



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



Um estudo sobre índices de campos de vetores

Leandro de Jesus Nascimento Bacelar

São Carlos-SP
2023



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



Um estudo sobre índices de campos de vetores

Leandro de Jesus Nascimento Bacelar

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientadora: Thaís Maria Dalbello.

São Carlos-SP
2023

*C'est par la logique que nous prouvons, mais par l'intuition que nous
découvrons.*

Henri Poincaré

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar a noção de índice de campos de vetores definidos em superfícies compactas e apresentar o Teorema de Poincaré-Hopf, observando como tal resultado conecta elementos topológicos a objetos geométricos.

Palavras-chave: *topologia diferencial, índice de campos de vetores, superfícies diferenciáveis.*

Abstract

One of the main goals of this project is to study the index of vector fields in compact surfaces and present the Poincaré-Hopf Theorem, remarking that such a result connects topological elements to geometric objects.

Key words: *differential topology, index of vector fields, smooth surfaces.*

Lista de Figuras

1.1:	Parametrização do Cone.	12
1.2:	Argumento de conexidade.	12
1.3:	Mudança de coordenada a partir de parametrizações.	13
1.4:	Mudança de coordenada em espaços de diferentes dimensões.	15
1.5:	Orientação em \mathbb{R}^2	22
2.1:	Campo de vetores v em \mathbb{R}^2 do Exemplo 2.1.2.	27
2.2:	Exemplos do Índice de Poincaré-Hopf.	28
4.1:	Campo de vetores v em \mathbb{R}^2 do Exemplo 4.1.5.	43
5.1:	Representação do fibrado tangente da esfera S^1	52
5.2:	Campo de vetores sobre a esfera S^1 do Exemplo 5.1.6.	54
5.3:	Singularidades simples do campo.	55
7.1:	Triangularização da Esfera do Exemplo 7.1.10.	65
7.2:	Triangularização do Toro do Exemplo 7.1.11.	65
7.3:	Triangularização do Toro pinçado do Exemplo 7.1.12.	66
7.4:	Todas as singularidades de w pertencem a $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(a))$	68
7.5:	Divisão baricêntrica	70
7.6:	Linhas integrais do campo w	70
7.7:	Campos de vetores sobre a esfera e sobre o toro.	74

Sumário

Introdução	8
1 Preliminares	10
1.1 Superfícies m dimensionais de classe C^k	10
1.2 Espaço tangente a uma superfície	16
1.3 Noção de orientação no espaço e em superfícies	18
1.4 Deformação contínua de aplicações	23
2 Campo de Vetores e o Índice de Poincaré-Hopf	26
2.1 Campos de vetores em \mathbb{R}^2	26
2.2 Índice de Poincaré-Hopf	27
3 Grau Topológico	29
3.1 Aplicações Próprias	29
3.2 Aplicação Diferenciável entre Superfícies	30
3.3 Grau de uma aplicação	31
3.4 Resultados e aplicações de grau	38
4 O Grau Local	39
4.1 Propriedades e Exemplos	39
4.2 O Grau Local	43
5 Campos de Vetores	52
5.1 Campos de vetores sobre uma superfície	52
5.2 Singularidades do Campo	54
6 O Índice de Poincaré-Hopf	59
6.1 Índice de singularidades isoladas	59
6.2 Propriedades do índice	60
7 Teorema de Poincaré-Hopf	63
7.1 Característica de Euler	63
7.2 Teorema de Poincaré-Hopf	65
8 Conclusão	75
9 Apêndice	76
9.1 $z^n = a$ possui n raízes	76
9.2 Transversalidade	76
Referências	77

Introdução

Um dos maiores saltos conceituais da matemática foi dado quando René Descartes revolucionou a forma como concebemos a geometria, proporcionando diversos avanços nas ciências exatas e na matemática. Podemos associar, como sendo um desses avanços, a recente teoria de variedades diferenciáveis, que vem ganhando ao longo do tempo interesse dos matemáticos. Com o intuito de entender melhor este objeto abstrato, podemos conceber uma superfície como um caso particular de uma variedade diferenciável, e este trabalho segue nesse sentido.

Adicionalmente, o estudo de campos de vetores e suas particularidades tem grande importância em vários ramos da matemática e diversas aplicações práticas, e por esse motivo vem sendo estudado amplamente. Uma das possíveis formas com a qual podemos abordar este tema é através dos invariantes topológicos, analisando o comportamento de um campo vetorial na vizinhança de um ponto singular, ou seja, em uma singularidade.

O índice de Poincaré-Hopf é um dos invariantes que temos para esta teoria, e sem dúvidas um dos mais importantes também, possuindo propriedades, que majestosamente, une dois ramos distintos da topologia: a Topologia Algébrica e a Topologia Diferencial. Graças a Henri Poincaré, obtemos a formulação desta teoria e sua demonstração para o caso 2-dimensional, e sua generalização veio através do estudo de Heinz Hopf. Dessa forma, o resultado obtido desses incríveis trabalhos tem como ponto central o teorema que ficou conhecido como Teorema de Poincaré-Hopf.

Tal teorema associa a característica de Euler de uma superfície compacta M com a soma dos índices de Poincaré-Hopf das singularidades isoladas de um campo de vetores contínuo definido em M .

Este trabalho tem como objetivo principal estudar o índice de Poincaré-Hopf de singularidade de campos de vetores em uma superfície compacta. Dividiremos nosso estudo da seguinte forma: no Capítulo 1, definiremos uma superfície, assim como a noção de orientação, juntamente com o conceito de deformação contínua; no Capítulo 2, motivaremos o estudo dos índices, passando por campos de vetores em \mathbb{R}^2 , definindo o índice de Poincaré-Hopf para este caso; no Capítulo 3, introduziremos o grau de aplicações entre superfícies e discutimos algumas de suas propriedades; em seguida no Capítulo 4, introduziremos formalmente o grau local, uma ferramenta imprescindível para a generalização do índice de Poincaré-Hopf; no Capítulo 5, estenderemos a noção de campos de vetores definidos no plano para definidos em uma superfície e além disso, definiremos singularidades nestes campos; no Capítulo 6, definimos o índice de Poincaré-Hopf de um campo vetorial sobre uma superfície na singularidade e discutiremos algumas de suas propriedades; no Capítulo 7, definiremos a Característica de Euler de uma superfície compacta e enfim enunciaremos e demonstraremos o caso bidimensional do Teorema de Poincaré-Hopf; por fim, o Capítulo 8, contém algumas considerações finais.

Apoiamos nosso trabalho fortemente em conceitos e noções da Geometria Analítica, do Cálculo Infinitesimal, da Álgebra Linear e da Topologia Geral. Por este motivo, o conhecimento prévio dessas teorias é fundamental para a leitura deste trabalho. Contudo, a forma como abordamos é tal que procuramos fazer o essencial para o bom entendimento das questões tratadas, não obstante, recomendamos as referências indicadas como sendo uma opção a quem deseja se aprofundar nestes estudos e esperamos que nosso trabalho seja uma introdução para tais.

1 Preliminares

Neste capítulo, pretendemos dar uma breve introdução aos principais conceitos usados no decorrer do texto, tais como superfícies diferenciáveis, orientação e deformações contínuas, procurando fornecer o mínimo necessário desses conceitos para uma boa compreensão dos resultados dos capítulos seguintes.

1.1 Superfícies m dimensionais de classe C^k

Vejam agora o conceito de superfícies no espaço euclidiano e algumas de suas propriedades. Iremos, além de construir alguns exemplos, demonstrar teoremas fundamentais na construção dessa teoria. Para podermos definir o que é de fato uma superfície, inicialmente precisamos de algumas definições que apresentaremos na sequência.

Definição 1.1.1. Chamamos de imersão do aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , tal que para todo $x \in U$, a derivada $f'(x): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear injetiva.

Exemplo 1.1.2. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, as imersões $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ são caminhos regulares. Exemplificando, a aplicação

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^3 - t, t^2), \end{aligned}$$

é uma imersão de \mathbb{R} no plano. De fato, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = (3t^2 - 1, 2t)$$

é uma transformação linear injetiva. Porém a aplicação f em si não é injetiva, tendo em vista que $f(-1) = (0, 1) = f(1)$.

A condição de injetividade da imersão é um fato bastante importante para a teoria. Nesse sentido, impondo essa condição temos o que iremos chamar de parametrização. Formalmente temos:

Definição 1.1.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Chamamos de parametrização de classe C^k e dimensão m do conjunto V uma imersão $\varphi: U \rightarrow V$ de classe C^k , que seja também um homeomorfismo de U sobre V .

Observação 1.1.4. A Definição 1.1.3 supõe, implicitamente, que $m \leq n$.

Definição 1.1.5. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$. Chamamos de projeção a aplicação

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) &\longmapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}), \end{aligned}$$

definida a partir da escolha de m índices $i_1 < \dots < i_m$, onde cada $i_k \in \{1, \dots, n\}$.

Exemplo 1.1.6. Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma aplicação de classe C^k definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Consideremos o seguinte conjunto

$$V = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid x \in U\} = \text{graf}(f).$$

Temos que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi: U &\rightarrow V \\ x &\mapsto (x, f(x)), \end{aligned}$$

é uma parametrização de dimensão m e classe C^k do conjunto $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$. De fato, consideremos a projeção sobre as m primeiras coordenadas, a aplicação $\pi: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Note que, $\pi \circ \varphi = id_V$, e portanto φ é um homeomorfismo, tal que a sua inversa é dada por $\pi|_V$. Agora, aplicando a regra da cadeia, temos que

$$\pi \circ \varphi' = id_{\mathbb{R}^m},$$

logo $\varphi'(x): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ é injetiva, para todo $x \in U$, portanto φ é uma imersão.

Definição 1.1.7. Dizemos que o conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície de dimensão m e de classe C^k , quando para todo ponto $p \in M$, existe uma parametrização $\varphi: U \rightarrow V \cap M$, de classe C^k , definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, $p \in U$, onde $V \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Dizemos que $\dim(M) = m$ e que M é uma superfície m -dimensional.

Observação 1.1.8. Dada a parametrização φ , como em particular φ é um homeomorfismo, às vezes trabalharemos com sua inversa. Tal aplicação será chamada carta da superfície, ou seja, dada uma superfície S de dimensão m , e $\varphi: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, temos que $\varphi^{-1}: V \rightarrow U$ é uma carta de S .

Exemplo 1.1.9. A partir do Exemplo 1.1.6, podemos concluir que todo gráfico de uma aplicação C^k é uma superfície de classe C^k , na qual sua dimensão depende da dimensão do espaço onde a aplicação está definida.

Porém, nem toda superfície diferenciável é gráfico de uma aplicação. Por exemplo, veremos mais adiante, que a esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma superfície n -dimensional de \mathbb{R}^{n+1} , mas como sabemos não pode ser dada como gráfico de uma aplicação.

Exemplo 1.1.10. O cone não é uma superfície diferenciável. De fato, seja o conjunto

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, a, b, c \in \mathbb{R}^* \right\}$$

o cone. Suponhamos que C é uma superfície de classe C^0 , ou seja, se $x \in C$, então existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, onde $x \in A = U \cup C$ e uma bijeção contínua $f: A \rightarrow B$ (dado $B = B(y, \delta)$ para algum $y \in \mathbb{R}^2$ e $\delta > 0$), tais que $f^{-1}: B \rightarrow A$ é contínua.

Agora, observe que $0 = (0, 0, 0) \in C$. Dessa forma, pelo fato de f ser uma bijeção, temos que existe $y \in B$, tal que $f(0) = y$, e também, tal que $f^{-1}(y) = 0$. Veja Figura 1.1.10.

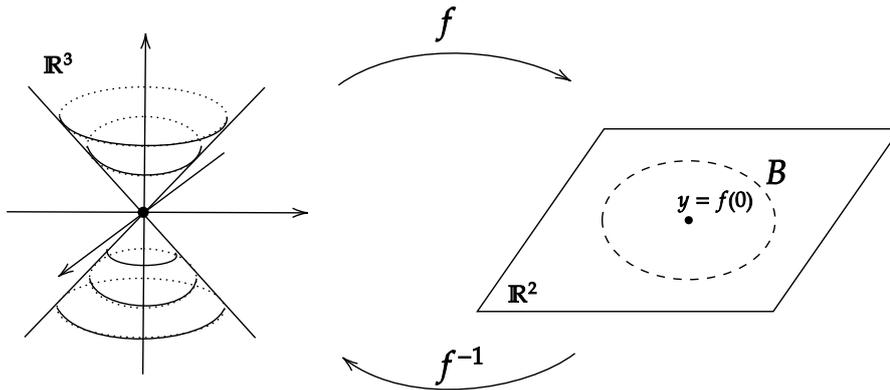


Figura 1.1: Parametrização do Cone.

Logo, podemos considerar o conjunto conexo $B \setminus \{y\}$. De fato, dados $a, b \in B$, tais que $y \in \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}$, podemos tomar o ponto $c \in B$, $c \neq y$ e os caminhos retilíneos $g: [0, 1] \rightarrow B$ e $h: [0, 1] \rightarrow B$ onde $g(0) = a$, $g(1) = c$, $h(0) = c$ e $h(1) = b$, e portanto temos o caminho justaposto $g \vee h: [0, 1] \rightarrow B$, onde $(g \vee h)(0) = a$ e $(g \vee h)(1) = b$, que liga os pontos a e b , de acordo com a Figura 1.1.10.

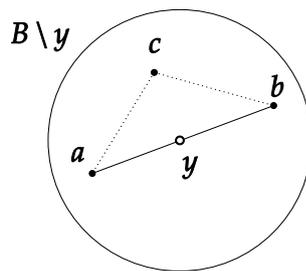


Figura 1.2: Argumento de conexidade.

E, como para todos os outros pontos de B , temos que existe um caminho ligando-os (em particular o caminho retilíneo), temos que $B \setminus \{y\}$ é conexo por caminhos, e portanto conexo.

Dessa forma, consideremos a restrição $f^{-1}|_{B \setminus \{y\}}$. Pelo fato de ser bijeção, temos então a aplicação $f^{-1}: B \setminus \{y\} \rightarrow A \setminus \{0\}$, dado que $f^{-1}(y) = 0$. Agora, como f^{-1} é contínua, temos que a restrição $f^{-1}|_{B \setminus \{y\}}$ também é contínua.

Logo, a imagem de $B \setminus \{y\}$ pela aplicação f^{-1} é um conjunto conexo, ou seja,

$$f^{-1}(B \setminus \{y\})$$

é conexo, o que é um absurdo, pois podemos tomar os conjuntos

$$C^- = \{(x, y, z) \in A \mid z < 0\} \quad \text{e} \quad C^+ = \{(x, y, z) \in A \mid z > 0\},$$

e observamos que $A \setminus \{0\} = C^- \cup C^+$, onde $\overline{C^-} \cap C^+ = \emptyset = C^- \cap \overline{C^+}$, ou seja $A \setminus \{0\} = C^- \cup C^+$ é uma cisão não trivial, logo $A \setminus \{0\}$ é desconexo.

A seguir, estudaremos de que forma podemos encontrar parametrizações, levando em consideração superfícies de classe C^k , pois dessa maneira seremos capazes de definir um difeomorfismo entre superfícies. Dessa forma, inicialmente, veja a seguinte teorema:

Teorema 1.1.11. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k , $\varphi: V_0 \rightarrow V$ uma parametrização em M ($V_0 \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $V \subset M$ aberto). Para todo $p = \varphi(x_0) \in V$, existe uma projeção $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $\pi \circ \varphi: Z_0 \rightarrow W_0$ é um difeomorfismo, onde $Z_0 \subset V_0$ aberto, com $x_0 \in Z_0$, e $W_0 \subset \mathbb{R}^m$ aberto.*

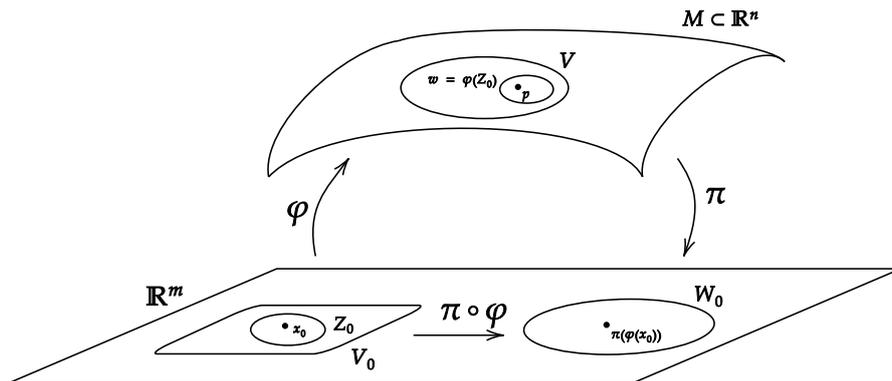


Figura 1.3: Mudança de coordenada a partir de parametrizações.

Demonstração. Consideremos a matriz jacobiana de φ no ponto $x_0 \in V_0$, $J_\varphi(x_0) =$

$\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, ou seja,

$$J_\varphi(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m}(x_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_m}(x_0) \end{bmatrix}_{n \times m}.$$

Note que $J_\varphi(x_0)$ tem posto m , ou seja, temos que m linhas desta matriz são linearmente independentes. Tais linhas possuem índices $i_1 < \cdots < i_m$ e a matriz formada por essas linhas tem determinante diferente de zero, já que são linearmente independentes, e assim tal matriz é invertível, denotaremos

$$J = \left[\frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial x_j}(x_0) \right] \in M_{m \times m}(\mathbb{R}).$$

Dessa forma, temos que J é a matriz Jacobiana de $\pi \circ \varphi: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$, pois pela definição, os índices $i_1 < \cdots < i_m$ definem a projeção $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Portanto, o resultado segue do Teorema da Aplicação Inversa. \square

Teorema 1.1.12. *Seja M uma superfície m -dimensional de classe C^k e $\varphi: U_0 \rightarrow U$ uma parametrização do aberto $U \subset M$. Se $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ é um aberto e $\xi: V_0 \rightarrow U_0$ é um difeomorfismo de classe C^k , então a composição*

$$\varphi \circ \xi: V_0 \rightarrow U$$

ainda é uma parametrização de $U \subset M$.

Definição 1.1.13. Chamamos a aplicação ξ definida acima de mudança de coordenadas.

Corolário 1.1.14. *Toda superfície de classe C^k é localmente o gráfico de uma aplicação de classe C^k .*

Demonstração. Nesta demonstração adotaremos as notações do Teorema 1.1.11 e denotaremos $z \in \mathbb{R}^n$ da forma $z = (y, y')$, com $\pi(z) = y$.

A aplicação $\psi: W_0 \rightarrow W$ é uma parametrização, onde $\psi = \varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}$. Além disso,

para $y \in W_0$, temos:

$$\begin{aligned}\pi(\psi(y)) &= \pi((\varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1})(y)) \\ &= (\pi \circ (\varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}))(y) \\ &= ((\pi \circ \varphi) \circ (\pi \circ \varphi)^{-1})(y) \\ &= y.\end{aligned}$$

Assim,

$$\pi(\psi(y)) = y \Rightarrow \psi(y) = \pi^{-1}(y) = z \Rightarrow \psi(y) = (y, y').$$

Portanto, W é o gráfico da seguinte aplicação de classe C^k

$$\begin{aligned}f: W_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} \\ y &\longmapsto f(y) = y'.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.1.15. *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e dimensão m . Se uma aplicação $f: V_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k definida no aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^p$ é tal que $f(V_0) \subset W$, para algum aberto $W \subset M$, parametrizada por $\psi: W_0 \longrightarrow W$, então $\psi^{-1} \circ f: V_0 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação de classe C^k .*

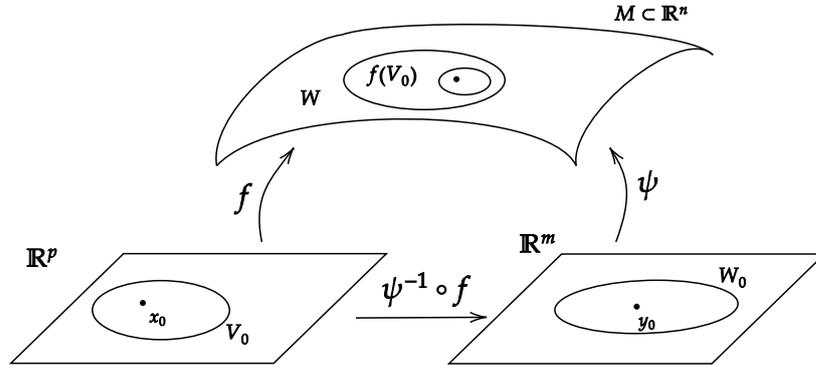


Figura 1.4: Mudança de coordenada em espaços de diferentes dimensões.

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.11, temos que para cada ponto $x_0 \in V_0$, tal que $f(x_0) = \psi(y_0)$, existe uma projeção $\pi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $\pi \circ \psi$ é um difeomorfismo local, entre uma vizinhança de y_0 e um aberto de \mathbb{R}^m . Assim, nessa vizinhança, temos que

$$\psi^{-1} \circ f = \psi^{-1} \circ (\pi^{-1} \circ \pi) \circ f = (\psi^{-1} \circ \pi^{-1}) \circ (\pi \circ f) = (\pi \circ \psi)^{-1} \circ (\pi \circ f).$$

Portanto, $\psi^{-1} \circ f$ é de classe C^k .

□

Corolário 1.1.16. *Em uma superfície de classe C^k , toda mudança de coordenadas $\psi^{-1} \circ \varphi$ é um difeomorfismo de classe C^k .*

Demonstração. De Teorema 1.1.11, temos que $\psi^{-1} \circ \varphi$ é uma aplicação de classe C^k . Dessa forma $(\psi^{-1} \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$ satisfaz as condições do mesmo teorema, assim $(\psi^{-1} \circ \varphi)^{-1}$ também é de classe C^k . \square

1.2 Espaço tangente a uma superfície

Definição 1.2.1. Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^k , podemos definir para cada ponto $p \in M$ o conjunto $T_p M$, chamado de espaço vetorial tangente de M no ponto p , definido pelos vetores $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é um caminho diferenciável tal que $\lambda(0) = p$. No entanto, também podemos definir o espaço tangente da seguinte forma.

Definição 1.2.2. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e dimensão m . Chamamos de espaço vetorial tangente a M no ponto p , o subespaço vetorial denotado por $T_p M \subset \mathbb{R}^n$ dada pela imagem $\varphi'(x_0) \cdot \mathbb{R}^m$ da derivada $\varphi'(x_0): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\varphi: V_0 \rightarrow V$ é uma parametrização em M , com $\varphi(x_0) = p$.

Proposição 1.2.3. *As Definições 1.2.1 e 1.2.2 são equivalentes.*

Demonstração. Seja $v = \lambda'(0)$, sendo $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ um caminho diferenciável, onde $\lambda(0) = p$. Podemos supor, para ε suficientemente pequeno, que a imagem de λ está contida na imagem de V de uma parametrização $\varphi: V_0 \rightarrow V \subset M$, com $\varphi(x_0) = p$. Dessa forma, a composição $\mu = \varphi^{-1} \circ \lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V_0$ é um caminho diferenciável em \mathbb{R}^m , com $\mu(0) = x_0$. Sendo $u = \mu'(0)$, basta mostrar que $\varphi'(x_0)' \cdot u = v$. Vejamos:

$$\begin{aligned} \varphi'(x_0) \cdot u &= \varphi'(x_0) \cdot (\varphi^{-1} \circ \lambda)'(0) \\ &= (\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \lambda)'(0) \\ &= \lambda'(0) \\ &= v. \end{aligned}$$

Portanto, todo vetor $v = \lambda'(0)$ pertence à imagem $\varphi'(x_0)' \cdot \mathbb{R}^m$ de \mathbb{R}^m pela derivada de alguma parametrização $\varphi: V_0 \rightarrow V$, com $p \in V$.

Reciprocamente, se $v = \varphi'(x_0) \cdot u$, então $u = \mu'(0)$, onde $\mu: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V_0$ é dada por $\mu(t) = x_0 + tu$, temos $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$, dada por $\lambda(t) = \varphi(\mu(t))$, como queríamos demonstrar. \square

Como toda parametrização φ é uma imersão, a derivada $\varphi'(x_0): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear injetiva. Dessa forma, $\text{Im}(\varphi'(x_0)) = T_p M$ é um subespaço vetorial de dimensão m em \mathbb{R}^n .

Definição 1.2.4. Os vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) = \varphi'(x_0) \cdot e_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

formam uma base de $T_p M$, chamada base associada à parametrização φ .

Observação 1.2.5. O espaço vetorial tangente a M no ponto p independe da escolha da parametrização φ . De fato, sejam $\varphi: U_0 \rightarrow U$ e $\psi: V_0 \rightarrow V$ parametrizações em M , com $U \cap V \neq \emptyset$. Seja $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi: \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap V)$ uma mudança de coordenadas, com $p = \psi(z) = \varphi(x)$. Como ξ é um difeomorfismo, temos que $\xi'(x) \cdot \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$. Portanto, pela regra da cadeia, temos

$$\varphi'(x) \cdot \mathbb{R}^m = \psi'(z) \cdot \xi'(x) \cdot \mathbb{R}^m = \psi'(z) \cdot \mathbb{R}^m.$$

Em geral, não é simples verificar se um subconjunto de algum \mathbb{R}^p é uma superfície diferenciável. Porém, uma importante ferramenta nesta tarefa utiliza o conceito de um valor regular de uma aplicação, que apresentaremos a seguir.

Definição 1.2.6. Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Chamamos $c \in \mathbb{R}^n$ de valor regular de f , quando para todo $x \in U$, tal que $f(x) = c$, a derivada $f'(x): \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear sobrejetiva.

Teorema 1.2.7. *Seja $c \in \mathbb{R}^n$ um valor regular da aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. A imagem inversa $M = f^{-1}(c) = \{x \in U \mid f(x) = c\}$ é uma superfície de classe C^k e dimensão m em \mathbb{R}^{m+n} . O espaço vetorial tangente $T_p M$, em cada ponto $p \in M$, é o núcleo da derivada $f'(p): \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, isto é,*

$$T_p M = \ker(f'(p)).$$

Demonstração. Como $M = f^{-1}(c)$ é localmente o gráfico de uma aplicação de classe C^k , e vimos anteriormente que o gráfico de uma aplicação é uma superfície, portanto M é uma superfície.

Além disso, para $p \in M$, todo vetor $v \in T_p M$ é da forma $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é um caminho diferenciável, cumprindo a condição $\lambda(0) = p$. Logo,

$$f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0) = 0,$$

pois $f \circ \lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é constante igual a c .

Portanto, $T_p M \subset \ker(f'(p))$, como $f'(p)$ é sobrejetiva, esse núcleo tem dimensão m , logo é igual a $T_p M$. \square

O espaço vetorial tangente $T_p M$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^m , e dessa forma, contém

a origem. Quando desenhamos, fazemos as ilustrações representando a variedade afim $p + T_p M$ que é paralela a $T_p M$ e passa por p .

Exemplo 1.2.8. O espaço tangente em um ponto de uma superfície de dimensão zero consiste do vetor nulo.

Exemplo 1.2.9. O espaço tangente $T_p U$ a uma superfície de dimensão n , $U \subset \mathbb{R}^n$, é igual a \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.2.10. Considere a aplicação

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2,$$

onde x_i é a i -ésima coordenada de $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pelo Teorema 1.2.7, obtemos que o conjunto $f^{-1}(1)$ é uma superfície de dimensão n contida em \mathbb{R}^{n+1} , e além disso observamos que $f^{-1}(1) = S^n$. Adicionalmente, temos que o espaço tangente $T_p S^n$ à esfera unitária S^n é o complemento ortogonal de p . De fato,

$$[p]^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, p \rangle = 0\}$$

é um subespaço vetorial de dimensão n de \mathbb{R}^{n+1} . Além disso, se $v \in T_p S^n$, então $v = \lambda'(0)$, onde $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S^n$ é um caminho diferenciável, com $\lambda(0) = p$. Diferenciando a identidade, obtemos

$$\langle \lambda(t), \lambda(t) \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \lambda'(t), \lambda(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \lambda'(t), \lambda(t) \rangle = 0$$

Colocando $t = 0$, obtemos $\langle v, p \rangle = 0$. Portanto, $T_p S^n \subset [p]^\perp$. Segue que,

$$T_p S^n = [p]^\perp$$

pois ambos possuem dimensão n .

1.3 Noção de orientação no espaço e em superfícies

Seja V um espaço vetorial real de dimensão n . Sejam $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ bases ordenadas de V . Dado um vetor $v \in V$, temos que existem $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$v = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n.$$

Dessa forma, podemos representar o vetor v , com respeito à base dada. Assim, temos a seguinte igualdade:

$$[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

são as representações do vetor v nas bases, respectivamente, α e β . Agora, fazendo o mesmo processo descrito acima, porém escrevendo cada vetor da base β , com respeito à base α , temos:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 + \cdots + a_{n1}u_n, \\ &\vdots \\ v_n &= a_{1n}u_1 + \cdots + a_{nn}u_n. \end{aligned}$$

Porém, como vimos anteriormente que $v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$, temos que

$$v = y_1(a_{11}u_1 + \cdots + a_{n1}u_n) + \cdots + y_n(a_{1n}u_1 + \cdots + a_{nn}u_n).$$

Pela comutatividade e associatividade, obtemos:

$$v = (a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n)u_1 + \cdots + (a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n)u_n.$$

E lembrando que $v = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$, obtemos as seguintes n igualdades:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Definição 1.3.1. Chamamos a matriz (1.1) obtida no processo acima de matriz mudança de base β para α , e denotamos por $[I]_{\alpha}^{\beta}$.

Assim, podemos escrever a igualdade descrita em (1.1) da seguinte forma:

$$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta \times [v]_\beta. \quad (1.2)$$

Observação 1.3.2. Também podemos denotar a matriz mudança de base $[I]_\alpha^\beta$ pelos seus coeficientes, $[I]_\alpha^\beta = (a_{ij})$.

Proposição 1.3.3. *Se $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\gamma = \{w_1, \dots, w_n\}$ são bases ordenadas de V , então*

$$[I]_\alpha^\gamma = [I]_\alpha^\beta \times [I]_\beta^\gamma.$$

Demonstração. Sejam $[I]_\alpha^\beta = (a_{ij})$ e $[I]_\beta^\gamma = (b_{ij})$. Pela definição de base, para cada $j, k = 1, \dots, n$, temos que

$$w_k = \sum_{j=1}^n b_{jk} v_j \quad \text{e} \quad v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i.$$

Assim, substituindo a expressão de v_j na de w_k , obtemos:

$$w_k = \sum_{j=1}^n b_{jk} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} u_i \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{jk} a_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) u_i. \quad (1.3)$$

Agora, seja $[I]_\alpha^\gamma = (c_{ij})$, pelo fato de α ser base, para cada $k = 1, \dots, n$, temos que

$$w_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} u_i.$$

Comparando a igualdade obtida acima com (1.3), para cada $i, k = 1, \dots, n$, obtemos

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Portanto, $[I]_\alpha^\gamma = [I]_\alpha^\beta \times [I]_\beta^\gamma$. □

Podemos dar início ao estudo da orientação no espaço. Começamos com a seguinte definição:

Definição 1.3.4. Dizemos que duas bases ordenadas α e β do espaço vetorial V são equivalentes, e denotamos por $\alpha \sim \beta$, quando o determinante da matriz de mudança de base de α para β é positivo, isto é, se $\det([I]_\alpha^\beta) > 0$.

Proposição 1.3.5. *A relação \sim é uma relação de equivalência sobre conjunto das bases ordenadas de V .*

Demonstração. Sejam α, β, γ bases ordenadas de V , temos que estão satisfeitas as seguintes propriedades:

- i) Reflexividade: $\alpha \sim \alpha$, pois a matriz $[I]_\alpha^\alpha$ é a matriz identidade, assim $\det([I]_\alpha^\alpha) = 1 > 0$;
- ii) Simétrica: Se $\alpha \sim \beta$, temos que, como $\det([I]_\alpha^\beta) > 0$, a matriz $[I]_\alpha^\beta$ é inversível, e sua inversa é $[I]_\beta^\alpha$, assim

$$\det([I]_\beta^\alpha) = \frac{1}{\det([I]_\alpha^\beta)} > 0,$$

portanto $\beta \sim \alpha$.

- iii) Transitividade: Se $\alpha \sim \beta$ e $\beta \sim \gamma$, temos que $[I]_\alpha^\gamma = [I]_\alpha^\beta \times [I]_\beta^\gamma$, assim, por propriedade das matrizes,

$$\det([I]_\alpha^\gamma) = \det([I]_\alpha^\beta \times [I]_\beta^\gamma) = \det([I]_\alpha^\beta) \cdot \det([I]_\beta^\gamma) > 0,$$

portanto, $\alpha \sim \gamma$.

□

Proposição 1.3.6. *A relação de equivalência \sim determina apenas duas classes de equivalência sobre o conjunto das bases ordenadas de V .*

Demonstração. A prova se apoia na propriedade transitiva da relação \sim , vejamos: seja α e β duas bases ordenadas, tais que $\det([I]_\alpha^\beta) < 0$, ou seja, α e β estão em classes diferentes. Agora, considere a base ordenada γ , temos que:

$$[I]_\alpha^\gamma = [I]_\alpha^\beta \times [I]_\beta^\gamma.$$

Agora, note que, caso $\det([I]_\gamma^\beta) < 0$, temos que $\det([I]_\alpha^\gamma) > 0$, ou seja, $\alpha \sim \gamma$. Caso contrário, $\det([I]_\gamma^\beta) > 0$, o que implica que $\beta \sim \gamma$. □

Definição 1.3.7. Chamamos uma das classes de equivalência de orientação de V .

Observação 1.3.8. Note que a escolha de uma orientação de V está atrelada à escolha arbitrária de uma classe de equivalência. Além disso, como vimos acima, temos apenas duas classes de equivalência sobre o conjunto das bases ordenadas de V , o que implica que V possui duas orientações.

Definição 1.3.9. Dizemos que o par (V, \mathcal{O}) é um espaço vetorial orientado, onde \mathcal{O} é uma orientação do espaço vetorial real V .

Observação 1.3.10. Note que foi posto explicitamente que \mathcal{O} é uma orientação de um espaço vetorial real. Isso se deve ao fato de que conceito de orientação do espaço vetorial está estritamente ligada à relação de ordem do corpo \mathbb{R} , ou seja, não podemos escolher um corpo qualquer para estender o estudo da orientação em um espaço vetorial.

Definição 1.3.11. Chamamos as bases que pertencem à orientação \mathcal{O} de positivas, e as outras são chamadas de negativas.

Exemplo 1.3.12. O espaço euclidiano n -dimensional, o \mathbb{R}^n , possui orientação canônica, determinada pela base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$. Um caso particular é a orientação em \mathbb{R}^3 , a chamada “regra da mão direita” ou “regra de Fleming”, amplamente utilizada na Física, especialmente em eletromagnetismo. Outro caso particular, em que podemos ter um apelo visual, é a orientação em \mathbb{R}^2 , veja a Figura 1.3.

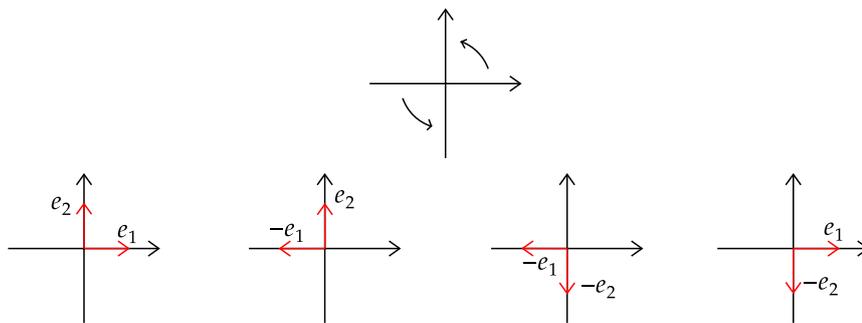


Figura 1.5: Orientação em \mathbb{R}^2 .

Definição 1.3.13. Sejam o espaço vetorial orientado V n -dimensional e α uma base positiva de V . Dizemos que o isomorfismo $I: V \rightarrow V$ preserva orientação, quando $I(\alpha)$ é uma base positiva de V . Equivalentemente, se α é uma base negativa de V , I preserva orientação, quando $I(\alpha)$ é uma base negativa de V . Caso contrário, dizemos que I inverte orientação.

Definição 1.3.14. Dizemos que o isomorfismo $I: V \rightarrow V$ é positivo, quando I preserva orientação. Analogamente, dizemos que I é negativo, quando I inverte orientação.

Observação 1.3.15. Novamente, note que a escolha para o “sinal” do isomorfismo é arbitrária, e está atrelada com a forma como ele age sobre uma determinada base ordenada do espaço vetorial considerado.

Definição 1.3.16. Dizemos que uma superfície S é orientável, se para duas parametrizações arbitrárias φ e ψ de S , temos que sua mudança de coordenadas ξ , é tal que $\det(J_\xi) > 0$.

1.4 Deformação contínua de aplicações

Intuitivamente, chamamos de homotopia a deformação contínua de uma certa aplicação em outra. De forma mais precisa:

Definição 1.4.1. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que as funções

$$f, g: X \longrightarrow Y$$

são homotópicas, e denotamos por $f \simeq g$, quando existe uma aplicação contínua

$$F: X \times [0, 1] \longrightarrow Y,$$

tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Chamamos F de homotopia.

A seguir, observamos que uma homotopia particiona o espaço das funções e apresentaremos alguns exemplos para elucidar este conceito.

Proposição 1.4.2. *Ser homotópica é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Assim:

- i)* Reflexiva: definindo $F(x, t) = f(x)$, para todo $t \in [0, 1]$, temos que $X \simeq X$;
- ii)* Simétrica: $X \simeq Y$, dessa forma, dada da homotopia F , basta tomar a aplicação contínua $G(x, t) = F(x, 1 - t)$, para todos $x \in X$ e $t \in [0, 1]$;
- iii)* Transitiva: seja $X \simeq Y$ e $Y \simeq Z$, e F e G suas respectivas homotopias. Definimos a aplicação $H: X \times [0, 1] \longrightarrow Y$, para todo $x \in X$, por:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ G(x, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Devemos verificar a continuidade de H em $t = \frac{1}{2}$. À direita, temos que:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} H(x, t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} F(x, 2t) = F(x, 1) = g(x),$$

para todo $x \in X$, e à esquerda

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} H(x, t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} G(x, 2t - 1) = G(x, 0) = g(x).$$

Logo, H é contínua em $t = \frac{1}{2}$.

Portanto, \simeq é uma relação de equivalência. □

Exemplo 1.4.3. Sejam E um espaço vetorial normado, $Y \subset E$ um espaço topológico com a topologia induzida de E e X um espaço topológico qualquer. Dadas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$, suponhamos que, para todo $x \in X$, o segmento de reta $[f(x), g(x)]$ esteja contido em Y . Então, $f \simeq g$.

De fato, denotando o intervalo $[0, 1]$ por I , basta definirmos $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ para obtermos uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ entre f e g .

Em particular, dada uma aplicação constante

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto c, \end{aligned}$$

toda aplicação contínua $g : X \rightarrow E$ é homotópica a f .

Exemplo 1.4.4. Seja \mathbb{S}^n a esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1} . Dadas duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$, se $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$, isto é, $f(x)$ e $g(x)$ nunca são pontos antípodas, então $f \simeq g$.

Proposição 1.4.5. Sejam X, Y e Z espaços topológicos, consideremos aplicações $f, f' : X \rightarrow Y$ e $g, g' : Y \rightarrow Z$ contínuas. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Demonstração. Seja $I = [0, 1]$, denotemos por $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e f' e por $K : Y \times I \rightarrow Z$ uma homotopia entre g e g' . Definindo $L : X \times I \rightarrow Z$ por $L(x, t) = K(H(x, t), t)$, temos que L é uma homotopia entre $g \circ f$ e $g' \circ f'$. \square

Existe uma estreita relação entre homotopia e o problema de estender continuamente a todo o espaço uma aplicação contínua definida num subconjunto fechado desse espaço. Um exemplo disto pode ser visto na seguinte proposição.

Proposição 1.4.6. Sejam X um espaço topológico e $\overline{\mathbb{B}}_1(0)$ a bola fechada de centro 0 e raio 1 de \mathbb{R}^{n+1} . Uma aplicação contínua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ estende-se continuamente a $\overline{\mathbb{B}}_1(0)$ se, e somente se, é homotópica a uma constante.

Demonstração. Denotemos por I o intervalo $[0, 1]$ e consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^n \times I &\longrightarrow \overline{\mathbb{B}}_1(0) \\ (x, t) &\longmapsto (1-t)x \end{aligned}$$

que é contínua, sobrejetora e igual a 0 em $\mathbb{S}^n \times I$. Se $\tilde{f} : \overline{\mathbb{B}}_1(0) \rightarrow X$ é uma extensão contínua de $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$, então

$$H = \tilde{f} \circ \varphi : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$$

é uma homotopia entre f e a aplicação constante $g : \mathbb{S}^n \rightarrow X$, definida por $g(x) = \tilde{f}(0)$. Reciprocamente, suponhamos que $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$ seja uma homotopia entre f e uma

aplicação constante $g : \mathbb{S}^n \rightarrow X$, dada por $g(x) = p$, para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Seja a aplicação $\tilde{f} : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ definida da seguinte maneira:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} H\left(\frac{x}{|x|}, 1 - |x|\right), & \text{se } x \neq 0, \\ p, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Assim, temos que \tilde{f} é contínua e $\tilde{f}|_{\mathbb{S}^n} = f$. □

2 Campo de Vetores e o Índice de Poincaré-Hopf

Diversos fenômenos físicos podem ser estudados através de *campos de vetores*, pois estes podem representar, por exemplo, campos de velocidade, como a velocidade dos ventos e das correntes oceânicas, o que justifica o interesse em estudar tais objetos com mais cautela. Vejamos uma breve introdução sobre este conceito.

2.1 Campos de vetores em \mathbb{R}^2

Começamos nosso estudo com a seguinte definição.

Definição 2.1.1. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto. Chamamos uma aplicação

$$\begin{aligned} v: U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y)), \end{aligned}$$

de campo de vetores em U .

Dizemos que o campo $v: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínuo, diferenciável ou de classe C^k em $p \in U$ se suas funções coordenadas são, respectivamente, contínuas, diferenciáveis ou de classe C^k em $p \in U$.

Exemplo 2.1.2. Considere a função diferenciável

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x. \end{aligned}$$

e o campo de vetores

$$\begin{aligned} v: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = (y, x^2 - 1). \end{aligned}$$

Podemos observar, na Figura 2.1, que v se anula nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

De forma mais geral, podemos definir o seguinte conceito:

Definição 2.1.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e v um campo de vetores em U . Dizemos que um ponto $p \in U$ é uma singularidade de v quando $v(p) = 0$.

Podemos ainda adicionar mais uma propriedade na singularidade $p \in U$ do campo vetorial v , o fato dela ser isolada no seguinte sentido:

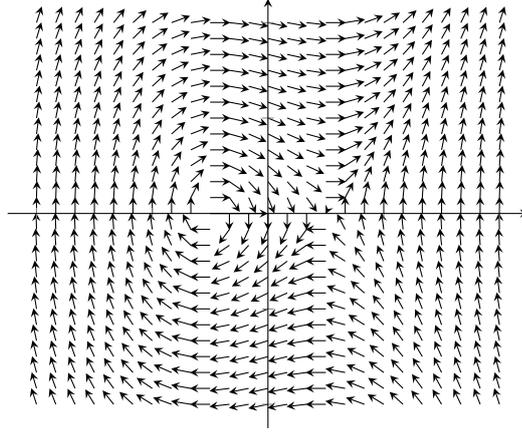


Figura 2.1: Campo de vetores v em \mathbb{R}^2 do Exemplo 2.1.2.

Definição 2.1.4. Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e v um campo de vetores em U . Dizemos que $p \in U$ é uma singularidade isolada de v , quando p é uma singularidade de v e existe uma vizinhança de $p \in V$, tal que para todo ponto $x \in V \setminus \{p\}$, temos que $v(x) \neq 0$.

Uma aplicação primordial para este estudo é a chamada aplicação de Gauss.

Definição 2.1.5. Sejam U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e $v: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores com uma singularidade isolada p e $\mathbb{S}_\varepsilon \subset U$ a esfera 2 dimensional centrada em p e raio $\varepsilon > 0$. Chamamos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{S}_\varepsilon &\longrightarrow S^1 \\ x &\longmapsto \gamma(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \end{aligned}$$

de aplicação de Gauss.

Observe que a aplicação de Gauss γ transforma vetores dados pelo campo v em vetores unitários de \mathbb{R}^2 .

2.2 Índice de Poincaré-Hopf

A seguir, apresentaremos um conceito importante para o estudo do grau topológico, a noção de orientação sobre circunferências.

Definição 2.2.1. Sejam um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e um campo de vetores $v: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ com uma singularidade isolada p . Se a aplicação de Gauss γ percorre a circunferência S^1 no sentido anti-horário quando o campo v percorre a circunferência \mathbb{S}_ε no sentido anti-horário, diremos que γ percorre S^1 positivamente. Caso contrário, diremos que γ percorre S^1 negativamente.

Observação 2.2.2. A orientação das circunferências consideradas será sempre a induzida pela orientação de \mathbb{R}^2 , e esta por sua vez será a orientada positivamente pelo sentido anti-horário (orientado positivamente pela base canônica).

Utilizando os conceitos acima temos a importante definição de índice de Poincaré-Hopf, como apresentaremos a seguir.

Definição 2.2.3. Sejam um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, um campo de vetores $v: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ com uma singularidade isolada p e $S_\varepsilon \subset U$ uma esfera centrada em p e raio $\varepsilon > 0$. O índice de Poincaré-Hopf é o número de voltas positivas menos o número de voltas negativas que a aplicação γ faz em torno de S^1 quando v percorre toda a circunferência S_ε . Denotamos este índice por $\text{Ind}_{\text{PH}}(v, p)$. Veja a Figura 2.2.

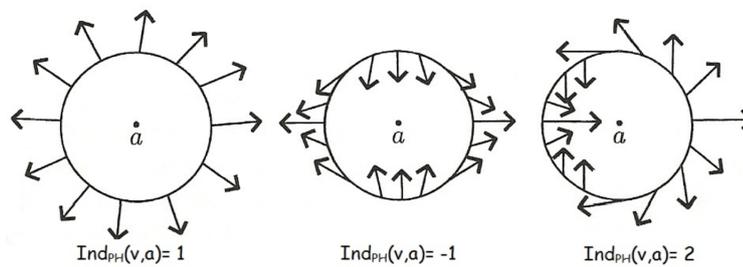


Figura 2.2: Exemplos do Índice de Poincaré-Hopf.

3 Grau Topológico

O número de voltas positivas menos o número de voltas negativas como visto na Definição 2.2.3 é também chamado de grau da aplicação de Gauss. Assim, o conceito do índice de Poincaré-Hopf pode ser estendido para campos de vetores definidos em superfícies m -dimensionais. Para tanto, utilizamos o conceito de grau de uma aplicação diferenciável própria $f: M \rightarrow N$, onde M e N são superfícies diferenciáveis orientáveis de mesma dimensão (finita).

3.1 Aplicações Próprias

Inicialmente, definimos uma aplicação própria.

Definição 3.1.1. Diremos que um espaço topológico X é localmente compacto, se cada $x \in X$ admite uma base de vizinhanças compactas.

Definição 3.1.2. Sejam X e Y espaços topológicos localmente compactos. Dizemos que uma aplicação contínua $f: X \rightarrow Y$ é própria, quando dado um subconjunto compacto $K \subset Y$, a sua imagem inversa $f^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto de X .

Exemplo 3.1.3. A função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$

é própria. De fato, dado um subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$, sabemos que K é fechado e limitado. Dessa forma, como a função f é contínua, segue que $f^{-1}(K)$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R} e como $f^{-1}([0, R]) = [-\sqrt{R}, \sqrt{R}]$, para $R > 0$ qualquer, temos também que $f^{-1}(K)$ é compacto. Portanto, f é uma função própria. No entanto, a restrição

$$\begin{aligned} g: (0, 1) &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$

não é própria, pois $g^{-1}([0, 1]) = (0, 1)$ não é fechado, logo não será compacto.

Temos alguns resultados iniciais.

Proposição 3.1.4. *Se X é um espaço topológico compacto e Y é um espaço topológico localmente compacto Hausdorff, toda aplicação $f: X \rightarrow Y$ contínua é própria.*

Demonstração. Para todo compacto $K \subset Y$, temos que como Y é Hausdorff, K é fechado em Y , e como f é contínua, $f^{-1}(K)$ é fechado em X e por sua vez como X é compacto, $f^{-1}(K)$ é compacto, como queríamos demonstrar. \square

3.2 Aplicação Diferenciável entre Superfícies

Veamos agora, como podemos estender a nossa noção de diferenciabilidade para funções que não estão definidas no espaço euclidiano, mas sim em superfícies.

Definição 3.2.1. Sejam M, N superfícies e uma aplicação $f: M \rightarrow N$. Dizemos que f é diferenciável em $p \in M$ se existem parametrizações $\varphi: U_1 \rightarrow V_1$ de M e $\psi: U_2 \rightarrow V_2$ de N , ambas de classe C^k , $k \geq 1$, tais que $f(V_1) \subset V_2$ e

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi: U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável em $x = \varphi^{-1}(p)$. Neste caso dizemos que f é de classe C^k .

Observação 3.2.2. A definição de aplicação diferenciável entre superfícies não depende da escolha das parametrizações. De fato, suponha que $\bar{\varphi}: \bar{U}_1 \rightarrow \bar{V}_1$ e $\bar{\psi}: \bar{U}_2 \rightarrow \bar{V}_2$ são, respectivamente, parametrizações de M e N . Sejam

$$\bar{\varphi} = \varphi \circ \xi_1 \quad \text{e} \quad \bar{\psi} = \psi \circ \xi_2, \quad (3.1)$$

onde ξ_1 e ξ_2 são mudanças de coordenadas. Temos que

$$\bar{\psi}^{-1} \circ f \circ \bar{\varphi} = (\psi \circ \xi_2)^{-1} \circ f \circ (\varphi \circ \xi_1) = \xi_2^{-1} \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) \circ \xi_1$$

Da relação acima, observamos que $\bar{\psi}^{-1} \circ f \circ \bar{\varphi}$ é diferenciável se, e somente, se $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

Definição 3.2.3. Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que a derivada de f no ponto $p \in M$ é a transformação linear

$$\begin{aligned} d_p f: T_p M &\longrightarrow T_{f(p)} N \\ v &\longmapsto d_p f(v) = (f \circ \lambda)'(0), \end{aligned}$$

sendo $v = \lambda'(0)$, para algum caminho $\lambda: (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, onde $U \subset M$ é aberto e $\lambda(0) = p$.

De fato, $d_p f$ é linear, pois dada uma parametrização de M , $\varphi: U_0 \rightarrow U$, tal que $\varphi(x_0) = p$, temos que $v = \varphi'(x_0) \cdot v_0$, sendo $v_0 \in \mathbb{R}^m$, e que $d_p f(v) = (f \circ \varphi)'(x_0) \cdot v_0$.

Definição 3.2.4. Sejam M uma superfície m -dimensional e N uma superfície n -dimensional. Dada $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, dizemos que

- i)* f é uma imersão em $p \in M$, se a aplicação derivada $d_p f$ é injetiva (portanto $n \geq m$) em $p \in M$, ou equivalentemente, o posto da matriz jacobiana $[J_f(p)]_{n \times m}$ é igual a m ;
- ii)* f é uma submersão em $p \in M$, se a aplicação derivada $d_p f$ é sobrejetora (portanto $m \geq n$) em $p \in M$, ou equivalentemente, o posto da matriz jacobiana $[J_f(p)]_{n \times m}$ é igual a n .

Também podemos definir o que é um valor regular da aplicação f .

Definição 3.2.5. Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$. Um ponto $p \in N$ é chamado de valor regular de f , se para todo $q \in f^{-1}(p)$, a derivada $d_q f: T_q M \rightarrow T_p N$ é sobrejetiva, ou seja, f é uma submersão em q . Dizemos que o ponto q é um ponto regular de f .

Definição 3.2.6. Se em $p \in M$, a aplicação $f: M \rightarrow N$ não é imersão nem submersão, então dizemos que p é um ponto singular de f e $f(p)$ um valor singular de f .

Teorema 3.2.7. *Sejam M e N uma superfícies m -dimensional e n -dimensional, respectivamente. Se $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável e $p \in N$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(p) = P$ é uma subsuperfície $(m - n)$ -dimensional e dado $q \in P$,*

$$T_p P = \ker(d_q f).$$

Este fato segue como corolário de um teorema de mesmo enunciado, porém no contexto de variedades diferenciáveis. Sua demonstração pode ser encontrada em [9].

Teorema 3.2.8 (Teorema de Sard). *Se $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação de classe C^1 , então o subconjunto dos valores regulares de f é denso em N .*

A demonstração pode ser encontrada em [5].

3.3 Grau de uma aplicação

Sejam M, N superfícies n -dimensionais, orientadas e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável própria. Como a superfície N é um espaço Hausdorff, pois herdou a topologia do \mathbb{R}^n , dado $p \in N$, temos que $K = \{p\}$ é um subconjunto fechado e limitado em N , logo compacto de N . Como f é própria, $f^{-1}(p)$ é um subconjunto compacto de M .

Agora, caso p seja um valor regular de f , temos, como $\dim(M) = n = \dim(N)$, pelo Teorema 3.2.7, que $f^{-1}(p)$ é uma superfície 0-dimensional de M , ou seja, é um conjunto formado por uma quantidade finita de pontos de M . Dessa forma, podemos definir o grau da aplicação f relativo a um valor regular p .

Definição 3.3.1. Sejam M, N superfícies n -dimensionais, orientadas e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dado um valor regular $p \in N$ de f e o ponto regular $q \in f^{-1}(p)$, dizemos que o ponto q é positivo, se o isomorfismo $d_p f: T_p M \rightarrow T_p N$ preserva a orientação, e se caso contrário, ou seja $d_p f: T_p M \rightarrow T_p N$ inverte a orientação, dizemos que o ponto q é negativo.

Definição 3.3.2. Sejam M, N superfícies n -dimensionais, orientadas e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável própria. Dado um valor regular $p \in N$ de f , definimos o grau da aplicação f relativamente ao valor regular p , e denotamos por $\text{gr}_p(f)$ como sendo número de pontos positivos menos o números de pontos negativos em $f^{-1}(p)$.

Observação 3.3.3. Se $p \in N$ é tal que $f^{-1}(p) = \emptyset$, então p , por vacuidade, é valor regular de f e $\text{gr}_p(f) = 0$.

Observação 3.3.4. Note que, como ambas as superfícies M e N possuem mesma dimensão, a aplicação $d_q f$ é um isomorfismo.

Exemplo 3.3.5. Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Para todo $h \in \mathbb{R}$, a derivada em f em h é a aplicação linear

$$\begin{aligned} d_h f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2hx. \end{aligned}$$

Assim, temos as seguintes possibilidades para a imagem inversa de h :

i) Se $h > 0$, então h é um valor regular de f e $f^{-1}(h) = \{-\sqrt{h}, \sqrt{h}\}$, além disso a transformação derivada

$$d_{-\sqrt{h}} f(x) = -2\sqrt{h}x$$

é sobrejetora e inverte a orientação, enquanto que

$$d_{\sqrt{h}} f(x) = 2\sqrt{h}x$$

é sobrejetora e preserva a orientação. Portanto, $\text{gr}_h(f) = 1 - 1 = 0$;

ii) Se $h = 0$, então $d_{\sqrt{h}} f \equiv 0$. Portanto, $h = 0$ não é valor regular de f ;

iii) Se $h < 0$, então $f^{-1}(h) = \emptyset$ e, conseqüentemente, $\text{gr}_h(f) = 0$.

A partir desta análise, podemos concluir que $\text{gr}_h(f) = 0$.

Observamos também que a conexidade da superfície do contra-domínio é uma propriedade primordial para a nossa teoria, pois caso contrário o grau de f relativo a um dado valor regular poderia assumir diferentes valores. Vejamos um caso em que isso ocorre.

Exemplo 3.3.6. Considerando a função $f: (0, 1) \rightarrow (-1, 0) \cup (0, 1)$ dada por $f(x) = x^2$. Temos os seguintes casos:

i) Se $h < 0$, então $f^{-1}(h) = \emptyset$, logo $\text{gr}_h(f) = 0$;

ii) Se $h > 0$, como vimos anteriormente, $f^{-1}(h) = \{\sqrt{h}\}$, e pelo Exemplo 3.3.5, temos que $\text{gr}_h(f) = 1$.

Proposição 3.3.7. *Sejam M, N superfícies n -dimensionais. Se $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação própria de classe C^1 , então o subconjunto $R \subset N$ formado por todos os valores regulares de f é aberto em N .*

Demonstração. Consideremos $R_1 \subset N$, da seguinte forma

$$R_1 = \{p \in N \mid p \text{ é um valor regular de } f \text{ e } f^{-1}(p) \neq \emptyset\}.$$

Vamos mostrar que dado $p \in R_1$, p é um ponto interior de R_1 . Vejamos, para cada $p \in R_1$, temos que $f^{-1}(p)$ é uma superfície compacta 0-dimensional de M , ou seja, $f^{-1}(p)$ é um subconjunto formado por uma quantidade finita de pontos, seja

$$f^{-1}(p) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\} \subset M.$$

Além disso, para cada $p_i \in f^{-1}(p)$, como p é um valor regular, e conseqüentemente p_i é um ponto regular, do fato que $\dim(M) = \dim(N) = n$, segue que a aplicação $d_{p_i}f: T_{p_i}M \rightarrow T_pN$ é um isomorfismo.

Assim, pelo Teorema da Função Inversa, existem vizinhanças abertas de p_i , $U_{p_i} \subset M$, tais que $U_{p_i} \cap U_{p_j} = \emptyset$ para $i \neq j$, e de p , $V_{p_i} \subset N$, tais que

$$f: U_{p_i} \rightarrow V_{p_i}$$

é um difeomorfismo. De fato, o Teorema da Função Inversa fornece vizinhanças V_i e V_j , de p_i e p_j , respectivamente. No entanto, até o momento não garantimos que tais vizinhanças sejam disjuntas. Não obstante, M é Hausdorff, então existem H_i e H_j abertos de M tais que $p_i \in H_i$, $p_j \in H_j$ e $H_i \cap H_j = \emptyset$. Dessa forma, temos que

$$p_i \in U_{p_i} = V_i \cap H_i \quad \text{e} \quad p_j \in U_{p_j} = V_j \cap H_j,$$

sendo U_{p_i} e U_{p_j} abertos disjuntos de M tais que $U_{p_i} \subset V_i$ e $U_{p_j} \subset V_j$. Portanto, dado que $f: V_i \rightarrow V_{p_i}$ é um difeomorfismo, sua restrição $f: U_i \rightarrow f(U_i)$ também é um difeomorfismo.

Agora, considerando que a aplicação f é de classe C^1 , para cada i , a derivada $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é contínua, logo a aplicação determinante abaixo também será:

$$\begin{aligned} \det: M &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto J_f(x) \mapsto \det([J_f(x)]). \end{aligned}$$

Temos que $\det(x) \neq 0$, para todo $x \in U_{p_i}$, ou seja, todos os pontos $x \in U_{p_i}$ são pontos regulares de f , sendo $i = 1, 2, \dots, k$. Dessa forma, tomando

$$V = \bigcap_{i=1}^k f(U_{p_i}) = \bigcap_{i=1}^k V_{p_i},$$

temos que V é um vizinhança aberta de p contida em R_1 , pois como observamos anteri-

ormente, todo ponto $q \in V$ é um valor regular de f . Portanto, p é um ponto interior de R_1 , e segue que R_1 é aberto.

Consideramos agora, $R_2 \subset N$ o conjunto tal que

$$R_2 = \{p \in N \mid f^{-1}(p) = \emptyset\}.$$

Suponhamos que exista $p \in R_2$, tal que p não é um ponto interior de R_2 , ou seja, que exista um aberto V_n , $p \in V_n$, tal que $V_n \not\subset R_2$. Iremos construir a sequência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em N , tal que $y_n \rightarrow p$ e $y_n \notin R_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos o seguinte conjunto compacto

$$K = \{\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup p\}.$$

Como, por hipótese, f é uma aplicação própria, temos que $f^{-1}(K) = \overline{K}$ é um subconjunto compacto de M , e como f é contínua, o conjunto $f(\overline{K})$ é um compacto de N , o que é um absurdo, pois $f(\overline{K}) = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, já que $p \in R_2$, ou seja, $f^{-1}(p) = \emptyset$. Dessa forma, todo ponto $p \in R_2$ é interior a R_2 , e segue que R_2 é aberto.

Assim, $R_1 \cup R_2 = R$ é um aberto de N , como queríamos demonstrar. \square

Até o presente momento, nosso estudo foi feito levando em consideração que o número $\text{gr}_p(f)$ depende do valor regular tomado. Não obstante, seria interessante definir o grau de uma aplicação f independente do valor regular considerado.

Nesse sentido, os próximos resultados visam essa independência, para podermos então ter uma boa definição do grau topológico de uma aplicação. Inicialmente, veremos que se p e q são valores regulares de f , então $\text{gr}_p(f) = \text{gr}_q(f)$ se p e q estão suficientemente “próximos”.

Lema 3.3.8. *Sejam M, N superfícies n -dimensionais, orientadas com N conexa. Se $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável própria, então dado um valor regular $p \in N$, existe uma vizinhança aberta V de p , tal que para todo $q \in V$, q é um valor regular e*

$$\text{gr}_p(f) = \text{gr}_q(f).$$

Demonstração. Temos os seguintes casos:

i) Seja $f^{-1}(p) = \emptyset$. Como mostrado anteriormente $\{p \in N \mid f^{-1}(p) = \emptyset\}$ é aberto, e consequentemente

$$\text{gr}_p(f) = \text{gr}_q(f),$$

para todo $\{p \in N \mid f^{-1}(p) = \emptyset\}$.

ii) Caso contrário, seja $f^{-1}(p) \neq \emptyset$. Temos que

$$f^{-1}(p) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\},$$

para algum $r \in \mathbb{N}$. Além disso, como cada p_i é ponto regular de f , segue que existem vizinhanças abertas W_i de p_i e V_i de p , tais que

$$f: W_i \longrightarrow V_i$$

é um difeomorfismo. Agora, sejam

$$W = \bigcup_{i=1}^r W_i \text{ e } \bar{V} = \bigcap_{i=1}^r V_i.$$

Note que $p \in V_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, r$, logo $p \in \bar{V}$. Vamos mostrar que existe uma vizinhança aberta de p , $V \subset \bar{V}$, tal que

$$f^{-1}(V) \subset W.$$

Suponhamos que $f^{-1}(V) \not\subset W$, para todo $V \subset \bar{V}$, satisfazendo $p \in V$. Seja

$$\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

uma carta de N , tal que $V \subset U$ e $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Como $p \in V$, temos que $\varphi(V) = A$ é um aberto de \mathbb{R}^n que contém a origem.

Agora, construiremos uma sequência da seguinte forma: para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos a bola aberta $B(0, \frac{1}{n})$, de centro $0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $\frac{1}{n}$. Logo,

$$\varphi^{-1}(B(0, \frac{1}{n}) \cap A)$$

é uma vizinhança de p em N , portanto

$$f^{-1}(\varphi^{-1}(B(0, \frac{1}{n}) \cap A)) \not\subset W,$$

logo podemos tomar x_n , tal que $x_n \notin W$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos a sequência

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ e } x_n \notin W \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, seja a sequência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dada por $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Note que

$$\varphi(f(x_n)) \in B(0, \frac{1}{n}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, logo

$$\varphi(f(x_n)) \longrightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow \varphi^{-1}(0) \Rightarrow y_n \longrightarrow p.$$

Vamos supor que U_1 é uma vizinhança de p , tal que $\overline{U_1}$ é compacto. Como observado anteriormente, $y_n \rightarrow p$, assim podemos supor $y_n \in \overline{U_1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o que implica que $x_n \in f^{-1}(\overline{U_1})$, dado $n \in \mathbb{N}$.

Segue que $f^{-1}(\overline{U_1})$ é compacto, pois f é uma aplicação própria. Logo, podemos admitir que $x_n \rightarrow x \in M$, caso contrário, podemos recorrer a uma subsequência de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, e assim

$$f(x) = f\left(\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n\right) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = \lim_{n \in \mathbb{N}} y_n = p.$$

Como $p \in N$ é um valor regular, segue que $x \in M$ é um ponto regular, assim $x = p_i$ para algum $i = 1, 2, \dots, r$. Agora, como W é aberto e $x_n \rightarrow x$, temos que, para algum n suficientemente grande, $x_n \in W$, o que é um absurdo pela construção de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Por fim, concluiremos a demonstração mostrando que existe uma vizinhança aberta V de p , tal que para todo $q \in V$, $f^{-1}(q) = \{q_1, q_2, \dots, q_r\}$, ou seja, $f^{-1}(q)$ possui r pontos, onde $q_i \in W_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, r$, em outras palavras:

$$q_i = f^{-1}(q) \cap W_i.$$

Considerando V , como sendo o conjunto obtido pela construção anterior, temos que para todo $q \in V$, e todo W_i ,

$$f^{-1}(q) \cap W_i \neq \emptyset,$$

e como f é biunívoca em W_i , segue que $f^{-1}(q) \cap W_i$ possui apenas um ponto, seja q_i , para $i = 1, 2, \dots, r$. Como,

$$f^{-1}(V) \subset W = \bigcup_{i=1}^r W_i,$$

segue que temos apenas r pontos regulares em $f^{-1}(q)$. Por fim, como W_i é conexa, pois caso contrário consideramos a componente conexa de W_i que contém q_i , todos os pontos de W_i têm o mesmo “sinal” relativamente a f (veja o Teorema 3.3.9), portanto

$$\text{gr}_p(f) = \text{gr}_q(f).$$

□

Teorema 3.3.9. *Sejam M e N superfícies m -dimensionais orientadas, com M conexa. Se $f: M \rightarrow N$ é um difeomorfismo local, então $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é positivo ou é negativo para todo $x \in M$.*

Lema 3.3.10. *Sejam M, N superfícies n -dimensionais, orientadas, com N conexa e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . Se p e q são valores regulares de f que pertencem a um mesmo aberto $V \subset N$, que é homeomorfo a \mathbb{R}^n através de uma carta, então $\text{gr}_p(f) = \text{gr}_q(f)$.*

Podemos encontrar a demonstração desse fato em [5].

Teorema 3.3.11. *Sejam M, N superfícies n -dimensionais, orientadas, com N conexa e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . Então, o grau $\text{gr}_p(f)$ independe do valor regular $p \in N$.*

Demonstração. Consideremos dois valores regulares de f e sejam $p, q \in N$. Como N é conexa e também localmente conexa, segue que N é conexa por caminhos. Logo, existe um caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow N$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Dessa forma, como o conjunto $\gamma([0, 1])$ é compacto, dada uma cobertura de $\gamma([0, 1])$ por vizinhanças coordenadas (tal cobertura existe, pois N é uma superfície), podemos extrair uma subcobertura $\{V_1, V_2, \dots, V_s\}$ finita de $\gamma([0, 1])$ por vizinhanças coordenadas.

Agora, considerando a subcobertura $\{V_1, V_2, \dots, V_s\}$, sejam $p = a_0$ e $q = a_s$, vamos tomar pontos a_1, a_2, \dots, a_{s-1} , tais que $a_{i-1}, a_i \in V_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, s$. Além disso, como N é conexa, podemos considerar que cada vizinhança é difeomorfa a \mathbb{R}^n , e caso precise, podemos deslocar a_{i-1} e a_i em V_i , para que cada a_i seja um valor regular de f . O que garante essa passagem é o Teorema 3.2.8 (Teorema de Sard).

Considerando o difeomorfismo $\varphi: V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, sendo $b_{i-1} = \varphi(a_{i-1})$ e $b_i = \varphi(a_i)$, pelo Lema 3.3.10, obtemos

$$\text{gr}_{b_{i-1}}(\varphi \circ f) = \text{gr}_{b_i}(\varphi \circ f).$$

Porém, V_i é conexa e φ é um difeomorfismo, então todo ponto $v \in V_i$ tem o mesmo sinal relativamente a φ , o que implica que

$$\text{gr}_{a_{i-1}}(f) = \text{gr}_{a_i}(f),$$

para $i = 1, 2, \dots, s$. Portanto,

$$\text{gr}_p(f) = \text{gr}_q(f).$$

□

Agora, em posse do Teorema 3.3.11, podemos definir o grau de uma aplicação $f: M \rightarrow N$ própria de classe C^1 .

Definição 3.3.12. Dados M e N duas superfícies diferenciáveis n -dimensionais, orientadas, com N conexa e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 , chamamos de *grau* de f o número

$$\text{gr}(f) = \text{gr}_p(f)$$

onde $p \in N$ é um valor regular qualquer da aplicação f .

3.4 Resultados e aplicações de grau

Levando em consideração a Definição 3.3.12, resulta do Teorema 3.3.11 a seguinte proposição:

Proposição 3.4.1. *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis n -dimensionais, orientadas, com N conexa e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . Se $\text{gr}(f) \neq 0$, então f é sobrejetora.*

Demonstração. Se existe um $y \in N$ tal que $f^{-1}(y) = \emptyset$, então y seria um valor regular de f , e como sua pré-imagem é vazia, por definição $\text{gr}(f) = 0$, o que é um absurdo \square

Temos também o seguinte resultado envolvendo homotopia de aplicações próprias.

Teorema 3.4.2. *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis n -dimensionais, orientadas, com M compacta e $f, g: M \rightarrow N$, aplicações próprias de classe C^1 que admitem o mesmo ponto $p \in N$ como valor regular. Se f e g são homotópicas, então $\text{gr}(f) = \text{gr}(g)$.*

Teorema 3.4.3 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Se $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, então p é sobrejetor.*

Demonstração. Identificando o conjunto dos números complexos \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 , a derivada do polinômio p em um ponto $z \in \mathbb{C}$

$$d_z p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é uma transformação linear que consiste na multiplicação por um número complexo. Assim $d_z p \equiv 0$ ou o determinante jacobiano $\det[J_p(z)] > 0$. Logo, se o ponto $w \in \mathbb{C}$ é um valor regular de p , então $\text{gr}_w(p)$ é o número de elementos em $p^{-1}(w)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $p(z) = z^n + q(z)$, onde q é um polinômio de grau menor ou igual a $n - 1$. Vemos que a aplicação

$$\begin{aligned} H: \mathbb{C} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, t) &\mapsto z^n + (1 - t)q(z), \end{aligned}$$

é uma homotopia entre p e o polinômio $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dado por

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\rightarrow z^n. \end{aligned}$$

Agora, como para todo $a \neq 0$ em \mathbb{C} , a equação $z^n = a$ tem exatamente n raízes, assim $\text{gr}(\varphi) = n$, e pelo Teorema 3.4.2, $\text{gr}(p) = n$. Portanto, pela Proposição 3.4.1 temos que p é sobrejetor. \square

4 O Grau Local

Neste capítulo introduziremos uma nova ferramenta que auxiliará o estudo de campos de vetores, o chamado grau local de uma aplicação. Para definir propriamente este conceito, retomaremos ao grau definido previamente, vendo algumas novas propriedades e exemplos.

4.1 Propriedades e Exemplos

Inicialmente, temos como consequência direta da Proposição 1.4.6 o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1.1. Seja $\overline{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bola fechada de centro $0 \in \mathbb{R}^n$ e raio 1. Segue da Proposição 1.4.6 e do Teorema 3.4.2 que, uma aplicação contínua $f: S^n \rightarrow S^n$ estende-se continuamente a uma aplicação $g: \overline{B}_1(0) \rightarrow S^n$ se, e somente se, f é homotópica a uma função constante.

Teorema 4.1.2. *Sejam M, N e P superfícies diferenciáveis n -dimensionais, orientáveis com N e P conexas. Dadas $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow P$ aplicações próprias de classe C^1 , então*

$$\text{gr}(g \circ f) = \text{gr}(f) \cdot \text{gr}(g).$$

Demonstração. Sejam $A, B \subset P$ os conjuntos dos valores regulares de g e $g \circ f$, respectivamente. Como vimos anteriormente, o conjunto dos valores regulares de uma aplicação é um aberto, desta forma, pelo Teorema de Sard, existe $p \in P$ tal que $p \in A \cap B$, ou seja, é valor regular de g e de $g \circ f$ simultaneamente.

Suponhamos, inicialmente, que $(g \circ f)^{-1}(p) = \emptyset$, temos $g^{-1}(p) = \emptyset$ ou $f^{-1}(g^{-1}(p)) = \emptyset$. De qualquer forma, a igualdade $\text{gr}(g \circ f) = \text{gr}(f) \cdot \text{gr}(g)$ está satisfeita.

Agora, caso $(g \circ f)^{-1}(p) \neq \emptyset$, seja $g^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$. Dessa forma para todo $i = 1, \dots, r$, temos que $p_i \in P$ é um valor regular de f , pois como N e P são n -dimensionais ($\dim(N) = \dim(P)$), segue que

$$d_{p_i}g: T_{p_i} \rightarrow T_p P$$

é um isomorfismo. Assim, temos para cada $p_i \in g^{-1}(p)$, consideramos o conjunto $f^{-1}(p_i) = \{p_{i1}, \dots, p_{is_i}\}$, e desta forma, temos

$$(g \circ f)^{-1}(p) = \{p_{ij} \mid i = 1, \dots, r \text{ e } j = 1, \dots, s_i\}.$$

Notamos que o sinal de p_{ij} relativamente a $g \circ f$ é o produto do sinal de p_{ij} relativamente a f pelo sinal de $p_i = f(p_{ij})$ relativamente a g .

Agora, vamos determinar o sinal dos pontos regulares relativos a f e a g , isto é, seja

ε_i o sinal de p_i relativamente a g , portanto

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & p_i \text{ positivo;} \\ -1, & p_i \text{ negativo,} \end{cases}$$

e δ_{ij} o sinal de p_{ij} relativamente a f e ρ_{ij} o sinal de p_{ij} relativamente a $g \circ f$, definidos de maneira análoga a ε_i .

Portanto, temos

$$\text{gr}(g) = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \quad \text{e} \quad \text{gr}(f) = \sum_{i=1}^{s_i} \delta_{ij}.$$

Agora, observando que o cálculo do grau independe do valor regular tomado, ou seja, independe de i , juntamente com o fato de que $\rho_{ij} = \delta_{ij} \cdot \varepsilon_i$, temos

$$\begin{aligned} \text{gr}(g \circ f) &= \sum_{i,j=1}^{r,s_i} \rho_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^{s_i} \delta_{ij} \right) \varepsilon_i \\ &= \sum_{i=1}^r \text{gr}(f) \cdot \varepsilon_i \\ &= \text{gr}(f) \cdot \sum_{i=1}^r \varepsilon_i \\ &= \text{gr}(f) \cdot \text{gr}(g), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 4.1.3. Seja S^1 a circunferência unitária do plano \mathbb{R}^2 . Dado $n \in \mathbb{Z}$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f_n: S^1 &\longrightarrow S^1 \\ (\cos(\theta), \text{sen}(\theta)) &\longmapsto (\cos(n\theta), \text{sen}(n\theta)). \end{aligned}$$

Identificando \mathbb{R}^2 com \mathbb{C} , temos a aplicação

$$\begin{aligned} f_n: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^n, \end{aligned}$$

considerando $z = \cos(\theta) + i \text{sen}(\theta) \in \mathbb{C}$.

Supondo $n = 0$, temos que $f_0(z) = (1, 0)$ para todo $z \in S^1$, logo $d_v(f_0) \equiv 0$, para todo $v \in S^1$. Portanto, os valores regulares de f_0 são os pontos $p \neq (1, 0)$ e $\text{gr}_p(f_0) = 0$.

Suponhamos agora $n \neq 0$. Para cada $p \in S^1$, o subconjunto $f_n^{-1}(p)$ possui $|n|$ pontos,

seja

$$f_n^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_{|n|}\}$$

Como a aplicação

$$\begin{aligned} h: (-\varepsilon, 2\pi) &\longrightarrow S^1 \\ \theta &\longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo local, dado $q_i \in f_n^{-1}(p)$, existe um intervalo aberto (θ_1, θ_2) , tal que $|\theta_1 - \theta_2| < 2\pi$, tal que a restrição

$$\begin{aligned} h: (\theta_1, \theta_2) &\longrightarrow S^1 \\ \theta &\longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem. Analogamente, a aplicação

$$\begin{aligned} k: (-n\varepsilon, n2\pi) &\longrightarrow S^1 \\ \varphi &\longmapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo local, logo considerando a função

$$\begin{aligned} g_n: (-\varepsilon, 2\pi) &\longrightarrow (-n\varepsilon, n2\pi) \\ \theta &\longmapsto n\theta, \end{aligned}$$

e denotando por $u = h^{-1}(q_i)$ e $v = g_n(u)$, obtemos o intervalo (φ_1, φ_2) aberto, tal que $|\varphi_1 - \varphi_2| < 2\pi$ tal que

$$\begin{aligned} k: (\varphi_1, \varphi_2) &\longrightarrow S^1 \\ \varphi &\longmapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem, com $g_n(u) = v \in (\varphi_1, \varphi_2)$.

Agora, note que para todo $q \in h(\theta_1, \theta_2)$, temos que

$$(k \circ g_n \circ h^{-1})(q) = h_n(q).$$

Porém, note que $d_{q_i}(k \circ g_n \circ h^{-1}): T_{q_i}S^1 \longrightarrow T_pS^1$ é um isomorfismo, e dessa forma $d_{q_i}(f_n): T_{q_i}S^1 \longrightarrow T_pS^1$ também é.

Desse modo, cada q_i é um ponto regular de f_n , e portanto p é um valor regular de f_n . Agora, como as restrições $h|_{(\theta_1, \theta_2)}$ e $k|_{(\varphi_1, \varphi_2)}$ possuem a mesma lei de formação, o sinal do ponto $q_i \in S^1$ relativo à transformação $d_{q_i}(k \circ g_n \circ h^{-1}): T_{q_i}S^1 \longrightarrow T_pS^1$ é igual ao sinal de u relativo a transformação $d_u(g_n)$.

Assim, caso $n < 0$, todos os pontos de $f_n^{-1}(p)$ são negativos, e caso $n > 0$, todos os pontos de $f_n^{-1}(p)$ são positivos, logo $\text{gr}_p(f_n) = n$.

Exemplo 4.1.4. Sejam $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária n -dimensional e $f: S^n \rightarrow S^n$ a aplicação diferenciável dada por $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_{n+1})$, ou seja, f é a reflexão relativamente ao hiperplano x_{n+1} restrita a esfera S^n .

Considerando o ponto $p = (0, \dots, -1) \in S^n$, temos $f^{-1}(p) = (0, \dots, 1)$, seja $q = f^{-1}(p)$. Os espaços vetoriais tangentes a S^n nos pontos p e q são paralelos, $T_p S^n \parallel T_q S^n$, e como subespaços vetoriais de \mathbb{R}^{n+1} , ambos coincidem com o conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^n$, tais que $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0)$.

Sobre a orientação, temos que uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de um espaço tangente $T_u S^n$ é positiva, se a base $\{e_1, \dots, e_n, v\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é positiva, sendo $v = u - 0$ o vetor que aponta para “fora” de S^1 .

Por exemplo, a base $\{e_1, \dots, e_n\}$, formada pelos vetores da base canônica de \mathbb{R}^{n+1} é positiva para o espaço tangente $T_q S^n$, pois $v = q - 0 = (0, \dots, 1)$ determina uma base positiva de \mathbb{R}^{n+1} (coincide com a base canônica).

Por outro lado, no ponto $p = f(q)$ a mesma base $\{e_1, \dots, e_n\}$, agora considerada como base de $T_p S^n$ é negativa, pois $w = p - 0 = (0, \dots, -1)$ determina a base $\{e_1, \dots, e_n, w\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que é uma base negativa.

Agora, a aplicação derivada

$$\begin{aligned} d_p f: T_q S^n &\longrightarrow T_p S^n \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}) \end{aligned}$$

é tal que $d_q f(e_i) = e_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, $d_q f$ inverte a orientação, e dessa forma q é negativo, e portanto $\text{gr}_p(f) = -1$.

Exemplo 4.1.5. Consideremos o seguinte campo de vetores no plano

$$\begin{aligned} v: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto v(x, y) = (\cos(x) \cdot \text{sen}(y), \text{sen}(x) \cdot \cos(y)), \end{aligned}$$

representado na Figura 4.1.

Dados $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, temos que os pontos da forma $(k_1 \frac{\pi}{2}, k_2 \frac{\pi}{2})$ e $(k_1 \pi, k_2 \pi)$ são singularidades isoladas de v . Além disso, podemos falar sobre o índice de Poincaré-Hopf para essas singularidades. Temos que os pontos $(k_1 \frac{\pi}{2}, k_2 \frac{\pi}{2})$ possuem índice igual a 1, enquanto os pontos $(k_1 \pi, k_2 \pi)$ possuem índice igual a -1 .

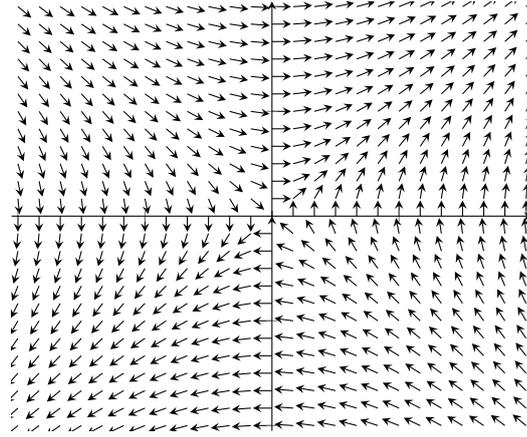


Figura 4.1: Campo de vetores v em \mathbb{R}^2 do Exemplo 4.1.5.

4.2 O Grau Local

Começamos nosso estudo introduzindo um novo conceito, atrelado com à ideia de grau topológico, não obstante com algumas particularidades. Inicialmente, relembremos o conceito de equivalência homotópica.

Definição 4.2.1. Sejam X e Y espaços topológicos. Chamamos a aplicação contínua $f: X \rightarrow Y$ de equivalência homotópica, quando existe uma aplicação contínua $g: Y \rightarrow X$, tal que

$$g \circ f \simeq id: X \rightarrow X \quad \text{e} \quad f \circ g \simeq id: Y \rightarrow Y.$$

Sob essas condições, dizemos que g é uma equivalência inversa de f e que os espaços X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia.

Veremos agora, um exemplo demasiado importante para o nosso estudo, sua importância será comentada a posteriori.

Exemplo 4.2.2. Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, seja $\overline{B}_\varepsilon(a)$ a bola fechada de centro a e raio $\varepsilon > 0$ em \mathbb{R}^n . Temos que $\overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ e a esfera unitária S^{n-1} tem o mesmo tipo de homotopia. De fato, consideremos as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi: \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\} &\longrightarrow S^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{x - a}{\|x - a\|}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi: S^{n-1} &\longrightarrow \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \\ y &\longmapsto a + \varepsilon y. \end{aligned}$$

É importante observar que tanto φ , quanto ϕ , ambas dependem de a e ε tomados. Dessa forma, pela construção de φ e ϕ , temos que $\varphi \circ \phi = id: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, em particular

$\varphi \circ \phi \simeq id$. Além disso, seja $I = (0, 1)$, definindo a aplicação

$$F: \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \times I \longrightarrow \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$$

$$(x, t) \longmapsto (1 - t) \left(a + \varepsilon \frac{x - a}{\|x - a\|} \right) + tx,$$

temos que $\phi \circ \varphi \simeq id: \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \longrightarrow \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$. Portanto, $\varphi: \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \longrightarrow S^{n-1}$ é uma equivalência homotópica, com ϕ sendo sua equivalência inversa. Logo, $\overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ e S^{n-1} tem o mesmo tipo de homotopia.

Podemos fazer a seguinte extensão no Exemplo 4.2.2. Caso $\varepsilon \longrightarrow \infty$, podemos interpretar $\overline{B}_\varepsilon(a)$, como sendo o próprio \mathbb{R}^n , sendo assim $\overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ e S^{n-1} ainda possuem o mesmo tipo de homotopia. Basta considerar a equivalência homotópica

$$\varphi: \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \longrightarrow S^{n-1}$$

$$x \longmapsto \frac{x - a}{\|x - a\|},$$

que tem como equivalência inversa a aplicação

$$\phi: S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$$

$$y \longmapsto a + y.$$

A partir do Exemplo 4.2.2 e da observação feita acima, podemos definir o grau local de uma aplicação contínua.

Definição 4.2.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, com $a \in U$ e $b \in \mathbb{R}^n$, e $f: U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ uma aplicação contínua. Consideremos a bola fechada de centro a e raio $\varepsilon > 0$, $\overline{B}_\varepsilon(a) \subset U$, e as aplicações

$$\varphi: \mathbb{R}^n \setminus \{b\} \longrightarrow S^{n-1} \quad \text{e} \quad \phi: S^{n-1} \longrightarrow \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\},$$

como definidas no Exemplo 4.2.2. Definimos o grau local da aplicação f em a , denotamos por $\gamma_a(f)$, como sendo o grau da aplicação $\varphi \circ f \circ \phi: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$, isto é,

$$\gamma_a(f) = \text{gr}(\varphi \circ f \circ \phi).$$

Observação 4.2.4. Uma observação importante a se fazer é que o grau local de uma aplicação contínua em a independe da bola fechada $\overline{B}_\varepsilon(a) \subset U$. De fato, seja $\overline{B}_{\varepsilon'}(a) \subset U$ a bola fechada centrada em a e raio $\varepsilon' > 0$. Supondo $\varepsilon' \leq \varepsilon$, temos que $\overline{B}_{\varepsilon'}(a) \subset \overline{B}_\varepsilon(a)$. Considerando a aplicação inclusão,

$$k: \overline{B}_{\varepsilon'}(a) \longrightarrow \overline{B}_\varepsilon(a)$$

e a aplicação

$$J: S^{n-1} \times I \longrightarrow \overline{B}_\varepsilon(a)$$

$$(y, t) \longmapsto (1-t)(a + \varepsilon' y) + t(a + \varepsilon y),$$

sendo $I = (0, 1)$, temos que $k \circ \phi^1 \simeq \phi: S^{n-1} \longrightarrow \overline{B}_\varepsilon(a)$.

Desta forma, como a composição $f \circ k: \overline{B}_{\varepsilon'}(a) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a restrição de f à bola $\overline{B}_{\varepsilon'}(a)$, o grau local da aplicação f , definido a partir da bola $\overline{B}_{\varepsilon'}(a)$, e não de $\overline{B}_\varepsilon(a)$ como tomado previamente, é o grau da aplicação

$$\varphi \circ f \circ k \circ \phi^1: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}.$$

Não obstante, como $k \circ \phi^1 \simeq \phi$, temos que $\varphi \circ f \circ k \circ \phi^1 \simeq \varphi \circ f \circ \phi$. Dessa forma, dado que o grau topológico é invariante por homotopia, temos que

$$\text{gr}(\varphi \circ f \circ k \circ \phi^1) = \text{gr}(\varphi \circ f \circ \phi),$$

e portanto a definição do grau local independe da bola tomada.

Retomando, podemos sintetizar o que já vimos anteriormente. Nesse sentido, temos duas informações importantes sobre o grau local de uma aplicação f no ponto a :

- i)* O grau local $\gamma_a(f)$ depende somente do comportamento de f em uma vizinhança arbitrariamente pequena de a . De forma mais precisa, dados $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos contendo a , e aplicações contínuas

$$f: U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\} \quad \text{e} \quad g: V \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\},$$

satisfazendo $f|_W = g|_W$, sendo $W \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que $W \subset U \cap V$, então $\gamma_a(f) = \gamma_a(g)$. Pois, basta na definição de grau local, considerar a bola $\overline{B}_\varepsilon(a)$, para um dado $\varepsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira, tal que $\overline{B}_\varepsilon(a) \subset W$, e usá-la para calcular $\gamma_a(f)$ e $\gamma_a(g)$;

- ii)* Se $f \simeq g: U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$, então $\gamma_a(f) = \gamma_a(g)$. De fato, temos que $f \simeq g: \overline{B}_\varepsilon(a) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$, logo $\varphi \circ f \circ \phi \simeq \varphi \circ g \circ \phi$. Portanto,

$$\gamma_a(f) = \text{gr}(\varphi \circ f \circ \phi) = \text{gr}(\varphi \circ g \circ \phi) = \gamma_a(g).$$

Exemplo 4.2.5. Identificamos cada ponto $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ como sendo um número

complexo $z = x + iy$, e tomamos a aplicação

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$z \longmapsto z^k,$$

sendo $k \in \mathbb{Z}$. Seja \overline{B}_1 a bola fechada unitária centrada na origem $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, e as equivalências homotópicas

$$\rho: \overline{B}_1 \setminus \{0\} \longrightarrow S^1$$

$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|},$$

e

$$\varphi: \overline{B}_1 \setminus \{0\} \longrightarrow S^1$$

$$y \longmapsto y.$$

Assim, $\rho \circ f \circ \varphi: S^1 \longrightarrow S^1$ é a restrição de f a S^1 . Do Exemplo 4.1.3, temos que $\text{gr}(\rho \circ f \circ \varphi) = k$, portanto $\gamma_0(f) = k$.

Agora, veremos uma série de resultados e exemplos para o grau local de uma aplicação.

Teorema 4.2.6. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ e $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, tais que $a \in U$ e $b \in V$. Se $f: U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$, e $g: V \setminus \{b\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{c\}$ são aplicações contínuas, tais que $f(U \setminus \{a\}) \subset V \setminus \{b\}$, então*

$$\gamma_a(g \circ f) = \gamma_b(g) \cdot \gamma_a(f).$$

Demonstração. Sejam $\overline{B_{\varepsilon_1}(b)} \subset V$ a bola fechada de centro b e raio $\varepsilon_1 > 0$ e $\overline{B_\varepsilon(a)} \subset U$ a bola fechada centrada em a e de raio ε . Inicialmente, observamos que $f(\overline{B_\varepsilon(a)}) \subset \overline{B_{\varepsilon_1}(b)}$. E também observamos que, por definição

$$\gamma_a(g \circ f) = \text{gr}(\varphi \circ g \circ f \circ \phi).$$

Agora, sejam

$$\varphi^1: \overline{B_{\varepsilon_1}(b)} \setminus \{b\} \longrightarrow S^{n-1} \quad \text{e} \quad \phi^1: S^{n-1} \longrightarrow \overline{B_{\varepsilon_1}(b)} \setminus \{b\}$$

as equivalências homotópicas naturais, e portanto, $\phi^1 \circ \varphi^1 \simeq id: \overline{B_{\varepsilon_1}(b)} \setminus \{b\} \longrightarrow \overline{B_{\varepsilon_1}(b)} \setminus \{b\}$, e assim

$$\varphi \circ g \circ f \circ \phi \simeq \varphi \circ g \circ \phi^1 \circ \varphi^1 \circ f \circ \phi,$$

e pelo Teorema 4.1.2, temos

$$\text{gr}(\varphi \circ g \circ f \circ \phi) = \text{gr}(\varphi \circ g \circ \phi^1) \cdot \text{gr}(\varphi^1 \circ f \circ \phi).$$

Desta forma,

$$\gamma_b(\varphi \circ g \circ \phi^1) \quad \text{e} \quad \gamma_a(f) = \text{gr}(\varphi^2 \circ f \circ \phi),$$

sendo $\varphi^2: \mathbb{R}^n \setminus \{b\} \longrightarrow S^{n-1}$. Não obstante, como temos a seguinte igualdade entre as composições,

$$\varphi^1 \circ f \circ \phi = \varphi^2 \circ f \circ \phi,$$

temos $\gamma_a(f) = \text{gr}(\varphi^1 \circ f \circ \phi)$ e portanto,

$$\gamma_a(g \circ f) = \gamma_b(g) \cdot \gamma_a(f).$$

□

Do Teorema 4.2.6 resulta o seguinte corolário.

Corolário 4.2.7. *Sejam $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $a, b \in \mathbb{R}^n$, tais que $a \in W \subset U$ e $b \in V$. Se $f: U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ é uma aplicação contínua, tal que a restrição $f: W \setminus \{a\} \longrightarrow V \setminus \{b\}$ é um homeomorfismo, então $\gamma_a(f) = \pm 1$.*

Demonstração. De fato, seja $\bar{f} = f|_{W \setminus \{a\}}$ e \bar{f}^{-1} a sua inversa, então

$$\gamma_a(\text{id}) = \gamma_a(\bar{f} \circ \bar{f}^{-1}) = \gamma_a(\bar{f}) \cdot \gamma_a(\bar{f}^{-1})$$

Desta forma, $\gamma_a(\bar{f}) = \pm 1$, e portanto, como o grau local $\gamma_a(f)$ depende somente do comportamento de f em uma vizinhança arbitrariamente pequena de a , temos $\gamma_a(f) = \pm 1$. □

A seguir temos o seguinte exemplo que trata acerca do sinal do grau local de uma aplicação linear.

Exemplo 4.2.8. Seja $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear invertível, desta forma $f(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Temos, se $\det(f) < 0$, então $\gamma_0(f) = -1$ e se $\det(f) > 0$, então $\gamma_0(f) = 1$.

De fato, suponhamos que $\det(f) > 0$, logo f pertence a componente conexa da identidade em $Gl_n(\mathbb{R})$, e portanto existe um “caminho” (aplicação contínua)

$$\begin{aligned} \alpha: [0, 1] &\longrightarrow Gl_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto \alpha(t) = f_t \end{aligned}$$

tal que $f_0 = f$ e $f_1 = id: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Cada aplicação linear f_t é invertível, e de tal forma que $f_t(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Assim, obtemos a homotopia

$$F: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, t) \mapsto f_t(x),$$

portanto $f \simeq id$. Logo, pelo Teorema 3.4.2, $\gamma_0(f) = \gamma_0(id) = 1$.

Agora, supondo que $\det(f) < 0$, podemos definir a reflexão no hiperplano $x_n = 0$ como sendo a aplicação

$$\lambda: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, -x_n).$$

Segue do Exemplo 4.1.4 que $\gamma_0(\lambda) = -1$. E, como $\det(\lambda f) > 0$, vimos anteriormente que

$$\gamma_0(\lambda f) = \gamma_0(\lambda) \cdot \gamma_0(f) = 1,$$

e portanto $\gamma_0(f) = -1$.

A partir das observações feitas e dos exemplos mostrados, temos a seguinte proposição, que faz uso fortemente do Teorema da Função Inversa.

Proposição 4.2.9. *Sejam $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, $a \in U$ e $b = f(a)$, tais que $f(U \setminus \{a\}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ e que $d_a f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível. Se $\det(d_a f) > 0$, então $\gamma_a(f) = 1$, e $\gamma_a(f) = -1$ caso contrário.*

Demonstração. Pelo Teorema da Função Inversa, f aplica homeomorficamente uma vizinhança de a sobre uma vizinhança de $b = f(a)$, logo pelo Corolário 4.2.7, temos $\gamma_a(f) = \pm 1$.

Pelo Exemplo 4.2.8, e supondo, sem perda de generalidade, que $a = f(a) = 0$, basta mostrar que $\gamma_a(f) = \gamma_0(d_a f)$, considerando a restrição $d_a f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Definimos $i = \inf\{\|d_a f(u)\| \mid u \in S^{n-1}\}$. Vamos mostrar que $i > 0$. De fato, pois caso contrário, $i = 0$, teríamos que dado $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, existe $u_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, com $\|u_n\| = 1$ e

$$\|d_a f(u_n)\| < \frac{1}{n}$$

Dessa forma, a sequência $\{\|d_a f(u_n)\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0, e a continuidade da norma fornece que $d_a f(u_n) \rightarrow 0$ e como $f \in C^1$, temos $u_n \rightarrow 0$, o que é um absurdo, pois $\|u_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $i > 0$.

Além disso, em uma vizinhança de $a = 0$, como f é uma aplicação diferenciável, temos

$$f(x + a) = f(a) + d_a f(x) + \sigma(x)$$

com $\frac{\|\sigma(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow 0$. E assim, como $a = 0$ e $f(a) = 0$

$$f(x) = d_a f(x) + \sigma(x).$$

Seja $W \subset U$ um aberto, tal que $0 \in W$ e

$$\frac{\|\sigma(x)\|}{\|x\|} < i,$$

para todo $x \in W \setminus \{0\}$. Então, dados $x \in W \setminus \{0\}$ e $0 \leq t \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} (1-t)f(x) + t \cdot d_a f(x) &= (1-t)d_a f(x) + (1-t)\sigma(x) + t \cdot d_a f(x) \\ &= d_a f(x) + (1-t)\sigma(x) \\ &= \|x\| \left(d_a f \left(\frac{x}{\|x\|} \right) + (1-t) \frac{\sigma(x)}{\|x\|} \right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Agora, podemos definir a homotopia,

$$\begin{aligned} F: (W \setminus \{0\}) \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ (x, t) &\longmapsto (1-t)f(x) + t \cdot d_a f(x). \end{aligned}$$

Dessa forma, $f|_{W \setminus \{0\}} \simeq d_a f|_{W \setminus \{0\}}$ e portanto

$$\gamma_0(f) = \gamma_0(d_a f) = \pm 1$$

e pelo Exemplo 4.2.8, segue o que queríamos demonstrar. □

Teorema 4.2.10. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$, $a \in U$ e $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ uma aplicação contínua, sendo $b = f(a)$. Então, $\gamma_a(f) = 0$ se, e somente se, para toda bola fechada $\overline{B_\varepsilon(a)} \subset U$ de centro a e raio $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação contínua $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$, tal que $f|_{U \setminus B_\varepsilon(a)} = g|_{U \setminus B_\varepsilon(a)}$.*

Demonstração. Suponhamos que exista $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ contínua, tal que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in U \setminus B_\varepsilon(a)$. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi: S^{n-1} &\longrightarrow \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\} \\ y &\longmapsto a + \varepsilon y. \end{aligned}$$

Considerando a bola $\overline{B_1(0)}$, temos que

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}: \overline{B_1(0)} &\longrightarrow \overline{B_\varepsilon(a)} \\ x &\longmapsto a + \varepsilon x\end{aligned}$$

é um homeomorfismo, e considerando a inclusão $\iota: S^{n-1} \longrightarrow \overline{B_1(0)}$, temos

$$f \circ \phi = g \circ \bar{\varphi} \circ \iota: S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{a\},$$

pois f coincide com g em $\phi(S^{n-1}) \subset \overline{B_\varepsilon(a)}$. Logo,

$$f = \varphi \circ f \circ \phi: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1},$$

estende-se a uma aplicação contínua $\bar{h} = \varphi \circ g \circ \bar{\varphi}: \overline{B_1(0)} \longrightarrow S^{n-1}$. E dessa forma, segue do Exemplo 4.1.1,

$$\gamma_a(f) = \text{gr}(\varphi \circ f \circ \phi) = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\gamma_a(f) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tal que $\overline{B_\varepsilon(a)} \subset U$, temos

$$\text{gr}(\varphi \circ f \circ \phi) = 0,$$

sendo $\varphi: S^{n-1} \longrightarrow \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\}$, logo pelo Teorema 3.4.2, temos que $\varphi \circ f \circ \phi$ é homotópica a uma função constante ℓ .

Sendo $\phi^1: S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ a equivalência homotópica inversa de φ , temos

$$\phi^1 \circ \varphi \simeq \text{id}: \mathbb{R}^n \setminus \{b\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}.$$

Segue das observações feitas acima que

$$\begin{aligned}f \circ \phi &= \text{id} \circ f \circ \phi \\ &\simeq \phi^1 \circ \varphi \circ f \circ \phi \\ &\simeq \phi^1 \circ \ell \\ &= \ell: S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}.\end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 4.1.1, temos que $f \circ \phi: S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ admite uma extensão contínua $k: \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$, e considerando o homeomorfismo

$$\begin{aligned}\bar{\phi}: \overline{B_1(0)} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\} \\ x &\longmapsto a + \varphi x,\end{aligned}$$

podemos definir a função $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in U \setminus B_\varepsilon(a); \\ k(\bar{\phi}^{-1}(x)), & \text{se } x \in \overline{B_\varepsilon(a)}. \end{cases}$$

Observamos que g é contínua e estende a f , como queríamos demonstrar. □

5 Campos de Vetores

Nas seções 2.1 e 2.2, introduzimos brevemente o campo vetorial em \mathbb{R}^2 e o índice de Poincaré-Hopf para o caso bidimensional destes campos. A seguir, generalizaremos estes conceitos e iniciaremos esta generalização com um breve estudo sobre campos de vetores definidos sobre uma superfície diferenciável.

5.1 Campos de vetores sobre uma superfície

Para darmos início ao estudo de campos de vetores, definiremos o conjunto chamado *fibrado tangente da superfície* M . Informalmente, o fibrado tangente pode ser considerado como sendo a união disjunta de todos os espaços tangentes de M . Vejamos sua definição.

Definição 5.1.1. Seja M uma superfície diferenciável de dimensão m . Chamamos de fibrado tangente de M o conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

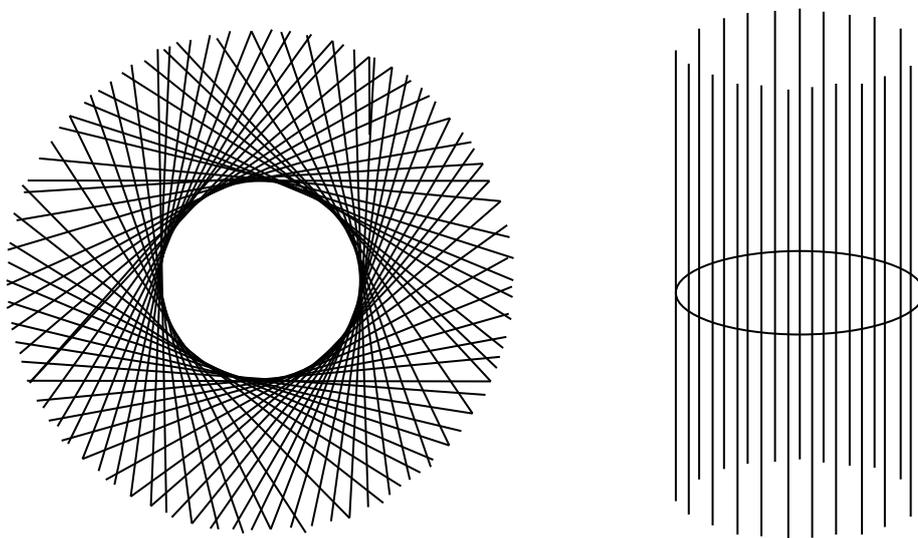


Figura 5.1: Representação do fibrado tangente da esfera S^1 .

Na Figura 5.1, temos uma ilustração de como podemos visualizar o fibrado tangente de uma curva. Observamos que de certa forma estamos “colando” em cada ponto da superfície, o seu tangente, no entanto, esta não é feita de forma arbitrária. Podemos evidenciar isso, pois o fibrado tangente, como a proposição a seguir afirma, é uma superfície diferenciável, logo a imagem a direita em 5.1 não é a forma correta de se ilustrar o fibrado tangente a S^1 , por conta de suas inúmeras auto-interseções.

Proposição 5.1.2. *Dada uma superfície diferenciável m -dimensional M , o fibrado tangente TM tem a estrutura de uma superfície $2m$ -dimensional.*

A partir da definição do fibrado tangente, apresentaremos a definição de campos de vetores definidos em uma superfície, mais formalmente, de campos de vetores tangentes a uma superfície diferenciável.

Definição 5.1.3. Um campo vetorial v sobre uma superfície diferenciável M é uma aplicação

$$\begin{aligned} v: M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto v(p) = (p, v_p), \end{aligned}$$

tal que $v_p \in T_pM$.

Note que, dado um campo vetorial v sobre M e uma carta $\varphi: V \subset M \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^m$, para todo $p \in V$, temos

$$v_p = \sum_{i=1}^m \alpha_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

com o conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$ denotando a base $\{d_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_1), \dots, d_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_m)\}$. Assim, dada a carta φ de M , o campo v fica completamente definido pelas funções $\alpha_i: V \longrightarrow \mathbb{R}$, com $i = 1, \dots, m$.

Definição 5.1.4. Diremos que o campo vetorial v sobre uma superfície diferenciável M é contínuo, diferenciável ou de classe C^k , se para toda carta φ de M , as funções α_i forem contínuas, diferenciáveis ou de classe C^k , respectivamente.

Exemplo 5.1.5. Seja M uma superfície diferenciável. Existe uma projeção natural

$$\begin{aligned} \pi: TM &\longrightarrow M \\ (p, v_p) &\longmapsto \pi(p, v_p) = p. \end{aligned}$$

Assim, por definição, um campo vetorial sobre a superfície diferenciável M é uma aplicação $v: M \longrightarrow TM$, tal que $\pi(v(p)) = p$, para todo $p \in M$.

Exemplo 5.1.6. A aplicação definida em S^1 ,

$$\begin{aligned} v: S^1 &\longrightarrow TS^1 \\ (x, y) &\longmapsto (-y, x) \end{aligned}$$

define um campo de vetores tangente a S^1 , dado que para cada ponto $p = (x, y) \in S^1$, temos $T_pS^1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (u, v), (x, y) \rangle = 0\}$. A Figura 5.2 ilustra o campo v .

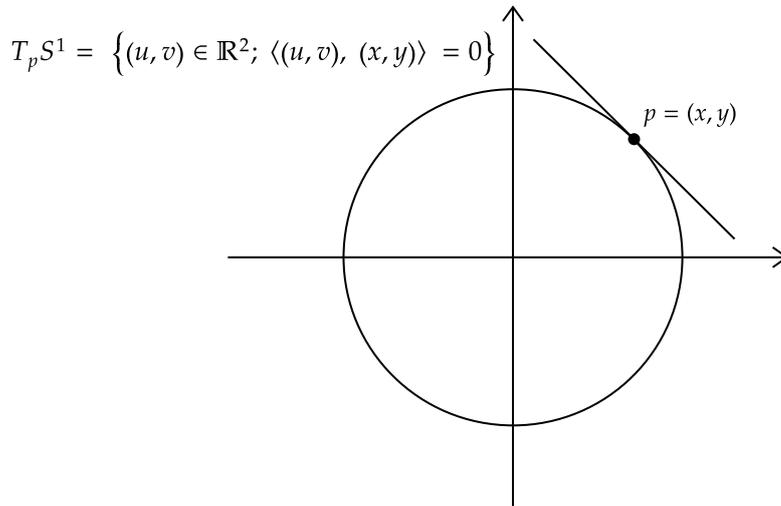


Figura 5.2: Campo de vetores sobre a esfera S^1 do Exemplo 5.1.6.

Sem demora, temos o seguinte teorema.

Teorema 5.1.7. *Se M é uma superfície diferenciável e TM o seu fibrado tangente, então todo campo vetorial diferenciável $v: M \rightarrow TM$ é um mergulho.*

Demonstração. Considerando a projeção $\pi: TM \rightarrow M$, temos que a composição $\pi \circ v = id: M \rightarrow M$, assim v é uma imersão de M em TM . Além disso, segue da definição de campo de vetores sobre uma superfície, que o campo $v: M \rightarrow TM$ é injetora, logo v é uma bijeção sobre $v(M)$. Agora, definindo sobre a imagem $v(M)$, a aplicação $v^{-1}|_{v(M)} = \pi|_{v(M)}$, temos que $v^{-1}|_{v(M)}$ é contínua, e portanto v é um mergulho. \square

Segue do Teorema 5.1.7, que para todo campo vetorial diferenciável $v: M \rightarrow TM$, a imagem $v(M)$ é uma subsuperfície de TM .

5.2 Singularidades do Campo

Definiremos agora uma singularidade do campo vetorial sobre uma superfície diferenciável.

Definição 5.2.1. *Seja M uma variedade diferenciável e v um campo de vetores tangentes sobre M . Dizemos que o ponto $p \in M$ é uma singularidade do campo v , quando $v(p) = \vec{0}$, ou seja, quando o campo v se anula em p .*

Além da definição de singularidades, podemos classificá-las de acordo com algumas propriedades exigidas, como por exemplo, se a singularidade está “sozinha” ou se ela é simples. Formalizaremos estes conceitos a seguir.

Definição 5.2.2. Seja $v: M \rightarrow TM$ um campo vetorial sobre a superfície diferenciável M e $p \in M$ uma singularidade de v . Se existe uma vizinhança $V \subset M$ de p , tal que p é a única singularidade de v em V , então p é chamada de singularidade isolada do campo v .

Para dar continuidade ao estudo, vamos nos apoiar no conceito de transversalidade (ver Apêndice), pois se assemelha à definição de uma singularidade simples.

Definição 5.2.3. Sejam M uma superfície diferenciável, TM seu fibrado tangente e $v: M \rightarrow TM$ um campo de vetores diferenciável sobre M . Dizemos que uma singularidade p do campo v é simples, se

$$d_p\phi(T_pM) \oplus d_pv(T_pM) = T_{(p,0)}TM,$$

sendo $\phi: M \rightarrow TM$ o campo vetorial nulo, isto é, $\phi(p) = (p, 0)$, para todo $p \in M$.

Dada $p \in M$ uma singularidade simples do campo $v: M \rightarrow TM$, podemos interpretar geometricamente que a subsuperfície $\phi(M)$ e $v(M)$ se interceptam transversalmente no ponto $v(p) = \phi(p) = (p, 0)$. Na Figura 5.3, temos que p_1 é uma singularidade simples do campo v , enquanto p_2 não é uma singularidade simples.

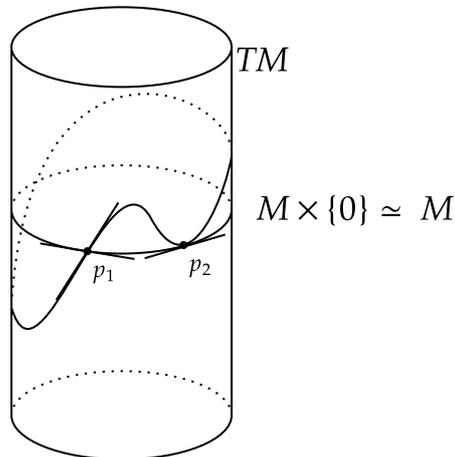


Figura 5.3: Singularidades simples do campo.

Teorema 5.2.4. Sejam M uma superfície diferenciável m -dimensional, $\varphi: V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ uma carta e um campo de vetores diferenciável $v: M \rightarrow TM$, dado por

$$v_p = \sum_{i=1}^m \alpha_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

para todo $p \in M$. Uma singularidade q de v é simples se, e somente se, o determinante jacobiano $\det(J_q\alpha) \neq 0$, sendo $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a aplicação diferenciável dada por

$$\alpha(q) = (\alpha_1(q), \dots, \alpha_m(q)).$$

Demonstração. Dada $\varphi: V \rightarrow U$ uma carta de M , com $p \in V$, sejam o conjunto

$$T_V M = \bigcup_{p \in V} \{p\} \times T_p M,$$

$p = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)$ e u o vetor tangente a M em p , tal que suas coordenadas locais com respeito a φ são (v_1, \dots, v_m) . Definimos a carta $\bar{\varphi}: T_V M \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ de TM , dada por

$$\bar{\varphi}(x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_m) = (p, u).$$

Levando em consideração φ e $\bar{\varphi}$, o campo v e o campo vetorial nulo $\phi: M \rightarrow TM$ podem ser expressos da forma

$$\phi: (x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

e

$$v: (x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_m, \alpha_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \alpha_m(x_1, \dots, x_m)).$$

Agora, seja $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$ a base de $T_p M$ associada à carta φ . Temos que

$$\left\{ d_p \phi \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right), \dots, d_p \phi \left(\frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right) \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ d_p v \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p) \right), \dots, d_p v \left(\frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right) \right\}$$

são, respectivamente, bases de $d_p \phi(T_p M)$ e $d_p v(T_p M)$.

Como p é uma singularidade simples de v , segue que a união das bases

$$\left\{ d_p \phi \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right), \dots, d_p \phi \left(\frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right), d_p v \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p) \right), \dots, d_p v \left(\frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right) \right\}$$

é uma base para o espaço vetorial $T_{(p,0)} TM$. Observe que, considerando $\bar{\varphi}$, cada vetor $d_p \phi \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right)$ possui coordenadas $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, onde o único elemento não nulo está na i -ésima coordenada, e o vetor $d_p v \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right)$ possui coordenadas

$$\left(0, \dots, 1, \dots, \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_i}(p) \right),$$

sendo a i -ésima coordenada igual a 1.

Assim, a matriz quadrada cujas as colunas são as coordenadas dos vetores $d_p\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right)$ e $d_p v\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right)$, em relação à carta $\bar{\phi}$, é da forma

$$A = \begin{bmatrix} id & id \\ 0 & J_q\alpha \end{bmatrix},$$

sendo $id \in M_m(\mathbb{R})$ a matriz identidade e $0 = (0)_{ij} \in M_m(\mathbb{R})$ a matriz nula. Portanto, os $2m$ vetores em questão são linearmente independentes se, e somente se, $\det(A) \neq 0$, o que equivale a $\det(J_q\alpha) \neq 0$, dado que $\det(A) = \det(J_q\alpha)$. Desta observação segue o resultado. \square

Temos o seguinte corolário.

Corolário 5.2.5. *Sejam M uma superfície diferenciável e TM o fibrado tangente de M . Toda singularidade simples de um campo diferenciável $v: M \rightarrow TM$ é uma singularidade isolada.*

Demonstração. Sejam $p \in M$ uma singularidade simples de v e $\varphi: V \rightarrow U$ uma carta de M , com $p \in V$. Então, para todo $v_q \in TM$, podemos escrever

$$v_q = \sum_{i=1}^m \alpha_i(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(q).$$

Considerando a aplicação diferenciável $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}^m$, a aplicação definida a partir dos coeficientes α_i , segue do Teorema 5.2.4, que $\det(J_p(\alpha)) \neq 0$, portanto pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança $W \subset M$ de p , tal que a aplicação α é um difeomorfismo de W sobre uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^m$. Portanto para todo $q \in W$, tal que $q \neq p$, temos $\alpha(q) \neq 0$, ou seja, p é uma singularidade isolada de v . \square

Observação 5.2.6. Sejam M uma superfície diferenciável compacta, $v: M \rightarrow TM$ um campo de vetores contínuo e $\phi: M \rightarrow TM$ o campo de vetores nulo. Então, a imagem $\phi(M)$ é um subconjunto compacto de TM , mas como TM é Hausdorff, logo $\phi(M)$ é um subconjunto fechado de TM . Além disso, v é contínuo e M é compacto, portanto $v^{-1}(\phi(M))$ é um subconjunto compacto de M , além de ser o conjunto dos pontos singulares de v .

A partir da Observação 5.2.6, segue que dada um superfície diferenciável M compacta e v um campo diferenciável sobre M , tal que todas as singularidades são simples, então estas são finitas.

A seguir mostraremos que todo campo diferenciável $v: M \rightarrow TM$ pode ser aproximado por um campo de vetores diferenciável, de tal forma que todas suas singularidades

são simples. Desta maneira, falaremos um pouco da topologia do conjunto das aplicações diferenciáveis, $\mathcal{F}(M, N)$, da superfície M na superfície N .

Definição 5.2.7. Sejam M e N superfícies diferenciáveis. Dadas $f, g: M \rightarrow N$ aplicações diferenciáveis, definimos

$$d_0(f, g) = \sup\{|f(u) - g(u)| \mid u \in M\}.$$

A topologia definida pela distância d_0 em $\mathcal{F}(M, N)$ é chamada topologia C^0 .

Similarmente, temos a seguinte distância.

Definição 5.2.8. Sejam M e N superfícies diferenciáveis. Dadas $f, g: M \rightarrow N$ aplicações diferenciáveis, definimos

$$d_1(f, g) = \max\{d_0(f, g), \sup\{|d_p f(u) - d_p g(u)| \mid u \in T_p M, \|u\| = 1 \text{ e } p \in M\}\}.$$

A topologia definida pela distância d_1 em $\mathcal{F}(M, N)$ é chamada topologia C^1 .

Em ambas as definições, a norma $|\cdot|$ é a norma do espaço ambiente.

Com estas definições em mãos, podemos enunciar os seguintes teoremas.

Teorema 5.2.9. *Se M é uma superfície diferenciável, então o conjunto de todos os difeomorfismos $f: M \rightarrow N$ é um aberto na topologia C^1 .*

Lema 5.2.10 (Lema da transversalidade). *Sejam M, N variedades diferenciáveis, $S \subset N$ uma subsuperfície de N e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se $X \subset M$ é um fechado em M , tal que f é transversal a S em todos os pontos de $X \cap f^{-1}(S)$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação diferenciável $g: M \rightarrow N$, tal que $d_1(f, g) < \varepsilon$, g é transversal a S e coincide com f em X .*

Teorema 5.2.11. *Sejam M uma superfície diferenciável e TM o seu fibrado tangente. Então, todo campo vetorial diferenciável $v: M \rightarrow TM$ pode ser aproximado na topologia C^1 , por um campo vetorial diferenciável, cujas as singularidades são todas simples.*

Demonstração. Consideramos o campo vetorial nulo $\phi: M \rightarrow TM$. Tomando $S = \phi(M)$, pelo Lema 5.2.10, podemos aproximar na topologia C^1 , a aplicação $v: M \rightarrow TM$ por uma aplicação diferenciável $g: M \rightarrow TM$ que é transversal a $\phi(M)$, ou seja, todas as suas singularidades são simples. \square

6 O Índice de Poincaré-Hopf

A partir de agora, definiremos o *índice de Poincaré-Hopf* de um campo vetorial em uma singularidade. A menos que seja dito o contrário, estaremos supondo v um campo de vetores contínuo sobre uma superfície diferenciável M m -dimensional e $p \in M$ uma singularidade isolada de v , e $V \subset M$ um aberto que realiza esta vizinhança.

6.1 Índice de singularidades isoladas

Podemos supor, sem perda de generalidade, que V é domínio de uma carta $\varphi: V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ e também que $U = \varphi(V)$, $a = \varphi(p)$. Para todo $q \in V$, podemos escrever

$$v_q = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\varphi(q)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(q),$$

com $\alpha_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, para todo $i = 1, \dots, m$ e denotando por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(q) \right\}_{1 \leq i \leq m}$$

a base $\{d_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_i)\}_{1 \leq i \leq m}$ do espaço $T_p M$, associada à carta $\varphi: V \rightarrow U$, que consideramos como sendo uma base positiva do espaço tangente.

Dessa forma, podemos definir a aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$f(u) = (\alpha_1(u), \dots, \alpha_m(u)),$$

para todo $u \in U$. Como p é a única singularidade de v em V , temos que

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow u = a = \varphi(p),$$

ou seja, $f(U \setminus \{a\}) \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

Podemos então definir o índice de Poincaré-Hopf.

Definição 6.1.1. Sejam v um campo de vetores contínuo sobre uma superfície diferenciável m -dimensional orientada M , $p \in M$ uma singularidade isolada de v e $\varphi: V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ uma carta, tal que V é uma vizinhança de p . Consideremos $a = \varphi(p) \in U$ e $f: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ a aplicação contínua definida acima. Definimos o índice de Poincaré-Hopf de v em p como sendo o grau local $\gamma_a(f)$ da aplicação f em a , e denotamos por $\text{Ind}_{\text{PH}}(v, p)$.

Vimos no Capítulo 2, que dado um campo de vetores $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $p \in \mathbb{R}^2$ uma singularidade isolada de v , o índice de Poincaré-Hopf de v em p era definido como o número de voltas positivas menos o número de voltas negativas que a aplicação de Gauss

γ dá em torno de S^1 , quando v percorre a circunferência S_ε , centrada em p e de raio $\varepsilon > 0$. Agora, observamos que o número de voltas positivas (negativas), é na verdade o número de pontos positivos (negativos) em $\gamma^{-1}(q)$, sendo $q \in S^1$ um valor regular de γ . Portanto, a definição de índice de Poincaré-Hopf acima está de acordo com a apresentada no Capítulo 2. Na verdade, como comentado anteriormente, a definição acima trata-se de uma generalização do conceito previamente apresentado.

6.2 Propriedades do índice

Agora veremos alguns teoremas sobre o índice de Poincaré-Hopf.

Teorema 6.2.1. *Se v é um campo vetorial contínuo sobre uma superfície diferenciável m -dimensional orientada M e $p \in M$ uma singularidade isolada de v , então o índice de Poincaré-Hopf de v em p não depende da escolha da carta φ .*

Para a demonstração, veja [3].

Teorema 6.2.2. *Se M é uma variedade diferenciável orientada, $v: M \rightarrow TM$ um campo vetorial diferenciável e $p \in M$ um singularidade simples de v , então $\text{Ind}_{\text{PH}}(v, p) = \pm 1$.*

Demonstração. Seja $p \in M$ uma singularidade simples de v . Pelo Corolário 5.2.5, que p é uma singularidade isolada. Seja $V \subset M$ uma vizinhança de p que realiza isto. Podemos supor que V seja domínio de uma carta $\varphi: V \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$. Assim, considerando $a = \varphi(p) \in U$, temos

$$v_q = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\varphi(q)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(q),$$

para todo $q \in V$, sendo $\alpha_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, dado que v é um campo diferenciável. Dessa forma, podemos definir

$$\begin{aligned} f: U &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ u &\mapsto f(u) = (\alpha_1(u), \dots, \alpha_m(u)). \end{aligned}$$

Agora, definimos a composição $\alpha \circ \varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por

$$\alpha \circ \varphi(p) = (\alpha_1 \circ \varphi(p), \dots, \alpha_m \circ \varphi(p)).$$

Dessa forma, segue do Teorema 5.2.4, segue que a derivada $d_p(\alpha \circ \varphi)$ é invertível, não obstante $\varphi: V \rightarrow U$ é um difeomorfismo, então a derivada de $\alpha = f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, que é dada por $d_a \alpha = d_a f$, é também invertível.

Desta forma, pela Proposição 4.2.9, temos que $\text{Ind}_{\text{PH}}(v, p) = \gamma_a(f) = 1$ se $\det(J_a f) > 0$ e $\text{Ind}_{\text{PH}}(v, p) = \gamma_a(f) = -1$ se $\det(J_a f) < 0$. \square

Sejam M uma variedade diferenciável compacta orientada e v um campo de vetores cujas singularidades são todas simples, mostraremos que a soma dos índices destas singularidades independe da escolha do campo. Para isto, definiremos o chamado “número de interseção”.

Definição 6.2.3. Sejam M uma superfície diferenciável m -dimensional compacta orientada, N uma superfície diferenciável n -dimensional orientada, e $S \subset N$ uma subsuperfície s -dimensional compacta, com $s = m - n$ ($m > n$). Consideramos uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$ transversal a subsuperfície S , dizemos que um ponto $p \in f^{-1}(S)$ é positivo ou negativo, conforme a imagem por $d_p f$ de uma base positiva $\{e_1, \dots, e_m\} \subset T_p M$, seguida de uma base positiva $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s\} \subset T_{f(p)} N$ for uma base positiva ou negativa

$$\{d_p f(e_1), \dots, d_p f(e_m), \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s\} \subset T_{f(p)} N.$$

Nas hipóteses acima, dada uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$ transversal a uma subsuperfície S , temos que $f^{-1}(S)$ será uma subsuperfície 0-dimensional fechada de M , portanto $f^{-1}(S)$ é um conjunto com uma quantidade finita de pontos.

Definição 6.2.4. Sejam M uma superfície diferenciável m -dimensional compacta orientada, N uma superfície n -dimensional orientada e S uma subsuperfície s -dimensional compacta de N , com $s = m - n$. Considerando uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$ transversal a subsuperfície S , definimos o número de interseção de $f(M)$ e S , que denotaremos por $f(M) \# S$, como sendo o número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em $f^{-1}(S)$.

Observação 6.2.5. Devido ao sinal da base $\{d_p f(e_1), \dots, d_p f(e_m), \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s\}$ de $T_{f(p)} N$, a ordem de $f(M) \# S$ é importante.

A definição acima se assemelha a uma definição vista anteriormente. De fato, sendo M , N superfícies diferenciáveis m -dimensionais orientadas, com M compacta, $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $p \in N$, temos que a aplicação f é transversal a subsuperfície $S = \{p\}$ se, e somente se, p é um valor regular. Nesse caso, temos

$$\text{gr}(f) = f(M) \# \{p\}.$$

Sejam $v: M \rightarrow TM$ um campo vetorial diferenciável e $\phi: M \rightarrow TM$ o campo vetorial nulo. Se as subsuperfícies $v(M)$ e $\phi(M)$ são transversais, podemos definir o número da interseção da seguinte forma.

Definição 6.2.6. Sejam M uma superfície diferenciável m -dimensional compacta orientada e $v: M \rightarrow TM$ um campo diferenciável, tal que $v(M)$ e $\phi(M)$ são subsuperfícies

transversais de TM . O conjunto $v(M) \cap \phi(M)$ é finito e está em correspondência biunívoca com o conjunto

$$\pi(v(M) \cap \phi(M)) = \{p_1, \dots, p_r\} \subset M,$$

sendo

$$\begin{aligned} \pi: TM &\longrightarrow M \\ (p, u) &\longrightarrow p. \end{aligned}$$

Os pontos p_i são os pontos de M , tais que $v(p_i) = \phi(p_i) = (p_i, 0)$. Diremos que p_i é positivo, se dada uma base positiva $\{e_1, \dots, e_m\} \subset T_{p_i}M$, temos que o conjunto $\{v_{p_i}(e_1), \dots, v_{p_i}(e_m), \phi_{p_i}(e_1), \dots, \phi_{p_i}(e_m)\}$ nesta ordem constitui uma base positiva de $T_{v(p_i)}TM$, diremos que p_i é negativo caso contrário. Assim, $v(M) \# \phi(M)$ é igual ao número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em $\pi(v(M) \cap \phi(M))$.

Observação 6.2.7. Se as subsuperfícies $v(M)$ e $\phi(M)$ são transversais, então todas as singularidades de v são simples. Além disso,

$$v(M) \# \phi(M) = \sum_i \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i),$$

sendo cada $p_i \in M$ uma singularidade de v .

Teorema 6.2.8. *Sejam $f, g: M \rightarrow N$ aplicações diferenciáveis transversais a subsuperfície $S \subset N$. Se f e g são homotópicas, então $f(M) \# S = g(M) \# S$.*

Teorema 6.2.9. *Sejam M uma variedade diferenciável compacta orientada e $v: M \rightarrow TM$ um campo de vetores diferenciáveis cujas singularidades são todas simples. Então a soma dos índices das singularidades de v não depende da escolha do campo v .*

Demonstração. Seja $\phi: M \rightarrow TM$ o campo diferenciável nulo. Como todas as singularidades do campo v são simples, segue que as subsuperfícies $v(M)$ e $\phi(M)$ são transversais. Agora, seja $w: M \rightarrow TM$ um campo diferenciável com todas as suas singularidades simples.

A aplicação $H: M \times [0, 1] \rightarrow TM$, dada por

$$H(p, t) = (1 - t) \cdot v(p) + t \cdot w(p),$$

é uma homotopia entre v e w . Segue que

$$v(M) \# \phi(M) = w(M) \# \phi(M).$$

□

7 Teorema de Poincaré-Hopf

Dado um poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$, Leonhard Euler foi o primeiro a observar a característica de Euler do poliedro P , $\chi(P) = V - A + F$, com mais atenção, sendo V o número de vértices de P , A o número de arestas e F o número de faces. O conceito de associar a um dado poliedro P , um número inteiro $\chi(P)$, foi bastante frutífero para diversas áreas matemáticas, ademais coube a Henri Poincaré desvendar o significado do número que o matemático suíço antes tinha encontrado, e a partir daí, a característica de Euler se revelou muito útil, sendo parte central de notórias igualdades na matemática e um ponto de partida para generalizações fundamentais para a topologia.

7.1 Característica de Euler

Definição 7.1.1. Chamamos de característica de Euler do poliedro P , e denotamos $\chi(P)$, a relação $\chi(P) = V - A + F$.

O número obtido por essa relação é bastante importante e Euler provou que se P for um poliedro convexo, então vale o seguinte teorema.

Teorema 7.1.2 (Fórmula de Euler). *Para toda superfície poliédrica convexa fechada com F faces, V vértices e A arestas vale a relação*

$$F - A + V = 2,$$

ou seja, possui característica de Euler igual a 2.

Apresentaremos uma definição mais geral deste objeto que é uma generalização para os poliedros de qualquer dimensão, ou de forma geral, para espaços topologicamente triangularizáveis.

Além disso, é um conceito de extrema importância e é considerado um verdadeiro ponto de união entre ramos distintos da matemática, por exemplo: a topologia e a geometria diferencial. Provaremos mais adiante que a soma dos índices de todas as singularidades isoladas de um campo de vetores contínuos v , definido sobre uma superfície M compacta e sem bordo é igual à característica de Euler de M .

Vejamos o que é um poliedro n -dimensional.

Definição 7.1.3. Um poliedro P no espaço \mathbb{R}^n é uma coleção finita de simplexes em \mathbb{R}^n , tais que:

- i)* Se S é um simplexo de P , então toda face de S é um simplexo de P ;
- ii)* Se S e T são simplexes de P , a interseção $S \cap T$ é uma face comum a S e T , ou é vazia.

Definição 7.1.4. Seja um poliedro n -dimensional. Denotamos por n_i o número de simplices i -dimensionais deste poliedro. A característica de Euler é definida por

$$\chi(P) = \sum_i (-1)^i n_i.$$

A definição acima é uma generalização da característica de Euler, para poliedro de dimensão maior ou igual a 2. Dado um espaço topológico X , em quais condições podemos definir a característica de Euler em X ?

Com o intuito de responder essa questão, temos a seguinte definição.

Definição 7.1.5. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é triangularizável se existe um homeomorfismo

$$h: |K| \longrightarrow X,$$

para algum poliedro K , sendo $|K|$ o espaço topológico dado pelo conjunto K , com a topologia induzida do espaço ambiente. Neste caso, (K, h) de X .

Dado um espaço topológico X , nem sempre existe uma triangularização de X , porém quando X é uma superfície, uma condição suficiente para que X admita uma triangularização é ser compacto.

Teorema 7.1.6. *Seja M uma superfície compacta, então existe um triangularização (K, h) de M .*

No caso em que M é 2-dimensional, o resultado acima foi demonstrado por Whithead em 1940.

Dados duas triangularizações de um mesmo espaço topológico X , é razoável esperarmos que as características de Euler associadas sejam iguais. O Teorema 7.1.9, devido a Poincaré, mostra exatamente isso.

Definição 7.1.7. Seja X um espaço topológico triangularizável e (K, h) uma triangularização de X , onde K é um poliedro homeomorfo a um espaço X , através de um homeomorfismo

$$h: |K| \longrightarrow X.$$

Definimos $\chi(K)$ como sendo a característica de Euler de X .

Teorema 7.1.8. *Sejam (K, h) e (K', h') duas triangularizações do mesmo espaço X . Então, $\chi(K) = \chi(K')$.*

Teorema 7.1.9. *Sejam X e Y espaços topológicos triangularizáveis, se o espaço X é homeomorfo a Y , então $\chi(X) = \chi(Y)$.*

A partir deste teorema, resulta que $\chi(X)$ é um invariante topológico.

Exemplo 7.1.10. Consideremos a esfera \mathbb{S}^2 e o homeomorfismo entre \mathbb{S}^2 e o cubo de arestas de comprimento 1. Então consideramos a triangularização, mostrada na Figura 7.1. Logo podemos concluir, respeitando a orientação, que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

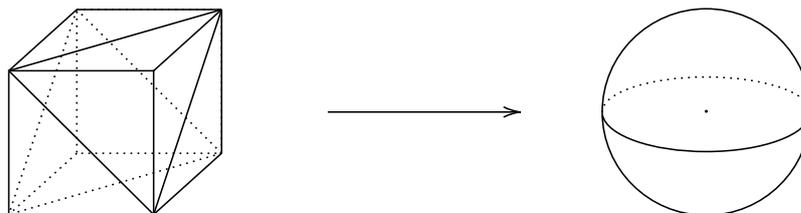


Figura 7.1: Triangularização da Esfera do Exemplo 7.1.10.

Exemplo 7.1.11. Consideremos o toro T obtido pela identificação dos segmentos de mesmo nome, como na Figura 7.2, respeitando a orientação dos mesmos. Segue que

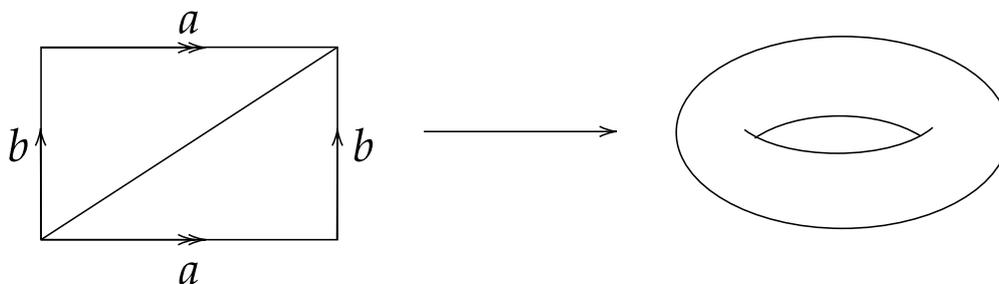


Figura 7.2: Triangularização do Toro do Exemplo 7.1.11.

$$\chi(T) = 0.$$

Exemplo 7.1.12. Consideremos M o toro pinçado, obtido pela identificação dos vértices e dos segmentos de mesmo nome, como na Figura 7.3, respeitando a orientação dos mesmos. Obtemos que, $\chi(M) = 1$.

7.2 Teorema de Poincaré-Hopf

Estamos então em condições de enunciar um dos teoremas centrais desta teoria, o Teorema de Poincaré-Hopf. Ele recebe este nome em homenagem aos matemáticos Henri Poin-

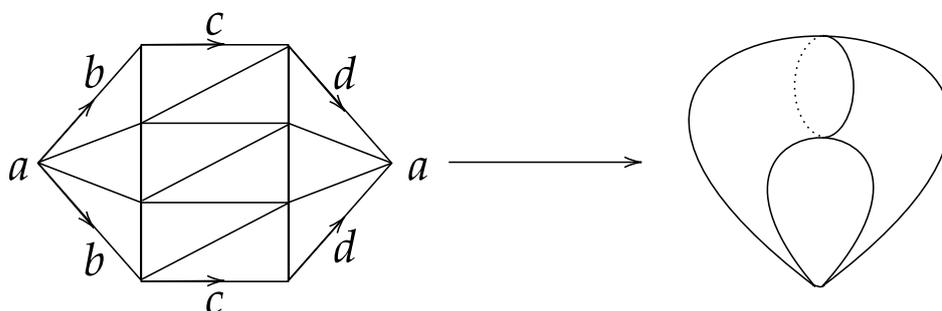


Figura 7.3: Triangularização do Toro pinçado do Exemplo 7.1.12.

caré e Heinz Hopf que, respectivamente, provaram para o caso bidimensional e também sua generalização para o caso em que temos um número arbitrário n de dimensões. Tal resultado une duas áreas da Topologia, a Topologia Algébrica e a Topologia Diferencial, além de ser um ponto fundamental para o estudo de campos de vetores em superfícies, atraindo interesse dos matemáticos, buscando resultados tangentes e generalizações.

Neste capítulo iremos demonstrar o Teorema de Poincaré-Hopf, para isto, utilizaremos tudo o que abordamos anteriormente, e antes da demonstração em si, veremos uma série de propriedades que auxiliarão na prova do teorema.

Lema 7.2.1. *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ esferas $(n - 1)$ -dimensionais, mutuamente exteriores, de centros a_1 e a_2 , respectivamente, tais que estão contidas no interior de uma esfera S_0 . Se orientarmos igualmente as esferas S_i , considerando uma aplicação contínua $f: \mathbb{R}^n \setminus \{a_1, a_2\} \rightarrow S^{n-1}$ e $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tais que $f_i = f|_{S_i}$, para todo $i = 0, 1, 2$, então*

$$\text{gr}(f_0) = \text{gr}(f_1) + \text{gr}(f_2).$$

Observação 7.2.2. Dadas $S_1, \dots, S_r \subset \mathbb{R}^n$ esferas $(n - 1)$ -dimensionais, mutuamente exteriores, centradas a_1, \dots, a_r , respectivamente, tais que estão contidas no interior de uma esfera S_0 . Sejam $f: \mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \dots, a_r\} \rightarrow S^{n-1}$ e $f_i = f|_{S_i}$, para todo $i = 0, \dots, r$. Se cada esfera S_i for orientada igualmente, então

$$\text{gr}(f_0) = \sum_{i=1}^r \text{gr}(f_i).$$

Teorema 7.2.3. *Sejam v um campo vetorial contínuo sobre uma superfície diferenciável m -dimensional M , $p_1, p_2 \in M$ singularidades isoladas de v . Se dado um aberto convexo $V \subset M$, tal que $p_1, p_2 \in V$ são as únicas singularidades de v em V , então existe um campo vetorial contínuo u sobre M , tal que $u|_{M \setminus V} = v|_{M \setminus V}$, admite apenas uma singularidade*

$p \in V$ e

$$\text{Ind}_{\text{PH}}(v, p) = \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_1) + \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_2).$$

Da mesma forma como fizemos anteriormente, podemos estender para um número finito de singularidades isoladas.

Corolário 7.2.4. *Seja v um campo vetorial contínuo sobre uma variedade diferenciável m -dimensional M , admitindo um número finito de singularidades p_i , $i = 1, \dots, r$. Se $V \subset M$ é um aberto conexo contendo todas as singularidades p_1, \dots, p_r , então existe um campo vetorial contínuo u sobre M , que coincide com v em $M \setminus V$, que possui apenas uma singularidade $p \in M$ e*

$$\text{Ind}_{\text{PH}}(u, p) = \sum_{i=1}^r \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i).$$

Teorema 7.2.5. *Sejam M uma superfície diferenciável compacta orientada, $v: M \rightarrow TM$ um campo de vetores diferenciável, tal que possui uma quantidade finita de singularidades p_1, \dots, p_k . Então, existe um campo vetorial diferenciável w , tal que todas as suas singularidades são simples, e a soma dos índices das singularidades de v é igual a soma dos índices das singularidades simples de w .*

Demonstração. Pelo Corolário 7.2.4, existe um campo vetorial $u: M \rightarrow TM$, tal que u admite apenas uma singularidade p satisfazendo

$$\text{Ind}_{\text{PH}}(u, p) = \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i).$$

Consideremos uma carta $\varphi: V \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$, de tal forma que $p \in V$ e $\varphi(V) = \mathbb{R}^m$. Podemos supor a existência de tal carta pois V é um aberto conexo de M . Agora, dado $\varepsilon > 0$, tomamos a bola fechada de centro $a = \varphi(p)$ e raio $\varepsilon > 0$, $\overline{B_\varepsilon(a)} \subset \mathbb{R}^m$, e a esfera S_a que serve como bordo para esta bola.

Pelo Teorema 5.2.11, podemos tomar um campo vetorial diferenciável w sobre M , de tal sorte que possua somente singularidades simples e está tão próximo de u que satisfaz as seguintes propriedades:

- i)* Não existem singularidades em $M \setminus \varphi^{-1}(B_\varepsilon(a))$, ver 7.4;
- ii)* Se $f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ são aplicações definidas, respectivamente por

$$f(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x)) \quad \text{e} \quad g(x) = (\beta_1(x), \dots, \beta_m(x)),$$

tais que

$$u = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad w = \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j},$$

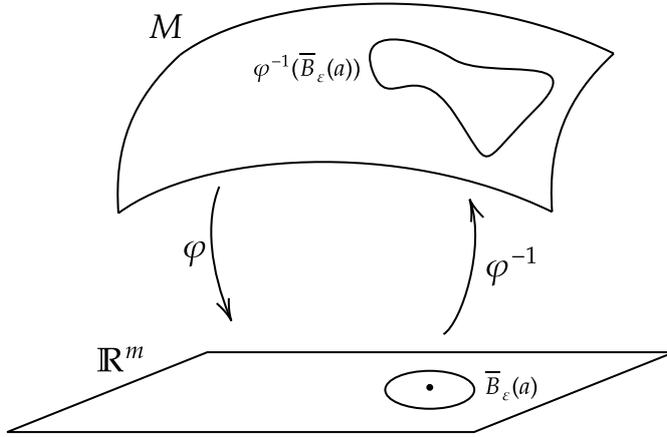


Figura 7.4: Todas as singularidades de w pertencem a $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(a))$.

então

$$\left| \frac{f(x)}{|f(x)|} - \frac{g(x)}{|g(x)|} \right| \leq 2$$

para todo $x \in S_a$.

Pelo Exemplo 1.4.4, segue do segundo item que $f \simeq g$. Assim, obtemos

$$\varphi \circ f \circ \phi \simeq \varphi \circ g \circ \phi: S^{m-1} \longrightarrow S^{m-1},$$

e de acordo com o Teorema 3.4.2, temos

$$\text{Ind}_{\text{PH}}(u, p) = \gamma_a(f) = \text{gr}(\varphi \circ f \circ \phi) = \text{gr}(\varphi \circ g \circ \phi).$$

Além disso, $\text{Ind}_{\text{PH}}(u, p)$ é igual ao grau da restrição $(\varphi \circ g)|_{S_a}$, lembrando que g foi definida a partir do campo w relativa a carta φ . O campo w possui um número finito de singularidades, sejam elas $q_1, \dots, q_s \in M$, tais que como observamos anteriormente

$$q_i \in \varphi^{-1}(B_\varepsilon(a)),$$

para todo $i = 1, \dots, s$. Sejam a_i a imagem de q_i por φ , ou seja, $a_i = \varphi(q_i)$, e consideremos as esferas S_i , centradas em a_i e contidas em S_a , tais que $S_i \cap S_j = \emptyset$, sempre que $i \neq j$.

Agora, considerando a aplicação $h = \varphi \circ \mathbb{R}^m \setminus \{a_1, \dots, a_m\} \longrightarrow S^{m-1}$, temos

$$\text{Ind}_{\text{PH}}(u, p) = \text{gr}(f|_{S_a}) \quad \text{e} \quad \text{Ind}_{\text{PH}}(w, q_i) = \text{gr}(h|_{S_i}).$$

Dessa forma, pelo Teorema 7.2.2,

$$\text{gr}(h|_{S_a}) = \sum_{i=1}^s \text{gr}(h|_{S_i}).$$

Portanto, como $\text{Ind}_{\text{PH}}(u, p) = \sum_{i=1}^s \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i)$, temos

$$\sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i) = \sum_{i=1}^s \text{Ind}_{\text{PH}}(v, q_i)$$

como queríamos demonstrar. \square

Definimos previamente a característica de Euler de uma superfície diferenciável, a seguir, iremos mostrar que dada uma superfície diferenciável compacta M , a soma dos índices de Poincaré-Hopf de um campo de vetores diferenciável, cujas singularidades são todas simples, é a igual à característica de Euler de M , $\chi(M)$, independentemente da escolha do campo nestas condições.

Teorema 7.2.6. *Seja M uma superfície diferenciável compacta orientada e $v: M \rightarrow TM$ um campo de vetores diferenciável, tal que todas as suas singularidades são simples. Então a característica de Euler de M , $\chi(M)$, é igual a soma dos índices de Poincaré-Hopf de todas as singularidades de v , ou seja,*

$$\chi(M) = \sum_i \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i),$$

sendo $p_i \in M$ uma singularidade de v .

Demonstração. Não faremos uma demonstração completa do resultado, pois para tal é necessária a Teoria de Cohomologia. Dessa forma, apresentaremos uma demonstração para o caso bidimensional, no seguinte sentido.

Seja M uma superfície 2-dimensional compacta orientada. Basta mostrar que existe um campo w sobre M diferenciável, tal que todas as suas singularidades são simples e que a soma dos índices de Poincaré-Hopf dessas coincidem com $\chi(M)$. Pois, pelo Teorema 6.2.9, segue que a soma dos índices de um campo nestas condições independem do campo escolhido. Nesse sentido, vamos construir tal campo w .

Consideramos uma triangularização de M , e seja n_i o número de simplexes i -dimensionais da triangularização considerada. Como estamos no caso bidimensional, temos que $i = 0, 1, 2$. Dividindo baricentricamente cada triângulo (simplexo 2-dimensional) de M , como mostra a Figura 7.5, obtemos 6 triângulos, da seguinte forma: traçando segmentos que ligam cada vértice e cada mediana ao baricentro.

Em seguida, preenchemos o triângulo com linhas integrais do campo w , orientada do centro de um simplexo de dimensão menor para o centro de um simplexo de dimensão

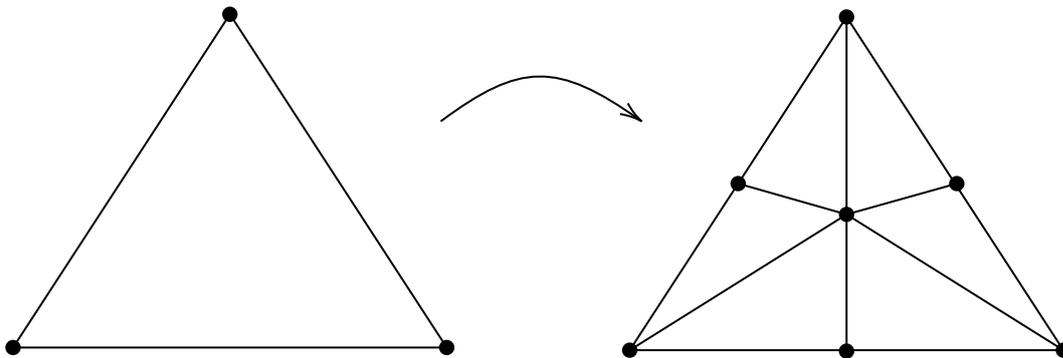


Figura 7.5: Divisão baricêntrica

maior. Veja a Figura 7.6. Ou seja, temos os seguintes sentidos das linhas integrais:

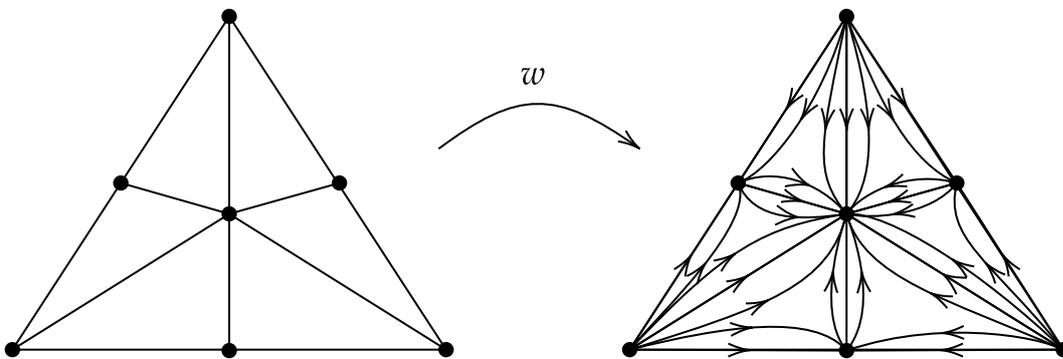


Figura 7.6: Linhas integrais do campo w

- i)* de um vértice para o ponto médio de um lado;
- ii)* de um vértice para o baricentro do triângulo;
- iii)* de um ponto médio de um lado para o baricentro do triângulo.

Assim, cada simplexo contribui com exatamente uma singularidade do campo w , justamente o centro do simplexo considerado será um ponto singular de w . Dessa forma, w

possui $\sum_i n_i$ singularidades ($n_0 + n_1 + n_2$), ou seja, o número total de simplexes na triangulação de M . Dessa forma, segue do Exemplo 4.1.5, que as singularidades de w possuem índice ± 1 , sendo 1 caso a singularidade seja o centro de um simplexo de dimensão par, 0 ou 2, e -1 , caso contrário. Além disso podemos supor que cada singularidade de w é simples.

Agora, concluímos que a soma dos índices das singularidades de w é $n_0 - n_1 + n_2$ e como a característica de Euler de M é

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^2 (-1)^i \cdot n_i = n_0 - n_1 + n_2,$$

temos que $\chi(M) = \sum_i \text{Ind}_{\text{PH}}(w, q_i)$, sendo $q_i \in M$ uma singularidade simples do campo w . Portanto, pelo Teorema 6.2.9,

$$\chi(M) = \sum_i \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i),$$

sendo $p_i \in M$ uma singularidade simples do campo v , como queríamos demonstrar. \square

Corolário 7.2.7. *Seja M uma superfície diferenciável m -dimensional compacta e orientada. Se m é ímpar, então $\chi(M) = 0$.*

Demonstração. Seja $v: M \rightarrow TM$ um campo vetorial, tal que todas as singularidades são simples, sejam elas p_1, \dots, p_k . Notamos que o campo $-v$ admite as mesmas singularidades de v e além disso, essas são todas as suas singularidades, e que em particular são simples. Segue do Teorema 6.2.9 que

$$\sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i) = \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(-v, p_i).$$

Considerando a carta $\varphi_i: V_i \subset M \rightarrow U_i \subset \mathbb{R}^m$, tal que $p_i \in V_i$ com $i = 1, \dots, k$, temos que

$$v_q = \sum_{i=1}^m \alpha_i(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(q),$$

para todo $q \in V_i$.

Já vimos anteriormente que se p_i é uma singularidade simples de v , então $\text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i) = \pm 1$. Dessa forma, o índice de Poincaré-Hopf da singularidade p_i em relação ao campo v possui o sinal do determinante $\det\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(p_i)\right)$.

Por outro lado, o índice de Poincaré-Hopf de $-v$ em p_i , possui o sinal de

$$\det\left(-\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(p_i)\right) = (-1)^m \cdot \det\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(p_i)\right).$$

Então, temos que

$$\sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i) = (-1)^m \cdot \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(-v, p_i),$$

logo segue que $\sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i) = 0$, e portanto

$$\chi(M) = 0,$$

como queríamos demonstrar. \square

Basicamente, o trabalho necessário para demonstrar o Teorema de Poincaré-Hopf está feito. Dessa forma, iremos enunciar novamente e enfim demonstra-lo, e a partir dele, veremos algumas propriedades sobre campo de vetores definidos em superfícies diferenciáveis.

Teorema 7.2.8 (Teorema de Poincaré-Hopf). *Seja M uma superfície compacta e orientável. Se v é um campo vetorial contínuo sobre M , tal que possui um número finito de singularidades, $p_1, \dots, p_k \in M$, então*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i).$$

Demonstração. Segue do Teorema 7.2.5, que existe um campo de vetores $w: M \rightarrow TM$ diferenciável, tal que todas as suas singularidades, $q_1, \dots, q_s \in M$, são simples e

$$\sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i) = \sum_{i=1}^s \text{Ind}_{\text{PH}}(w, q_i).$$

Além disso, do Teorema 7.2.6, temos

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^s \text{Ind}_{\text{PH}}(w, q_i),$$

portanto,

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i).$$

\square

Teorema 7.2.9. *Seja M uma superfície compacta e orientável. Existe um campo vetorial contínuo sem singularidades sobre M se, e somente se, $\chi(M) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que existe um campo vetorial contínuo sem singularidades. Segue trivialmente do Teorema 7.2.8 que $\chi(M) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos $\chi(M) = 0$. Então, existe um campo vetorial diferenciável v sobre M , tal que todas as singularidades, sejam elas $p_1, \dots, p_k \in M$ são simples, e

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{\text{PH}}(v, p_i) = 0.$$

Pelo Corolário 7.2.4, existe um campo contínuo $u: M \rightarrow TM$, com uma única singularidade $p \in M$, tal que $\text{Ind}_{\text{PH}}(v, p) = 0$. Considerando a carta $\varphi: V \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $p \in V$ e $\varphi(V) = \mathbb{R}^m$, temos que

$$u_q = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\varphi(q)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(q),$$

para todo $q \in M$. Dessa forma, podemos definir a aplicação $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por

$$f(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x)).$$

Note que, da forma como definimos, para $a = \varphi(p)$, temos $f(a) = 0 \in \mathbb{R}^m$, assim $f(\mathbb{R}^m \setminus \{a\}) \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ e $\gamma_a(f) = 0$.

Agora, consideremos $\overline{B_\varepsilon(a)} \subset \mathbb{R}^m$, a bola fechada de centro a e raio $\varepsilon > 0$ de \mathbb{R}^m . Segue do Teorema 4.2.10, que existe uma aplicação contínua $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que

$$g|_{\mathbb{R}^m \setminus \overline{B_\varepsilon(a)}} = f|_{\mathbb{R}^m \setminus \overline{B_\varepsilon(a)}}.$$

Suponhamos que $g(x) = (\beta_1(x), \dots, \beta_m(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Podemos então definir o campo vetorial w sobre M da seguinte forma

$$w_q = \begin{cases} v_q, & \text{se } q \in M \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_\varepsilon(a)}); \\ \sum_{i=1}^m \beta_i(\varphi(q)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(q), & \text{se } q \in \varphi^{-1}(\overline{B_\varepsilon(a)}). \end{cases}$$

Assim, o campo w é contínuo e não possui singularidades, como queríamos demonstrar. \square

Exemplo 7.2.10. Nos Exemplos 7.1.10 e 7.1.11, vimos a característica de Euler da esfera S^2 e do toro T , ambos contidos em \mathbb{R}^3 , são elas

$$\chi(S^2) = 2 \quad \text{e} \quad \chi(T) = 0.$$

A partir do Teorema de Poincaré-Hopf, temos que existe um campo de vetores tangente ao toro T que não admite singularidades, enquanto que todo campo de vetores sobre a esfera S^2 , terá ao menos uma singularidade. A Figura 7.7 ilustra isto.

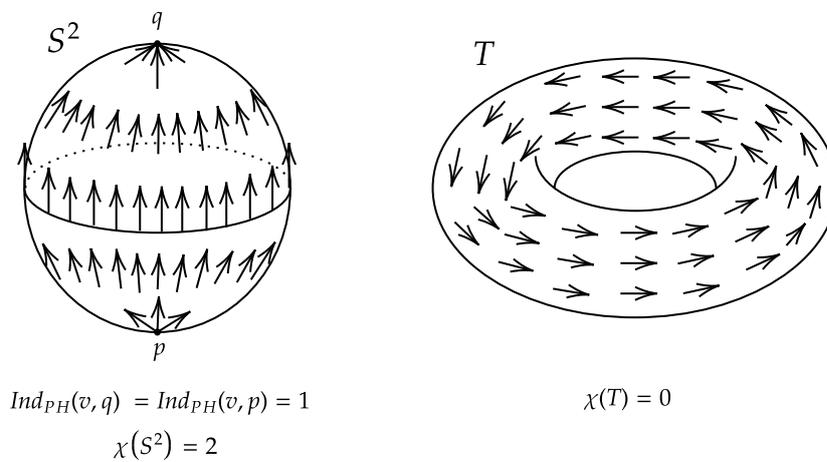


Figura 7.7: Campos de vetores sobre a esfera e sobre o toro.

8 Conclusão

Neste trabalho, procuramos fundamentar o estudo do índice de campos de vetores em superfícies compactas. Nesse sentido, se fez necessário estabelecermos uma teoria sobre superfícies, bem como sobre o seu espaço tangente e também sobre orientação. Além disso, feita tal discussão podemos estender a definição de diferenciabilidade para aplicações definidas em tais superfícies, e então estudar o grau das mesmas.

Dada a importância do estudo de campos de vetores em superfícies, tendo em vista que diversos ramos da matemática e de inúmeras ciências se apoiam fortemente em estudos dessa natureza, podemos concluir que um trabalho com o intuito de introduzir o conceito de grau e o índice de campo de vetores, como é o caso deste projeto, tem grande importância e é de grande serventia a quem deseja ter um primeiro contato com este tipo de estudo.

9 Apêndice

9.1 $z^n = a$ possui n raízes

Mostraremos que dado $n \in \mathbb{N}$ e $z, a \in \mathbb{C}$ a equação $z^n = a$ possui n raízes. De fato, considerando a representação polar de z e a , temos

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \quad \text{e} \quad a = |a|(\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)),$$

e aplicando a fórmula de De Moivre temos que:

$$\begin{aligned} z^n = a &\Leftrightarrow (|z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)))^n = |a|(\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)) \\ &\Leftrightarrow |z|^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = |a|(\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)). \end{aligned}$$

Agora, resolvendo a equação, obtemos

$$|z|^n = |a| \Rightarrow |z| = |a|^{1/n},$$

e também,

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n},$$

sendo $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Portanto, temos que as n raízes distintas são dadas por:

$$z_k = |a|^{1/n} \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right),$$

para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

9.2 Transversalidade

Seja M, N superfícies diferenciáveis e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Naturalmente, podemos perguntar: dada $S \subset N$ uma subsuperfície, sob quais hipóteses a imagem inversa $f^{-1}(S)$ é uma subsuperfície de M ?

A partir do conceito de transversalidade podemos responder esta pergunta. É justamente uma generalização para o conceito de valor regular de uma aplicação.

Definição 9.2.1. Sejam M uma superfície diferenciável m -dimensional, N uma variedade diferenciável n -dimensional, $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $P \subset N$ uma subvariedade p -dimensional. Dizemos que f é transversal a P no ponto $q \in f^{-1}(P)$, quando

$$d_p f(T_q M) + T_{f(q)} P = T_{f(q)} N.$$

Dizemos que f é transversal a P , se para todo $q \in f^{-1}(P)$, temos f transversal a P em q .

Referências

- [1] BOLDRINI, J. L., ET AL, *Álgebra linear*. 3ªed. São Paulo: Haper & Row do Brasil, 1980.
- [2] CAMARGO, IVAN DE., BOULOS, P., *Geometria analítica*. 3ªed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- [3] DALBELO, T. M., *O Índice de Poincaré-Hopf e Generalizações no Caso Singular*. Dissertação de Mestrado, 2016.
- [4] DIOMARA, P., MORGADO, M. C. F., *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*. Coleção Estudos, UFRJ, 2014.
- [5] JÚDICE, E. D., *O Teorema de Sard e suas Aplicações*. 1ªed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [6] LIMA, E. L., *Análise real, v.2*. 6ªed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [7] LIMA, E. L., *Álgebra linear*. 1ªed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [8] LIMA, E. L., *Introdução à topologia diferencial*. Notas de Matemática nº 23. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [9] LIMA, E. L., *Variedades Diferenciáveis*. Publicações matemáticas. Rio de Janeiro: IMPA, 2016

AUTORIZAÇÃO

Eu, _____,
_____, _____, _____,
residente e domiciliado em _____, _____, na

portador do documento de identidade _____, nº _____,
na qualidade de titular dos direitos morais e patrimoniais de autor que recaem sobre a
minha produção do tipo _____, intitulada

em consonância com as disposições da Lei nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998, autorizo a UFSCar a:

- a) Reproduzi-la por meios eletrônicos, mediante cópia digital, para armazená-la permanentemente no Repositório Institucional da UFSCar (RI-UFSCar), disponibilizando-a de acordo com os termos de uma licença Creative Commons;
- b) Colocá-la ao alcance do público, a partir de _____ por meios eletrônicos, em especial mediante acesso *on-line* pela Web;
- c) Permitir a quem a ela tiver acesso, por meios eletrônicos, inclusive pela Internet, que a reproduza, dela extraindo cópias, gratuita ou onerosamente, a critério da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar).



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 20/2023/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso
Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO**LEANDRO DE JESUS NASCIMENTO BACELAR****UM ESTUDO SOBRE ÍNDICES DE CAMPOS DE VETORES****Trabalho de Conclusão de Curso****Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos**

São Carlos, 03 de abril de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Thaís Maria Dalbelo
Membro da Banca 1	Alessandra Aparecida Verri
Membro da Banca 2	Alex Carlucci Rezende



Documento assinado eletronicamente por **Thais Maria Dalbelo, Professor(a) do Ensino Superior**, em 24/07/2023, às 07:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alessandra Aparecida Verri, Professor(a) do Ensino Superior**, em 25/07/2023, às 13:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alex Carlucci Rezende, Professor(a) do Ensino Superior**, em 25/07/2023, às 20:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1025783** e o código CRC **D803334F**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.013676/2023-04

SEI nº 1025783

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019