UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Algumas aplicações de p-pontos

Hugo Gili Zancul

São Carlos-SP
Agosto de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Algumas aplicações de p-pontos

Hugo Gili Zancul

Orientador: Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Agosto de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Hugo Gili Zancul, realizada em 24/08/2023.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo (UFSCar)

Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi (USP)

Profa. Dra. Christina Brech (USP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Agradecimentos

À minha família, seu apoio, desde muito antes da graduação, foi essencial para o desenvolvimento desse trabalho (e para muitas outras coisas).

Aos meus colegas do DM-UFSCar e do ICMC-USP, que me acompanharam não apenas em sala de aula, mas também no cotidiano da pós-graduação. Agora os Topólogos estão mais perto de dominar o mundo ...

Aos docentes do DM-UFSCar pela qualidade das disciplinas ministradas durante meu período como aluno.

Ao meu orientador Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo pelo apoio nessa empreitada altamente conjuntista, espero que nossas discussões sobre forcing tenham sido de algum proveito.

Ao Prof. Dr. Leandro Aurichi, que por cerca de quatro anos me ajudou a entender as ideias que agora formam este trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro, por meio do processo 164434/2021-6, durante o meu Mestrado.

E a você, que está lendo esse trabalho agora, textos como esse fazem tanto sentido quanto são capazes de contribuir com a comunidade matemática. Espero que encontre nele as ideias que procura, como eu encontrei em tantos outros textos antes.

Resumo

Nesse trabalho analisamos o conceito de p-ponto no conjunto ω e sua relação com forcing, em particular o forcing de Sacks e seu produto. Com isso verificamos que a existência de p-pontos de caráter $\aleph_1$ é consistente com $2^{\aleph_0}$ arbitrariamente grande. Analisamos então duas aplicações envolvendo p-pontos: a construção de um grafo sem unfriendly partition e a análise da homogeneidade do espaço $\beta\omega \setminus \omega$.

Palavras-chave: p-pontos, forcing de Sacks, unfriendly partitions, compactificação de Stone-Čech.

Abstract

In this work we analyze the concept of p-points in ω and its relation with forcing, in particular Sacks forcing and side-by-side Sacks forcing. With this we verify that the existence of p-points with character $\aleph_1$ is consistent with arbitrarily large $2^{\aleph_0}$. We then analyze two applications involving p-points: the construction of a graph without unfriendly partitions and the analysis of the homogeneity of the space $\beta\omega \setminus \omega$.

Keywords: p-points, Sacks forcing, unfriendly partition, Stone-Čech compactification.

Sumário

Introdução

A ideia para o desenvolvimento desse texto começou com a análise sobre o tamanho, isto é, o número de vértices, de alguns grafos infinitos que não apresentam unfriendly partition. Mais especificamente, já se sabia, por meio de [1] e [17], que o menor tamanho de um grafo com todos os vértices de grau infinito e com essa propriedade era um cardinal $\varkappa$ tal que

$$\aleph_\omega \leq \varkappa \leq (2^\omega)^{(+\omega)},$$

em que $(2^\omega)^{(+\omega)}$ denota o primeiro cardinal limite maior que $2^{\aleph_0}$.

Um trabalho de Leandro Aurichi e Lucas Real (não publicado) mostrou que supondo o Axioma de Martin e $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$ vale

$$\aleph_\omega < \varkappa \leq (2^\omega)^{(+\omega)}.$$

Restava então analisar a existência de um modelo em que $\aleph_\omega \leq \varkappa < (2^\omega)^{(+\omega)}$. Ainda em [17] se constrói um grafo com $\aleph_\omega$ vértices, todos de grau infinito, que não admite unfriendly partition. Para essa construção os autores utilizaram a existência de um p-ponto de caráter $\aleph_1$. Inspirados nessa construção buscamos um modelo de ZFC em que existem p-pontos de caráter $\aleph_1$ e $\aleph_\omega < (2^\omega)^{(+\omega)}$.

Para a construção desse modelo utilizaremos forcing com o produto de suporte enumerável do forcing de Sacks. Na Seção 1 realizaremos um pequeno estudo sobre ultrafiltros em ω que irão nos auxiliar no desenvolvimento das técnicas de forcing. O estudo dessas técnicas é feito na Seção 2, onde mostramos algumas propriedades do forcing de Sacks e seu produto. Na Seção 3 faremos uma breve apresentação de uma abordagem alternativa para nosso problema. Por fim, na Seção 4 formalizamos o problema da unfriendly partition a ser estudado e sua relação com os conceitos discutidos.

De modo quase imediato, nosso estudo sobre ultrafiltros também permitirá uma análise do espaço $\beta\omega$, na Seção 5, de forma bastante natural, que nos permitirá mostrar, na Seção 6, que com p-pontos o espaço $\beta\omega \setminus \omega$ não é homogêneo.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Algo sobre filtros e cardinais pequenos

Nessa subseção tentaremos entender melhor o conceito de p-ponto, do ponto de vista da Combinatória, e suas relações com a teoria de ZFC. Antes disso, seguiremos ([13], Capítulo III.1) para relembrar alguns conceitos e notação sobre filtros e ultrafiltros. Naturalmente, começamos pela

Definição 1.1. Se A é qualquer conjunto não-vazio, então um filtro em A é um subconjunto $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(A)$ satisfazendo:

1. $A \in \mathscr{F}$ e $\emptyset \notin \mathscr{F}$.
2. $\forall X, Y \in \mathscr{F}\ [X \cap Y \in \mathscr{F}]$.
3. $\forall X, Y \subseteq A\ [X \supseteq Y \wedge Y \in \mathscr{F} \Rightarrow X \in \mathscr{F}]$.

Em alguns casos podemos pensar em um filtro como uma coleção de subconjuntos “grandes”de A: é claro, A em si é grande, e $\emptyset$ é pequeno, também, a interseção de conjuntos grandes é novamente grande, e se um conjunto possui um subconjunto grande, deve ser grande também.

Nosso interesse está principalmente em filtros em ω, mais especificamente, veremos que p-pontos são um tipo especial de filtro.

Algumas relações mais gerais entre conjuntos estão colocadas na seguinte

Definição 1.2. $X \subseteq^* Y$ se, e somente se, $X \setminus Y$ é finito e $X \perp Y$ se, e somente se, $X \cap Y$ é finito (X, Y são quase disjuntos). $X =^* Y$ se, e somente se, $X \subseteq^* Y \subseteq^* X$ se, e somente se, sua diferença simétrica é finita.

Uma família quase disjunta é uma família de conjuntos infinitos $\mathscr{D}$ tal que $X \perp Y$ para todos $X, Y \in \mathscr{D}$ e $X \neq Y$.

Aplicaremos essas relações mais frequentemente quando X,Y são subconjuntos infinitos de ω ou outro conjunto enumerável. O seguinte fato será utilizado mais adiante em nossas aplicações (mais especificamente, na Seção 2), embora não tenha relação imediata com o que estamos fazendo.

Lema 1.3. *Existe uma família quase disjunta $\mathscr{D} \subseteq [\omega]^{\omega}$ tal que $|\mathscr{D}| = 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. É suficiente obter $\mathscr{D} \subseteq [T]^{\omega}$, onde T é algum outro conjunto de tamanho $\aleph_0$; então se pode transferir $\mathscr{D}$ para ω usando uma bijeção de T em ω. Em particular, seja $T = 2^{<\omega}$, o conjunto de todas as sequências finitas de 0's e 1's. Para $f \in 2^{\omega}$, seja $X_f = \{f \upharpoonright n : n \in \omega\}$, que é um subconjunto infinito de T. Então $X_f \perp X_g$ quando $f \neq g$, já que se i é o menor tal que $f(i) \neq g(i)$, então $X_f \cap X_g = \{f \upharpoonright n : n \leq i\}$. Então, seja $\mathscr{D} = \{X_f : f \in 2^{\omega}\}$. $\square$

Definição 1.4. Uma família quase disjunta maximal, ou família mad, é uma família quase disjunta $\mathscr{D} \subseteq [\omega]^{\omega}$ que é maximal entre tais famílias.

A existência de tais famílias maximais é garantida pelo Lema de Zorn, de modo análogo ao que faremos no Lema 1.11.

Relembrados estes conceitos, nós introduziremos um cardinal pequeno, denotado por $\mathfrak{p}$, que será útil para obter algumas propriedades de p-pontos e filtros em geral. Começamos relembrando mais alguns conceitos conjuntistas:

Definição 1.5. Uma família $\mathscr{E}$ de conjuntos tem a FIP (Propriedade da Interseção Finita, do inglês Finite Intersection Property) se, e somente se, $\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$ para todo $\mathscr{F} \in [\mathscr{E}]^{<\omega}$.

$\mathscr{E}$ tem a SFIP (Propriedade de Interseção Finita Forte, do inglês Strong Finite Intersection Property) se, e somente se, $\bigcap \mathscr{F}$ é infinito para todo $\mathscr{F} \in [\mathscr{E}]^{<\omega}$.

Um conjunto K é uma pseudo-interseção de $\mathscr{E}$ se, e somente se, K é infinito e $K \subseteq^* Z$ para todo $Z \in \mathscr{E}$.

Nosso cardinal $\mathfrak{p}$ está relacionado a certas famílias de subconjuntos de ω:

Definição 1.6. $\mathfrak{p}$ é o menor tamanho de uma família $\mathscr{E} \subseteq [\omega]^{\omega}$ tal que $\mathscr{E}$ tem a SFIP e não existe pseudo-interseção de $\mathscr{E}$.

Tal cardinal está bem definido, como indicado pelo seguinte exemplo simples de [13]:

Exemplo 1.7. Seja $\mathscr{D}$ uma mad family infinita. Então

$$\mathscr{E} = \{\omega \setminus x : x \in \mathscr{D}\}$$

é uma família com a SFIP, mas que não possui pseudo-interseção.

Demonstração. Primeiro mostraremos que $\mathscr{E}$ tem a SFIP. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{D}$ e $\mathscr{F} = \{\omega \setminus x_1, \ldots, \omega \setminus x_n\}$, então

$$\bigcap \mathscr{F} = \bigcap_{i=1}^{n} \omega \setminus x_i.$$

Dados $x, y \in \mathscr{D}$ distintos, note que $|x \cap y| < \aleph_0$, ou seja, $|x \setminus (\omega \setminus y)| < \aleph_0$, de modo que $x \subseteq^* \omega \setminus y$. Então escolha $y \in \mathscr{D} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ (isto é possível, pois $\mathscr{D}$ é infinito), então $y \subseteq^* \bigcap_{i=1}^n \omega \setminus x_i$, de modo que $\bigcap \mathscr{F}$ é infinito.

Suponha agora K pseudo-interseção de $\mathscr{F}$. Logo, para cada $x \in \mathscr{D}$ vale $K \subseteq^* \omega \setminus x$, ou seja, $|K \cap x| < \aleph_0$. Logo, $\mathscr{D} \cup \{K\}$ é família quase disjunta, um absurdo, pois $\mathscr{D}$ é maximal. Logo, $\mathscr{F}$ não admite pseudo-interseção. □

Primeiramente, mostramos que $\mathfrak{p}$ é de fato "pequeno", no sentido de estar entre $\aleph_1$ e $2^{\aleph_0}$.

Lema 1.8. $\aleph_1 \leq \mathfrak{p} \leq 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. Seja $\mathscr{E} \subseteq [\omega]^\omega$ com a SFIP, tal que $|\mathscr{E}| \leq \aleph_0$; mostraremos que $\mathscr{E}$ admite uma pseudo-interseção.

Liste $\mathscr{E}$ como $\{Z_i : i \in \omega\}$. Recursivamente escolha $k_n \in \omega$ tal que $k_n \in (\bigcap_{i<n} Z_i \setminus \{k_i : i < n\})$. Então $K = \{k_n : n \in \omega\}$ é infinito e $K \subseteq^* Z_i$ para cada i.

Claramente, como não existem famílias $\mathscr{E} \subseteq [\omega]^\omega$ tais que $|\mathscr{E}| > 2^{\aleph_0}$, em particular não existem famílias $\mathscr{E}$ que tem a SFIP com $|\mathscr{E}| > 2^{\aleph_0}$. Logo, $\mathfrak{p} \leq 2^{\aleph_0}$. □

O cardinal $\mathfrak{p}$, como prometido, também tem aplicações na caracterização de alguns filtros em ω. Frequentemente, em nossos estudos podemos trocar um filtro por uma subfamília com a propriedade dada pelo

Lema 1.9. *Se $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(A)$ tem a FIP, então o conjunto*

$$F = \{Y \subseteq A : Y \supseteq X_1 \cap \ldots \cap X_n \text{ para algum } n \in \omega \text{ e alguns } X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{E}\}$$

é um filtro. Chamamos F o filtro gerado por $\mathscr{E}$.

Demonstração. Devemos mostrar que F satisfaz a Definição 1.1. Como $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq A$ para todos $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{E}$ e $n \in \omega$, então $A \in F$. Além disso, como $\mathscr{E}$ tem a FIP, então $X_1 \cap \ldots \cap X_n \neq \emptyset$ para todos $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{E}$ e $n \in \omega$.

Dados $I, J \in F$, por definição existem $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{E}$ tais que $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq I$ e $Y_1, \ldots, Y_m \in \mathscr{E}$ com $Y_1 \cap \ldots \cap Y_m \subseteq J$. Temos então que $X_1 \cap \ldots \cap X_n \cap Y_1 \cap \ldots \cap Y_m \subseteq I \cap J$, de modo que $I \cap J \in F$.

Por fim, se $I, J \subseteq A$ são tais que $I \in F$ e $I \subseteq J$, como existem $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{E}$ tais que $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq I$, então $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq J$, de modo que $J \in F$.

Portanto, F é um filtro em A. □

Em alguns casos será mais útil considerar uma família $\mathscr{E}$ como geradora, ou base, para o filtro F se ela satisfaz:

$$\forall A \in F \; \exists B \in \mathscr{E} \; [B \subseteq A].$$

Então, uma família geradora no sentido do Lema 1.9 se torna geradora no sentido acima se a fecharmos por interseções finitas. Isto pode criar uma nova família $\mathscr{E}' \supseteq \mathscr{E}$, mas geralmente estaremos interessados apenas na cardinalidade de famílias geradoras, que não é alterada nesse processo.

Antes de discutir essa relação entre $\mathfrak{p}$ e filtros mais profundamente relembraremos mais alguns conceitos:

Definição 1.10. Se A é qualquer conjunto não-vazio, então um ultrafiltro U em A é um filtro maximal em A; isto é, U é um filtro e nenhum superconjunto de U é um filtro.

Novamente, estaremos interessados nos ultrafiltros em ω. Na verdade, um p-ponto é um ultrafiltro dotado de uma propriedade adicional.

Do Lema de Zorn temos que vale o

Lema 1.11. *Se $\mathscr{F}$ é um filtro em A, então existe um ultrafiltro U em A tal que $\mathscr{F} \subseteq U$.*

Demonstração. Mostraremos primeiro que a Definição 1.10 é não vazia, isto é, existe um ultrafiltro em A. A demonstração do lema segue de modo análogo, com algumas adaptações.

Considere o conjunto

$$F = \{U \subseteq \mathscr{P}(A) : U \text{ é filtro em } A\}$$

e note que $F \neq \emptyset$. É fácil ver que $\subseteq$ (a inclusão usual de conjuntos) é uma ordem parcial em F. Buscamos aplicar o Lema de Zorn a F para encontrar um elemento maximal com relação a $\subseteq$, que será um ultrafiltro segundo nossa definição. Para isso mostraremos que toda cadeia em F admite limitante superior.

Seja $\mathscr{C} = (U_i)_{i \in I}$ uma cadeia em F. Afirmamos que

$$V = \bigcup_{i \in I} U_i$$

é tal que $V \in F$ e é um limitante superior de $\mathscr{C}$. Primeiro verificaremos que V acima satisfaz a Definição 1.1. De fato, como $A \in U_i$ e $\emptyset \notin U_i$ para todo $i \in I$, então segue que $A \in V$ e $\emptyset \notin V$. Além disso, dados $X, Y \in V$ existem $i, j \in I$ tais que $X \in U_i$ e $Y \in U_j$; como $\mathscr{C}$ é uma cadeia, então ou $U_i \subseteq U_j$ ou $U_j \subseteq U_i$, sem perda de generalidade, suponha que $U_i \subseteq U_j$. Nesse caso, como $X, Y \in U_j$ e $U_j \in F$, então $X \cap Y \in U_j$, de modo que $X \cap Y \in V$. Por fim, sejam $X, Y \subseteq A$ tais que $X \subseteq Y$ e $X \in V$; como $X \in V$ existe $i \in I$ tal que $X \in U_i$. Logo, como U_i é filtro segue que $Y \in U_i$, ou seja, $Y \in V$. Portanto, concluimos que $V \in F$, e é fácil ver que $U_i \subseteq V$ para todo $i \in I$, isto é, V é um limitante superior de $\mathscr{C}$.

Aplicando o Lema de Zorn a F parcialmente ordenado por $\subseteq$ obtemos que existe um filtro maximal com relação a $\subseteq$, ou seja, um ultrafiltro em A.

Para obter o lema, dado um filtro $\mathscr{F}$ em A basta aplicar a mesma técnica ao conjunto

$$F_{\mathscr{F}} = \{U \subseteq \mathscr{P}(A) : U \text{ é filtro em } A \text{ tal que } \mathscr{F} \subseteq U\}$$

parcialmente ordenado por $\subseteq$. □

Contudo, essa definição de ultrafiltros não é muito prática, sendo substituída por alguma das condições dadas no seguinte

Lema 1.12. *Se $\mathscr{F}$ é um filtro em A, então são equivalentes:*

(i) $\mathscr{F}$ *é um ultrafiltro;*

(ii) se $X \subseteq A$, então ou $X \in \mathscr{F}$ ou $A \setminus X \in \mathscr{F}$;

(iii) para todos $X, Y \subseteq A$, se $X \cup Y \in \mathscr{F}$, então ou $X \in \mathscr{F}$ ou $Y \in \mathscr{F}$.

Demonstração. Mostraremos primeiro que $(i) \Rightarrow (ii)$.

Suponha que $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro em A e seja $X \subseteq A$. Se $X \in \mathscr{F}$, então acabamos. Suponha então que $X \notin \mathscr{F}$. Afirmamos que $\mathscr{F} \cup \{A \setminus X\}$ é uma família de conjuntos com a FIP. De fato, como $\mathscr{F}$ é um filtro, possui a FIP, de modo que devemos apenas verificar se $(A \setminus X) \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathscr{F}$; se $(A \setminus X) \cap V = \emptyset$, então $V \subseteq X$ e como $\mathscr{F}$ é filtro segue que $X \in \mathscr{F}$, um absurdo. Logo, $\mathscr{F} \cup \{A \setminus X\}$ possui a FIP; considere $\mathscr{F}'$ o filtro gerado por $\mathscr{F} \cup \{A \setminus X\}$ como no Lema 1.9, note que $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$, e como $\mathscr{F}$ é ultrafiltro segue que $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$, ou seja, $A \setminus X \in \mathscr{F}$.

Agora mostraremos que $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Suponha que $\mathscr{F}$ é um filtro em A tal que para todo $X \subseteq A$ ou $X \in \mathscr{F}$ ou $A \setminus X \in \mathscr{F}$. Sejam $X, Y \subseteq A$ tais que $X \cup Y \in \mathscr{F}$. Se $X \in \mathscr{F}$, então acabamos. Suponha que $X \notin \mathscr{F}$. Então, por hipótese, $A \setminus X \in \mathscr{F}$ e como $\mathscr{F}$ é filtro segue que

$$(A \setminus X) \cap (X \cup Y) \in \mathscr{F} \Rightarrow (A \setminus X) \cap Y \in \mathscr{F},$$

de modo que $Y \in \mathscr{F}$.

Por fim, mostraremos que $(iii) \Rightarrow (i)$.

Suponha que $\mathscr{F}$ é um filtro em A tal que se $X, Y \subseteq A$ são tais que $X \cup Y \in \mathscr{F}$, então ou $X \in \mathscr{F}$ ou $Y \in \mathscr{F}$. Suponha, por absurdo, que existe $\mathscr{F}'$ filtro em A tal que $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$. Tome $X \in \mathscr{F}' \setminus \mathscr{F}$ e note que $X \cup (A \setminus X) \in \mathscr{F}$, logo, por hipótese, segue que $A \setminus X \in \mathscr{F}$ (pois $X \notin \mathscr{F}$). Então $A \setminus X \in \mathscr{F}'$, de modo que $X \cap (A \setminus X) = \emptyset \in \mathscr{F}'$, um absurdo. Logo, $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro. □

Podemos utilizar o Lema 1.12 para classificar dois tipos de ultrafiltros em um conjunto A: principal ou não-principal.

Definição 1.13. Seja U ultrafiltro em A. Então U é principal se, e somente se, $U = \{X \subseteq A : a \in X\}$ para algum $a \in A$, e U é não-principal se, e somente se, todo conjunto em U é infinito.

Como antes, nosso principal interesse será em ultrafiltros não-principais de ω, entre os quais estão os p-pontos.

A próxima definição vai nos acompanhar durante todo o texto, e marca a introdução de $\mathfrak{p}$ no estudo dos ultrafiltros:

Definição 1.14. Se U é um ultrafiltro em A, então o caráter de U, ou $\chi(U)$, é o menor tamanho de um $\mathscr{E} \subseteq U$ que gera U.

O termo "caráter" é emprestado da topologia, onde $\chi(x) = \chi(x,X)$ denota o menor tamanho de uma base local do ponto x no espaço topológico X. Então, $\chi(U)$ é o caráter topológico de U quando visto como um ponto em βA (a compactificação de Stone-Čech de A com a topologia discreta, ou o espaço dos ultrafiltros em A). Essa abordagem de $\beta\omega$ pode ser encontrada na Seção 5.

Se U é principal, então $\chi(U) = 1$, já que U é gerado por algum $\mathscr{E} = \{\{a\}\}$.

Se U é não-principal, temos o seguinte

Lema 1.15. $\aleph_1 \leq \chi(U) \leq 2^{|A|}$.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe $\mathscr{A} = \{A_n\}_{n\in\omega}$ família que gera U.

Dado $F \subseteq \omega$ finito não-vazio, como U é filtro temos $\bigcap_{n\in F} A_n \in U$, ou seja, $\bigcap_{n\in F} A_n$ é infinito, pois U é não-principal. Logo, como $\mathscr{A}$ satisfaz a SFIP e $|\mathscr{A}| = \aleph_0$, pelo Lema 1.8 existe $B \subseteq A$ infinito tal que $B \subseteq^* A_n$, para todo $n \in \omega$.

Como U é ultrafiltro, então pelo Lema 1.12 temos $B \in U$ ou $A \setminus B \in U$. Se $B \in U$, então U é gerado por B. Tome $B_1, B_2 \subseteq B$ infinitos tais que B é sua união disjunta; como U é ultrafiltro e $B \in U$, então $B_1 \in U$ ou $B_2 \in U$, sem perda de generalidade, suponha $B_1 \in U$. Como U é gerado por B, então $B \subseteq B_1$, mas note que $|B \setminus B_1| = |B_2| = \aleph_0$, um absurdo.

Logo, não pode ser que $B \in U$, de modo que $A \setminus B \in U$, logo, este conjunto é infinito. Como U é gerado por $\mathscr{A}$, existe $k \in \omega$ tal que $A_k \subseteq^* A \setminus (A \setminus B)$, isto é, $|A_k \setminus (A \setminus B)| < \aleph_0$. Mas isso significa que $|A_k \cap B| < \aleph_0$, um absurdo, pois $B \subseteq^* A_k$.

Como $B \subseteq A$ é tal que $B \notin U$ e $A \setminus B \notin U$, então U não é um ultrafiltro, um absurdo.

Claramente, $\chi(U) \leq 2^{|A|}$ (seja $\mathscr{E} = U$). $\square$

Para aplicar esses conceitos a ultrafiltros de ω, podemos melhorar essa estimativa por meio do seguinte

Lema 1.16. *Se U é um ultrafiltro não-principal em ω, então $\mathfrak{p} \leq \chi(U) \leq 2^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Fixe $\mathscr{E} \subseteq U$ com $|\mathscr{E}| < \mathfrak{p}$. Mostraremos que $\mathscr{E}$ não pode gerar U.

Como $\mathscr{E}$ tem a SFIP, seja Z uma pseudo-interseção de $\mathscr{E}$. Então, fixe $Y \subseteq Z$ com Y e $Z \setminus Y$ ambos infinitos. Então um dos Y, $\omega \setminus Y$ está em U, mas $Y \not\supseteq X_1 \cap \ldots \cap X_n$ e $\omega \setminus Y \not\supseteq X_1 \cap \ldots \cap X_n$ quando $X_1, \ldots, X_n \in \mathscr{E}$. $\square$

Assim, nessa seção aprendemos (ou relembramos) o que são ultrafiltros não-principais em ω, em especial que seu caráter é tal que $\mathfrak{p} \leq \chi(U) \leq 2^{\aleph_0}$. Na próxima subseção veremos como construir p-pontos, que são tipos especiais de ultrafiltros não-principais, e a calcular seu caráter nessas construções.

1.2 Existência e propriedades de p-pontos

Finalmente, agora que nos lembramos de todas as noções básicas de ultrafiltros, estamos prontos para estudar p-pontos. Existem algumas definições equivalentes para p-pontos, começaremos com a seguinte e apresentaremos as outras quando forem necessárias:

Definição 1.17. Dizemos que um ultrafiltro não-principal U sobre $\mathscr{P}(\omega)$ é um p-ponto se, para qualquer família $(A_n)_{n\in\omega}$ tal que cada $A_n \in U$, temos que existe $B \in U$ tal que $B \subseteq^* A_n$ para todo $n \in \omega$.

Aparentemente, bastante simples: um p-ponto é um ultrafiltro não-principal de ω em que toda família enumerável admite pseudo-interseção no ultrafiltro. É claro, como todo ultrafiltro não-principal possui a SFIP, uma pseudo-interseção sempre existe para uma família desse tipo, contudo, não há garantia de que alguma dessas pseudo-interseções seja um elemento do ultrafiltro.

Contudo, esses são objetos complicados: a existência de p-pontos é independente dos axiomas de ZFC. A existência de um modelo de ZFC em que não existem p-pontos exige técnicas de forcing que estão além do que precisamos, por isso, não será feita nesse texto. O leitor interessado nesse processo pode consultar ([20], Seção 3).

Por outro lado, a construção de um modelo de ZFC em que existem p-pontos é relativamente mais simples. Faremos primeiro a construção de um p-ponto em um modelo de ZFC+CH (CH denota a Hipótese do Continuum, a afirmação que pode ser traduzida na igualdade de cardinais $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$), e depois, na direção de obter um modelo com p-pontos e $2^{\aleph_0}$ arbitrariamente grande, analisaremos a existência de p-pontos em ZFC+MA+$\neg$CH (MA denota o Axioma de Martin, que explicaremos mais detalhadamente na Definição 1.25) e em alguns modelos em que certos cardinais pequenos (a saber, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{d}$) são $2^{\aleph_0}$.

Seguindo [20], começaremos agora a tentativa de mostrar que, supondo CH, existe um p-ponto. Para isso relembraremos a seguinte definição sobre ultrafiltros:

Definição 1.18. O filtro de Frechet $\mathfrak{Fr}$ é o conjunto de todos os subconjuntos cofinitos de ω:

$$\mathfrak{Fr} \doteq \{X \subseteq \omega : |\omega \setminus X| < \aleph_0\}.$$

Naturalmente, todo ultrafilro que estende o filtro $\mathfrak{Fr}$ é não-principal. Enunciaremos agora um lema que irá nos auxiliar a relacionar certos tipos de sequências de conjuntos com filtros,

Lema 1.19. *Seja $\langle X_\alpha : \alpha < \delta\rangle$ sequência quase decrescente de conjuntos infinitos de ω, isto é, $X_\beta \subseteq^* X_\alpha$ para todo $\alpha < \beta < \delta$ e X_γ é infinito para cada $\gamma < \delta$. Então o conjunto*

$$\mathscr{F} \doteq \{X \subseteq \omega : X_\alpha \subseteq^* X \text{ para algum } \alpha < \delta\}$$

é um filtro (próprio) que contém o filtro dos conjuntos cofinitos.

Demonstração. Naturalmente, $\omega \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ não contém o conjunto vazio, pois todos X_α são infinitos, e $\mathscr{F}$ é fechado por superconjuntos. Dados dois conjuntos $Y, Z \in \mathscr{F}$, existem $\alpha, \beta < \delta$ tais que $X_\alpha \subseteq^* Y$ e $X_\beta \subseteq^* Z$. Mas daí $X_{\max\{\alpha,\beta\}} \subseteq^* Y, Z$, consequentemente, $X_{\max\{\alpha,\beta\}} \subseteq^* Y \cap Z$, e obtemos que $Y \cap Z$ está em $\mathscr{F}$. Se $Y \subseteq \omega$ é cofinito, então $X_\alpha \subseteq^* Y$ para todo $\alpha < \delta$, de modo que $Y \in \mathscr{F}$. Portanto, $\mathscr{F}$ é um filtro próprio que estende o filtro $\mathfrak{Fr}$. □

Sequências desse tipo com δ um ordinal enumerável apresentam a seguinte propriedade:

Lema 1.20. *Toda sequência quase decrescente enumerável de subconjuntos infinitos de ω pode ser estendida por um conjunto infinito.*

Demonstração. Seja $\langle X_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ sequência quase decrescente de conjuntos infinitos de ω. Dado $E \subseteq \omega$ finito, então $\bigcap_{\alpha \in E} X_\alpha =^* X_{\max E}$, que é infinito, logo, não-vazio. Como $\langle X_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ satisfaz a SFIP, pelo Lema 1.8 existe B pseudo-interseção que estende a sequência. □

Note que nesse sentido, "estender" significa obter uma nova sequência, com as mesmas propriedades que a anterior, que possui esse novo elemento.

Construiremos agora um p-ponto, nas seguintes condições:

Teorema 1.21. *Suponha CH. Então existe um p-ponto.*

Demonstração. Iremos construir um p-ponto $\mathscr{F}$ ao montar uma sequência quase decrescente de conjuntos infinitos de comprimento ω_1, isto é, uma sequência $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ com

$$\forall \alpha < \beta < \omega_1 : X_\beta \subseteq^* X_\alpha$$

e $|X_\alpha| = \aleph_0$ para cada $\alpha < \omega_1$. Então definiremos $\mathscr{F}$ como o filtro gerado pelos X_α no sentido do Lema 1.19. Para garantir que $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro analisaremos todos os subconjuntos de ω (por CH existem $\aleph_1$ deles), a cada passo decidindo um deles, isto é, cada vez que consideramos um conjunto A, colocaremos o próprio A ou seu complemento no filtro. Esse ultrafiltro será um p-ponto pela propriedade de ser quase decrescente da sequência, como veremos.

Note que podemos obter uma enumeração $\mathscr{P}(\omega) = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Fixe $X_0 \doteq \omega$. Por indução, em um ordinal sucessor $\alpha + 1$ considere os conjuntos X_α e A_α. Como, por indução, X_α é infinito, então $X_\alpha \cap A_\alpha$ ou $X_\alpha \cap (\omega \setminus A_\alpha)$ é infinito (ou ambos). Então podemos definir

$$X_{\alpha+1} \doteq \begin{cases} X_\alpha \cap A_\alpha, \text{ se } |X_\alpha \cap A_\alpha| = \aleph_0, \\ X_\alpha \cap (\omega \setminus A_\alpha), \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

e $X_{\alpha+1} \subseteq X_\alpha$ será novamente infinito. Como $X_\alpha \subseteq^* X_\gamma$ para todo $\gamma < \alpha$ vale, por indução, então $X_{\alpha+1} \subseteq^* X_\gamma$ para todo $\gamma < \alpha + 1$ será verdadeiro também.

Resta verificar o seguinte: conseguimos estender a nossa sequência quase decrescente em todo ordinal limite δ? Esse caso pode ser resolvido pelo Lema 1.20.

Usando o Lema podemos prosseguir com a construção até ω_1, obtendo uma sequência quase decrescente de conjuntos infinitos, $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$. Definimos

$$\mathscr{F} \doteq \{X \subseteq \omega : X_\alpha \subseteq^* X \text{ para algum } \alpha < \omega_1\}$$

e afirmamos que $\mathscr{F}$ é um p-ponto.

Primeiramente, pelo Lema 1.19, $\mathscr{F}$ é um filtro própio estendendo o filtro de Frechet. É um ultrafiltro, já que nossa construção buscava obter um ultrafiltro: para qualquer $A \subseteq \omega$ existe um $\alpha < \omega_1$ com $A = A_\alpha$, então $X_{\alpha+1}$ é um subconjunto de A ou $\omega \setminus A$, logo, A ou $\omega \setminus A$ está no filtro $\mathscr{F}$.

Resta mostrar que $\mathscr{F}$ é um p-ponto como na Definição 1.17. Isso ocorre porque o filtro é gerado por uma sequência quase decrescente de cofinalidade não-enumerável: seja uma coleção enumerável de conjuntos do filtro $\{Y_n : n \in \omega\} \subseteq \mathscr{F}$. Pela definição de $\mathscr{F}$ existe uma correspondente coleção enumerável de ordinais enumeráveis, digamos $\{\alpha_n : n \in \omega\} \subseteq \omega_1$, tal que $X_{\alpha_n} \subseteq^* Y_n$ para cada $n \in \omega$. Defina

$$\alpha \doteq \sup_{n \in \omega} \alpha_n < \omega_1.$$

Então $X_\alpha \in \mathscr{F}$ e, como $X_\alpha \subseteq^* X_{\alpha_n}$ para cada $n \in \omega$, então $X_\alpha \subseteq^* Y_n$ para cada $n \in \omega$, o que encerra a prova do teorema. □

Note que nesse contexto o caráter de todo ultrafiltro não principal em ω, em particular dos p-pontos, é $\aleph_1$, pois $\aleph_1 = \mathfrak{p} = 2^{\aleph_0}$. Contudo, para nossa construção em grafos precisamos de um modelo em que $\aleph_\omega < (2^\omega)^{(+\omega)}$.

Nesse sentido, note que CH foi utilizado principalmente para obter o Lema 1.20. Podemos, entretanto, obter um p-ponto em um universo com $2^{\aleph_0}$ grande. Para isso utilizaremos o seguinte cardinal pequeno,

Definição 1.22. Uma torre é uma sequência quase decrescente maximal de subconjuntos infinitos de ω, isto é, $\langle X_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ tal que não existe conjunto infinito X com $X \subseteq^* X_\alpha$ para todo $\alpha < \delta$.

O número torre $\mathfrak{t}$ é o menor ordinal δ tal que existe uma torre de comprimento δ.

Tal cardinal está bem definido: a construção de uma torre será feita na demonstração da Proposição 1.23. De fato, pelo Lema 1.20 temos que $\mathfrak{t}$ é mesmo "pequeno"

Proposição 1.23. *O número torre $\mathfrak{t}$ é um cardinal regular satisfazendo*

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{t} \leq 2^{\aleph_0}.$$

Demonstração. $\mathrm{cf}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$, já que se $\mathrm{cf}(\mathfrak{t}) < \mathfrak{t}$, existiria uma sequência reduzida com tipo de ordem $\mathrm{cf}(\mathfrak{t})$, contradizendo o fato que $\mathfrak{t}$ é o comprimento mínimo de uma torre.

Agora lembremos do Lema 1.20: toda sequência quase drecrescente enumerável de subconjuntos infinitos de ω pode ser estendida por um conjunto ainda infinito; em outras palavras, não existe torre de comprimento enumerável, o que imediatamente nos diz que $\aleph_1 \leq \mathfrak{t}$.

Finalmente, mostraremos que existe alguma torre de comprimento no máximo $2^{\aleph_0}$. Nós simplesmente construiremos uma, seguindo a demonstração do Teorema 1.21. Nós não assumimos CH ou outra hipótese adicional, então - ao invés disso - considere uma enumeração fixada de $\mathscr{P}(\omega)$ de comprimento $2^{\aleph_0}$. Nós tentaremos construir uma sequência quase decrescente de conjuntos infinitos $\langle X_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\rangle$, em ordinais sucessores fazendo exatamente o mesmo que no Teorema 1.21. Em ordinais limites, nós tentaremos encontrar pseudo-interseções, isto é, conjuntos infinitos quase contidos em todos os conjuntos construidos até agora. Se isso não é possível para algum ordinal limite estritamente abaixo de $2^{\aleph_0}$, nós encontramos uma torre, e $\mathfrak{t} < 2^{\aleph_0}$ (nesse caso, CH necessariamente falha devido a $\aleph_1 \leq \mathfrak{t}$). Caso contrário prosseguimos com a construção até $2^{\aleph_0}$; afirmamos que a sequência resultante é uma torre de comprimento $2^{\aleph_0}$ (daí $\mathfrak{t} \leq 2^{\aleph_0}$). Defina

$$\mathscr{F} = \{Z \subseteq \omega : Z \supseteq^* X_\alpha \text{ para algum } \alpha < 2^{\aleph_0}\},$$

que é um ultrafiltro. Assim, para obtermos um absurdo suponha que existe um X infinito com $X \subseteq^* X_\alpha$ para todo $\alpha < 2^{\aleph_0}$; então $\mathscr{F} \subseteq \{Z \subseteq \omega : Z \supseteq^* X\}$, então $\mathscr{F}$ não é ultrafiltro (divida X em duas partes infinitas X_1 e X_2, então nem X_1 ou X_2 estariam em $\mathscr{F}$), uma contradição. □

Utilizando as técnicas da demonstração do Teorema 1.21 também é possível perceber que vale o

Teorema 1.24. *Suponha* $\mathfrak{t} = 2^{\aleph_0}$. *Então existe um p-ponto.*

De fato, para a construção da sequência em ordinais sucessores, procedemos exatamente como no Teorema 1.21, e em ordinais limites δ utilizamos o fato de que a sequência construida até então não é uma torre, pois $\delta < 2^{\aleph_0}$, de modo que pode ser estendida. Para mostrar que o filtro gerado por essa sequência é um p-ponto, seguimos de modo análogo à demonstração original, mas aqui utilizando que $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \omega$.

Isso significa que nossa construção no Teorema 1.21 não depende do tamanho de $\aleph_1$, e sim do número torre $\mathfrak{t}$. A seguir tentaremos argumentar essa possibilidade de construir um p-ponto com continuum tão grande quanto desejado.

MA denota o Axioma de Martin, uma afirmação sobre filtros e famílias de conjuntos densos definida da seguinte forma:

Definição 1.25. Seja κ um cardinal. Denotamos por MA_κ a afirmação: dada $(\mathbb{P}, \leq)$ uma pré-ordem ccc e dada $\mathscr{D}$ uma família de densos em $\mathbb{P}$ com $|\mathscr{D}| \leq \kappa$, então existe F filtro sobre $\mathbb{P}$ tal que F é $\mathscr{D}$-genérico.

O Axioma de Martin (MA) é a afirmação: para todo $\kappa < 2^{\aleph_0}$ vale MA_κ.

Teorema 1.26. *MA implica* $\mathfrak{t} = 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. Assuma MA e seja $\langle X_\alpha : \alpha < \delta\rangle$, $\delta < 2^{\aleph_0}$, uma sequência quase decrescente de conjuntos infinitos, isto é,

$$\forall \alpha < \beta < \delta : X_\beta \subseteq^* X_\alpha$$

e $|X_\alpha| = \aleph_0$ para cada $\alpha < \delta$. Encontraremos um conjunto ainda infinito quase contido em todos os X_α's, isto é, um conjunto X com $|X| = \aleph_0$ e

$$\forall \alpha < \delta : X \subseteq^* X_\alpha.$$

Para esse propósito definiremos um forcing ccc $\mathbb{P}$ apropriado; então podemos obter o conjunto X desejado pelo "objeto genérico" dado por MA.

Defina o conjunto

$$\mathscr{F} = \{X \subseteq \omega : X_\alpha \subseteq^* X \text{ para algum } \alpha < \delta\},$$

que é (pelo Lema 1.19) um filtro contendo o filtro de Fréchet. Agora defina o seguinte forcing $(\mathbb{P}, \leq)$:

$$\mathbb{P} = \{(s,A) : s \in [\omega]^{<\omega}, A \in \mathscr{F}, \max s < \min A\},$$

e $(t,B) \leq (s,A)$, significando (t,B) mais forte que (s,A), se, e somente se, o seguinte vale:

(i) $s \subseteq t$,

(ii) $B \subseteq A$,

(iii) $t \setminus s \subseteq A$.

Note que nessa definição t é de fato uma extensão final de s, já que $t \setminus s \subseteq A$, que é (por $\max s < \min A$) completamente acima de s.

Agora, se G é um filtro nesse forcing (que buscamos obter por MA) podemos definir um conjunto $X \subset \omega$ por

$$X = \bigcup_{(s,A) \in G} s.$$

Então uma condição (s,A) pode ser vista da seguinte forma: a primeira componente s é uma aproximação finita de X (um segmento inicial finito de X) e a segunda componente A determina como X irá parecer acima de $\max s$: (s,A) força X a ser um quase subconjunto de A, a saber $X \setminus s$ estará contido em A. Usando MA seremos capazes de encontrar um filtro G tal que o respectivo X estará contido em cada um dos X_α's: para isso, devemos mostrar que é denso para uma condição de ter $A \subseteq X_\alpha$ como segunda componente.

Mas primeiramente vamos verificar que o forcing $\mathbb{P}$ definido acima é ccc (caso contrário não podemos aplicar MA). Na verdade, mostraremos mais que isso, mas precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.27. Um forcing $\mathbb{P}$ é σ-centrado se existe uma partição $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in \omega} \mathbb{P}_i$ tal que cada $\mathbb{P}_i$ é centrado, ou seja, toda coleção finita de elementos de $\mathbb{P}_i$ possui limitante inferior.

Afirmamos que todo forcing σ-centrado é ccc. De fato, suponha $\mathbb{P}$ um forcing σ-centrado com uma anticadeia não enumerável, então existe um único conjunto da partição contendo não enumeráveis elementos da partição, mas eles seriam dois a dois compatíveis, uma contradição.

Vamos mostrar agora que nosso forcing definido anteriormente é σ-centrado, logo, ccc. Vamos definir uma partição de nosso forcing $\mathbb{P}$ como segue: duas condições pertencem à mesma parte se, e somente se, suas primeiras componentes são as mesmas:

$$(s_1,A_1) \sim (s_2,A_2) \iff s_1 = s_2.$$

Claramente é uma partição em enumeráveis partes já que existem enumeráveis conjuntos finitos $s \subseteq \omega$. Mas cada parte é centrada; dadas finitas condições $(s,A_0),(s,A_1),\ldots,(s,A_{n-1})$ com a mesma componente s, obtemos um limitante inferior dessas condições ao intersectar todos os conjuntos $A_0,\ldots,A_{n-1}$ do filtro:

$$\text{se } A = \bigcap_{i\in n} A_i, \text{ então } \forall i < n\,[(s,A) \leq (s,A_i)];$$

em particular, todas as condições em uma única parte são dois a dois compatíveis.

Para cada $\alpha < \delta$ defina o seguinte conjunto:

$$D_\alpha \doteq \{(s,A) \in \mathbb{P} : A \subseteq X_\alpha\}.$$

Como mencionado antes, afirmamos que cada D_α é denso. Fixe $(s,A) \in \mathbb{P}$. Existe uma condição mais forte que (s,A) em D_α, a saber $(s,A\cap X_\alpha)$: primeiramente, $(s,A\cap X_\alpha)$ é uma condição, já que ambos A e X_α estão no filtro $\mathscr{F}$ e também está a interseção; claramente, $(s,A\cap X_\alpha) \leq (s,A)$ e $(s,A\cap X_\alpha) \in D_\alpha$, então D_α é denso. Analogamente, o conjunto

$$\tilde{D}_n \doteq \{(s,A) \in \mathbb{P} : \max s > n\}$$

é denso para cada $n \in \omega$ (usando o fato de que $\mathscr{F}$ contém o filtro de Fréchet). Agora seja

$$\mathscr{D} \doteq \{D_\alpha : \alpha < \delta\} \cup \{\tilde{D}_n : n \in \omega\}$$

a coleção de todos esses conjuntos densos. Nosso forcing é ccc e $\mathscr{D}$ é uma coleção de tamanho menor que o continuum (note que $\delta < 2^{\aleph_0}$ e os $\tilde{D}_n$'s são em quantidade enumerável). Então podemos aplicar MA e obter um filtro G ($\mathscr{D}$-genérico) que intersecta todos os D_α's e cada $\tilde{D}_n$'s. Afirmamos que o respectivo X já definido satisfaz as condições.

Primeiramente, é claro que X é infinito: dado $n \in \omega$, G intersecta $\tilde{D}_n$, logo, existe um $s \subseteq X$ com $\max s > n$. Resta mostrar que para cada $\alpha < \delta$, $X \subseteq^* X_\alpha$. Fixe um α; $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$, então escolha $(s,A) \in G$ com $A \subseteq X_\alpha$. Mas isso implica $X \setminus s \subseteq X_\alpha$, pela seguinte razão: dado um $n \in X \setminus s$, existe uma condição $(t,B) \in G$ com $n \in t$; claramente podemos assumir que (t,B) é mais forte que (s,A) - tome uma extensão comum de (s,A) e (t,B) em G -, para $t \setminus s \subseteq A$, resultando $n \in t \setminus s \subseteq A \subseteq X_\alpha$. Daí X é de fato uma pseudo-interseção infinita da sequência $\langle X_\alpha : \alpha < \delta\rangle$, o que finaliza a demonstração do teorema. □

Com os resultados do Teorema 1.24 e Teorema 1.26 podemos enunciar o

Corolário 1.28. *MA implica que existe um p-ponto.*

A consistência de MA com o continuum arbitrariamente grande pode ser encontrada em ([13], Seção V.4), e nos mostra que p-pontos podem existir em modelos de ZFC com $2^{\aleph_0}$ de tamanho arbitrário.

Como fizemos antes com o cardinal $\mathfrak{t}$ tentaremos entender a relação entre MA e $\mathfrak{p}$, em particular, como MA influencia no tamanho das famílias geradoras de ultrafiltros não principais. Isso está codificado no seguinte teorema (cuja demonstração é bem semelhante ao Teorema 1.26), demonstrado em ([5], Seção 7),

Teorema 1.29. *MA implica* $\mathfrak{p} = 2^{\aleph_0}$.

Demonstração. Suponha $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^{\omega}$ com a SFIP e $|\mathscr{F}| < 2^{\aleph_0}$. Para encontrar uma pseudo-interseção X de $\mathscr{F}$ nós aplicamos MA ao seguinte conjunto parcialmente ordenado

$$\mathbb{P} \doteq \{(s,F) : s \in [\omega]^{<\omega}, F \in [\mathscr{F}]^{<\omega}\},$$

(o "significado" de (s,F) é que o X desejado deverá incluir s e deverá, exceto por s, estar incluido em cada F) com a relação $\leq$ dada por $(s',F') \leq (s,F)$ se

(i) s é um segmento inicial de s',

(ii) $F' \supseteq F$,

(iii) para todo $A \in F$ vale $s' \setminus s \subseteq A$.

Quaisquer dois pares com a mesma primeira coordenada são compatíveis, já que podemos simplesmente tomar a união das segundas componentes. (De fato, qualquer número finito de pares com a mesma primeira componente possui um limitante inferior comum. Então essa ordenação é σ-centrada).

Para cada $A \in \mathscr{F}$ o conjunto

$$D_A \doteq \{(s,F) \in \mathbb{P} : A \in F\}$$

é denso em $\mathbb{P}$. Também é, para cada $n \in \omega$,

$$D_n \doteq \{(s,F) \in \mathbb{P} : |s| > n\},$$

por causa da SFIP de $\mathscr{F}$. Defina $\mathscr{D} \doteq \{D_A : A \in \mathscr{F}\} \cup \{D_n : n \in \omega\}$. MA fornece um G $\mathscr{D}$-genérico intersectando todos esses conjuntos densos. Defina

$$X \doteq \bigcup_{(s,F)\in G} s.$$

Isso é infinito porque G intersecta cada D_n. Para verificar que está quase incluso em cada $A \in \mathscr{F}$, use que G e D_A possuem um elemento comum (s_0,F_0). Isso significa $A \in F_0$, e mostraremos que

$X \setminus s_0 \subseteq A$. Qualquer elemento k de $X \setminus s_0$ está em $s \setminus s_0$ para algum (s, F) em G e, como G é direcionado para baixo, contém algum $(s', F') \leq (s, F), (s_0, F_0)$. Então $k \in s \setminus s_0 \subseteq s' \setminus s_0 \subseteq A$, como desejado. □

Juntando o Lema 1.16 e o Teorema 1.29 podemos enunciar o seguinte

Teorema 1.30. *Suponha MA. Se u é um ultrafiltro não-principal em ω, então $\chi(u) = 2^{\aleph_0}$.*

Em particular, sob MA não existem p-pontos de caráter $\aleph_1$ como os que precisamos para nossa construção, ou seja, não podemos recorrer a ZFC+MA+$2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$ para obter o modelo desejado. Mas ainda há esperança: o Teorema 1.21 nos garante que supondo CH existem p-pontos, e pelo Lema 1.16 todos possuem caráter $\aleph_1$. O truque agora é obter um método que, partindo de um modelo de ZFC+CH, nos permita aumentar $2^{\aleph_0}$ enquanto preserva pelo menos algum p-ponto. Esse será o objetivo da próxima seção.

Para encerrar nosso estudo inicial sobre p-pontos enunciamos o seguinte resultado, que pode ser demonstrado utilizando a mesma técnica do Teorema 1.21, que utilizaremos na Seção 4.

Proposição 1.31. *Seja u um ultrafiltro não-principal em ω tal que $\chi(u) = \aleph_1$. Então são equivalentes:*

(i) u é um p-ponto.

(ii) existe $(A_\xi)_{\xi<\omega_1}$ que gera u e tal que $A_\xi \subseteq^* A_\eta$ se $\eta \leq \xi$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que $(i) \Rightarrow (ii)$.

Como $\chi(u) = \aleph_1$, seja $\mathscr{E} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma família geradora de u. Como no Teorema 1.21, definiremos a família $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ desejada de modo indutivo: coloque $X_0 = \omega$. Para ordinais sucessores, como por indução já definimos X_α coloque $X_{\alpha+1} = X_\alpha \cap A_\alpha$; note que por hipótese $X_\alpha \subseteq^* X_\delta$ para $\delta < \alpha$, de modo que $X_{\alpha+1} \subseteq^* X_\delta$ para $\delta < \alpha + 1$ também é válido, pois $X_{\alpha+1} \subseteq X_\alpha$. Para α ordinal limite, como $(X_\beta)_{\beta<\alpha} \cup \{A_\alpha\}$ é uma família enumerável ($\alpha < \omega_1$) tal que $X_\beta \in u$ para todo $\beta < \alpha$ e $A_\alpha \in u$, e u é p-ponto, então existe $Y \in u$ tal que $Y \subseteq^* X_\beta$ para todo $\beta < \alpha$ e $Y \subseteq^* A_\alpha$. Coloque $X_\alpha = Y$.

Obtemos então uma família $\mathscr{E}' = \{X_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq u$ tal que para todo $\alpha < \omega_1$ vale $X_\alpha \subseteq^* A_\alpha$ e $X_\beta \subseteq^* X_\gamma$ para $\gamma \leq \beta < \omega_1$. Logo, $\mathscr{E}'$ gera u e é como desejado.

Resta mostrar que $(ii) \Rightarrow (i)$.

Seja $\mathscr{E} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ família geradora de u tal que $A_\beta \subseteq^* A_\gamma$ se $\gamma \leq \beta < \omega_1$. Seja $(B_n)_{n\in\omega}$ família enumerável de elementos de u. Como $\mathscr{E}$ gera u, denote por A_{α_n} o elemento de $\mathscr{E}$ tal que $A_{\alpha_n} \subseteq^* B_n$, para todo $n \in \omega$. Como $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência enumerável de ordinais em ω_1, tome

$$\alpha = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$$

e note que $\alpha < \omega_1$. Como $\mathscr{E}$ é quase decrescente, tome $A_\alpha \in u$ e $A_\alpha \subseteq^* B_n$ para todo $n \in \omega$. Logo, u é um p-ponto. □

A título de curiosidade para os interessados em cardinais pequenos, podemos notar que toda torre possui a SFIP e obter a seguinte

Proposição 1.32. $\aleph_1 \leq \mathfrak{p} \leq \mathfrak{t} \leq 2^{\aleph_0}$.

Surpreendentemente, um resultado devido a Malliaris e Shelah ([15]) mostra que $\mathfrak{p} = \mathfrak{t}$ em ZFC.

Para uma última observação envolvendo cardinais pequenos, seguiremos ([5], Seção 9) para mostrar uma outra correspondência entre o tamanho de um cardinal pequeno e a existência de p-pontos.

Seja $\leq^*$ a notação para a dominação eventual em ω^ω, isto é, para $f, g \in \omega^\omega$,

$$f \leq^* g \iff \exists n \in \omega\, \forall k \geq n\, f(k) \leq g(k).$$

O número dominante $\mathfrak{d}$ é o menor tamanho possível de uma família dominante; uma família dominante $A \subseteq \omega^\omega$ é um conjunto de funções que "domina" toda função em ω^ω com relação a $\leq^*$:

$$\mathfrak{d} = \min\{|A| : \forall f \in \omega^\omega\, \exists g \in A\, f \leq^* g\}.$$

Claramente, ω^ω em si está no conjunto acima, então $\mathfrak{d} \leq 2^{\aleph_0} = |\omega^\omega|$. Por outro lado, pode ser mostrado por um simples argumento de diagonal que um conjunto enumerável $A \subseteq \omega^\omega$ não pode ser uma família dominante: dado $A = \{f_k : k \in \omega\}$, defina a função f não dominada por nenhum dos f_k's:

$$f(k) = \max\{f_i(k) : i \leq k\} + 1 \text{ para cada } k \in \omega.$$

Então nós temos o

Lema 1.33. $\aleph_1 \leq \mathfrak{d} \leq 2^{\aleph_0}$.

Em ([5], Seção 6) é mostrado que $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{d}$. Daí o teorema a seguir é um resultado mais forte que o Teorema 1.26:

Teorema 1.34. *(i) Se $2^{\aleph_0} = \mathfrak{d}$, então todo filtro gerado por menos de $2^{\aleph_0}$ conjuntos está incluido em algum p-ponto.*

(ii) Todo ultrafiltro gerado por menos de $\mathfrak{d}$ conjuntos é um p-ponto.

Esse resultado é fortemente baseado no seguinte fato, que demonstraremos antes do teorema acima, retirado de ([5], Seção 6),

Proposição 1.35. *Suponha $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência decrescente (ou quase decrescente) de subconjuntos infinitos de ω, e suponha $\mathscr{A}$ uma família com menos que $\mathfrak{d}$ subconjuntos de ω tais que cada conjunto em $\mathscr{A}$ possui interseção infinita com cada C_n. Então $\{C_n : n \in \omega\}$ possui pseudo-interseção B que tem interseção infinita com cada conjunto em $\mathscr{A}$.*

Demonstração. Podemos assumir que $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ é decrescente, pois se for apenas quase decrescente podemos substituir cada C_n por $\bigcap_{k \geq n} C_k$ sem afetar as hipóteses ou a conclusão, já que cada C_n difere apenas finitamente dos antigos.

Dado $h \in \omega^\omega$, seja $B_h = \bigcup_{n \in \omega}(C_n \cap h(n))$. Cada C_n inclui todos menos os n primeiros termos dessa união, de modo que B_h é uma pseudo-interseção dos C_n's. Resta escolher h tal que $A \cap B_h$ é infinito para todo $A \in \mathscr{A}$.

Para cada A, seja $f_A(n)$ o n-ésimo elemento do conjunto infinito $A \cap C_n$. Note que, se $h(n) > f_A(n)$ para algum A e n, então $A \cap B_h$ possui cardinalidade pelo menos n, pois contém os n primeiros elementos de $A \cap C_n$. Então B_h pode ser o B da proposição desde que para todo $A \in \mathscr{A}$ existam infinitos $n \in \omega$ tais que $h(n) > f_A(n)$. Mas existem menos que $\mathfrak{d}$ funções f_A, então existe um h não dominado por nenhuma delas. $\square$

Com isso podemos demonstrar o Teorema 1.34:

Demonstração. Para mostrar (i), assuma $2^{\aleph_0} = \mathfrak{d}$, e seja $\mathscr{F}$ um filtro gerado por menos de $2^{\aleph_0}$ conjuntos, e seja $\langle S^\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0} \rangle$ uma enumeração de todas as ω-sequências decrescentes de subconjuntos infinitos de ω, $S^\alpha = \langle S_0^\alpha \supseteq S_1^\alpha \supseteq \ldots \rangle$. Nós definiremos uma sequência crescente $\langle \mathscr{F}^\alpha : \alpha \leq 2^{\aleph_0} \rangle$, começando com $\mathscr{F}^0 = \mathscr{F}$, e tomando uniões em estágios limites, e em estágios sucessores adicionando um novo gerador ao filtro de tal modo que ou o novo gerador é uma pseudo-interseção de S^α ou é o complementar de algum S_n^α. Claramente, devemos garantir que o novo gerador adicionado no estágio $\alpha + 1$ possui interseção infinita com todo conjunto em $\mathscr{F}^\alpha$, de modo que $\mathscr{F}^{\alpha+1}$ será um filtro. Mas isso não é difícil. Se, para algum n, $S_n^\alpha \notin \mathscr{F}^\alpha$, então $\omega \setminus S_n^\alpha$ pode ser adicionado. Se, por outro lado, $S_n^\alpha \in \mathscr{F}^\alpha$ para todo n, então, pelo fato de $\mathscr{F}^\alpha$ ser gerado por menos de $\mathfrak{d}$ conjuntos, a Proposição 1.35 fornece uma pseudo-interseção de S^α com interseção infinita com cada gerador de $\mathscr{F}^\alpha$ e, portanto, com cada conjunto em $\mathscr{F}^\alpha$. Essa pseudo-interseção pode servir como gerador para $\mathscr{F}^{\alpha+1}$. Logo, a construção da sequência de filtros pode continuar, e claramente garante que qualquer ultrafiltro estendendo $\mathscr{F}^{2^{\aleph_0}}$ é um p-ponto.

Para a parte (ii), seja $\mathscr{U}$ um ultrafiltro gerado por menos que $\mathfrak{d}$ conjuntos e seja $S = \langle S_n \rangle$ uma sequência decrescente de conjuntos em $\mathscr{U}$. Como na demonstração da parte (i), a Proposição 1.35 fornece a pseudo-interseção de S que intersecta todo gerador de $\mathscr{U}$. Mas como $\mathscr{U}$ é um ultrafiltro, segue que essa pseudo-interseção está em $\mathscr{U}$. $\square$

Todo esse trabalho com cardinais pequenos nos leva a perguntar se a existência de p-pontos está relacionada com esses cardinais possuirem seu maior valor possível, por exemplo, $\mathfrak{d} = 2^{\aleph_0}$. Veremos na Seção 2 algumas das propriedades do produto do forcing de Sacks, em particular, que podemos construir um modelo de ZFC em que muitos cardinais pequenos são $\aleph_1$, mas ainda assim existem p-pontos.

CAPÍTULO 2

Forcing de Sacks

A partir de agora assumiremos que o leitor possui alguma familiaridade com a linguagem de forcing. Para mais detalhes sobre o tema o leitor pode consultar [11] e [13].

Nessa seção definiremos o forcing de Sacks e seu produto de suporte enumerável, depois analisaremos algumas das propriedades desses dois forcings. Destacamos que nossa aplicação na Seção 4 utilizará apenas o produto do forcing de Sacks, os resultados sobre o forcing de Sacks usual foram incluídos para ilustrar de forma mais simples as principais propriedades.

2.1 Forcing de Sacks e suas propriedades

Nesta subseção definiremos o forcing de Sacks e mostraremos que ele satisfaz o Axioma A e tem a propriedade de Sacks.

Seguindo ([18], Seção 2) começaremos a descrever o forcing de Sacks e algumas de suas propriedades. Como esse forcing é definido sobre um conjunto específico de árvores, começamos pela seguinte

Definição 2.1. Dado $X \subseteq 2^\omega$ definimos $T(X) = \{x|n : n \in \omega \wedge x \in X\}$ o conjunto dos segmentos iniciais de elementos de X, que é uma subárvore de $(2^{<\omega}, \subseteq)$.

Para $T \subseteq 2^{<\omega}$ subárvore definimos $[T] = \{x \in 2^\omega : \forall n \in \omega\, (x|n \in T)\}$ o conjunto dos ramos através de T.

As árvores em que temos interesse satisfazem a seguinte propriedade, dada em ([3], Seção 1),

Definição 2.2. Um conjunto não-vazio $p \subseteq 2^{<\omega}$ é uma árvore perfeita se, e somente se,

(i) $\forall s \in p\, \forall n\, s|n \in p$.

(ii) $\forall s \in p\, \exists t, u \in p,\ s \subseteq t, u$ e t e u são incompatíveis.

A condição (2) pode ser expressa informalmente ao dizermos que uma árvore perfeita bifurca acima de todo nó. Note que se p satisfaz (1) e $\forall s \in p\, \exists t \in p$, $s \subseteq t$, $s \neq t$, então p é uma árvore perfeita se, e somente se, $\{f \in {}^{\omega}2 : \forall n\, f|n \in p\}$ é um subconjunto perfeito de 2^{ω} (com a topologia produto).

Isso nos permite obter o forcing desejado,

Definição 2.3. O forcing de Sacks é o conjunto $\mathbb{PS}$ de todas as árvores perfeitas de $2^{<\omega}$ ordenado pela inclusão.

Embora o estudo do forcing de Sacks e de seu produto tenham muito em comum, nesta subseção faremos apenas resultados relacionados ao forcing simples, e o estudo do produto (de modo quase análogo) será feito mais adiante.

Ainda em [3] é demonstrada a seguinte proposição, que nos permite relacionar o forcing de Sacks com $2^{\aleph_0}$:

Lema 2.4. *Se G é $\mathbb{PS}$-genérico sobre V, então $f_G = \bigcup\{s : \forall p \in G\, s \subseteq p\} \in {}^{\omega}2$, $f_G \notin V$ e $V[f_G] = V[G]$.*

Demonstração. A única parte não-trivial do argumento é mostrar que $G \in V[f_G]$. Trabalhando em $V[f_G]$, defina

$$H = \{p \in \mathbb{PS}^V : \forall n\, f_G|n \in p\}.$$

Então $H \in V[f_G]$, e claramente $G \subseteq H$. Afirmamos que $G = H$. Suponha $p \in H \setminus G$. Então para algum $q \in G$, p e q são incompatíveis, isto é, $p \cap q$ não contém uma árvore perfeita. Agora trabalhamos em V. Como p e q são incompatíveis, $X = \{f \in {}^{\omega}2 : \forall n\, f|n \in p \cap q\}$ deve ser disperso. Daí existe uma sequência $\langle s_\alpha : \alpha < \beta \rangle$ para algum ordinal enumerável β tal que $\forall \alpha < \beta$ existe exatamente um $f \in X$ com $s_\alpha \subseteq f$, mas $s_\gamma \not\subseteq f$ para todo $\gamma < \alpha$. Mas essa mesma sequência $\langle s_\alpha : \alpha < \beta \rangle$ funciona em $V[f_G]$ para mostrar que se X é definido de $p \cap q$ em $V[f_G]$ então X ainda é disperso. Como $f_G \notin V$, não podemos ter $f_G \in X$, contradizendo a hipótese que $p, q \in H$. $\square$

Com nosso forcing em mãos, buscaremos estudar algumas de suas propriedades em relação à preservação de cardinais; relembrando nosso objetivo, buscamos preservar cardinais e aumentar $2^{\aleph_0}$. Retomando [18] vemos que $\mathbb{PS}$ não satisfaz uma das boas propriedades de forcing,

Proposição 2.5. $\mathbb{PS}$ *não é ccc.*

Demonstração. De fato, construiremos uma anticadeia de tamanho $2^{\aleph_0}$. Fixe uma família quase disjunta $\{A_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ de subconjuntos de ω, para cada $\alpha < 2^{\aleph_0}$ escolha uma árvore perfeita T_α cujos níveis de bifurcamento são exatamente os elementos de A_α, por exemplo

$$T_\alpha = \{s \in 2^{<\omega} : \forall n < |s|\ (n \notin A_\alpha \Rightarrow s(n) = 0)\}.$$

Se $\alpha \neq \beta$, então $T_\alpha \cap T_\beta$ não inclui nenhuma árvore perfeita, ou seja, são incompatíveis. $\square$

Por outro lado, nem tudo está perdido, pois o forcing de Sacks satisfaz outra propriedade relacionada a preservação de cardinais, dada pela

Definição 2.6. Um forcing $(\mathbb{P}, \leq)$ satisfaz o Axioma A se, e somente se, existe uma cadeia decrescente de ordens parciais $\leq = \leq_0 \supseteq \leq_1 \supseteq \leq_2 \ldots$ em $\mathbb{P}$ tal que

(i) para toda sequência $(p_n)_{n\in\omega}$ em $\mathbb{P}$ tal que para todo $n \in \omega$, $p_{n+1} \leq_n p_n$ existe $p \in \mathbb{P}$ tal que para todo $n \in \omega$, $p \leq_n p_n$ (tal sequência $(p_n)_{n\in\omega}$) é chamada sequência fusão e p é a fusão de $(p_n)_{n\in\omega}$;

(ii) se $A \subseteq \mathbb{P}$ é uma anticadeia e $p \in \mathbb{P}$, então para todo $n \in \omega$ existe $q \leq_n p$ tal que q é compatível com no máximo enumeráveis elementos de A.

Embora um pouco abstrata, essa propriedade nos garante alguma preservação de cardinais, como veremos na seguinte

Proposição 2.7. *Seja $\mathbb{P}$ um forcing satisfazendo o Axioma A. Então, para todo filtro G $\mathbb{P}$-genérico no modelo base V vale o seguinte: se x é um conjunto enumerável de ordinais em $V[G]$, então existe um conjunto $y \in V$ tal que $x \subseteq y$ e y é enumerável em V. Em particular, forçar com $\mathbb{P}$ não colapsa $\aleph_1$.*

Demonstração. Seja $\dot{x}$ um $\mathbb{P}$-nome e suponha que $p \in \mathbb{P}$ força que $\dot{x}$ é um conjunto enumerável de ordinais. Iremos construir uma sequência fusão $(q_n)_{n\in\omega}$ começando com $q_0 = p$ e um conjunto enumerável y tal que para toda fusão q dessa sequência, $q \Vdash \dot{x} \subseteq \check{y}$. Começamos escolhendo um nome $\dot{h}$ para uma função de ω nos ordinais tal que $p \Vdash \dot{h} : \omega \to \dot{x}$. A existência de $\dot{h}$ é garantida pelo Princípio do Máximo.

Seja $n \in \omega$ e suponha que já definimos q_n. O conjunto de condições decidindo $\dot{h}(n)$ é denso em $\mathbb{P}$. Segue que existe uma anticadeia maximal $A_n \in \mathbb{P}$ consistindo das condições que decidem $\dot{h}(n)$. Pela condição (ii) do Axioma A existe $q_{n+1} \leq_n q_n$ tal que q_{n+1} é compatível com no máximo enumeráveis elementos de A_n.

Seja q uma fusão de $(q_n)_{n\in\omega}$ e coloque

$$y = \{\alpha : \exists q' \leq q\, \exists n \in \omega\, (q' \Vdash \dot{h}(n) = \alpha)\}.$$

Então, quando G é $\mathbb{P}$-genérico sobre V e $q \in G$, para todo $n \in \omega$ existe $q' \in G$ tal que $q' \leq q$ e $q' \Vdash \dot{h}(n) = \check{\alpha}$ onde $\alpha = \dot{h}_G(n)$ (lembre-se que $V[G]$ possui os mesmos ordinais que V). Segue que $\dot{x}_G = \dot{h}_G[\omega] \subseteq y$.

Resta mostrar que y é enumerável. Seja $n \in \omega$ e $q' \leq q$. Como A_n é anticadeia maximal, existe $r \in A_n$ tal que r e q' são compatíveis. Pela escolha de A_n existe α_r tal que $r \Vdash \dot{h}(n) = \check{\alpha}_r$. Segue que se q' decide $\dot{h}(n)$, então q' decide $\dot{h}(n)$ como sendo α_r. Como $q' \leq q, r$, então r e q são compatíveis. Pela escolha de q_{n+1} e como $q \leq q_{n+1}$, q é compatível com no máximo enumeráveis elementos de A_n. Segue que $\{\alpha : \exists q' \leq q\, (q' \Vdash \dot{h}(n) = \check{\alpha})\}$ é enumerável. Mas isso implica a enumerabilidade de y. $\square$

A propriedade descrita acima é formalmente dada pela

Definição 2.8. Sejam V_0 e V_1 modelos de teoria dos conjuntos tais que $V_0 \subseteq V_1$ e V_0 e V_1 possuem os mesmos ordinais. Dizemos que V_1 tem a propriedade da $\aleph_0$-cobertura sobre V_0 se, e somente se, para todo conjunto $A \in V_1$ de ordinais que é enumerável existe um conjunto $B \in V_0$ de ordinais que é enumerável em V_0 tal que $A \subseteq B$.

Então, com essa definição a Proposição 2.7 nos fornece o seguinte

Corolário 2.9. *Se $\mathbb{P}$ é um forcing satisfazendo o Axioma A, então para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre o modelo base V, $V[G]$ tem a propriedade da $\aleph_0$-cobertura sobre V.*

Para utilizar esse fato na demonstração que o forcing de Sacks preserva $\aleph_1$ fazemos o seguinte

Lema 2.10. *O forcing de Sacks satisfaz o Axioma A.*

Demonstração. Para $n \in \omega$ e $p \in \mathbb{PS}$ seja p^n consistindo dos $t \in p$ que são mínimos em p (com relação a $\subseteq$) tais que t possui exatamente n segmentos iniciais próprios que possuem dois sucessores imediatos em p. Para $p, q \in \mathbb{PS}$ sejam $p \leq_n q$ se, e somente se, $p \leq q$ e $p^n = q^n$. Suponha $(p_n)_{n\in\omega}$ uma sequência em S tal que $p_{n+1} \leq_n p_n$ para todo $n \in \omega$. Então $q = \bigcap p_n$ é uma árvore perfeita, isto é, um elemento de $\mathbb{PS}$. Claramente, $q \leq_n p_n$ para todo $n \in \omega$.

Agora sejam $n \in \omega$, $p \in \mathbb{PS}$ e suponha que A é uma anticadeia em $\mathbb{PS}$. Todo $\sigma \in 2^n$ determina unicamente um elemento t_σ de p^n (usando a bijeção natural entre 2^n e p^n). Seja $p * \sigma = \{s \in p : s \subseteq t_\sigma \vee t_\sigma \subseteq s\}$. Claramente, $p * \sigma \in \mathbb{PS}$ e $p * \sigma \leq p$.

Para todo $\sigma \in 2^n$ seja $q_\sigma \leq p * \sigma$ tal que q_σ é compatível com no máximo um elemento de A. Agora $q = \bigcap_{\sigma\in 2^n} q_\sigma \in \mathbb{PS}$ e $q \leq_n p$. Note que com essa definição de q para todo $\sigma \in 2^n$ temos $q_\sigma = q * \sigma$. Se q é compatível com algum $r \in A$, então existe $\sigma \in 2^n$ tal que $q * \sigma$ é compatível com r. Mas todo $q * \sigma$ é compatível com no máximo um elemento de A. Segue que q é compatível com no máximo 2^n elementos de A. $\square$

Para além disso, o forcing de Sacks satisfaz outra propriedade, relacionada à capacidade de estimar elementos da extensão por elementos do modelo inicial.

Definição 2.11. Seja $f : \omega \to \omega \setminus \{0\}$. $C : \omega \to [\omega]^{<\aleph_0}$ é um f-cone se, e somente se, para todo $n \in \omega$, $|C(n)| \leq f(n)$. Um real $r \in \omega^\omega$ é coberto por C se, e somente se, para todo $n \in \omega$, $r(n) \in C(n)$.

Sejam V_0 e V_1 modelos de teoria de conjuntos tais que $V_0 \subseteq V_1$. Dizemos que V_1 tem a propriedade de Sacks sobre V_0 se, e somente se, todo real $r : \omega \to \omega$ em V_1 é coberto por um 2^n-cone $C : \omega \to [\omega]^{<\aleph_0}$ em V_0 (aqui 2^n é uma abreviação para a função $n \mapsto 2^n$). Um forcing $\mathbb{P}$ possui a propriedade de Sacks se, e somente se, para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre o modelo base V, $V[G]$ tem a propriedade de Sacks sobre V.

Definição 2.12. Uma subárvore T de $\omega^{<\omega}$ é binária se, e somente se, todo $t \in T$ tem no máximo 2 sucessores imediatos em T. Um real $r : \omega \to \omega$ é coberto por T se, e somente se, $r \in [T]$.

Sejam V_0 e V_1 como antes. Então V_1 tem a propriedade de 2-localização sobre V_0 se, e somente se, todo real $r \in \omega^\omega$ em V_1 é coberto por uma árvore binária em V_0. Uma noção de forcing $\mathbb{P}$ possui a propriedade de 2-localização se, e somente se, para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre o modelo base V, $V[G]$ tem a propriedade de 2-localização sobre V.

É claro que vale a seguinte

Proposição 2.13. *A propriedade de Sacks segue da propriedade de 2-localização.*

E o nome da proriedade não é em vão:

Lema 2.14. *O forcing de Sacks tem a propriedade de 2-localização. Em particular, tem a propriedade de Sacks.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{PS}$ e suponha que $\dot{z}$ é um $\mathbb{PS}$-nome tal que $p \Vdash \dot{z} \in \check{\omega}^{\check{\omega}}$. É suficiente encontrar uma árvore binária T e $q \leq p$ tal que q força $\dot{z}$ ser um ramo através de T. A condição q será a fusão de uma sequência fusão $(p_n)_{n\in\omega}$. Então definimos T como sendo

$$T_q(\dot{z}) = \{s \in \omega^{<\omega} : \exists q' \leq q\,(q' \Vdash \check{s} \subseteq \dot{z})\}$$

a árvore de q-possibilidades para $\dot{z}$. Note que q força $\dot{z}$ ser um ramo de $T_q(\dot{z})$. Ao escolher a sequência $(p_n)_{n\in\omega}$ devemos garantir que T é binária.

O conjunto

$$\{q \in \mathbb{PS} : q \text{ decide todo } \dot{z}\} \cup \{q \in \mathbb{PS} : \forall r \leq q\,(r \text{ não decide todo } \dot{z})\}$$

é denso em $\mathbb{PS}$. Se existe algum $q \leq p$ que decide todo $\dot{z}$ acabamos já que nesse caso $T_q(\dot{z})$ não possui elementos incompatíveis. Então podemos assumir que nenhuma condição abaixo de p decide todo $\dot{z}$.

Para toda condição $q \leq p$ seja $\dot{z}_q$ o maior segmento inicial de $\dot{z}$ que é decidido por q. Em particular, $q \Vdash (\dot{z}_q)\check{} \subseteq \dot{z}$. Como nenhuma condição abaixo de p decide todo $\dot{z}$, $\dot{z}_q \in \omega^{<\omega}$. Seja $p_0 = p$. Seja $n \in \omega$ e suponha que já escolhemos p_n. Para $\sigma \in 2^n$ considere as condições $p_n * (\sigma^\frown 0)$ e $p_n * (\sigma^\frown 1)$ onde $s^\frown i$ denota a concatenação de s com a sequência de tamanho 1 que tem valor i. Como $p_n * (\sigma^\frown 0)$ e $p_n * (\sigma^\frown 1)$ não decidem todo $\dot{z}$, existem $q_{\sigma^\frown 0} \leq p_n * (\sigma^\frown 0)$ e $q_{\sigma^\frown 1} \leq p_n * (\sigma^\frown 1)$ tais que $\dot{z}_{q_{\sigma^\frown 0}}$ e $\dot{z}_{q_{\sigma^\frown 1}}$ são incompatíveis com respeito a $\subseteq$. Faça

$$p_{n+1} = \bigcup_{\substack{i\in 2\\ \sigma\in 2^n}} q_{\sigma^\frown i} \leq_n p_n.$$

Seja $q = \bigcap_{n\in\omega} p_n$. É facilmente verificado por indução em n que para todo $n \in \omega$ a árvore finita T_n que é gerada por (isto é, consiste de todos os segmentos iniciais de) $\{\dot{z}_{q*\sigma} : \sigma \in 2^n\}$ tem as seguintes propriedades:

1. T_n é uma árvore binária finita de altura pelo menos n;

2. $T_n \subseteq T = T_q(\dot{z})$;

3. se $t \in T$ é de comprimento $\leq n$, então $t \in T_n$.

Segue que $T = \bigcap_{n\in\omega} T_n$ e que T é binária. $\square$

Como vimos, o forcing de Sacks preserva $\aleph_1$, mas não temos garantia de que preserva todos os outros cardinais, ou pelo menos alguns deles. Isso será visto na seguinte subseção.

Aqui enunciamos mais alguns resultados de [18], mas omitimos suas demonstrações, pois os utilizaremos apenas a título de exposição.

Lema 2.15. *Sejam V_0 e V_1 modelos de teoria de conjuntos tais que $V_0 \subseteq V_1$ e V_0 e V_1 possuem os mesmos ordinais. Suponha que V_1 tem a propriedade de Sacks sobre V_0. Então:*

a) para todo conjunto de medida nula $A \subseteq \mathbb{R}$ em V_1 existe um conjunto de Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ em V_0 de medida nula tal que $A \subseteq B$ em V_1 e

b) para todo conjunto raro $A \subseteq 2^\omega$ em V_1 existe um conjunto de Borel raro $B \subseteq 2^\omega$ em V_0 tal que $A \subseteq B$ vale em V_1.

Corolário 2.16. *Sejam V_0 e V_1 modelos de teoria de conjuntos tais que $V_0 \subseteq V_1$, V_0 e V_1 tem os mesmos ordinais, e V_1 tem a propriedade de Sacks sobre V_0. Então em V_1 a cofinalidade de $\mathcal{N}$ (o ideal dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida nula, ordenado por $\subseteq$) é no máximo $|(2^{\aleph_0})^{V_0}|$ onde $(2^{\aleph_0})^{V_0}$ denota o ordinal que é o tamanho de 2^ω em V_0. Em particular, se V_0 satisfaz CH, então a cofinalidade de $\mathcal{N}$ é $\aleph_1$ em V_1.*

Isso nor permitirá concluir, mais adiante, que começando com um modelo de CH e forçando com o produto do forcing de Sacks diversos cardinais pequenos são $\aleph_1$ no modelo forçado.

2.2 Produto do forcing de Sacks e suas propriedades

Nessa subseção faremos um caminho parecido com a da subseção anterior, mas desta vez analisando o produto do forcing de Sacks, seguindo [3]. O primeiro problema está em produzir um modelo com $2^{\aleph_0}$ arbitrariamente grande.

Se desejamos adjuntar vários reais de Sacks, existem pelo menos duas formas de proceder. Uma é adjuntar os reais de Sacks um depois do outro, por forcing iterado com $\mathbb{PS}$. Outra maneira é adjuntar os reais de Sacks lado-a-lado, isto é, adicioná-los todos simultaneamente da seguinta maneira:

Definição 2.17. Se κ é um cardinal, seja $\mathbb{PS}(\kappa)$ o conjunto de todas as funções p tais que $\mathrm{dom}(p)$ é um subconjunto enumerável (ou finito) de κ e $\forall\alpha \in \mathrm{dom}(p)\ p(\alpha) \in \mathbb{PS}$. Seja $p \leq q$ se, e somente se, $\mathrm{dom}(q) \subseteq \mathrm{dom}(p)$ e $\forall\alpha \in \mathrm{dom}(q)\ p(\alpha) \subseteq q(\alpha)$.

É claro que forçar com $\mathbb{PS}(\kappa)$ irá adicionar um real de Sacks para cada $\alpha \in \kappa$.

Essa abordagem lado-a-lado é mais simples que a iterada, e tem uma vantagem adicional, como veremos, que o continuum pode ser feito arbitrariamente grande. Sua principal desvantagem é que cada real de Sacks é genérico apenas sob V, não sob algum segmento inicial da extensão final.

Como o caso do forcing de Sacks, a noção de forcing definida acima não é ccc, mas veremos que em condições ideais (por exemplo, supondo CH) possui boas propriedades. Começamos pelo

Lema 2.18. $\mathbb{PS}(\kappa)$ *tem a* $(2^{\aleph_0})^+$*-cc.*

Demonstração. Suponha $\langle p_\alpha : \alpha < (2^{\aleph_0})^+\rangle$ uma sequência de $\mathbb{PS}(\kappa)$. Por um argumento padrão, podemos assumir que $\{\mathrm{dom}(p_\alpha) : \alpha < (2^{\aleph_0})^+\}$ forma um Δ-sistema com kernel Δ. Se $\alpha < (2^{\aleph_0})^+$, então $p_\alpha|\Delta$ mapeia Δ em $\mathbb{PS}$. Como $|\mathbb{PS}| = 2^{\aleph_0}$ e $|\Delta| \leq \aleph_0$, existem apenas $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ possíveis valores para $p_\alpha|\Delta$. Daí $\exists \alpha, \beta < (2^{\aleph_0})^+$, $\alpha \neq \beta$ e $p_\alpha|\Delta = p_\beta|\Delta$. Mas então $p_\alpha \cup p_\beta \in \mathbb{PS}(\kappa)$ e $p_\alpha \cup p_\beta \leq p_\alpha, p_\beta$. □

Corolário 2.19. *Se vale CH, então* $\mathbb{PS}(\kappa)$ *tem a* $\aleph_2$*-cc e então preserva todos cardinais e cofinalidades* $\geq \aleph_2$.

A seguir temos que nos preocupar em preservar $\aleph_1$. Como feito antes, mostraremos que $\mathbb{PS}(\kappa)$ satisfaz o Axioma A; a construção é análoga, embora com uma notação mais pesada. Antes disso, retomaremos o forcing $\mathbb{PS}$ e mostraremos que satisfaz uma versão um pouco mais geral do Axioma A.

Seja $p \in \mathbb{PS}$ e $s \in p$. O nível de bifurcamento de s em p é a cardinalidade de

$$\{i < \mathrm{length}(s) : \exists t \in p \ \mathrm{length}(t) > i, t|i = s|i \text{ e } t|(i+1) \neq s|(i+1)\}.$$

Intuitivamente, o nível de bifurcamento de s é o número de vezes que ocorre bifurcamento abaixo de s na árvore p. O n-ésimo nível de bifurcamento de p, $l(n,p)$ é definido como o conjunto de todos $s \in p$ que tem nível de bifurcamento n e são minimais com essa propriedade, isto é, se $t \subseteq s$ tem nível de bifurcamento n também, então $t = s$. Note que $|l(n,p)| = 2^n$.

Para $p, q \in \mathbb{PS}$, seja $p \leq q$ (mod n) se, e somente se, $p \leq q$ e $l(n,p) = l(n,q)$.

Temos que essa família testemunha que $\mathbb{PS}$ satisfaz o Axioma A, como visto no

Lema 2.20. *Suponha* $\langle p_n : n \in \omega\rangle$ *e* $\langle m_n : n \in \omega\rangle$ *sequências tais que* $p_n \in \mathbb{PS}$*, os* m_n *são não-decrecentes,* $\lim_{n\to\infty}(m_n) = \infty$ *e* $p_{n+1} \leq p_n$ *(mod* m_n*) para todo* n*. Então* $q = \bigcap\{p_n : n \in \omega\} \in \mathbb{PS}$ *e* $q \leq p_n$ *(mod* m_n*) para todo* n*.*

Demonstração. É claro que q satisfaz a condição (1) na definição de $\mathbb{PS}$ já que cada p_n satisfaz. Note que $0 \in \bigcap\{p_n : n \in \omega\} = q$, então $q \neq \emptyset$. Suponha $s \in q$. Escolha n tão grande que $m_n > \mathrm{length}(s)$. Agora $s \in q \subseteq p_n$, então existem pelo menos dois elementos distintos $t_0, t_1 \in l(m_n, p_n)$ com $s \subseteq t_0, t_1$. Mas é claro por indução que para todo $m \geq n$ $l(m_n, p_n) \subseteq p_m$, então $t_0, t_1 \in q$ e (2) é satisfeito. Daí $q \in \mathbb{PS}$. É um exercício fácil verificar que $q \leq p_n$ (mod m_n) para todo n. □

Se $p \in \mathbb{PS}$ e $s \in p$, seja $p|s = \{t \in p : t \subseteq s$ ou $s \subseteq t\}$. Então $p|s \in \mathbb{PS}$. Com isso podemos enunciar o seguinte

Lema 2.21. *Se $p \in \mathbb{PS}$ e $n \in \omega$, então $p = \bigcup p|s : s \in l(n,p)$. Se $q \leq p$, então $\exists \sigma \in l(n,p)$ tal que q e $p|\sigma$ são compatíveis.*

Agora extendemos essa terminologia para $\mathbb{PS}(\kappa)$. Se $p \in \mathbb{PS}(\kappa)$, $F \subseteq \mathrm{dom}(p)$ é finito, e σ é uma função com domínio F tal que $\sigma(\alpha) \in p(\alpha)$ para todo $\alpha \in F$, então seja $p|\sigma$ a condição q tal que $q(\alpha) = p(\alpha)$ para $\alpha \in \mathrm{dom}(p) \setminus F$ e $q(\alpha) = p(\alpha)|\sigma(\alpha)$ para $\alpha \in F$. Se $n \in \omega$ e $F \subseteq \mathrm{dom}(p)$ é finito, seja

$$l(F,n,p) = \{\sigma : \mathrm{dom}(\sigma) = F \text{ e } \sigma(\alpha) \in l(n, p(\alpha)) \text{ para todo } \alpha \in F\}.$$

Seja $p \leq q$ (mod F,n) se, e somente se, $p \leq q$ e $l(F,n,p) = l(F,n,q)$. Note que $p \leq q$ (mod F,n) se, e somente se, $p \leq q$ e $\forall \alpha \in F\ p(\alpha) \leq q(\alpha)$ (mod n).

Lema 2.22. *Suponha $\langle p_n : n \in \omega\rangle$ e $\langle (F_n, m_n) : n \in \omega\rangle$ sequências tais que $p_n \in \mathbb{PS}(\kappa)$, $F_n \subseteq F_{n+1}$, $m_{n+1} \geq m_n$, $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$ e $p_{n+1} \leq p_n$ (mod F_n, m_n) para todo n. Suponha também que $\bigcup\{F_n : n \in \omega\} = \bigcup\{dom(p_n) : n \in \omega\}$. Defina q tal que $dom(q) = \bigcup\{dom(p_n) : n \in \omega\}$ e $\forall \alpha \in dom(q)$, $q(\alpha) = \bigcap\{p_n(\alpha) : \alpha \in dom(p_n)\}$. Então $q \in \mathbb{PS}(\kappa)$ e $\forall n\ q \leq p_n$ (mod F_n, m_n).*

Demonstração. Fixe $\alpha \in \mathrm{dom}(q)$. Então para algum k, $\alpha \in F_k$. Mas agora temos $p_{n+1}(\alpha) \leq p_n(\alpha)$ (mod m_n) para todo $n \geq k$ então $q(\alpha) \leq p_n(\alpha)$ (mod m_n) pelo Lema 2.20. O resto é trivial. □

No geral, se $\langle p_n : n \in \omega\rangle$ e $\langle (F_n, m_n) : n \in \omega\rangle$ são como no Lema 2.22, então nos referimos a $\langle p_n : n \in \omega\rangle$ como sequência fusão, e chamamos q a fusão da sequência; nós denotamos q por $\bigwedge\{p_n : n \in \omega\}$.

Pelo Lema 2.7 segue que $\mathbb{PS}(\kappa)$ não colapsa $\aleph_1$. Apesar disso, começaremos uma série de lemas técnicos (devidos a [3]) que irão nos auxiliar a calcular o valor de $2^{\aleph_0}$ no modelo forçado por $\mathbb{PS}(\kappa)$ e a mostrar que $\mathbb{PS}(\kappa)$ preserva $\aleph_1$ diretamente, como modo de entendermos melhor a estrutura do forcing.

Lema 2.23. *Suponha $\sigma \in l(F,n,p)$ e $q \leq p|\sigma$. Então existe $p' \in \mathbb{PS}(\kappa)$ tal que $p' \leq p$ (mod F,n) e $p'|\sigma = q$.*

Demonstração. Defina p' como segue. Seja $\mathrm{dom}(p') = \mathrm{dom}(q)$. Se $\alpha \notin F$, seja $p'(\alpha) = q(\alpha)$. Se $\alpha \in F$, seja

$$p'(\alpha) = \bigcup\{p(\alpha)|s : s \in l(n, p(\alpha)), s \neq \sigma(\alpha)\} \cup q(\alpha).$$

É fácil ver que p' funciona. □

Lema 2.24. *Suponha $p \in \mathbb{PS}(\kappa)$, $F \subseteq dom(p)$ é finito, $n \in \omega$ e D é fortemente denso em $\mathbb{PS}(\kappa)$. Então existe $q \in \mathbb{PS}(\kappa)$ tal que $q \leq p$ (mod F,n) e $\forall \sigma \in l(F,n,p)\ q|\sigma \in D$.*

Demonstração. Seja $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ uma enumeração de $l(F,n,p)$. Primeiro encontre $q_0 < p|\sigma_0$ tal que $q_0 \in D$ e use o Lema 2.23 para encontrar $p_0 \leq p$ (mod F,n) tal que $p_0|\sigma_0 = q_0$. Agora encontre $q_1 \leq p_0|\sigma_1$ tal que $q_1 \in D$, e repita. Finalmente, $q = q_k$ irá satisfazer o lema. □

Lema 2.25. *Suponha $p \in \mathbb{PS}(\kappa)$, $F \subseteq dom(p)$ é finito e $n \in \omega$. Se $q \leq p$, então $\exists \sigma \in l(F,n,p)$ tal que q e $p|\sigma$ são compatíveis.*

Demonstração. Fixe $\alpha \in F$. Então $q(\alpha) \leq p(\alpha)$ assim pelo Lema 2.21 podemos escolher $\sigma(\alpha)$ tal que $q(\alpha)$ e $p(\alpha)|\sigma(\alpha)$ são compatíveis. Agora q e $p|\sigma$ são compatíveis. □

Corolário 2.26. *Suponha $p \in \mathbb{PS}(\kappa)$, $F \subseteq dom(p)$ é finito e $n \in \omega$. Se $p \Vdash \tau \in V$, então existe $q \leq p$ (mod F,n) tal que $\forall \sigma \in l(F,n,p)$ $\exists a_\sigma \in V$ $q|\sigma \Vdash \tau = a_\sigma$. Daí $q \Vdash \tau \in \{a_\sigma : \sigma \in l(F,n,p)\}$.*

Demonstração. Seja $D = \{q \leq p : \exists a \in V q \Vdash \tau = a\}$. Então D é fortemente denso abaixo de p, assim, pelo Lema 2.24, podemos encontrar q satisfazendo nossa primeira afirmação. Mas agora a segunda afirmação segue imediatamente de Lema 2.25. □

Se q está relacionado a τ como no Corolário 2.26, então nós dizemos que q determina τ relativamente a (F,n). Nós dizemos simplesmente que q determina τ se existem F,n tais que q determina τ relativamente a (F,n). Se $q \Vdash \tau : \omega \to V$, então dizemos que q determina τ se q determina $\tau(n)$ para todo $n \in \omega$.

Teorema 2.27. *Se $p \in \mathbb{PS}(\kappa)$ e $p \Vdash \tau : \omega \to V$, então $\exists q \leq p$ tal que q determina τ. Assim forçar com $\mathbb{PS}(\kappa)$ não colapsa ω_1, e se CH vale então forçar com $\mathbb{PS}(\kappa)$ preserva todas as cardinalidades e cofinalidades.*

Demonstração. Seja $p = q_0$, Por indução em n, escolha F_n e m_n, e aplique o Corolário 2.26 para encontrar $q_{n+1} \leq q_n$ (mod F_n, m_n), tal que q_{n+1} determina $\tau(n)$ ralativamente a F_n, m_n. Como a escolha de F_n e m_n é arbitrária, podemos escolher de modo que $\langle q_n : n \in \omega \rangle$ é uma sequência fusão. Seja $q = \bigwedge\{q_n : n \in \omega\}$.

Agora suponha que temos $p \Vdash \tau : \omega \to \omega_1^V$. Então se $q \leq p$ determina τ existe para cada n um conjunto finito $x_n \in V$ tal que, pelo Corolário 2.26, $q \Vdash \tau(n) \in x_n$. Mas então

$$q \Vdash \mathrm{Im}(\tau) \subseteq \bigcup\{x_n : n \in \omega\},$$

e $\bigcup\{x_n : n \in \omega\}$ é um conjunto enumerável em V, assim

$$q \Vdash \mathrm{Im}(\tau) \text{ é limitada em } \omega_1^V.$$

Portanto, ω_1 é preservado sob o forcing com $\mathbb{PS}(\kappa)$. O Corolário 2.19 agora completa a demonstração do teorema. □

Observação. Alguma afirmação como CH é necessária no Teorema 2.27. De fato, mesmo forcing com $\mathbb{PS}$ pode colapsar cardinais se CH não é verdadeira. Mais precisamente ([4]), a afirmação que forçar com $\mathbb{PS}$ colapsa cardinais é consistente com, e independente de, ZFC+$\neg$CH.

Nós concluimos com o cálculo de $2^{\aleph_0}$ no modelo obtido ao forçar com $\mathbb{PS}(\kappa)$.

Seja J a classe de pares (q,τ) tal que $q \Vdash \tau : \omega \to V$ e q determina τ. Nós dizemos que $(q_1,\tau_1),(q_2,\tau_2) \in J$ são equivalentes se $q_1 = q_2$ e $q_1 \Vdash \tau_1 = \tau_2$. Note que se $(q,\tau) \in J$ então existem sequências associadas $\langle (F_n,m_n) : n \in \omega\rangle$ e $\langle a_\sigma : \sigma \in \bigcup\{l(F_n,m_n,q) : n \in \omega\}\rangle$ em V tais que $\forall n\, \forall \sigma \in l(F_n,m_n,q)$, $q|\sigma \Vdash \tau(n) = a_\sigma$.

Lema 2.28. *Se (q,τ_1) e (q,τ_2) tem as mesmas sequências associadas, então $q \Vdash \tau_1 = \tau_2$, isto é, (q,τ_1) e (q,τ_2) são equivalentes.*

Demonstração. Para cada n e cada $\sigma \in l(F_n,m_n,q)$, nós temos $q|\sigma \Vdash \tau_1(n) = a_\sigma = \tau_2(n)$, assim $q|\sigma \Vdash \tau_1(n) = \tau_2(n)$. Agora segue do Lema 2.25 que $q \Vdash \tau_1(n) = \tau_2(n)$, e assim $q \Vdash \forall n\, \tau_1(n) = \tau_2(n)$, então $q \Vdash \tau_1 = \tau_2$. □

Lema 2.29. *Seja $J(\lambda)$ o conjunto de todos $(q,\tau) \in J$ tais que $q \Vdash \tau : \omega \to \lambda$. Então o número de classes de equivalência de pares em $J(\lambda)$ é no máximo $(\kappa \cdot \lambda)^{\aleph_0}$.*

Demonstração. Primeiro note que $|\mathbb{PS}(\kappa)| = \kappa^{\aleph_0}$. Fixe $q \in \mathbb{PS}(\kappa)$. Para contar todas as classes de equivalência da forma (q,τ), será suficiente pelo Lema 2.28 contar todas as sequências associadas. Claramente, o número de possíveis sequências $\langle (F_n,m_n) : n \in \omega\rangle$ é $\kappa^{\aleph_0}$, e para uma tal sequência fixada, o número de sequências $\langle a_\sigma : \sigma \in \bigcup\{l(F_n,m_n,q) : n \in \omega\}\rangle$ com $a_\sigma \in \lambda$ é $\lambda^{\aleph_0}$. Daí o número de classes de equivalência é no máximo $\kappa^{\aleph_0} \cdot \kappa^{\aleph_0} \cdot \lambda^{\aleph_0} = (\kappa \cdot \lambda)^{\aleph_0}$. □

Teorema 2.30. *Assuma CH, e seja $\kappa \geq \aleph_0$. Se G é $\mathbb{PS}(\kappa)$-genérico sob V, então*

$$V[G] \models 2^{\aleph_0} = (\kappa^{\aleph_0})^V.$$

Demonstração. Nós trabalhamos em $V[G]$. Se $f \in {}^{\omega}2$, então existe um termo τ e um elemento $p \in G$ tal que $\tau^{V[G]} = f$ e $p \Vdash \tau : \omega \to 2$. Pelo Teorema 2.27, o conjunto de todos $q \leq p$ com $(q,\tau) \in J$ é denso abaixo de p, então existe tal $q \in G$. Nós associamos o par (q,τ) com f. É claro que se f e g não são iguais não podem ter pares equivalentes associados a eles. Mas pelo Lema 2.29, o número de classes de equivalência de pares em $J(2)$ é $(\kappa^{\aleph_0})^V$. Assim, $2^{\aleph_0} \leq (\kappa^{\aleph_0})^V$.

É claro por genericidade que $2^{\aleph_0} \geq \kappa$. Assim, $2^{\aleph_0} \geq \kappa^{\aleph_0} \geq (\kappa^{\aleph_0})^V$ e a prova está completa. □

Mostraremos agora, seguindo [18], que $\mathbb{PS}(\kappa)$ possui a propriedade de Sacks.

Lema 2.31. *Produto de suporte enumerável de cópias do forcing de Sacks tem a propriedade de 2-localização. Em particular, tem a propriedade de Sacks e não colapsam $\aleph_1$.*

A demonstração desse lema é parecida com a demonstração do Lema 2.14. Mas temos que lidar com κ-sequências de suporte enumerável de condições em $\mathbb{PS}$ dessa vez. Para isso precisamos de muita notação. Fixe um cardinal κ, para mostrar que $\mathbb{PS}(\kappa)$ tem a propriedade de 2-localização devemos extender as noções de "fusão"e "sequência fusão"para $\mathbb{PS}(\kappa)$. Para isso é mais conveniente passar de nossa definição original de sequência fusão para uma mais flexível.

Agora uma sequência $(p_n)_{n\in\omega}$ em $\mathbb{PS}$ é uma sequência fusão se, e somente se, existe uma função ilimitada não-decrescente $f:\omega\to\omega$ tal que para todo $n\in\omega$, $p_{n+1}\leq p_n \pmod{f(n)}$. É fácil ver que uma sequência $(p_n)_{n\in\omega}$ que é uma sequência fusão na nova definição tem uma subsequência que é uma sequência fusão na definição velha. Se $(p_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência fusão na nova definição, sua fusão $\bigcap_{n\in\omega} p_n$ é uma condição em $\mathbb{PS}$, como antes.

Definição 2.32. Para um conjunto finito $F\subseteq\kappa$ e $\eta:F\to\omega$ a relação $\leq \pmod{F,\eta}$ em $\mathbb{PS}(\kappa)$ é definida por: para todo $p,q\in\mathbb{PS}(\kappa)$ seja $p\leq q \pmod{F,\eta}$ se $p\leq q$ e para todo $\alpha\in F$, $p(\alpha)\leq q(\alpha)$ $\pmod{\eta(\alpha)}$. Para p, F como antes e $\sigma\in\prod_{\alpha\in F}2^{\eta(\alpha)}$ seja $p*\sigma$ tal que para todo $\alpha\in F$, $p*\sigma(\alpha)=p(\alpha)*\sigma(\alpha)$ e para todo $\alpha\in\kappa\setminus F$, $(p*\sigma)(\alpha)=p(\alpha)$.

Uma sequência $(p_n)_{n\in\omega}$ de condições em $\mathbb{PS}(\kappa)$ é uma sequência fusão se existe uma sequência crescente $(F_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos finitos de κ e uma sequência $(\eta_n)_{n\in\omega}$ tal que para todo $n\in\omega$, $\eta_n:F_n\to\omega$, para todo $i\in F_n$ temos $\eta_n(i)\leq\eta_{n+1}(i)$, $p_{n+1}\leq p_n \pmod{F_n,\eta_n}$, e para todo $\alpha\in\operatorname{supt}(p_n)$ existe $m\in\omega$ tal que $\alpha\in F_m$ e $\eta_m(\alpha)\geq n$. Se $(p_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência fusão em $\mathbb{PS}(\kappa)$, então para cada $\alpha\in\kappa$, $(p_n(\alpha))_{n\in\omega}$ é uma sequência fusão em $\mathbb{PS}$ ou constante com valor $1_{\mathbb{PS}}$. Isso mostra que

$$p_\omega=\left(\bigcap_{n\in\omega} p_n(\alpha)\right)_{\alpha\in\kappa}$$

é uma condição em $\mathbb{PS}(\kappa)$, a fusão da sequência $(p_n)_{n\in\omega}$.

Para a demonstração do Lema 2.31 é suficiente mostrar o

Lema 2.33. *Para todo $p\in\mathbb{P}$ e todo nome $\dot z$ para um elemento de ω^ω existe uma condição $q\leq p$ e uma árvore binária $T\in\omega^{<\omega}$ tais que q força $\dot z$ ser um ramo de T.*

Demonstração. Sejam p e $\dot z$ como acima. Nosso objetivo é construir $q\leq p$ tal que

$$T_q(\dot z)=\{s\in\omega^{<\omega}:\exists r\leq q\,(r\Vdash\check s\subseteq\dot z)\}$$

é binária. Podemos assumir que nenhuma condição abaixo de p decide $\dot z$.

Seja F um subconjunto finito de κ e $\eta:F\to\omega$ uma função. Uma condição $r\in\mathbb{P}$ é (F,η)-fiel se, e somente se, para todo $\sigma,\tau\in\prod_{\alpha\in F}2^{\eta(\alpha)}$ e todo $r'\leq r \pmod{F,\eta}$ o seguinte vale: se $\dot z_{r'*\sigma}$ e $\dot z_{r'*\tau}$ são elementos incompatíveis de $\omega^{<\omega}$ (com respeito a $\subseteq$), então $\dot z_{r*\sigma}$ e $r*\tau$ já eram incomparáveis.

Proposição 2.34. *Suponha que $r\in\mathbb{P}$ é (F,η)-fiel.*

a) Seja $j\in\kappa\setminus F$ e defina $F'=F\cup\{j\}$ e $\eta'=\eta\cup\{(j,0)\}$. Então r é (F',η')-fiel.

b) Seja $\beta \in F$ e seja η' tal que para todo $\alpha \in F \setminus \{\beta\}$, $\eta'(\alpha) = \eta(\alpha)$ e $\eta'(\beta) = \eta(\beta)+1$. Então existe uma condição $r' \leq r$ (mod F, η) tal que r' é (F, η')-fiel.

A parte $a)$ dessa afirmação segue direto das definições. Para a prova de $b)$ fixe uma enumeração $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ de $\prod_{i \in F} 2^{\eta(i)}$. Definimos uma sequência $\leq$ (mod F, η)-decrescente $(r_k)_{k \leq m}$ abaixo de r. Para $k \in \{1, \dots, m\}$ e $l \in 2$ seja σ_k^l tal que para todo $\alpha \in F \setminus \{\beta\}$, $\sigma_k^l(\alpha) = \sigma_k(\alpha)$ e $\sigma_k^l(\beta) = \sigma_k(\beta)^\frown l$. Seja $r_0 = r$. Suponha que construimos r_k para algum $k < m$ e queremos construir r_{k+1}. Seja $r_{k+1} \leq r_k$ (mod F, η') tal que $\dot{z}_{r_{k+1} * \sigma_{k+1}^0}$ e $\dot{z}_{r_{k+1} * \sigma_{k+1}^1}$ são incompatíveis se tal condição existir. Caso contráro, seja $r_{k+1} = r_k$. Por fim, seja $r' = r_m$. Segue da construção que r' é (F, η')-fiel. Isso mostra a parte $b)$ da afirmação.

Usando $a)$ e $b)$ da Proposição 2.34, construimos uma sequência $(p_m, F_m, \eta_m, j_m)_{m \in \omega}$ tal que

1. $(p_m)_{m \in \omega}$ é uma sequência fusão em $\mathbb{P}$ testemunhada por $(F_m, \eta_m)_{m \in \omega}$, onde $F_0 = \eta_0 = \emptyset$;

2. para todo $m \in \omega$, p_m é (F_m, η_m)-fiel e $p_m \leq p$;

3. para todo $m \in \omega$ e $i \in F_m$, $\eta_{m+1}(i) \leq \eta_m(i)$;

4. para todo $m \in \omega$, j_m é o único elemento de F_{m+1} tal que ou $j_m \in F_m$ e $\eta_{m+1}(j_m) = \eta_m(j_m) + 1$ ou $j_m \notin F_m$ e $\eta_{m+1}(j_m) = 1$;

5. para todo $m \in \omega$ e todo $\sigma \in \prod_{i \in F_m} 2^{\eta_m(i)}$, $p_m * \sigma$ decide pelo menos $\dot{z}|_m$.

Seja q a fusão de p_m, $m \in \omega$, e seja $T = T_q(\dot{z})$. Note que para todo $m \in \omega$, $q \leq p_m$ (mod F_m, η_m). Para cada $m \in \omega$ seja T_{m+1} a árvore gerada por

$$\left\{ \dot{z}_{p_m * \sigma} : \sigma \in \prod_{i \in F_m} 2^{\eta_m(i)} \right\}$$

e seja T_0 a "árvore"gerada por $\dot{z}_{p_0}$.

Agora cada T_m é uma subárvore de T. Mostremos que $T = \cup_{m \in \omega} T_m$.

Seja $t \in T$ e $m = \mathrm{dom}(t)$. Seja $r \leq q$ uma condição que força que t é um segmento inicial de $\dot{z}$. O conjunto $\left\{ q * \sigma : \sigma \in \prod_{i \in F_m} 2^{\eta_m(i)} \right\}$ é uma anticadeia maximal abaixo de q. Segue que existe $\sigma \in \prod_{i \in F_m} 2^{\eta_m(i)}$ tal que r é compatível com $q * \sigma$. Seja $\tau \in \prod_{i \in F_m} 2^{\eta_m(i)}$ tal que $t \subseteq \dot{z}_{p_m * \tau}$. Claramente, $\sigma \neq \tau$. Seja $m' \leq m$ minimal tal que

$$\sigma' = (\sigma(\alpha)|_{\eta_{m'}(\alpha)})_{\alpha \in F_{m'}}$$

e

$$\tau' = (\tau(\alpha)|_{\eta_{m'}(\alpha)})_{\alpha \in F_{m'}}$$

são diferentes. Agora $s' = \dot{z}_{p_{m'} * \sigma'}$ e $\dot{z}_{p_{m'} * \tau'}$ são incomparáveis pela $(F_{m'}, \eta_{m'})$-fidelidade de $p_{m'}$. Claramente, $s' \in T_m$ e s' e t são incomparáveis.

Agora suponha que T não é binária. Então existe $t \in T$ tal que t tem três sucessores imediatos t_0, t_1 e t_2 em T. Seja $m \in \omega$ minimal tal que T_m contém pelo menos dois t_j, $j < 3$. Pelo que acabamos de provar, T_m contém todas os t_j. Para todo $j < 3$ seja $\sigma_j \in \prod_{i \in F_m} 2^{\eta_m(i)}$ tal que $t_j \subseteq \dot{z}_{p_m * \sigma_j}$. Para todo $n \leq m$ e todo $j < 3$ seja $\sigma_j^n = (\sigma_j(\alpha)|_{\eta_n(\alpha)})_{\alpha \in F_m}$. Agora seja $n \leq m$ minimal tal que o conjunto $\{\sigma_j^n : j < 3\}$ tem pelo menos dois elementos. Então $\{\sigma_j^n : j < 3\}$ tem exatamente 2 elementos e $n < m$ pela construção de F_n e η_n. Sem perda de generalidade podemos assumir que σ_0^n e σ_1^n são diferentes. Como m é minimal e T_m contém pelo menos dois dos t_j e como $n < m$, $\dot{z}_{p_n * \sigma_0^n}$ e $\dot{z}_{p_n * \sigma_1^n}$ são compatíveis. Contudo, isso contradiz a (F_n, η_n)-fidelidade de p_n. $\square$

Feito isso, devemos agora nos preocupar com a preservação de p-pontos ao forçar com $\mathbb{PS}(\kappa)$, que será resolvido nas próximas subseções.

2.3 Forcing próprio

Forcings que satisfazem o Axioma A ou a propriedade ccc fazem parte de uma família maior de forcings, denominada de forcing próprio. Esse tipo de forcing satisfaz algumas boas propriedades, mas utilizaremos apenas algumas poucas delas em nosso estudo, em especial a possibilidade de preservar p-pontos. Para um estudo mais profundo desse tipo de noção de forcing o leitor pode consultar [11] e [13]. Aqui nessa subseção nosso objetivo é apenas mostrar que todo forcing que satisfaz o Axioma A é próprio.

Em ([20], Seção 3) é feita uma equivalência entre a definição usual de forcing próprio e um jogo, como segue

Definição 2.35. Seja $\mathbb{P}$ uma noção de forcing, e seja $p \in \mathbb{P}$. O proper game (para $\mathbb{P}$, abaixo de p) é um jogo definido como segue:

- O Jogador I joga um $\mathbb{P}$-nome $\dot{\alpha}_n$ para um ordinal (abaixo de p, isto é, $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\alpha}_n \in \text{Ord}$).
- O Jogador II responde com um conjunto enumerável de ordinais $B_n \subseteq Ord$.

Após esses ω movimentos, o Jogador II ganha esse jogo se existe uma condição mais forte $q \leq p$ tal que

$$q \Vdash_{\mathbb{P}} \forall n \in \omega\ \exists k \in \omega : \dot{\alpha}_n \in B_k.$$

Definição 2.36. Uma noção de forcing $\mathbb{P}$ é chamada própria se para todo $p \in \mathbb{P}$, o Jogador II possui estratégia vencedora no proper game (abaixo de p).

Como o forcing de Sacks satisfaz o Axioma A, para mostrar que é próprio basta verificar que todo forcing que satisfaz o Axioma A é próprio.

A demonstração, em [20], de que noções de forcing ccc e σ-fechadas são próprias pode nos ajudar a entender o caso para forcing com Axioma A. Para isso enunciamos a

Proposição 2.37. *Seja $\mathbb{P}$ uma noção de forcing σ-fechada. Então $\mathbb{P}$ é próprio.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{P}$. Note que para cada $p' \leq p$ e cada nome de ordinal $\dot{\alpha}$ abaixo de p, existe uma condição $q \leq p'$ "decidindo"$\dot{\alpha}$, isto é, existe $\beta \in \text{Ord}$ tal que $q \Vdash \dot{\alpha} = \beta$.

O Jogador II possui a seguinte estratégia vencedora para o jogo próprio: enquanto o Jogador I joga nomes de ordinais $\dot{\alpha}_n$ abaixo de p, o Jogador II irá construir uma sequência decrescente $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ de condições ($p \geq p_0 \geq p_1 \geq \ldots$) junto com uma sequência de ordinais $\langle \beta_n : n \in \omega \rangle$ tal que para cada $n \in \omega$, $p_n \Vdash \alpha_n = \beta_n$ (respondendo com o unitário $B_n = \{\beta_n\}$ em cada rodada).

Como $\mathbb{P}$ é σ-fechado, a sequência de condições acima possui um limitante inferior, isto é, existe uma condição q com $q \leq p_n$ para cada $n \in \omega$; então

$$q \Vdash \forall n \in \omega : \dot{\alpha}_n = \beta_n \in B_n,$$

daí $\mathbb{P}$ é próprio. □

E também a

Proposição 2.38. *Seja $\mathbb{P}$ um forcing satisfazendo a condição da cadeia enumerável. Então $\mathbb{P}$ é próprio.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{P}$. Como $\mathbb{P}$ é ccc, para cada nome de ordinal $\dot{\alpha}_n$ (jogado por I), existe um conjunto enumerável de ordinais B_n tal que $p \Vdash \dot{\alpha}_n \in B_n$; isso pode ser visto como segue: o conjunto

$$D = \{q \leq p : \exists \beta_q \in \text{Ord} : q \Vdash \dot{\alpha}_n = \beta_q\}$$

é obviamente denso aberto abaixo de p; se $A \subseteq D$ é uma anticadeia maximal em D, então p força $\dot{\alpha}_n$ estar no conjunto

$$B_n = \{\beta_q : q \in A\},$$

que é enumerável (por ccc).

Então $\mathbb{P}$ é próprio, visto que o Jogador II tem a seguinte estratégia vencedora para o proper game: para cada nome ordinal $\dot{\alpha}_n$ jogado pelo jogador I, ele responde com o conjunto B_n acima; no final, o Jogador II ganha o jogo, já que o próprio p força $\dot{\alpha}_n \in B_n$ para cada $n \in \omega$. □

Nos lembrando da Definição 2.6 podemos facilmente refazer as demonstrações acimas com as condições dadas pelo Axioma A.

2.4 Preservação de p-pontos

Seguiremos ([12], Seção 6.2) para mostrar que o forcing de Sacks possui a propriedade de preservar p-pontos. Novamente, este resultado não será usado em nossa aplicação, sendo apresentado apenas para aprofundar nossa relação com o forcing de Sacks.

Tomando um filtro no modelo base, após adjuntarmos alguns reais de Sacks esse filtro provavelmente deixa de ser um filtro no modelo estendido (perde a propriedade de ser fechado por superconjuntos, por exemplo). Contudo, podemos investigar se esse filtro gera um filtro no modelo estendido. Começamos pela formalização da ideia de preservar p-ponto na

Definição 2.39. Dizemos que uma noção de forcing $\mathbb{P}$ preserva p-pontos se para todo ultrafiltro p-ponto $\mathscr{F}$ em ω, $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathscr{F}$ gera um ultrafiltro , isto é,

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \forall X \in \mathscr{P}(\omega)\, \exists A \in \mathscr{F}(A \subseteq X \text{ ou } A \subseteq \omega \setminus X).$$

Felizmente, quando estamos tratando de forcing próprio é mais fácil verificar que o ultrafiltro gerado na extenção é um p-ponto,

Lema 2.40. *Suponha que $\mathbb{P}$ é uma noção de forcing próprio e $\mathscr{F} \in V$ é um p-ponto. Se $\mathbb{P}$ preserva p-pontos, então $\mathscr{F}$ gera um p-ponto em $V^{\mathbb{P}}$.*

Demonstração. Suponha que $\mathscr{A} = \{X_n : n \in \omega\} \subseteq \mathscr{F}$, $\mathscr{A} \in V^{\mathbb{P}}$. Pela propriedade de $\mathbb{P}$, existe um conjunto enumerável $\mathscr{F} \supseteq \mathscr{A}' \supseteq \mathscr{A}$ tal que $\mathscr{A}' \in V$. Seja $\mathscr{A}' = \{Y_n : n \in \omega\}$. Como $\mathscr{F}$ é um p-ponto, existe um conjunto Y tal que $Y \subseteq^* Y_n$ para todo $n \in \omega$. Em particular, $Y \subseteq^* X_n$ para $n \in \omega$. $\square$

Suponha que $\mathbb{P}$ é uma noção de forcing. Para mostrar que

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \mathscr{F} \text{ gera um ultrafiltro}$$

precisamos verificar que para todo $p \in \mathbb{P}$ e um $\mathbb{P}$-nome $\dot{A}$ para um subconjunto de ω, existe um conjunto $B \in \mathscr{F}$ e $q \leq p$ tais que $q \Vdash_{\mathbb{P}} B \subseteq \dot{A}$ ou $q \Vdash_{\mathbb{P}} B \subseteq (\omega \setminus \dot{A})$.

Seja $\varphi(p, \dot{A})$ a afirmação:

$$\forall r \leq p\, \exists B \in \mathscr{F}\, \forall n\, \exists r' \leq r\; r' \Vdash_{\mathbb{P}} B \cap n \subseteq \dot{A}.$$

Lema 2.41. *Para todo $\mathbb{P}$-nome $\dot{A}$ para um subconjunto de ω, o conjunto*

$$D = \{p \in \mathbb{P} : \varphi(p, \dot{A}) \text{ ou } \varphi(p, \omega \setminus \dot{A})\}$$

é denso em $\mathbb{P}$.

Demonstração. Suponha que o lema é falso. Sejam $\dot{A}$ e p_0 tais que D não é denso abaixo de p_0. Portanto, para algum $p \leq p_0$ temos:

$$\forall B \in \mathscr{F}\, \exists n (p \Vdash_{\mathbb{P}} B \cap n \not\subseteq \dot{A} \wedge\; p \Vdash_{\mathbb{P}} B \cap n \not\subseteq (\omega \setminus \dot{A})).$$

Por indução construa uma sequência $p = q_0 \geq q_1 \geq q_2 \ldots$ tal que q_n decide o valor de $\dot{A} \cap n$. Seja $A = \{m : \exists n\, q_n \Vdash_{\mathbb{P}} m \in A\}$ a interpretação de $\dot{A}$. Como $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro, existe um $B \in \mathscr{F}$ tal que $B \subseteq A$ ou $B \cap A = \emptyset$. Em qualquer caso temos $q_n \Vdash_{\mathbb{P}} B \cap n \subseteq A \cap n \subseteq \dot{A} \cap n$ ou $q_n \Vdash_{\mathbb{P}} B \cap n \subseteq (\omega \setminus A) \cap n \subseteq (\omega \setminus \dot{A}) \cap n$, o que contradiz a escolha de p. $\square$

A seguinte propriedade de p-ponto irá nos auxiliar em nossas construções posteriores:

Lema 2.42. *Suponha que $\mathscr{F}$ é um p-ponto e $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq \mathscr{F}$. Então existe $X \in \mathscr{F}$ tal que para infinitos n, $X \setminus n \subseteq X_n$.*

Demonstração. Seja $Y \in \mathscr{F}$ tal que $Y \subseteq^* X_n$ para todo n. Seja $\{n_k : k \in \omega\}$ uma sequência estritamente crescente tal que $n_0 = 0$ e $Y \setminus n_{k+1} \subseteq X_{n_k}$ para todo $k > 0$. Como $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro, ou $\bigcup_{k\in\omega}[n_{2k}, n_{2k+1})$ ou $\bigcup_{k\in\omega}[n_{2k+1}, n_{2k+2})$ está em $\mathscr{F}$. Assuma que é o último e tome $X = Y \cap \bigcup_{k\in\omega}[n_{2k+1}, n_{2k+2})$. Para todo k temos $X \setminus n_{2k} = X \setminus n_{2k+1} \subseteq X_{n_{2k}}$. □

Por meio de um jogo seremos capazes de investigar se um p-ponto é preservado por forcing. Mais especificamente, veremos que esse jogo nos fornece um critério para decidir se um dado ultrafiltro é um p-ponto.

Definição 2.43. Seja $\mathscr{F}$ um ultrafiltro em ω. Defina o jogo $G(\mathscr{F})$ jogado pelos jogadores I e II. O jogador I em sua n-ésima jogada escolhe um conjunto $X_n \in \mathscr{F}$ e o jogador II responde com um conjunto finito $a_n \subseteq X_n$. Juntos eles constroem uma sequência

$$X_1, a_1, X_2, a_2, \ldots.$$

O jogador I ganha se $\bigcup_{n\in\omega} a_n \notin \mathscr{F}$; caso contrário o jogador II ganha.

Teorema 2.44. *O jogador I tem estratégia vencedora em $G(\mathscr{F})$ se, e somente se, $\mathscr{F}$ não é um p-ponto.*

Demonstração. Se $\mathscr{F}$ não é um p-ponto, então o jogador I escolhe uma sequência quase decrescente $\{X_n : n \in \omega\}$ tal que não existe $X \in \mathscr{F}$ tal que $X \subseteq^* X_n$ e joga X_n como seu n-ésimo movimento.

Seja $\mathscr{F}$ um p-ponto. Assuma que o teorema é falso e o jogador I tem estratégia vencedora σ. Iremos construir um jogo no qual o jogador I joga segundo σ e perde.

Defina $\mathscr{A}_n$ como a família de conjuntos jogados por I em seus primeiros n movimentos, assumindo que ele está usando a estratégia σ e o jogador II apenas joga conjuntos $A_k \subseteq n$ para $k \leq n$. Claramente, para todo $n \in \omega$, $\mathscr{A}_n$ é finito. Seja $Y_n = \bigcap \mathscr{A}_n$. Como $\mathscr{F}$ é um p-ponto podemos encontrar um conjunto $Y \in \mathscr{F}$ e uma função estritamente crescente $f \in \omega^\omega$ tal que $Y \setminus f(n) \subseteq Y_n$ para $n \in \omega$. Seja $k_0 = f(0)$ e $k_{n+1} = f(k_n)$. Como $\mathscr{F}$ é um ultrafiltro, ou $Y_1 = \bigcup_{n\in\omega}[k_{2n}, k_{2n+1}) \in \mathscr{F}$ ou $Y_2 = \omega \setminus Y_1 \in \mathscr{F}$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $Y_1 \in \mathscr{F}$. Considere o jogo

$$X_1, a_1, X_2, a_2, \ldots$$

onde o jogador I joga segundo a estratégia σ e o jogador II joga $a_n = [k_{2n}, k_{2n+1}) \cap Y$. É claro que o jogador I perde o jogo. Resta verificar que os movimentos do jogador II são legais.

Considere o n-ésimo movimento do jogador I, X_n. Note que $X_n \in \mathscr{A}_{2n-1}$. Portanto, $Y \setminus k_{2n} \subseteq Y \setminus f(k_{2n-1}) \subseteq X_n$. Segue $a_n \subseteq X_n$. □

Com isso, ainda em [12], definiremos uma noção de forcing, conhecido como forcing de Miller, e demonstraremos, usando os resultados anteriores dessa subseção, que esse forcing preserva p-pontos. O argumento para o forcing de Sacks $\mathbb{PS}$ é semelhante, como notado em [16] e [18].

Antes disso, introduziremos algumas definições sobre árvores,

Definição 2.45. O α-ésimo nível de uma árvore T, que denotaremos por T_α, é o conjunto de todo $t \in T$ tal que o tipo da ordem de $\{s \in T : s < t\}$ é α.

Definição 2.46. Para uma árvore T e $t \in T$ seja $\mathrm{succ}_T(t)$ o conjunto de todos os sucessores imediatos de t em T, e seja $T_t = \{s \in T : s < t \text{ ou } t < s\}$ a subárvore determinada por t.

Definição 2.47. Seja $\mathrm{split}(T) = \{t \in T : |\mathrm{succ}_T(t)| > 1\}$ e seja $\mathrm{sten}(T)$ o primeiro elemento de $\mathrm{split}(T)$.

Definição 2.48. O forcing racional perfeito $\mathbb{PT}$ é a seguinte noção de forcing:

$$T \subseteq \omega^{<\omega} \text{ é uma árvore perfeita e } \forall s \in T\ \exists t \in T\ (s \subseteq t\ \wedge\ |\mathrm{succ}_T(t)| = \aleph_0)$$

Para $T, T' \in \mathbb{PT}$, $T \leq T'$ se $T \subseteq T'$. Sem perda de generalidade podemos assumir $|\mathrm{succ}_T(s)| = 1$ ou $|\mathrm{succ}_T(s)| = \aleph_0$ para todo $T \in \mathbb{PT}$ e $s \in T$. Seja

$$\mathrm{split}(T) = \{s \in T : |\mathrm{succ}_T(s)| > 1\} = \bigcup_{n \in \omega} \mathrm{split}_n(T),$$

onde $\mathrm{split}_n(T) = \{s \in \mathrm{split}(T) : |\{t \subseteq s : t \in \mathrm{split}(T)\}| = n\}$.

Para todo $T \in \mathbb{PT}$ e $s \in \omega^{<\omega}$ defina um nó $T(s)$ da seguinte forma: $T(\emptyset) = \mathrm{stem}(T)$ e para $n \in \omega$ seja $T(s^\frown n)$ o n-ésimo elemento de $\mathrm{succ}_T(T(s))$. Isso nos fornece uma bijeção entre $\omega^{<\omega}$ e $\mathrm{split}(T)$.

Definição 2.49. Para $T, T' \in \mathbb{PT}$, $n \in \omega$, seja

$$T \leq_n T' \iff T \leq T' \text{ e } \forall s \in n^n\ T'(s) = T(s)$$

e

$$T \preceq_n T' \iff T \leq T' \text{ e } \mathrm{split}_n(T') = \mathrm{split}_n(T)$$

É fácil ver que se $T \preceq_n T'$, então $T \leq_n T'$. Além disso, ambas as ordens $\{\preceq_n : n \in \omega\}$ e $\{\leq_n : n \in \omega\}$ testemunham que $\mathbb{PT}$ satisfaz o Axioma A.

Mostraremos a seguir que essa noção de forcing preserva p-ponto.

Lema 2.50. *Forçar com $\mathbb{PT}$ preserva p-pontos.*

Demonstração. Seja $\mathscr{F}$ um p-ponto. Para $T \in \mathbb{PT}$ e um $\mathbb{PT}$-nome $\dot{X}$ para um subconjunto de ω, dizemos que X é uma interpretação de $\dot{X}$ se para todo n existe um $T' \leq T$ tal que $T' \Vdash_{\mathbb{PT}} \dot{X} \cap n = X \cap n$.

Para cada $T \in \mathbb{PT}$ escolhemos um conjunto $X(T)$ tal que

1. $X(T)$ é uma interpretação de $\dot{X}$, e

2. se existe uma interpretação de $\dot{X}$ que é um elemento de $\mathscr{F}$, então $X(T) \in \mathscr{F}$.

Note que ou $X(T) \in \mathscr{F}$ para todo T ou existe $T \in \mathbb{PT}$ tal que $\omega \setminus X(T') \in \mathscr{F}$ para todo $T' \leq T$. Como $\omega \setminus X(T')$ é uma interpretação de $\omega \setminus \dot{X}$, podemos assumir que existe uma condição T^0 tal que para todo $T \leq T^0$, $X(T) \in \mathscr{F}$. Mostraremos que existe $T \leq T^0$ e $A \in \mathscr{F}$ tal que $T \Vdash_{\mathbb{PT}} A \subseteq \dot{X}$.

Seja $G(\mathscr{F})$ um jogo do p-ponto da Definição 2.43. Definiremos uma estratégia vencedora para o Jogador I. Paralelamente, o Jogador I irá construir uma sequência fusão $\langle T^n : n \in \omega \rangle$ e uma sequência $\langle m_n : n \in \omega \rangle$ de números naturais.

Dada T^n, considere a família

$$\{X(T^n_s) : s \in \text{split}_n(T^n)\} \subseteq \mathscr{F}.$$

Como $\mathscr{F}$ é um p-ponto existe um conjunto $A_n \in \mathscr{F}$ tal que $A_n \subseteq^* X(T^n_s)$ para $s \in \text{split}_n(T^n)$. Esse é o n-ésimo movimento do Jogador I. O Jogador II responde com um conjunto finito $a_n \subseteq A_n$. Seja $m_n = 1 + \max(a_n)$. Para cada $s \in \text{split}_n(T^n)$ existe uma condição $S^s \leq T^n_s$ forçando $\dot{X} \cap m_n = X(T^n_s) \cap m_n$, então em particular

$$S^s \Vdash_{\mathbb{PT}} a_n \subseteq \dot{X} \cap m_n.$$

Seja

$$T^{n+1} = \bigcup \{S^s : s \in \text{split}_n(T^n)\}.$$

Então $T^{n+1} \leq_{n+1} T^n$ e $T^{n+1} \Vdash_{\mathbb{PT}} a_n \subseteq \dot{X}$.

Essa é uma estratégia bem definida para o Jogador I. Como não é uma estratégia vencedora, existe um jogo em que II ganha. Durate o jogo, construimos uma sequência fusão $\langle T^n : n \in \omega \rangle$. Colocando $A = \bigcup_{n \in \omega} a_n$, $T = \bigcap_{n \in \omega} T^n$, temos que $A \in \mathscr{F}$, $T^0 \geq T \in \mathbb{PT}$, e $T \Vdash_{\mathbb{PT}} A \subseteq \dot{X}$. □

Com esse resultado e o seguinte teorema de [12]:

Teorema 2.51. *Suponha que $\langle \mathscr{P}_\alpha, \dot{\mathscr{Q}}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ é uma iteração de suporte enumerável de forcing próprios tal que para todo $\alpha < \delta$ vale $\Vdash_\alpha \dot{\mathscr{Q}}_\alpha$ preserva p-pontos. Então $\mathscr{P}_\delta$ preserva p-pontos.*

É possível mostrar que a iteração de suporte enumerável do forcing de Sacks preserva p-pontos. Também preserva ultrafiltros seletivos, como mostrado em [4].

Em [9] e [14] se faz uma discussão sobre a possibilidade do forcing de Sacks e seu produto preservarem ultrafiltros seletivos (como definiremos adiante), contudo, a teoria utilizada é distinta da que utilizamos até aqui, e não será abordada. Podemos dizer, entretanto, que o forcing de Sacks e seu produto finito preservam ultrafiltros seletivos. Até onde sabemos a questão se o produto infinito de suporte enumerável do forcing de Sacks preserva p-pontos (ou ultrafiltros seletivos) permanece em aberto:

Questão 2.1. $\mathbb{PS}(\kappa)$ preserva p-pontos para $\kappa \geq \omega$?

Seguindo [10], analisaremos a capacidade do produto do forcing de Sacks em preservar alguns tipos de ultrafiltros, em particular, os p-pontos. Ao contrário de nosso resultado anterior, o que faremos adiante é menos geral, no sentido que apenas construiremos alguns ultrafiltros que são preservados por $\mathbb{PS}(\kappa)$. Isso é suficiente, visto que nossa aplicação demanda apenas um p-ponto, e também veremos que essa família de ultrafiltros possui a maior cardinalidade possível.

Começaremos com algumas definições de outros tipos de ultrafiltros em ω:

Definição 2.52. Um ultrafiltro u é dito seletivo se, e somente se, quando $\mathscr{P}$ é uma partição de ω, ou $\mathscr{P} \cap u \neq \emptyset$ ou existe $U \in u$ tal que $|U \cap P| \leq 1$ para todo $P \in \mathscr{P}$. Nesse caso, chamamos U um seletor para $\mathscr{P}$.

Definição 2.53. Chamamos u um q-ponto se, e somente se, é seletivo para todas as partições de ω em conjuntos finitos.

Também temos uma outra definição para p-ponto, equivalente à que já apresentamos, que será útil nesse contexto:

Proposição 2.54. *u é p-ponto se, e somente se, quando $\mathscr{P}$ é uma partição de ω, ou $\mathscr{P} \cap u \neq \emptyset$ ou existe um $U \in u$ tal que $|U \cap P| < \omega$ para todo $P \in \mathscr{P}$.*

Demonstração. Suponha $u \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ um p-ponto.

Seja $(A_n)_{n\in\omega}$ partição de ω tal que $A_n \notin u$, para todo $n \in \omega$. Como u é ultrafiltro, então $\omega \in u$, ou seja, $\bigsqcup_{n\in\omega} A_n \in u$. Assim, dado $k \in \omega$ temos por hipótese $A_k \notin u$, mas como $\left(\bigsqcup_{n\in\omega\setminus\{k\}} A_n\right) \cup A_k \in u$ e u é ultrafiltro devemos ter $\bigsqcup_{n\in\omega\setminus\{k\}} A_n \in u$. Obtemos então uma família $\left(\bigsqcup_{n\in\omega\setminus\{k\}} A_n\right)_{k\in\omega}$ tal que $\bigsqcup_{n\in\omega\setminus\{k\}} A_n \in u$, para todo $k \in \omega$. Como u é um p-ponto existe $B \in u$ tal que $B \subseteq^* \bigsqcup_{n\in\omega\setminus\{k\}} A_n$, para todo $k \in \omega$, isto é, $\left|B \setminus \left(\bigsqcup_{n\in\omega\setminus\{k\}} A_n\right)\right| < \aleph_0$ e como $(A_n)_{n\in\omega}$ é partição de ω, então $|B \cap A_k| < \aleph_0$, para todo $k \in \omega$.

Suponha u um ultrafiltro não principal tal que qualquer partição $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ tal que cada $A_n \notin u$, existe $B \in u$ tal que $B \cap A_n$ é finito para todo $n \in \omega$.

Seja $(B_n)_{n\in\omega}$ família tal que $B_n \in u$, para todo $n \in \omega$. Suponha, sem perda de generalidade, que $B_0 = \omega$ e essa é uma sequência quase decrescente de conjuntos infinitos. Note que se $\bigcap_{n\in\omega} B_n \in u$, então acabamos. Suponha que isso não ocorre. Para cada $n \in \omega$ defina $A_n = B_n \setminus B_{n+1}$, note que $(A_n)_{n\in\omega}$ é uma partição de ω e $A_n \notin u$ para todo $n \in \omega$ (suponha que $A_n \in u$, então $A_n \cap B_{n+1} = \emptyset \in u$, um absurdo), logo, por hipótese existe $B \in u$ tal que $|B \cap A_n| < \aleph_0$ para todo $n \in \omega$. Resta mostrar que $B \subseteq^* B_n$, para todo $n \in \omega$; faremos por indução. É natural que $B \subseteq B_0 = \omega$, logo, $B \subseteq^* B_0$. Suponha que $B \subseteq^* B_k$, para algum $k \in \omega$, essa será nossa hipótese de indução. Como $B \cap B_{k+1} = (B \cap B_k) \setminus A_k$, e $|B \cap A_k| < \aleph_0$ temos $B \cap B_{k+1} =^* B \cap B_k$ e daí $B \subseteq^* B_{k+1}$. $\square$

Mostraremos também a seguinte equivalência:

Proposição 2.55. *Um ultrafiltro não principal u em ω é seletivo se, e somente se, é tanto um p-ponto quanto um q-ponto.*

Demonstração. Suponha que u é seletivo.

Logo, por definição, se $\mathscr{P}$ é uma partição de ω, ou $\mathscr{P} \cap u \neq \emptyset$ ou existe um $U \in u$ tal que $|U \cap P| \leq 1$ para todo $P \in \mathscr{P}$. Em particular, isso vale se $\mathscr{P}$ é uma partição de ω em conjuntos finitos, ou seja, u é um q-ponto. É natural que seja um p-ponto.

Suponha agora que u é um p-ponto e um q-ponto.

Seja $\mathscr{P}$ uma partição de ω arbitrária. Como u é um p-ponto, se $\mathscr{P} \cap u \neq \emptyset$, então acabamos. Caso contrário, existe $U \in u$ tal que $|U \cap P| < \omega$ para todo $P \in \mathscr{P}$. Note que $\mathscr{P}' = \{U \cap P : P \in \mathscr{P}\} \cup \{\omega \setminus U\}$ é uma partição de ω, e tal que $\mathscr{P}' \cap u = \emptyset$, pois cada $U \cap P$ é finito e $\omega \setminus U \notin u$. Como u é p-ponto, existe $V \in u$ tal que $|V \cap P'| < \omega$ para todo $P' \in \mathscr{P}'$, ou seja, $|V \cap U \cap P| < \omega$ para todo $P \in \mathscr{P}$ e $|V \cap (\omega \setminus U)| < \omega$, ou seja, $|V \setminus U| < \omega$, de modo que $V \subseteq^* U$.

Suponha que $\mathscr{A} = \{A_n : n \in \omega\} \cup \{A\}$ é uma partição de ω tal que $|A_n| < \omega$ para todo $n \in \omega$, $|A| = \omega$ e $\mathscr{A} \cap u = \emptyset$. Logo, $A \notin u$ e $\omega \setminus A \in u$. Note que $\omega \setminus A = \coprod_{n \in \omega} A_n$, em particular, $|(\omega \setminus A) \cap A_n| = |A_n|$. Defina $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ uma partição de A em conjuntos finitos, então $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ é uma partição de ω em conjuntos finitos; como u é q-ponto, existe $U \in u$ tal que $|U \cap P| \leq 1$ para todo $P \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$.

Tomando $\mathscr{P}'$ como antes e uma partição em conjuntos finitos de $\omega \setminus U$, podemos obter $V \in u$ tal que $|V \cap U \cap P| \leq 1$, fazendo como acima, e daí $V \cap U \in U$ é tal que $|(U \cap V) \cap P| \leq 1$ para todo $P \in \mathscr{P}$. Portanto, u é seletivo. $\square$

Uma outra propriedade de forcing que utilizaremos é dada pela

Definição 2.56. Seja $\mathbb{P}$ um poset. Chamamos $\mathbb{P}$ de $\langle \kappa, \lambda, \mu \rangle$-distributivo onde κ, λ e μ são cardinais, se, e somente se, para todo $p \in \mathbb{P}$ e τ tais que $p \Vdash \tau : \kappa \to \lambda$, existe $q \leq p$ e $F : \kappa \to [\lambda]^{<\mu}$ tais que, para todo $\alpha \in \kappa$, $q \Vdash \tau(\alpha) \in F(\alpha)$.

Isto é, τ pode ser aproximado por fora por um tubo estreito (largura $< \mu$) do modelo base. Em particular, temos a

Definição 2.57. Chamamos $\mathbb{P}$ de ${}^{\omega}\omega$-limitante se, e somente se, para $p \in \mathbb{P}$ e τ tais que $p \Vdash \tau : \omega \to \omega$ existem $q \leq p$ e $f : \omega \to \omega$ tais que $q \Vdash \tau(n) \leq f(n)$ para todo $n \in \omega$.

É imediato que $\mathbb{P}$ é ${}^{\omega}\omega$-limitante se, e somente se, é $\langle \omega, \omega, \omega \rangle$-distributivo.

Por fim, seja u um ultrafiltro; chamamos u de $\mathbb{P}$-indestrutível se, e somente se, $\Vdash_{\mathbb{P}} u$ gera um ultrafiltro (note que essa é uma generalização da Definição 2.39). Por fim, utilizaremos a seguinte equivalência:

Proposição 2.58. *u é $\mathbb{P}$-indestrutível se, e somente se, quando $p \in \mathbb{P}$ e τ são tais que $p \Vdash \tau : \omega \to 2$ existem $q \leq p$ e $U \in u$ tais que $q \Vdash \tau \restriction U$ é constante.*

Demonstração. Primeiramente faremos uma análise sem a linguagem de forcing.

Seja u um ultrafiltro em ω e $f : \omega \to 2$ uma função. Note qe $f^{-1}[\{0\}]$ e $f^{-1}[\{1\}]$ são tais que $f^{-1}[\{0\}] \cup f^{-1}[\{1\}] = \omega \in u$, e como u é ultrafiltro, então $f^{-1}[\{0\}] \in u$ ou $f^{-1}[\{1\}] \in u$. Em qualquer caso, existe $i \in 2$ tal que $f^{-1}[\{i\}] \in u$. Denotando $U = f^{-1}[\{i\}]$ note que $f \restriction U$ é constante igual a i.

Suponha agora que u é um filtro em ω tal que para toda função $f : \omega \to 2$ existe $U \in u$ tal que $f \restriction U$ é constante. Dado $A \subseteq \omega$ defina a função

$$\varphi_A : \omega \to 2 \quad n \mapsto \begin{cases} 0, \text{ se } n \notin A \\ 1, \text{ se } n \in A \end{cases}.$$

Então, por hipótese, existe $U \in u$ tal que $\varphi_A \restriction U$ é constante. Se $\varphi_A[U] = \{0\}$, então $U \subseteq \omega \setminus A$ e como u é filtro, então $\omega \setminus A \in u$. Se $\varphi_A[U] = \{1\}$, então $U \subseteq A$ e, pelo mesmo argumento, $A \in u$. De qualquer modo, $A \in u$ ou $\omega \setminus A \in u$, de modo que u é um ultrafiltro.

O que foi feito é então suficiente para mostrar o resultado. □

De [3] nós citamos o

Lema 2.59. *Se $p \in \mathbb{PS}(\kappa)$ e $p \Vdash \tau : \omega \to A$, então existem $q \leq p$, uma sequência $\langle F_n : n \in \omega \rangle$ de subconjuntos finitos de dom(q) e uma função $f : \bigcup_{n \in \omega} l(q, F_n, n) \to A$ tal que:*

(i) $F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_1 \subseteq \dots$ e dom$(q) = \bigcup_{n \in \omega} F_n$, e

(ii) se $\sigma \in l(q, F_n, n)$ então $q \restriction \sigma \Vdash \tau(n) = f(\sigma)$.

Corolário 2.60. *$\mathbb{PS}(\kappa)$ é $\langle \omega, \lambda, \omega \rangle$-distributivo para todo λ, e em particular é ${}^{\omega}\omega$-limitante.*

Demonstração. Se $p \Vdash \tau : \omega \to \lambda$ então na terminologia do Lema 2.59 coloque

$$G_n = \{f(\sigma) : \sigma \in l(q, F_n, n)\} \ \ (n \in \omega).$$

Então cada G_n é finito e, para todo $n \in \omega$, $q \Vdash \tau(n) \in G_n$. □

O método de demonstração do Lema 2.59 também estabelece o fato de que $\mathbb{PS}(\kappa)$ é próprio, como discutimos anteriormente.

Para conseguir lidar com novos reais e para formular um critério conveniente para $\mathbb{PS}(\kappa)$-indestrutibilidade, nós introduzimos mais alguma notação. Primeiro mostraremos que podemos restringir nossa atenção a $\mathbb{PS}(\omega)$.

Lema 2.61. *Seja u um ultrafiltro. Os seguintes são equivalentes:*

(i) u é $\mathbb{PS}(\kappa)$-indestrutível para todo κ infinito.

(ii) u é $\mathbb{PS}(\kappa)$-indestrutível para algum κ infinito.

(iii) u é $\mathbb{PS}(\omega)$-indestrutível.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ é trivial, e $(ii) \Rightarrow (iii)$ vale porque $\mathbb{PS}(\omega)$ é uma subordem completa de $\mathbb{PS}(\kappa)$.

Para $(iii) \Rightarrow (i)$ seja $\kappa \geq \omega$ e assuma $p \Vdash \tau : \omega \to 2$. Identifique $\mathrm{dom}(p)$ com ω, nós temos $p \in \mathbb{P}(\omega)$. Encontre $q \in \mathbb{PS}(\omega)$, $q \leq p$, e $U \in u$ tal que $q \Vdash \tau \restriction U$ é constante. Revertendo o processo, nós obtemos $q \leq p$ em $\mathbb{PS}(\kappa)$, forçando a mesma coisa. □

Denotamos por A o conjunto dos pares $\langle p, f \rangle$ onde $p \in \mathbb{PS}(\omega)$ e $f : \bigcup_{n\in\omega} l(p,n,n) \to 2$. Note que A possui cardinalidade 2^ω. Se $\langle p, f \rangle \in A$, então $\langle p, f \rangle$ determina (um nome para) um novo real $\varphi_{p,f}$ ao requerer que

$$\forall \sigma \in l(p,n,n) p \restriction \sigma \Vdash \varphi_{p,f} = f(\sigma).$$

Obtemos o seguinte lema útil.

Lema 2.62. *Para um ultrafiltro u em ω os seguintes são equivalentes:*

(i) u é $\mathbb{PS}(\omega)$-indestrutível.

(ii) Para todo $\langle p, f \rangle \in A$ existem $q \leq p$ e $U \in u$ tais que $q \Vdash \varphi_{p,f} \restriction U$ é constante.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ é fácil. Para $(ii) \Rightarrow (i)$ assuma que $r \Vdash \tau : \omega \to 2$. Aplicando o Lema 2.59 e notando que caso $\kappa = \omega$ podemos tomar $F_n = n$ para todo n, podemos encontrar $\langle p, f \rangle \in A$ tal que $p = \tau$ e $\forall n \in \omega\, \forall \sigma \in l(p,n,n)\ p \restriction \sigma \Vdash \tau(n) = f(\sigma)$. Mas então $p \restriction \sigma \Vdash \tau(n) = f(\sigma) = \varphi(n)$ para todo n e σ. Segue que $p \Vdash \tau = \varphi_{p,f}$. Agora encontre $q \leq p$ e $U \in u$ como em (ii). Então $q \leq r$ e $q \Vdash \tau \restriction U$ é constante. □

Segue que ao construir ultrafiltros $\mathbb{PS}(\kappa)$-indestrutíveis devemos ter cuidado com apenas 2^ω objetos. De fato, se CH vale, apenas ω_1 tarefas devem ser realizadas.

As ideias expressas nos Lemas 2.61 e 2.62 estão implícitas na construção de Laver de um ultrafiltro seletivo indestrutível ([14]). O principal resutado está enunciado no teorema de Laver ([14]),

Teorema 2.63. *Se $p \in \mathbb{PS}(\omega)$ e τ são tais que $p \Vdash \tau : \omega \to 2$, então para todo $A \subseteq \omega$ infinito existem $q \leq p$ e um $B \subseteq A$ infinito tais que $q \Vdash \tau \restriction B$ é constante.*

A seguir nós coletamos alguns resultados fáceis que garantem a preservação de algumas das propriedades que um ultrafiltro pode ter, como fizemos no Lema 2.40. Nos resultados seguintes $\mathbb{P}$ é um poset e u é um ultrafiltro $\mathbb{P}$-indestrutível.

Lema 2.64. *Se $\mathbb{P}$ é próprio e u é um p-ponto então $1_{\mathbb{P}} \Vdash u$ é um p-ponto.*

Nosso próximo lema lida com q-pontos. Para isso precisamos de um critério para u ser um q-ponto, devido a [7]. Seja $f \in {}^\omega\omega$ tal que $\forall n \in \omega\, n < f(n) < f(n+1)$. Defina $\bar{f} \in {}^\omega\omega$ por $\bar{f}(0) = f(0)$ e $\bar{f}(n+1) = f(\bar{f}(n))$ $(n > 0)$. Após isso, seja $P_f = \{[0, \bar{f}(0)), [\bar{f}(0), \bar{f}(1)), \ldots\}$, uma partição de ω em conjuntos finitos. Também seja $\mathscr{F} = \{f \in {}^\omega\omega : \forall n \in \omega, n < f(n) < f(n+1)\}$. Então o resultado de [7] é como segue.

Lema 2.65. *Para um ultrafiltro v os seguintes são equivalentes:*

(i) v é um q-ponto.

(ii) Para alguma (toda) subfamília dominante $\mathscr{D}$ de $\mathscr{F}$, v contém um seletor para todo P_f ($f \in \mathscr{D}$).

Lema 2.66. *Se $\mathbb{P}$ é ${}^\omega\omega$-limitante e u é um q-ponto então $1_{\mathbb{P}} \Vdash u$ é um q-ponto.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $\mathscr{F} \cap M$ é dominante em $M[G]$. □

Corolário 2.67. *Se $\mathbb{P}$ é próprio e ${}^\omega\omega$-limitante e se u é seletivo, então $1_{\mathbb{P}} \Vdash u$ é seletivo.*

Agora nós construiremos p-pontos $\mathbb{PS}(\omega)$-indestrutíveis seletivos e não seletivos. Em [14] Laver constrói um ultrafiltro seletivo u $\mathbb{PS}(\omega)$-indestrutível tal que

$$1 \Vdash u \text{ é seletivo.}$$

Pelo Corolário 2.67 esse último fato é automático. A partir de agora assumimos que CH vale e fixamos uma enumeração $\{\langle p_\alpha, f_\alpha\rangle : \alpha \in \omega_1\}$ do conjunto A. Além disso, seja φ_α o nome para o real determinado por $\langle p_\alpha, f_\alpha\rangle$ para $\alpha \in \omega_1$, isto é, $\varphi_\alpha = \varphi_{p_\alpha, f_\alpha}$.

Teorema 2.68. *Existem 2^{ω_1} ultrafiltros seletivos $\mathbb{PS}(\omega)$-indestrutíveis em ω.*

Demonstração. Seja $\{P_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ uma enumeração para a coleção de partições de ω em conjuntos finitos. Indutivamente nós definimos famílias $\mathscr{A}_\alpha$ ($\alpha \in \omega_1$) de subconjuntos infinitos de ω satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\mathscr{A}_0 = \{\omega\}$.

(ii) Cada $\mathscr{A}_\alpha$ é uma família quase disjunta de tamanho ω_1 ($\alpha > 0$).

(iii) Se $\alpha < \beta$ então $\mathscr{A}_\beta$ refina $\mathscr{A}_\alpha$ e, $\forall A \in \mathscr{A}_\alpha$, $|\{B \in \mathscr{A}_\beta : B \subseteq^* A\}| = \omega_1$.

(iv) Todo $A \in \mathscr{A}_{\alpha+1}$ é um seletor para P_α.

(v) Para todo $A \in \mathscr{A}_{\alpha+1}$ existe um $q_A \leq p_\alpha$ tal que $q_A \Vdash \varphi_\alpha$ é constante em $\mathscr{A}_\alpha$.

Em estágios sucessores nós usamos o teorema de Laver para obter para cada $A \in \mathscr{A}_\alpha$ uma família quase disjunta $\mathscr{B}_A$ de tamanho ω_1 de subconjuntos de A satisfazendo $(iii) - (v)$; então colocamos $\mathscr{A}_{\alpha+1} = \bigcup\{\mathscr{B}_A : A \in \mathscr{A}_\alpha\}$. Em estágios limites seja $\mathscr{A}_\alpha$ uma família quase disjunta refinando cada $\mathscr{A}_\beta$ ($\beta \in \alpha$) e tal que para toda sequência $\langle A_\beta : \beta \in \alpha\rangle$ com $\forall \beta \in \alpha\ A_\beta \in \mathscr{A}_\beta$ e $A_\gamma \subseteq^* A_\beta$ se $\beta \in \gamma \in \alpha$ existe um $A \in \mathscr{A}_\alpha$ tal que $\forall \beta \in \alpha\ A \subseteq^* A_\beta$. Agora seja $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1\rangle$ um ramo através da árvore $\bigcup_{\alpha \in \omega_1} \mathscr{A}_\alpha$, isto é, $\forall \alpha \in \omega_1\ A_\alpha \in \mathscr{A}_\alpha$ e se $\beta \in \alpha \in \omega_1$ então $A_\alpha \subseteq^* A_\beta$. Então o filtro u gerado por $\{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ é um ultrafiltro seletivo $\mathbb{P}(\omega)$-indestrutível. Para ver isso, note que para todo $\alpha \in \omega_1$

$$q_{A_{\alpha+1}} \Vdash \varphi_\alpha \text{ é constante em } A_{\alpha+1},$$

do que $1 \Vdash u$ é um ultrafiltro. Também, u é seletivo: é um p-ponto porque possui uma base linearmente ordenada (por $\subseteq^*$), e é um q-ponto por construção. Dessa forma nós obtemos $\omega_1^{\omega_1} = 2^{\omega_1}$ tais ultrafiltros, um para cada ramo atráves de $\bigcup_{\alpha\in\omega_1} \mathscr{A}_\alpha$. $\square$

Nosso próximo objetivo é mostrar que existem muitos p-pontos $\mathbb{PS}(\omega)$- indestrutíveis que não são seletivos. Devemos fazer p-pontos que não são q-pontos. Para fazer isso, para $m \in \omega$ seja $P_m = [2^m - 1, 2^{m+1} + 1)$, e $\mathscr{P} = \{P_m : m \in \omega\}$. Seja

$$I = \left\{ A \subseteq \omega : \limsup_{n\to\infty} |A \cap P_m| < \omega \right\}$$

e $I^+ = \mathscr{P}(\omega) \setminus I$. Nós encontraremos um p-ponto u indestrutível tal que $u \subseteq I^+$; em particular, u não terá seletor para $\mathscr{P}$. Para isso precisamos do seguinte lema.

Lema 2.69. *Seja $p \in \mathbb{PS}(\omega)$ e $f : \bigcup_{n\in\omega} l(p,n,n) \to 2$ determinarem o real φ, e seja $A \in I^+$. Então existem $q \le p$ e $B \subseteq A$ com $B \in I^+$ tal que $q \Vdash \varphi \restriction B$ é constante.*

Demonstração. Para começar, fixe $m_0 < m_1 < m_2 < \dots$ em ω tal que $|A \cap P_{m_i}| \ge i \cdot 2^i$ $(i \in \omega)$. Para $i \in \omega$ coloque $l_i = 2^{m_i+1} - 1$. Agora pode p para uma condição q em $\mathbb{P}(\omega)$ tal que, para todo i, $|F_i| \le i$, onde $F_i = \{\sigma \in l(p, l_i, l_i) :$ se $j < l_i$ então $\sigma(j) \in q(j)\}$. Note que, para todo $\sigma \in F_i$, $q \restriction \sigma$ decide todo $\varphi \restriction l_i$, dizemos $\varphi \restriction l_i = \varphi_\sigma$. Fixe i. Como $|A \cap P_{m_i}| \ge i \cdot 2^i$, $A \cap P_{m_i} \subseteq l_i$ e $|F_i| \le i$, existe um conjunto $A_i \subseteq A \cap P_{m_i}$ tal que $|A_i| \ge i$ e, para cada $\sigma \in F_i$, $\varphi_\sigma \restriction A_i$ é constante. Então $q \Vdash \varphi \restriction A_i$ é constante. Defina um (um nome para um) real ρ ao exigir que para todo i

$$q \Vdash \rho(i) \text{ é o valor de } \varphi \restriction A_i.$$

Então encontre $r \le q$ e $C \subseteq \omega$ infinito tais que $r \Vdash \rho \restriction C$ é constante; seja $B = \bigcup_{i\in C} A_i$. Então $B \subseteq A$, $B \in I^+$ $(i \in C \Rightarrow |B \cap P_{m_i}| \ge i)$ e $r \Vdash \varphi \restriction B$ é constante. $\square$

Agora é fácil demonstrar:

Teorema 2.70. *Existem 2^{ω_1} p-pontos não seletivos $\mathbb{PS}(\omega)$-indestrutíveis.*

Demonstração. Como na demonstração do Teorema 2.68 construimos famílias quase disjuntas $\mathscr{A}_\alpha$ $(\alpha \in \omega_1)$ de subconjuntos infinitos de ω satisfazendo as condições:

(i) $\mathscr{A}_0 = \{\omega\}$.

(ii) $\forall \alpha \in \omega_1\ \forall A \in \mathscr{A}_\alpha\ A \in I^+$.

(iii) Se $\alpha < \beta$ então $\mathscr{A}_\beta$ refina $\mathscr{A}_\alpha$ e, $\forall A \in \mathscr{A}_\alpha$, $|\{B \in \mathscr{A}_\beta : B \subseteq^* A\}| = \omega_1$.

(iv) Para todo $A \in \mathscr{A}_{\alpha+1}$ existe um $q_A \le p_\alpha$ tal que $q_A \Vdash \varphi_\alpha$ é constante em $\mathscr{A}_\alpha$.

Fixe uma família quase disjunta $\mathscr{C}$ de tamanho ω_1 em ω. Em estágios sucessores nós usamos o Lema 2.69 para obter um $A \in \mathscr{A}_\alpha$ um $A' \subseteq A$ e $q \leq p_\alpha$ tais que $A' \in I^+$ e $q \Vdash \varphi_\alpha \restriction A'$ é constante. Então escolhemos $m_0 < m_1 < m_2 < \dots$ em ω tal que $|A' \cap P_{m_i}| \geq i$ para cada i. Para cada $C \in \mathscr{C}$ coloque $B_C = \bigcup_{i \in C}(A' \cap P_{m_i})$. Então $B_C \in I^+$ e $q \Vdash \varphi_\alpha \restriction B_C$ é constante. Nós colocamos $q_B = q$ para cada $B \in \mathscr{B}_A = \{B_C : C \in \mathscr{C}\}$ e definimos $\mathscr{A}_{\alpha+1} = \bigcup\{\mathscr{B}_A : A \in \mathscr{A}_\alpha\}$. Nos estágios limites nós escolhemos para cada ramo $\langle A_\beta : \beta \in \alpha \rangle$ através de $\bigcup_{\beta \in \alpha} \mathscr{A}_\beta$ um conjunto A como segue. Fixe uma sequência $\langle \alpha_i : i \in \omega \rangle$ cofinal em α. Para cada i escolha m_i tal que $|\bigcap_{j \leq i} A_{\alpha_j} \cap P_{m_i}| \geq i$; seja $A = \bigcup_{i \in \omega}(\bigcap_{j \leq i} A_{\alpha_j} \cap P_{m_i})$. Então $A \in I^+$ e $A \subseteq^* A_\beta$ para $\beta \in \alpha$. Colocamos $\mathscr{A}_\alpha$ como a família de conjuntos assim obtidos. Como na demonstração do Teorema 2.68 isso nos fornece $\omega_1^{\omega_1} = 2^{\omega_1}$ p-pontos não seletivos, cada um dos quais é indestrutível. $\square$

Portanto, o Teorema 2.30 e o Teorema 2.70 nos garantem que, começando em um modelo de ZFC+CH, ao forçar com $\mathbb{PS}(\kappa)$, com κ regular e maior que $\aleph_\omega$, obtemos um modelo de ZFC em que existem p-pontos de caráter $\aleph_1$ e $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$, que era nosso objetivo inicial.

Além disso, com o Teorema 2.70, o Teorema 2.30, o Lema 2.31 e o Corolário 2.16 obtemos que começando em um modelo de ZFC+CH e forçando com o produto do forcing de Sacks de comprimento maior que $\aleph_1$ obtemos um modelo de ZFC em que existem p-pontos e muitos cardinais pequenos, em particular $\mathfrak{d}$, são $\aleph_1$.

CAPÍTULO 3

Modelos alternativos

Como já observamos antes, o problema que buscamos responder ao longo do texto trata essencialmente sobre a consistência da existência de p-pontos de caráter $\aleph_1$ com $2^{\aleph_0}$ arbitrariamente grande; a condição $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$ estava essencialmente associada ao nosso problema sobre unfriendly partitions, não correspondendo a uma restrição conjuntista mais forte. Nessa seção faremos uma breve discussão sobre outras formas pelas quais o modelo de ZFC+$(*)$+$2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$ pode ser construido, mas não entraremos em detalhes técnicos sobre as alternativas levantadas.

Nosso principal problema era, simultaneamente, aumentar $2^{\aleph_0}$ e controlar o tamanho das famílias geradoras de ultrafiltros não-principais sobre ω, além de garantir a existência de p-pontos. A frase "tamanho das famílias geradoras de ultrafiltros não-principais sobre ω"foi usada por nós múltiplas vezes, mas pode ser substituída pelo seguinte cardinal pequeno:

$$\mathfrak{u} = \min\{|\mathscr{E}| : \mathscr{E} \text{ gera um ultrafiltro não-principal em } \omega\},$$

que não introduzimos anteriormente para simplicar nossa notação. Com isso, o Lema 1.16 nos diz essencialmente que vale o seguinte

Lema 3.1. $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{u} \leq 2^{\aleph_0}$.

E por consequência direta do Teorema 1.29 temos o

Corolário 3.2. *MA implica que* $\mathfrak{u} = 2^{\aleph_0}$.

É claro, como o modelo de ZFC sem p-pontos construído em [20] nos aponta, o valor de $\mathfrak{u}$ não está associado a existência de um p-ponto. Por outro lado, por definição, todo modelo de $(*)$ satisfaz $\mathfrak{u} = \aleph_1$, pois todo p-ponto é ultrafiltro não-principal.

Com isso, seria natural tentar construir p-pontos em algum modelo de ZFC, provavelmente produzido por forcing, em que já temos algo como $\mathfrak{u} = \aleph_1$. Nos modelos clássicos da teoria de forcing, produzidos por iterações com suporte enumerável de comprimento ω_2, os valores de múltiplos cardinais pequenos, como indicado em ([5], Seção 10), são conhecidos, mas em tais modelos temos $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, o que nos impede de utilizar alguns deles para nosso objetivo.

Por outro lado, o método mais usual de obter $2^{\aleph_0}$ grande, o Axioma de Martin, também não pode nos ser útil, como vimos no Corolário anterior.

Optamos então pelo modelo dado pelo forcing $\mathbb{PS}(\kappa)$, em que $2^{\aleph_0}$ é grande e, como vimos, satisfaz $(*)$. A estrutura do produto em [3] é razoavelmente simples, e a construção da família de p-pontos de caráter pequeno em [10] é feita explicitamente. Contudo, o Teorema 1.34 (ii) nos indica que em um modelo de $\mathfrak{u} < \mathfrak{d}$ existe um p-ponto de caráter $\mathfrak{u}$. Logo, poderíamos também obter um modelo de ZFC+$(*)$+$2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$ com um modelo que satisfaz algo como

$$\mathfrak{u} = \aleph_1 < \aleph_\omega < \mathfrak{d} \leq 2^{\aleph_0}.$$

O seguinte resultado de [6] nos fornece algo ainda mais forte do que estas condições:

Teorema 3.3. *Sejam ν e δ cardinais regulares não enumeráveis em um modelo de ZFC+GCH. Então existe uma extensão gerada por um forcing ccc na qual $\nu = \mathfrak{u}$ e $\mathfrak{d} = \delta$.*

Logo, escolhendo $\nu = \aleph_1$ e δ algum cardinal regular maior que $\aleph_\omega$, obtemos um modelo de ZFC que satisfaz

$$\mathfrak{u} = \nu = \aleph_1 < \aleph_\omega < \delta = \mathfrak{d} \leq 2^{\aleph_0}.$$

E o Teorema 1.34 (ii) garante que o ultrafiltro que testemunha que $\mathfrak{u} = \aleph_1$ é um p-ponto.

CAPÍTULO 4

Aplicação em Grafos: grafos sem unfriendly partition

Seguindo [17] analisaremos a construção consistente com os axiomas de ZFC de um grafo sem unfriendly partition.

Uma unfriendly partition de um grafo $G = (V,E)$ é um mapa $c : V \to \{0,1\} = 2$ tal que, para todo vértice x, vale

$$|\{y \in E(x) : c(x) = c(y)\}| \leq |y \in E(x) : c(x) \neq c(y)|,$$

onde $E(x)$ é o conjunto de vértices ligados a x por uma aresta de G.

É fácil ver que todo grafo finito possui uma unfriendly partition e daí, por compacidade, também o possui todo grafo localmente finito.

Em [1] são mostrados os seguintes resultados:

Proposição 4.1. *Todo grafo com finitos vértices de grau infinito admite uma unfriendly partition.*

Proposição 4.2. *Considere F uma coleção finita de cardinais infinitos regulares. Se $G = (V,E)$ é um grafo tal que $|N(v)| \in F$ para todo $v \in V$, então G admite uma unfriendly partition.*

Isso nos mostra que este é um problema de grafos bastante infinitos: grafos que possuem infinitos vértices e todos de grau infinito. Em particular, podemos definir o seguinte cardinal:

Definição 4.3. Denote por $\varkappa$ o menor cardinal tal que existe um grafo $G = (V,E)$ tal que $|V| = \varkappa$, todos os vértices possuem grau infinito e G não admite unfriendly partition.

Daí, pela Proposição 4.2, já sabemos que $\aleph_\omega \leq \varkappa$.

Os seguintes resultados de [17] nos mostram que esse cardinal de fato está bem definido, ou seja, existem grafos que não admitem unfriendly partition. Para um cardinal $\lambda = \omega_\alpha$ e um ordinal β, nós usamos a notação $\lambda^{(+\beta)}$ para denotar o cardinal $\omega_{\alpha+\beta}$.

Teorema 4.4. *Existe um grafo $G = (E,V)$, de tamanho $|V| = (2^\omega)^{(+\omega)}$, que não possui unfriendly partition e em que todo vértice possui grau infinito.*

Um argumento similar também demonstra a seguinte versão mais geral do Teorema 4.4.

Teorema 4.5. *Para todo cardinal infinito λ, existe um grafo $G = (V,E)$, de tamanho $|V| = \kappa = (2^\lambda)^{(+\omega)}$, que não possui unfriendly partition e no qual todo vértice possui grau infinito.*

O Teorema 4.4 nos diz que $\varkappa \leq (2^\omega)^{(+\omega)}$.

É interessante agora tentar analisar a consistência, por exemplo, das desigualdades estritas em $\aleph_\omega \leq \varkappa \leq (2^\omega)^{(+\omega)}$. Por exemplo, supondo CH, então $\aleph_\omega = (2^\omega)^{(+\omega)} = \varkappa$.

Um primeiro resultado ainda em [17] nos mostra a relação entre esse problema e p-pontos (Proposição 1.31).

Teorema 4.6. *É consistente que existe um grafo $G = (V,E)$ de tamanho $|V| = \omega_\omega$ que não possui unfriendly partition e o grau de cada vértice é ou ω, ou ω_1, ou ω_ω.*

Considere a seguinte afirmação

$(*)$ Existe um ultrafiltro não-principal u em ω que é gerado por uma família quase decrescente de conjuntos A_ξ $(\xi < \omega_1)$.

Pela Proposição 1.31, o ultrafiltro dado por $(*)$ é um p-ponto.

Mostraremos que $(*)$ implica que existe um grafo com as propriedades enunciadas no Teorema 4.6

Demonstração. Construiremos o grafo desejado $G = (V,E)$ como segue. Seja $V = X \cup Y \cup Z$, onde $X = \{x_n : n < \omega\}$, $Y = \{y_{\alpha,\xi} : \alpha < \omega_\omega, \xi < \omega_1\}$ e $Z = \{z_\alpha : \alpha < \omega_\omega\}$ e seja $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, onde

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x_n, y_{\alpha,\xi}) : \alpha \leq \omega_n, \xi < \omega_1, n \in A_\xi\}, \\ E_2 &= \{(y_{\alpha,\xi}, z_\alpha) : \alpha < \omega_\omega, \xi < \omega_1\}, \\ E_3 &= \{(x_n, z_\alpha) : \alpha < \omega_\omega, n < \omega\}. \end{aligned}$$

Note que todo vértice de X possui grau ω_ω, cada vértice de Y possui grau ω e cada vértice de Z possui grau ω_1.

Queremos mostrar que G não possui unfriendly partition. Suponha por contradição que $c : V \to \{0,1\}$ é uma unfriendly partition de G. Como u é um ultrafiltro em ω, existem $\varepsilon < 2$ e $A \in u$ tal que $c(x_n) = \varepsilon$ se, e somente se, $n \in A$. De fato, considere

$$\mathscr{A} = \{n \in \omega : c(x_n) = 0\}$$

$$\mathscr{B} = \{n \in \omega : c(x_n) = 1\}$$

e note que como c é uma função, $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \emptyset$ e $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \omega$. Como u é ultrafiltro, então $\mathscr{A} \in u$ ou $\mathscr{B} \in u$. Daí coloque $A = \mathscr{A}$ ou $A = \mathscr{B}$. Como u é gerado por $(A_\zeta)_{\zeta<\omega_1}$ existe $\xi < \omega_1$ tal que $A_\zeta \subseteq^* A$ para $\xi \leq \zeta < \omega_1$. Como, por hipótese, c é uma unfriendly partition, como

$$E(y_{\alpha,\zeta}) = \{z_\alpha\} \cup \{x_n : n \in A_\zeta, \alpha \leq \omega_n\} \ (\alpha < \omega_\omega, \zeta < \omega_1)$$

e como $c(x_n) = \varepsilon$ para $n \in A$, se $\xi \leq \zeta < \omega_1$, então $A_\zeta \subseteq^* A$, de modo que existem enumeráveis x_n's tais que $c(x_n) = \varepsilon$, contra finitos elementos de $A_\zeta \setminus A$ e z_α que podem ter outra cor; segue que $c(y_{\alpha,\zeta}) = 1 - \varepsilon$ para $\alpha < \omega_\omega$ e $\xi \leq \zeta < \omega_1$. Além disso, como $E(z_\alpha) = X \cup \{y_{\alpha,\zeta} : \zeta < \omega_1\}$ para $\alpha < \omega_\omega$, devemos ter $c(z_\alpha) = \varepsilon$. Mas, para $n \in A$,

$$E(x_n) = \{y_{\alpha,\zeta} : n \in A_\zeta, \alpha \leq \omega_n\} \cup Z,$$

e isso contradiz a hipótese de que c é uma unfriendly partition já que $c(x_n) = c(z)$ $(z \in Z)$ e $|E(x_n) \setminus Z| < |Z|$. $\square$

O caso $\aleph_\omega < \varkappa \leq (2^\omega)^{(+\omega)}$ já foi feito por Leandro Aurichi e Lucas Silva Sinzato Real (não publicado), como uma aplicação do Axioma de Martin, codificado no seguinte

Teorema 4.7. *Supondo o Axioma de Martin, se $G = (V, E)$ é um grafo em que todos os vértices possuem grau infinito com $|V| < 2^{\aleph_0}$, então existe $c : V \to 2$ uma unfriendly partition.*

Demonstração. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ o espaço ordenado em que

$$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(V, 2) = \{c : V \to 2 : \mathrm{dom}(c) \text{ é finito}\}$$

e $\leq$ é a ordem dada por $c \leq d$ se, e somente se, c estende d. Recordemos que, como 2 é enumerável, essa ordem é ccc. Do mesmo modo, para cada $v \in V$, considere o conjunto $D_v = \{p \in \mathrm{Fn}(V, 2) : v \in \mathrm{dom}(p)\}$.

Afirmação. D_v é denso em $\mathbb{P}$ para todo $v \in V$.

Demonstração. Para verificar isso, fixe $p \in \mathbb{P}$ qualquer. Se $v \in \mathrm{dom}(p)$, então $p \in D_v$ e $p \leq p$. Se $v \notin \mathrm{dom}(p)$, considere a função $p' : \mathrm{dom}(p) \cup \{v\} \to 2$ dada por

$$p'(x) = \begin{cases} p(x), \text{ se } x \in \mathrm{dom}(p) \\ 0, \text{ se } x = v \end{cases}$$

com isso, $p' \in D_v$ e $p' \leq p$. $\square$

Além disso, a família de densos $\mathscr{D} = \{d_v : V \in V\}$ possui cardinalidade menor que $2^{\aleph_0}$, pois $|V| < 2^{\aleph_0}$. Logo, pelo Axioma de Martin, existe F um filtro $\mathscr{D}$-genérico.

Afirmação. $c = \bigcup_{f \in F} f$ é uma coloração, ou seja, da forma $c : V \to 2$.

Demonstração. Claramente, como união de funções que possuem 2 como contradomínio, c é uma função com contradomínio 2 (se estiver bem definida). Dado $v \in V$, como $F \cap D_v \neq \emptyset$, existe $f \in F$ tal que $v \in \mathrm{dom}(f)$. Em particular, $v \in \mathrm{dom}(c)$. Por um momento, visando concluir que c está bem definida, suponha que existem $f_1, f_2 \in F$ tais que $f_1(v) \neq f_2(v)$ para algum $v \in V$. Porém, como F é um filtro, deve existir $f \in F$ tal que $f \leq f_1, f_2$, com isso, $v \in \mathrm{dom}(f)$ e $f(v) = f_1(v) = f_2(v)$, o que é uma contradição. □

Contudo, essa definição de c não é capaz de garantir que a coloração seja unfriendly em algum vértice. Para isso, criamos uma família de densos que contém $\mathscr{D}$, mantendo sua cardinalidade menor que continuum, a fim de atribuir mais propriedades à função c. Para tanto, adotaremos as seguintes notações:

- Dado um vértice $v \in V$, denotamos por $K_v = |N(v)|$ o cardinal (infinito, por hipótese) que denota seu grau.
- Dado um vértice $v \in V$, a sequência $\{v_\alpha\}_{\alpha < K_v}$ consiste em uma enumeração de $N(v)$.

Com isso, se $v \in V$ é um vértice tal que K_v é um cardinal regular, considere o conjunto

$$E^v_\alpha = \{c \in \mathrm{Fn}(V,2) : \text{ existem } \beta_0, \beta_1 > \alpha \text{ tais que } c(v_{\beta_0}) = 0 \text{ e } c(v_{\beta_1}) = 1\}.$$

Afirmação. Se $v \in V$ é um vértice tal que K_v é um cardinal regular, então E^v_α é denso em $\mathbb{P}$ para todo $\alpha < K_v$.

Demonstração. Seja $p \in \mathrm{Fn}(V,2)$ qualquer. Uma vez que $\mathrm{dom}(p)$ é finito, podemos escolher $\beta_0, \beta_1 > \alpha$ tais que $v_{\beta_0}, v_{\beta_1} \notin \mathrm{dom}(p)$. Com isso, defina $p' : \mathrm{dom}(p) \cup \{v_{\beta_0}, v_{\beta_1}\} \to 2$ pondo

$$p'(x) = \begin{cases} p(x), \text{ se } x \in \mathrm{dom}(p) \\ 0, \text{ se } x = v_{\beta_0} \\ 1, \text{ se } x = v_{\beta_1} \end{cases}$$

Assim, $p' \in E^v_\alpha$ e $p' \leq p$, verificando que E^v_α é denso em $\mathbb{P}$. □

Como $|V| < 2^{\aleph_0}$, tem-se que $K_v < 2^{\aleph_0}$ para todo $v \in V$. Portanto, a família de densos

$$\mathscr{E} = \{E^v_\alpha : v \in V \text{ tal que } K_v \text{ é regular}, \alpha < K_v\}$$

tem cardinalidade $|\mathscr{E}| < |2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0}| = 2^{\aleph_0}$. Com isso, pelo Axioma de Martin, podemos supor que F é um filtro $\mathscr{E}$-genérico, além de ser $\mathscr{D}$-genérico. Assim, a função $c = \bigcup_{f \in F} f$ admite a seguinte propriedade:

Afirmação. c é unfriendly em todo vértice $v \in V$ tal que K_v é regular.

Demonstração. Seja $v \in V$ um vértice de grau regular e fixe $\alpha < K_v$. Como $F \cap E^v_\alpha \neq \emptyset$, existem $f \in F$ e $\beta_0, \beta_1 > \alpha$ tais que $f(v_{\beta_0}) = 0$ e $f(v_{\beta_1}) = 1$. Logo, $c(v_{\beta_0}) = 0$ e $c(v_{\beta_1}) = 1$. Portanto, visto que $\alpha < K_v$ é qualquer,

$$\sup\{\alpha < K_v : c(v_\alpha) = 0\} = \sup\{\alpha < K_v : c(v_\alpha) = 1\} = K_v.$$

Isso significa que, pela regularidade do cardinal K_v, $|\{\alpha < K_v : c(v_\alpha) = 0\}| = |\{\alpha < K_v : c(v_\alpha) = 1\}|$. Em particular, o vértice v possui a mesma quantidade de amigos e inimigos, independentemente da sua cor em c. $\square$

Entretanto, ainda não garantimos que c é unfriendly para os vértices de grau não regular. Como antes, encontraremos mais uma família de densos para o qual c seja genérica e admita essa propriedade. Nesse contexto, fixado $v \in V$ um vértice de grau não regular, seja $\{\gamma_\xi\}_{\xi < \mathrm{cf}(K_v)}$ uma sequência cofinal de cardinais regulares em K_v. Então, dado $\alpha < K_v$, existe um único $\xi < K_v$ tal que $\gamma_\xi \leq \alpha < \gamma_{\xi+1}$. Com isso, defina

$$H^v_\alpha = \{c \in \mathrm{Fn}(V,2) : \text{ existem } \alpha < \beta_0, \beta_1 < \gamma_{\xi+1} \text{ tais que } c(v_{\beta_0}) = 0 \text{ e } c(v_{\beta_1}) = 1\}.$$

Afirmação. H^v_α é denso em $\mathbb{P}$ para todo $v \in V$ com grau não regular e $\alpha < K_v$.

Demonstração. Seja $p \in \mathrm{Fn}(V,2)$ qualquer e fixe $\xi < \mathrm{cf}(K_v)$ o ordinal tal que $\gamma_\xi \leq \alpha < \gamma_{\xi+1}$. Uma vez que $\mathrm{dom}(p)$ é finito, podemos escolher $\alpha < \beta_0, \beta_1 < \gamma_{\xi+1}$ tais que $v_{\beta_0}, v_{\beta_1} \notin \mathrm{dom}(p)$. com isso, defina $p' : \mathrm{dom}(p) \cup \{v_{\beta_0}, v_{\beta_1}\} \to 2$ como

$$p'(x) = \begin{cases} p(x), \text{ se } x \in \mathrm{dom}(p) \\ 0, \text{ se } x = v_{\beta_0} \\ 1, \text{ se } x = v_{\beta_1} \end{cases}$$

Nesses termos, $p' \in H^v_\alpha$ e $p' \leq p$, verificando que H^v_α é denso em $\mathbb{P}$. $\square$

Dado que $K_v < 2^{\aleph_0}$ para todo $v \in V$ (pois $|V| < 2^{\aleph_0}$), a família de densos

$$\mathscr{H} = \{H^v_\alpha : v \in V \text{ com } K_v \text{ não regular}, \alpha < K_v\}$$

possui cardinalidade menor que $|2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0}| = 2^{\aleph_0}$. Logo, pelo Axioma de Martin, podemos supor que F é um filtro $\mathscr{H}$-genérico, além de $\mathscr{D}$-genérico e $\mathscr{E}$-genérico. Com isso, a função c admite a seguinte propriedade:

Afirmação. c é unfriendly para todo vértice $v \in V$ que possui grau não regular.

Demonstração. Fixe um vértice $v \in V$ de grau não regular. Uma vez que $F \cap H^v_\alpha = \emptyset$, para cada $\xi < \mathrm{cf}(K_v)$ e cada α com $\gamma_\xi \leq \alpha < \gamma_{\xi+1}$, existem $\beta_0 > \alpha$ e $\beta_1 > \alpha$ tais que $c(v_{\beta_0}) = f(v_{\beta_0}) = 0$ e $c(v_{\beta_1}) = f(v_{\beta_1}) = 1$, em que $f \in F \cap H^v_\alpha$. Ou seja, $\sup\{\gamma_\xi \leq \alpha < \gamma_{\xi+1} : c(v_\alpha) = 0\} = \sup\{\gamma_\xi \leq \alpha < \gamma_{\xi+1} : c(v_\alpha) = 1\} = \gamma_{\xi+1}$. Logo, como $\gamma_{\xi+1}$ é um cardinal regular, $|\{\gamma_\xi \leq \alpha < \gamma_{\xi+1} : c(v_\alpha) =$

$0\}| = |\{\gamma_\xi \leq \alpha < \gamma_{\xi+1} : c(v_\alpha) = 1\}| = \gamma_{\xi+1}$. Com isso, verifica-se que $|\{\alpha < K_v : c(v_\alpha) = 0\}| \geq \gamma_{\xi+1}$ e $|\{\alpha < K_v : c(v_\alpha) = 1\}| \geq \gamma_{\xi+1}$ para todo $\xi < \mathrm{cf}(K_v)$. Portanto, como a sequência $\{\gamma_\xi\}_{\xi<\mathrm{cf}(K_v)}$ é cofinal em K_v, $|\{\alpha < K_v : c(v_\alpha) = 0\}| = |\{\alpha < K_v : c(v_\alpha) = 1\}| = K_v$. Logo, independentemente da cor atribuída ao vértice v, há K_v de seus vizinhos com cor oposta, verificando que c é unfriendly em v. $\square$

$\square$

Como MA é consistente com $2^{\aleph_0}$ arbitrariamente grande ([13]), pelo Teorema 4.7 temos que em ZFC+MA+$2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$ vale $\aleph_\omega < \varkappa \leq (2^\omega)^{(+\omega)}$.

Infelizmente, pelo que foi discutido na Seção 1 não podemos utilizar o Axioma de Martin para obter o resultado desejado para a desigualdade inferior. Mas, pelo Teorema 2.70, podemos começar com um modelo de ZFC+CH e forçando com produto de comprimento κ com suporte enumerável do forcing de Sacks e obter um p-ponto de caráter $\aleph_1$ no modelo extendido. Além disso, pelo Teorema 2.30, tomando $\kappa > \aleph_\omega$ regular obtemos que $(2^\omega)^{(+\omega)} \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$. Logo, realizando a mesma construção do Teorema 4.6 nesse modelo obtemos $\aleph_\omega = \varkappa < (2^\omega)^{(+\omega)}$.

CAPÍTULO 5

$\beta\omega$ como espaço dos ultrafiltros sobre ω

Faremos agora um breve estudo de Topologia que nos permitirá aplicar nosso conhecimento sobre ultrafiltros de modo quase imediato. Na verdade, em [19] a motivação original para o Teorema 1.21 era puramente topológica, como veremos.

5.1 O espaço topológico $\beta\omega$

Após analisar ultrafiltros do ponto de vista conjuntista, tentaremos uma abordagem topológica analisando algumas das propriedades do espaço $\beta\omega$, seguindo [20], como definido a seguir,

Definição 5.1. O conjunto $\beta\omega$ é definido como

$$\beta\omega = \{p \subseteq \mathscr{P}(\omega) : p \text{ é um ultrafiltro em } \omega\}.$$

O leitor familiarizado com Topologia pode se lembrar que esta é a mesma notação utilizada para a compactificação de Stone-Čech do espaço discreto ω. De fato, mais adiante mostraremos que estes espaços são homeomorfos.

Agora, tentaremos construir uma topologia para este espaço de ultrafiltros: faremos isso ao definir uma base para essa topologia. Considere a definição:

Definição 5.2. Para cada $A \subseteq \omega$ defina

$$A^* = \{p \in \beta\omega : A \in p\}.$$

Daí temos que $p \in A^*$ se, e somente se, $A \in p$. Com esses conjuntos formamos nosso candidato à base

$$\mathscr{B} = \{A^* : A \subseteq \omega\}.$$

O seguinte lema nos ajudará a verificar que $\mathscr{B}$ possui as propriedades de uma base:

Lema 5.3. *Para todos $A, B \subseteq \omega$, vale o seguinte:*

(i) $A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$.

(ii) $\beta\omega \setminus A^* = (\omega \setminus A)^*$.

(iii) $\omega^* = \beta\omega$.

Demonstração. (i) Devemos mostrar que para todo ultrafiltro $p \in \beta\omega$

$$(p \in A^* \wedge p \in B^*) \iff p \in (A \cap B)^*.$$

Pelo que vimos anteriormente isso é equivalente a

$$(A \in p \wedge B \in p) \iff A \cap B \in p,$$

que é claramente verdade, já que p é um filtro (a propriedade de ultrafiltro não é usada nesse caso).

(ii) Aqui devemos mostrar que para todo ultrafiltro $p \in \beta\omega$

$$p \notin A^* \iff p \in (\omega \setminus A)^*.$$

Por definição, isso é equivalente a

$$A \notin p \iff (\omega \setminus A) \in p,$$

o que é verdade, já que p é um ultrafiltro (para a direção da esquerda para a direita a propriedade é necessária).

(iii) Para um ultrafiltro $p \in \beta\omega$, $p \in \omega^*$ é equivalente a $\omega \in p$, o que é verdadeiro para todo filtro em ω. $\square$

Então nosso conjunto $\mathscr{B} = \{A^* : A \subseteq \omega\}$ é fechado por interseções finitas (veja Lema 5.3 (i)) e contém todo o espaço $\beta\omega$ (veja Lema 5.3 (iii)). Portanto, $\mathscr{B}$ é base de uma topologia em $\beta\omega$, como explicado abaixo:

Definição 5.4. O espaço topológico $\beta\omega$ é definido como o conjunto de todos os ultrafiltros em ω equipado com a topologia de Stone, que é gerado por sua base $\mathscr{B} = \{A^* : A \subseteq \omega\}$, onde A^* é o conjunto de todos os ultrafiltros contendo A.

De agora em diante, quando escrevemos $\beta\omega$, queremos dizer o espaço topológico, isto é, o conjunto $\beta\omega$ junto com sua topologia.

Um conjunto é chamado clopen se é aberto e fechado:

Lema 5.5. *Para todo $A \subseteq \omega$, o conjunto $A^* \subseteq \beta\omega$ é fechado (e aberto), isto é, a coleção $\mathscr{B} = \{A^* : A \subseteq \omega\}$ é uma base clopen de $\beta\omega$.*

Em particular, $\mathscr{B}$ é também uma "base para os conjuntos fechados": cada subconjunto fechado de $\beta\omega$ pode ser escrito como uma interseção de conjuntos de $\mathscr{B}$.

Demonstração. Seja $A \subseteq \omega$. Por definição, A^* é aberto. Mas A^* é também fechado já que seu complemento é aberto (use o Lema 5.3 (ii)):

$$\beta\omega \setminus A^* = (\omega \setminus A)^* \in \mathscr{B}.$$

Como todo conjunto aberto pode ser escrito como união de conjuntos de $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}$ é fechado por complementos, cada conjunto fechado é a interseção de conjuntos de $\mathscr{B}$. □

5.2 $\beta\omega$ é um espaço compacto Hausdorff

Afirmamos que $\beta\omega$ é compacto e tem a propriedade de Hausdorff. Para o último, vamos primeiro investigar as vizinhanças de um "ponto" $p \in \beta\omega$: $\mathscr{B} = \{A^* : A \subseteq \omega\}$ é a base da topologia de $\beta\omega$, logo, o conjunto

$$\mathscr{B}(p) = \{A^* : p \in A^*\} = \{A^* : A \in p\}$$

é uma base (clopen) das vizinhanças do ponto p. Como mencionado, é suficiente considerar tais "vizinhanças básicas"; então podemos pensar em vizinhanças de p como segue: tome algum conjunto $A \in p$, e a respectiva vizinhança (clopen) será o conjunto de ultrafiltros contendo A, isto é, o conjunto de ultrafiltros que "compartilha" o conjunto A com o ultrafiltro p.

Além disso, existe um mergulho natural do espaço topológico discreto ω no espaço compacto $\beta\omega$ (quando falamos de ω em um contexo topológico sempre queremos dizer ω equipado com a topologia discreta). Existem dois tipos de ultrafiltros em ω (como vimos na Definição 1.13): por um lado, os ultrafiltros estendendo o filtro de Fréchet (isto é, os não-principais), e por outro lado os ultrafiltros principais; de fato, para cada número natural $n \in \omega$, existe exatamente um ultrafiltro principal contendo o unitário $\{n\}$. Isso dá origem ao mergulho natural

$$\beta : \omega \to \beta\omega \qquad n \mapsto \beta(n) = \{X \subseteq \omega : n \in X\}.$$

Então a imagem $\beta[\omega] \subseteq \beta\omega$ de ω sobre o mergulho β é exatamente o conjunto de todos os ultrafiltros principais em ω. Mostraremos que essa imagem é densa em $\beta\omega$.

Agora estamos preparados para o seguinte

Teorema 5.6. *O espaço topológio $\beta\omega$ é um espaço compacto Hausdorff contendo uma cópia homeomórfica de ω como subconjunto denso.*

Demonstração. Para mostrar que $\beta\omega$ é um espaço Hausdorff assuma $p \neq q$ pontos distintos em $\beta\omega$, mostraremos que eles podem ser separados por vizinhanças (básicas) disjuntas. Como $p \neq q$, sem perda de generalidade existe um conjunto $A \subseteq \beta\omega$ contido no ultrafiltro p, mas não em q:

$$A \in p \wedge A \notin q.$$

Equivalentemente, $p \in A^*$ e $q \in \beta\omega \setminus A^*$, então p e q são separados pelas vizinhanças (clopen) disjuntas A^* e $\beta\omega \setminus A^*$ (o conjunto $\beta\omega \setminus A^*$ é igual a $(\omega \setminus A)^*$ pelo Lema 5.3 (ii)). Note que o "sem perda de generalidade" acima não é necessário: no caso de A estar em q mas não em p, A pode ser substituído pelo seu complemento $\omega \setminus A$, que está em p, mas não em q.

Agora mostraremos que $\beta\omega$ é compacto, usando a caracterização de compacidade em termos de "conjuntos básicos fechados". Segundo o Lema 5.5, $\mathscr{B} = \{A^* : A \subseteq \omega\}$ é uma base para os conjuntos fechados em $\beta\omega$. Vamos assumir que $\{A_i^* : i \in I\}$ (com $A_i \subseteq \omega$ para cada $i \in I$) é a coleção dada de fechados básicos com a propriedade de interseção finita:

$$\text{para cada } E \subseteq I \text{ finito: } \bigcap_{i \in E} A_i^* \neq \emptyset;$$

mostraremos que $\bigcap_{i \in I} A_i^* \neq \emptyset$. Por sorte, o mapa $A \mapsto A^*$ não comuta com interseções arbitrárias em geral, caso contrário poderíamos ter problemas, já que $\bigcap_{i \in I} A_i^*$ pode ser facilmente vazia e $\emptyset^* = \emptyset$. Mas podemos usar o Lema 5.3 (i) para interseções finitas: para cada $E \subseteq I$ finito

$$\emptyset \neq \bigcap_{i \in E} A_i^* = \left(\bigcap_{i \in E} A_i \right)^*, \text{ daí } \bigcap_{i \in E} A_i \neq \emptyset$$

(note que $A \neq \emptyset$ se, e somente se, $A^* \neq \emptyset$). Daí a coleção $\{A_i : i \in I\}$ tem a propriedade da interseção finita, assim gera um filtro $\mathscr{F}$ em ω:

$$\mathscr{F} = \left\{ X \subseteq \omega : \bigcap_{i \in E} A_i \subseteq X \text{ para algum } E \subseteq I \text{ finito} \right\}.$$

Pelo Lema 1.11 pode ser estendido para um ultrafiltro $\mathscr{F} \subseteq p$ em ω. Como $\mathscr{F}$ contém todos os A_i's, também $A_i \in p$ para cada $i \in I$; analogamente, $p \in A_i^*$ para cada $i \in I$, daí concluindo $p \in \bigcap_{i \in I} A_i^* \neq \emptyset$, o que termina o argumento sobre compacidade.

Agora gostariamos de mostrar que $\beta\omega$ contém uma cópia homeomórfica (densa) do espaço discreto ω. Em outras palavras , devemos mostrar o seguinte: o mergulho natural $\beta : \omega \to \beta\omega$ definida no início da subseção, que manda cada $n \in \omega$ no (único) ultrafiltro principal contendo $\{n\}$, é um homeomorfismo entre ω e sua imagem, isto é, o mapa β é injetivo e continuo em ambas as direções.

Obviamente, β é injetivo ($\{n\} \cap \{m\} = \emptyset$ para todo $n \neq m$). A função $\beta : \omega \to \beta\omega$ é claramente continua (na direção para frente), já que o domínio ω carrega a topologia discreta, o que é suficiente: a pré-imagem (por β) de qualquer subconjunto de $\beta\omega$ está em $\mathscr{P}(\omega)$, logo, aberto. Para mostrar a continuidade da função inversa é suficiente mostrar que a função β é aberta, isto é, a imagem de qualquer conjunto aberto é aberta (já que a pré-imagem de qualquer conjunto aberto pela função inversa será aberto em $\beta\omega$, daí também aberto em $\beta[\omega]$ com a topologia discreta). Como ω carrega a topologia discreta, devemos mostrar que a imagem de todo unitário em ω é aberto em $\beta\omega$, isto é, $\{\beta(n)\}$ é aberto em $\beta\omega$ para cada $n \in \omega$. Mas

$$\{\beta(n)\} = \{p \in \beta\omega : \{n\} \in p\} = \{n\}^* \in \mathscr{B},$$

então $\{\beta(n)\}$ é aberto (básico), e $\beta[\omega]$ é uma cópia homeomórfica do espaço discreto ω.

Finalmente, vamos explicar porque ω é mergulhado densamente por β, isto é, porque $\beta[\omega]$ é um subconjunto denso de $\beta\omega$. Seja $A^* \in \mathscr{B}$ algum aberto básico não-vazio; encontraremos algum elemento de $\beta[\omega]$ em A^*. Claramente $A \neq \emptyset$ (pela Definição 1.1 temos que nenhum filtro possui o conjunto vazio como elemento), então podemos escolher algum $n \in A$; mas então o ultrafiltro principal $\beta(n)$ está em A^*: por definição, $\{n\} \subseteq A \in \beta(n)$, resultando $\beta(n) \in A^*$. De fato, vale o seguinte:

$$A^* \cap \beta[\omega] = \{\beta(n) : n \in A\}.$$

□

Um espaço topológico $(X, \mathscr{O})$ é chamado conexo se não pode ser particionado em dois conjuntos abertos não vazios, isto é, se $\emptyset$ e X são os únicos conjuntos clopen. É chamado totalmente desconexo se não existe subconjunto de X com mais de um elemento que seja conexo (com respeito à topologia induzida). Nossa demonstração da propriedade de Hausdorff de $\beta\omega$ na verdade mostrou que dois pontos distintos podem ser separados por um conjunto clopen (no caso o espaço é chamado totalmente separado, uma propriedade mais forte que Hausdorff). Claramente, isso mostra que $\beta\omega$ é totalmente desconexo.

Note que $\beta\omega$ não é somente Hausdorff mas também satisfaz um axioma de separação mais forte:

Teorema 5.7. *O espaço topológico $\beta\omega$ é normal.*

Pode ser mostrado que todo espaço compacto Hausdorff é normal ([2]), daí $\beta\omega$ é normal. Para ganhar a correspondência entre conjuntos fechados (arbitrários) em $\beta\omega$ e filtros em ω, daremos apesar de tudo uma demonstração direta da normalidade.

Demonstração. Lembremos que nossa base clopen $\mathscr{B} = \{A^* : A \subseteq \omega\}$ é uma base para os conjuntos fechados. Então cada conjunto fechado $F \subseteq \beta\omega$ pode ser escrito como a interseção de conjuntos de $\mathscr{B}$: existe uma família $\{A_i^* : i \in I\} \subseteq \mathscr{B}$ com

$$F = \bigcap_{i \in I} A_i^*.$$

Caso F seja não-vazio, a família correspondente $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ tem a propriedade da interseção finita, então gera um filtro $\mathscr{F} \supseteq \{A_i : i \in I\}$ em ω. Um ultrafiltro p está em F se, e somente se, p contém todos os A_i's se, e somente se, p estende o filtro $\mathscr{F}$, isto é,

$$F = \{p \in \beta\omega : \mathscr{F} \subseteq p\}.$$

Conversamente, se $\mathscr{F}$ é um filtro em ω, o conjunto F de todos os ultrafiltros estendendo $\mathscr{F}$ é um conjunto fechado não-vazio. De fato, existe uma correspondência bijetiva entre filtros (próprios) em ω e conjuntos fechados (não-vazios) de $\beta\omega$. Quando $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$ são dois filtros em ω, os correspondentes conjuntos fechados F_1 e F_2 irão satisfazer $F_1 \supseteq F_2$ e vice-versa, já que para um ultrafiltro p é “mais restritivo"estender um filtro maior. (Usando isso podemos explicitamente definir o fecho topológico de um conjunto arbitrário $X \subseteq \beta\omega$: tome a interseção de todos os ultrafiltros em X, que é o maior filtro $\mathscr{F}$ em ω contido em todos esses ultrafiltros; o conjunto fechado F correspondente será o fecho de X, já que é o menor conjunto fechado contendo X). Em particular, um filtro gerado por apenas um conjunto $A \subseteq \omega$ corresponde ao conjunto clopen básico $A^* \in \mathscr{B}$; quando o filtro cresce o conjunto fechado correspondente diminui, e quando o filtro finalmente cresce em um ultrafiltro p, então resta apenas um único ultrafiltro "estendendo p", a saber o próprio p, daí o conjunto fechado correspondente é o unitário $\{p\}$; se p é "estendido além", já não é filtro (próprio), mas todo o conjunto das partes de ω enquanto o conjunto fechado correspondente se torna vazio.

Com essa correspondência em mente é muito fácil ver que $\beta\omega$ é normal. Sejam F_1 e F_2 dois subconjuntos fechados disjuntos de $\beta\omega$ e considere os filtros correspondentes $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$; já que não existe ultrafiltro $p \in F_1 \cap F_2$, nenhum ultrafiltro pode estender $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$, então deve existir motivo para isso: $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ não tem a propriedade da interseção finita, daí existem conjuntos $A_1 \in \mathscr{F}_1$ e $A_2 \in \mathscr{F}_2$ tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; mas agora A_1^* e A_2^* agem como vizinhanças clopen disjuntas de F_1 e F_2 respectivamente:

$$A_1^* \cap A_2^* = (A_1 \cap A_2)^* = \emptyset$$

e $A_1^* \supseteq F_1$ e $A_2^* \supseteq F_2$. □

(De modo análogo, podemos refazer a demonstração de compacidade com subconjuntos fechados arbitrários de $\beta\omega$, isto é, filtros em ω; fazendo isso, podemos evitar a redução ao caso em que os conjuntos são conjuntos fechados básicos).

No Teorema 5.6 descobrimos que $\beta\omega$ é a assim chamada compactificação do espaço topológico discreto ω, isto é, um espaço compacto (Hausdorff) com ω densamente mergulhado dentro dele. Além disso, o espaço $\beta\omega$ é na verdade a assim chamada compactificação de Stone-Čech de ω, isto é, $\beta\omega$ é - dentre todas as compactificações com a propriedade de Hausdorff - "a mais geral".

Tentaremos explorar outras propriedades de $\beta\omega$. Existem dois tipos de pontos bem diferentes em $\beta\omega$: os "números naturais"em si (os ultrafiltros principais) e vários outros "novos pontos"(os ultrafiltros não principais) que foram adicionados a ω para torná-lo compacto, por assim dizer. Como veremos no Teorema 6.1, existem exatamente $2^{2^{\aleph_0}}$ ultrafiltros (não-principais) em ω, o que nos diz o tamanho de $\beta\omega$:

$$|\beta\omega| = \aleph_0 + 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}.$$

Como visto na demonstração acima, cada número natural n é um ponto isolado de $\beta\omega$: existe uma vizinhança (básica clopen) de n contendo apenas o próprio n, a saber $\{n\}^*$. Em geral, se A é um conjunto finito, A^* contém todos os números naturais em A e nada mais. Mas se A é infinito, temos outra situação: os pontos $p \in A^*$ (isto é, os ultrafiltros contendo A) podem ser essencialmente vistos como os ultrafiltros no conjunto infinito A, então A^* é homeomorfo a todo o espaço $\beta\omega$ e tem cardinalidade $2^{2^{\aleph_0}}$.

Contrário ao fato que todos os pontos de ω são isolados em $\beta\omega$, cada vizinhança (básica) A^* de um ponto $p \in \beta\omega \setminus \omega$ contém muitos pontos: como $p \in A^*$ (isto é, $A \in p$) e p é não principal, A é infinito, então existem infinitos números naturais em A^* (a saber todos os que estão em A) e $2^{2^{\aleph_0}}$ de $\beta\omega \setminus \omega$, entre eles o próprio p. Para nos livrarmos desses pontos isolados, normalmente ignoramos todos os pontos principais e apenas estudamos o subspaço $\beta\omega \setminus \omega$, que também é compacto (em geral, um subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto; como ω é aberto em $\beta\omega$ como união de unitários clopen, seu complemento $\beta\omega \setminus \omega$ é fechado).

5.3 $\beta\omega$ não é metrizável

Quantas vizinhanças (básicas) precisamos para unicamente determinar um ultrafiltro p em $\beta\omega \setminus \omega$? Em outras palavras: qual é o menor tamanho de uma família $\{A_i^* : i \in I\}$ de vizinhanças de $p \in \beta\omega \setminus \omega$ tal que

$$\bigcap_{i \in I} A_i^* = \{p\}.$$

(Obviamente finitas não são suficientes, pois elas poderiam ser substituidas por uma única, ainda contendo $2^{2^{\aleph_0}}$ pontos).

Afirmamos que isso é o mesmo que pedir por uma base local de menor tamanho possível. Isso é relacionado à questão se o espaço topológico $\beta\omega$ é metrizável ou não:

Definição 5.8. Um espaço topológico $(X, \mathscr{O})$ é chamado metrizável se existe uma métrica $d : X \times X \to [0, \infty)$ em X tal que a topologia induzida pela métrica d é igual à topologia $\mathscr{O}$.

Um espaço topológico é chamado first-countable se cada ponto admite base local enumerável. O seguinte resultado pode ser encontrado em [2],

Lema 5.9. *Todo espaço métrico (X, d) é primeiro enumerável.*

Mostraremos que nenhum ponto em $\beta\omega \setminus \omega$ possui base enumerável, implicando que $\beta\omega$ não é metrizável.

Até agora utilizamos apenas $\mathscr{B}(p) = \{A^* : p \in A\}$ como uma base local para p; o conjunto $\mathscr{B}(p)$ é de tamanho continuum. Como cada vizinhança de p contém uma vizinhança do conjunto $\mathscr{B}(p)$, podemos nos concentrar em subsistemas de $\mathscr{B}(p)$ ao procurar por possíveis bases menores. Sempre que um conjunto

$$\{A_i^* : i \in I\} \subseteq \mathscr{B}(p)$$

forme uma base local para o conjunto p, nossa afirmação do início vale, isto é, apenas p será a interseção dos A_i^*'s. (Isso é verdade para todo espaço Hausdorff: dados $y \neq x$, existe uma vizinhança de x não contendo y; então se uma base local de x é dada, a interseção de todos os elementos será o unitário $\{x\}$; de fato, isso é equivalente a T_1, um axioma de separação estritamente mais fraco que a propriedade Hausdorff).

Conversamente, seja $\{A_i^* : i \in I\}$ uma família infinita de vizinhanças de $p \in \beta\omega \setminus \omega$ tal que $\bigcap_{i \in I} A_i^* = \{p\}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que essa família é fechada por interseções finitas: $\mathscr{B}(p)$ é fechada por interseções finitas e substituir a família acima pelo conjunto de todas as interseções finitas não aumenta a sua cardinalidade; no fim das contas, estamos interessados apenas nos tamanhos de tais famílias. Seja $\mathscr{F}$ o filtro gerado pelos A_i's, isto é,

$$\mathscr{F} = \{X \subseteq \omega : X \supseteq A_i \text{ para algum } i \in I\}$$

(os A_i's formam uma base para o filtro). Como $\bigcap_{i \in I} A_i^* = \{p\}$, p é o único filtro estendendo $\mathscr{F}$. Mas $\mathscr{F}$ em si já é um ultrafiltro: se existir um conjunto $X \subseteq \omega$ tal que nem X nem $\omega \setminus X$ pertencem a $\mathscr{F}$, ambos $\mathscr{F} \cup \{\omega \setminus X\}$ e $\mathscr{F} \cup \{X\}$ poderiam ser estendidos para ultrafiltros (diferentes), contradizendo a hipótese. Então $\mathscr{F}$ é igual a p, daí $\{A_i : i \in I\}$ é uma base de filtro para p, que é equivalente a $\{A_i^* : i \in I\}$ ser uma base local para p.

Resumindo: para qualquer família $\{A_i^* : i \in I\}$ de vizinhanças de um ultrafiltro não principal p, unicamente determinar p é essencialmente o mesmo que ser uma base local para p (a menos de adicionar interseções finitas), que por sua vez só ocorre se, e somente se, a família correspondente $\{A_i : i \in I\}$ é uma base filtro para o ultrafiltro p.

Como foi mostrado no Lema 1.16 que nenhum ultrafiltro não-principal em ω é gerado por apenas enumeráveis conjuntos (em outras palavras, não tem base filtro enumerável), então nenhum ponto em $p \in \beta\omega \setminus \omega$ tem base enumerável. Logo, $\beta\omega$ não é metrizável.

De fato, o seguinte vale. Seja $\{A_i^* : i < \omega\}$ uma coleção enumerável de vizinhanças de $p \in \beta\omega \setminus \omega$. Então essa família não irá unicamente determinar p, isto é,

$$\bigcap_{i<\omega} A_i^* \supsetneq \{p\};$$

mas mais é verdade: desde que ignoremos os ultrafiltros principais e trabalhemos com o espaço compacto $\beta\omega \setminus \omega$, afirmamos que o conjunto (fechado) $\bigcap_{i<\omega} A_i^*$ tem interior não vazio, isto é, existe um aberto (básico) A^* tal que

$$\bigcap_{i<\omega} A_i^* \supseteq A^*.$$

Note que A deve ser infinito nesse caso, já que cada A finito resulta em A^* contendo apenas números naturais (daí aparecendo vazio em $\beta\omega \setminus \omega$). Então nossa afirmação implica que a interseção de enumeráveis vizinhanças de um ultrafiltro não principal ainda tem $2^{2^{\aleph_0}}$ elementos.

Note também que isso é falso dentro de todo o espaço $\beta\omega$; por exemplo, tome $A_i = \omega \setminus i$ para cada $i < \omega$ como contra-exemplo (isto é, os A_i's geram o filtro de Fréchet); então $\bigcap_{i<\omega} A_i^*$ contém cada $p \in \beta\omega \setminus \omega$, mas nenhum número natural; como ω é denso em $\beta\omega$, a interseção $\bigcap_{i<\omega} A_i^*$ tem interior vazio em $\beta\omega$; caso contrário $\bigcap_{i<\omega} A_i^*$ contém algum número natural, um absurdo.

5.4 Pseudo-interseções revisitadas

Como podemos encontrar um conjunto $A \subseteq \omega$ tal que

$$\bigcap_{i<\omega} A_i^* \supseteq A^*$$

vale em $\beta\omega \setminus \omega$? O seguinte lema irá relacionar isso à noção de pseudo-interseção; lembre-se que $A \subseteq^* B$ denota "A está quase contido em B", isto é,

$$A \subseteq^* B \iff |A \setminus B| < \aleph_0.$$

Lema 5.10. *Para todos os conjuntos $A, B \subseteq \omega$, vale o seguinte:*

(i) $A \subseteq B \iff A^* \subseteq B^*$.

(ii) $A \subseteq^* B \iff A^* \cap (\beta\omega \setminus \omega) \subseteq B^*$.

Demonstração. (i) Devemos mostrar que

$$A \subseteq B \iff \forall p \in \beta\omega (A \in p \Rightarrow B \in p).$$

Claramente, se $A \subseteq B$ e $A \in p$ para algum ultrafiltro p, também $B \in p$.

Conversamente, se $A \nsubseteq B$, $A \setminus B \neq \emptyset$, então existe um ultrafiltro $p \ni (A \setminus B)$; então $(A \setminus B) \subseteq A \in p$, mas $B \notin p$ já que $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$. Note que no caso em que $A \setminus B$ é finito, o ultrafiltro p que testemunha a propriedade é necessariamente principal.

(ii) Aqui devemos mostrar que

$$A \subseteq^* B \iff \forall p \in \beta\omega \setminus \omega \, (A \in p \Rightarrow B \in p).$$

Primeiramente, note que se $p \in \beta\omega \setminus \omega$, p contém o filtro de Frechet, isto é, todos os conjuntos cofinitos, daí $A \in p$ implica $A \cap (\omega \setminus n) \in p$ para cada $n < \omega$. Então se $A \subseteq^* B$, escolha algum n tal que $A \cap (\omega \setminus n) \subseteq B$; quando $A \in p$ para algum $p \in \beta\omega \setminus \omega$, também $A \cap (\omega \setminus n) \in p$, então seu superset B também estará em p.

Conversamente, se $A \nsubseteq^* B$, por definição $A \setminus B$ é infinito, então encontramos algum ultrafiltro não-principal $p \in \beta\omega \setminus \omega$ contendo $A \setminus B$; como em (i), segue que $A \in p$, mas $B \notin p$. □

Observação. Nós decidimos dar uma demonstração explicita do lema acima. Alternativamente, poderiamos ter derivado o resultado de forma puramente algébrica do Lema 5.3 (i) e (ii):

$$A^* \setminus B^* = A^* \cap (\beta\omega \setminus B^*) \overset{(2)}{=} A^* \cap (\omega \setminus B)^* \overset{(1)}{=} (A \cap (\omega \setminus B))^* = (A \setminus B)^*.$$

Para obter o Lema 5.10, isto é, (ii), lembre-se que A^* contém ultrafiltros não-principais se, e somente se, A é infinito. Então $A^* \setminus B^*$ contém um ponto de $\beta\omega \setminus \omega$ se, e somente se, $|A \setminus B| = \aleph_0$, isto é, $A \subseteq^* B$, que é o mesmo que a afirmação (ii) no lema.

Em geral, o mapa $A \mapsto A^*$ é um homomorfismo booleano entre $\mathscr{P}(\omega)$ e a base clopen $\mathscr{B}$ de $\beta\omega$, isto é, comuta com todas as operações booleanas de conjuntos como complemento, interseção (como provado no Lema 5.3), união, diferença de conjuntos, diferença simétrica etc., como mostrado para diferença de conjuntos na observação anterior. O caso da diferença simétrica

$$(A^*)\triangle(B^*) = (A\triangle B)^*$$

novamente nos diz o seguinte. Dado um ultrafiltro não-principal p, não depende de mudanças finitas no conjunto A se p está em A^* ou não; se B é igual a A a menos de mudanças finitas, isto é, $A\triangle B$ é finito, segundo o feito acima, $(A^*)\triangle(B^*)$ contém apenas ultrafiltros principais. Então se trabalharmos dentro do espaço compacto $\beta\omega \setminus \omega$, podemos simplesmente ignorar mudanças finitas de um conjunto $A \subseteq \omega$ quando considerarmos o respectivo conjunto clopen básico (ou vizinhança) A^*.

Trabalhamos no espaço $\beta\omega \setminus \omega$ agora. Então podemos enunciar a afirmação (ii) do Lema 5.10 simplesmente como segue:

$$A \subseteq^* B \iff A^* \subseteq B^* \text{ (dentro de } \beta\omega \setminus \omega).$$

Aqui A^* na verdade significa "o conjunto de todos os ultrafiltros não-principais contendo A"(agora A^* é vazio se, e somente se, A é finito).

Lembre-se da noção de pseudo-interseção: um conjunto (infinito) $A \subseteq \omega$ é chamado uma pseudo-interseção da família $\{A_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ se

$$A \subseteq^* A_i, \text{ para cada } i \in I.$$

Devido à relação acima, $A \subseteq \omega$ é uma pseudo-interseção da família $\{A_i : i \in I\}$ se, e somente se, A^* está contido em cada elemento da família correspondente $\{A_i^* : i \in I\}$, isto é,

$$A^* \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^*.$$

5.5 p-pontos do ponto de vista topológico

Agora podemos examinar as características especiais de p-pontos do ponto de vista topológico. Lembremos da definição de p-ponto:

Definição 5.11. Um ultrafiltro $p \in \beta\omega \setminus \omega$ é um p-ponto se toda coleção enumerável de conjuntos de p possui pseudo-interseção dentro de p, isto é, para cada família enumerável $\{A_i : i < \omega\} \subseteq p$ existe um conjunto $A \in p$ tal que

$$A \subseteq^* A_i \text{ para cada } i < \omega.$$

Como vimos acima, dada uma coleção enumerável $\{A_i^* : i < \omega\}$ de vizinhanças de qualquer ponto $p \in \beta\omega \setminus \omega$, podemos encontrar um conjunto aberto não vazio A^* tal que

$$A^* \subseteq \bigcap_{i<\omega} A_i^*,$$

mas não nos importamos se A^* pode ser escolhido de forma tal que o próprio ultrafiltro p está em A^*. De fato, essa é exatamente a propriedade caracterizando p-pontos:

Lema 5.12. *Um ponto $p \in \beta\omega \setminus \omega$ é um p-ponto se, e somente se, a interseção de qualquer coleção enumerável de vizinhanças de p é novamente uma vizinhança de p, isto é, cada coleção $\{A_i^* : i < \omega\}$ de vizinhanças de p tem uma vizinhança básica aberta A^* de p tal que*

$$p \in A^* \subseteq \bigcap_{i<\omega} A_i^*.$$

Figurativamente falando, enumeráveis vizinhanças de p podem ser substituídas por uma única ainda mais próxima de p.

Demonstração. Use a definição de p-ponto e o Lema 5.10 (ii) para $\beta\omega \setminus \omega$. □

Em outras palavras, p-pontos são os elementos de $\beta\omega \setminus \omega$ que "não são aproximados por enumeráveis vizinhanças": a interseção de enumeráveis vizinhanças de $p \in \beta\omega \setminus \omega$ possui interior não vazio com certeza, mas p é um p-ponto se, e somente se, p em si sempre está no interior de uma tal interseção; se p não é um p-ponto, pode ser que p esteja na fronteira da interseção (fechada).

Em termos de conjunto fechado correspondente

$$F = \bigcap_{i<\omega} A_i^*,$$

também podemos colocar dessa forma: p é um p-ponto se, e somente se, cada conjunto fechado enumerável gerado contendo p (isto é, um conjunto que pode ser escrito como interseção enumerável de conjuntos clopen) é de fato uma vizinhança (fechada) de p.

5.6 A propriedade universal de $\beta\omega$

Como prometido, gostariamos de concluir essa seção mostrando que $\beta\omega$ é de fato a assim chamada compactificação de Stone-Čech de ω; para conseguir esse resultado provaremos que $\beta\omega$ satisfaz uma certa "propriedade universal" que caracteriza a compactificação de Stone-Čech de ω (a menos de isomorfismo).

Vamos começar com uma definição geral de compactificação de Stone-Čech de um espaço topológico em termos dessa propriedade universal:

Definição 5.13. Um espaço topológico X é chamado espaço de Tychonoff se é Hausdorff e satisfaz a seguinte propriedade: quando $F \subseteq X$ é fechado e $x \in X \setminus F$, existe uma função $f : X \to [0,1]$ com $f(x) = 0$ e $f[F] \subseteq \{1\}$.

Definição 5.14. Seja X um espaço topológico. Um espaço K é chamado de compactificação Hausdorff de X se K é um compacto Hausdorff contendo (uma cópia homeomorfa a) X como subconjunto denso.

Observação. Pode ser mostrado que um espaço topológico tem uma compactificação Hausdorff se, e somente se, é Tychonoff.

Definição 5.15. Seja X um espaço Tychonoff. Um espaço compacto é chamado compactificação de Stone-Čech de X (denotado por βX) se é uma compactificação Hausdorff de X satisfazendo a seguinte propriedade universal:

($*$) Para cada espaço compacto Hausdorff Y e cada mapa continuo $f : X \to Y$, existe um mapa continuo unicamente determinado $\tilde{f} : \beta X \to Y$ tal que $\tilde{f}|_X = f$.

Em outras palavras, ($*$) diz que qualquer função continua de X para um espaço compacto Hausdorff Y pode ser estendido para uma função continua de βX ($\supseteq X$) para Y unicamente.

Enunciaremos o seguinte teorema sem demonstração:

Teorema 5.16. *Seja X um espaço de Tychonoff. Então X tem exatamente uma compactificação de Stone-Čech no sentido da Definição 5.15 (a menos de isomorfismo).*

Agora vamos mostrar que $\beta\omega$ (como definido na Definição 5.4 e usado ao longo dessa seção) é de fato a única (devido ao Teorema 5.16) compactificação de Stone-Čech do espaço discreto ω no sentido da Definição 5.15 (note que ω equipado com a topologia discreta é um espaço de Tychonoff; de fato, ω pode ser visto como um espaço métrico, e cada espaço métrico é Tychonoff):

Teorema 5.17. *O espaço topológico $\beta\omega$ é a compactificação de Stone-Čech do espaço discreto ω.*

Demonstração. Já provamos antes nessa seção que $\beta\omega$ é uma compactificação Hausdorff de ω (veja Teorema 5.6 e Definição 5.14). Então o que falta mostrar é que $\beta\omega$ satisfaz a propriedade universal ($*$) na Definição 5.15.

Seja Y um compacto Hausdorff arbitrário e seja $f : \omega \to Y$ uma função dos números naturais em Y (note que a propriedade ($*$) deve ser verificada apenas para funções contínuas f, mas - no caso-cada função é contínua já que ω carrega a topologia discreta). Vamos definir uma função contínua $\tilde{f} : \beta\omega \to Y$ estendendo f.

Se existe tal função contínua $\tilde{f} : \beta\omega \to Y$, é unicamente determinada porque Y é Hausdorff e já tem valores definidos em $\omega \subseteq \beta\omega$, que é um subconjunto denso de seu domínio. (Isso é verdade em geral: é fácil mostrar que cada função continua de um espaço topológico em um espaço Hausdorff é unicamente determinada pelos seus valores em um subconjunto denso de seu domínio).

Para cada ultrafiltro $p \in \beta\omega$, considere a expressão

$$\bigcap_{A \in p} \overline{f[A]},$$

onde $f[A]$ denota a imagem de A por f, e $\overline{f[A]}$ seu fecho topológico no espaço Y.

Nós afirmamos que esse conjunto determina unicamente um ponto no espaço Y:

$$\forall p \in \beta\omega : \left| \bigcap_{A\in p} \overline{f[A]} \right| = 1; \tag{5.1}$$

assim que mostrarmos isso, podemos definir $\tilde{f}(p)$ como o único elemento de $\bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}$.

Por um lado, $\bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}$ é não vazio já que Y é compacto. Para ver isso, lembre-se da seguinte caracterização de compacidade: cada coleção de conjuntos fechados com a propriedade da interseção finita tem interseção não vazia. O conjunto $\{A : A \in p\} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ tem a propriedade da interseção finita (já que p é filtro), então o mesmo vale para a família $\{f[A] : A \in p\} \subseteq \mathscr{P}(Y)$. Como $f[A] \subseteq \overline{f[A]}$, também $\{\overline{f[A]} : A \in p\}$ tem a propriedade da interseção finita (e é uma coleção de conjuntos fechados), o que nos dá

$$\bigcap_{A\in p} \overline{f[A]} \neq \emptyset.$$

Por outro lado, $\bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}$ não pode conter mais de um ponto já que Y é Hausdorff. Para ver isso, primeiro mostraremos o seguinte

Lema 5.18. *Seja $p \in \beta\omega$ e $y \in Y$, e seja $U(y)$ a coleção de vizinhanças de y. Então*

$$y \in \bigcap_{A\in p} \overline{f[A]} \iff \forall U \subseteq U(y)\ f^{-1}[U] \in p.$$

Demonstração. Note que

$$y \in \bigcap_{A\in p} \overline{f[A]} \iff \forall A \in p\, \forall U \in U(y)\ U \cap f[A] \neq \emptyset. \tag{5.2}$$

$\Rightarrow$) Assuma $y \in \bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}$ e $U \in U(y)$. Se $f^{-1}[U]$ não está em p, $\omega \setminus f^{-1}[U] \in p$ já que p é um ultrafiltro; mas por (5.2) temos

$$U \cap f[\omega \setminus f^{-1}[U]] \neq \emptyset,$$

o que é impossível.

$\Leftarrow$) Assuma $y \notin \bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}$. Segundo (5.2) podemos escolher um $U \in U(y)$ tal que existe um $A \in p$ com $U \cap f[A] = \emptyset$; segue que $f^{-1}[U] \cap A = \emptyset$, então $f^{-1}[U]$ não está em p (já que A está em p). □

Agora é fácil ver que $\bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}$ não pode conter dois pontos distintos de Y (nós usamos apenas a implicação da esquerda para a direita do lema acima): sejam y_1, y_2 dois pontos distintos ambos contidos em $\bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}$; como Y é Hausdorff, podemos encontrar vizinhanças $U_1 \in U(y_1)$ e $U_2 \in U(y_2)$ tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, usando o lema, obtemos $f^{-1}[U_1] \in p$ e $f^{-1}[U_2] \in p$, que é impossível porque $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ implica $f^{-1}[U_1] \cap f^{-1}[U_2] = \emptyset$.

Então a prova de (5.1) acabou e a função $\tilde{f} : \beta\omega \to Y$ pode ser definida por

$$\tilde{f} : \beta\omega \to Y \qquad p \mapsto \tilde{f}(p) \in \bigcap_{A\in p} \overline{f[A]}$$

Resta mostrar que a função $\tilde{f} : \beta\omega \to Y$ é continua e de fato igual a $f : \omega \to Y$ no domínio comum $\omega \subseteq \beta\omega$. Esse último é imediato da definição de $\tilde{f}$: dado um número natural $n \in \omega$ (isto é, o ultrafiltro principal p contendo o unitário $\{n\}$), temos

$$\tilde{f}(n) \in \bigcap_{A \in p} \overline{f[A]} \subseteq \overline{f[\{n\}]} = \overline{\{f(n)\}} = \{f(n)\},$$

já que $\{n\} \in p$ e cada unitário em um espaço Hausdorff é um conjunto fechado; então $\tilde{f}(n) = f(n)$ para cada $n \in \omega$.

Para mostrar que $\tilde{f}$ é continua, lembre-se que uma função $g : X \to Y$ de um espaço topológico X em um espaço topológico Y é continua se, e somente se, para cada ponto $x \in X$ vale o seguinte: quando V é uma vizinhança de $g(x)$, existe uma vizinhança U de x tal que $g[U] \subseteq V$. Pode ser facilmente mostrado que todo espaço Y compacto Hausdorff é regular (isto é, um conjunto fechado e um ponto não contido nele podem ser separados por vizinhanças); como consequência, as vizinhanças fechadas de um ponto $y \in Y$ formam uma base local para y, isto é, para cada vizinhança $V \in U(y)$ existe vizinhança fechada V' de y tal que $V' \subset V$.

Então seja $p \in \beta\omega$ e $V \in U(\tilde{f}(p))$ uma vizinhança de $\tilde{f}(p) \in Y$. Como Y é compacto Hausdorff, podemos escolher uma vizinhança fechada $V' \in U(\tilde{f}(p))$ com $V' \subseteq V$. Iremos encontrar uma vizinhança de p tal que sua imagem sobre $\tilde{f}$ está contida em $V' \subseteq V$. Pelo Lema 5.18, $A_0 = f^{-1}[V'] \subseteq \omega$ está em p (note que $y \in \bigcap_{A \in p} \overline{f[A]}$, o lado esquerdo do lema, é o mesmo que $\tilde{f}(p) = y$); então o conjunto básico clopen correspondente A_0^* é uma vizinhança de p (lembre-se que $A \in p$ se, e somente se, $p \in A^*$). Afirmamos que A_0^* é a vizinhança desejada. Seja p em A_0^* (isto é, $A_0 \in p$); temos que mostrar que $\tilde{f}(p) \in V'$:

$$\tilde{f}(p) \in \bigcap_{A \in p} \overline{f[A]} \subseteq \overline{f[A_0]} = \overline{f[f^{-1}[V']]} \subseteq V'$$

pois $f[f^{-1}[V']]$ está contido em V' e V' é fechado, o que termina a demonstração do teorema. □

Com essas caracterizações do espaço $\beta\omega$ poderemos analisar, na próxima seção, uma aplicação de p-pontos para determinar a homogeneidade desse espaço.

CAPÍTULO 6

Aplicação em Topologia: a homogeneidade de $\beta\omega \setminus \omega$

Dado um espaço topológico X é uma questão interessante tentar determinar quais propriedades sua compactificação de Stone-Čech βX possui. No caso particular de $\beta\omega$, a existência de p-pontos nos permite determinar facilmente que o espaço $\beta\omega \setminus \omega$ não é homogêneo. Seguiremos [19] para demonstrar esse fato.

Atualmente é conhecido que $\beta\omega \setminus \omega$ não é homegêneo em ZFC, sem a necessidade das hipóteses adicionais que usaremos adiante. Mas a demonstração desse fato exige técnicas de Topologia que estão além do que foi feito até aqui; o leitor interessado pode consultar [8].

Começaremos mostrando que existem $2^{2^{\aleph_0}}$ ultrafiltros em ω (devida a [19]). Esse é um caso particular de um resultado mais geral, devido a Pospíšil, que afirma existirem $2^{2^{|A|}}$ ultrafiltros em um conjunto infinito A. Sua demonstração pode ser encontrada em [13].

Teorema 6.1. *Existem exatamente $2^{2^{\aleph_0}}$ ultrafiltros em ω.*

Faremos isso ao construir uma família de ultrafiltros em ω de tamanho $2^{2^{\aleph_0}}$. Primeiramente precisamos de um lema:

Lema 6.2. *Existe uma família $\mathscr{F}$ de subconjuntos de ω, com $2^{\aleph_0}$ elementos, tal que*

$$F_1 \cap \ldots \cap F_n \cap (\omega \setminus F_{n+1}) \cap \ldots \cap (\omega \setminus F_m) \neq \emptyset$$

para toda coleção finita de conjuntos distintos $F_i \in \mathscr{F}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Demonstração. Seja ω a união de conjuntos A_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, consistindo de 2^{2^p} elementos. Para p fixado, seja $q = 2^p$, e nomeie os elementos de A_p por q-uplas ordenadas $(x_1, \ldots, x_q)$, onde $x_i = 0$ ou 1; seja E_i o subconjunto de A_p que consiste das q-uplas com $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, q)$. Denote esses 2^p conjuntos E_i por $E(t_1, \ldots, t_p)$, onde $t_k = 0$ ou 1.

Para cada sequência $t_1, t_2, t_3, \dots$ com $t_k = 0$ ou 1, forme o conjunto

$$E(t_1, t_2, t_3, \dots) = E(t_1) \cup E(t_1, t_2) \cup E(t_1, t_2, t_3) \cup \dots,$$

e seja $\mathscr{F}$ a família de todos os conjuntos assim obtidos; $\mathscr{F}$ evidentemente tem $2^{\aleph_0}$ elementos.

Se $F_1, \dots, F_n, F_{n+1}, \dots, F_m$ são elementos distintos de $\mathscr{F}$, existe um inteiro p tal que nenhum par das sequências correspondentes possuem os mesmos primeiros p termos iniciais $t_1, \dots, t_p$. Isso significa que os conjuntos $G_i = F_i \cap A_p$ $(i = 1, \dots, m)$ são distintos, e é fácil verificar que

$$G_1 \cap \dots \cap G_n \cap (A_p \setminus G_{n+1}) \cap \dots \cap (A_p \setminus G_m) \neq \emptyset.$$

Isso prova o lema. □

Com isso seguimos para a demostração do Teorema 6.1:

Demonstração. Como ω possui $2^{\aleph_0}$ subconjuntos, existem no máximo $2^{2^{\aleph_0}}$ ultrafiltros em ω. Por outro lado, podemos usar a família $\mathscr{F}$ do lema para construir $2^{2^{\aleph_0}}$ coleções $\mathscr{G}$ de subconjuntos de ω, ao considerar cada conjunto $F \in \mathscr{F}$, e admitindo ou F ou $\omega \setminus F$ em $\mathscr{G}$. Pelo lema, cada $\mathscr{G}$ assim obtido tem a propriedade da interseção finita; aumentando cada $\mathscr{G}$ para um ultrafiltro, obtemos $2^{2^{\aleph_0}}$ ultrafiltros distintos. □

Generalizando a definição de p-ponto topológico dada na Definição 5.11 para um espaço compacto Hausdorff qualquer, obtemos o seguinte

Teorema 6.3. *Se todo ponto de um espaço compacto Hausdorff X é um p-ponto, então X é finito.*

Demonstração. Se todo ponto de X é um p-ponto, então a interseção de qualquer família enumerável de conjuntos abertos é facilmente verificável ser aberta. Daí a união enumerável de conjuntos fechados é fechada. Segue que todo conjunto enumerável de X é fechado e discreto. Isso é impossível em um espaço compacto infinito. □

Retomando o Teorema 1.21 e o Lema 5.12, além do Teorema acima, podemos enunciar o

Teorema 6.4. *Se vale CH, então $\beta\omega \setminus \omega$ é não-homogêneo.*

Demonstração. Sabemos que $\beta\omega \setminus \omega$ tem um p-ponto Ω_1. Como $\beta\omega \setminus \omega$ é infinito e compacto, o Teorema 6.3 mostra que $\beta\omega \setminus \omega$ também contém um ponto Ω_2 que não é um p-ponto de $\beta\omega \setminus \omega$. É evidente que nenhum homeomorfismo de $\beta\omega \setminus \omega$ leva Ω_1 em Ω_2. □

Naturalmente, podemos substituir a hipótese CH no Teorema 6.4 por qualquer outra condição que nos permita obter um p-ponto, como vimos no Teorema 1.24, Corolário 1.28 e Teorema 1.34.

A seguir apresentaremos um pouco mais da teoria sobre ultrafiltros presente em [19].

Todo ultrafiltro Ω é uma coleção de subconjuntos de ω, e como tal pode ser considerado como um conjunto parcialmente ordenado, com a ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos. Dizemos que dois ultrafiltros são do mesmo tipo se são isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados. Pode-se perguntar se quaisquer dois ultrafiltros não-principais em ω são do mesmo tipo. O seguinte teorema mostra que a resposta é negativa.

Se π é uma permutação de ω (isto é, um mapa bijetor de ω em ω), seja $\pi(\Omega)$ o ultrafiltro que contém os conjuntos $\pi(E)$ para todo $E \in \Omega$.

Teorema 6.5. *Se dois ultrafiltros não-principais Ω_1 e Ω_2 são do mesmo tipo, então existe uma permutação π de ω tal que $\Omega_2 = \pi(\Omega_1)$. Existem $2^{2^{\aleph_0}}$ tipos de ultrafiltros não-principais em $\mathbb{N}$; cada tipo contém $2^{\aleph_0}$ ultrafiltros.*

Demonstração. Se Ω_1 e Ω_2 são do mesmo tipo, existe uma mapa bijetor f de Ω_1 em Ω_2 tal que $A \subseteq B$ implica $f(A) \subseteq f(B)$. Em particular, $f(\omega) = \omega$. Seja H_n o conjunto de todos os membros de ω, exceto n. Os conjuntos H_n são subconjuntos maximais próprios de ω e daí são permutados por f. Defina π tal que $\pi(n) = m$ se $f(H_n) = H_m$.

Escolha $E \in \Omega_1$, seja $F = \omega \setminus E$. Então $E = \bigcap_{n \in F} H_n$. Seja $E' = \bigcap_{n \in F} f(H_n)$. Como $f(E) \subseteq f(H_n)$, $f(E) \subseteq E'$. Analogamente, $f^{-1}(E') \subseteq E$. Daí, $f(E) = E'$. Mas $\omega \setminus E'$ consiste dos inteiros $\pi(n)$ $(n \in F)$; isto é, $\omega \setminus f(E) = \pi(\omega \setminus E)$. Tomando complementos, obtemos $f(E) = \pi(E)$, e a primeira parte do teorema segue.

Como ω possui exatamente $2^{\aleph_0}$ permutações, o resultado acima mostra que nenhum tipo pode conter mais de $2^{\aleph_0}$ ultrafiltros não-principais, do que existem $2^{2^{\aleph_0}}$ tipos.

Para completar o teorema, escolha Ω não-principal e um conjunto $A \in \Omega$ cujo complemento é infinito, e seja $\mathscr{F}$ a família de $2^{\aleph_0}$ subconjuntos infinitos de ω tal que quaisquer dois membros de $\mathscr{F}$ possuem interseção finita (possivelmente vazia); tal família será construída abaixo. Para cada $E \in \mathscr{F}$ existe uma permutação de ω que leva Ω para um ultrafiltro que contém E. Elementos distintos de $\mathscr{F}$ originam ultrafiltros distintos dessa forma, de modo que Ω pertence ao mesmo tipo que $2^{\aleph_0}$ outros ultrafiltros.

Para construir uma família $\mathscr{F}$ com as propriedades acima, associe a cada sequência $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $(x_i = 0$ ou $1)$ o conjunto $E(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ que consiste dos inteiros

$$2^{n+1} + 2^n x_n + 2^{n-1} x_{n-1} + \ldots + 2x_1 \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

e seja $\mathscr{F}$ a família de todos os conjuntos assim obtidos. $\square$

Teorema 6.6. *Se $\Omega_1 \neq \Omega_2$, existe uma permutação π de ω tal que $\pi(\Omega_1) = \Omega_1$, $\pi(\Omega_2) \neq \Omega_2$.*

Demonstração. Se $\Omega_1 \neq \Omega_2$, existe um conjunto $E_1 \subseteq \omega$ com complemento infinito tal que $E_1 \in \Omega_1$, $\omega \setminus E_1 \in \Omega_2$. Escolha $\Omega_3 \neq \Omega_2$ tal que $\omega \setminus E_1 \in \Omega_3$. Existem conjuntos infinitos E_2 e E_3 tais que $E_2 \in \Omega_2$, $E_3 \in \Omega_3$, $\omega \setminus E_1 = E_2 \cup E_3$, $E_2 \cap E_3 = \emptyset$. Escolha π a permutação de ω tal que $\pi(n) = n$ para $n \in E_1$, $\pi(n) \in E_3$ se $n \in E_2$, $\pi(n) \in E_2$ se $n \in E_3$. Esse π tem as propriedades desejadas. $\square$

O teorema anterior possui um corolário interessante. Seja Γ o grupo de todas as permutações em ω e considere o subgrupo de Γ que consiste das permutações que fixam um Ω dado. Pelo Teorema 6.6 diferentes Ω's originam subgrupos diferentes, e o Teorema 6.1 mostra que Γ possui $2^{2^{\aleph_0}}$ subgrupos.

Referências Bibliográficas

[1] AHARONI, R., MILNER, E. C., and PRIKRY, K. (1990). **Unfriendly partitions of a graph**. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 50(1): 1–10.

[2] AURICHI, L. F.. **Notas de Aula - Topologia**. Disponível em https://sites.icmc.usp.br/aurichi/lib/exe/fetch.php?media=curso:topologia2020.pdf, 2020.

[3] BAUMGARTNER, J. E.. **Sacks forcing and the total failure of Martin's Axiom**. Topology and its applications, vol. 19 (1985), 211-225.

[4] BAUMGARTNER, J. E.; LAVER, R. **Iterated perfect-set forcing**. Ann. Math. Logic 17 (1979), 271-288.

[5] BLASS, A. **Combinatorial cardinal characteristics of the continuum**, in Handbook of Set Theory, Vol. I, M. Foreman e A. Kanamori, eds., Springer, 2010, 395-490.

[6] BLASS, A. R., SHELAH, S.. **Ultrafilters with small generating sets**. Israel J. Math., 65(3) (1989), 259–271.

[7] COPLÁCOVÁ, E.; VOJTÁŠ, P. **A new sufficient condition for the existence of q-points in $\beta\omega \setminus \omega$**. Topology, theory and applications (Á. Császár, editor), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 41, North-Holland, Amsterdam, 1985, 199-208.

[8] FROLÍK, Z. **Sums of ultrafilters**. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 87–91.

[9] HALPERN, J. D.; PINCUS, D. **Partitions of products**. Trans. Amer. Math. Soc., 267 (1981), 549-568.

[10] HART, K. P. **Ultrafilters of character ω_1**. The Journal of Symbolic Logic, vol. 54 (1989), 1-15.

[11] JECH, T. **Set theory**. 3rd Millennium ed, rev. and expanded. - Berlin; Heidelberg; New York; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002 (Springer monographs in mathematics).

[12] JUDAH, H.; BARTOSZYNSKI, T. **Set Theory - On the Structure of the Real Line**. A K Peters, Wellesley, MA, 1995.

[13] KUNEN, K. **Set Theory**. College Publications, Edição revisada, 2013.

[14] LAVER, R. **Products of infinitely many perfect tress**. Journal of the London Mathematical Society, ser. 2, vol. 29 (1984), 385-396.

[15] MALLIARIS, M.; SHELAH, S. **Cofinality spectrum theorems in model theory, set theory and general topology**. Journal of the American Mathematical Society, vol. 29 (1) (2012), 237-297.

[16] MILLER, A. W. **Ultrafilters with property (s)**. Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 137, no. 9, 2009, pp. 3115–21.

[17] MILNER, E. C.; SHELAH, S. **Graphs with no unfriendly partition**. Cambridge University Press (1990), 373–384.

[18] QUICKERT, S.; GESCHKE, S. **On Sacks forcing and the Sacks property**, in Classical and New Paradigms of Computation and their Complexity Hierarchies, Trends in Logic-Studia Logica Library, Vol. 23, Kluwer, Dordrecht, 2004, 95–139.

[19] RUDIN, W. **Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications**. Duke Math. J. 23(3) (September 1956), 409-419.

[20] WOHOFSKY, W. **On the existence of p-points and other ultrafilters in the Stone-Čech-compactification of** $\mathbb{N}$. Dissertação de mestrado. Disponível em http://www.logic.univie.ac.at/~wolfgang/Diplomarbeit_Wolfgang_Wohofsky.pdf, 2008.