UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Operadores de Calderón-Zygmund, Pseudo-Diferenciais e Espaços de Hardy

Claudio Henrique Machado Vasconcelos Filho

São Carlos
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Operadores de Calderón-Zygmund, Pseudo-Diferenciais e Espaços de Hardy

Claudio Henrique Machado Vasconcelos Filho

Orientador: Prof. Dr. Tiago Henrique Picon

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Claudio Henrique Machado Vasconcelos Filho, realizada em 09/03/2018:

Tiago Henrique Picon

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
USP

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
UFSCar

Pedro Tavares Paes Lopes

Prof. Dr. Pedro Tavares Paes Lopes
USP

Aos meus avós.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me dar capacidade e força ao longo deste caminho.

A minha família pelo apoio incondicional e grande incentivo, em especial a minhas avós Angela e Lúcia, ao meu avô Luiz, meus pais, minhas tias e minhas irmãs.

Ao Prof. Dr. Tiago Henrique Picon pelo incentivo em ingressar na pós-graduação, confiança para realização deste trabalho e por ser um grande exemplo de professor e pesquisador, no qual tive o grande prazer de me inspirar.

A todos os professores do DCM/FFCLRP-USP e do PPGM-UFSCar por fomentar em mim o prazer em estudar Matemática e difundir a beleza desta ciência.

Aos amigos de longa data Allan e Marzola pela presença e apoio desde muito antes da graduação.

A todos os amigos do DM que tão bem me receberam e me acompanharam ao longo desta trajetória.

A banca de defesa do mestrado composta pelo Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie e Prof. Dr. Pedro Tavares Paes Lopes pelas correções, críticas e inúmeras contribuições propostas.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar os espaços de Hardy no espaço euclidiano, denotados por $H^p(\mathbb{R}^n)$, e sua versão localizável $h^p(\mathbb{R}^n)$. Como aplicações, mostraremos que operadores de Calderón-Zygmund e pseudo-diferenciais são limitados em $H^p(\mathbb{R}^n)$ e $h^p(\mathbb{R}^n)$, respectivamente.

Palavras-chaves: Operadores de Calderón-Zygmund, Espaços de Hardy, Operadores Pseudo-Diferenciais, Análise Harmônica.

ABSTRACT

The purpose of this work is to study the Hardy spaces $H^p(\mathbb{R}^n)$ on euclidean spaces and your localized version, known as $h^p(\mathbb{R}^n)$. As an application of this theory, we are going to show that Calderón-Zygmund and pseudo-differential operators are bounded in $H^p(\mathbb{R}^n)$ and $h^p(\mathbb{R}^n)$, respectively.

Keywords: Calderón-Zygmund Operators, Hardy Spaces, Pseudodifferential Operators, Harmonic Analysis.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudaremos a teoria geral dos espaços de Hardy, operadores pseudo-diferenciais e operadores de Calderón-Zygmund. Como aplicações, mostraremos que tais operadores são limitados em espaços de Hardy.

O Capítulo 1 será destinado a apresentação de resultados preliminares sobre Teoria da Medida, Integração, Espaços L^p, Teoria das Distribuições e Análise de Fourier. Embora cada tópico citado tenha importância fundamental para o entendimento do texto, destacaremos apenas os resultados que serão úteis para os capítulos seguintes (a maioria das demonstrações serão omitidas).

O Capítulo 2 é referente a teoria básica de operadores pseudo-diferenciais. Devido ao caráter elementar do texto, buscou-se apenas o entendimento básico de alguns resultados necesários para as aplicações.

O Capítulo 3 destina-se a teoria geral dos espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, sua versão localizável $h^p(\mathbb{R}^n)$ e do espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$. Neste contexto, na Seção 3.1 buscamos inicialmente introduzir a teoria de operadores maximais, em particular definir o operador maximal de Hardy-Littlewood e provar as principais propriedades como a continuidade em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$. A necessidade de dedicar uma seção para o estudo sistemático de tais operadores é a forte ligação com os espaços de Hardy, uma vez que dentre as muitas abordagens possíveis, escolheu-se a caracterização via funções maximais. Na Seção 3.2 é realizado o estudo do espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$, no qual destacamos suas principais propriedades, completude e a conexão com os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Também apresentaremos uma classe especial de elementos em $H^p(\mathbb{R}^n)$, denominados átomos e um resultado clássico conhecido por Teorema de Decomposição Atômica, que permite decompor elementos de $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leqslant 1$ como uma soma enumerável de átomos. Analogamente ao que foi desenvolvido para $H^p(\mathbb{R}^n)$, na Seção 3.3 introduziremos os espaços de Hardy localizáveis, denotados por $h^p(\mathbb{R}^n)$ e mostraremos propriedades análogas as vistas na seção anterior. Por fim, na Seção 3.4 definiremos o espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$ e mostraremos propriedades elementares que serão úteis no decorrer das aplicações.

O Capítulo 4 é o principal capítulo deste trabalho e tem como objetivo apresentar uma aplicação da teoria de espaços de Hardy para a limitação de operadores pseudo-diferenciais e operadores de Calderón-Zygmund. Inicialmente definiremos operadores de Calderón-Zygmund e sua versão generalizada, denominada por operadores de Calderón-Zygmund do tipo σ. Adaptando resultados encontrados nas referências [7], [2] e [1] mostraremos que tais operadores são contínuos em $H^p(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(\mathbb{R}^n) - BMO(\mathbb{R}^n)$ e $L^p(\mathbb{R}^n)$. Por fim, seguindo a referência [15], mostraremos que uma classe particular de operadores pseudo-diferenciais são limitados em $h^p(\mathbb{R}^n)$.

O Apêndice A é dedicado a expor o contraexemplo de um operador linear que muito embora seja limitado uniformemente sobre H^1-átomos não se estende continuamente em $H^1(\mathbb{R}^n)$. A técnica de mostrar a limitação uniforme de operadores lineares em átomos é muito utilizada para inferir a continuidade em espaços de Hardy.

No Apêndice B mostraremos um resultado denominado Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund, que será fundamental para provar a continuidade de operadores de Calderón-Zygmund nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo será de fixar a notação utilizada ao longo do texto e fornecer resultados de Teoria da Medida e Integração, Teoria das Distribuições e Análise Funcional que serão úteis posteriormente.

Devido ao caráter introdutório, a maioria das demonstrações serão omitidas.

1.1 Notações

Considere $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \ x_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, 2, \cdots, n\}$ o espaço Euclidiano n-dimensional usual. Um elemento de $\mathbb{R}^n$ é denominado vetor e denotado por $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Ao longo do texto, C sempre denotará uma constante positiva e embora ela seja variável no decorrer de algumas manipulações algébricas, será sempre colocada de forma invariante, a menos que exista necessidade de explicitar a natureza de outra constante.

Com o propósito de facilitar a notação de derivadas, definimos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, uma n-úpla de inteiros não-negativos, denominado múlti-índice. As operações com multi-índices são dadas a seguir:

(i) $|\alpha| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j$;

(ii) $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$;

(iii) $\beta \leqslant \alpha$, é equivalente a $\beta_j \leqslant \alpha_j$ para todo $j = 1, \cdots, n$;

(iv) $\beta - \alpha = (\beta_1 - \alpha_1, \cdots, \beta_n - \alpha_n)$, sempre que $\beta \geqslant \alpha$;

(v) $\displaystyle\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$, se $\beta \leqslant \alpha$.

As derivadas parciais euclidianas são denotados por $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ e $D_j = -i\partial_j$. Quando considerados multi-índices, denotamos $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ e $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$.

Será útil ao longo do texto recorrer a fórmula de Leibniz e polinômio de Taylor nas versões multi-índices que serão enunciadas a seguir:

1. $D^\alpha(fg)(x) = \displaystyle\sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} g(x)$.

2. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então para todo $N \in \mathbb{Z}_+$ e $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ é válido

$$f(x+y) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!}\, y^\alpha + \sum_{|\beta|=N} \frac{\partial^\beta f(\theta_x)}{\beta!}\, y^\beta, \tag{1.1}$$

   no qual $\theta_x \in\,]x, x+y[$. A expressão (1.1) é conhecida por polinômio de Taylor com resto de Lagrange.

1.2 Teoria da Medida e os Espaços L^p

Nesta seção apresentaremos as definições e resultados de Teoria da Medida, Integração e dos Espaços de Lebesgue L^p. Todos os resultados expostos foram retirados e adaptados das referências [10] e [21].

Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{A}$ uma coleção de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de X se:

(i) Se $A \in \mathcal{A}$, então $X \backslash A \in \mathcal{A}$; [1]

(ii) Se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos tal que $A_j \in \mathcal{A}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Uma medida é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que satisfaz:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) Se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Dizemos que uma medida é σ-finita se $X = \displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ no qual $\mu(A_j) < \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

[1] O complementar de um conjunto A também será denotado por A^c.

Denotaremos por $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida[2]. Além disso, uma medida satisfaz as propriedades abaixo.

Proposição 1.2.1. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Então*

(i) Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ é tal que $A_1 \subset A_2$, então $\mu(A_1) \leqslant \mu(A_2)$;

(ii) Se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathcal{A}$, então $\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$.

Demonstração. Ver [10] p. 25.

Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é uma função $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mensurável se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$, no qual f^{-1} denota a imagem inversa de f.

Observação 1.2.1.

(i) Em geral, dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é Lebesgue-mensurável (ou apenas mensurável) quando for $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mensurável, no qual $\mathcal{L}$ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ a medida de Borel em $\mathbb{C}$;

(ii) Representaremos por $M^+ \doteq M^+(X, \mathcal{A}, \mu)$ o espaço das funções $f : X \to [0, \infty]$ mensuráveis.

Uma função é denominada simples se é uma combinação linear finita de funções características de conjuntos mensuráveis, isto é

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

no qual $a_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{A}$ são conjuntos dois a dois disjuntos para $j = 1, \ldots, n$ e χ é dada por

$$\chi_{A_j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A_j \\ 0, & \text{se } x \notin A_j. \end{cases}$$

Desta forma, definimos a integral de Lebesgue de uma função simples em M^+ por

$$\int_X \varphi \, d\mu \doteq \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j).$$

De maneira natural estenderemos o conceito de integração para $f \in M^+$ e funções a valores complexos. Nesta direção, o próximo resultado afirma que tais funções podem ser aproximadas por funções simples.

[2] Quando não for necessário explicitar a σ-álgebra considerada, denotaremos apenas por (X, μ) um espaço de medida.

Proposição 1.2.2. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável.*

(a) Se $f \in M^+$ então existe $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tal que

(i) $0 \leqslant \varphi_j \leqslant \varphi_{j+1} \leqslant f$, para todo $j \in \mathbb{N}$;

(ii) $\varphi_j(x) \to f(x)$ quando $j \to \infty$ para todo $x \in X$;

(iii) $\varphi_j \to f$ quando $j \to \infty$ uniformemente em subconjuntos de X no qual f é limitada.

(b) Se $f : X \to \mathbb{C}$ for uma função mensurável, então existe $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tal que

(i) $0 \leqslant |\varphi_j| \leqslant |\varphi_{j+1}| \leqslant |f|$, para todo $j \in \mathbb{N}$;

(ii) $\varphi_j(x) \to f(x)$ quando $j \to \infty$ para todo $x \in X$;

(iii) $\varphi_j \to f$ quando $j \to \infty$ uniformemente em subconjuntos de X no qual f é limitada.

Demonstração. Ver [10] p. 47.

Desta forma, para $f \in M^+$ definimos a integral de Lebesgue de f com relação a medida μ por

$$\int_X f d\mu \doteq \sup\left\{\int_X \varphi d\mu : \ \varphi \in M^+ \text{ é uma função simples tal que } 0 \leqslant \varphi \leqslant f\right\}.$$

Definido integração para funções não-negativas, o próximo resultado estende este conceito para funções que assumem valores negativos.

Definição 1.2.1. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. As partes positiva e negativa de f são definidas respectivamente por*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\},$$
$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Se $\int_X f^+ d\mu$ e $\int_X f^- d\mu$ forem finitas, então dizemos que f é integrável e definimos

$$\int_X f d\mu \doteq \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Por outro lado, se $g : X \to \mathbb{C}$ é uma função mensurável a valores complexos tal que

$Re(g)$ e $Im(g)$ são funções integráveis, então g é integrável e

$$\int_X g d\mu \doteq \int_X Re(g) d\mu + i \int_X Im(g) d\mu.$$

Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e defina

$$L = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ tal que } f \text{ é integrável.}\}$$

Considere sobre L a relação de equivalência dada por

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ q.t.p}$$

e as classes de equivalência

$$[f] = \{g : X \to \mathbb{K} \text{ tal que } f = g \ \mu - \text{q.t.p.}\}$$

Denotaremos por $\mathcal{L}^1(X)$ o conjunto

$$\mathcal{L}^1(X) = \{[f] : \ f \in L\}$$

munidos das operações usuais de soma e produto de funções. Por simplicidade denotaremos $[f]$ por f.

Enunciaremos por fim dois resultados clássicos sobre convergência e integração.

Teorema 1.2.1 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em M^+ tais que $f_j \leqslant f_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $f = \lim_{j \to \infty} f_j$ pontualmente x q.t.p. Então*

$$\int_X f d\mu = \lim_{j \to \infty} \int_X f_j d\mu.$$

Demonstração. Ver [10] p. 50.

Teorema 1.2.2 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}^1(X)$ tal que $f_j \to f$ q.t.p com f mensurável. Além disso, suponha que exista uma função $g \in \mathcal{L}^1(X)$ tal que para todo $x \in X$ e $j \in \mathbb{N}$*

$$|f_j(x)| \leqslant g(x).$$

Então $f \in \mathcal{L}^1(X)$ e

$$\int_X f d\mu = \lim_{j \to \infty} \int_X f_j d\mu.$$

Demonstração. Ver [10] p. 54.

Como consequência do Teorema da Convergência Monótona obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1.2.1. *Seja* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathcal{L}^1(X)$ *tal que* $\sum_{j\in\mathbb{N}}\int |f_j|d\mu < \infty$. *Então* $\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j$ *converge q.t.p a uma função em* $\mathcal{L}^1(X)$ *e*

$$\int_X \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j\right) d\mu = \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_X f_j d\mu.$$

Demonstração. Ver [10] p. 55.

O próximo resultado, conhecido como Teorema de Fubini-Tonelli, justifica a permutação de integrais.

Definição 1.2.2. *Sejam* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *e* $(Y,\mathcal{N},\nu)$ *espaços de medida. Se* $E\subset X\times Y$, *para cada* $x\in X$ *e* $y\in Y$ *fixados, definimos a* x*-seção de* E *por* $E_x=\{y\in Y:\ (x,y)\in E\}$ *e a* y*-seção de* E *por* $E_y=\{x\in X:\ (x,y)\in E\}$. *Analogamente, se* f *é uma função definida em* $X\times Y$, *definimos a* x*-seção* f_x *e a* y*-seção* f_y *por* $f_x(y)=f_y(x)=f(x,y)$.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Fubini-Tonelli)**.** *Sejam* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *e* $(Y,\mathcal{N},\nu)$ *espaços de medida* σ*-finitos.*

(a) Se $f\in M^+(X\times Y)$, *então* $g(x)=\int f_x(y)d\nu\in M^+(X)$, $h(y)=\int f_y(x)d\mu\in M^+(Y)$ *e*

$$\begin{aligned}\int f d(\mu\times\nu) &= \int\left[\int f(x,y)d\nu(y)\right]d\mu(x)\\ &= \int\left[\int f(x,y)d\mu(x)\right]d\nu(y). \qquad (1.2)\end{aligned}$$

(b) Se $f\in\mathcal{L}^1(\mu\times\nu)$, *então* $f_x(y)\in\mathcal{L}^1(\nu)$, *e* $f_y(x)\in\mathcal{L}^1(\mu)$ *q.t.p. Além disso, as funções* $g(x)=\int f_x(y)d\nu\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $h(y)=\int f_y(x)d\mu\in\mathcal{L}^1(\nu)$ *e vale a identidade (1.2).*

Demonstração. Ver [10] p. 67.

No que segue iremos definir os espaços L^p, denominados espaços de Lebesgue. Analogamente à definição do espaço $\mathcal{L}^1$, os elementos de L^p são classes de equivalência de funções μ-equivalentes e por conveniência continuaremos a denotar $[f]$ apenas por f.

Definição 1.2.3. *Sejam (X,μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função mensurável. Para cada $1 \leqslant p < \infty$ definimos*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$L^p(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ tal que } \|f\|_p < \infty\}.$$

Para $p = \infty$, definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geqslant 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\} \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|$$

e

$$L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ tal que } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Observação 1.2.2. *Para o desenvolvimento deste trabalho estaremos interessados em $X = \mathbb{R}^n$ e neste caso omitiremos o domínio de integração para simplificar a notação.*

Definição 1.2.4. *Considere $0 < p,\ p' < \infty$. Dizemos que p e p' são expoentes conjugados se*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Dizemos também que 1 é o expoente conjugado de ∞ e vice-versa.

No que segue enunciaremos duas propriedades importantes dos espaços L^p.

Proposição 1.2.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e p' seu expoente conjugado. Se $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$, então o produto $f \cdot g \in L^1$ e*

$$\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}.$$

Demonstração. Ver [10] p. 182.

Proposição 1.2.4 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Considere $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $f, g \in L^p$. Então vale a desigualdade triangular*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração. Ver [10] p. 183.

Como consequência da desigualdade de Minkowski, mostra-se que $(L^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado para $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Além disso, é um espaço de Banach.

No que segue listaremos propriedades importantes dos espaços L^p.

Proposição 1.2.5 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Sejam p e p' expoentes conjugados tal que $1 \leqslant p' < \infty$. Se $f \in L^{p'}$, então*

$$\|f\|_{p'} = \sup\left\{\left|\int f \cdot g\right| : \ \|g\|_p = 1\right\}.$$

Demonstração. Ver [10] p. 188.

Proposição 1.2.6. *Sejam $1 < p,\ p' < \infty$ expoentes conjugados. Então L^p é reflexivo e $(L^p)^* \cong L^{p'}$.*[3] *Além disso, $(L^1)^* = L^\infty$.*

Demonstração. Ver [10] p. 190.

Teorema 1.2.4 (Desigualdade de Minkowski para Integrais)**.** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos. Se $f \geqslant 0$ é uma função mensurável definida em $X \times Y$ e $1 \leqslant p < \infty$, então*

$$\left[\int \left(\int f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \int \left[\int f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

Demonstração. Ver [10] p. 194.

Quando considerado o cálculo de integrais no $\mathbb{R}^n$ para funções radiais, será útil um resultado que reduz a uma integração real.

Proposição 1.2.7. *Seja f uma função mensurável definida em $\mathbb{R}^n$, não-negativa e integrável tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função g definida em $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$, isto é, radial. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr,$$

no qual σ representa a medida de Borel de S^{n-1}.

Demonstração. Ver [10] p. 79.

Observação 1.2.3. *Na proposição anterior dx é a notação utilizada quando consideramos a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}$.*

[3] $\cong$ indica dois espaços isometricamente isomorfos.

Com o propósito de enunciar um resultado conhecido por Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, considere as seguintes definições.

Definição 1.2.5.

(i) *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável. Uma medida com sinal é uma função* $\mu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ *tal que*

(a) $\mu(\varnothing) = 0$*;*

(b) μ *assume apenas uma das grandezas* $-\infty$ *e* ∞*;*

(c) *Se* $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência disjunta de conjuntos em* $\mathcal{A}$*, então*

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E_j),$$

no qual a soma acima converge absolutamente.

(ii) *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável. Uma medida complexa é uma função* $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *tal que*

(a) $\nu(\varnothing) = 0$*;*

(b) *Se* $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência disjunta de conjuntos em* $\mathcal{A}$*, então*

$$\nu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(E_j),$$

no qual a série acima converge absolutamente.

(iii) *Sejam* μ *uma medida positiva e* ν *medida com sinal definidas em uma* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$*. Dizemos que* ν *é absolutamente contínua com respeito a* μ*, denotado* $\nu \ll \mu$*, se* $\nu(A) = 0$ *para todo* $A \in \mathcal{A}$ *tal que* $\mu(A) = 0$*;*

(iv) *Sejam* μ_1 *e* μ_2 *medidas com sinal definidas em* $\mathcal{A}$*. Dizemos que* μ_1 *e* μ_2 *são mutuamente singular, denotado por* $\mu_1 \perp \mu_2$ *se existem* $A, B \in \mathcal{A}$ *com* $A \cap B = \varnothing$ *tal que* $X = A \cup B$*,* A *é nulo para* μ_1 *e* B *é nulo para* μ_2*, isto é,* $\mu_1(E) = 0$ *para todo* $E \subseteq A$ *e* $\mu_2(F) = 0$ *para todo* $F \subseteq B$*.*

Teorema 1.2.5 (Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Sejam* μ *uma medida* σ*-finita positiva e* λ *uma medida complexa definidas em* $(X, \mathcal{A})$*. Então:*

(i) *Existem* λ_a *e* λ_s *medidas complexas sobre* $\mathcal{A}$ *tal que* $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$*,* $\lambda_a \ll \mu$ *e* $\lambda_s \perp \mu$*;*

(ii) Existe uma única função $h \in L^1(X)$ tal que para todo $E \in \mathcal{A}$

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu.$$

Demonstração. Ver [21] p. 121.

O próximo resultado, conhecido por Teorema da Caracterização de Riesz, identifica todos os funcionais lineares contínuos definidos em $C_0(\mathbb{R}^n)$, conhecido como espaço das funções que decaem no infinito, isto é

$$C_0(\mathbb{R}^n) \doteq \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ contínua tal que } |f(x)| \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty\}.$$

Propriedades do espaço $C_0(\mathbb{R}^n)$ podem ser consultadas em [21] p. 70.

Definição 1.2.6. *Uma medida de Borel μ definida em $\mathbb{R}^n$ é denominada regular se satisfaz:*

(i) $\mu(K) < \infty$, *para todo* $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto;*

(ii) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \subset E, \ K \text{ compacto}\}$;

(iii) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \ U \subset E, \ U \text{ aberto}\}$.

Observação 1.2.4. *Uma medida complexa μ é denominada regular quando sua variação total $|\mu|$, que é uma medida positiva, é regular (veja [10] p. 93 para a definição da variação total de uma medida complexa).*

Teorema 1.2.6 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Se $\Phi : C_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo, então Φ pode ser representado por uma única medida de Borel complexa e regular, no seguinte sentido*

$$\Phi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu, \ \forall \ \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Ver [21] p. 130

Denotemos por $M(X)$ o conjunto das medidas regulares finitas de Borel. Então o Teorema de Representação de Riesz afirma que existe um isomorfismo entre $M(X)$ e $C_0(X)^*$ (veja em [10] p. 223). Um resultado clássico afirma que para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a aplicação

$$\mu(E) \doteq \int_E f(x)dx, \ E \subset \mathbb{R}^n$$

define uma medida regular complexa (ou com sinal) e portanto $L^1(\mathbb{R}^n) \subset M(\mathbb{R}^n)$. Como consequência temos o seguinte resultado.

Corolário 1.2.2. $L^1(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)^*$.

1.3 Teoria das Distribuições

A formulação da Teoria das Distribuições teve origem em 1945 pelo matemático francês Laurent Schwartz e foi motivada por problemas que surgiram na Física, como por exemplo a necessidade de uma formulação matemática precisa e rigorosa para a então chamada "função" delta de Dirac.

Ao longo desta seção $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ denotará um conjunto aberto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Definimos o suporte de f, denotado por $supp(f)$ como o fecho do conjunto $\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}$.

Definição 1.3.1. *Denotaremos por $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto. Cada $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denominada função teste.*

Exemplo 1.3.1. *Construiremos neste exemplo uma função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi \geqslant 0$ e $\int \varphi(x)dx = 1$. Considere inicialmente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções $C^\infty(\mathbb{R})$ e $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ respectivamente, dadas por*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}$$

e

$$\alpha(x) = 1 - \|x\|^2.$$

Defina $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por $g(x) = (f \circ \alpha)(x)$. Note que $g \geqslant 0$, $supp(g) \subset B[0,1]$ e $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx < \infty$. Desta forma, basta considerarmos $\varphi(x) = g(x)/C$, no qual $C = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx$ para obtermos a função desejada.

Exemplo 1.3.2. *Existe uma função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $supp(\varphi) \subseteq B(0,2)$ e $\varphi(x) = 1$ se $x \in B(0,1)$.*

A construção da função citada no exemplo anterior baseia-se no seguinte resultado:

Proposição 1.3.1. *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto. Então existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ e $\varphi(x) = 1$ em uma vizinhança de K.*

Demonstração. Ver [17] p. 7.

O próximo resultado estabelece uma conexão entre os espaços $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $L^p(\mathbb{R}^n)$ e como consequência mostraremos a invariância por translação dos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.3.2. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração. Ver [21] p. 69.

Proposição 1.3.3. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leqslant p < \infty$. Então*

$$\lim_{|h| \to 0} \|f(\cdot + h) - f\|_p = 0.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.3.2, dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.3}$$

Como $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pela Desigualdade do Valor Médio obtemos

$$\begin{aligned} \|g(\cdot + h) - g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(x+h) - g(x)|^p dx \\ &\leqslant |h|^p \int_{supp(g)} \sup_{0<t<1} |g'(x+th)|^p dx \\ &\leqslant C\ |h|^p. \end{aligned}$$

Assim, para $|h|$ suficientemente pequeno obtemos que

$$\|g(\cdot + h) - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.4}$$

Portanto, utilizando a desigualdade triangular, (1.3) e (1.4), obtemos

$$\|f(\cdot + h) - f\|_p \leqslant \|f(\cdot + h) - g(\cdot + h)\|_p + \|g(\cdot + h) - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

No que segue apresentaremos a noção de convergência em $C_c^\infty(\Omega)$. É possível estabelecer uma topologia em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que a convergência coincida com a definida abaixo.[4]

Definição 1.3.2. *Dizemos que uma sequência $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se*

[4] Na referência [17] p. 9, mostra-se que a topologia definida em $C_c^\infty(\Omega)$ no qual o conceito de convergência coincide com o definido em 1.3.2 não provém de uma métrica.

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ *tal que supp*$(\phi_j) \subseteq K$*, para todo* $j \in \mathbb{N}$*;*

(ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$*,* $\partial^\alpha \phi_j \to 0$ *uniformemente quando* $j \to \infty$*.*

Tendo definido $C_c^\infty(\Omega)$ e convergência neste espaço, estamos com as ferramentas necessárias para introduzir o conceito de distribuição.

Definição 1.3.3. *Uma distribuição em* Ω *é um funcional* $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *linear e contínuo. A continuidade do funcional* u *é no sentido da Definição 1.3.2, isto é, se* $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *converge a zero em* $C_c^\infty(\Omega)$*, então* $u(\phi_j) \doteq \langle u, \phi_j\rangle$ *converge a zero em* $\mathbb{C}$ *(no sentido usual). Denotaremos o espaço das distribuições por* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Exemplo 1.3.3. *Se* $a \in \Omega$ *e* $\delta_a : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *é um funcional dado por* $\delta_a(\phi) = \phi(a)$*, então* $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$*. Se* $a = 0$ *denotaremos* $\delta_0 = \delta$*, o qual é denominado delta de Dirac na origem.*

Definição 1.3.4. *Seja* f *uma função mensurável. Dizemos que* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *se para cada compacto* $K \subset \Omega$*,*

$$\int_K |f(x)|dx < \infty.$$

Exemplo 1.3.4. $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ *para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. De fato, seja* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $K \subset \Omega$ *um conjunto compacto. Por meio da Desigualdade de Hölder obtemos que*

$$\begin{aligned} \int_K |f(x)|dx &= \int_\Omega |f(x)|\chi_K(x)dx \\ &\leqslant \|f\|_p |K|^{1/p'} < \infty, \end{aligned}$$

donde segue que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*.*

Exemplo 1.3.5. *Seja* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Se* $T_f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ *é dado por*

$$T_f(\phi) \doteq \langle f, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx,\ \forall\ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

então $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$*. Verifiquemos a continuidade uma vez que a linearidade é imediata por propriedades de integração. Seja* $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ *uma sequência convergindo a zero em* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Logo, existe um conjunto compacto* $K \subset \Omega$ *tal que supp*$(\phi_j) \subseteq K$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$ *e podemos supor sem perda de generalidade que* $\int_K f(x)dx \neq 0$*, pois caso contrário* $f(x) = 0$ *q.t.p* $x \in K$ *e portanto* $\langle T_f, \phi_j\rangle = 0\ \forall\ j \in \mathbb{N}$*. Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $j_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|\phi_j(x)| < \frac{\varepsilon}{\displaystyle\int_K |f(x)|dx},\ \forall\ x \in K \text{ e } j \geqslant j_0.$$

Desta forma, para todo $j \geqslant j_0$ temos que

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \phi_j \rangle| &\leqslant \int_{supp(\phi_j)} |f(x)|\ |\phi_j(x)| dx \\
&\leqslant \int_K |f(x)|\ |\phi_j(x)| dx \\
&< \frac{\varepsilon}{\displaystyle\int_K |f(x)| dx} \cdot \int_K |f(x)| dx \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dizemos que duas distribuições $u, v \in \mathcal{D}'$ são iguais se $\langle u, \phi \rangle = \langle v, \phi \rangle$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.3.4. *Sejam $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_f = T_g$ se, e somente se $f = g$ q.t.p $x \in \Omega$.*

Demonstração. Ver [17] p. 11.

Observação 1.3.1. *Por meio do funcional T_f definido no Exemplo 1.3.5 e da Proposição 1.3.4 , podemos associar o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ como um subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ pela identificação $f \cong T_f$.*

Exemplo 1.3.6. *Seja μ uma medida de Borel definida em Ω e suponha adicionalmente que $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto K.[5] Então*

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_\Omega \phi d\mu, \ \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{1.5}$$

define uma distribuição. Para mostrarmos a continuidade, considere $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ uma sequência convergindo a zero como na Definição 1.3.2 e seja $K \subset \Omega$ um conjunto compacto tal que $supp(\phi_j) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geqslant j_0$ e $x \in K$

$$|\phi_j(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(K)}.$$

Desta forma, para todo $j \geqslant j_0$,

$$\begin{aligned}
|\langle \mu, \phi_j \rangle| &\leqslant \int_K |\phi_j| d\mu \\
&< \frac{\varepsilon}{\mu(K)}\ \mu(K), \ \forall\ j \geqslant j_0 \\
&= \varepsilon, \ \forall\ j \geqslant j_0.
\end{aligned}$$

[5] Uma medida com esta propriedade é denominada localmente finita.

Podemos definir em $\mathcal{D}'$ operações como soma, produto por escalar, produto por uma função C^∞ e derivação de uma distribuição. Devido ao carater introdutório desta seção, limitaremos a apresentação de tais conceitos que podem ser consultados na referência [17].

Definição 1.3.5. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definimos a j-ésima derivada de u para $j = 1, \cdots, n$ por*

$$\langle \partial_j u, \phi \rangle \doteq -\langle u, \partial_j \phi \rangle, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Analogamente, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle \doteq (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Exemplo 1.3.7. *Considere $H : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, denominada função de Heaviside, dada por*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Como $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, temos que $T_H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e portanto podemos calcular a derivada de H no sentido das distribuições. Desta forma, por meio do Teorema Fundamental do Cálculo temos que para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle \partial H, \phi \rangle &= -\int H(x) \partial \phi(x) dx \\ &= -\int_0^\infty \partial \phi(x) dx \\ &= -\int_0^m \partial \phi(x) dx, \ \textit{no qual supp}(\phi) \subset [-m, m] \\ &= \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Logo $\partial H = \delta$.

Definição 1.3.6. *Dizemos que uma sequência $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge a zero em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se $\langle u_j, \phi \rangle \to 0$ em $\mathbb{C}$ quando $j \to \infty$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Observação 1.3.2. *É possível mostrar que muitas noções de convergência em espaços de funções implicam em convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ via a inclusão $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Para maiores detalhes, veja a referência [17] p.* 55.

1.4 Convolução

Nesta seção definiremos o conceito de convolução entre duas funções contínuas e estenderemos para os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.4.1. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funções contínuas tais que ao menos uma delas possui suporte compacto. Definimos a operação convolução de f por g como*

$$f * g(x) \doteq \int f(x-y)g(y)dy = \int g(x-y)f(y)dy.$$

Motivado pela definição anterior, podemos definir convolução de uma distribuição por uma função teste.

Definição 1.4.2. *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definimos a convolução de u por ϕ como*

$$u * \phi(x) \cdot \langle u, \widetilde{\phi}_x \rangle,$$

no qual $\widetilde{\phi}_x(y) = \phi(x-y)$.

Um exemplo interessante é a convolução da distribuição delta de Dirac, pois ela se comporta como uma "função identidade" com relação a esta operação.

Exemplo 1.4.1. *Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\delta * \phi(a) = \langle \delta, \phi(a - \cdot) \rangle = \phi(a)$.*

O próximo resultado exemplifica como a operação de derivação se comporta com relação a convolução.

Teorema 1.4.1. *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $u * \phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e além disso*

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi), \ \forall \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Demonstração. Ver [17] p. 62.

Note que na Definição 1.4.1 apresentada anteriormente exigimos que pelo menos uma das funções tenha suporte compacto. Nosso objetivo agora será estender este conceito para funções em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.4.2. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então a integral*

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy \tag{1.6}$$

está bem definida q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$ e além disso vale a desigualdade

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p. \tag{1.7}$$

A desigualdade (1.7) é conhecida por Desigualdade de Young.

Demonstração. Considere inicialmente $p = 1$. Para mostrar que (1.6) está bem definida q.t.p é suficiente verificar que

$$h(x) = \int |f(x-y)|\ |g(y)|dy < \infty\ q.t.p.$$

Do Teorema de Fubini obtemos que

$$\begin{aligned} \int h(x)dx &\leqslant \int\int |f(x-y)|\ |g(y)|dydx \\ &= \int |g(y)| \int |f(x-y)|dxdy \\ &\leqslant \int |g(y)| \|f\|_1 dy \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Logo $f * g(x) < \infty$ q.t.p. A desigualdade (1.7) segue da estimativa

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int \left| \int f(x-y)g(y)dy \right| dx \\ &\leqslant \int\int |f(x-y)|\ |g(y)|dydx \\ &\leqslant \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Se $1 < p < \infty$, considere

$$h_p(x) = \int |f(x-y)|\ |g(y)|^p dy.$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, note que

$$\begin{aligned} \int h_p(x)dx &= \int\int |f(x-y)|\ |g(y)|^p dydx \\ &= \int |g(y)|^p \int |f(x-y)|dxdy \\ &\leqslant \|f\|_1 \int |g(y)|^p dx \\ &= \|f\|_1 \|g\|_p^p. \end{aligned}$$

Seja p' o expoente conjugado de p. Da Desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}
\int |f(x-y)|\,|g(y)|dy &= \int |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \left(|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|\right) dy \\
&\leqslant \left(\int |f(x-y)|dy\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int |f(x-y)|\,|g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_1^{1/p'}[h_p(x)]^{1/p} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo $f * g(x) < \infty$ q.t.p. Por fim,

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_p &= \left(\int \left|\int f(x-y)g(y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int \left(\int |f(x-y)|\,|g(y)|dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \|f\|_1^{1/p'} \left(\int h_p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_1^{1/p'} \left(\int\int |f(x-y)|\,|g(y)|^p dydx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_1^{1/p'} \left(\int |g(y)|^p \int |f(x-y)|dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_1^{1/p'}\|f\|_1^{1/p}\|g\|_p \\
&= \|f\|_1\|g\|_p.
\end{aligned}$$

O caso $p = \infty$ é imediato pois

$$\int |f(x-y)|\,|g(y)|dy \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

$\square$

1.5 Transformada de Fourier

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a transformada de Fourier de f por

$$\widehat{f}(\xi) \doteq (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)dx, \tag{1.8}$$

no qual $\langle x, \xi\rangle \doteq \sum_{j=1}^{n} x_j\xi_j$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.5.1. *A expressão* (1.8) *é linear e está bem definida, uma vez que*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant (2\pi)^{-n/2}\int |e^{-i\langle x,\xi\rangle}|\ |f(x)|dx = \int |f(x)|dx < \infty.$$

Proposição 1.5.1. $\widehat{f}$ *é uma função contínua.*

Demonstração. Considere $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência tal que $\xi_j \to \xi_0$ quando $j \to \infty$. É suficiente mostrarmos que $\widehat{f}(\xi_j) \to \widehat{f}(\xi_0)$ quando $j \to \infty$, isto é

$$(2\pi)^{-n/2}\int (\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi_j\rangle} - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi_0\rangle})f(x)dx \to 0 \text{ quando } j \to \infty,$$

o que é imediato pelo Teorema da Convergência Dominada. De fato, defina

$$h_j(x) = (\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi_j\rangle} - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi_0\rangle})f(x).$$

Temos que para todo $j \in \mathbb{N}$ as funções h_j são integráveis (produto de funções integráveis), $h_j \to 0$ pontualmente q.t.p e $|h_j(x)| \leqslant 2|f(x)|$, o que completa a demonstração.

□

Embora a transformada de Fourier seja definida para funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$, este espaço não é invariante pela transformada de Fourier, isto é $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ não implica que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.5.1. *Considere* $[-1,1] \subset \mathbb{R}$*. É imediato que a função* $\chi_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$ *e mostremos que* $\widehat{\chi}_{[-1,1]} \notin L^1(\mathbb{R})$*. De fato, note inicialmente que*

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}_{[-1,1]}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\chi_{[-1,1]}(x)dx\\ &= (2\pi)^{-1/2}\int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}dx\\ &= (2\pi)^{-1/2}\,\frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{i\xi}\end{aligned}$$

e desta forma

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\chi}_{[-1,1]}\right|d\xi &= (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|e^{i\xi}-e^{-i\xi}\right|}{|\xi|}d\xi\\ &= 2(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{sen(\xi)}{\xi}\right|d\xi,\end{aligned}$$

no qual a última integral é divergente e portanto $\widehat{\chi}_{[-1,1]} \notin L^1(\mathbb{R})$*.*

A seguir apresentaremos um subespaço de $L^1(\mathbb{R}^n)$ que contém $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e é invariante pela transformada de Fourier.

Definição 1.5.1. *Denotamos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, denominado espaço de Schwartz, o conjunto das funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty.$$

Geometricamente as funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ decaem no infinito mais rapidamente do que qualquer polinômio.

Observação 1.5.2. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|$ define uma semi-norma em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A família $\mathcal{B}_N = \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} : \ |\alpha| \leqslant N, \ |\beta| \leqslant N, \ N \in \mathbb{N}\}$ de semi-normas define uma topologia sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*[6]

Tendo em vista a observação anterior, dizemos que a sequência $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se para quaisquer $\alpha, \ \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ temos que $\left\{x^\alpha D^\beta \varphi_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a zero uniformemente em $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.5.2. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha D^\beta f(x) = 0$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$.*

Demonstração. Sejam $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $e_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ o j-ésimo vetor canônico. Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned} \left||x|^2 x^\alpha D^\beta f(x)\right| &= \left|\sum_{j=1}^n x^{\alpha+2e_j} D^\beta f(x)\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n \left|x^{\alpha+2e_j} D^\beta f(x)\right| \\ &\leqslant C_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right| \leqslant \frac{C_{\alpha,\beta}}{|x|^2},$$

donde segue o resultado.

□

Exemplo 1.5.2. *Note que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e convergência em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ implica em convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Um exemplo de uma função que está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e não possui suporte compacto é $f(x) = e^{-|x|^2}$.*

[6] Veja o Teorema 1.37 p. 26 da referência [20].

Observação 1.5.3. *Como consequência do Exemplo 1.5.2 e da Proposição 1.3.2 temos que* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $1 \leqslant p < \infty$. *É possível mostrar também que* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *(ver [17] p. 80).*

Exemplo 1.5.3. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. *De fato, seja* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Da Definição 1.5.1 considerando* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ *tal que* $|\alpha| = n+1$ *e* $\beta = 0$ *obtemos que* $|f(x)| < \dfrac{C}{|x|^{n+1}}$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
\int |f(x)|dx &= \int_{|x|\leqslant 1} |f(x)|dx + \int_{|x|>1} |f(x)|dx \\
&\leqslant \sup_{|x|\leqslant 1} |f(x)| \; |B(0,1)| + C \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{n+1}} \\
&= \sup_{|x|\leqslant 1} |f(x)| \; |B(0,1)| + C|S^{n-1}| \int_1^\infty r^{-2} dr < \infty.
\end{aligned}$$

No próximo resultado, mostraremos algumas propriedades da transformada de Fourier.

Proposição 1.5.3. *Seja* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então para todo* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, *é válido:*

(a) $\widehat{(D^\alpha f)}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$;

(b) $\left(D^\beta \widehat{f}\right)(\xi) = \widehat{(-x)^\beta f}(\xi)$;

(c) $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração.

(a) Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{D^\alpha f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} D^\alpha f(x) dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int \xi^\alpha \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x) dx \\
&= \xi^\alpha \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

(b) Basta observar que

$$\begin{aligned}
D^\beta \widehat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} D^\beta \left(\int \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x) dx \right) \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int (-x)^\beta \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x) dx \\
&= \widehat{(-x)^\beta f}(\xi).
\end{aligned}$$

(c) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Usando (a) e (b), obtemos que

$$\begin{aligned} \left|\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)\right| &= \left|\xi^\alpha \widehat{(-x)^\beta f}(\xi)\right| \\ &= \left|\widehat{D^\alpha (-x)^\beta f}(\xi)\right|. \end{aligned}$$

Uma vez que $(-x)^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então $D^\alpha(-x)^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e pelo Exemplo 1.5.3, pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)\right| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\widehat{D^\alpha (-x)^\beta f}(\xi)\right| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} D^\alpha[(-x)^\beta f(x)] dx\right| \\ &\leqslant (2\pi)^{-n/2} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int \left|D^\alpha[(-x)^\beta f(x)]\right| dx \\ &\leqslant (2\pi)^{-n/2} \|D^\alpha (-x)^\beta f\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

donde segue que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

□

Corolário 1.5.1 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$.*

Demonstração. Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o resultado é válido pois $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A generalização para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ segue por meio da Observação 1.5.3.

□

O próximo resultado afirma que a transformada de Fourier é uma aplicação continuamente inversível e estabelece uma fórmula explícita para a inversa.

Teorema 1.5.1 (Fórmula de Inversão da Transformada de Fourier). *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\check{\widehat{f}} = f$, no qual a operação $\check{}$[7] é definida por*

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} f(\xi) d\xi. \tag{1.9}$$

Desta forma, $\check{f}$ é denominada inversa da transformada de Fourier.

Demonstração. Ver [17] p. 77.

[7]A transformada inversa de Fourier também é denotada por $\mathcal{F}^{-1}$

Proposição 1.5.4 (Fórmula de Plancherel)**.** *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então a aplicação $f \mapsto \widehat{f}$ pode ser estendida unicamente a um operador unitário em $L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é*

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2, \tag{1.10}$$

conhecido por fórmula de Plancherel.

Demonstração. Ver [26] p. 20.

Nosso objetivo daqui em diante será estender o conceito da transformada de Fourier para funcionais lineares e contínuos definidos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.[8]

Definição 1.5.2. *Um funcional linear e contínuo definido em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denominado distribuição temperada. Denotaremos o espaço das distribuições temperadas por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço denso de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e a restrição de funcionais em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ no conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ temos que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Além disso se $u_j \to 0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to \infty$, então $u_j \to 0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.5.3. *Se $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, então definimos a transformada de Fourier de u como*

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle \doteq \langle u, \widehat{\phi} \rangle, \ \forall \ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Note que como $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier de u está bem definida e além disso é contínua e inversível em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

[8]Toda a preocupação de encontrar um espaço que seja invariante pela transformação de Fourier tem importância na garantia da existência desta extensão. Para um estudo mais aprofundado, consulte [17] p. 73.

Capítulo 2

Operadores Pseudo-Diferenciais

O intuito deste capítulo é apresentar, de forma introdutória, a teoria de operadores pseudo-diferenciais e suas principais propriedades.

2.1 Operadores Pseudo-Diferenciais $OpS^m(\mathbb{R}^n)$

Para motivarmos a definição de tais operadores, considere o operador diferencial $P(D)$ dado por

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha, \tag{2.1}$$

no qual $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Associado a ele, considere o símbolo do operador (2.1) definido como

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \xi^\alpha, \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Nosso objetivo será reescrever o operador (2.1) em termos de seu símbolo (2.2). Assim, considere $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e note que

$$\begin{aligned} P(D)\varphi(x) &= \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha (\widehat{D^\alpha \varphi})^\vee (x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha (\xi^\alpha \widehat{\varphi})^\vee (x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \xi^\alpha \right) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} p(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Desta forma, vemos que é possível expressar um operador diferencial com coeficientes constantes em termos de seu símbolo fazendo uso da transformada inversa de Fourier. Em linhas gerais, os operadores pseudo-diferenciais são aqueles que podem ser representados na forma (2.3). Neste capítulo estaremos interessados em estudar classes de símbolos mais gerais que (2.2), definidos a seguir.

Definição 2.1.1. *Seja $m \in \mathbb{R}$. Definimos $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \doteq S^m(\mathbb{R}^n)$ como o conjunto de todas as funções $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tais que para quaisquer multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$, existe uma constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que vale a estimativa*

$$\left| D^\alpha_x D^\beta_\xi \sigma(x,\xi) \right| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}, \ \forall \ x, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

Denominamos por m a ordem do símbolo $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 2.1.1. *O polinômio $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \xi^\alpha \in S^m(\mathbb{R}^n)$. De fato, como p não depende de x basta notar que*

$$\begin{aligned}
\left| D^\beta_\xi p(\xi) \right| &\leqslant \sup_{|\alpha| \leqslant m} |a_\alpha| \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\beta \xi^\alpha| \\
&\leqslant \sup_{|\alpha| \leqslant m} |a_\alpha| \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha| \leqslant m} C_\alpha \ |\xi|^{|\alpha|-|\beta|} \\
&\leqslant C_\alpha \ |\xi|^{m-|\beta|} \\
&\leqslant C_\alpha \ (1+|\xi|)^{m-|\beta|}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.2. *Toda função na classe de Schwartz define um símbolo na classe $S^0(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $\varphi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então para todo $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$ e $x \in \mathbb{R}^n$ vale que*

$$|D^\beta \varphi(\xi)| \leqslant C_\beta (1+|\xi|)^{-|\beta|},$$

donde segue que $\varphi \in S^0(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 2.1.3. *O símbolo de Bessel dado por $\sigma(\xi) = \langle \xi \rangle^m \doteq (1+|\xi|^2)^{m/2}$ é um símbolo em $S^m(\mathbb{R}^n)$. De fato, considere $m \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$ e mostremos por indução sobre $|\beta|$ que vale*

$$\left| (D^\beta \sigma)(\xi) \right| \leqslant C_{m,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}. \tag{2.5}$$

Para o caso em que $|\beta| = 0$, é suficiente mostrar que $(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \sim (1+|\xi|)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. De fato, note que

$$1+|\xi|^2 \leqslant (1+|\xi|)^2 \ \Rightarrow \ (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (1+|\xi|).$$

Por outro lado, seja $f(\xi) = \dfrac{1+|\xi|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}$ *uma função contínua. Assim, para* $|\xi| \leqslant 1$ *temos que* f *é limitada e portanto existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $(1+|\xi|) \leqslant C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$. *Se* $|\xi| > 1$, *então*

$$\begin{aligned} (1+|\xi|)^2 &= 1 + 2|\xi| + |\xi|^2 \\ &< 3(1+|\xi|^2), \end{aligned}$$

e portanto $(1+|\xi|) \leqslant \sqrt{3}(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Suponha que (2.5) *seja válida para todo* $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$ *tal que* $|\beta| \leqslant \ell$ *e para todo* $m \in \mathbb{R}$. *Mostremos que permanece válido para* $\gamma \in \mathbb{Z}^n_+$ *satisfazendo* $|\gamma| = \ell + 1$. *De fato,*

$$|(D^\gamma \sigma)(\xi)| = |D^\alpha D_j \sigma(\xi)|,$$

no qual $|\alpha| = \ell$ *e* $j = 1, 2, \cdots, n$. *Note que* $D_j\sigma(\xi) = m\xi_j(1+|\xi|^2)^{(m-2)/2}$, *então através da fórmula de Leibniz obtemos*

$$D^\alpha D_j \sigma(\xi) = m \sum_{\eta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\eta} (D^\eta \xi_j) D^{\alpha-\eta} \left[(1+|\xi|^2)^{(m-2)/2}\right].$$

Utilizando a hipótese de indução, existe uma constante $C_{\alpha,m} > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} |(D^\gamma \sigma)(\xi)| &\leqslant C_{\alpha,m} \sum_{\eta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\eta} (1+|\xi|)^{1-|\eta|} (1+|\xi|)^{m-2-|\alpha|+|\eta|} \\ &= C_{\alpha,m} \sum_{\eta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\eta} (1+|\xi|)^{m-(1+|\alpha|)} \\ &= C_{\alpha,m} \sum_{\eta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\eta} (1+|\xi|)^{m-|\gamma|}. \end{aligned}$$

Desta forma, pelo princípio da indução segue que a estivativa (2.5) *é válida.*

Exemplo 2.1.4. *Seja* $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *uma função no qual as derivadas de todas as ordens são limitadas. Então o polinômio* $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \in S^m(\mathbb{R}^n)$. *De fato,* *basta observar que*

$$\begin{aligned}
\left|D_x^\gamma D_\xi^\delta p(x,\xi)\right| &= \left|\sum_{|\alpha|\leqslant m} D_x^\gamma a_\alpha(x) D_\xi^\delta \xi^\alpha\right| \\
&\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_{\gamma,\delta}\left|D_\xi^\delta \xi^\alpha\right| \\
&= C_{\gamma,\delta}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{\delta\leqslant\alpha}\delta!\binom{\alpha}{\delta}|\xi|^{|\alpha|-|\delta|} \\
&\leqslant C_{\gamma,\alpha}|\xi|^{m-|\delta|} \\
&\leqslant C_{\gamma,\alpha}(1+|\xi|)^{m-|\delta|}.
\end{aligned}$$

Definido o que é um símbolo, podemos agora definir um operador pseudo-diferencial associado a ele.

Definição 2.1.2. *Para cada símbolo $\sigma(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$ associamos um operador $\sigma(x,D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definido por*

$$\sigma(x,D)\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi, \tag{2.6}$$

o qual é denominado operador pseudo-diferencial associado ao símbolo $\sigma(x,\xi)$. Denotaremos o conjunto dos operadores pseudo-diferenciais na classe $S^m(\mathbb{R}^n)$ por $OpS^m(\mathbb{R}^n)$.

Mostremos agora que o operador apresentado em (2.6) está bem definido e que de fato $\sigma(x,D)\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.1.1. *Sejam $\sigma \in S^{m_1}(\mathbb{R}^n)$ e $\tau \in S^{m_2}(\mathbb{R}^n)$ símbolos tais que $\sigma(x,D) = \tau(x,D)$. Então $\sigma = \tau$ e como consequência o operador pseudo-diferencial* (2.6) *é unicamente determinado pelo seu símbolo.*

Demonstração. Por hipótese $\sigma(x,D) = \tau(x,D)$, então

$$\int \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}[\sigma(x,\xi)-\tau(x,\xi)]\widehat{\varphi}(\xi)d\xi = 0,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.7}$$

Como a transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é invertível e portanto bijetora, obtemos da equação (2.7) que

$$\int \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}[\sigma(x,\xi)-\tau(x,\xi)]\psi(\xi)d\xi = 0,\ \forall\ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, defina a função $f_x(\xi) = \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}[\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi)]$ e assim

$$\int f_x(\xi)\psi(\xi)d\xi = 0, \ \forall \ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

define uma distribuição temperada. Desta forma, segue da Proposição 1.3.4 que

$$f_x(\xi) = \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}[\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi)] = 0, \ \forall \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Como tomamos $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, porém arbitrário, obtemos que $\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi) = 0$ para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, o que conclui a demonstração do lema.

□

Lema 2.1.2. *Seja $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n)$. Então $\sigma(x,D)\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Mostremos que para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vale que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D_x^\beta \left(\sigma(x,D)\varphi\right)(x)\right| < \infty. \tag{2.8}$$

Por meio da fórmula de Leibniz e integração por partes, obtemos que

$$\begin{aligned}
x^\alpha D_x^\beta \left(\sigma(x,D)\varphi\right)(x) &= (2\pi)^{-n/2} x^\alpha D_x^\beta \left(\int \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi\right) \\
&= (2\pi)^{-n/2} x^\alpha \int D_x^\beta[\mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)]\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} x^\alpha \int \sum_{\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} D_x^\gamma(\mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}) D_x^{\beta-\gamma}(\sigma(x,\xi))\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} x^\alpha \int \sum_{\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} D_x^{\beta-\gamma}(\sigma(x,\xi))\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int \sum_{\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma D_\xi^\alpha \left(\mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}\right) D_x^{\beta-\gamma}(\sigma(x,\xi))\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\
&= (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-n/2} \int \sum_{\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} \times \\
&\qquad \times D_\xi^\alpha \left(D_x^{\beta-\gamma}(\sigma(x,\xi))\xi^\gamma\widehat{\varphi}(\xi)\right) d\xi \\
&= (-1)^{|\alpha|}(2\pi)^{-n/2} \int \sum_{\gamma\leqslant\beta}\sum_{\delta\leqslant\alpha} \binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} \times \\
&\qquad \times \left(D_\xi^{\alpha-\delta} D_x^{\beta-\gamma}\sigma(x,\xi)\right) D_\xi^\delta\left(\xi^\gamma \ \widehat{\varphi}(\xi)\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Como $\sigma(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$, então

$$\left|D_\xi^{\alpha-\delta} D_x^{\beta-\gamma}\sigma(x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta,\delta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\delta|}.$$

Assim,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D_x^\beta \sigma(D,x)(x)\right| \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta}\sum_{\delta\leqslant\alpha} C_{\alpha,\beta,\delta,\gamma}\int (1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\delta|}\left|D_\xi^\delta\left(\xi^\gamma\ \widehat{\varphi}(\xi)\right)\right| d\xi < \infty$$

uma vez que $\widehat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Exemplo 2.1.5. *Considere o operador diferencial definido por*

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

no qual $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e tem derivadas de todas as ordens limitadas. Vimos no Exemplo 2.1.4 que o polinômio* $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \in S^m(\mathbb{R}^n)$ *e portanto* $P(x,D) \in OpS^m(\mathbb{R}^n)$.

Observação 2.1.1. *Será útil posteriormente considerar operadores pseudo-diferenciais* $\sigma(x,D)$ *cujo domínio é o espaço das distribuições temperadas, isto é* $\sigma(x,D) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Para isso, considere* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e defina*

$$\langle \sigma(x,D)u, \varphi\rangle \doteq \left\langle \widehat{u}, (2\pi)^{-n/2}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)\varphi(x)dx\right\rangle.$$

Note que a expressão anterior está bem definida, uma vez que analogamente ao Lema 2.1.2, temos que

$$(2\pi)^{-n/2}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)\varphi(x)dx \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

A seguir apresentaremos alguns resultados fundamentais da teoria de cálculo de símbolos de operadores pseudo-diferenciais. Por não fazer parte do escopo da dissertação omitiremos as demonstrações, que podem ser encontradas na referência [26].

Definição 2.1.3 (Expansão assintótica de um símbolo)**.** *Seja* $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n)$ *e suponha que exista uma sequência de símbolos* $\sigma_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^n)$, *no qual* $m = m_0 > m_1 > m_2 > \cdots > m_j \to -\infty$ *quando* $j \to \infty$, *tal que*

$$\sigma - \sum_{j=0}^{\ell-1}\sigma_j \in S^{m_\ell}(\mathbb{R}^n),\ \ \forall\ \ell \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.9}$$

A soma $\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j$ *é denominada expansão assintótica do símbolo* σ *e é denotada por* $\sigma \sim \sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j$.

Teorema 2.1.1. *Sejam* $m_0 > m_1 > m_2 > \cdots > m_j \to -\infty$ *quando* $j \to \infty$ *e* $\sigma_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^n)$. *Então existe um símbolo* $\sigma \in S^{m_0}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\sigma \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$. *Além disso, se existir um símbolo* τ *com a mesma expansão assintótica, então* $\sigma - \tau \in \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m$.

Uma pergunta natural que surge durante o estudo de operadores pseudo-diferenciais é se a composição de tais operadores é ainda um operador pseudo-diferencial e se sim, em qual classe de símbolos ele está contido. Esta pergunta será respondida pelo próximo resultado e tem forte relação com a expansão assintótica de seu símbolo.

Teorema 2.1.2. *Sejam* $\sigma \in S^{m_1}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\tau \in S^{m_2}(\mathbb{R}^n)$. *Então a composição* $\sigma(x, D) \circ \tau(x, D)$ *é um operador pseudo-diferencial, o qual denotaremos por* $\lambda(x, D)$ *e* $\lambda \in S^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n)$ *com a seguinte expansão assintótica*

$$\lambda \sim \sum_{\mu \geqslant 0} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} \left(\partial_\xi^\mu \sigma\right) \left(\partial_x^\mu \tau\right).$$

A classe $S^m(\mathbb{R}^n)$ considerada anteriormente é apenas um caso particular de uma classe mais geral, denominada classe de Hörmander. Definimos $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n) \doteq S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\rho, \delta \in [0, 1]$ como o espaço das funções $\sigma(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tais que

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}, \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Desta forma, o espaço de símbolos que introduzimos na Definição 2.1.1 é um caso particular quando $\rho = 0$ e $\delta = 1$. De forma totalmente análoga, definimos operadores pseudo-diferenciais associados a símbolos na classe $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ que serão denotados por $OpS^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$. Os resultados citados anteriormente possuem versões para operadores desta natureza, como o resultado a seguir que trata sobre a composição de operadores pseudo-diferenciais para símbolos na classe $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.1.3. *Considere* $\sigma_j(x, D) \in OpS^{m_j}_{\rho_j,\delta_j}$, $j = 1, 2$. *Suponha que* $0 \leqslant \delta_2 < \rho \leqslant 1$, *com* $\rho = min\{\rho_1, \rho_2\}$. *Então*

$$\sigma_1(x, D) \circ \sigma_2(x, D) = \tau(x, D) \in OpS^{m_1+m_2}_{\rho,\delta},$$

no qual $\delta = max\{\delta_1, \delta_2\}$. *Além disso, temos a seguinte expansão assintótica*

$$\tau(x, D) \sim \sum_{\mu \geqslant 0} \frac{i^{|\mu|}}{\mu!} \left(D_\xi^\mu \sigma_1\right) \left(D_x^\mu \sigma_2\right).$$

Demonstração. Ver [24] p. 11.

2.2 Núcleo de um Operador Pseudo-Diferencial

O Teorema do Núcleo de Schwartz (ver [16] p. 128) afirma que para toda aplicação contínua $T : C_c^\infty(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, existe uma única distribuição $K(x,y) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$, denominada núcleo do operador T, tal que para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$T\varphi(x) = \int_\Omega K(x,y)\varphi(y)dy.^1 \tag{2.10}$$

Nesta seção destacaremos como representar um operador pseudo-diferencial na forma (2.10) bem como uma fórmula explicita para seu núcleo. Por fim, enunciaremos um resultado clássico sobre estimativas pontuais do núcleo de um operador pseudo-diferencial na classe de Hörmander.

Por meio da transformada inversa de Fourier, para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ podemos reescrever um operador pseudo-diferencial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma(x,D)\varphi(x) &= (2\pi)^{-n/2}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)\left(\int e^{-i\langle y,\xi\rangle}\varphi(y)dy\right)d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int\left(\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\sigma(x,\xi)d\xi\right)\varphi(y)dy. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Entretanto, não existe garantia que a integral dada pela identidade acima converge absolutamente. Para contornar esse problema a ideia é aproximar $\sigma(x,\xi)$ por símbolos com suporte compacto, no qual a identidade (2.11) esteja bem definida.

Seja $\{\sigma_j(x,\xi)\}_{j\in\mathbb{N}} \subset S^m(\mathbb{R}^n)$ uma sequência de símbolos em $S^m(\mathbb{R}^n)$ que converge pontualmente para $\sigma(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$ e satisfazem a estimativa (2.4) uniformemente em $j \in \mathbb{N}$. Então para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que $\sigma_j(x,D)f \to \sigma(x,D)f$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $j \to \infty$. Fixe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ uma função tal que $\phi(0,0) = 1$ e defina $\sigma_\varepsilon(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\phi(\varepsilon x, \varepsilon\xi)$. Note que se $\sigma(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$, então $\sigma_\varepsilon(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$ e vale a estimativa (2.4) uniformemente para $0 < \varepsilon \leqslant 1$ (omitiremos o cálculo).

Desta forma, podemos reescrever (2.11) como

$$\sigma(x,D)\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\left(\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\sigma_\varepsilon(x,\xi)d\xi\right)\varphi(y)dy.$$

Portanto, o núcleo de um operador pseudo-diferencial é dado por

$$K(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\sigma_\varepsilon(x,\xi)d\xi.$$

[1] A rigor a integral (2.10) é dada por $\langle T\phi,\psi\rangle = K(\phi\otimes\psi)$ para toda $\phi,\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

O próximo resultado apresenta um controle pontual do núcleo associado a um operador pseudo-diferencial que é devido a J. Hounie e J. Alvarez em [1].

Teorema 2.2.1. *Seja $\sigma(x,D) \in OpS^m_{\rho,\delta}$, $0 < \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta < 1$ um operador pseudo-diferencial associado ao símbolo $\sigma(x,\xi)$ e denote $K(x,y)$ seu núcleo. Então $K(x,y)$ é suave fora da diagonal $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ x = y\}$ e valem as seguintes estimativas pontuais:*

(a) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$, existe $L_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que para todo $L \geqslant L_0$, temos

$$\sup_{x \neq y} |x-y|^L \left| D^\alpha_x D^\beta_y K(x,y) \right| < C_{\alpha,\beta,n}. \tag{2.12}$$

(b) Suponha que para algum $M \in \mathbb{Z}_+$ vale que $m + M + n > 0$, então existe uma constante $C_{\alpha,\beta}$ tal que

$$\sup_{|\alpha+\beta|=M} \left| D^\alpha_x D^\beta_y K(x,y) \right| \leqslant C_{\alpha,\beta} |x-y|^{-(m+M+n)/\rho}, \ x \neq y \tag{2.13}$$

Demonstração. Ver [1] p. 03.

Capítulo 3

Espaços de Hardy

Este capítulo tem por objetivo apresentar os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, sua versão localizável $h^p(\mathbb{R}^n)$ e o espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$.

3.1 Preliminares

Nesta seção definiremos e mostraremos propriedades básicas do operador maximal de Hardy-Littlewood. Para esta finalidade apresentaremos o conceito de uma aproximação da identidade, desigualdades do tipo forte e fraco para operadores e por fim o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz. Ao longo desta seção será utilizada a referência [8].

3.1.1 Aproximações da Identidade

Definição 3.1.1. *Seja ϕ uma função integrável em $\mathbb{R}^n$ tal que $\int \phi(x)dx = 1$ e para cada $t > 0$ defina $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(t^{-1}x)$. A sequência $\{\phi_t\}_{t>0}$ é denominada aproximação da identidade.*

Proposição 3.1.1. *$\phi_t \to \delta_0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $t \to 0$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que $\langle \phi_t, \varphi \rangle \to \langle \delta_0, \varphi \rangle$ quando $t \to 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por meio de mudança de variáveis obtemos que

$$\langle \phi_t, \varphi \rangle = \int t^{-n}\phi(t^{-1}x)\varphi(x)dx = \int \phi(z)\varphi(tz)dz$$

e o resultado segue pelo Teorema da Convergência Dominada. Sendo assim,

$$\lim_{t\to 0} \int \phi(z)\varphi(tz)dz = \int \phi(z)\varphi(0)dz = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

$\square$

Observação 3.1.1. *Para qualquer* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *obtemos que* $\delta * \varphi = \varphi$. *Assim, pela proposição anterior, para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *vale o limite pontual*

$$\lim_{t\to 0} \phi_t * \varphi(x) = \varphi(x).$$

O próximo resultado segue na mesma direção e mostra que a convergência também se verifica em norma $\|\cdot\|_p$.

Proposição 3.1.2. *Sejam* $\{\phi_t\}_{t>0}$ *uma aproximação da identidade e* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $1 \leqslant p < \infty$. *Então,*

$$\lim_{t\to 0} \|\phi_t * f - f\|_p = 0,$$

isto é, $\phi_t * f \to f$ *em norma* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *quando* $t \to 0$.

Demonstração. Por meio da Proposição 1.3.3, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(f) > 0$ tal que se $|h| < \delta$, então

$$\|f(\cdot + h) - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.1}$$

Como $\displaystyle\int \phi(x)dx = 1$, para t suficientemente pequeno obtemos que

$$\int_{|z|\geqslant \frac{\delta}{t}} \phi(z)dz < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_p}. \tag{3.2}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \phi_t * f(x) - f(x) &= \int \phi_t(x-y)f(y)dy - \int \phi(z)f(x)dz \\ &= \int \phi(z)\left[f(x-tz) - f(x)\right]dz, \end{aligned}$$

utilizando a Desigualdade de Minkowski para Integrais e as estimativas (3.2) e (3.1), obtemos que para t suficientemente pequeno

$$
\begin{aligned}
\|\phi_t * f - f\|_p &= \left(\int |\phi_t * f(x) - f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int \left| \int \phi(z) \left[f(x - tz) - f(x) \right] dz \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \int \left(\int |\phi(z)|^p |f(x - tz) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dz \\
&= \int |\phi(z)| \left(\int |f(x - tz) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dz \\
&= \int |\phi(z)| \; \|f(\cdot - tz) - f\|_p \; dz \\
&= \int_{|z| \geqslant \frac{\delta}{t}} |\phi(z)| \; \|f(\cdot - tz) - f\|_p \; dz + \int_{|z| < \frac{\delta}{t}} |\phi(z)| \; \|f(\cdot - tz) - f\|_p \; dz \\
&\leqslant \int_{|z| \geqslant \frac{\delta}{t}} |\phi(z)| \left[\|f(\cdot - tz)\|_p + \|f\|_p \right] dz + \frac{\varepsilon}{2} \int_{|z| < \frac{\delta}{t}} |\phi(z)| \\
&\leqslant 2\|f\|_p \int_{|z| \geqslant \frac{\delta}{t}} |\phi(z)| + \frac{\varepsilon}{2} \int_{|z| < \frac{\delta}{t}} |\phi(z)| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

o que conclui o resultado.

□

3.1.2 O Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz

Com a finalidade de estudar a continuidade do operador maximal de Hardy-Littlewood nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$, nesta seção desenvolveremos as ferramentas necessárias para enunciar e demonstrar um resultado conhecido como Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz

Definição 3.1.2. *Sejam $(X, \mu) = (X, \mathcal{A}_1, \mu)$, $(Y, \nu) = (Y, \mathcal{A}_2, \nu)$ espaços com medida, $Z = \{f : Y \to \mathbb{C}$ mensurável $\}$ e $T : L^p(X, \mu) \to Z$ um operador linear.*

(i) Dizemos que T é do tipo fraco (p, q) com $q < \infty$ se existe $C > 0$ tal que

$$\nu\left(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}\right) \leqslant \left(C \, \frac{\|f\|_p}{\lambda} \right)^q, \text{ para } \lambda > 0.$$

T é do tipo fraco (p, ∞) quando T é limitado de $L^p(X, \mu)$ em $L^\infty(Y, \nu)$.

(ii) Dizemos que T é do tipo forte (p, q) se T é um operador limitado de $L^p(X, \mu)$ em $L^q(Y, \nu)$.

Observação 3.1.2. *Se T é um operador do tipo forte (p,q), então T é do tipo fraco (p,q). De fato, se $E_\lambda = \{y \in Y : \ |Tf(y)| > \lambda\}$, então*

$$\begin{aligned}\nu(E_\lambda) &= \int_{E_\lambda} 1 d\nu \\ &\leqslant \int_{E_\lambda} \frac{|Tf(y)|^q}{\lambda^q} d\nu \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda^q} \, \|Tf\|_q^q \\ &\leqslant \left(C \, \frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^q.\end{aligned}$$

Ao longo deste capítulo, será muito comum o uso de operadores maximais associados a uma família de operadores. Definiremos abaixo um tipo de operador maximal especial.

Definição 3.1.3. *Seja $\{T_t\}_{t>0}$ uma família de operadores lineares definidos em $L^p(X)$. Denotamos por*

$$T^* f(x) \doteq \sup_{t>0} |T_t f(x)|$$

o operador maximal associado a família $\{T_t\}_{t>0}$.

Exemplo 3.1.1. *Sejam $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \phi(x)dx \neq 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então $T_t f(x) = f * \phi_t$ define uma família de operadores e denotaremos por M_ϕ o operador maximal associado a ϕ.*

Proposição 3.1.3. *Seja $\{T_t\}_{t>0}$ uma família de operadores lineares definidos em $L^p(X,\mu)$ e*

$$T^* f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|.$$

Se T^* é do tipo fraco (p,q), então o conjunto

$$\mathcal{A} = \{f \in L^p(X,\mu) : \ \lim_{t \to t_0} T_t f(x) = f(x) \ q.t.p\}$$

é fechado em $L^p(X,\mu)$.

Demonstração. Ver em [8] p. 27.

Definição 3.1.4. *Sejam (X,μ) um espaço com medida e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função mensurável. A aplicação $a_f : (0,\infty) \to [0,\infty]$ definida por*

$$a_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \lambda\})$$

é denominada função de distribuição da f.

Proposição 3.1.4. *Seja $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função diferenciável e crescente tal que $\phi(0) = 0$. Então*

$$\int_X \phi(|f(x)|)dx = \int_0^\infty \phi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda.$$

Demonstração. Denote $E_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Fubini obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_X \phi(|f(x)|)dx &= \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} \phi'(\lambda)d\lambda\right) dx \\
&= \int_X \left(\int_0^\infty \phi'(\lambda)\chi_{E_\lambda}(x)d\lambda\right) dx \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda) \left(\int_X \chi_{E_\lambda}(x)dx\right) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda)\mu(E_\lambda)d\lambda \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda)a_f(\lambda)d\lambda,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do resultado.

□

Observação 3.1.3. *Por meio da Proposição 3.1.4 podemos relacionar a norma em $L^p(\mathbb{R}^n)$ de uma função com a sua função de distribuição. De fato, basta considerar $\phi(\lambda) = \lambda^p$ e desta forma*

$$\int |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} a_f(\lambda)d\lambda.$$

Definição 3.1.5. *Sejam X um espaço vetorial de funções mensuráveis e $Z = \{g : Y \to \mathbb{C}$ mensurável $\}$. Dizemos que $T : X \to Z$ é sublinear se:*

(i) $|T(f_1 + f_2)(y)| \leqslant |Tf_1(y)| + |Tf_2(y)|$, *para todo $y \in Y$;*

(ii) $|T(\lambda f)(y)| = |\lambda| \cdot |Tf(y)|$, *para todo $y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Teorema 3.1.1 (Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz)**.** *Sejam (X, μ), (Y, ν) espaços de medida, $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$ e T um operador sublinear de $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ no conjunto das funções mensuráveis definidas em Y. Se T é do tipo fraco (p_0, p_0) e fraco (p_1, p_1), então T é forte (p, p) para todo $p_0 < p < p_1$.*

Demonstração. Nosso objetivo será mostrar que se $p_0 < p < p_1$, então

$$\|Tf\|_p \leqslant C\|f\|_p, \ \forall \ f \in L^p(X).$$

Nosso primeiro passo será demonstrar que cada $f \in L^p(X)$ com $p_0 < p < p_1$ pode ser escrito na forma $f = f_0 + f_1$, no qual $f_0 \in L^{p_0}(X)$ e $f_1 \in L^{p_1}(X)$. Para isso, considere os conjuntos $A = \{x \in X : |f(x)| > m\lambda\}$ e $B = \{x \in X : |f(x)| \leqslant m\lambda\}$ no qual $\lambda > 0$ é uma constante fixada e m será escolhido posteriormente de forma conveniente. Defina $f_0(x) = f(x)\chi_A(x)$ e $f_1(x) = f(x)\chi_B(x)$.

Afirmação 3.1.1. $f_0 \in L^{p_0}(X)$.

De fato, uma vez que $p - p_0 > 0$ obtemos que $1^{p-p_0} < \left(\frac{|f(x)|}{m\lambda}\right)^{p-p_0}$ em A. Então,

$$\begin{aligned}
\int_X |f_0(x)|^{p_0} dx &= \int_A |f(x)|^{p_0} dx \\
&= \int_A |f(x)|^{p_0} 1^{p-p_0} dx \\
&< \int_X |f(x)|^{p_0} \left(\frac{|f(x)|}{m\lambda}\right)^{p-p_0} dx \\
&= (m\lambda)^{p_0-p} \int_X |f(x)|^p dx < \infty.
\end{aligned}$$

Afirmação 3.1.2. $f_1 \in L^{p_1}(X)$.

Com efeito, uma vez que $p - p_1 < 0$ temos que $1^{p-p_1} \leqslant \left(\frac{|f(x)|}{m\lambda}\right)^{p-p_1}$ em B. Então,

$$\begin{aligned}
\int_X |f_1(x)|^{p_1} dx &= \int_B |f(x)|^{p_1} dx \\
&= \int_B |f(x)|^{p_1} 1^{p-p_1} dx \\
&\leqslant \int_X |f(x)|^{p_1} \left(\frac{|f(x)|}{m\lambda}\right)^{p-p_1} dx \\
&= (m\lambda)^{p_1-p} \int_X |f(x)|^p dx < \infty.
\end{aligned}$$

Observe também que se $\lambda < |Tf(x)|$, pela sublinearidade obtemos que $\lambda < |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|$ e disto segue que vale a inclusão

$$\{x \in X : \ |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \left\{x \in X : \ |Tf_0(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : \ |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Pela subaditividade da medida μ, a função de distribuição de Tf pode ser escrita por

$$\begin{aligned} a_{Tf}(\lambda) &= \mu\left(\{x \in X:\ |Tf(x)| > \lambda\}\right) \\ &\leqslant \mu\left(\left\{x \in X:\ |Tf_0(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X:\ |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\ &= a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Considere os seguites casos:

(i) $p_1 = \infty$. Note que $f_1 \in L^\infty(X)$ uma vez que

$$|f_1(x)| \leqslant m\lambda,\ \forall\ x \in X.$$

Como por hipótese T é fraco (∞, ∞), vale que $\|Tf_1\|_\infty \leqslant C\|f_1\|_\infty$. Para este caso, escolhamos m de tal forma que $m < \dfrac{1}{2C}$ e assim $\|f_1\|_\infty \leqslant \dfrac{\lambda}{2C}$ e $\|Tf_1\|_\infty < \dfrac{\lambda}{2}$. Portanto,

$$a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0. \tag{3.4}$$

Também por hipótese T é fraco (p_0, p_0), logo existe $C' > 0$ tal que

$$a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \left(\frac{2C'}{\lambda}\|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0}. \tag{3.5}$$

Por fim, da Observação 3.1.3 e das desigualdades (3.3), (3.4) e (3.5) obtemos que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_{Tf}(\lambda)d\lambda \\ &\leqslant C\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda \\ &\leqslant C\int_0^\infty \frac{\lambda^{p-1}}{\lambda^{p_0}}\left(\int_X |f_0(x)|^{p_0}dx\right)d\lambda \\ &\leqslant C\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}\left(\int_A |f(x)|^{p_0}dx\right)d\lambda \\ &\leqslant C\int_X |f(x)|^{p_0}\left(\int_0^{|f(x)|/m} \lambda^{p-1-p_0}d\lambda\right)dx \\ &= C\int_X |f(x)|^{p_0}\left(\frac{|f(x)|}{m}\right)^{p-p_0}dx \\ &\leqslant C\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

(ii) $p_1 < \infty$. Por hipótese T é fraco (p_0, p_0) e (p_1, p_1), então

$$a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \left(\frac{C_0}{\lambda}\|f_0\|_{p_0}\right)^{p_0} \tag{3.6}$$

e

$$a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \left(\frac{C_1}{\lambda}\|f_1\|_{p_1}\right)^{p_1}. \tag{3.7}$$

Novamente pela Observação 3.1.3 e das desigualdades (3.3), (3.6) e (3.7) obtemos que

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_{Tf}(\lambda)d\lambda \\
&\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda + p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda \\
&\leqslant C\int_0^\infty \lambda^{p-p_0-1}\left(\int_A |f(x)|^{p_0}dx\right)d\lambda \\
&\qquad +C\int_0^\infty \lambda^{p-p_1-1}\left(\int_B |f(x)|^{p_1}dx\right)d\lambda \\
&= C\int_X |f(x)|^{p_0}\left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{m}} \lambda^{p-p_0-1}d\lambda\right)dx \\
&\qquad +C\int_X |f(x)|^{p_1}\left(\int_{\frac{|f(x)|}{m}}^\infty \lambda^{p-p_1-1}d\lambda\right)dx \\
&= C\int_X |f(x)|^{p_0}|f(x)|^{p-p_0}dx + C\int_X |f(x)|^{p_1}|f(x)|^{p-p_1}dx \\
&= C\|f\|_p^p,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema.

□

3.1.3 O Operador Maximal de Hardy-Littlewood

Apresentaremos nesta seção o caso particular de um operador maximal associado a uma família de operadores, denominado operador maximal de Hardy Littlewood, que foi introduzido pela primeira vez em 1930 por Godfrey H. Hardy e John E. Littlewood para o caso $n = 1$. A generalização para o espaço n-dimensional é devida a N. Wiener, J. Marcinkiewicz e A. Zygmund em 1939.

Com o auxílio do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, apresentado na seção anterior, provaremos a limitação em norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ do operador maximal de Hardy-Littlewood. A importância deste estudo vem do fato do operador maximal de Hardy-Littlewood ser majorante de certas funções maximais usadas na caracterização dos espaços de Hardy, que serão definidos posteriormente.

Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Definimos a função maximal de Hardy-Littlewood por

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Note que Mf é uma função mensurável, uma vez que o conjunto $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ é aberto para todo $\lambda > 0$. Com efeito, basta observar que $E_\lambda = (Mf)^{-1}]\lambda, \infty[$ e a aplicação g definida por

$$(x,r) \mapsto \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \doteq g(x,r)$$

é contínua em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Para verificar a continuidade, considere $(x_j, r_j) \to (x_0, r_0)$ e mostremos que $g(x_j, r_j) \to g(x_0, r_0)$ quando $j \to \infty$. Como $\chi_{B(x_j,r_j)} \to \chi_{B(x_0,r_0)}$ e $\chi_{B(x_j,r_j)}$ é limitada, pelo Teorema da Convergência Dominada seque que

$$\frac{1}{|B(x_j,r_j)|} \int_{B(x_j,r_j)} |f(y)|dy \to \frac{1}{|B(x_0,r_0)|} \int_{B(x_0,r_0)} |f(y)|dy,$$

o que completa a demonstração da continuidade.

Denote por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e conjunto das funções mensuráveis definidas em $\mathbb{R}^n$ a valores complexos. De forma natural, define-se o operador maximal de Hardy-Littlewood por

$$\begin{array}{rcl} M : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \\ f & \mapsto & Mf. \end{array} \tag{3.8}$$

Observe que se tomarmos $\phi(x) = |B(0,1)|^{-1}\chi_{B(0,1)}(x)$ e $f \geqslant 0$, obtemos

$$\begin{aligned} (\phi_t * f)(x) &= \int \phi_t(x-y) f(y)dy \\ &= \int \frac{t^{-n}}{|B(0,1)|} \chi_{B(0,1)}\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)dy \\ &= \frac{1}{|B(0,t)|} \int_{B(x,t)} f(y)dy \\ &= \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} f(y)dy. \end{aligned}$$

Portanto, para este caso em particular, o operador maximal de Hardy-Littlewood pode ser interpretado como o supremo de uma aproximação da identidade, isto é

$$Mf(x) = \sup_{t>0} \left(\phi_t * f\right)(x).$$

De modo equivalente, o operador maximal de Hardy-Littlewood pode também ser definido por meio de cubos. Com efeito, denote por $Q(x, \ell) \subset \mathbb{R}^n$ o cubo centrado em x e lado ℓ e considere o operador $M' : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$M'f(x) = \sup_{\ell>0} \frac{1}{|Q(x,\ell)|} \int_{Q(x,\ell)} |f(y)|dy. \tag{3.9}$$

Uma vez que a medida de Lebesgue de cubos e bolas são comparáveis em $\mathbb{R}^n$, existem constantes $c_n > 0$ e $C_n > 0$ tais que

$$c_n M'f(x) \leqslant Mf(x) \leqslant C_n M'f(x), \tag{3.10}$$

mostrando assim que os operadores definidos em (3.8) e (3.9) são equivalentes.

O próximo resultado diz respeito sobre o controle de uma aproximação da identidade pelo operador maximal de Hardy-Littlewood.

Proposição 3.1.5. *Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e ϕ uma função positiva, radial, não-crescente (com respeito ao raio) e integrável. Então*

$$\sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)| \leqslant \|\phi\|_1 Mf(x).$$

Demonstração. Assuma inicialmente que ϕ é uma função simples, isto é, pode ser escrita na forma

$$\phi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{B(x_j, r_j)},$$

no qual $a_j > 0$ e $B(x_j, r_j) \cap B(x_i, r_i) = \varnothing$ para $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$. Assim,

$$\begin{aligned}
|(\phi * f)(x)| &= \left| \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y)dy \right| \\
&= \left| \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{B(x-tx_j, r_j t)}(y) f(y)dy \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{t^n} \int_{B(x-tx_j, r_j t)} |f(y)|dy \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j \cdot |S^{n-1}| \cdot (tr_j)^n}{t^n} \cdot \frac{1}{|B(x-tx_j, r_j t)|} \int_{B(x-tx_j, r_j t)} |f(y)|dy \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} a_j |B(x_j, r_j)| \cdot Mf(x).
\end{aligned}$$

O mesmo argumento vale para ϕ_t. Para o caso geral, basta observar que ϕ pode ser aproximada por funções simples.

□

O próximo lema, conhecido como recobrimento de Vitali, será uma ferramenta importante na demonstração do próximo resultado.

Lema 3.1.1 (Recobrimento de Vitali)**.** *Seja $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$ uma coleção finita de bolas em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma subcoleção disjunta $\{B_{i1}, B_{i2}, \cdots, B_{ik}\} \subset \mathcal{B}$ tal que*

$$\left|\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right| \leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_{ij}|.$$

Demonstração. Denote por B^* a bola com mesmo centro de B e raio 3 vezes maior. Como $\mathcal{B}$ é uma coleção finita, escolha B_{i1} como sendo a bola de $\mathcal{B}$ que possui maior raio. Considere agora o conjunto $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} \backslash B_{i1} : \ B \cap B_{i1} = \varnothing\}$. Pela maximalidade do raio de B_{i1}, qualquer bola que intercepta B_{i1} deve estar contida em B_{i1}^*. Repetindo o mesmo processo com o conjunto $\mathcal{B}'$, escolhemos B_{i2}. Como o conjunto $\mathcal{B}$ é finito, se esse processo for repetido inúmeras vezes ele irá terminar e suponha que no final obtemos a coleção $\{B_{i1}, B_{i2}, \cdots, B_{ik}\}$. Desta forma,

$$\left|\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right| \leqslant \left|\bigcup_{j=1}^{k} B_{ij}^*\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |B_{ij}^*| = 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_{ij}|.$$

□

Teorema 3.1.2. *O operador maximal de Hardy-Littlewood é do tipo fraco $(1,1)$ e forte (p,p), para $1 < p \leqslant \infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, é suficiente mostrar que Mf é fraco $(1,1)$ e forte (∞,∞).

(a) Mf é forte (∞,∞). Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Fixado $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $r > 0$ vale que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy &\leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} 1dy \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário, então $|Mf(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde segue que $\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.

(b) Mf é fraco $(1,1)$. Denote por $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |Mf(x)| > \lambda\}$. Nosso objetivo será mostrar que para alguma constante $C > 0$ vale a estimativa

$$|E_\lambda| \leqslant C\ \frac{\|f\|_1}{\lambda}.$$

Como E_λ é um conjunto aberto, para cada $x \in E_\lambda$ existe $B(x, r_x) \subset E_\lambda$, isto é

$$\frac{1}{|B(x,r_x)|}\int_{B(x,r_x)} |f(y)|dy > \lambda \Leftrightarrow |B(x,r_x)| < \frac{1}{\lambda}\int_{B(x,r_x)} |f(y)|dy.$$

Seja $K \subset E_\lambda$ um conjunto compacto qualquer. Como $K \subset \bigcup_{x\in E_\lambda} B(x, r_x)$, pela compacidade de K, existe uma subcobertura finita tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j,$$

no qual $B_j = B(x_j, r_{x_j})$. Aplicando o Lema 3.1.1 a esta subcobertura, existe uma subcoleção disjunta $\{B_{i1}, \cdots B_{ik}\} \subset \{\bigcup_{j=1}^{m} B_j\}$ tal que

$$|K| \leqslant \left|\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right| \leqslant 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_{ij}| < \frac{3^n}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\int_{B_{ij}} |f(y)|dy \leqslant \frac{3^n}{\lambda}\int |f(y)|dy.$$

Uma vez que $|E_\lambda| = \sup\{|K| : K \subset E_\lambda, K \text{ compacto}\}$ (ver [10] p. 70) e o conjunto compacto K é arbitrário, segue o resultado.

$\square$

Observação 3.1.4. *Note que se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f \neq 0$, então $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então existe $B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\int_{B(0,R)} |f(y)|dy \geqslant \varepsilon > 0.$$

Note que se tal condição não fosse satisfeita para toda bola $B(0, R)$, então a integral de f seria nula q.t.p em $x \in B(0, R)$ e como $R > 0$ é arbitrário teríamos $f = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^n$. Considere $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| > R$. Desta forma $B(0, R) \subset B(x, 2|x|)$ e portanto

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy \\ &\geqslant \frac{1}{|B(x,2|x|)|}\int_{B(x,2|x|)} |f(y)|dy \\ &\geqslant \frac{1}{|B(x,2|x|)|}\int_{B(0,R)} |f(y)|dy \\ &\geqslant \frac{\varepsilon}{|B(x,2|x|)|} \\ &\gtrsim \frac{\varepsilon}{|x|^n}, \end{aligned}$$

donde segue que $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Como aplicação do Teorema 3.1.2 iremos apresentar a demonstração de um resultado conhecido por Teorema da Diferenciação de Lebesgue.

Corolário 3.1.1 (Teorema da Diferenciação de Lebesgue)**.** *Seja* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*. Então*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x), \ q.t.p. \tag{3.11}$$

Demonstração. Suponha sem perda de generalidade que $f \geqslant 0$ e provaremos inicialmente para o caso em que f é contínua. Fixado $B_r = B(0,r)$, por meio da continuidade uniforme de f em $\overline{B_r}$ obtemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|y| < \delta$, então

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Assim para todo $s < r_0$, no qual $r_0 = \min\{\delta, r\}$ obtemos que

$$\left| \frac{1}{|B_s|} \int_{B_s} [f(x-y) - f(x)]dy \right| \leqslant \frac{1}{|B_s|} \int_{B_s} |f(x-y) - f(x)|dy < \varepsilon,$$

o que mostra a validade do resultado para este caso.

Suponha agora que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para cada $r > 0$ defina a família de operadores

$$T_r f(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x-y)dy$$

e note que $T^* f(x) = \sup_{t>0} T_r f(x) = Mf(x)$. Assim, pelo Teorema 3.1.2 obtemos que $T^* f(x)$ é do tipo fraco $(1,1)$ e pela Proposição 3.1.3 o conjunto

$$\mathcal{A} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \lim_{r \to 0^+} T_r f(x) = f(x) \ q.t.p\}$$

é fechado em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Note que o conjunto das funções contínuas de suporte compacto está contido em $\mathcal{A}$ e é denso em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Sendo $\mathcal{A}$ fechado, segue o resultado para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Por fim, considere $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Defina $f_j(x) = f(x)\chi_{B_j}$ para $j \in \mathbb{N}$ e $B_j = B(0,j)$. Note que $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$, uma vez que

$$\int |f_j| dx \leqslant \int_{\overline{B_j}} |f(x)| dx < \infty.$$

Assim, pelo caso anterior obtemos que se $x \in B_j$

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f_j(x-y)dy = f_j(x)$$

em $\mathbb{R}^n \backslash E_j$, no qual $|E_j| = 0$ (convergência q.t.p). Definindo $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$, em $\mathbb{R}^n \backslash E$ vale que

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x-y)dy = f(x),$$

e também $|E| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} |E_j| = 0 \Rightarrow |E| = 0$, completando a demonstração para o caso geral.

□

3.2 Espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$

O estudo dos epaços de Hardy teve início entre 1910 e 1920 no contexto de séries de Fourier e funções holomorfas de uma variável complexa. O tratamento n-dimensional foi desenvolvido na década de 1950 por Elias M. Stein e Guido L. Weiss.

Os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 0$ são espaços funcionais de distribuições temperadas que generalizam os espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$. Iremos mostrar que quando $p > 1$, tais espaços são equivalentes ao $L^p(\mathbb{R}^n)$ e para $0 < p < 1$, fornecem um potencial substituto. Outro fato relevante da importância do estudo de $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p < 1$, comparado ao $L^p(\mathbb{R}^n)$, é a existência de dual não-trivial. Os espaços duais de $H^p(\mathbb{R}^n)$, conhecidos como espaços de Hölder ou Lipschitz, não serão objeto de estudo neste trabalho e tal relação pode ser consultada em [11] p. 289.

Neste trabalho, definiremos os espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ por meio de funções maximais e provaremos suas principais propriedades. Será enunciado o Teorema de Caracterização Maximal, que fornece abordagens aquivalentes para o tratamento dos elementos em $H^p(\mathbb{R}^n)$ e por fim enunciaremos o Teorema de Decomposição Atômica de $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leqslant 1$.

3.2.1 Caracterização e Propriedades

Definição 3.2.1. *Considere $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Associado a Φ, definimos a função maximal de f por*

$$M_\Phi f(x) \doteq \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|. \tag{3.12}$$

Dizemos que $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, denominado espaço de Hardy, para $0 < p < \infty$ se existe $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int \phi(x)dx \neq 0$ tal que $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Para o caso $p = \infty$ definimos $H^\infty(\mathbb{R}^n) \doteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Iremos enunciar uma propriedade importante dos espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$, cuja demonstração será postergada pois é uma consequência do Teorema de Caracterização Maximal, que será enunciado no fim desta seção.

Proposição 3.2.1. *$f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int \varphi(x)dx \neq 0$ temos que $M_\varphi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Com objetivo de estabelecer uma "norma" no espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$, definiremos inicialmente o conceito de quasi-norma.

Definição 3.2.2. *Uma quasi-norma em um espaço vetorial X sobre um corpo real ou complexo é uma função $\|\cdot\| \to [0,\infty)$ que satisfaz:*

(i) $\|x\| = 0$ *se, e somente se* $x = 0$;

(ii) $\|\alpha\ x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, *para todo* $x \in X$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$,

(iii) Existe uma constante $C \geqslant 1$ *tal que para quaisquer* $x_1, x_2 \in X$,

$$\|x_1 + x_2\| \leqslant C(\|x_1\| + \|x_2\|).$$

Além disso, dizemos que X é p-subaditivo se para todo $x_1, x_2 \in X$ vale

$$\|x_1 + x_2\|^p \leqslant \|x_1\|^p + \|x_2\|^p.$$

Uma quasi-norma induz uma topologia no espaço X por meio da distância

$$d(x_1, x_2) \doteq \|x_1 - x_2\|^p,$$

se o espaço for p-subaditivo. O espaço X é denominado quasi-Banach se for completo com a métrica definida anteriormente.

Exemplo 3.2.1. *O funcional $\|\cdot\|_p$ para $0 < p < 1$ define uma quasi-norma.*

Para cada $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ com $p > 0$ defina o funcional

$$\|f\|_{H^p} \doteq \|M_\phi f\|_p. \tag{3.13}$$

Mostraremos no fim desta seção, com o auxílio do Teorema de Caracterização Maximal, que (3.13) define uma norma em $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $p \geqslant 1$ e uma quasi-norma quando $0 < p < 1$. Como para $0 < p < 1$, temos que

$$(a+b)^p \leqslant a^p + b^p,\ \forall\ a, b > 0,$$

então $H^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço p-subaditivo. De forma natural, definimos a métrica em $H^p(\mathbb{R}^n)$ por

$$d(f,g) \doteq \begin{cases} \|f-g\|_{H^p}, & \text{se } p \geqslant 1; \\ \|f-g\|_{H^p}^p, & \text{se } 0 < p < 1, \end{cases}$$

que induz sobre este espaço uma topologia.

O próximo resultado diz respeito sobre a equivalência entre $H^p(\mathbb{R}^n)$ e $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$.

Teorema 3.2.1. *Se $p > 1$, então $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ e as normas são comparáveis.*

Demonstração. Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Como $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$ (ver em [17], p. 80), basta mostrarmos que $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int \phi(x)dx \neq 0$. Considere $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ radial, positiva e não-crescente com $\displaystyle\int \phi(x)dx = 1$. Pela Proposição 3.1.5, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\sup_{t>0} |(f * \phi_t)(x)| \leqslant C_\phi Mf(x).$$

Assim, pela desigualdade anterior e pelo Teorema 3.1.2 vale que

$$\|M_\phi f\|_p \leqslant C_\phi \|Mf\|_p \leqslant C\|f\|_p < \infty, \tag{3.14}$$

donde segue que $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e portanto $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

Suponha por outro lado que $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ e seja $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência tal que $t_j \to 0$ quando $j \to \infty$. Defina $f_j(x) = (\phi_{t_j} * f)(x)$ e assim

$$\begin{aligned} \int |f_j(x)|^p dx &= \int |(\phi_{t_j} * f)(x)|^p dx \\ &\leqslant \int \sup_{t>0} |(\phi_t * f)(x)|^p dx \\ &= \|M_\phi f\|_p^p < \infty, \ \forall\ j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim, $f_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, isto é, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset B[0, C] \doteq \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \ \|f\|_p \leqslant C\}$ para alguma constante $C > 0$. Como $L^p(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo se $1 < p < \infty$ então toda sequência limitada possui uma subsequência que converge na topologia fraca (veja Teorema 3.18 p. 69 da referência [5]). Assim, existe uma subsequência $\{f_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$f_{j_k} = f * \phi_{t_{j_k}} \rightharpoonup f_0, \ f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

isto é

$$\int (f * \phi_{j_k})(x)g(x)dx \to \int f_0(x)g(x)dx, \ \forall\ g \in L^p(\mathbb{R}^n)^* = L^{p'}(\mathbb{R}^n).$$

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, temos que $f*\phi_{t_k} \to f_0$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado $f*\phi_{t_k} \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e pela unicidade do limite temos que $f = f_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Por fim, mostremos que as normas são equivalentes. Da desigualdade (3.14) obtemos que $\|M_\phi f\|_p \leqslant C\|f\|_p$. Por outro lado, como

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - (\phi_t * f)(x)| + |(\phi_t * f)(x)|,$$

tomando $t \to 0$, obtemos da Proposição 3.1.2 que $|f(x)| \leqslant \lim\limits_{t\to 0} |\phi_t * f(x)| \leqslant M_\phi f(x)$. Portanto, $\|f\|_p \leqslant \|M_\phi f\|_p$.

$\square$

A equivalência do teorema anterior não se verifica para $p = 1$, entretanto é possível mostrar que $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.2.2. *$H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_{H^1}$.*

Demonstração. Se $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, então para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\displaystyle\int \phi(x)dx = 1$ temos que $M_\phi f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Note que,

$$\begin{aligned} \|M_\phi f\|_1 &= \int \sup_{t>0} |(f * \phi_t)(x)| dx \\ &\geqslant \int |(f * \phi_t)(x)| dx, \ \forall\ t > 0 \\ &= \|f * \phi_t\|_1, \ \forall\ t > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f * \phi_t\|_1 \leqslant \|M_\phi f\|_1 < C, \ \forall\ t > 0. \tag{3.15}$$

Seja $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência tal que $t_j \to 0$ quando $j \to \infty$. Pela desigualdade (3.15) obtemos que $\|f * \phi_{t_j}\|_1 \leqslant C$ para todo $j \in \mathbb{N}$, isto é, $\{f * \phi_{t_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset B[0, C] = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \ \|f\|_1 \leqslant C\}$. Como $L^1(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)^*$, por meio do Teorema de Banach-Alaoglu (ver [5] p. 66) existe uma subsequência $\{f * \phi_{t_{j_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$f * \phi_{t_{j_k}} \overset{*}{\rightharpoonup} \Phi \in C_0(\mathbb{R}^n)^*$$

quando $k \to \infty$, isto é,

$$\int (f * \phi_{t_{j_k}})(x) g(x) dx \to \Phi(g), \ \forall\ g \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Pelo Teorema 1.2.6, existe uma única medida regular complexa de Borel, denotada por μ, tal que

$$\int (f * \phi_{t_{j_k}})(x) g(x) dx \to \int g \ d\mu, \ \forall\ g \in C_0(\mathbb{R}^n), \tag{3.16}$$

quando $k \to \infty$. Em particular, como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, de (3.16) obtemos que

$$\int (f * \phi_{t_{j_k}})(x)\varphi(x)dx \to \int \varphi\, d\mu,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.17}$$

Note que $f * \phi_{t_{j_k}} \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $k \to \infty$ e pela unicidade do limite, $f = \mu$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Do Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym 1.2.5, considerando λ a medida de Lebesgue, existem medidas complexas μ_a e μ_s com $\mu_a \ll \lambda$, $\mu_s \perp \lambda$ tal que $\mu = \mu_a + \mu_s$. Além disso, existe uma única $h \in L^1(\lambda)$ tal que

$$\mu_a(E) = \int_E h d\lambda \doteq \int_E h(x)dx,$$

para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mensurável.

Afirmação 3.2.1. $\mu_s \equiv 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$.

Mostremos inicialmente que a equivalência da Afirmação 3.2.1 é verdadeira. Suponha que $\lambda(E) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0$, e tome X um conjunto Lebesgue mensurável qualquer. Como $\lambda \perp \mu_s$, temos que existem conjuntos A e B Lebesgue-mensuráveis tais que $\mathbb{R}^n = A \cup B$, μ_s é nula em A e λ é nula em B. Desta forma,

$$\begin{aligned} \mu_s(X) &= \mu_s(X \cap B) \\ &= \mu(X \cap B) - \mu_a(X \cap B) \\ &= 0. \end{aligned}$$

A implicação inversa é imediata, o que conclui a demonstração da afirmação.

Assim, mostremos que $\mu_s \equiv 0$ fazendo uso da observação anterior. Suponha, sem perda de generalidade que μ é positiva e sendo ela regular, basta mostrarmos que para qualquer compacto K tal que $\lambda(K) = 0$, temos $\mu(K) = 0$. Considere $\{\psi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que: [1]

(i) $\psi_\ell \geqslant 0$, $\forall\ \ell \in \mathbb{N}$;

(ii) Para todo $\ell \in \mathbb{N}$, $\psi_\ell(x) = 1$ em uma vizinhança de K e é nula caso contrário;

(iii) $\psi_\ell \to \chi_K$ quando $\ell \to \infty$. Em particular,

$$\lim_{\ell \to \infty} \int \psi_\ell\, d\mu = \mu(K). \tag{3.18}$$

[1] A existência desta sequência será mostrado na Observação 3.2.1, após a demonstração.

Dado $\varepsilon > 0$, de (3.18) segue que existe $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(K) < \left|\int \psi_\ell d\mu\right| + \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ \ell \geqslant \ell_0 \tag{3.19}$$

e de (3.17), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int \psi_\ell d\mu\right| < \left|\int (f * \phi_{t_{j_k}})(x)\psi_\ell(x)dx\right| + \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ k \geqslant k_0. \tag{3.20}$$

Combinando as desigualdades (3.19) e (3.20) obtemos que

$$\begin{aligned}
\mu(K) &< \left|\int (f * \phi_{t_{j_k}})(x)\psi_\ell(x)dx\right| + \varepsilon,\ \forall\ k \geqslant k_o \text{ e } \ell \geqslant \ell_0 \\
&\leqslant \int M_\phi f(x)\psi_\ell(x)dx + \varepsilon\ \forall\ \ell \geqslant \ell_0.
\end{aligned}$$

Tomando $\ell \to \infty$ obtemos

$$\int M_\phi f(x)\psi_\ell(x)dx \to \int_K M_\phi f(x)dx = 0,$$

pois $\lambda(K) = 0$. Desta forma $\mu(K) < \varepsilon$, e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue que $\mu(K) = 0$. Assim, temos que $\mu_s = 0$ e

$$\mu(E) = \mu_a(E) = \int_E h(x)dx \text{ para } h \in L^1(\lambda).$$

Por fim, para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f, \phi\rangle = \langle \mu, \phi\rangle = \int \phi(x)d\mu = \int \phi(x)h(x)dx = \langle h, \phi\rangle,$$

donde segue que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por fim, como já mostramos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, considere $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \phi(x)dx \neq 0$. Como

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x) - (f * \phi_t)(x) + (f * \phi_t)(x)| \\
&\leqslant |f(x) - (f * \phi_t)(x)| + |\sup_{t>0}(f * \phi_t)(x)|
\end{aligned}$$

temos que para $0 < t < \delta$, ϕ_t é uma aproximação da identidade, logo

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &\leqslant \|f - (f * \phi_t)\|_1 + \|\sup_{t>0}(f * \phi_t)\|_1 \\
&\leqslant \varepsilon + \|f\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Tomando ε tendendo a zero segue o resultado.

$\square$

Observação 3.2.1. *A construção da sequência $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ baseia-se no Corolário 2.2 p. 07 da referência [17]. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere o conjunto aberto $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x,K) < 1/k\}$ e o compacto $K_k = \bar{\Omega}_{2k}$. Aplicando o resultado citado, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\psi_k \in C_c^\infty(\Omega_k)$ tal que*

(i) $0 \leqslant \psi_k \leqslant 1$*;*

(ii) $\psi_k \equiv 1$ *em uma vizinhança V_k de K_k tal que $V_k \subset \Omega_k$.*

Por construção, é imediato que $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(x) = \chi_K(x)$.

Conforme visto no resultado anterior, $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e o próximo resultado mostra que distribuições em $H^1(\mathbb{R}^n)$ possuem a propriedade de momento nulo.

Proposição 3.2.2. *Se $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, então* $\displaystyle\int f(x)dx = 0.$

Demonstração. Se $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, como consequência do Teorema 3.2.2 temos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Conforme visto nas preliminares, a transformada de Fourier está bem definida em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e portanto é suficiente mostrarmos que

$$\widehat{f}(0) = \int f(x)dx = 0.$$

Note que para qualquer $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\widehat{\phi_t * f}(\xi) = \widehat{\phi_t}(\xi)\widehat{f}(\xi) = \widehat{\phi}(t\xi)\widehat{f}(\xi) \Rightarrow \widehat{\phi_t * f}(0) = \widehat{\phi}(0)\widehat{f}(0). \tag{3.21}$$

Considere $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\displaystyle\int \phi(x)dx = 1$. Desta forma $\widehat{\phi}(0) = 1$ e portanto $\widehat{\phi_t * f}(0) = \widehat{f}(0)$. Assim, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(0) - \widehat{\phi_t * f}(\xi)| &= |\widehat{\phi_t * f}(0) - \widehat{\phi_t * f}(\xi)| \\
&= (2\pi)^{-n/2}\left|\int (\phi_t * f)(x)dx - \int \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}(\phi_t * f)(x)dx\right| \\
&= (2\pi)^{-n/2}\left|\int (1 - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle})(\phi_t * f)(x)dx\right| \\
&\leqslant (2\pi)^{-n/2}\int |1 - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}||(\phi_t * f)(x)|dx \\
&\leqslant (2\pi)^{-n/2}\int |1 - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}|M_\phi f(x)dx \\
&\doteq g(\xi).
\end{aligned}$$

Considere $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ uma sequência tal que $\xi_j \to 0$ quando $j \to \infty$. Em particular, da desigualdade anterior

$$|\widehat{f}(0) - \widehat{\phi_t * f}(\xi_j)| \leqslant g(\xi_j), \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Afirmação 3.2.2. $\lim\limits_{j\to\infty} g(\xi_j) = 0.$

De fato, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ obtemos que

$$\lim_{j\to\infty} |1 - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi_j\rangle}| M_\phi f(x) = 0$$

e além disso $|1 - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi_j\rangle}|M_\phi f(x) \leqslant (1 + |\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi_j\rangle}|)M_\phi f(x) = 2M_\phi f(x)$. Uma vez que por hipótese $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, então $M_\phi f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e a afirmação segue pelo Teorema da Convergência Dominada. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\widehat{f}(0) - \widehat{\phi_t * f}(\xi_j)| < \varepsilon, \ \forall\, j \geqslant j_0 \text{ e } t > 0.$$

Em particular, fixando $j_1 \geqslant j_0$, para todo $t > 0$ temos que

$$|\widehat{f}(0) - \widehat{\phi}(t\xi_{j_1})\widehat{f}(\xi_{j_1})| < \varepsilon. \tag{3.22}$$

Por fim, uma vez que $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $\widehat{\phi}(t\xi_{j_1}) \to 0$ quando $t \to \infty$. Tomando $t \to \infty$ na desigualdade (3.22), segue que

$$|\widehat{f}(0)| < \varepsilon, \ \forall\, \varepsilon > 0,$$

o que conclui a demonstração.

□

Observação 3.2.2. *A proposição anterior mostra que $H^1(\mathbb{R}^n)$ está contido estritamente em $L^1(\mathbb{R}^n)$, uma vez que existem funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$ cuja integral não é nula.*

O próximo resultado mostra a completude do espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.2.3. *$H^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 0$ é completo.*

Demonstração. Considere inicialmente o caso em que $p > 1$. Como $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ e este por sua vez é completo, o resultado segue, pois do Teorema 3.2.1 as normas $\|M_\phi f\|_p$ e $\|f\|_p$ são equivalentes.

Se $0 < p \leqslant 1$, considere $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H^p(\mathbb{R}^n)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_k, f_m) = \|f_k - f_m\|^p_{H^p} < \varepsilon, \ \forall \ k, m \geqslant N.$$

Lembre-se que para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a convolução é definida por $(f * \phi)(x) = \langle f, \phi(x - \cdot)\rangle$. Assim,

$$|(f_k - f_m) * \widetilde{\phi}(0)| = |\langle f_k - f_m, \phi\rangle| = |\langle f_k, \phi\rangle - \langle f_m, \phi\rangle|.$$

Denote por

$$M_{\underset{\phi}{*}} f(y) \doteq \sup_{t>0} \sup_{|x-y|<t} |(f * \phi_t)(x)| \tag{3.23}$$

a versão não-tangencial de $M_\phi f$. Se $|y| < 1$, então tomando $t = 1$ em (3.23) obtemos que

$$M_{\underset{\phi}{*}} f(y) \geqslant \sup_{|y-x|<1} |(f * \phi)(x)|.$$

Como $|y| < 1$, então em particular

$$M_{\underset{\phi}{*}} f(y) \geqslant |(f * \phi)(0)|.$$

Desta forma, da desigualdade anterior obtemos que

$$|(f_k - f_m) * \widetilde{\phi}(0)| \leqslant M_{\underset{\widetilde{\phi}}{*}}(f_k - f_m)(y), \ \forall \ |y| < 1. \tag{3.24}$$

e também é válido que $\|M_{\underset{\phi}{*}} f\|_p \leqslant \|M_\phi f\|_p$ (ver [22] p. 95). Elevando a desigualdade (3.24) a potência p e integrando em $B = B(0, 1)$ obtemos,

$$\begin{aligned}
|\langle f_k, \phi\rangle - \langle f_m, \phi\rangle|^p &\leqslant \frac{1}{|B|}\int_B M_{\underset{\phi}{*}}(f_k - f_m)^p(y)dy \\
&\leqslant \frac{1}{|B|}\int M_{\underset{\phi}{*}}(f_k - f_m)^p(y)dy \\
&= C_n\|M_{\underset{\phi}{*}}(f_k - f_m)\|^p_p \\
&\leqslant C_n\|M_\phi(f_k - f_m)\|^p_p \\
&\leqslant C_n\|f_n - f_m\|^p_{H^p}.
\end{aligned}$$

Desta forma, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, que é completo, logo existe $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_j \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ quando $j \to \infty$. Resta agora mostrar que $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$. Considere $f_k \in \{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e como $f = (f - f_k) + f_k$, basta mostrarmos que $f - f_k \in H^p(\mathbb{R}^n)$. Uma vez que a sequência é de Cauchy, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\|f_j - f_{j+1}\|_{H^p}^p \leqslant 2^{-j}, \ j = 1, 2, \cdots$$

Como $f_j \to f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, então para todo $t > 0$ fixado

$$\begin{aligned} |\langle f - f_k, \phi_t(x - \cdot)\rangle| &= \left| \sum_{j=k}^{\infty} \langle f_{j+1} - f_j, \phi_t(x - \cdot)\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{j=k}^{\infty} (f_{j+1} - f_j) * \phi_t(x) \right| \\ &\leqslant \sum_{j=k}^{\infty} M_\phi(f_{j+1} - f_j)(x). \end{aligned}$$

Tomando o supremo em $t > 0$ na desigualdade anterior obtemos que

$$M_\phi(f - f_k)(x) \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} M_\phi(f_{j+1} - f_j)(x).$$

Portanto,

$$\|M_\phi(f - f_k)\|_p^p \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} \|M_\phi(f_{j+1} - f_j)\|_p^p \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} < \infty,$$

donde segue que $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, completando a demonstração.

□

Observação 3.2.3. *Ao longo da demonstração anterior fica evidente que convergência em $H^p(\mathbb{R}^n)$ implica convergência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

A seguir definiremos os conceitos necessários para enunciar o Teorema de Caracterização Maximal de $H^p(\mathbb{R}^n)$, que fornece alternativas para definir distribuições temperadas em $H^p(\mathbb{R}^n)$ e permite uma maior abordagem para questões futuras.

Sempre que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a convolução $f * \phi$ está bem definida e é dada por

$$f * \phi(x) = \langle f, \phi(x - \cdot)\rangle.$$

Entretanto, uma das caracterizações do espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ (que faz a conexão com funções harmônicas) faz-se necessário considerar convoluções do tipo $f * P_t$,[2] no qual

$$P(x) \cdot \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \ x \in \mathbb{R}^n$$

e $c_n > 0$ é uma constante tal que $\int P(x)dx = 1$. Como $P \in L^1(\mathbb{R}^n)$, não é garantido a boa definição da convolução $f * P_t$. Para contornar este problema, consideraremos a seguir a definição de um subconjunto das distribuições temperadas onde faz sentido tomar convoluções do tipo $f * P_t$.

Definição 3.2.3. *Dizemos que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição limitada se $f * \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Desta forma, se f é uma distribuição limitada e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a convolução $f * g$ por

$$\langle f * g, \phi \rangle \doteq \langle f * \widetilde{\phi}, \widetilde{g} \rangle = \int (f * \widetilde{\phi})(x)\widetilde{g}(x)dx, \tag{3.25}$$

no qual $\widetilde{\phi}(x) = \phi(-x)$. Note que

$$|\langle f * g, \phi \rangle| \leqslant \|f * \widetilde{\phi}\|_\infty \int |g(-x)|dx < \infty,$$

donde segue que a distribuição (3.25) está bem definida e é limitada.

A seguir, definiremos duas outras funções maximais necessárias para enunciar o Teorema de Caracterização Maximal do espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$. Note que a função maximal definida em (3.12) leva em consideração apenas uma aproximação da identidade (isto é, apenas uma função $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), neste sentido definiremos a *grand* função maximal, que de certa forma generaliza a anterior pois baseia-se em uma coleção de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sejam $\mathcal{F} = \{\| \cdot \|_{\alpha_j,\beta_j}\}_j$ uma coleção finita de semi-normas[3] em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}_\mathcal{F} = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \ \|\varphi\|_{\alpha_j,\beta_j} \leqslant 1, \ \forall \ \| \cdot \|_{\alpha_j,\beta_j} \in \mathcal{F}\}$. Então definimos a *grand* função

[2] $P_t(x) = t^{-n}P\left(\dfrac{x}{t}\right)$ é denominado núcleo de Poisson e está relacionado ao problema de Dirichlet para a equação de Laplace no semi-plano $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ t > 0\}$, dada por

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u = f \text{ em } \partial\mathbb{R}^{n+1}_+. \end{cases}$$

Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então a solução do problema anterior é dada por $u(x,t) = (f * P_t)(x)$.

[3] Lembre que as seminormas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são dadas por

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right|.$$

maximal por

$$M_{\mathcal{F}}(x) \doteq \sup_{\phi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} M_\phi f(x).$$

Por fim, se f é uma distribuição limitada, seja

$$u(x,t) = (f * P_t)(x),$$

o qual é conhecido como integral de Poisson de f. Definimos a função maximal não-tangencial de u por

$$u^*(x) \doteq \sup_{(y,t)\in\Gamma(x)} |u(y,t)|,$$

no qual $\Gamma(x) = \{(z,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \ |x - z| \leqslant t\}$ denota o cone centrado em x e abertura 1.

Teorema 3.2.4 (Teorema de Caracterização Maximal)**.** *Sejam $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $p > 0$. São equivalentes:*

(a) Existe $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int \phi(x)dx \neq 0$ tal que $M_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

(b) Existe uma coleção finita de semi-normas $\mathcal{F}$ tal que $M_{\mathcal{F}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$;

(c) f é uma distribuição limitada e $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver em [22] p. 92.

Como consequência do Teorema de Caracterização Maximal, dizemos que $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ se qualquer condição do Teorema 3.2.4 for satisfeita.

Tendo enunciado o Teorema de Caracterização Maximal, iremos agora demonstrar a Proposição 3.2.1 e mostrar que $\|f\|_{H^p}$ é de fato uma norma para $p \geqslant 1$ e uma quasi-norma para $0 < p < 1$.

Demonstração. [Proposição 3.2.1] Suponha que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é tal que para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int \varphi(x)dx \neq 0$ temos $M_\varphi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então f satisfaz condição (a) do Teorema de Caracterização e portanto $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, se $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, pela condição (b) do Teorema de Caracterização Maximal, existe um conjunto finito de semi-normas $\mathcal{F}_N = \{\|\cdot\|_{\alpha_j,\beta_j}\}_j$ tal que $M_{\mathcal{F}} f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int \varphi(x)dx \neq 0$ e $\varepsilon = max\{\|\varphi\|_{\alpha_j,\beta_j}\}$, $j = 1, 2, \cdots, N$.

Obviamente, temos que $\varphi/\varepsilon \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}_N}$ e desta forma, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1} M_{\varphi} f(x) &= \varepsilon^{-1} \sup_{t>0} |(f * \varphi_t)(x)| \\
&= \sup_{t>0} \left| \left(f * \frac{\varphi_t}{\varepsilon} \right) (x) \right| \\
&= M_{\frac{\varphi}{\varepsilon}} f(x) \\
&\leqslant \sup_{\phi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}_N}} M_{\phi} f(x) = M_{\mathcal{F}_N} f(x),
\end{aligned}$$

donde segue que $M_{\varphi} f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

□

Observação 3.2.4. *Como consequência da demonstração do Teorema de Caracterização Maximal (referência [22]) mostra-se que os funcionais $\|M_\phi f\|_p$, $\|M_{\mathcal{F}} f\|_p$ e $\|u^*\|$ são equivalentes e portanto qualquer um deles pode ser considerado como norma do espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$.*

Proposição 3.2.3. *Seja $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$. Então $\|f\|_{H^p} = \|M_\phi f\|_p$ define uma norma para $p \geqslant 1$ e uma quasi-norma para $0 < p < 1$.*

Demonstração. Seja $p \geqslant 1$ e mostremos que $\|f\|_{H^p}$ define uma norma, isto é, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $f = 0 \Leftrightarrow \|f\|_{H^p} = 0$. É imediato da definição que se $f = 0$, então $\|f\|_{H^p} = 0$. Suponha que $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{H^p} = 0$, então pela Observação 3.2.4 segue que $\|M_{\mathcal{F}} f\|_p = 0$ e portanto $M_{\mathcal{F}} f(x) = 0$ q.t.p. Desta forma, temos que para toda $\psi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, $(f * \psi)(x) = 0$ q.t.p, isto é

$$\langle f, \psi\,(x - \cdot)\rangle = 0 \text{ q.t.p.}$$

Basta mostrarmos que para toda $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos $\langle f, \Phi\rangle = 0$ q.t.p. Note que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\Phi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, e assim

$$f * \varepsilon\Phi(x) = 0 \text{ q.t.p} \Rightarrow f * \Phi(x) = 0 \text{ q.t.p.}$$

Portanto $f = 0$.

(ii) $\|\alpha f\|_{H^p} = |\alpha| \cdot \|f\|_{H^p}$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$. Desta forma tal propriedade é imediata uma vez que o operador $M_\phi f$ é sublinear.

(iii) $\|f_1 + f_2\|_{H^p} \leqslant \|f_1\|_{H^p} + \|f_2\|_{H^p}$. Imediato pois o operador $M_\phi f$ é sublinear.

O caso $0 < p < 1$ é análogo uma vez que $\|\cdot\|_p$ é uma quasi-norma.

□

3.2.2 Decomposição Atômica

Nesta seção apresentaremos uma classe importante de distribuições em $H^p(\mathbb{R}^n)$. Como já vimos anteriormente que $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$, daqui em diante estaremos sempre nos referindo a $0 < p \leqslant 1$.

Definição 3.2.4. *Um H^p-átomo (ou apenas átomo) é uma função mensurável $a(x)$ que satisfaz:*

(i) supp$(a) \subset B(x_0, r)$, para alguma bola $B(x_0, r)$;

(ii) $\|a\|_\infty \leqslant |B(x_0, r)|^{-1/p}$ q.t.p (condição de tamanho);

(iii) $\int x^\beta a(x)dx = 0$, para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\beta| \leqslant \lfloor n(p^{-1} - 1)\rfloor$ (condição de momento), no qual $\lfloor w \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual w.

Note que se $q \geqslant 1$, então $a \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\|a\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}^n} |a(x)|^q dx \\
&= \int_{B(x_0,r)} |a(x)|^q dx \\
&\leqslant \|a\|_\infty^q |B(x_0, r)| \\
&\leqslant |B(x_0, r)|^{-q/p} |B(x_0, r)| \\
&= |B(x_0, r)|^{1-q/p},
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\|a\|_q \leqslant |B(x_0, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}. \tag{3.26}
$$

Levando esse fato em consideração, podemos definir de forma mais geral um (p, q, s)-átomo apenas substituindo na Definição 3.2.4 a condição de tamanho e a de momento por

(ii)' $\|a\|_q \leqslant |B(x_0, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$;

(iii)' $\int x^\beta a(x)dx = 0$, para todo $|\beta| \leqslant s$ com $s \geqslant \lfloor n\left(p^{-1} - 1\right)\rfloor$.

Desta forma, a Definição 3.2.4 apresenta um (p, ∞, s)-átomo e neste trabalho estaremos interessados em considerar átomos deste tipo.

No próximo resultado veremos que um átomo pertence a $H^p(\mathbb{R}^n)$ e sua H^p-norma é uniformemente limitada, isto é, independe do átomo considerado.

Observação 3.2.5. *Para obtermos a limitação uniforme em norma dos H^p-átomos, podemos supor sem perda de generalidade que os átomos são suportados em bolas centradas na origem. Isto vem do fato de que a norma $\|\cdot\|_p$ é invariante por translações e se $a(x)$ é um átomo suportado na bola $B(x_0, r)$, então $\eta(x) = a(x - x_0)$ é um átomo cujo suporte está contido em $B(0, r)$.*

Proposição 3.2.4. *Se $a(x)$ é um H^p-átomo, então $a \in H^p(\mathbb{R}^n)$ e sua norma é uniformemente limitada sobre todos os H^p-átomos, isto é, existe uma constante $C_{n,p} > 0$ dependendo apenas de n e p tal que*

$$\|a\|_{H^p} = \|M_\phi a\|_p \leqslant C_{n,p}, \ \forall \ a \ H^p\text{-átomo}.$$

Demonstração. Seja $0 \leqslant \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ suportada na bola unitária com $\displaystyle\int \phi(x)dx = 1$. Nosso objetivo será mostrar que $\displaystyle\int [M_\phi a(x)]^p dx \leqslant C_{n,p}$, no qual $a(x)$ é um átomo arbitrário suportado na bola $B = B(0, r)$ e $C_{n,p} > 0$ é uma constante que independe do suporte do átomo considerado. Seja $B^* = B(0, 2r)$ e a seguinte decomposição do espaço $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_\phi a(x)]^p dx = \int_{B^*} [M_\phi a(x)]^p dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^*} [M_\phi a(x)]^p dx.$$

(I) Estimativa de $\displaystyle\int_{B^*} [M_\phi a(x)]^p dx$. Usando a condição de tamanho do átomo, obtemos

$$\begin{aligned}
M_\phi a(x) &= \sup_{t>0} \left| \int a(x-y)\phi_t(y)dy \right| \\
&\leqslant \sup_{t>0} \int |a(x-y)| \ |\phi_t(y)| dy \\
&\leqslant |B|^{-1/p} \sup_{t>0} \int t^{-n} \phi\left(\frac{y}{t}\right) dy \\
&= |B|^{-1/p}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{B^*} [M_\phi a(x)]^p dx &\leqslant |B|^{-1}|B^*| \\
&\lesssim C_{n,p},
\end{aligned}$$

uma vez que $|B^*| \lesssim |B|$.

(II) Estimativa de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B^*} [M_\phi a(x)]^p dx$. Usando a condição de momento nulo do átomo, podemos escrever

$$(a * \phi_t)(x) = \int a(y) \left[\phi_t(x-y) - \sum_{|\alpha| \leqslant N_p} \frac{\partial^\alpha \phi_t(0)}{\alpha!}(x-y)^\alpha \right] dy,$$

no qual

$$R_{N_p+1}(y) = \phi_t(x-y) - \sum_{|\alpha| \leqslant N_p} \frac{\partial^\alpha \phi_t(0)}{\alpha!}(x-y)^\alpha$$

é o resto do polinômio de Taylor de grau $N_p = \left\lfloor n\left(\frac{1}{p} - 1\right) \right\rfloor$ (na variável y) da função $\phi_t(x-y)$ centrado na origem. Além disso, temos a seguinte estimativa para o resto de Lagrange

$$|R_{N_p+1}(y)| \leqslant C \ \frac{|y|^{N_p+1}}{t^{N_p+n+1}}.$$

Como estamos supondo $y \in B$, $x \in \mathbb{R}^n \backslash B^*$ e ϕ suportada na bola unitária, temos que $t \geqslant \frac{|x|}{2}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
|(a * \phi_t)(x)| &= \left| \int_B a(y) R_{N_p+1}(y) dy \right| \\
&\leqslant \int_B |a(y)| \ |R_{N_p+1}(y)| dy \\
&\leqslant C|B|^{-1/p} \int_B \frac{|y|^{N_p+1}}{t^{N_p+n+1}} dy \\
&\leqslant C|B|^{-1/p} \int_B \frac{r^{N_p+1}}{t^{N_p+n+1}} dy \\
&= C|B|^{-1/p} \left(\frac{r^{N_p+1}}{t^{N_p+n+1}} \right) |B| \\
&= C \frac{r^{-\frac{n}{p}+N_p+n+1}}{|x|^{N_p+n+1}}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \backslash B^*.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \backslash B^*} [M_\phi a(x)]^p dx &\leqslant C \ r^{-n+p(N_p+n+1)} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B^*} |x|^{-p(N_p+n+1)} dx \\
&= C \ r^{-n+p(N_p+n+1)} \int_{2r}^{\infty} w^{-p(N_p+n+1)+n-1} dw \\
&= C \ r^{-n+p(N_p+n+1)} r^{-p(N_p+n+1)+n} \\
&= C_{n,p},
\end{aligned}$$

no qual a condição de integrabilidade se verifica pois $n(p^{-1}-1)-1 < N_p \leqslant n(p^{-1}-1)$, logo $-p(N_p+n+1)+n-1<-1$.

Por fim, das estimativas (I) e (II) segue o resultado.

□

Tendo definido um H^p-átomo e mostrado suas principais propriedades, o próximo resultado segue na direção de apresentar uma decomposição atômica de $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.2.5. *Sejam $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma coleção de H^p-átomos e $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos tal que $\sum_{j\in\mathbb{N}}|\lambda_j|^p<\infty$. Então a série*

$$f=\sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_j a_j \tag{3.27}$$

converge em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e em $H^p(\mathbb{R}^n)$, $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f\|_{H^p}\leqslant C\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Suponha inicialmente que a soma (3.27) é finita e denote $f_N=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j a_j$. Pela sublinearidade de M_ϕ, obtemos

$$M_\phi(f_N)=M_\phi\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j a_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|M_\phi(a_j).$$

Como $0<p\leqslant 1$, pela sub-aditividade,

$$\left(\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|M_\phi(a_j)\right)^p\leqslant\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|^p[M_\phi(a_j)]^p.$$

Integrando ambos os lados da desigualdade anterior e por meio da Proposição 3.2.4 obtemos que

$$\begin{aligned}\int[M_\phi f_N(x)]^p dx &\leqslant \int\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|^p[M_\phi a_j(x)]^p dx\\ &\leqslant C\sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|^p<\infty.\end{aligned}$$

Analogamente decorre que, para todo $M \geqslant N$ temos

$$\|f_N - f_M\|_{H^p}^p = C \sum_{j=N+1}^{M} |\lambda_j|^p < \varepsilon,$$

pois a série $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p$ é convergente em $\mathbb{C}$ e portanto é de Cauchy. Desta forma, f_N é de Cauchy e pelo Teorema 3.2.3 converge em $H^p(\mathbb{R}^n)$ para f em $H^p(\mathbb{R}^n)$. Pela Observação 3.2.3, a convergência também acontece em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Uma vez que temos a convergência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, por meio da Proposição 3.2.4 obtemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^p}^p &= \left\| \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \lambda_j \right\|_{H^p}^p \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \|a_j\|_{H^p}^p |\lambda_j|^p \\
&\leqslant C \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

□

A implicação inversa é conhecida como Teorema de Decomposição Atômica do espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ e a demonstração será omitida pois não faz parte do objetivo principal deste trabalho.

Teorema 3.2.5. *Seja $0 < p \leqslant 1$. Então toda $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser escrita como uma soma de átomos que convergem em norma H^p e*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p \leqslant C_2 \|f\|_{H^p}.$$

Demonstração. Ver em [22] p. 107.

Observação 3.2.6. *Note que o Teorema anterior não garante a unicidade da decomposição atômica de $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$.*

Da Proposição 3.2.5, do Teorema 3.2.5 e da Observação 3.2.6 temos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^p} &\sim \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p \\
&\cong \inf \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p,
\end{aligned}$$

no qual o ínfimo é tomado sobre todas as decomposições atômicas possíveis.

Como aplicação do Teorema de decomposição atômica, mostraremos que o conjunto de todas as combinações lineares finitas de H^p-átomos é um subconjunto denso de $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Corolário 3.2.1. *Seja Λ o conjunto de todas as combinações lineares finitas de H^p-átomos. Então Λ é um subconjunto denso de $H^p(\mathbb{R}^n)$*

Demonstração. Seja $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 3.2.5 $f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j a_j$ com $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p < \infty$. Denote por $\left\{S_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em Λ. Então,

$$\begin{aligned} \|f - S_k\|_{H^p}^p &= \left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j a_j \right\|_{H^p}^p \\ &\leqslant C \sum_{j=k+1}^{\infty} |\lambda_j|^p \xrightarrow{k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

□

3.3 Espaços de Hardy Localizáveis $h^p(\mathbb{R}^n)$

Segundo D. Goldberg em [12], muito embora o espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ seja um bom substituto para o espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $p < 1$, algumas propriedades válidas para os espaços de Lebesgue não são estendidas para $H^p(\mathbb{R}^n)$ quando $p < 1$, como por exemplo:

(i) $H^p(\mathbb{R}^n)$ não contém $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $H^p(\mathbb{R}^n)$ não é um espaço semi-local, isto é, se $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $f\phi$ pode não pertencer a $H^p(\mathbb{R}^n)$;

(iii) $H^p(\mathbb{R}^n)$ não está bem definido em variedades;

(iv) Operadores pseudo-diferenciais em geral não são limitados em $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Motivado por estas questões, D. Goldberg definiu, em 1979 na referência [12], para cada $p > 0$ uma nova classe de espaços, denominados espaços de Hardy localizáveis e denotado por $h^p(\mathbb{R}^n)$, que contém $H^p(\mathbb{R}^n)$ e não possui os problemas listados anteriormente.

Analogamente ao que foi desenvolvido para o espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$, nesta seção iremos definir o espaço $h^p(\mathbb{R}^n)$, listar algumas propriedades e provar o Teorema de Decomposição Atômica em $h^p(\mathbb{R}^n)$. Para tal desenvolvimento, utilizaremos as referências [12] e [13].

3.3.1 Caracterização e Propriedades

Com o objetivo de definir os espaços $h^p(\mathbb{R}^n)$ e enunciar um Teorema de Caracterização Maximal inspirado em $H^p(\mathbb{R}^n)$, iremos inicialmente introduzir algumas funções maximais, que são basicamente restrições daquelas definidas na seção anterior.

Sejam $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Definimos a função maximal truncada de f associada a ϕ por

$$m_\phi f(x) \doteq \sup_{0<t\leqslant 1} |(f * \phi_t)(x)|.$$

Definição 3.3.1. *Dizemos que* $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ *se existe* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *com* $\int \phi(x)dx \neq 0$ *tal que* $m_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Denotemos por *grand* função maximal associada a m_ϕ o operador

$$m_{\mathcal{F}} f(x) \doteq \sup_{\phi \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}} m_\phi f(x),$$

no qual $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{\alpha,\beta} \leqslant 1, \ \forall \ \|\cdot\|_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}\}$ e $\mathcal{F}$ é uma família finita de seminormas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A versão não tangencial da função maximal truncada é dada por

$$m^*_\phi f(x) \doteq \sup_{0<t\leqslant 1} \sup_{|x-y|<t} |\phi_t * f(y)|.$$

Teorema 3.3.1 (Teorema de Caracterização Maximal em $h^p(\mathbb{R}^n)$)**.** *Sejam* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $p > 0$. *São equivalentes:*

(a) Existe $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *com* $\int \phi(x)dx \neq 0$ *tal que* $m_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*;*

(b) Existe uma coleção $\mathcal{F}$ *tal que* $m_{\mathcal{F}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*;*

(c) Para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *com* $\int \phi(x)dx \neq 0$, *temos que* $m_\phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [12] p. 31.

Desta forma, dizemos que $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ se qualquer condição do Teorema 3.3.1 for satisfeita.

Análogo a $H^p(\mathbb{R}^n)$, definimos a "norma" em $h^p(\mathbb{R}^n)$ por

$$\|f\|_{h^p} \doteq \|m_\phi f\|_p.$$

A completude de $h^p(\mathbb{R}^n)$ se verifica de forma análoga ao caso $H^p(\mathbb{R}^n)$ cuja a métrica é dada por

$$d(f,g) = \begin{cases} \|f-g\|^p_{h^p}, \text{ se } 0 < p \leqslant 1; \\ \|f-g\|_{h^p}, \text{ se } p > 1. \end{cases}$$

O próximo resultado afirma que $h^p(\mathbb{R}^n)$ é uma extensão de $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 3.3.1. *$H^p(\mathbb{R}^n) \subset h^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 0$ e $\|\cdot\|_{h^p} \leqslant \|\cdot\|_{H^p}$.*

Demonstração. Por propriedade de supremo, obtemos que

$$\sup_{0<t\leqslant 1} |f * \phi_t(x)| \leqslant \sup_{t>0} |f * \phi_t(x)|.$$

Assim para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$m_\phi f(x) \leqslant M_\phi f(x)$$

e portanto

$$\|m_\phi f\|_p \leqslant \|M_\phi f\|_p. \tag{3.28}$$

Se $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, então $\|M_\phi f\|_p \leqslant C$ e da desigualdade (3.28) segue que $\|m_\phi f\|_p \leqslant C$ e portanto $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$.

□

Observação 3.3.1. *Da proposição anterior e do Teorema 3.2.1 temos que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset h^p(\mathbb{R}^n)$ quando $p > 1$. De forma análoga a demonstração do Teorema 3.2.1 mostra-se que $h^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ e portanto $h^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n) = H^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1$.*

Exemplo 3.3.1. *A distribuição $\delta \in h^p(\mathbb{R})$ se $0 < p < 1$. Com efeito, considere $\phi \in C_c^\infty([-1,1])$ e note que*

$$\begin{aligned} \delta * \phi_t(x) &= \langle \delta, \phi_t(x - \cdot) \rangle \\ &= \frac{1}{t}\, \phi\left(\frac{x}{t}\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Uma vez que $\phi(x) = 0$ para $|x| \geqslant 1$, então $\phi(x/t) = 0$ para $|x| \geqslant t$, e por isso assumiremos que $|x| < t$. Desta observação e da igualdade (3.29) obtemos que

$$\begin{aligned} (m_\phi \delta)^p(x) &= \sup_{0<t\leqslant 1} (\delta * \phi_t)^p(x) \\ &< \sup_{0<t\leqslant 1} |x|^{-p} \phi^p\left(\frac{x}{t}\right) \\ &\leqslant |x|^{-p} \|\phi\|_\infty^p, \ |x| < t. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} (m_\phi \delta)^p(x) dx \leqslant \|\phi\|_\infty^p \int_{-1}^{1} |x|^{-p} dx < \infty$$

se $0 < p < 1$.

3.3.2 Decomposição Atômica em $h^p(\mathbb{R}^n)$

Análogamente ao espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$, podemos exibir um teorema de decomposição atômica em $h^p(\mathbb{R}^n)$. Definiremos a seguir os h^p-átomos, cuja definição difere ligeiramente daquela apresentada anteriormente para $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Definição 3.3.2. *Seja $a(x)$ uma função mensurável definida em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a é um h^p-átomo (ou apenas átomo) se existe uma bola $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ tal que*

(i) $supp(a) \subset B(x_0, r)$;

(ii) $\|a\|_\infty \leqslant |B(x_0, r)|^{-1/p}$;

(iii) Se $r < 1$, então para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\alpha| \leqslant \lfloor n(p^{-1} - 1)\rfloor$

$$\int x^\alpha a(x) dx = 0.$$

Observação 3.3.2. *Note que se $r \geqslant 1$ a condição de momento nulo não é exigida, diferentemente da definição dada em $H^p(\mathbb{R}^n)$. Obviamente se $a(x)$ é um H^p-átomo, então também é um h^p-átomo.*

Nosso objetivo daqui em diante será apresentar um teorema de decomposição atômica análoga ao do espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $h^p(\mathbb{R}^n)$. Nesta direção, o próximo resultado estabelece uma conexão entre os dois espaços.

Lema 3.3.1. *Seja $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leqslant 1$. Então existe $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ e $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap h^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = u + v$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{H^p} + \|v\|_{h^p} \leqslant C\|f\|_{h^p}.$$

Demonstração. Considere inicialmente as seguintes funções auxiliares:

(i) $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $supp(\varphi) \subseteq B(0, 2)$, $\varphi(\xi) = 1$ para $|\xi| \leqslant 1$;

(ii) $\rho(x) = \check{\varphi}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, no qual $\check{}$ denota a transformada inversa de Fourier;

(iii) $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $supp(\widehat{\phi}) \subseteq B(0, 1)$ e $\widehat{\phi}(x) = 1$ quando $|x| < 1/2$.[4]

Assim, definimos as distribuições u e v por

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) - (f * \rho)(x) \\ v(x) &= (f * \rho)(x) \end{aligned}$$

e claramente temos $f = u + v$.

[4]A existência desta função é garantida por meio da transformada inversa de Fourier.

Afirmação 3.3.1. *$\{\rho * \phi_t\}_{0<t\leqslant 1}$ é um conjunto limitado em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

De fato, para cada $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ e $N > 0$, uma vez que $\{\rho * \phi_t\}_{0<t\leqslant 1}$ é uma aproximação da identidade, segue que

$$D^\beta(\rho * \phi_t) \xrightarrow{t\to 0} D^\beta(\rho), \text{ em } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Assim, em particular $\left|D^\beta\rho * \phi_t(x) - D^\beta\rho(x)\right| \to 0$ quando $t \to 0$ e como $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante $C_{\beta,N} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left|D^\beta\rho * \phi_t(x)\right| &\leqslant \left|D^\beta\rho * \phi_t(x) - D^\beta\rho(x)\right| + \left|D^\beta\rho\right| \\ &\leqslant C_{\beta,N}(1+|x|)^{-N}, \ \forall\ N \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Desta forma, para todo $|\alpha| \leqslant N$ obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} \left|x^\alpha \left(D^\beta\rho * \phi_t\right)(x)\right| &\leqslant C_{\beta,N}\frac{|x^\alpha|}{(1+|x|)^N} \\ &\leqslant C_{\beta,N}\frac{|x|^{|\alpha|}}{(1+|x|)^N} \\ &\leqslant C_{\beta,N}\frac{|x|^N}{(1+|x|)^N} \\ &\leqslant C_{\beta,N}. \end{aligned}$$

Como N é tomado de forma arbitrária, segue que a estimativa anterior é válida para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Portanto, $\{\rho * \phi_t\}_{0<t\leqslant 1}$ é limitado segundo as seminormas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o que completa a demonstração da afirmação.

Considere $\mathcal{F}$ uma família finita de seminormas (dada pelo Teorema de Caracterização). Pela Afirmação 3.3.1, existe uma constante $C > 0$ tal que $\{C\rho * \phi_t\}_{0<t\leqslant 1} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Assim, para todo $0 < t \leqslant 1$

$$|[f * (\rho * \phi_t)](x)| \leqslant C^{-1} m_{\mathcal{F}} f(x).$$

Tomando o supremo na desigualdade anterior obtemos que

$$m_\phi v(x) \leqslant C^{-1} m_{\mathcal{F}_N} f(x), \tag{3.30}$$

uma vez que $m_\phi v(x) = \sup\limits_{0<t\leqslant 1} [(f*\rho)*\phi_t](x)$. Desta forma concluimos que $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap h^p(\mathbb{R}^n)$.

Falta agora mostrarmos que $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$. Note que

$$
\begin{aligned}
u * \phi_t &= (\widehat{u * \phi_t})^{\vee} \\
&= \left(\widehat{u}\ \widehat{\phi_t}\right)^{\vee} \\
&= \left(\widehat{u}\ \widehat{\phi}(t\cdot)\right)^{\vee} \\
&= \left[\left(\widehat{f} - \widehat{f * \rho}\right) \widehat{\phi}(t\cdot)\right]^{\vee} \\
&= \left[\left(\widehat{f} - \widehat{f}\ \widehat{\rho}\right) \widehat{\phi}(t\cdot)\right]^{\vee} \\
&= \left[\widehat{f}\,(1-\varphi)\,\widehat{\phi}(t\cdot)\right]^{\vee} \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Como $supp(\widehat{\phi}) \subseteq B(0,1)$ e $1 - \varphi(\xi) = 0$ se $|\xi| \leqslant 1$, segue que (3.31) é nula para $t \geqslant 1$ e portanto $m_\phi u = M_\phi u$. Desta forma,

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{H^p}^p &= \|u\|_{h^p}^p = \|f - v\|_{h^p}^p \\
&\leqslant \|f\|_{h^p}^p + \|v\|_{h^p}^p \\
&\leqslant \|f\|_{h^p}^p + C^{-1}\|f\|_{h^p}^p \\
&= C'\|f\|_{h^p}^p. \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Das desigualdades (3.30) e (3.32) segue que

$$\|u\|_{H^p} + \|v\|_{h^p} \leqslant C\|f\|_{h^p}.$$

□

O próximo resultado é conhecido por Teorema de Decomposição Atômica de $h^p(\mathbb{R}^n)$ e faremos uso do lema anterior e do Teorema de Decomposição Atômica de $H^p(\mathbb{R}^n)$ para demonstrá-lo.

Teorema 3.3.2. *Seja $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leqslant 1$. Então existe uma sequência $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de h^p-átomos e uma sequência de números complexos $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p < \infty$ tal que*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j a_j.$$

Além disso, $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p \leqslant \|f\|_{h^p}^p$

Demonstração. Pelo Lema 3.3.1 podemos escrever $f = u + v$, no qual $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ e $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap h^p(\mathbb{R}^n)$. Do Teorema de Decomposição Atômica de $H^p(\mathbb{R}^n)$ obtemos que existe uma sequência $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de H^p-átomos tal que

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j a_j \text{ com } \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p \leqslant C\|u\|_{H^p}.$$

Da desigualdade (3.32), obtemos que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p \leqslant C\|f\|_{h^p}.$$

Como H^p-átomos são h^p-átomos, resta mostrar que v possui uma decomposição atômica em $h^p(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma família de cubos cujo centro pertence a $\mathbb{Z}^n$ e lado $\ell = 2$ tais que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j = \mathbb{R}^n$. Lembre que $v = f * \rho$, no qual $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ foi definido no lema anterior. Considere para cada $j \in \mathbb{N}$ a função

$$b_j(x) = \begin{cases} \dfrac{f * \rho(x)}{|Q_j|^{1/p}\ \|f * \rho\|_{L^\infty(Q_j)}}, & \text{se } x \in Q_j; \\ 0, & \text{se } x \notin Q_j. \end{cases}$$

Note que $|Q_j|$ é invariante para todo $j \in \mathbb{N}$, uma vez que todos os cubos possuem lado constante $\ell = 2$. O caso em que $\|\rho * f\|_{L^\infty(Q_j)} = 0$ é desprezado. Além disso, defina

$$\gamma_j = |Q_j|^{\frac{1}{p}} \|f * \rho\|_{L^\infty(Q_j)}.$$

É imediato da definição que b_j é um h^p-átomo e resta mostrar que $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\gamma_j|^p \leqslant C\|f\|_{h^p}$.

Seja $\rho_r(x) \doteq \rho(x + r)$. Então para $x \in Q_j$

$$\begin{aligned} \sup_{r\in Q_j} |(f * \rho_r)(0)| &= \sup_{r\in Q_j} |\langle f, \rho_r(0 - \cdot)\rangle| \\ &= \sup_{r\in Q_j} |\langle f, \rho(r - \cdot)\rangle| \\ &= \sup_{r\in Q_j} |(f * \rho)(r)| \\ &\geqslant |(f * \rho)(x)|. \end{aligned}$$

Desta forma temos que

$$\sup_{x\in Q_j} |(f * \rho)(x)| \leqslant \sup_{r\in Q_j} |(f * \rho_r)(0)|. \tag{3.33}$$

Como $(f * \rho_r)(0) = (f * \rho_{r-y})(y)$ e $r - y \in Q$ quando $r, y \in Q_j$, no qual Q denota o cubo centrado na origem e $\ell = 4$, obtemos que

$$\sup_{r\in Q_j} |(f * \rho_r)(0)| \leqslant \sup_{s\in Q} (f * \rho_s)(y), \text{ se } y \in Q_j. \tag{3.34}$$

Como $\{\rho_s\}_{s\in Q}$ é uma família limitada em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ temos que existe uma constante $C > 0$ e uma família finita de seminormas $\mathcal{F}$ (fornecida pelo Teorema de Caracterização Maximal) tal que $\{C\rho_s\}_{s\in Q} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Então

$$\sup_{s\in Q} |(f * \rho_s)(y)| \leqslant C^{-1} m_{\mathcal{F}} f(y), \; y \in Q_j. \tag{3.35}$$

Assim, das Desigualdades (3.33), (3.34) e (3.35) temos que

$$\begin{aligned} \|f * \rho\|^p_{L^\infty(Q_j)} &= \sup_{x\in Q_j} |(f * \rho)(x)|^p \\ &\leqslant \sup_{r\in Q_j} |(f * \rho_r)(0)|^p \\ &\leqslant \sup_{s\in Q} |(f * \rho_s)(y)|^p \\ &\leqslant C^{-1} (m_{\mathcal{F}} f)^p(y), \; y \in Q_j. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Integrando a desigualdade (3.36) em $y \in Q_j$ obtemos

$$\|f * \rho\|^p_{L^\infty(Q_j)} \leqslant \frac{C^{-p}}{|Q_j|} \int_{Q_j} (m_{\mathcal{F}} f)^p(y) dy.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\gamma_j|^p &= |Q_j| \sum_{j\in\mathbb{N}} \|f * \rho\|^p_{L^\infty(Q_j)} \\ &\leqslant C^{-p} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} (m_{\mathcal{F}} f)^p(y) dy \\ &\lesssim C\|f\|^p_{h^p}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

□

3.4 O espaço BMO

O espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$, também conhecido como espaço de John-Nirenberg, foi apresentado pela primeira vez em 1961 por Fritz John e Louis Nirenberg. Um resultado importante, devido a Charles Fefferman e Elias Stein em [9], afirma que o dual de

$H^1(\mathbb{R}^n)$ é o $BMO(\mathbb{R}^n)$, mostrando assim uma conexão importante com os espaços de Hardy. Em termos gerais, da mesma forma que o espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ representa um bom substituto para os espaços de Lesbesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $0 < p \leqslant 1$, o espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$ pode ser interpretado como um substituto para $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Vamos agora apresentar o espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$ de forma introdutória e provar algumas propriedades básicas que serão úteis posteriormente. Para um estudo mais detalhado do assunto, consulte a referência [22] Capítulo IV.

Sejam $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $Q \subset \mathbb{R}^n$ um cubo qualquer. Denotamos por

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy,$$

a média da função f no cubo Q. Caracterizamos por $M^\# f(x)$ a função maximal *sharp* definida por

$$M^\# f(x) \doteq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx, \tag{3.37}$$

no qual o supremo é tomado sobre todos os cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$ que contém x. Dizemos que $f \in BMO(\mathbb{R}^n) \doteq BMO$ se a função $M^\# f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, isto é, f possui variação média limitada. Mais precisamente,

$$BMO = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \; M^\# f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

De forma natural, espera-se que o funcional $\|M^\# f\|_\infty$ defina uma norma em BMO, porém em geral este não satisfaz a condição $\|f\|_{BMO} = 0 \Leftrightarrow f = 0$. De fato, se f uma função constante q.t.p, então $M^\# f(x) = 0$ mas obviamente $f \neq 0$. Para contornar este problema, basta quocientar o BMO pelo espaço das funções constantes, isto é $\|f_1\|_{BMO} = \|f_2\|_{BMO}$ se e somente se $f_1 - f_2$ for uma função constante. Assim,

$$\|f\|_{BMO} \doteq \|M^\# f\|_\infty, \tag{3.38}$$

define uma norma em BMO.

Exemplo 3.4.1. *Toda função limitada pertence a BMO, isto é $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO$ e vale também a inclusão em norma. De fato, note que* $\int_Q |f - f_Q| \leqslant 2|Q| \; \|f\|_\infty$ *e portanto* $\|f\|_{BMO} \leqslant 2\|f\|_\infty$.

O próximo resultado diz que a função maximal definida em (3.37) é controlada pontualmente pelo operador maximal de Hardy-Littlewood.

Proposição 3.4.1. *Existe uma constante $C_n > 0$ tal que*

$$M^\# f(x) \leqslant C_n Mf(x),$$

no qual Mf denota o operador maximal de Hardy-Littlewood.

Demonstração. Mostraremos que a desigualdade vale para $M'f(x)$ definida em (3.9) com $C_n = 2$. De fato,

$$\begin{aligned}\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f_Q|dy &\leqslant \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\left(\int_Q |f(y)|dy + \int_Q |f_Q|dx\right)\\ &= 2\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy\\ &= 2M'f(x).\end{aligned}$$

A generalização segue da desigualdade (3.10) uma vez que $M'f(x) \leqslant C_n Mf(x)$.

□

O próximo resultado será relevante para obter uma caracterização alternativa do espaço BMO.

Proposição 3.4.2. *Se $f \in BMO$, então*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leqslant \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-a|dx \leqslant \|f\|_{BMO}.$$

Demonstração. Diretamente da definição segue que

$$\sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-a|dx \leqslant \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leqslant \|f\|_{BMO}.$$

Para mostrarmos a desigualdade que resta, note que para todo $a \in \mathbb{C}$, $|f(x)-f_Q| \leqslant |f(x)-a| + |a-f_Q|$. Integrando em Q, obtemos

$$\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leqslant 2\int_Q |f(x)-a|dx.$$

Dividindo ambos os lados por $|Q|$, tomando o ínfimo sobre todo $a \in \mathbb{C}$ e por fim o supremo sobre todo $Q \ni x$, obtemos

$$\frac{1}{2}\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \leqslant \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-a|dx,$$

e a conclusão da proposição segue imediatamente pela definição de supremo.

□

A proposição anterior define uma norma equivalente a $\|\cdot\|_{BMO}$ e também nos fornece uma informação importante sobre a natureza nos elementos de BMO, isto é $f \in BMO$

se existe uma constante a_Q (que pode depender de Q) tal que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - a_Q| dx \leqslant C, \tag{3.39}$$

no qual C é independente de Q.

Capítulo 4

Aplicações

Como aplicações da teoria apresentada, neste capítulo provaremos que algumas classes de operadores lineares como os de Calderón-Zygmund e pseudo-diferenciais são contínuos em espaços de Hardy.

4.1 Operadores de Calderón-Zygmund

De forma geral, estamos interessados em estudar operadores $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ da forma

$$Tf(x) \doteq \int K(x,y)f(y)dy, \quad x \notin supp(f), \tag{4.1}$$

associados a função $K(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta)$, $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ x = y\}$ que satisfaz a seguinte propriedade

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)\right| \leqslant A\ |x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|},\ x \neq y \tag{4.2}$$

para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. A função $K(x,y)$ é denominada núcleo (ou kernel) do operador T e usaremos a notação $T \doteq T_K$ quando desejarmos enfatizar o núcleo K associado ao operador T.

Observação 4.1.1.

(i) *Núcleos que satisfazem a condição* (4.2) *são denominados kernels de Calderón-Zygmund ou kernels integral singular;*

(ii) *Operadores do tipo* (4.1) *associados a núcleos que satisfazem a hipótese* (4.2) *e são limitados em* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *são denominados operadores de Calderón-Zygmund segundo a nomenclatura da referência [22] p.* 289;

(iii) *Veremos adiante que a condição* (4.2) *sobre K pode ser substituida por hipóteses mais fracas e a nomenclatura continuará igual;*

(iv) *Vale ressaltar que um operador de Calderón-Zygmund não é unicamente determinado pelo núcleo associado a ele. De fato, considere o operador identidade Id. Temos que Id é um operador de Calderón-Zygmund associado ao núcleo $K(x,y) = 0$, uma vez que para $x \notin supp(f)$ temos que $Idf(x) = 0$, enquanto que o operador nulo também é associado ao mesmo núcleo. Entretanto, um resultado bem conhecido garante que se dois operadores de Calderón-Zygmund são associados ao mesmo núcleo, então a diferença entre eles é pontualmente um operador multiplicação, isto é $Tf(x) = a(x)f(x)$ no qual $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (veja [8] p. 101).*

Uma pergunta natural que surge no estudo dos operadores de Calderón-Zygmund é procurarmos por condições mínimas sobre o núcleo $K(x,y)$ para que a extensão do operador em $L^2(\mathbb{R}^n)$, quando possível, faça sentido. A resposta será enunciada abaixo e está intimamente relacionada com a estimativa (4.2).

Proposição 4.1.1. *Seja $K(x,y)$ um núcleo tal que*

$$|K(x,y)| \geqslant C|x-y|^{-n},\ C > 0.$$

Então não existe nenhum operador T associado ao núcleo $K(x,y)$ que seja limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver [22] p. 289.

No próximo exemplo definiremos uma classe importante de operadores, denominados multiplicadores, que sob certas condições adicionais (que serão vistas posteriormente) são operadores de Calderón-Zygmund.

Exemplo 4.1.1. *Seja $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Associado a m definimos o operador T_m, denominado operador multiplicador, dado por*

$$\widehat{T_m f}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi),\ \forall\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

no qual $m(\xi)$ é denominado multiplicador. Note que por meio da transformada de Fourier inversa, a relação anterior pode ser reescrita em termos de uma convolução, *isto é*

$$\begin{aligned} T_m f(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} m(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} m(\xi) \left(\int e^{-i\langle y,\xi\rangle} f(y) dy \right) d\xi \\ &= \int \left((2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x-y,\xi\rangle} m(\xi) d\xi \right) f(y) dy \\ &= \int K(x-y) f(y) dy, \end{aligned}$$

no qual $\widehat{K} = m$. *Neste caso* $K(x,y) \doteq K(x-y)$ *e desta forma, um multiplicador é um caso particular de operador do tipo convolução.*

Como $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *então por meio do Teorema de Plancherel 1.5.4 obtemos que* T_m *é limitado em* $L^2(\mathbb{R}^n)$. *De fato,*

$$\|T_m f\|_2^2 = \int \left| \widehat{T_m f}(\xi) \right|^2 d\xi = \int \left| m(\xi) \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \leqslant \|m\|_\infty^2 \|f\|_2^2.$$

Observação 4.1.2. *Todo operador que pode ser representado na forma* $Tf(x) = K * f(x)$ *é denominado do tipo convolução. Muitos autores também o denominam por integral singular do tipo convolução. A rigor, uma integral singular do tipo convolução é uma aplicação da forma*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y)\varphi(y) dy \doteq v.p.\,(K)\,\varphi(x).$$

Por ora consideraremos $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ um núcleo do tipo convolução. A seguir exigiremos condições mais fracas sobre o núcleo com relação a que foi inicialmente proposta em (4.2) e permitirá, por exemplo, um melhor tratamento sobre o estudo da continuidade de tais operadores nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Suponha que K satisfaça alguma das seguintes propriedades:

(i) Existe $A_\alpha > 0$ tal que $|\partial_x^\alpha K(x)| \leqslant A_\alpha |x|^{-n-|\alpha|}$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$;

(ii) Existe $A > 0$ tal que $|K(x-y) - K(x)| \leqslant A \dfrac{|y|^\gamma}{|x|^{n+\gamma}}$, no qual $|x| \geqslant c|y|$, $c > 1$ e $\gamma > 0$;

(iii) Existe $A > 0$ tal que se $c > 1$, então

$$\int_{|x| \geqslant c|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leqslant A.$$

Observação 4.1.3. *Note que a hipótese (i) é a condição* (4.2) *para* $K(x,y) = K(x-y)$ *e de forma análoga está relacionada com a extensão do operador em* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Mostremos que a hipótese (iii), conhecida por condição de Hörmander, é a mais fraca dentre as propostas acima. Mais especificamente (i) $\Rightarrow$ (ii) e (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Afirmação 4.1.1. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii).*

De fato, por meio da Desigualdade do Valor Médio e da hipótese (i) obtemos que

$$\begin{aligned} |K(x-y) - K(x)| &\leqslant \sup_{z \in [x, x-y]} |K'(z)| \cdot |y| \\ &\leqslant A \sup_{z \in [x, x-y]} |z|^{-n-1} \cdot |y| \\ &\leqslant A \frac{|y|}{|x|^{n+1}}, \end{aligned}$$

no qual a última desigualdade verifica-se pois $z = x - (1-t)y$ para $t \in [0,1]$, logo

$$\begin{aligned} |z| &\geqslant |x| - (1-t)|y| \\ &\geqslant |x| - (1-t)\frac{|x|}{c} \\ &= \left(1 - \frac{1-t}{c}\right)|x|. \end{aligned}$$

Afirmação 4.1.2. *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii).*

Com efeito, basta notar que

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geqslant c|y|} |K(x-y) - K(x)| dx &\leqslant A\, |y|^\gamma \int_{|x| \geqslant c|y|} |x|^{-n-\gamma} dx \\ &= A\, |y|^\gamma |S^{n-1}| \int_{c|y|}^{\infty} r^{-\gamma-1} dr \\ &\lesssim A. \end{aligned}$$

No que segue, além da hipótese (iii) sobre o núcleo, mostraremos que uma condição adicional torna

$$Tf(x) = K * f(x) = \int K(x-y) f(y) dy, \ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

um operador de Calderón-Zygmund e mostraremos sua limitação como operador estendido em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$. Considere inicialmente o seguinte lema:

Lema 4.1.1. *Seja* K *um núcleo integrável. Se* T_K *é do tipo fraco* $(1,1)$ *e forte* $(2,2)$, *então* T *é do tipo forte* (p,p) *para* $1 < p < \infty$.

Demonstração. Pelo Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, T é tipo forte (p,p) para $1 < p \leqslant 2$. Basta apenas verificarmos quando $p > 2$. Considere p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ com $1 < p' < 2$. Do Teorema de Representação de Riesz 1.2.5, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$\|Tf\|_p = \sup_{\|g\|_{p'} \leqslant 1} \left| \int Tf(x)g(x)dx \right|$$

e portanto basta mostrarmos que para toda $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$

$$\left| \int Tf(x)g(x)dx \right| \leqslant C \; \|g\|_{p'} \; \|f\|_p. \tag{4.3}$$

Por meio do Teorema de Fubini, uma vez que K é integrável, podemos reescrever o primeiro termo da desigualdade (4.3) da forma

$$\begin{aligned} \int Tf(x)g(x)dx &= \int g(x) \left(\int K(x-y)f(y)dy \right) dx \\ &= \int f(y) \left(\int K(x-y)g(x)dx \right) dy \\ &= \int f(y) \left(\int \widetilde{K}(y-x)g(x)dx \right) dy \\ &\doteq \int f(y) T_{\widetilde{K}} g(y)dy, \end{aligned} \tag{4.4}$$

no qual $\widetilde{K}(x) = K(-x)$. Note também que $\|T_{\widetilde{K}} g\|_p = \|Tg\|_p$, uma vez que a norma em $L^p(\mathbb{R}^n)$ é invariante por translações. Desta forma, como T é do tipo forte (p',p'), por meio das desigualdades de Hölder e (4.4), obtemos que

$$\begin{aligned} \left| \int Tf(x)g(x)dx \right| &\leqslant \|f\|_p \; \|T_{\widetilde{K}} g\|_{p'} \\ &= \|f\|_p \; \|Tg\|_{p'} \\ &\leqslant C\|f\|_p \; \|g\|_{p'}, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

□

Teorema 4.1.1. *Seja T um operador definido por*

$$Tf(x) = \int K(x-y)f(y)dy, \;\; f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

no qual o núcleo K satisfaz:

(a) $\widehat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(b) $\displaystyle\int_{|x|\geqslant c|y|} |K(x-y) - K(x)|dx \leqslant A,\ c > 1.$

Então T é um operador limitado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$.

Demonstração. Como $\widehat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\displaystyle\int K(x)dx = \widehat{K}(0)$ segue que K é integrável e desta forma estamos nas condições do Lema 4.1.1. Assim, é suficiente mostrarmos que T é do tipo fraco $(1,1)$ e forte $(2,2)$. A limitação em $L^2(\mathbb{R}^n)$ segue da hipótese (a) e do Teorema de Plancherel. De fato, para $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_2 &= \|\widehat{Tf}\|_2 \\ &= \left(\int |\widehat{K}(\xi)\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\ &\leqslant \|\widehat{K}\|_\infty \|f\|_2 \leqslant C\|f\|_2. \end{aligned}$$

A generalização segue do fato de $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ ser denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Mostremos agora que T é fraco $(1,1)$. Da Decomposição de Calderón-Zygmund B.0.1, existe uma família de cubos diádicos disjuntos $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que se denotarmos $\mathcal{Q} = \displaystyle\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ e $F = \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{Q}$, vale que:

(i) $|f(x)| \leqslant \lambda$ se $x \in F$;

(ii) $|\mathcal{Q}| \leqslant \dfrac{\|f\|_1}{\lambda}$;

(iii) $\lambda < \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j} |f(x)|dx \leqslant 2^n\lambda.$

Defina

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in F; \\ \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j} |f(y)|dy, & \text{se } x \in Q_j \end{cases}$$

e note que está bem definido pois os cubos $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ são disjuntos. Logo $f = g + b$, no qual $b = \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j$ e $b_j(x) = \left(f(x) - \dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j} |f(y)|dy\right)\chi_{Q_j}(x)$. Desta forma, para mostrar T é fraco $(1,1)$ é suficiente que

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1 \tag{4.5}$$

e

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1. \tag{4.6}$$

Afirmação 4.1.3. *$g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|g\|_2^2 \leqslant \lambda(4^n+1)\|f\|_1$.*

De fato, usando (i), (ii) e (iii) da Decomposição de Calderón-Zygmund obtemos

$$\begin{aligned}
\|g\|_2^2 &= \int_F |g(x)|^2dx + \int_{\mathcal{Q}} |g(x)|^2dx \\
&= \int_F |g(x)|^2dx + \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} |g(x)|^2dx \\
&= \int_F |f(x)|^2dx + \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} \left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(y)|dy\right)^2 dx \\
&\leqslant \int_F |f(x)|\cdot|f(x)|dx + \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} (2^n\lambda)^2dx \\
&\leqslant \lambda\int_F |f(x)|dx + 4^n\lambda^2|\mathcal{Q}| \\
&\leqslant (4^n+1)\lambda\|f\|_1.
\end{aligned}$$

Como já foi mostrado anteriormente que o operador T é forte $(2,2)$, em particular é fraco $(2,2)$. Assim, da Afirmação 4.1.3 seque que

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| &\leqslant \left(\frac{C}{\lambda}\,\|g\|_2\right)^2 \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda}\,\|f\|_1.
\end{aligned}$$

Resta agora mostrar a estimativa (4.6). Para cada cubo Q_j, cujo diâmetro será denotado por d_j, associamos um cubo dilatado Q_j^* com diâmetro dado por $d_j^* = 27d_j$ e $\mathcal{Q}^* = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^*$. Considere $|\{x\in\mathbb{R}^n:\ |Tb(x)| > \lambda/2\}| = |A_1| + |A_2|$, no qual $A_1 = \{x \in \mathcal{Q}^*:\ |Tb(x)| > \lambda/2\}$ e $A_2 = \{x\in\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{Q}^*:\ |Tb(x)| > \lambda/2\}$. Diretamente do item (ii) da Decomposição de Calderón-Zygmund, obtemos que

$$|A_1| \leqslant \left|\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^*\right| \leqslant C\left|\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right| \leqslant \frac{C}{\lambda}\,\|f\|_1.$$

Para obtermos uma desigualdade semelhante para $|A_2|$ considere z_j o centro do cubo Q_j e para todo $j\in\mathbb{N}$ observe que

$$\begin{aligned}
\int_{Q_j} b(x)dx &= \int_{Q_j} f(x)dx - \int_{Q_j} g(x)dx \\
&= \int_{Q_j} f(x)dx - \int_{Q_j}\left(\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)dy\right)dx \\
&= 0. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Afirmação 4.1.4. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{Q}^*} |K(x-y) - K(x-z_j)|dx \leqslant A$, *para todo* $y \in Q_j$.

De fato, note que como $\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{Q}^* = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}^n \backslash Q_j^*)$, podemos reduzir a estimativa acima substuindo $\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{Q}^*$ por $\mathbb{R}^n \backslash Q_j^*$. Se $x \in \mathbb{R}^n \backslash Q_j^*$ e $y \in Q_j$, então $|x - z_j| > 2|y - z_j|$ e portanto, a afirmação segue diretamente da hipótese (b).

Assim, por meio da igualdade (4.7) obtemos

$$
\begin{aligned}
Tb(x) &= \int K(x-y)b(y)dy \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} K(x-y)b_j(y)dy \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} [K(x-y) - K(x-z_j)]b_j(y)dy + K(x-z_j) \underbrace{\int_{Q_j} b_j(y)dy}_{=0} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} [K(x-y) - K(x-z_j)]b_j(y)dy.
\end{aligned}
$$

Logo, da Afirmação 4.1.4 e da estimativa anterior obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{Q}^*} |Tb(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{Q}^*} \left| \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} [K(x-y) - K(x-z_j)]b_j(y)dy \right| dx \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{Q}^*} \int_{Q_j} |K(x-y) - K(x-z_j)| \, |b_j(y)|dydx \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} |b_j(y)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{Q}^*} |K(x-y) - K(x-z_j)|dx}_{<\infty} dy \\
&\leqslant C \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} |b_j(y)|dy \\
&= 2C \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} |f(y)|dy \\
&= 2C \int_{\mathcal{Q}} |f(y)|dy \\
&\leqslant C\|f\|_1.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
|A_2| \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{Q}^*} |Tb(x)|dx \leqslant \frac{2C}{\lambda} \|f\|_1,
$$

concluindo a demonstração do teorema.

$\square$

Voltando para o exemplo do multiplicador, estamos interessados em exibir condições sobre $m(\xi)$ para que o núcleo associado a m satisfaça hipóteses como em (i) e (iii). Desta forma, seremos capazes de utilizar o Teorema 4.1.1 para concluir a continuidade em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para operadores do tipo multiplicadores.

Proposição 4.1.2. *Seja m um multiplicador. Então*

(a) Se $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ e existe $A_\alpha > 0$ tal que $\left|\partial_\xi^\alpha m(\xi)\right| \leqslant A_\alpha|\xi|^{-|\alpha|}$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, então $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ e satisfaz

$$|\partial_x^\alpha K(x)| \leqslant A_\alpha|x|^{-n-|\alpha|},$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

(b) Se $m \in C^\ell(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ satisfaz as condições anteriores para $0 \leqslant |\alpha| \leqslant \ell$ e $\lfloor \ell \rfloor > \frac{n}{2}$, então $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ e

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx \leqslant A,$$

para todo $y \neq 0$.

Demonstração. Seja $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\eta(\xi) = 1$ se $|\xi| \leqslant 1$ e $\eta(\xi) = 0$ se $|\xi| \geqslant 2$. Adicionalmente defina $\delta(\xi) = \eta(\xi) - \eta(2\xi)$. Desta forma, obtemos que

$$1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(2^{-j}\xi), \text{ para } \xi \neq 0. \tag{4.8}$$

Note que por construção $supp(\delta) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$ e portanto $supp\{\delta(2^{-j}\cdot)\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\}$. Para verificar a validade da igualdade (4.8), basta observar que

$$\sum_{j=\ell'}^{\ell} \delta(2^{-j}\xi) = -\eta(2^{-\ell'+1}\xi) + \eta(2^{-\ell}\xi).$$

Tomando $\ell' \to -\infty$ e $\ell \to \infty$ segue que $\eta(2^{-\ell'+1}\xi) \to 0$ e $\eta(2^{-\ell}\xi) \to 1$.

Desta forma, por meio da identidade (4.8) podemos reescrever $m(\xi)$ como uma soma de multiplicadores suportados em anéis da seguinte forma

$$m(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} m(\xi)\delta(2^{-j}\xi) \doteq \sum_{j=-\infty}^{\infty} m_j(\xi).$$

Vimos que para cada multiplicador $m(\xi)$, existe um núcleo associado definido por

$$K(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} m(\xi)d\xi.$$

De forma análoga, defina para cada $m_j(\xi)$ o núcleo

$$K_j(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} m_j(\xi) d\xi.$$

Note que, como $\sum_j K_j \to K$ no sentido das distribuições, é suficiente mostrar que (a) e (b) são válidas para $\sum_j K_j$.

(a) Mostremos que para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\sum_j |\partial_x^\alpha K_j(x)| \leqslant A_\alpha \ |x|^{-n-|\alpha|}.$$

Note inicialmente que para j fixo e $M \geqslant 0$ inteiro vale a estimativa

$$|\partial_x^\alpha K_j(x)| \leqslant A_{M,\alpha,n} |x|^{-M} \ 2^{j(n-M+|\alpha|)}. \tag{4.9}$$

De fato, considere $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\beta| = M$. Assim

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha K_j(x) &= C \int \xi^\alpha \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} m_j(\xi) d\xi \\ &\simeq \frac{C}{x^\beta} \int \partial_\xi^\beta (\mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}) \xi^\alpha m_j(\xi) d\xi \\ &\simeq \frac{C}{x^\beta} \int \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} \partial_\xi^\beta (\xi^\alpha m_j)(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Da fórmula de Leibniz obtemos que

$$\begin{aligned} \partial_\xi^\beta (\xi^\alpha m_j)(\xi) &= \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_\xi^{\beta-\gamma} (\xi^\alpha) \partial_\xi^\gamma m_j(\xi) \\ &= \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \binom{\alpha}{\beta-\gamma} (\beta-\gamma)! \xi^{\alpha-\beta+\gamma} \partial_\xi^\gamma m_j(\xi), \end{aligned}$$

e desta forma

$$\begin{aligned} \left| \partial_\xi^\beta (\xi^\alpha m_j)(\xi) \right| &\leqslant C \sum_{\gamma \leqslant \beta} |\xi|^{|\alpha-\beta+\gamma|-|\gamma|} \\ &\leqslant C \ |\xi|^{|\alpha|-M}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Assim, de (4.10) e (4.11) obtemos que

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha K_j(x)| &\leqslant C\ |x|^{-M} \int \left|\partial_\xi^\beta(\xi^\alpha m_j)(\xi)\right| d\xi \\
&\leqslant C\ |x|^{-M} \int_{supp(m_j)} |\xi|^{|\alpha|-M} d\xi \\
&\leqslant C\ |x|^{-M} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} r^{|\alpha|-M+n-1} dr \\
&\lesssim C\ |x|^{-M} 2^{j(n-M+|\alpha|)},
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração da estimativa (4.9).

Assim, através da estimativa (4.9) com $M = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{2^j \leqslant |x|^{-1}} |\partial_x^\alpha K_j(x)| &\lesssim \sum_{2^j \leqslant |x|^{-1}} 2^{j(n+|\alpha|)} \\
&\leqslant A_\alpha\ |x|^{-n-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $M > n + |\alpha|$ obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{2^j > |x|^{-1}} |\partial_x^\alpha K_j(x)| &\lesssim |x|^{-M} \sum_{2^j > |x|^{-1}} 2^{j(n+|\alpha|-M)} \\
&\leqslant A_\alpha\ |x|^{-M} |x|^{-(n+|\alpha|-M)} \\
&= A_\alpha\ |x|^{-n-|\alpha|},
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

(b) Por meio da relação $\widehat{K_j} = m_j$ e da Identidade de Plancherel obtemos para todo $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\int |(ix)^\gamma K_j(x)|^2\, dx = \int \left|\partial_\xi^\gamma m_j(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Assim, se γ é tal que $|\gamma| = M$ vale que

$$\int \left||x|^M K_j(x)\right|^2 dx \leqslant A\ 2^{nj} 2^{-2jM},\ \text{para todo } 0 \leqslant M \leqslant \ell. \tag{4.12}$$

Para mostrarmos (4.12), observemos que

$$\left|\partial_\xi^\gamma m_j(\xi)\right| \leqslant A|\xi|^{-|\gamma|}$$

e desta forma

$$\begin{aligned}\int \left|\partial_\xi^\gamma m_j(\xi)\right|^2 d\xi &\leqslant \int_{supp(m_j)} |\xi|^{-2M} d\xi \\ &\leqslant 2^{-2jM}|supp(m_j)| \\ &\lesssim 2^{-2jM}2^{nj}.\end{aligned}$$

Seja $a > 0$ um número real arbitrário que será escolhido de forma convenientemente. Através da desigualdade de Hölder e da estimativa (4.12) com $M = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leqslant a} |K_j(x)|dx &= \int K_j(x)\chi_{B(0,a)}(x)dx \\ &\leqslant |B(0,a)|^{\frac{1}{2}}\|K_j\|_2 \\ &= |B(0,a)|^{\frac{1}{2}}\left(\int |K_j(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant a^{\frac{n}{2}}2^{\frac{nj}{2}}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

De forma análoga, para $M = \ell$

$$\begin{aligned}\int_{|x|>a} |K_j(x)|dx &= \int_{|x|>a} \frac{|x|^M}{|x|^M}\,|K_j(x)|dx \\ &\leqslant \underbrace{\left(\int \left(|x|^M|K_j(x)|\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{(I)}} \underbrace{\left(\int_{|x|>a}\left(\frac{1}{|x|^M}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{(II)}}.\end{aligned}$$

Por meio da desigualdade (4.12) obtemos que

$$\text{(I)} \leqslant A\; 2^{\frac{nj}{2}}2^{-jM}. \tag{4.14}$$

A estimativa da integral (II) segue da seguinte identificação

$$\int_{|x|>a} |x|^{-2M}dx = |S^{n-1}|\int_a^\infty r^{-2M+n-1}dr,$$

no qual a convergência da integral acima se verifica uma vez que $\frac{n}{2} < M$. Desta forma,

$$\text{(II)} \simeq\; a^{\frac{-2M+n}{2}}. \tag{4.15}$$

Por fim, obtemos

$$\int_{|x|>a} |K_j(x)|dx \lesssim 2^{\frac{nj}{2}} 2^{-jM} a^{\frac{-2M+n}{2}}. \tag{4.16}$$

Tomando $a = 2^{-j}$ para cada j fixado, obtemos de (4.13) e (4.16) que

$$\int |K_j(x)|dx \leqslant C.$$

De forma análoga (veja [22] p. 247) é válida a estimativa

$$\int |\partial_{x_i} K_j(x)|\, dx \leqslant A\ 2^j, \text{ para } i = 1, 2, \cdots, n. \tag{4.17}$$

Da Desigualdade do Valor Médio,

$$|K_j(x-y) - K_j(x)| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\partial_{x_i} K_j(x - ty)|\ |y|,$$

para algum $t \in]0, 1[$. Assim, utilizando a desigualdade (4.17) obtemos

$$\begin{aligned} \int |K_j(x-y) - K_j(x)| &\leqslant |y| \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \int |\partial_{x_i} K_j(x - ty)|\, dx \\ &\leqslant A\ 2^j |y|. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Desta forma, decompondo

$$\sum_j \int_{|x|\geqslant 2|y|} |K_j(x-y) - K_j(x)|dx = \sum_1 + \sum_2, \tag{4.19}$$

no qual $\sum_1$ e $\sum_2$ representam a soma dos índices j tal que $2^j \leqslant |y|^{-1}$ e $2^j > |y|^{-1}$ respectivamente. Assim, através da desigualdade (4.18) e do critério da integral para convergência de séries, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_1 \int_{|x|\geqslant 2|y|} |K_j(x-y) - K_j(x)|dx &\leqslant \sum_1 2^j |y| \\ &= |y| \sum_{j=-\infty}^{\log_2 |y|^{-1}} 2^j \\ &\leqslant |y| \int_{-\infty}^{\log_2 |y|^{-1}} 2^x dx \\ &\leqslant |y| \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_{-\infty}^{\log_2 |y|^{-1}} \\ &= C. \end{aligned}$$

De forma análoga, através das estimativas (4.14) e (4.15) segue que

$$\begin{aligned}\sum_{2}\int_{|x|\geqslant 2|y|}|K_j(x-y)-K_j(x)|dx &\leqslant 2\sum_{2}\int_{|x|\geqslant|y|}K_j(x)dx\\ &\leqslant 2\sum_{2}2^{\frac{nj}{2}}2^{-jM}|y|^{\frac{-2M+n}{2}}\\ &= 2\,|y|^{\frac{+n}{2}-M}\sum_{2}2^{j\left(\frac{n}{2}-M\right)}\\ &\leqslant C,\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do item (b).

$\square$

Observação 4.1.4. *A referência [23] mostra que todo operador linear e limitado $T: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ que comuta com translações pode ser caracterizado por uma integral singular do tipo convolução, isto é, existe uma única $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $T(\varphi) = u * \varphi$, para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Este resultado (veja [23] p. 26) por si só justifica a importância do estudo deste tipo de operador.*

São exemplos de operadores multiplicadores:

Exemplo 4.1.2. *Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ considere o operador*

$$R_jf(x) = c_n \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)dy,$$

no qual $1 \leqslant j \leqslant n$ e $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-(n+1)/2}$.[1] Denominaremos R_jf a transformada de Riesz da função f. É bem conhecido (veja [8] p. 76) que para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vale que

$$\widehat{R_jf}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi).$$

Desta forma $R_jf = K_j * f$, no qual $K_j(y) = p.v\ c_n\dfrac{y_j}{|y|^{n+1}}$.

Exemplo 4.1.3. *Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definimos a transformada de Hilbert o operador*

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy.$$

Desta forma, podemos reescrever o operador na forma (veja [8] p. 51)

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i\ sgn(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

[1] Por não estar nos objetivos deste trabalho, omitiremos a definição e propriedades da função Γ que podem ser consultadas em [10] p. 58.

Observação 4.1.5. *Note que os Exemplos 4.1.2 e 4.1.3 são operadores de Calderón-Zygmund, uma vez que* $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e portanto são limitados em* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

De forma natural, as condições (i), (ii) e (iii) discutidas no início desta seção são estendidas para um núcleo $K(x,y)$ definido em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta$. Suponha que $K(x,y)$ satisfaça alguma das seguintes propriedades:

(i') Existe $C > 0$ tal que $|K(x,y)| \leqslant \dfrac{C}{|x-y|^n}$, $x \neq y$;

(ii') Existem $C > 0$ e $0 < \gamma \leqslant 1$ tais que

$$|K(x,y) - K(x,z)| - |K(y,x) - K(z,x)| \leqslant C\, \frac{|y-z|^\gamma}{|x-z|^{n+\gamma}},$$

se $|x-z| \geqslant 2|y-z|$;

(iii') Existe $C > 0$ tal que

$$\int_{|x-z| \geqslant 2|y-z|} (|K(x,y) - K(x,z)| - |K(y,x) - K(z,x)|)\, dx \leqslant C.$$

De forma análoga podemos demonstrar que a condição (iii)' é mais fraca que (i)' e (ii)'; tal condição é denominada condição de Hörmander.

Seguindo a terminologia de J. Alvarez e M. Milman em [2], definiremos a seguir operadores de Calderón-Zygmund do tipo σ, que é essencialmente uma generalização do operador de Calderón-Zygmund padrão visto anteriormente.

Definição 4.1.1. *Dizemos que* $K(x,y) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \Delta)$ *é um núcleo do tipo* σ *se*

(i) Existe $C > 0$ *tal que* $|K(x,y)| \leqslant \dfrac{C}{|x-y|^n}$, $x \neq y$;

(ii) Existe $C > 0$ *e* $0 < \gamma \leqslant 1$ *tal que*

$$|K(x,y) - K(x,z)| + |K(y,x) - K(z,x)| \leqslant C\, \frac{|y-z|^\gamma}{|x-z|^{n+\frac{\gamma}{\sigma}}},$$

para $|x-z| \geqslant 2|y-z|^\sigma$ *e algum* $0 < \sigma \leqslant 1$.

Note que um núcleo do tipo σ satisfaz a condição de Hörmander (iii'). De fato,

$$\int_{|x-z| \geqslant 2|y-z|^\sigma} (|K(x,y) - K(x,z)| + |K(y,x) - K(z,x)|)\, dx \quad \leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\,|y-z|^{\gamma}\int_{|x-z|\geqslant 2|y-z|^{\sigma}} \frac{1}{|x-z|^{n+\frac{\gamma}{\sigma}}}dx \\
&= C\,|y-z|^{\gamma}\int_{2|y-z|^{\sigma}}^{\infty} r^{-\frac{\gamma}{\sigma}-1}dr \\
&\lesssim C.
\end{aligned}
$$

Observação 4.1.6. *Note que se $\sigma = 1$ obtemos um operador de Calderón-Zygmund padrão.*

Definição 4.1.2. *Dizemos que $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é um operador de Calderón-Zygmund do tipo σ se*

$$Tf(x) \doteq \int K(x,y)f(y)dy,$$

formalmente é

$$\langle Tf, g\rangle = \int\int K(x,y)f(y)g(x)dydx,\ \ f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

e além disso

(i) $K(x,y)$ é um núcleo do tipo σ;

(ii) T pode ser estendido continuamente a um operador em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 4.1.4. *Considere um operador pseudo-diferencial $OpS^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 < \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta < 1$ e $\rho > \delta$. Se $m \leqslant -n(1-\rho)/2$, então o núcleo associado a tais operadores satisfaz*

$$\int_{|x-z|>2|y-z|^{\rho}} \left[|K(x,y)-K(x,z)| + |K(y,x)-K(z,x)|\right] dx \leqslant C$$

e portanto define um operador de Calderón-Zygmund do tipo $0 < \rho \leqslant 1$. Veja referência [1] p. 7.

A seguir apresentaremos os principais resultados que serão objetos de estudo nesta seção e tratam da limitação de operadores de Calderón-Zygmund[2] do tipo σ em $H^p(\mathbb{R}^n)$ para um certo $p_\theta < p \leqslant 1$ e em $L^\infty(\mathbb{R}^n) - BMO$. Apresentaremos inicialmente os resultados e na sequência suas respectivas demonstrações.

Teorema 4.1.2 (Chang e Lee, [7])**.** *Seja $0 < \sigma \leqslant 1$ e suponha que o núcleo K satisfaz as seguintes condições:*

[2]Por simplicidade apresentaremos os teoremas para operadores do tipo convolução. Na próxima seção apresentaremos uma classe especial de operadores com núcleos da forma $K(x,y)$ que são limitados em espaços de Hardy.

(i) $\widehat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\displaystyle\int_{|x|\geqslant\alpha|y|^\sigma} |K(x-y)-K(x)|dx \leqslant C_2\ \alpha^{-\theta}$, *para todo* $\alpha \geqslant 2$ *e algum* $\theta > 0$.

Então o operador $T : H^p(\mathbb{R}^n) \to H^p(\mathbb{R}^n)$ *definido por*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy$$

é limitado para $p_\theta < p \leqslant 1$, *no qual* $0 < p_\theta \leqslant 1$ *é um parâmetro que depende de* θ.

A seguir apresentamos o caso limite quando $p = \infty$.

Teorema 4.1.3. *Seja* $0 < \sigma \leqslant 1$ *e suponha que o núcleo* K *satisfaça as seguintes condições:*

(i) $\widehat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\displaystyle\int_{|x|\geqslant\alpha|y|^\sigma} |K(x-y)-K(x)|dx \leqslant C_2\ \alpha^{-\theta}$, *para todo* $\alpha \geqslant 2$ *e algum* $\theta > 0$.

(iii) *Para* $(1-\sigma)\dfrac{n}{2} \leqslant \beta < \dfrac{n}{2}$, T *é um operador limitado de* L^q *em* L^2, *no qual* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\beta}{n}$

Então o operador $T : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO(\mathbb{R}^n)$ *definido por*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy$$

é limitado.

Observe que no caso anterior é exigido sobre o operador T uma limitação do tipo $L^q(\mathbb{R}^n) - L^2(\mathbb{R}^n)$. Seguindo a nomenclatura de [2], operadores que satisfazem o item (iv) do teorema anterior são denominados fortemente do tipo σ. [3]

4.1.1 Demonstração do Teorema 4.1.2 para $\sigma = 1$

Antes da demonstração do teorema, façamos um comentário sobre a limitação de operadores lineares em espaços de Hardy usando o Teorema de Decomposição Atômica. Marcin Bownik mostrou na referência [4] que em geral não é suficiente verificar que um operador linear é limitado uniformemente sobre H^p-átomos para inferir que a limitação se estende para todo o espaço. Como contraexemplo, ele apresentou um funcional linear definido em um subespaço denso de $H^1(\mathbb{R}^n)$, que embora seja limitado uniformemente sobre todos H^1-átomos, não se estende limitadamente para $H^1(\mathbb{R}^n)$ (veja o Apêndice B).

[3] Note que se $\sigma = 1$ então escolhendo $\beta = 0$ temos que $q = 2$ e desta forma obtemos a hipótese original para operadores de Calderón-Zygmund padrão.

Por outro lado, suponha que $T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ seja um operador linear e contínuo em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Mostremos que se T é uniformemente limitado em H^p-átomos, então T é um operador limitado em $H^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema 3.2.5, existe uma sequência de H^p-átomos $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ coeficientes complexos tais que

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j a_j, \text{ com } \sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p < \infty,$$

no qual a convergência da série que define f acima é dada em $H^p(\mathbb{R}^n)$ e consequentemente em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Como T é um operador linear obtemos que

$$T\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j T a_j.$$

Afirmamos que $\left\{T\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j\right)\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $H^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, suponha sem perda de generalidade que $N \geqslant M$ e assim

$$\begin{aligned}
\left\|T\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j\right) - T\left(\sum_{j=1}^{M} \lambda_j a_j\right)\right\|_{H^p} &= \left\|\sum_{j=M+1}^{N} \lambda_j T a_j\right\|_{H^p} \\
&\leqslant \sum_{j=M+1}^{N} |\lambda_j| \|T a_j\|_{H^p} \\
&\leqslant C\left(\sum_{j=M+1}^{N} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

uma vez que $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^p$ é convergente e portanto as somas parciais definem uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Como $H^p(\mathbb{R}^n)$ é um espaço completo, então existe $g \in H^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$T\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j\right) \to g$$

em $H^p(\mathbb{R}^n)$ quando $N \to \infty$. Da Observação 3.2.3 obtemos que a convergência acima também acontece em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Desta forma, pela continuidade do operador T em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e a unicidade do limite temos que

$$T\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j\right) \to Tf$$

em $H^p(\mathbb{R}^n)$ quando $N \to \infty$. Assim, para N suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ arbitrário

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{H^p} &= \left\|Tf - T\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j\right)\right\|_{H^p} + \left\|T\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j\right)\right\|_{H^p} \\
&\leqslant \varepsilon + \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| \|Ta_j\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leqslant \varepsilon + C\left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \varepsilon + C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

donde segue a limitação do operador em $H^p(\mathbb{R}^n)$ tomando ε tendendo a zero. A observação segue análoga trocando $H^p(\mathbb{R}^n)$ por $h^p(\mathbb{R}^n)$.

Observação 4.1.7.

(i) Os Teoremas 7.8 e 7.9 da referência [11] p. 322-323 garantem que é suficiente provar a limitação uniforme sobre H^p-átomos para concluir que o operador de Calderón-Zygmund é contínuo em $H^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Na próxima seção estaremos interessados em mostrar a continuidade de operadores pseudo-diferenciais $OpS^{-\alpha}_{1,\delta}(\mathbb{R}^n)$ com $\alpha \in [0, n)$ e $0 \leqslant \delta < 1$ em espaços localizáveis de Hardy por meio da limitação uniforme do operador sobre átomos. Para isto, note que $OpS^{-\alpha}_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ são contínuos em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (veja [22] p. 233) e a generalização deste fato para $0 \leqslant \delta < 1$ segue do Lema 1.1 da referência [24] p. 03.

Também será necessário ao longo da demonstração do Teorema 4.1.2 um resultado conhecido por Lema de Kolmogorov[4] enunciado a seguir.

Lema 4.1.2. *Sejam T um operador do tipo fraco $(1,1)$, $0 < p < 1$ e E um conjunto de medida finita. Então existe uma constante $C_p > 0$ tal que*

$$\int_E |Tf(x)|^p dx \leqslant C_p \; |E|^{1-p} \|f\|_1^p.$$

Demonstração. Por meio da Observação 3.1.3 e da desigualdade do tipo fraco $(1,1)$

[4] Veja a referência [8] p. 102

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_E |Tf(x)|^p dx &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x\in E:\ |Tf(x)|>\lambda\}|d\lambda \\
&\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\min\left\{|E|, \frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right\}d\lambda \\
&= p\int_0^{C\|f\|_1/|E|} \lambda^{p-1}|E|d\lambda + C\ \|f\|_1\ p\int_{C\|f\|_1/|E|}^\infty \lambda^{p-2}d\lambda \\
&= C_p\ |E|^{1-p}\|f\|_1.
\end{aligned}$$

□

Conforme observado anteriormente, limitaremos a demonstração do Teorema 4.1.2 para o caso em que $\sigma = 1$ e manteremos a notação $0 < \sigma \leqslant 1$ para posteriormente discutir possíveis extensões da demonstração para $0 < \sigma < 1$.

Demonstração. [Teorema 4.1.2 para $\sigma = 1$]
Pelo que foi discutido anteriormente basta provarmos que o operador é limitado uniformemente sobre átomos para estabelecer a continuidade em $H^p(\mathbb{R}^n)$. Seja $a(x)$ um H^p-átomo suportado na bola $B = B(0,\ell)$. Por simplicidade de notação, considere $A(x) = a * K(x)$ a restrição do operador T sobre H^p-átomos e $A^*(x) = M_\phi A(x) = \sup\limits_{t>0}|(\phi_t * A)(x)|$ o operador maximal associado a A. Nosso objetivo será mostrar que $\|A\|_{H^p}^p$ é uniformemente limitada sobre H^p-átomos, isto é

$$\int |A^*(x)|^p dx = \underbrace{\int_{B^*} |A^*(x)|^p dx}_{\text{(I)}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n\setminus B^*} |A^*(x)|^p dx}_{\text{(II)}} < C, \tag{4.20}$$

no qual $B^* = B(0,4\ell)$ e $C > 0$ é uma constante que independe do átomo considerado.

Para a estimativa de (I), lembre que o operador maximal $A^*(x)$ é majorado pela função maximal de Hardy-Littlewood, que por sua vez é contínua em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e o operador de convolução $A(x)$ é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ (veja Teorema 4.1.1). Assim segue que

$$\|A^*\|_2 \leqslant C\|A\|_2 \leqslant \widetilde{C}\|a\|_2. \tag{4.21}$$

Desta forma, por meio das desigualdades de Hölder e (4.21), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leqslant 4\ell} |A^*(x)|^p dx &= \int \left(|A^*(x)|^p \chi_{B^*}(x)\right) \chi_{B^*}(x)dx \\
&\leqslant \|(A^*)^p \chi_{B^*}\|_{\frac{2}{p}} \|\chi_{B^*}\|_{\frac{2}{2-p}} \\
&= \left(\int_{|x|\leqslant 4\ell} |A^*(x)|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} (4\ell^n)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leqslant C_{n,p}\|A\|_2^p \, (4\ell^n)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leqslant C_{n,p}\|a\|_2^p \, (4\ell^n)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leqslant C_{n,p} \; \ell^{n\left(\frac{p}{2}-1\right)} \; \ell^{n\left(1-\frac{p}{2}\right)} \\
&= C_{n,p}.
\end{aligned}$$

Para a integral (II), observe inicialmente que

$$\begin{aligned}
|\phi_t * A(x)| &= \left|\int \phi_t(x-y)\left(\int K(y-z)a(z)dz\right)dy\right| \\
&= \left|\int \phi_t(x-y)\left(\int a(z)[K(y-z)-K(y)]dz + K(y)\int a(z)dz\right)dy\right| \\
&= \left|\int \phi_t(x-y)\left(\int_{|z|\leqslant \ell} a(z)[K(y-z)-K(y)]dz\right)dy\right| \\
&= \left|\int \phi_t(y)\left(\int_{|z|\leqslant \ell} a(z)[K(x-y-z)-K(x-y)]dz\right)dy\right|.
\end{aligned}$$

Denote

$$J(x-y) = \int_{|z|\leqslant \ell} a(z)[K(x-y-z)-K(x-y)]dz,$$

e assim temos que

$$J(x) = \int_{|z|\leqslant \ell} a(z)[K(x-z)-K(x)]dz.$$

Considere $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \; 2^k\ell \leqslant |x| \leqslant 2^{k+1}\ell\}$ para $k \geqslant 2$ e por meio da hipótese (iii) obtemos que $J \in L^1(B_k)$ para cada k fixo. De fato

$$\begin{aligned}
\int_{B_k} |J(x)|dx &\leqslant \int_{B_k} \int_{|z|\leqslant \ell} |a(z)|\ |K(x-z)-K(x)|dzdx \\
&\leqslant \|a\|_\infty \int_{B_k} \int_{|z|\leqslant \ell} |K(x-z)-K(x)|dzdx \\
&\leqslant \ell^{-n/p} \int_{|z|\leqslant \ell} \int_{2^k\ell\leqslant |x|\leqslant 2^{k+1}\ell} |K(x-z)-K(x)|dxdz \\
&\leqslant \ell^{-n/p} \int_{|z|\leqslant \ell} \int_{|x|\geqslant 2^k\ell} |K(x-z)-K(x)|dxdz \\
&\leqslant \ell^{-n/p} \int_{|z|\leqslant \ell} \int_{|x|\geqslant 2^k|z|^\sigma} |K(x-z)-K(x)|dxdz \\
&\leqslant \ell^{\ n\left(1-\frac{1}{p}\right)} 2^{-k\theta}.
\end{aligned}$$

Note também que

$$\begin{aligned}
A^*(x) &= \sup_{t>0} |\phi_t * A(x)| \\
&= \sup_{t>0} \left| \int \phi_t(y) J(x-y) dy \right| \\
&\leqslant \sup_{t>0} \frac{1}{t^n} \int_{|y|\leqslant t} |J(x-y)|dy \\
&= MJ(x),
\end{aligned}$$

no qual $MJ(x)$ denota o operador maximal de Hardy-Littlewood da função J. Como já voi mostrado no capítulo anterior, o operador maximal de Hardy Littlewood é do tipo fraco $(1,1)$, assim por meio do Lema de Kolmogorov com $J \in L^1(B_k)$ obtemos que

$$\int_{B_k} |MJ(x)|^p dx \leqslant C|B_k|^{1-p} \|J\|^p_{L^1(B_k)}.$$

Desta forma,

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>4\ell} |A^*(x)|^p dx &\leqslant \int_{|x|>4\ell} |M(J)(x)|^p dx \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \int_{B_k} |M(J)(x)|^p dx \\
&\leqslant C \sum_{k=2}^{\infty} |B_k|^{1-p} \|J\|^p_{L^1(B_k)} \\
&\leqslant C \sum_{k=2}^{\infty} (2^k \ell)^{n(1-p)} 2^{-k\theta p} \ell^{n(p-1)} \\
&= C \ell^{n(1-p)+n(p-1)} \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k[p(\theta+n)-n]} \\
&= C \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k[p(\theta+n)-n]}. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Tomando $p > \dfrac{n}{\theta+n} \doteq p_\theta$, a soma (4.22) será convergente e segue a conclusão do Teorema para $\sigma = 1$.

$\square$

Observação 4.1.8.

(i) *Observe que a demonstração anterior para* $0 < \sigma < 1$ *não é válida para o caso de átomos suportados em bolas com* $\ell < 1$. *Mais especificamente, não seria possível aplicar a hipótese (iii) e mostrar que* $J \in L^1(B_k)$ *já que* $|x| > 2|z|$ *não implica que* $|x| > 2|z|^\sigma$*;*

(ii) *Uma possível estratégia seria decompor a integral* (4.20) *de acordo com o raio da bola no qual o átomo está suportado, mas neste caso somente a limitação em* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *do operador* T *não é suficiente para controlar a integral (I) salvo se algum hipótese do tipo* $L^q - L^2$ *for assumida a priori.*

4.1.2 Demonstração do Teorema 4.1.3

Demonstração. [Teorema 4.1.3]

Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e suponha sem perda de generalidade que Q é um cubo qualquer centrado na origem e diâmetro d. Suponha adicionalmente que $d \leqslant 1$. Associado a ele, considere Q^* o cubo centrado na origem cujo diâmetro é igual a $d^* = 27d^\sigma$. Denote $f_1 = f\chi_{Q^*}$, $f_2 = f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*}$ e portanto $f = f_1 + f_2$. Além disso, $Tf(x) = Tf_1(x) + Tf_2(x)$. Mostremos, inicialmente, que a aplicação está bem definida, isto é $Tf(x) \in BMO$, o que é verificado via a caracterização desenvolvida em (3.39). Note inicialmente que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x)-C_Q|dx &= \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)+[Tf_2(x)-C_Q]|dx\\ &\leqslant \underbrace{\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|dx}_{\text{(I)}}\\ &\qquad + \underbrace{\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x)-C_Q|dx}_{\text{(II)}} \end{aligned} \tag{4.23}$$

no qual C_Q denota uma constante que será escolhida de forma conveniente. Vamos inicialmente estimar a integral (I). De acordo com a hipótese (iv) T é um operador contínuo de $L^q(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, o que implica que (consequência do Teorema de Representação de Riesz 1.2.5) T é limitado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$, no qual q' é o conjugado de q. Assim, aplicando a Desigualdade de Hölder obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|dx &= \frac{1}{|Q|}\int |Tf_1(x)|\chi_Q(x)dx\\ &\leqslant |Q|^{\frac{1}{q}-1}\|Tf_1\|_{q'}\\ &\leqslant C\ |Q|^{\frac{1}{q}-1}\|f_1\|_2\\ &= C\ \|f\|_\infty |Q|^{\frac{1}{q}-1}|Q^*|^{\frac{1}{2}}\\ &= C\ \|f\|_\infty |Q|^{\frac{1}{q}+\frac{\sigma}{2}-1}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Note que por hipótese $\frac{1-\sigma}{2} \leqslant \frac{\beta}{2} < \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}+\frac{\beta}{n}$, então $\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{q}-1 = \frac{\beta}{n}+\frac{\sigma-1}{2} = \frac{\beta}{n}-\frac{1-\sigma}{2} \geqslant 0$. Desta forma, como $d \leqslant 1$ obtemos de (4.24)

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|dx \leqslant C\|f\|_\infty d^{\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{q}-1} \leqslant C\ \|f\|_\infty. \tag{4.25}$$

Para estimarmos (II), considere a constante

$$C_Q = Tf_2(0) = \int K(-y)f_2(y)dy,$$

que é finita pois por hipótese $K \in L^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. De fato,

$$\begin{aligned}
\left| \int K(-y) f_2(y) dy \right| &\leqslant \int |K(-y)|\ |f_2(y)| dy \\
&\leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q*} |K(-y)| dy \\
&\leqslant \|f\|_\infty \|K\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Afirmação 4.1.5. *Se $x \in Q$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n \backslash Q*} |K(x-y) - K(-y)| dy \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} |K(x-y) - K(-y)| dy,$$

no qual $A_j = 2^j |x|^\sigma < |y| < 2^{j+1} |x|^\sigma$.

De fato, é suficiente mostrar que se $y \in \mathbb{R}^n \backslash Q^*$, então $|y| > 2|x|^\sigma$. Como $y \in \mathbb{R}^n \backslash Q^*$, então $|y| > \dfrac{27 d^\sigma}{\sqrt{2}}$ e também $|x| < d$, logo $d^\sigma > |x|^\sigma$. Desta forma

$$|y| > \frac{27 d^\sigma}{\sqrt{2}} > \frac{27 |x|^\sigma}{\sqrt{2}} > 2|x|^\sigma.$$

Usando a afirmação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_Q |Tf_2(x) - C_Q| dx &= \int_Q \left| \int f_2(y)[K(x-y) - K(-y)] dy \right| dx \\
&= \int_Q \left| \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q*} f(y)[K(x-y) - K(-y)] dy \right| dx \\
&\leqslant \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q*} |f(y)|\ |K(x-y) - K(-y)| dy dx \\
&\leqslant \|f\|_\infty \int_Q \int_{\mathbb{R}^n \backslash Q*} |K(x-y) - K(-y)| dy dx \\
&\leqslant \|f\|_\infty \int_Q \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} |K(x-y) - K(-y)| dy \right) dx \\
&\leqslant \|f\|_\infty \int_Q \left(\sum_{j=1}^{\infty} C_2 2^{-j\theta} \right) dx \\
&\leqslant C|Q|\ \|f\|_\infty. \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (4.25) e (4.26) em (4.23) obtemos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |T(f)(x) - C_Q| dx \leqslant C \|f\|_\infty < \infty, \qquad (4.27)$$

donde segue $Tf(x) \in BMO$. Uma vez que a norma em BMO é o ínfimo das constantes que limitam o operador maximal definido em (3.37), então é imediato de (4.27) que

$$\|Tf\|_{BMO} \leqslant C\|f\|_\infty,$$

o que conclui a demonstração da limitação do operador T para o caso particular de cubos cujo diâmetro $d \leqslant 1$.

Para o caso em que $d > 1$, a demonstração é análoga e será apenas esboçada. Considere Q^* o cubo centrado na origem e diâmetro $d^* = 27d$, f_1 e f_2 como anteriormente. A diferença é que agora usaremos a estimativa em $L^2(\mathbb{R}^n)$ de f_1 ao invés da hipótese (iv). Note que,

$$\begin{aligned} \int |f_1(x)|^2 dx &= \int |f(x)\chi_{Q^*}(x)|^2 dx \\ &= \int |f(x)|^2 \chi_{Q^*}(x) dx \\ &\leqslant \|f\|_\infty^2 |Q^*|. \end{aligned}$$

Por meio da hipótese (ii) obtemos que T limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$. De fato, para $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, temos que $\widehat{Tf} = \widehat{K * f} = \widehat{K}\ \widehat{f}$. Assim, pela identidade de Plancherel (1.10),

$$\begin{aligned} \|Tf\|_2 &= \|\widehat{K}\|_2 \|\widehat{f}\|_2 \\ &\leqslant C\|\widehat{f}\|_2 \\ &= C\|f\|_2. \end{aligned}$$

Como $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ segue que T é forte $(2,2)$. Desta forma,

$$\|Tf_1\|_2^2 \leqslant C\|f_1\|_2^2 \leqslant C\|f\|_\infty^2 |Q^*| \leqslant C\|f\|_\infty^2 |Q|.$$

A estimativa da integral (II) segue de forma análoga.

□

4.2 Operadores Pseudo-Diferenciais em $h^p(\mathbb{R}^n)$

O estudo da continuidade de operadores pseudo-diferenciais em $h^p(\mathbb{R}^n)$ para $0 < p \leqslant 1$ iniciou-se em 1979 por D. Goldberg, na referência [12], para operadores na classe $OpS^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)$. M. Taylor estabeleceu no ano 2000 (ver [25]) a continuidade de operadores $OpS^0_{1,\delta}(\mathbb{R}^n)$ em $h^1(\mathbb{R}^n)$ para $0 \leqslant \delta < 1$, que em 2009 foi generalizado para $h^p(\mathbb{R}^n)$ $0 < p \leqslant 1$ por R. Kapp e J. Hounie em [18].

Nosso objetivo nesta seção será mostrar que a classe de operadores pseudo-diferenciais $OpS^{-\alpha}_{1,\delta}(\mathbb{R}^n)$, no qual $\alpha \in [0,n)$ são contínuos de $h^p(\mathbb{R}^n)$ em $h^{p^*_\alpha}(\mathbb{R}^n)$ no qual $\alpha = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)$ para $0 < p \leqslant 1$. Este resultado foi provado por G. Hoepfner, R. Kapp e T. Picon na referência [15] e generaliza os resultados anteriores.

Para tal finalidade, será necessário um resultado prévio que aborda a limitação de tais operadores nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$, que será enunciado a seguir e cuja demonstração será omitida e apenas citada para consulta.

Teorema 4.2.1. *Sejam $b(x,D) \in OpS^{-\alpha}_{1,\delta}(\mathbb{R}^n)$, com $0 \leqslant \delta < 1$ e $1 < p \leqslant q < \infty$. Então $b(x,D)$ é do tipo forte (p,q) quando*

$$\alpha \geqslant n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right).$$

Demonstração. Ver [1], p. 13.

O resultado principal desta seção é enunciado a seguir.

Teorema 4.2.2. *Sejam $0 < p \leqslant 1$, $\alpha \in [0,n)$ e p^*_α tal que $\alpha = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_\alpha}\right)$. Então $b(x,D) \in OpS^{-\alpha}_{1,\delta}(\mathbb{R}^n)$ para $0 \leqslant \delta < 1$ é um operador contínuo de $h^p(\mathbb{R}^n)$ em $h^{p^*_\alpha}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Considere inicialmente $\alpha \in (0,n)$ e escolha $r \in (1,\infty)$ de modo que

$$\frac{1}{r^*_\alpha} = \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Sejam $a(x)$ um h^p-átomo suportado no cubo $Q = Q(0,\ell)$ e denote por $Q^* = Q(0,2\ell)$. Para simplificar a notação, denote

$$Ta \doteq b(x,D)a = (2\pi)^{-n/2}\int e^{i\langle x,\xi\rangle} b(x,\xi)\widehat{a}(\xi)d\xi.$$

Nosso objetivo será mostrar que $\|m_\phi Ta\|_{p^*_\alpha} \leqslant C$ independente do átomo considerado. Para isso considere

$$\int_{\mathbb{R}^n} |m_\phi Ta(x)|^{p^*_\alpha}dx = \underbrace{\int_{Q^*} |m_\phi Ta(x)|^{p^*_\alpha}dx}_{\text{(I)}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q^*} |m_\phi Ta(x)|^{p^*_\alpha}dx}_{\text{(II)}}$$

Note inicialmente que:

(i) $T : L^r(\mathbb{R}^n) \to L^{r^*_\alpha}(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação contínua pelo Teorema 4.2.1;

(ii) $m_\phi f(x) \leqslant M_\phi f(x) \leqslant C_\phi Mf(x)$ q.t.p em $x \in \mathbb{R}^n$, no qual Mf denota o operador maximal de Hardy-Littlewood;

(iii) $Mf(x)$ é contínua em $L^s(\mathbb{R}^n)$ para $1 < s \leqslant \infty$ pelo Teorema 3.1.2.

Considere $\gamma = r_\alpha^*/p_\alpha^*$ e note que $\gamma > 1$ pois

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} > \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{n} \Rightarrow \frac{1}{p_\alpha^*} > \frac{1}{r_\alpha^*}.$$

Por meio das observações anteriores, da Desigualdade de Hölder e da definição de um h^p-átomo obtemos para (I) a estimativa

$$\begin{aligned}
\int_{Q^*} |m_\phi Ta(x)|^{p_\alpha^*} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |m_\phi Ta(x)|^{p_\alpha^*} \chi_{Q^*}(x) dx \\
&\leqslant \| (m_\phi Ta)^{p_\alpha^*} \|_\gamma \, \|\chi_{Q^*}\|_{\gamma/(\gamma-1)} \\
&= \left(\int |m_\phi Ta(x)|^{p_\alpha^* \gamma} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int \chi_{Q^*}(x) dx \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \\
&= \left(\int |m_\phi Ta(x)|^{r_\alpha^*} dx \right)^{\frac{p_\alpha^*}{r_\alpha^*}} |Q^*|^{1-\frac{1}{\gamma}} \\
&= \|m_\phi Ta\|_{r_\alpha^*}^{p_\alpha^*} \, |Q^*|^{1-\frac{1}{\gamma}} \\
&\leqslant \|M(Ta)\|_{r_\alpha^*}^{p_\alpha^*} \, |Q^*|^{1-\frac{1}{\gamma}} \\
&\leqslant C\|Ta\|_{r_\alpha^*}^{p_\alpha^*} \, |Q^*|^{1-\frac{1}{\gamma}} \\
&\leqslant C\|a\|_{r}^{p_\alpha^*} \, |Q^*|^{1-\frac{1}{\gamma}} \\
&\leqslant C\|a\|_{\infty}^{p_\alpha^*} \, |Q|^{\frac{p_\alpha^*}{r}} \, |Q^*|^{1-\frac{1}{\gamma}} \\
&\leqslant C|Q|^{\frac{-p_\alpha^*}{p}} \, |Q|^{\frac{p_\alpha^*}{r}} \, |Q^*|^{1-\frac{1}{\gamma}} \\
&= C_{n,p},
\end{aligned}$$

no qual $C_{n,p}$ é uma constante que independe do átomo. Para o caso em que $\alpha = 0$ a mesma ideia se aplica considerando $\gamma = 2/p_\alpha^* > 1$ e omitiremos as manipulações algébricas pois são análogas as anteriores.

Para a estimativa da integral (II), considere inicialmente uma importante observação.

Observação 4.2.1. *Sejam $\alpha \geqslant 0$ e $b(x,D) \in OpS_{1,\delta}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ com símbolo $b(x,\xi) \in S_{1,\delta}^{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Pela Proposição 4.2.1, $b(x,D)$ é um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Para cada $0 < t \leqslant 1$, denote por $b^t(x,D)$ o operador*

$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mapsto \phi_t * b(x,D)f, \;\; \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}_t(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \phi_t(x)dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x}{t}\right) dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\langle y,t\xi\rangle} \phi(y)dy \\
&= \widehat{\phi}(t\xi),
\end{aligned}$$

utilizando a fórmula de inversão da transformada de Fourier obtemos que

$$\begin{aligned}
\phi_t * f(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \left(\widehat{\phi_t * f}\right)(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \widehat{\phi}_t(\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \widehat{\phi}(t\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Note que $\widehat{\phi}(t\xi) \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)$, pois como $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
\left|D^\beta \widehat{\phi}(t\xi)\right| &= t^{|\beta|} \left|(D^\beta \widehat{\phi})(t\xi)\right| \\
&\leqslant Ct^{|\beta|}(1 + |t\xi|)^{-|\beta|} \\
&\leqslant Ct^{|\beta|}(t + |t\xi|)^{-|\beta|} \\
&= C(1 + |\xi|)^{-|\beta|}.
\end{aligned}$$

Assim, $\phi_t * f \in OpS^0_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ com símbolo $\widehat{\phi}(t\xi)$ para $0 < t \leqslant 1$ e portanto $b^t(x,D)$ é obtido compondo à esquerda o operador $f \mapsto \phi_t * f$ com $b(x,D)$. Pelo Teorema de Composição de Operadores Pseudo-Diferenciais obtemos que $b^t(x,D) \in OpS^{-\alpha}_{1,\delta}$.

Considere

$$I_2^t = \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q*} |b^t(x,D)a|^{p^*_\alpha} dx.$$

Nosso objetivo será mostrar que $I_2^t \leqslant C$ uniformemente em t e independente do h^p-átomo escolhido. A estimativa de (II) segue deste caso, uma vez que

$$|b^t(x,D)a| = |\phi_t * b(x,D)a| \leqslant \sup_{0<t\leqslant 1} |\phi_t * b(x,D)a| = m_\phi b(x,D)a. \tag{4.28}$$

Dividiremos o restante da demonstração em dois casos. Suponha inicialmente que o átomo $a(x)$ está suportado em um cubo de lado $\ell \leqslant 1$ e portanto satisfaz a condição de momento da Definição 3.3.2. Seja $b^t(x,D)$ o operador descrito na Observação 4.2.1 e denote por $K^t(x,\cdot)$ o núcleo associado a ele. Desta forma, por meio da condição de momento nula do átomo, podemos reescrever o operador na forma

$$\begin{aligned} b^t(x,D)a &= \int_Q K^t(x,y)a(y)dy \\ &= \int_Q \left(K^t(x,y) - \sum_{|\gamma|\leqslant N_p} D_y^\gamma K^t(x,0)\frac{y^\gamma}{\gamma!} \right) a(y)dy \\ &\doteq \int_Q R^t(x,y)a(y)dy, \end{aligned} \tag{4.29}$$

no qual $R^t(x,y)$ denota o resto do polinômio de Taylor centrado na origem. Utilizando a fórmula do resto de Lagrange do polinômio de Taylor, obtemos

$$R^t(x,y) = \sum_{|\gamma|=N_p+1} D_y^\gamma K^t(x,\theta_y)\frac{y^\gamma}{\gamma!},$$

no qual $\theta_y \in B(0,y)$. Assim,

$$\begin{aligned} \left|R^t(x,y)\right| &= \left| \sum_{|\gamma|=N_p+1} D_y^\gamma K^t(x,\theta_y)\frac{y^\gamma}{\gamma!} \right| \\ &\leqslant \sum_{|\gamma|=N_p+1} \left|D_y^\gamma K^t(x,\theta_y)\right| \frac{|y|^{|\gamma|}}{\gamma!} \\ &= C\;|y|^{N_p+1} \sum_{|\gamma|=N_p+1} \left|D_y^\gamma K^t(x,\theta_y)\right| \\ &\leqslant C\ell^{N_p+1} \sum_{|\gamma|=N_p+1} \left|D_y^\gamma K^t(x,\theta_y)\right|. \end{aligned}$$

Usando a estimativa (2.13) com $M = |\beta| = N_p + 1$, $m = -\alpha$, $\rho = 1$ e o fato de que $|x-\theta_y| \leqslant C\;|x-y|$ para $y \in Q$, $x \notin Q^*$ e θ_y na bola que circunscreve o cubo Q obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{y\in Q}\left|R^t(x,y)\right| &\leqslant C\ell^{N_p+1} \sum_{|\gamma|=N_p+1} \sup_{y\in Q}\left|D_y^\gamma K^t(x,\theta_y)\right| \\ &\leqslant C\ell^{N_p+1}|x-\theta_y|^{-(N_p+1-\alpha+n)} \\ &\leqslant C\ell^{N_p+1}|x-y|^{-(N_p+1-\alpha+n)}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \left|b^t(x,D)a\right| &\leqslant \int_Q \sup_{y\in Q}|R^t(x,y)|\;|a(y)|dy \\ &\leqslant C\ell^{N_p+1}|Q|^{1-\frac{1}{p}}|x-y|^{-(N_p+1-\alpha+n)}, \end{aligned}$$

e
$$I_2^t \leqslant C\ell^{(N_p+1)p_\alpha^*}|Q|^{\left(1-\frac{1}{p}\right)p_\alpha^*}\int_{\mathbb{R}^n\backslash Q^*}|x-y|^{-(N_p+1-\alpha+n)p_\alpha^*}dx. \tag{4.30}$$

Uma vez que $N_p > n(1/p-1)-1$, então

$$\begin{aligned} N_p+n-\alpha+1 &> \frac{n}{p}-\alpha \\ &= n\left(\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}\right) \\ &= \frac{n}{p_\alpha^*}. \end{aligned}$$

Desta forma
$$-(N_p+1-\alpha+n)p_\alpha^*+n-1 < -\frac{n}{p_\alpha^*}p_\alpha^*+n-1<0$$

e portanto a integral dada em (4.30) converge. Da Proposição 1.2.7, obtemos

$$\begin{aligned} I_2^t &\leqslant C\ |Q|^{\left(1-\frac{1}{p}\right)p_\alpha^*}\ell^{(N_p+1)p_\alpha^*}\ell^{-(N_p+1-\alpha+n)p_\alpha^*+n} \\ &= C\ \ell^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)p_\alpha^*+(N_p+1)p_\alpha^*-(N_p+1-\alpha+n)p_\alpha^*+n} \\ &= C_{n,p}. \end{aligned}$$

Portanto, mostramos que $I_2^t \leqslant C_{n,p}$ uniformemente em $0<t\leqslant 1$ e independente da escolha do átomo, o que completa a demonstração do caso $\ell \leqslant 1$.

Por fim, suponha que o átomo $a(x)$ esteja suportando em um cubo Q centrado em x_0 e lado $\ell > 1$. Neste caso $|a(x)| \leqslant |Q|^{-1/p}$ e portanto $\|a\|_\infty \leqslant 1$. Para $x \in \mathbb{R}^n\backslash Q^*$ e $y \in Q$, temos que $|x-y| \sim |x-x_0|$ e $|x-y| \geqslant \ell/2 \geqslant 1/2$. Aplicando a Proposição 2.12 para $\alpha=\beta=0$, $m=0$, $\rho=1$ e $L>\max\{n/p_\alpha^*, L_0\}$, obtemos

$$\begin{aligned} |b^t(x,D)a| &= \left|\int_Q |x-y|^L K^t(x,y)\frac{a(y)}{|x-y|^L}dy\right| \\ &\leqslant \frac{C}{|x-x_0|^L}\int_Q |a(y)|dy \\ &\leqslant \frac{C}{|x-x_0|^L}|Q|^{1-\frac{1}{p}},\ x\in\mathbb{R}^n\backslash Q^*, \end{aligned}$$

uniformemente em $0<t\leqslant 1$. Assim, da desigualdade (4.28),

$$m_\phi Ta(x) \leqslant \frac{C}{|x-x_0|^L}|Q|^{1-\frac{1}{p}},\ x\in\mathbb{R}^n\backslash Q^*.$$

Desta forma,

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q*} |m_\phi Ta(x)|^{p_\alpha^*} dx \leqslant C|Q|^{(1-\frac{1}{p})p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q*} |x-x_0|^{-Lp_\alpha^*} dx.$$

Como $L > n/p_\alpha^*$, temos que $-(Lp_\alpha^*) + n - 1 < 0$ e portanto

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q*} |m_\phi Ta(x)|^{p_\alpha^*} dx &\leqslant C|Q|^{(1-\frac{1}{p})p_\alpha^*} \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q*} |x-x_0|^{-Lp_\alpha^*} dx \\
&= C\ |Q|^{(1-\frac{1}{p})p_\alpha^*} \int_{2\ell}^{\infty} r^{-Lp_\alpha^*+n-1} dr \\
&\leqslant C\ \ell^{n(1-\frac{1}{p})p_\alpha^* - Lp_\alpha^* + n} \\
&\leqslant C_{n,p},
\end{aligned}$$

no qual a última passagem se justifica pois $L > n/p_\alpha^*$ implica que

$$\begin{aligned}
n\left(1-\frac{1}{p}\right)p_\alpha^* - Lp_\alpha^* + n &< \underbrace{np_\alpha^*}_{>0} \underbrace{\left(1-\frac{1}{p}\right)}_{<0} \\
&< 0
\end{aligned}$$

e $l \geqslant 1$.

$\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

O contraexemplo de M. Bownik

Neste apêndice mostraremos a existência de um funcional linear definido em um subespaço denso de $H^1(\mathbb{R}^n)$ que embora seja limitado sobre todos os H^1-átomos, não pode ser estendido de forma contínua a $H^1(\mathbb{R}^n)$. A construção baseia-se na referência [4].

Seja $\Theta^k(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as combinações lineares finitas de funções $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que:

(i) $supp(f) \subset B(x_0, r)$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$;

(ii) $\|f\|_\infty \leqslant |B(x_0, r)|^{-1/p}$;

(iii) $\displaystyle\int x^\alpha f(x)dx = 0$ para todo $|\alpha| \leqslant k$.

Note que se $0 < p \leqslant 1$ e $k \geqslant \lfloor n(p^{-1} - 1) \rfloor$, então $\Theta^k(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de combinações lineares finitas de H^p-átomos e do Corolário 3.2.1 é um subespaço denso de $H^p(\mathbb{R}^n)$. Considere sobre $\Theta^k(\mathbb{R}^n)$, como subespaço de $H^p(\mathbb{R}^n)$, as seguintes quasi-normas referentes a decomposições atômicas infinitas e finitas

$$\|f\|_{H^p,\infty} \doteq \inf \left\{ \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} : \ f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j; \ a_j \text{ é um } H^p - \text{átomo} \right\}$$

e

$$\|f\|_{H^p,<\infty} \doteq \inf \left\{ \left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} : \ f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j; \ a_j \text{ é um } H^p - \text{átomo e } N \in \mathbb{N} \right\},$$

no qual o ínfimo é tomado sobre todas as decomposições atômicas. Do Teorema de

Decomposição Atômica, se $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ temos que $\|f\|_{H^p}$ é comparável a $\|f\|_{H^p,\infty}$ e consequentemente também é válido para toda $f \in \Theta^k(\mathbb{R}^n)$ com $k \geqslant \lfloor n(p^{-1}-1)\rfloor$.

O resultado principal deste apêndice baseia-se na construção do resultado abaixo, devido a Y. Meyer, no qual afirma que a observação anterior não permanece válida se substituirmos a quasi-norma $\|\cdot\|_{H^p,\infty}$ por $\|\cdot\|_{H^p,<\infty}$.

Lema A.0.1. *Suponha que $0 < p \leqslant 1$ e $k \geqslant \lfloor n(p^{-1}-1)\rfloor$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe $f \in \Theta^k(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\|f\|_{H^p,\infty} < \varepsilon \ \textit{e} \ \|f\|_{H^p,<\infty} = 1.$$

Demonstração. Ver [4] p. 3537.

Também será necessário um resultado de Análise Funcional relacionado a extensão de funcionais lineares, conhecido por Teorema de Hahn-Banach.

Teorema A.0.1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $p : E \to \mathbb{R}$ um função que satisfaça*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x), \ \forall \ x \in E \ \textit{e} \ \lambda > 0 \\ p(x+y) &\leqslant p(x) + p(y), \ \forall \ x, \ y \in E. \end{aligned}$$

Considere também $G \subset E$ um subespaço vetorial e $g : G \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

$$g(x) \leqslant p(x), \ \forall \ x \in G.$$

Então, existe um funcional linear f definido em E que estende g, isto é $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$ e também

$$f(x) \leqslant p(x), \ \forall \ x \in E.$$

Demonstração. Ver [5] p. 01.

Teorema A.0.2. *Existe um funcional linear Γ definido em $\Theta^0(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$|\Gamma(f)| \leqslant \|f\|_{H^1,<\infty}, \ \forall \ f \in \Theta^0(\mathbb{R}^n)$$

o qual não admite extensão a um funcional linear contínuo em $H^1(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\sup_{f \in \Theta^0(\mathbb{R}^n)} \frac{|\Gamma(f)|}{\|f\|_{H^1,\infty}} = \infty.$$

Em particular, Γ é uniformemente limitado sobre todos os H^1-átomos, isto é, se a é um H^1-átomo qualquer, então

$$\Gamma(a) \leqslant 1.$$

Demonstração. Seja $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ uma sequência qualquer tal que $B(x_i,1) \cap B(x_j,1) = \varnothing$ para todo $i \neq j$. Do Lema A.0.1, para cada $j \in \mathbb{N}$ considere $a_j \in \Theta^0(\mathbb{R}^n)$ suportado na bola $B(x_j,1)$ que satisfaz

$$\|a_j\|_{H^1,\infty} < \frac{1}{j} \text{ e } \|a_j\|_{H^1,<\infty} = 1.$$

Como consequência da demonstração do Lema A.0.1, para cada bola $B(x_j,1)$ é possível considerar uma coleção de bolas disjuntas $\{B_k^j\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B(x_j,1)$ tal que $U_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k^j$ é denso em $B(x_j,1)$ e $|U_j| = \sum_{k\in\mathbb{N}} |B_k^j| < c\varepsilon^p$. Além disso os átomos satisfazem o seguinte controle q.t.p para $x \in B(x_j,1)$

$$|a_j(x)| \geqslant \frac{c}{|B(0,1)|} > 0 \tag{A.1}$$

e em particular para $x \in U_j$ no qual c é uma constante independente de $j \in \mathbb{N}$.

Considere

$$V = \operatorname{span}\{a_j(x) : \ j \in \mathbb{N}\} \subset \Theta^0(\mathbb{R}^n).$$

Desta forma, se $f \in V$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f = \sum_{j=1}^{N} c_j a_j$$

e para tal f temos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^1,<\infty} &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j| : \ f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j a_j\right\} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{N} |c_j|. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Por outro lado, suponha que f possa ser representada por uma outra decomposição atômica finita e sem perda de generalidade escreva

$$f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j b_j,$$

no qual cada b_j é um H^1-átomo suportado na bola $B_j \doteq B(x_j,1)$. Assim, da desigualdade (A.1) e de propriedades de átomo b_j obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{c}{|B(0,1)|}\sum_{j=1}^{N}|c_j|\chi_{U_j}(x) &\leqslant \sum_{j=1}^{N}|c_j|\ |a_j(x)|\chi_{U_j}(x)\\
&= |f(x)|\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|\ |b_j(x)|\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|\ \|b_j\|_\infty \chi_{B_j}(x)dx\\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|\ |B_j|^{-1}\chi_{B_j}(x)\\
&\doteq g(x).
\end{aligned}$$

Pelo fato de g ser uma função contínua q.t.p, exceto possivelmente na família $\bigcup_{j=1}^{M}\partial B_j$, e U_j ser denso em $B(x_j,1)$, temos que

$$g(x) \geqslant \frac{c}{|B(0,1)|}\sum_{j=1}^{N}|c_j|\chi_{B(x_j,1)}(x) \text{ q.t.p } x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, integrando a expressão anterior obtemos que

$$\int g(x)dx \geqslant \frac{c}{|B(0,1)|}\int \sum_{j=1}^{N}|c_j|\chi_{B(x_j,1)}(x)dx = c\sum_{j=1}^{N}|c_j|,$$

e desta forma

$$c\sum_{j=1}^{N}|c_j| \leqslant \int g(x)dx = \int \sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|\ |B_j|^{-1}\chi_{B_j}(x)dx = \sum_{j=1}^{N}|\lambda_j|. \tag{A.3}$$

Combinando as desigualdades (A.2) e (A.3) obtemos

$$c\sum_{j=1}^{N}|c_j| \leqslant \sum_{j=1}^{N}|\lambda_j| \leqslant \|f\|_{H^1,<\infty} \leqslant \sum_{j=1}^{N}|c_j|. \tag{A.4}$$

Defina em V o funcional linear dado por

$$L(f) \doteq \sum_{j=1}^{N} c_j, \text{ no qual } f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j a_j(x) \in V.$$

Das desigualdades (A.4) temos que

$$|L(f)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |c_j| \leqslant \|f\|_{H^1,<\infty},$$

isto é, o funcional L é limitado em um subespaço V de $\Theta^0(\mathbb{R}^n)$ equipado com a norma $\|\cdot\|_{H^1,<\infty}$ e $\|L\| \leqslant 1$. Pelo Teorema de Hanh-Banach, L possui uma extensão a um funcional linear em $\Theta^0(\mathbb{R}^n)$, denotado por Γ, tal que

$$|\Gamma(f)| \leqslant \|f\|_{H^1,<\infty}.$$

Como $|\Gamma(a_j)| \leqslant \|a_j\|_{H^1,\infty} < 1/j$, segue que

$$\frac{|\Gamma(a_j)|}{\|a_j\|_{H^1,\infty}} > j, \ \forall \ j \in \mathbb{N},$$

donde segue que Γ não é contínuo em $\Theta^0(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Apêndice
$\mathcal{B}$

Decomposição de Calderón-Zygmund

Nosso objetivo neste apêndice será apresentar o Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund, ferramenta importante para o estudo da limitação de operadores integrais singulares nos espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Todo o desenvolvimento deste apêndice pode ser consultado na referência [8].

Definição B.0.1. *Para cada $k \in \mathbb{Z}$ e $z \in \mathbb{Z}^n$ considere a família $\mathcal{Q}_k \doteq \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} Q_{k,\ell}$, no qual $Q_{k,\ell} \subset \mathbb{R}^n$ representa o cubo semiaberto a direita com vértice em $\left(\frac{1}{2^k} z\right)$. Cada cubo $Q_{k,\ell}$ é denominado cubo diádico.*

Diretamente da definição anterior verifica-se as seguintes propriedades sobre os cubos diádicos:

(i) Fixado uma família $\mathcal{Q}_k$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe um único cubo $Q_{k,\ell_0} \in \mathcal{Q}_k$ tal que $x \in Q_{k,\ell_0}$ e além disso $Q_{k,\ell_0} \cap Q_{k,\ell_1} = \varnothing$ para todo $\ell_0 \neq \ell_1$;

(ii) Sejam $Q_{k_1,\ell_1} \in \mathcal{Q}_{k_1}$ e $Q_{k_2,\ell_2} \in \mathcal{Q}_{k_2}$. Então $Q_{k_1,\ell_1} \cap Q_{k_2,\ell_2} = \varnothing$ ou $Q_{k_1,\ell_1} \subset Q_{k_2,\ell_2}$ (ou $Q_{k_2,\ell_2} \subset Q_{k_1,\ell_1}$), isto é, dados dois cubos diádicos quaisquer, eles serão disjuntos ou certamente um estará estritamente contido no outro;

(iii) Um cubo diádico $Q_{k,\ell_0} \in \mathcal{Q}_k$ está contido em um único cubo diádico $Q_{j,\ell_1} \in \mathcal{Q}_j$ para cada $j < k$ e $\mathcal{Q}_k$ contém 2^n cubos diádicos da família $\mathcal{Q}_{k+1}$.

Definição B.0.2. *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos a esperança condicional de f com relação a família de cubos diádicos $\mathcal{Q}_k$ por*

$$E_k f(x) \doteq \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx \right) \chi_Q(x). \tag{B.1}$$

Observação B.0.1. *Note que a soma da expressão* (B.1) *está bem definida uma vez que para cada* $x \in \mathbb{R}^n$ *existe apenas um cubo diádico da família* $\mathcal{Q}_k$ *que o contém.*

Proposição B.0.1. *Se* $\Omega = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} Q_{k,\ell}$ *e* $f \in L^1(\Omega)$ *então*

$$\int_\Omega E_k f(x)dx = \int_\Omega f(x)dx.$$

Demonstração. Como os cubos de uma mesma família são disjuntos e da Proposição 1.2.1 obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega E_k f(x)dx &= \int E_k f(x)\chi_\Omega(x)dx \\
&= \int E_k f(x) \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \chi_{Q_{k,\ell}}(x)dx \\
&= \int \sum_{\ell \in \mathbb{N}} E_k f(x)\chi_{Q_{k,\ell}}(x)dx \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int E_k f(x)\chi_{Q_{k,\ell}}(x)dx \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int \left(\frac{1}{|Q_{k,\ell}|} \int_{Q_{k,\ell}} f(y)dy \right) \chi_{Q_{k,\ell}}(x)dx \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{|Q_{k,\ell}|} \int_{Q_{k,\ell}} f(y)dy \right) \int \chi_{Q_{k,\ell}}(x)dx \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{Q_{k,\ell}} f(y)dy \\
&= \int_\Omega f(y)dy.
\end{aligned}$$

□

Definição B.0.3. *Se* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *definimos a função maximal diádica por*

$$M_d f(x) \doteq \sup_{k \in \mathbb{Z}} |E_k f(x)|.$$

Proposição B.0.2.

(i) O operador $M_d f$ *é do tipo fraco* $(1,1)$;

(ii) Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *então*

$$\lim_{k \to +\infty} E_k f(x) = f(x), \quad q.t.p.$$

Demonstração. Ver [8] p. 33.

Lema B.0.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\lim_{k \to -\infty} E_k f(x) = 0.$$

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ existe um único cubo $Q_{k,\ell_0} \in \mathcal{Q}_k$ tal que $x \in Q_{k,\ell_0}$. Assim,

$$E_k f(x) = \frac{1}{|Q_{k,\ell_0}|} \int_{Q_{k,\ell_0}} f(x)dx \leqslant 2^{kn} \|f\|_1 \to 0$$

quando $k \to -\infty$.

□

Por fim, obtemos o resultado conhecido como Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund.

Teorema B.0.1 (Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund)**.** *Sejam $f \geqslant 0$ uma função integrável e $\lambda > 0$. Então, existe uma sequência $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de cubos diádicos disjuntos (podem pertencer a famílias distintas) tais que*

(i) $f(x) \leqslant \lambda$ *q.t.p se* $x \notin \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$;

(ii) $\left| \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \right| \leqslant \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$;

(iii) $\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x)dx \leqslant 2^n \lambda$.

Demonstração. Dado $\lambda > 0$, considere para cada $k \in \mathbb{Z}$ o conjunto

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \; E_k f(x) > \lambda \text{ e } E_j f(x) \leqslant \lambda \text{ se } j < k\},$$

isto é, $x \in \Omega_k$ se $E_k f(x)$ for a primeira esperança condicional de f maior que λ. Note que:

(i) $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ são conjuntos disjuntos;

(ii) Ω_k pode ser escrito como uma união de cubos diádicos da família $\mathcal{Q}_k$.

Denote por

$$F_\lambda \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \; M_d f(x) > \lambda\}.$$

Desta forma segue que

$$F_\lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k. \tag{B.2}$$

De fato, diretamente da definição obtemos que $\Omega_k \subset F_\lambda$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, donde segue que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k \subset F_\lambda.$$

Por outro lado, se $x \in F_\lambda$ então da definição de supremo existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $E_{k_0} f(x) > \lambda$. Como $\lim_{k \to -\infty} E_k f(x) = 0$, existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $k_1 < k_0$ e $E_j f(x) \leqslant \lambda$ para todo $j \leqslant k_1$. Desta forma, podemos escolher k_2 com $k_1 < k_2 \leqslant k_0$ tal que

$$E_{k_2} f(x) > \lambda \text{ e } E_j f(x) \leqslant \lambda, \ \forall \ j < k_2.$$

Assim, temos que $F_\lambda \subset \Omega_{k_2}$, o que conclui a demonstração da igualdade (B.2). Conforme visto, $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k$ é uma família enumerável de cubos diádicos e desta forma obtemos a sequência $\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ exigida pelo teorema.

Da Proposição B.0.2 item (i) e da igualdade (B.2) obtemos que

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \right| &= |\{x \in \mathbb{R}^n : \ M_d f(x) > \lambda\}| \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda} \|f\|_1, \end{aligned}$$

donde segue a parte (ii) do teorema.

Se $x \notin \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ então $x \notin F_\lambda$ e de (B.2) obtemos que $x \notin \Omega_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e portanto $E_k f(x) \leqslant \lambda$. Da Proposição B.0.2 item (ii) segue

$$f(x) \leqslant \lambda, \ q.t.p,$$

o que demonstra a parte (i) do teorema.

Por fim, seja $x \in Q_j \in \Omega_{k_0}$ para algum $k_0 \in \mathbb{Z}$. Diretamente da definição do conjunto Ω_{k_0} temos que

$$\frac{1}{Q_j} \int_{Q_j} f(x) dx = E_{k_0} f(x) > \lambda,$$

donde segue a primeira desigualdade de (iii). Para cada $j \in \mathbb{N}$, considere $\widetilde{Q}_j$ o cubo concentrico a Q_j cujo lado é duas vezes maior. Note que como $\widetilde{Q}_j$ contém Q_j, então ele pertence (ou é comparável) a um cubo de uma família Ω_k com $k < k_0$. Logo pela definição de Ω_{k_0} temos que a média de f no cubo $\widetilde{Q}_j$ é no máximo λ. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)dx &\leqslant \frac{|\widetilde{Q}_j|}{|Q_j|}\,\frac{1}{|\widetilde{Q}_j|}\int_{\widetilde{Q}_j} f(x)dx \\
&= 2^n \int_{\widetilde{Q}_j} f(x)dx \\
&< 2^n\lambda,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema.

□

Referências Bibliográficas

[1] ALVAREZ, J.; HOUNIE, J. Estimates for the kernel and continuity properties of pseudo-differential operators. **Arkiv för Matematik**, v. 28, p. 1-22, 1990.

[2] ALVAREZ, J.; MILMAN, D. H^p Continuity Properties of Calderón-Zygmund-type Operators. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 118, p. 63-79, 1986.

[3] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**, Wiley Classics Library Edition, 1995.

[4] BOWNIK, M. Boundedness of Operators on Hardy Spaces via Atomic Decompositions. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 133, 3535-3542, 2005.

[5] BREZIS H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Spaces**, Springer, 2010.

[6] CHANG, D. C. Fu Jen Lectures in Hardy Spaces. **Taiwanese J. Math**, v. 4, p. 321-363, 2000.

[7] CHANG, D. C.; LEE, Y. Estimates of Hyperbolic Equations in Hardy Spaces. **Math. Nachr**, v. 254-255, p. 35-63, 2003.

[8] DUOANDIKOETXEA, J. **Fourier Analysis**. American Mathematical Society. 2000

[9] FEFFERMAN, C.; STEIN, E. M. H^p Spaces of Several Variables. **Acta Mathematica**, v. 129, p. 138-193, 1972.

[10] FOLLAND, G. B. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.** 2nd Edition, New York: Jhon Wiley e Sons, 1999.

[11] GARCÍA-CUERVA, J.; FRANCIA, J. L. R. **Weighted Norm Inequalities and Related Topics.** North-Holland, Amsterdam (1985).

[12] GOLDBERG, D. A Local Version of Real Hardy Spaces. **Duke Mathematical Journal**, v. 46, p. 27-41, 1979.

[13] HOEPFNER, G. Hardy spaces, its variants and applications. In: IV Workshop on Geometric Analysis of PDE and Several Complex Variables. Serra Negra, 2007.

[14] HOEPFNER, G.; HOUNIE, J.; PICON, T. Div Curl Type Estimates for Elliptic Systems of Complex Vector Fields. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 429, p. 774-799, 2015.

[15] HOEPFNER, G.; KAPP R.; PICON, T. **Pseudodifferential Operators, Rellich-Kondrachov Theorem and Hardy-Sobolev Spaces.** Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1704.00017>. Acesso em: Agosto 2017.

[16] HORMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.** Springer-Verlag, Berlin, Second Edition, 1973.

[17] HOUNIE, J. **Teoria Elementar das Distribuições.** IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[18] HOUNIE, J.; KAPP, R. Pseudodifferential Operators on Local Hardy Spaces. **J. Fourier Anal. Appl.**, v. 15, p. 153-178, 2009.

[19] KALTON, N. Quasi-Banach Spaces. In: **Handbook of the Geometry of Banach Spaces.** Elsevier, 2003. p. 1099-1130.

[20] RUDIN, W. **Functional Analysis.** McGraw-Hill, 1973.

[21] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis.** McGraw-Hill, Third Edition, 1987.

[22] STEIN, E. M. **Harmonic Analysis: Real-Variables Methods, Orthogonality and Oscilatory Integrals.** Princeton, New Jersew: Princeton University Press, 1993.

[23] STEIN, E. M.; WEISS, G. **Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces.** Princeton University Press, Princeton, 1971.

[24] TAYLOR, M. E. **Partial Differential Equations II, Qualitative Studies of Linear Equations.** Applied Mathematical Sciences, Springer, 2011.

[25] TAYLOR, M. E. **Tools for PDE.** American Mathematical Society, Providence, 2000.

[26] WONG, M. W. **An Introduction to Pseudo-Differential Operators.** World Scientific, 1991.