcal{T}_1^2(V)$. Logo temos os seguintes traços possíveis:*

$$\begin{cases} Tr_{12}(F)(e_k) := Tr(F(\cdot,\cdot,e_k)) = \sum_{i=1}^{n} F_i{}^i{}_k; \\ Tr_{23}(F)(e_k) := Tr(F(e_k,\cdot,\cdot)) = \sum_{i=1}^{n} F_k{}^i{}_i; \end{cases}$$

O "Tr_{13}"não está definido, pois $F(\cdot,e_k^*,\cdot)$ não está em $\mathcal{T}_1^1(V)$.

Além disso, podemos ter o seguinte caso:

Exemplo A.4 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $F := \sum_{i,j,k,l=1}^{n} F_{ij}{}^{kl} e_i^* \otimes e_j^* \otimes e_k \otimes e_l \in \mathcal{T}_2^2(V)$. Podemos tomar o traço na 1ª e na 3ª coordenadas ($Tr_{13}(F) \in \mathcal{T}_1^1(M)$) e depois o traço na 2ª e na 4ª coordenadas, ou seja:*

$$\begin{aligned} Tr_{24}(Tr_{13}(F)) &= \sum_{i=1}^{n} (Tr_{13}(F))_i{}^i = \sum_{i=1}^{n} Tr_{13}(F)(e_i^*,e_i) = \sum_{i=1}^{n} Tr(F(\cdot,e_i,\cdot,e_i^*)) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} F\left(e_j,e_i,e_j^*,e_i^*\right)\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} F\left(e_j,e_i,e_j^*,e_i^*\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}{}^{ij}. \end{aligned}$$

Finalmente, uma das aplicações mais importantes surge quando $F = \omega \otimes X \in \mathcal{T}_1^1(V)$, para algum $(\omega, X) \in V^* \times V$ fixado. Nesse caso,

$$\begin{aligned} Tr(\omega \otimes X) &= \sum_{i=1}^{n} (\omega \otimes X)(e_i,e_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \omega(e_i)X(e_i^*) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\omega^j e_j^*\right)(e_i)\left(\sum_{k=1}^{n} X_k e_k\right)(e_i^*)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega^i X_i, \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\omega(X) = \sum_{j=1}^{n} \omega^j e_j^*(X) = \sum_{j=1}^{n} \omega^j e_j^*\left(\sum_{k=1}^{n} X_k e_k\right) = \sum_{j,k=1}^{n} X_k \omega^j e_j^*(e_k) = \sum_{j=1}^{n} X_j \omega^j,$$

ou seja, vemos que $Tr(\omega \otimes X) = \omega(X)$, para todo $(\omega, X) \in V^* \times V$.

Essa ideia pode ser estendida como segue: Se $F \in \mathcal{T}_l^k(V)$ com $\left(\omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right) \in (V^*)^l \times V^k$ fixado, então

$$F \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_k \in \mathcal{T}_{2l}^{2k}(V).$$

Portanto, se utilizarmos a seguinte notação:

$$\left(e_{(j_1,j_l)}, e^*_{(i_1,i_k)}, \omega^{(1,l)}, X_{(1,k)}\right) := e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_l} \otimes e^*_{i_1} \otimes ... \otimes e^*_{i_k} \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_k$$

a contração desse tensor sobre todos os índices nos dá

$$\begin{aligned}
& Tr\left(F \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_k\right) \\
= \; & Tr\left(\sum_{j_1,...,j_l,i_1,...,i_k=1}^{n} F^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_l} \otimes e^*_{i_1} ... \otimes e^*_{i_k} \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_k\right) \\
= \; & \sum_{j_1,...,j_l,i_1,...,i_k=1}^{n} F^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} Tr\left(e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_l} \otimes e^*_{i_1} ... \otimes e^*_{i_k} \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_k\right) \\
= \; & \sum_{j_1,...,j_l,i_1,...,i_k=1}^{n} F^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} Tr_{j_1 1}(...(Tr_{j_l l}(Tr_{i_1 l+1}(...(Tr_{i_k l+k}\left(e_{(j_1,j_l)}, e^*_{(i_1,i_k)}, \omega^{(1,l)}, X_{(1,k)}\right)...) \\
= \; & \sum_{j_1,...,j_l,i_1,...,i_k=1}^{n} F^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} \sum_{u_1,...,u_l,v_1,...,v_k=1}^{n} \left(e_{(j_1,j_l)}, e^*_{(i_1,i_k)}, \omega^{(1,l)}, X_{(1,k)}\right)^{u_1...u_l}{}_{v_1...v_k u_1...u_l}{}^{v_1...v_k} \\
= \; & \sum_{j_1,...,j_l,i_1,...,i_k=1}^{n} F^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} \left(\omega^1\right)^{j_1} ... \left(\omega^l\right)^{j_l} (X_1)_{i_1} ... (X_k)_{i_k}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
F\left(\omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right) &= F\left(\sum_{j_1=1}^{n} \left(\omega^1\right)^{j_1} e^*_{j_1}, ..., \sum_{j_l=1}^{n} \left(\omega^1\right)^{j_l} e^*_{j_l}, \sum_{i_1=1}^{n} (X_1)_{i_1} e_{i_1}, ..., \sum_{i_k=1}^{n} (X_k)_{i_k} e_{i_k}\right) \\
&= \sum_{j_1...j_l i_1...i_k=1}^{n} \left(\omega^1\right)^{j_1} ... \left(\omega^1\right)^{j_l} (X_1)_{i_1} ... (X_k)_{i_k} F\left(e^*_{j_1}, ..., e^*_{j_l}, e_{i_1}, ..., e_{i_k}\right) \\
&= \sum_{j_1...j_l i_1...i_k=1}^{n} \left(\omega^1\right)^{j_1} ... \left(\omega^1\right)^{j_l} (X_1)_{i_1} ... (X_k)_{i_k} F^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k},
\end{aligned}$$

ou seja, vemos que

$$Tr\left(F \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_k\right) = F\left(\omega^1, ..., \omega^l, X_1, ..., X_k\right), \tag{A.2}$$

onde o traço é feito sobre todos os índices.

Fibrados Tensoriais e Campos Tensoriais

Para uma variedade diferenciável M, podemos aplicar a construção da seção anterior em T_pM, para cada $p \in M$. Nesse caso, um (k,l)-tensor em $p \in M$ é um elemento de $\mathcal{T}_l^k(T_pM)$. Definimos o **fibrado tensorial** dos (k,l)-tensores em M por

$$\mathcal{T}_l^k(M) := \bigsqcup_{p\in M} \mathcal{T}_l^k(T_pM) = \bigsqcup_{p\in M} \otimes^k \left(T_p^*M\right) \otimes^l T_pM,$$

em que

$$\otimes^k \left(T_p^*M\right) \otimes^l T_pM = \left\{\left(p, \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^k \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_l\right) : \omega^i \in T_p^*M,\, X_j \in T_pM,\, i = 1, ..., k \text{ e } j = 1, ..., l\right\}.$$

Se não houver ambiguidade, denotaremos $\left(p, \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^k \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_l\right)$ simplesmente por $\omega^1 \otimes ... \otimes \omega^k \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_l$.

Em particular,

$$\mathcal{T}_1^0(M) = \bigsqcup_{p\in M} \otimes^0 \left(T_p^*M\right) \otimes^1 T_pM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM = TM,$$

$$\mathcal{T}_0^1(M) = \bigsqcup_{p\in M} \otimes^1 \left(T_p^*M\right) \otimes^0 T_pM = \bigsqcup_{p\in M} \left(T_p^*M\right) = T^*M.$$

Um subfibrado muito importante de $\mathcal{T}_0^2(M)$ é $Sym^2(M)$, o espaço dos $(2,0)$-tensores simétricos em M. O elemento central do fluxo de Ricci pertence a esse espaço: estamos falando do tensor de curvatura de Ricci, que detalharemos mais adiante.

Definição A.12 (Campo Tensorial) *Seja M uma variedade diferenciável. Um (k,l)-**campo tensorial** em M é um elemento de*

$$\Gamma\left(\mathcal{T}_l^k(M)\right) = \Gamma\left(\bigsqcup_{p\in M} \otimes^k \left(T_p^*M\right) \otimes^l T_pM\right).$$

Às vezes utilizamos a notação $\mathcal{J}_l^k(M) := \Gamma\left(\mathcal{T}_l^k(M)\right)$.

Para verificar que $\mathcal{T}_l^k(M)$ é um fibrado vetorial, seja

$$\pi : (p, F) \in \mathcal{T}_l^k(M) \to p \in M.$$

Seja (U,φ) uma carta em M, então todo tensor $F \in \mathcal{T}_l^k(M)$ pode ser expressado como

$$F = \sum_{j_1,\dots,j_l,i_1,\dots,i_k=1}^{n} F^{j_1\dots j_l}{}_{i_1\dots i_k} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k},$$

onde $\partial_i(q) := d\varphi^{-1}_{\varphi(q)}.e_i$ e $dx^i_{\varphi(q)}.e_i := \partial_i^*(q)$, para todo $q \in U$, $i = 1,\dots,n$ e as funções $F^{j_1\dots j_l}{}_{i_1\dots i_k} \in C^\infty(U,\mathbb{R})$.

A trivialização local é $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}$ é dada por

$$\phi((q,F)) := \left(q, F^{1\dots 1}{}_{1\dots 1}, \dots, F^{j_1\dots j_l}{}_{i_1\dots i_k}, \dots., F^{n\dots n}{}_{n\dots n}\right).$$

De fato, primeiramente dado $p \in M$, seja $0_p \in \mathcal{T}_l^k(T_pM)$ é o tensor nulo, então $\pi(0_p) = p$, ou seja, π é sobrejetora. Além disso, dado $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$, $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja uma curva suave $\gamma : I \to M$ em que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Defina $\sigma : I \to \mathcal{T}_l^k(M)$ em que $\sigma(t) = \left(\gamma(t), T_{\gamma(t)}\right)$. Segue que $\sigma(0) = \left(\gamma(0), T_{\gamma(0)}\right) = (p, T_p)$. Segue disso que

$$d\pi_T\left(\sigma'(0)\right) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\pi \circ \sigma)(t) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma(t) = \gamma'(0) = v,$$

ou seja, $d\pi_T$ é sobrejetora, para todo $T \in \mathcal{T}_l^k(M)$. Isto é, π é uma submersão sobrejetora.

Além disso, dado $\left(p, \alpha^{j_1\dots j_l}{}_{i_1\dots i_k}\right) \in U \times \mathbb{R}^{n^{k+l}}$, seja (U,φ) carta em M tal que $p \in U$. Defina o tensor

$$F_\alpha := \sum_{j_1,\dots,j_l,i_1,\dots,i_k=1}^{n} \alpha^{j_1\dots j_l}{}_{i_1\dots i_k} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \dots \otimes dx^{i_k} \in \pi^{-1}(U),$$

segue por construção que

$$\phi(F_\alpha) = \left(p, \alpha^{j_1\dots j_l}{}_{i_1\dots i_k}\right),$$

ou seja, ϕ é sobrejetora. Além disso, se $\phi(F) = \phi(G)$, então

$$\left(p, F^{j_1\dots j_l}{}_{i_1\dots i_k}\right) = \left(p, G^{j_1\dots j_l}{}_{i_1\dots i_k}\right),$$

por unicidade dos coeficientes de uma combinação linear, vemos que $F = G$, portanto ϕ é uma bijeção. Por ser um produto de projeções, vemos que ϕ é diferenciável. Mais ainda, como

$$\phi^{-1}\left(p, \alpha^{j_1\dots j_l}{}_{i_1\dots i_k}\right) = \sum_{j_1,\dots,j_l,i_1,\dots,i_k=1}^{n} \alpha^{j_1\dots j_l}{}_{i_1\dots i_k} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_l} \otimes dx^{i_1} \dots \otimes dx^{i_k} \in \pi^{-1}(U)$$

é diferenciável, temos que ϕ é um difeomorfismo. Por fim, notemos que

$$\pi_1 (\phi (F)) = \pi_1 \left(p, F^{j_1 \dots j_l}{}_{i_1 \dots i_k}\right) = p = \pi (F),$$

para todo $F \in \mathcal{T}_l^k (T_p M) \subset \mathcal{T}_l^k (M)$. Portanto $\mathcal{T}_l^k (M)$ é um fibrado.

Fibrados Duais

Se E é um fibrado vetorial de dimensão k sobre M, então definimos o **fibrado dual** de E, denotado por E^*, cujas fibras são os espaços vetoriais duais das fibras de E, isto é,

$$E^* = \bigsqcup_{p \in M} (E_p)^* = \{(p, \omega) : \omega \in (E_p)^*, \ p \in M\}.$$

Se $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ é um referencial local para E em um aberto $U \subset M$, então a aplicação $\phi : \pi_{E^*}^{-1} (U) \to U \times \mathbb{R}^k$ definida por

$$(p, \omega) \mapsto (p, \omega (\xi_1 (p)), ..., \omega (\xi_k (p)))$$

é uma trivialização de E^* sobre U: De fato, dado $(p, x_1, ..., x_k) \in U \times \mathbb{R}^k$, defina $\omega \in E_p^*$, onde $\omega (\xi_i(p)) := x_i$ (como ω é um funcional, basta defini-lo na base). Segue disso que

$$\phi (p, \omega) := (p, \omega (\xi_1 (p)), ..., \omega (\xi_k (p))) = (p, x_1, ..., x_k),$$

ou seja, ϕ é sobrejetora. Além disso, se $\phi (p_1, \omega_1) = \phi (p_2, \omega_2)$, então

$$(p_1, \omega_1 (\xi_1 (p_1)), ..., \omega_1 (\xi_k (p_1))) = (p_2, \omega_2 (\xi_1 (p_2)), ..., \omega_2 (\xi_k (p_2))),$$

já vemos que $p_1 = p_2 = p$, ou seja, ω_1 e ω_2 possuem o mesmo domínio. Mais ainda, como $\omega_1 \left(\xi_j (p)\right) = \omega_1 \left(\xi_j (p)\right)$, $j = 1, ..., k$, isto é, $\omega_1 = \omega_2$ em uma base de E_p, logo são iguais. Além disso, ϕ é diferenciável, pois é produto de funções diferenciáveis. Além disso, temos que sua inversa

$$\phi^{-1} : (p, x_1, ..., x_k) \in U \times \mathbb{R}^k \mapsto \left(p, \sum_{i=1}^k x_i \xi_i^*\right) \in \pi_{E^*}^{-1} (U),$$

é um produto de funções diferenciáveis, portanto também é diferenciável. Ou seja, ϕ é um difeomorfismo. Mais ainda,

$$(\pi_1 \circ \phi) (p, \omega) = \pi_1 ((p, \omega (\xi_1 (p)), ..., \omega (\xi_k (p)))) = p = \pi_{E^*} (p, \omega),$$

para todo $(p,\omega) \in \pi_{E^*}^{-1}(U)$.

Por fim, vamos mostrar que a aplicação $\pi_{E^*} : (p,\omega) \in E^* \mapsto p \in M$, onde $\omega \in E_p^* \subset E^*$, é uma submersão sobrejetiva. De fato, dado $p \in M$, tome $0_p : E_p \to \mathbb{R}$ a transformação linear nula. Segue que $\pi_{E^*}(0_p) = p$, ou seja, π_{E^*} é sobrejetora. Mais ainda, dado $\omega : E_p \to \mathbb{R}$, $\omega \in E^*$ e dado um vetor $v \in T_pM$, seja $\alpha : I \to M$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Podemos definir localmente a curva $t \mapsto \left(\alpha(t), \omega_{\alpha(t)}\right) \in E^*$, temos que $(\alpha(0), \omega) = (p,\omega)$. Mais ainda, $\pi_{E^*}\left(\alpha(t), \omega_{\alpha(t)}\right) = \alpha(t)$, ou seja,

$$v = \frac{d}{dt}_{|t=0} \left(\pi_{E^*}\left(\alpha(t), \omega_{\alpha(t)}\right)\right),$$

sendo assim, vemos que $d(\pi_{E^*})_\omega : T_\omega E^* \to T_{\pi_{E^*}(\omega)}E^*$ é sobrejetora, portanto π_{E^*} é uma submersão sobrejetora, e assim, E^* também é um fibrado (vetorial).

Se $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ é um referencial local para E, então o referencial local correspondente para E^* é $\{\xi_i^*\}_{i=1}^k$.

Produto Tensorial de Fibrados

Se $E_1, ..., E_k$ são fibrados vetoriais sobre M, então

$$E_1 \otimes ... \otimes E_k = \bigsqcup_{p\in M} (E_1)_p \otimes ... \otimes (E_k)_p$$

é um fibrado vetorial também. De fato, se $\pi^i : E_i \to M$ são as submersões sobrejetivas, de E_i, $i = 1, ..., k$, Então defina

$$\Pi : (p, v_1 \otimes ... \otimes v_k) \in E_1 \otimes ... \otimes E_k \mapsto p \in M$$

A sobrejetividade de Π sai da sobrejetividade de π^1. Seja

$$\Pi^1 : v_1 \otimes ... \otimes v_k \in E_1 \otimes ... \otimes E_k \mapsto v_1 \in E_1.$$

Notemos que $\Pi = \pi^1 \circ \Pi^1$. Mais ainda, dado $v_1 \otimes ... \otimes v_k \in E_1 \otimes ... \otimes E_k$ e um vetor $v \in T_pM$, vamos definir a curva

$$t \mapsto \alpha(t) \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k \in E_1 \otimes ... \otimes E_k$$

segue disso que $\Pi(\alpha(t) \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k) = \alpha(t)$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \Pi(\alpha(t) \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k) = \alpha'(0) = v$$

portanto vemos que Π é uma submersão. Como a diferencial da composta é a composta das diferenciais, segue que composição de submersões também o é. Isto é, Π é uma submersão sobrejetiva. Além disso, se $\phi^i : \left(\pi^i\right)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{j_i}$ são as trivializações locais de E_i, $i = 1, ..., k$, definamos $\Psi : (\Pi)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{n_1+...+n_k}$, onde

$$\Psi\left(p, v_1 \otimes ... \otimes v_k\right) := \Big(p, \pi_2 \circ \phi^1\left(p, v_1\right), ..., \pi_{k+1} \circ \phi^k\left(p, v_k\right)\Big).$$

Como todos os $v_i's$ estão em fibras cujo ponto base é o mesmo e como ϕ^i são difeomorfismo, segue que Ψ também o é. Mais ainda,

$$\pi_1 \circ \Psi\left(v_1 \otimes ... \otimes v_k\right) = \pi_1\Big(p, \pi_1 \circ \phi^1\left(v_1\right), ..., \pi_1 \circ \phi^k\left(v_k\right)\Big) = p = \Pi\left(p, v_1 \otimes ... \otimes v_k\right),$$

para todo $v_1 \otimes ... \otimes v_k \in \left(E_1\right)_p \otimes ... \otimes \left(E_k\right)_p \subset E_1 \otimes ... \otimes E_k$. Logo, produto tensorial de fibrados também o é.

Se $U \subset M$ é um aberto, e $\left\{\xi_i^j : 1 \leq i \leq n_j\right\}$ é um referencial local para E_j sobre U, $j = 1, ..., k$, então

$$\left\{\xi_{i_1}^1 \otimes ... \otimes \xi_{i_k}^k : 1 \leq i_j \leq n_j,\ 1 \leq j \leq k\right\}$$

forma, por construção, um referencial local para $E_1 \otimes ... \otimes E_k$.

Temos os seguintes isomorfismos:

Proposição A.1 $E_1^* \otimes E_2^* \simeq \left(E_1 \otimes E_2\right)^*$.

Demonstração. Dado $(p, \omega_1 \otimes \omega_2) \in E_1^* \otimes E_2^*$, definamos $\eta_{\omega_1\omega_2} \in \Big(\left(E_1\right)_p \otimes \left(E_2\right)_p\Big)^*$, onde

$$\eta_{\omega_1\omega_2}\left(\xi_i^1 \otimes \xi_j^2\right) := \omega_1 \otimes \omega_2\left(\xi_i^1 \otimes \xi_j^2\right) = \omega_1\left(\xi_i^1\right)\omega_2\left(\xi_j^2\right),$$

em que $\left\{\xi_i^j : 1 \leq i \leq n_j\right\}$ é um referencial local para E_j sobre $U \ni p$, $j = 1, 2$. Notemos que se $\eta_{\omega_1\omega_2} = \eta_{\omega_3\omega_4}$ então

$$\omega_1 \otimes \omega_2\left(\xi_i^1 \otimes \xi_j^2\right) = \omega_3 \otimes \omega_4\left(\xi_i^1 \otimes \xi_j^2\right),$$

a igualdade de tensores na base garante que $\omega_1 \otimes \omega_2 = \omega_3 \otimes \omega_4$. Além disso,

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\omega_1\omega_2+\beta\omega_3\omega_4}\left(\xi_i^1 \otimes \xi_j^2\right) &= \left(\alpha\omega_1 \otimes \omega_2 + \beta\omega_3 \otimes \omega_4\right)\left(\xi_i^1 \otimes \xi_j^2\right) \\ &= \alpha\omega_1 \otimes \omega_2\left(\xi_i^1 \otimes \xi_j^2\right) + \beta\omega_3 \otimes \omega_4\left(\xi_i^1 \otimes \xi_j^2\right) \\ &= \alpha\eta_{\omega_1\omega_2}\left(\xi_i^1 \otimes \xi_j^2\right) + \beta\eta_{\omega_3\omega_4}\left(\xi_i^1 \otimes \xi_j^2\right), \end{aligned}$$

por fim,

$$\dim E_1^* \otimes E_2^* = \dim E_1^* \dim E_2^* = \dim E_1 \dim E_2 = \dim E_1 \otimes E_2 = \dim\left(E_1 \otimes E_2\right)^*$$

Segue do teorema do núcleo e da imagem que $E_1^* \otimes E_2^* \simeq \left(E_1 \otimes E_2\right)^*$. ■

Proposição A.2 $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \simeq E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$.

Demonstração. Basta notar que

$$((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) \in (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \mapsto (v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)) \in E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$$

nos dá um isomorfismo trivial. ■

Um Teste para Tensorialidade

Seja $E_1, ..., E_k$ fibrados vetoriais sobre uma variedade M. Dado um campo tensorial $F \in \Gamma\left(E_1^* \otimes ... \otimes E_k^*\right)$ e seções $X_i \in \Gamma(E_i)$, a função em um aberto $U \subset M$ definida por

$$F(X_1, ..., X_k) : p \in U \mapsto F_p\left(X_{1_{|p}}, ..., X_{k_{|p}}\right) \in \mathbb{R},$$

é suave. Logo ela induz a aplicação $F : \Gamma(E_1) \times ... \times \Gamma(E_k) \to C^\infty(M)$. Pode ser facilmente verificado que esta aplicação é multilinear sobre $C^\infty(M)$, no seguinte sentido:

$$F(f_1 X_1, ..., f_k X_k) = f_1 ... f_k F(X_1, ..., X_k),$$

para todo $f_i \in C^\infty(M)$ e $X_i \in \Gamma(E_i)$, $i = 1, ..., k$. Notemos que existe $(\omega_1, ..., \omega_k) \in E_1^* \times ... \times E_k^*$, tal que

$$F = \omega_1 \otimes ... \otimes \omega_k.$$

De fato, temos que

$$E_1^* \otimes ... \otimes E_k^* = \bigsqcup_{p\in M} (E_1^*)_p \otimes ... \otimes (E_k^*)_p \,.$$

Como F é um campo tensorial, segue que $F(p) = \omega_1(p) \otimes ... \otimes \omega_k(p)$, em que $\omega_i(p) \in (E_i^*)_p$. Como a aplicação

$$\pi_\otimes^i : \varphi_1 \otimes ... \otimes \varphi_n \in E_1^* \otimes ... \otimes E_k^* \longmapsto \varphi_i \in E_i^*$$

é suave e $\omega_i(p) = \left(\pi_\otimes^i \circ F\right)(p)$, variando $p \in M$ obtemos uma aplicação suave $\omega_i : M \to \mathbb{R}$, para todo $i = 1, ..., n$.

Segue disso que

$$\begin{aligned} F(f_1X_1, ..., f_kX_k) &= \omega_1 \otimes ... \otimes \omega_k (f_1X_1, ..., f_kX_k) = \omega_1(f_1X_1)...\omega_k(f_kX_k) = f_1\omega_1(X_1)...f_k\omega_k(X_k) \\ &= f_1...f_k\omega_1(X_1)...\omega_k(X_k) = f_1...f_k(\omega_1 \otimes ... \otimes \omega_k)(X_1, ..., X_k) \\ &= f_1...f_kF(X_1, ..., X_k)\,. \end{aligned}$$

A volta também é verdadeira:

Proposição A.3 (Teste do Tensor) *Para fibrados vetoriais $E_1, ..., E_k$ sobre M, a aplicação*

$$F : \Gamma(E_1) \times ... \times \Gamma(E_k) \to C^\infty(M)$$

é um campo tensorial, isto é, $F \in \Gamma(E_1^* \otimes ... \otimes E_k^*)$ se, e somente se F é multilinear sobre $C^\infty(M)$.

Demonstração. Vamos mostrar apenas a volta, pois a ida foi discutida acima. Suponhamos que F é multilinear sobre $C^\infty(M)$. Para mostrar que F é um campo tensorial, por definição, basta mostrar que $F(X_1, ..., X_k)(p)$ só dependa dos valores dos campos $X_i \in \Gamma(E_i)$ em $p \in M$. De fato, suponha que $X_i = \sum_{j_i=1}^n a^{i_j}\xi_{i_j}$, em que $\left\{\xi_{i_j}\right\}_{j=1}^n$ é base de E_i. Segue que

$$\begin{aligned} F(X_1, ..., X_k)(p) &= F\left(\sum_{j_1=1}^n a^{i_1}\xi_{i_1}, ..., \sum_{j_k=1}^n a^{i_k}\xi_{i_k}\right)(p) = \left(\sum_{j_1,...,j_k=1}^n a^{i_1}...a^{i_k}F\left(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}\right)\right)(p) \\ &= \sum_{j_1,...,j_k=1}^n a^{i_1}(p)...a^{i_k}(p)\,F\left(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}\right)(p)\,. \end{aligned}$$

Como a expressão final só depende das coordenadas das seções em p, temos o resultado. ■

Pelo Lema A.2 também temos o seguinte resultado:

Proposição A.4 (Teste do Tensor que Cai em Fibrados) *Para fibrados vetoriais $E_0, E_1, ..., E_k$ sobre M, a aplicação $F : \Gamma(E_1) \times ... \times \Gamma(E_k) \to \Gamma(E_0)$ é um campo tensorial, isto é, $F \in \Gamma(E_1^* \otimes ... \otimes E_k^* \otimes E_0)$ se, e somente se F é multilinear sobre $C^\infty(M)$.*

Demonstração. A demonstração é direta do teste do tensor e do isomorfismo mostrado no Lema A.2. ■

Esta proposição nos permite interpretar os elementos de $\Gamma(E_1^* \otimes ... \otimes E_k^* \otimes E_0)$ como uma aplicação que age em $E_1 \otimes ... \otimes E_k$ com valores em E_0.

A importância das duas últimas proposições é que elas nos permitem trabalhar com tensores sem se referir aos atributos pontuais. Por exemplo, a métrica g em M pode ser considerada como um produto pontual $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ que depende suavemente do ponto base. Pela nossa identificação, podemos pensar neste tensor como uma aplicação

$$g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M).$$

Portanto, se X, Y e Z são campos vetoriais, segue que $g(X, Y)$ e $Z(g(X, Y)) \in C^\infty(M)$.

Tensores Métricos

Um produto interno em um espaço vetorial permite definir comprimentos de vetores e ângulos entre eles. Métricas riemannianas trazem essa estrutura para o espaço tangente de uma variedade.

Definição A.13 (Métrica Riemanniana) *Uma **métrica riemanniana** g em uma variedade M é um $(2,0)$-campo tensorial suave simétrico positivo definido, isto é, $g \in \Gamma\left(Sym^2(M)\right)$ e g_p é um produto interno, para todo $p \in M$. Mais ainda, uma variedade M munida com uma métrica riemanniana g é chamada **variedade riemanniana** (M, g).*

Se não houver ambiguidade para a métrica, podemos denotar uma variedade riemanniana (M, g) simplesmente por M.

Dado $p \in M$, seja (U, φ) uma carta em M tal que $p \in U$. Dados $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i(p)$ e $w = \sum_{j=1}^n w^j \partial_j(p)$ vetores de T_pM, segue que

$$g_p(v, w) = g_p\left(\sum_{i=1}^n v^i \partial_i(p), \sum_{j=1}^n w^j \partial_j(p)\right) = \sum_{i,j=1}^n v^i w^j g_p(\partial_i(p), \partial_j(p))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_p\left(\partial_i\left(p\right), \partial_j\left(p\right)\right) dx^i\left(v\right) dx^j\left(w\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_p\left(\partial_i\left(p\right), \partial_j\left(p\right)\right) dx^i \otimes dx^j\left(v, w\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\left(p\right) dx^i \otimes dx^j\left(v, w\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$g_p = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\left(p\right) dx^i \otimes dx^j.$$

Contrações Métricas

Se uma métrica riemanniana g é não degenerada, há um isomorfismo canônico que depende de g, $TM \simeq T^*M$. De fato, defina:

$$\# \quad : \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i\left(p\right) \in T_p^*M \subset T^*M \mapsto \omega^{\#} = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\omega_j \partial_i\left(p\right) =: \sum_{i=1}^{n} \omega^i \partial_i\left(p\right) \in T_pM \tag{A.3}$$

$$\flat \quad : \quad X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i\left(p\right) \in T_pM \subset TM \mapsto X^{\flat} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} X^j dx^i\left(p\right) =: \sum_{i=1}^{n} X_i dx^i\left(p\right) \in T_p^*M. \tag{A.4}$$

Notemos primeiramente que

$$\begin{aligned}
\#\left(x\omega + y\eta\right) &= \#\left(x\sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i\left(p\right) + y\sum_{i=1}^{n} \eta_i dx^i\left(p\right)\right) \\
&= \#\left(\sum_{i=1}^{n} \left(x\omega_i + y\eta_i\right) dx^i\left(p\right)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(x\omega_j + y\eta_j\right)\partial_i\left(p\right) \\
&= x\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\omega_j \partial_i\left(p\right) + y\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\eta_j \partial_i\left(p\right) \\
&= x\#\left(\omega\right) + y\#\left(\eta\right),
\end{aligned}$$

para todo $\omega, \eta \in T_p^*M$ e $x, y \in \mathbb{R}$, $p \in M$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\flat\left(xX + yY\right) &= \flat\left(x\sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i\left(p\right) + y\sum_{i=1}^{n} Y^i \partial_i\left(p\right)\right) = \flat\left(\sum_{i=1}^{n} \left(xX^i + yY^i\right)\partial_i\left(p\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\left(xX^j + yY^j\right) dx^i\left(p\right) = x\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} X^j dx^i\left(p\right) + y\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} Y^j dx^i\left(p\right) \\
&= x\flat\left(X\right) + y\flat\left(Y\right),
\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in T_pM$ e $x, y \in \mathbb{R}$, $p \in M$. Por fim, temos que

$$\begin{aligned}
\flat \circ \# (\omega) &= \flat \circ \# \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i (p) \right) = \flat \left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \omega_j \partial_i (p) \right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} g_{ik} g^{kj} \omega_j dx^i (p) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \omega_j dx^i (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i (p) = \omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\# \circ \flat (X) &= \# \circ \flat \left(\sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i (p) \right) = \# \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} X^j dx^i (p) \right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} X^j \partial_i (p) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} X^j \partial_i (p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i (p) = X,
\end{aligned}$$

para todo $X \in T_pM$ e todo $\omega \in T_p^*M$, $p \in M$. Ou seja, $TM \simeq T^*M$.

Usando isso, é possível tomar contrações tensoriais sobre dois índices que podem ser ambos vetores ou ambos covetores. Por exemplo, se h é um $(2,0)$-tensor simétrico, em uma variedade riemanniana, então $h^{\#}$ é um $(1,1)$-tensor. Nesse caso, o traço de h com respeito a g (ou simplesmente a **contração métrica de** h), denotado por $Tr_g h$ é

$$\begin{aligned}
Tr_g h \quad &: = Tr h^{\#} = \sum_{i=1}^{n} \left(h^{\#} \right)_i^{\ i} = \sum_{i=1}^{n} \left(h^{\#} \right) \left(\partial_i, dx^i \right) = \sum_{i=1}^{n} h \left(\partial_i, \sum_{k=1}^{n} g^{ki} \partial_k \right) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ki} h \left(\partial_i, \partial_k \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} h_{ij}.
\end{aligned}$$

Equivalentemente, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
Tr_g h \quad &: = Tr_{13} Tr_{24} \left(g^{-1} \otimes h \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(g^{-1} \otimes h \right)_{ij}^{\quad ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(g^{-1} \otimes h \right)^{ij}_{\quad ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} h_{ij}.
\end{aligned}$$

Métricas em Fibrados Vetoriais

Uma métrica g em um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ é uma seção de $E^* \otimes E^*$ tal que em cada ponto $p \in M$, g_p é um produto interno em E_p, isto é, g_p é simétrica e positiva definida para cada $p \in M$: $g_p(\xi, \eta) = g_p(\eta, \xi)$, para todo $\eta, \xi \in E_p$, $g_p(\xi, \xi) \geq 0$ para todo $\xi \in E_p$ sendo que $g_p(\xi, \xi) = 0$ se, e somente se $\xi = 0$.

Uma métrica em E define um isomorfismo de fibrados $\iota_g : E \to E^*$, em que

$$\iota_g((p, \xi)) : (p, \eta) \in E_p \to g_p(\eta, \xi) \in \mathbb{R}.$$

De fato, ι_g é linear, pois

$$\begin{aligned} \iota_g(a(p, \xi) + b(p, \kappa))(p, \eta) &= g_p(\eta, a\xi + b\kappa) = a g_p(\eta, \xi) + b g_p(\eta, \kappa) \\ &= a\iota_g((p, \xi))(p, \eta) + b\iota_g((p, \kappa))(p, \eta), \end{aligned}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $(p, \xi), (p, \kappa) \in E$. Além disso, se $\iota_g((p, \xi))$ é a transformação nula, segue que

$$g_p(\eta, \xi) = 0,$$

para todo $\eta \in E_p$, tomando $\eta = \xi$ vemos que $\xi = 0$, portanto $\iota_{g_{|E_p}}$ é injetora. Por fim, como E_p e E_p^* possuem a mesma dimensão, segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que $\iota_{g_{|E_p}}$ é um isomorfismo sobre sua imagem, para todo $p \in M$ isto é, ι_g é um isomorfismo de fibrados.

Métrica nos Fibrados Duais

Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) duas variedades riemannianas e $f : M_1 \to M_2$. Lembramos que f é uma **isometria** entre M_1 e M_2 se

$$g_2(f(p), f(q)) = g_1(p, q),$$

para todo $p, q \in M_1$.

Se g é uma métrica em E, existe uma (única) métrica em E^* (também denotada por g), tal que ι_g se torna uma isometria, isto é,

$$g(\iota_g(\xi), \iota_g(\eta)) := g(\xi, \eta),$$

para todo $\xi, \eta \in E_p$. Ou equivalentemente, $g(\omega, \sigma) := g\left(\iota_g^{-1}\omega, \iota_g^{-1}\sigma\right)$, para todo $\omega, \sigma \in E_p^*$, $p \in M$.

Métrica no Produto Tensorial de Fibrados

Se g_1 é uma métrica em E_1 e g_2 é uma métrica em E_2, então pela Proposição A.1

$$\begin{aligned} g &= g_1 \otimes g_2 \in \Gamma\left(\left(E_1^* \otimes E_1^*\right) \otimes \left(E_2^* \otimes E_2^*\right)\right) \simeq \Gamma\left(\left(E_1^* \otimes E_2^*\right) \otimes \left(E_1^* \otimes E_2^*\right)\right) \\ &\simeq \Gamma\left(\left(E_1 \otimes E_2\right)^* \otimes \left(E_1 \otimes E_2\right)^*\right) \end{aligned}$$

e é a única metrica em $E_1 \otimes E_2$ tal que

$$g\left(\xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2\right) = g_1\left(\xi_1, \xi_2\right) g_2\left(\eta_1, \eta_2\right). \tag{A.5}$$

De fato, para mostrar a existência defina a única transformação bilinear que respeite a seguinte igualdade na base $\{e_i \otimes c_j\}$ de $E_1 \otimes E_2$:

$$g\left(e_i \otimes c_j, e_k \otimes c_l\right) = g_1\left(e_i, e_k\right) g_2\left(c_j, c_l\right) = g_{ikjl} = \left(g_1\right)_{ik} \left(g_2\right)_{jl}.$$

Segue disso que

$$\begin{aligned} g\left(\xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2\right) &= g\left(\left(\sum_{a=1}^n \xi_a^1 e_a\right) \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2\right) = g\left(\sum_{a=1}^n \xi_a^1\left(e_a \otimes \eta_1\right), \xi_2 \otimes \eta_2\right) \\ &= g\left(\sum_{a,b=1}^n \xi_a^1 \eta_b^1 e_a \otimes e_b, \sum_{c,d=1}^n \xi_c^2 \eta_d^2 e_c \otimes e_d\right) = \sum_{a,b,c,d=1}^n \xi_a^1 \eta_b^1 \xi_c^2 \eta_d^2 g\left(e_a \otimes e_b, e_c \otimes e_d\right) \\ &= \sum_{a,b,c,d=1}^n \xi_a^1 \eta_b^1 \xi_c^2 \eta_d^2 g_{abcd} = g_1\left(\sum_{a=1}^n \xi_a^1 e_a, \sum_{c=1}^n \xi_c^2 e_c\right) g_2\left(\sum_{b=1}^n \eta_b^1 e_b, \sum_{d=1}^n \eta_d^2 e_c\right) \\ &= g_1\left(\xi_1, \xi_2\right) g_2\left(\eta_1, \eta_2\right). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que essa transformação é um produto interno em $E_1 \otimes E_2$:

$$\begin{aligned} g\left(\xi_1 \otimes \eta_1 + u \otimes v, \xi_2 \otimes \eta_2\right) &= g\left(\sum_{a,b=1}^n \xi_a \eta_b e_a \otimes e_b + \sum_{a,b=1}^n u_a v_b e_a \otimes e_b, \xi_2 \otimes \eta_2\right) \\ &= g\left(\sum_{a,b=1}^n \left(\xi_a \eta_b + u_a v_b\right) e_a \otimes e_b, \xi_2 \otimes \eta_2\right) \\ &= g\left(\left(\sum_{a,b=1}^n \left(\xi_a \eta_b + u_a v_b\right) e_a\right) \otimes e_b, \xi_2 \otimes \eta_2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_1\left(\sum_{a,b=1}^{n}\left(\xi_a\eta_b+u_av_b\right)e_a,\xi_2\right)g_2\left(e_b,\eta_2\right)\\
&= \sum_{a,b=1}^{n}\left(\xi_a\eta_b+u_av_b\right)g_1\left(e_a,\xi_2\right)g_2\left(e_b,\eta_2\right)\\
&= \sum_{a,b=1}^{n}\xi_a\eta_bg_1\left(e_a,\xi_2\right)g_2\left(e_b,\eta_2\right)+\sum_{a,b=1}^{n}u_av_bg_1\left(e_a,\xi_2\right)g_2\left(e_b,\eta_2\right)\\
&= g_1\left(\sum_{a=1}^{n}\xi_ae_a,\xi_2\right)g_2\left(\sum_{b=1}^{n}\eta_be_b,\eta_2\right)+g_1\left(\sum_{a=1}^{n}u_ae_a,\xi_2\right)g_2\left(\sum_{b=1}^{n}v_be_b,\eta_2\right).
\end{aligned}$$

Voltando aos termos originais, segue que

$$\begin{aligned}
g\left(\xi_1\otimes\eta_1+u\otimes v,\xi_2\otimes\eta_2\right) &= g_1\left(\xi_1,\xi_2\right)g_2\left(\eta_1,\eta_2\right)+g_1\left(u,\xi_2\right)g_2\left(v,\eta_2\right)\\
&= g\left(\xi_1\otimes\eta_1,\xi_2\otimes\eta_2\right)+g\left(u\otimes v,\xi_2\otimes\eta_2\right).
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
g\left(\lambda\left(\xi_1\otimes\eta_1\right),\xi_2\otimes\eta_2\right) &= g\left(\left(\lambda\xi_1\right)\otimes\eta_1,\xi_2\otimes\eta_2\right)=g_1\left(\lambda\xi_1,\xi_2\right)g_2\left(\eta_1,\eta_2\right)\\
&= \lambda g_1\left(\xi_1,\xi_2\right)g_2\left(\eta_1,\eta_2\right)=\lambda g\left(\xi_1\otimes\eta_1,\xi_2\otimes\eta_2\right).
\end{aligned}$$

Mais ainda,

$$g\left(\xi_1\otimes\eta_1,\xi_2\otimes\eta_2\right)=g_1\left(\xi_1,\xi_2\right)g_2\left(\eta_1,\eta_2\right)=g_1\left(\xi_2,\xi_1\right)g_2\left(\eta_2,\eta_1\right)=g\left(\xi_2\otimes\eta_2,\xi_1\otimes\eta_1\right).$$

Por fim, as positividades definidas de g_1 e g_2 nos garantem que

$$g\left(\xi_1\otimes\eta_1,\xi_1\otimes\eta_1\right)=g_1\left(\xi_1,\xi_1\right)g_2\left(\eta_1,\eta_1\right)\geq 0,$$

sendo que vale a igualdade se e somente se $\xi_1=0$ ou $\eta_1=0$, ou seja, se e somente se $\xi_1\otimes\eta_1=0$.

Com relação à unicidade, se existe outra métrica $\widetilde{g}$ em $E_1\otimes E_2$ tal que vale a expressão (A.5), então

$$\widetilde{g}\left(e_i\otimes c_j,e_k\otimes c_l\right)=g_1\left(e_i,e_k\right)g_2\left(c_j,c_l\right)=g_{ikjl}=\left(g_1\right)_{ik}\left(g_2\right)_{jl}=g\left(e_i\otimes c_j,e_k\otimes c_l\right).$$

Pela igualdade na base concluímos que $\widetilde{g}=g$.

A construção de métricas para fibrados tensoriais agora segue. Este produto interno está bem definido já que a métrica construída em um produto tensorial de fibrados duais concorda com a construída em fibrados duais de um produto tensorial.

Exemplo A.5 (Produto interno de tensores) *Dados tensores $S, T \in \mathcal{T}_l^k(TM)$, o produto interno, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em p é*

$$\begin{aligned}
&\langle S, T\rangle = \left\langle \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_k, \eta^1 \otimes ... \otimes \eta^l \otimes Y_1 \otimes ... \otimes Y_k \right\rangle \\
&= g\left(\omega^1, \eta^1\right) ... g\left(\omega^l, \eta^l\right) g\left(X_1, Y_1\right) ... g\left(X_k, Y_k\right) \\
&= g\left(\omega^1_{a_1} dx^{a_1}, \eta^1_{b_1} dx^{b_1}\right) ... g\left(\omega^l_{a_l} dx^{a_l}, \eta^l_{b_l} dx^{b_l}\right) g\left(X_1^{i_1}\partial_{i_1}, Y_1^{j_1}\partial_{j_1}\right) ... g\left(X_k^{i_k}\partial_{i_k}, Y_k^{j_k}\partial_{j_k}\right) \\
&= \textstyle\sum_{a_1,b_1...a_l,b_l,i_1,j_1...i_k,j_k=1}^{n} \omega^1_{a_1}\eta^1_{b_1}\omega^l_{a_l}\eta^l_{b_l} X_1^{i_1} Y_1^{j_1} X_k^{i_k} Y_k^{j_k} g\left(dx^{a_1}, dx^{b_1}\right) ... g\left(dx^{a_l}, dx^{b_l}\right) g\left(\partial_{i_1}, \partial_{j_1}\right) ... g\left(\partial_{i_k}, \partial_{j_k}\right) \\
&= \textstyle\sum_{a_1,b_1...a_l,b_l,i_1,j_1...i_k,j_k=1}^{n} g^{a_1 b_1} ... g^{a_l b_l} g_{i_1 j_1} ... g_{i_k j_k} \omega^1_{a_1}\eta^1_{b_1} ... \omega^l_{a_l}\eta^l_{b_l} X_1^{i_1} Y_1^{j_1} ... X_k^{i_k} Y_k^{j_k} \\
&= \textstyle\sum_{a_1,b_1...a_l,b_l,i_1,j_1...i_k,j_k=1}^{n} g^{a_1 b_1} ... g^{a_l b_l} g_{i_1 j_1} ... g_{i_k j_k} \omega^1_{a_1} ... \omega^l_{a_l} X_1^{i_1} ... X_k^{i_k} \eta^1_{b_1} ... \eta^l_{b_l} Y_1^{j_1} ... Y_k^{j_k} \\
&= \textstyle\sum_{a_1,b_1...a_l,b_l,i_1,j_1...i_k,j_k=1}^{n} g^{a_1 b_1} ... g^{a_l b_l} g_{i_1 j_1} ... g_{i_k j_k} S_{a_1...a_l}{}^{i_1...i_k} T_{b_1...b_l}{}^{j_1...j_k},
\end{aligned}$$

onde usamos a soma de Einstein na terceira igualdade e S e T são dados pelas seguintes expressões:

$$S = \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes X_1 \otimes ... \otimes X_k \qquad e \qquad T = \eta^1 \otimes ... \otimes \eta^l \otimes Y_1 \otimes ... \otimes Y_k.$$

A.0.1 Conexões e Curvaturas

As conexões promovem uma forma invariante por mudança de coordenadas de tomar derivadas covariantes de campos vetoriais. Em $\mathbb{R}^n$ a derivada de um campo vetorial $X = \sum_{i=1}^n X^i e_i$ na direção de $v \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$D_v X := \sum_{i=1}^{n} v\left(X^i\right) e_i.$$

Vemos que D_v deriva apenas os coeficientes mantendo a base constante. Contudo, não há uma forma simples de comparar vetores de diferentes espaços vetoriais, assim, não há uma forma invariante análoga definida naturalmente para variedades mais abstratas. Para contornar isso, impomos uma estrutura adicional- na forma de um operador de conexão- que promove uma maneira de "conectar"os espaços tangentes.

Nosso método aqui é especificar diretamente como uma conexão atua em elementos de $\Gamma(E)$ como um módulo sobre $C^\infty(M)$. Eles são de importância central na geometria moderna em grande parte porque permitem uma comparação entre a geometria local em um ponto e a geometria local em outro ponto.

Definição A.14 (Conexão) *Uma* ***conexão*** *∇ em um fibrado vetorial E sobre uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E),$$

escrito como $(X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma$. *que satisfaz as seguintes propriedades:*

1) ∇ *é* $C^{\infty}(M)$*-linear em* $\mathfrak{X}(M)$*:*

$$\nabla_{fX+gY}\sigma = f\nabla_X\sigma + g\nabla_Y\sigma, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,,\ f, g \in C^{\infty}(M).$$

2) ∇ *é* $\mathbb{R}$*-linear em* $\Gamma(E)$*:*

$$\nabla_X(a\sigma_1 + b\sigma_2) = a\nabla_X\sigma_1 + b\nabla_X\sigma_2, \qquad \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

3) *Satisfaz a seguinte regra do produto:*

$$\nabla_X(f\sigma) = X(f)\,\sigma + f\nabla_X\sigma, \qquad \sigma \in \Gamma(E),\ f, \in C^{\infty}(M).$$

Dizemos que $\nabla_X\sigma$ *é a* ***derivada covariante*** *de* σ *na direção de* X*.*

Observação A.1 *Equivalentemente, podemos enxergar* ∇ *como*

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma\left(T^*M \otimes E \simeq Hom\,(TM, E)\right),$$

que é $\mathbb{R}$*-linear (pelo item 2) e satisfaz a regra do produto (pelo item 3). Se* $\sigma \in \Gamma(E)$ *então* $\nabla\sigma : \Gamma(TM) \to \Gamma(E)$ *é* $C^{\infty}(M)$*-linear (pelo item 1). Segue da Proposição A.4 que* $\nabla\sigma$ *é um tensor que atua em* TM *e têm valores em* E*.*

Para uma conexão ∇ no fibrado tangente TM, definimos os **símbolos de Christoffel** de ∇ em um sistema de coordenadas (U, φ) por

$$\Gamma_{ij}^{\ \ k} := dx^k\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j\right), \tag{A.6}$$

ou equivalentemente,

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ \ k}\partial_k,$$

para todo $i = 1, ..., n$. Mais geralmente, os símbolos de Christoffel de uma conexão ∇ em um fibrado vetorial E pode ser definido com respeito a um referencial local $\{\xi_\alpha\}$ pela equação

$$\nabla_{\partial_i}\xi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma_{i\alpha}^{\ \ \beta}\xi_\beta.$$

Além disso, uma conexão no fibrado tangente nos proporciona a seguintes definições:

Definição A.15 (Geodésica) *Sejam M uma variedade diferenciável e ∇ uma conexão em TM. Uma curva suave $\gamma : J \to M$, sendo $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo com interior não vazio, é dita* ***geodésica*** *em relação a ∇ se $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$, para todo $t \in J$.*

Definição A.16 (Exponencial) *Considere uma variedade diferenciável M com uma conexão ∇ em TM. A* ***função exponencial*** *da conexão ∇ é definida da seguinte maneira:*

$$\exp : A_p \in \mathcal{E} \to \gamma_{A_p}(1) \in M,$$

em que $\mathcal{E} := \left\{A_p \in TM : [0,1] \in J_{A_p}\right\}$, sendo J_{A_p} o intervalo maximal de definição da geodésica γ_{A_p} tal que $\gamma_{A_p}(0) = p$ e $\gamma'_{A_p}(0) = A_p$. Além disso, podemos restringir essa noção a um ponto $p \in M$ da seguinte maneira:

$$\exp_p : v \in \mathcal{E}_p \to \gamma_v(1) \in M,$$

em que $\mathcal{E}_p := \{v \in T_pM : [0,1] \in J_v\}$.

Temos uma propriedade muito importante dessa aplicação:

Proposição A.5 *Considere uma variedade diferenciável M. Através da identificação canônica $T_{0_p}(T_pM) \simeq T_pM$ fica definido o diferencial*

$$d\left(\exp_p\right)_{0_p} : T_pM \to T_pM.$$

Para todo $p \in M$, $d\left(\exp_p\right)_{0_p} = Id$.

Demonstração. De fato, seja $v \in T_pM$. Uma curva em $\mathcal{E}_p$ na direção de v é $\sigma(t) := tv$. Segue da definição de diferencial que

$$d\left(\exp_p\right)_{0_p}(v) = \frac{d}{dt}_{t=0}\left(\exp_p(\sigma(t))\right) = \frac{d}{dt}_{t=0}\left(\exp_p(tv)\right) = \frac{d}{dt}_{t=0}(\gamma_{tv}(1)) = \frac{d}{dt}_{t=0}(\gamma_v(t)) = v.$$

■

Corolário A.2 *Considere uma variedade diferenciável M. Para todo $p \in M$, existe uma vizinhança aberta $U_p \subset T_pM$ de 0_p tal que $V_p := \exp(U_p)$ é aberto em M e a função $\exp_{U_p} : U_p \to V_p$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Pela proposição anterior,

$$\det\left(d\left(\exp_p\right)_{0_p}\right) = \det\left(Id\right) = 1 \neq 0.$$

O resultado segue diretamente do Teorema da Função Inversa. ■

Esse resultado motiva a seguinte definição:

Definição A.17 (Raio de Injetividade) *Considere uma variedade riemanniana (M, g). Para todo $p \in M$, definimos o conjunto: $\mathcal{I}_p := \{\varepsilon > 0 : \exp|_{B_\varepsilon(0_p)}$ é um difeomorfismo com a imagem$\}$, em que $B_\varepsilon(0_p) \subset T_pM$ é a bola aberta de centro 0_p e raio ε na métrica g. O* ***raio de injetividade*** *de ∇ em p é o extremo superior $inj_g(p) := \sup\left(\mathcal{I}_p\right) \in (0, +\infty]$.*

Notemos que o fato que $inj_g(p) > 0$ segue do corolário anterior, pois a vizinhança U_p no enunciado contém uma bola aberta.

Definição A.18 (Campo de Jacobi) *Considere uma variedade riemanniana M, seja $\sigma : [a, b] \to M$ uma geodésica e seja $\sum : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ uma função suave tal que $\sum(0, \cdot) = \sigma(\cdot)$ e $\sigma_s(t) := \sum(s, t)$ é uma geodésica, para todo $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$. Seja $J : [a, b] \to M$ um campo suave ao longo de σ definido por*

$$J(t) = \left(\partial_s \sum\right)(0, t)$$

Dizemos que J é um ***campo de Jacobi*** *se satisfaz a seguinte equação:*

$$\left({}^\sigma\nabla_{\partial_t}\left({}^\sigma\nabla_{\partial_t} J\right)\right)(s, t) + R\left(J(s, t), \sigma'(t)\right)\sigma'(t) = 0,$$

para todo $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$, em que R é o tensor de curvatura riemanniana de M e ${}^\sigma\nabla$ é a conexão pull-back em relação a σ (para mais detalhes veja a Seção A.0.1).

Derivada Covariante de Campos Tensoriais

Em aplicações, muitas vezes estamos interessados em calcular a derivada covariante nos fibrados tensoriais $\mathcal{T}_l^k(M)$. Este é um caso especial de uma construção mais geral que faremos posteriormente.

Proposição A.6 *Dada uma conexão em TM existe uma única conexão no fibrado tensorial $\mathcal{T}_l^k(M)$, também denotada por ∇, que satisfaz as seguintes propriedades:*

1) *Em TM, ∇ é igual com a conexão dada;*

2) *Em* $C^{\infty}(M) = T^0 M$, ∇ *é a ação de um vetor como uma derivação:*

$$\nabla_X f = X(f),$$

para todo $f \in C^{\infty}(M)$*;*

3) ∇ *obedece a regra do produto com respeito ao produto tensorial:*

$$\nabla_X (F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G),$$

para todo tensor F *e* G*;*

4) ∇ *comuta com todas as contrações, isto é,*

$$\nabla_X (Tr(F)) = Tr(\nabla_X F),$$

para todo tensor F*.*

Lema A.3 (Nabla é linear) *O operador* $\nabla : \mathcal{T}_l^k(M) \to \mathcal{T}_l^{k+1}(M)$ *é linear, para todo* $k \geq 1$ *e* $l = 0, 1$*.*

Demonstração. De fato, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $S, T \in \mathcal{T}_l^k(M)$, então

$$\begin{aligned}
(\nabla(\alpha S + \beta T))_{i_1,...,i_k} &= \left(\nabla_{\partial_{i_1}}(\alpha S + \beta T)\right)_{i_2,...,i_k} = \partial_{i_1}\left((\alpha S + \beta T)_{i_2,...,i_k}\right) \\
&\quad - \sum_{j=2}^{k} (\alpha S + \beta T)\left(\partial_{i_2}, ..., \nabla_{\partial_{i_1}} \partial_{i_j}, ..., \partial_{i_k}\right) \\
&= \partial_{i_1}\left(\alpha S_{i_2,...,i_k} + \beta T_{i_2,...,i_k}\right) \\
&\quad - \sum_{j=2}^{k} \left(\alpha S\left(\partial_{i_2}, ..., \nabla_{\partial_{i_1}} \partial_{i_j}, ..., \partial_{i_k}\right) + \beta T\left(\partial_{i_2}, ..., \nabla_{\partial_{i_1}} \partial_{i_j}, ..., \partial_{i_k}\right)\right) \\
&= \alpha \partial_{i_1}\left(S_{i_2,...,i_k}\right) - \alpha \sum_{j=2}^{k} S\left(\partial_{i_2}, ..., \nabla_{\partial_{i_1}} \partial_{i_j}, ..., \partial_{i_k}\right) + \beta \partial_{i_1}\left(T_{i_2,...,i_k}\right) \\
&\quad - \beta \sum_{j=2}^{k} T\left(\partial_{i_2}, ..., \nabla_{\partial_{i_1}} \partial_{i_j}, ..., \partial_{i_k}\right) \\
&= \alpha (\nabla S)_{i_1,...,i_k} + \beta (\nabla T)_{i_1,...,i_k},
\end{aligned}$$

onde $\left\{\partial_{i_j}\right\}_{j=1}^{n}$ é uma base coordenada arbitrária. ∎

Exemplo A.6 *Vamos calcular a derivada covariante de uma* 1*-forma* $\omega \in \Gamma(T^* M)$ *com respeito a um* *campo vetorial X. Como*

$$Tr\left(dx^j \otimes \partial_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(dx^j \otimes \partial_i\right)\left(\partial_k, dx^k\right) = \sum_{j=1}^{n} dx^j\left(\partial_k\right)\partial_i\left(dx^k\right) = \delta_{jk}\delta_{ik} = \delta_{ij},$$

segue que $\nabla_X\left(Tr\left(dx^i \otimes \partial_i\right)\right) = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\nabla_X\left(Tr\left(dx^j \otimes \partial_i\right)\right) &= Tr\left(\nabla_X\left(dx^j \otimes \partial_i\right)\right) = Tr\left(\left(\nabla_X dx^j\right) \otimes \partial_i + dx^j \otimes \left(\nabla_X \partial_i\right)\right) \\
&= Tr\left(\left(\nabla_X dx^j\right) \otimes \partial_i\right) + Tr\left(dx^j \otimes \left(\nabla_X \partial_i\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\nabla_X dx^j\right) \otimes \partial_i\left(\partial_k, dx^k\right) + \sum_{k=1}^{n} dx^j \otimes \left(\nabla_X \partial_i\right)\left(\partial_k, dx^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\nabla_X dx^j\right)\left(\partial_k\right)\partial_i\left(dx^k\right) + \sum_{k=1}^{n} dx^j\left(\partial_k\right)\left(\nabla_X \partial_i\right)\left(dx^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\nabla_X dx^j\right)\left(\partial_k\right)\delta_{ik} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk}\left(\nabla_X \partial_i\right)\left(dx^k\right) \\
&= \left(\nabla_X dx^j\right)\left(\partial_i\right) + \left(\nabla_X \partial_i\right)\left(dx^j\right),
\end{aligned}$$

ou seja, vemos que

$$\left(\nabla_X dx^j\right)\left(\partial_i\right) = -\left(\nabla_X \partial_i\right)\left(dx^j\right) = -dx^j\left(\nabla_X \partial_i\right).$$

E portanto,

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_X \omega\right)\left(\partial_k\right) &= \left(\nabla_X\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i\right)\right)\left(\partial_k\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\nabla_X\left(\omega_i dx^i\right)\right)\left(\partial_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\nabla_X\left(\omega_i\right) dx^i + \omega_i \nabla_X\left(dx^i\right)\right)\left(\partial_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(X\left(\omega_i\right) dx^i + \omega_i \nabla_X\left(dx^i\right)\right)\left(\partial_k\right) = \sum_{i=1}^{n} X\left(\omega_i\right)\delta_{ik} - \omega_i dx^i\left(\nabla_X \partial_k\right) \\
&= X\left(\omega_k\right) - \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i\left(\nabla_X \partial_k\right) = X\left(\omega_k\right) - \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i\left(\nabla_{\sum_{j=1}^{n} X^j \partial_j} \partial_k\right) \\
&= X\left(\omega_k\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i dx^i\left(X^j \nabla_{\partial_j} \partial_k\right) = X\left(\omega_k\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i X^j dx^i\left(\nabla_{\partial_j} \partial_k\right) \\
&= X\left(\omega_k\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i X^j \Gamma_{jk}^i \\
&= \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i\left(\omega_k\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \omega_i X^j \Gamma_{jk}^i,
\end{aligned}$$

ou seja, $\nabla_X \omega = \left(\sum_{i=1}^n X^i \partial_i (\omega_k) - \sum_{i,j=1}^n \omega_i X^j \Gamma_{jk}^i\right) dx^k.$

Em geral, temos as seguintes fórmulas:

Proposição A.7 (Derivada de um Tensor) *Para todo campo tensorial* $F \in \mathcal{J}_l^k(M)$*, campos vetoriais* $Y^i \in \Gamma(TM)$ *e 1-formas* $\omega^i \in \Gamma(T^*M)$*,* $i = 1, ..., n$*, temos*

$$\begin{aligned}
(\nabla_X F)\left(\omega^1, ..., \omega^l, Y^1, ..., Y^k\right) &= X\left(F\left(\omega^1, ..., \omega^l, Y^1, ..., Y^k\right)\right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{l} F\left(\omega^1, ..., \nabla_X \omega^j, ..., \omega^l, Y^1, ..., Y^k\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k} F\left(\omega^1, ..., \omega^l, Y^1, ..., \nabla_X Y^k, ..., Y^k\right).
\end{aligned}$$

Demonstração. Pela igualdade (A.2) temos que

$$Tr\left(F \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes Y_1 \otimes ... \otimes Y_k\right) = F\left(\omega^1, ..., \omega^l, Y_1, ..., Y_k\right).$$

Assim, pela Proposição A.6 obtemos

$$\begin{aligned}
X\left(F\left(\omega^1, ..., \omega^l, Y_1, ..., Y_k\right)\right) &= \nabla_X\left(F\left(\omega^1, ..., \omega^l, Y_1, ..., Y_k\right)\right) = \nabla_X\left(Tr\left(F \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes Y_1 \otimes ... \otimes Y_k\right)\right) \\
&= Tr\left(\nabla_X\left(F \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes Y_1 \otimes ... \otimes Y_k\right)\right) \\
&= Tr\left((\nabla_X F) \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes Y_1 \otimes ... \otimes Y_k\right) \\
&\quad + Tr\left(F \otimes \left(\nabla_X \omega^1\right) \otimes ... \otimes \omega^l \otimes Y_1 \otimes ... \otimes Y_k\right) \\
&\quad + ... + Tr\left(F \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \nabla_X \omega^l \otimes Y_1 \otimes ... \otimes Y_k\right) \\
&\quad + Tr\left(F \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes \nabla_X Y_1 \otimes ... \otimes Y_k\right) \\
&\quad + ... + Tr\left(F \otimes \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes Y_1 \otimes ... \otimes \nabla_X Y_k\right).
\end{aligned}$$

Segue da expressão (A.2) que

$$\begin{aligned}
X\left(F\left(\omega^1, ..., \omega^l, Y_1, ..., Y_k\right)\right) &= (\nabla_X F)\left(\omega^1, ..., \omega^l, Y_1, ..., Y_k\right) + F\left(\nabla_X \omega^1, ..., \omega^l, Y_1, ..., Y_k\right) \\
&\quad + ... + F\left(\omega^1, ..., \nabla_X \omega^l, Y_1, ..., Y_k\right) \\
&\quad + F\left(\omega^1, ..., \omega^l, \nabla_X Y_1, ..., Y_k\right) + F\left(\omega^1, ..., \omega^l, Y_1, ..., \nabla_X Y_k\right).
\end{aligned}$$

■

Como a derivada covariante é $C^\infty(M)$-linear sobre X, definimos $\nabla F \in \Gamma\left(\otimes^{k+1} T^*M \otimes^l TM\right)$ por

$$(\nabla F)\left(X, Y_1, ..., Y_k, \omega^1, ..., \omega^l\right) := (\nabla_X F)\left(Y_1, ..., Y_k, \omega^1, ..., \omega^l\right),$$

para todo $F \in \mathcal{J}_l^k(M)$. Assim, (neste caso) ∇ é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear $\nabla : \mathcal{J}_l^k(M) \to \mathcal{J}_l^{k+1}(M)$ que leva (k,l)-campos tensoriais em $(k+1,l)$-tensoriais.

Além disso, se (M,g) é uma variedade riemanniana e $f \in C^\infty(M)$, definimos o **gradiente** de f como um campo vetorial $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ definido pela seguinte expressão:

$$g(\nabla f, X) = X(f), \tag{A.7}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

A Segunda Derivada Covariante de Campos Tensoriais

Utilizando os resultados da seção prévia, podemos dar sentido a uma **segunda derivada covariante** ∇^2. Para fazer isso, suponha $E = \mathcal{T}_l^k(M)$ um fibrado tensorial munido de uma conexão ∇. Pela Observação A.1, se $F \in \Gamma(E)$ então $\nabla F \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ e portanto $\nabla^2 F := \nabla(\nabla F) \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$.Logo, para todo campo vetorial $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ segue que

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 F\right)(X,Y) &= (\nabla(\nabla F))(X,Y) = (\nabla_X(\nabla F))(Y) = \nabla_X(\nabla F(Y)) - \nabla F(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y F) - \nabla_{\nabla_X Y} F.\end{aligned} \tag{A.8}$$

Exemplo A.7 *Se $f \in C^\infty(M)$ é um $(0,0)$-tensor, então $\nabla^2 f$ é um $(2,0)$-tensor. E em coordenadas locais temos:*

$$\begin{aligned}\nabla^2_{\partial_i,\partial_j} f \quad : &= \left(\nabla^2 f\right)(\partial_i, \partial_j) = \nabla_{\partial_i}\left(\nabla_{\partial_j} f\right) - \nabla_{\nabla_{\partial_i}\partial_j} f = \partial_i(\partial_j(f)) - (\nabla_{\partial_i}\partial_j)(f) \\ &= \partial_i(\partial_j(f)) - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k(f).\end{aligned}$$

A equação (A.8) nos dá uma fórmula muito útil:

Proposição A.8 *Se ∇ é uma conexão em TM, então*

$$\nabla^2_{Y,X} = \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{\nabla_X Y} : \mathcal{J}_l^k(M) \to \mathcal{J}_l^k(M), \tag{A.9}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Ao longo da teoria, vamos utilizar as seguintes igualdades:

$$\nabla_X \nabla_Y F := \nabla^2_{X,Y} F = (\nabla(\nabla F))(X, Y, \cdots) = (\nabla_X \nabla F)(Y, \cdots).$$

Notemos que

$$\nabla_X \nabla_Y F = \nabla_X (\nabla_Y F) - \nabla_{\nabla_X Y} F,$$

ou seja, em geral $\nabla_X \nabla_Y F \neq \nabla_X (\nabla_Y F)$.

Mais ainda, para simplificar a notação, podemos escrever $\nabla_i := \nabla_{\partial_i}$ e além disso,

$$(\nabla_p F)^{i_1 \ldots i_l}{}_{j_1 \ldots j_k} := \left(\nabla_{\partial_p} F\right)\left(dx^{i_1}, ..., dx^{i_l}, \partial_{j_1}, ..., \partial_{j_k}\right).$$

Definimos a **Hessiana** de $f \in C^\infty(M)$ como

$$Hess(f) := \nabla df.$$

Quando aplicamos em campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vemos que

$$\begin{aligned} Hess(f)(X, Y) &= (\nabla df)(X, Y) = (\nabla_X df)(Y) = \nabla_X (df(Y)) - df(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X (Y(f)) - df(\nabla_X Y) \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= \nabla^2_{X,Y} f. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} Hess(f)(X, Y) - Hess(f)(Y, X) &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) - Y(X(f)) + (\nabla_Y X)(f) \quad \text{(A.10)} \\ &= [X, Y](f) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(f), \end{aligned}$$

ou seja, vemos que $Hess(f)$ é simétrica, para todo $f \in C^\infty(M)$, se e somente se a conexão ∇ é simétrica, isto é,

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Conexão no Fibrado Dual e no Produto Tensorial de Fibrados

Até agora, vimos a derivada covariante no produto tensorial $\otimes^k T^*M \otimes^l TM = \mathcal{T}_l^k(M)$. Muito da mesma estrutura funciona em um fibrado vetorial geral também:

Proposição A.9 (Conexão dual) *Se ∇ é uma conexão em E, então a aplicação definida por*

$$\left(\nabla_X^* \omega\right)(\xi) = X(\omega(\xi)) - \omega(\nabla_X \xi)$$

para todo $\xi \in \Gamma(E)$, $\omega \in \Gamma(E^*)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ define uma conexão em E^* (denominada conexao induzida por ∇ em E^*).

Demonstração. Defina a aplicação $\nabla^* : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E^*) \to \Gamma(E^*)$ por

$$\left(\nabla_X^* \omega\right)(\xi) = X(\omega(\xi)) - \omega(\nabla_X \xi).$$

Dados $f, g \in C^\infty(M)$ e $A, B \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \Gamma(E)$ e $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Gamma(E^*)$ segue que

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{fA+gB}^* \omega\right)(\xi) &= (fA+gB)(\omega(\xi)) - \omega\left(\nabla_{fA+gB}\xi\right) = fA(\omega(\xi)) + gB(\omega(\xi)) - \omega(f\nabla_A \xi + g\nabla_B \xi) \\
&= fA(\omega(\xi)) + gB(\omega(\xi)) - f\omega(\nabla_A \xi) - g\omega(\nabla_B \xi) \\
&= f(A(\omega(\xi)) - \omega(\nabla_A \xi)) + g(B(\omega(\xi)) - \omega(\nabla_B \xi)) \\
&= f\left(\nabla_A^* \omega\right)(\xi) + g\left(\nabla_B^* \omega\right)(\xi),
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_A^*(f\omega_1 + g\omega_2)\right)(\xi) &= A((f\omega_1 + g\omega_2)(\xi)) - (f\omega_1 + g\omega_2)(\nabla_A \xi) \\
&= A(f\omega_1(\xi) + g\omega_2(\xi)) - f\omega_1(\nabla_A \xi) - g\omega_2(\nabla_A \xi) \\
&= A(f\omega_1(\xi)) + A(g\omega_2(\xi)) - f\omega_1(\nabla_A \xi) - g\omega_2(\nabla_A \xi) \\
&= A(f)\omega_1(\xi) + fA(\omega_1(\xi)) + A(g)\omega_2(\xi) + gA(\omega_2(\xi)) - f\omega_1(\nabla_A \xi) - g\omega_2(\nabla_A \xi) \\
&= A(f)\omega_1(\xi) + f(A(\omega_1(\xi)) - \omega_1(\nabla_A \xi)) + A(g)\omega_2(\xi) + g(A(\omega_2(\xi)) - \omega_2(\nabla_A \xi)) \\
&= A(f)\omega_1(\xi) + f\left(\nabla_A^* \omega_1\right)(\xi) + A(g)\omega_2(\xi) + g\left(\nabla_A^* \omega_2\right)(\xi).
\end{aligned}$$

■

Proposição A.10 *Se $\nabla^{(i)}$ é uma conexão para E_i, $i = 1, 2$, então a aplicação definida por*

$$\nabla_X\left(\xi_1 \otimes \xi_2\right) = \left(\nabla_X^{(1)} \xi_1\right) \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes \left(\nabla_X^{(2)} \xi_2\right),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi_i \in \Gamma(E_i)$ é uma conexão em $E_1 \otimes E_2$ (denominada conexao induzida por $\nabla^{(i)}$ em $E_1 \otimes E_2$).

Demonstração. Defina a aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E_1 \otimes E_2) \to \Gamma(E_1 \otimes E_2)$ por

$$\nabla_X\left(\xi_1 \otimes \xi_2\right) = \left(\nabla_X^{(1)} \xi_1\right) \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes \left(\nabla_X^{(2)} \xi_2\right).$$

Dados $f, g \in C^\infty(M)$ e $A, B \in \mathfrak{X}(M)$, $(\xi_1 \otimes \xi_2), (\eta_1 \otimes \eta_2) \in \Gamma(E_1 \otimes E_2)$, segue que

$$\begin{aligned}
\nabla_{fA+gB}\left(\xi_1 \otimes \xi_2\right) &= \left(\nabla_{fA+gB}^{(1)} \xi_1\right) \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes \left(\nabla_{fA+gB}^{(2)} \xi_2\right) \\
&= \left(f\nabla_A^{(1)} \xi_1 + g\nabla_B^{(1)} \xi_1\right) \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes \left(f\nabla_A^{(2)} \xi_2 + g\nabla_B^{(2)} \xi_2\right) \\
&= f\left(\nabla_A^{(1)} \xi_1\right) \otimes \xi_2 + g\left(\nabla_B^{(1)} \xi_1\right) \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes f\nabla_A^{(2)} \xi_2 + \xi_1 \otimes g\nabla_B^{(2)} \xi_2 \\
&= f\left(\nabla_A^{(1)} \xi_1\right) \otimes \xi_2 + g\left(\nabla_B^{(1)} \xi_1\right) \otimes \xi_2 + f\xi_1 \otimes \nabla_A^{(2)} \xi_2 + g\xi_1 \otimes \nabla_B^{(2)} \xi_2 \\
&= f\left(\left(\nabla_A^{(1)} \xi_1\right) \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes \nabla_A^{(2)} \xi_2\right) + g\left(\left(\nabla_B^{(1)} \xi_1\right) \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes \nabla_B^{(2)} \xi_2\right) \\
&= f\nabla_A\left(\xi_1 \otimes \xi_2\right) + g\nabla_B\left(\xi_1 \otimes \xi_2\right).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\nabla_A\left(f\left(\xi_1 \otimes \xi_2\right) + g\left(\eta_1 \otimes \eta_2\right)\right) &= \nabla_A\left(f\left(\sum_{j=1}^n \xi_1^j \varphi_j \otimes \sum_{k=1}^n \xi_2^k \psi_k\right) + g\left(\sum_{j=1}^n \eta_1^j \varphi_j \otimes \sum_{k=1}^n \eta_2^k \psi_k\right)\right) \\
&= \nabla_A\left(\sum_{j,k=1}^n \left(f\xi_1^j \xi_2^k + g\eta_1^j \eta_2^k\right) \varphi_j \otimes \psi_k\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^n \nabla_A\left(\left(f\xi_1^j \xi_2^k + g\eta_1^j \eta_2^k\right) \varphi_j \otimes \psi_k\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^n \left(\nabla_A^{(1)}\left(f\xi_1^j \xi_2^k + g\eta_1^j \eta_2^k\right) \varphi_j\right) \otimes \psi_k + \left(f\xi_1^j \xi_2^k + g\eta_1^j \eta_2^k\right) \varphi_j \otimes \left(\nabla_A^{(2)} \psi_k\right).
\end{aligned}$$

Usando a regra do produto, vemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_A\left(f\left(\xi_1\otimes\xi_2\right)+g\left(\eta_1\otimes\eta_2\right)\right) &= \sum_{j,k=1}^{n} A\left(f\xi_1^j\xi_2^k+g\eta_1^j\eta_2^k\right)\varphi_j\otimes\psi_k+\left(f\xi_1^j\xi_2^k+g\eta_1^j\eta_2^k\right)\nabla_A^{(1)}\varphi_j\otimes\psi_k \\
&\quad +\left(f\xi_1^j\xi_2^k+g\eta_1^j\eta_2^k\right)\varphi_j\otimes\left(\nabla_A^{(2)}\psi_k\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n}\left(A\left(f\right)\xi_1^j\xi_2^k+fA\left(\xi_1^j\xi_2^k\right)+A\left(g\right)\eta_1^j\eta_2^k+gA\left(\eta_1^j\eta_2^k\right)\right)\varphi_j\otimes\psi_k \\
&\quad +\left(f\xi_1^j\xi_2^k+g\eta_1^j\eta_2^k\right)\nabla_A^{(1)}\varphi_j\otimes\psi_k+\left(f\xi_1^j\xi_2^k+g\eta_1^j\eta_2^k\right)\varphi_j\otimes\left(\nabla_A^{(2)}\psi_k\right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n}\left(A\left(f\right)\xi_1^j\varphi_j\otimes\xi_2^k\psi_k+fA\left(\xi_1^j\xi_2^k\right)\varphi_j\otimes\psi_k+A\left(g\right)\eta_1^j\varphi_j\otimes\eta_2^k\psi_k\right) \\
&\quad +\sum_{j,k=1}^{n} gA\left(\eta_1^j\eta_2^k\right)\varphi_j\otimes\psi_k+\left(f\xi_1^j\xi_2^k+g\eta_1^j\eta_2^k\right)\nabla_A^{(1)}\varphi_j\otimes\psi_k \\
&\quad +\sum_{j,k=1}^{n}+\left(f\xi_1^j\xi_2^k+g\eta_1^j\eta_2^k\right)\varphi_j\otimes\left(\nabla_A^{(2)}\psi_k\right).
\end{aligned}$$

Voltando aos termos ξ_1 e ξ_2, segue que

$$\begin{aligned}
\nabla_A\left(f\left(\xi_1\otimes\xi_2\right)+g\left(\eta_1\otimes\eta_2\right)\right) &= A\left(f\right)\xi_1\otimes\xi_2+f\sum_{j,k=1}^{n}A\left(\xi_1^j\xi_2^k\right)\varphi_j\otimes\psi_k+A\left(g\right)\eta_1\otimes\eta_2 \\
&\quad +g\sum_{j,k=1}^{n}A\left(\eta_1^j\eta_2^k\right)\varphi_j\otimes\psi_k+\sum_{j=1}^{n}\left(f\xi_1^j\nabla_A^{(1)}\varphi_j\otimes\xi_2+g\eta_1^j\nabla_A^{(1)}\varphi_j\otimes\eta_2\right) \\
&\quad +\sum_{k=1}^{n}\left(f\xi_1\otimes\xi_2^k\left(\nabla_A^{(2)}\psi_k\right)+g\eta_1\otimes\eta_2^k\left(\nabla_A^{(2)}\psi_k\right)\right) \\
&= A\left(f\right)\xi_1\otimes\xi_2+A\left(g\right)\eta_1\otimes\eta_2+f\left(\sum_{j=1}^{n}A\left(\xi_1^j\right)\varphi_j\otimes\xi_2+\xi_1\otimes\sum_{k=1}^{n}A\left(\xi_2^k\right)\psi_k\right) \\
&\quad +g\left(\sum_{j=1}^{n}A\left(\eta_1^j\right)\varphi_j\otimes\eta_2+\eta_1\otimes\sum_{k=1}^{n}A\left(\eta_2^k\right)\psi_k\right) \\
&\quad +f\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_1^j\nabla_A^{(1)}\varphi_j\otimes\xi_2+\xi_1\otimes\sum_{k=1}^{n}\xi_2^k\left(\nabla_A^{(2)}\psi_k\right)\right) \\
&\quad +g\left(\sum_{j=1}^{n}\eta_1^j\nabla_A^{(1)}\varphi_j\otimes\eta_2+\eta_1\otimes\sum_{k=1}^{n}\eta_2^k\left(\nabla_A^{(2)}\psi_k\right)\right).
\end{aligned}$$

Por fim, voltando aos termos η_1 e η_2, segue que

$$\begin{aligned}\nabla_A\left(f\left(\xi_1\otimes\xi_2\right)+g\left(\eta_1\otimes\eta_2\right)\right) &= A\left(f\right)\xi_1\otimes\xi_2+A\left(g\right)\eta_1\otimes\eta_2+f\left(\left(\nabla_A^{(1)}\xi_1\right)\otimes\xi_2+\xi_1\otimes\nabla_A^{(2)}\xi_2\right)\\ &\quad +g\left(\left(\nabla_A^{(1)}\eta_1\right)\otimes\eta_2+\eta_1\otimes\nabla_A^{(2)}\eta_2\right)\\ &= A\left(f\right)\xi_1\otimes\xi_2+A\left(g\right)\eta_1\otimes\eta_2+f\nabla_A\left(\xi_1\otimes\xi_2\right)+g\nabla_A\left(\eta_1\otimes\eta_2\right).\end{aligned}$$

■

As proposições acima definem uma conexão canônica em qualquer fibrado tensorial construído a partir de E tomando seu dual e produto tensorial. Em particular, se $S\in\Gamma\left(E_1^*\otimes E_2\right)$ é um tensor agindo em E_1 com valores em E_2, então $\nabla S\in\Gamma\left(T^*M\otimes E_1^*\otimes E_2\right)$. Dado $S=\omega_1\otimes X_2\in\Gamma\left(E_1^*\otimes E_2\right)$, temos que

$$\begin{aligned}\left(\nabla_X S\right)\left(\xi\right) &= \left(\nabla_X\left(\omega_1\otimes X_2\right)\right)\left(\xi\right)=\left(\left(\nabla_X^*\omega_1\right)\otimes X_2\right)\left(\xi\right)+\left(\omega_1\otimes\left(\nabla_X^{E_2}X_2\right)\right)\left(\xi\right)\\ &= \left(\nabla_X^*\omega_1\right)\left(\xi\right)X_2+\omega_1\left(\xi\right)\left(\nabla_X^{E_2}X_2\right)\\ &= \left(X\left(\omega_1\left(\xi\right)\right)-\omega_1\left(\nabla_X^{E_1}\xi\right)\right)X_2+\omega_1\left(\xi\right)\left(\nabla_X^{E_2}X_2\right)\\ &= X\left(\omega_1\left(\xi\right)\right)X_2-\omega_1\left(\nabla_X^{E_1}\xi\right)X_2+\omega_1\left(\xi\right)\left(\nabla_X^{E_2}X_2\right)\\ &= X\left(\omega_1\left(\xi\right)\right)X_2-\left(\omega_1\otimes X_2\right)\left(\nabla_X^{E_1}\xi\right)+\omega_1\left(\xi\right)\left(\nabla_X^{E_2}X_2\right)\\ &= X\left(\omega_1\left(\xi\right)\right)X_2+\omega_1\left(\xi\right)\left(\nabla_X^{E_2}X_2\right)-S\left(\nabla_X^{E_1}\xi\right).\end{aligned}$$

Além disso, notemos que

$$\nabla_X^{E_2}\left(S\left(\xi\right)\right)=\nabla_X^{E_2}\left(\left(\omega_1\otimes X_2\right)\left(\xi\right)\right)=\nabla_X^{E_2}\left(\omega_1\left(\xi\right)X_2\right)=X\left(\omega_1\left(\xi\right)\right)X_2+\omega_1\left(\xi\right)\nabla_X^{E_2}X_2,$$

ou seja,

$$\left(\nabla_X S\right)\left(\xi\right)=\nabla_X^{E_2}\left(S\left(\xi\right)\right)-S\left(\nabla_X^{E_1}\xi\right),$$

onde $\xi\in\Gamma\left(E_1\right)$ e $X\in\mathfrak{X}\left(M\right)$.

Mais ainda, se $\widehat{\nabla}$ é uma conexão em TM, então $\nabla^2 S\in\Gamma\left(T^*M\otimes T^*M\otimes E_1^*\otimes E_2\right)$. Segue que

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 S\right)\left(X,Y,\xi\right) &= \left(\nabla_X\nabla S\right)\left(Y,\xi\right)=\nabla_X^{E_2}\left(\left(\nabla S\right)\left(Y,\xi\right)\right)-\left(\nabla S\right)\left(\widehat{\nabla}_X Y,\xi\right)-\left(\nabla S\right)\left(Y,\nabla_X^{E_1}\xi\right)\\ &= \nabla_X^{E_2}\left(\left(\nabla_Y S\right)\left(\xi\right)\right)-\left(\nabla_{\widehat{\nabla}_X Y}S\right)\left(\xi\right)-\left(\nabla_Y S\right)\left(\nabla_X\xi\right)\\ &= \nabla_X^{E_2}\left(\left(\nabla_Y S\right)\left(\xi\right)\right)-\left(\nabla_Y S\right)\left(\nabla_X\xi\right)-\left(\nabla_{\widehat{\nabla}_X Y}S\right)\left(\xi\right)\\ &= \left(\nabla_X\left(\nabla_Y S\right)\right)\left(\xi\right)-\left(\nabla_{\widehat{\nabla}_X Y}S\right)\left(\xi\right),\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todo $\xi \in \Gamma(E_1)$.

Conexão de Levi-Civita

Quando trabalhamos em variedades riemannianas, é interessante termos uma conexão que "conversa com a métrica". Para isso, precisamos das noções de compatibilidade e simetria:

Definição A.19 (Compatibilidade com uma Métrica) *Uma conexão ∇ em fibrado vetorial E é dita **compatível com uma métrica** g em E se para todo $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ e todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$X(g(\xi,\eta)) = g(\nabla_X \xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X \eta).$$

Se ∇ é compatível com uma métrica g em E, então a conexão induzida em E^* é compatível com a métrica induzida em E^*. De fato, usando a boa funcionalidade da conexão em E^* (também denotada por ∇) com o isomorfismo $\iota_g : E \to E^*$, vemos que

$$\begin{aligned} X(g(\omega,\sigma)) &= X\left(g\left(\iota_g^{-1}(\omega), \iota_g^{-1}(\sigma)\right)\right) \\ &= g\left(\nabla_X\left(\iota_g^{-1}(\omega)\right), \iota_g^{-1}(\sigma)\right) + g\left(\iota_g^{-1}(\omega), \nabla_X\left(\iota_g^{-1}(\sigma)\right)\right) \\ &= g\left(\iota_g^{-1}(\nabla_X\omega), \iota_g^{-1}(\sigma)\right) + g\left(\iota_g^{-1}(\omega), \iota_g^{-1}(\nabla_X\sigma)\right) \\ &= g(\nabla_X\omega, \sigma) + g(\omega, \nabla_X\sigma), \end{aligned}$$

para todo $\omega, \sigma \in E^*$.

Além disso, se as conexões $\nabla^{(1)}$ e $\nabla^{(2)}$ de dois fibrados vetoriais (E_1, g_1) e (E_2, g_2), respectivamente, são compatíveis com a métrica, então a conexão do produto tensorial $(E_1 \otimes E_2, g)$ é compatível com a métrica desse produto. De fato,

$$\begin{aligned} X(g(\xi_1\otimes\eta_1, \xi_2\otimes\eta_2)) &= X(g_1(\xi_1,\xi_2)\, g_2(\eta_1,\eta_2)) \\ &= X(g_1(\xi_1,\xi_2))\, g_2(\eta_1,\eta_2) + g_1(\xi_1,\xi_2)\, X(g_2(\eta_1,\eta_2)) \\ &= g_2(\eta_1,\eta_2)\left(g_1\left(\nabla_X^{(1)}\xi_1, \xi_2\right) + g_1\left(\xi_1, \nabla_X^{(1)}\xi_2\right)\right) \\ &\quad + g_1(\xi_1,\xi_2)\left(g_2\left(\nabla_X^{(2)}\eta_1, \eta_2\right) + g_2\left(\eta_1, \nabla_X^{(2)}\eta_2\right)\right) \\ &= g_1\left(\nabla_X^{(1)}\xi_1\otimes\eta_1, \xi_2\otimes\eta_2\right) + g_1\left(\xi_1\otimes\eta_1, \nabla_X^{(1)}\xi_2\otimes\eta_2\right) \\ &\quad + g_2\left(\xi_1\otimes\nabla_X^{(2)}\eta_1, \xi_2\otimes\eta_2\right) + g_2\left(\xi_1\otimes\eta_1, \xi_2\otimes\nabla_X^{(2)}\eta_2\right). \end{aligned}$$

Pela definição de g, segue que

$$\begin{aligned} X\left(g\left(\xi_1\otimes\eta_1,\xi_2\otimes\eta_2\right)\right) &= g\left(\nabla^{(1)}_X\xi_1\otimes\eta_1+\xi_1\otimes\nabla^{(2)}_X\eta_1,\xi_2\otimes\eta_2\right)\\ &\quad +g\left(\xi_1\otimes\eta_1,\nabla^{(1)}_X\xi_2\otimes\eta_2+\xi_2\otimes\nabla^{(2)}_X\eta_2\right)\\ &= g\left(\nabla_X\left(\xi_1\otimes\eta_1\right),\xi_2\otimes\eta_2\right)+g\left(\xi_1\otimes\eta_1,\nabla_X\left(\xi_2\otimes\eta_2\right)\right), \end{aligned}$$

para todo $\xi_1,\xi_2\in E_1$ e $\eta_1,\eta_2\in E_2$.

Infelizmente a compatibilidade, por si só, não é suficiente para determinar uma única conexão. Para termos unicidade precisamos que a conexão seja simétrica, isto é:

Definição A.20 (Simetria) *Uma conexão ∇ em TM é dita **simétrica** se sua torção é nula, isto é, Se $\nabla_XY-\nabla_YX=[X,Y]$, para todo $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, em que a **torção** τ de uma conexão ∇ é definida por*

$$\tau\left(X,Y\right):=\nabla_XY-\nabla_YX-\left[X,Y\right],\qquad X,Y\in\mathfrak{X}\left(M\right).$$

Notemos que se $X_1,Y_1,X_2,Y_2\in\mathfrak{X}\left(M\right)$ e $f,g\in C^\infty\left(M\right)$ então

$$\begin{aligned} \tau\left(fX_1+gX_2,Y\right)(\cdot) &= \left(\nabla_{fX_1+gX_2}Y-\nabla_Y\left(fX_1+gX_2\right)-\left[fX_1+gX_2,Y\right]\right)(\cdot)\\ &= \left(f\nabla_{X_1}Y+g\nabla_{X_2}Y-Y\left(f\right)X_1-f\nabla_YX_1-Y\left(g\right)X_2-g\nabla_YX_2\right)(\cdot)\\ &\quad +Y\left(fX_1\left(\cdot\right)+gX_2\left(\cdot\right)\right)-\left(fX_1+gX_2\right)\left(Y\left(\cdot\right)\right)\\ &= \left(f\nabla_{X_1}Y+g\nabla_{X_2}Y-Y\left(f\right)X_1-f\nabla_YX_1-Y\left(g\right)X_2-g\nabla_YX_2\right)(\cdot)\\ &\quad +Y\left(f\right)X_1\left(\cdot\right)+fYX_1\left(\cdot\right)+Y\left(g\right)X_2\left(\cdot\right)+gYX_2\left(\cdot\right)-\left(fX_1+gX_2\right)\left(Y\left(\cdot\right)\right). \end{aligned}$$

Cancelando os termos repetidos, vemos que

$$\begin{aligned} \tau\left(fX_1+gX_2,Y\right)(\cdot) &= \left(f\nabla_{X_1}Y-f\nabla_YX_1-fX_1Y+fYX_1\right)(\cdot)\\ &\quad +\left(g\nabla_{X_2}Y-g\nabla_YX_2+gYX_2-gX_2\left(Y\right)\right)(\cdot)\\ &= f\left(\nabla_{X_1}Y-\nabla_YX_1-\left[X_1,Y\right]\right)(\cdot)+g\left(\nabla_{X_2}Y-\nabla_YX_2-\left[X_2,Y\right]\right)(\cdot)\\ &= f\tau\left(X_1,Y\right)(\cdot)+g\tau\left(X_2,Y\right)(\cdot), \end{aligned}$$

para todo $Y\in\mathfrak{X}\left(M\right)$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\tau\left(X, fY_1+gY_2\right)(\cdot) &= \left(\nabla_X\left(fY_1+gY_2\right)-\nabla_{fY_1+gY_2}X-\left[X, fY_1+gY_2\right]\right)(\cdot) \\
&= \left(X(f)Y_1+f\nabla_X Y_1+X(g)Y_2+\nabla_X Y_2\right)(\cdot)-\left(f\nabla_{Y_1}X+g\nabla_{Y_2}X\right)(\cdot) \\
&\quad -\left(X\left(fY_1+gY_2\right)-\left(fY_1+gY_2\right)X\right)(\cdot) \\
&= \left(X(f)Y_1+f\nabla_X Y_1+X(g)Y_2+g\nabla_X Y_2-f\nabla_{Y_1}X-g\nabla_{Y_2}X\right)(\cdot) \\
&\quad -\left(X(f)Y_1+fXY_1+X(g)Y_2+gXY_2-fY_1X-gY_2X\right)(\cdot) \\
&= \left(f\nabla_X Y_1-f\nabla_{Y_1}X-fXY_1+fY_1X\right)(\cdot)+\left(g\nabla_X Y_2-g\nabla_{Y_2}X-gXY_2+gY_2X\right)(\cdot) \\
&= f\tau\left(X, Y_1\right)(\cdot)+g\tau\left(X, Y_2\right)(\cdot),
\end{aligned}
$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Ou seja, vemos que τ é um $(2,1)$-campotensorial em M.

Agora podemos enunciar o teorema fundamental da geometria riemanniana:

Teorema A.1 (Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana) *Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Existe uma única conexão ∇ em TM que é simétrica e compatível com a métrica. Dizemos que esta é a **conexão de Levi-Civita** de g. Mais ainda, em coordenadas locais temos*

$$
\nabla_{\partial_i}\partial_j=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\partial_k, \tag{A.11}
$$

em que

$$
\Gamma_{ij}^{k}=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}g^{kl}\left\{\partial_j g_{il}+\partial_i g_{jl}-\partial_l g_{ij}\right\}. \tag{A.12}
$$

Conexão Laplaciana

Em sua forma mais simplificada, o **laplaciano** de $f \in C^{\infty}(M)$ é definido por $\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f)$. O laplaciano pode ser estendido de modo à agir nos fibrados tensoriais sobre uma variedade riemanniana (M, g). O operador diferencial resultante é chamado de **conexão laplaciana**.

Definição A.21 (Conexão Laplaciana) *Para todo campo tensorial $F \in \mathcal{J}_l^k(M)$, a conexão laplaciana (ou simplesmente laplaciano) de F,*

$$
\Delta F = Tr_g \nabla^2 F \in \mathcal{J}_l^k(M),
$$

é o traço da segunda derivada covariante de F com a métrica g.

Explicitamente,

$$\begin{aligned}
(\Delta F)^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} &= \left(Tr_g \nabla^2 F\right)^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} \\
&= \left(Tr_{13}\left(Tr_{24}\left(\nabla^2 F\right)\right)\right)^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \nabla^2 F_{pq}{}^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \left(\nabla_p \nabla_q F\right)^{j_1...j_l}{}_{i_1...i_k} \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \left(\nabla_p \nabla_q F\right)\left(dx^{j_1}, ..., dx^{j_l}, \partial_{i_1}, ..., \partial_{i_k}\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \left(\nabla^2_{p,q} F\right)\left(dx^{j_1}, ..., dx^{j_l}, \partial_{i_1}, ..., \partial_{i_k}\right).
\end{aligned}$$

Exemplo A.8 *No fibrado tensorial $T^0 M = C^\infty(M)$, temos que*

$$\begin{aligned}
\Delta F &= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\nabla_p \nabla_q f\right) = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\nabla_p\left(\nabla_q f\right) - \nabla_{\nabla_{\partial_p}\partial_q} f\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\partial_p\left(\partial_q f\right) - \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{pq} \partial_k(f)\right).
\end{aligned}$$

Em particular, se $M = \mathbb{R}^n$, então os símbolos de Christoffel são nulos e $g^{pq} = \delta^{pq}$. Portanto,

$$\Delta F = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(\partial_p\left(\partial_q f\right) - \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{pq}\partial_k(f)\right) = \sum_{p,q=1}^{n} \delta^{pq} \partial_p\left(\partial_q f\right) = \sum_{p=1}^{n} \partial_p\left(\partial_p f\right).$$

Curvatura em Fibrados Vetoriais

Introduzimos o conceito de tensor de curvatura como um objeto puramente algébrico que surge da conexão em um fibrado vetorial. Segue disso que olharemos curvaturas de fibrados específicos.

Definição A.22 *Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade diferenciável M. Se ∇ é uma conexão em E, então a **curvatura** da conexão ∇ no fibrado E é a seção $R_\nabla \in \Gamma\left(T^*M \otimes T^*M \otimes E^* \otimes E\right)$ definido por*

$$R(X,Y)\xi := \nabla_Y\left(\nabla_X \xi\right) - \nabla_X\left(\nabla_Y \xi\right) + \nabla_{[X,Y]}\xi. \tag{A.13}$$

Na literatura, há autores que optam por definir a curvatura invertendo o sinal.

Dado um fibrado vetorial E, a **curvatura no fibrado dual** E^* com respeito a sua respectiva conexão, é caracterizada pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\omega)(\xi) &= \left(\nabla_Y(\nabla_X\omega) - \nabla_X(\nabla_Y\omega) + \nabla_{[X,Y]}\omega\right)(\xi) \\ &= (\nabla_Y(\nabla_X\omega))(\xi) - (\nabla_X(\nabla_Y\omega))(\xi) + \left(\nabla_{[X,Y]}\omega\right)(\xi) \\ &= \nabla_Y((\nabla_X\omega)(\xi)) - (\nabla_X\omega)(\nabla_Y\xi) - \nabla_X((\nabla_Y\omega)(\xi)) \\ &\quad + (\nabla_Y\omega)(\nabla_X\xi) + \nabla_{[X,Y]}(\omega(\xi)) - \omega\left(\nabla_{[X,Y]}\xi\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \nabla_Y(\nabla_X(\omega(\xi)) - \omega(\nabla_X\xi)) - \nabla_X(\omega(\nabla_Y\xi)) \\ &\quad +\omega(\nabla_X(\nabla_Y\xi)) - \nabla_X((\nabla_Y(\omega(\xi))) - \omega(\nabla_Y\xi)) \\ &\quad +\nabla_Y(\omega(\nabla_X\xi)) - \omega(\nabla_Y(\nabla_X\xi)) + \nabla_{[X,Y]}(\omega(\xi)) - \omega\left(\nabla_{[X,Y]}\xi\right).\end{aligned}$$

Voltando a notação original de derivada, vemos que

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\omega)(\xi) &= Y(X(\omega(\xi))) - Y(\omega(\nabla_X\xi)) - X(\omega(\nabla_Y\xi)) + \omega(\nabla_X(\nabla_Y\xi)) \\ &\quad -X(Y(\omega(\xi))) + X(\omega(\nabla_Y\xi)) + Y(\omega(\nabla_X\xi)) \\ &\quad -\omega(\nabla_Y(\nabla_X\xi)) + [X,Y](\omega(\xi)) - \omega\left(\nabla_{[X,Y]}\xi\right) \\ &= \omega(\nabla_X(\nabla_Y\xi)) - \omega(\nabla_Y(\nabla_X\xi)) - \omega\left(\nabla_{[X,Y]}\xi\right) \\ &= \omega\left(\nabla_X(\nabla_Y\xi) - \nabla_Y(\nabla_X\xi) - \nabla_{[X,Y]}\xi\right) \\ &= -\omega(R(X,Y)\xi).\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Gamma(E^*)$ e $\xi \in \Gamma(E)$.

Dados fibrados vetoriais $\left(E_1, \nabla^{(1)}\right), \left(E_2, \nabla^{(2)}\right)$ a curvatura no produto tensorial $E_1 \otimes E_2$, com conexão ∇ dada na Proposição A.10, pode ser calculada em termos das curvaturas em cada fibrado pela expressão

$$\begin{aligned}R_\nabla(X,Y)(\xi_1\otimes\xi_2) &= \nabla_Y(\nabla_X(\xi_1\otimes\xi_2)) - \nabla_X(\nabla_Y(\xi_1\otimes\xi_2)) + \nabla_{[X,Y]}(\xi_1\otimes\xi_2) \\ &= \nabla_Y\left(\nabla_X^{(1)}\xi_1\otimes\xi_2 + \xi_1\otimes\nabla_X^{(2)}\xi_2\right) - \nabla_X\left(\nabla_Y^{(1)}\xi_1\otimes\xi_2 + \xi_1\otimes\nabla_Y^{(2)}\xi_2\right) \\ &\quad +\nabla_{[X,Y]}^{(1)}\xi_1\otimes\xi_2 + \xi_1\otimes\nabla_{[X,Y]}^{(2)}\xi_2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \nabla_Y^{(1)}\left(\nabla_X^{(1)}\xi_1\right)\otimes\xi_2+\nabla_X^{(1)}\xi_1\otimes\nabla_Y^{(2)}\xi_2+\nabla_Y^{(1)}\xi_1\otimes\nabla_X^{(2)}\xi_2 \\
& +\xi_1\otimes\nabla_Y^{(2)}\left(\nabla_X^{(2)}\xi_2\right)-\nabla_X^{(1)}\left(\nabla_Y^{(1)}\xi_1\right)\otimes\xi_2-\nabla_Y^{(1)}\xi_1\otimes\nabla_X^{(2)}\xi_2 \\
& -\nabla_X^{(1)}\xi_1\otimes\nabla_Y^{(2)}\xi_2-\xi_1\otimes\nabla_X^{(2)}\left(\nabla_Y^{(2)}\xi_2\right)+\nabla_{[X,Y]}^{(1)}\xi_1\otimes\xi_2+\xi_1\otimes\nabla_{[X,Y]}^{(2)}\xi_2.
\end{aligned}
$$

Cancelando os termos repetidos, vemos que

$$
\begin{aligned}
R_\nabla(X,Y)(\xi_1\otimes\xi_2) &= \nabla_Y^{(1)}\left(\nabla_X^{(1)}\xi_1\right)\otimes\xi_2+\xi_1\otimes\nabla_Y^{(2)}\left(\nabla_X^{(2)}\xi_2\right)-\nabla_X^{(1)}\left(\nabla_Y^{(1)}\xi_1\right)\otimes\xi_2 \\
&\quad -\xi_1\otimes\nabla_X^{(2)}\left(\nabla_Y^{(2)}\xi_2\right)+\nabla_{[X,Y]}^{(1)}\xi_1\otimes\xi_2+\xi_1\otimes\nabla_{[X,Y]}^{(2)}\xi_2 \\
&= \left(\nabla_Y^{(1)}\left(\nabla_X^{(1)}\xi_1\right)-\nabla_X^{(1)}\left(\nabla_Y^{(1)}\xi_1\right)+\nabla_{[X,Y]}^{(1)}\xi_1\right)\otimes\xi_2 \\
&\quad +\xi_1\otimes\left(\nabla_Y^{(2)}\left(\nabla_X^{(2)}\xi_2\right)-\nabla_X^{(2)}\left(\nabla_Y^{(2)}\xi_2\right)+\nabla_{[X,Y]}^{(2)}\xi_2\right) \\
&= \left(R_{\nabla^{(1)}}(X,Y)\xi_1\right)\otimes\xi_2+\xi_1\otimes\left(R_{\nabla^{(2)}}(X,Y)\xi_2\right),
\end{aligned}
$$

onde $\xi_1\otimes\xi_2\in E_1\otimes E_2$.

Exemplo A.9 *Temos um interesse particular na curvatura em um produto tensorial da forma $E_1^*\otimes E_2$ (tensores agindo em E_1 com valores em E_2) que é dada por*

$$
\begin{aligned}
(R(X,Y)S)(\xi) &= (\nabla_Y(\nabla_X S))(\xi)-(\nabla_X(\nabla_Y S))(\xi)+\left(\nabla_{[X,Y]}S\right)(\xi) \\
&= \nabla_Y^{(2)}((\nabla_X S)(\xi))-(\nabla_X S)\left(\nabla_Y^{(1)}\xi\right)-\nabla_X^{(2)}((\nabla_Y S)(\xi)) \\
&\quad +(\nabla_Y S)\left(\nabla_X^{(1)}\xi\right)+\nabla_{[X,Y]}^{(2)}(S(\xi))-S\left(\nabla_{[X,Y]}^{(1)}\xi\right) \\
&= \nabla_Y^{(2)}\left(\nabla_X^{(2)}(S(\xi))-S\left(\nabla_X^{(1)}\xi\right)\right)-\nabla_X^{(2)}\left(S\left(\nabla_Y^{(1)}\xi\right)\right) \\
&\quad +S\left(\nabla_X^{(1)}\left(\nabla_Y^{(1)}\xi\right)\right)-\nabla_X^{(2)}\left(\nabla_Y^{(2)}(S(\xi))-S\left(\nabla_Y^{(1)}\xi\right)\right) \\
&\quad +\nabla_Y^{(2)}\left(S\left(\nabla_X^{(1)}\xi\right)\right)-S\left(\nabla_Y^{(1)}\left(\nabla_X^{(1)}\xi\right)\right)+\nabla_{[X,Y]}^{(2)}(S(\xi))-S\left(\nabla_{[X,Y]}^{(1)}\xi\right)
\end{aligned}
$$

Cancelando os termos repetidos, usando a linearidade de S e a definição do tensor de curvatura, concluímos que

$$
\begin{aligned}
(R(X,Y)S)(\xi) &= \left\{\nabla_Y^{(2)}\left(\nabla_X^{(2)}(S(\xi))\right)-\nabla_X^{(2)}\left(\nabla_Y^{(2)}(S(\xi))\right)+\nabla_{[X,Y]}^{(2)}(S(\xi))\right\} \\
&\quad +\left\{S\left(\nabla_X^{(1)}\left(\nabla_Y^{(1)}\xi\right)\right)-S\left(\nabla_Y^{(1)}\left(\nabla_X^{(1)}\xi\right)\right)-S\left(\nabla_{[X,Y]}^{(1)}\xi\right)\right\} \\
&= R_{\nabla^{(2)}}(X,Y)(S(\xi))-S\left(R_{\nabla^{(1)}}(X,Y)\xi\right),
\end{aligned}
$$

onde $S\in\Gamma(E_1^*\otimes E_2)$, $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ e $\xi\in\Gamma(E_1)$.

Curvatura em um Fibrado Tensorial

Uma das aplicações mais importantes é a curvatura em um fibrado tensorial. Pela expressão (A.13) e a Seção A.0.1, temos o seguinte:

Proposição A.11 *Seja R a curvatura em um (k,l)-fibrado tensorial. Se $F, G \in \mathcal{J}_l^k(M)$, então*

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Tr(F)) &= Tr(R(X,Y)F), \\ R(X,Y)(F \otimes G) &= (R(X,Y)F) \otimes G + F \otimes (R(X,Y)G), \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Usando a Proposição A.6 vemos que

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Tr(F)) &= \nabla_Y(\nabla_X(Tr(F))) - \nabla_X(\nabla_Y(Tr(F))) + \nabla_{[X,Y]}(Tr(F)) \\ &= \nabla_Y(Tr(\nabla_X F)) - \nabla_X(Tr(\nabla_Y F)) + Tr\left(\nabla_{[X,Y]}F\right) \\ &= Tr(\nabla_Y(\nabla_X F)) - Tr(\nabla_X(\nabla_Y F)) + Tr\left(\nabla_{[X,Y]}F\right) \\ &= Tr\left(\nabla_Y(\nabla_X F) - \nabla_X(\nabla_Y F) + \nabla_{[X,Y]}F\right) \\ &= Tr(R(X,Y)F). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} R(X,Y)(F \otimes G) &= \nabla_Y(\nabla_X(F \otimes G)) - \nabla_X(\nabla_Y(F \otimes G)) + \nabla_{[X,Y]}(F \otimes G) \\ &= \nabla_Y((\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)) - \nabla_X((\nabla_Y F) \otimes G + F \otimes (\nabla_Y G)) \\ &\quad + \left(\nabla_{[X,Y]}F\right) \otimes G + F \otimes \left(\nabla_{[X,Y]}G\right) \\ &= (\nabla_Y(\nabla_X F)) \otimes G + (\nabla_X F) \otimes (\nabla_Y G) + ((\nabla_Y F) \otimes (\nabla_X G)) + F \otimes (\nabla_Y(\nabla_X G)) \\ &\quad - (\nabla_X(\nabla_Y F)) \otimes G - (\nabla_Y F) \otimes (\nabla_X G) - (\nabla_X F) \otimes (\nabla_Y G) - F \otimes (\nabla_X(\nabla_Y G)) \\ &\quad + \left(\nabla_{[X,Y]}F\right) \otimes G + F \otimes \left(\nabla_{[X,Y]}G\right). \end{aligned}$$

Cancelando os termos repetidos e usando a bilinearidade do produto tensorial, conluímos que

$$\begin{aligned} R(X,Y)(F \otimes G) &= \left(\nabla_Y(\nabla_X F) - \nabla_X(\nabla_Y F) + \nabla_{[X,Y]}F\right) \otimes G \\ &\quad + F \otimes \left(\nabla_Y(\nabla_X G) - \nabla_X(\nabla_Y G) + \nabla_{[X,Y]}G\right) \\ &= (R(X,Y)F) \otimes G + F \otimes (R(X,Y)G), \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $F, G \in \mathcal{J}_l^k(M)$. ■

Mais ainda, temos as seguintes fórmulas que serão importantes ao longo do desenvolvimento teórico:

Proposição A.12 *Seja R a curvatura no fibrado dos (k,l)-tensores em uma variedade diferenciável M. Se $F \in \mathcal{J}_l^k(M)$, então*

$$\begin{aligned} R(X,Y)\left(F\left(\omega^1,...,\omega^l,Z_1,...,Z_k\right)\right) &= (R(X,Y)F)\left(\omega^1,...,\omega^l,Z_1,...,Z_k\right) \\ &+\sum_{j=1}^{l} F\left(\omega^1,...,R(X,Y)\omega^j...,\omega^l,Z_1,...,Z_k\right) \\ &+\sum_{i=1}^{l} F\left(\omega^1,...,\omega^l,Z_1,...,R(X,Y)Z_i...,Z_k\right), \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i = 1, ..., k$, e todo $\omega^j \in \Gamma(T^*M)$, $j = 1, ..., l$.

Demonstração. Seja o fibrado vetorial $E = T_l^k M$. Para todo $\xi \in \Gamma(E)$, segue da expressão (A.2) que

$$\begin{aligned} R(X,Y)(F(\xi)) &= R(X,Y)(Tr(F\otimes\xi)) = Tr(R(X,Y)(F\otimes\xi)) \\ &= Tr((R(X,Y)F)\otimes\xi + F\otimes(R(X,Y)\xi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= Tr((R(X,Y)F)\otimes\xi) + Tr(F\otimes(R(X,Y)\xi)) \\ &= (R(X,Y)F)(\xi) + F(R(X,Y)\xi). \end{aligned}$$

Como $\xi \in \Gamma(E)$, então ξ é da forma

$$\xi = \omega^1 \otimes ... \otimes \omega^l \otimes Z_1 \otimes ... \otimes Z_k.$$

Um argumento similar nos mostra que

$$\begin{aligned} F(R(X,Y)\xi) &= F\left(R(X,Y)\left(\omega^1\otimes...\otimes\omega^l\otimes Z_1\otimes...\otimes Z_k\right)\right) \\ &= F\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\omega^1\otimes...R(X,Y)\omega^j...\otimes\omega^l\otimes Z_1\otimes...\otimes Z_k\right)\right) \\ &\quad +F\left(\sum_{i=1}^{k}\omega^1\otimes...\otimes\omega^l\otimes Z_1\otimes...R(X,Y)Z_i...\otimes Z_k\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{l} F\left(\left(\omega^{1}\otimes ...R\left(X,Y\right)\omega^{j}...\otimes\omega^{l}\otimes Z_{1}\otimes ...\otimes Z_{k}\right)\right) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{k} F\left(\omega^{1}\otimes ...\otimes\omega^{l}\otimes Z_{1}\otimes ...R\left(X,Y\right)Z_{i}...\otimes Z_{k}\right) \\
&\simeq \sum_{j=1}^{l} F\left(\omega^{1},...,R\left(X,Y\right)\omega^{j},...,\omega^{l},Z_{1},...,Z_{k}\right) \\
&\quad +\sum_{i=1}^{k} F\left(\omega^{1},...,\omega^{l},Z_{1},...,R\left(X,Y\right)Z_{i},...,Z_{k}\right).
\end{aligned}
$$

E isso conclui o resultado. ■

Proposição A.13 *Seja R a curvatura no fibrado dos (k,l)-tensores em uma variedade diferenciável M. Se a conexão ∇ em TM é simétrica, então*

$$R\left(X,Y\right)=\nabla^{2}_{Y,X}-\nabla^{2}_{X,Y},$$

e portanto $R\left(X,Y\right):\mathcal{J}^{k}_{l}\left(M\right)\to\mathcal{J}^{k}_{l}\left(M\right)$.

Demonstração. Para todo $F\in\mathcal{J}^{k}_{l}\left(M\right)$, segue da expressão (A.9) que

$$
\begin{aligned}
\nabla^{2}_{Y,X}F-\nabla^{2}_{X,Y}F &= \nabla_{Y}\left(\nabla_{X}F\right)-\nabla_{\nabla_{Y}X}F-\nabla_{X}\left(\nabla_{Y}F\right)+\nabla_{\nabla_{X}Y}F \\
&= \nabla_{Y}\left(\nabla_{X}F\right)-\nabla_{X}\left(\nabla_{Y}F\right)+\nabla_{\nabla_{X}Y-\nabla_{Y}X}F \\
&= \nabla_{Y}\left(\nabla_{X}F\right)-\nabla_{X}\left(\nabla_{Y}F\right)+\nabla_{[X,Y]}F \\
&= R\left(X,Y\right)F.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo A.10 *A curvatura no espaço $C^{\infty}\left(M\right)=T^{0}M$ é nula, pois pelo teorema de Schwarz:*

$$
\begin{aligned}
R\left(\sum_{i=1}^{n}X^{i}\partial_{i},\sum_{j=1}^{n}Y^{j}\partial_{j}\right)(f) &= \sum_{i,j=1}^{n}X^{i}Y^{j}R\left(\partial_{i},\partial_{j}\right)f=\sum_{i,j=1}^{n}X^{i}Y^{j}\left(\nabla_{j}\left(\nabla_{i}\left(f\right)\right)-\nabla_{i}\left(\nabla_{j}\left(f\right)\right)+\nabla_{[\partial_{i},\partial_{j}]}f\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}X^{i}Y^{j}\left(\partial_{j}\left(\partial_{i}\left(f\right)\right)-\partial_{i}\left(\partial_{j}\left(f\right)\right)+[\partial_{i},\partial_{j}]\left(f\right)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}X^{i}Y^{j}\left(\partial_{j}\left(\partial_{i}\left(f\right)\right)-\partial_{i}\left(\partial_{j}\left(f\right)\right)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Curvatura Riemanniana

Se (M, g) é uma variedade riemanniana, a **curvatura riemanniana** (ou simplesmente **curvatura de Riemann**) $R \in \Gamma\left(\otimes^3 T^*M \otimes TM\right)$ da conexão de Levi-Civita ∇ em TM é um $(3,1)$-campo tensorial que, em coordenadas locais (U, φ) toma a seguinte forma

$$R = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijk}{}^{l} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l, \tag{A.14}$$

onde $R\left(\partial_i, \partial_j\right)\partial_k = \sum_{l=1}^{n} R_{ijk}{}^{l}\partial_l$. De fato, em coordenadas locais segue que

$$\begin{aligned}
R\left(X,Y\right)Z &= R\left(\sum_{i=1}^{n} X^i\partial_i, \sum_{j=1}^{n} Y^j\partial_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} Y^k\partial_k\right) = \sum_{i,j,k=1}^{n} X^iY^jY^kR\left(\partial_i,\partial_j\right)\partial_k \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} X^iY^jY^k\sum_{l=1}^{n} R_{ijk}{}^{l}\partial_l = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijk}{}^{l}X^iY^jY^k\partial_l \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijk}{}^{l}dx^i\left(X\right)dx^j\left(Y\right)dx^k\left(Z\right)\partial_l \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijk}{}^{l}dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l\left(X,Y,Z\right).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Acompanhando isso, temos o **tensor curvatura de Riemann**, que também é denotado por R. Ele é o (4,0)-campo tensorial (ou simplesmente (4,0)-tensor) associado, que é definido por

$$R\left(X,Y,Z,W\right) := g\left(R\left(X,Y\right)Z, W\right), \tag{A.16}$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}\left(M\right)$. Em coordenadas locais, ela pode ser expressada da seguinte maneira:

$$R = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l,$$

onde $R_{ijkl} = \sum_{p=1}^{n} g_{lp}R_{ijk}{}^{p}$. De fato,

$$\begin{aligned}
R\left(X,Y,Z,W\right) &= g\left(\sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijk}{}^{l}X^iY^jY^k\partial_l, \sum_{p=1}^{n} W^p\partial_p\right) = \sum_{i,j,k,l,p=1}^{n} R_{ijk}{}^{l}X^iY^jY^kW^pg\left(\partial_l,\partial_p\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l,p=1}^{n} R_{ijk}{}^{l}X^iY^jY^kW^pg_{lp} \overset{l\leftrightarrow p}{=} \sum_{i,j,k,l,p=1}^{n} R_{ijk}{}^{p}X^iY^jY^kW^lg_{lp}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijkl} X^i Y^j Y^k W^l \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijkl} dx^i (X)\, dx^j (Y)\, dx^k (Z)\, dx^l (W) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l (X, Y, Z, W) .
\end{aligned}
$$

Se não houver ambiguidade, vamos chamar o tensor curvatura de Riemann simplesmente de curvatura riemanniana, assim como o (3,1)-tensor.

Seja $M \times I$ uma variedade diferenciável, em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. O **fibrado tangente espacial** $\mathcal{G}$ é definido por (para mais detalhes sobre $\Gamma(M \times I)$ veja a Definição A.6)

$$
\mathcal{G} = \{V \in \Gamma(M \times I) \ : \ V(x,t) \in T_x M\} . \tag{A.17}
$$

O fibrado tangente espacial admite uma conexão ∇ com algumas propriedades interessantes:

Teorema A.2 *Seja g uma métrica no fibrado tangente espacial $\mathcal{G} \to M \times \mathbb{R}$. Então existe uma única conexão ∇ em $\mathcal{G}$ satisfazendo as seguintes três condições:*

1. ∇ ***é compatível com*** g*: Para todo $X \in \Gamma(M \times \mathbb{R})$ e todo campo vetorial espacial $Y, W \in \Gamma(\mathcal{G})$,*

$$
X(g(Y,W)) = g(\nabla_X Y, W) + g(Y, \nabla_X W) ;
$$

2. ∇ ***é totalmente simétrica****: Se $X, Y \in \Gamma(\mathcal{G})$ são dois campos espaciais, eles são, em particular, dois campos em $M \times \mathbb{R}$, e vale*

$$
\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] ;
$$

3. ∇ ***é irrotacional****: O tensor $S \in \Gamma(\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G})$, definido por*

$$
S(V) := \nabla_{\partial_t} V - [\partial_t, V] ,
$$

para todo $V \in \Gamma(\mathcal{G})$ é simétrico com respeito à g:

$$
g(S(V), W) = g(V, S(W)) , \tag{A.18}
$$

para todo $V, W \in \mathcal{G}_{(p,t)}$.

Observação A.2 *Notemos que S é um tensor e seu contradomínio realmente é $\mathcal{G}$: De fato,*

$$\begin{aligned}
S\left(fV+gW\right)(h) &= \left(\nabla_{\partial_t}\left(fV+gW\right)\right)(h)-\left[\partial_t,\left(fV+gW\right)\right](h)\\
&= \left(\left(\partial_t f\right)V+f\nabla_{\partial_t}V+\left(\partial_t g\right)W+g\nabla_{\partial_t}W\right)(h)-\partial_t\left(\left(fV+gW\right)(h)\right)+\left(fV+gW\right)\left(\partial_t h\right)\\
&= \left(\left(\partial_t f\right)V+f\nabla_{\partial_t}V+\left(\partial_t g\right)W+g\nabla_{\partial_t}W\right)(h)\\
&\quad -\left(\partial_t f\right)V(h)-f\partial_t\left(V(h)\right)-\left(\partial_t g\right)W(h)-g\partial_t\left(W(h)\right)+fV\left(\partial_t h\right)+gW\left(\partial_t h\right)\\
&= \left(f\nabla_{\partial_t}V+g\nabla_{\partial_t}W\right)(h)-f\left(\partial_t\left(V(h)\right)-V\left(\partial_t h\right)\right)-g\left(\partial_t\left(W(h)\right)-W\left(\partial_t h\right)\right)\\
&= f\left(\nabla_{\partial_t}V\right)(h)+g\left(\nabla_{\partial_t}W\right)(h)-f\left[\partial_t,V\right](h)-g\left[\partial_t,W\right](h)\\
&= fS(V)(h)+gS(W)(h),
\end{aligned}$$

para todo $V,W\in\Gamma(\mathcal{G})$ e todo $f,g,h\in C^\infty(M\times\mathbb{R})$. Além disso, notemos que

$$\begin{aligned}
\left[\partial_t,V\right](h) &= \partial_t\left(V(h)\right)-V\left(\partial_t(h)\right)=\partial_t\left(\sum_{i=1}^n V^i\partial_i(h)\right)-\sum_{i=1}^n V^i\partial_i\left(\partial_t(h)\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \partial_t\left(V^i\partial_i(h)\right)-\sum_{i=1}^n V^i\partial_i\left(\partial_t(h)\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \partial_t\left(V^i\right)\partial_i(h)+V^i\partial_t\left(\partial_i(h)\right)-\sum_{i=1}^n V^i\partial_i\left(\partial_t(h)\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \partial_t\left(V^i\right)\partial_i(h),
\end{aligned}$$

para todo $V\in\Gamma(\mathcal{G})$ e todo $h\in C^\infty(M\times\mathbb{R})$, isto é,

$$\left[\partial_t,V\right]=\sum_{i=1}^n \partial_t\left(V^i\right)\partial_i\in\mathcal{G},$$

logo $S(V)\in\mathcal{G}$, para todo $V\in\mathcal{G}$.

Demonstração. Para a existência, basta tomar a restrição da conexão de Levi-Civita de $M\times\mathbb{R}$ a $\mathcal{G}$. Vamos mostrar a unicidade: Trabalhando em coordenadas locais, podemos escrever ∇ em termos de seus coeficientes:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i}\partial_j &= \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\partial_k, \qquad 1 \le i, j \le n \\
\nabla_{\partial_t}\partial_j &= \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{0j}^{k}\partial_k, \qquad 1 \le j \le n
\end{aligned}$$

A primeira condição implica que

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(g_{ij}\right) &= g\left(\nabla_{\partial_t}\partial_i, \partial_j\right) + g\left(\partial_i, \nabla_{\partial_t}\partial_j\right) = g\left(\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{0i}^{k}\partial_k, \partial_j\right) + g\left(\partial_i, \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{0j}^{k}\partial_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{0i}^{k}g_{kj} + \Gamma_{0j}^{k}g_{ik} \\
&= :\Gamma_{0ij} + \Gamma_{0ji}.
\end{aligned}$$

Combinado com a segunda condição, encontramos que as "componentes espaciais"Γ_{ij}^{k} são dados pelos símbolos de Christoffel da métrica em um tempo t fixado, isto é,

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left\{\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right\}.$$

A terceira condição é usada como segue. O termo $S\left(\partial_i\right)$ tem a seguinte expressão:

$$S\left(\partial_i\right) = \nabla_{\partial_t}\partial_i - \left[\partial_t, \partial_i\right] = \nabla_{\partial_t}\partial_i = \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{0i}^{k}\partial_k,$$

em que foi usado o Teorema de Schwarz na segunda igualdade. A simetria com relação à g produz

$$\Gamma_{0ij} = \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{0i}^{k}g_{kj} = g\left(S\left(\partial_i\right), \partial_j\right) = g\left(\partial_i, S\left(\partial_j\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{0j}^{k}g_{ik} = \Gamma_{0ji},$$

ou seja,

$$\partial_t\left(g_{ij}\right) = \Gamma_{0ij} + \Gamma_{0ji} = 2\Gamma_{0ij}.$$

Em termos matriciais,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_t\left(g_{11}\right) & \cdots & \partial_t\left(g_{1n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_t\left(g_{n1}\right) & \cdots & \partial_t\left(g_{nn}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{011} & \cdots & \Gamma_{01n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{0n1} & \cdots & \Gamma_{0nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{01}^{k}g_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{01}^{k}g_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{0n}^{k}g_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{0n}^{k}g_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Gamma_{01}^{1} & \cdots & \Gamma_{01}^{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{0n}^{1} & \cdots & \Gamma_{0n}^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aplicando a inversa da matrz da métrica, vemos que

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_t (g_{11}) & \cdots & \partial_t (g_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_t (g_{n1}) & \cdots & \partial_t (g_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{01}^{1} & \cdots & \Gamma_{01}^{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{0n}^{1} & \cdots & \Gamma_{0n}^{n} \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\Gamma_{0i}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \partial_t (g_{ij}) g^{kj}.$$

Essa é uma maneira simples de checar que essas fórmulas definem uma conexão com as propriedades requeridas. ■

Dada uma variedade riemanniana M e dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos o **tensor torção** τ em que

$$\tau (X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \in \mathfrak{X}(M).$$

Notemos que se $X = \partial_t$ e $Y = \partial_i$ são campos em uma variedade da forma $M \times \mathbb{R}$, segue que

$$\tau (\partial_t, \partial_i) = \nabla_{\partial_t} \partial_i - \nabla_{\partial_i} \partial_t - [\partial_t, \partial_i] = \nabla_{\partial_t} \partial_i - \nabla_{\partial_i} \partial_t = \nabla_{\partial_t} \partial_i = S (\partial_i). \tag{A.19}$$

Teorema A.3 *Para todo campo* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_Y (\tau (X,Z)) + \nabla_Z (\tau (Y,X)) + \nabla_X (\tau (Z,Y)) \\ &\quad + \tau (\tau (Y,X), Z) + \tau (\tau (Z,Y), X) + \tau (\tau (X,Z), Y). \end{aligned}$$

Demonstração. Como antes, vamos trabalhar em coordenadas exponenciais em torno de um ponto $p \in M$ fixado (porém arbitrário). Temos que

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j)\partial_k + R(\partial_j, \partial_k)\partial_i + R(\partial_k, \partial_i)\partial_j &= \nabla_i (\nabla_j \partial_k) - \nabla_j (\nabla_i \partial_k) + \nabla_j (\nabla_k \partial_i) - \nabla_k (\nabla_j \partial_i) \\ &\quad + \nabla_k (\nabla_i \partial_j) - \nabla_i (\nabla_k \partial_j) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla_i\left(\nabla_j\partial_k - \nabla_k\partial_j\right) + \nabla_j\left(\nabla_k\partial_i - \nabla_i\partial_k\right) + \nabla_k\left(\nabla_i\partial_j - \nabla_j\partial_i\right) \\
&= \nabla_i\left(\tau\left(\partial_j, \partial_k\right)\right) + \nabla_j\left(\tau\left(\partial_k, \partial_i\right)\right) + \nabla_k\left(\tau\left(\partial_i, \partial_j\right)\right) \\
&= \nabla_i\left(\tau\left(\partial_j, \partial_k\right)\right) + \nabla_j\left(\tau\left(\partial_k, \partial_i\right)\right) + \nabla_k\left(\tau\left(\partial_i, \partial_j\right)\right) \\
&= \left(\nabla_i\tau\right)_{jk} + \tau\left(\nabla_i\partial_j, \partial_k\right) + \tau\left(\partial_j, \nabla_i\partial_k\right) + \left(\nabla_j\tau\right)_{ki} + \tau\left(\nabla_j\partial_k, \partial_i\right) \\
&\quad + \tau\left(\partial_k, \nabla_j\partial_i\right) + \left(\nabla_k\tau\right)_{ij} + \tau\left(\nabla_k\partial_i, \partial_j\right) + \tau\left(\partial_i, \nabla_k\partial_j\right).
\end{aligned}
$$

Pela antissimetria de τ, vemos que

$$
\begin{aligned}
R\left(\partial_i, \partial_j\right)\partial_k + R\left(\partial_j, \partial_k\right)\partial_i + R\left(\partial_k, \partial_i\right)\partial_j &= \left(\nabla_i\tau\right)_{jk} + \tau\left(\nabla_i\partial_j, \partial_k\right) - \tau\left(\nabla_i\partial_k, \partial_j\right) + \left(\nabla_j\tau\right)_{ki} \\
&\quad + \tau\left(\nabla_j\partial_k, \partial_i\right) - \tau\left(\nabla_j\partial_i, \partial_k\right) + \left(\nabla_k\tau\right)_{ij} + \tau\left(\nabla_k\partial_i, \partial_j\right) - \tau\left(\nabla_k\partial_j, \partial_i\right) \\
&= \left(\nabla_i\tau\right)_{jk} + \left(\nabla_j\tau\right)_{ki} + \left(\nabla_k\tau\right)_{ij} + \tau\left(\nabla_i\partial_j - \nabla_j\partial_i, \partial_k\right) \\
&\quad + \tau\left(\nabla_k\partial_i - \nabla_i\partial_k, \partial_j\right) + \tau\left(\nabla_j\partial_k - \nabla_k\partial_j, \partial_i\right) \\
&= \left(\nabla_i\tau\right)_{jk} + \left(\nabla_j\tau\right)_{ki} + \left(\nabla_k\tau\right)_{ij} + \tau\left(\tau_{ij}, \partial_k\right) + \tau\left(\tau_{ki}, \partial_j\right) + \tau\left(\tau_{jk}, \partial_i\right).
\end{aligned}
$$

■

Teorema A.4 *Seja (E, g) um fibrado vetorial sobre M e ∇ uma conexão em E compatível com a métrica g. Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e todo $\xi, \eta \in \Gamma(E)$,*

$$
R(X, Y, \xi, \eta) = -R(X, Y, \eta, \xi),
$$

em que $R(X, Y, \xi, \eta) := g(R(X, Y)\xi, \eta)$.

Demonstração. Pela compatibilidade e pela definição do colchete de Lie, temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= Y\left(X\left(g\left(\xi, \eta\right)\right)\right) - X\left(Y\left(g\left(\xi, \eta\right)\right)\right) - [Y, X]\left(g\left(\xi, \eta\right)\right) \\
&= Y\left(g\left(\nabla_X\xi, \eta\right) + g\left(\xi, \nabla_X\eta\right)\right) - X\left(g\left(\nabla_Y\xi, \eta\right) + g\left(\xi, \nabla_Y\eta\right)\right) - g\left(\nabla_{[Y,X]}\xi, \eta\right) - g\left(\xi, \nabla_{[Y,X]}\eta\right) \\
&= Y\left(g\left(\nabla_X\xi, \eta\right)\right) + Y\left(g\left(\xi, \nabla_X\eta\right)\right) - X\left(g\left(\nabla_Y\xi, \eta\right)\right) - X\left(g\left(\xi, \nabla_Y\eta\right)\right) - g\left(\nabla_{[Y,X]}\xi, \eta\right) - g\left(\xi, \nabla_{[Y,X]}\eta\right) \\
&= g\left(\nabla_Y\nabla_X\xi, \eta\right) + g\left(\nabla_X\xi, \nabla_Y\eta\right) + g\left(\nabla_Y\xi, \nabla_X\eta\right) + g\left(\xi, \nabla_Y\nabla_X\eta\right) - g\left(\nabla_X\nabla_Y\xi, \eta\right) - g\left(\nabla_Y\xi, \nabla_X\eta\right) \\
&\quad - g\left(\nabla_X\xi, \nabla_Y\eta\right) - g\left(\xi, \nabla_X\nabla_Y\eta\right) - g\left(\nabla_{[Y,X]}\xi, \eta\right) - g\left(\xi, \nabla_{[Y,X]}\eta\right) \\
&= g\left(\nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{[Y,X]}\xi, \eta\right) + g\left(\xi, \nabla_Y\nabla_X\eta - \nabla_X\nabla_Y\eta - \nabla_{[Y,X]}\eta\right).
\end{aligned}
$$

Pela definição do tensor de curvatura (para mais detalhes veja (A.13)), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= g\left(R\left(X,Y\right)\xi,\eta\right)+g\left(\xi,R\left(X,Y\right)\eta\right) \\ &= R\left(X,Y,\xi,\eta\right)+R\left(X,Y,\eta,\xi\right). \end{aligned}$$

■

Teorema A.5 *Para todo* $X,Y,Z\in\Gamma\left(\mathcal{G}\right)$,

$$\mathcal{P}\left(X,Y,Z\right)=\nabla_{Z}S\left(Y,X\right)-\nabla_{Y}S\left(Z,X\right).$$

Demonstração. Primeiramente notemos que pela definição da conexão em $T\left(M\times\mathbb{R}\right)$, $R\left(\cdot,\cdot,\partial_t,\cdot\right)=0$, e a expressão para a torsão dada pela expressão (A.19) e a identidade de Bianchi provada no Teorema A.3 nos dá que

$$\begin{aligned} R\left(\partial_t,X,Y,Z\right)-R\left(\partial_t,Y,X,Z\right) &= g\left(R\left(\partial_t,X\right)Y-R\left(\partial_t,Y\right)X,Z\right)=g\left(R\left(\partial_t,X\right)Y+R\left(Y,\partial_t\right)X,Z\right) \\ &= g\left(R\left(\partial_t,X\right)Y+R\left(Y,\partial_t\right)X+0,Z\right) \\ &= g\left(R\left(\partial_t,X\right)Y+R\left(Y,\partial_t\right)X+R\left(X,Y\right)\partial_t,Z\right) \\ &= g\left(\nabla_Y\left(\tau\left(X,\partial_t\right)\right)+\nabla_{\partial_t}\left(\tau\left(Y,X\right)\right)+\nabla_X\left(\tau\left(\partial_t,Y\right)\right),Z\right) \\ &\quad +g\left(\tau\left(\tau\left(Y,X\right),\partial_t\right)+\tau\left(\tau\left(\partial_t,Y\right),X\right)+\tau\left(\tau\left(X,\partial_t\right),Y\right),Z\right) \\ &= g\left(\nabla_Y\left(-S\left(X\right)\right)+\nabla_{\partial_t}\left(\tau\left(Y,X\right)\right)+\nabla_X\left(S(Y)\right),Z\right) \\ &\quad +g\left(\tau\left(\tau\left(Y,X\right),\partial_t\right)+\tau\left(S(Y),X\right)+\tau\left(-S(X),Y\right),Z\right). \end{aligned}$$

Como ∇ é totalmente simétrica, então

$$\begin{aligned} R\left(\partial_t,X,Y,Z\right)-R\left(\partial_t,Y,X,Z\right) &= g\left(\nabla_X\left(S(Y)\right)-\nabla_Y\left(S\left(X\right)\right)+\nabla_{\partial_t}\left(0\right)+\tau\left(0,\partial_t\right)+0-0,Z\right) \\ &= g\left(\nabla_X\left(S(Y)\right)-\nabla_Y\left(S\left(X\right)\right),Z\right) \\ &= g\left(\nabla_X\left(S(Y)\right),Z\right)-g\left(\nabla_Y\left(S\left(X\right)\right),Z\right). \end{aligned}$$

Segue disso e do Teorema A.4 que

$$\begin{aligned} 2R(\partial_t, X, Y, Z) &= R(\partial_t, X, Y, Z) - R(\partial_t, X, Z, Y) \qquad \text{(A.20)} \\ &= \{g(\nabla_X (S(Y)), Z) - g(\nabla_Y (S(X)), Z) + R(\partial_t, Y, X, Z)\} \\ &\quad - \{g(\nabla_X (S(Z)), Y) - g(\nabla_Z (S(X)), Y) + R(\partial_t, Z, X, Y)\} \\ &= R(\partial_t, Z, Y, X) - R(\partial_t, Y, Z, X) + g(\nabla_X (S(Y)), Z) - g(\nabla_Y (S(X)), Z) \\ &\quad - g(\nabla_X (S(Z)), Y) + g(\nabla_Z (S(X)), Y). \end{aligned}$$

Utilizando a definição do tensor de curvatura, vemos que

$$\begin{aligned} 2R(\partial_t, X, Y, Z) &= g(\nabla_Z (\nabla_{\partial_t} Y), X) - g(\nabla_{\partial_t} (\nabla_Z Y), X) - g\left(\nabla_{[\partial_t, Z]} Y, X\right) - g(\nabla_Y (\nabla_{\partial_t} Z), X) \\ &\quad + g(\nabla_{\partial_t} (\nabla_Y Z), X) + g\left(\nabla_{[\partial_t, Y]} Z, X\right) + g(\nabla_X (S(Y)), Z) - g(\nabla_Y (S(X)), Z) \\ &\quad - g(\nabla_X (S(Z)), Y) + g(\nabla_Z (S(X)), Y). \end{aligned}$$

Ao utilizar a simetria de S (para mais detalhes veja a expressão (A.18)), vemos que

$$\begin{aligned} g(\nabla_X (S(Y)), Z) &= X(g(S(Y), Z)) - g(S(Y), \nabla_X Z) = X(g(Y, S(Z))) - g(S(Y), \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, S(Z)) + g(Y, \nabla_X (S(Z))) - g(S(Y), \nabla_X Z). \end{aligned}$$

Usando essas igualdades em (A.20), vemos que

$$\begin{aligned} 2R(\partial_t, X, Y, Z) &= R(\partial_t, Z, Y, X) - R(\partial_t, Y, Z, X) + g(\nabla_X Y, S(Z)) + g(Y, \nabla_X (S(Z))) - g(S(Y), \nabla_X Z) \\ &\quad - g(\nabla_Y (S(X)), Z) - g(\nabla_X (S(Z)), Y) + g(\nabla_Z (S(X)), Y) \\ &= R(\partial_t, Z, Y, X) - R(\partial_t, Y, Z, X) + g(\nabla_X Y, S(Z)) - g(S(Y), \nabla_X Z) - g(\nabla_Y (S(X)), Z) \\ &\quad + g(\nabla_Z (S(X)), Y) \\ &= R(\partial_t, Z, Y, X) - R(\partial_t, Y, Z, X) + g(\nabla_X Y, S(Z)) - g(S(Y), \nabla_X Z) \\ &\quad - g(\nabla_Y X, S(Z)) - g(X, \nabla_Y (S(Z))) + g(S(X), [Y, Z]) + g(\nabla_Z X, S(Y)) \\ &\quad + g(X, \nabla_Z (S(Y))). \end{aligned}$$

Novamente, usando que ∇ é totalmente simétrica, segue que

$$\begin{aligned} 2R(\partial_t, X, Y, Z) &= R(\partial_t, Z, Y, X) - R(\partial_t, Y, Z, X) + g([X,Y], S(Z)) + g(S(Y), [Z,X]) + g(S(X), [Y,Z]) \\ &\quad - g(X, \nabla_Y(S(Z))) + g(X, \nabla_Z(S(Y))) \\ &= -2g(X, \nabla_Y(S(Z))) + 2g(X, \nabla_Z(S(Y))). \end{aligned}$$

em que podemos escrever os últimos dois termos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} -g(\nabla_Y(S(X)), Z) + g(\nabla_Z(S(X)), Y) &= -Y(g(S(X), Z)) + g(S(X), \nabla_Y Z) \\ &\quad + Z(g(S(X), Y)) - g(S(X), \nabla_Z Y) \\ &= -Y(g(X, S(Z))) + g(S(X), \nabla_Y Z) \\ &\quad + Z(g(X, S(Y))) - g(S(X), \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Usando a compatibilidade de ∇ com g, segue que

$$\begin{aligned} -g(\nabla_Y(S(X)), Z) + g(\nabla_Z(S(X)), Y) &= -g(\nabla_Y X, S(Z)) - g(X, \nabla_Y(S(Z))) \\ &\quad + g(S(X), \nabla_Y Z) + g(\nabla_Z X, S(Y)) \\ &\quad + g(X, \nabla_Z(S(Y))) - g(S(X), \nabla_Z Y) \\ &= -g(\nabla_Y X, S(Z)) - g(X, \nabla_Y(S(Z))) + g(S(X), [Y,Z]) \\ &\quad + g(\nabla_Z X, S(Y)) + g(X, \nabla_Z(S(Y))). \end{aligned}$$

Com isso, expandindo o termo $R(\partial_t, Z, Y, X) - R(\partial_t, Y, Z, X)$ e utilizando a simetria de S novamente, concluímos que

$$\begin{aligned} 2R(\partial_t, X, Y, Z) &= R(\partial_t, Z, Y, X) - R(\partial_t, Y, Z, X) + g(\nabla_X Y, S(Z)) - g(S(Y), \nabla_X Z) \\ &\quad - g(\nabla_Y X, S(Z)) - g(X, \nabla_Y(S(Z))) + g(S(X), [Y,Z]) \\ &\quad + g(\nabla_Z X, S(Y)) + g(X, \nabla_Z(S(Y))) \\ &= R(\partial_t, Z, Y, X) - R(\partial_t, Y, Z, X) + g([X,Y], S(Z)) + g(S(Y), [Z,X]) + g(S(X), [Y,Z]) \\ &\quad - g(X, \nabla_Y(S(Z))) + g(X, \nabla_Z(S(Y))) \\ &= -2g(X, \nabla_Y(S(Z))) + 2g(X, \nabla_Z(S(Y))). \end{aligned}$$

■

Lema A.4 *Em coordenadas locais, os coeficientes da curvatura da conexão de Levi-Civita podem ser expressados da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} R_{ijk}{}^{l} &= \partial_j \Gamma_{ik}^{l} - \partial_i \Gamma_{jk}^{l} + \sum_{m=1}^{n} \left(\Gamma_{ik}^{m} \Gamma_{jm}^{l} - \Gamma_{jk}^{m} \Gamma_{im}^{l} \right), \\ R_{ijkl} &= \frac{1}{2} \left(\partial_j \partial_k g_{il} + \partial_i \partial_l g_{jk} - \partial_i \partial_k g_{jl} - \partial_j \partial_l g_{ik} \right) + \sum_{m,p=1}^{n} g_{lp} \left(\Gamma_{ik}^{m} \Gamma_{jm}^{p} - \Gamma_{jk}^{m} \Gamma_{im}^{p} \right). \end{aligned} \tag{A.21}$$

O tensor de curvatura possui algumas importantes propriedades de simetria. São elas:

(a) Antissimetria nos dois primeiros argumentos: $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;

(b) Antissimetria nos dois últimos argumentos: $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$;

(c) Simetria entre o primeiro e o segundo par de argumentos: $R_{ijkl} = R_{klij}$;

(d) Primeira identidade de Bianchi:

$$R_{ijkl} + R_{kijl} + R_{jkil} = 0; \tag{A.22}$$

(e) Segunda identidade de Bianchi:

$$(\nabla_m R)_{ijkl} + (\nabla_k R)_{ijlm} + (\nabla_l R)_{ijmk} = 0. \tag{A.23}$$

Curvatura de Ricci e Curvatura Escalar

Como o tensor de curvatura pode ser bastante complexo, é útil considerar várias contrações que nos dão informações à respeito do próprio tensor de curvatura. A primeira destas contrações é o **tensor de Ricci,** denotado por Ric, que é definido por

Definição A.23 (Tensor de Ricci) *Seja (M, g) uma variedade riemanniana com curvatura R. Definimos o tensor de Ricci da métrica g por*

$$Ric^g(X, Y) = Tr_g(R(X, \cdot, Y, \cdot)) = \left(Tr_{14} Tr_{26} \left(g^{-1} \otimes R \right) \right)(X, Y).$$

Se não houver ambiguidade, podemos omitir a métrica na notação do tensor de Ricci, isto é, $Ric^g = Ric$.

As componentes locais do tensor de Ricci são dadas por

$$\begin{aligned} Ric_{ij} &= Ric\left(\partial_i,\partial_j\right) = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} R\left(\partial_i,\partial_p,\partial_j,\partial_q\right) = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} R_{ipjq} = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \sum_{k=1}^{n} g_{qk} {R_{ipj}}^{k} \qquad \text{(A.24)} \\ &= \sum_{p,q,k=1}^{n} g^{pq} g_{qk} {R_{ipj}}^{k} = \sum_{q,k=1}^{n} \delta_{pk} {R_{ipj}}^{k} \\ &= \sum_{p,k=1}^{n} {R_{ikj}}^{k}. \end{aligned}$$

Pelas propriedades de simétrias do tensor de curvatura e trocando as variáveis dos somatórios se necessário for, vemos que

$$\begin{aligned} Ric\left(X,Y\right) &= Ric\left(\sum_{i=1}^{n} X^i\partial_i, \sum_{j=1}^{n} Y^j\partial_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} X^iY^j Ric\left(\partial_i,\partial_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} X^iY^j \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} R_{ipjq} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} X^iY^j \sum_{p,q=1}^{n} g^{qp} R_{jqip} = \sum_{i,j=1}^{n} X^iY^j \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} R_{jpiq} = \sum_{i,j=1}^{n} X^iY^j Ric\left(\partial_j,\partial_i\right) \\ &= Ric\left(\sum_{j=1}^{n} Y^j\partial_j, \sum_{i=1}^{n} X^i\partial_i\right) \\ &= Ric\left(Y,X\right), \end{aligned}$$

para todo $X,Y \in \mathfrak{X}\left(M\right)$, ou seja, o tensor de Ricci é simétrico.

Um outro traço, desta vez no tensor de Ricci nos dá uma quantidade escalar, chamado de **curvatura escalar** e denotado por S:

$$S := Tr_g Ric = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} Ric_{ij} = \sum_{i=1}^{n} Ric_i^{\ i}.$$

É importante notar que se o tensor de curvatura for definido com sinal oposto, a contração é definida de forma que o tensor de Ricci corresponda ao dado aqui. Portanto, o tensor de Ricci tem o mesmo significado para todos. Pelo Lema A.4, o tensor de Ricci pode ser expresso localmente como segue.

Lema A.5 *Em coordenadas locais, o tensor de Ricci possui a seguinte expressão:*

$$Ric_{ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_j\partial_k g_{il} + \partial_i\partial_l g_{jk} - \partial_i\partial_k g_{jl} - \partial_j\partial_l g_{ik}\right) + \sum_{j,m=1}^{n}\left(\Gamma_{ik}^{m}\Gamma_{jm}^{j} - \Gamma_{jk}^{m}\Gamma_{im}^{j}\right).$$

Proposição A.14 *Dada uma métrica g e uma constante positiva C, temos que*

$$\begin{cases} R_{(3,1)}(Cg) = R_{(3,1)}(g), \\ R_{(4,0)}(Cg) = CR_{(4,0)}(g), \\ Ric(Cg) = Ric(g), \\ S(Cg) = C^{-1}S(g). \end{cases}$$

Demonstração. Primeiramante, usando os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k na métrica g e $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ na métrica Cg, segue da expressão (A.12) que

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}_{ij}^k &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{2}(Cg)^{kl}\left\{\partial_j (Cg)_{il} + \partial_i (Cg)_{jl} - \partial_l (Cg)_{ij}\right\} \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{2}C^{-1}g^{kl}\left\{C\partial_j g_{il} + C\partial_i g_{jl} - C\partial_l g_{ij}\right\} \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{2}g^{kl}\left\{\partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij}\right\} \\ &= \Gamma_{ij}^k. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $\nabla^{Cg} = \nabla^g$. Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, vemos que

$$\begin{aligned} R_{(3,1)}(Cg)(X,Y)Z &= R(X,Y)Z = \nabla_X^{Cg}\left(\nabla_Y^{Cg}Z\right) - \nabla_Y^{Cg}\left(\nabla_X^{Cg}Z\right) - \nabla_{[X,Y]}^{Cg}Z \\ &= \nabla_X^g\left(\nabla_Y^g Z\right) - \nabla_Y^g\left(\nabla_X^g Z\right) - \nabla_{[X,Y]}^g Z = R_{(3,1)}(g)(X,Y)Z. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$R_{(4,0)}(Cg)(X,Y,Z,W) = C\left\langle R_{(3,1)}(Cg)(X,Y)Z, W\right\rangle = C\left\langle R_{(3,1)}(g)(X,Y)Z, W\right\rangle = CR_{(4,0)}(g)(X,Y,Z,W).$$

Além disso, fazendo a devisa mudança das bases ortonormais, obtemos que

$$\begin{aligned} Ric(Cg)(Y,Z) &= \sum_{a=1}^n R_{(4,0)}(Cg)(e_a, Y, Z, e_a) = C\sum_{a=1}^n R_{(4,0)}(g)(e_a, Y, Z, e_a) \\ &= \sum_{a=1}^n R_{(4,0)}(g)(\sqrt{C}e_a, Y, Z, \sqrt{C}e_a) = \sum_{a=1}^n R_{(4,0)}(g)(\widetilde{e_a}, Y, Z, \widetilde{e_a}) \\ &= Ric(g)(Y,Z). \end{aligned}$$

Por fim, temos que

$$\begin{aligned} S(Cg) \quad : \quad &= \sum_{a=1}^{n} Ric(Cg)(e_a, e_a) = \sum_{a=1}^{n} Ric(e_a, e_a) = C^{-1} \sum_{a=1}^{n} Ric\left(\sqrt{C} e_a, \sqrt{C} e_a\right) \\ &= C^{-1} \sum_{a=1}^{n} Ric(\widetilde{e_a}, \widetilde{e_a}) = C^{-1} S(g). \end{aligned}$$

■

A Comutatividade da Contração com a Derivada Covariante

Como estamos trabalhando com uma conexão compatível com a métrica, então $\nabla g = 0$. De fato, em coordenadas locais temos

$$(\nabla g)(\partial_i, \partial_j, \partial_k) = (\nabla_{\partial_i} g)(\partial_j, \partial_k) = \partial_i (g(\partial_j, \partial_k)) - g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) - g(\partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_k) = 0.$$

Com isso, conseguimos comutar a contração com a derivada covariante. Fazemos isso da seguinte forma:

Proposição A.15 (2.48) *Se ∇ é a conexão de Levi-Civita, então*

$$(\nabla_k Ric)_{ij} = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} (\nabla_k R)_{ipjq}, \tag{A.25}$$

$$\left(\nabla^2_{k,l} Ric\right)_{ij} = \sum_{p,q=1}^{n} g^{pq} \left(\nabla^2_{k,l} R\right)_{ipjq}. \tag{A.26}$$

Demonstração. Para demonstrar a igualdade (A.25), sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Usando que $\nabla g = 0$, temos que

$$\begin{aligned} (\nabla_Z Ric)(X,Y) &= \left(\nabla_Z Tr\left(g^{-1} \otimes R\right)\right)(X,Y) \\ &= \left(Tr \nabla_Z \left(g^{-1} \otimes R\right)\right)(X,Y) \\ &= \left(Tr\left(\nabla_Z \left(g^{-1}\right) \otimes R + g^{-1} \otimes \nabla_Z R\right)\right)(X,Y) \\ &= \left(Tr\left(g^{-1} \otimes \nabla_Z R\right)\right)(X,Y) \\ &= \left(Tr_{14} Tr_{26}\left(g^{-1} \otimes \nabla_Z R\right)\right)(X,Y) \\ &= (Tr_g \nabla_Z R)(X, \cdot, Y, \cdot). \end{aligned}$$

Além disso, usando que $\nabla g = 0$ concluímos que

$$\begin{aligned}
\nabla^2 Ric &= \nabla^2 \left(Tr\left(g^{-1} \otimes R\right)\right) = Tr\left(\nabla^2\left(g^{-1} \otimes R\right)\right) = Tr\left(\nabla\left(\nabla\left(g^{-1}\right) \otimes R\right) + \nabla\left(g^{-1} \otimes \nabla R\right)\right) \\
&= Tr\left(\left(\nabla^2 g^{-1} \otimes R\right) + \left(\nabla\left(g^{-1}\right) \otimes \nabla R\right) + \left(\nabla\left(g^{-1}\right) \otimes \nabla R\right) + \left(g^{-1} \otimes \nabla^2 R\right)\right) \\
&= Tr\left(g^{-1} \otimes \nabla^2 R\right).
\end{aligned}$$

■

Em aplicações posteriores, vamos usar a chamada **segunda identidade de Bianchi contraída:**

$$\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk} \left(\nabla_k Ric\right)_{ij} = \frac{1}{2} \nabla_i S, \qquad i = 1, ..., n. \tag{A.27}$$

Ela segue da expressão (A.25) e da segunda identidade de Bianchi, pois

$0 = \sum_{a,b,m,n=1}^{n} g^{am} g^{bn} 0 = \sum_{a,b,m,n=1}^{n} g^{am} g^{bn} \left(\left(\nabla_l R\right)_{abmn} + \left(\nabla_m R\right)_{abnl} + \left(\nabla_n R\right)_{ablm}\right)$

$= \sum_{a,b,m,n=1}^{n} g^{am} g^{bn} \left(\nabla_l R\right)_{abmn} + \sum_{a,b,m,n=1}^{n} g^{am} g^{bn} \left(\nabla_m R\right)_{abnl} + \sum_{a,b,m,n=1}^{n} g^{am} g^{bn} \left(\nabla_n R\right)_{ablm}$

$= \sum_{a,m=1}^{n} g^{am} \left(\nabla_l Ric\right)_{am} - \sum_{a,b,m,n=1}^{n} g^{am} g^{bn} \left(\nabla_m R\right)_{abln} + \sum_{a,b,m,n=1}^{n} g^{am} g^{bn} \left(\nabla_n R\right)_{ablm}$

$= \sum_{a,m=1}^{n} g^{am} \left(\left(\nabla_l Ric\right)_{am} - \left(\nabla_m Ric\right)_{al}\right) + \sum_{a,b,m,n=1}^{n} g^{am} g^{bn} \left(\nabla_n R\right)_{ablm}$

$= Tr_g \left(\nabla_l Ric\right) - \sum_{a,m=1}^{n} g^{am} \left(\nabla_m Ric\right)_{al} \sum_{a,b,m,n=1}^{n} g^{am} g^{bn} \left(\nabla_n R\right)_{balm}$

$= Tr_g \left(\nabla_l Ric\right) - \sum_{a,m=1}^{n} g^{am} \left(\nabla_m Ric\right)_{al} - \sum_{b,n=1}^{n} g^{bn} \left(\nabla_n Ric\right)_{bl}$

$= \nabla_l \left(Tr_g Ric\right) - 2 \sum_{a,m=1}^{n} g^{am} \left(\nabla_m Ric\right)_{al}$

Ou seja, pela definição de curvatura escalar, concluímos que

$$0 = \nabla_l S - 2 \sum_{a,m=1}^{n} g^{am} \left(\nabla_m Ric\right)_{al}.$$

Curvatura Seccional

Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Se Π é um subespaço bidimensional de $T_p M$, $p \in M$, definimos a **curvatura seccional** K, de Π em p por

$$K(\Pi) = R\left(e_1, e_2, e_1, e_2\right),$$

onde, $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de Π.

Proposição A.16 *Se X e Y são dois vetores que geram Π, então*

$$K(\Pi) = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2\,|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}.$$

Demonstração. Se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de Π, segue que existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} X = ae_1 + be_2 \\ Y = ce_1 + de_2 \end{cases}$$

Substituindo na expressão acima obtemos que:

$$-\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2\,|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = \frac{\langle R(X,Y)Y,X\rangle}{|X|^2\,|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = \frac{\langle R(ae_1+be_2, ce_1+de_2)\,(ce_1+de_2)\,, ae_1+be_2\rangle}{|ae_1+be_2|^2\,|ce_1+de_2|^2 - \langle ae_1+be_2, ce_1+de_2\rangle^2}$$

$$\begin{aligned} = \;& \frac{\left\langle ac^2R\,(e_1,e_1)\,e_1 + acdR\,(e_1,e_1)\,e_2 + adcR(e_1,e_2)e_1 + ad^2R(e_1,e_2)e_2, ae_1+be_2\right\rangle}{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} \\ & + \frac{\left\langle bc^2R\,(e_2,e_1)\,e_1 + bcdR\,(e_2,e_1)\,e_2 + bdcR(e_2,e_2)e_1 + bd^2R(e_2,e_2)e_2, ae_1+be_2\right\rangle}{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left\langle adcR(e_1,e_2)e_1 + ad^2R(e_1,e_2)e_2 + bc^2R\,(e_2,e_1)\,e_1 + bcdR\,(e_2,e_1)\,e_2, ae_1+be_2\right\rangle}{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) - (ac+bd)^2}$$

$$\begin{aligned} = \;& a\frac{\left\langle adcR(e_1,e_2)e_1 + ad^2R(e_1,e_2)e_2 + bc^2R\,(e_2,e_1)\,e_1 + bcdR\,(e_2,e_1)\,e_2, e_1\right\rangle}{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} \\ & + b\frac{\left\langle adcR(e_1,e_2)e_1 + ad^2R(e_1,e_2)e_2 + bc^2R\,(e_2,e_1)\,e_1 + bcdR\,(e_2,e_1)\,e_2, e_2\right\rangle}{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} \end{aligned}$$

Simplificando essa expressão, vemos que

$$\begin{aligned} -\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{|X|^2\,|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} \; = \; & a\frac{\left\langle ad^2R(e_1,e_2)e_2 + bcdR\,(e_2,e_1)\,e_2, e_1\right\rangle}{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} \\ & + b\frac{\left\langle adcR(e_1,e_2)e_1 + bc^2R\,(e_2,e_1)\,e_1, e_2\right\rangle}{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} \end{aligned}$$

$$= a\frac{\left\langle -ad^2R(e_2,e_1)e_2 + bcdR\,(e_2,e_1)\,e_2, e_1\right\rangle}{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) - (ac+bd)^2} + b\frac{\left\langle adcR(e_1,e_2)e_1 - bc^2R\,(e_1,e_2)\,e_1, e_2\right\rangle}{(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) - (ac+bd)^2}$$

$$= \frac{\left\langle \left(abcd - a^2d^2\right) R\,(e_2,e_1)\,e_2, e_1\right\rangle}{(ad-bc)^2} + \frac{\left\langle \left(badc - b^2c^2\right) R\,(e_1,e_2)\,e_1, e_2\right\rangle}{(ad-bc)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-ad)\frac{\langle R(e_2,e_1)e_2,e_1\rangle}{(ad-bc)}+bc\frac{\langle R(e_1,e_2)e_1,e_2\rangle}{(ad-bc)}=(-ad)\frac{\langle R(e_1,e_2)e_1,e_2\rangle}{(ad-bc)}+bc\frac{\langle R(e_1,e_2)e_1,e_2\rangle}{(ad-bc)}\\
&= -\langle R(e_1,e_2)e_1,e_2\rangle
\end{aligned}
$$

■

Corolário A.3 *A curvatura seccional independe da escolha da base ortonormal.*

Demonstração. Se $\{X,Y\}$ da proprosição anterior é uma base ortonormal, então

$$R(e_1,e_2,e_1,e_2)=K(\Pi)=\frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{1}=R(X,Y,X,Y).$$

■

Vamos denotar o plano orientado gerado por e_i **e** e_j por $e_i\wedge e_j$. Calculando a curvatura seccional do plano $\left(\frac{1}{2}e_i+\frac{1}{2}e_k\right)\wedge\left(\frac{1}{2}e_j+\frac{1}{2}e_l\right)$, vemos o seguinte resultado:

Proposição A.17 *O tensor de curvatura R é completamente determinado pela curvatura seccional. Em particular,*

$$
\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \frac{1}{6}\left\{2K(e_i+e_k\wedge e_j+e_l)+2K(e_i-e_k\wedge e_j-e_l)-2K(e_j+e_k\wedge e_i+e_l)-2K(e_j-e_k\wedge e_i-e_l)\right\}\\
&\quad+\frac{1}{6}\left\{2K(\partial_l\wedge\partial_j)+K(\partial_i\wedge\partial_k)-K(\partial_j\wedge\partial_k)-K(\partial_l\wedge\partial_i)\right\}.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Como queremos demonstrar uma igualdade tensorial, é suficiente demonstrá-la em uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ de T_pM. Nesse caso, $K(e_i+e_k\wedge e_j+e_l)$ é igual a

$$
\begin{aligned}
K(e_i+e_k\wedge e_j+e_l) &= \frac{R(e_i+e_k,e_j+e_l,e_i+e_k,e_j+e_l)}{\langle e_i+e_k,e_i+e_k\rangle\langle e_j+e_l,e_j+e_l\rangle-\langle e_i+e_k,e_j+e_l\rangle^2}\\
&= \frac{1}{4}\left\{R_{ijij}+R_{ijil}+R_{ijkj}+R_{ijkl}+R_{ilij}+R_{ilil}+R_{ilkj}+R_{ilkl}+R_{kjij}+R_{kjil}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{4}\left\{R_{kjkj}+R_{kjkl}+R_{klij}+R_{klil}+R_{klkj}+R_{klkl}\right\},
\end{aligned}
$$

$K(e_i-e_k\wedge e_j-e_l)$ é dada pela seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
K(e_i-e_k\wedge e_j-e_l) &= \frac{R(e_i-e_k,e_j-e_l,e_i-e_k,e_j-e_l)}{\langle e_i-e_k,e_i-e_k\rangle\langle e_j-e_l,e_j-e_l\rangle-\langle e_i-e_k,e_j-e_l\rangle^2}\\
&= \frac{1}{4}\left\{R_{ijij}-R_{ijil}-R_{ijkj}+R_{ijkl}-R_{ilij}+R_{ilil}+R_{ilkj}-R_{ilkl}-R_{kjij}+R_{kjil}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{4}\left\{R_{kjkj}-R_{kjkl}+R_{klij}-R_{klil}-R_{klkj}+R_{klkl}\right\},
\end{aligned}
$$

$K\left(e_j+e_k\wedge e_i+e_l\right)$ é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}K\left(e_j+e_k\wedge e_i+e_l\right) &= \frac{1}{4}\left\{R_{jiji}+R_{jijl}+R_{jiki}+R_{jikl}+R_{jlji}+R_{jljl}+R_{jlki}+R_{jlkl}+R_{kiji}+R_{kijl}\right\}\\ &+\frac{1}{4}\left\{R_{kiki}+R_{kikl}+R_{klji}+R_{kljl}+R_{klki}+R_{klkl}\right\},\end{aligned}$$

$K\left(e_j-e_k\wedge e_i-e_l\right)$ é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}K\left(e_j-e_k\wedge e_i-e_l\right) &= \frac{1}{4}\left\{R_{jiji}-R_{jijl}-R_{jiki}+R_{jikl}-R_{jlji}+R_{jljl}+R_{jlki}-R_{jlkl}-R_{kiji}+R_{kijl}\right\}\\ &+\frac{1}{4}\left\{R_{kiki}-R_{kikl}+R_{klji}-R_{kljl}-R_{klki}+R_{klkl}\right\}.\end{aligned}$$

Mais ainda, temos que

$$K\left(\partial_l\wedge\partial_j\right)=R_{ljlj}\quad,\quad K\left(\partial_i\wedge\partial_k\right)=R_{ikik}\quad,\quad K\left(\partial_j\wedge\partial_k\right)=R_{jkjk}\quad,\quad K\left(\partial_l\wedge\partial_i\right)=R_{lili}.$$

Pela primeira identidade de Bianchi que

$$\begin{aligned}R_{ijkl} &= \frac{1}{3}\left(2R_{ijkl}-R_{lkij}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(2R_{ijkl}+R_{ilkj}+R_{kilj}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(R_{ijkl}+R_{ilkj}-R_{jikl}-R_{jlki}\right)\\ &= \frac{2}{6}\frac{4R_{ijkl}+2R_{ilil}+4R_{ilkj}+2R_{kjkj}}{4}-\frac{2}{6}\frac{4R_{jikl}+2R_{jljl}+4R_{jlki}+2R_{kiki}}{4}\\ &\quad+\frac{1}{6}R_{ljlj}+\frac{1}{6}R_{ikik}-\frac{1}{6}R_{jkjk}-\frac{1}{6}R_{lili}\\ &= A+B+C+D+E+F+G+H+I,\end{aligned}$$

em que as letras maiúsculas A, C, E e G denotam as seguintes expressões:

$$\begin{cases}A=\frac{2}{6}\times\frac{1}{4}\left\{R_{ijij}+R_{ijil}+R_{ijkj}+R_{ijkl}+R_{ilij}+R_{ilil}+R_{ilkj}+R_{ilkl}+R_{kjij}+R_{kjil}\right\}\\ C=\frac{2}{6}\times\frac{1}{4}\left\{R_{ijij}-R_{ijil}-R_{ijkj}+R_{ijkl}-R_{ilij}+R_{ilil}+R_{ilkj}-R_{ilkl}-R_{kjij}+R_{kjil}\right\}\\ E=-\frac{2}{6}\times\frac{1}{4}\left\{R_{jiji}+R_{jijl}+R_{jiki}+R_{jikl}+R_{jlji}+R_{jljl}+R_{jlki}+R_{jlkl}+R_{kiji}+R_{kijl}\right\}\\ G=-\frac{2}{6}\times\frac{1}{4}\left\{R_{jiji}-R_{jijl}-R_{jiki}+R_{jikl}-R_{jlji}+R_{jljl}+R_{jlki}-R_{jlkl}-R_{kiji}+R_{kijl}\right\}\end{cases},$$

e as letras B, D, F, H e I denotam os seguintes:

$$\begin{cases} B = \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} \{R_{kjkj} + R_{kjkl} + R_{klij} + R_{klil} + R_{klkj} + R_{klkl}\} \\ D = \frac{2}{6} \times \frac{1}{4} \{R_{kjkj} - R_{kjkl} + R_{klij} - R_{klil} - R_{klkj} + R_{klkl}\} \\ F = -\frac{2}{6} \times \frac{1}{4} \{R_{kiki} + R_{kikl} + R_{klji} + R_{kljl} + R_{klki} + R_{klkl}\} \\ H = -\frac{2}{6} \times \frac{1}{4} \{R_{kiki} - R_{kikl} + R_{klji} - R_{kljl} - R_{klki} + R_{klkl}\} \\ I = \frac{1}{6} R_{ljlj} + \frac{1}{6} R_{ikik} - \frac{1}{6} R_{jkjk} - \frac{1}{6} R_{lili}, \end{cases}.$$

Usando as igualdade que fizemos previamente, concluímos que

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{1}{6} \{2K(e_i + e_k \wedge e_j + e_l) + 2K(e_i - e_k \wedge e_j - e_l) - 2K(e_j + e_k \wedge e_i + e_l)\} \\ &+ \frac{1}{6} \{-2K(e_j - e_k \wedge e_i - e_l) + 2K(\partial_l \wedge \partial_j) + K(\partial_i \wedge \partial_k) - K(\partial_j \wedge \partial_k) - K(\partial_l \wedge \partial_i)\}. \end{aligned}$$

■

Lema de Berger

Um resultado simples mas muito importante é o chamado lema de Berger. Mostraremos que o tensor de curvatura pode ser limitado sempre que a curvatura seccional é limitada (superior e inferiormente):

Lema A.6 (de Berger) *Dada uma variedade riemanniana (M, g). Suponha que em algum ponto p a curvatura seccional é limitada. Seja $\Delta := \max_{u,v \in T_pM} \{K(u \wedge v)\}$ e $\delta := \min_{u,v \in T_pM} \{K(u \wedge v)\}$. Se $u, v, w, x \in T_pM$ são vetores ortonormais, então*

$$|R(u, v, w, v)| \leq \frac{1}{2}(\Delta - \delta) \qquad e \qquad |R(u, v, w, x)| \leq \frac{2}{3}(\Delta - \delta).$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que:

$$\begin{aligned} R(u + w, v, u + w, v) &= R(u, v, u + w, v) + R(w, v, u + w, v) \\ &= R(u, v, u, v) + R(u, v, w, v) + R(w, v, u, v) + R(w, v, w, v). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} R(u - w, v, u - w, v) &= R(u, v, u - w, v) - R(w, v, u - w, v) \\ &= R(u, v, u, v) - R(u, v, w, v) - R(w, v, u, v) + R(w, v, w, v). \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} R(u+w,v,u+w,v)-R(u-w,v,u-w,v) &= 2R(u,v,w,v)+2R(w,v,u,v) \\ &= 2R(u,v,w,v)+2R(u,v,w,v) \\ &= 4R(u,v,w,v). \end{aligned}$$

Segue desta identidade e da definição de curvatura seccional que:

$$\begin{aligned} &2\left|R(u,v,w,v)\right| = \tfrac{1}{2}\left|R(u+w,v,u+w,v)-R(u-w,v,u-w,v)\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|K((u+w)\wedge v)\left(|u+w|^2|v|^2-\langle u+w,v\rangle\right)-K((u-w)\wedge v)\left(|u-w|^2|v|^2-\langle u-w,v\rangle\right)\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|K((u+w)\wedge v)|u+w|^2-K((u-w)\wedge v)|u-w|^2\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|K((u+w)\wedge v)\left(\sqrt{2}\right)^2-K((u-w)\wedge v)\left(\sqrt{2}\right)^2\right| = \left|K((u+w)\wedge v)-K((u-w)\wedge v)\right| \\ &\leq \Delta-\delta. \end{aligned}$$

Para a segunda desigualdade, notemos que

$$\begin{aligned} R(u,v+x,w,v+x) &= R(u,v,w,v+x)+R(u,x,w,v+x) \\ &= R(u,v,w,v)+R(u,v,w,x)+R(u,x,w,v)+R(u,x,w,x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} R(u,v-x,w,v-x) &= R(u,v,w,v-x)-R(u,x,w,v-x) \\ &= R(u,v,w,v)-R(u,v,w,x)-R(u,x,w,v)+R(u,x,w,x). \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$R(u,v+x,w,v+x)-R(u,v-x,w,v-x)=2R(u,v,w,x)+2R(u,x,w,v).$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} R(v,u-x,w,u-x) &= R(v,u,w,u-x)-R(v,x,w,u-x) \\ &= R(v,u,w,u)-R(v,u,w,x)-R(v,x,w,u)+R(v,x,w,x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} R(v,u+x,w,u+x) &= R(v,u,w,u+x)+R(v,x,w,u+x) \\ &= R(v,u,w,u)+R(v,u,w,x)+R(v,x,w,u)+R(v,x,w,x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$R(v,u-x,w,u-x)-R(v,u+x,w,u+x)=-2R(v,u,w,x)-2R(v,x,w,u).$$

Logo, obtemos que:

$$\begin{aligned} & R(u,v+x,w,v+x)-R(u,v-x,w,v-x)+R(v,u-x,w,u-x)-R(v,u+x,w,u+x) \\ = {} & 2R(u,v,w,x)+2R(u,x,w,v)-2R(v,u,w,x)-2R(v,x,w,u) \\ = {} & 2R(u,v,w,x)+2R(u,x,w,v)+2R(u,v,w,x)-2R(v,x,w,u) \\ = {} & 4R(u,v,w,x)+2R(u,x,w,v)-2R(v,x,w,u). \end{aligned}$$

Olhando para os dois últimos termos e usando a segunda identidade de Bianchi, vemos que

$$\begin{aligned} 2R(u,x,w,v)-2R(v,x,w,u) &= 2R(u,x,w,v)-2R(w,u,v,x)=2R(u,x,w,v)+2R(w,u,x,v) \\ &= 2(R(u,x,w,v)+R(w,u,x,v))=2(-R(x,w,u,v)) \\ &= -2R(x,w,u,v). \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} & R(u,v+x,w,v+x)-R(u,v-x,w,v-x)+R(v,u-x,w,u-x)-R(v,u+x,w,u+x) \\ = {} & 4R(u,v,w,x)+2R(u,x,w,v)-2R(v,x,w,u)=4R(u,v,w,x)-2R(x,w,u,v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4R(u,v,w,x)-2R(u,v,x,w)=4R(u,v,w,x)+2R(u,v,w,x) \\ &= 6R(u,v,w,x). \end{aligned}$$

Usando essa igualdade e a primeira desigualdade demonstrada, segue que:

$$6\,|R(u,v,w,x)|=|R(u,v+x,w,v+x)-R(u,v-x,w,v-x)+R(v,u-x,w,u-x)-R(v,u+x,w,u+x)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|2R\left(u,\tfrac{v+x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{v+x}{\sqrt{2}}\right)-2R\left(u,\tfrac{v-x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{v-x}{\sqrt{2}}\right)+2R\left(v,\tfrac{u-x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{u-x}{\sqrt{2}}\right)-2R\left(v,\tfrac{u+x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{u+x}{\sqrt{2}}\right)\right| \\
&\leq 2\left|R\left(u,\tfrac{v+x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{v+x}{\sqrt{2}}\right)\right|+2\left|R\left(u,\tfrac{v-x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{v-x}{\sqrt{2}}\right)\right|+2\left|R\left(v,\tfrac{u-x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{u-x}{\sqrt{2}}\right)\right|+2\left|R\left(v,\tfrac{u+x}{\sqrt{2}},w,\tfrac{u+x}{\sqrt{2}}\right)\right| \\
&\leq (\Delta-\delta)+(\Delta-\delta)+(\Delta-\delta)+(\Delta-\delta) \\
&= 4\left(\Delta-\delta\right),
\end{aligned}
$$

onde ortonormalizamos o segundo e o quarto argumentos de R multiplicando e dividindo por 2. ■

Estrutura do Fibrado Pullback

Sejam M e N duas variedades diferenciáveis, seja E um fibrado vetorial sobre N e seja $f : M \to N$ uma aplicação suave.

Definição A.24 (Fibrado Pullback) *O* ***fibrado pullback*** *de E por f, denotado por f^*E é o fibrado vetorial suave sobre M definido por*

$$f^*E = \left\{(p,\xi) : p \in M,\ \xi \in E_{f(p)}\right\} = \bigsqcup_{p\in M} E_{f(p)}.$$

Temos uma aplicação natural entre os fibrados f^*E e E, que é dada por $\varphi : f^*E \to E$, em que

$$\varphi\left(p,v\right) := \left(f\left(p\right),v\right). \tag{A.28}$$

Vamos mostrar que φ é um **isomorfismo de fibrados**, isto é, para cada $p \in M$ a aplicação $\varphi_p : \left(f^*E\right)_p \to E_{f(p)}$ é um isomorfismo. De fato, se $\varphi\left(p,v_1\right) = \varphi\left(p,v_2\right)$, então $\left(f\left(p\right),v_1\right) = \left(f\left(p\right),v_2\right)$, ou seja, $v_1 = v_2$, e assim, $\left(p,v_1\right) = \left(p,v_2\right)$. Além disso, dado $\left(f\left(p\right),v\right) \in E_{f(p)}$, tome $\left(p,v\right) \in \left(f^*E\right)_p$. Segue que

$$\left(f\left(p\right),v\right) = \varphi\left(p,v\right).$$

Se $\{\xi_1,...,\xi_k\}$ é um referencial local para E em uma vizinhança V de $f\left(p\right) \in N$, então $\mathcal{E}_i\left(x\right) = \xi_i\left(f\left(x\right)\right)$, $i = 1,...,k$ é um referencial local para f^*E na vizinhança $\left(f^{-1}\left(V\right)\right)$ de p.

Lema A.7 *Temos as seguintes igualdades:*

$$\left(f^*E\right)^* = f^*\left(E^*\right) \qquad e \qquad \left(f^*E_1\right)\otimes\left(f^*E_2\right) = f^*\left(E_1\otimes E_2\right).$$

Demonstração. De fato, temos que

$$f^*(E^*) = \bigsqcup_{p\in M} (E^*)_{f(p)} = \bigsqcup_{p\in M} \left(E_{f(p)}\right)^* = \left\{(p,\omega) : p \in M,\ \omega \in \left(E_{f(p)}\right)^*\right\},$$

por outro lado,

$$(f^*E)^* = \left\{(p,\omega) : p \in M,\ \omega \in \left(\left(f^*E\right)_p\right)^*\right\},$$

mas $(f^*E)_p = E_{f(p)}$, ou seja, $f^*(E^*) = (f^*E)^*$.

Além disso, pela definição de produto tensorial de fibrado,

$$(f^*E_1) \otimes (f^*E_2) = \left\{(p,\omega_1) \otimes (p,\omega_2) : p \in M\ ;\ \omega_1 \in (f^*E_1)_p\ ;\ \omega_2 \in (f^*E_2)_p\right\}.$$

Por outro lado,

$$f^*(E_1 \otimes E_2) = \left\{(p, \omega_1 \otimes \omega_2) : p \in M,\ \omega_1 \otimes \omega_2 \in (f^*(E_1 \otimes E_2))_p\right\}.$$

Mas

$$f^*(E_1 \otimes E_2) = \bigsqcup_{p\in M} (E_1 \otimes E_2)_{f(p)} = \bigsqcup_{p\in M} \left((E_1)_{f(p)} \otimes (E_2)_{f(p)}\right),$$

e portanto

$$(f^*(E_1 \otimes E_2))_p = (E_1)_{f(p)} \otimes (E_2)_{f(p)}.$$

E como $(f^*E_1)_p = (E_1)_{f(p)}$ e $(f^*E_2)_p = (E_2)_{f(p)}$, temos segunda igualdade. ∎

Restrições

A **restrição** $\xi_f \in \Gamma(f^*E)$ de $\xi \in \Gamma(E)$ para f é definida por

$$\xi_f(p) := \left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1} (\xi(f(p))) \in E_{f(p)} = (f^*E)_p,$$

para todo $p \in M$, em que $\varphi : f^*E \to E$ é a aplicação definida pela expressão (A.28).

Exemplo A.11 *Suponha g uma métrica em um fibrado vetorial E. Então $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$, e por restrição obtemos que*

$$g_f \in \Gamma(f^*(E^* \otimes E^*)) = \Gamma(f^*(E^*) \otimes f^*(E^*)) = \Gamma((f^*E)^* \otimes (f^*E)^*),$$

é uma métrica em (f^*E) (a "restrição"de g em f): Se $\xi, \eta \in (f^*E)_p = E_{f(p)}$, então

$$(g_f(p))(\xi, \eta) = (g(f(p)))(\xi, \eta).$$

Observação A.3 *Ao usar essa terminologia, queremos distinguir a restrição de um campo tensorial em E (que é uma seção de um fibrado tensorial sobre f^*E) com o pullback de um tensor no fibrado tangente. Assim, a métrica no exemplo acima não deve ser chamada de "métrica pullback". Observe que podemos restringir tensores covariantes e contravariantes, em contraste com a situação com pullbacks.*

Exemplo A.12 *Dada uma seção $X \in \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$, o* ***pushforward*** *de X é a seção $f_*X \in \Gamma(f^*TN)$ definida por*

$$(f_*X)(p) = df_p.X(p) \in T_{f(p)}N = (f^*TN)_p.$$

Pullbacks de Tensores

Por dualidade (combinada com a restrição), podemos definir uma operação que leva $(k,0)$-tensores de N em $(k,0)$-tensores de M, que é chamada **operação pullback**: Se S é um $(k,0)$-tensor em N $\left(\text{isto é, } S \in \Gamma\left(\otimes^k T^*N\right)\right)$, então por restrição segue que $S_f \in \Gamma\left(\otimes^k f^*T^*N\right)$, e definimos $f^*S \in \Gamma\left(\otimes^k T^*M\right)$, em que

$$(f^*S)(X_1, ..., X_k) := S(f_*X_1, ..., f_*X_k),$$

onde $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i = 1, ..., k$.

Exemplo A.13 *Se f é um mergulho e g é uma métrica riemanniana em N, então f^*g é a métrica pullback em M (frequentemente chamada de métrica induzida).*

Essa definição pode ser um estendida para tensores cujo contradomínio é um fibrado: Suponha que $S \in \Gamma\left(\otimes^k T^*N \otimes E\right)$ é um $(k,0)$-campo tensorial em N com valores em E. Então sua restrição nos dá $S_f \in \Gamma\left(\otimes^k (f^*T^*N) \otimes f^*E\right)$, e vamos denotar por f^*S o $(k,0)$-tensor em M com valores em f^*E definido por

$$(f^*S)(X_1, ..., X_k) = S_f(f_*X_1, ..., f_*X_k).$$

Isto é, temos a mesma expressão, exceto pelo fato de que agora ambos os lados da igualdade estão em f^*E.

A Conexão Pullback

Considere uma variedade M e seja ∇ uma conexão em um fibrado vetorial E sobre uma variedade N, e $f : M \to N$ uma aplicação suave.

Teorema A.6 *Existe uma única conexão* ${}^f\nabla$ *em* f^*E *(chamada de* ***conexão pullback****) tal que*

$$\left({}^f\nabla_X\left(\xi_f\right)\right)(p) = \left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\nabla_{df_p(X(p))}\xi\right)(f(p)), \tag{A.29}$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$ *e todo* $\xi \in \Gamma(E)$*,em que* $\varphi : f^*E \to E$ *é definida pela expressão (A.28).*

Demonstração. Um referencial local $\mathcal{B} = \{s_i\}_{i=1}^n$ em E induz um referencial local em f^*E, $\mathcal{B}' = \{s_i'\}_{i=1}^n$, definido por

$$s_i'(p) := \left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(s_i\left(f(p)\right)\right),$$

Com isso, definimos a aplicação

$${}^f\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(f^*E) \to \Gamma(f^*E)$$

na base $\mathcal{B}'$ por

$$\left({}^f\nabla_X s_i'\right)(p) := \left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\left(\nabla_{df_p(X(p))}s_i\right)(f(p))\right)$$

em que p pertence a um aberto de uma carta. Como M é coberto por cartas, a expressão acima está globalmente definida.

Como toda seção $s' \in \Gamma(f^*E)$ é da forma $s' = f_1 s_1' + ... + f_n s_n'$, usando a regra de Leibniz a conexão fica completamente definida. Isto é, definimos

$$\left({}^f\nabla_X s\right)(p) := \sum_{i=1}^n X(p)(f_i)\, s_i'(p) + f_i(p)\left({}^f\nabla_X s_i'\right)(p).$$

Como todo M é coberto com cartas, ${}^f\nabla$ está globalmente definida.

Dados $A, B \in \Gamma(TM)$ e $g, h \in C^\infty(M)$,

$\left({}^f\nabla_{gA+hB}s\right)(p) = \sum_{i=1}^n (gA+hB)(p)(f_i)\, s_i'(p) + f_i(p)\left({}^f\nabla_{gA+hB}s_i'\right)(p)$

$= \sum_{i=1}^n (gA+hB)(p)(f_i)\, s_i'(p) + \sum_{i=1}^n f_i(p)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\left(\nabla_{df_p(g(p)A(p)+h(p)B(p))}s_i\right)(f(p))\right)$

$= \sum_{i=1}^n (gA+hB)(p)(f_i)\, s_i'(p)$

$+ \sum_{i=1}^n f_i(p)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(g(p)\left(\nabla_{df_p(A(p))}s_i\right)(f(p)) + h(p)\left(\nabla_{df_p(B(p))}s_i\right)(f(p))\right)$

$= \sum_{i=1}^n g(p)\,A(p)(f_i)\, s_i'(p) + h(p)\,B(p)(f_i)\, s_i'(p)$

$+\sum_{i=1}^{n} f_i(p)\left[g(p)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\left(\nabla_{df_p(A(p))}s_i\right)(f(p))\right)+h(p)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\left(\nabla_{df_p(B(p))}s_i\right)(f(p))\right)\right].$

Reagrupando os termos, vemos que

$\left({}^f\nabla_{gA+hB}s\right)(p)=g(p)\sum_{i=1}^{n}A(p)(f_i)s_i'(p)+f_i(p)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\left(\nabla_{df_p(A(p))}s_i\right)(f(p))\right)$

$+h(p)\sum_{i=1}^{n}B(p)(f_i)s_i'(p)+f_i(p)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\left(\nabla_{df_p(B(p))}s_i\right)(f(p))\right)$

$=g(p)\left({}^f\nabla_A s'\right)(p)+h(p)\left({}^f\nabla_B s\right)(p),$

para todo $p\in M$. Além disso, dados $d,e\in C^\infty(M)$ e $u=f_1s_1'+...+f_ns_n'$ e $v=g_1s_1'+...+g_ns_n'\in\Gamma(f^*E)$, segue que

$$\begin{aligned}
\left({}^f\nabla_A(du+ev)\right)(p) &= \left({}^f\nabla_A\left(\sum_{i=1}^{n}(df_i+eg_i)s_i'\right)\right)(p)\\
&= \sum_{i=1}^{n}A(p)(df_i+eg_i)s_i'(p)+(df_i+eg_i)(p)\left({}^f\nabla_A s_i'\right)(p)\\
&= \sum_{i=1}^{n}A(p)(df_i)s_i'(p)+A(p)(eg_i)s_i'(p)+(d(p)f_i(p)+e(p)g_i(p))\left({}^f\nabla_A s_i'\right)(p)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[f_i(p)A(p)(d)+d(p)A(p)(f_i)\right]s_i'(p)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\left[g_i(p)A(p)(e)+e(p)A(p)(g_i)+\right]s_i'(p)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}d(p)f_i(p)\left({}^f\nabla_A s_i'\right)(p)+e(p)g_i(p)\left({}^f\nabla_A s_i'\right)(p)
\end{aligned}$$

Fazendo a distributiva, vemos que

$$\begin{aligned}
\left({}^f\nabla_A(du+ev)\right)(p) &= \sum_{i=1}^{n}f_i(p)s_i'(p)A(p)(d)+d(p)A(p)(f_i)s_i'(p)+g_i(p)s_i'(p)A(p)(e)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}e(p)A(p)(g_i)s_i'(p)+d(p)f_i(p)\left({}^f\nabla_A s_i'\right)(p)+e(p)g_i(p)\left({}^f\nabla_A s_i'\right)(p)\\
&= A(p)(d)u(p)+A(p)(e)v(p)+d(p)\left(\sum_{i=1}^{n}A(p)(f_i)s_i'(p)+f_i(p)\left({}^f\nabla_A s_i'\right)(p)\right)\\
&\quad+e(p)\left(\sum_{i=1}^{n}A(p)(g_i)s_i'(p)+g_i(p)\left({}^f\nabla_A s_i'\right)(p)\right)\\
&= A(p)(d)u(p)+d(p)\left({}^f\nabla_A u\right)(p)+A(p)(e)v(p)+\left({}^f\nabla_A v\right)(p).
\end{aligned}$$

Ou seja, vemos que ${}^f\nabla$ é uma conexão em f^*E.

Por fim, se $\xi \in \Gamma(E)$ e $\xi_f \in \Gamma(f^*E)$ é a restrição de ξ para f, segue que existem $g_1, ..., g_n \in C^\infty(N)$ tais que

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} g_i s_i.$$

Por outro lado, existem $h_1, ..., h_n \in C^\infty(M)$ tais que

$$\xi_f = \sum_{i=1}^{n} h_i s_i'.$$

Por definição de ξ_f,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} g_i\left(f\left(p\right)\right)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(s_i\left(f\left(p\right)\right)\right) &= \left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g_i\left(f\left(p\right)\right) s_i\left(f\left(p\right)\right)\right) \\
&= \left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\xi\left(f\left(p\right)\right)\right) = \xi_f\left(p\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i\left(p\right) s_i'\left(p\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i\left(p\right)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(s_i\left(f\left(p\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Como $\varphi_{|(f^*E)_p}$ é um isomorfismo e pela unicidade das coordenadas em uma determinada base, segue que

$$h_i\left(p\right) = g_i\left(f\left(p\right)\right), \qquad i = 1, ..., n.$$

Portanto,

$$\left({}^f\nabla_X\left(\xi_f\right)\right)(p) = \left({}^f\nabla_X\left(\sum_{i=1}^{n} h_i s_i'\right)\right)(p) = \sum_{i=1}^{n}\left({}^f\nabla_X\left(h_i s_i'\right)\right)(p) = \sum_{i=1}^{n}\left({}^f\nabla_X\left(\left(g_i \circ f\right) s_i'\right)\right)(p)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\left({}^f\nabla_X\left(\left(g_i \circ f\right) s_i'\right)\right)(p) = \sum_{i=1}^{n} X(p)\left(g_i \circ f\right) s_i'\left(p\right) + \left(g_i \circ f\right)(p)\left({}^f\nabla_X s_i'\right)(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d\left(g_i \circ f\right)_p X(p) s_i'\left(p\right) + \left(g_i \circ f\right)(p)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\left(\nabla_{df_p(X(p))} s_i\right)\left(f\left(p\right)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d\left(g_i \circ f\right)_p X(p)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(s_i\left(f\left(p\right)\right)\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left(g_i \circ f\right)(p)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\left(\nabla_{df_p(X(p))} s_i\right)\left(f\left(p\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Por linearidade, vemos que

$$
\begin{aligned}
\left({}^{f}\nabla_X\left(\xi_f\right)\right)(p) &= \left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d\left(g_i\circ f\right)_p X(p)\left(s_i\left(f\left(p\right)\right)\right)+\left(g_i\circ f\right)(p)\left(\left(\nabla_{df_p(X(p))}s_i\right)\left(f\left(p\right)\right)\right)\right)\\
&= \left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d\left(g_i\right)_p\left(df_p\left(X(p)\right)\right)\left(s_i\left(f\left(p\right)\right)\right)+\left(g_i\circ f\right)(p)\left(\left(\nabla_{df_p(X(p))}s_i\right)\left(f\left(p\right)\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(df_p\left(X(p)\right)\right)\left(g_i\right)\left(s_i\left(f\left(p\right)\right)\right)+g_i\left(f\left(p\right)\right)\left(\left(\nabla_{df_p(X(p))}s_i\right)\left(f\left(p\right)\right)\right)\right)\\
&= \left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\nabla_{df_p(X(p))}\xi\right)\left(f\left(p\right)\right).
\end{aligned}
$$

Para provar a unicidade, notemos que os elementos de $\mathcal{B}'$ são restrições dos respectivos elementos de $\mathcal{B}$ para f. Portanto, se $\widetilde{\nabla}$ é outra conexão em f^*E que satisfaz a igualdade (A.29), então

$$
\begin{aligned}
\left(\widetilde{\nabla}_X s\right)(p) &= \left(\widetilde{\nabla}_X\sum_{i=1}^{n} f_i s_i'\right)(p)=\sum_{i=1}^{n} X\left(p\right)\left(f_i\right)s_i'\left(p\right)+f_i\left(p\right)\left(\widetilde{\nabla}_X s_i'\right)(p)\\
&= \sum_{i=1}^{n} X\left(p\right)\left(f_i\right)s_i'\left(p\right)+f_i\left(p\right)\left(\varphi_{|(f^*E)_p}\right)^{-1}\left(\nabla_{df_p(X(p))}s_i\right)\left(f\left(p\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} X\left(p\right)\left(f_i\right)s_i'\left(p\right)+f_i\left(p\right)\left({}^{f}\nabla_X s_i'\right)(p)\\
&= \left({}^{f}\nabla_X s\right)(p),
\end{aligned}
$$

para todo $s=\sum_{i=1}^{n} f_i s_i' \in \Gamma\left(f^*E\right)$, $X\in\Gamma\left(TM\right)$ e $p\in M$, ou seja, ${}^{f}\nabla$ é única. ■

Proposição A.18 *Se g é uma métrica em E e ∇ é uma conexão em E compatível com g, então ${}^{f}\nabla$ é compatível com g_f.*

Demonstração. Como ∇ é compatível com g se e somente se $\nabla g=0$, basta mostrar que se $\nabla g=0$ então ${}^{f}\nabla g_f=0$. De fato, usando que $\nabla g=0$, vemos o seguinte:

$$
{}^{f}\nabla_v\left(g_f\right)=\nabla_{f_*v}g=0,
$$

para todo $v\in TM$, ou seja, ${}^{f}\nabla g_f=0$. ■

Proposição A.19 *A curvatura da conexão pullback é o pullback da curvatura da conexão original. Em* *particular,*

$$R_{^f\nabla}(X,Y)\left(\xi_f\right) = \left(f^*R_\nabla\right)(X,Y)(\xi),$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\xi \in \Gamma(E)$. *Note que* $R_\nabla \in \Gamma(T^*N \otimes T^*N \otimes E^* \otimes E)$ *de modo que*

$$\begin{aligned} f^*R_\nabla &\in \Gamma\left(T^*M \otimes T^*M \otimes f^*\left(E^* \otimes E\right)\right) \\ &= \Gamma\left(T^*M \otimes T^*M \otimes f^*E^* \otimes f^*E\right) \\ &= \Gamma\left(T^*M \otimes T^*M \otimes \left(f^*E\right)^* \otimes f^*E\right). \end{aligned}$$

Demonstração. Como a curvatura é tensorial, é o bastante checar a fórmula para uma base. Escolha um referencial local $\{\sigma_p\}_{p=1}^k$ para E, de modo que $\left\{(\sigma_p)_f\right\}_{p=1}^k$ é um referencial local para f^*E. Também escolhemos uma carta (V,ψ) em N tal que $f(p) \in V$ e uma carta (U,φ) em M tal que $p \in U$. Se $\varphi = \left(\varphi^1, ..., \varphi^m\right)$ defina $f^\alpha := \varphi^\alpha \circ f$, $\alpha = 1, ..., m$. Então

$$\begin{aligned} R_{^f\nabla}(\partial_i,\partial_j)(\sigma_p)_f &= \left({}^f\nabla\right)_{\partial_j}\left(\left({}^f\nabla\right)_{\partial_i}(\sigma_p)_f\right) - \left({}^f\nabla\right)_{\partial_i}\left(\left({}^f\nabla\right)_{\partial_j}(\sigma_p)_f\right) \\ &= \left({}^f\nabla\right)_{\partial_j}\left(\nabla_{f_*\partial_i}(\sigma_p)\right) - \left({}^f\nabla\right)_{\partial_i}\left(\nabla_{f_*\partial_j}(\sigma_p)\right) \\ &= \left({}^f\nabla\right)_{\partial_j}\left(\nabla_{\sum_{\alpha=1}^m \partial_i(f^\alpha)\partial_\alpha}(\sigma_p)\right) - \left({}^f\nabla\right)_{\partial_i}\left(\nabla_{\sum_{\alpha=1}^m \partial_j(f^\alpha)\partial_\alpha}(\sigma_p)\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left({}^f\nabla\right)_{\partial_j}\left(\partial_i(f^\alpha)\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p)\right) - \left({}^f\nabla\right)_{\partial_i}\left(\partial_j(f^\alpha)\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p)\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \partial_j\partial_i(f^\alpha)\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p) + \partial_i(f^\alpha)\left({}^f\nabla\right)_{\partial_j}\left(\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p)\right)_f \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^m \partial_i\partial_j(f^\alpha)\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p) - \sum_{\alpha=1}^m \partial_j(f^\alpha)\left({}^f\nabla\right)_{\partial_i}\left(\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p)\right)_f. \end{aligned}$$

Cancelando os termos iguais e usando a definição de ${}^f\nabla$, vemos que

$$\begin{aligned} R_{^f\nabla}(\partial_i,\partial_j)(\sigma_p)_f &= \sum_{\alpha=1}^m \partial_i(f^\alpha)\nabla_{f_*\partial_j}\left(\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p)\right) - \partial_j(f^\alpha)\nabla_{f_*\partial_i}\left(\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p)\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \partial_i(f^\alpha)\nabla_{f_*\partial_j}\left(\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p)\right) - \sum_{\beta=1}^m \partial_j\left(f^\beta\right)\nabla_{f_*\partial_i}\left(\nabla_{\partial_\beta}(\sigma_p)\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \partial_i(f^\alpha)\nabla_{\sum_{\beta=1}^m \partial_j(f^\beta)\partial_\beta}\left(\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p)\right) - \sum_{\beta=1}^m \partial_j\left(f^\beta\right)\nabla_{\sum_{\alpha=1}^m \partial_i(f^\alpha)\partial_\alpha}\left(\nabla_{\partial_\beta}(\sigma_p)\right) \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^m \partial_i(f^\alpha)\partial_j\left(f^\beta\right)\nabla_{\partial_\beta}\left(\nabla_{\partial_\alpha}(\sigma_p)\right) - \partial_j\left(f^\beta\right)\partial_i(f^\alpha)\nabla_{\partial_\alpha}\left(\nabla_{\partial_\beta}(\sigma_p)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \partial_i (f^\alpha) \partial_j \left(f^\beta\right) \left(\nabla_{\partial_\beta} (\nabla_{\partial_\alpha} (\sigma_p)) - \nabla_{\partial_\alpha} \left(\nabla_{\partial_\beta} (\sigma_p)\right)\right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \partial_i (f^\alpha) \partial_j \left(f^\beta\right) (R_\nabla (\partial_\alpha, \partial_\beta) (\sigma_p)) = R_\nabla \left(\sum_{\alpha=1}^{m} \partial_i (f^\alpha) \partial_\alpha, \sum_{\beta=1}^{m} \partial_j \left(f^\beta\right) \partial_\beta\right) (\sigma_p) \\
&= R_\nabla (f_*\partial_i, f_*\partial_j) (\sigma_p) = (f^* R_\nabla) (\partial_i, \partial_j) (\sigma_p) .
\end{aligned}
$$

■

Quando puxamos um fibrado tangente, temos outra propriedade importante:

Proposição A.20 *Se ∇ é uma conexão simétrica em TN, então a conexão pullback ${}^f\nabla$ em f^*TN é simétrica no seguinte sentido:*

$$
{}^f\nabla_U (f_*V) -{}^f \nabla_V (f_*U) = f_* ([U, V]) ,
$$

para todo $U, V \in \Gamma (TM)$.

Demonstração. Como antes, seja uma carta (W_1, ψ) em N tal que $f (p) \in W_1$ e uma carta (W_2, φ) em M tal que $p \in W_2$. Escrevendo $U = \sum_{i=1}^n U^i \partial_i$ e $V = \sum_{j=1}^n V^j \partial_j$ segue que

${}^f\nabla_U \left(f_* \sum_{j=1}^n V^j \partial_j\right) -{}^f \nabla_V \left(f_* \sum_{i=1}^n U^i \partial_i\right) ={}^f \nabla_U \left(\sum_{j=1}^n V^j f_*\partial_j\right) -{}^f \nabla_V \left(\sum_{i=1}^n U^i f_*\partial_i\right)$

$= \sum_{j=1}^n \left({}^f\nabla\right)_U \left(V^j f_*\partial_j\right) - \sum_{i=1}^n \left({}^f\nabla\right)_V \left(U^i f_*\partial_i\right)$

$= \sum_{j=1}^n \left({}^f\nabla\right)_U \left(V^j \sum_{\alpha=1}^m \partial_j (f^\alpha) \partial_\alpha\right) - \sum_{i=1}^n \left({}^f\nabla\right)_V \left(U^i \sum_{\beta=1}^m \partial_i \left(f^\beta\right) \partial_\beta\right)$

$= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \left({}^f\nabla\right)_U \left(V^j \partial_j (f^\alpha) \partial_\alpha\right) - \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^m \left({}^f\nabla\right)_V \left(U^i \partial_i \left(f^\beta\right) \partial_\beta\right)$

$= \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \left({}^f\nabla\right)_{\sum_{i=1}^n U^i \partial_i} \left(V^j \partial_j (f^\alpha) \partial_\alpha\right) - \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=1}^m \left({}^f\nabla\right)_{\sum_{j=1}^n V^j \partial_j} \left(U^i \partial_i \left(f^\beta\right) \partial_\beta\right)$

$= \sum_{j,i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m U^i \left({}^f\nabla\right)_{\partial_i} \left(V^j \partial_j (f^\alpha) \partial_\alpha\right) - \sum_{i,j=1}^n \sum_{\beta=1}^m V^j \left({}^f\nabla\right)_{\partial_j} \left(U^i \partial_i \left(f^\beta\right) \partial_\beta\right)$

Pela regra do produto, segue que

${}^f\nabla_U \left(f_* \sum_{j=1}^n V^j \partial_j\right) -{}^f\nabla_V \left(f_* \sum_{i=1}^n U^i \partial_i\right) = \sum_{j,i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m U^i \partial_i \left(V^j \partial_j (f^\alpha)\right) \partial_\alpha + U^i V^j \partial_j (f^\alpha) \left({}^f\nabla\right)_{\partial_i} (\partial_\alpha)_f$

$- \sum_{i,j=1}^n \sum_{\beta=1}^m V^j \partial_j \left(U^i \partial_i \left(f^\beta\right)\right) \partial_\beta + V^j U^i \partial_i \left(f^\beta\right) \left({}^f\nabla\right)_{\partial_j} (\partial_\beta)_f$

$= \sum_{j,i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m U^i \partial_i \left(V^j \partial_j (f^\alpha)\right) \partial_\alpha + U^i V^j \partial_j (f^\alpha) \nabla_{f_*\partial_i} \partial_\alpha$

$- \sum_{i,j=1}^n \sum_{\beta=1}^m V^j \partial_j \left(U^i \partial_i \left(f^\beta\right)\right) \partial_\beta + V^j U^i \partial_i \left(f^\beta\right) \nabla_{f_*\partial_j} \partial_\beta$

$= \sum_{j,i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m U^i \left(\partial_i \left(V^j\right) \partial_j (f^\alpha) + V^j \partial_i \partial_j (f^\alpha)\right) \partial_\alpha + U^i V^j \partial_j (f^\alpha) \nabla_{f_*\partial_i} \partial_\alpha$

$- \sum_{i,j=1}^n \sum_{\beta=1}^m V^j \left(\partial_j \left(U^i\right) \partial_i \left(f^\beta\right) + U^i \partial_j \partial_i \left(f^\beta\right)\right) \partial_\beta + V^j U^i \partial_i \left(f^\beta\right) \nabla_{f_*\partial_j} \partial_\beta$

$= f_* ([U, V])$ ■

Transporte Paralelo

O transporte paralelo é uma maneira de usar a conexão para dados geométricos de diferentes pontos ao longo de curvas suaves:

Seja ∇ uma conexão em um fibrado $\pi : E \to M$. Se $\gamma : I \to M$ é uma curva suave, então uma **seção suave ao longo de** γ é uma seção de $\gamma^* E$. Associado a isso temos a conexão pullback ${}^{\gamma}\nabla$. Uma seção V ao longo de γ é dita **paralela ao longo de** γ se

$$ {}^{\gamma}\nabla_{\partial_t} V \equiv 0. \tag{A.30}$$

Em um referencial local $\{e_j\}_{j=1}^n$ em torno de $\gamma(t_0)$,

$$\begin{aligned}
\left({}^{\gamma}\nabla_{\partial_t} V\right)(t_0) &= \left({}^{\gamma}\nabla_{\partial_t} \sum_{j=1}^n V^j(t)\, e_j \circ \gamma\right)(t_0) = \sum_{j=1}^n \left({}^{\gamma}\nabla_{\partial_t} V^j(t)\, e_j \circ \gamma\right)(t_0) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(V^j\right)'(t_0)\, e_j(\gamma(t_0)) + V^j(t_0)\left({}^{\gamma}\nabla_{\partial_t} e_j \circ \gamma\right)(t_0) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(V^j\right)'(t_0)\, e_j(\gamma(t_0)) + V^j(t_0)\left(\nabla_{\gamma_* \partial_t} e_j\right)(\gamma(t_0)) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(V^j\right)'(t_0)\, e_j(\gamma(t_0)) + V^j(t_0)\left(\nabla_{\sum_{i=1}^n (\gamma^i)' e_i}(e_j)\right)(\gamma(t_0)).
\end{aligned}$$

Pela linearidade de ∇, vemos que

$$\begin{aligned}
\left({}^{\gamma}\nabla_{\partial_t} V\right)(t_0) &= \sum_{j=1}^n \left(V^j\right)'(t_0)\, e_j(\gamma(t_0)) + \sum_{i=1}^n \partial_t\left(\gamma^i\right) V^j(t_0)\left(\nabla_{e_i} e_j\right)(\gamma(t_0)) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(V^j\right)'(t_0)\, e_j(\gamma(t_0)) + \sum_{i=1}^n \left(\gamma^i\right)'(t_0)\, V^j(t_0) \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0))\, e_k(\gamma(t_0)) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(V^j\right)'(t_0)\, e_j(\gamma(t_0)) + \sum_{i,j,k=1}^n \left(\gamma^i\right)'(t_0)\, V^j(t_0)\, \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0))\, e_k(\gamma(t_0)) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(V^k\right)'(t_0)\, e_k(\gamma(t_0)) + \sum_{i,j,k=1}^n \left(\gamma^i\right)'(t_0)\, V^j(t_0)\, \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0))\, e_k(\gamma(t_0)) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n \left(V^k\right)'(t_0) + \sum_{i,j=1}^n \left(\gamma^i\right)'(t_0)\, V^j(t_0)\, \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0))\right) e_k(\gamma(t_0)).
\end{aligned}$$

Ou seja, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \left(V^1\right)' = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^{1} \circ \gamma\right) \left(\gamma^i\right)' V^j \\ \vdots \\ \left(V^n\right)' = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^{n} \circ \gamma\right) \left(\gamma^i\right)' V^j \end{cases} \tag{A.31}$$

Teorema A.7 *Dada uma curva $\gamma : I \to M$ e um vetor $V_0 \in E_{\gamma(0)}$, existe uma única seção paralela V ao longo de γ tal que $V(0) = V_0$. Tal V é dito transporte paralelo de V_0 ao longo de γ.*

Demonstração. Esse resultado é imediato, uma vez que o sistema (A.31) é uma EDO vetorial linear. Junto com a condição inicial $V(0) = V_0$, a teoria de EDO nos garante a existência e a unicidade das funções

$$V^i : I \to \mathbb{R}, \text{ para todo } i = 1, ..., n$$

Definindo $V(t) := \sum_{j=1}^{n} V^j(t)\, e_j \circ \gamma(t)$, temos o resultado. ■

Dada uma curva γ, o teorema acima nos permite definir a família de aplicações $P_t^\gamma : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(t)}$ por

$$P_t^\gamma(V_0) = V(t_0),$$

em que V é o transporte paralelo de V_0 ao longo de γ. Observe que P_t^γ é um isomorfismo linear, para todo $t \in I$.

De fato, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $V_0, W_0 \in E_{\gamma(0)}$ sejam V e W as únicas seções paralelas ao longo de γ tais que $V(0) = V_0$ e $W(0) = W_0$, respectivamente. Segue que

$$\begin{cases} {}^\gamma\nabla_{\partial_t}(\alpha V + \beta W) = \alpha {}^\gamma\nabla_{\partial_t} V + \beta {}^\gamma\nabla_{\partial_t} W = 0 + 0 = 0, \\ (\alpha V + \beta W)(0) = \alpha V(0) + \beta W(0) = \alpha V_0 + \beta W_0. \end{cases}$$

Portanto vemos que

$$P_t^\gamma(\alpha V_0 + \beta W_0) = \alpha V(t) + \beta W(t) = \alpha P_t^\gamma(V_0) + \beta P_t^\gamma(W_0).$$

Seja $\widetilde{\gamma} : I = [a, b] \to M$ em que $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma((1-t)b + ta)$. É fácil verificar que

$$P_t^{\widetilde{\gamma}} = \left(P_t^\gamma\right)^{-1}.$$

e portanto, P_t^γ é um isomorfismo. Uma outra forma de ver isso, é notar que para quaisquer seções paralelas X, Y ao longo de γ,

$$\begin{aligned} ({}^{\gamma}\nabla)_{\partial_t}\left(g_\gamma\left(X\left(t\right), Y\left(t\right)\right)\right) &= g_\gamma\left(\left(({}^{\gamma}\nabla)_{\partial_t} X\right)\left(t\right), Y\left(t\right)\right) + g_\gamma\left(X\left(t\right), \left(({}^{\gamma}\nabla)_{\partial_t} Y\right)\left(t\right)\right) \\ &= g_\gamma\left(0, Y\left(t\right)\right) + g_\gamma\left(X(t), 0\right) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, o módulo e o ângulo entre os vetores das seções paralelas são constantes ao longo de γ. Portanto se $P_t\left(V_0\right) = 0$, segue que $V_0 = 0$, e isso nos garante a injetividade de P_t. Por fim, como $\dim E_{\gamma(0)} = \dim E_{\gamma(t)}$, segue do teorema do núcleo e da imagem a sobrejetividade de P_t.

Decomposição do Espaço Tangente da Variedade Produto

Dadas duas variedades M_1 e M_2, seja $\pi_j : M_1 \times M_2 \to M_j$ a projeção canônica, $j = 1, 2$. Se $\alpha : I \to M_1 \times M_2$ é uma curva suave, podemos escrever

$$\alpha\left(t\right) = \left(\alpha_{M_1}\left(t\right), \alpha_{M_2}\left(t\right)\right) \qquad , \ t \in I$$

onde $\alpha_{M_1} = \pi_1 \circ \alpha : I \to M_1$ e $\alpha_{M_2} = \pi_2 \circ \alpha : I \to M_2$. O pushforward $\left(\pi_j\right)_* : T\left(M_1 \times M_2\right) \to TM_j$ induz, via fibrado pullback, os seguinte morfismos de fibrados sobre $M_1 \times M_2$:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \left(\left(q, r\right), [\alpha]\right) \in T\left(M_1 \times M_2\right) \to \left(\left(q, r\right), [\alpha_{M_1}]\right) \in \pi_1^*\left(TM_1\right) \\ \Pi_2 &: \left(\left(q, r\right), [\alpha]\right) \in T\left(M_1 \times M_2\right) \to \left(\left(q, r\right), [\alpha_{M_2}]\right) \in \pi_2^*\left(TM_2\right) \end{aligned}$$

Nesse caso, temos o seguinte isomorfismo :

Proposição A.21 *Dadas duas variedades M_1 e M_2. A aplicação*

$$[\alpha] \in T_{(q,r)}\left(M_1 \times M_2\right) \overset{(\Pi_1 \times \Pi_2)_{(q,r)}}{\longmapsto} \left([\alpha_{M_1}], [\alpha_{M_2}]\right) \in T_q M_1 \times T_r M_2$$

é um isomorfismo linear (chamaremos esta aplicação de ***identificação canônica****) entre $T_{(q,r)}\left(M_1 \times M_2\right)$ e $T_q M_1 \times T_r M_2$.*

Demonstração. De fato, dados $[\alpha], [\beta] \in T_{(q,r)}\left(M_1 \times M_2\right)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, segue que

$$a\alpha\left(t\right) + b\beta\left(t\right) = a\left(\alpha_{M_1}\left(t\right), \alpha_{M_2}\left(t\right)\right) + b\left(\beta_{M_1}\left(t\right), \beta_{M_2}\left(t\right)\right) = \left(a\alpha_{M_1}\left(t\right) + b\beta_{M_1}\left(t\right), a\alpha_{M_2}\left(t\right) + b\beta_{M_2}\left(t\right)\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(\Pi_1\times\Pi_2)_{(q,r)}(a[\alpha]+b[\beta]) &= (\Pi_1\times\Pi_2)([a\alpha+b\beta]) = \left(\left[a\alpha_{M_1}+b\beta_{M_1}\right],\left[a\alpha_{M_2}+b\beta_{M_2}\right]\right)\\
&= \left(a[\alpha_{M_1}]+b\left[\beta_{M_1}\right],a[\alpha_{M_2}]+b\left[\beta_{M_2}\right]\right)\\
&= a([\alpha_{M_1}],[\alpha_{M_2}])+b\left(\left[\beta_{M_1}\right],\left[\beta_{M_2}\right]\right)\\
&= a(\Pi_1\times\Pi_2)_{(q,r)}([\alpha])+b(\Pi_1\times\Pi_2)_{(q,r)}([\beta]).
\end{aligned}$$

Além disso, se $(\Pi_1\times\Pi_2)_{(q,r)}([\alpha])=(\Pi_1\times\Pi_2)_{(q,r)}([\beta])$, segue que

$$([\alpha_{M_1}],[\alpha_{M_2}])=\left(\left[\beta_{M_1}\right],\left[\beta_{M_2}\right]\right)$$

e portanto, dada uma carta produto dada uma carta produto $(U\times V,\varphi_1\times\varphi_2)$ de $M_1\times M_2$ tal que $(q,r)\in U\times V$, segue que

$$\begin{aligned}
(\varphi_1\times\varphi_2\circ\alpha)'(0) &= \left((\varphi_1\circ\alpha_{M_1})'(0),(\varphi_2\circ\alpha_{M_2})'(0)\right)\\
&= \left(\left(\varphi_1\circ\beta_{M_1}\right)'(0),\left(\varphi_2\circ\beta_{M_2}\right)'(0)\right)=(\varphi_1\times\varphi_2\circ\beta)'(0),
\end{aligned}$$

ou seja, $[\alpha]=[\beta]$. Por fim, a igualdade dimensional e o teorema do núcleo e da imagem garantem a sobrejetividade de $(\Pi_1\times\Pi_2)_{(q,r)}$. ■

Pela proposição acima vemos que a aplicação

$$\Pi_1\times\Pi_2:((q,r),[\alpha])\in T(M_1\times M_2)\mapsto\left((q,r),(\Pi_1\times\Pi_2)_{(q,r)}([\alpha])\right)\in\pi_1^*(TM_1)\times\pi_2^*(TM_2)$$

é um isomorfismo de fibrados.

Além disso, notemos que se $((q,r),[\alpha_{M_1}])\in\pi_1^*(TM_1)$,podemos definir a curva $\alpha:I\to M_1\times M_2$ em que

$$\alpha(t)=(\alpha_{M_1}(t),\alpha_{M_2}(t))=(\alpha_{M_1}(t),r)\qquad,\ t\in I.$$

Segue por construção que

$$((q,r),[\alpha])\in T(M_1\times M_2)\qquad\text{e}\qquad\Pi_1(((q,r),[\alpha]))=((q,r),[\alpha_{M_1}]),$$

ou seja, Π_1 é uma aplicação sobrejetora de fibrados (de modo análogo verifica-se que Π_2 também o é). Portanto por definição de fibrado pullback, existem subfibrados bem definidos E_1 e E_2 em $T(M_1\times M_2)$, em que

$$\begin{aligned} E_1 &= \ker \Pi_1 = \{((q,r),[\alpha]) \in T(M_1 \times M_2) : [\alpha_{M_1}] = 0\} \simeq \pi_2^*(TM_2), \\ E_2 &= \ker \Pi_2 = \{((q,r),[\alpha]) \in T(M_1 \times M_2) : [\alpha_{M_2}] = 0\} \simeq \pi_1^*(TM_1), \end{aligned}$$

Logo podemos escrever o isomorfismo de uma outra forma,

$$T(M_1 \times M_2) \simeq \ker \Pi_1 \times \ker \Pi_2.$$

Exemplo A.14 *Se $M_1 = M$ e $M_2 = \mathbb{R}$ são duas variedades, com as projeções canônicas $\pi_1 : M \times \mathbb{R} \to M$ e $\pi_2 : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então nas fibras sobre (x_0, t_0) temos*

$$\Pi_2(v) = \Pi_2([\alpha]) = [\alpha_{\mathbb{R}}] = (\pi_2)_*([\alpha]) = (\pi_2)_*(v) = d(\pi_2)_{(x_0,t_0)}.v$$

Além disso, a projeção Π_1 é dada por

$$\Pi_1(v) = \Pi_1([\alpha]) = [\alpha_M] = (\pi_1)_*([\alpha]) = (\pi_1)_*(v) = d(\pi_1)_{(x_0,t_0)}.v$$

Fazendo

$$\mathfrak{G} = \ker(\pi_2)_* = \{v \in T(M \times \mathbb{R}) : (\pi_2)_*(v) = 0\}$$

segue que o fibrado tangente de $M \times \mathbb{R}$ tem a seguinte expressão:

$$T(M \times \mathbb{R}) = \mathfrak{G} \times \mathbb{R}\partial_t,$$

pois vale a seguinte igualdade:

$$(\pi_2^*(T\mathbb{R}))_{(x_0,t_0)} = T_{t_0}\mathbb{R} = \mathbb{R}\partial_{t_{|t_0}},$$

onde $\partial_{t_{|t_0}}$ é base coordenada para $T_{t_0}\mathbb{R}$.

Conexões e Métricas em Subfibrados

Considere F um subfibrado de um fibrado E sobre uma variedade M. Se E está munido de uma métrica g, então podemos, naturalmente, induzir uma métrica em F pela inclusão: Se $\iota : F \to E$ é a inclusão de

F em E, então a métrica induzida em F é definida por

$$g_F : \left(\xi_p, \eta_p\right) \in F_p \times F_p \mapsto g_F\left(\xi_p, \eta_p\right) := g\left(\iota\left(\xi_p\right), \iota\left(\eta_p\right)\right) \in \mathbb{R},$$

para todo $p \in M$.

Não há, em geral, nenhuma forma natural para induzir uma conexão em F da conexão ∇ em E. Consideremos apenas o seguinte caso especial:

Definição A.25 (Subfibrado Paralelo) *Um subfibrado F de um fibrado vetorial E é dito **paralelo** se F é invariante por transporte paralelo, isto é, para toda curva suave $\sigma : I = [0,1] \to M$ e toda seção paralela ξ de $\sigma^* E$ sobre I com $\xi(0) \in F_{\sigma(0)}$, segue que $\xi(t) \in F_{\sigma(t)}$, para todo $t \in I$.*

Se F é paralelo, existe uma única conexão ∇^F em F tal que

$$\iota\left(\nabla_U^F \xi\right) = \nabla_U\left(\iota(\xi)\right),$$

para todo $U \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(F)$. Com isso, temos o seguinte resultado:

Proposição A.22 *Um subfibrado F é paralelo se e somente se a conexão ∇ em E leva seções de F para F, isto é, $\nabla_u(\iota(\xi)) \in \iota(F_p)$ para todo $u \in T_pM$ e todo $\xi \in \Gamma(F)$.*

Demonstração. Suponha que ∇ em E leva seções de F para F, isto é, $\nabla_u(\iota(\xi)) \in \iota(F_p)$. Com isso, fica bem definida uma conexão em F definida por:

$$\nabla_X^F \theta := \iota^{-1}\left(\nabla_X\left(\iota(\theta)\right)\right),$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$ e todo $\theta \in \Gamma(F)$.

Dada uma curva suave $\sigma : I = [0,1] \to M$ e uma seção paralela ξ de $\sigma^* E$ sobre I com $\xi(0) \in \iota\left(F_{\sigma(0)}\right)$, segue que $\iota^{-1}(\xi) \in F_{\sigma(0)}$. Seja $\theta \in \Gamma(\sigma^* F)$ a única seção paralela de $\iota^{-1}(\xi)$ ao longo de σ com relação à conexão ∇^F. Mas então se D^F é a derivada covariante com relação à ∇^F temos que

$$0 = D^F(\theta)(t) = \left(\nabla_{\sigma'}^F \widetilde{\theta}\right)(\sigma(t)) = \iota^{-1}\left(\left(\nabla_{\sigma'}\iota\left(\widetilde{\theta}\right)\right)(\sigma(t))\right) = \iota^{-1}\left(\left(\nabla_{\sigma'}\widetilde{\iota(\theta)}\right)(\sigma(t))\right).$$

Como a inclusão é injetiva, segue que

$$0 = \left(\nabla_{\sigma'}\widetilde{\iota(\theta)}\right)(\sigma(t)) = D(\iota(\theta))(t),$$

e por unicidade, $\iota(\theta)$ é a seção paralela de $\xi(0)$ ao longo de σ. E óbviamente $\iota(\theta)(t) \in \iota\left(F_{\sigma(t)}\right)$, para todo $t \in I$

Por outro lado, suponhamos que F é paralela. Dado $p \in M$, $X \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(F)$. Dada uma curva $\beta : I \to M$ tal que $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = X(p)$. Seja $\{v_1, ..., v_m\} \subset \iota\left(F_{\beta(0)}\right)$ uma base e $\{v_1(t), ..., v_m(t)\}$ o transporte paralelo de $\{v_1, ..., v_m\}$ ao longo de β. Notemos que $\{v_1(t), ..., v_m(t)\} \subset \iota\left(F_{\beta(t)}\right)$ por hipótese. Se D^β é a derivada covariante ao longo de β, então

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \iota(\xi))(p) &= \left(D^\beta(\iota(\xi))\right)(0) = \left(D^\beta\left(\sum_{j=1}^m a^j v_j\right)\right)(0) = \sum_{j=1}^m \left(D^\beta\left(a^j v_j\right)\right)(0) \\
&= \sum_{j=1}^m \left(a^j\right)'(0)\, v_j(0) + a^j(0)\left(D^\beta(v_j)\right)(0) \\
&= \sum_{j=1}^m \left(a^j\right)'(0)\, v_j(0) \in \iota(F_p).
\end{aligned}$$

■

Notemos também que se ∇ é compatível com a métrica g em E, e F é um subfibrado paralelo de E, então ∇^F é compatível com g_F. De fato,

$$\begin{aligned}
g_F\left(\nabla_U^F \xi, \eta\right) + g_F\left(\xi, \nabla_U^F \eta\right) &= g\left(\iota\left(\nabla_U^F \xi\right), \iota(\eta)\right) + g\left(\iota(\xi), \iota\left(\nabla_U^F \eta\right)\right) \\
&= g\left(\nabla_U(\iota(\xi)), \iota(\eta)\right) + g\left(\iota(\xi), \nabla_U(\iota(\eta))\right) \\
&= U\left(g\left(\iota(\xi), \iota(\eta)\right)\right) \\
&= U\left(g_F(\xi, \eta)\right).
\end{aligned}$$

Exemplo A.15 *Seja E um fibrado vetorial com conexão ∇. Então, o fibrado dos $(2,0)$-tensores simétricos em E é um subfibrado paralelo do fibrado dos $(2,0)$-tensores em E. Para mostrar isso, precisamos verificar que $\nabla_U T$ é simétrico sempre que T é um $(2,0)$-tensor simétrico: Dados $X, Y \in \Gamma(E)$ e $U \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\begin{aligned}
(\nabla_U T)(X, Y) &= \nabla_U(T(X, Y)) - T(\nabla_U X, Y) - T(X, \nabla_U Y) \\
&= \nabla_U(T(Y, X)) - T(Y, \nabla_U X) - T(\nabla_U Y, X) \\
&= (\nabla_U T)(Y, X).
\end{aligned}$$

A.0.2 Integração e Teoremas da Divergência

Se (M, g) é uma variedade riemanniana orientada com bordo e $\widetilde{g}$ é a métrica induzida em ∂M (bordo de M) pela inclusão $\iota : \partial M \to M$, então definimos a **forma de volume** de $\widetilde{g}$ por

$$d\sigma_{\widetilde{g}} = \iota_{\upsilon}\left(\left(d\mu_g\right)_{|\partial M}\right) := \left(d\mu_g\right)_{|\partial M}(\upsilon, \cdot, ..., \cdot),$$

onde $\upsilon(p)$ é o vetor unitário que gera o espaço vetorial unidimensional $(T_p(\partial M))^c$ (em que o complementar é em relação à T_pM), $p \in M$, "apontando para dentro da superfície". Em particular, se $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\iota_X\left(d\mu_g\right)_{|\partial M} = \left(d\mu_g\right)_{|\partial M}(g(X, \upsilon)\upsilon, \cdot, ..., \cdot) = g(X, \upsilon)\left(d\mu_g\right)_{|\partial M}(\upsilon, \cdot, ..., \cdot) = g(X, \upsilon)\, d\sigma_{\widetilde{g}}.$$

Com isso, definimos o divergente de X, $\operatorname{div} X$, como a quantidade que satisfaz

$$d(\iota_X(d\mu)) = (\operatorname{div} X)\, d\mu. \tag{A.32}$$

Teorema A.8 (Teorema da Divergência) *Seja (M, g) uma variedade riemanniana compacta e orientada. Se X é um campo vetorial, então*

$$\int_M (\operatorname{div} X)\, d\mu = \int_{\partial M} g(X, \upsilon)\, d\sigma.$$

Em particular, se M é fechada (isto é, compacta e sem bordo), então

$$\int_M (\operatorname{div} X)\, d\mu = 0.$$

Demonstração. Defina a $(n-1)$-forma α por $\alpha := \iota_X(d\mu)$. Segue do Teorema de Stokes que

$$\int_M (\operatorname{div} X)\, d\mu = \int_M d(\iota_X(d\mu)) = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = \int_{\partial M} \iota_X(d\mu) = \int_{\partial M} g(X, \upsilon)\, d\sigma.$$

Em particular, se M é fechada:

$$\int_M (\operatorname{div} X)\, d\mu = \int_{\partial M} g(X, \upsilon)\, d\sigma = \int_{\emptyset} g(X, \upsilon)\, d\sigma = 0.$$

■

Como corolário desse teorema, temos alguns resultados úteis:

Proposição A.23 (Integração por Partes) *Em uma variedade riemanniana* (M,g) , *com* $u,v \in C^{\infty}(M)$ *valem as seguintes:*

(a) *Em uma variedade fechada,*

$$\int_M (\Delta u)\, d\mu = 0;$$

(b) *Em uma variedade compacta,*

$$\int_M (u\Delta v - v\Delta u)\, d\mu = \int_{\partial M} \left(u\frac{\partial v}{\partial \upsilon} - v\frac{\partial u}{\partial \upsilon}\right) d\sigma.$$

Em particular, em uma variedade fechada

$$\int_M (u\Delta v)\, d\mu = \int_M (v\Delta u)\, d\mu.$$

(c) *Em uma variedade compacta,*

$$\int_M (u\Delta v)\, d\mu + \int_M g(\nabla u, \nabla v)\, d\mu = \int_{\partial M} \left(u\frac{\partial v}{\partial \upsilon}\right) d\sigma.$$

Em particular, em uma variedade fechada

$$\int_M g(\nabla u, \nabla v)\, d\mu = -\int_M (u\Delta v)\, d\mu.$$

Demonstração. (a) Pela definição de laplaciano e pelo Teorema da Divergência,

$$\int_M (\Delta u)\, d\mu = \int_M (\operatorname{div} \nabla u)\, d\mu = 0.$$

(c) Usando que

$$\operatorname{div}(u\nabla v) = u \operatorname{div}(\nabla v) + g(\nabla u, \nabla v) = u\Delta v + g(\nabla u, \nabla v)$$

vemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \int_M (u\Delta v)\, d\mu + \int_M g(\nabla u, \nabla v)\, d\mu &= \int_M \operatorname{div}(u\nabla v)\, d\mu = \int_{\partial M} g(u\nabla v, \upsilon)\, d\sigma \\ &= \int_{\partial M} u g(\nabla v, \upsilon)\, d\sigma \\ &= \int_{\partial M} \left(u\frac{\partial v}{\partial \upsilon}\right) d\sigma. \end{aligned}$$

Em particular, em uma variedade fechada,

$$\int_M (u\Delta v)\, d\mu + \int_M g(\nabla u, \nabla v)\, d\mu = \int_{\partial M} \left(u\frac{\partial v}{\partial \upsilon} \right) d\sigma = \int_{\emptyset} \left(u\frac{\partial v}{\partial \upsilon} \right) d\sigma = 0.$$

(b) Usando a alternativa (c), vemos que

$$\begin{cases} \int_M (u\Delta v)\, d\mu + \int_M g(\nabla u, \nabla v)\, d\mu = \int_{\partial M} \left(u\frac{\partial v}{\partial \upsilon} \right) d\sigma \\ \int_M (v\Delta u)\, d\mu + \int_M g(\nabla v, \nabla u)\, d\mu = \int_{\partial M} \left(v\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right) d\sigma \end{cases},$$

subtraindo a segunda equação da primeira, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \left(u\frac{\partial v}{\partial \upsilon} \right) d\sigma - \int_{\partial M} \left(v\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right) d\sigma &= \int_M (u\Delta v)\, d\mu + \int_M g(\nabla u, \nabla v)\, d\mu \\ &\quad - \int_M (v\Delta u)\, d\mu - \int_M g(\nabla v, \nabla u)\, d\mu \\ &= \int_M (u\Delta v)\, d\mu - \int_M (v\Delta u)\, d\mu. \end{aligned}$$

Em particular, se a variedade é fechada então

$$\int_M (u\Delta v)\, d\mu - \int_M (v\Delta u)\, d\mu = \int_{\partial M} \left(u\frac{\partial v}{\partial \upsilon} \right) d\sigma - \int_{\partial M} \left(v\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right) d\sigma = \int_{\emptyset} \left(u\frac{\partial v}{\partial \upsilon} \right) d\sigma - \int_{\emptyset} \left(v\frac{\partial u}{\partial \upsilon} \right) d\sigma = 0.$$

■

Observações com Relação a Expressão do Divergente

Busquemos uma expressão local para o divergente, definido pela expressão (A.32) e mostremos que ela é equivalente ao traço da derivada covariante. Isto é,

$$\operatorname{div} X = Tr\left(\nabla X\right). \tag{A.33}$$

Antes de mostrar uma expressão local para o divergente, vamos exibir uma ferramenta que será utilizada em sua demonstração. Comecemos com algumas definições preliminares: Considere uma variedade riemanniana M e um $(k,0)$-tensor T em M. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo suave em M. Definimos a função $\iota_X : \mathcal{T}_0^k(M) \to \mathcal{T}_0^{k-1}(M)$, em que

$$\left(\iota_X(\omega)\right)(X_1, ..., X_{k-1}) := \omega\left(X, X_1, ..., X_{k-1}\right),$$

para todo $X_1, ..., X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$.

Além disso, dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, considere $\{\varphi_t : M \to M\}$ o fluxo de X, isto é, se $p \in M$ então $\varphi_t(p)$ é a avaliação em t da única curva suave em M cujo valor em $t = 0$ é p e cujo vetor velocidade em t é o campo X avaliado no respectivo ponto da curva. Definimos a **derivada de Lie** com relação a X como a função $\mathcal{L}_X : \mathcal{T}_l^k(M) \to \mathcal{T}_l^k(M)$, em que

$$(\mathcal{L}_X \omega)(p) := \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})^*_{\varphi_t(p)} (\omega(\varphi_t(p))) - \omega(p)}{t}. \tag{A.34}$$

Mais ainda, definimos a **derivada exterior** como a única aplicação $d : \mathcal{T}_0^k(M) \to \mathcal{T}_0^{k+1}(M)$ tal que

1. Se $f \in C^\infty(M)$, então $d(f) = df$ a diferencial da função f;

2. Se $f \in C^\infty(M)$, então $d(df) = 0$;

3. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p(\alpha \wedge d\beta)$, em que $\beta \in \mathcal{T}_0^{k-p}(M)$ e $\alpha \in \mathcal{T}_0^p(M)$. (para mais detalhes veja a Seção B)

Com essas definições, pode-se mostrar a seguinte expressão (chamada de **Fórmula de Cartan**):

$$d \circ \iota_X + \iota_X \circ d = \mathcal{L}_X, \tag{A.35}$$

para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema A.8 *O divergente* $\operatorname{div} X$ *de um campo vetorial* X*, definido pela expressão (A.32), pode ser expresso em coordenadas locais por*

$$\operatorname{div} X = \operatorname{div}\left(\sum_{k=1}^n X^k \partial_k\right) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{k=1}^n \partial_k \left(X^k \sqrt{\det(g_{ij})}\right). \tag{A.36}$$

Demonstração. Segue da Fórmula de Cartan e da expressão (A.32) que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} X)\, d\mu &= d(\iota_X(d\mu)) = d(\iota_X(d\mu)) + 0 \\
&= d(\iota_X(d\mu)) + \iota_X(d(d\mu)) \\
&= (d \circ \iota_X + \iota_X \circ d)(d\mu) \\
&= \mathcal{L}_X d\mu.
\end{aligned}$$

Podemos expandir o lado esquerdo da igualdade. Pela definição de $d\mu$, temos

$$((\operatorname{div} X)\, d\mu)\,(\partial_1, ..., \partial_n) = \operatorname{div} X \sqrt{\det g}.$$

Podemos também expandir o lado direito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X d\mu)\,(\partial_1, ..., \partial_n) &= \mathcal{L}_X\,(d\mu\,(\partial_1, ..., \partial_n)) - \sum_{i=1}^{n} d\mu\,(\partial_1, ...\mathcal{L}_X \partial_i ..., \partial_n) \\
&= X\,(d\mu\,(\partial_1, ..., \partial_n)) - \sum_{i=1}^{n} d\mu\,(\partial_1, ...\,[X, \partial_i]\,..., \partial_n) \\
&= X\left(\sqrt{\det g}\right) + \sum_{i=1}^{n} d\mu\left(\partial_1, ...\sum_{j=1}^{n} \partial_i\left(X^j\right)\partial_j ..., \partial_n\right) \\
&= X\left(\sqrt{\det g}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\left(X^j\right) d\mu\,(\partial_1, ...\partial_j ..., \partial_n) \\
&= X\left(\sqrt{\det g}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\left(X^j\right)\delta_{ij}\sqrt{\det g} = X\left(\sqrt{\det g}\right) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i\left(X^i\right)\sqrt{\det g} \\
&= \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i\left(\sqrt{\det g}\right) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i\left(X^i\right)\sqrt{\det g} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_i\left(X^i \sqrt{\det g}\right).
\end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\operatorname{div} X \sqrt{\det g} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i\left(X^i \sqrt{\det g}\right).$$

Dividindo ambos os lados por $\sqrt{\det g}$ temos o resultado. ∎

Afirmação A.8.1 *As definições de* $\operatorname{div} X$ *dadas pelas expressões (A.32) e (A.33) coincidem.*

Demonstração. Como a derivada de dx^j é dada por

$$\left(\nabla_X dx^j\right)(\partial_i) = \left(\nabla_X dx^j\,(\partial_i)\right) - dx^j\,(\nabla_X \partial_i) = (\nabla_X \delta_{ij}) - dx^j\,(\nabla_X \partial_i) = -dx^j\,(\nabla_X \partial_i)\,, \qquad i, j = 1, ..., n.$$

a equação (A.33) implica que

$$Tr\,(\nabla X) = \sum_{i=1}^{n} \nabla X\left(\partial_i, dx^i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_i X)\left(dx^i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_i \sum_{j=1}^{n} X^j \partial_j\right)\left(dx^i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left(\partial_i X^j\right) \partial_j + X^j \nabla_i \partial_j\right) \left(dx^i\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left(\partial_i X^j\right) \partial_j + X^j \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k\right) \left(dx^i\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left(\partial_i X^j\right) \delta_{ij} + \sum_{k,j=1}^{n} X^j \Gamma_{ij}^k \delta_{ik}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_i X^i\right) + \sum_{i,j=1}^{n} X^j \Gamma_{ij}^i.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, a expressão (A.36) implica que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \frac{1}{\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}} \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_k X^k\right) \sqrt{\det\left(g_{ij}\right)} + \frac{1}{\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}} \sum_{k=1}^{n} X^k \partial_k \left(\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_k X^k\right) + \frac{1}{\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}} \sum_{k=1}^{n} X^k \partial_k \left(\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\right),
\end{aligned}
$$

onde, pela regra da cadeia:

$$
\partial_k \left(\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}} \partial_k \left(\det\left(g_{ij}\right)\right)
$$

Dada uma curva suave $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = p \in M$ e $\gamma'(0) = \partial_k$, segue que

$$
\begin{aligned}
\left(\partial_k \left(\det\left(g_{ij}\right)\right)\right)(p) &= \partial_k \left(\det\left(g_{ij}\right)\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt} \det\left(g_{ij} \circ \gamma\right)\right)_{t=0} \\
&= \left(\frac{d}{dt} \det\left(g_{ij} \circ \gamma\right)\right)_{t=0} \\
&= \left(\det\left(g_{ij} \circ \gamma\right) Tr \left[\left(g_{ij} \circ \gamma\right)^{-1} \left(\frac{d}{dt}\left(g_{ij} \circ \gamma\right)\right)_{t=0}\right]\right)_{t=0} \\
&= \left(\det\left(g_{ij}(p)\right) Tr \left[\left(g^{ij}(p)\right) \left(\partial_k \left(g_{ij}\right)\right)\right]\right) \\
&= \det\left(g_{ij}(p)\right) Tr \left(\left(\sum_{m=1}^{n} g^{im}(p) \partial_k \left(g_{mj}\right)\right)\right) \\
&= \det\left(g_{ij}(p)\right) \sum_{m,i=1}^{n} g^{im}(p) \partial_k \left(g_{mi}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, pela fórmula da derivada do determinante de uma matriz, e pela simetria de g, vemos que

$$\begin{aligned}
\partial_k\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}\partial_k\left(\det(g_{ij})\right) = \frac{\det(g_{ij})}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\partial_k\left(g_{pq}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\det(g_{ij})}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\partial_k\left(g_{pq}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\det(g_{ij})}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}\left(g\left(\nabla_k\partial_p,\partial_q\right)+g\left(\partial_p,\nabla_k\partial_q\right)\right) \\
&= \sqrt{\det(g_{ij})}\sum_{p,q=1}^{n} g^{pq}g\left(\nabla_k\partial_p,\partial_q\right) \\
&= \sum_{p,q=1}^{n}\sqrt{\det(g_{ij})}g^{pq}g\left(\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{kp}^{l}\partial_l,\partial_q\right) = \sum_{p,q,l=1}^{n}\sqrt{\det(g_{ij})}\Gamma_{kp}^{l}g^{pq}g_{lq} \\
&= \sum_{p,l=1}^{n}\sqrt{\det(g_{ij})}\Gamma_{kp}^{l}\delta_{pl} \\
&= \sum_{p=1}^{n}\sqrt{\det(g_{ij})}\Gamma_{kp}^{p}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{k=1}^{n}\left(\partial_k X^k\right) + \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\sum_{k=1}^{n} X^k\partial_k\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\partial_k X^k\right) + \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\sum_{k,p=1}^{n}\Gamma_{kp}^{p}X^k\sqrt{\det(g_{ij})} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\partial_k X^k\right) + \sum_{k,p=1}^{n}\Gamma_{kp}^{p}X^k.
\end{aligned}$$

Portanto ambas as definições coincidem. ■

Apêndice B

Produto Wedge

Considere um espaço vetorial n-dimensional V munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$. Seja $\{e^i\}_{i=1}^n$ a base dual de V^* relativa à base $\{e_i\}_{i=1}^n$. Dado $k \in \mathbb{N}$, defina o conjunto

$$\bigwedge^k V = \frac{\overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{k \text{ vezes}}}{\mathcal{I}}$$

como o quociente do espaço tensorial $V \otimes ... \otimes V$ pelo ideal $\mathcal{I}$ gerado por $x \otimes x$, em que $x \in V$ é fixado. Nesse caso, se denotarmos um elemento de $\bigwedge^k V$ por $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$, então

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_k = x_1 \otimes ... \otimes x_k \ (\operatorname{mod} \mathcal{I}),$$

para todo $x, y \in V$, isto é, se x_i e x_j são LD's (ou seja, se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x_i = \alpha x_j$), então $x_1 \wedge \cdots \wedge x_i \cdots \wedge x_j \cdots \wedge x_k = 0$.

Esse espaço possui um produto interno definido por:

$$g^{\wedge} : ((x_1 \wedge \cdots \wedge x_k), (y_1 \wedge \cdots \wedge y_k)) \bigwedge^k V \times \bigwedge^k V \mapsto \det\left(\langle x_i, y_j \rangle_{i,j=1}^k\right) \in \mathbb{R}$$

Considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de V e seja $\omega := e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in \bigwedge^n V$. O **Hodge Star Operator** é operador $* : \bigwedge^k V \to \bigwedge^{n-k} V$, definido completamente pela seguinte expressão:

$$\alpha \wedge (*\beta) = g^{\wedge}(\alpha, \beta)\, \omega,$$

para todo $\alpha, \beta \in \bigwedge^k V$. Se $\dim V = 4$, segue que $* : \bigwedge^2 V \to \bigwedge^2 V$. Nesse caso, $*(*\beta) = \beta$, para todo $\beta \in \bigwedge^2 V$ e portanto, $*\beta = \pm\beta$. A partir disso, temos as seguintes nomenclaturas: Dizemos que $\beta \in \bigwedge^2 V$ é **autodual** se $*\beta = \beta$, caso contrário, β é dita **anti-autodual**.

Agora vamos nos concentrar no caso $k = 2$: O espaço $\bigwedge^2 V$ é chamado de **Espaço da Segunda Potência Exterior** de V, os elementos da forma $x \wedge y \in \bigwedge^2 V$ são chamados de **Bivetores** e o produto "$\wedge$"entre os vetores de V é chamado de **Produto Wedge**.

O produto interno canônico em $\bigwedge^2 V$ é dado por

$$g^{\wedge} : (x \wedge y, u \wedge v) \in \bigwedge^2 V \times \bigwedge^2 V \mapsto \langle x, u \rangle \langle y, v \rangle - \langle x, v \rangle \langle y, u \rangle \in \mathbb{R}, \tag{B.1}$$

sendo que

$$g^{\wedge} (x \wedge y + p \wedge q, u \wedge v) := g^{\wedge} (x \wedge y, u \wedge v) + g^{\wedge} (p \wedge q, u \wedge v), \tag{B.2}$$

para todo $x \wedge y, p \wedge q, u \wedge v \in \bigwedge^2 V$.

De fato, dado $x \wedge y, u \wedge v, p \wedge q \in \bigwedge^2 V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} g^{\wedge} (x \wedge y, u \wedge v) &= \langle x, u \rangle \langle y, v \rangle - \langle x, v \rangle \langle y, u \rangle \\ &= \langle u, x \rangle \langle v, y \rangle - \langle v, x \rangle \langle u, y \rangle \\ &= g^{\wedge} (u \wedge v, x \wedge y), \end{aligned}$$

além disso, por definição temos que

$$g^{\wedge} (x \wedge y + p \wedge q, u \wedge v) = g^{\wedge} (x \wedge y, u \wedge v) + g^{\wedge} (p \wedge q, u \wedge v)$$

mais ainda,

$$\begin{aligned} g^{\wedge} (\alpha (x \wedge y), u \wedge v) &= g^{\wedge} ((\alpha x) \wedge y, u \wedge v) = \langle \alpha x, u \rangle \langle y, v \rangle - \langle \alpha x, v \rangle \langle y, u \rangle \\ &= \alpha \langle x, u \rangle \langle y, v \rangle - \alpha \langle x, v \rangle \langle y, u \rangle = \alpha (\langle x, u \rangle \langle y, v \rangle - \langle x, v \rangle \langle y, u \rangle) \\ &= \alpha g^{\wedge} (x \wedge y, u \wedge v), \end{aligned}$$

e também, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vemos que

$$g^{\wedge} (x \wedge y, x \wedge y) = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = ||x||^2 ||y||^2 - \langle x, y \rangle^2 \geq 0,$$

e a igualdade ocorre se e somente se x e y são LD's, isto é, se e somente se $x \wedge y = 0$.

Com respeito a isso, $B = \{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ forma uma base ortonormal para $\bigwedge^2 V$. De fato, se $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ e $y = \sum_{j=1}^n y^j e_j$, então

$$x \wedge y = \left(\sum_{i=1}^n x^i e_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n y^j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x^i y^j \left(e_i \wedge e_j\right) = \sum_{i<j=1}^n x^i y^j \left(e_i \wedge e_j\right).$$

Além disso,

$$g^\wedge \left(e_i \wedge e_j, e_a \wedge e_b\right) = \langle e_i, e_a\rangle \langle e_j, e_b\rangle - \langle e_i, e_b\rangle \langle e_j, e_a\rangle = \delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja},$$

portanto, se $i = a$ e $j = b$, segue que $i \neq b$, pois $b > a = i$, ou seja, $g^\wedge \left(e_i \wedge e_j, e_a \wedge e_b\right) = 1$. Por outro lado, suponha $a \neq i$. A única possibilidade para $g^\wedge \left(e_i \wedge e_j, e_a \wedge e_b\right) = 0$ é $a = j$ e $b = i$, mas daí $j = a < b = i$, mas $i < j$, absurdo. O caso $b \neq j$ é análogo. Por fim, se

$$\sum_{i<j=1}^n \alpha_{ij} \left(e_i \wedge e_j\right) = 0,$$

então temos que

$$0 = g^\wedge \left(0, e_a \wedge e_b\right) = g^\wedge \left(\sum_{i<j=1}^n \alpha_{ij} \left(e_i \wedge e_j\right), e_a \wedge e_b\right) = \sum_{i<j=1}^n \alpha_{ij} g^\wedge \left(e_i \wedge e_j, e_a \wedge e_b\right) = \alpha_{ab},$$

para todo $1 \leq a < b \leq n$.

Note que para cada valor de j entre 1 e n há $j - 1$ elementos da base B, isto é, B possui

$$1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ elementos,}$$

ou seja, $\bigwedge^2 V$ é um espaço vetorial $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensional. Vamos fazer a seguinte identificação por uma aplicação L:

$$\bigwedge^2 V \overset{L}{\simeq} \mathfrak{so}\left(n\right) = \left\{X \in M_{n\times n}\left(\mathbb{R}\right) : Tr(X) = 0 \text{ e } X^T = -X\right\}, \tag{B.3}$$

em que $L\left(e_i \wedge e_j\right)$ é a matriz de rotação de ângulo $\pi/2$ do plano gerado por $\{e_i, e_j\}$. Isso é equivalente a definir a seguinte transformação linear:

$$(x \wedge y) : z \in V \mapsto \langle y, z\rangle\, x - \langle x, z\rangle\, y.$$

De fato, temos que

$$\langle z, (x \wedge y)(z) \rangle = \langle z, \langle y, z \rangle x - \langle x, z \rangle y \rangle = \langle z, \langle y, z \rangle x \rangle - \langle z, \langle x, z \rangle y \rangle = \langle y, z \rangle \langle z, x \rangle - \langle x, z \rangle \langle z, y \rangle = 0.$$

Notemos que ao aplicar na base ortonormal,

$$\begin{aligned} (x \wedge y)(e_i) &= \langle y, e_i \rangle x - \langle x, e_i \rangle y = y^i \sum_{k=1}^{n} x^k e_k - x^i \sum_{k=1}^{n} y^k e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(y^i x^k - x^i y^k \right) e_k, \end{aligned}$$

isto é, sua matriz na base $\{e_i\}_{i=1}^n$ é dada pela seguinte expressão

$$[x \wedge y] = \begin{pmatrix} y^1x^1 - x^1y^1 & \cdots & y^nx^1 - x^ny^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^1x^n - x^1y^n & \cdots & y^nx^n - x^ny^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & y^nx^1 - x^ny^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^1x^n - x^1y^n & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(n).$$

Note que se

$$\langle y, z \rangle x - \langle x, z \rangle y = 0,$$

para todo $z \in V$, então

$$\langle y, z \rangle x = \langle x, z \rangle y$$

isto é, x e y são LD's (basta tomar z que não seja ortogonal a y e a x ao mesmo tempo e verificamos isso), e assim $x \wedge y = 0$, isto é, L é injetiva. E por igualdade de dimensão, segue do Teorema do Núcleo e da Imagem o isomorfismo.

Sob essa identificação, podemos induzir um produto interno em $\mathfrak{so}(n)$. De fato, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes de $\mathfrak{so}(n)$, segue que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(y^i x^k - x^i y^k \right) e_k = (x \wedge y)(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k,$$

ou seja, temos que resolver o seguinte sistema

$$y^i x^k - x^i y^k = a_{ki}, \qquad i, k = 1, ..., n,$$

com isso encontramos $x_A, y_A \in V$ tais que $[x_A \wedge y_A] = A$. Analogamente, encontramos $x_B, y_B \in V$ tais que $[x_B \wedge y_B] = B$. Com isso, definimos o produto interno de A e B por

$$\langle A, B\rangle = g^{\wedge}\left(x_A \wedge y_A, x_B \wedge y_B\right)$$

e expandindo a expressão vê-se que

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}Tr\left(A^T B\right) = -\frac{1}{2}Tr\left(AB\right),$$

pois $A^T = -A$. De fato, vamos verificar isso na base: Primeiro notemos que

$$\left(e_i \wedge e_j\right)\left(e_k\right) = \langle e_j, e_k\rangle e_i - \langle e_i, e_k\rangle e_j = \delta_{jk}e_i - \delta_{ik}e_j, \qquad k = 1, ..., n$$

ou seja, $[e_i \wedge e_j]$ é uma matriz formada por 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna e por -1 na j-ésima linha e i-ésima coluna. Denotemos $E_{ij} := (a_{uv}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $a_{uv} = \delta_{ui}\delta_{vj}$ Segue que

$$[e_i \wedge e_j]^T [e_k \wedge e_l] = \left(E_{ji} - E_{ij}\right)\left(E_{kl} - E_{lk}\right) = \delta_{ik}E_{jl} - \delta_{il}E_{jk} - \delta_{jk}E_{il} + \delta_{jl}E_{ik},$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
Tr\left([e_i \wedge e_j]^T [e_k \wedge e_l]\right) &= Tr\left(\delta_{ik}E_{jl} - \delta_{il}E_{jk} - \delta_{jk}E_{il} + \delta_{jl}E_{ik}\right) \\
&= \delta_{ik}Tr\left(E_{jl}\right) - \delta_{il}Tr\left(E_{jk}\right) - \delta_{jk}Tr\left(E_{il}\right) + \delta_{jl}Tr\left(E_{ik}\right) \\
&= \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{jl}\delta_{ik} \\
&= 2\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right) \\
&= 2g^{\wedge}\left(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l\right).
\end{aligned}$$

Investigando o Espaço Dual

Como foi feito acima, $\bigwedge^2 V^* = \left(V^* \otimes V^*\right)/\mathcal{I}$, em que $\mathcal{I} = \langle x \otimes x : x \in V^*\rangle$. O produto interno canônico é dado pelas expressões (B.1) e (B.2), sendo agora aplicado em vetores duais. O produto "$\wedge$"é um produto bilinear, antissimétrico. Podemos tratar um elemento de $\bigwedge^2 V^*$ como um funcional bilinear em $V \times V$, em que na base possui a seguinte definição:

$$\left(e_i^* \wedge e_j^*\right)\left(e_k, e_l\right) = \det\begin{pmatrix} e_i^*\left(e_k\right) & e_i^*\left(e_l\right) \\ e_j^*\left(e_k\right) & e_j^*\left(e_l\right) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{pmatrix} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}.$$

Analogamente, $\left\{e_i^* \wedge e_j^*\right\}_{i<j=1}^{n}$ é base ortonormal de $\bigwedge^2 V^*$ e se $\varphi \in \bigwedge^2 V^*$, então

$$\varphi = \sum_{i<j=1}^{n} \varphi_{ij} e_i^* \wedge e_j^*.$$

Notemos que

$$\varphi\left(e_k, e_l\right) = \sum_{i<j=1}^{n} \varphi_{ij}\left(e_i^* \wedge e_j^*\right)\left(e_k, e_l\right) = \sum_{i<j=1}^{n} \varphi_{ij}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right) = \varphi_{kl},$$

para todo $1 \leq k < l \leq n$. Mais ainda, o emparelhamento de bivetores com o seu dual é definido por

$$\left(e_i^* \wedge e_j^*\right)\left(e_k \wedge e_l\right) := \left(e_i^* \wedge e_j^*\right)\left(e_k, e_l\right),$$

para todo $1 \leq i < j, k < l \leq n$.

Vamos identificar $\bigwedge^2 V^*$ com $\mathfrak{so}(n)$ pela aplicação $L^* : \bigwedge^2 V \to \mathfrak{so}(n)$ que é definida da seguinte maneira:

$$L^*\left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e_i^* \wedge e_j^*\right) := \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\left(E_{ij} - E_{ji}\right), \tag{B.4}$$

sendo que

$$L^*\left(u \wedge v + w \wedge x\right) := L^*\left(u \wedge v\right) + L^*\left(w \wedge x\right),$$

para todo $u \wedge v, w \wedge x \in \bigwedge^2 V^*$, em que $E_{ij} = (a_{kl})$ com $a_{kl} = \delta_{ki}\delta_{lj}$. Notemos que se $i = j$, então $E_{ii} - E_{ii} = (0)$, portanto $L^*\left(e_i^* \wedge e_j^*\right)$ possui sempre todos os elementos da diagonal nulos, logo,

$$Tr\left(L^*\left(e_i^* \wedge e_j^*\right)\right) = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left(L^*\left(e_i^* \wedge e_j^*\right)\right)^T + L^*\left(e_i^* \wedge e_j^*\right) &= \left(E_{ij} - E_{ji}\right)^T + E_{ij} - E_{ji} \\
&= E_{ij}^T - E_{ji}^T + E_{ij} - E_{ji} \\
&= E_{ji} - E_{ij} + E_{ij} - E_{ji} \\
&= (0).
\end{aligned}$$

Portanto, o contradomínio de L^* é, de fato, $\mathfrak{so}(n)$.

Verifiquemos a linearidade de L^*:

$$\begin{aligned} L^*\left(\lambda\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}e_i^*\wedge e_j^*\right) &= L^*\left(\sum_{i,j=1}^{n}(\lambda\alpha_{ij})\,e_i^*\wedge e_j^*\right)=\sum_{i,j=1}^{n}(\lambda\alpha_{ij})\,(E_{ij}-E_{ji}) \\ &= \lambda\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\,(E_{ij}-E_{ji})=\lambda L^*\left(\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}e_i^*\wedge e_j^*\right), \end{aligned}$$

para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, além disso,

$$L^*\,(u\wedge v+w\wedge x)=L^*\,(u\wedge v)+L^*\,(w\wedge x)\,,$$

para todo $u\wedge v, w\wedge x\in\bigwedge^2 V^*$ pela própria definição de L^*. Logo essa aplicação é linear.

Por fim, suponha que $E_{ij}-E_{ji}=(0)$. Segue da definição dessas matrizes que $i=j$, isto é, temos que

$$(L^*)^{-1}\,(\{(0)\})=\left\{e_i^*\wedge e_j^*: i=j\right\}=\left\{0\in\bigwedge^2 V^*\right\},$$

isto é, L^* é injetiva. A igualdade das dimensões e o Teorema do Núcleo e da Imagem garantem que L^* é um isomorfismo.

Com isso, podemos equipar $\bigwedge^2 V^*$ de uma estrutura de álgebra de Lie. Em particular, temos o colchete

$$\begin{aligned} \left[e_i^*\wedge e_j^*, e_k^*\wedge e_l^*\right] &: = (L^*)^{-1}\left(\left[L^*\left(e_i^*\wedge e_j^*\right), L^*\left(e_k^*\wedge e_l^*\right)\right]\right)=(L^*)^{-1}\left([E_{ij}-E_{ji}, E_{kl}-E_{lk}]\right) \\ &= (L^*)^{-1}\left((E_{ij}-E_{ji})\,(E_{kl}-E_{lk})-(E_{kl}-E_{lk})\,(E_{ij}-E_{ji})\right) \\ &= (L^*)^{-1}\left(E_{ij}E_{kl}-E_{ij}E_{lk}-E_{ji}E_{kl}+E_{ji}E_{lk}-E_{kl}E_{ij}+E_{kl}E_{ji}+E_{lk}E_{ij}-E_{lk}E_{ji}\right) \\ &= (L^*)^{-1}\left(\delta_{jk}E_{il}-\delta_{jl}E_{ik}-\delta_{ik}E_{jl}+\delta_{il}E_{jk}-\delta_{li}E_{kj}+\delta_{lj}E_{ki}+\delta_{ki}E_{lj}-\delta_{kj}E_{li}\right) \\ &= (L^*)^{-1}\left(\delta_{jk}\,(E_{il}-E_{li})+\delta_{lj}\,(E_{ki}-E_{ik})+\delta_{ki}\,(E_{lj}-E_{jl})+\delta_{il}\,(E_{jk}-E_{kj})\right). \end{aligned}$$

Pela linearidade de $(L^*)^{-1}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \left[e_i^*\wedge e_j^*, e_k^*\wedge e_l^*\right] &= \delta_{jk}\,(L^*)^{-1}\,(E_{il}-E_{li})+\delta_{lj}\,(L^*)^{-1}\,(E_{ki}-E_{ik})+\delta_{ki}\,(L^*)^{-1}\,(E_{lj}-E_{jl}) \\ &\quad +\delta_{il}\,(L^*)^{-1}\,(E_{jk}-E_{kj}) \\ &= \delta_{jk}\,(e_i^*\wedge e_l^*)+\delta_{lj}\,(e_k^*\wedge e_i^*)+\delta_{ki}\left(e_l^*\wedge e_j^*\right)+\delta_{il}\left(e_j^*\wedge e_k^*\right) \\ &= \delta_{il}\left(e_j^*\wedge e_k^*\right)+\delta_{jk}\,(e_i^*\wedge e_l^*)-\delta_{ik}\left(e_j^*\wedge e_l^*\right)-\delta_{jl}\,(e_i^*\wedge e_k^*)\,. \end{aligned}$$

Nesse caso, dados $\phi, \psi \in \bigwedge^2 V^*$,

$$\begin{aligned}
[\phi,\psi] &= \left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\phi_{ij}e_i^*\wedge e_j^*, \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\psi_{kl}e_k^*\wedge e_l^*\right] = \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{kl}\left[e_i^*\wedge e_j^*, e_k^*\wedge e_l^*\right] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{kl}\left(\delta_{il}\left(e_j^*\wedge e_k^*\right)+\delta_{jk}\left(e_i^*\wedge e_l^*\right)-\delta_{ik}\left(e_j^*\wedge e_l^*\right)-\delta_{jl}\left(e_i^*\wedge e_k^*\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{kl}\delta_{il}\left(e_j^*\wedge e_k^*\right)+\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{kl}\delta_{jk}\left(e_i^*\wedge e_l^*\right)-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{kl}\delta_{ik}\left(e_j^*\wedge e_l^*\right) \\
&\quad -\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{kl}\delta_{jl}\left(e_i^*\wedge e_k^*\right).
\end{aligned}$$

Pela definição de δ_{ij}, vemos que

$$\begin{aligned}
[\phi,\psi] &= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{ki}\left(e_j^*\wedge e_k^*\right)+\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{jl}\left(e_i^*\wedge e_l^*\right)-\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{il}\left(e_j^*\wedge e_l^*\right)-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{kj}\left(e_i^*\wedge e_k^*\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{ki}\left(e_j^*\wedge e_k^*\right)+\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{jl}\left(e_i^*\wedge e_l^*\right)-\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}\psi_{il}\phi_{ij}\left(e_j^*\wedge e_l^*\right)-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}\psi_{kj}\phi_{ij}\left(e_i^*\wedge e_k^*\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{ki}\left(e_j^*\wedge e_k^*\right)+\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{jl}\left(e_i^*\wedge e_l^*\right)+\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}\psi_{il}\phi_{ij}\left(e_l^*\wedge e_j^*\right)+\frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}\psi_{kj}\phi_{ij}\left(e_k^*\wedge e_i^*\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}\phi_{ji}\psi_{ik}\left(e_j^*\wedge e_k^*\right)+\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}\phi_{ij}\psi_{jl}\left(e_i^*\wedge e_l^*\right)-\frac{1}{4}\sum_{i,j,l=1}^{n}\psi_{li}\phi_{ij}\left(e_l^*\wedge e_j^*\right)-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k=1}^{n}\psi_{kj}\phi_{ji}\left(e_k^*\wedge e_i^*\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\phi_{ji}\psi_{ik}-\psi_{ji}\phi_{ik}\right)e_j^*\wedge e_k^*.
\end{aligned}$$

Portanto, naturalmente definimos as componentes do colchete, com respeito à base $\left\{e_i^*\wedge e_j^*\right\}_{i<j}$ por

$$[\phi,\psi]_{jk} := \sum_{i=1}^{n}\phi_{ji}\psi_{ik}-\psi_{ji}\phi_{ik}, \tag{B.5}$$

para todo $\phi, \psi \in \wedge^2 V^*$.

Constantes Estruturais

Seja V um espaço vetorial n-dimensional e $N := \frac{n(n-1)}{2}$. Agora suponhamos que $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ seja uma base ortonormal para $\bigwedge^2 V^*$. As **constantes estruturais** $c_\gamma^{\alpha\beta}$ para o colchete definido pela expressão (B.5), com respeito a base $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$, são definidas por

$$\left[\varphi^\alpha, \varphi^\beta\right] = \sum_{\gamma=1}^N c_\gamma^{\alpha\beta}\varphi^\gamma.$$

Como $\{\varphi^\alpha\}_{\alpha=1}^N$ é ortonormal, segue que

$$g^\wedge\left(\left[\varphi^\alpha, \varphi^\beta\right], \varphi^\lambda\right) = g^\wedge\left(\sum_{\gamma=1}^N c_\gamma^{\alpha\beta}\varphi^\gamma, \varphi^\lambda\right) = \sum_{\gamma=1}^N c_\gamma^{\alpha\beta} g^\wedge\left(\varphi^\gamma, \varphi^\lambda\right) = \sum_{\gamma=1}^N c_\gamma^{\alpha\beta}\delta_{\gamma\lambda} = c_\lambda^{\alpha\beta},$$

para todo $\lambda = 1, ..., N$. Vamos mostrar que a forma trilinear $g^\wedge\left(\left[\varphi^\alpha, \varphi^\beta\right], \varphi^\lambda\right)$ é totalmente antissimétrica: De fato,

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}^o \quad &: \quad g^\wedge\left(\left[\varphi^\alpha, \varphi^\beta\right], \varphi^\gamma\right) = g^\wedge\left(\varphi^\alpha\varphi^\beta - \varphi^\beta\varphi^\alpha, \varphi^\gamma\right) = g^\wedge\left(-\left(\varphi^\beta\varphi^\alpha - \varphi^\alpha\varphi^\beta\right), \varphi^\gamma\right) \\
&= \quad -g^\wedge\left(\varphi^\beta\varphi^\alpha - \varphi^\alpha\varphi^\beta, \varphi^\gamma\right) = -g^\wedge\left(\left[\varphi^\beta, \varphi^\alpha\right], \varphi^\gamma\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2}^o \quad &: \quad g^\wedge\left(\left[\varphi^\alpha, \varphi^\beta\right], \varphi^\gamma\right) = g^\wedge\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n \left(\varphi_{ji}^\alpha\varphi_{ik}^\beta - \varphi_{ji}^\beta\varphi_{ik}^\alpha\right) e_j^* \wedge e_k^*, \sum_{l,m=1}^n \varphi_{lm}^\gamma e_l^* \wedge e_m^*\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l,m=1}^n \left(\varphi_{ji}^\alpha\varphi_{ik}^\beta - \varphi_{ji}^\beta\varphi_{ik}^\alpha\right)\varphi_{lm}^\gamma g^\wedge\left(e_j^* \wedge e_k^*, e_l^* \wedge e_m^*\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l,m=1}^n \left(\varphi_{ji}^\alpha\varphi_{ik}^\beta - \varphi_{ji}^\beta\varphi_{ik}^\alpha\right)\varphi_{lm}^\gamma \left(\left\langle e_j^*, e_l^*\right\rangle\left\langle e_k^*, e_m^*\right\rangle - \left\langle e_j^*, e_m^*\right\rangle\left\langle e_k^*, e_l^*\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l,m=1}^n \left(\varphi_{ji}^\alpha\varphi_{ik}^\beta - \varphi_{ji}^\beta\varphi_{ik}^\alpha\right)\varphi_{lm}^\gamma \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l,m=1}^n \left(\varphi_{ji}^\alpha\varphi_{ik}^\beta - \varphi_{ji}^\beta\varphi_{ik}^\alpha\right)\varphi_{lm}^\gamma\delta_{jl}\delta_{km} - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l,m=1}^n \left(\varphi_{ji}^\alpha\varphi_{ik}^\beta - \varphi_{ji}^\beta\varphi_{ik}^\alpha\right)\varphi_{lm}^\gamma\delta_{jm}\delta_{kl} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n \left(\varphi_{ji}^\alpha\varphi_{ik}^\beta - \varphi_{ji}^\beta\varphi_{ik}^\alpha\right)\varphi_{jk}^\gamma - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n \left(\varphi_{ji}^\alpha\varphi_{ik}^\beta - \varphi_{ji}^\beta\varphi_{ik}^\alpha\right)\varphi_{kj}^\gamma.
\end{aligned}$$

Logo, somando os produtos internos com os índices trocados, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
g^{\wedge}\left(\left[\varphi^{\alpha},\varphi^{\beta}\right],\varphi^{\gamma}\right)+g^{\wedge}\left(\left[\varphi^{\gamma},\varphi^{\beta}\right],\varphi^{\alpha}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}-\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{ik}^{\alpha}\right)\varphi_{jk}^{\gamma}-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}-\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{ik}^{\alpha}\right)\varphi_{kj}^{\gamma} \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\varphi_{ji}^{\gamma}\varphi_{ik}^{\beta}-\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{ik}^{\gamma}\right)\varphi_{jk}^{\alpha}-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\varphi_{ji}^{\gamma}\varphi_{ik}^{\beta}-\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{ik}^{\gamma}\right)\varphi_{kj}^{\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{jk}^{\gamma}-\varphi_{ik}^{\alpha}\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{jk}^{\gamma}-\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{kj}^{\gamma}-\varphi_{ik}^{\alpha}\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{kj}^{\gamma} \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_{jk}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{ji}^{\gamma}-\varphi_{jk}^{\alpha}\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{ik}^{\gamma}-\varphi_{kj}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{ji}^{\gamma}-\varphi_{kj}^{\alpha}\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{ik}^{\gamma} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{jk}^{\gamma}-\varphi_{ik}^{\alpha}\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{jk}^{\gamma}-\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{kj}^{\gamma}+\varphi_{ik}^{\alpha}\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{jk}^{\gamma} \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_{jk}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{ji}^{\gamma}-\varphi_{jk}^{\alpha}\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{ik}^{\gamma}+\varphi_{jk}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{ji}^{\gamma}+\varphi_{jk}^{\alpha}\varphi_{ji}^{\beta}\varphi_{ik}^{\gamma} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{jk}^{\gamma}+\sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_{jk}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{ji}^{\gamma}.
\end{aligned}$$

Trocando as variáveis $k \leftrightarrow i$ vemos que

$$\begin{aligned}
g^{\wedge}\left(\left[\varphi^{\alpha},\varphi^{\beta}\right],\varphi^{\gamma}\right)+g^{\wedge}\left(\left[\varphi^{\gamma},\varphi^{\beta}\right],\varphi^{\alpha}\right) &= \sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{jk}^{\gamma}+\sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ki}^{\beta}\varphi_{jk}^{\gamma} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{jk}^{\gamma}-\sum_{i,j,k=1}^{n}\varphi_{ji}^{\alpha}\varphi_{ik}^{\beta}\varphi_{jk}^{\gamma} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por fim, usando os dois primeiros casos,

3º: $g^{\wedge}\left(\left[\varphi^{\alpha},\varphi^{\beta}\right],\varphi^{\gamma}\right)+g^{\wedge}\left(\left[\varphi^{\alpha},\varphi^{\gamma}\right],\varphi^{\beta}\right)\overset{1^o}{=}-\left(g^{\wedge}\left(\left[\varphi^{\beta},\varphi^{\alpha},\right],\varphi^{\gamma}\right)+g^{\wedge}\left(\left[\varphi^{\gamma},\varphi^{\alpha}\right],\varphi^{\beta}\right)\right)\overset{2^o}{=}0.$

Ou seja,

$$c_{\gamma}^{\alpha\beta}=-c_{\gamma}^{\beta\alpha}=-c_{\alpha}^{\gamma\beta}=-c_{\beta}^{\alpha\gamma}.$$

Mais ainda, se $\{\sigma_{\alpha}\}_{\alpha=1}^{N}$ é a base ortonormal de $\bigwedge^2 V$ dual à base $\{\varphi^{\alpha}\}_{\alpha=1}^{N}$, segue que suas constantes estruturais $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ correspondentes são dadas por γ

$$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{N} c_{\alpha\beta}^{\gamma} \sigma_\gamma.$$

Note que temos a identificação $\bigwedge^2 V^* \overset{\widetilde{L}=L^{-1}\circ L^*}{\simeq} \bigwedge^2 V$. Segue disso que

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}\left(\left[e_i^* \wedge e_j^*, e_k^* \wedge e_l^*\right]\right) &= \widetilde{L}\left(\delta_{il}\left(e_j^* \wedge e_k^*\right) + \delta_{jk}\left(e_i^* \wedge e_l^*\right) - \delta_{ik}\left(e_j^* \wedge e_l^*\right) - \delta_{jl}\left(e_i^* \wedge e_k^*\right)\right) \\
&= \delta_{il}\widetilde{L}\left(e_j^* \wedge e_k^*\right) + \delta_{jk}\widetilde{L}\left(e_i^* \wedge e_l^*\right) - \delta_{ik}\widetilde{L}\left(e_j^* \wedge e_l^*\right) - \delta_{jl}\widetilde{L}\left(e_i^* \wedge e_k^*\right) \\
&= \delta_{il}L^{-1}\left(E_{jk} - E_{kj}\right) + \delta_{jk}L^{-1}\left(E_{il} - E_{li}\right) - \delta_{ik}L^{-1}\left(E_{jl} - E_{lj}\right) - \delta_{jl}L^{-1}\left(E_{ik} - E_{ki}\right) \\
&= \delta_{il}L^{-1}\left(E_{jk} - E_{kj}\right) + \delta_{jk}L^{-1}\left(E_{il} - E_{li}\right) - \delta_{ik}L^{-1}\left(E_{jl} - E_{lj}\right) - \delta_{jl}L^{-1}\left(E_{ik} - E_{ki}\right) \\
&= \delta_{il}\left(e_j \wedge e_k - e_k \wedge e_j\right) + \delta_{jk}\left(e_i \wedge e_l - e_l \wedge e_i\right) - \delta_{ik}\left(e_j \wedge e_l - e_l \wedge e_j\right) \\
&\quad -\delta_{jl}\left(e_i \wedge e_k - e_k \wedge e_i\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l] &: = L^{-1}\left(\left[L\left(e_i \wedge e_j\right), L\left(e_k \wedge e_l\right)\right]\right) = L^{-1}\left(\left[E_{ij} - E_{ji}, E_{kl} - E_{lk}\right]\right) \\
&= L^{-1}\left(\left(E_{ij} - E_{ji}\right)\left(E_{kl} - E_{lk}\right) - \left(E_{kl} - E_{lk}\right)\left(E_{ij} - E_{ji}\right)\right) \\
&= L^{-1}\left(\left(E_{ij} - E_{ji}\right)\left(E_{kl} - E_{lk}\right) - \left(E_{kl} - E_{lk}\right)\left(E_{ij} - E_{ji}\right)\right) \\
&= L^{-1}\left(\delta_{jk}\left(E_{il} - E_{li}\right) + \delta_{lj}\left(E_{ki} - E_{ik}\right) + \delta_{ki}\left(E_{lj} - E_{jl}\right) + \delta_{il}\left(E_{jk} - E_{kj}\right)\right) \\
&= L^{-1}\left(\delta_{jk}\left(E_{il} - E_{li}\right)\right) + L^{-1}\left(\delta_{lj}\left(E_{ki} - E_{ik}\right)\right) + L^{-1}\left(\delta_{ki}\left(E_{lj} - E_{jl}\right)\right) + L^{-1}\left(\delta_{il}\left(E_{jk} - E_{kj}\right)\right) \\
&= \delta_{jk}\left(e_i \wedge e_l - e_l \wedge e_i\right) + \delta_{lj}\left(e_k \wedge e_i - e_i \wedge e_k\right) + \delta_{ki}\left(e_l \wedge e_j - e_j \wedge e_l\right) + \delta_{il}\left(e_j \wedge e_k - e_k \wedge e_j\right) \\
&= \widetilde{L}\left(\left[e_i^* \wedge e_j^*, e_k^* \wedge e_l^*\right]\right).
\end{aligned}$$

Logo as constantes estruturais possuem a seguinte simetria:

$$c_{\gamma}^{\alpha\beta} = g^{\wedge}\left(\left[\varphi^\alpha, \varphi^\beta\right], \varphi^\gamma\right) = g^{\wedge}\left(\widetilde{L}\left(\left[\varphi^\alpha, \varphi^\beta\right]\right), \widetilde{L}\left(\varphi^\gamma\right)\right) = g^{\wedge}\left(\left[\sigma_\alpha, \sigma_\beta\right], \sigma_\gamma\right) = c_{\alpha\beta}^{\gamma},$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., n$.

Apêndice C

Diferenciabilidade de Gâteaux e de Fréchet

Há duas noções básicas de diferenciabilidade para funções $f : X \to Y$ entre os espaços de Banach X e Y. São elas, a diferenciabilidade de Gâteaux e a de Fréchet.

Definição C.1 *Uma função $f : X \to Y$ é dita **Gâteaux diferenciável** em x se existir um operador linear limitado $T_x \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que, para todo $v \in X$ vale a igualdade*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = T_x(v).$$

*O operador T_x é chamado de **derivada de Gâteaux** de f em x.*

Se, para algum $v \in X$ fixado o limite

$$(\delta_v f)(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(x + tv) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

existir, dizemos que f possui uma **derivada direcional** em x na direção de v. Assim, f é Gâteaux diferenciável em x se, e somente se, todas as derivadas direcionais $(\delta_v f)(x)$ existirem e induzirem um operador linear limitado

$$Df(x) : v \mapsto (\delta_v f)(x).$$

Se o limite (no sentido de Gâteaux) existir uniformemente em v na esfera unitária de X, dizemos que f é **Fréchet diferenciável** em x e T_x é a **derivada de Fréchet** de f em x.

Equivalentemente, se definirmos $y := tv$, então $t \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$. Assim, f é Fréchet diferenciável em x se, para todo $y \in X$:

$$f(x+y) - f(x) - T_x(y) = o(\|y\|),$$

e dizemos que $T_x = Df(x)$ é a derivada de f em x.

Observe que a distinção entre as duas noções de diferenciabilidade é feita pela forma como o limite é tomado. A importância é que o limite no caso Fréchet depende apenas da norma de y: Em termos de ε e δ a diferença é expressa como segue:

Gâteaux: Para todo $\varepsilon > 0$ e todo $v \in X$ não nulo, existe $\delta = \delta(\varepsilon, v) > 0$ tal que

$$\|f(x+tv) - f(x) - tT_x(v)\| \leq \varepsilon |t|.$$

Fréchet: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|f(x+y) - f(x) - T_x(y)\| \leq \varepsilon \|y\|,$$

para todo $\|y\| < \delta$.

Proposição C.1 *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $f : X \to Y$ é Gâteaux diferenciável, então*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|x-y\| \sup_{0\leq\theta\leq 1} \|Df(\theta x + (1-\theta)y)\|.$$

Demonstração. Escolha $u^* \in X$ tal que $\|u^*\| = 1$ e $\|f(y) - f(x)\| = \langle u^*, f(y) - f(x)\rangle$. Aplicando o teorema do valor médio para a função $h(t) := \langle u^*, f(x + t(y-x))\rangle$, vemos que

$$\|\langle u^*, f(y)\rangle - \langle u^*, f(x)\rangle\| = \|h(1) - h(0)\| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \left\|h'(t)\right\|.$$

Por outro lado, temos que

$$h'(t) = \frac{d}{dt}\langle u^*, f(x+t(y-x))\rangle = \left\langle u^*, \frac{d}{dt} f(x+t(y-x))\right\rangle = \left\langle u^*, Df_{(x+t(y-x))}(y-x)\right\rangle.$$

Segue disso que

$$\begin{aligned}\left\|h'(t)\right\| &= \left\|\left\langle u^*, Df_{(x+t(y-x))}(y-x)\right\rangle\right\| \leq \|u^*\| \left\|Df_{(x+t(y-x))}(y-x)\right\| \\ &= \left\|Df_{(x+t(y-x))}(y-x)\right\| \leq \left\|Df_{(x+t(y-x))}\right\| \|y-x\|.\end{aligned}$$

■

Proposição C.2 *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $x \in X$. Se $f : X \to Y$ é Gâteaux diferenciável em um aberto $U \subset X$ que contém x e Df_x é contínua, então f é Fréchet diferenciável em x.*

Demonstração. Fixe $v \in X$ e seja $g(t) = f(x + tv) - f(x) - tDf_x(v)$. Notemos que $g(0) = 0$. Pela continuidade da derivada de Gâteaux e pela proposição anterior, vemos que

$$\begin{aligned}
\|f(x+v) - f(x) - Df_x(v)\| &= \|g(1)\| = \|g(1) - g(0)\| \leq \|v\| \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left\|Dg_{\theta + (1-\theta)0}\right\| \\
&= \|v\| \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|Dg_\theta\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|v\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x + tv) - Df(x)\| \\
&\leq o(v).
\end{aligned}$$

Ou seja, f é Fréchet diferenciável em x. ■

Apêndice D

Um Pouco de Medida

Agora façamos um breve preâmbulo sobre algumas definições da Teoria da Medida:

Definição D.1 (σ-álgebra) *Seja X um conjunto. Dizemos que X é uma σ-álgebra se X possui as seguintes propriedades*

1. *O conjunto vazio está em X;*
2. *Se Σ está em X, então o mesmo ocorre para o complemento de Σ;*
3. *Se $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de subconjuntos de X, então sua união também está em X.*

Definição D.2 (Álgebra de Borel) *Seja M um espaço topológico. Um conjunto X é chamado **σ-álgebra de Borel** de M se é a menor σ-álgebra que contém os abertos da topologia de M. Denotamos a σ-álgebra de Borel de M por $\mathcal{B}(M)$.*

Definição D.3 (Medida Positiva) *Uma medida positiva definida numa σ-álgebra X de subconjuntos de um conjunto S é uma função $\mu : X \to [0, \infty)$ tal que:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$,

   para qualquer coleção enumerável de conjuntos de X, disjuntos dois a dois.

Apêndice E

Um Pouco de Análise Funcional

Nessa seção vamos procurar entender as definições do Espaço L^p, do Espaço de Sobolev e do Espaço de Hölder, bem como suas respctivas normas.

E.0.3 Espaço L^p

Definição E.1 (Espaço L^p) *Considere uma variedade diferenciável M e $p \in [1, \infty)$. O espaço $L^p(M)$ é definido da seguinte maneira:*

$$L^p(M) = \left\{ f : M \to \mathbb{R} : \left(\int_M |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Para todo $p \in [1, \infty)$, o espaço L^p possui uma norma, que é definida por

$$\|\cdot\|_{L^p} : f \in L^p(M) \longmapsto \left(\int_M |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}^+.$$

Essa função está trivialmente bem definida. Denotamos essa norma também por $\|\cdot\|_p$.

Com isso em mente, estamos aptos a definir o espaço de Sobolev:

Definição E.2 (Espaço de Sobolev) *Considere uma variedade diferenciável M, $p \in [1, \infty)$ e $m \geq 0$ um inteiro. O (m, p)-espaço de Sobolev é definido por*

$$W^{m,p}(M) = \{ u \in L^p(M) : D^\alpha u \in L^p(M) \ \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m \},$$

em que $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições de u.

Assim como L^p, o espaço de Sobolev também possui uma norma, que é definida por

$$\|\cdot\|_{W^{m,p}} : u \in W^{m,p}(M) \longmapsto \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}^+.$$

Novamente, como $u \in W^{m,p}(M)$, então $\|u\|$ está bem definida. Denotamos tal norma também por $\|\cdot\|_{m,p}$.

E.0.4 Espaço de Hölder

Considere um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dizemos que f satisfaz a **condição de Hölder** se existem $C \geq 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha,$$

para todo $x, y \in \Omega$. Se f satisfaz a condição de Hölder com as constantes $C \geq 0$ e $\alpha > 0$ definidas acima, dizemos que f é Hölder contínua com expoente α.

Nestas condições, podemos definir a **α-ésima semi-norma de Hölder** da seguinte maneira:

$$[f]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x,y \in \Omega,\ x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha},$$

em que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua.com expoente α.

Além disso, perceba também que se f, for ainda uma função limitada em Ω, então a norma do supremo está bem definida:

$$[f]_{C^0(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty.$$

Nessas condições, definimos a **α-ésima norma de Hölder** por

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = [f]_{C^0(\Omega)} + [f]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}.$$

Por fim, o **espaço de Hölder** $C^{k,\alpha}(\Omega)$ consiste de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que pertencem ao espaço $C^k(\Omega)$ e tais que

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C^0(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha f]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

Apêndice F

Conjuntos Convexos Definidos por Desigualdades

Comecemos definindo **cone tangente** e **cone normal**:

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita e $A \subset E$ um subconjunto convexo fechado e limitado. O cone normal**,** $\mathcal{N}_v A \subset E^*$, de A em um ponto $v \in \partial A$ é definido pelo seguinte conjunto:

$$\mathcal{N}_v A := \{l \in E^* : l(v) = s\,(l)\}\,,$$

em que $s : E^* \to \mathbb{R}$ é a chamada função suporte de A e é definida por

$$s\,(l) := \sup \{l(v) : v \in A \subset E\}\,.$$

O cone tangente, $\mathcal{T}_v A \subset E_x$, é definido pelo seguinte conjunto:

$$\mathcal{T}_v A := \bigcap_{l \in \mathcal{N}_v A} \{z \in E : l(z) \leq 0\}\,.$$

Notemos que se $z \in A$, e $l \in \mathcal{N}_v A$ então

$$l(z - v) = l(z) - l(v) \leq 0,$$

portanto $A - v \subset \mathcal{T}_v A$. De fato, $\mathcal{T}_v A$ também pode ser caracterizado como o conjunto

$$\mathcal{T}_v A = \bigcup_{h>0} \left\{ \frac{1}{h} (A - v) \right\}. \tag{F.1}$$

O cone tangente $\mathcal{T}_v A$ é um cone convexo fechado em E com vértice na origem (na verdade, é o menor cone contendo $A - v$).

Agora seja E um espaço vetorial de dimensão finita e $A \subset E$ apenas um subconjunto convexo. Em alguns casos, A pode ser uma interseção de semiespaços da forma

$$A = \bigcap_{l \in B} \{x \in E : l(x) \leq \phi(l)\}, \tag{F.2}$$

em que $B \subset E^* - \{0\}$ é um subconjunto fechado qualquer e $\phi : B \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer. Com isso, temos o seguinte resultado:

Teorema F.1 (B.5) *Seja E um espaço vetorial de dimensão n, e suponha que $A \subset E$ seja definido pela expressão (F.2). Seja $s_A(l) := \sup\{l(x) : x \in A\}$. Para todo $l \in E^*$ com $s_A(l) < \infty$, existem $l_1, ..., l_{n+1} \in B$ e escalares $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1} \geq 0$ tais que*

$$l = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_i \qquad e \qquad s_A(l) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \phi(l_i).$$

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que $l \in B$. Notemos que se $l(x) = \phi(l)$, para algum $x \in A$, então pela definição de A

$$l(x) = \sup\{l(y) : y \in A\} = s_A(l).$$

Agora definamos o conjunto

$$\widetilde{B} = \{\alpha l \text{ tal que } l \in B \text{ e } \exists x \in A \text{ com } l(x) = \phi(l) \text{ e } \alpha \geq 0\}.$$

Notemos que $\widetilde{B}$ é fechado, uma vez que

$$\begin{aligned} \widetilde{B}^c &= \{\alpha l \text{ tal que } l \in B \text{ e } \exists x \in A \text{ com } l(x) = \phi(l) \text{ e } \alpha > 0\}^c \\ &= \{\alpha l \text{ tal que } l \notin B\} \cup \{\alpha l \text{ tal que } l(x) < \phi(l), \text{ para todo } x \in A\} \cup \{\alpha l \text{ tal que } \alpha < 0\} \end{aligned}$$

é uma união de conjuntos abertos.

Vamos definir também a seguinte função:

$$\widetilde{\phi}(\upsilon) = \begin{cases} c\phi(l) \ \text{ se } \upsilon = cl, \text{ onde } c \geq 0 \text{ e } l \in \widetilde{B} \\ +\infty, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Segue da expressão (F.2) e da construção de $\widetilde{\phi}$ que

$$A = \bigcap_{\upsilon \in E^*} \left\{ x \in E : \upsilon(x) \leq \widetilde{\phi}(\upsilon) \right\}.$$

Nesse caso, vemos que

$$\begin{aligned} s_A(l) &= \sup\{l(x) : x \in A\} = \sup\left\{ l(x) : x \in E \text{ e } \upsilon(x) \leq \widetilde{\phi}(\upsilon), \text{ para todo } \upsilon \in E^* \right\} \\ &= \sup\left\{ l^*(l) : x \in E \text{ e } l^* \leq \widetilde{\phi}, \, l^* \in (E^*)^* \right\}, \end{aligned}$$

em que foi usado na última igualdade que $(E^*)^* \simeq E$. Agora, pelo teorema de Caratheodory,

$$s_A(l) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \widetilde{\phi}(l_i) : l_i \in \widetilde{B}, \, \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_i = l \right\}.$$

Como $\widetilde{B}$ é fechado, segue que o ínfimo é atingido. O resultado segue, pois $l_i \in \widetilde{B}$ é um múltiplo não negativo de um elemento $\overline{l_i} \in B$ com $\phi(\overline{l_i}) = s_A(l_i)$. ■

Desse teorema, obtemos um resultado muito útil para o cone normal:

Teorema F.2 (B.6) *Seja E um espaço vetorial de dimensão n, e suponha que $A \subset E$ é definido por (F.2). Então para todo $x \in \partial A$, $\mathcal{N}_x A$ é um cone convexo gerado por $B \cap \mathcal{N}_x A$. Isto é, para todo $l \in \mathcal{N}_x A$, existe $k \leq n+1$ e $l_1, ..., l_k \in B \cap \mathcal{N}_x A$ e $\lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0$ tal que $l = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_i$.*

Demonstração. Dado $l \in \mathcal{N}_x A$. Pelo Teorema F.1 existem $l_1, ..., l_{n+1}$ e $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1} \geq 0$ tais que

$$s_A(l) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \phi(l_i) \qquad \text{e} \qquad l = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_i.$$

Como $l \in \mathcal{N}_x A$, segue que

$$s_A(l) = l(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i s_A(l_i) \geq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_i(x) = l(x),$$

portanto temos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i s_A (l_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_i (x) .$$

Assim, concluímos que $s_A (l_i) = l_i (x)$, (e portanto $l_i \in \mathcal{N}_x A$) para todo i tal que $\lambda_i > 0$. ∎

E com isso, temos a seguinte caracterização para o cone tangente:

Teorema F.3 (B.7) *Seja E um espaço vetorial de dimensão n, e suponha que $A \subset E$ é definido pela expressão (F.2). Então para todo $x \in \partial A$,*

$$\mathcal{T}_x A = \bigcap_{l \in B : l(x) = \phi(l)} \{z \in E : l(z) \leq 0\} .$$

Demonstração. Dado $z \in \mathcal{T}_x A$, segue da definição de cone tangente que $l(z) \leq 0$ para todo $l \in E^* - \{0\}$ com $l(x) = s_A(l)$ (isto é, para todo $l \in \mathcal{N}_x A$). Em particular, se $l \in B$ e $l(x) = \phi(l)$, então $\phi(l) = l(x) = s_A(l)$ e $l(z) \leq 0$. Portanto,

$$\mathcal{T}_x A \subset \bigcap_{l \in B : l(x) = \phi(l)} \{z \in E : l(z) \leq 0\} .$$

Por outro lado, se $l(z) \leq 0$ para todo $l \in B$ com $l(x) = \phi(l)$ (isto é, para todo $l \in B \cap \mathcal{N}_x A$) e υ é um elemento de $\mathcal{N}_x A$, segue do Teorema F.2 existem $l_i \in B \cap \mathcal{N}_x A$ e $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., k$, tais que $\upsilon = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_i$. Portanto, temos que

$$\upsilon(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_i (z) \leq 0,$$

afinal, $l_i \in B \cap \mathcal{N}_x$ e portanto $l_i(z) \leq 0$. Como $\upsilon(z) \leq 0$ para todo $\upsilon \in \mathcal{N}_x A$, segue que

$$\mathcal{T}_x A \supset \bigcap_{l \in B : l(x) = \phi(l)} \{z \in E : l(z) \leq 0\} .$$

∎

Bibliografia

[1] Hamilton, Richard S.(1982)."Three-manifolds with positive Ricci curvature".Journal of Differential Geometry. 17 (2): 255-306.

[2] Thurston,William P. (1982)."Variedades tridimensionais, grupos kleinianos e geometria hiperbólica". Boletim da Sociedade Americana deMatemática. Nova Série.6 (3): 357-381.

[3] Perelman, Grisha. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. arXiv:math.DG/0211159

[4] Perelman,Grisha. Ricci flow with surgery on three-manifolds. arXiv:math.DG/0303109

[5] Andrews, B.; Hopper, C.; The Ricci Flow in Riemannian Geometry: A Complete Proof of the Differentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem. New York, USA: Springer, 2011

[6] Chow, B.; Lu, P.; Ni, L.; Hamilton's Ricci Flow. Providence, USA: American Mathematical Society, 2006

[7] Lima, Elon Lages, Análise Real vol 1, Funções de Uma Variável. 10^a edição. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2009

[8] do Carmo, M.; Geometria Riemanniana. 5^a edição. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2015

[9] Roe Goodman and Nolan R. Wallach, Symmetry, Representations, and Invariants, Graduate Texts in Mathematics, vol. 255, Springer, 2009.

[10] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, Elliptic partial differential equa tions of second order, 2nd ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 224, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.