UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE METODOLOGIA DE ENSINO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

A APRENDIZAGEM DE POLINÔMIOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DE UM ENSINO CONTEXTUALIZADO

ROSILDA DOS SANTOS MORAIS

SÃO CARLOS
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE METODOLOGIA DE ENSINO

A APRENDIZAGEM DE POLINÔMIOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DE UM ENSINO CONTEXTUALIZADO

ROSILDA DOS SANTOS MORAIS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para obtenção do título de mestre em Educação, sob orientação do Prof. Dr. Dácio Rodney Hartwig. Área: Metodologia de Ensino – Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática.

SÃO CARLOS
2008

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

M827ap

Morais, Rosilda dos Santos.
A aprendizagem de polinômios através da resolução de problemas por meio de um ensino contextualizado / Rosilda dos Santos Morais. -- São Carlos : UFSCar, 2008.
251 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2008.

1. Aprendizagem. 2. Ensino – aprendizagem de matemática. 3. Resolução de problemas. 4. Polinômios. 5. Educação matemática. I. Título.

CDD: 370.1523 (20ª)

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Dácio Rodney Hartwig	[illegible]
Prof. Dr. Mauro Carlos Romanatto	Mauro Carlos Romanatto
Profª Drª Regina Maria Simões Puccinelli Tancredi	Maria Puccinelli Tancredi

*Ao meu marido, **Paulo**, e ao meu filho, **Jean**,*
pela paciência e amor incondicional que me
dedicaram durante a caminhada que culminou
com este trabalho.

*À professora **Lourdes de la Rosa Onuchic**.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela proteção e auxílio, e por ter me presenteado com tantas pessoas maravilhosas, que foram presença constante nesta empreitada.

Ao meu amado marido, Paulo, pelo amor e dedicação inabaláveis, pelo incentivo e pela confiança que sempre depositou em mim.

Ao meu amado filho, Jean, por seu amor incondicional.

Ao meu amado irmão Roni, que mesmo distante sempre me apoiou e me incentivou.

Ao professor Dácio R. Hartwig, por ter guiado meus primeiros passos no mestrado e por toda a credibilidade e confiança em mim depositadas.

À professora Lourdes de la Rosa Onuchic, que mesmo não sendo minha orientadora, me recebia em sua casa sempre com um sorriso no rosto dizendo: "Coragem! Levanta essa cabeça e vamos lá!"; por te me oportunizado muitos momentos de aprendizado; por ter concedido o privilégio de sua convivência e de sua amizade; por ter acreditado em meu trabalho; por ter me acompanhado; por ter estado comigo nos momentos mais importantes e por ter, seguramente, me orientado todas as vezes que a procurei.

À professora Adriana C. Mattos por ter acreditado desde o início em meu trabalho e por tantas vezes ter me ouvido e me dado forças ao longo dessa difícil caminhada.

À querida "Donana", por ter cuidado tão bem de mim todas as vezes que eu e a professora Lourdes passávamos horas estudando. Lá vinha ela com suco, café, bolachas, bolo de natal...

À amiga Vitória da Silva, por ter sido uma companheira tão fiel, pelos momentos de alegria, de estudo e de reflexão.

A todos os colegas do Programa de Pós-Graduação, pela convivência, pelo afeto, pelos momentos de alegria, de trabalho e de reflexão.

Aos meus professores, aos funcionários do Departamento de Metodologia, da Seção de Pós-graduação e a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi o de verificar como se deu a aprendizagem de Polinômios através da Resolução de Problemas por meio de um ensino contextualizado. Assim, no contexto dos Polinômios, partindo da construção de caixas de papelão e usando os conhecimentos prévios de que os alunos já dispunham, desenvolvemos esta pesquisa. Definimos as categorias de compreensão dos conceitos: Contextualização, Conhecimentos Prévios e a Metodologia de Ensino Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, a partir de um estudo bibliográfico acerca de pesquisas realizadas sobre esses temas. Por se tratar de uma pesquisa cujo fenômeno de interesse esteve voltado à escola, especificamente ao estudo de Polinômios, ela se constituiu numa pesquisa de intervenção de natureza qualitativa em uma situação especifica: um estudo de caso de longa duração. A partir da Resolução de Problemas, como metodologia de ensino-aprendizagem, em sala de aula, buscamos por meio da construção dessas caixas, proporcionar aos alunos o "fazer matemática com as mãos", ou seja, desenvolver o conteúdo Polinômio de modo que os alunos pudessem: coletar, experimentar e analisar, em um contexto do mundo real, padrões matemáticos subjacentes. Todo o trabalho foi desenvolvido em situação de interação, com os alunos postos em grupos. Esta pesquisa foi realizada ao longo de dois Projetos: 1) com os alunos na 7ª série, Projeto I – Polinômios e as operações definidas sobre eles – no contexto da construção de caixas de papelão, em 2006; e, com esses mesmos alunos, na 8ª série, depois de um ano, em 2007, Projeto II – Apropriação de conceitos construídos no Projeto 1 e a exploração, a partir desse trabalho, do tão importante conceito algébrico denominado Função. Analisando o trabalho realizado, constatamos que o desenvolvimento do conceito de Polinômio seguido do conceito de Função, por meio da manipulação de material concreto, resultou numa aprendizagem mais significativa para os alunos. Pois, partindo de uma situação concreta, seguida de generalização e de abstração num estágio mais elevado da aprendizagem, os alunos, como co-construtores do conhecimento, puderam durante todo o trabalho estabelecer relações entre os temas abordados, dentro de um sistema mais amplo, onde significados e convenções foram sendo estabelecidos.

ABSTRACT

The objective of this study was to verify how learning of polynomials took place using problem solving in a contextualized learning situation. Thus, the present research was developed in the context of polynomials, based on the construction of cardboard boxes, using students' previous knowledge. Based on a bibliographic review of studies on the theme, we defined the categories of comprehension of the concepts: Contextualization, Previous knowledge, and Mathematics teaching-learning-evaluation through problem solving. Since the phenomenon of interest in the study is related to the school, specifically the study of polynomials, it constitutes an intervention of a qualitative nature in a specific situation: a long-term case study. Based on Problem Solving as a teaching-learning method in the classroom, we sought to give students the opportunity to "do hands-on mathematics", i.e. develop the content of polynomial in a way that students could collect, experiment, and analyze, in a real-world context, subjacent mathematical patterns. All the work was developed in an interactive situation, with the students divided into groups. This research was carried out over the course of two projects: Project I, conducted with 6th graders in the context of constructing cardboard boxes – "Polynomials and the operations defined by them" (2006); and Project II, conducted with same students one year later, in 8th grade – "Appropriation of concepts constructed in Project I, and the exploration, based on this work, of the important algebraic concept known as Function". Analyzing the work carried out, we found that the development of the concept "polynomial", followed by the concept "function", using the manipulation of concrete materials, resulted in more meaningful learning for the students. Starting with a concrete situation, followed by generalization and abstraction in a higher stage of learning, the students, as co-constructors of knowledge, were able to establish relations between the themes addressed throughout the work, within a broader system, where meanings and conventions were being established.

KEY WORDS: Problem solving, polynomials, mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

O interesse em desenvolver esta pesquisa na Pós-graduação fez-se motivado pela preocupação que tínhamos em discutir a aprendizagem de conteúdos matemáticos em ambiente contextualizado. O primeiro passo considerado foi definir o que são atividades contextualizadas e de que forma elas poderiam colaborar para o processo de ensino-aprendizagem de conteúdos de Matemática. Fizemos um levantamento teórico sobre os termos contextualização e ensino-contextualizado, mas não encontramos uma definição precisa do que são atividades contextualizadas. Tínhamos em mente, a partir de nossas leituras, a afirmativa de que a contextualização não pode ser enfocada como simples resolução de problemas do cotidiano. Diante disso, seguimos a teoria de três autores sobre contexto e contextualização: Stephen Ceci, na psicologia; Lúcia Moysés e Jon Davis na Educação Matemática.

Ceci & Roazzi, 1994; Ceci, 1990; e Ceci, Ramey & Ramey, 1990, enfatizam que a palavra "contexto" é muito abrangente. Para ele,

> "contexto é um termo amplamente abrangente em sua estrutura bioecológica. Ele inclui domínios de conhecimento, assim como materiais de trabalho, motivação, personalidade, escolarização e até a época histórica em que a pessoa vive. Seu alcance abrange os contextos mental, social e físico da solução de problemas, cada um dos quais, por si só, influencia a cognição [...]; o contexto afeta o desempenho intelectual [...]; o contexto não é apenas um "pacote" cercando um problema, ele é parte do problema [...]; dado um contexto mais interessante e motivador, o mesmo indivíduo ou a mesma população pode apresentar um desempenho de alto nível (citados por GARDNER, 2003, p. 248-250).

Moysés (1997) cita as pesquisas de Teresinha Nunes, Analúcia Schliemann e David Carraher, para apresentar o papel da contextualização no tipo de operação mental utilizado pelo indivíduo na realização de cálculos matemáticos e conclui afirmando que: "ao estabelecer uma relação entre uma dada situação envolvendo cálculo e uma representação — seja ela formada por imagens mentais diferentes ou mais ricas, seja mediante diagramas, esquemas, descrições verbais mais evocativas, gestos, simulações —, o raciocínio contextualizado favorece a articulação das variáveis em jogo e contribui para o sucesso do processo de resolução do problema matemático envolvido" (p.76).

Para Jon Davis (2007) citando Hiebert et al (1996), “a pesquisa sugere que resolver problemas postos em contexto pode promover conexões entre o mundo real e a Matemática e ajuda os estudantes a desenvolver sua compreensão” (p. 141, tradução nossa).

Neste sentido, partimos da premissa de que quanto mais relações os alunos conseguirem estabelecer entre os conteúdos estudados, melhor será sua aprendizagem. Essa relação entre os conteúdos já aprendidos e os novos conteúdos poderia ser de antemão uma forma de contextualizar conteúdos. Essas relações podem ser mais representativas de acordo com o contexto em que as atividades se desenvolvem.

Sendo assim, esta pesquisa se desenvolveu no contexto dos Polinômios, partindo da construção de caixas de papelão e usando os conhecimentos prévios que os alunos já dispunham, provenientes das aulas de Desenho Geométrico, da Álgebra (incluindo números e operações), de Matemática de modo geral e das experiências vividas que não estivessem diretamente relacionadas com a Matemática escolar. A Matemática é uma ciência de padrões, então, compreender padrões matemáticos através da construção das caixas permitiu aos alunos coletar, experimentar e analisar, em um contexto do mundo real, padrões matemáticos subjacentes. Poderíamos, por exemplo, ter trabalhado com qualquer tópico do currículo escolar de Matemática. Por exemplo, Geometria no contexto da Geometria, Trigonometria no contexto da Trigonometria. Entretanto, optamos trabalhar pelo contexto da Álgebra com Polinômios.

Nosso interesse inicial estava voltado a verificar se a aprendizagem de Matemática seria mais significativa, quando desenvolvida a partir de dois princípios estabelecidos por nós durante o trabalho: em ambiente contextualizado, partindo dos conhecimentos prévios de que os alunos dispunham; e o desenvolvimento de conceitos matemáticos a partir de palavras ou expressões que fazem parte do mundo real dos alunos e que pudessem se relacionar com o conteúdo em estudo.

Esta é uma pesquisa qualitativa, determinada a partir do problema que nos predispusemos a enfrentar: tanto os fenômenos educacionais quanto a dinâmica do seu desenvolvimento nos processos pedagógicos. Dentre o conjunto de estratégias, que podem definir uma pesquisa qualitativa, assumimos em nosso trabalho o estudo de caso, por se tratar de uma estratégia com ênfase voltada às questões relacionadas à escola. Sendo assim, nesta pesquisa, o “objeto” – fenômeno de interesse – constitui-se em identificar a forma de como pode se dar a aprendizagem dos Polinômios <u>através</u> da Resolução de Problemas, por meio de uma estratégia de ensino contextualizado.

Esse nosso interesse surgiu em um trabalho com crianças de 5ª e 6ª séries, quando nos deparamos com as dificuldades apresentadas por elas, no que se refere à interpretação das palavras envolvidas nos conteúdos matemáticos. Percebemos, nessa ocasião, que o não entendimento de alguns vocábulos matemáticos não se configurava devido ao distanciamento existente entre as palavras envolvidas, na situação-problema, que não estavam diretamente ligadas à Matemática, e às relações entre essas palavras e os conceitos matemáticos. As informações apresentadas em uma situação-problema rotineira pareciam não atribuir qualquer significado na busca da resposta encontrada. Palavras como maior que, menor que, comum etc., que normalmente são usadas para comparar situações, pareciam assumir um novo significado (ou nenhum) quando se referiam à Matemática.

Dois casos trabalhados na prática de ensino, numa escola pública em Piracicaba, SP, podem exemplificar nossas hipóteses de que a não compreensão do problema matemático colocado estava na dependência do entendimento dos termos usados no âmbito da linguagem extra-escolar[1]. 1) Ao resolver uma atividade que envolvia Máximo Divisor Comum (MDC), o aluno não havia percebido a relação existente entre as palavras presentes na expressão "Máximo Divisor Comum", com as palavras que já trazia de sua experiência de mundo. A palavra "divisor" não parecia familiar ao aluno. Essa palavra precisou ser explicada do ponto de vista matemático, fazendo relação com os termos da divisão: dividendo e divisor, dizendo que o divisor é quem divide. Quando questionado sobre o que significavam as palavras máximo e comum, o aluno, parecendo surpreso, respondeu: "ah....é o maior divisor que é de um e que é divisor do outro também?". 2) Outro caso foi o de uma aluna − ainda nessa mesma escola pública situada em Piracicaba, SP − que, ao resolver uma situação problema, teve dificuldade por não entender o significado da palavra "entrada", num processo de compra e venda. Ao relacionarmos esta palavra com o significado que já trazia de sua experiência do mundo real, ela conseguiu prosseguir com a atividade. Partindo desse pressuposto, ainda inquietos sobre as circunstâncias em que se estabelece a aprendizagem de conceitos matemáticos e a relação existente entre as palavras que os envolvem, relacionando com os conhecimentos que o aluno traz de suas próprias experiências no mundo, surgiram as seguintes questões: Os alunos não entendiam a linguagem matemática presente no enunciado ou esta compreensão estaria atrelada aos significados que eles já traziam consigo sobre aquelas palavras? Compreendida essa relação, poder-se-ia melhor viabilizar o processo de

[1] Extra-escolar: Tal terminologia designa, não só os processos educativos anteriormente mencionados, mas também todo e qualquer processo educativo ocorrido em instituições que não necessariamente pertençam às redes escolares de ensino. Que se acrescenta ao ensinamento escolar propriamente dito, a fim de completá-lo: *atividades extra-escolares*.

aprendizagem? Qual seria o processo de resolução utilizado pelos alunos em problemas de Matemática contextualizados? Como poderia se dar a aprendizagem de conteúdos de Matemática a partir da contextualização? A contextualização poderia ser uma estratégia de ensino que nos permitisse responder as questões anteriores?

Quando nos referimos a problemas em contexto, estamos especificamente falando sobre as estratégias adotadas para o ensino de um novo conteúdo. Não se trata da apresentação de um problema aos alunos e do tempo dado para sua resolução. Estamos nos referindo às estratégias previamente assumidas pelo professor para ir em busca da construção da resposta, sejam elas questionamentos, supervisão, materiais de apoio, interação com demais colegas, o inesperado, problemas secundários etc.. Ou seja, no contexto da situação-problema apresentada, que tipos de estratégias podem ser adotadas para permitir aos alunos um maior grau de familiarização[2] entre o novo conteúdo e os conhecimentos de que os alunos já dispõem? É assim que aos problemas em contexto nos referimos.

Na busca de respostas para as questões anteriormente apresentadas, sentimos necessidade de fazer um levantamento teórico sobre o que as pesquisas apontam em relação à contextualização no âmbito escolar e em relação à resolução de problemas. Isso porque pretendíamos trabalhar com a resolução de problemas enfocando a contextualização. O objetivo deste levantamento teórico, abrangendo esses dois temas, visava a buscar uma referência que servisse de ponto de partida para esta pesquisa. Feito o levantamento teórico e definida que concepção teórica seria adotada em relação à contextualização, o passo seguinte seria o de verificar, por meio da resolução de problemas em situações de interação, se os problemas a serem aplicados atendiam à nossa condição inicial: se as situações de aprendizagem ocorressem em ambientes contextualizados, estabelecendo-se uma relação entre os conceitos quotidianos/espontâneos e, gradativamente, relacionando-os com conceitos científicos, será que os conceitos matemáticos poderiam ser mais significativos para os alunos?

As expressões conceitos quotidianos e conceitos científicos foram discutidas por Vygotsky (1979) em seu livro "Pensamento e Linguagem". O autor considerou os conceitos espontâneos/quotidianos como aqueles que a criança aprende em seu dia a dia – conceito sem consciência, pois julga que a consciência vem mais tarde que os conceitos – formados a partir do confronto com uma situação concreta e, de conceitos científicos, aqueles conceitos que são mediados. Partimos do pressuposto de que, com a faixa etária que pesquisamos (7ª e 8ª série

[2] Familiarização – de familiar: "não significa necessariamente vida real" (BARNETT et all. In: KRULIK E REYS, 1997, p.133).

do Ensino Fundamental), diferente da de Vygostsky, que trabalhou com crianças em idade primária, o aluno, ao iniciar uma nova situação de aprendizagem, dispunha tanto de conceitos quotidianos quanto de conceitos científicos. Sendo assim, nossa expectativa era a de que os "novos" conceitos científicos não deveriam se impor aos conceitos anteriores, fossem eles quotidianos ou científicos. Quanto maiores fossem as relações estabelecidas entre os conceitos que os alunos já dispusessem e os "novos" conceitos, mais significado teria a aprendizagem. Nesse sentido Vygostsky (1988) afirmou que "os conceitos científicos desenvolvem-se para baixo, através dos conceitos espontâneos e os conceitos espontâneos desenvolvem-se para cima, através dos conceitos científicos" (p.144), ou seja, os dois princípios estão estreitamente relacionados.

A teoria vygotskyana traz contribuições teóricas sobre a importância dos conhecimentos quotidianos e do contexto social na educação. Este referencial, considerando a interação social, a formação de conceitos e a zona de desenvolvimento proximal, serviu como "pano de fundo" para o desenvolvimento desta pesquisa.

Escolhemos o conceito de Polinômios, devido à sua importância dentro do conhecimento matemático e de sua pouca exploração em trabalhos contextualizados. Num primeiro momento, tomando como ponto de partida os conhecimentos prévios dos alunos ligados à Matemática e, em especial, à Geometria (conceitos científicos), desenvolvemos atividades concretas utilizando caixas de papelão, fazendo uso de situações-problema, geradoras de novas idéias. A partir de conhecimentos prévios dos alunos e do trabalho com a construção das caixas, chegamos às equações polinomiais, utilizando mais três problemas decorrentes dos anteriores. As atividades foram desenvolvidas em colaboração, observando, nas situações de interação entre os alunos, de quais elementos ou estratégias lançavam-se mão para resolver uma dada situação problema.

Nossa análise centrou-se em dois aspectos: observação do processo de construção do conhecimento de equações polinomiais, através de problemas contextualizados; e verificar como se deu a aprendizagem e mostrar as representações desse conteúdo a partir da contextualização.

Os problemas foram trabalhados com os alunos postos em grupos de três, numa situação de interação social. A professora-pesquisadora, para desenvolver este trabalho, considerou três etapas: Antes, Durante e Depois. Cada uma dessas etapas foi subdividida em etapas menores com responsabilidades da professora-pesquisadora e dos alunos. A fase Antes exigiu bastante da professora-pesquisadora: a escolha do problema; o reconhecimento do foco da Matemática que seria construída nessa aula; e a seleção de estratégias convenientes para esse trabalho e o de levantar questões importantes para serem discutidas em plenárias.

Na fase Antes, a professora-pesquisadora escolheria problemas adequados para que os alunos participassem da construção de novos conceitos e novos conteúdos, problemas estes pertinentes ao programa estipulado para aquele tópico. Ela, a professora, identificaria quais seriam os objetivos colocados para aquela aula, através da resolução dos problemas dados. Identificaria as estratégias oportunas para aquele trabalho e, talvez até pensasse, se possível, ir em busca de tópicos relacionados.

Na fase Durante, o trabalho maior seria desenvolvido pelos alunos. Nessa fase haveria dois momentos voltados aos alunos: um individual e um em grupo. Este último seria caracterizado pela socialização das idéias construídas individualmente.

Na fase Depois, muito importante para a concretização da aprendizagem, o professor-pesquisador abriria uma Plenária onde ele, com todos os alunos juntos, passaria à exploração da atividade realizada pelos alunos. O professor levantaria questionamentos, ouviria os alunos, todos dialogariam tirando possíveis dúvidas e buscando chegar a um consenso sobre a resposta correta do problema. Ainda, nessa fase, o professor, na lousa, formalizaria todas as idéias novas que tivessem sido construídas.

Foi criado um projeto para trabalhar em sala de aula, chamado Projeto I, onde foi adotada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, no contexto da construção de caixas de papelão, visando à construção de conceitos relativos ao tópico Polinômios e suas operações. Após o término do estudo de Polinômios e suas operações, foi aplicada uma atividade individual objetivando verificar se os conceitos aprendidos no contexto da construção das caixas, em situação de interação, haviam sido transferidos para novas situações de aprendizagem.

Um novo projeto, o Projeto II, foi concebido com o objetivo de ser aplicado com os mesmos alunos, agora concluindo a 8ª série, visando verificar se aqueles conceitos construídos anteriormente haviam se fixado como conhecimento. Inicialmente seria feita uma revisão crítica do trabalho anterior, com os alunos trabalhando durante todo o projeto dispostos em grupos de três, pesquisando novos conceitos a partir daqueles previamente construídos e explorando os conceitos de Perímetro, Área e Volume, chegando ao importante conceito de Função.

Como no Projeto I, também no Projeto II, foi aplicada uma lista de atividades escolhidas em livros didáticos e não didáticos com o objetivo principal de detectar se os novos conceitos aprendidos poderiam ter sido transferidos para outras situações. Essa lista de atividades foi desenvolvida no último encontro com os alunos trabalhando em grupos e sem intervenção da professora-pesquisadora, numa atitude por ela planejada.

Face a todas essas idéias, a seguinte questão de pesquisa foi formulada: Como se dará a aprendizagem dos alunos, num processo de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas, sobre o tópico Polinômios, numa abordagem de ensino contextualizado e de interação-social?

Esta pesquisa teve sua origem e desenvolvimento pautados no ensino-aprendizagem de Polinômios através da resolução de problemas, onde o problema passou a ser ponto de partida e, através de sua resolução, conexões foram feitas com outras idéias já concebidas entre possíveis ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (ONUCHIC, 1999).

Ao final desta pesquisa, espera-se poder deixar, a outros professores, uma proposta de ensino contextualizado para o conteúdo Polinômios, no sentido de tornar o seu ensino capaz de levar os alunos a uma aprendizagem com compreensão e mais significado.

Capítulo 1

METODOLOGIA DA PESQUISA

CAPÍTULO 1

METODOLOGIA DA PESQUISA

1.1 O Método de Investigação Qualitativa

A *investigação qualitativa*[3] em educação será o eixo norteador desta pesquisa, contemplando as características mais gerais e mais freqüentemente apontadas na literatura como sendo as que melhor configuram as pesquisas qualitativas (ALVES-MAZZOTTI, 1998; BOGDAN E BIKLEN, 1994; LÜDKE E ANDRÉ,1986).

A partir de nossas leituras, verificamos a crescente realização de pesquisas em educação cujo objeto de estudo são as relações que ocorrem no interior da escola, os chamados fenômenos educacionais e todas as suas variações. A pesquisa qualitativa surge como uma inquietação dos pesquisadores frente ao longo período em que as pesquisas ficaram expostas ao paradigma positivista predominante. Este, com caráter mais reducionista quando nos referimos ao contexto escolar, não perdeu seu poder com as novas investigações pautadas na pesquisa qualitativa, o que houve foi um movimento que coloca o pesquisador no meio da cena investigada como principal instrumento de investigação, participando dela e tomando partido na trama da peça (ALVES-MAZZOTTI, 1998; LÜDKE, 1986). Quando a discussão girar em torno dos problemas específicos do dia a dia escolar, devemos recorrer à pesquisa qualitativa por meio da observação participante, da entrevista e da análise documental, seguindo o mesmo rigor do trabalho científico. Devemos ainda atentar para a veracidade das informações que vão sendo construídas (LÜDKE, 1986). Neste sentido, Alves-Mazzoti (1998) apresenta alguns aspectos que devem ser considerados durante a elaboração de um projeto de pesquisa, independente do paradigma que está operando, que podem ser tomados como um guia, como uma orientação que indica aonde o pesquisador quer chegar e os caminhos que pretende tomar:

[3] Pautados na referência de Biklen (1982, p.17-18), a expressão "*investigação qualitativa*" engloba todo o conjunto de estratégias designadas por "*qualitativas*" (etnográfica, investigação de campo, estudo de caso, escola de Chicago, etc.).

> (a) o que se pretende investigar (o problema ou as questões do estudo); (b) como se planejou conduzir a investigação de modo a atingir o objetivo e/ou a responder as questões propostas (procedimentos metodológicos); (c) porque o estudo é relevante (em termos de contribuições teóricas e/ou práticas que o estudo pode oferecer). (p.149)

As orientações de Alves-Mazzoti (1998) são dadas no sentido de evitar que mesmo pesquisadores mais experientes corram o risco de se perderem num emaranhado de dados e informações, dos quais não conseguirá extrair qualquer significado.

O método de pesquisa qualitativa apresenta diversidade e flexibilidade não se admitindo regras precisas, aplicáveis a uma ampla gama de casos. A investigação qualitativa caracteriza-se como aquela que busca estudar os fenômenos educacionais e toda sua complexidade, tentando captar a realidade dinâmica e complexa do seu objeto de estudo – a sociedade. Por muito tempo estudaram-se os fenômenos educacionais isoladamente como se faz com um fenômeno físico, entretanto, quando pensamos na escola e em suas relações, o método qualitativo ganha um caráter mais abrangente. Lüdke e André (1986) complementam dizendo que "a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra através do trabalho intensivo de campo" (p.11). Uma das características da pesquisa qualitativa está relacionada à descrição dos dados, ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, obtidos no contato do pesquisador com a situação estudada, enfatizando mais o processo do que o produto (BOGDAN E BIKLEN, 1982).

Embora não seja nosso objetivo discutir sobre cada uma delas, vale a pena dizer que a investigação qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1982), apresenta cinco características a serem consideradas:

> 1. A fonte discreta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal [...]; 2. A investigação qualitativa é descritiva [...]; 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos [...]; 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os dados de forma indutiva [...]; 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa [...]. (p.47-51)

De acordo com a área do conhecimento − sejam elas: a história, a sociologia do conhecimento, a psicologia da aprendizagem, a agricultura, a antropologia (a sociologia de

Chicago), a psicologia relativa ao desenvolvimento, etc. − a pesquisa produz seus próprios conjuntos de conceitos, métodos e procedimentos, de forma a constituir um rico campo de estudos, no qual a compreensão de suas próprias perspectivas e princípios é fundamental na condução de investigações e na escolha dos métodos de pesquisa.

1.2 Um Estudo de Caso

Dentre os conjuntos de estratégias designados qualitativos, nesta pesquisa, por tratarmos de um caso específico − a forma como se dá a aprendizagem das operações polinomiais − dentro de um sistema mais amplo, escolhemos o *Estudo de Caso*. Para tanto, tomamos como referência as orientações de Lüdke (1986): "o estudo de caso "qualitativo" ou "naturalístico" encerra um grande potencial para conhecer e compreender melhor os problemas da escola. Ao retratar o cotidiano escolar em toda a sua riqueza, esse tipo de pesquisa oferece elementos preciosos para uma melhor compreensão do papel da escola e suas relações com outras instituições da sociedade" (p.23-24). Nesse mesmo documento, intitulado "*Abordagens qualitativas de pesquisa: a pesquisa etnográfica e o estudo de caso*", a autora apresenta as características fundamentais do estudo de caso:

> 1. Os estudos de caso visam à descoberta; 2. Os estudos de caso enfatizam a interpretação em contexto; 3. Os estudos de caso buscam retratar a realidade de forma complexa e profunda; 4. Os estudos de caso usam uma variedade de fontes de informação; 5. Os estudos de caso revelam experiência vicária e permitem generalizações naturalísticas; 6. Estudos de Caso procuram representar os diferentes e às vezes conflitantes pontos de vista presentes numa situação social; 7. Os relatos de estudo de caso utilizam uma linguagem e uma forma mais acessível do que os outros relatórios de pesquisa. (p.18-19).

No estudo de caso, a observação, a entrevista e a análise documental são recursos metodológicos de coleta de dados, os quais deverão ser escolhidos dependendo da necessidade e de suas utilidades frente ao problema, tomando o cuidado com a seleção dos aspectos mais relevantes, verificando a possibilidade de recortes de modo a chegar a uma compreensão mais completa da situação estudada.

"O estudo de caso visa à descoberta, ao desvelar de um fenômeno em sua multiplicidade de dimensões, focalizando-se como um todo" (BARALDI, 1999, p.22). O fenômeno aqui é constituído pela Matemática aprendida na escola, ou seja, como se deu a aprendizagem de conteúdos de Matemática a partir de uma proposta de ensino contextualizada − **o quê** − desenvolvida a partir dos conhecimentos prévios que os alunos dispunham, fossem eles desenvolvidos no contexto escolar ou não. Nossos pressupostos iniciais estavam voltados à forma como é ensinado o conteúdo Polinômios na escola.

A partir da abordagem de ensino que desenvolvemos, queríamos verificar se a aprendizagem teria sido mais significativa, de forma que o aluno pudesse transferir os conceitos aprendidos naquela situação de ensino para outros contextos − **como** −, e ainda estávamos atentos a novos elementos que poderiam emergir durante o estudo. Inicialmente foi possível vislumbrar, neste caso, que os conceitos relativos a Polinômios foram se formando gradualmente de forma que os novos conteúdos estudados fossem estabelecendo relações com os conhecimentos construídos anteriormente. Durante o processo observamos que alguns dos conceitos, necessários para a continuidade das atividades propostas, apresentaram-se desorganizados, sendo necessária muitas vezes a retomada destes conteúdos. Um aspecto novo, incorporado ao caso, foi o fato de que a proposta que desenvolvemos para o ensino de Polinômios pôde estender-se ao conceito de função (apesar de este tema não pertencer ao currículo da faixa etária que trabalhamos), fato que nos fez voltar à sala de aula para uma nova coleta de dados com o objetivo de estender a pesquisa, aproveitando as variantes que foram surgindo no decorrer do processo.

O contexto trabalhado foi numa turma de 7ª série do Ensino Fundamental, em uma escola particular situada na cidade de Piracicaba, numa sala composta por 12 alunos, que foram divididos em quatro grupos de três alunos cada. O Capítulo 4, desta dissertação, melhor relata esse contexto e a forma como ele foi organizado. A professora de Matemática da sala foi a própria pesquisadora que atuou, ao longo da pesquisa, como professora-pesquisadora. Essa diferenciação − se ela existir já que é uma questão muito subjetiva − ocorreu por tratar-se de uma metodologia de ensino desenvolvida especificamente para esta pesquisa, ou seja, a forma como foram abordados os conteúdos não representam, com integridade, o dia a dia das aulas de Matemática dessa turma. Ao longo da pesquisa, por muitos momentos, tivemos dificuldade em separar o professor do pesquisador já que este é um fator de caráter extremamente subjetivo como já dissemos, entretanto, o que queríamos não era investigar nossa própria prática e, sim uma proposta de ensino que vislumbrasse os objetivos desta pesquisa.

Para o registro dos dados foram utilizados três recursos: gravações em áudio, registros dos alunos nas folhas de atividades e anotações da professora-pesquisadora (abrangendo o que a professora-pesquisadora viu, presenciou e pensou, durante e após a coleta de evidências). O Capítulo 4 desta dissertação tratará de apresentar essas evidências.

Os diálogos entre os alunos e a professora-pesquisadora, durante as atividades de resolução de problemas foram gravados. Foi colocado um gravador em cada grupo, sendo quatro ao todo, e outro na mesa da professora-pesquisadora que permitiam que as falas, próxima à lousa e em cada grupo, se tornassem mais claras. Tais diálogos foram transcritos para posterior análise. Também utilizamos como análise um relatório preenchido pelos alunos no final da pesquisa, apresentando suas considerações sobre a proposta de ensino desenvolvida. O nome que identificava o aluno no relatório era facultativo. As questões que compunham esse relatório encontram-se anexas a esta pesquisa.

A análise dos dados iniciou-se, durante a coleta de dados, com os registros da professora-pesquisadora que abrangeram inclusive o comportamento dos alunos frente a uma situação problema apresentada, tornando-se mais efetiva durante a transcrição das entrevistas onde era feita a triangulação − fundamentada no inter-relacionamento do referencial teórico da pesquisa com os diferentes registros das evidências coletadas (BOGDAN; BIKLEN, 1982) − dos dados sempre norteados pelos objetivos e a pergunta da pesquisa. Nesta fase, já se podiam perceber algumas regularidades, padrões ou tópicos presentes nas evidências que se configuraram como algumas categorias de análise.

O trabalho de campo foi dividido em duas partes: a primeira parte refere-se ao Projeto I e a segunda parte refere-se ao Projeto II. Este último foi realizado após 1 ano da realização do primeiro.

No Projeto I, preocupados com o ensino de Polinômios, no Ensino Fundamental II, com compreensão e significado, desenvolvemos atividades visando o ensino deste conceito de uma maneira diferente, que pudesse fazer com que os alunos compreendessem a importância desse novo tópico matemático e que soubessem trabalhar com ele. Para isso, lançamos mão de uma metodologia de ensino que, usando caixas de papelão, aos poucos, foi-se construindo novos conceitos e novos conteúdos, neste caso, os Polinômios e as operações definidas sobre eles: adição, subtração, multiplicação e divisão. A aplicação do Projeto I deu-se nos meses de Outubro e Novembro de 2006. A transcrição das fitas iniciou-se após o encerramento da coleta de evidências, especificamente nos meses de Janeiro e Fevereiro do ano seguinte (2007), no caso do Projeto I.

Como já dissemos na Introdução, fizemos o Projeto II com os mesmos alunos − estudantes da 8ª série, sendo um total de 12 alunos distribuídos em 4 grupos com 3 alunos cada grupo, usando a mesma metodologia de ensino − Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas −, o mesmo colégio − Escola Cooperativa de Piracicaba/COOPEP −, mantendo os mesmos grupos e o mesmo sistema de registro dos dados − gravação de áudio, registro dos alunos e registro da professora-pesquisadora. A transcrição das fitas deste Projeto II se deu no mês de Janeiro de 2008.

No decorrer da análise dos dados percebemos que havia potencialidades e, como tínhamos possibilidades, fomos a campo novamente com o Projeto II. Este projeto, além do conceito de polinômios, tinha como propósito a extensão do trabalho realizado com as caixas ao conceito de função e, ainda, verificar se o que fora feito no primeiro projeto surtira efeito e se a aprendizagem desenvolvida, naquela ocasião, havia se mantido ao longo de um ano. Os objetivos gerais do Projeto II serão apresentados no Capítulo 6 desta pesquisa.

Ao final da pesquisa, o investigador comumente está interessado no que acontecerá depois do trabalho completado e se questiona em quão interessante seria antecipar ações posteriores. Neste sentido, Romberg (2007) sugere que como membros de uma comunidade de estudo, os investigadores "discutem idéias entre si, reagem às idéias uns dos outros e sugerem novos passos, modificações de estudos anteriores, elaboração de procedimentos e assim por diante" (p.103). Neste sentido, comentários, sugestões, percepção de possibilidades e limitações serão apontadas no final deste trabalho.

Embora esta não seja uma pesquisa com objetivo voltado a investigar a própria prática, ainda assim, é importante considerar ao longo do texto, que a pesquisadora era a professora da sala.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

CONTEXTUALIZAÇÃO, CONHECIMENTOS PRÉVIOS, RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E INTERAÇÃO SOCIAL

2. Contextualização e conhecimentos prévios com base na bibliografia levantada

2.1. Contextualização

A maioria dos alunos do Ensino Fundamental tem dificuldade para utilizar o conteúdo trabalhado em Matemática, na sala de aula, em situações extraídas do dia a dia, porque quase sempre as realizaram em um contexto isento das mesmas. Isso se caracteriza pela abordagem de enfocar o conceito apenas pelo conceito, ou seja, muito distante de qualquer aplicação prática, dificultando o relacionamento entre o conhecimento adquirido na escola e sua respectiva utilização externa ao ambiente escolar.

O esquecimento de aprendizagens assim adquiridas chega a ser quase completo após algum tempo. Há fortes evidências de que o cérebro humano retém principalmente os conhecimentos que se apresentam como sendo úteis e descarta os que parecem desnecessários (BUSQUETS, M. D., 1997). Isso ocorre porque a memória se organiza principalmente a partir da atribuição de significado e este se desenvolve ao se estabelecer uma relação entre a nova informação e aquilo que já é conhecido. Esse processo é conhecido como consolidação (STERNBERG, R. J., 2000). Desse modo, o conhecimento não consolidado é facilmente esquecido. Daí, então, a importância de se contextualizar a construção dos conceitos em Matemática utilizando situações suficientemente relevantes aos alunos.

A importância do contexto no desempenho intelectual é demonstrada por Ceci (1998, citado por GARDNER, H. et al., 2003) por meio de isomorfos de problemas cuja estrutura é idêntica, pois exigem os mesmos processos subjacentes de solução. Em um dos experimentos apresentados por Ceci, o problema não contextualizado atingiu um índice de acertos de apenas 22%, enquanto que, no problema contextualizado, atingiu aproximadamente 90%. Isso ocorre, porque, dado um contexto mais interessante e motivador, o indivíduo ou a população pode apresentar um desempenho de mais alto nível.

Contudo, como podemos entender a expressão “contextualização” nessa situação? Na sala de aula, por exemplo, vários conteúdos são abordados e não poucos os questionamentos de professores sobre qual deve ser a contextualização para cada um desses conteúdos, o que faz com que muitos professores cheguem a crer que nem todos os conteúdos poderão ser contextualizados. De fato, os problemas podem ser contextualizados nas engenharias, no curso de matemática, na pesquisa em matemática, etc. Contudo esses contextos não coincidem com os da escola, na Educação Básica[4] e nem com os de fora da escola em suas experiências do cotidiano, já que alguns deles requerem níveis maiores de abstração. Podemos assim dizer que, se a contextualização é favorável para uma aprendizagem mais efetiva, conforme indicam as pesquisas (CECI, 1998; GARDNER, 2003; MOYSÉS, 1997; CARRAHER, 2001; DAVIS, 2007; WALKERDINE, 1988), então ela deveria ser aplicada a todos os conteúdos. Para tanto, é preciso uma interpretação adequada para o termo contextualização, já que este envolve um aspecto bastante amplo.

Definir contextualização foi uma tarefa difícil para nós. Sabíamos o que era contextualizar, mas apresentar essa expressão numa redação compreensível envolveu muitas leituras e uma certa transformação de nosso pensamento/entendimento em palavras neste texto. Para tanto, optamos pelo caminho inverso, fizemos muitas leituras sobre o assunto e buscamos selecionar os equívocos gerados em torno do mesmo para irmos formando um texto. Um exemplo freqüente, que leva a equívocos, são as interpretações que relacionam o ato de contextualizar ao desenvolvimento de atividades relacionadas ao cotidiano dos alunos. Nosso ponto de partida foi buscar nos dicionários uma definição precisa do verbete e, depois, a partir dessa “pré-definição”, irmos formando nossa interpretação com base na reflexão.

Encontramos no dicionário Houaiss, 2001, na página 817, algumas definições para o termo contextualização. Dentre todas apresentadas, selecionamos duas: “integrar alguma coisa em um contexto; e inter-relação de circunstâncias que acompanham um fato ou uma situação”. Outro documento analisado foram os PCN (1998, p.23) de Matemática. Lá está escrito que há uma distorção em relação à interpretação dada à palavra contexto, ao se trabalhar apenas com o que supõe ser parte do dia a dia do aluno. Neste sentido, os PCN se apresentam taxativos:

[4] Educação Básica: Ensino fundamental I, II e Ensino Médio.

> ... embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, não serem de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata. (PCN, 1998, p.23)

Diante das citações anteriores, definimos como contextualização um conjunto de aspectos que devem ser considerados numa situação de ensino:

1. Elaboração de estratégias, por parte do professor, visando estabelecer um maior número de relações entre os conteúdos aprendidos anteriormente (internos e/ou externos ao ambiente escolar) e o novo conteúdo, ou seja, os conteúdos devem ser apresentados como um conjunto de conceitos inter-relacionados;

   1.1 A elaboração da estratégia a ser desenvolvida nas aulas, envolve desde questionamentos do professor em relação aos conhecimentos que os alunos dispõem e que serão pré-requisitos para o novo conteúdo, até atividades práticas que estejam relacionadas ou não com algum conteúdo trabalhado, seja na Matemática ou em qualquer outro componente curricular, que permitam, por meio do estabelecimento de relações, a percepção de padrões matemáticos subjacentes.

2. Propor aos alunos um quadro que apresente os conhecimentos prévios necessários para o novo conteúdo, que pode ser construído com eles. Esse processo permite ao aluno um levantamento dos conhecimentos prévios que já foram trabalhados em aula e que serão necessários durante a nova situação de ensino. Essa estratégia evita a idéia de que os conteúdos anteriormente trabalhados foram esquecidos e ainda permite ao professor a retomada de algum conteúdo que por ventura não estivesse consolidado pelos alunos.

3. A contextualização não implica necessariamente uma atividade de ensino diferenciada, mas um maior preparo das aulas visando explorar ao máximo as relações existentes entre os conteúdos envolvidos, de forma que o ensino não pareça uma repetição de procedimentos ou um mero cumprimento de currículo.

É conveniente ressaltar que a contextualização pode e deve ser considerada dentro da própria Matemática. Como exemplo, as atividades que visam explorar conceitos que fazem parte da história da Matemática, cuja aprendizagem não tem aplicação imediata na vida prática dos sujeitos, ganha mais ênfase quando contextualizadas, por não apresentarem um caráter isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação de aprendizagem desligada de qualquer contexto. Contextualizar não implica apenas em trazer para a sala de aulas atividades do mundo real, tão pouco levar as crianças a fazer compras ou experimentar situações externas ao ambiente escolar.

Walkerdine (1988), citada por Baldino (1996), pede cuidado para a redução que se opera, quando certos termos são trabalhados na prática discursiva do ensino de Matemática, especificamente quando são oferecidas aos alunos atividades extra-escolares, acreditando que essas possam gerar-lhes alguma representação. Em contrapartida, a contextualização pode ser entendida como as relações que podem ser estabelecidas quando um conceito é abordado em Matemática. Por exemplo, ao se falar do conceito de maior ou menor, introduz-se a relação de ordem. Esse novo significado não pode se impor "contra significados anteriores, vigentes nas práticas discursivas familiares 'mais comida', 'irmã maior' significando 'mais adulta, mais como a mãe' (p.5).

A partir dos aspectos que apresentamos anteriormente, que a nosso ver caracterizam a contextualização, é interessante apontar o papel do professor. Não é tarefa fácil entender a contextualização e aplicá-la no contexto da sala de aula. É importante salientar que atividades de ensino contextualizadas devem envolver desde o preparo das aulas pelo professor, sua formação, suas crenças e a autoconfiança desenvolvida, gradativamente, do professor para com o grupo, para que este último acredite no trabalho a ser feito, de modo a pôr fim num discurso simbólico, abstrato e incompreensível em que o saber matemático tem se perpetuado ao longo da história.

A aprendizagem de conceitos, partindo da contextualização, permite ao sujeito a transferência dos conhecimentos apreendidos em sala de aula para novas situações da vida prática (quando for o caso), ou para novas situações de aprendizagens específicas que não estejam diretamente ligadas à vida prática (aplicação matemática). Para que se torne possível essa transferência, os PCN (1998) orientam que o ensino deve partir da contextualização. Após a aprendizagem contextualizada, os conceitos aprendidos são aplicados em novas situações de aprendizagem, num processo chamado contextualização → descontextualização → contextualização. Quando um conhecimento não fica vinculado a um contexto concreto e único, faz-se o conhecimento pleno e isso só é possível se houver a generalização e a transferência deste para outras situações.

Na pesquisa de Carraher e outros (2001), os mestres-de-obras usavam estratégias que partiam do teste de hipóteses para responder as situações-problema surgidas na prática. Essas estratégias não se prestavam à transferência para outras situações (mas de modo algum eram consideradas inferiores), porém, enriqueciam os modelos matemáticos desenvolvidos no espaço da sala de aula. A autora completa, afirmando que "a escola é o ambiente mais favorável ao desenvolvimento de modelos gerais de resolução de problemas" (p.123). Entendemos, então, que o desenvolvimento de modelos matemáticos pautados na prática (quando possível), tornaria o aprendizado mais representativo. Dessa forma, "o trabalho constante com situações dessa natureza poderia eventualmente levar à introdução do algoritmo, tornando-se a lógica do algoritmo mais transparente para o estudante" (CARRAHER, 2001, p.123). Moysés (1997) parte da premissa de que o contexto favorece a aprendizagem, permitindo que não se perca o fio do raciocínio ao se resolver um problema matemático, mantendo-se o sentido do todo e de cada operação mental. Dessa forma, o aluno estaria mais apto a resolver o problema, "como também transferir, para novas situações, o conhecimento construído na prática" (p.68). Ceci (1998), citado por Gardner et al. (2003) afirma que a inteligência requer, além de potenciais cognitivos múltiplos de conhecimento, um contexto que proporcione recursos, significado e motivação.

É importante salientar que "a aprendizagem da Matemática na sala de aula é um momento de interação entre a Matemática organizada pela comunidade científica, ou seja, a Matemática formal, e a Matemática como atividade humana [...], a matemática praticada na sala de aula é uma atividade humana porque o que interessa nessa situação é a aprendizagem do aluno" (CARRAHER et al., 2001, p.12). Dessa forma, é no movimento entre a Matemática organizada pela comunidade científica e a Matemática como atividade humana que buscamos o entendimento do termo contextualização e sua importância no processo de aprendizagem.

Em resumo, nesta pesquisa, contextualizar refere-se ao maior número de relações e conexões que se pode fazer ao ensinar um novo conteúdo. Quanto maiores forem essas relações e mais fortes as conexões, sejam elas de dentro da Matemática ou fora dela, mais significativa será a aprendizagem. Ao iniciar uma nova aprendizagem, conceitos novos não podem se impor a conceitos anteriores como sendo novos. A constante relação estabelecida entre os conceitos que a criança já sabe e o novo conteúdo, tornará a aprendizagem mais efetiva. Em síntese, é esperado que os alunos produzam significados matemáticos, tomando por base termos congruentes àqueles vividos nas atividades "extra-escolares" (BALDINO, 1996). É este entendimento que fazemos do termo contextualização.

Pouco ou nenhum valor terá uma contextualização se os alunos não conseguirem atribuir significado às tarefas. Para evitar essa possibilidade iremos recorrer aos conhecimentos prévios conforme as diretrizes de Miras (2003). Esses conhecimentos serão considerados durante a contextualização, de tal modo que sejam relacionados direta ou indiretamente com o novo conteúdo, visando propiciar que os alunos atribuam um primeiro significado ao conceito envolvido, iniciando assim o processo de aprendizagem.

2.2. Conhecimentos Prévios

Uma ênfase sobre a compreensão leva a uma das características primeiras da nova ciência da aprendizagem: seu foco sobre o processo de conhecer. As pessoas são vistas como agentes que, ativamente, buscam informação. Eles chegam à educação formal com uma gama de conhecimentos, habilidades, crenças, e conceitos anteriores que, de um modo significativo, influenciam o que eles percebem sobre o ambiente e como eles o organizam e o interpretam. Assim, em sua vez, afetam suas habilidades para lembrar-se, raciocinar, resolver problemas e adquirir novo conhecimento. O mundo no qual eles entram não é apenas uma confusão de ruídos e sons, onde cada estímulo é igualmente destacado. Em vez disso o cérebro de uma criança dá precedência a certos tipos de informação: linguagem, conceitos básicos de número; propriedades físicas e o movimento de objetos animados e inanimados. Num sentido mais geral, a visão de aprendizagem contemporânea é aquela nas quais as pessoas constroem novo conhecimento e novas compreensões, baseados naquilo que elas já conhecem e acreditam (BRANSFORD; 2000; p.10[5]). Desconsiderar este fato tem sido sem dúvida um grande problema na educação atual. Mesmo as crianças bem novas são aprendizes ativos que trazem um ponto de vista para o cenário da aprendizagem.

Uma extensão lógica da visão de que um novo conhecimento deve ser construído a partir do conhecimento existente é que os professores precisam dar atenção às compreensões incompletas, às falsas crenças e às interpretações superficiais de conceitos que os aprendizes trazem consigo, para um dado assunto. Os professores precisam trabalhar sobre essas idéias de modo a ajudar cada estudante a atingir uma compreensão mais madura. Se as idéias iniciais

[5] BRANSFORD, J.; et al (Ed); Publicação da "National Academy of Sciences" – Academia Nacional de Ciências – EUA, pautados em Cobb, 1994; Piaget, 1952, 1973 a, b, 1977, 1978; Vygotsky, 1962, 1978.

dos alunos e suas crenças forem ignoradas, as compreensões que eles desenvolvem podem ser muito diferentes daquelas que os professores pretendem imprimir.

Van de Walle (2001) afirma que para construir ou edificar alguma coisa no mundo físico, são necessárias ferramentas, materiais e esforço. A forma como construímos nossas idéias pode ser vista de uma maneira análoga. As ferramentas que usamos para construir compreensão são nossas idéias existentes, o conhecimento que já temos. Os materiais necessários para construir nossa compreensão, devem ser coisas que vemos, ouvimos ou tocamos – nossa vizinhança física. Às vezes os materiais são nossos próprios pensamentos e idéias. O esforço que precisa ser despendido é o nosso pensamento ativo e reflexivo. Se as mentes não forem ativamente pensantes, nada acontece. Em geral usamos idéias que já temos para construir uma nova idéia, desenvolvendo no processo uma rede de conexões entre idéias. "Quanto mais idéias usarmos e quanto mais conexões fizermos, melhor será nossa compreensão (p.24, tradução nossa)".

Ao enfocar a contextualização em nosso trabalho, tínhamos como ponto de partida os conhecimentos prévios que os alunos dispunham como um veículo para iniciar a nova situação de aprendizagem. Enquanto objeto facilitador da compreensão de conceitos matemáticos, acreditávamos que a contextualização permitiria aflorar os conhecimentos prévios de significados extra-escolares ou ainda aqueles aprendidos no espaço da sala de aula que seriam acionados pelos alunos, correspondentes ao contexto fornecido, para buscarem a solução de uma questão proposta. A compreensão desses conceitos matemáticos, pela ativação dos conhecimentos prévios, não necessariamente precisaria estar ligada a um componente curricular específico. Esses conhecimentos prévios foram considerados, em nosso trabalho, durante a contextualização de tal modo que foram relacionados direta ou indiretamente ao novo conteúdo, visando propiciar aos alunos a atribuição de um primeiro significado ao conceito envolvido, iniciando-se assim o processo de aprendizagem.

Os conhecimentos prévios não só permitem o contato inicial com o novo conteúdo como também facilitam a construção dos novos significados. Um novo conteúdo torna-se mais consolidado, como já dissemos, quanto mais relações forem estabelecidas entre ele e os conhecimentos prévios correspondentes. Tais relações podem acabar por determinar se os significados serão, de modo estável e transferível, usados para contextos diversificados.

São considerados conhecimentos prévios todos aqueles conhecimentos construídos a partir de leituras, aprendidos na escola ou ainda aqueles que fazem parte do mundo real da criança que não estejam diretamente ligados à escola ou a Matemática em si mesma. Assim, os significados extra-escolares poderiam ser enfocados, nas aulas de Matemática, com a mesma importância que os conhecimentos prévios aprendidos especificamente nas aulas de Matemática. Neste sentido, os significados extra-escolares possibilitariam uma melhor compreensão do significado matemático, segundo Walkerdine (1988), citada por Baldino, (1996). Ou seja, pensar que atividades do "mundo real", por exemplo, sobre dinheiro e sobre as relações de tamanho pai/mãe/criança, quando transportadas para a sala de aula, podem aumentar o acesso dos alunos a informações matemáticas. As circunstâncias em que se estabelecem a aprendizagem de conceitos matemáticos e a relação existente entre as palavras que envolvem esses conceitos, para com os conhecimentos que os alunos trazem de suas experiências no mundo, podem fazer da aprendizagem uma experiência positiva.

Embora necessária a existência de conhecimentos prévios, em qualquer situação de aprendizagem, não é condição suficiente para que os alunos venham a entender e a guardar novas informações. De acordo com Miras (2003), "diante de um novo conteúdo de aprendizagem, os alunos podem apresentar conhecimentos prévios mais ou menos elaborados, mais ou menos coerentes e, sobretudo, mais ou menos pertinentes, mais ou menos adequados ou inadequados em relação a esse conteúdo" (p.62). Dessa forma, os conhecimentos prévios precisariam ser elaborados ativamente, atualizados, organizados e que estivessem disponíveis no momento adequado para se estabelecer relações com o novo conteúdo. Isso é conseguido no trabalho em grupo, por meio de discussões, sob orientação do professor, antes e depois de novos conhecimentos serem aprendidos. Esse trabalho de discussão "pós-aprendizado novo" é muito importante, haja vista que é a partir dele que o aluno irá organizar o novo conhecimento e definir suas estruturas de pensamento com relação ao tema em estudo. À medida que essa organização se dá, o aluno abandona os conhecimentos prévios inadequados e fortalece os conhecimentos prévios adequados, finalizando um processo e dando início a outro processo. Esse processo é possível, pois "o professor trabalhando com o aluno, forneceu as informações, fez perguntas, corrigiu e obrigou a criança a explicar. Os conceitos da criança foram formados pelo processo da aprendizagem, em colaboração com o adulto" (VYGOTSKY, 1979, p.142). Este mesmo autor refere-se a conceitos científicos e conceitos quotidianos, respectivamente, para aqueles conceitos que a criança já traz de sua vivência de mundo referindo-se às demais formas de conhecimento e para aqueles aprendidos na escola. Neste sentido, referindo-se ao desenvolvimento dos conceitos científicos na infância e relacionando-os com os conceitos cotidianos, conclui-se que "um nível mais elevado no domínio dos conceitos científicos também eleva o nível dos conceitos cotidianos espontâneos" (p.142) e ainda que, apesar de estarem estreitamente relacionados, os conceitos científicos e espontâneos se desenvolvem em sentidos inversos: "os conceitos científicos desenvolvem-se para baixo, através dos conceitos espontâneos; os conceitos espontâneos desenvolvem-se para cima, através dos conceitos científicos" (mesmo autor, mesma obra, p.144).

Se ao iniciar-se um novo processo de aprendizagem, for diagnosticado que os conhecimentos prévios de que os alunos dispõem, sobre o conteúdo em questão, se apresentarem desorganizados ou errôneos, dificultando consideravelmente os processos de ensino e aprendizagem dos novos conteúdos, é importante que se resolva esse problema com atividades específicas, antes de se dar início à aprendizagem dos novos conteúdos.

Para acompanhar o trabalho pretendido em nosso projeto, o ideal seria que os alunos dele participantes já tivessem conhecimento sobre números naturais, inteiros e racionais, com habilidade nas operações definidas sobre esses conjuntos numéricos. Importante também seria que tivessem feito um bom trabalho com a pré-álgebra e, ainda, que esses alunos tivessem noções básicas sobre espaço e forma, aprendidas nas aulas regulares de Desenho Geométrico nessa escola.

Todo trabalho abrangendo os conhecimentos prévios em relação à construção dos conceitos relacionados a Polinômios e Funções Polinomiais, por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Polinômios através da Resolução de Problemas, teve como "pano de fundo" alguns aspectos da Teoria de Vygotsky (1979, 1978, 1988), conforme já citamos anteriormente, especificamente em relação a interação social, zona de desenvolvimento proximal, intermediação docente, e formação de conceitos, que apresentaremos a seguir. Ainda neste capítulo, faremos um histórico da Resolução de Problemas e citaremos, brevemente, duas outras metodologias de ensino: Investigação Matemática e PBL (Problem-Based Learning. Aprendizagem Baseada em Problemas), que fizeram parte de nossos estudos antes de definirmos qual metodologia de ensino contemplaria os objetivos desta pesquisa. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, também apresentada neste capítulo, utilizada nesta pesquisa como metodologia de sala de aula, seguirá as orientações de Onuchic (1999, 2004), por se tratar de uma metodologia que tem seu ensino desenvolvido sempre a partir de um problema, tendo o professor como o responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador.

2.3 Resolução de Problemas: PBL, Investigação Matemática, Resolução de Problemas e interação social.

Pesquisas recentes têm apresentado discussões sobre as diferentes abordagens de ensino, ora chamadas de metodologia de ensino, ora chamadas de concepções de ensino. Ambas designações tratam da forma como os conteúdos devem ser abordados nas situações de ensino, especificamente para o ensino em sala de aula. Estas expressões, embora pareçam distintas, quando estudadas não se pode assegurar ao certo quais sejam suas fronteiras. O que é possível fazer, é apontar algumas estratégias que diferenciam umas das outras. Entretanto, essas concepções/metodologias de modo geral visam a um ensino mais significativo, menos diretivo, centrado no aluno, contrário à forma de recepção passiva pelo aluno dos conhecimentos apresentados pelo professor, no ensino tradicional vigente.

Várias são as concepções/metodologias que aparecem nessas pesquisas, entretanto, não iremos abordá-las todas aqui. Gostaríamos de falar de três delas: PBL (Problem-Based Learning), Investigação Matemática e Resolução de Problemas. Pesquisando sobre elas, faremos uma apresentação dos aspectos mais relevantes dessas concepções/metodologias. A Resolução de Problemas e a Investigação Matemática estão presentes na literatura sobre Educação Matemática e nos documentos curriculares, enquanto que a PBL faz-se presente mais fortemente em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, na Engenharia, se apresentando também na Educação Matemática.

2.3.1 PBL

A PBL surgiu no final dos anos 60 na Escola de Medicina da Universidade McMaster no Canadá, expandindo-se pelo mundo nos currículos de formação profissional – principalmente os das áreas médicas – e, ainda, expandindo-se para diferentes áreas de ensino: fundamental, médio e superior. No Brasil existem implementações curriculares da PBL no ensino de medicina da Universidade Estadual de Londrina (UEL), na Faculdade de Medicina de Marília (FAMEMA), na Escola de Saúde Pública do Ceará (ESP – CE) (MAMEDE; PENAFORTE, 2001), e no curso de medicina da UFSCar (Universidade Federal de São Carlos).

Mamede & Penaforte (2001) caracterizam a PBL como uma abordagem consolidada nos princípios sobre os quais se baseia o processo de aprendizagem e tem implicações e determinações sobre todas as demais dimensões do processo educacional, ou seja, a PBL é uma forma colaborativa de aprendizagem e instrução direcionada para a construção de modelos mentais coerentes aos problemas apresentados. Esses mesmos autores caracterizam a PBL como “uma estratégia educacional e uma filosofia curricular, concebendo um processo de aprendizagem onde estudantes autodirigidos constroem ativamente seu conhecimento” (p.17).

Segundo Ribeiro (2005), a PBL não é uma abordagem educacional tão nova e tampouco é estática. Não caracterizá-la como nova é proveniente do fato de que a aprendizagem motivada pelo confronto com problemas é mais antiga do que a própria educação. Também não é estática, pois tem se modificado com relação ao modelo da Universidade McMaster para se adaptar a outros contextos educacionais. Além disso, seus elementos fundamentais parecem apoiar-se nas teorias de vários autores como Piaget, Ausubel, Bruner, Dewey, Rogers e Freire. Diz ainda Ribeiro que a maioria dos autores coloca a PBL no leque das abordagens construtivistas. Seus idealizadores partem da premissa, da psicologia cognitiva, de que a aprendizagem não é um processo de recepção, mas da construção de novos conhecimentos.

Barrows (2001) e Engel (2004), citados por Ribeiro e Mizukami (2005) dizem que a PBL é implementada em vários formatos: como uma estratégia curricular (em todo o currículo); parcial (em uma disciplina isolada dentro de um currículo convencional) também chamada de *post-holing*, ou seja, a inclusão de problemas em alguns momentos de disciplinas que utilizam métodos convencionais de ensino (WILKERSON; GIJSELAERS; 1996; citados por RIBEIRO e MISUKAMI, 2004, p.89-102); e pontual (em determinados momentos de disciplinas quando se deseja aprofundar alguns tópicos do conteúdo) (STEPIEN & GALLANGHER, 1988, citados por RIBEIRO e MISUKAMI, 2004, p.89-102).

Na PBL o objetivo central está voltado ao incentivo e à motivação para a aprendizagem de conhecimentos e habilidades inerentes a uma área do conhecimento, sugerindo um problema com o objetivo de focar e iniciar a aprendizagem, em um espaço contextualizado. Esses problemas são elaborados pelo professor no caso de a PBL estar centralizada em uma disciplina.

2.3.2 Investigação Matemática

A expressão "Investigação Matemática" e seu uso nas aulas de Matemática expressam diferentes interpretações por parte de pesquisadores e professores que ensinam Matemática, embora muitos dos significados que diferentes autores apresentam sejam bastante próximos. Ernest (1996, p.28) afirma que os conceitos de investigação e problema ainda estão mal definidos e, também, que podem ser entendidos de formas diferentes. De acordo com este pesquisador, o consenso que existe é que ambos estão relacionados com a inquirição[6] matemática.

Ponte et al (2003, p.16) afirmam que "uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver". Esses mesmos autores dizem que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos: 1) "o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões; 2) o processo de formulação de conjecturas; 3) a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas; 4) e finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado" (p.20).

Na investigação matemática em sala de aula, o desenvolvimento não é previsto de antemão pelo professor. Ele pode ter alguns parâmetros por onde os alunos possam caminhar, entretanto, devido à sua abertura, a investigação matemática pode surpreender e alterar a proposta inicial e desvendar aspectos ainda não pensados/observados pelo professor. Em alguns casos, esses aspectos se revelam tão ou mais importantes que a própria solução do problema originalmente proposto. Algumas vezes, "não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que ele proporciona" (mesmo autor, mesma obra, p.17).

A Investigação Matemática,

> como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor (mesmo autor, mesma obra, p.23).

---

[6] Inquirição: questionamentos; perguntas; inquérito.

2.3.3 Resolução de Problemas na História

Problemas têm ocupado um lugar central no currículo da Matemática escolar desde a Antigüidade, mas a resolução de problemas não. Somente recentemente educadores matemáticos têm aceitado a idéia de que o desenvolvimento de habilidade em resolução de problemas merece atenção especial. Com este foco sobre resolução de problemas tem havido alguma confusão. O termo resolução de problemas tem se tornado um "slogan" encampando diferentes visões do que é educação, do que é escolarização, do que é Matemática e porque se deve ensinar Matemática em geral e resolução de problemas em particular (STANICK e KILPATRICK; 1989; tradução nossa). Onuchic (1999) diz que os problemas fazem parte da história da Matemática, entretanto, seu enfoque maior se deu a partir do movimento, no mundo, da Matemática Moderna.

Ao longo da história, o ensino de Matemática tem apresentado mudanças, sempre buscando estabelecer relações cada vez mais amplas entre a Matemática da comunidade científica e a Matemática do cotidiano. O pensar matemático, as relações lógico-matemáticas, e o raciocínio lógico-dedutivo, conseguidos por meio do ensino baseado em problemas, refletem o que se espera do ensino de Matemática numa sociedade do conhecimento, onde o saber matemático deve deixar de ser condição de poucos e passar a ser uma necessidade de muitos.

As reformas ocorridas no ensino e na aprendizagem de Matemática no Brasil, ao longo da história da Matemática, durante o século XX, são apontadas por Onuchic (1999): (1) O ensino de matemática por repetição; (2) O ensino de matemática com compreensão; (3) A matemática moderna; (4) A resolução de problemas; e (5) O ensino de matemática através da resolução de problemas.

A Matemática por repetição (início do século XX), embora já apresentasse um caminho de trabalho a ser seguido (aritmética, álgebra e geometria), era aproveitada por poucos. Poucos conseguiam pensar sobre o que estavam escrevendo ou ouvindo e a maioria se esquecia, em pouco tempo, daquilo que havia memorizado. Essa época foi apresentada por Andrade, em 1998, em sua dissertação de mestrado, como um período onde a preocupação estava voltada ao "desempenho bem sucedido na obtenção da solução de problemas" (p.9), não havendo preocupação com os processos envolvidos. A resolução de listas de exercícios extensas resolvidas exaustivamente era responsável pela capacidade em resolver problemas, "tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta" (mesmo autor e mesma obra, p.9).

Quanto à Matemática por compreensão, (2), os alunos deveriam compreender o que o professor estava falando, entretanto, somente o professor falava. O aluno não participava da construção do conhecimento. Nessa época, começaram a falar em resolução de problemas[7] como um meio para se aprender Matemática. Essa iniciativa surgiu depois do livro de George Polya "How to solve it" publicado em 1945. Nesse livro, Polya defendia a teoria de que os alunos precisavam pensar. Começaram a surgir as heurísticas. A partir de então, surgem novas teorias como a do americano Herbert F. Spitzer que, em 1948, desenvolveu um trabalho sobre aritmética básica apoiado na aprendizagem por compreensão a partir de situações-problema, e do brasileiro Professor Luis Alberto S. Brasil que, em 1964, apresentou a defesa de que o ensino de matemática deveria ser construído a partir de um problema gerador de novos conceitos e novos conteúdos (ONUCHIC, 1999). "Em 1950 surge um currículo organizado em tópicos, separados por séries, desligados da matemática de fora da escola (ibid, p.202)".

Durante as décadas de 60 e 70, o ensino de Matemática no Brasil e em outros países do mundo, foi influenciado por um movimento de renovação chamado Matemática Moderna, (3), que prevaleceu por longos 20 anos. Entretanto, nesse período, a Matemática por compreensão não se perdeu, sobrevivendo paralelamente à Matemática Moderna. Depois desses 20 anos, caracterizados como anos de embaraço, a crença de que o ensino de Matemática deveria ser realizado com compreensão estava de volta, sugerindo que a Matemática fosse trabalhada pela resolução de problemas. Assim a partir da década de 60 (1960-1970) começaram as preocupações com os processos envolvidos na resolução de problemas. O "ensinar a resolver problemas", estava relacionado com o uso de estratégias (ANDRADRE, 1998).

Nesse contexto, a resolução de problemas, (4), surge como uma disciplina, ganhando espaço no mundo inteiro. Nessa época (final dos anos 70), o mundo, principalmente os Estados Unidos, em grande parte, se voltava em torno do lema: resolver problemas deve ser o foco da Matemática escolar para os anos 80 (ONUCHIC, 1999). Toda essa euforia, congressos, dissertações, teses, grupos de pesquisa, cursos de pós-graduação em Educação Matemática[8], etc., todos voltados à investigação de estratégias e habilidades cognitivas em torno da resolução de problemas, estendeu-se até o final da década de 80, quando pesquisadores começaram a verificar que, embora houvesse muitos alunos bons resolvedores de problemas, na massa uns aprendiam, outros não. Nessa década, a resolução de problemas,

[7] As primeiras experiências sobre resolução de problemas podem ser creditadas a Dewey, entre 1896 e 1904. Ver Onuchic (1999, p.201-202)

[8] Ver Onuchic (1997).

como foco da matemática escolar, foi o ponto central do trabalho de muitos pesquisadores. Entretanto, a interpretação dada, a essa concepção diferia de grupo para grupo, ou seja, as diferentes orientações[9] dadas sobre como se deveria proceder num trabalho com resolução de problemas, no espaço da sala de aula, estavam sendo interpretadas diferentemente. Essas recomendações deveriam ampliar os horizontes dos educadores para um ensino de Matemática no qual se entendesse a Matemática a ser ensinada, não somente em função da Matemática necessária para resolver um dado problema, num dado momento. Uma unidade estrutural e as relações do todo não deveriam ser sacrificadas.

A década de 80, preocupada com o processo envolvido na resolução de problemas, sob a influência do uso de estratégias especiais, entretanto, manteve o processo preso à busca de soluções. As discussões que foram surgindo, no final da década de 80, estavam voltadas aos questionamentos sobre o ensino e o uso de estratégias e modelos. Começaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. A resolução de problemas passa, então, a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida, como um meio de se ensinar Matemática (ANDRADE, 1998). Como um primeiro passo em seu ensino, a Matemática utiliza os problemas. Mas não encarados apenas como aplicações matemáticas. Eles, agora, são uma forma de "fazer matemática".

> A abordagem da resolução de problemas como uma metodologia de ensino incorpora, também, as abordagens da resolução de problema como um objetivo ou como uma arte. Nela o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas como aprende Matemática para resolver problemas, e o ensino de resolução de problemas não é mais um processo isolado. Nela, ele é fruto de um processo mais amplo. È fruto de um ensino de Matemática que se processa por meio de resolução de problemas (ANDRADE, 1998, p.13).

No Brasil, (5), o ensino de Matemática através da resolução de problemas tem ganhado espaço nas pesquisas. Entretanto, na maioria das salas de aula, isso pouco se tem notado. Vários aspectos interferem nesse resultado e, dentre eles, a formação dos professores, tanto a inicial quanto a continuada, e o livro-texto, utilizado como a principal "ferramenta" de trabalho por muitos professores. Para o segundo caso, temos observado que os livros didáticos[10], diferente do que apontam as pesquisas sobre a aprendizagem Matemática através da Resolução de Problemas, trabalham com resolução de problemas no âmbito da aplicação

---

[9] Ver Onuchic (1999, p.204).
[10] No Capítulo 3 apresentaremos os livros examinados nesta pesquisa.

de conhecimentos matemáticos anteriormente adquiridos. Ao iniciar cada capítulo, os livros didáticos apresentam dois ou três problemas resolvidos e sugerem uma lista de problemas de aplicação, que deverão ser resolvidos pelos alunos. Nessa forma, o problema não funciona como um gerador de aprendizagem, onde o aluno é levado a exercitar suas capacidades intelectuais utilizando aquilo que previamente havia sido construído. Quando lhes são apresentados problemas resolvidos, os alunos apenas trabalham sobre esses problemas utilizando um processo que Polya (1995) chamou de imitação. Quanto à Resolução de Problemas como metodologia, Romanatto (2007), afirmou que a mesma "pode fazer com que os conceitos e os princípios matemáticos se tornem mais compreensivos, uma vez que eles serão reconstruídos, adquiridos, investigados de maneira ativa e significativa. È a apropriação do conteúdo – uma Matemática mais qualitativa em destaque" (informação verbal)[11].

Quanto à formação de professores, Onuchic (1999) diz que "tanto a inicial quanto a continuada pouco têm contribuído para qualificá-los para o exercício da docência" (p.212). Azevedo (2002) concorda com essa concepção, estendendo-se ao fato de que "as reformas educacionais, inovação pedagógica, planos, propostas curriculares" (p.28), não dão conta dos objetivos esperados para a educação. Segundo esta autora, os professores precisam ter boa formação e a prática docente precisa ser repensada.

Buscamos apresentar neste trabalho a trajetória da Resolução de Problemas como uma disciplina e posteriormente como uma metodologia de ensino. De fato, as pesquisas apontam para a importância da aprendizagem matemática através da Resolução de Problemas enquanto metodologia de ensino, mas essa discussão ainda não é, na verdade, a realidade das salas de aula brasileiras. As discussões estão ainda em pequenos grupos de pesquisa, seminários e congressos. A sala de aula ainda é palco, conforme veremos nos livros didáticos, de uma Matemática baseada na aplicação de conceitos anteriormente adquiridos pelos alunos a partir de problemas resolvidos. Deste modo, entendemos que a Resolução de Problemas, como metodologia de ensino, é bastante complexa, ela requer: envolvimento do aluno; motivações internas e externas; a aprendizagem de como trabalhar com essa metodologia, não só matematicamente, mas levantando hipóteses; exercitar o hábito da escrita e da leitura em Matemática; criatividade; imaginação; iniciativa; autonomia; tentativas sem medo de errar; e a experimentação. Por parte do professor, essa metodologia exige maior domínio nos conteúdos ensinados, não se baseando apenas nos conteúdos de livros didáticos, proporcionando, assim,

[11] Professor Doutor Mauro Carlos Romanatto, fez esta afirmação em Plenária intitulada: "Ensinando Matemática a partir da Resolução de Problemas", realizada no dia 17 de Setembro de 2007, na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Departamento de Metodologia de Ensino - DEME.

aos alunos condições de compreensão, conseguidas através da resolução de variados problemas. O sucesso dessa metodologia depende do conhecimento que os professores tenham a respeito dos conteúdos específicos que serão abordados a partir da resolução de problemas, como também das crenças e concepções que tenham sobre Matemática e ensino de Matemática. Como já citamos, esse trabalho não está centrado na figura do professor e, esse é um fato, que os alunos precisam superar, pois a construção do conhecimento pode e deve partir deles, por meio de reflexão e exploração, levando-os a serem co-construtores de um conhecimento com compreensão e significado.

> Em lugar de apenas memorizar fatos e procedimentos de forma rotineira, os professores deveriam ter coragem de trabalhar sobre os procedimentos informais que os alunos trazem para a escola e de propor situações desafiadoras que os levassem a fazer conexões e tirar relações. (AZEVEDO, 2002, p.88).

O professor que permitir se arriscar e avançar na construção do conhecimento matemático, estando disposto a se deparar com o inesperado, estará pronto para trabalhar com a Metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Acreditamos que, para isso, o ponto de partida deverá ser professores bem formados, inteligentes, hábeis, ousados e acima de tudo, comprometidos com um bom ensino de Matemática. O fazer matemática deve estar presente no ensino escolar e não ser uma atividade reservada a poucos e superiores indivíduos.

Em nossa pesquisa, nos interessamos pelo conhecimento dessas três concepções/metodologias de trabalho para a sala de aula com a intenção de identificar, entre elas, a linha que poderíamos adotar no desenvolvimento da construção do conhecimento pelos nossos alunos, em nossa sala de aula, com relação a Polinômios.

Decidimos, considerando que apesar das três concepções/metodologias apresentadas neste capítulo, sempre partirem de problemas, por adotar a Metodologia de ensino-aprendizagem de Polinômios através da Resolução de Problemas como metodologia de trabalho em nossa sala de aula.

2.3.4 A Metodologia de Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas

Nosso trabalho será norteado pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, conforme orientações de Onuchic (1999; 2004) que afirma que, a maioria (senão todos) dos importantes conceitos e procedimentos matemáticos pode ser mais bem trabalhada através da resolução de problemas.

A caracterização da Educação Matemática em termos de Resolução de Problemas, segundo Onuchic (1999), "reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental". (p.203). Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos no processo de ensino-aprendizagem, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade. É importante considerar que a abordagem de resolução de problemas como uma metodologia de ensino, não parte do nada, não surge como algo novo, inusitado, e sim, ela aproveita tudo que havia de bom nas reformas anteriores: "repetição, compreensão, o uso da linguagem matemática da teoria dos conjuntos, resolver problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional". (Onuchic, 1999, p.211).

A resolução de problemas, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para os terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, tem destaque na valorização dos seus processos e na socialização dos resultados (BRASIL, 1998). Em Cunha (2000), a resolução de problemas é concebida como oposta à aplicação de procedimento, uma vez que estes poderiam ser os meios conhecidos. É valorizada a heurística e o processo, neste mesmo sentido: "Na resolução de problemas, os alunos não dispõem de algoritmos que lhes permitam a obtenção imediata de resultados, ao contrário do que acontece nos exercícios." (p.1).

O National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM, 1977), nos Estados Unidos, definiu a resolução de problemas como "o processo de aplicação de conhecimentos adquiridos previamente a situações novas e desconhecidas". (citado por BRANCA, 1997, p.5)

Falar em Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino, requer antes um delineamento da expressão "problema", carro chefe desta metodologia de ensino, bem como das outras duas concepções/metodologias citadas no início deste capítulo. Encarados, nessa metodologia, como sendo o gerador de uma nova aprendizagem, a literatura apresenta uma gama de definições para essa expressão. Autores como Ernest (1996), Onuchic e Allevatto

(2004), Echeverría (1998), Kantowski (1997) e Van de Walle (2001), definem o que entendem por “problema”.

Partindo de Ernest (1996, p. 29), apoiado na teoria de Lester (1980, p. 287), problema é “uma situação na qual um indivíduo ou um grupo é chamado a realizar uma tarefa para a qual não há um algoritmo imediatamente acessível que determine completamente o método de solução”, acrescentando-se o desejo de realizá-la. Echeverría (1998, p.15), apoiada na mesma base teórica de Ernest, define problema como sendo “uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”. Já Kantowski (1997, p.270) argumenta que problema é caracterizado por “uma situação que se enfrenta sem contar com um algoritmo que garanta uma solução”. Van de Walle (2001) parte da afirmativa de que problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Para Onuchic e Allevatto (2004, p.221) problema “é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer”.

Dentre as concepções apresentadas, a que mais se aproxima de nossa interpretação é a afirmativa de Onuchic e Allevatto (2004). Sendo assim, sempre que nos referirmos a expressão “problema”, devemos recorrer a essa afirmativa.

Nas concepções/metodologias de ensino atuais que têm o problema como gerador de uma nova aprendizagem, o professor assume um papel diferente daquele predominante nas propostas de ensino tradicional, em que o ensino estava baseado na figura do professor. Não é de nosso interesse relatar uma extensa lista sobre esse papel, entretanto, abordaremos os posicionamentos de alguns autores, que consideramos muito próximos daquilo que subsidiou o desenvolvimento desta pesquisa.

Para autores como Ponte (2003), Ernest (1996), Christiansen e Walther (1986), Tomaz (2001), Kantowski (1997) e Onuchic (2004), o professor deixa de ser o responsável pela aprendizagem dos alunos, assumindo o papel de um recurso para os mesmos; para isso, deixa de ter o controle sobre as respostas; sobre os métodos aplicados pelos alunos e às vezes até sobre a escolha dos conteúdos de cada aula.

Dentre as mudanças que cabem ao professor, Christiansen e Walther (1986), dizem que elas estão relacionadas à distribuição dos diferentes tipos de atividades, às suas ações e à seqüência de ensino e que o professor é um mediador matemático. Kantowski (1997) chama o professor de um “facilitador” cabendo a ele o estímulo ao pensamento crítico e o auto-aprendizado entre os estudantes, pela orientação e não simplesmente por preocupar-se em transmitir uma quantidade enorme de informações, tanto no processo de aprendizagem, como no de cooperação mútua entre os alunos, mantendo o fluxo de discussões, assegurando o “movimento” do processo de aprendizagem. Estimular os estudantes a trabalharem com suficiente profundidade, fazendo perguntas e questionamentos durante a análise e a resolução dos problemas, é também função do facilitador. Cabe ao facilitador, ainda, a intervenção limitada a determinados momentos do processo, de modo a garantir que os alunos sejam capazes de distinguir conceitos importantes de fatos triviais. Este mesmo autor, na página 274, define a importância do papel do professor no ensino de resolução de problemas, apontando que o mesmo “deve variar de *modelo* para *prótese*, para *fornecedor de problemas*, para *facilitador*, à medida em que a habilidade dos alunos para resolver problemas se desenvolve” [...] “a função do professor se diferencia em cada nível”.

Conforme enfatiza Polya (1995), o papel do professor deve centrar-se no auxílio ao estudante, auxiliando-o “nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho”. Ele complementa dizendo que “o professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante” (p.1). Onuchic (2007) afirmou que, o papel do professor ao aplicar um problema para alunos, trabalhando em grupos, apresenta dois momentos: inicialmente ele é um observador e, num segundo momento, deve se tornar um questionador, desafiador, mediador e incentivador da aprendizagem (informação verbal)[12].

Nesta pesquisa, o professor assume o papel de orientador do processo de ensino-aprendizagem, sempre motivando seus alunos a participarem das aulas, levantando hipóteses, discutindo entre si e buscando, ao final dessas discussões, um consenso para a resposta correta. Todo esse processo é acompanhado de perto pelo professor. No final do processo, o professor é o responsável pela formalização da atividade, apresentando aos alunos o rigor matemático necessário em casa atividade proposta.

Pode-se notar que o professor não tem, por isso, seu papel diminuído quando a aprendizagem dos alunos é vista como um processo de construção do conhecimento, pois a aprendizagem é de responsabilidade de todos os envolvidos no processo. Sejam eles, alunos, professores e instituição. Sendo assim, a experiência docente deve assumir um papel de formação contínua que se inicia no espaço da sala de aula, haja vista que situações inusitadas

[12] Professora Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic, fez esta afirmação em Plenária intitulada: “Ensinando Matemática a partir da Resolução de Problemas”, realizada no dia 17 de Setembro de 2007, na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Departamento de Metodologia de Ensino - DEME.

podem surgir ocasionando um reposicionamento dos sujeitos envolvidos, de modo que o professor irá, junto com seus alunos, buscar um melhor caminho para a solução da situação enfrentada.

O aprender a realizar tarefas em grupo, ou com caráter aberto, ou o levantamento de hipóteses, ou ainda a discussão, não são processos que garantem o envolvimento dos alunos de imediato nem tampouco êxito na proposta inicial, entretanto, a incorporação destas estratégias no currículo, pouco a pouco, apresentará melhoria na sua implantação e no próprio desenvolvimento delas mesmas.

Na Metodologia de Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, Onuchic (1999) sugere uma *"proposta básica"* de aula, orientada a partir da solicitação de professores, em relação às suas aulas onde ocorrem sessões de resolução de problemas. Nesta proposta, a autora sugere 1) formar grupos e entregar a atividade. Enquanto os alunos realizam as atividades em seus grupos, 2) o papel do professor deixa de ser o de comunicador do conhecimento e passa a ser, de início, um observador da sala de aula, objetivando analisar o comportamento dos alunos diante de um trabalho colaborativo; depois, quando os alunos estão, nos grupos, envolvidos com a resolução do problema, ele passa a ser o controlador, interventor, questionador e incentivador da aprendizagem. Em vez de respostas, o professor deve fazer perguntas, incentivando os alunos a, apoiados na troca de idéias com seus colegas, atravessarem suas dificuldades. O professor faz a intermediação no sentido de levar os alunos a pensar, dando-lhes um tempo para tal, acompanhando suas explorações e resolvendo, quando necessário, problemas secundários. 3) Após essa etapa, alguns resultados serão postos na lousa por um membro de cada grupo. Independente de estarem corretas ou não as respostas, essas irão à lousa para uma discussão que ocorrerá nessa etapa. 4) A etapa seguinte é uma plenária, onde o professor chama os alunos para discutirem seus pontos de vista. 5) Os resultados, principalmente aqueles apresentados como dificuldade, novamente serão trabalhados, tendo, muitas vezes, o professor que recorrer à discussão sobre problemas secundários, de conceitos ou técnicas que os alunos não sabem, possibilitando a continuidade do trabalho. 6) Após a análise e retirada das dúvidas, busca-se um consenso do grupo sobre o resultado defendido. 7) Num último momento, chamado "formalização", o professor faz uma síntese do que se objetivava aprender a partir da resolução do problema proposto. Neste momento, o professor destaca o que de matemática nova se construiu a partir daquele problema e, ainda, registra na lousa, dentro do rigor matemático exigido naquela faixa etária, as devidas definições, identifica as propriedades e faz as demonstrações. (Onuchic, 1999). A preparação para as aulas que se iniciam a partir de problemas, dentro dessa metodologia, exige um trabalho bem preparado que deve ser assumido pelo professor previamente. Enquanto os alunos realizam as atividades propostas, o professor já fez algumas previsões do que poderia ocorrer frente àquela atividade. Sendo assim, o professor faz, durante a realização das atividades, um trabalho de questionamentos no sentido de orientar os alunos para atingir o objetivo pretendido.

Nesta pesquisa, dentro do que será possível, seguiremos a "proposta básica" de Onuchic (1999) como roteiro de aula, conforme apresentamos anteriormente, neste capítulo. Os grupos serão reunidos de antemão por meio de sorteio, sendo compostos por três elementos cada grupo. Os grupos serão os mesmos durante toda a realização das atividades. Posteriormente, ao elaborarmos o Projeto II, optamos por manter os mesmos grupos. No Projeto I, analisaremos dois aspectos: individual e em grupo. No primeiro, verificaremos até que ponto os alunos conseguirão produzir, sem a colaboração dos colegas, e quais serão as contribuições provenientes do trabalho individual que cada aluno poderá apresentar quando for para o grupo. Observaremos os casos em que o aluno não tenha conseguido avançar quando estava só e, ao reunir-se com os colegas de grupo, buscaremos verificar se este aluno pôde apresentar avanços ou não. No Projeto II será enfocado somente o trabalho em grupos.

2.3.5. A Perspectiva Sócio –Interacionista: Interação Social, zona de desenvolvimento proximal e formação de conceitos.

Esta pesquisa foi orientada no referencial sócio-interacionista por considerarmos a teoria de Vygotsky a que melhor contempla os aspectos que buscamos evidenciar no contexto da sala de aula. Acreditamos que a aprendizagem de novos conceitos está diretamente relacionada aos processos de interação social que ocorrem na sala de aula, bem como, a outros fatores que transcendem a este aspecto. Para esses casos, buscaremos fundamentos em outras teorias. Sendo assim, no que se refere à zona de desenvolvimento proximal, à formação de conceitos e à interação social, recorreremos à teoria de Vygotsky.

A afirmativa de Vygotsky (1979, p.138) de que a "criança fará amanhã sozinha aquilo que hoje é capaz de fazer em cooperação" evidencia a importância da interação social para a formação do indivíduo. O ser humano desenvolve-se por meio das relações que estabelece com outros indivíduos e, conseqüentemente, o meio social constitui-se como a fonte na qual se fundamenta o desenvolvimento conceitual da criança. Para esse mesmo autor, esse desenvolvimento ocorre a partir do sentido social para o individual ao afirmar que "um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal,..., primeiro no nível social e, depois, no nível individual; primeiro, entre pessoas (interpsicológica), e, depois, no interior da criança (intrapsicológica). Isso se aplica igualmente... para a formação de conceitos". (1983, p.84). A interação social implica um mínimo de duas pessoas intercambiando informações, com um certo grau de reciprocidade entre os participantes, supondo envolvimento ativo de ambos nesse intercâmbio e trazendo a eles diferentes experiências e conhecimentos (MOREIRA, 1999).

A interação social provoca, portanto, a aprendizagem que, por sua vez, deve ocorrer no intervalo da zona de desenvolvimento proximal, que é definida como sendo "a discrepância entre a idade mental real de uma criança e o nível que ela atinge quando resolve problemas com auxílio". (VYGOTSKY, 1979, p.137)

No âmbito da zona de desenvolvimento proximal deve ocorrer a aquisição de conceitos que são formados, segundo Vygostsky em três etapas:

a) Conjuntos Sincréticos: a criança tem uma idéia imprecisa do conceito, onde o todo é interpretado sem nenhuma organização ou base. É um processo que tem como característica a subjetividade.
b) Pensamento por complexo: a criança já passa a perceber a necessidade de existência, determinando relacionamentos para formar o conceito, ou seja, ocorre ainda impressão subjetiva, mas também relações realmente existentes.
c) Conceitos potenciais: passa a existir o isolamento de atributos comuns. Esse isolamento é feito a partir de uma classe de elementos em que o indivíduo consegue abstrair todos os traços comuns mais relevantes.

A transição de uma etapa para outra é gradual e não atinge simultaneamente todas as áreas do pensamento.

Em "Pensamento e Linguagem" (1979), Vygotsky fala sobre a formação de conceitos referindo-se aos conceitos cotidianos e aos conceitos científicos. O primeiro deles, como já dissemos, refere-se àqueles conceitos aprendidos na vivência da criança e com outras pessoas que não estejam diretamente ligadas à escola; o segundo, refere-se àqueles conceitos aprendidos na escola, por meio de um processo que este autor chama de mediação. Essa mediação pode se dar não somente pela intervenção do professor, mas também é mediada por algum outro conceito. Neste sentido, "a própria noção do conceito científico implica uma certa posição em relação a outros conceitos, isto é, um lugar dentro de um sistema de conceitos" (mesma obra, 1998) . Esses conceitos, segundo Vygotsky, estão estreitamente relacionados. Os quotidianos são chamados conceitos sem consciência, ao passo que os conceitos científicos, estão ligados à instrução escolar e ao desenvolvimento mental da criança, agem sobre os conceitos cotidianos, alterando sua estrutura psicológica.

Nesta pesquisa daremos especial atenção aos conceitos que os alunos já têm, sejam eles da escola ou de fora dela, buscando sempre estabelecer uma relação entre aquilo que a criança já sabe e o conhecimento que se deseja que ela venha a saber.

Capítulo 3

POLINÔMIOS

CAPÍTULO 3

POLINÔMIOS

3.1 O que é Álgebra no Ensino Fundamental

Aritmética é o ramo da Matemática que trabalha sobre números, relacionando-os, definindo operações sobre eles, estabelecendo propriedades sobre elas e fazendo aplicações.

Qual seria a definição para Álgebra?

"Há muito tempo a Álgebra desfruta de um lugar de destaque no currículo de Matemática, representando para muitos alunos tanto a culminação de anos de estudo de Aritmética como o início de mais anos de estudo de outros ramos da Matemática. Poucos contestam sua importância, embora muitos alunos só tenham noções superficiais de seu significado e seu alcance" (HOUSE, P.A., 1995, p.1).

Não é fácil definir Álgebra. A Álgebra ensinada para alunos dos ciclos III e IV do Ensino Fundamental tem uma conotação muito diferente daquela ensinada em cursos superiores de Matemática. Saunders Mac Lane e Garret Birkhoff, 1967, citados por Usiskin, 1995, começam sua Álgebra com uma tentativa de ligar as álgebras do Ensino Fundamental com o Ensino Universitário.

> A Álgebra começa como a arte de manipular somas, produtos e potências de números. As regras para essas manipulações valem para todos os números, de modo que as manipulações podem ser levadas a efeito com letras que representem os números. Revela-se então que as mesmas regras valem para diferentes espécies de números [...] e que as regras inclusive se aplicam a coisas [...] que de maneira nenhuma são números. Um sistema algébrico, como veremos, consiste em um conjunto de elementos de qualquer tipo sobre os quais operam funções como a adição e a multiplicação, contanto apenas que essas operações satisfaçam a certas regras básicas (USISKIN, Z.; 1995, p.9)

Se a primeira sentença dessa citação refere-se à Aritmética, então a segunda refere-se à Álgebra do Ensino Fundamental. No que diz respeito aos objetivos desse artigo de Usiskin

(1995), então, a Álgebra do Ensino Fundamental "tem a ver com a compreensão do significado das 'letras' (hoje comumente chamadas variáveis), e das operações com elas, e consideramos que os alunos estão começando a estudar Álgebra, quando encontram variáveis pela primeira vez. Porém, como o próprio conceito de variável é multiface, a redução da Álgebra ao estudo das variáveis não responde a pergunta "O que é a Álgebra do Ensino fundamental?"(p.9-10).

Na Álgebra a variável pode se apresentar com caráter diferente em várias situações. Ora, uma igualdade pode ser vista como uma fórmula, ora como uma equação, ora como uma identidade, ora como aritmética generalizada e ora como uma função.

Desde os anos 60, no currículo do Ensino Fundamental, tem havido uma nítida redução da ênfase nos tópicos relacionados a Polinômios.

É comum ouvir-se que um assunto como Cálculo Algébrico, trabalhado no ensino tradicional, mostra-se como uma coleção de cálculos sem sentido e que deveria ser trabalhado de outra forma. Na realidade, a forma como o cálculo algébrico é trabalhado, com os alunos na 7ª série, é um ponto crítico. Faz-se os alunos trabalharem um número imenso de exercícios mecânicos e sem nenhum significado para eles, acarretando um nível de aprendizado extremamente baixo.

No ensino da Álgebra, variáveis, incógnitas, fórmulas, equações devem ser trabalhadas com compreensão e significado. A Álgebra é uma forma de linguagem Matemática que exprime: 1) uma relação entre grandezas, gerando fórmulas; 2) a resolução de uma equação onde se busca o valor da incógnita; 3) o reconhecimento de identidades, que são igualdades que se verificam para quaisquer valores das variáveis; 4) numa aritmética generalizada, em que as variáveis são usadas como generalizadoras de modelos; 5) o conceito de função, o mais importante conceito da álgebra, e onde se constata o caráter de variabilidade, do qual resulta o termo variável.

Do que se pode deprender daí é que a Álgebra, com seu cálculo algébrico, é muito importante e que posições contrárias a esta devem ser discutidas.

3.2. Os Polinômios nos livros didáticos, nos PCN e na literatura não didática

Como já foi dito, nosso objeto de estudo nesta pesquisa envolveria o trabalho com Polinômios. Nossa primeira preocupação nesse sentido foi o de buscar em vários livros didáticos (posteriormente ficamos com três desses livros), na literatura não didática, e a orientação dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) para o trabalho desse tópico.

Examinamos alguns livros didáticos, escolhidos entre vários livros atuais, procurando verificar como o conteúdo Polinômio se apresenta para o Ensino Fundamental. Este estudo deu-se com o intuito de estabelecer um mapeamento sobre o que iríamos abordar nesta pesquisa, ou seja, era preciso definir, dentro do conteúdo Polinômios, alguns aspectos: quais conceitos são considerados relevantes por diferentes autores para esta faixa etária; de que forma esses conceitos são abordados e qual a estratégia de ensino adotada. Paralelo a esse levantamento, fizemos uma leitura dos PCN para verificar as orientações desse documento em relação ao ensino de álgebra no Ensino Fundamental. A análise dos livros e as orientações dos PCN foram sendo constantemente comparadas ao longo do texto que segue, bem como buscamos, na literatura não didática, autores que pudessem apresentar contribuições para esse ensino.

Conforme indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN – 5ª a 8ª séries, 1998), o ensino de Álgebra no 4º ciclo (7ª e 8ª séries) − lembrando que as primeiras noções de álgebra aparecem no terceiro ciclo com a chamada "pré-álgebra" − deve estar voltado a uma proposta de ensino com base em situações que levem os alunos "a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações" (p.116); e, ainda, que este ensino não deve se limitar a "manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica". (mesma obra, p.116). Os PCN (1998) nos lembram também que o enfoque dado por muitos professores ao ensino de Álgebra, no quarto ciclo, está voltado ao cálculo algébrico e às equações, entretanto, esses aspectos não são suficientes. Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos, os PCN orientam que haja uma articulação entre quatro grandes dimensões da álgebra no Ensino Fundamental: Aritmética generalizada, Funcional, Equações e Estrutural (ver PCN, 1998, p.116).

Nesse sentido, no livro "As idéias da Álgebra", 1995, página 20, Usiskin apresenta um resumo dizendo que as diferentes concepções de álgebra relacionam-se com os diferentes usos das variáveis, conforme quadro a seguir:

Concepções da álgebra	Uso das variáveis
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

(Usiskin, 1995, p.20)

Trabalhamos sobre três livros didáticos do Ensino Fundamental, dentre os examinados, verificando especificamente como o conteúdo Polinômios é apresentado e como são ensinadas as quatro operações, adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios. Os livros verificados foram: Matemática para todos, Imenes & Lellis, 2002, Editora Scipione; Matemática 7, Projeto Araribá, 2005, Editora Moderna; Idéias e Desafios, Iracema e Dulce, 2006, Editora Saraiva. Todos esses livros são atuais. Essa escolha por livros atuais foi proposital, pois queríamos verificar como está sendo ensinado atualmente o conteúdo Polinômios. Isso porque, nesta pesquisa, trabalharemos com o ensino de Polinômios através da resolução de problemas. Sendo assim, gostaríamos de verificar se, por serem atuais, esses livros apresentariam uma proposta de ensino diferenciada para o conteúdo em questão, muitas vezes apresentado nessas séries apenas como cumprimento de currículo.

A unidade de Cálculo Algébrico é o primeiro enfoque dos livros analisados, a partir do tema "expressões algébricas". Este conteúdo é apresentado por um problema resolvido cujo resultado é uma expressão algébrica. Os livros de Imenes & Lellis (2002), e Iracema e Dulce (2006) apresentam uma expressão algébrica gerada a partir dos dados de uma tabela.

No Projeto Araribá (2005), o problema também está resolvido, por meio da ilustração de uma balança, seguido da expressão algébrica correspondente. Após apresentar a expressão algébrica, esses autores definem em linguagem corrente que expressões algébricas são "aquelas formadas por números e letras ou somente por letras e essas letras são chamadas variáveis" (p.142). Iracema e Dulce (2006) definem expressão algébrica como sendo "uma expressão que envolve números, letras e as operações indicadas entre eles. As letras são as variáveis de uma expressão algébrica e podem representar qualquer número real" (p.66). Imenes & Lellis (2002) não definem expressão algébrica. No nosso entender, expressão algébrica é a representação do valor de uma quantidade sob forma algébrica.

Podemos observar de início, que dois dos livros analisados corroboram com as idéias dos PCN no que se refere às noções algébricas obtidas por meio de observação de regularidades em tabelas e gráficos. Entretanto, gostaríamos de ressaltar que esses problemas serviram de exemplo para os problemas seguintes, a serem resolvidos pelos alunos. Mas, para os dois pares de autores, na confecção de seus livros, o problema foi apresentado como um processo de resolução dos próprios autores e não como a busca da solução pelos alunos. Assim, o problema não foi gerador do conceito de expressão algébrica obtida como objetivo. Esses dois livros analisados apresentaram uma definição de variável, entretanto, não há, no texto, nenhum aspecto que diferencie variável como incógnita ou como generalizadora de modelos. Em relação a este assunto, os PCN chamam atenção para o fato de que a não exploração do mesmo, no Ensino Fundamental, gera uma interpretação equivocada nesses alunos ao concluírem esse grau de ensino. Para tanto, os PCN apontam ser de fundamental importância esta distinção ao final do Ensino Fundamental sugerindo, em um único problema, situações em que as letras se apresentem nas variáveis como incógnitas[13] ou com outro significado. Não observamos nos livros didáticos analisados nenhuma ênfase sobre o aspecto da variável considerada como incógnita ou como generalizadora de modelos, ou com um outro significado possível. Elas são apresentadas, mas não são discutidas. Dizem os PCN, 1998, página 118, que, para a maioria dos alunos, "a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita". Convém ressaltar que, como vimos em Usiskin, 1988, página 12, "tentar enquadrar a idéia de variável numa única concepção implica uma supersimplificação que, por sua vez, distorce os objetivos da álgebra".

O conceito de Polinômio é apresentado somente no final do capítulo nos três livros analisados. Após uma série de exercícios envolvendo expressões algébricas, os autores definem Monômios, e em seguida apresentam o tema Polinômios. O livro de Imenes & Lellis, 2002, não apresenta esses tópicos isoladamente, eles vão sendo tratados no transcorrer do capítulo. Não verificamos, nos PCN, nenhuma chamada específica para esse conteúdo no Ensino Fundamental. É certo que, ao abordar o ensino de álgebra, fica subentendido que os

[13] Ver PCN, 1998, p.119-120.

Polinômios aí estão inseridos, entretanto, convém ressaltar a importância dada a este conteúdo pela literatura não didática. Eisenberg e Dreyfus (1988) no artigo "Os polinômios no currículo da escola média[14]" apresentam uma preocupação com o ensino de Polinômios no Ensino Fundamental. Esses autores apontam que, nos últimos 20 anos, (lembrando que a publicação do livro é de 1988) parece ter havido uma nítida redução nos tópicos relacionados com Polinômios na etapa que correponde ao nosso Ensino Fundamental. Essa mesma ênfase é dada por Azevedo (2002), ao se referir a este conteúdo no nosso Ensino Médio. Esta autora diz que "as equações algébricas ou polinomiais são praticamente ignoradas nas escolas públicas" (f.33). Da observação feita por Eisenberg e Dreyfus (1988) com relação à de Azevedo (2002) passaram-se 34 anos, o que responde à afirmativa de Azevedo (2002) com relação ao pouco caso em que são abordadas as equações polinomiais no Ensino Médio. Se em 1988 já se passaram 20 anos da constatada redução deste conteúdo na escola média americana, falando da escola brasileira em 2002, como conseqüência deveria haver mais redução ou até a extinção, para os casos em que não fosse trabalhado este conteúdo.

Observamos, nos livros Idéias e Desafios (Iracema e Dulce, 2006) e no Projeto Araribá (2005), um enfoque mais abrangente quanto às técnicas operatórias sobre Polinômios e, às atividades propostas por esses autores são, na maioria das vezes, vistos como exercícios de aplicação. Já Imenes & Lellis (2002) naõ se preocupam em definir os conceitos pertinentes a esse tópico (valor numérico, grau de um monômio, monômios semelhantes, etc.). Esses autores trabalham os conceitos relativos a Polinômios, explorando situações-problemas. Acreditamos que a diferença em relação ao enfoque dado, por esses autores, sobre este conteúdo é decorrente da falta de clareza dos PCN em relação ao tema, ou seja, os PCN são abrangentes no ensino de Álgebra no 3º e 4º ciclos, entretanto, para o conteúdo de Polinômios não aponta nenhuma diretriz específica. Conforme citamos anteriormente, os PCN enfocam o ensino de álgebra a partir da observação de regularidades em tabelas e gráficos exploradas por meio de relações. Neste aspecto, para o 4º Ciclo, Imenes & Lellis (2002) relatam, na Assessoria Pedagógica, como irrelevante uma definição precisa para o conceito de Polinômio, "assegurando apenas a caracterização do mesmo e a distinção entre Polinômios e Frações Algébricas" (p.54), isto é, no Polinômio a variável não pode aparecer no denominador. Esses autores sugerem que a definição precisa de Polinômios seja apresentada no Ensino Médio no estudo das equações polinomiais ou algébricas. Dizem também que seus livros propõem, desde a 5ª série, uma abordagem mais significativa para o estudo de expressões numéricas, de

[14] Visto que a tradução do livro "as idéias da álgebra" fez referência à escola média. Afirmamos que essa é uma tradução da escola americana onde graus médios correspondem aos nossos ciclos III e IV.

forma que seu estudo permita ir além de uma extensa lista de cálculos; a busca de padrões que, no início, são expressos textualmente e, depois, por meio de fórmulas; expressões algébricas são usadas para exprimir idéias, fatos observados e raciocínio. O conteúdo, segundo esses autores, é mais bem distribuído e mais enxuto do que no ensino tradicional, sendo que as frações algébricas só são trabalhadas na 8ª série. A fatoração é distribuída na 7ª série e na 8ª série e, além disso, reduzida ao essencial.

Iracema e Dulce, 2006, dizem na Assessoria Pedagógica de seus livros, que consideram desnecessário o trabalho com Polinômios de muitos termos e com mais de duas variáveis no 4º Ciclo. Enfatizam a abordagem deste tema, com "expressões simples, com uma ou duas variáveis, que possuam expoentes 1 e 2, pois a maior parte do cálculo literal que se emprega no Ensino Fundamental e Médio reduz-se a expressões desse tipo" (p.37). Quanto aos objetivos esperados para o conteúdo de Polinômios, essas autoras definem: "conceituar e identificar polinômios, e polinômios com uma variável; utilizar os conhecimentos sobre as operações e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico" (p.37).

O Projeto Araribá (2005) não define fronteiras em relação ao ensino de Polinômios. Nesse sentido, Eisenberg e Dreyfus (1988) são categóricos. Eles enfatizam que "os alunos parecem aprender técnicas em detrimento de uma compreensão do contexto mais amplo" (p.128). No artigo publicado em 1988, esses autores apontaram, a partir de uma pesquisa do Coopersmith (1984), a forma como os Polinômios são ensinados na etapa correspondente ao nosso Ensino Fundamental e concluíram que o ensino é procedimental, desligado de qualquer contexto, dificultando a generalização e a aplicação do que aprenderam. Esses resultados corroboram com o que vimos nos livros didáticos, com exceção ao livro de Imenes & Lellis (2002). Há uma ênfase muito grande nos algoritmos e nos procedimentos de realização de atividades que envolvem Polinômios.

Em relação a esse assunto, nossa proposta para o ensino de Polinômios dar-se-á através da resolução de problemas, por meio de problemas contextualizados onde eles servirão tanto como um meio de adquirir o novo conhecimento como um processo no qual pode ser aplicado aquilo que previamente havia sido construído (ONUCHIC, 1999). Os problemas contextualizados permitem que os alunos estabeleçam um maior número de relações possíveis entre os conceitos de que já dispõem para com os novos conceitos adquiridos durante a resolução do problema. Nossa concepção sobre o ensino de Polinômios no Ensino Fundamental está em concordância com Eisenberg e Dreyfus (1988), no seguinte aspecto:

> Os tipos de modelos de raciocínio desenvolvidos ao se trabalhar com equações polinomiais podem ser generalizados para outras situações. Através dos polinômios, podem-se introduzir noções de nível superior sobre funções. A solução de problemas que, à primeira vista, parecem não ter qualquer ligação com polinômios acaba dependendo muito deles. Os polinômios são onipresentes em matemática, e é importante que os alunos os dominem com segurança. (p.128).

Concluímos que o trabalho com Polinômios é, para nós, extremamente importante no Ensino Fundamental, pois, através deles, podemos entender muitos aspectos do pensamento matemático através de seu estudo. Assim, ao longo dessa pesquisa trataremos este tema considerando todas as suas especificidades, por meio de uma estratégia de ensino que viabilize, a um maior número de alunos, a aprendizagem deste conteúdo.

Capítulo 4

PROJETO I

CAPÍTULO 4

PROJETO I

4.1 Introdução

Pretendemos trabalhar Polinômios com compreensão e significado. Do modo como, em geral, ele é trabalhado nas escolas não se consegue atingir esse objetivo. Estamos em busca de uma maneira diferente, que possa fazer com que os alunos compreendam a importância desse novo tópico matemático e que saibam trabalhar com ele.

Vamos lançar mão de uma metodologia que, partindo do concreto, nos faça chegar à construção de novos conceitos e novos conteúdos, contando sempre com a participação ativa dos alunos.

Os Polinômios, como elementos de um conjunto, vão ter sobre eles definidas as operações: adição, subtração, multiplicação e divisão, as mesmas que já foram definidas sobre números, embora as técnicas operatórias sobre esses novos elementos sejam mais elaboradas do que aquelas que os alunos utilizaram quando trabalharam com números. Assim, na dinâmica de nosso trabalho em sala de aula, pretendemos chegar a essas operações a partir de problemas, inicialmente "fazendo Matemática" com as mãos.

A metodologia da pesquisa adotada por nós para este trabalho foi uma modalidade de Pesquisa Qualitativa com ênfase em um Estudo de Caso. A escolha de considerar um Estudo de Caso deu-se pelo fato de ser ele um estudo que cuida do conhecimento de uma pessoa, ou de um grupo, cujo objetivo consiste em compreender o "como" e os "porquês" dentro de sua identidade e características próprias, principalmente nos aspectos que interessam ao pesquisador analisar. Em um estudo de caso, é sempre importante ter a atenção voltada para a história desse caso e ao seu contexto.

Esse estudo aconteceu com um grupo de alunos da 7ª série, num momento escolar regular, que não permitia a interrupção do planejamento de ensino apresentado pelo professor-pesquisador, no início do ano letivo. O conteúdo a ser desenvolvido nesta coleta, deveria ser continuidade do trabalho imediatamente anterior realizado pelo professor. A escola em que esse projeto seria desenvolvido era da rede particular de ensino, da cidade de Piracicaba – SP.

O objetivo deste trabalho será o de desenvolver atividades concretas envolvendo caixas de papelão e, a partir dessas construções, levar os alunos a observar padrões que relacionassem as áreas das bases dessas caixas com suas respectivas alturas, direcionando-os às expressões algébricas, posteriormente chamadas, por nós, Polinômios.

Tendo em vista esse objetivo, o professor-pesquisador deveria, também, investigar as interações sociais, num trabalho colaborativo com os alunos formados em grupos; os conhecimentos desenvolvidos previamente pelos sujeitos da pesquisa; e a utilização adequada desses conhecimentos, adotando estratégias para a resolução de uma situação-problema.

Para o desenvolvimento da coleta, serão utilizadas situações-problema contextualizadas, pois, segundo Pozo (1998), elas permitem fazer aflorar os conhecimentos prévios que serão acionados pelos alunos, para buscar a solução da questão proposta.

A dinâmica estabelecida, para o trabalho em cada atividade, inicialmente, seria a de que, mesmo sentados em grupos, os alunos realizassem as atividades individualmente. Então, abririam a discussão confrontando suas idéias com as dos colegas do grupo e que, numa tomada de decisão conjunta, buscassem a solução do problema, num caminho vislumbrado por eles no processo da resolução do mesmo. Posteriormente essas idéias seriam compartilhadas com os demais grupos. As idéias, sugestões ou inquietações seriam registradas para um ulterior debate. Nesse processo, os alunos precisavam ser desafiados por um problema, ouvidos, respeitados e valorizados em suas idéias.

A metodologia adotada para o trabalho em sala de aula, junto aos sujeitos pesquisados, consiste em uma abordagem teórico-metodológica de Resolução de Problemas, vista como uma metodologia, denominada Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

No segundo momento, o professor-pesquisador deveria fazer questionamentos que iriam além dos enunciados do problema. Várias situações conflitantes poderiam se dar então. Cada grupo defenderia sua resolução e, muitas vezes, seria necessária até a intervenção do professor-pesquisador para resolver o conflito.

Prosseguindo nessa dinâmica, em sala de aula, com os grupos tendo terminado seu trabalho, o professor-pesquisador convidaria todos os grupos para, num único grupo, discutir as diferentes colocações encontradas até que se chegasse a um consenso. Esta etapa é muito importante. Muita exploração sobre o problema e as idéias construídas, faria com que, num discurso democrático, todos pudessem falar e ouvir. O trabalho desenvolvido pelos alunos seria discutido em Plenária de modo que todas as dúvidas, inquietações e embaraços fossem esclarecidos pelo professor ou mesmo pelos próprios alunos. Nesse momento de discussão, o professor já iria colocando algumas expressões matemáticas construídas naquela aula, de forma que, na formalização, esses conceitos pudessem ser relacionados à discussão anterior.

A última fase dessa dinâmica, sob responsabilidade do professor-pesquisador, seria registrada, na lousa, a formalização das novas idéias matemáticas construídas, suas definições, exemplos e aplicações, obedecendo, com rigor, à notação e à terminologia relativa ao tópico trabalhado.

Pensamos em construir efetivamente as caixas, com os alunos em atividade e, gradualmente, irmos construindo as expressões algébricas correspondentes às áreas das bases das caixas construídas ou, até mesmo, das áreas de papel gasto na construção das mesmas, expressões essas dadas por Polinômios.

Operar sobre esses elementos do conjunto dos Polinômios não se constituiria, inicialmente, num desafio muito grande. Adicionar ou subtrair Polinômios, depois de ordenados, segundo a ordem decrescente das potências das variáveis, seria tranqüilo. Multiplicar Polinômios, a partir da propriedade distributiva, também não nos parecia muito difícil, embora a regra dos sinais envolvidos pudesse aparecer como uma possível dificuldade. Para que conseguíssemos êxito na atividade da divisão de Polinômios, no âmbito das caixas planificadas, partiríamos do pressuposto que, por parte dos alunos, o conhecimento de um conceito nem sempre bem compreendido: a razão entre duas grandezas e de uma operação: a fatoração; poderia também, causar alguns problemas. Agora, como fazer para que houvesse alguma representação ou alguma aplicação prática para essa divisão? Ou seja, a que, deveríamos apelar para saber quantas vezes uma “coisa”, no caso um Polinômio, representante da área da base de uma caixa, calculada em um ponto, caberia dentro de outro?

Acreditávamos que a fatoração de polinômios, no caso de “colocar em evidência fatores comuns”, se apresentaria neste processo e, para os alunos dessa série essas operações, em geral, seriam vistas apenas como matemáticas e com pouco significado para eles. Posteriormente, essas operações ganhariam representatividade, mas, na base da construção desse conceito, seria preciso uma outra forma de exploração. O que, de fato, queríamos mostrar é que essas simplificações poderiam ser feitas, através da fatoração, levando a um significado mais amplo, ou seja, que a operação de dividir Polinômios, calculados em determinados pontos, simplificadas pelo processo de fatoração, estivesse relacionada com o contexto das caixas construídas.

4.1.1 Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Antes de pensar na criação do Projeto I, pensamos na necessidade de autorização para sua aplicação, com a direção da escola. Também, pensamos na necessidade de consultar os pais de nossos alunos, pedindo-lhes autorização para trabalhar com eles, dentro de uma metodologia de ensino de Matemática alternativa. Para isso, elaboramos um termo de compromisso, onde nele estariam explicitadas todas as nossas intenções para com a sala de aula e, nelas, para com os alunos, a direção da escola e as famílias.

Assim, foi criado um documento, chamado Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, apresentado como um anexo a esta dissertação.

4.2 A metodologia de ensino-aprendizagem de Polinômios através da resolução de Problemas

Sabemos que ensinar Matemática, partindo da resolução de problemas, é uma tarefa difícil. Entretanto, uma aprendizagem consolidada, a partir da resolução de problemas, promove um ensino mais significativo. Onuchic e Allevato (2004) sugerem alguns aspectos que devem ser considerados quando o ensino parte da resolução de problemas. Para essas autoras, a resolução de problemas coloca o foco de atenção dos alunos sobre as idéias e sobre o "dar sentido" à Matemática construída. Desenvolve o poder Matemático; desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que fazer Matemática faz sentido; provê dados de avaliação contínua; e ainda permite que a formalização de toda a teoria matemática construída, dentro de um programa curricular assumido, feita pelo professor no final da atividade, faz mais sentido para os alunos.

A metodologia adotada por nós, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, como apresentada no Capítulo 2, resumidamente se comportará na sala de aula da seguinte forma:

Ao resolver problemas, os alunos, em grupo, ou individualmente, precisam refletir sobre as idéias subjacentes aos dados fornecidos no enunciado do problema, precisam comunicar-se e trabalhar em busca da solução. Esta é uma atividade que coloca o aluno como um resolvedor, co-construtor do conhecimento e não como um mero receptor de informações. É o aprender Matemática, fazendo Matemática.

4.3 A criação do Projeto I

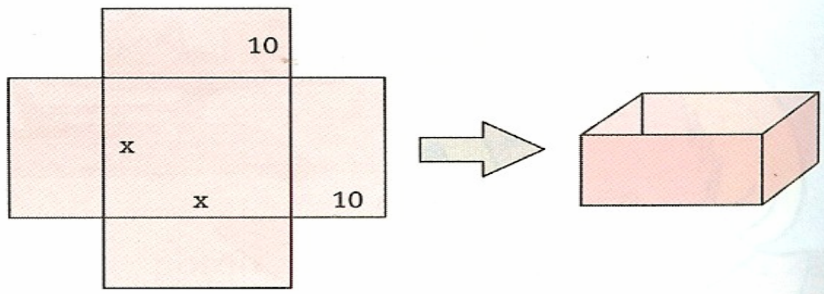
Neste item vamos apresentar as estratégias (*o quê?*) que pretendemos desenvolver com os alunos na aplicação do Projeto I. Realmente, vamos deixar aqui expresso *o quê* queremos fazer neste projeto. Os procedimentos (*como?*) relativos a essas estratégias serão utilizados em sua aplicação.

4.3.1 O Ponto de partida para a construção do Projeto I

Inicialmente, tivemos dificuldade em visualizar o conteúdo Polinômios de um modo diferente daqueles tratados nos livros didáticos. Ainda assim, seguíamos insistindo na possibilidade de encontrar uma outra maneira de trabalhar este tema, mesmo correndo o risco de, ao final do trabalho, concluir que a aprendizagem contextualizada, dentro da concepção teórica que adotamos, não se aplicava ao tema Polinômios.

Depois de examinarmos alguns livros didáticos de Ensino Fundamental II e Ensino Médio, como já dissemos, encontramos no livro de Matemática dos autores Imenes & Lellis, 2002, algumas atividades com caixas planificadas. Essas atividades eram interessantes, porém limitadas no aspecto exploratório. Queríamos mais do que isso! Depois de estudá-las, percebemos que estas poderiam ser a base de nossa pesquisa de intervenção. Entretanto teríamos que vislumbrar algo mais do que o apresentado nos livros didáticos, dentro do que esperávamos, para uma proposta de ensino contextualizado. Essas atividades, nesse livro, se apresentavam por meio de dois problemas (17 e 18 no livro) propostos, conforme figuras a seguir:

17. A partir de uma planificação, fabrica-se uma caixa sem tampa, com a forma de um bloco retangular:



Calcule a área A de papelão necessária para construir a caixa.

Resolução:
A área do quadrado de papelão é $x \cdot x = x^2$. A área de cada retângulo é $10 \cdot x$. Assim a área total é:

$$A = x^2 + 10x + 10x + 10x + 10x$$

Somando as parcelas 10x, simplificamos a fórmula:

$$A = x^2 + 40x$$

Figura 1 - Problema 17, Imenes & Lellis, 2002, p.76-77.

18. Obtenha a fórmula que dá a área A de pape lão usado neste outro caso:

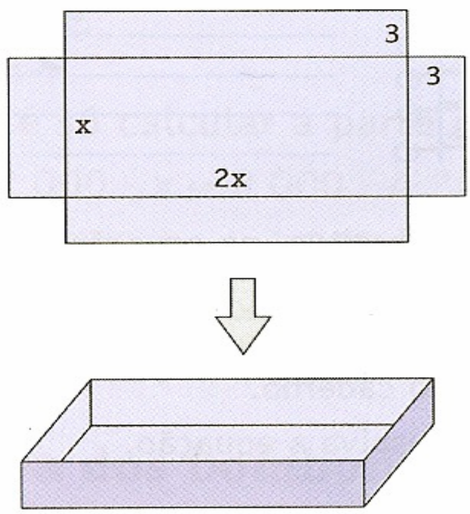


Figura 2 – Imenes & Lellis, 2002, p.77.

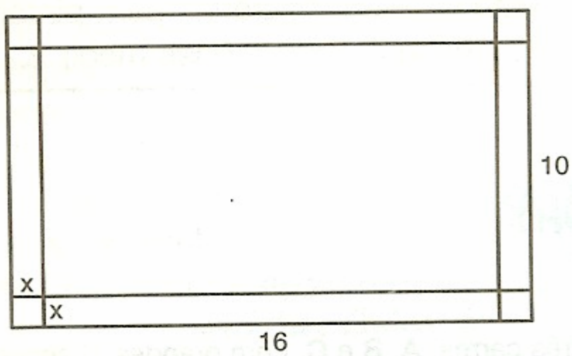
Como podemos observar, o problema 17 estava resolvido pelos autores e o problema 18 seria resolvido pelos alunos como fixação das idéias do problema 17.

Ao trabalhar "Cálculo Algébrico", nessa mesma obra, os autores apresentam atividades com diferentes caixas planificadas, pedindo aos alunos uma expressão algébrica que indicasse a quantidade de papelão a ser usado na construção dessas caixas. Nessas atividades, ao analisarem as medidas das faces laterais e das bases dessas caixas − retângulos cujos lados indicavam suas duas dimensões, comprimento e largura, ou por um número ou por uma variável −, o aluno, então, deveria escrever a expressão algébrica solicitada dando a área de cada uma das faces e a área da base, adicionando-as. Neste caso, a expressão resultante dava analiticamente essa área pedida. A atividade era interessante, já que a expressão algébrica resultante expressava um novo ente matemático, um Polinômio.

Para nós, essa atividade, envolvendo a planificação das caixas, parecia poder ser mais bem explorada, estendendo-se até à divisão de Polinômios, apesar de ainda não sabermos como agir.

Avançamos em nossa leitura e encontramos, no livro de 3º ano do Ensino Médio de Kátia & Roku - Matemática. São Paulo: Saraiva, 1999, no Capítulo 6,uma atividade envolvendo polinômios conforme figura abaixo:

5. A partir da figura abaixo, invente um problema que trate de embalagens:

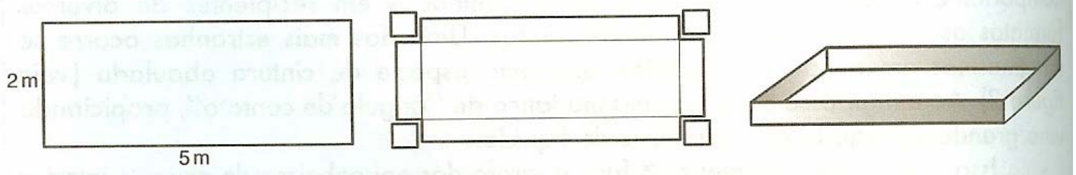


Seu problema deve envolver gráfico e noção de volume.

Figura 3 - Kátia & RoKu, 1999, Unidade 6 – Polinômios, p.181

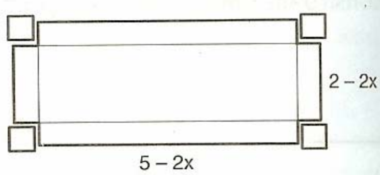
Ainda nesse livro, no Capítulo 8, sobre Equações Polinomiais, Kátia & Roku (1999), apresentaram a seguinte situação:

A partir de uma folha de papelão retangular pretende-se fazer uma caixa sem tampa. Para isso, quatro quadrados de lados **x** serão cortados dos cantos da folha, como mostra a figura:



Qual deve ser a medida de **x** para que o volume da caixa seja de 2 m^3?

Se cortarmos os quatro cantos conforme a figura indica, obteremos uma caixa em forma de paralelepípedo. Sabemos que o volume do paralelepípedo pode ser calculado por $V = A_{base} \times$ altura.



Assim, o volume da caixa em função de **x** é:

$$
\begin{aligned}
V(x) &= (5 - 2x)(2 - 2x)x \\
&= (10 - 10x - 4x + 4x^2)x \\
&= (4x^2 - 14x + 10)x \\
&= 4x^3 - 14x^2 + 10x
\end{aligned}
$$

O problema nos pede o valor de **x** para que $V = 2\ m^3$. Assim, chegamos à seguinte equação:

$$4x^3 - 14x^2 + 10x = 2$$

Resolvendo essa equação, encontramos a resposta do problema.

Na Unidade **Polinômios** estudamos a resolução de algumas dessas equações, mas, agora que conhecemos também os números complexos, podemos nos aprofundar nesse estudo.

Figura 4 - Kátia & Roku, 1999, Unidade 8 – Equações Polinomiais, p.220

Analisadas essas atividades, tanto nas propostas de Kátia & Roku (1999) quanto nas propostas de Imenes & Lellis (2002), certos de que poderíamos explorar Polinômios partindo desse estudo, buscamos uma forma de trabalhar as quatro operações com Polinômios, com alunos de 7ª série, dentro desse contexto.

Um objetivo forte de nosso trabalho seria desenvolver o conteúdo Polinômio nesse contexto, considerando as seguintes diferenças: 1) Imenes & Lellis (2002) partindo de problemas resolvidos e fazendo com que os alunos trabalhassem com problemas dentro da mesma idéia. Nós, com nossa metodologia, partiremos do problema, considerando os nossos alunos como co-construtores do conhecimento, num trabalho conjunto onde a Matemática nova será construída durante a resolução do problema. 2) Kátia & Roku (1999) trabalharam com alunos de 3ª série do Ensino Médio, pedindo aos alunos que propusessem um problema diante de uma dada situação. Nós usaremos também essa idéia com alunos de 7ª série.

4.3.2 Objetivos Gerais para o Projeto I

Os objetivos gerais para este Projeto I podem ser assim expressos:

1. Introduzir os alunos em idéias da Álgebra
2. Saber identificar a passagem da Aritmética para a Álgebra.
3. Perceber a importância dos Polinômios na Álgebra.
4. Apresentar problemas, acessíveis aos alunos, como ponto de partida, fazendo uso de material concreto e lançando mão de conceitos geométricos, de forma a obter diferentes expressões algébricas, saber defini-las e representá-las em variadas formas.

4.3.3 Roteiro de Atividades

Problema 1

Desenhar uma caixa em uma folha de papel A_4, utilizando como instrumentos: lápis, borracha, esquadros e régua. Depois de desenhada a caixa, transportar o desenho para um papelão, onde a caixa será montada. Ela poderá ter dimensões quaisquer, ou seja, poderá variar de acordo com a idéia de cada participante.

Obs$_1$: o nome dessa caixa será “caixa piloto”.

Os objetivos específicos para este problema são:

a) fazer com que os alunos façam uso dos instrumentos: esquadro, régua, lápis, borracha, tesoura e fita adesiva;

b) reconhecer que a caixa é um objeto tridimensional e reforçar o conhecimento das dimensões dessa caixa: comprimento, largura e altura;

c) verificar se o processo de construção de uma caixa de papelão, a partir de sua planificação, lhes era familiar;

d) ver a possibilidade da socialização desse conhecimento ao formar grupos.

Problema 2

2.1 Desenhar um retângulo com as seguintes dimensões: comprimento: 1,6dm e largura: 1,0dm.

2.2 A partir desse retângulo, construir uma caixa, sem tampa, com altura igual a 0,1dm.

Obs: o nome dessa caixa será “caixa teste”.

Os objetivos esperados para este problema são:

a) dar continuidade aos objetivos do Problema 1;
b) reforçar os conceitos de grandeza e de medida;
c) identificar unidades padrão de sistemas métricos, relacionando-os.

Problema 3

Calcular a área do papelão gasto na construção da “caixa teste”, após sua montagem.

Os objetivos específicos para este problema são:

a) identificar as diferentes faces dessa caixa: suas formas e medidas;
b) perceber que os quadrados cortados nos cantos do retângulo não fazem parte da caixa.

c) identificar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos para resolver o problema.

d) recordar as fórmulas de áreas de quadrados e retângulos.

Problema 4

4.1 Utilizando o retângulo dado no Problema 2, quais seriam as áreas das bases de caixas, caso fossem construídas, com as alturas fornecidas no Quadro 1 abaixo?

altura (cm)	área (cm^2)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Quadro 1

4.2 Preencher o quadro com as áreas encontradas.

4.3 Após o cálculo das áreas das bases dessas caixas, em um gráfico de pontos, representar essas áreas relacionando-as com suas respectivas alturas.

4.4 Depois de construído o gráfico, fazer uma análise das áreas das bases dessas caixas para os possíveis valores da altura.

Os objetivos específicos para este problema são:

a) levar os alunos à construção de um gráfico de pontos;
b) ao manipular as caixas construídas/imaginadas, fazer com que os alunos interpretem a variação das áreas da base das caixas com as alturas possíveis;
c) perceber os limites para as alturas possíveis dessas caixas.

Problema 5

5.1 Desenhar um retângulo com as seguintes dimensões: comprimento: 1,6dm e largura: 1,0dm.

5.2 Fazer uma análise do que ocorreria se cortássemos quadrados, nos cantos desse retângulo, dentro dos limites possíveis para a altura dessa caixa, onde a medida do lado do quadrado cortado representa a altura da caixa, e essa altura é medida por um número racional qualquer.

Observação: Chamaremos essa caixa de **"caixa 1"**.

Objetivos específicos para este problema são:

a) falar sobre diferentes conjuntos numéricos;
b) fazer com que os alunos se deparem com o importante conceito de variável na Álgebra.
c) levá-los a identificar o que é variável na Álgebra;
d) identificar uma fórmula matemática para a área da base de uma caixa de altura x;
e) verificar se essa fórmula vale, face aos resultados obtidos, para $x = 1$ e $x = 2$.

Problema 6

Desenhar um retângulo com as seguintes dimensões: largura: 0,4dm e comprimento: 1,0dm. Fazer uma análise do que ocorreria se cortássemos quadrados, nos cantos desse retângulo, dentro dos limites possíveis para a altura dessa caixa, onde a medida do lado do quadrado cortado representa a altura da caixa e essa altura é medida por um número racional qualquer.

Observação: Chamaremos a caixa deste problema de **"caixa 2"**.

Problema 7

Desenhe um retângulo com as seguintes dimensões: largura: 0,4 dm; comprimento: 0,6dm. Fazer uma análise do que ocorreria se cortássemos quadrados, nos cantos desse retângulo, dentro dos limites possíveis para a altura dessa caixa, onde a medida do lado do quadrado cortado representa a altura da caixa e essa altura é medida por um número racional qualquer.

Observação: Chamaremos a caixa deste problema de **“caixa 3”**.

Objetivos específicos para os **Problemas 6 e 7** são:

a) ver esses problemas como responsáveis, pela fixação do conhecimento obtido no Problema 5;
b) deixar clara a passagem da Aritmética para a Álgebra;
c) ter percepção de variabilidade;
d) tirar conclusões do que, a partir do Problema 5, se refere às possíveis alturas das caixas;
e) identificar uma fórmula matemática para a área da base da caixa com altura x;
f) introdução do conceito de Polinômios e conceitos relacionados.

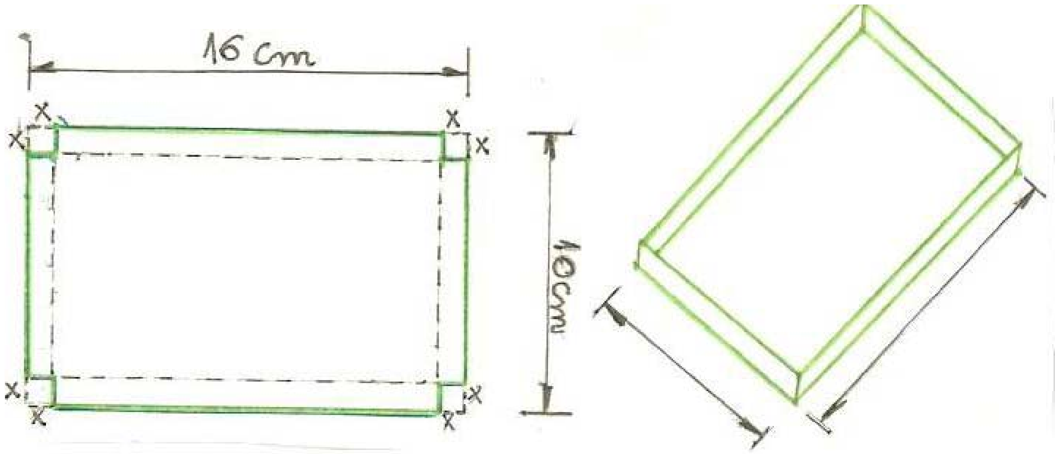
Problema 8 – Fixação dos conhecimentos novos construídos

Tarefa 1 – Fazendo aplicações dos Problemas 5, 6 e 7

A Tarefa 1 tem por objetivo fixar conhecimentos novos construídos.

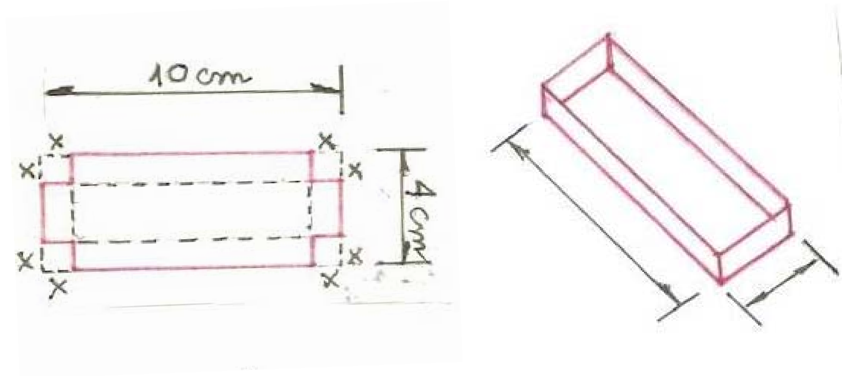
Entregar aos alunos a folha de atividades abaixo, contendo três diferentes problemas: 1.a, 1.b, 1.c.

Problema 1.a –



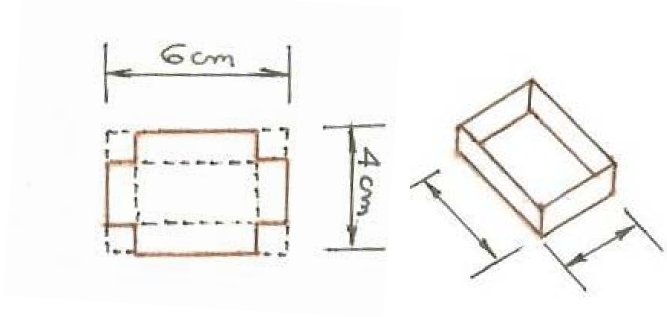
"caixa 1"

Problema 1.b –



"caixa 2"

Problema 1.c –



"caixa 3"

Figura 5

Nas atividades 1.a, 1.b e 1.c apresentam-se as caixas planificadas de altura x referentes aos Problemas 5, 6 e 7 e essas mesmas caixas desenhadas em perspectiva.

1.1 Pede-se que se apresentem as expressões algébricas que representam o comprimento e a largura da base da caixa planificada e, depois, escrever a fórmula da área da base da caixa em perspectiva.

1.2 Atribuir três ou mais valores distintos para a altura x nas caixas 2 e 3, Problemas 6 e 7, obedecendo às limitações impostas às alturas das caixas. Fazer um quadro, relacionando essas alturas às áreas das bases das caixas correspondentes. Construir um gráfico de pontos apoiado nos dados obtidos nesse quadro.

Tarefa 2 – Conceitualização – Dando sentido às áreas construídas

2.1 Escrevendo as áreas das bases das caixas 1, 2 e 3, apresentadas como produtos de duas expressões algébricas, chegar, usando a propriedade distributiva, a uma soma algébrica que descreva essas áreas através de um novo objeto matemático: o Polinômio.

2.2 Reunir termos semelhantes, ordenar segundo potências crescentes ou decrescentes da variável e chegar à forma simplificada de um Polinômio.

Objetivo desta tarefa: Fazer com que os alunos percebam que, a partir de um produto de fatores, chega-se a uma soma algébrica usando a distributividade e que, inversamente, partindo-se de uma soma algébrica, pode-se chegar a um produto de fatores. Este processo é chamado “fatoração”.

Tarefa 3 – Operações com Polinômios

3.1 Adição algébrica de Polinômios.

Dados: $A_1 = 4x^2 - 52x + 160$; $A_2 = 4x^2 - 28x + 40$ e $A_3 = 4x^2 - 20x + 24$; efetuar as seguintes operações:

$A_1 + A_2$

$A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 + A_3$

$A_1 - A_2 - A_3$

Objetivo da tarefa 3.1 – saber operar com somas algébricas (adição e subtração).

3.2 – Multiplicação e Divisão

Dados os Polinômios $A_1(x) = 4x^2 - 52x + 160$

$A_2(x) = 4x^2 - 28x + 40$

$A_3(x) = 4x^2 - 20x + 24$

Calcular:

3.2.1 $A_1 \cdot A_2$; $A_2 \cdot A_3$ e $A_1 \cdot A_3$

3.2.2 $\frac{A_1}{A_2}$; $\frac{A_1}{A_3}$ e $\frac{A_2}{A_3}$

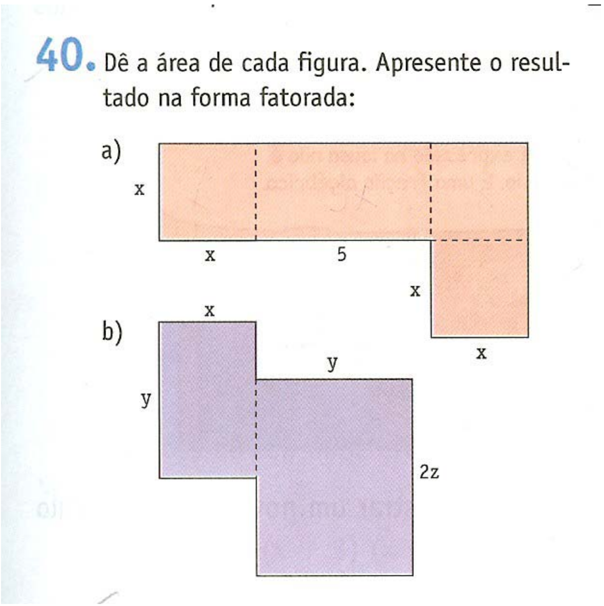
3.2.3 – Fazer a comparação das áreas das bases das caixas 1, 2 e 3, para um mesmo valor da altura, vista como uma <u>razão</u> (comparação multiplicativa entre duas grandezas).

a) Atribuir um valor numérico, para a variável x nas expressões dos Polinômios $A_{1(x)}$ e $A_2(x)$ e encontrar a razão entre os valores numéricos desses Polinômios, que são os valores numéricos das áreas das bases das caixas 1 e 2. Analogamente, para as caixas $A_{1(x)}$, $A_{3(x)}$ e $A_{2(x)}$, $A_{3(x)}$.

O objetivo desta tarefa é saber operar com multiplicação, divisão de valores numéricos de Polinômios e razão entre as áreas das bases das caixas.

Tarefa 4 – Listas de Atividades de fixação de conceitos da matemática nova construída

Lista 1 - Exercício de aplicação



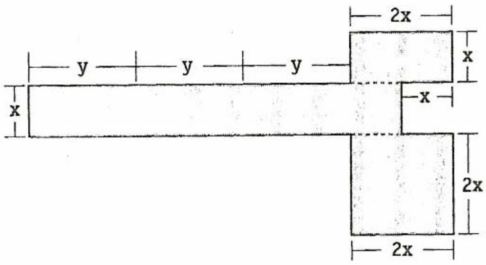
Exercício número 40 – Imenes & Lellis, 2002, p. 195.

Lista 2 – Cálculo Algébrico

1. Efetuando $2a(a - 5) - 2a(3a - 5) + a^2 + 3a$, obtém-se:

a) $4a^2$
b) $-3a^2 - 3a$
c) $-3a^2 + 3a$
d) $2a^2 - 7$
e) $4a^2 - 3a + 5$

2. A figura é formada por retângulos:



A área da figura expressa em função de x e y é:

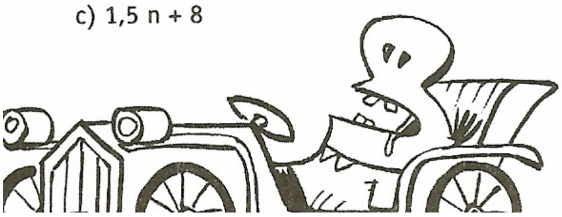
a) $8x + 3xy$
b) $8x + 3y$
c) $7x + 3y$
d) $5x^2 + 3xy$
e) $7x^2 + 3xy$

3. Um camelô comprou x relógios por 150 dólares e quer vendê-los com lucro de 10 dólares em cada um. O preço de venda em dólares é:

a) 160
b) $160 - x$
c) $x + 10$
d) $\frac{150}{x} + 10$
e) $\frac{x + 10}{150}$

4. Um estacionamento cobra R$ 8,00 pelas primeiras duas horas e mais R$ 1,50 pelas horas subseqüentes. Se um carro ficar estacionado n horas, $n > 2$, quanto deve ser pago?

a) $1{,}5\,n + 7$
b) $1{,}5\,n + 5$
c) $1{,}5\,n + 8$
d) $8\,n + 1{,}5$
e) 9,50



5. Reduzindo os termos semelhantes na expressão $\frac{3x}{5} + 2 - \frac{x - 1}{2}$, obtém-se:

a) $\frac{3x}{10}$
b) $\frac{x + 25}{10}$
c) $\frac{2x - 15}{10}$
d) $\frac{3x - 15}{10}$
e) $-\frac{7}{10}$

6. Se quisermos fatorar a expressão $8a^3x^3 + 12a^5x - 20a^4x^3$, o fator mais adequado para colocar em evidência é:

a) $4a^4$
b) a^3x^2
c) $4a^3x$
d) $2a^3x^2$
e) $2ax^2$

7. A expressão algébrica E multiplicada por 3x resulta na expressão $6x^2 - 3x$. O valor da expressão E, para $x = -5$, é:

a) -11
b) -10
c) -9
d) -8
e) -7

8. Efetuando $(x + 2)(2x + 3)$, obtém-se:

a) $2x^2 - 7x + 6$
b) $x^2 + 7x + 6$
c) $8x + 6$
d) $8x^2 + 6$
e) $2x^2 + 7x + 6$

9. Simplificando $\frac{12x^2 - 4}{6x^3 - 2x}$, obtém-se:

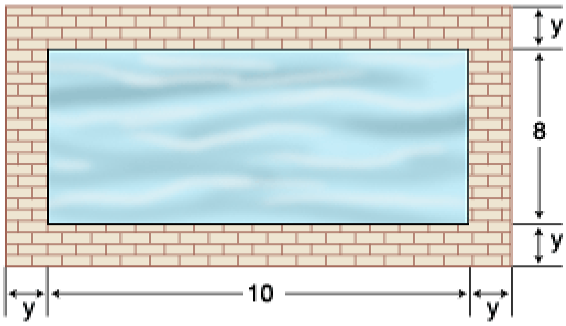
a) $\frac{4}{x}$
b) $\frac{2}{x}$
c) $\frac{3x - 2}{x + 1}$
d) $\frac{3x - 1}{x^3}$
e) $\frac{x^2 - 1}{3x^2 - 4}$

10. A expressão $\frac{3(x+2)}{5(x+2)}$ é igual a $\frac{3}{5}$, para x diferente de:

Imenes & Lellis, 2002, Supertestes, Capítulo 11, p.304.

Lista 3 – Trabalhando conceitos através da resolução de problemas

1. A piscina da casa de Luís tem 8 m de largura e 10 m de comprimento. Ao seu redor, ele pretende construir uma calçada de largura y metros e revesti-la com pedras.



O valor de **y** ainda não está decidido, pois depende dos custos envolvidos. Por isso, Luís precisa fazer alguns cálculos. Vamos ajudá-lo.

a) Deduza uma fórmula para a área da calçada.

b) Cada metro quadrado de pedra custa R$ 18,00 e, para colocá-la, o pedreiro cobra

R$ 12,00 por metro quadrado. Escreva a fórmula que fornece o custo C da pedra e da mão-de-obra em função de **y**.

c) Use a fórmula e uma calculadora e preencha a tabela:

y (em metros)	0,5	1,0	1,5	2,0
C (em reais)				

d) O custo C e a largura **y** são diretamente proporcionais?

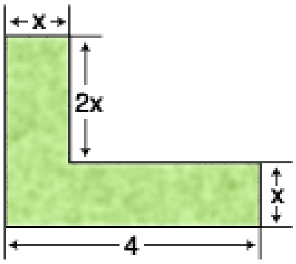
2. Efetue os cálculos, simplificando as expressões:

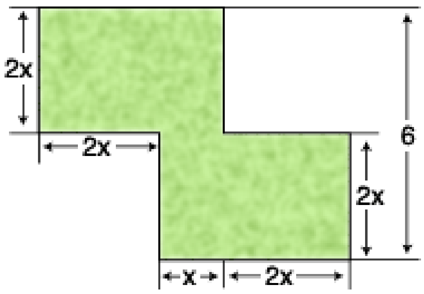
a) $5x^2 - 4x + 3x(x - 4)$

b) $a^3 - a(a^2 + 2a) + 3a^2 - 5a$

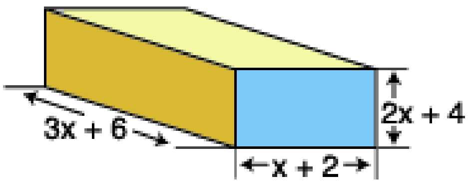
c) $\frac{8K^2}{2K} + \frac{15K^3}{3K^2}$

3. Calcule a área de cada figura em função de x. Apresente o resultado na forma fatorada.





4. Veja as dimensões do bloco retangular:

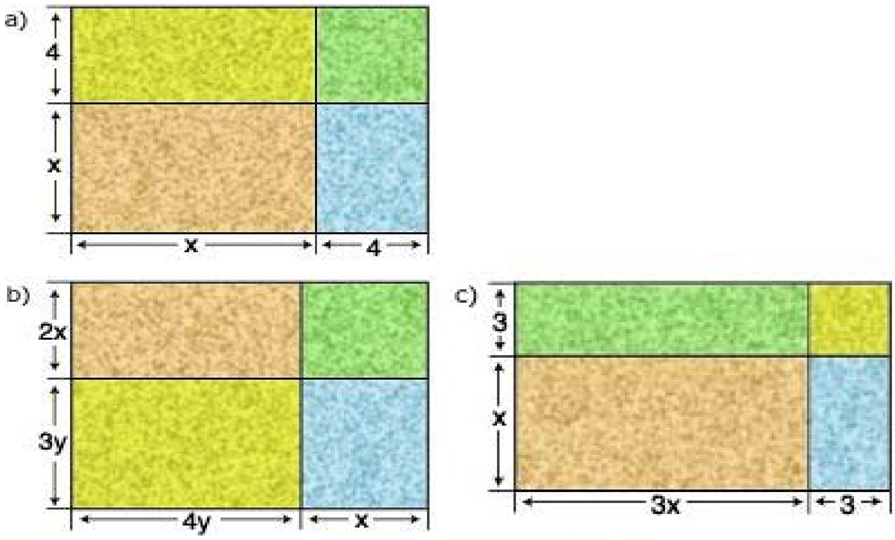


Qual é o seu volume? Dê a resposta de duas maneiras:

a) na forma fatorada;

b) na forma de um Polinômio, "desmanchando" a forma fatorada.

5. Expresse a área das figuras abaixo de duas maneiras.



Lista de atividades retirada do site da editora Scipione:
http://www.scipione.com.br/ap/didaticos/matematica_paratodos2/7c11.htm (última consulta: 20/02/2008).

Os objetivos específicos para o Problema 8 são:

a) chegar à divisão longa de Polinômios, mostrando que o conceito de divisão, como operação inversa da multiplicação, é o mesmo da divisão com números: isto é dividendo = quociente x divisor + resto, (D = q x d + r), embora sua técnica operatória seja bastante diferente.
b) fazer aplicação para a fixação de conceitos e conteúdos novos construídos.
c) multiplicar Polinômios.

Capítulo 5

A APLICAÇÃO DO PROJETO I

CAPÍTULO 5

A APLICAÇÃO DO PROJETO I

Existe uma mudança considerável entre esboçar um projeto e fazer a sua aplicação. Faremos, neste capítulo, uma descrição de como ocorreu a aplicação do projeto, em sala de aula, focalizando cada um dos catorze encontros planejados. Convém ressaltar que os Problemas 1, 2, 3, 4, 5 e 6 deste projeto foram enunciados oralmente pela professora-pesquisadora.

5.1 O Planejamento para a aplicação do Projeto I

Como já foi dito no Capítulo 4, este projeto foi desenvolvido numa escola da rede particular de ensino de Piracicaba, durante os meses de Outubro e Novembro de 2006, abrangendo em média 4,5 semanas. Atendendo a eventos previstos no calendário escolar, neste período, pudemos desenvolver 24 aulas, distribuídas em cinco aulas semanais, ou seja, três encontros. Como já dissemos, os participantes desta pesquisa foram alunos de uma sala de 7ª série, composta por 12 alunos com idades entre 13 e 14 anos. A professora de Matemática da sala é a professora-pesquisadora desta dissertação.

Ao fazermos referência às falas dos participantes desta pesquisa, a professora-pesquisadora será sempre indicada por "PESQ". Quando a resposta não for individual, será usada a palavra "CLASSE" e utilizaremos sempre as três primeiras letras dos nomes dos alunos para indicar a participação de cada um deles: ALE; MAN; CEC; GAB; HAL; JAN; JUL; LAR; LEO; MAR; DAN; NIL.

Para a execução deste Projeto, foram previstos catorze encontros, para os quais fizemos a seguinte distribuição das aulas:

1º encontro – 2 aulas – Problemas 1 e 2.

2º encontro – 2 aulas – Retomada oral do Problema 2 e resolução dos problemas 3 e 4.

3º encontro – 1 aula – Fechamento do Problema 4.

4º encontro – 2 aulas – Problema 5.

5º encontro – 2 aulas – Retomada do Problema 5 e resolução dos Problemas 6, 7.

6º encontro – 1 aula – Fechamento dos Problemas 5, 6 e 7;

8º encontro – 2 aulas – Tarefas 1 e 2;

8º encontro – 2 aulas – Discussão das tarefas 1 e 2 e resolução da Tarefa 3.1.

9º encontro – 1 aula – Retomada da Tarefa 3.1.

10º encontro – 2 aulas – Tarefa 3.2

11º encontro – 2 aulas – Fechamento da Tarefas 3.2; Resolução da Tarefa 4.

12º encontro – 1 aula – Atividade de aplicação - Fixação.

13º encontro – 2 aulas – Atividade de aplicação - Conceituação.

14º encontro – 2 aulas – Atividade de aplicação – Fixação e Conceituação.

5.2 A preparação da professora-pesquisadora para a aplicação do Projeto I

Estas são as etapas que o professor seguirá durante a construção do conhecimento, pelos alunos, nas atividades de resolução de problemas.

Fase Antes:

Num trabalho essencialmente feito pelo professor – a escolha dos problemas, a busca de estratégias para trabalhá-las e o planejamento das aulas – decidiu-se que, para cada atividade, deixar-se ia claro o foco da mesma. Uma ou mais estratégias seriam escolhidas – identificar as possíveis estratégias para a resolução daquele problema e admitir que se houvesse, por parte dos alunos, alguma estratégia diferente, a professora-pesquisadora deveria estar preparada para a discussão delas, isto é, desses diferentes caminhos.

Fase Durante:

Entrega da atividade - ao entregar a atividade, a professora-pesquisadora deveria estar ciente de que o enunciado estava claro e de que o conhecimento prévio desses alunos seria suficiente para levar à realização do problema dado.

Qual o papel do professor?

A professora-pesquisadora assume o compromisso de pedir a ciência dos pais, com autorização, para que os alunos trabalhem conforme uma proposta de ensino nova, adotada pela professora-pesquisadora.

Formar grupos - quanto à formação dos grupos, de acordo com o interesse da professora-pesquisadora, os alunos podem ser agrupados em pequenos grupos (2, 3, 4 alunos).

Tempo para pensar - deixar os alunos pensarem, enquanto buscam resolver o problema dado, e, em uma primeira volta pela sala, a professora-pesquisadora observa o trabalho dos alunos nos grupos. A professora-pesquisadora deveria observar o interesse de todos na busca de um caminho que pudesse levá-los à resolução do problema.

Numa "segunda caminhada" pela sala de aula, a professora-pesquisadora assumiria o papel de observadora, impulsionando o trabalho; de questionadora, fazendo perguntas que viessem a colaborar para a resolução da atividade proposta; de consultora, observando as estratégias utilizadas; e de incentivadora, dando "dicas" quando necessárias, isto é, quando os alunos fizessem alguma pergunta, a professora-pesquisadora responderia com uma outra pergunta, embora isso pudesse se constituir numa "dica".

Com o trabalho terminado ou por terminar, passado o tempo que a professora-pesquisadora julgasse necessário para aquela atividade, os alunos entregariam, por escrito, ou seriam convidados a colocar seus resultados na lousa.

Fase Depois:

Agora, em uma reunião Plenária, com todos os alunos num único grupo, a professora-pesquisadora convida os alunos para uma exploração do trabalho feito. Durante a apresentação e discussão de um trabalho, os demais alunos deveriam manter-se atentos. Os alunos seriam orientados anteriormente de que deveriam observar os aspectos relevantes que tenham sido identificados por um grupo e não por outro, durante a execução do problema proposto. Após a apresentação de cada grupo, começariam as discussões onde os alunos poderiam apresentar à professora e a seus colegas, seus pontos de vista e suas dificuldades.

Durante essas discussões, alguns alunos podem ter a chance de identificar, por si mesmos, seus erros; os colegas de grupo podem mostrar-se como colaborados na superação de alguma dificuldade localizada; ou, ainda, podem surgir casos isolados de alunos que, não conseguindo chegar a um consenso, pedem, neste momento, a intervenção da professora-pesquisadora.

Formalização da Atividade: é realizada pela professora-pesquisadora, onde ela deixará registrados, para os alunos, todos os conceitos e conteúdos matemáticos novos trabalhados em cada problema proposto.

5.3 A aplicação do Roteiro de Atividades na sala de aula

5.3.1 - 1º Encontro – Os alunos estavam sentados individualmente. Após um tempo pré-determinado, eles se uniriam aos seus grupos para a socialização das estratégias levantadas individualmente. Neste encontro foram trabalhados os Problemas 1 e 2.

Problema 1

A professora-pesquisadora enunciou oralmente o problema abaixo:

Desenhar uma caixa de papelão em folha de papel A_4, utilizando como instrumentos: lápis, borracha, esquadros e régua. Depois de desenhada a caixa, transportar o desenho para um papelão, onde a mesma será montada. A caixa poderá ter dimensões quaisquer, ou seja, irá variar de acordo com cada participante.

Obs_1: o nome dessa caixa será **"caixa piloto"**.

Esta foi a primeira aula gravada. Percebemos que alguns alunos se calaram na presença do gravador, dificultando o processo de discussão e a interação no grupo. As manifestações desses alunos limitavam-se a murmúrios e gestos.

A professora-pesquisadora entregou a cada aluno uma folha A_4 e pediu que desenhassem, naquela folha, uma caixa de qualquer tamanho. O objetivo desse pedido era o de verificar se os alunos tinham idéias de como poderiam construir uma caixa, partindo de sua planificação. Assim, usando a folha dada, o que se esperava era que eles desenhassem uma caixa. Essa caixa seria chamada "caixa piloto".

Já havia sido solicitado anteriormente que, para esse dia, os alunos levassem para a aula o material de Desenho Geométrico (régua, esquadros, etc.).

Depois de desenhada, a "caixa piloto" seria transportada para um papelão destinado à sua montagem. Não foram dadas dicas de como utilizar o material de desenho.

Nosso foco estava centrado em verificar alguns aspectos:

1. construir uma caixa qualquer a partir de uma folha A_4.
2. identificar as dimensões da caixa: comprimento, largura e altura.
3. adotar uma medida padrão.

A estratégia esperada pela professora-pesquisadora, para esta atividade, era a de, ao cortar os quatro cantos de um retângulo desenhado na folha de papel A_4, fazer a moldura para a base da caixa e levantando as abas, montar a caixa. Sabíamos que existiam outras estratégias para montar uma caixa, entretanto, esta foi a estratégia que escolhemos, pois, futuramente, solicitaríamos o cálculo da área de papel gasto na caixa e não nos interessava o papel referente aos "cantos" que seriam dobrados. Logo o recorte seria mais interessante. Entretanto, estávamos preparados para encontrar outras estratégias. Por exemplo, em vez de desenhar um retângulo e em seguida recortar os cantos, eles poderiam fazer a planificação da caixa sem antes tê-la emoldurado; ou ainda fazerem o desenho da caixa em perspectiva.

Enquanto os alunos trabalhavam no desenho e montagem da caixa, a professora-pesquisadora teria agora uma função diferente. Durante a realização da atividade, ela assumiu as funções de: observadora, impulsionando o trabalho; questionadora, fazendo perguntas que puderam colaborar para a elaboração da atividade proposta; consultora, verificando as estratégias utilizadas; incentivadora, dando "dicas", quando os alunos faziam alguma pergunta e a professora-pesquisadora devolvia com outra. Pois, como disse Van de Walle (2001), citado por Onuchic e Allevatto (2005), "o professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer".(p.221).

Após receberem a folha de papel A_4, foi dado um tempo aos alunos para a realização da atividade individual.

Durante a realização da atividade, para nossa surpresa, apesar de previsível, todos desenharam um cubo. Uns planificados, outros em perspectiva, conforme Figuras 6 e 7. Os que desenharam o cubo planificado puderam montar a caixa. Já os que o desenharam em perspectiva, não. Neste aspecto a ajuda dos colegas no grupo foi fundamental, pois esses colegas estavam convencidos de que, o cubo em perspectiva não lhes permitia montar a caixa. Supomos que os alunos que usaram a planificação do cubo para montar a caixa, provavelmente tenham se lembrado de algo feito nas aulas de Desenho Geométrico.

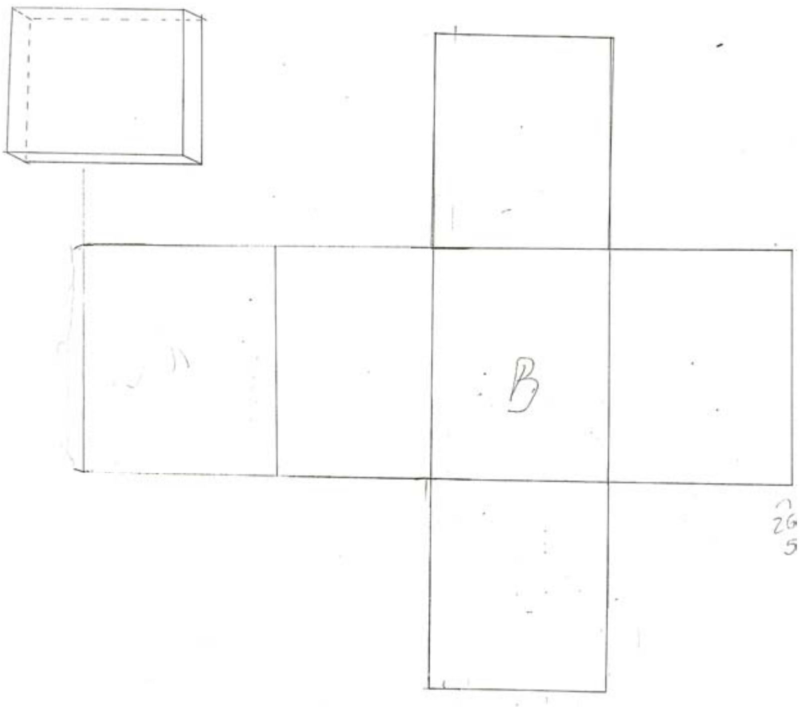


Figura 6 – Planificação do "cubo"

Outros desenharam um cubo em perspectiva.

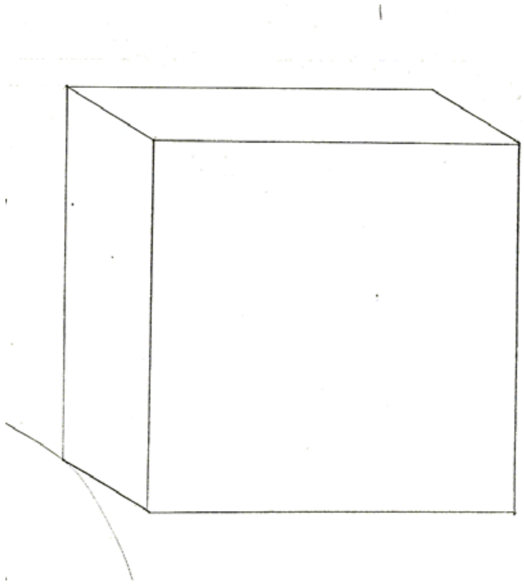


Figura 7 – "Cubo" em perspectiva

Percebemos, ao longo dessa atividade, que os conhecimentos esperados quanto aos conceitos de comprimento, largura e altura, perderam-se em seu decorrer. Isso se deu porque todos os alunos construíram um cubo, resultado que não os obrigava a pensar em construir uma caixa com dimensões diferentes (comprimento, largura e altura). No cubo, bastava apenas uma medida para todas as arestas.

Outro aspecto que observamos, durante a resolução deste problema, foi em relação ao uso dos instrumentos de Desenho Geométrico. Neste sentido, poucos alunos tiveram dificuldade, entretanto, para esses casos, ao se formarem os grupos, a colaboração entre os pares foi suficiente para que superassem essa situação.

Avaliamos que, como um de nossos objetivos era o de reforçar o conhecimento das dimensões da caixa, poderíamos ter definido de antemão alguns valores para essas dimensões, direcionando os alunos à construção de um bloco retangular. Assim, seria necessária a identificação das dimensões desejadas.

Problema 2

A professora-pesquisadora enunciou o problema abaixo:

2.1 Desenhar um retângulo com as seguintes dimensões: comprimento: 1,6 dm e largura: 1,0 (dm).

2.2 A partir deste retângulo, construir uma caixa, sem tampa, com altura igual a 0,1 dm.

Obs: o nome dessa caixa será **"caixa teste"**.

Foi distribuída uma folha de papel A_4 e solicitado, aos alunos, que desenhassem um retângulo nessa folha, utilizando régua e esquadro. O problema foi enunciado oralmente e colocaram-se na lousa as dimensões do retângulo a ser desenhado na folha de papel A_4: $c = 1{,}6dm$ e $\lambda = 1dm$. O decímetro foi adotado como medida padrão, pois gostaríamos de verificar como os alunos iriam lidar com essa unidade de medida.

Os alunos desenharam individualmente o retângulo e, na maioria os desenhos estavam bons.

A seguir solicitou-se que os alunos recortassem o retângulo desenhado. Então, a professora-pesquisadora pediu que, a partir desse retângulo construíssem uma caixa com altura de 0,1dm. Chamou atenção também de que essa caixa não teria tampa e o nome dessa caixa seria **"caixa teste"**.

Essas orientações não foram muito bem compreendidas logo de início, sendo necessária a intervenção da professora-pesquisadora, como podemos observar no seguinte diálogo:

PESQ: De quais dimensões do retângulo vocês dispõem para construir a caixa?

CLASSE: 1dm por 1,6dm.

PESQ: Como vamos desenhar a altura da caixa a partir desse retângulo?

ALE: Tem que marcar do lado, pra depois você dobrar e fazer a caixa.

PESQ: Do lado? Onde?

ALE: Em cima (referindo à parte externa da medida dada).

A inquietação era geral na sala de aula em torno de como desenhar a caixa a partir daquele retângulo. Eles não sabiam onde desenhar a altura. Depois de muita discussão, com o retângulo recortado em mãos, a professora-pesquisadora questionou a classe. Nesse momento, os alunos já estavam trabalhando em seus grupos e isso porque não conseguiam avançar individualmente.

O diálogo em classe continuou:

PESQ: Mas nós só temos esse papel. Ir para o lado, que era como ela dizia a parte externa do retângulo desenhado, necessita de mais papel. Como vocês farão para <u>levantar</u> a altura aqui?

A pesquisadora esperava que os alunos levantassem a altura da caixa, dobrando as "abas".

JAN: O desenho vai ficar assim não é? Quanto vai ter cada quadradinho, referindo-se aos cantos, desse aqui, ó?

Pela fala de JAN, observamos que seu grupo já havia desenhado a moldura da caixa no retângulo, entretanto, o grupo não sabia quais as medidas dos quadradinhos dos cantos. Essa moldura havia sido desenhada aleatoriamente.

PESQ: Onde estaria a altura da caixa no desenho, falando com o grupo de JAN?

Dirigindo-se à classe à professora-pesquisadora perguntou mais uma vez:

PESQ: Como vocês farão para levantar a altura da caixa a partir deste retângulo?

JAN: tenho que marcar 1cm aqui, ó!

Ao se depararem com a unidade de medida de comprimento decímetro (dm), alguns alunos procuraram no dicionário do livro didático a transformação da unidade de medida decímetro para centímetro (cm) e outros tentaram buscar a resposta, oralmente, com a ajuda dos colegas. Sentimos que os alunos ficaram mais confortáveis em trabalhar com a medida centímetro (cm) em lugar de decímetro (dm).

PESQ: Você não pode marcar para cá, seus limites são esses, disse apontando para dentro do retângulo. O grupo de JAN não havia recortado o retângulo.

JUL: Como é que eu recorto a altura nesse papel?

JAN: Marco pra dentro então! A base da caixa vai ficar menor do que o papel.

PESQ: A base da caixa vai ficar menor, por quê?

JAN: Porque tem que recortar esse quadradinho daqui.

No grupo de ALE, a discussão tomou outra direção após a fala da pesquisadora quando esta falou sobre "levantar a altura":

HAL: Recorta aí, num corta? Referindo-se aos cantos com $1cm^2$ de área. Só que aí vai sair uma caixa pequena. Dobra 1 cm.

ALE: É. Tem que tirar 1cm de margem e dobrar. Vou marcar uma moldura, daí fica mais fácil pra dobrar.

Foi difícil aos alunos perceberem que o lado do quadrado cortado seria a altura da caixa. A dificuldade foi geral. Após a fala da professora-pesquisadora, especificamente com o uso de a palavra levantar, os alunos começaram a desenvolver estratégias para traçar a altura procurada. As caixas foram desenhadas por todos, os cantos foram recortados e, posteriormente, as caixas foram montadas num papelão.

A palavra levantar apresentou-se com o significado de "sair do plano", onde, no caso, o plano era o retângulo de 10 cm por 16 cm. Dessa forma, perceber a relação existente entre a palavra levantar e a altura da caixa, foi a etapa seguinte do trabalho. Baldino (1996, p.6) apoiado na teoria de Walkerdine (1988), afirma que "... é inevitável lançar mão de significados extra-escolares porque são eles que são transformados em significados matemáticos pela operação de ensino [...] o ingresso no discurso matemático torna-se um deslizamento ou transposição de uma prática e sistema de significados para outro (p.6)".

Terminado o trabalho nos grupos deu-se início à Plenária. Cada grupo enviou um integrante à frente da sala onde este iria apresentar seu resultado. Durante a apresentação, os demais alunos mantiveram-se atentos. Os alunos foram orientados anteriormente em observar os aspectos relevantes que tinham sido identificados por um grupo e não por outro, durante a resolução do problema proposto. O fechamento dessa discussão girou em torno dos pontos de vista dos alunos. Durante as observações da professora-pesquisadora, foram notados dois comportamentos distintos: os alunos identificaram por si próprios seus erros, ou os colegas de grupo ajudaram na superação de alguma dificuldade que, até esse momento, não havia sido sanada. Assim, todos os alunos conseguiram construir a caixa.

Abaixo nas Figuras 8 e 9 temos o desenho da planificação da **"caixa teste"** desenhada sobre o retângulo pelos alunos:

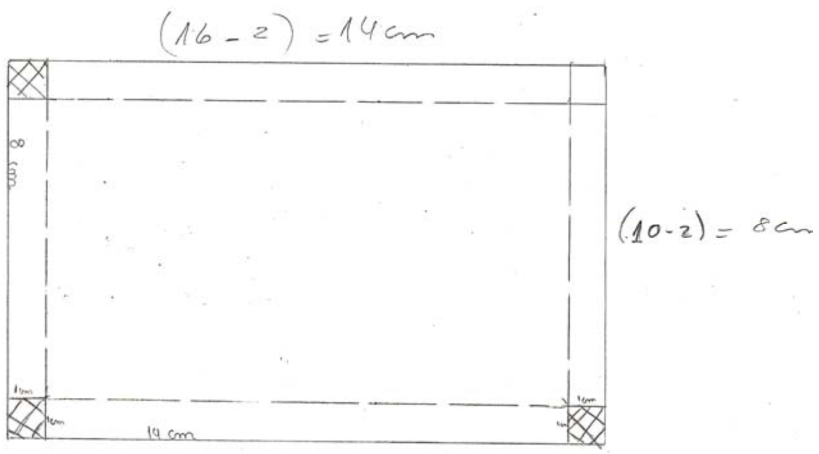


Figura 8

A Figura 8 mostra a moldura da caixa desenhada sobre o retângulo com medidas 16cm no comprimento e 10 cm na largura. Ao lado, o aluno escreveu as dimensões da base da caixa: c = 14cm, λ= 8cm. Do lado do quadrado riscado, o aluno escreveu 1cm representando a altura. A bem da verdade, a escrita da altura no desenho foi marcada após a formalização das idéias matemáticas novas registradas pela professora-pesquisadora.

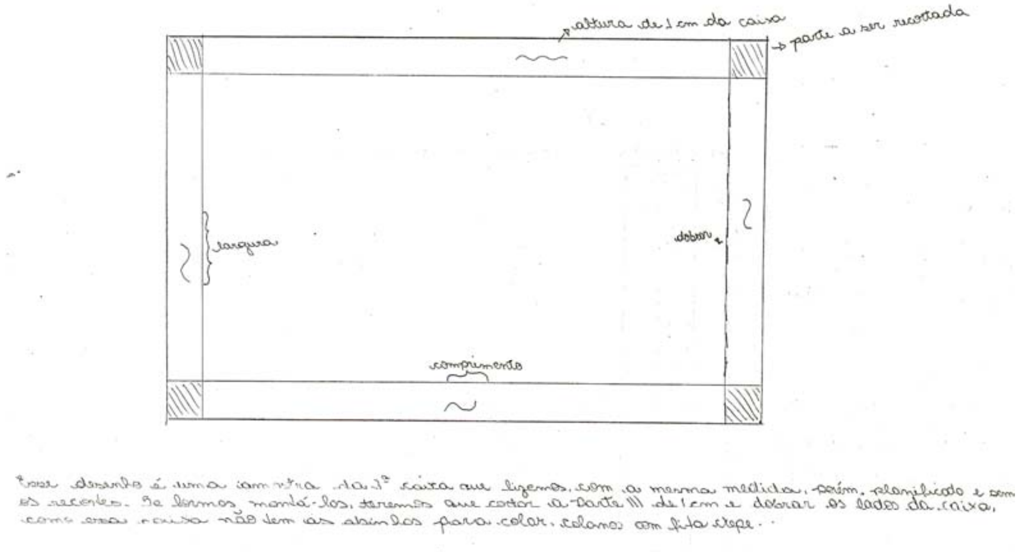


Figura 9

A Figura 9 representa a caixa planificada, desenhada sobre o retângulo de papel. A aluna não escreveu as medidas de comprimento e largura. Ela escreveu apenas a altura de 1cm, parte a ser recortada, e o seguinte texto: *"O desenho é uma amostra da 2ª caixa que fizemos, porém sem os recortes. Se formos montá-la teremos que cortar a parte /// de 1cm e dobrar os lados da caixa. Como não vamos deixar as abinhas para colar, colamos depois com fita crepe".*

Na formalização dessa atividade, realizada pela professora-pesquisadora, a mesma apontava para os quadrados recortados nos cantos e enfocava que seu lado representava a altura da caixa. Como as dimensões da área do retângulo inicial eram16cm e 10 cm, depois de recortados os quadrados dos cantos, a base − face oposta à tampa se esta existisse − da caixa formada e levantada ficaria menor do que a área do retângulo inicial. Demos outros exemplos, casos em que a altura fosse 2cm, ou 1,5cm, ou 3cm, etc., questionando os alunos sobre as dimensões das bases dessas caixas. Esses exemplos foram discutidos oralmente. Os alunos conseguiram promover uma discussão em torno da variação das bases das caixas, a partir das alturas sugeridas pela professora-pesquisadora, sem a necessária construção dessas caixas. A situação pareceu familiar a todos, quando passaram de um trabalho concreto para a abstração.

O foco dessa atividade era o da construção de uma caixa, utilizando a experiência vivenciada pelos alunos na construção da **"caixa piloto"**. Esperava-se que os alunos percebessem que, para montar a caixa, bastava recortar quadrados com medidas de 1cm de lado nos quatro cantos do retângulo inicial desenhado. Ainda estávamos interessados em saber de que conhecimento os alunos fariam uso para lidar com a medida padrão adotada no problema.

A dificuldade dos alunos estava, realmente, na representação geométrica da altura da caixa quando se lhes apresentava apenas uma figura plana. Foi necessário um trabalho no concreto, com as mãos, para entender o que deveriam fazer.

5.3.2 - 2º e 3º Encontros

No 2º encontro foi retomado oralmente o Problema 2 e resolvidos os Problemas 3 e 4.

Problema 3

Solicitou-se, oralmente, que os alunos calculassem a área do papelão gasto na construção da **"caixa teste"**, após sua montagem.

Ao propor essa atividade, inicialmente iríamos propor o cálculo da área da base da caixa. Depois pensamos que, se os alunos tivessem dificuldade em calcular a área da base da caixa, teríamos que trabalhar com outras situações-problema envolvendo cálculos de áreas, até que essa dificuldade estivesse resolvida. Frente a essa situação, optamos por solicitar a área de papel utilizado para montar a caixa, desconsiderando os quadrados recortados nos cantos. Isso envolveria o cálculo de cinco áreas distintas, sendo quatro das faces laterais e outra da base da caixa, explorando razoavelmente este conceito.

Esperávamos que os alunos calculassem a área de papel utilizado na construção da caixa, desconsiderando os cantos que haviam sido descartados. Os grupos estavam com a "caixa teste" montada, com o comprimento medindo agora 14 cm, largura 8cm e altura 1cm.

Percebemos que todos os grupos começaram a discussão da atividade confundindo área com volume. Essa dificuldade, muito encontrada na maioria dos alunos, nas diferentes faixas de ensino, foi resolvida a partir de algumas perguntas que fizemos. Neste momento, poderíamos ter explorado o conceito de área como sendo a medida de uma superfície. Poderíamos ter desenhado um retângulo, quadriculado esse desenho com quadrados medindo 1cm de lado e enfocado que, a área é dada em função dos quadrados de $1cm^2$ de área que cobrem aquela superfície. O mesmo poderia ter sido feito com o conceito de volume, se referindo as unidades cúbicas que cabem dentro de um sólido. Não foi o que fizemos. Na ocasião, "resolvemos" a problemática por meio de questionamentos, por exemplo, quando perguntamos: Temos volume quando o objeto medido é um segmento de reta? Temos volume quando medimos áreas, ou seja, objetos bidimensionais? No volume quantas dimensões há? Acabamos chegando ao consenso de que área é uma medida do espaço dentro de uma região plana, portanto bidimensional, e volume mede o tamanho de objetos tridimensionais. Essas perguntas serviram para que os alunos pudessem entender que:

> Ponto: P não tem dimensão; Reta: r tem dimensão 1 (comprimento); Plano: α tem dimensão 2 (comprimento e largura); tudo dentro do espaço tridimensional (comprimento, largura e altura).

Na discussão a seguir, apresentamos a fala do grupo de MAN, onde observamos um conflito entre as palavras largura e altura presentes nos cálculos de área e volume.

GAB: Mas gente, área não é base x altura?
MAN: Não... ou é?
GAB: Base x largura?
MAN: É, nem tudo tem altura. Isso é volume.

MAN falou para GAB que a área do retângulo é dada pela fórmula base x largura e não base x altura, pois nem tudo tem altura. Ela interpretou a palavra altura como uma dimensão que sai do plano, logo só poderia citá-la quando se tratasse de volume. Nesse caso, MAN sugeriu que seria melhor utilizar a expressão base x largura. Esse conflito vivido pelo grupo está relacionado às idéias de Vygotsky (1979), quando ele afirma que a criança possui o conceito, mas não tem consciência do seu ato de pensamento, em outras palavras, teria o conceito sem consciência.

Analisamos, nessa fala de MAN, que o conceito das palavras usuais para o cálculo de volume não estava claro para eles, já que volume refere-se ao cálculo envolvendo três dimensões e a área, ao cálculo de duas dimensões, não sendo tão relevantes os nomes que recebem. Poderíamos, por exemplo, chamar de a, b e c as três dimensões para o cálculo do volume e a e b as duas dimensões da área. Dessa forma, conforme Moysés (1997), de acordo com a abordagem sócio-histórica, o valor da aprendizagem está relacionado à importância de se trabalhar o sentido e o significado dos conceitos, para que haja uma aprendizagem mais significativa.

Ao se ensinar o cálculo do volume de um bloco retangular, entende-se por volume a medida de espaço ocupado por um corpo, dado pela relação: Volume = comprimento x largura x altura, sem uma preocupação com o sentido e o significado do conceito. MAN estava ligada às apalavras envolvidas e não ao conceito que essas palavras representavam.

Diferente do grupo de MAN, os demais grupos lidaram de maneira mais prática com essa questão, considerando a fórmula que lhes haviam apresentado em anos anteriores de estudo:

JAN: 14 x 8 x 1

JUL: Daí você vai tirar o volume.

JAN: Então é 14 x 8 só!

ALE sugeriu a seu grupo que, nesse problema, calculassem as áreas das faces laterais e a da base da caixa separadamente, somando-as posteriormente, para então definirem a área do papel utilizado na construção da caixa.

Os grupos desenvolveram duas estratégias de resolução para o cálculo da área do papel gasto na construção da caixa: 1) fizeram o cálculo do produto das dimensões do retângulo inicial, subtraindo dessa área as áreas dos quadrados recortados nos quatro cantos, iguais a $1cm^2$ cada e, 2) adicionaram o valor das áreas de cada face lateral à área da base da caixa.

Diante dessas estratégias de resolução, os grupos chegaram à conclusão de que, dentre outros, o cálculo do grupo de ALE era o mais interessante, já que alguns grupos haviam se esquecido dos cantos não utilizados, aqueles quadradinhos que foram recortados e, encontrando, erradamente uma área igual a 160 cm^2. O grupo de ALE contestou, lembrando que os cantos foram retirados pelo grupo, não sendo aproveitados na construção da caixa. Novamente verificamos que, na discussão, os alunos estavam atingindo os objetivos propostos para esse problema: “*Como cada canto tinha 1cm*^{2} *de área*”, completou o grupo de ALE, “*subtraímos esses quatro cantos, retirados para construir a caixa*”.

A pesquisadora chamou-lhes a atenção para a necessidade do uso das unidades de medida e disse que a área de papel gasto seria dada por:

1) $A_{papel\ gasto} = [(16cm . 10cm) - 4 . 1cm^2] = 160cm^2 - 4cm^2 = 156cm^2$

2) $A_{papel\ gasto} = [2 . (8cm . 1cm)] + [2 . (14cm . 1cm)] + (14cm . 8cm) =$

$= 16cm^2 + 28cm^2 + 112cm^2 =$

$= 156cm^2$

Observamos que, em um dos grupos, foi mais difícil chegar a um consenso sobre a quantidade de papel gasto na construção dessa caixa, em decorrência da dificuldade desse grupo em dar significado às palavras utilizadas na construção dos conceitos de área e volume. Também não reconheciam as dimensões que compunham o bloco retangular, confirmando o que falou Vygotsky (1979), quando se referiu à consciência como um processo de generalização, e esta, por sua vez, significando a formação de um conceito de grau superior, que inclui o conceito dado como um caso particular. Neste sentido, a generalização das palavras envolvidas nos cálculos de área e volume, pareciam não estabelecer nenhuma relação com os conceitos neles envolvidos.

Observamos que, mesmo desenvolvendo a atividade do cálculo de área do papel utilizado na construção da caixa, em ambiente contextualizado, a partir da manipulação da "caixa teste", um grupo ainda precisou da discussão na Plenária para poder sistematizar o conhecimento em questão. O comportamento apresentado por este grupo pode ser comparado com os estudos (MELLIN E OLSEN, 1986; SCHOENFELD, 1989; JANVIER 1991; citados por MOYSÉS, 1997) atualmente desenvolvidos no enfoque sócio-histórico da psicologia, no que se refere ao ensino contextualizado em Matemática. Esses estudos apontam que, os novos enfoques não podem prescindir da ação interpessoal. Suas afirmativas orientam para a necessidade de se criar, na sala de aula, uma "comunidade do saber". "De fato, mesmo que o raciocínio contextualizado se desenvolva no praticante em situação de resolução de problemas, é conveniente examinar como sua elaboração depende igualmente da criação de 'comunidades de trocas', ou seja, de grupos de pares envolvidos na resolução de tarefas matemáticas (mesmo autor, mesma obra, p.79)".

Retomando os objetivos específicos para este problema, consideramos que os alunos apresentaram alguma dificuldade com o reconhecimento das faces dessa caixa, suas formas e medidas quando tiveram que calcular a área de papel utilizado. Entretanto, o trabalho com os grupos e a discussão em Plenária, foi importante para a formalização da atividade. Os demais objetivos propostos: a) perceber que os quadrados cortados nos cantos do retângulo não fazem parte da caixa; b) identificar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos para resolver o problema; foram amplamente atingidos.

Problema 4

A professora-pesquisadora desenhou na lousa o quadro abaixo e enunciou o problema:

4.1 Utilizando o retângulo dado no Problema 2, quais seriam as áreas das bases de caixas, caso fossem construídas, com as alturas fornecidas pelo quadro abaixo?

altura (cm)	área (cm^2)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Quadro 1

4.2 Preencher o quadro com as áreas encontradas.

4.3 Após o cálculo das áreas das bases dessas caixas, em um gráfico de pontos, representar essas áreas relacionando-as com suas respectivas alturas.

4.4 Depois de construído o gráfico, fazer uma análise das áreas das bases dessas caixas para os possíveis valores da altura.

O Problema 4 pedia o cálculo da área das bases de diferentes caixas, dadas as alturas pelo quadro apresentado no enunciado do problema. Pretendíamos que essas áreas fossem conseguidas sem o uso de fórmulas, apenas manipulando a “caixa teste” e, ainda, sem que fossem efetivamente construídas. Após o cálculo das áreas das bases dessas caixas imaginadas solicitou-se um gráfico de pontos, representando todos os valores dessas caixas em função da altura. Foi distribuída, para cada aluno, uma folha de papel quadriculado, onde o gráfico deveria ser construído. A partir desse gráfico, os alunos deveriam fazer uma análise da limitação das alturas relativas às suas áreas.

Fizemos uma análise desta primeira etapa do trabalho realizado pelos alunos no Problema 4 e verificamos que eles não apresentaram dificuldade que merecesse destaque. Os alunos conseguiram, apenas manipulando a "caixa teste", chegar às áreas solicitadas, preenchendo o quadro. Todo trabalho deu-se em situação de interação com o grupo, havendo discussões importantes, possibilitando a construção das idéias e tirando as conclusões necessárias para a construção do gráfico solicitado.

Para aqueles alunos que apresentaram mais dificuldade, a interação no grupo e a contextualização da atividade, a partir da construção da "caixa teste", foram relevantes no processo da construção do conhecimento esperado para esta atividade. Como exemplo, citaremos, nas discussões dos diferentes grupos, a percepção dos alunos quanto às alturas das caixas, dado o retângulo inicial de 16cm de comprimento e 10cm de largura. A descoberta do limite para as alturas, também solicitada neste item, era o ponto mais importante na análise do gráfico.

No diálogo abaixo, há participação de alunos de três grupos:

ALE: Não é possível montar uma caixa com 5 cm de altura. Nas bordas de 10cm, a folha teria que se dobrar ao meio e não daria formato de caixa. Não é?

LEO: Ah é verdade, não teria base.

MAR: No 5 não dá nada! Dá zero! No zero tem 160 de base, então vai descendo (referindo-se à redução nas áreas das bases das caixas com o aumento das alturas).

De fato, sem poderem se expressar numa linguagem apropriada de limites, eles sentiam que se cortassem quadrados de lados 5cm, que seria o máximo permitido, dadas as dimensões do retângulo, não viam possibilidade de formar caixa, pois não haveria base para ela. Assim, numa linguagem de limite, estariam mostrando que

$\lim_{x \to 5} (4x^2 - 52x + 160) = 4.5^2 - 52.5 + 160 = 0$, pois o polinômio é uma função contínua e seu limite é igual ao valor da função no ponto e,

$\lim_{x \to 0} (4x^2 - 52x + 160) = 4.0^2 - 52.0 + 160 = 160cm^2$. Assim pudemos dizer aos alunos que considerando a altura como qualquer número próximo de zero ou de cinco, quanto quisermos, ainda assim ele é diferente de zero ou de cinco e, então, a limitação para o corte de quadrados nos cantos do retângulo dado é exatamente $0 < x < 5$.

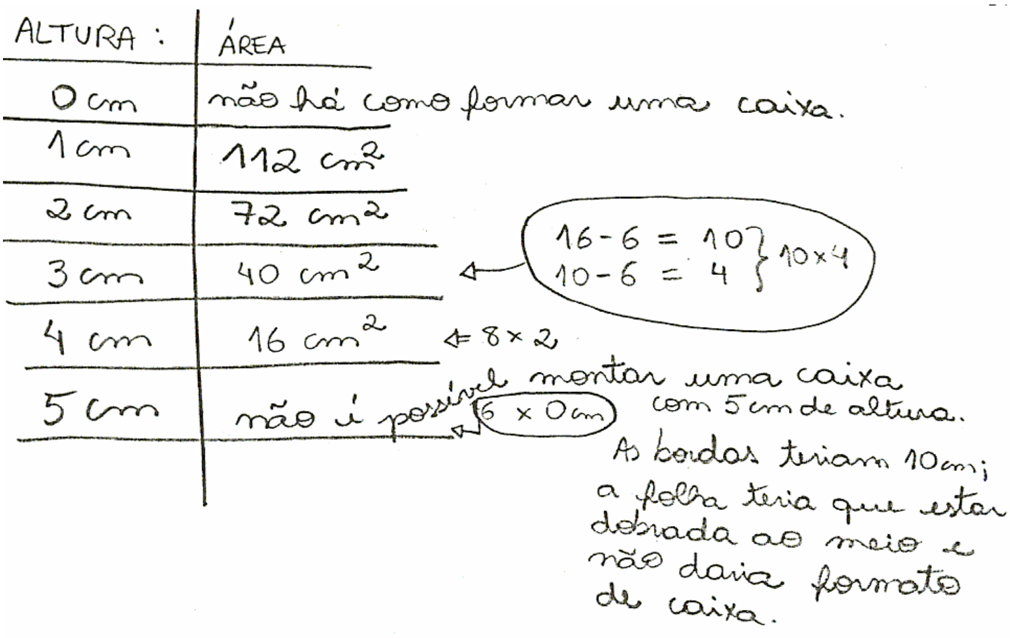
MAN: não vai ter altura isso?
GAB: É zero!

No grupo de ALE, enquanto ALE e LEO analisavam o gráfico, HAL ainda não havia entendido o porquê da conclusão dos colegas. Observando a dificuldade de HAL, ALE desmontou a "caixa teste" e fez uma dobra na largura, desta vez medindo 5 cm de cada lado. As dobras tomaram toda a largura de 10 cm. Com essa manipulação, HAL entendeu porque, com altura 5cm, não havia caixa. A atitude de ALE foi fundamental para sanar a dificuldade de HAL.

HAL: Ah, agora eu acho que entendi. Não tem caixa porque dobra, não é? Daí fica na metade.

A importância da integração do grupo e a iniciativa de ALE em desmontar a caixa para que a colega compreendesse, mostra-nos que a contextualização deste conteúdo, a partir da construção das caixas, proporcionou a HAL – e a MAR, que também apresentou a mesma dificuldade antes da conclusão anteriormente apresentada – uma oportunidade de aprendizagem dificilmente atingida em um trabalho puramente teórico.

Abaixo, na Figura 10, temos o quadro solicitado no enunciado do Problema 4, preenchido por um dos grupos, com as alturas das caixas imaginadas e suas respectivas áreas da base:



ALTURA :	ÁREA
0 cm	não há como formar uma caixa.
1 cm	112 cm²
2 cm	72 cm²
3 cm	40 cm²
4 cm	16 cm²
5 cm	não é possível montar uma caixa com 5 cm de altura.

$16 - 6 = 10$
$10 - 6 = 4$
10×4

8×2

$6 \times 0 cm$

As bordas teriam 10cm; a folha teria que estar dobrada ao meio e não daria formato de caixa.

Figura 10 – Quadro do enunciado do Problema 4 com as alturas sugeridas no enunciado do problema; as áreas das bases das caixas manipuladas sobre a “caixa teste” e as análises para as alturas 0cm e 5cm.

Após o preenchimento desse quadro, os alunos construíram o gráfico solicitado. A análise pedida, relacionando as alturas com suas respectivas áreas da base, como apresentado nos diálogos anteriores, comprovam que os alunos descobriram as limitações da altura a partir da manipulação da “caixa teste”, facilitando a análise esperada.

O próximo passo foi a construção do gráfico, seguido da análise das áreas das bases das caixas imaginadas para as alturas 0cm e 5cm, conforme Figura 11:

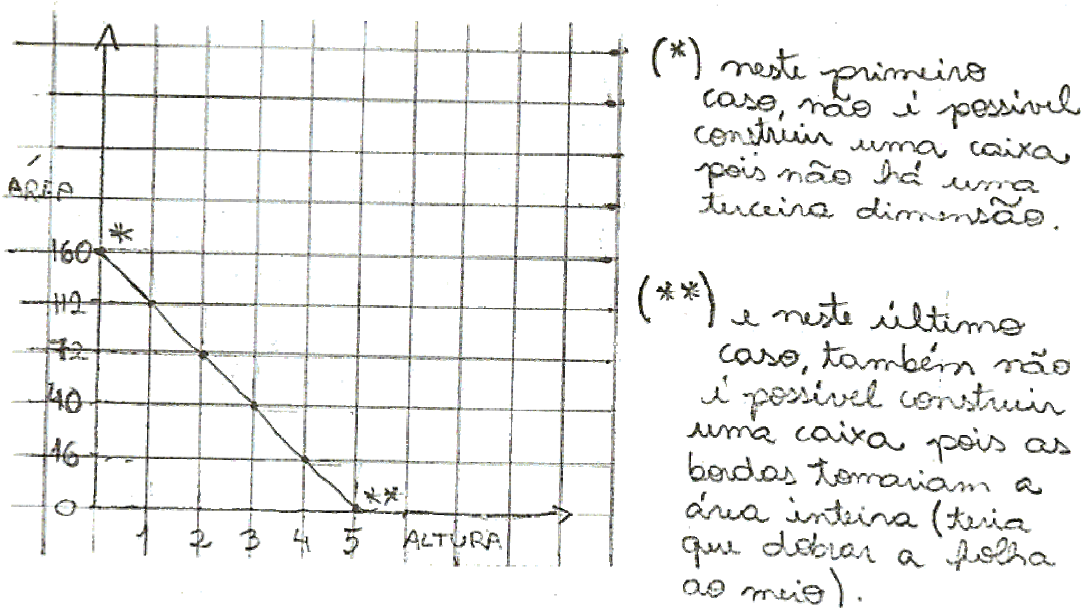


Figura 11 – Gráfico representando as áreas das bases das caixas imaginadas e/ou construídas, com alturas variando entre 0cm e 5cm. Análise referente às áreas das bases de caixas quando as alturas fossem 0cm e 5cm, refletindo os valores encontrados nos limites da função ($4x^2 – 52x +160$) nos pontos $x = 0$ e $x = 5$.

Apesar de termos solicitado um gráfico de pontos, já que queríamos somente o valor do Polinômio no ponto, alguns alunos uniram esses pontos. Quando questionados sobre o porquê da linha que une os pontos do gráfico, eles disseram que para alturas entre 1cm e 2cm, por exemplo, haviam infinitas caixas. Sendo assim, fizeram a linha unindo esses pontos. Essa observação dos alunos é muito rica, pois ela estende o problema ao conjunto dos números racionais. Acreditamos que essa observação seja decorrente do trabalho com a manipulação que fizeram sobre a “caixa teste”. Perceber que a altura das caixas poderia variar entre 0cm e 5cm, o que, para eles, permitiria ligar os pontos do gráfico, mostra a densidade do segmento. Como ainda não haviam trabalhado com números irracionais, o que eles conheciam era somente a extensão dos naturais aos racionais, o que poderia lhes parecer o segmento de reta não só denso, mas completo. Também, devido ao não conhecimento das funções polinomiais e de seus gráficos, bem como ao uso adequado da escala, não puderam perceber que os pontos do gráfico não poderiam ser alinhados por segmentos de reta. Ainda não sabiam que o gráfico de uma função polinomial do segundo grau que, no nosso problema, representava as áreas, seria dado por um arco de parábola. Embora não tenha sido essa a solicitação do problema, pela riqueza da observação, achamos importante apresentá-la. Ainda, com uma escolha não conveniente na escada dos valores atribuídos, as áreas das bases das caixas, a marcação dos pontos não os mostrou desalinhados. Com uma nova escolha, o vértice da parábola poderia aparecer melhor.

Quanto aos objetivos propostos para este problema, avaliamos que os mesmos foram atingidos pela maioria dos alunos em primeira instância. Para aqueles que tiveram um pouco mais de dificuldade, a socialização das estratégias de resolução no grupo e a posterior discussão na Plenária, permitiu que conseguissem atingi-los.

Fizemos o fechamento do Problema 4 em Plenária, seguido da formalização feita pela professora-pesquisadora.

5.3.3 - 4º Encontro

Resolução do Problema 5

Problema 5

Este problema foi enunciado oralmente, num diálogo professora-pesquisadora e alunos. A professora-pesquisadora pediu que desenhassem, numa folha de papel A_4, um retângulo com as seguintes dimensões: comprimento: 1,6dm e largura: 1,0dm e fez a seguinte pergunta: − Como, a partir desse desenho, podemos representar as diferentes alturas das caixas imaginadas no Problema 4?

Na realidade, o que se pedia neste problema era a figura de uma caixa planificada, a partir do retângulo desenhado. A altura dessa caixa seria aleatória, claro que obedecendo ao intervalo determinado no Problema 4. Nesta etapa do trabalho, estávamos interessados em verificar se os alunos, já tendo percebido a variabilidade da altura, iriam recorrer ao conhecimento de que já dispunham na Álgebra, atribuindo à altura dessa caixa um valor qualquer para a variável naquele intervalo. Para conduzi-los ao nosso objetivo, inicialmente deixamos que buscassem estratégias de resolução para o problema, em seus grupos. À medida que foram avançando na atividade, observamos que, conforme Figura 12, três dos quatro grupos estavam desenhando caixas onde, para encontrar as abas que levantadas fossem formando essas caixas (com alturas representadas apenas por números inteiros positivos, num mesmo desenho), iam emoldurando (no plano do retângulo original, traçando paralelas aos lados do retângulo, distando das bordas originais 1cm, 2cm, 3cm, ..., as possíveis caixas imaginadas), sem perceber que, para formá-las, os quadrados nos cantos deveriam ser recortados como vinham fazendo nas caixas anteriores (embora existissem outras formas de montar uma caixa). A caixa seria montada por meio de dobradura das “abas”, depois de feitos os recortes.

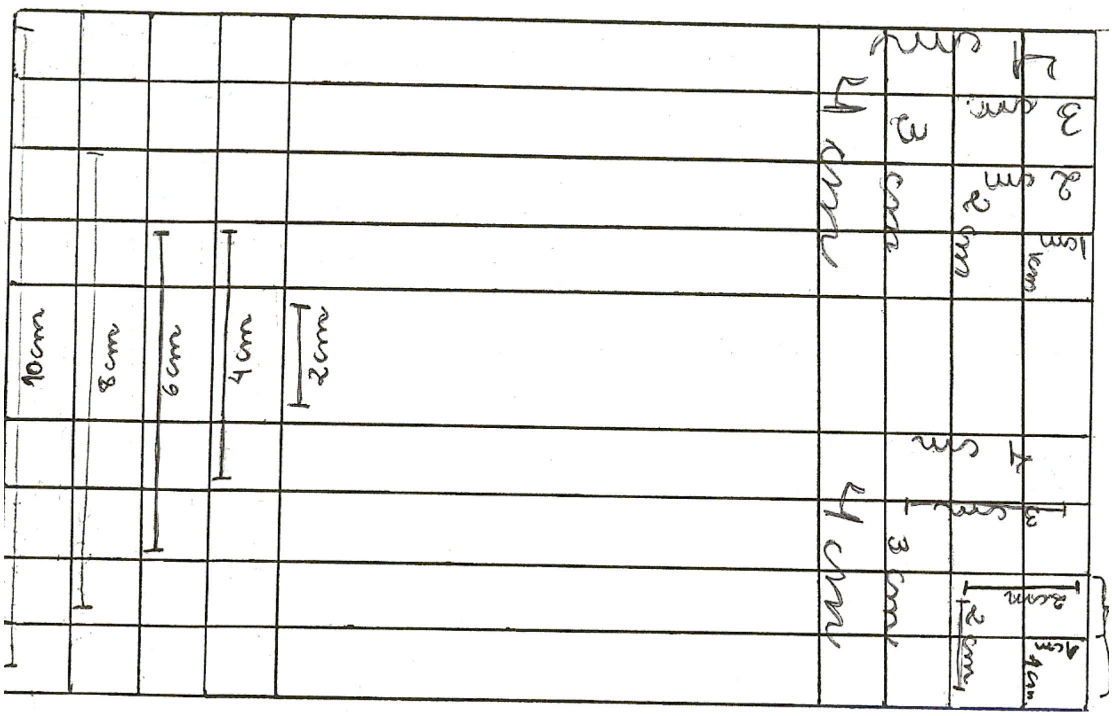


Figura 12 – Caixas intercaladas com alturas representadas por números inteiros positivos, obedecendo o intervalo para a altura maior que 0cm ou menor que 5cm.

Diante dessa estratégia, perguntamos aos grupos se no espaço existente entre uma caixa e outra, apontando para o desenho, haveria uma terceira caixa. Prontamente os alunos responderam que sim e, sugeriram que as alturas fossem medidas por números decimais. Continuamos fazendo perguntas:

PESQ: A altura da caixa pode ser 1,3cm? Pode ser 1,278cm?

CLASSE: Pode ser qualquer número entre 0cm e 5cm. É difícil construir umas caixas como essas, mas pode ser.

Depois de feitas essas perguntas, os grupos, que estavam desenhando as caixas intercaladas, perceberam que seus desenhos não davam conta da situação-problema apresentada, já que, entre uma caixa e outra, caberiam várias outras caixas. Na verdade não poderíamos construir muitas caixas embora, matematicamente, existissem infinitas caixas possíveis.

LEO chamou a atenção dos colegas dizendo:

LEO: A gente estava apresentando a altura como sendo exato − referindo-se número inteiro. E se a altura fosse 1,2cm?

PESQ: Quando a altura for 1,2 cm ou qualquer número não negativo, diferente de natural, como vocês deveriam proceder?

Nesse momento, a professora pesquisadora quis chamar a atenção dos alunos para a existência de outros números diferentes dos naturais e que servem para atender a outros tipos de problemas. Apesar disso, os alunos voltaram a apelar para o que conheciam, no caso a fórmula e não um padrão. Daí originou-se o seguinte diálogo:

ALE: Aí entra a fórmula.

LEO: Você coloca assim, você puxa uma seta ...

No desenho do grupo a seta, sugerida por LEO, saia do espaço entre uma caixa e outra.

ALE: Tipo uma seta e escreve "e, com esse desenho, nós descobrimos uma fórmula, porque é 16 – 1– 1 ...".

PESQ: Como? Porque você fez isso aqui, 16 – 1 – 1?

ALE: Porque é 16 – 1– 1.

PESQ: Neste caso, o 1 representa a altura 1cm? E quando essa altura não for 1cm, como vocês vão representá-la? E quando a altura não for nenhuma dessas indicadas no quadro do Problema 4? Há outras possibilidades? Quantas?

Com essas perguntas feitas, no grupo de ALE, estávamos instigando o grupo com a intenção de orientá-los na percepção de que a altura seria uma variável e que poderia ser representada no desenho por uma letra, já que não poderíamos verificar todas as possíveis alturas naquele intervalo. É interessante ressaltar que a dinâmica dos grupos era o fator mais importante nessa etapa do trabalho. Era, nas relações sociais vividas no grupo, que os alunos começavam a formar a idéia da atividade proposta. O que vislumbrávamos, nessa etapa do trabalho, era a busca de um padrão que servisse para o trabalho com qualquer caixa oriunda do desenho do retângulo original.

Continuando a fala anterior, ALE completou seu raciocínio, escrevendo no desenho de seu grupo:

ALE: Esse desenho feito apresenta possibilidades para a altura ao montar a caixa, quando as alturas forem números naturais. A lateral será comprimento menos 2cm, ou, numa caixa qualquer, "comprimento menos *x vezes* 2, onde *x* é a altura.

Observamos que o grupo já estava buscando uma fórmula para o cálculo da área da base em função da altura, sem antes ter representado geometricamente a altura no desenho. Este grupo, já havia percebido que a altura poderia ser representada por uma letra e já se interessavam em buscar uma fórmula geral, mas ainda não sabiam como seria a representação geométrica da mesma.

Exceto o grupo de JAN que não havia apresentado essa dificuldade[15], embora não tivesse marcado *x* no lado do quadrado a ser recortado, após termos perguntado à classe sobre as caixas que poderiam estar nos espaços entre uma caixa e outra, não houve demora para que os grupos percebessem a representação algébrica da altura. Concluíram que a altura poderia ser expressa pela letra *x* e que a mesma variaria conforme cada situação dada.

No Problema 4, quando pedimos para montar a "caixa teste", os alunos tiveram dificuldade, por não saberem onde deveriam representar geometricamente a altura no desenho. Essa dificuldade novamente apareceu no Problema 5. Mesmo sendo uma dificuldade presente somente no grupo de JAN, avaliamos que a dificuldade, em identificar a altura no desenho, está associada ao fato de os alunos não estarem acostumados a usar representações geométricas em Matemática, ou então, não terem conseguido fazer uma boa interpretação do enunciado do problema. Ao se depararem com uma situação-problema, esperava-se que os alunos pudessem fazer a análise da mesma, a identificação das incógnitas e um desenho que pudesse representar essa situação. Esses são elementos básicos dos quais os alunos devem dispor e que, acreditamos, pudessem contribuir positivamente para o caminho em busca do resultado. Esse procedimento que não acontece da noite para o dia, requer prática e deve ser incorporado no dia a dia das aulas de Matemática.

[15] Esse grupo desenhou uma moldura sobre o retângulo inicial, sem uma medida específica, e escreveu em linguagem corrente, ao lado da caixa, que a altura seria representada pela letra *x* atentando para o intervalo $0\text{cm} < x < 5\text{cm}$.

É interessante notar que os alunos queriam achar uma fórmula sem que soubessem que esse era um dos objetivos para esse encontro.

Ao identificarem a altura x, os grupos partiram em busca de uma fórmula que desse a área da base da caixa em função da altura x, isto é, queriam descobrir um padrão que servisse para qualquer x, $0cm < x < 5cm$.

A pergunta deste problema era a seguinte: Como, a partir do desenho, podemos representar as diferentes alturas das caixas imaginadas no Problema 4? Como vemos, a problemática estava em torno da altura, neste caso, representada por uma variável. Mas, percebemos que os alunos se manifestavam na busca de um padrão. Eles não sabiam bem como fazer, mas manifestaram o interesse em encontrar um padrão, embora não soubéssemos se, naquele momento, já haviam percebido que esse padrão estava relacionado com a dependência da base da caixa em relação à altura. Acreditamos que tenham sido motivados por conta de termos trabalhado com áreas nos problemas anteriores. Sendo assim, redirecionamos o trabalho perguntando aos alunos como fariam para calcular a área de um retângulo, pensando que a resposta a essa pergunta os levaria a perceber que o padrão que buscavam estava relacionado com a fórmula que dá a área do retângulo:

PESQ: Vocês conhecem a fórmula que calcula a área do retângulo desenhado na folha A_4?

CLASSE: base x altura.

PESQ: Digam, olhando em seus desenhos, o que é comprimento e o que é largura nesse retângulo. Após identificá-los, escreva a fórmula da área da base dessa caixa em função da altura x.

Como já citamos anteriormente, o grupo de ALE vinha, desde o início do trabalho, pensando na possibilidade de uma fórmula. Quando fizemos a intervenção anterior, o grupo havia feito a seguinte colocação:

ALE: Este desenho apresenta possibilidades de alturas para montar uma caixa quando as alturas forem números naturais. Neste caso, 1, 2, 3 ou 4 cm. Porém sabemos que a altura pode ser qualquer número...

LEO: Maior que zero e menor que 5 cm...

ALE: Em relação às medidas 10 cm e 16 cm, então criamos uma fórmula em função de x, que é a altura. 160, que é área da folha − referindo-se ao retângulo −, menos x^2 *vezes* 4 = Área da base da caixa. Esse $[(x^2) \cdot 4]$ são os cantinhos que a gente tirou.

O grupo foi escrevendo o diálogo acima, ao lado das caixas intercaladas. A fórmula a que chegaram foi a seguinte: $[160 - (x^2) \cdot 4]$. Esta fórmula ajudava a calcular a área de papel utilizado na construção da caixa, em vez da área da base da caixa, o que era solicitado. Apesar disso, avaliamos que, mais do que chegar ao resultado certo, foi de extrema importância o entrosamento dos grupos na busca de estratégias para solucionar a situação-problema em questão.

Os outros três grupos apresentaram uma fórmula, para a área da base da caixa, a partir das dimensões do retângulo inicial (comprimento x largura) e, subtraindo de cada uma dessas dimensões $(2 \cdot x)$ cm, já que se estava somente buscando a área da base da caixa.

Para dar início à Plenária, um representante de cada grupo colocou, na lousa, a fórmula encontrada pelo grupo.

No grupo de ALE chegaram com à seguinte fórmula: $A = [160 - (x^2) \cdot 4]$.

Outros grupos chegaram a diferentes fórmulas, nem sempre corretas. O grupo de JAN chegou à seguinte fórmula:

$A_R = b \cdot a$

160 cm^2 = área total do papelão

x = tamanho da altura da caixa

$A = (16 - 2x) \cdot (10 - 2x)$

fórmula descoberta pela classe pela função de x.

Os alunos não apresentaram dificuldade para encontrar a fórmula da área da base da "caixa 1". Os erros que apresentaram estavam relacionados ao esquecimento dos parênteses. Essa foi uma dificuldade apresentada pelo grupo de NIL. Essa dificuldade e a dificuldade apresentada pelo grupo de ALE foram discutidas na Plenária.

Após encontrar a fórmula da área da base da "caixa 1", o grupo de NIL substituiu a variável x por uma das alturas do Quadro 1 do Problema 4. Nos livros didáticos esse processo de substituição da variável por um dado valor numérico é conhecido como 'achar o valor numérico de um Polinômio'. Como podemos verificar aqui, devido à contextualização do conteúdo, não foi necessário solicitar esse procedimento aos alunos. De acordo com o caminhar da atividade, eles mesmos perceberam que, se a fórmula encontrada nesse grupo estivesse relacionada ao retângulo 10 cm por 16 cm e, também, ao Quadro 1 do Problema 4, então, os casos particulares de alturas 1cm, 2cm, 3cm, etc., deveriam atender a essa fórmula, substituindo o x da fórmula pelas alturas dadas no quadro. Achamos interessante a atitude dos alunos em verificar que os valores numéricos encontrados não eram os mesmos que os do Problema 4. Acreditamos que estavam certos dos resultados obtidos no Problema 4 em virtude de terem chegado a esses resultados fazendo a manipulação da "caixa teste".

O grupo de MAN foi o único que só conseguiu visualizar a relação entre os Problemas 4 e 5 nas explorações feitas durante a Plenária:

PESQ: Essa área foi testada por alguns grupos a partir das alturas do quadro do Problema 4. Porque o grupo de NIL falou em colocar no lugar do x o número 3?

MAN: Porque x pode ser qualquer número.

PESQ: Muito bom. Realmente pode ser qualquer número, dentro de suas limitações, mas elas falaram que o valor encontrado estava errado, já que não tinha dado $40cm^2$.

CEC: Porque ela fez toda a operação.

Nesse grupo, ainda não haviam percebido que os demais grupos tinham voltado ao quadro do Problema 4 e em mais uma intervenção,

JAN: Porque ela viu a área do Problema 4 – querendo dizer que NIL, olhando no Quadro 1, percebeu que para x = 1cm, a área da base da caixa era $40cm^2$. Logo, se os problemas estavam relacionados, então para x = 1cm na fórmula, então, a área da base da caixa deveria ser também $40cm^2$.

Aproveitando a fala de JAN, reforçamos a relação existente entre o Problema 4 e a nova fórmula encontrada. Foi importante ressaltar que, no Problema 4, estávamos atribuindo valores aleatórios para as alturas e, usando a aplicação prática da montagem das caixas, encontrávamos a medida da área da base da caixa sem o uso de uma fórmula específica.

O fechamento dessa etapa deu-se conforme discussão abaixo:

PESQ: Semana passada nós calculamos a área da base das caixas imaginadas, usando a "caixa teste". Hoje, encontramos uma fórmula que dá a área da base da caixa em função da altura. Por que foi necessária a descoberta desse padrão?

JAN: Pra achar a área rápido.

PESQ: Vocês acharam importante a descoberta dessa fórmula?

ALE: Sim, pra você não ter que ficar abrindo a "caixa teste" toda vez que tiver uma altura diferente, ou para não ter que ficar construindo uma caixa e depois outra para conhecer sua área. Só com a fórmula já dá pra saber.

Com relação aos objetivos propostos para esse problema, avaliamos que os mesmos foram atingidos pela maioria dos alunos e, para aqueles em que a percepção não foi automática, nossas intervenções mostraram-se satisfatórias. A exploração do trabalho feito na "caixa teste" possibilitou um melhor aproveitamento pelos alunos.

5.3.4 – 5º e 6º Encontros

Problemas 6 e 7

Os problemas 6 e 7, constantes desse encontro, tratarão da construção de duas caixas que chamaremos de "caixa 2" e "caixa 3", respectivamente. A situação-problema para ambos será decorrente do Problema 5, desta vez em retângulos de dimensões menores: 10cm por 6cm para a "caixa 2" e 6cm por 4cm para a "caixa 3". A discussão em torno da altura dar-se-á da mesma forma que no Problema 5, onde os alunos deveriam atribuir um valor aleatório para a mesma.

A dinâmica para os Problemas 6 e 7, seria a de deixar os grupos trabalharem sozinhos, sem nossa intervenção. Esse distanciamento, da professora-pesquisadora para com os grupos, permitiria visualizar se os conhecimentos aprendidos no Problema 5 seriam transferidos para esses novos problemas.

Problema 6

Desenhar um retângulo com as seguintes dimensões: largura: 0,4dm e comprimento: 1,0dm. Fazer uma análise do que ocorreria se cortássemos quadrados, nos cantos desse retângulo, dentro dos limites possíveis para a altura dessa caixa, onde a medida do lado do quadrado cortado representa a altura da caixa e essa altura é um número racional.

Esse enunciado foi colocado na lousa e a professora-pesquisadora deu tempo aos grupos para que o lessem, interpretassem e fossem em busca de uma estratégia de resolução para ele.

Os alunos começaram o trabalho verificando os limites para a altura, apontando para o intervalo, x maior que 0 cm e menor que 2 cm. Isso porque se a altura fosse 0 cm ou 2 cm não haveria caixa, como já acontecera com a "caixa 1".

Durante esse período de observação da professora-pesquisadora, enquanto os grupos trabalhavam, pudemos notar que JAN apresentava dificuldade em representar geometricamente a altura da caixa no desenho. O que nos chamou a atenção foi que essa dificuldade acompanhava o grupo desde a construção da "caixa teste". Observamos ainda que nenhum dos integrantes do grupo voltou-se para o Problema 5, para verificar onde havia sido registrada a altura. Todos sabiam que a altura seria x, mas, quando questionados sobre onde localizar essa altura no desenho, não conseguiam.

PESQ: Qual é essa altura?

JAN: x.

Apontando para o lado dos quadrados desenhados nos cantos do retângulo, repetimos a pergunta:

PESQ: Quanto mede este lado?

JAN: 1cm.

PESQ: Muito bem! Esse canto representa que dimensão da caixa?

JAN: A altura.

PESQ: Muito bem! Se você está dizendo que a altura é 1cm, então ela deixou de ser *x*? Neste caso, você está dizendo que *x* é igual a 1cm, não é? Agora, se você dissesse, olhando no desenho, que a altura da caixa, em vez de 1cm, medisse *x* cm, como você poderia entender o que foi feito?

Nesse momento, esse aluno (JAN), ao olhar o desenho, via somente uma caixa com altura igual a 1cm. Não estava conseguindo abstrair-se da situação real para uma situação geral.

JAN: E quantos centímetros eu vou pôr?

PESQ: Na altura? Quanto você e seu grupo acham que devem colocar na altura?

JAN: 1cm.

PESQ: Então não é *x*! Nesse caso, a altura da caixa é 1cm.

JAN: Mas eu não quero pôr altura 1cm.

PESQ: Quanto você quer pôr de altura?

JAN: Nada!!!

O que podemos imaginar é que esse aluno, ao dizer "nada" estava querendo dizer "qualquer coisa". Não estava conseguindo era fazer com que o *x* assumisse qualquer valor entre o zero e cinco.

Acreditamos que esse aluno ainda estava preso à situação da "caixa teste" na qual a altura media 1cm. A representação dessa altura no desenho, medida pela variável *x,*era incompreensível aos olhos dele. Frente à sua resistência, dissemos a ele que a altura, dita por ele, 1cm, estava correta na construção da "caixa teste". O que esse aluno e seu grupo não conseguiam visualizar era que, para qualquer número racional entre 0 e 2, a altura era desconhecida por eles e que poderia variar em cada caixa construída. Este é um conceito importante na Álgebra; o de <u>variável</u> e que, em geral, é representado pela letra *x* indicando algo a ser descoberto.

Essa questão foi levada à Plenária.

Os demais grupos trabalharam bem, não necessitando da intervenção da professora-pesquisadora.

Assim, fizemos com que os alunos sentados com seus grupos, discutissem o que cada um fizera. JAN foi o primeiro a apresentar suas conclusões: a fórmula da área da base da "caixa 2" era → $A_2 = 4 \,.\, (10 - 2x)$.

Os integrantes do grupo de JAN disseram a ele que a fórmula que estavam levando à lousa estava errada. Depois de discutirem entre si, conseguiram chegar à fórmula que dá a área da base da "caixa 2", em função da altura x. Depois dessa discussão, o grupo pôde apresentar seu trabalho na lousa, corrigido, conforme Figura 13.

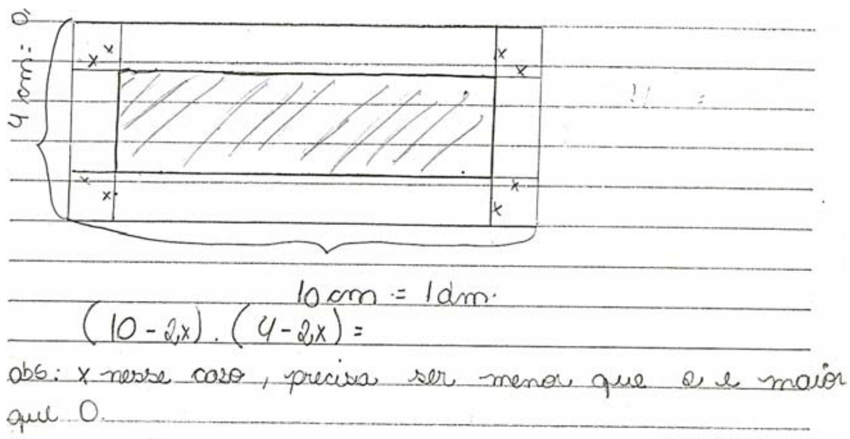


Figura 13 – A área da base da "caixa 2" está hachurada e as limitações para a altura foram observadas.

Problema 7

O enunciado desse Problema foi posto na lousa:

Desenhe um retângulo com as seguintes dimensões: largura: 0,4dm; comprimento: 0,6dm. Faça uma análise do que ocorreria se cortássemos quadrados, nos cantos desse retângulo, dentro dos limites possíveis para a altura dessa caixa onde a medida do lado do quadrado cortado representa a altura da caixa, e essa altura é um número racional.

Essa caixa foi desenhada com facilidade por todos os grupos inclusive pelo grupo do JAN. O desenho abaixo é desse grupo. Percebemos que para a resolução desse problema, foram necessárias todas as idéias trabalhadas nos Problemas anteriores 1, 2, 3, 4, 5 e 6, a fim de que o grupo pudesse representar geometricamente a altura.

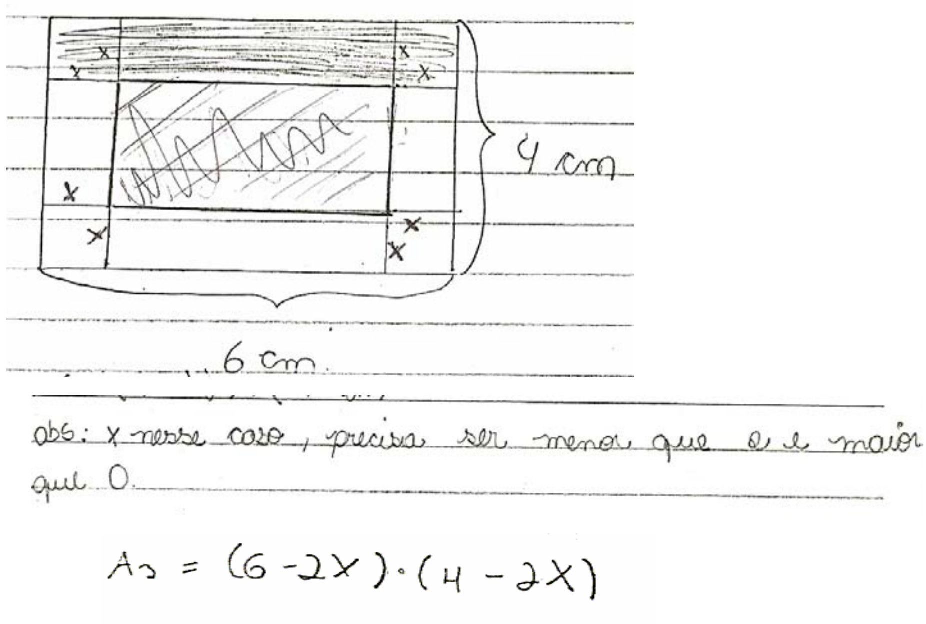


Figura 14 – A área da base da "caixa 3" está hachurada e as limitações para a altura foram observadas.

Não foi necessária uma intervenção nossa nos grupos para a resolução dessa atividade. Quando questionamos se já haviam concluído a atividade, todos disseram que sim.

Solicitamos o envio de um integrante de cada grupo à lousa a fim de discutirmos todas as fórmulas encontradas para as áreas das bases das caixas 2 e 3. Foram postas na lousa oito fórmulas, indicando as áreas das bases das caixas 2 e 3, sendo uma de cada grupo. Após a análise dessas fórmulas, verificamos que todos os grupos haviam chegado a resultados semelhantes, apresentando apenas pequenas diferenças como a ordem dos fatores e o esquecimento de parênteses. Os grupos que haviam apresentado algum desses problemas citados, resolveram a questão na discussão Plenária. Ao concluirmos a discussão, ALE e seu grupo quisera ler em voz alta suas conclusões:

ALE: Na verdade a fórmula é A = (largura menos 2 *vezes* altura) *vezes* (comprimento menos 2 *vezes* altura).

É interessante a conclusão deste grupo, pois ela abrange os Problemas 5, 6 e 7 estudados. É a generalização das três fórmulas.

Quanto aos objetivos propostos para o 4º encontro, verificamos que o mesmo transcorreu conforme os objetivos esperados. Sendo estes problemas decorrentes do Problema

5, pudemos verificar que houve generalização e que, as conclusões necessárias para a finalização das atividades propostas foram em sua maioria assimiladas nas discussões da Plenária.

5.3.5 - 7º Encontro

Problema 8 – Fixação dos conhecimentos novos construídos

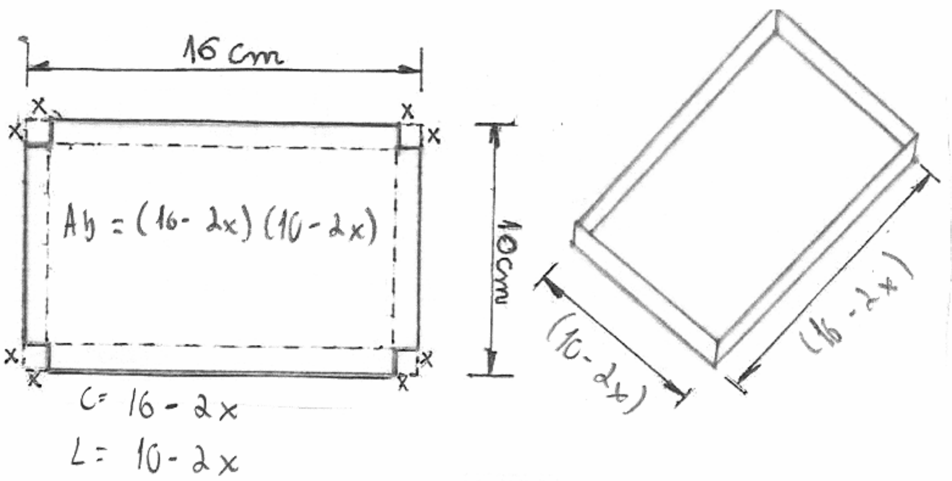
O Problema 8 é composto por quatro Tarefas.

Neste encontro foram trabalhadas as Tarefas 1 e 2, já apresentadas no Capítulo 4.

Tarefa 1 – Fazendo aplicações dos Problemas 5, 6 e 7

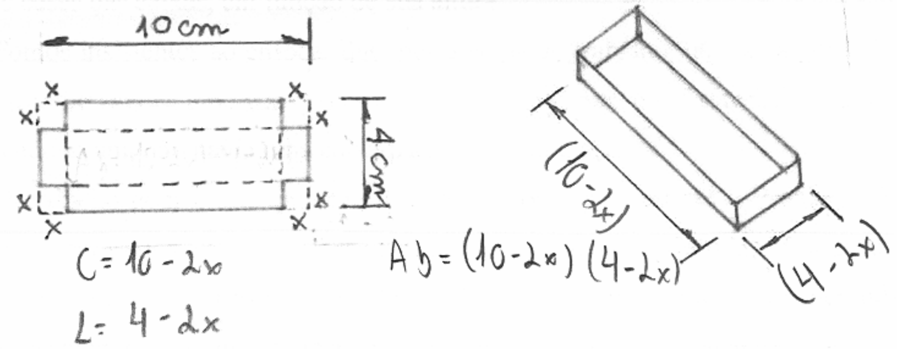
Entregue a tarefa, os grupos trabalharam, sobre os desenhos recebidos. Um dos grupos apresentou o seguinte resultado:

Problema 1.a -



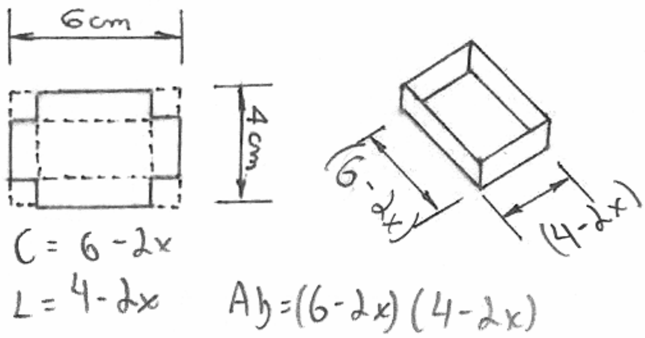
"caixa 1"

Problema 1.b -



"caixa 2"

Problema 1.c -



"caixa 3"

Figura 16

Conforme pode-se ver, na figura 16, os alunos escreveram, atendendo a solicitações do problema, as expressões algébricas representando respectivamente o comprimento e a largura da base da caixa planificada, relativos a altura x. Transferiram essas dimensões para a caixa em perspectiva e depois escreveram as expressões das áreas das bases das caixas, em função de sua altura.

Fomos insistentes ao enfocar que, nesta etapa do trabalho, não seria permitida a manipulação de caixas, uma vez que as caixas dos Problemas 6 e 7 referiam-se a outras bases. Sendo assim, não havia uma caixa para ser manipulada.

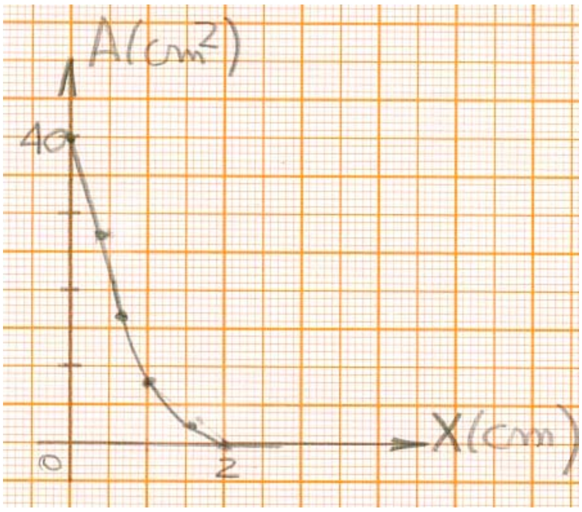
O trabalho com a manipulação das caixas foi explorado até o Problema 5. A partir daí, as ações dos alunos pediam generalização de idéias e fórmulas, desligadas da situação concreta. Como afirma Vygotsky, 1979, “o grau de abstração e generalidade [...] é a variante psicológica fundamental a partir da qual os conceitos podem ser hierarquizados significativamente” (p.147).

A seguir, atendendo aos pedidos do item 1.2, nas figuras 17 e 18, são apresentados os resultados de um dos grupos. Todos os grupos usaram, para essa tarefa, papel quadriculado com o objetivo de preservar algumas dimensões.

Quadro 2 referente à caixa 2, desenhada a partir do retângulo 4cm x 10cm:

2) $\boxed{10 \times 4}$ x → entre 0 e 2 cm

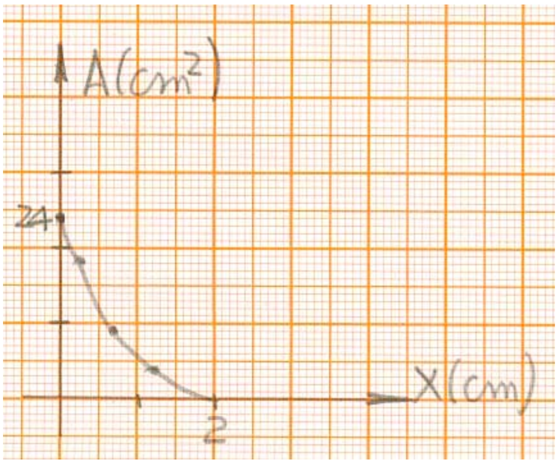
X é altura	Área
1,7	$A = (10-3{,}4)\cdot(4-3{,}4)$ | $A = 6{,}6 \cdot 0{,}6$ | $A = 3{,}96\ cm^2$
0,5	$A = (10-1)\cdot(4-1)$ | $A = 9 \cdot 3$ | $A = 27\ cm^2$
1,5	$A = (10-3)\cdot(4-3)$ | $A = 7 \cdot 1$ | $A = 7\ cm^2$
0,7	$A = (10-1{,}4)\cdot(4-1{,}4)$ | $A = 8{,}6 \cdot 2{,}6$ | $A = 22{,}36\ cm^2$



Quadro 3 referente à caixa 3, desenhada a partir do retângulo 4cm x 6cm.

3) | 6 x 4 | x → entre 0 e 2 cm

X é altura	Área		
0,3	$A=(6-0,6)\cdot(4-0,6)$	$A=5,4\cdot 3,4$	$A=18,36\ cm^2$
1,3	$A=(6-2,6)\cdot(4-2,6)$	$A=3,4\cdot 1,4$	$A=4,76\ cm^2$
0,8	$A=(6-1,6)\cdot(4-1,6)$	$A=4,4\cdot 2,4$	$A=10,56\ cm^2$
1,8	$A=(6-3,6)\cdot(4-3,6)$	$A=2,4\cdot 0,4$	$A=0,96\ cm^2$



Ao construírem os gráficos das áreas das bases das “caixas 2 e 3”, os alunos perceberam que os mesmos ficariam difíceis de desenhar porque o domínio dessa função é somente o intervalo (0,2). De fato, como JAN não poderia usar esses termos, o máximo que ele pôde dizer foi

JAN: esse gráfico vai ficar pequeno porque só vai de 0 até 2.

A observação de JAN mostra-se importante, dado o contexto em que o trabalho foi realizado. O desenvolvimento dessa atividade em ambiente contextualizado permitiu aos alunos uma prévia análise dos passos a serem tomados. A cada nova ação percebíamos que os alunos concebiam idéias daquilo que estava por vir. Essa, acreditamos, não nos parece uma atitude muito comum no decorrer de uma aula rotineira onde, freqüentemente, são verificadas, na realização da atividade, execuções procedimentais, superficiais, chegando até resultados muitas vezes absurdos. E o perigo está no fato de que, esses resultados, mesmo errôneos, podem ser, na maioria das vezes, aceitos pelos alunos.

Tarefa 2 – Conceitualização

2.1 Escrevendo as áreas das bases das caixas 1, 2 e 3 apresentadas como produtos de duas expressões algébricas, chegar, usando a propriedade distributiva, a uma soma algébrica que descreva essas áreas através de um novo objeto matemático: o Polinômio.

2.2 Reunir termos semelhantes, ordenar segundo potências crescentes ou decrescentes da variável e chegar à forma simplificada de um Polinômio.

Em toda esta tarefa, os propósitos por nós colocados sobre expressões numéricas e expressões algébricas, foram trabalhados com os alunos ao longo de sua resolução.

Na Fase Antes, preparamo-nos para esta aula, programando pontos importantes sobre fatoração.

A fatoração numérica é um processo conhecido dos alunos, quando trabalharam com a decomposição de um número em seus fatores primos; quando calcularam o número de divisores de um número; quando se tornou necessário achar o máximo divisor comum ou o mínimo múltiplo comum de dois ou mais números. Na fatoração algébrica, este processo tem também todas essas finalidades, mas as técnicas operatórias necessárias para trabalhar esse processo são muito mais complexas.

O objetivo desta tarefa: Fazer com que os alunos percebam que, a partir de um produto de fatores, chega-se a uma soma algébrica usando a distributividade e que, inversamente, partindo-se de uma soma algébrica, pode-se chegar a um produto de fatores. Este processo é chamado “fatoração”.

Com essa tarefa estávamos pretendendo conduzir os alunos ao conceito de Polinômio. Até este momento, a expressão Polinômio não havia sido mencionada, apesar de sua expressão algébrica já ter sido trabalhada quando representavam as áreas das bases das caixas. Essas áreas foram encontradas, inicialmente, como o produto de duas expressões algébricas.

A partir da propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma algébrica, chegou-se a outra expressão algébrica, denominada Polinômio.

JAN e JUL, ao aplicarem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, apresentaram dificuldade na multiplicação com relação às regras de sinais. Esses alunos não sabiam o que fazer com o sinal de multiplicação presente no produto das duas expressões algébricas que indicavam as dimensões da base da caixa.

Questionavam onde deveria ficar o sinal de *vezes* depois da propriedade aplicada a essa situação: $A_1 = (16 - 2x) \cdot (10 - 2x)$.

Para resolver esse impasse, poderíamos ter trabalhado assim: lembrando a propriedade distributiva com os alunos recordaríamos alguns casos:

$2(3x + 2) = (3x + 2) + (3x + 2) = 3x + 2 + 3x + 2 = 3x + 3x + 2 + 2 = 6x + 4$.

Assim, $2(3x + 2) = 2.3x + 2.2 = 6x + 4$ quando se faz a propriedade distributiva.

Um outro exemplo seria $(2x + 3) . (4x - 2) = 2x(4x - 2) + 3(4x - 2) = (2x.4x) + 2x(-2) + 3(4x) + 3(-2) = 8x^2 - 4x + 12x - 6 = 8x^2 + 8x - 6$.

Voltando a situação dada e aplicando o que foi feito no exemplo anterior tem-se:

$(16 - 2x) . (10 - 2x) = 16(10 - 2x) - 2x(10 - 2x) = 16.10 - 16.2x - 2x.10 + 2x.2x = 160 - 32x - 20x + 4x^2 = 4x^2 - 52x + 160$.

Não foi o que fizemos. Na ocasião, deixamos os grupos trabalharem e quando abrimos a discussão em Plenária, nos voltaríamos a esse aspecto.

O grupo de JAN, frente a dificuldade apresentada, apresentou o seguinte esquema:

$$A_1 = 160 - 20x \quad \Downarrow \quad 32x - (+4x)$$

Nesse intervalo, JAN e JUL deixaram um espaço vazio e JUL perguntou se o sinal a ser colocado nesse espaço seria de divisão.

Não conseguiram perceber que, ao realizar a multiplicação de duas expressões algébricas $(16 - 2x) \cdot (10 - 2x)$, o sinal de multiplicação ($\cdot$), que poderia até ser omitido, na propriedade usada, significando que cada termo da primeira expressão deveria ser multiplicado por cada termo da segunda e que, respeitados os sinais, seriam adicionados algebricamente.

Assim $16 \cdot 10 + 16 \cdot (-2x) + (-2x) \cdot 10 + (-2x) \cdot (-2x) =$

$= 160 - 32x - 20x + 4x^2 =$

e, ordenando segundo as potências decrescentes de x,

$= 4x^2 - 52x + 160$

Até chegar a este resultado com os alunos, seria interessante acompanhar alguns diálogos travados entre os membros desse grupo e a professora-pesquisadora, indicando falta de compreensão sobre variados conceitos numéricos e algébricos, detectados no trabalho feito através da resolução dessa atividade:

JAN: Pode fazer dez *vezes* dois x?

PESQ: Claro que sim, e quanto dá isso?

JAN: $20x$.

JUL: Tem que fazer a distributiva novamente?

JAN: Sim.

Ao aproximar-se do grupo, a professora-pesquisadora observou seu trabalho e verificou que, após aplicarem a propriedade distributiva, haviam deixado o sinal (**.**) entre os dois produtos. Diante disso, a professora-pesquisadora perguntou:

PESQ: Depois de aplicar a propriedade distributiva o sinal de vezes ainda continua no meio dos produtos obtidos?

MAR: Não sei.....

JUL: Mas daí vai ficar o quê?

PESQ: O que vocês acham?

JUL: O vezes não fica, então se o vezes não fica, fica dividido? JAN, que sinal você deixou?

JAN: Nada, já que não está trocando de lado.

JUL: Ela (referindo-se à professora-pesquisadora) falou que aplicando a distributiva, isso aqui sai (referindo-se ao sinal de vezes que eles insistiam em colocar). Vai ficar o que aqui no meio? Só se ficar dividido.

Continuando a discussão em grupo e, ainda sem saber o que fazer, JAN consultou seu livro procurando pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Enquanto JAN pesquisava, JUL continuava sem saber o que fazer e perguntou:

JUL: Ó Rose, aqui vai ficar dividido?

PESQ: Porque ficar dividido?

JUL: Porque o *vezes* saiu.

JAN: Onde vai ficar o sinal de multiplicação, então?

A professora-pesquisadora percebe que JAN não encontrando a resposta, ficava desanimado e parecia desistir da situação. Diante disso, a professora-pesquisadora chamou a atenção da colega do grupo de JAN, MAR, pois a mesma estava sentada de braços cruzados. A professora-pesquisadora lembrou-a de que essa postura não a levaria a lugar algum e, ainda, que seria importante sua colaboração no grupo.

Outros alunos, de outros grupos, tiveram também dificuldade ao trabalhar com todos os sinais que envolviam a propriedade distributiva, especificamente quando o sinal que antecedia o número era menos.

Fizemos uma retomada séria neste assunto, pois avaliamos que os conhecimentos anteriores, necessários para a continuidade da atividade, apresentavam-se de maneira fortemente desorganizada.

A professora-pesquisadora fez uma intervenção apelando à atenção dos grupos, procurando fazer os alunos entenderem o significado de algumas palavras presentes na álgebra: soma algébrica, termos de soma algébrica, distribuição, produtos, e propriedade distributiva, onde cada termo de uma expressão algébrica é multiplicado por cada termo da segunda expressão algébrica.

Essa retomada foi necessária para que os alunos pudessem entender o que foi pedido nessa atividade.

Dificuldades com o conceito de potenciação e suas propriedades, também foram diagnosticadas durante esta atividade. Assim como as dificuldades com o estudo dos sinais relacionados à multiplicação, os conceitos relacionados às propriedades das potências, também pareciam desorganizados. Alguns alunos apresentavam conclusões bastante superficiais sobre o assunto, parecendo sempre estarem presos às regras que lhes foram ensinadas. Quando questionados sobre o sentido e o significado dessas regras, pouco ou nada argumentavam. Por isso, retomamos os conceitos essenciais sobre potências e multiplicação e divisão de potências de bases iguais.

Após a multiplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, solicitamos, aos alunos, que fizessem uma análise da expressão algébrica obtida e, se possível, a simplificasse. Esperávamos, com esta análise, que os alunos chegassem à conclusão de que a expressão dada como um produto e a expressão dada pela soma algébrica encontrada mantinham a relação de igualdade.

Quando os alunos escreviam A_1, A_2 e A_3, na dependência da escolha de x, referiam-se às áreas das bases das caixas 1, 2 e 3, para qualquer altura nos intervalos de validade anteriormente definidos.

O nome Polinômios, até esse momento, não havia sido mencionado. Quando as áreas das bases das caixas foram apresentadas em sua forma geral e completa foi dito que aquela expressão algébrica era de um caso especial chamado Polinômio. Escrevemos, na lousa, a expressão $A_1 = 4x^2 - 52x + 160$ e ainda dissemos que este é um Polinômio em uma variável, isto é, a área da base da caixa varia em função de uma só variável, no caso da *altura x*. Esse Polinômio é de grau 2, pois a variável, vista em todos os seus termos, apresenta o grau 2 como o mais alto grau nos três termos. Assim, o grau do Polinômio, como já dissemos, é o grau do monômio de maior grau.

Perguntamos aos alunos se eles podiam entender o significado dessa palavra, Polinômio. Foi uma discussão tranqüila. Os alunos puderam se referir apenas ao prefixo poli, dizendo que Poli se relaciona a várias coisas (estavam relacionando essa palavra com um conhecimento aprendido anteriormente: polissílaba e, assim, esse conhecimento não lhes parecia tão solto).

Aproveitando esse significado de poli, dissemos que, no caso dos Polinômios, cada uma de suas partes chama-se termo do Polinômio e, assim, no Polinômio, poli indica uma expressão algébrica com vários termos. Os alunos acharam que, com essa explicação, fazia sentido.

Na classificação de Polinômios, considerando-se o número de termos e a natureza de cada um deles, o Polinômio recebe, até três termos, nomes especiais: Monômio, Binômio e Trinômio, que foram aceitos com facilidade, embora nenhum desses alunos tenha se preocupado com o significado de "nômio". Nós, também, não sabíamos dizer, precisamente, o que era "nômio". Buscamos no Dicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa, Caldas Aulete, 1964, página 3185, e encontramos, confirmando o que dissemos antes, que Polinômio é toda quantidade algébrica composta de muitos termos, separados pelo sinal (+) ou (-). Encontramos também que, etimologicamente, do grego, polys = (muito) e nomos = (divisão). Assim, "nomos" encontra-se relacionado ao significado de divisões na expressão algébrica.

Em relação aos Monômios, julgamos importante ressaltar os casos em que o Monômio só tem a parte numérica. Escrevemos na lousa o número 2 e perguntamos:

PESQ: Que tipo de Polinômio é esse?

CLASSE: Nenhum Polinômio.

Frente a essa afirmativa, escrevemos na lousa $2x^0$ e repetimos a pergunta. A sala se manteve em silêncio por algum tempo, até que alguns alunos falaram:

CLASSE: Deve ser um Monômio...

Apesar de a resposta ter partido dos alunos, alguns deles pareciam insatisfeitos com o fato de $2x^0$ ser um Monômio. Continuamos a intervenção:

PESQ: O que sabemos sobre x^0?
CLASSE: x^0 é 1.
PESQ: Então... o número 2 é um Monômio de grau zero?
CLASSE: Ahh, agora sim!! Com o x^0 junto, o 2 é um Monômio!!

O conhecimento dos alunos sobre potência e a relação desse conhecimento com esta situação, deu mais significado ao monômio de grau zero.

Fizemos a formalização do conceito de Monômio, enfocando que Monômios são os termos de um polinômio do tipo ax^p, com $a \neq 0$ e $p \in$ N (Conjunto dos números Naturais).

5.3.6 – 8º e 9º Encontros

Tarefa 3 - Operações com Polinômios

3.1 Adição algébrica de Polinômios.

Dados: $A_1 = 4x^2 - 52x + 160$; $A_2 = 4x^2 - 28x + 40$ e $A_3 = 4x^2 - 20x + 24$; efetuar as seguintes operações:

$A_1 + A_2$ $A_1 + A_2 + A_3$ $A_1 + A_3$

Objetivo da tarefa 3.1 – saber operar com somas algébricas (adição e subtração).

Pedimos aos alunos que realizassem essas atividades, em seus grupos, e queríamos observar se os alunos iriam estabelecer alguma relação entre a adição numérica, já conhecida, e a adição de Polinômios ou ainda, se fariam essa adição usando o agrupamento de termos semelhantes. O algoritmo da adição algébrica é chamado, nos livros didáticos, quando feito na vertical, de dispositivo prático – os Polinômios são escritos um acima do outro, colocando termos de mesmo grau um sob o outro. Depois disso é efetuada a adição algébrica dos termos que estiverem ocupando a mesma posição quanto ao grau.

Enquanto a professora-pesquisadora observava e os alunos trabalhavam nessa tarefa, os gravadores estavam registrando suas falas, aqui apresentadas, postas na íntegra após a transcrição:

NIL: Somo as bases iguais?

DAN: Conserva a base e soma os expoentes.

LAR fala para as colegas do grupo, DAN e NIL, que a soma algébrica de $4x^2 + 4x^2 = 8x^2$. NIL retruca:

NIL: Está errado! Você deve conservar a base e somar os expoentes.

LAR: Isso é na multiplicação!

NIL: É na soma!

Percebemos que LAR não conseguiu argumentar sobre o que fez. Manteve seu resultado e parecia aguardar a Plenária para ter sua posição discutida.

Um ponto de dificuldade sério encontrado no estudo da Álgebra é quando o aluno traz consigo a justaposição aritmética e vai compará-la com a justaposição algébrica. Em 35 o aluno entende 30 + 5, com cada dígito respeitando seu valor de posição. É uma justaposição Aritmética. Já em $4x^2$, a justaposição se mostra como um produto, $4 \cdot x^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2$. Esta é uma justaposição algébrica, onde 4 é o multiplicador e x^2 é o multiplicando.

Ao fazerem $4x^2 + 4x^2$ e sabendo que, algebricamente, $4x^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2$, então, $4x^2 + 4x^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = 8x^2$.

Observamos também no grupo de MAN o uso dessas concepções errôneas, como vimos no grupo de NIL:

MAN: Conserva a base e soma os expoentes... Eu acho que não é soma, é alguma coisa, tipo vezes...

GAB: É vezes. É multiplicação, tipo, quando é vezes, soma.

MAN: Ah..., é!!! Eu não lembrava disso!

GAB: $4x^2 + 4x^2$..., conserva a base e soma os expoentes quando a base é igual − referindo-se, erroneamente, ao produto de potências de mesma base, cujo resultado seria uma potência de mesma base com expoente igual à soma dos expoentes − Então como é que fica no mais? Cê vai fazer multiplicação dos expoentes?

Em compensação, os demais grupos puderam trabalhar com mais domínio da pré-álgebra trabalhada na 6ª série, como podemos verificar no relato abaixo:

ALE: $4.x^2 \cdot 2$ é igual a $8.x$???

LÉO: Não é vezes 2, é +.

ALE: $4x^2$ não é a mesma coisa que ...

PESQ: Quem está multiplicando?

ALE: O dois...

PESQ: Isso mesmo, porque na verdade, o 2 multiplica o 4.

A discussão foi aberta em Plenária, cada grupo enviou um integrante à lousa.

As dificuldades apresentadas anteriormente em relação aos grupos de NIL e MAN, apareceram logo de início nas conversas. Ao fundo, ouvimos a fala de NIL, dizendo que *"na soma de bases iguais, conserva a base e somam-se os expoentes"*. GAB ficou espantada e perguntou:

GAB: Soma os expoentes?

MAN: Esse processo de soma dos expoentes é da multiplicação de bases iguais.

Voltadas para DAN, MAN e GAB disseram que, *"no caso da soma de bases iguais, multiplicam-se os expoentes"*. MAN repensa e diz que pode não estar certa, quando a professora-pesquisadora pergunta a todos se concordam com o que estão ouvindo:

NIL: eu contesto, pra mim não é assim.

MAN: Isso eu não sei por que eu não lembro mesmo.

ALE: Eu contesto, porque quando eu estava fazendo, perguntei ao LÉO e ele falou que era pra ser $8x^2$ mesmo. Eu perguntei pra ele se não era $4x$ somado. Ele me falou que não. Aí eu chamei a Rose e ela me disse que estava certo o que tínhamos feito. Eu acho que é porque

$4x^2$, que eu coloquei entre parênteses, *vezes* 2 (ele se repete duas vezes), o 2 só se distribui (querendo dizer multiplica) para o quatro. Não vai se distribuir (querendo dizer multiplica) para o x^2.

Chamamos a atenção de todos para a forma que ALE e seu grupo haviam feito:

PESQ: O grupo de ALE escreveu a expressão assim:

$(4x^2 – 52x + 160) + (4x^2 – 28x + 40)$. Quantas vezes aparecem o $4x^2$?

CLASSE: Duas

PESQ: Aí eles fizeram assim → $2.(4x^2)$. E aí ALE, LÉO e HAL?

ALE: Aí eu fiquei em dúvida, mas se for pensar...

PESQ: Como ela poderia resolver essa situação, classe?

MAN: Eu não sei, porque eu não faria desse jeito.

ALE: O expoente do 2 é 1 não é?

PESQ: Qual é o Polinômio que representa esse número aqui? Estávamos nos referindo ao número 2. Como podemos escrever esse Polinômio?

CLASSE: 2 . x elevado a zero.

A resposta acima evidencia que nossa fala anterior sobre os Polinômios de grau zero foi compreendida pelos alunos.

PESQ: $2x^0$ abre parênteses $4x^2$, ficando a expressão dessa forma: $2x^0(4x^2)$. Como fazemos essa multiplicação?

CLASSE: x com x ; e 2 com 4. Dá 8.

PESQ: Isso aqui tudo vale quanto? Referindo-nos ao x^0.

CLASSE: Um. Uma vez x^2 vai dar x^2.

Chamamos a atenção de todos os alunos que, quando fossem adicionar termos algébricos semelhantes, usassem a expressão “coisa”, conforme diálogo abaixo:

PESQ: Eu tenho nesta mão uma coisa e nesta outra mão, uma outra coisa. Quantas coisas eu tenho?

CLASSE: Duas coisas.

PESQ: Se eu tenho nessa mão $4x^2$ e na outra mão $4x^2$, quantos x^2 eu tenho nas duas mãos?

CLASSE: $8x^2$.

NIL: Não está certo, $4x^2 + 4x^2 = 4x^4$?

PESQ: Você está em que operação?

ALE: O que NIL está falando não está certo, porque se você tem $2x + 2x$ você vai fazer $4x$ elevado a 2?

NIL: Não!

PESQ: NIL, se eu tenho $2x$ nesta mão e $2x$ nesta mão, quantos x eu tenho nas duas mãos?

CLASSE: $4x$.

ALE parecia querer ajudar NIL. Levantou-se de sua mesa, foi até a lousa e escreveu $4x$. Depois, decompôs o $4x$ da seguinte forma: $(x + x) + (x + x) = 4x$. Quando ALE apresentou sua explicação, não estando presa a regras, o grupo pareceu entender a lógica do processo de resolução sem se apegar a elas.

Esse exemplo que ALE deu, foi mais bem entendido por NIL do que o exemplo dado pela professora-pesquisadora. Agradecemos à colocação e à iniciativa de ALE, já que, com sua fala, aqueles alunos que pareciam ainda estarem com dúvida, a partir dessa explicação, pareceram mais satisfeitos.

Quando fomos para a Plenária, analisamos as seguintes situações:

$4x^2 - 52x + 160 + 4x^2 - 28x + 40 =$

$(4x^2)2 + 160 + 40 - 52x - 28x =$

$8x^2 + 200 - 80x =$

$8x^2 - 80x + 200$

$\boxed{A_1 + A_2 = 8x^2 - 80x + 200}$ Polinômio

Somar: $A_1 + A_2 + A_3$:

$4x^2 - 32x + 160 + 4x^2 - 28x + 40 + 4x^2 - 20x + 24$

$12x^2 - 100x + 224$

Ao efetuar esta soma, os alunos erraram ao somar - $32x$ - $28x$ – $20x$, resultando em - $100x$, quando na verdade seria - $80x$. Esse erro foi corrigido na Plenária.

Somar: $A_1 + A_3 =$

$4x^2 - 52x + 160 + 4x^2 - 20x + 24$

$8x^2 - 72x + 184.$

Ao somar as áreas, concluímos a atividade, refletindo sobre o que a adição $A_1 + A_2$ representaria a partir da construção das caixas de papelão. Os alunos responderam que se atribuíssemos um valor para a altura x, teríamos a soma das áreas das bases das "caixas 1 e 2", prosseguiram dizendo que é como se recortássemos as áreas das bases e juntando-as, obtivéssemos uma área única.

5.3.7 - 10º Encontro

Tarefa 3 – Operações com Polinômios

3.2 – Multiplicação e Divisão

Construímos caixas, com os alunos e, a partir delas, construímos expressões algébricas para as áreas das bases dessas caixas, como também as áreas de papelão gasto na construção dessas mesmas caixas.

Partimos, para rever a multiplicação, de ações já feitas pelos alunos. Eles conheciam as áreas das bases das caixas, dadas pelos produtos de suas duas dimensões, isto é, das expressões algébricas: $A_1(x) = (16 - 2x)(10 - 2x)$; $A_2(x) = (10 - 2x)(4 - 2x)$; e $A_3(x) = (6 - 2x)(4 - 2x)$. Ao aplicarem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, em cada caso, obtiveram os Polinômios na variável x:

$$A_1(x) = 4x^2 - 52x + 160$$

$$A_2(x) = 4x^2 - 28x + 40$$

$$A_3(x) = 4x^2 - 20x + 24$$

Assim, pedimos que calculassem:

3.2.1 - $A_1 \cdot A_2$; $A_2 \cdot A_3$ e $A_1 \cdot A_3$

3.2.2 $\frac{A_1}{A_2}$; $\frac{A_1}{A_3}$ e $\frac{A_2}{A_3}$

Para estes exercícios, não daremos importância agora ao algoritmo da divisão de Polinômios. Não haveria tempo suficiente para este trabalho e não seria necessário, para o objetivo que estávamos visando: comparar os valores numéricos dos Polinômios que expressam as áreas das bases das caixas como uma razão.

3.2.3 –

a) Fazer a comparação das áreas das bases das caixas 1, 2 e 3, para uma mesma altura, como uma razão (comparação multiplicativa entre duas grandezas).

b) Atribuir um valor numérico, para a variável x nas expressões dos Polinômios $A_1(x)$ e $A_2(x)$ e encontrar a razão entre os valores numéricos desses Polinômios, que são os valores numéricos das áreas das bases das caixas 1 e 2.
Analogamente, para as caixas $A_1(x)$, $A_3(x)$ e $A_2(x)$, $A_3(x)$.

Os Polinômios $A_1(x)$; $A_2(x)$ e $A_3(x)$, dados como áreas das bases das caixas 1, 2 e 3, foram obtidos, usando-se a propriedade distributiva, como uma multiplicação horizontal. Mas, é mais comum ser trabalhada na forma vertical, como podemos ver em $A_1(x)$, quando dado na forma fatorada $(16 - 2x) \cdot (10 - 2x)$, ao se efetuar essa multiplicação, pode-se agir assim:

$$
\begin{array}{rl}
\times & 16 - 2x \\
 & 10 - 2x \\
\hline
 & 160 - 20x \\
 & \qquad - 32x + 4x^2 \\
\hline
 & 160 - 52x + 4x^2
\end{array}
$$

que, quando ordenado na forma decrescente dos expoentes da variável, resulta

$4x^2 - 52x + 160$

Analogamente fariam para $A_2(x)$ e $A_3(x)$.

ALE, ao chegar aos Polinômios, perguntou: − *Vamos fazer o caminho de volta e ver se o que foi feito está certo*?

A professora-pesquisadora, procurando entender o que ela queria dizer, pensou no seguinte: Dividir o Polinômio A_1 por um de seus fatores, dado em sua expressão anterior, e, se estivesse certo, achar o outro fator como quociente. Como necessário, para facilitar o cálculo, para isso, os dois polinômios deveriam ter seus termos semelhantes reunidos e ordenados na ordem decrescente dos expoentes da variável x. Ao usar o algoritmo da divisão de polinômios, ela obteria

$$
\begin{array}{rrr|l}
4x^2 & -52x & +160 & -2x+16 \\ \cline{4-4}
-4x^2 & +32x & & -2x+10 \\ \cline{1-3}
0 & -20x & +160 & \\
 & +20x & -160 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

obtendo como quociente, o outro fator da área da base da caixa 1 e, portanto, o cálculo anterior estaria certo.

Aí, a professora-pesquisadora perguntou-se: Será que era isso que ALE estava querendo??? Na realidade, a operação divisão que, em sua cabeça, usando o caso de fatoração conhecida, pôr fator comum em evidência, lhe permitia fazer $4x^2 - 52x + 160 = 4(x^2 - 13x + 40)$ e, voltando ..., como? ...Vai voltar ao ponto de partida!

Uma maneira que pudesse talvez, surgir, em sua imaginação, ou lembrando-se de que a divisão é a operação inversa da multiplicação, seria a de dividir um polinômio por outro, escrito na forma $\frac{A_1}{A_2}$, visto como uma fração, pois para os alunos, como foi dito por eles em sala de aula, toda fração pode indicar uma divisão, o que não é verdade sempre.

Possivelmente eles poderiam ver $\frac{a}{b} = \frac{a \div b}{b \div b} = \frac{a \div b}{1} = a \div b$ que, estendendo-se aos polinômios, poderiam se apresentar assim:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \div Q(x)}{Q(x) \div Q(x)} = \frac{P(x) \div Q(x)}{1} = P(x) \div Q(x).$$

Pensar numa divisão, quando escrevemos $\frac{P(x)}{Q(x)}$, na forma fracionária, até que seria esperado! Mas, uma das personalidades do número racional, dada como uma comparação multiplicativa entre grandezas, a razão, nem sempre foi bem trabalhada com os alunos e dificilmente eles poderiam pensar em $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como uma razão.

É claro que se pensassem numa simples divisão algébrica do Polinômio $4x^2 - 52x + 160$ pelo Polinômio $4x^2 - 28x - 40$, deveria ocorrer o seguinte

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 - 52x + 160 & 4x^2 - 28x + 40 \\ \cline{2-2} \underline{- 4x^2 + 28x - 40} & 1 \\ - 24x + 120 & \end{array}$$

Neste caso eles, usando o conceito de divisão, poderiam escrever

$1.(4x^2 - 28x + 40) + (-24x + 120) = 4x^2 - 52x + 160$

onde

$A_1(x) = 4x^2 - 52x + 160$ é o dividendo, $A_2(x) = 4x^2 - 28x + 40$ é o divisor,

$Q(x) = 1x^0$ é o quociente e $R(x) = (-24x + 120)$ é o resto.

Mas, como já dissemos antes, não estávamos interessados em trabalhar o algoritmo da divisão de polinômios. Nosso objetivo era o de comparar as áreas das bases das diferentes caixas entre si, todas de mesma altura e, para fazer isso, teríamos que dividir números por números, de modo a achar a razão entre essas áreas, considerando $[A_1(x)]$, calculado num ponto, como o valor numérico do Polinômio A_1 para a variável $x = 1$ no intervalo, $0 < x < 5$, e $[A_2(x)]$ com $0 < x < 2$, calculado no mesmo ponto, como o valor numérico do Polinômio A_2.

Fazendo $\frac{[A_1(x)]_{x=1}}{[A_2(x)]_{x=1}} = \frac{(4x^2 - 52x + 160)_{x=1}}{(4x^2 - 28x + 40)_{x=1}} = \frac{4 - 52 + 160}{4 - 28 + 40} = \frac{112}{16} = \frac{112 \div 16}{16 \div 16} = \frac{7}{1}$

Como a razão é uma das personalidades do número racional, então pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a, b $\in$ Z, b $\neq$ 0, onde a barra fracionária tem significado de comparar o antecedente e

o conseqüente da razão.

Interpretando essa razão obtida, estamos dizendo que para cada unidade de área de $1cm^2$, na caixa menor, haverá 7 unidades de área de $1cm^2$, na caixa maior.

Deixando de lado o que ALE e outros colegas não citados poderiam ter pensado ou não, decidimos apresentar essa tarefa, com uma nova versão de seu enunciado.

Pedimos aos grupos que desenhassem as caixas 1, 2 e 3 planificadas, com altura 1cm e, em seguida, solicitamos:

a) Fazer a comparação analítica e geométrica das áreas das bases das caixas:

1 e 2; 1 e 3; 2 e 3; onde se entende $[A_1(x)]_x = 4x^2 - 52x + 160$

$$[A_2(x)]_x = 4x^2 - 28x + 40$$

$$[A_3(x)]_x = 4x^2 - 20x + 24$$

Levamos para a sala de aula as três caixas 1, 2 e 3 montadas em papelão com altura medindo 1cm, e cubinhos de $1cm^3$ de volume também montados em papelão e deixamos que os alunos procurassem ver a disposição dos cubinhos dentro de cada caixa formando o volume dessa caixa.

Houve um problema. Ao imaginar as áreas das bases das caixas e, sobre cada área de $1cm^2$, colocar um cubo de volume $1cm^3$, devido à espessura do papelão, não conseguiram um encaixe perfeito. Assim, para que pudessem visualizar com segurança as razões das áreas das bases das caixas, obtidas analiticamente, desenhamos apenas as bases das caixas 1, 2 e 3 dividindo a caixa toda em 14 x 8 quadrados de $1cm^2$ de área para a “caixa 1”. Por sua vez, também decompusemos a área da base da “caixa 2” em 16 quadrados de $1cm^2$ de área e, também, decompusemos a área da base da “caixa 3” em

4 x 2 quadrados de $1cm^2$ de área. Contando e separando na razão de 7 para 1 (no caso da comparação entre as áreas das bases das caixas 1 e 2), garantindo então que a área da base da “caixa 2”, a menor, cabia 7 vezes na área da base da “caixa 1”, a maior, isto é, 7 para 1, ou seja 7 **:** 1.

A Figura 17 mostra, no desenho de um dos grupos, como foi feita a representação analítica e geométrica das bases das caixas solicitadas.

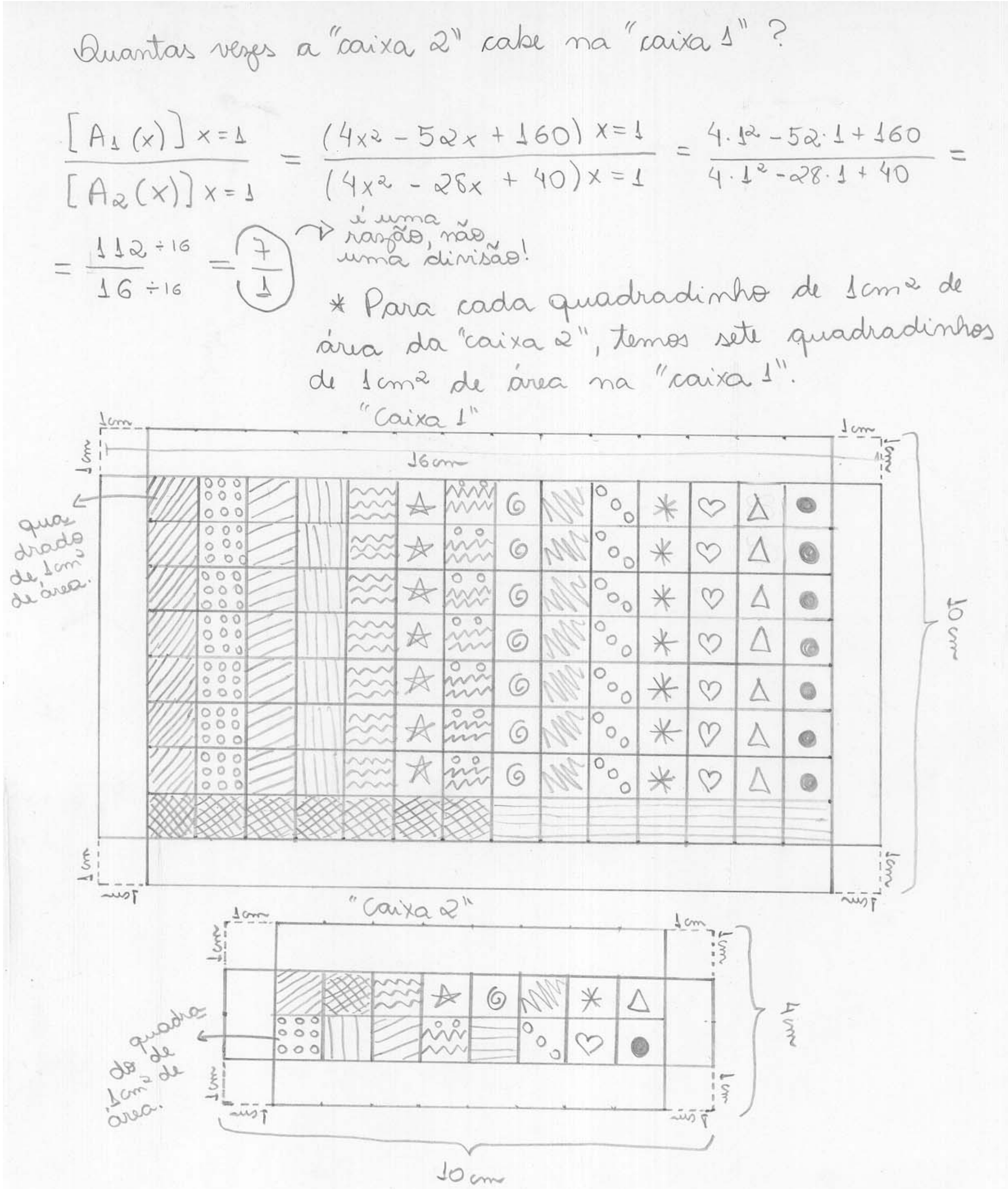


Figura 17 – representação analítica e geométrica das áreas das bases das caixas 1 e 2.

Para cada uma das solicitações, os alunos fizeram a comparação analítica e a comparação geométrica referente às áreas das bases das caixas.

Os alunos fizeram também a comparação analítica e a representação geométrica das caixas 1 e 3 e 2 e 3.

5.3.8 – 11º, 12º, 13º e 14º Encontros

Tarefa 4 – Listas de Atividades de fixação de conceitos de matemática nova construída

Lista 1 – Exercício de Aplicação

A lista 1 (apresentada no Projeto), como exercício de aplicação, foi proposta pelo livro didático utilizado pela sala.

Nosso objetivo com essa lista era verificar se os alunos iriam escrever as expressões algébricas correspondentes às áreas das figuras dadas, como fizeram com as caixas 1, 2 e 3. Gostaríamos também de verificar, se os conhecimentos aprendidos na atividade com as caixas, seriam transferidos para essa atividade.

A resolução da atividade proposta pelo livro didático pareceu familiar a todos e os resultados na maioria estavam bons. Solicitamos aos alunos uma extensão da atividade pedindo a eles que nomeassem os polinômios representantes das áreas dessas figuras, de acordo com o grau.

Lista 2 – Cálculo Algébrico

Esta também era uma lista de atividades proposta pelo livro didático utilizado pela sala. Até a lista 1, vínhamos fazendo o desenvolvimento do conteúdo de Polinômios com base no trabalho com as caixas. Aplicar listas do livro didático era uma forma de verificar como os alunos iriam transferir um conhecimento construído no contexto das caixas, relacionado à Álgebra, para outras situações.

A resolução desta lista, assim como a lista 1, foi feita por todos. Em reunião Plenária, aqueles resultados que pareceram discrepantes, foram discutidos entre os alunos, aonde os mesmos chegaram a um consenso.

Lista 3 – Trabalhando conceitos através da resolução de problemas

Esta lista envolvia toda a Matemática nova construída, partindo da resolução de problemas, exigindo dos alunos um maior grau de elaboração. Alguns problemas, que sugerimos nesta lista, estavam diretamente relacionados com o trabalho das caixas.

Os alunos realizaram as atividades propostas individualmente, pois queríamos, agora, verificar se o desenvolvimento do conteúdo Polinômio, realizado em grupos, havia se mantido no trabalho individual. Depois de recolhidos os problemas desta lista, fizemos a discussão da mesma e pedimos aos alunos que registrassem em seus cadernos os resultados obtidos. Os resultados desses problemas serão apresentados no Quadro 4 e na Tabela I, como veremos a seguir.

Apresentaremos os resultados acertos/erros obtidos (nesta lista) no Quadro 4. Os índices de acertos serão apresentados na Tabela 1 em porcentual. Para o Quadro 4, usaremos as seguintes notações:

c indicando certo
e indicando erro
± mais ou menos (consideramos mais ou menos os seguintes casos: erros com sinais ou a fatoração não foi concluída)
nf não fez

A aluna HAL não compareceu no dia desta atividade. Não tivemos outro momento para a elaboração desta atividade com a mesma.

O Quadro 5 apresenta os resultados da Lista de Atividades 3 em relação a cada um dos problemas abordados e suas respectivas alternativas.

	1 a,b	2 a,b,c	3 a,b	4 a,b	5 a,b,c
1 – JUL	nf nf	c c ±	c e	nf nf	c c c
2 – JAN	c e	c c c	c e	c c	c c ±
3 – MAR	c e	c c c	c c	c c	c c c
4 – MAN	c e	c c c	c c	c c	c c c
5 – GAB	c e	c c c	c c	c c	c c c
6 – CEC	e e	c e c	e e	e nf	c c c
7 – ALE	c c	c c c	c ±	c c	± c c
8 – LEO	c c	c c c	c c	c c	c c c
9 – DAN	c c	c ± c	c c	c c	c c c
10 – NIL	c c	c c c	c e	c c	e e c
11 – LAR	c e	c ± c	e e	c nf	c c c

Quadro 5 – Resultados obtidos na Lista de Atividades 3

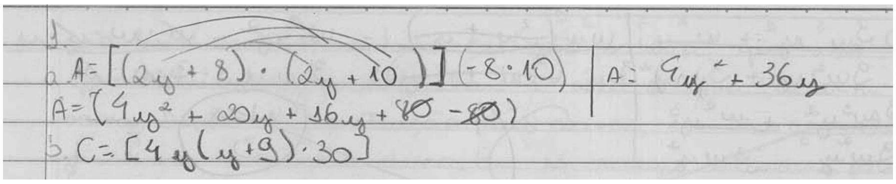
A Tabela I apresenta o índice em porcentual da Lista de Atividades 3 para cada um dos problemas abordados e suas respectivas alternativas.

Problemas	**1**		**2**			**3**		**4**		**5**		
alternativas	a	b	a	b	c	a	b	a	b	a	b	c
(%) de acertos	81	36	100	73	90	81	45	81	73	81	90	81

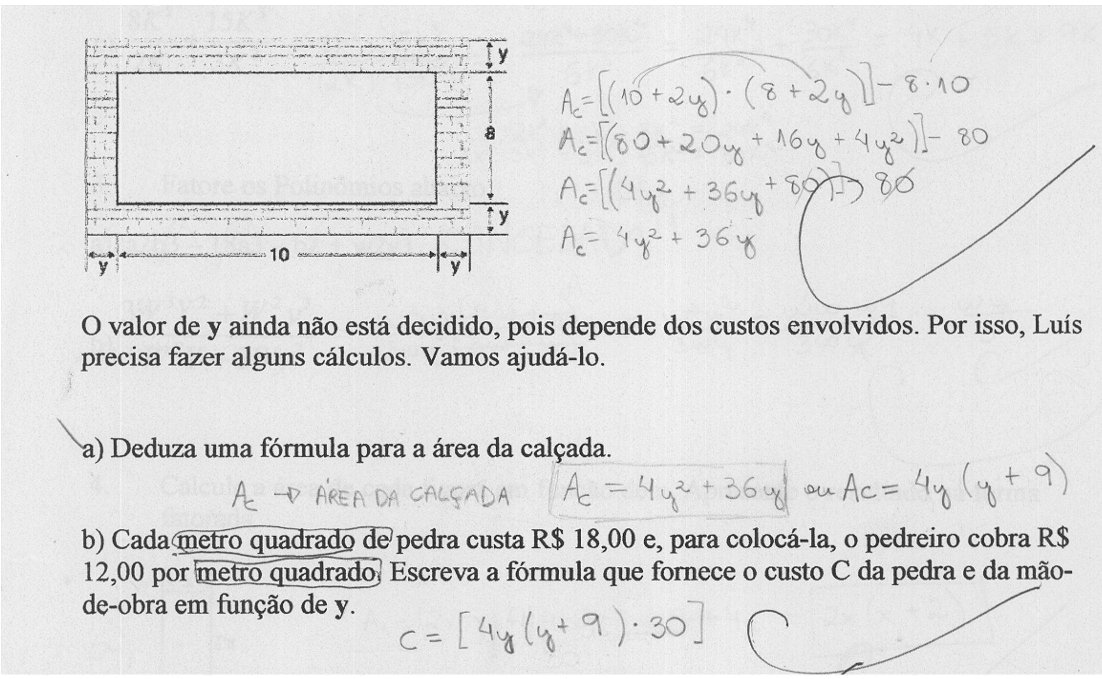
Tabela 1 – Índice de acertos obtidos pelos alunos que participaram da Lista 3.

Problema 1: Depois do trabalho com as caixas, este problema, em relação aos seguintes, explora outro contexto. As atividades realizadas até agora vinham enfatizando as áreas das bases das caixas ou de superfícies de figuras. Os alunos deveriam transferir os conhecimentos aprendidos com a planificação das caixas para a resolução da situação-problema em questão. Essa exigência deu-se especificamente no caso da alternativa (a), onde podemos verificar na Tabela 1, um índice de acertos de 81% em relação ao número total dos alunos que participaram da atividade. Os alunos deveriam, neste caso, encontrar a fórmula para a área da calçada, construída ao redor da piscina. Esta fórmula resultou em um Polinômio de dois termos: $A = 4y^2 + 36y$, numa só variável onde A é um polinômio na variável y → A(y). O mesmo aproveitamento não foi alcançado na alternativa (b), com índice de acertos de 36% pois, acreditamos que os alunos não conseguiram interpretar corretamente o enunciado que dizia que o polinômio da alternativa (a) representava a área da calçada inteira e para cada metro quadrado: m^2 dessa área seriam cobrados R$30,00, entre material e mão de obra. Ou seja, o polinômio da alternativa (a), deveria ser multiplicado por este valor, para obter-se o custo total.

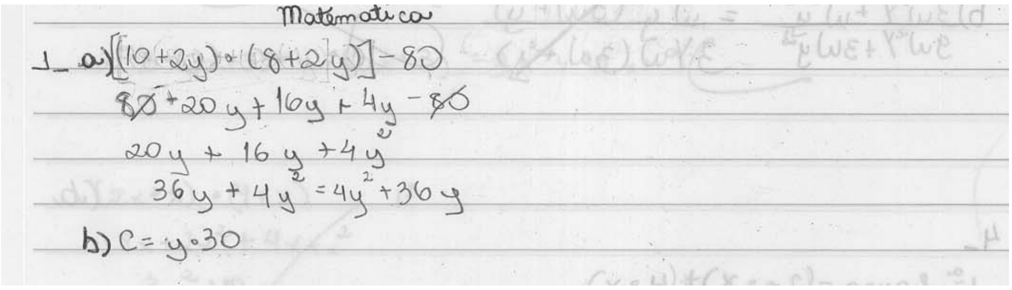
Os 36% que acertaram, fizeram:



Outro exemplo de acerto:



e, entre os erros, apresentamos


Matemática

1_ a) $[(10+2y)\cdot(8+2y)]-80$

$\cancel{80}+20y+16y+4y^2-\cancel{80}$

$20y+16y+4y^2$

$36y+4y^2=4y^2+36y$

b) $C=y\cdot 30$

O índice de acertos da alternativa (a) do Problema 1, referindo-se a outro contexto, ao falar sobre a área da piscina, vem reforçar a idéia de que a atividade contextualizada permitiu uma aprendizagem que contemplou a maioria dos participantes desta pesquisa. Uma atividade terá sido efetivamente significativa se as idéias nelas trabalhadas puderem ser transferidas a outras situações de ensino, como comprovamos aqui. O papel do contexto já havia sido demonstrado por diferentes autores. Ceci (apud GARDNER, 2003), por exemplo, demonstrou, em sua pesquisa, por meio de isomorfos de problemas, que uma atividade realizada em laboratório obteve um índice de acerto de 22% depois de 750 tentativas. Essa mesma atividade, realizada em um jogo de computador, utilizando-se das mesmas regras e com o mesmo número de tentativas, elevou esse índice para 90%.

Problema 2: O problema 2 exigia conhecimento da propriedade distributiva da multiplicação, das propriedades das potências e da fatoração. O grau de exigência não foi muito alto, já que todos esses conceitos haviam sido devidamente explorados no trabalho com as caixas. O que queríamos verificar, neste problema, era se os alunos estavam entendendo, depois de exploradas as atividades ao longo da pesquisa, como a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição funcionava. Como podemos verificar na Tabela 1, Problema 2, essa dificuldade parece ter sido sanada, já que o índice de acertos foi consideravelmente bom.

Problema 3: Este é um problema semelhante ao Problema 1. Nele os alunos deveriam encontrar a fórmula que dava a área da figura em função da variável *x*. Foi um problema bem aceito. Entretanto, a alternativa (b) deste problema que lhes parecia muito familiar, exigia quatro estratégias, entre outras possíveis: 1) calcular a área de um dos retângulos e multiplicar por 2 pois, os retângulos são congruentes; 2) somar as duas áreas; 3) fazer uma translação à esquerda do retângulo de baixo, compondo assim, um único retângulo; 3) fazer uma translação à direita do retângulo de baixo, e outra, para cima, com esse retângulo. Em qualquer uma dessas quatro estratégias, é claro que a área será sempre a mesma. Como podemos verificar na Tabela 1, o índice de acertos desta alternativa foi consideravelmente baixo, possivelmente por conta de os alunos não terem atentado para o problema com o rigor que ele exigia. A alternativa (a) apresentou um índice de acertos de 81% em relação ao número de participantes da atividade. Esta última alternativa também exigia uma decomposição, porém menos engenhosa. Os alunos encontraram a fórmula da área da figura: $A = 2x^2 + 4x$ e, também fizeram a fatoração desse binômio $A = 2x (x + 2)$.

Problema 4: Apesar de não termos trabalhado com volume, neste Projeto I, aplicamos este problema visando a verificar se os alunos seriam capazes de generalizar o conhecimento do conceito de área, passando para o conceito de volume. Os alunos sabiam que o volume de um bloco retangular era obtido multiplicando suas três dimensões: comprimento, largura e altura. Assim, nesse caso,

$V = (3x + 6) (x + 2) (2x + 4)$. Após a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, o Polinômio resultante indicaria também o volume da caixa. O cálculo do volume envolveu, então, a multiplicação de três expressões algébricas, reforçando o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Quando o volume foi encontrado pelo produto das três dimensões da caixa:

$(3x + 6) (x + 2) (2x + 4)$, os alunos, percebendo que o produto $(3x + 6) (x + 2)$ dava a área da base da caixa, identificaram um padrão para o volume:

$V = A_{bcaixa} \cdot$ altura.

Este problema explorou conceitos mais amplos, ainda não trabalhados na atividade com as caixas, donde concluímos que, os alunos conseguiram estabelecer relações dos conteúdos desenvolvidos nas atividades com as caixas, bem como ativar seus conhecimentos prévios da pré-álgebra.

Com relação aos problemas propostos não realizados, questionamos os alunos que não os fizeram e eles responderam que tentaram, mas não souberam fazer.

Problema 5: A situação-problema envolvida neste caso, também relacionada com áreas, apresentou um desempenho, dos alunos, muito bom – 81% no item (a), 90% no item (b) e 81% no item (c). Observamos que, quando os alunos começaram a desenvolver a situação-problema, apresentaram rigor e organização na realização da mesma. Por exemplo, escreviam a expressão completa da área e não somente a expressão algébrica que dava a área.

Observamos que nas atividades que exigiam em caso de fatoração de polinômios, o de colocar termos comuns em evidência, os alunos apresentaram mais dificuldade. Acreditamos que alguns exercícios envolvendo este conteúdo poderiam contribuir para a superação da dificuldade ao lidar com expressões envolvendo termos com números e letras.

Em relação aos objetivos propostos, conforme verificamos na análise de cada um dos problemas, o índice de acertos foi considerado por nós como sendo satisfatório. Verificamos a transferência dos conceitos aprendidos com a construção das caixas para outras situações-problema relacionadas a outros contextos. O Problema 4, por exemplo, não havia sido explorado em nenhum outro momento, fortalecendo a idéia de que os alunos conseguiram avançar com seus conhecimentos em uma situação de aprendizagem, que ainda não lhe fora apresentada.

Com as listas apresentadas, umas tratando de fixar conhecimentos construídos, outras já preocupadas com a formalização de conceitos, quando aplicadas, frente aos resultados obtidos, nos mostra que, aparentemente, houve um crescimento satisfatório no conhecimento desses alunos, no que se refere aos polinômios e suas operações.

5.4 Opiniões, comentários e sugestões dos alunos sobre a proposta de ensino aplicada.

Todos os participantes da pesquisa concordaram dizendo que a dinâmica adotada com as caixas foi muito interessante. Afirmaram que, começar construindo as caixas foi fácil pois, passo a passo, foram descobrindo a Matemática presente na atividade. Disseram, também, ter sido prazeroso, acrescentando que as aulas com gravadores foram interessantes e, ainda, aprovaram a formação dos grupos. Dentre as observações, pudemos constatar uma forte aceitação quando afirmaram que trabalhar com as caixas lhes permitiu visualizar uma situação cotidiana, entendê-la e dela extrair um novo objeto matemático, o Polinômio. Para esta afirmativa eles argumentaram que, se o ensino desse conteúdo tivesse sido feito a partir de fórmulas prontas, eles poderiam ter aprendido. Entretanto, não saberiam dizer que um Polinômio pode representar algo mais de que a soma de monômios.

Quando questionados sobre o momento da atividade em que tiveram maior dificuldade, a maioria dos alunos afirmou que foi a representação da altura no desenho da caixa teste. Essa colocação foi verificada em nossa análise, um fato que gerou novas situações-problema no decorrer da pesquisa. Alguns de seus relatos foram interessantes nesse ponto. Os alunos apontaram a importância da condução do trabalho pela professora-pesquisadora; da socialização na construção do conhecimento pelos alunos; na transformação de um trabalho, de início individual, crecendo para um trabalho em grupo; fortalecendo a importância da cooperação na busca da solução das situações-problema apresentadas. Surgiram, ainda, em seus relatos, indicações que apontavam a grande dificuldade enfrentada quando, pela primeira vez, propuseram a divisão de Polinômios, depois de terem simplificado os polinômios pondo em evidencia um fator comum.

Perguntamos aos alunos se eles gostariam de apontar algum fato, ou algum momento durante o ensino de Polinômios, que lhes permitiu aumentar sua aprendizagem. De todas as respostas dadas pudemos incluir em dois grupos: 1) pouco tempo – alegaram que gostariam de ter trabalhado mais tempo com o tipo de atividade desenvolvida; 2) mudança nos grupos – disseram que seria interessante, no decorrer do trabalho, uma mudança nos grupos para poderem vivenciar novas experiências. Relacionada a esta pergunta, os alunos argumentaram que gostariam que outros conteúdos de Matemática fossem ensinados da mesma maneira que o ensino de Polinômios. Pois, "*para aqueles alunos que não entendem a teoria, teriam a prática para embasar*"(sic). Três alunos disseram que não gostariam de ter essa técnica ampliada para outos conteúdos; um deles completou sua afirmativa dizendo que o professor deveria alternar essas técnicas entre os diferentes conteúdos, assim, isso não viraria rotina; o segundo aluno alegou que "*diferentes estratégias seriam bem aceitas nos conteúdos mais difíceis e, neste caso, ele citou Polinômio. Em relação aos conteúdos mais fáceis, disse que poderiam ser ensinados normalmente*"(sic). O terceiro aluno não se mostrou animado pelo trabalho e não disse porquê.

A quinta pergunta do questionário referia-se aos pontos que lhes dispertaram maior ou menor interesse na dinâmica adotada. Chamaram-nos atenção as seguintes afirmativas: "*como é que pode, com números tão diferentes e tão complexos, tão simples de usá-los em contas, estarem presentes em todos os lugares da vida?*"; "*trabalhar com construção de caixas e delas tirar Polinômios?*"; e, ainda, " *é muito interessante perceber que os Polinômios estão presentes em várias situações do dia a dia*"(sic). Outras colocaçãos surgiram sobre esta questão, demonstrando que o trabalho com as caixas fez o conteúdo parecer mais familiar para os alunos.

O trabalho em grupos foi elogiado por todos os alunos. A maioria, alegando que a interação promovida por meio das discussões, permitiu o surgimento de diferentes idéias e diferentes formas de resolução, promovendo uma forma diferente de aprender.

Antes de encerrar a análise do questionário, perguntamos que conhecimentos sobre Polinômios os alunos adquiriram. De que forma, eles acreditavam, que esses conhecimentos lhes serão úteis na vida e quais comentários, críticas ou sugestões, sobre o trabalho realizado, gostariam de fazer. Disseram que foram muitos os contéudos aprendidos e analisada sua utilidade. Essas respostas contribuíram para nossa análise e nossas conclusões para esta pesquisa. Suas respostas nos fizeram voltar às atividades realizadas e fazer uma comparação entre o que foi dito e os exercícios realizados por cada um dos alunos.

Não levantaram críticas, nem fizeram comentários. Como sugestão um aluno disse: "*a sugestão que eu faço é continuar diferenciando o aprendizado, sem muita repetição e eu achei bem interessante a nova forma do aprendizado*"(sic).

5.5 Análise do Processo

Os objetivos desta pesquisa compreenderam dois amplos aspectos: 1) a contextualização e sua implicação na aprendizagem através da resolução de problemas Matemáticos; e 2) o processo de ensino-aprendizagem, a partir da contextualização, intermediado pela interação social, com os alunos como co-construtores de um novo conhecimento. A metodologia de trabalho, adotada nesta pesquisa, para a sala de aula, é a Metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. Como disse Van de Walle, 2001, em seu livro "Elementary and middle school Mathematics. Teaching Developmentally", no capítulo 4, "Ensinando através da Resolução de Problemas"[16], nas páginas 40 e 41 "devemos partir do ponto onde estão os estudantes. Essa é uma mudança na forma de pensar o ensino de Matemática". Ainda neste mesmo capítulo, este autor disse:

> tradicionalmente, o professor ensinou Matemática, o estudante a praticou por certo tempo e, então, eles esperavam usar as novas habilidades ou idéias ao resolver problemas. Esta abordagem, fortemente arraigada em nossa cultura, raramente funciona bem. Primeiro, ela começa onde o professor está antes do que onde estão as

[16] Tradução de: Tradução de: Teaching Through Problem Solving.

> crianças, ignorando o que elas podem trazer, ou não trazer, para a sala de aula. Assume-se que belas exposições, talvez melhoradas por materiais manipulativos, possam produzir compreensão. Embora essa abordagem às vezes tenha sucesso com algumas crianças, 'mostrar e dizer' depende de uma absorção passiva de idéias e deixa a maioria dos estudantes acreditar que a Matemática é misteriosa e, ainda mais, incompreensível. A segunda diferença com o paradigma de 'ensine-então-resolva' é que a resolução de problemas fica separada do processo de aprendizagem. As crianças sempre esperam que os professores lhes digam as regras que irão servir para resolver problemas para os quais os resultados de solução não foram providenciados. Ao separar o ensino da resolução de problemas, a aprendizagem de Matemática fica separada de fazer Matemática. Isto simplesmente não faz sentido. Aulas eficientes começam onde os estudantes estão, não onde nós estamos. Isto é, o ensino deveria começar com as idéias que as crianças já têm, as idéias que eles usam ao criar idéias novas. Engajar os estudantes requer tarefas e atividades que são problemas e requerem o pensar. Os estudantes aprendem Matemática como um resultado da resolução de problemas. As idéias Matemáticas são resultados da experiência em resolver problemas, mais do que elementos que devem ser ensinados antes de resolver problemas. Além disso, o processo de resolver problemas está agora completamente interligado com a aprendizagem. As crianças estão aprendendo Matemática fazendo Matemática (mesmo autor, mesma obra, tradução nossa).

As investigações que conduzimos, no decorrer deste trabalho, permitiram-nos perceber que a contextualização que serviu de base para o desenvolvimento do conteúdo Polinômios, proporcionou aos alunos varias situações de aprendizagem que foram se fortalecendo à medida em que as interações sociais se configuravam.

Ao inserir a contextualização, em conceitos de Matemática, estávamos pré-determinados a verificar que processos de resolução de problemas seriam utilizados pelos alunos. Por meio desses processos, queríamos saber se os conhecimentos prévios de que os alunos dispunham, serviriam, ou não, para o início da construção de um novo processo de aprendizagem. Esses conhecimentos poderiam estar diretamente ligados à escola, à Matemática, ou a qualquer outra situação que a pessoa tivesse vivenciado e que pudesse ter colaborado para a nova situação de aprendizagem. Os conhecimentos prévios considerados poderiam abranger desde conhecimentos matemáticos até palavras que se referem ao mundo real, e que poderiam colaborar com a construção do conhecimento matemático. Verificamos, no Problema 2, que a dificuldade em montar a "caixa teste" estava atrelada ao fato de os alunos não perceberem que, para formar a caixa, seria necessário <u>levantar</u> a altura. Essa constatação só veio após nossa intervenção com o enfoque da palavra <u>levantar</u>. O significado dessa palavra impôs-se sobre a nova situação ganhando significado, possibilitando a visualização da altura e a efetiva construção da caixa. O conceito que os alunos tinham sobre a palavra levantar permitiu-lhes avançar na atividade.

Observamos situações onde os conhecimentos prévios apresentaram-se de maneira desorganizada ou mesmo equivocada. Sempre que nos deparamos com essas situações − como o caso do Problema 5, referente às propriedades das potências −, fazíamos uma retomada do conteúdo ou deixávamos que os grupos, a partir de socialização das idéias, colaborassem com o colega que apresentava o conhecimento prévio de maneira desorganizada. Um exemplo de conhecimento prévio desorganizado pôde ser constatado no caso da transformação de unidades de medida decímetro para centímetro (Problema 2). Nesse caso, os alunos já dispunham desse conhecimento, mas alguns dados referentes a este conteúdo não haviam sido compreendidos. Foram necessárias: a colaboração do grupo, pesquisa, discussão, divergências e sua superação, para a estruturação desse conceito.

As situações de interação foram norteadoras desta pesquisa. Entretanto, em alguns momentos, demos enfoque ao trabalho individual. Neste aspecto, especificamente no início da pesquisa, alguns os alunos não conseguiram compreender o conceito, enquanto trabalhavam com ele na resolução de problemas propostos. Essa compreensão só chegou no trabalho em grupo. O fato de perceber que a caixa não existiria a partir de uma determinada altura, não cabia no campo de compreensão de HAL (Problema 2). ALE precisou explorar a “caixa teste”, para que HAL visualizasse os limites para a altura. Tivemos várias evidências, ao longo da pesquisa, que apontaram para o papel da interação, proporcionando a compreensão de determinados conceitos, antes não atingidos no trabalho individual.

A problemática enfrentada pelos grupos no Problema 2, referente à “caixa teste”, demonstrou um distanciamento entre a teoria e a prática, isto é, entre a representação geométrica e a representação algébrica. Os alunos teriam construído inúmeras caixas, como fizeram no Problema 1, sem dar importância às grandezas ali presentes. Quando foi solicitado o registro da altura no desenho, esta passou a ser uma nova situação-problema. Diante disso, acreditamos que, se fossem enfocados, na resolução de problemas, desde as séries iniciais, todos os processos que colaboram para a construção da resposta, incluindo todas as possíveis representações para essa construção, os alunos não apresentariam essas dificuldades. Atividades contextualizadas realizadas com freqüência nas aulas de Matemática contribuiriam, e muito, para a diminuição desse distanciamento.

O Problema 5, o da “caixa 1”, mostrou o poder da interação social como fator de superação das idéias previamente levantadas nos grupos. Os grupos, ao levarem à lousa os Polinômios, indicavam a área da base da “caixa 1”. As discussões direcionaram os grupos para um consenso, o de que o Polinômio encontrado pelo grupo de ALE era o que melhor representava a situação-problema. Essas discussões mostraram-nos o poder da interação social na formação e na estruturação de um padrão para a área da base da "caixa 1", dando aos alunos o poder da verbalização na formação do novo conceito.

Quando solicitamos o cálculo da área de papel utilizado, verificamos que os alunos dispunham do conceito da área do retângulo. O conhecimento prévio, sobre este conceito, foi o ponto de partida para a fixação dessa aprendizagem. Desta forma, houve casos onde a aprendizagem foi efetivada somente quando a discussão foi aberta na Plenária como "um movimento oscilante que vai do individual para o social e do social para o individual" (MORETTI, f.147, 1998).

Ao encerrar o Problema 3, já havia indícios de que a atividade contextualizada teria proporcionado outras representações que não se limitavam à planificação da caixa em estudo. Isso foi verificado na fala de ALE, quando ela se adiantou, falando para os colegas que se o cálculo solicitado fosse referente à área da base de uma caixa de sapato, certamente não estariam calculando a área das bordas, e sim a da base. Na fala de ALE verificamos uma preservação do significado do problema, aplicado em outra situação, gerado pelo trabalho contextualizado. Situação idêntica foi vivida por NIL e DAN quando solicitamos o valor numérico de um Polinômio. Para que DAN entendesse o porquê de substituir o x pelo número 1, NIL se reportou ao exemplo da "caixa teste" reduzindo o nível de complexidade da problemática vivida por DAN.

A atividade contextualizada não só se mostrou como forte aliada na preservação do significado do problema, como também mostrou que a manipulação das caixas construídas proporcionou, àqueles que apresentavam maior dificuldade de abstração, uma visualização do conceito teórico por meio da manipulação de objetos concretos. Esse processo permitiu aos alunos verificarem, na prática, os limites permitidos para a altura da caixa no Problema 4. Quando a atividade foi desenvolvida individualmente, alguns alunos trouxeram dúvidas para a socialização. Não entendiam porque, dada uma determinada altura, não existiria caixa.

Foram as interações nos grupos, seguidas da manipulação do material concreto, que permitiu a esses alunos essa visualização. Verificamos posteriormente, nos problemas 5, 6 e 7, que esses mesmos alunos haviam conseguido definir os limites para as alturas das caixas envolvidas nesses problemas, sem a manipulação da "caixa teste".

Para o desenvolvimento deste trabalho, a professora-pesquisadora fez-se presente em muitas situações: preparou, antes de ir para a sala de aula, todo o material necessário para conduzir os alunos à construção de novos conceitos e novos conteúdos. A escolha dos problemas, geradores desses novos seres matemáticos, era de importância capital. Como distribuir o tempo, como fazer com que os alunos participassem ativamente no processo de resolução do problema, como fazer com que todos ouvissem e falassem durante a participação na Plenária, como usar as mãos num momento de trabalho, etc ... tudo isso dependia do trabalho preparatório da professora-pesquisadora.

No momento de dificuldade da maioria dos alunos, ao atribuir-se à altura o valor variável *x*, os alunos estavam avançando para a compreensão dos novos conceitos que a professora-pesquisadora sabia que estavam por vir.

A riqueza das representações adquiridas nos Problemas 1, 2, 3 e 4, serviria como ponto de partida para a construção do conceito de Polinômios.

Operar com esses novos seres, os Polinômios, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir fazia parte de nosso Projeto I. Mas, nosso objetivo principal era o de chegar a essas operações com compreensão e significado, embora sabendo que muitas dessas idéias, ainda lhes eram desconhecidas. Essas quatro operações precisavam ser compreendidas com as mesmas concepções conhecidas das quatro operações com números, que eles já conheciam bastante. O que era muito diferente, era a expressão algébrica que representava esses novos seres. Assim, apesar de a adição, subtração, multiplicação e divisão de Polinômios terem o mesmo significado operacional que as operações sobre números, as técnicas operatórias variavam muito, constituindo-se então em pontos de dificuldade. Por já termos definido soma algébrica, por já saberem reunir termos semelhantes e por conhecer a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, as operações de adição, subtração e multiplicação de Polinômios não ofereceram muita dificuldade.

Ao trabalhar com a soma algébrica de Polinômios, por exemplo, não foi necessário explicar aos alunos um método específico para essa operação. Esse procedimento foi natural, partiu do conhecimento prévio sobre o conceito da operação adição sobre números. Para aqueles que tiveram maior dificuldade, perceber que adicionar não era um procedimento novo, soou em tom de surpresa. Quando questionada, uma aluna, sobre como faria essa adição de polinômios, ela disse: *"que fácil"*!

A grande dificuldade deu-se ao enfrentar a divisão de Polinômios e a concepção do conceito de razão entre o valor numérico de um Polinômio e o valor numérico de outro, para um possível valor da altura *x*.

Ao trabalhar com a divisão de Polinômios, quando os alunos, na prática, viam $\frac{A_1(x)}{A_2(x)}$ como uma fração, indicando uma divisão, pois como nos números, eles "viam" que $\frac{a}{b} = a \div b$, então, para eles, $\frac{A_1(x)}{A_2(x)}$ deveria ser $A_1(x) \div A_2(x)$ e o que buscavam era ver quantas vezes o Polinômio divisor cabia no Polinômio dividendo. Achavam, também, que para isso, bastava atribuir um valor numérico para a variável x e fazer a divisão entre esses valores, constatando que a área da base da "caixa 2" caberia um certo número de vezes na área da base da "caixa 1".

Na verdade, e dificilmente isso poderia acontecer, o que $\frac{A_1(x)}{A_2(x)}$, calculados esses Polinômios, por exemplo, para $x = 1$, a relação que havia entre $[A_1(x)]_1$ e $[A_2(x)]_1$ era uma comparação multiplicativa entre as duas grandezas que mediam, para $A_1(x)$, o valor numérico do Polinômio no ponto $x = 1$ e, para $A_2(x)$, o valor numérico desse Polinômio, para $x = 1$. Essa relação entre eles não é de fração, nem de divisão, mas de razão, uma comparação multiplicativa entre essas duas grandezas. Assim, ao fazerem

$$\frac{[A_1(x)]_1}{[A_2(x)]_1} = \frac{(4x^2 - 52x + 160)_1}{(4x^2 - 28x + 40)_1} = \frac{4 - 52 + 160}{4 - 28 + 40} = \frac{112}{16} = \frac{112 \div 16}{16 \div 16} = \frac{7}{1}$$

Deviam entender que, para a altura 1, a área da base da "caixa 2" caberia, na área da base da "caixa 1" sete vezes.

Isso os alunos puderam perceber bem ao comparar as caixas construídas e levadas pela professora-pesquisadora e, também pelo desenho feito sobre as caixas planificadas.

As atividades realizadas no final da pesquisa, especificamente a Lista 3, serviram como objeto de avaliação da proposta de ensino adotada. O grau de aproveitamento do grupo, para aquelas atividades que exigiam uma transferência dos conhecimentos adquiridos no trabalho com a contextualização das caixas, em relação às atividades que se referiam a outros contextos, medindo-se percentualmente, foi considerado elevado conforme verificamos na Lista de atividades 3.

Em relação à opinião dos alunos sobre o processo de ensino-aprendizagem desenvolvido a partir da contextualização e a partir de problemas, verificamos uma inquietação em relação à forma como os conteúdos são abordados freqüentemente nas aulas de Matemática. A avaliação da proposta de ensino contextualizado que desenvolvemos foi aprovada pela maioria dos alunos. A maioria deles também sugeriu que outros conteúdos de Matemática deveriam ser desenvolvidos a partir de estratégias diferenciadas, apontando alguns fatores que esse tipo de estratégia permite: as aulas deixariam de ser repetitivas; permitiria o trabalho em grupos; a aula prática com material manipulativo facilitaria a compreensão; essas metodologias envolveriam todos os alunos, fugindo da monotonia das aulas tradicionais, proporcionando discussões mais construtivas e ajudando a aprender conceitos complexos de forma quase que descontraída.

Como sugestão o grupo pediu que os conteúdos de Matemática, na série seguinte, fossem abordados a partir de metodologias alternativas.

Nossa conclusão em relação à proposta de ensino contextualizado em situações de interação, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas, depende e muito da desenvoltura do professor em relação a alguns aspectos básicos para o desenvolvimento da proposta. O domínio do conteúdo em estudo, a dinâmica utilizada para o trabalho em sala de aula e a flexibilidade em perceber quando o aluno não preenche os pré-requisitos necessários para dar continuidade à atividade proposta, são elementos chave para o desenvolvimento de um trabalho desse tipo. A atividade contextualizada deve ser mediada pelo professor, enquanto que a formação dos conceitos e o desenvolvimento das aulas devem ter a participação ativa dos alunos.

Para um resultado positivo de qualquer proposta de ensino diferenciada, concluímos que a interação social é o veículo que move todo o processo. Assim, "é importante reconhecer que a Matemática deve ser trabalhada através da Resolução de Problemas, ou seja, que tarefas envolvendo problemas ou atividades sejam o veículo pelo qual um currículo deva ser desenvolvido. A aprendizagem será uma conseqüência do processo de Resolução de Problemas" (ONUCHIC e ALLEVATTO, 2004, p.221).

Capítulo 6

PROJETO II

CAPÍTULO 6

PROJETO II

6.1 INTRODUÇÃO

Após um ano da aplicação do Projeto I, como parte da nossa pesquisa construímos o Projeto II, como um novo trabalho de campo, com o intuito de verificar se o que fora feito no primeiro projeto surtira efeito e se a aprendizagem desenvolvida, naquela ocasião, havia se mantido ao longo de um ano.

Tínhamos como propósitos para a construção do Projeto II:

1. verificar como a Álgebra se apóia na Geometria vista como uma forma de representação.
2. verificar se o conceito de medida foi um fator importante naquele trabalho com o Projeto I.
3. verificar se os conceitos de comprimento, largura e altura foram bem identificados nas figuras geométricas.
4. verificar que relações os alunos puderam detectar entre essas três grandezas.
5. verificar quais concepções os alunos têm sobre os conceitos de perímetro, área e volume e que relações podem ser padronizadas entre essas grandezas.
6. explorar as relações entre um trabalho concreto e o conceito de Polinômio.
7. conceituar variáveis independentes e dependentes.
8. fazer matemática com as mãos.
9. estender a atividade com as caixas ao conceito de função.
10. Compreender os conceitos de Polinômio e de função polinomial.

E, ainda, se possível, com os alunos mais maduros, gostaríamos de verificar se houve falhas no trabalho realizado no Projeto I, ou não, e caso tenha havido, procurar corrigi-las.

6.2 – O Projeto II, realizado com os mesmos alunos, um ano depois da aplicação do Projeto I

O Projeto II será realizado na escola Cooperativa de Piracicaba (COOPEP) com os mesmos alunos participantes do Projeto I, após um ano da aplicação desse, desta vez com os alunos na 8ª série.

Ao aproximar-se o final do ano letivo de 2007, reuniremos esses alunos na mesma escola nos dias 04, 05, 06 e 07 de Dezembro, com encontros de duas horas de duração cada um, onde aplicaremos as atividades presentes neste Projeto II.

Revendo o contexto, dizemos que os sujeitos desta pesquisa são alunos com idades entre 14 e 15 anos, pertencentes a uma sala de aula com 12 alunos. A escola é particular, tendo como administradores os próprios pais dos alunos por se tratar de uma escola cooperativa.

No Projeto II, após um ano da aplicação do Projeto I, gostaríamos de verificar se o que fora trabalhado com os alunos no Projeto I, poderia ser "cobrado" e ampliado um pouco mais.

De experiências anteriores da professora-pesquisadora com outras 8ª séries, onde não havia sido aplicada nenhuma metodologia diferenciada, ao abordar o conceito de Polinômios e assuntos correlatos, a impressão que tínhamos era a de que os alunos apresentavam vagas idéias sobre o assunto e, na maioria das vezes, pareciam nunca ter estudado o tema. As expressões algébricas eram reconhecidas, por esses alunos, como um amontoado de termos sem uma característica própria que as diferenciassem umas das outras. Seria interessante verificar agora se, após um ano, os alunos, sujeitos à metodologia de ensino adotada nesta pesquisa, poderiam perceber os Polinômios como expressões algébricas especiais.

Quando desenvolvemos o trabalho em 2006, centramos nossa análise no estudo de Polinômios, não nos estendendo ao conceito de função. Sabendo que as funções nos permitem representar relações simbolicamente, visualmente, oralmente e que podem generalizar relações entre variáveis em toda a área da Matemática que envolve quantidades relacionadas, entendemos que o trabalho realizado no Projeto I, com a construção das caixas e o estudo de Polinômios, poderia ser estendido ao conceito de função.

Como o raciocínio algébrico permite uma busca de regularidades em toda a Matemática, as funções são uma ferramenta muito poderosa neste empenho e, poder relacionar este conceito tão importante, numa atividade que partiu de um trabalho em ações concretas, poderia desenvolver naqueles alunos uma aprendizagem mais consistente, não somente sobre Polinômios, mas também sobre funções.

6.3 Função

Funções são ferramentas usadas para modelar matematicamente todos os tipos de mudança do mundo real. Representar funções, em diferentes modos, pode levar à análise e à compreensão de cada mudança. Os estudantes do ciclo IV do Ensino Fundamental devem desenvolver uma compreensão dos múltiplos métodos de expressar relações funcionais do mundo real: contexto, palavras, gráficos, equações e tabelas. Cada um desses caminhos é um modo diferente de comunicar a mesma regra de correspondência ou relação. É importante ver que cada representação expressa a mesma idéia, ainda que de um modo diferente de olhar ou pensar sobre a relação. Trabalhar com essas diferentes representações de funções permitirá, aos estudantes, desenvolver uma plena compreensão deste importante conceito (VAN de WALLE, J.; A.; 2006, tradução nossa).

Assim, quais são as grandes idéias a serem trabalhadas por esses alunos em um trabalho com funções?

> 1. Funções são relações ou regras que, de maneira única, associam membros de um conjunto a membros de outro conjunto. 2. Numa relação funcional, uma variável (variável dependente) é definida em termos de outra variável (variável independente). 3. As relações funcionais podem ser expressas em contextos reais, gráficos, equações algébricas, tabelas e palavras. Cada representação para uma dada função é simplesmente um modo diferente de expressar a mesma idéia. Cada representação dá uma visão diferente da função. O valor de uma particular representação depende do seu objeto/finalidade. (mesmo autor, mesma obra, tradução nossa, p.284-285).

O enfoque dado, por nós, ao conceito de função, no Projeto II, conforme aponta Van de Walle, 2006, será sobre o estudo de funções no que se refere ao modo com que a mudança numa variável afeta a mudança na outra (p. 284-285, tradução nossa). Na atividade com as caixas, exploramos a variação da área da base das caixas em função da altura (h). Acreditamos que as atividades desenvolvidas nos Projetos I e II, permitem a exploração do conceito de função por meio da percepção de padrões, de tabelas e gráficos já na 7ª série, diferentemente do que propõem os livros didáticos cujas primeiras idéias sobre funções são dadas somente na 8ª série.

Não estamos sugerindo, para este projeto, um esgotamento desse conceito, nessa série, mas sim, proporcionar a esses alunos um contato com o conceito de função como extensão do trabalho realizado, por nós, com Polinômios.

6.4 Objetivos Gerais para o Projeto II

1. Verificar se a aprendizagem de tópicos abordados no Projeto I se mantiveram após um ano da aplicação do Projeto I.
2. Estender os conceitos construídos no Projeto I para novos conceitos a serem construídos e formalizados no Projeto II.

Este projeto será desenvolvido ao longo de quatro encontros com duas horas de duração, onde novos conceitos serão construídos, pelos alunos, através da resolução de problemas.

No primeiro encontro nos limitaremos a fazer uma revisão crítica das atividades desenvolvidas no Projeto I, onde será analisado o raciocínio dos alunos.

6.5 A Resolução de Problemas como estratégia de trabalho neste Projeto

A maioria dos educadores matemáticos concorda que o desenvolvimento de um raciocínio “forte” é um objetivo importante da Matemática elementar. De fato, resolução de problemas, que é a base para o desenvolvimento de um raciocínio “forte”, tem estado na vanguarda dos currículos de Matemática por muitos anos. Essas duas áreas, resolução de problemas e currículo, continuam sendo enfatizadas até hoje. Dentro do domínio do pensamento e do raciocínio, a área que requer a maior atenção é o desenvolvimento de habilidades de ordem superior, especificamente pensamento crítico e pensamento criativo. (KRULICK & RUDNICK, 2001, tradução nossa).

Pensamento crítico: é a habilidade em analisar uma situação e tirar conclusões apropriadas e corretas de dados obtidos. Isso inclui determinar dados inconsistentes, dados ocultos e informações irrelevantes.

Pensamento criativo: é a habilidade em originar uma solução para uma situação-problema. Além disso, é a habilidade em gerar, sintetizar e aplicar idéias originais para produzir um produto complexo.

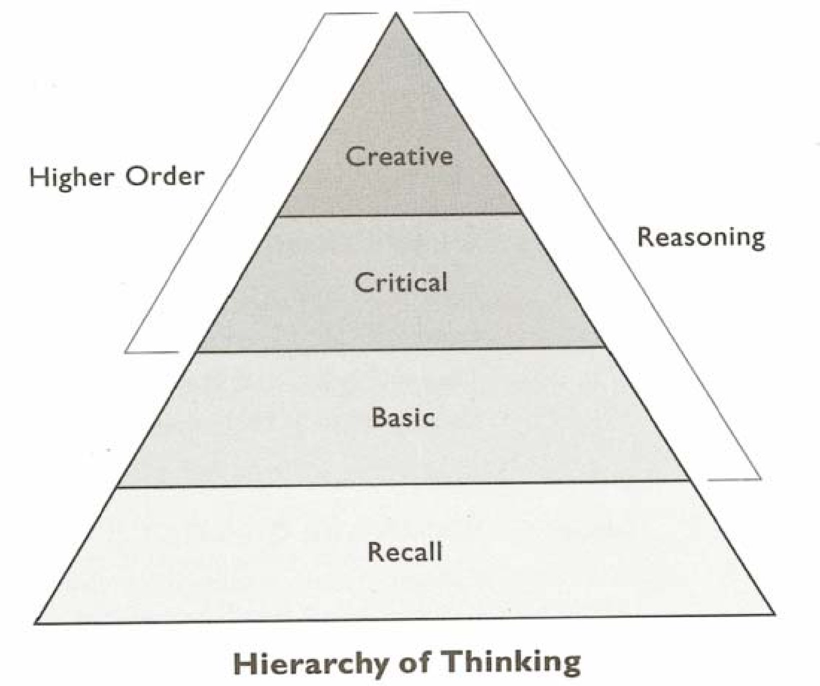


Figura 18 - Hierarquia do Pensamento; Krulik & Rudnick; 2001, p.iv, Roads to Reasoning – Developing Thinking Skills Through Problem Solving, Mac Graw-Hill[17].

"Resolução de Problemas é o caminho que levará a uma habilidade crescente para raciocinar. Os problemas são veículos que levam os estudantes ao longo do caminho e o professor é o condutor que guia os estudantes (mesmo autor, mesma obra, tradução nossa, p - v)".

Seguiremos a hierarquia do pensamento de Krulik & Rudnick (2001), representada pelo desenho da pirâmide, como norteadora deste projeto, especificamente, quando tratarmos da revisão crítica dos conceitos abordados.

6.6 Roteiro de Atividades

6.6.1 - Trabalho Inicial – 1º Encontro

Serão realizadas, neste encontro, os Problemas 1, 2 e 3.

[17]Tradução da pirâmide: Hierarquia do pensamento. Lembranças. Raciocínios: básico, crítico e criativo. Raciocínios de ordem superior: crítico e criativo.

Objetivos do encontro

1. fazer uma revisão crítica sobre conceitos trabalhados, com os alunos que fizeram parte do Projeto I.
2. fazer uma revisão crítica de outros conceitos geométricos já trabalhados, por esses alunos, durante sua escolaridade e não enfocados diretamente no Projeto I.
3. observar a necessidade do uso de unidades de medida no transcorrer desse trabalho.

Problema 1

Entregar aos grupos uma folha de papel A_4, tendo nela desenhada um retângulo medindo 16cm no comprimento (c), por 10 cm na largura (λ), com a seguinte solicitação:

Observar o retângulo e calcular o perímetro e a área desse retângulo.

Para esta atividade, nosso objetivo é que os alunos possam reconhecer e distinguir os conceitos de perímetro e área de um retângulo.

Acreditamos que não haverá problemas para os alunos na realização dessa atividade. Possivelmente encontrem dificuldade na exigência do trabalho com medida.

Problema 2

Entregar aos grupos uma folha de papel A_4 com o desenho da Atividade 1. Pedir para os alunos recortarem, em cada canto A, B, C, D, um quadrado de 1 cm de lado e seguir as solicitações abaixo.

a) calcular a área dessa nova figura plana.

b) com essa figura formada, "montar" uma caixa sem tampa. Essa caixa será chamada "caixa A". Observação: não é preciso colar as laterais dessa caixa.

c) Observando a "caixa A", dizer quantos vértices, quantas arestas e quantas faces ela tem.

d) Considerando comprimento: c; largura: λ; e altura: h; como dimensões dessa caixa, quanto medem: c, λ, h?

e) Medir o Perímetro de cada uma dessas faces.
f) Medir a área de cada uma dessas faces.
g) Considerando que a face oposta à tampa, se ela existisse, é a base da caixa, qual é a área da base dessa caixa?
h) Qual é o perímetro da base dessa caixa?
i) Qual é o valor do volume dessa caixa?

Nosso objetivo para esta atividade é o de uma avaliar os conceitos pertinentes a ela e calculá-los com os valores dados.

Nesta atividade acreditamos que, a menos de o conceito de volume, que não havia sido trabalhado no Projeto I, os grupos não terão dificuldade em atender às solicitações feitas.

Problema 3

Exercício de fixação - Para este problema serão distribuídas folhas de papel A_4 com o desenho do retângulo com medidas 16cm no comprimento e 10cm na largura.

Como exercício de fixação de idéias, é apresentada esta atividade visando à transferência de conhecimentos construídos previamente.

Pede-se aos alunos que repitam todas as tarefas realizadas no Problema 2, só que, dessa vez, cortem nos cantos do retângulo inicial, quadrados de 2 cm de lado. A caixa montada com este problema será chamada “caixa B”.

De suas observações o que cada grupo pode falar sobre o acontecido com a área da base das caixas A e B, ao longo dos dois recortes feitos (Problema 2 → recorte de 1 cm e Problema 3 → recorte de 2 cm)?

O objetivo dessa atividade é fixar conhecimentos construídos.

Ao terminar esta aula o professor-pesquisador formalizará os conceitos de vértices, arestas e faces de uma figura espacial, pois numa figura plana temos vértices e lados e numa figura espacial, temos vértices, arestas e faces.

Além disso, também seriam formalizados os conceitos de perímetro, área e volume.

6.6.2 - 2º Encontro

Revisão dos conceitos trabalhados no tópico Polinômios do Projeto I

Neste encontro, além da revisão crítica, Problema 1, será desenvolvido o Problema 2. A revisão crítica será desenvolvida por meio de questionamentos feitos pelo professor-pesquisador buscando, nos alunos, as respostas para esses questionamentos, que deverão ser posteriormente anotados pelos alunos.

Objetivos do encontro:

1. Revisão de conceitos através de questionamentos feitos pelo professor-pesquisador a fim de que os alunos se recordem dos conceitos trabalhados no tópico Polinômios, no Projeto I.
2. Reconhecer casos em que possam ser medidos perímetro, área e volume.
3. Chamar atenção para a relação entre lados e vértices nas figuras planas; para a relação entre lados e vértices dos retângulos; e arestas, faces e vértices das caixas construídas.

Fazer a revisão de conceitos trabalhados no tópico polinômios, do Projeto I, de acordo com a relação abaixo:

1.1 Constante
1.2 Monômio
1.3 Coeficiente e parte literal de um monômio
1.4 Grau de uma variável em um monômio
1.5 Grau de um monômio
1.6 Monômios semelhantes
1.7 Polinômios
1.8 Termos de um Polinômio

1.9 Polinômio reduzido

1.10 Grau de um Polinômio

1.11 Polinômio ordenado

1.12 Redução de termos semelhantes

1.13 Adição Algébrica de Polinômios

1.14 Multiplicação e Divisão de Polinômios

O objetivo dessa atividade é fazer uma revisão crítica dos conteúdos trabalhados no Projeto I sobre Polinômios, bem como retomar algum conceito que não tenha sido assimilado pelos alunos, ou, ainda, discutir conceitos que se apresentem como sendo novos.

Numa reunião Plenária, com todos os alunos juntos, seriam discutidos todos os conceitos revistos nesta aula.

O professor-pesquisador colocará na lousa, posteriormente, as definições de todos os conceitos trabalhados com o rigor necessário, bem como outros assuntos correlatos.

Problema 4

Entregar aos grupos uma folha de papel A_4, onde há o desenho de um retângulo medindo 16cm no comprimento, por 10 cm na largura. Com este retângulo, seguir com as solicitações abaixo:

a) Se fossem cortados quadrados de lado $\underline{x}$ cm, repetindo as ações feitas nos Problemas 2 e 3, forma-se a "caixa C", sem tampa. Apresente a expressão: do perímetro (P) da base da caixa; da área (A) da base da caixa; e do volume (V) da caixa.
b) Analise as dimensões das três caixas "construídas" (A, B e C).
c) Há alguma limitação para a altura da "caixa C"?
d) E no caso de $h = 0$ e $h = 5$, como ficaria a forma da caixa, lembrando que o retângulo tem medidas: 16cm no comprimento e 10 cm na largura?

Os objetivos para esta atividade:

1) utilizando o trabalho feito no Projeto I, generalizar a construção de uma caixa, a partir da folha de papel A_4, com o desenho do retângulo de dimensões
c = 16 cm e λ= 10 cm, apresentando uma expressão algébrica para o perímetro P da base da caixa C, para a área A da base da caixa C e para o volume V da caixa C.

2) analisar as dimensões das três caixas construídas.

6.6.3 – 3º Encontro

Fixando conceitos trabalhados no Problema 4; explorando o Conceito de Função.

No 2º encontro (Problema 3), exploramos, dentro dos campos numéricos N e Q, isto é, Naturais e Racionais, os valores possíveis para a altura da caixa C.

Neste 3º encontro, fixando os conceitos trabalhados no final do 2º encontro, mais uma vez lançaremos mão do concreto para compreender a variação das bases das caixas construídas com as diferentes alturas.

Objetivos para este encontro:

1. Descobrir a relação funcional, isto é, uma relação de dependência, entre a área da base da caixa e a altura sugerida.
2. Descobrir a relação funcional entre o volume da caixa e a altura adotada.
3. Falar sobre variáveis dependentes e variáveis independentes.
4. Construir gráficos.

Problema 5

Entregar aos grupos uma folha de papel A_4 com o desenho de um retângulo de dimensões c = 16 cm e λ = 10 cm.

Pede-se para:

a) construir uma caixa com altura *h*, tomando um valor *h* qualquer. Sugere-se tomar $h \neq 0$ cm e $h \neq 5$ cm.
b) entregar aos grupos duas folhas de papel A_4 com a figura de um retângulo, medindo $c = 16$ cm e $\lambda = 10$ cm, a fim de verificar em cada folha, nessas construções, a limitação para $h = 0$ cm e $h = 5$ cm.
c) reconhecer que, com as medidas $h = 0$ cm e $h = 5$ cm, as grandezas perímetro, área e volume dadas por suas fórmulas, isto é, dadas por relações entre grandezas, achar o perímetro da base, a área da base e o volume da "caixa C".
d) A partir do que foi obtido na questão c, construir uma tabela[18] e um gráfico da área da base da caixa em função da altura e do volume da caixa em função da altura.

A tabela abaixo foi entregue após a realização da alternativa c.

Preencha a tabela abaixo com base no trabalho realizado a partir do retângulo medindo 16 cm no comprimento e 10 cm na largura.

Altura (cm)	Área da base da caixa	Perímetro da base da caixa	Volume da caixa
1			
2			
$0 < x < 5$			
0			
5			

Objetivos para esta atividade:

1. rever e reforçar o conceito de volume
2. exploração de medidas.
3. trabalhar com expressões algébricas.

[18] Essa tabela foi entregue aos alunos ao terminarem as alternativas anteriores. Tomamos essa medida, para ganhar tempo.

6.6.4 – 4º e 5º Encontros

Formalização do Conceito de Função.

Lista de atividades de fixação.

1) Neste encontro, dando continuidade ao anterior, será discutido o conceito de função, sua formalização e ainda a efetuação da lista de atividades de fixação.
2) Em Plenária será feita a discussão dos gráficos e tabelas construídos.

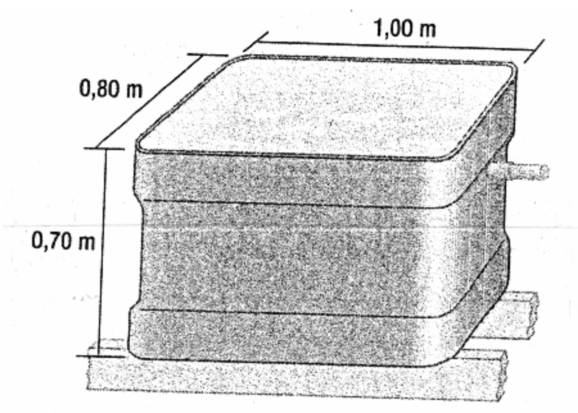
Nesses encontros haverá mais debates entre o professor-pesquisador e os alunos sobre o conceito de função, do que fazer uma aplicação partindo de um problema.

Usaremos material didático de Van de Walle (2001, 2006) para nos conduzir através da construção desse conceito tão importante da Álgebra, a função.

Lista de atividades de fixação.

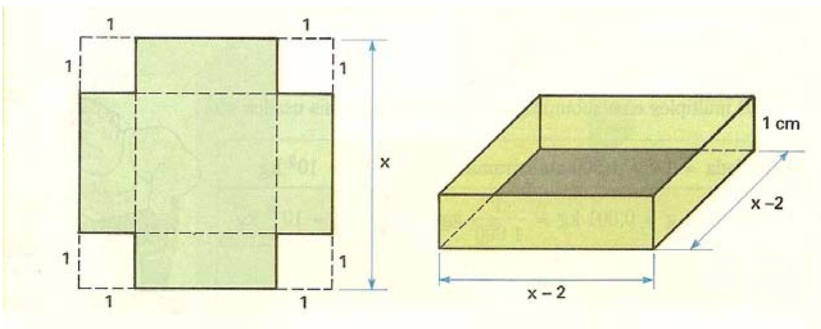
1. É muito comum, no período de férias de verão, faltar água nas cidades do litoral do Brasil. Para não correr riscos de ficar sem água, seu Antônio construiu em sua casa de praia mais uma caixa-d'água, com as seguintes medidas: 1m de largura, 0,80m de comprimento e 0,70m de altura. Como precisava ligar essa caixa a outra já existente, colocou um cano de entrada de água a 60cm de altura, conforme a figura abaixo. Desse modo, os últimos 10cm de altura do reservatório ficam sempre vazios. Qual a capacidade utilizável, em litros, da caixa-d'água que seu Antônio construiu em sua casa de praia?

Problema "extraído" do livro: Educação Matemática – Célia Carolina Pires; Edda Curi; Ruy Pietropaolo; 2002; 7ª série do Ensino Fundamental; Editora Atual. SP., p.195).

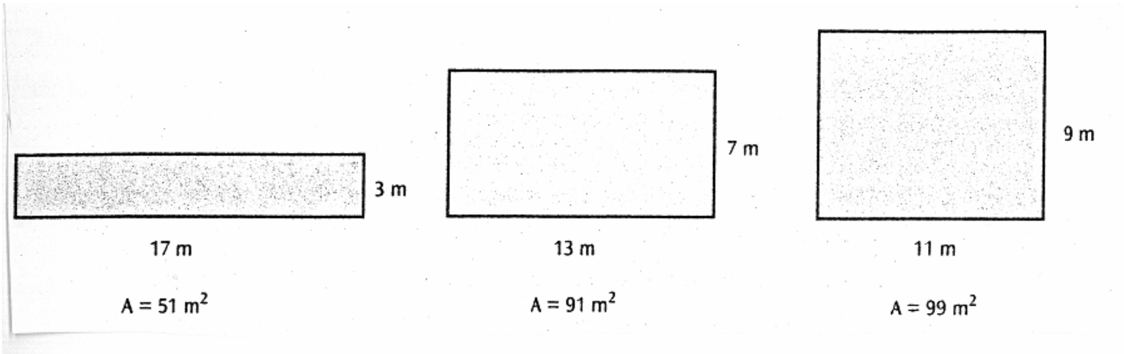


2. A partir de um papelão quadrado, Giuliano construiu uma caixa com $16cm^3$ de volume. Cortou quadrados de $1cm^2$ nos cantos e dobrou os lados, conforme mostram as figuras. Quais eram as medidas do papelão original?

Problema extraído do livro: Matemática e Vida – Bongiovanni; Vissoto e Laureano. 7ª série do Ensino Fundamental, Editora Ática, 1996, SP.; p.124.



3. Considere os retângulos com Perímetro de 40m:



Observando que as áreas desses retângulos não são iguais, podemos propor a seguinte questão: dentre todos os retângulos com perímetro de 40m, qual deles tem a maior área?

Problema extraído do livro: Matemática para todos de Imenes & Lellis, 2006, 7ª série do Ensino Fundamental, Editora Scipione, SP. (p.191-192)

4. Marília está fazendo uma caixa de madeira para guardar suas jóias, ela decidiu tomar para o comprimento da caixa 20cm. Também decidiu que o comprimento fosse exatamente 2 vezes a largura enquanto que a altura seria exatamente metade da largura. Qual será o volume da caixa de jóias de Marília?

Adaptado do problema 20 – Boxing Jewelry – p.79-81 do livro Problem-Driven Math. Applying the Mathematics Beyond Solutions. Krulik e Rudnick. Grade 6, 2005).

5. Renee planejou fazer uma caixa em forma de um cubo que media 5cm em cada lado. Depois de calcular o volume ela achou que a caixa estava muito pequena. Ela dobrou o comprimento de cada lado do cubo. Quantas vezes maior ficou o volume da caixa maior do que a caixa original?

(Boxing Jewelry - p.79-81 do livro Problem-Driven Math. Applying the Mathematics Beyond Solutions. Krulik e Rudnick. Grade 6, 2005).

6. Lisa fez uma caixa que media 16cm no comprimento, 8cm na largura e 4cm de altura. João fez uma caixa com a forma de um cubo que tinha o mesmo volume da caixa de Lisa. Qual era o comprimento de cada lado da caixa de João?

(Boxing Jewelry – p.79-81 do livro Problem-Driven Math. Applying the Mathematics Beyond Solutions. Krulik e Rudnick. Grade 6, 2005).

CAPÍTULO 7

A APLICAÇÃO DO PROJETO II

Capítulo 7

A Aplicação do Projeto II

Este capítulo irá tratar da aplicação do Projeto II, descrevendo como ocorreu sua aplicação em sala de aula, focalizando cada um dos encontros planejados.

7.1 O Planejamento para a aplicação do Projeto II

Planejar a aplicação do Projeto II seguiu a mesma estratégia usada no Projeto I.

Os grupos e os apelidos, tanto para os alunos quanto para a professora-pesquisadora − PESQ; CLASSE; ALE; MAN; CEC; GAB; HAL; JAN; JUL; LAR; LEO; MAR; DAN; NIL −, mantiveram-se os mesmos que no Projeto I, uma vez que os doze participantes do Projeto I participaram do Projeto II. Sobre cada mesa, de cada grupo, foi colocado um gravador. Um quinto gravador foi colocado na mesa da professora-pesquisadora. As aulas foram transcritas e, posteriormente, foi feita a triangulação entre os registros dos alunos, da professora-pesquisadora e das gravações de áudio, sempre enfocando os objetivos previamente estabelecidos para cada situação-problema.

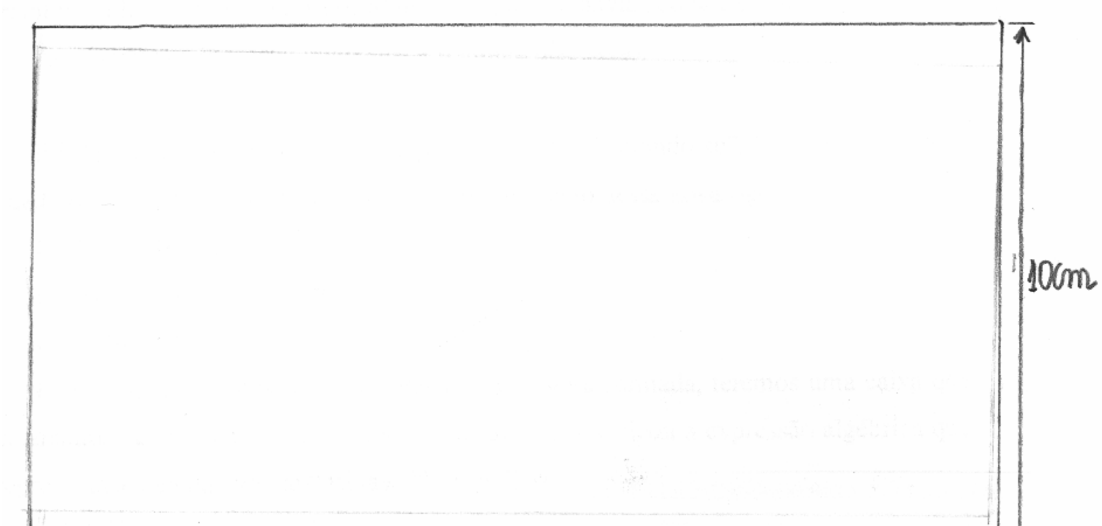
Como já dissemos a idéia inicial era desenvolver esse projeto em quatro encontros, com duas horas de duração cada um. Entretanto, logo após a primeira aula, consideramos que deveríamos estender o trabalho para mais um encontro. Assim, para a execução desse projeto, fizemos cinco encontros realizados nos dias 04, 05, 06, 07 e 10 de Dezembro de 2007. Consultamos os alunos sobre a possibilidade desta extensão e todos se comprometeram em colaborar. É claro que, a aplicação de um projeto nem sempre é realizada conforme ele foi programado. Durante sua execução, muitas idéias novas poderiam ser trabalhadas, levando a variadas discussões e permitindo a abordagem de novas estratégias e o enfoque de novos conceitos. Tendo em vista os objetivos desta pesquisa e o tempo a ela destinado, em alguns momentos, alguns conceitos que foram surgindo e que mereciam estratégias de trabalho mais elaboradas, tiveram que ser tratados de forma mais direta, o que, de modo algum, tornou-os menos significativos. Como esta é uma pesquisa desenvolvida considerando o ensino contextualizado através da resolução de problemas, achamos conveniente apresentar essa discussão, pois sabemos que, nem sempre é possível contemplar todas as variáveis que vão surgindo numa pesquisa. Ainda assim, consideramos gratificantes os resultados conseguidos com esses alunos.

7.2 A aplicação do Roteiro de Atividades na sala de aula

7.2.1 - 1º Encontro – Os alunos estavam sentados em grupos de três. Foram trabalhados, neste encontro, os Problemas 1 e 2, visando atender aos objetivos sugeridos. Os problemas foram entregues aos grupos e a eles foi dado um tempo para resolução.

Problema 1

Observe o retângulo abaixo:



a) Calcule o perímetro e a área deste retângulo.

Ao sugerir este problema, nosso objetivo era o de verificar se os alunos iriam reconhecer e distinguir os conceitos de perímetro e área de um retângulo. O conceito de perímetro, já trabalhado em anos anteriores, bem como o conceito de área, muito explorado no Projeto I, não nos parecia, inicialmente, oferecer dificuldade aos alunos. Já, a exigência do trabalho com medida, embora estivesse presente nos problemas do Projeto I, poderiam apresentar alguma dificuldade, uma vez que, no Projeto I, verificamos que os alunos não lhe deram a devida importância.

Como havíamos previsto, todos souberam calcular o perímetro e a área sem apresentar dificuldade conforme veremos nos resultados dos grupos na página 176. Entretanto, a maioria dos alunos se esqueceu da unidade de medida padrão, sendo necessária a intervenção de alguns colegas ou mesmo da professora-pesquisadora. No Projeto I, esse comportamento se repetia sempre que tratávamos com medidas e, para o Projeto II, este seria um aspecto em que os alunos deveriam estar atentos. Acreditamos que este “esquecimento” não estava relacionado com o fato de não saberem trabalhar com medidas, mas sim, com o hábito desses alunos em, normalmente, não fazerem uso dessa exigência, ou por não serem cobrados, ou por não lhes dar o valor merecido. Esse nosso posicionamento refere-se ao fato de que, quando questionados sobre os valores encontrados para perímetro e área, eles apenas se referiam à quantidade numérica, isto é, ao número obtido sem se preocupar com a unidade de medida. Este comportamento dos alunos pode estar relacionado ao pouco destaque deste assunto nas aulas de Matemática, em especial nas últimas séries do Ensino Fundamental, pois muitos professores, apesar de reconhecerem sua importância, preferem que elas sejam estudadas de forma mais detalhada nas Ciências Naturais (PCN, 1998).

Observando as orientações dos PCN (1998) e a dificuldade dos alunos em trabalhar com grandezas e medidas, ressaltamos que este poderia ter sido um aspecto melhor explorado nesta pesquisa utilizando outras estratégias, mas, em função do tempo, o que fizemos foi tratar o assunto de forma mais direta, conscientes de que faz-se necessário um enfoque maior sobre este assunto nas aulas de Matemática. Ainda, sobre o bloco Grandezas e Medidas, os PCN (1998, p.49) apontam para que haja consenso nos currículos de Matemática no Ensino Fundamental, onde esses devem “contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento)”.

Ao trabalhar esse problema, dentro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, após a Plenária, enfocou-se a necessidade de fazer-se uso das unidades padrão de medida sempre que requeridas, conforme podemos ver os resultados apresentados por dois dos grupos:

Resultado de um grupo:

perímetro: soma das medidas dos lados

at. 1.1

perímetro:

$2 \cdot 10 + 2 \cdot 16 = x$

$20 + 32 = x$

$\boxed{x = 52\ cm}$

$P_R =$

área:

$10 \cdot 16 = y$

$\boxed{y = 160\ cm^2}$

$A_B =$

Resultado de outro grupo:

Périmetro do retângulo ABCD, sendo AB e CD: 10 cm e BC e CA: 16 cm.

Perímetro = lado + lado + lado + lado

$P_R = AB + CD + BC + CA$

$P_R = 10 + 10 + 16 + 16$

$P_R = 52\ cm$

Área do retângulo ABCD. Área = b. h

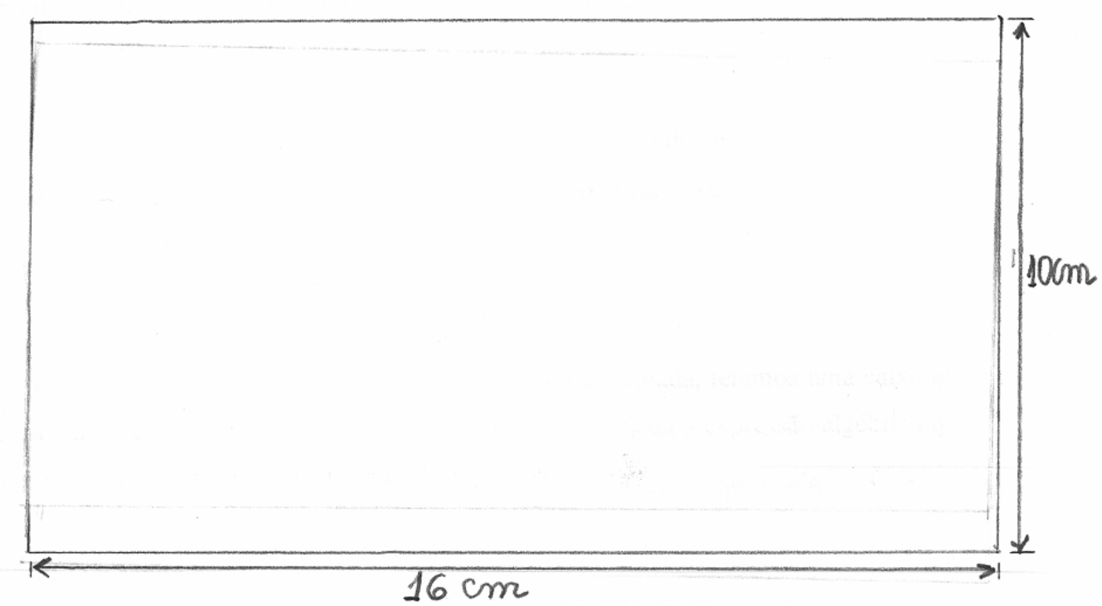
$10 . 16 = A_R$

$160 = A_R$

$160\ cm^2 = A_R$

Problema 2

O retângulo abaixo é o mesmo do Problema 1. Recorte neste retângulo, em cada canto A, B, C, D, um quadrado de 1 cm de lado e siga as solicitações a seguir.



a) calcular a área dessa nova figura plana.
b) com essa figura formada montar uma caixa sem tampa. Essa caixa será chamada "caixa A".

    Observação: não é preciso colar as laterais dessa caixa.

c) Observando a "Caixa A", dizer quantos vértices, quantas arestas e quantas faces ela tem.
d) Considerando comprimento c; largura λ; e altura h; como dimensões dessa caixa, quanto mede: c, λ, h?
e) Medir o Perímetro de cada uma dessas faces.
f) Medir a área de cada uma dessas faces.
g) Considerando que a face oposta à tampa, se ela existisse, é a base da caixa, qual é a área da base dessa caixa?
h) Qual é o perímetro da base dessa caixa?
i) Qual é o valor do volume dessa caixa?

Neste problema acreditamos que, a menos do conceito de volume, que não havia sido trabalhado no Projeto I, os grupos não teriam dificuldade em atender às solicitações feitas.

Ao recortar o quadrado de 1 cm de lado, alguns alunos perguntaram se o quadrado a ser recortado era para o lado de fora do retângulo. Em resposta aos alunos que fizeram essa pergunta, a professora-pesquisadora leu, com eles, todo o enunciado do problema: *"observe o retângulo abaixo...."*, na tentativa de levá-los à percepção de que os quadrados a serem recortados estavam nos cantos internos do retângulo desenhado. Se recortassem quadrados do lado externo, não estariam recortando do retângulo dado, mas fora dele. A leitura do problema em conjunto, foi suficiente para a continuidade da resolução do problema.

Sabemos que, para montar uma caixa, partindo do retângulo dado, havia outras estratégias além do recorte feito nos cantos do retângulo. Entretanto, como iríamos explorar o conceito de área de papel utilizado na montagem da caixa e posteriormente o cálculo da área das bases dessas caixas, para evitar que os alunos calculassem a área de todo o papel envolvido achamos conveniente, já no enunciado do problema, sugerir o recorte. Assim esperávamos que, quando solicitássemos o cálculo do papel usado na caixa, os alunos percebessem que aqueles cantos recortados deveriam ser descartados. Se usássemos outras estratégias como, por exemplo, o uso de dobraduras nos cantos em vez do recorte, os alunos poderiam calcular a área de todo o papel, encontrando sempre o cálculo da área do retângulo inicial.

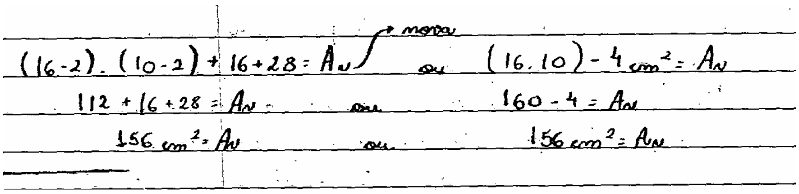
Essa atividade, em comparação à do Projeto I, foi realizada quase que automaticamente por todos os alunos, sem obstáculos. Os alunos, após recortarem os quadrados solicitados, perceberam que a figura formada era a de uma caixa planificada, antes mesmo de, no enunciado, haver a sugestão de planificação.

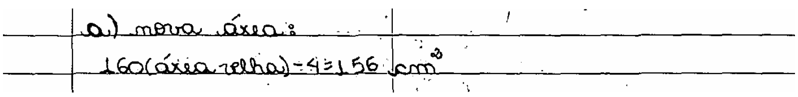
Quando sugerimos este problema no Projeto I, os alunos apresentaram muita dificuldade, por não perceberem que o lado do quadrado recortado representava a altura da caixa formada. Dessa forma, não sabiam onde deveriam representar a altura geometricamente. Ao recortarem os quadrados, desta vez no Projeto 2, lhes perguntamos sobre a figura plana formada e eles responderam que, se dobrassem as "abas", formariam uma caixa planificada de altura 1cm. Pudemos verificar que, depois de 1 ano, aquela situação referente à altura da caixa, que havia se apresentado como um complicador no problema, neste Projeto II, havia se fixado como conhecimento, considerando a atitude da maioria dos alunos. Os alunos pareciam se posicionar raciocinando, conforme apontou Krulik & Rudnick (2001), não estando ligados somente às lembranças.

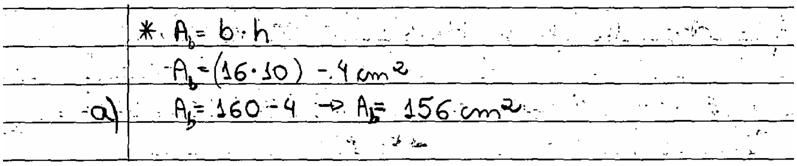
Na seqüência, deixando os alunos trabalharem a vontade, essa atividade pedia para calcular a área da nova figura plana formada. Houve três alunos de diferentes grupos que,

mesmo sentados em seus grupos, desrespeitando as normas da metodologia adotada, erradamente, fizeram o cálculo da área da base da caixa planificada:
14cm x 8cm = 112cm^2, considerando a base da caixa formada, a face oposta à tampa da caixa, se ela existisse, em vez do cálculo da figura formada. Acreditamos que esses alunos estavam simplesmente ligados a lembranças anteriores. Em desacordo, seus próprios colegas disseram que não era isso. Era "*só fazer 160cm^2 – 4cm^2= 156cm^2*", disseram. Outros grupos calcularam as áreas das faces laterais e a área da face inferior que, posteriormente, seria chamada de área da base da caixa, somando-as em seguida: 112cm^2 + 8cm^2 + 8cm^2 + 14cm^2 + 14cm^2 = 156cm^2.

Abaixo temos alguns desses resultados:







É importante dizer que a intervenção da professora-pesquisadora não foi necessária em nenhuma dessas ações. Nas gravações feitas, pode-se ouvir as discussões entre os alunos.

A montagem da caixa foi familiar a todos.

A alternativa c deste problema pedia para verificar quantos vértices, quantas arestas e quantas faces a caixa tinha. Os alunos, individualmente, começaram a discutir esses conceitos em voz alta, antes mesmo de entrarem num debate com o grupo. Cada um falando o que lhe vinha à cabeça, novamente, de acordo com a hierarquia do pensamento de Krulik & Rudnick (2001), parecendo apoiados em lembranças. Com relação a faces e vértices, os alunos pareciam ter clareza, mas com relação às arestas, não!

Após algumas discussões entre os grupos, observamos que os alunos estavam desviando-se do foco da atividade. Fizemos uma intervenção, perguntando-lhes de que se lembraram quando leram a palavra aresta:

MAN: É o encontro de duas faces.
LEO: É o encontro dos lados.
CEC: É o encontro de duas retas.

Em vez de concordarmos ou não com os posicionamentos acima, resolvemos redirecionar a pergunta, questionando o que sabiam sobre vértices.

Com o desenho do retângulo inicial em mãos perguntamos:

PESQ: O que são vértices nesta figura?
LEO: É o encontro de duas retas.
MAN: De duas semi-retas.
LAR: É o canto.
PESQ: Qual das definições dadas, a classe acha melhor?
CLASSE: São segmentos de retas que se encontram. Isso é vértice!
PESQ: Poderíamos dizer que são os lados, neste retângulo, que se encontram formando vértices?
CLASSE: Sim.
PESQ: Quantos lados se encontram no retângulo para formar pelo menos um dos vértices?
CLASSE: Dois.

Apesar desses questionamentos e discussões, não chegamos a fazer uma formalização dessa atividade. Nossa intervenção deu-se com o intuito de redirecionar o trabalho. As conclusões deveriam ser tomadas pelos grupos.

Quando questionados sobre faces, ALE pegou uma caixa e passando a mão por toda a base, disse:

ALE: Isso aqui é face.

Como todos concordaram com o que ela disse, dizendo que não estava errado, seguimos adiante.

Com a caixa montada em mãos, perguntamos:

PESQ: Onde estão os vértices?

Nesse momento, os alunos apontaram para o canto superior dizendo que aquele era um vértice. Outros apontaram para os cantos que estavam na base da caixa.

PESQ: Vamos analisar cada face. Olhando para a base desta caixa, onde estão os vértices?

CLASSE: No canto.

PESQ: Vocês disseram anteriormente que vértice é o encontro dos lados, mas falando de vértices de um retângulo. E aqui − apontando para uma das faces da caixa − o que forma o vértice?

ALE: Três lados.

PESQ: Vejam, cada face é uma região plana!

A resposta de ALE se referia ao vértice da caixa, formado pelo encontro de três arestas.

Com a caixa em mãos, ALE complementou:

ALE: É esse aqui que é o vértice da caixa. São três (apontando para as arestas) na caixa, que formam um vértice da caixa. São três arestas.

LEO: Isso! São três arestas!

Nossa pergunta referia-se àquela face da caixa. Sendo assim, seriam necessários dois lados para formar um vértice, ou seja, cada vértice da face era composto por dois lados. Com o desenho do retângulo e com a caixa em mãos, perguntamos:

PESQ: No retângulo, como são formados os vértices?

CLASSE: Dois lados formam um vértice.

PESQ: E na caixa, como é formado um vértice?

CLASSE: Por três arestas como ALE falou.

Em diálogo anterior, havíamos perguntado quantos lados seriam necessários para formar um vértice num retângulo, prevendo que poderia haver conflito quando perguntássemos como seriam formados os vértices da caixa.

Mesmo depois de afirmar, como vimos no diálogo acima, que na caixa um vértice é formado pelo encontro de três arestas, os alunos ainda ficaram em dúvida quando se referiam aos vértices formados na parte superior da caixa, onde deveria estar a tampa. Os colegas sabiam que a fala do grupo de ALE estava correta em relação aos vértices da caixa, dados pelo encontro das três arestas. Entretanto, o fato de a caixa não ter tampa, para eles, parecia não formar vértice na parte superior, já que, na caixa, o vértice é formado pelo encontro de três arestas. Essa confusão veio à tona depois da fala do grupo de ALE, quando afirmaram que, na caixa, um vértice é formado por três arestas. Nessa discussão, os alunos não haviam percebido que o lado superior das faces laterais eram arestas da caixa.

Era preciso que os alunos percebessem que, quando estivessem se referindo aos vértices das faces da caixa, como regiões planas, estariam falando em lados e, quando estivessem falando em caixa, os vértices seriam formados por arestas. O problema que poderia confundir os alunos estaria na face superior da caixa que não aparecia por se tratar de uma caixa sem tampa. Na base tínhamos evidentes quatro vértices formados pelo encontro de três arestas cada um e, na parte superior, onde estaria a tampa, se ela existisse, teríamos vértices formados pela parte superior de cada face como uma aresta e as outras duas arestas evidentes.

Fortalecendo esse conceito, um novo diálogo aconteceu:

PESQ: Então, na parte superior não temos tampa. Temos vértices na parte superior?

ALE: Não tem, gente! Pra ter vértice tem que ter três arestas. Se não tem tampa, então não tem três arestas. Tem só uma aresta (referindo-se a aresta lateral que representava a altura da caixa). Não tem vértice em cima.

Percebemos que até esta etapa da atividade os alunos sabiam mostrar onde estavam as arestas, mas não sabiam definir as arestas. Sendo assim, perguntamos:

PESQ: O que são as arestas?

Ficaram em silêncio por um momento. O grupo de JAN respondeu após algum tempo: "*É o encontro de duas faces*". O grupo de NIL respondeu *"... é essa linha aqui ó*! (passando a mão pela altura da caixa)".

Os demais grupos ouviram o posicionamento do grupo de JAN e NIL e pareciam concordar. Não queríamos, ainda, formalizar o conceito de arestas. Deixamos os grupos continuarem as discussões, buscando um consenso ou discordando e, só então, retomamos a discussão em Plenária.

Ao iniciarmos a discussão na Plenária, retomamos a colocação do grupo de ALE sobre o fato de "*não ter aresta na parte superior da caixa*". Logo "*não teria vértice*". Perguntamos aos alunos se o grupo de ALE estava correto. Eles ainda pareciam não querer expor suas idéias, ou talvez não tivessem uma idéia formada. Sendo assim, retomamos a relação vértices-lados, vértices-arestas. Com uma caixa em mãos apontando para uma das laterais perguntamos aos alunos quantos seriam os vértices daquela face. Foi claro para eles perceber que eram quatro. Repetimos a pergunta em relação à outra face e eles responderam: "*quatro*". Apontando para o vértice superior de cada face, dissemos:

PESQ: Vocês disseram que aqui é um vértice, formado pelo encontro de dois lados.

Apontando para a outra face, no canto superior, continuamos:

PESQ: Vocês disseram que aqui tem um vértice. O vértice desta face, formado por dois lados. Se aqui (apontando para um dos vértices superiores) tem um vértice e aqui (apontando para o vértice superior da outra face adjacente à primeira) tem outro vértice, a que conclusão pode-se chegar então?

CLASSE: Então, aí em cima tem um vértice.

PESQ: Muito bem! Embora não tenhamos tampa, este canto é um vértice da caixa (apontando para as arestas superiores e para a altura relativa a este vértice.

Depois do nosso posicionamento todos pareceram convencidos de que a caixa tinha oito vértices, sendo que quatro deles (os que formavam a base) eram formados pelos encontros das arestas da base com a altura da caixa e quatro vértices superiores, formados pelos lados das faces laterais.

Quanto ao cálculo do perímetro, alguns alunos perceberam que poderiam calcular o perímetro somente de duas das faces laterais, sendo uma no comprimento e outra na largura e, depois, generalizar para as outras duas respectivas faces, já que, ambas tinham o mesmo perímetro. Outros calcularam os perímetros separadamente de cada uma das faces.

Embora não tivéssemos explorado o conceito de perímetro nas aulas do Projeto I, esse conceito pareceu, nesta atividade, familiar a todos possivelmente decorrente de estudos de anos anteriores.

Em relação ao cálculo da área de cada uma das faces, os alunos não apresentaram dificuldade. Para aqueles que fizeram o cálculo da área das faces laterais e da área da base da caixa na alternativa a, esse cálculo já estava pronto. Para os que fizeram
$160cm^2 - 4cm^2$, nesta etapa, fizeram os cálculos separadamente. Observamos ainda, que alguns alunos fizeram o cálculo da área de uma das faces e depois multiplicou esta área por dois. Fizeram o mesmo com a outra face e, em seguida o cálculo da área da base da caixa. Segue abaixo alguns resultados:

a) $14 + 14 + 2 = 30 cm = P_{F_1}$
$8 + 8 + 2 = 18 cm = P_{F_2}$
$8 + 8 + 14 + 14 = 44 cm = P_{F_3}$

e) base $\rightarrow P_b = 14 + 14 + 8 + 8 \cdot P_b = 44 cm$
$* P_{F1} = 14 + 14 + 1 + 1 = P_{F1} = 30 cm$
$* P_{F2} = (2 . 8) + (2 . 1) \rightarrow P_{F2} = 18 cm$

O volume foi outro conceito não explorado no Projeto I. Entretanto, os alunos parecem não ter apresentado dificuldade neste cálculo, no momento da atividade em grupo.

Este encontro encerrou com o cálculo do volume da “caixa A”, a partir da fórmula analítica do volume de um bloco retangular:

j) $V_c = 14 . 8 . 1 = V_c = 112 cm^3$

j) $V_c = 14 \cdot 8 \cdot 1 = V_c = 112 cm^3$

f) comp · altura · largura = volume
$14 \cdot 8 \cdot 1 = 112 cm^3$

A formalização dessa atividade foi realizada no 2º encontro.

7.2.2 - 2º Encontro

Havíamos previsto na elaboração do Projeto II, para o início deste encontro, uma revisão dos conceitos trabalhados no tópico Polinômios do Projeto I. Como não foi possível o desenvolvimento do Problema 3 e a formalização de conceitos e conteúdos trabalhados nos Problemas 1 e 2 do 1º encontro, iniciamos este 2º encontro com o Problema 3 e após a resolução deste, fizemos a formalização.

Problema 3

Para este problema foram distribuídas folhas de papel A_4 com o desenho do retângulo com medidas 16cm no comprimento e 10cm na largura.

a) Repetir todas as tarefas realizadas no Problema 2, só que, desta vez, cortem, nos cantos do retângulo inicial, quadrados de 2cm de lado. A caixa montada com este problema será chamada "caixa B".

b) De suas observações o que cada grupo pode falar sobre o acontecido com a área da base das caixas A e B, ao longo dos dois recortes feitos (Problema 2 → recorte de 1 cm e Problema 3 → recorte de 2 cm)?

Consideramos o Problema 3 como uma ação de fixação, pois nela os alunos iriam aplicar todas as etapas estudadas no Problema 2 do 1º encontro, só que, desta vez, cortando quadrados de lados 2cm nos cantos do retângulo. Para o recorte do quadrado de lado 2cm, todos os alunos tiveram êxito. A extensão desta atividade, solicitando dos alunos uma análise do que teria acontecido com a área da base das caixas A e B, ao longo dos dois recortes feitos, não apresentou nenhuma dificuldade. Acreditamos que, possivelmente, eles tenham se lembrado do que ocorreu no Projeto I. Ao questioná-los sobre o que haviam considerado, a professora-pesquisadora perguntou:

PESQ: JAN, seu grupo já fez as observações solicitadas no enunciado do Problema 3?

JAN: Claro, aumentando a altura ... diminuo a área da base e vice-versa.

Ainda, nesse encontro não exploramos o limite para a altura da caixa a partir do retângulo inicial.

O Problema 3 foi resolvido por todos os alunos. Abaixo apresentamos alguns resultados.

b) De suas observações o que cada grupo pode falar sobre o acontecido com a área da base das caixas A e B, ao long
recortes feitos (Atividade 2 → 1 cm e atividade 3 → 2 cm)?

COM O AUMENTO DA ALTURA A BASE DIMINUE VICE EVERSA

b) De suas observações o que cada grupo pode falar sobre o acontecido com a área da ba
recortes feitos (Atividade 2 → 1 cm e atividade 3 → 2 cm)?

quanto maior a altura, menor a área da base.

Ao fazermos a formalização dos conceitos trabalhados no 1º encontro (Problemas 1 e 2) e no 2º encontro (Problema 3), verificamos que, embora os alunos não tivessem apresentado dificuldade em calcular o volume solicitado nos problemas, ao questioná-los sobre o cálculo do mesmo, os alunos sempre se limitavam a dizer que: "Volume é igual a comprimento *vezes* largura *vezes* altura", sem se preocuparem em dizer que essa fórmula reflete o volume de um bloco retangular. Diante da repetição dessa fórmula para o cálculo do volume, resolvemos abrir uma discussão sobre o assunto, objetivando uma visualização geométrica do conceito de volume (nesta pesquisa referindo-se sempre ao volume de um bloco retangular). Sendo assim, resolvemos começar perguntando em que situação se poderia calcular o perímetro, já que este também foi um conceito não explorado no Projeto I, assim como o conceito de volume. Esperávamos, com essa discussão, que os alunos fossem organizando suas estruturas mentais em relação aos assuntos abordados até aqui. Com uma caixa em mãos, iniciamos a formalização:

PESQ: Apontando para as faces das caixas, figuras fechadas planas formadas por segmentos de reta, temos vértices e lados. Numa figura espacial − apontando para a caixa − temos: vértices, arestas e faces. Vamos escrever a definição de cada um desses conceitos:

Vértice: Ponto comum a dois lados de um polígono ou a três ou mais arestas de uma figura geométrica espacial.

Aresta: Linha comum que une duas faces de uma figura espacial.

Face: Certas figuras espaciais são delimitadas por polígonos. Esses polígonos são as faces dessas figuras.

A professora-pesquisadora continuou:

PESQ: Em que casos podemos calcular o perímetro?

ALE: Num quadrado..., num retângulo...

PESQ: Podemos calcular o perímetro dessa linha branca da lousa (referindo-se a uma linha que determinava a limitação entre a lousa e a parede)?

CLASSE: Não, isso aí é comprimento...

PESQ: Então, quando podemos medir perímetro?

JAN: Quando tem área. Quando tem mais de uma dimensão.

MAR: Qualquer figura que tenha área eu posso medir o perímetro.

PESQ: Podemos medir o perímetro daquele cubo (apontando para um cubo desenhado na lousa)?

JAN: Tem que ser bidimensional.

NIL: Tem que ser plana.

PESQ: Então, concluindo, podemos calcular o perímetro de uma figura fechada plana. No nosso caso estamos calculando o perímetro de polígonos – figuras fechadas planas formadas por segmentos de reta. Sendo assim, perímetro é a medida do contorno de uma dada superfície. E superfície é a parte externa de uma figura espacial, por exemplo, num cubo, temos a superfície formada por 6 quadrados.

Ainda, explorando o cubo desenhado na lousa, perguntamos aos alunos onde poderíamos, naquela figura (no caso o cubo desenhado na lousa), calcular o perímetro. A maioria deles respondeu que o perímetro seria calculado somente nas faces do cubo e completaram dizendo que, em relação ao cubo, calculariam o volume.

Para formalizar o conceito de área, abrimos uma discussão com os alunos:

PESQ: Bom, podemos calcular o perímetro de uma figura fechada plana (nesta pesquisa referindo-se sempre a polígonos). Quando podemos calcular a área?

JAN: Quando não tem volume.

GABI: Quando tem comprimento e largura.

NIL: É a mesma coisa do perímetro. Quando tem uma figura fechada e plana.

ALE: Quando temos duas dimensões.

MAN: É! Figuras fechadas de duas dimensões.

PESQ: E área? Como podemos definir área?

JAN: É a medida de uma superfície.

LEO: Da base *vezes* a altura.

CLASSE: É, o Jean tá certo. É a medida de uma superfície.

PESQ: Muito bem, então, concluindo com a definição de JAN, área é a medida de uma superfície.

Lançamos mais uma pergunta e deixamos a classe se manifestar tentando chegar à definição de volume:

PESQ: Em que situações podemos calcular volume?

JUL: É de três, de três dimensões. Tem que ter o comprimento, a largura e a altura. É o que tem dentro não é?

DAN: Volume é quanto tem dentro.

MAN: É o conteúdo.

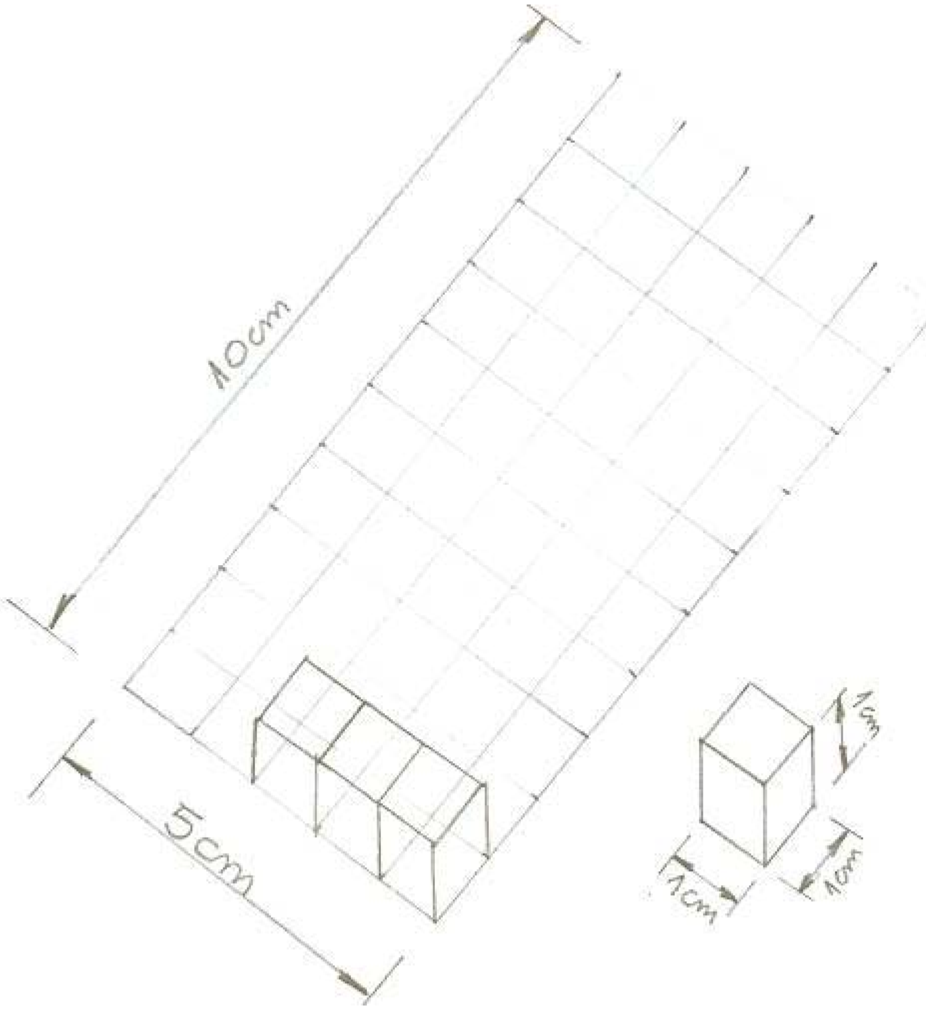
DAN: Se a área é a medida de uma superfície onde a gente multiplica duas dimensões, então o volume é três dimensões.

Neste momento houve a intermediação da professora-pesquisadora:

PESQ: Na área do retângulo, vocês falaram que multiplicamos o comprimento pela largura. E no volume, lembrando que temos um bloco retangular?

DAN e MAN: Comprimento *vezes* largura *vezes* altura.

Resolvemos fazer uma representação geométrica do conceito de volume, pois novamente, os alunos não haviam feito referência a unidades cúbicas ao falarem de volume. Ao desenharmos na lousa um retângulo com medidas 10cm no comprimento por 5cm na largura, quadriculamos essa superfície retangular em quadrados de 1cm de lado, assim, a unidade de medida da área selecionada para o retângulo seria $1cm^2$. Perguntamos qual seria a área daquela figura desenhada e todos souberam dizer que era $50cm^2$. Talvez estivessem fazendo referência ao comprimento *vezes* a largura em vez das unidades quadradas ali presentes. Continuando, levantamos sobre alguns desses quadrados de $1cm^2$ de área, num dos cantos, a altura 1cm, conforme ilustração abaixo:



Após termos feito o desenho acima, perguntamos aos alunos o que estávamos montando ali. Esperávamos que ao fazer essa ação sobre todos os quadrados de $1cm^2$ de área, teríamos a representação geométrica do bloco retangular desejando que não ficassem presos apenas a representação analítica da fórmula:

$V = c \cdot \lambda \cdot h$ ou $V = A_b \cdot h$.

Iniciamos mais um diálogo perguntando:

PESQ: O que eu desenhei por último?

CLASSE: A altura de 1cm.

PESQ: Como podemos então definir o volume desse bloco retangular, caso desenhássemos cubos de 1cm de altura sobre cada quadrado de $1cm^2$ de área?

CLASSE: Comprimento *vezes* largura *vezes* altura (sempre fazendo alusão a uma fórmula que lhes haviam apresentado).

Como não haviam, ainda, percebido na representação geométrica que o volume estava relacionado às unidades cúbicas que cabem em um sólido, chamamos novamente sua atenção:

PESQ: Vou fazer um novo desenho. Tentem enxergar, através do desenho, o volume do bloco retangular que estamos desenhando. Façam de conta que vocês não conhecem a fórmula que calcula o volume de um bloco retangular que diz que V = comprimento *vezes* largura *vezes* altura.

Fizemos um novo desenho. Desta vez de um retângulo medindo 4cm no comprimento por 2cm na largura e perguntamos:

PESQ: Qual é a área desse retângulo?

CLASSE: $8cm^2$.

PESQ: Como vocês fizeram para calcular a área?

CLASSE: Comprimento *vezes* largura.

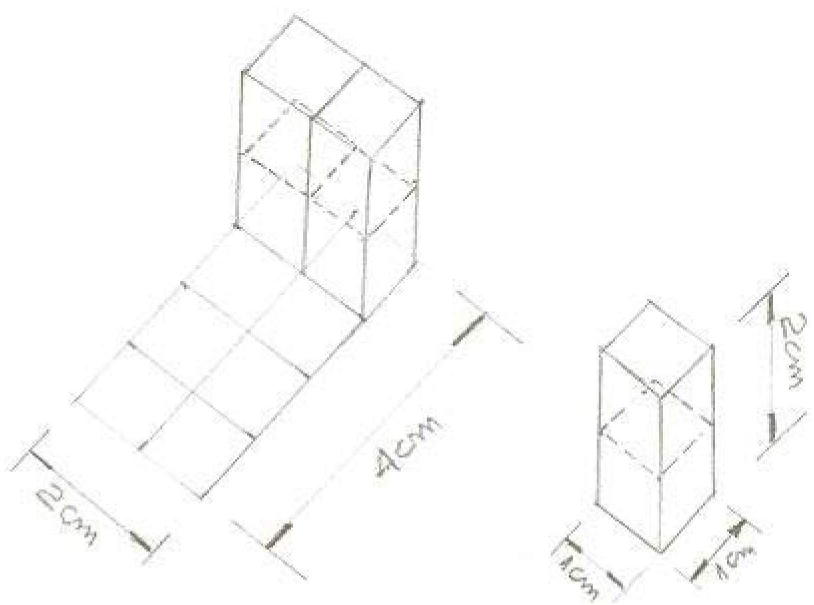
Percebemos na resposta acima que os alunos também não percebiam que a área era dada em função dos quadrados de $1cm^2$ de área, ou seja, para calcular a área, deveríamos traçar quadrados de $1cm^2$ de área e verificar quantos desses quadrados cobririam aquela superfície. Diante dessa situação, quadriculamos toda a superfície com 8 quadrados medindo $1cm^2$ de área e perguntamos:

PESQ: Vocês estão percebendo que a área é dada pela quantidade de unidades quadradas que cobrem uma superfície?

CLASSE: ...sim...

PESQ: Quando vocês começaram a trabalhar com o cálculo de área de superfícies, creio que no 5º ou 6º ano, era a partir de quadrados como esses, medindo $1cm^2$ de área, que calculavam a área. Depois de algum tempo trabalhando com desenhos, puderam generalizar e chegar à fórmula que se usa hoje, onde multiplica-se o comprimento pela largura. É preciso compreender que a área do retângulo indica quantas unidades quadradas cobrem aquela superfície. Sendo assim, já sabendo o que é a área e como representá-la geometricamente, vamos desenhar nesses quadrados uma altura 1cm, transformando-os em cubos de aresta 1cm.

Fomos desenhando em alguns quadrados de $1cm^2$ de área uma altura de 1cm. Desenhamos a altura em alguns casos e pedimos a eles que fossem acompanhando o desenho conosco. Para diferenciar do primeiro exemplo que demos, mudamos de idéia e resolvemos desenhar uma nova "camada" de cubos sobre aqueles já desenhados, dando à altura a medida de 2cm, em vez de 1cm, conforme ilustração abaixo:



Desenhamos somente uma parte de duas camadas de cubos, cada uma medindo 1cm de altura e continuamos o diálogo:

PESQ: Contem comigo quantos cubos caberão nesta superfície sem que tenhamos que preenchê-la totalmente.

CLASSE: 16 cubos.

PESQ: Temos então, 16 cubos. Cada um desses cubos tem quantos cm^3?

CLASSE: $1cm^3$.

PESQ: Se temos 16 cubos e cada um tem $1cm^3$, então, quantos cm^3 tem o bloco retangular, imaginando que o tivéssemos preenchido com todos os cubos de $1cm^3$?

CLASSE: $16cm^3$.

PESQ: O que isso representa para vocês?

CLASSE: Que aí dentro cabem 16 cubos de $1cm^3$ cada um.

PESQ: Temos 16 cubos de $1cm^3$ cada um, logo, o volume dessa caixa é de $16cm^3$, ou seja, cabem 16 cubos neste bloco retangular, onde cada um desses cubos mede $1cm^3$.

Demos um tempo para os alunos refletirem sobre a conclusão anterior e pedimos que fizessem:

PESQ: Façam uso da fórmula que conhecem: comprimento *vezes* largura *veze*s altura e verifiquem se o valor obtido é o mesmo.

Quando verificaram que a resposta era a mesma, tanto para a representação geométrica, quanto para a analítica, os alunos pareciam surpresos com a resposta obtida, pois começaram a dar sentido e significado à fórmula conhecida com justificativas geométricas.

Fizemos um novo desenho na lousa. Desta vez de um quadrado com medidas 5cm por 5cm e perguntamos:

PESQ: O que temos aqui?

CLASSE: Um quadrado.

PESQ: Podemos calcular o volume neste quadrado?

CLASSE: Não.

PESQ: E se tivéssemos que calcular o volume?

CLASSE: Tem que “puxar” a altura. Tem que levantar a altura.

LAR: É quantos centímetros cúbicos cabem dentro de um cubo. Entendi!

Formalizando a professora-pesquisadora concluiu dizendo que:

PESQ: Então, concluindo, volume é a quantidade de unidades cúbicas que cabem num sólido, por exemplo, num cubo, num bloco retangular e etc.

Dispensamos um tempo maior na formalização desta atividade, pois, como já mencionamos, não tratamos do conceito de volume no Projeto I e, ao verificarmos a dificuldade dos alunos em definir geometricamente o conceito de volume, achamos conveniente fazer uma discussão partindo da representação geométrica. Embora tenhamos trabalhado com o conceito de área no Projeto I, não nos demos conta, naquela ocasião, de verificar que os alunos estavam presos ao cálculo analítico da área e não à representação geométrica da mesma. Isso fez com que, neste Projeto II, explorássemos o conceito de volume geometricamente, partindo da representação geométrica do cálculo da área, abrangendo esses dois conceitos tão importantes na Matemática e que, muitas vezes, como verificamos neste projeto, passam despercebidos aos olhos dos alunos.

Toda a formalização foi registrada na lousa e os alunos tomaram nota.

Após a formalização do 1º encontro (Problemas 1 e 2) e do Problema 3 (do 2º encontro), demos início à revisão crítica.

Revisão dos conceitos trabalhados no tópico Polinômios do Projeto I

Fazer a revisão de conceitos trabalhados no tópico polinômios, do Projeto I, de acordo com a relação abaixo:

1.10 Constante
1.11 Monômio
1.12 Coeficiente e parte literal de um monômio
1.13 Grau de uma variável em um monômio
1.14 Grau de um monômio
1.15 Monômios semelhantes
1.16 Polinômios
1.17 Termos de um Polinômio
1.18 Polinômio reduzido
1.10 Grau de um Polinômio
1.11 Polinômio ordenado
1.12 Redução de termos semelhantes
1.13 Adição Algébrica de Polinômios
1.14 Multiplicação e Divisão de Polinômios

Esta etapa do trabalho foi chamada de revisão crítica, pois consideramos que os alunos iniciaram as discussões dentro do domínio do pensamento e do raciocínio já em um nível de desenvolvimento de habilidades de ordem superior. De acordo com Krulick & Rudnick (2001), essa é uma área que requer maior atenção por se tratar do pensamento crítico e do pensamento criativo, onde o aluno dispõe da habilidade em analisar uma situação e tirar conclusões apropriadas e corretas de dados obtidos, num estágio superior ao do raciocínio básico. Isso porque os temas discutidos nesta etapa do trabalho foram muito explorados no Projeto I, a partir de uma experiência pautada no ensino através da resolução de problemas, o que, a nosso ver, poderia fazer dessa revisão não só uma retomada de conceitos trabalhados mas, também, permitir-nos verificar se algum conceito não teria sido assimilado naquela situação de ensino e, ainda, discutir conceitos que se apresentassem como sendo novos.

Numa reunião Plenária, com todos os alunos juntos, iniciaríamos as discussões previstas para este encontro. As conclusões seriam tomadas pelos alunos, com nossa intervenção apenas quando necessária e, após o consenso, a professora-pesquisadora registraria na lousa, com o rigor matemático necessário, cada uma das conclusões.

Dentre os itens enfocados, chamaremos atenção para os conceitos de constante, monômio, grau de uma variável em um monômio, polinômios, termos de um polinômio e grau de um polinômio.

Quando questionados sobre o termo constante, alguns alunos sugeriram a escrita do monômio $2x$ na lousa e afirmaram que o número 2 seria a constante daquele monômio. Outros disseram que o número 2 era o coeficiente do monômio. Ao questioná-los sobre o porquê de o número 2 ser a constante, eles responderam:

CLASSE: É constante porque não varia. O dois é sempre dois. O x é a variável.

Ao definir monômio, percebemos, nos alunos, uma repetição na expressão "*monômio é um polinômio de um só termo*". Perguntamos qual o conceito de um monômio antes de caracterizá-lo como sendo um termo do Polinômio.

Nas gravações ouvimos uns sussurros antes de fazerem a colocação em Plenária:

LAR*:* É o coeficiente que depende da variável ????.

Como os alunos pareciam ver o monômio somente como um polinômio de um termo, solicitamos que dessem um exemplo. O grupo de NIL sugeriu:

NIL: 2.

PESQ: Como vocês sabem que o 2 é um monômio?

CLASSE: Porque ele está multiplicando o x^0.

PESQ: Ah, então ele está incompleto quando escrito sem o x^0?

CLASSE: Sim, tem que completar (querendo, possivelmente, dizer que deve estar subentendido).

PESQ: Vocês disseram que o número dois está multiplicando o x^0. Que conclusão podemos tomar com essa afirmativa, que partiu de vocês, em relação ao monômio?

DAN: Dois multiplicando um x.

ALE: O coeficiente está multiplicando a variável.

CLASSE: Uma constante e uma variável.

PESQ: Qual a relação entre a constante e a variável?

CLASSE: Elas estão multiplicando.

PESQ: Então, agora, sabendo dessa relação, como podemos melhor definir um Monômio.

A classe toda respondeu e o grupo de ALE completou:

ALE: Monômio é um Polinômio de um só termo, onde há uma constante multiplicando uma variável.

PESQ: Muito bem classe, mas com mais cuidado, podemos dizer que monômio é o produto de uma constante por uma potência da variável. Isso é um monômio! O que é produto?

CLASSE: É o resultado da multiplicação.

Quando apresentamos os monômios no Projeto I, mesmo tendo falado aos alunos que era o produto de uma constante por uma potência da variável, o que ficou para eles − embora eles soubessem o que é um monômio pois, como vimos, sugeriram escrever o x^0 multiplicando o número 2 − foi que monômio são os termos do polinômio. Estando agora numa revisão crítica, definir o monômio como sendo uma expressão algébrica constituída por um número, chamado coeficiente, que multiplica algumas letras, que são as variáveis, seria a definição esperada. Quando estávamos no Projeto I, nosso foco estava voltado à aprendizagem do conteúdo de polinômios num aspecto mais geral, sempre recorrendo à construção das caixas de papelão. O Projeto II permitiu-nos cuidar de algumas especificidades que, naquela ocasião, não demos todo o enfoque necessário.

Quando questionados sobre o grau de uma variável em um monômio, os alunos disseram que:

CLASSE: Grau é..... por quanto a variável tá elevada, não é?

PESQ: É o grau da variável em um Monômio que eu estou perguntando.

MAR: Se você tiver 2 (referindo-se a $2x^0$), o grau é zero. Se você tiver $3x^2$, o grau é dois e se você tiver $3x^3$, o grau é três. Cada um desses tem um nome: Monômio, Binômio e Trinômio.

Quando MAR terminou de falar, os demais colegas disseram

CLASSE: Está errado!

PESQ: Porque está errado? Quando temos monômio e quando temos binômios?

NIL: Por exemplo, um binômio pode ser $3x^2 + 2$.

PESQ: A NIL falou $3x^2 + 2$ e disse que este é um binômio. MAR falou que x^2 é um binômio. Temos duas posições diferentes. Quando temos um monômio e quando temos um binômio?

LÉO: O que a “MAR” falou tá errado. Quando é x^2, é um monômio de grau dois.

PESQ: Esse exemplo que NIL nos deu $3x^2 + 2$, como podemos chamá-lo?

CLASSE: Um binômio!

NIL: O que eu falei é um binômio de dois termos diferentes e de grau dois.

Já que os próprios alunos haviam conseguido dar exemplos de monômios e binômios, passamos rapidamente aos conceitos de grau de monômio e de polinômios.

Até esse momento os alunos não haviam conseguido conceituar corretamente grau de monômio e grau de polinômio. No Projeto I, quando trabalhamos, com as caixas, somente polinômios com uma variável, os alunos tiveram condições de definir o grau do polinômio. Por exemplo, $P(x) = 4x^2 - 52x + 160$ é um polinômio de grau 2. Para eles, o grau do polinômio era definido pelo grau da variável de maior expoente do monômio. A título de curiosidade falamos que, no caso de um polinômio com mais de uma variável, por exemplo: $Q(x) = 3x^3y + 2x^2y^2 + 5xy + 4y^7$, o 1º monômio tem grau 4, o 2º monômio tem grau 4, o 3º monômio tem grau 2 e o 4º monômio tem grau 7. Logo o grau desse polinômio é 7. Concluindo, a professora-pesquisadora disse:

PESQ: Então, o grau de um polinômio é dado pelo grau do monômio de mais alto grau.

Quando questionados sobre polinômios, os alunos se manifestaram dizendo:

NIL: É um monte de monômios....

CLASSE: Não! É um monte de monômios somando.

LEO: É aquele que tem mais de quatro termos...

ALE: É a soma de quatro termos ou mais...

A professora-pesquisadora fez uma intervenção:

PESQ: Somente na adição?

CLASSE: Não, na subtração também.

PESQ: Fica melhor quando dizemos que é uma soma algébrica. Dizendo que é uma soma algébrica, vale para a adição e para a subtração.

ALE: É a soma de quatro termos ou mais...

PESQ: Mas os que têm menos de quatro termos não são polinômios?

CLASSE: São, mas quando têm mais de três termos, não têm nome próprio como têm os monômios, os binômios e os trinômios.

PESQ: Porque soma algébrica?

CLASSE: Porque tem álgebra... tem variável... tem x, y....

PESQ: Então, vamos definir polinômio.

CLASSE: É uma soma algébrica ......

Ficaram um tempo em silêncio e completaram:

CLASSE: ...de um ou mais monômios ...

Novamente pensaram e concluíram:

CLASSE: ...termos. É uma soma algébrica de um ou mais termos.

PESQ: O que vocês sabem sobre termos de um Polinômio?

JAN: É uma parte do polinômio.

PESQ: Isso JAN! São as partes do polinômio, isto é: os monômios. O que você chama de partes ou termos são os monômios. São os monômios que compõem o polinômio.

Novamente, ao abrirmos a discussão sobre o grau de um Polinômio, percebemos que alguns alunos não tinham ainda condições de definir o grau de um polinômio. Chegamos a essa conclusão depois dos exemplos que eles nos deram:

NIL: $7x^4$ tem o maior expoente no polinômio $7x^4 + 2x^3 + 2x$. Assim, esse polinômio tem grau 4 (utilizando apenas polinômio de uma só variável).

Depois, fizemos uma intervenção dando um outro exemplo. Escrevemos na lousa o polinômio $4x^4y^2 + 3xy$ e falamos que este é um polinômio nas variáveis x e y, indicado por $P(x,y)$. Dissemos que, para definir o grau de <u>um polinômio</u> com mais de uma variável, somam-se os expoentes das variáveis de cada monômio e o grau do polinômio será o grau do monômio de mais alto grau. No caso do exemplo dado, o grau do polinômio é 6, dado pela soma dos expoentes do primeiro monômio 4 + 2 = 6.

Quanto aos demais assuntos abordados na revisão crítica, chamamos atenção para a comparação multiplicativa entre duas grandezas, <u>*a razão*</u>, quando compararam as áreas das bases das caixas.

Naquela ocasião (Projeto I), ao visualizar em $\frac{A_1}{A_2}$, os alunos entenderam essa notação barra-fracionária como sendo a divisão do polinômio A_1 pelo polinômio A_2 (polinômios referentes às áreas das bases das caixas 1 e 2). Nessa revisão crítica reforçamos o conceito de <u>*razão*</u>. Essa forma como os alunos compreenderam a expressão $\frac{A_1}{A_2}$, como uma divisão, não está correta. O que eles queriam expressar, na verdade, era quantas vezes a área da base da “caixa 2” cabia na área da base da “caixa 1”.

Assim, considerando as grandezas área da base da “caixa 2” e área da base da “caixa 1” que, como grandezas, podem ser medidas, e a comparação entre elas é multiplicativa pois, multiplicando ou dividindo o número que mede a área da base da “caixa 2” e multiplicando ou dividindo o número que mede a área da base da “caixa 1”, por um mesmo número, a razão, uma comparação multiplicativa entre duas grandezas, não muda. Como exemplo, pudemos ver que se a medida da área da base da “caixa 2” é $16cm^2$ e a medida da área da base da caixa

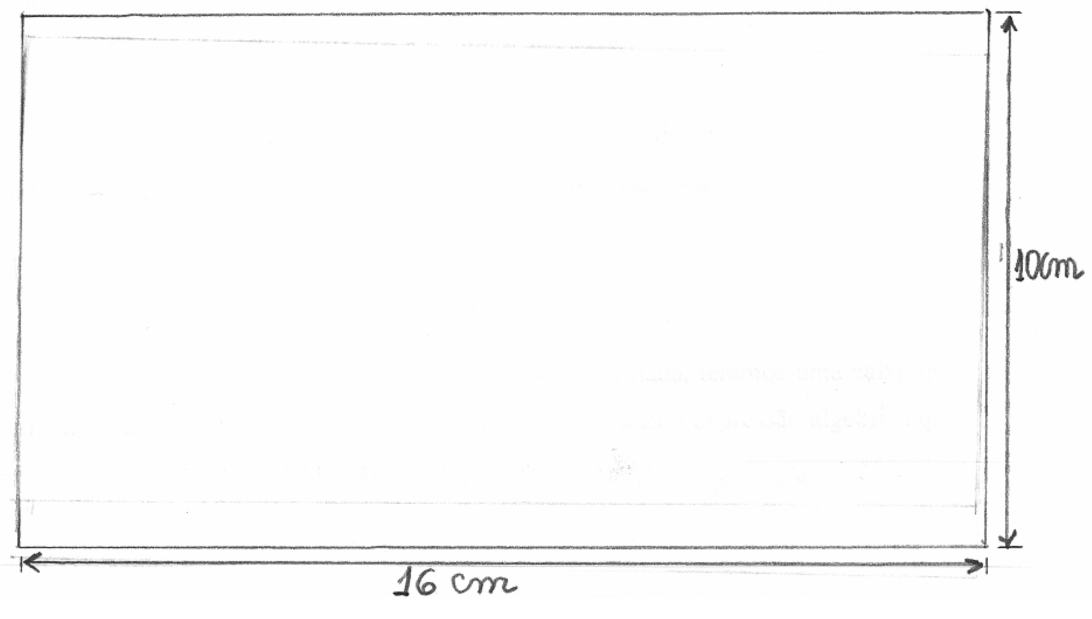
1 é $112cm^2$, então, a razão entre essas medidas é $\frac{112cm^2}{16cm^2} = \frac{7}{1}$, dizendo, portanto, que a área da base da "caixa 2" cabe 7 vezes na área da base da "caixa 1". Se dobrássemos as áreas das bases das caixas 1 e 2 teríamos $\frac{224cm^2}{32cm^2} = \frac{7}{1}$ mantendo-se a *razão*.

7.2.3 - 3º encontro

Foi entregue aos grupos, o Problema 4 e foi dado um tempo para sua resolução.

Problema 4

Abaixo temos o retângulo com as seguintes medidas: 16cm de comprimento e 14cm de largura.



e) Se fossem cortados quadrados de lado x cm, repetindo as ações feitas nos Problemas 2 e 3, forma-se a "caixa C". Apresente a expressão: do perímetro (P) da base da caixa C; da área (A) da base da caixa C; e do volume (V) da caixa C.

f) Analise as dimensões das três caixas “construídas” (A, B e C).
g) Há alguma limitação para a altura?
h) E no caso de h = 0 e h = 5, como ficaria a forma da caixa, lembrando que o retângulo tem medidas: 16cm no comprimento e 10 cm na largura?

Esta atividade, assim como as demais, foi realizada pelos grupos e depois discutida em Plenária. Assim, como foi feito no Projeto I, esperávamos que os alunos pudessem generalizar a construção de uma caixa, depois de terem trabalhado nos Problemas 2 e 3, de modo a perceberem a altura como sendo a variável na situação problema. Esta altura, como foi explorada no Projeto I, poderia sofrer uma variação, num intervalo definido, a partir de um retângulo dado e, começavam a surgir os primeiros polinômios. Desta vez, não somente os polinômios que indicavam as áreas das bases das caixas trabalhadas, mas, também, os polinômios que indicavam o perímetro das bases e o volume dessas caixas.

Os grupos trabalharam com o Problema 4 sem apresentar dificuldade, lembrando-se do trabalho feito no Projeto I. Ao receberem a folha com o problema, já sabiam que iriam trabalhar com uma caixa de altura x, o que não havia acontecido no Projeto I.

Ao abrirmos a Plenária, iniciamos a seguinte discussão:

PESQ: O comprimento do retângulo é 16cm. “Cortando-se”, nos quatro cantos, quadrados de lado x, como ficou agora o comprimento dessa nova figura?

CLASSE: $16 - 2x$.

PESQ: E como ficou a largura?

CLASSE: $10 - 2x$

PESQ: Se dobrarmos as “abas” dessa nova figura formada, teremos uma caixa que chamamos de “caixa C”. Observando essa caixa, como ficou a expressão algébrica que representa a área da base da “caixa C”?

GAB: É $(10 - 2x).(16 - 2x)$

PESQ: Muito bem!

As perguntas acima mostram que os alunos, quando trabalharam em seus grupos, conseguiram chegar às expressões algébricas esperadas sem a necessidade de nossa intervenção. Eles se mostraram seguros do que faziam, embora não tivessem expressado oralmente a unidade de medida do comprimento e da largura em centímetros.

Perguntamos à sala se poderíamos calcular o perímetro da caixa.

CLASSE: Não! Podemos calcular o perímetro da base da caixa e o perímetro das faces laterais.

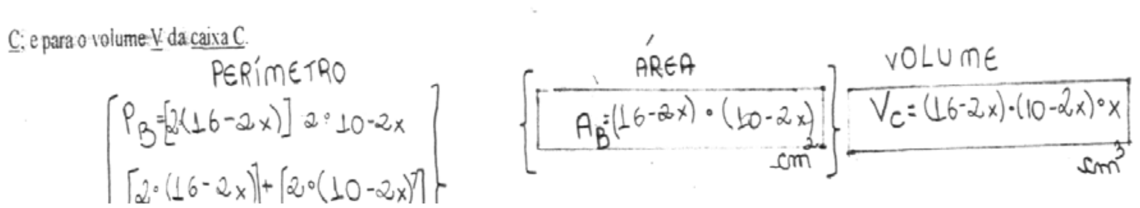
Como podemos verificar, os alunos já dispunham de um vocabulário mais específico, permitindo uma resposta mais madura em relação às perguntas que íamos fazendo, referindo-se às faces da caixa.

Perguntamos, aos alunos, se o problema tratava do volume da base da caixa, ou do volume da caixa. Essa pergunta foi feita com a finalidade de verificar se os alunos, atentos, haviam percebido que os cálculos de área e perímetro estavam relacionados à base da caixa e que o cálculo de volume referia-se ao volume da caixa:

CLASSE: Não! Vamos achar o volume da caixa.

Como já havíamos explorado o conceito de volume no 2º encontro, essa situação pareceu familiar a todos.

Com relação às solicitações da alternativa a, em relação à apresentação de expressões algébricas para o perímetro da base da caixa, para a área da base da caixa e para o volume, os alunos fizeram:



Observando o Perímetro, podemos dizer que, possivelmente tenham escrito inicialmente a medida de dois lados e dos outros dois lados, isoladamente. No trabalho em grupo, corrigiram fazendo a adição das medidas desses quatro lados.

Quanto à análise das dimensões das três caixas construídas, apresentamos alguns resultados feitos pelos grupos:

b)

	c	l	h
caixa A	14cm	8cm	1cm
caixa B	12cm	6cm	2cm
caixa C	(16 - 2x)	(10 - 2x)	(x) cm

b)

	c	l	h
caixa A	14 cm	8 cm	1 cm
caixa B	12 cm	6 cm	2 cm
caixa C	16-2x cm	10-2x cm	x cm

Na atividade seguinte, os alunos iriam identificar as limitações para a altura da "caixa C". Neste caso, eles fizeram:

c) Sim, a altura da caixa deve ser menor que a metade do menor lado da base da caixa e maior que zero, para termos uma terceira dimensão.

A finalização desta atividade, como dissemos anteriormente, pedia aos alunos que verificassem, no caso de h = 0 cm e h = 5 cm, como ficaria a forma da caixa, lembrando que o retângulo original tem medidas 16 cm no comprimento e 10 cm na largura. Essa análise foi realizada por todos os grupos, pois todos já sabiam que para h = 0cm teríamos a área do retângulo, não tendo caixa portanto. Para h= 5cm, não teríamos caixa também, uma vez que a altura tomaria toda a largura do retângulo inicial. Apresentamos a seguir algumas dessas análises:

d) Ela ficará plana, pois com altura 0, ela não se modificará, e com h=5, ela se dobrará, de forma que os dois lados se sobreponham, e fique plano novamente.

Até agora vínhamos, trabalhando dentro dos campos numéricos N e Q, isto é, Naturais e Racionais, os valores possíveis para a altura da "caixa C". Para a próxima atividade (Problema 5), fixando os conceitos trabalhados no Problema 4, deste encontro, mais uma vez lançaremos mão do concreto para compreender a variação das bases das caixas construídas com as diferentes alturas. No Projeto I, quando perguntamos o que aconteceria com a caixa se cortássemos uma altura de 5cm, os alunos não fizeram esses recortes. Manipularam a "caixa teste" e chegaram à conclusão de que não haveria caixa. Neste Projeto II, solicitaremos o recorte da altura h = 5cm, pois acreditamos que esse recorte permitirá, aos alunos, enxergarem que não será possível calcular o perímetro da base da caixa, uma vez que não haverá caixa. É claro que essa conclusão poderá ser automática (partindo da experiência com a "caixa A"). Mas imaginamos que, alguns alunos, talvez por distração, poderão substituir a altura h = 5cm na fórmula do perímetro, P = 52 – 8x, chegando num valor P = 12cm, o que não estará correto, já que, para calcular o perímetro é necessário que haja uma figura fechada plana. Neste caso, o recorte feito para h = 5cm, permitirá uma análise concreta da situação.

Problema 5 - Fixando conceitos trabalhados no Problema 4.

Entregar aos grupos uma folha de papel A_4 com o desenho de um retângulo de dimensões c = 16 cm e λ = 10 cm somente para a realização da alternativa a.

Pede-se para:

e) construir uma caixa com altura h, tomando um valor h qualquer. Sugere-se tomar $h \neq$ 0 cm e $h \neq$ 5 cm.

f) entregar aos grupos duas folhas de papel A_4 com a figura de um retângulo, medindo $c = 16$ cm e $\lambda = 10$ cm, a fim de verificar em cada folha, nessas construções, a limitação para $h = 0$ cm e $h = 5$ cm.

g) reconhecer que, com as medidas $h = 0$ cm e $h = 5$ cm, as grandezas perímetro, área e volume dadas por suas fórmulas, isto é, dadas por relações entre grandezas, achar o perímetro da base, a área da base e o volume da "caixa C".

h) A partir do que foi obtido na questão c, construir uma tabela[19] e um gráfico da área da base da caixa em função da altura e do volume da caixa em função da altura.

A tabela abaixo foi entregue após a realização da alternativa c.

Preencha a tabela abaixo com base no trabalho realizado a partir do retângulo medindo 16 cm no comprimento e 10 cm na largura.

Altura (cm)	Área da base da caixa	Perímetro da base da caixa	Volume da caixa
1			
2			
$0 < x < 5$			
0			
5			

A alternativa a solicitava a construção de uma caixa com altura qualquer, escolhida pelos alunos, no intervalo $0<x<5$. Todos fizeram esse trabalho sem apresentar dificuldade. Verificamos que alguns grupos usaram alturas envolvendo números decimais, outros usaram apenas números naturais.

Ao ler, na alternativa b, a solicitação do recorte da altura $h = 5$cm, os alunos não queriam fazê-lo, pois alegaram que não formariam uma caixa. Logo não seria preciso recortá-la, como podemos ver no discurso de JAN:

JAN: Não vai ter base. Vai ficar uma figura assim, ó!

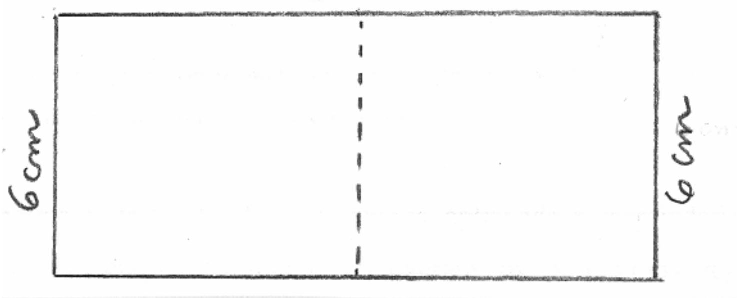
[19] Essa tabela foi entregue aos alunos ao terminarem as alternativas anteriores. Tomamos essa medida, para ganhar tempo.

Ao dizer isso, JAN, tomando o retângulo em mãos juntava os lados da folha, batendo um lado no outro, dizendo:

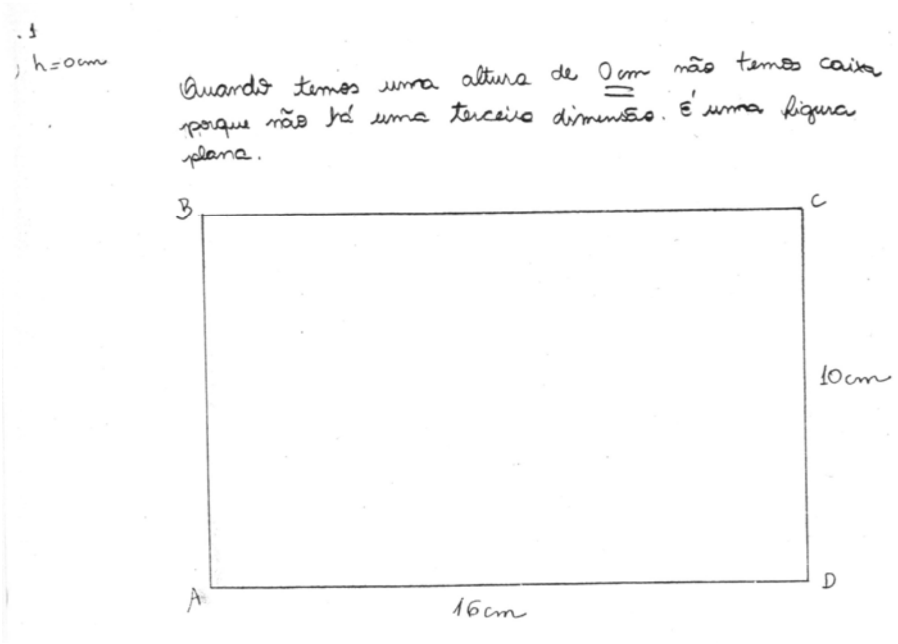
JAN: Já sei o que vai dar! Preciso recortar, se eu já sei o que vai dar?

Essa observação de JAN nos permitiu considerar dois posicionamentos: 1) que ele poderia estar se lembrando do que havia feito no Projeto I e, 2) que ele já sabia o que iria acontecer, certamente em função da atividade desenvolvida com a manipulação da "caixa A".

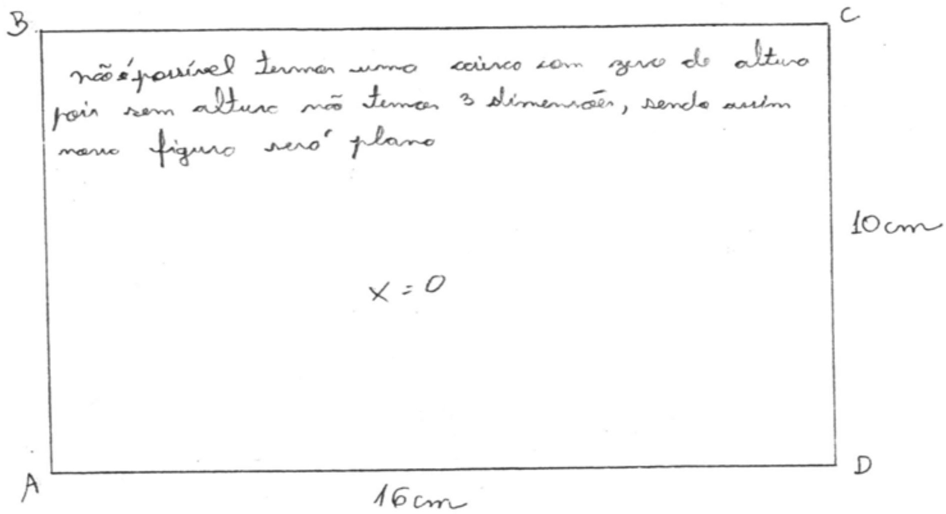
Ainda assim, pedimos que recortassem a altura h = 5cm, porque esse recorte poderia auxiliar a discussão futura sobre o perímetro da base da caixa, chegando a um recorte com uma só dimensão: o comprimento; uma vez que a altura *h* = 5cm tomava toda a largura do retângulo inicial, conforme o desenho abaixo:



Ainda, na alternativa b desta atividade, foi solicitado aos alunos que verificassem, em cada uma das folhas que haviam recebido (nelas contendo o desenho de um retângulo com medidas 16cm no comprimento e 10cm na largura), a limitação para
h = 0 cm e *h* = 5 cm. Nesses casos os alunos escreveram, em relação a *h* = 0cm:

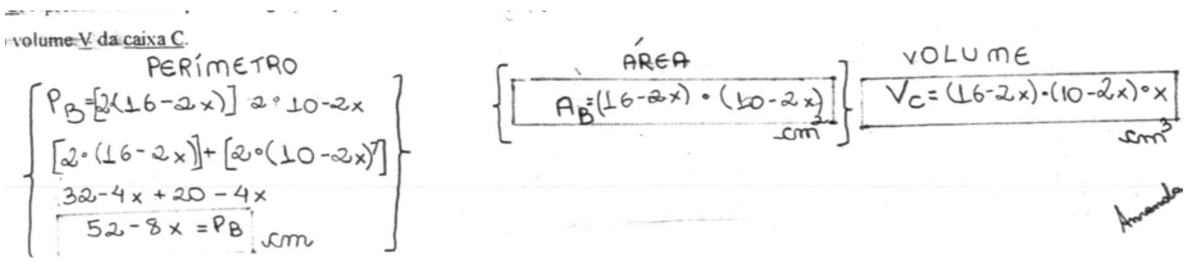


Resultado de outro grupo:



O grupo escreveu: **Não é possível termos uma caixa com zero de altura, pois sem altura não temos três dimensões, sendo assim a nova figura será plana.**

Na alternativa c, desta atividade, os alunos, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, escreveram os polinômios representantes do perímetro da base da “caixa C”, da área da base da “caixa C” e do volume da “caixa C”. Convém lembrar que a alternativa a, do Problema 4 solicitou aos alunos a escrita de uma expressão algébrica para o perímetro da base da “caixa C”, para a área da base da “caixa C” e para o volume da “caixa C”. Naquela atividade, alguns alunos não só apresentaram a expressão algébrica como também, já aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, escreveram os polinômios resultantes em cada caso. Sendo assim, neste Problema 5, o que fizeram, foi somente copiar os polinômios, como podemos verificar nos resultados de dois grupos:



volume V da caixa C.

PERÍMETRO

$P_B = [2(16-2x)]\ 2\cdot 10-2x$

$[2\cdot(16-2x)] + [2\cdot(10-2x)]$

$32-4x+20-4x$

$\boxed{52-8x = P_B}$ cm

ÁREA

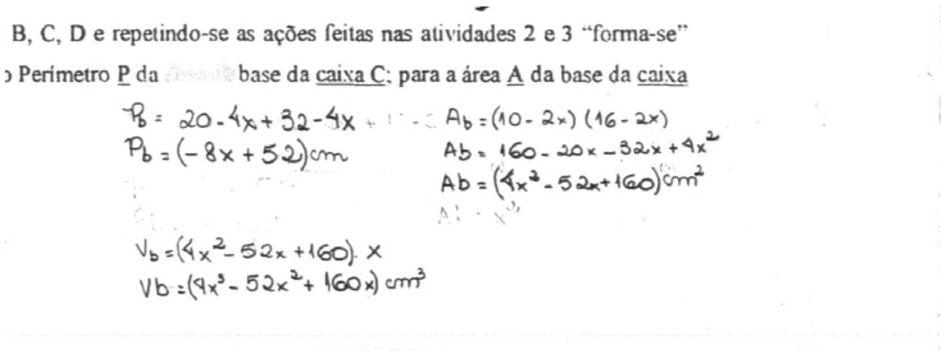
$\boxed{A_B = (16-2x)\cdot(10-2x)}$ cm

VOLUME

$\boxed{V_C = (16-2x)\cdot(10-2x)\cdot x}$ cm^3

Amanda

Este outro grupo já trabalhou de modo diferente:



B, C, D e repetindo-se as ações feitas nas atividades 2 e 3 "forma-se"

Perímetro P da base da caixa C; para a área A da base da caixa

$P_b = 20-4x+32-4x$

$P_b = (-8x+52)$cm

$A_b = (10-2x)(16-2x)$

$A_b = 160-20x-32x+4x^2$

$A_b = (4x^2-52x+160)cm^2$

$V_b = (4x^2-52x+160)\cdot x$

$V_b = (4x^3-52x^2+160x)\ cm^3$

As conclusões dos alunos sobre a limitação para h = 0 cm e *h* = 5 cm, foram registradas na tabela, presente na folha de atividade que lhes foi entregue, que apresentaremos mais adiante. Na tabela que propomos, não apresentamos as unidades de medidas de área, perímetro e volume. Era esperado que, depois do trabalho realizado, os alunos preenchessem esses campos.

Ao discutirmos em Plenária o valor do perímetro da base da caixa para *h* = 5cm, verificamos que alguns alunos, usando a fórmula para o perímetro da base da caixa, P = 52 – 8*x*, haviam considerado esse perímetro como sendo 12cm. Essa situação foi imediatamente contestada por outros colegas que, de posse do recorte obtido para *h* = 5cm, disseram: *"...olha aqui, não forma uma figura isso! Não pode calcular o perímetro da base. Você não tem base..."*.

Aproveitando a colocação desses alunos, retomamos:

PESQ: Quando é possível calcular o perímetro de uma figura?

CLASSE: Quando tem uma figura fechada plana.

PESQ: Até agora vínhamos considerando o perímetro da base da caixa e a área da base da caixa. Porque, neste caso, o perímetro da base da caixa não poderia ser 12cm?

CLASSE: Porque não tem base.

PESQ: Quando dobramos, formamos embaixo uma figura fechada plana?

CLASSE: Não, ficou só uma linha.

PESQ: Então, tendo somente uma "linha", não é possível calcular o perímetro, pois o que sobrou foram dois segmentos de reta coincidentes, que têm todos os pontos comuns.

A discussão entre alunos registrada na página 203 *"...perímetro da base da caixa..."* permitiria, de imediato, perceber que não tendo base, não teria caixa, logo, não teria perímetro. Mas, não foi o que ocorreu. Para chegarem, erroneamente, ao perímetro
P = 12cm, esses alunos, fizeram uma substituição da variável x, na fórmula analítica do perímetro: P = 52 – 8x, sem uma prévia análise de que, com a altura h = 5cm, não haveria caixa, não haveria base e então, não haveria o perímetro da base. A maioria dos alunos já havia observado essa última colocação, o que era esperado a partir do trabalho desenvolvido com as caixas.

Entretanto, para aqueles que haviam encontrado, erroneamente, o perímetro
P = 12cm, o recorte que apresentamos na página 201, com h = 5cm, auxiliou na sua compreensão.

Esses mesmos alunos também erraram no cálculo do perímetro da base da caixa com altura h = 0cm, sendo necessária uma ampla discussão em plenária para se chegar a um consenso. Neste caso, haviam encontrado, erroneamente, o perímetro P = 52cm, pois substituíram a variável x, da fórmula analítica P = 52 – 8x, por 0cm, resultando 52cm. Neste caso, quando h = 0cm, o perímetro que existia, e isso foi discutido também em plenária, era o perímetro do retângulo e não o perímetro da base da caixa já que, para h = 0cm, não havia caixa e sim uma figura plana, o retângulo inicial.

A riqueza das discussões conseguidas com a manipulação do material recortado e o posicionamento daqueles alunos que haviam percebido que, para o cálculo do perímetro, era necessário haver uma figura fechada plana, neste caso, a base da caixa, possibilitou momentos de discussão e aprendizado que envolveram todos os alunos.

De experiências anteriores em sala de aula, casos como o dos alunos que tomaram o perímetro como sendo 12cm, mostraram-nos muitas vezes que os alunos simplesmente buscam o valor da incógnita ao substituir, nas equações, letras por números, como no caso deste problema a variável x da igualdade $P = 52 - 8x$, foi substituída sem ao menos avaliarem suas condições, encontrando, muitas vezes, valores absurdos e tomando esses valores como verdadeiros.

A seguir, alguns dos resultados dos grupos, após a discussão em plenária.

Preencha a tabela abaixo com base no trabalho realizado a partir do retângulo medindo 16 cm no comprimento e 10 cm na largura.

Alturas (cm)	Área da Base da Caixa	Perímetro da Área da Base da Caixa	Volume da Caixa
1	112 cm^2	44 cm	112 cm^3
2	72 cm^2	36 cm	144 cm^3
$0<x<5$ (3)	40 cm^2	28 cm	120 cm^3
0	0 cm	0 cm	0 cm^3
5	0 cm^2	0 cm	0 cm^3
4	16 cm^2		

Atenção: quando a altura for 5, o perímetro não existe.

Outro resultado de um dos grupos:

Alturas (cm)	Área da Base da Caixa	Perímetro da Área da Base da Caixa	Volume da Caixa
1	112 cm^2	52 cm	112 cm^3
2	72 cm^2	36 cm	144 cm^3
$0 \leq x \leq 5$	58,6 cm^2	18,4 cm	238 cm^3
0	160 cm^2	62 cm	0 cm^3
5	0 cm^2		30 cm^3

Atenção: como não tem área, não tem duas dimensões.

Não foi possível, neste encontro, fazer a construção dos gráficos. Dessa forma, esse trabalho, seguido da formalização dos conceitos e conteúdos construídos, passaram para o encontro seguinte.

7.2.4 - 4º Encontro - Formalização dos conteúdos do 3º encontro e exploração do conceito de Função.

Neste encontro, os alunos já estavam com a tabela do Problema 5 preenchida.

Recordando sobre o que trabalharam nas páginas 202 e 203, pudemos escrever, para a altura igual a $x$cm, na caixa de comprimento $(16 - 2x)$ e largura $(10 - 2x)$:

$P_b(x) = 2(16 - 2x) + 2(10 - 2x) = 52 - 8x$;

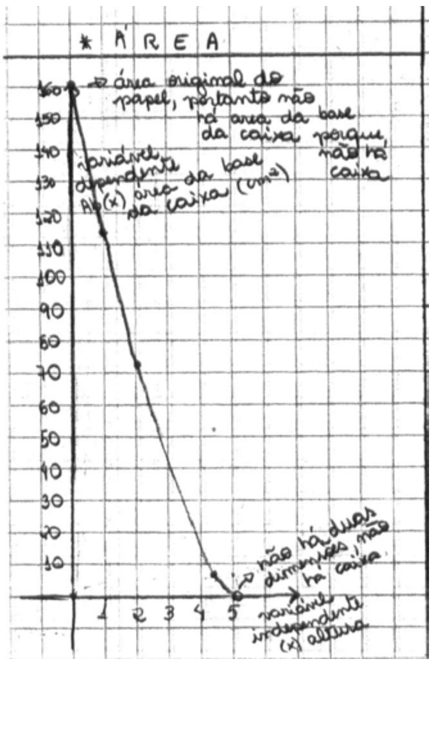
$A_b(x) = (16 - 2x) . (10 - 2x) = 4x^2 - 52x + 160$;

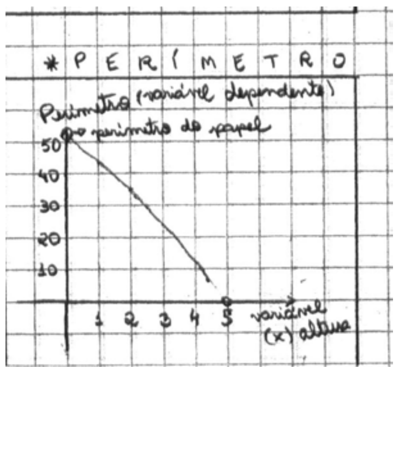
$V_c(x) = (4x^2 - 52x + 160) . (x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$;

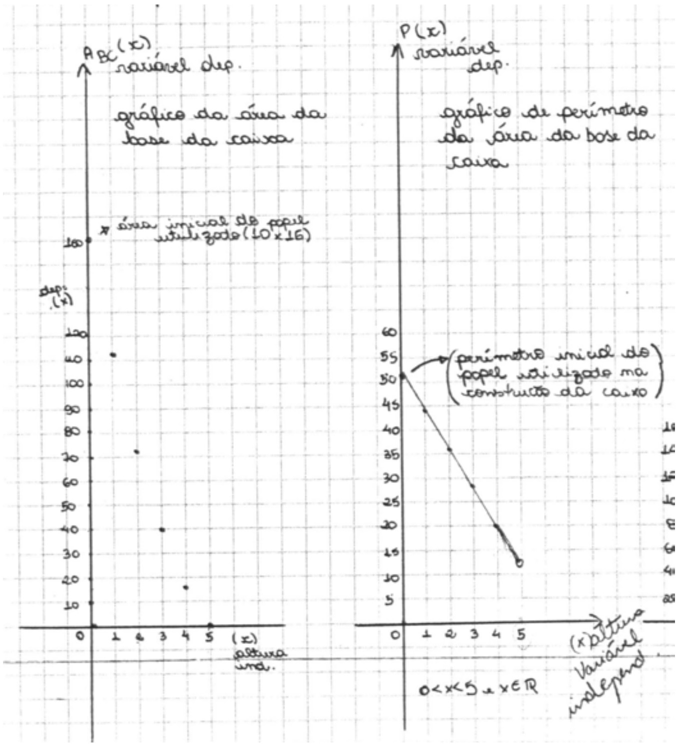
quando $0\text{cm} < x < 5\text{cm}$.

Desta forma, a aula foi iniciada com a construção dos gráficos do perímetro da base da caixa, da área da base da caixa e do volume da caixa, todos na dependência do valor escolhido para a altura x, como funções da altura.

Estando no final do 9° ano (antiga 8ª série), os alunos já haviam trabalhado equações de 1º e 2º graus e seus gráficos, representados por retas ou parábolas. Por isso, os gráficos da área da base da caixa e do perímetro da base da caixa, ambos em função da altura, foram realizados por todos os alunos. Quando abrimos a discussão em Plenária, verificamos que os resultados estavam bons, conforme podemos verificar no trabalho de dois grupos:





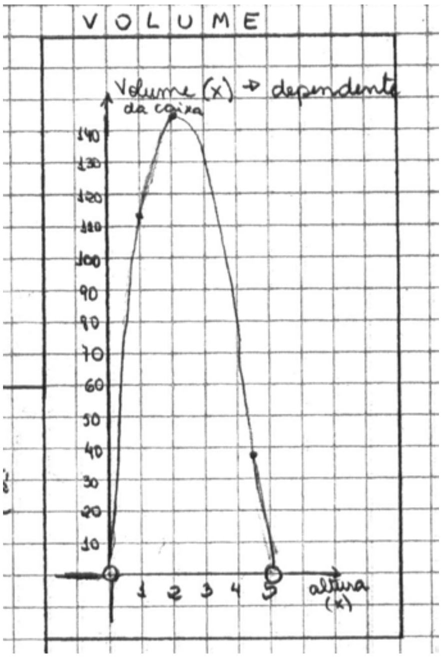


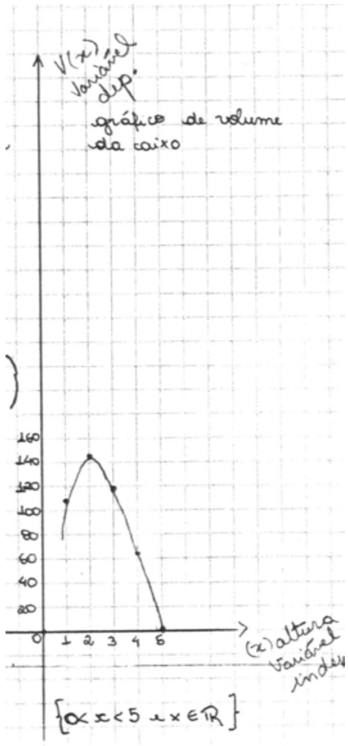
Ao construir o gráfico do volume, foi necessária nossa intervenção.

Por se tratar de uma equação de 3º grau, no caso do volume, embora não fosse nossa intenção estender esse assunto, com alunos dessa faixa etária, achamos conveniente falar que o gráfico dessa equação é diferente do gráfico de uma equação do 1º grau, uma reta, ou do gráfico de uma equação do 2º grau, uma parábola.

Fizemos essa colocação porque, embora os alunos pudessem não ter atentado para esse fato, não falar nesse assunto poderia lhes causar a impressão de que, em se tratando de gráficos, sempre poderiam ter parábolas ou retas. Nossa fala limitou-se em dizer que o gráfico dessa função, $4x^3 - 52x^2 + 160x$, corta o eixo x em três pontos, mas que, no nosso caso, só estávamos interessados pelos valores de x pertencentes ao intervalo
$0< x <5$. Como trabalhamos com caixas, os valores $x = 0$ e $x = 5$ não permitiam construir uma caixa. Assim os valores negativos de x não nos interessavam, assim como os valores maiores do que cinco. Ou seja, lhes dissemos que o esboço desse gráfico no intervalo (0,5), nos dá a *falsa impressão* de uma parábola. Mas não é! Em nosso desenho, sem muito rigor e em desenho livre, fizemos na lousa o esboço de como seria esse gráfico considerando as três raízes de sua equação. Assim, só teríamos interesse na parte do gráfico dessa função, para $0< x <5$, apesar de $x = 8$ ser também uma sua raiz.

Após nossa intervenção, os alunos puderam fazer os gráficos a seguir:





Gráficos realizados por dois grupos - As anotações sobre variáveis dependentes e independentes foram feitas, pelos grupos, somente depois de discutirmos o conceito de função.

Na 8ª série, os alunos trabalharam sobre um novo conjunto numérico, o que não ocorrera quando estavam na 7ª série: os números irracionais.

Já escrevemos neste trabalho de pesquisa, que a reta racional numérica é densa, mas não é completa. Quando é feita a união do conjunto Q, dos números racionais, com o conjunto I, dos números irracionais, a reta torna-se completa, isto é,

Q U I = R, o conjunto dos números reais. A reta real numerada é completa, é fechada.

Qualquer subconjunto da reta real é chamado um conjunto linear. Entre os conjuntos lineares são importantes os intervalos de pontos reais.

$[a,b] = \{x \in R /\ a \leq x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in R /\ a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in R /\ a < x \leq b\}$

$(a,b) = \{x \in R /\ a < x < b\}$

Se observarmos os três gráficos feitos pelos alunos, veremos que as raízes 0 e 5 dessas funções foram marcadas com um pequeno círculo vazio, determinando um intervalo aberto, isto é, dizendo que a função não é definida nesses pontos. Chamamos a atenção para uma notação que diz quando determinados pontos não pertencem ao domínio de uma função. Aproveitando o fato de que esses alunos estavam mais maduros, falamos sobre intervalos abertos e fechados, dizendo que, no intervalo

$0< x <5$, o zero e o cinco foram excluídos, pois nosso trabalho tratava da construção de caixas. Vínhamos, até esse momento, usando apenas a representação algébrica onde, para o domínio da função, escrevemos: $\{x \in R \mid 0 < x < 5\}$. Mas, sentimos que adiantar o assunto aos subconjuntos dos números reais chamados intervalos, só poderia enriquecer o assunto. Dissemos que a bolinha vazia (O) indicava que os extremos do domínio da função, em nosso caso 0 e 5, não pertenciam ao intervalo e, ainda, que esse intervalo continha todos os números reais compreendidos entre 0 e 5. Assim, na construção dos gráficos dessas funções, considerando a altura como um número real entre zero e cinco, seria formada por uma linha densa e fechada, isto é, um intervalo constituído de números reais e o gráfico seria formado por uma curva contínua.

Após conferir os gráficos dos alunos e fazermos a discussão em Plenária, desenhamos esses gráficos na lousa e iniciamos a exploração dos mesmos, estendendo o nosso trabalho ao conceito de função. Essa exploração não tinha o objetivo de tratar esse assunto em todo seu rigor, como já dissemos. Queríamos apenas que os alunos enxergassem aqueles gráficos como gráficos de funções polinomiais, já que, no Projeto I, haviam trabalhado com o gráfico da área da base de caixas e não se tinha feito menção ao conceito de função.

Perguntamos aos alunos o que eles poderiam dizer sobre variáveis dependentes e variáveis independentes. Queríamos saber o que eles entendiam sobre o significado dessas palavras. Os alunos já sabiam o que era variável, através dos problemas relativos à construção de caixas, tanto oralmente como na construção dos gráficos. Pedimos a eles que, olhando nos gráficos e, observando a relação do perímetro da base, da área da base e do volume das caixas, pudessem dizer quem era a variável independente e quem é a variável dependente. Eles já sabiam que variando a altura da caixa, variariam também o perímetro da base da caixa, a área da base da caixa e o volume da caixa. E, então, perguntamos:

PESQ: Qual seria a variável dependente e qual seria a variável independente?

CLASSE: x é independente e y é dependente.

PESQ: Porque vocês acham que o x é a variável independente?

A classe ficou em silêncio.

PESQ: O que aconteceu quando alteramos a altura x no nosso problema?

CLASSE: Alteramos a área da base.

PESQ: Só a área da base da caixa?

CLASSE: Não, o perímetro e o volume também.

PESQ: Perceberam que toda vez que mudamos a altura, no nosso problema, provocamos uma mudança na área da base da caixa, no perímetro da base da caixa e no volume da caixa?

CLASSE: Sim.

PESQ: Vocês falaram em y. Quem é o y no nosso problema?

Novamente, ficaram em silêncio.

PESQ: Vocês falaram que mexendo no x, alterava o y. De onde saiu esse y?

CLASSE: É que pra cima (apontando para o eixo vertical do plano cartesiano) é o y. Mexendo com x, altera y.

PESQ: Ah, então mexendo com x, que está na horizontal, alteramos y que está na vertical, no referencial do plano cartesiano. No nosso problema, mudando a altura x, mudou a área da base da caixa, o perímetro da base da caixa e o volume da caixa. Então, quem é o y no nosso problema?

CLASSE: É o perímetro, a área da base e o volume.

PESQ: Muito bem, no nosso problema, o x é a altura da caixa e o y é o perímetro da base da caixa no primeiro caso, a área da base da caixa no segundo caso e o volume da caixa no terceiro caso. Não podemos ficar presos somente a x e y, uma vez que, para cada situação, essas variáveis devem ser interpretadas de acordo com o contexto do problema: $P(x)$, $A(x)$ e $V(x)$, todos variando como funções da variação da altura x.

PESQ: E, nos três casos trabalhados, quem é a variável independente e por quê? Que valores pudemos escolher, dentro do intervalo (0,5)? E a variável dependente?

CLASSE: Pudemos escolher a altura.

PESQ: Sim! x é a variável independente. Agora, o valor do perímetro é

$P(x) = 52 - 8x$ e varia, à medida em que variamos a altura. E também variam

$A_b = A(x) = 4x^2 - 52x + 160$ e $V_c = V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$.

Para não ficarmos presos somente a essas funções, falamos com os alunos sobre variação de espaço e tempo, custo e consumo, receita e despesa, velocidade, aceleração, etc, como funções.

PESQ: Vamos agora dizer, com mais rigor, o que é função?

MAN: Função é alguma coisa quando uma variável depende da outra??

Refletindo sobre a fala de MAN, a professora-pesquisadora, complementando, disse: _ Você quer dizer que..., para você, ...função é uma relação entre duas grandezas onde uma delas "funciona" na dependência que ela tem da outra. No caso de nossos problemas, consideremos a altura como sendo um conjunto (um conjunto dos possíveis valores para a altura) e o perímetro da base da caixa como sendo um outro conjunto (um conjunto dos possíveis valores do perímetro). Para cada altura (x) temos um e um só valor do perímetro a ela associado, ou seja, dizemos que para qualquer valor da altura (x) corresponde um e um só valor de p (no caso do perímetro). Generalizando, supondo dois conjuntos A e B (não vazios) e uma relação f de A em B, essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e um só elemento y do conjunto B. No nosso problema, esse elemento x, do conjunto A, é uma das possíveis alturas no intervalo que determinamos e esse elemento y, do conjunto B, é um dos possíveis valores para o perímetro, por exemplo. Resumindo, define-se função f quando a cada elemento x do conjunto A está associado um único elemento do conjunto B satisfazendo $y = f(x)$. Isso é uma função! Costumamos representar simbolicamente uma função, por

Seja $\boldsymbol{f}$**: A→B**

$\boldsymbol{y = f(x)}$ é uma função de x quando a todo $x \in$ A corresponde um e um $y \in$ B tal que $y = f$(B)

No caso do perímetro da base da caixa, podemos escrever

$\boldsymbol{p = f(x)}$ ou $\boldsymbol{p = p(x)}$ onde

p é o perímetro da base da caixa;

f ou p indica a função;

x é a altura da caixa.

À variável x chamamos variável independente; à variável p, chamamos variável dependente[20] e escrevemos $p(x) = 52 - 8x$ e lemos p de *x é igual a* $52 - 8x$ para todo ($\forall$) x pertencente ($\in$) ao intervalo aberto zero cinco (0,5), que é um conjunto de todos os valores de x em que a função é definida.

Depois de definir aos alunos o conceito formal de função, conforme relatamos acima, pedimos aos alunos que escrevessem simbolicamente a área da base da caixa e o volume da caixa, ambos em função da altura x. Para os objetivos desta pesquisa, não tínhamos nem tempo, nem o propósito de ampliar o assunto. Já havíamos dito aos alunos que estávamos apenas introduzindo o conceito de função e que assuntos correlatos a ele seriam explorados no 1º ano do Ensino Médio.

7.2.5 - 5º encontro: Lista de Atividades de Fixação

A lista de atividades de fixação, contendo 6 problemas (conforme apresentado no Capítulo 6), foi entregue, como trabalho, aos grupos, em sala de aula. Foi desenvolvida desde sua leitura e interpretação, pelos grupos, sem nossa intervenção. Solicitamos que, com base no que havíamos discutido ao longo dos encontros, os grupos, em suas discussões buscassem resolver a lista proposta dentro de um tempo razoável para esse trabalho.

Ao abrirmos a discussão em Plenária, somente um dos grupos havia dado a resposta do Problema 1, em litros, conforme solicitava o enunciado. Quando esse grupo se manifestou, todos se deram conta de que suas respostas estavam incompletas e alguns alunos disseram:

CLASSE: Ah, é só multiplicar por 1000. Então vai ser $0{,}48m^3 \times 1000 = 480\lambda$.

PESQ: Porque multiplicar por 1000?

Não responderam. Diante do silêncio pedimos que imaginassem um cubo medindo 1m em cada aresta e perguntamos:

PESQ: Qual o volume do cubo imaginado?

[20] Variável dependente e variável independente – ver Caraça, 2003, 5ª edição. Conceitos Fundamentais da Matemática. Editora Gradativa. Lisboa-Portugal. p. 121-131. 1ª edição: 1941; Usiskin, Z.; Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: Coxford, A. F; Shulte, A. P. (Org). "As Idéias da Álgebra". Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. Primeira publicação 1988 pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). p. 9-22.

CLASSE: $1m^3$.

PESQ: Muito bem, 1 metro cúbico. A unidade padrão de volume é o metro cúbico: m^3. No problema das caixas que estudamos, falamos do centímetro cúbico: cm^3. Vocês se lembram?

CLASSE: Sim. É um cubinho de 1cm de lado.

PESQ: Então, a resposta do problema foi $0,48m^3$, certo?

CLASSE: Certo!!

PESQ: Esse número é maior ou menor que $1m^3$?

CLASSE: Menor. Menos um pouquinho que a metade.

PESQ: O metro cúbico assim como o metro tem, como sabemos, seus submúltiplos e múltiplos. Agora, qual a relação entre o metro cúbico e o litro??? Vocês sabem a diferença?? O litro é uma unidade de capacidade. Por exemplo, quando enchemos um copo com suco de laranja, ele ocupa todo o espaço de dentro do copo. E, o espaço que o suco ocupou é a capacidade do copo. O copo é o recipiente desse líquido. Pensem, então, comigo: a capacidade é um volume?

CLASSE: Sim. Se o que tem dentro do copo é capacidade e o suco enche o copo, então capacidade é volume.

PESQ: A diferença está em que no volume de um sólido, a figura do espaço já é dada, é vista e, na capacidade, a figura formada é aquela que o líquido assume na forma do recipiente. Então, vocês podem entender porque quando medimos a capacidade, sua medida será dada por litros e não por metros cúbicos, ou seus múltiplos e submúltiplos. A capacidade é também um volume e poderia ser medida em metros cúbicos, ou por seus múltiplos e submúltiplos. Mas, para distinguir, é comum medir-se a capacidade de recipientes com a unidade litro (λ) ou por seus múltiplos e submúltiplos. O litro mede a capacidade de um cubo que tem por aresta $1dm^3$, isto é, $1\lambda = 1\ dm^3$. Se pegarmos um cubo com 1dm de aresta $^{\text{interna}}$ e um recipiente com capacidade para 1λ, enchendo esse recipiente com $1\ \lambda$ de suco, por exemplo, e em seguida despejando todo o suco do recipiente no cubo de aresta $1dm^3$, esse suco preencherá toda a capacidade do cubo. Em resumo, mesmo sendo tomados recipientes diferentes, a capacidade dos dois é a mesma.

Essa explicação que demos aos alunos foi sendo verificada por meio de desenhos feitos na lousa. No caso, um cubo de aresta $1dm^3$ e um jarro graduado (feito em desenho livre) com capacidade para 1λ. Os alunos pareciam surpresos com os desenhos e as conclusões. Esse comportamento poderia ser entendido como decorrência do esquecimento dessa relação de igualdade, já estudada, devido ao seu pouco uso. Mas, acreditamos que há outra razão para isso. Talvez, nunca lhes foi apresentada essa idéia de capacidade concretamente ou se tenha feito referência ao uso das medidas de capacidade em seu dia-a-dia. Imaginamos isso, pois quando discutiram centímetros e metros no enunciado no problema, não apresentaram essa mesma dificuldade. Todos sabiam fazer a transformação de centímetro para metro ou vice-versa.

Embora esta seja uma pesquisa com enfoque no ensino de matemática através da resolução de problemas por meio da contextualização, poderíamos, com este problema, ter uma excelente oportunidade de demonstrar na prática, a relação de igualdade
$1\,\lambda = 1\ dm^3$ e isso não seria difícil. Entretanto, devido ao pouco tempo de que dispúnhamos e ao objetivo do trabalho que girava em torno do estudo de polinômios e suas operações, lamentavelmente, em alguns momentos do trabalho, perdemos a riqueza que poderia advir dessas estratégias.

Continuando a explicação, dissemos aos alunos:

PESQ: Se $1\,\lambda = 1dm^3$, então, $1m^3$ corresponde a quantos litros?

Alguns alunos ficaram em silêncio. Outros deram algumas respostas aleatórias que optamos por não aceitar nesse momento, já que queríamos que todos refletissem sobre a pergunta que fizemos. Depois de um certo silêncio, alguns alunos disseram:

CLASSE: É daí que sai o 1000. $1m^3$ é igual a $1000\,\lambda$.

Outra vez, chamamos a atenção dos alunos para a variação das grandezas lineares, quadráticas e cúbicas, dizendo que:

$1m = 10dm = 100cm = 1000mm$

$1m^2 = 100dm^2 = 10000cm^2 = 1000000mm^2$

$1m^3 = 1000dm^3 = 1000000cm^3 = 1000000000mm^3$.

Assim, $1m^3 = 1000dm^3 = 1000\,\lambda$

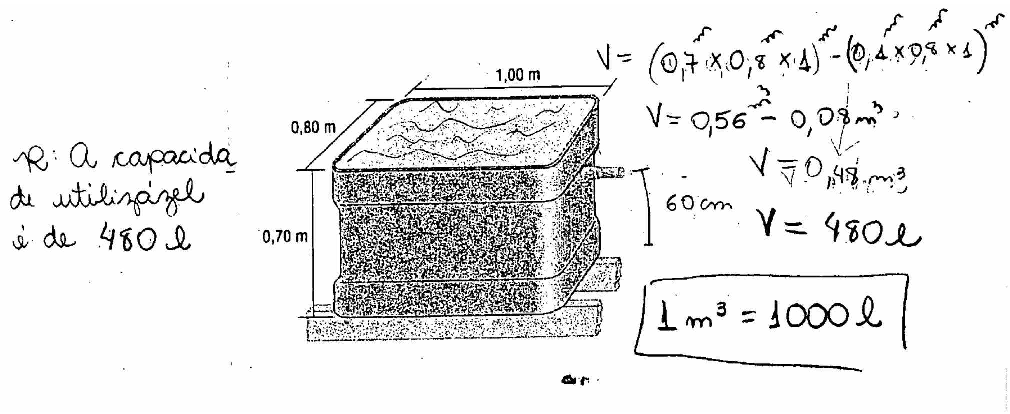
PESQ: Muito bem! E agora, como saber quantos litros correspondem a $0,48m^3$?

Alguns responderam que deveriam multiplicar $0,48m^3$ por 1000. Outros optaram por fazer uma regra de três simples. Para os que não se posicionaram, quando questionados, aceitaram que a regra de três simples era a melhor estratégia. Após os posicionamentos, dissemos aos alunos que substituindo o m^3 por 1000λ, teríamos:

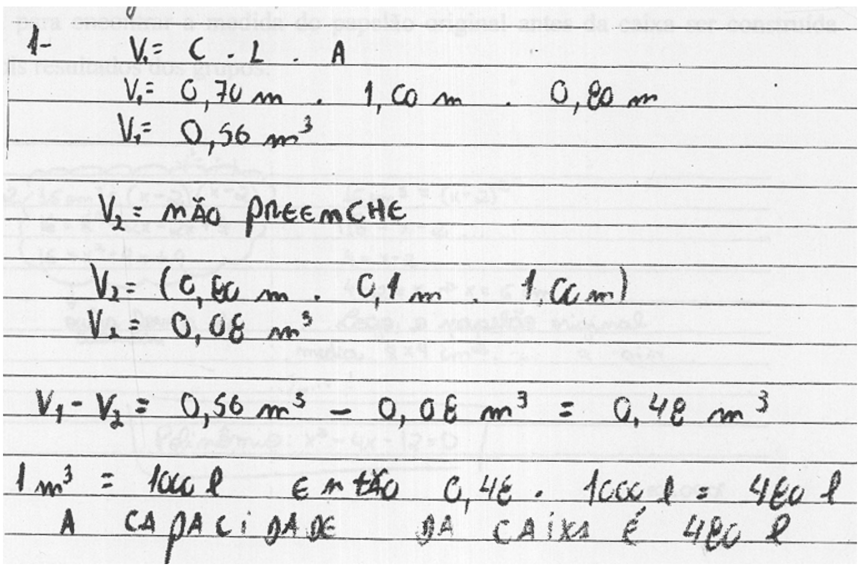
$0,48m^3 = 0,48 \; . \; 1000dm^3 = 480dm^3 = 480\lambda$.

Lembrando a construção das caixas, os alunos puderam entender que, no comprimento, a unidade padrão 1m se transforma em seus submúltiplos de dez em dez. Já, na área, os quadrados de $1m^2$ variam em seus submúltiplos, de 100 em 100 e os volumes de $1m^3$ variam em seus submúltiplos, de 1000 em 1000.

Sendo assim, encerramos a discussão sobre este problema pois, verificando em suas listas, os grupos apresentaram os resultados esperados. Abaixo, apresentamos o resultado de dois grupos:

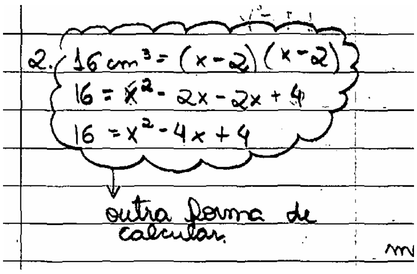


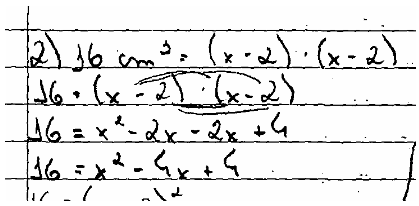
Resultado do outro grupo:



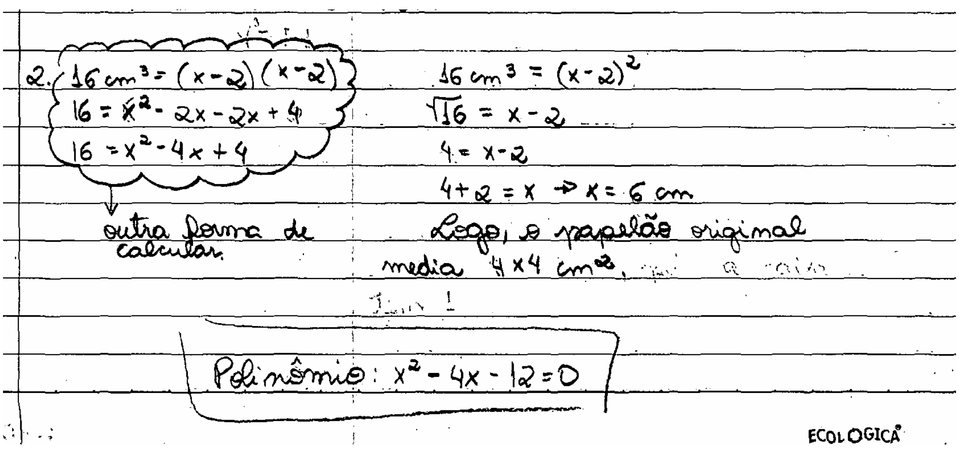
Problema 2

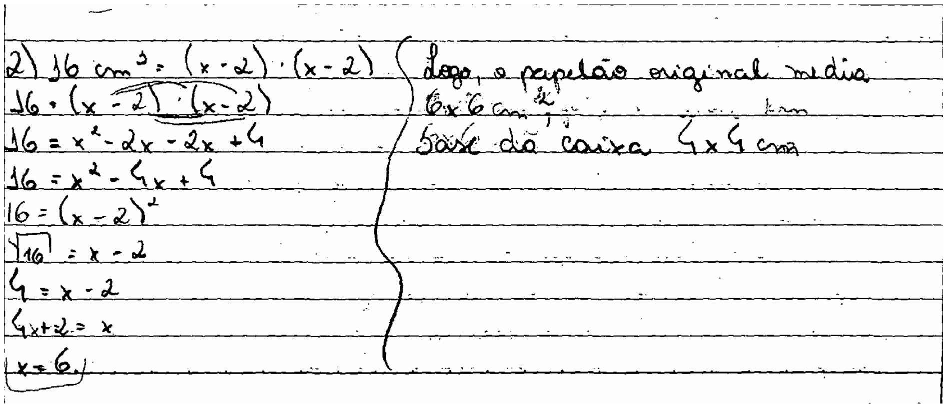
O Problema 2, uma extensão do trabalho com as caixas, solicitava aos alunos a medida do papel original, apresentado como ponto de partida para a construção de uma caixa. O desenvolvimento deste problema, conforme a resolução de todos os alunos, deu-se pela multiplicação das dimensões da base da caixa, resultando num polinômio de grau 2, conforme podemos verificar no resultado de um dos grupos:





A maioria soube montar a equação, uma equação quadrática, como pudemos ver nos resultados acima, que poderia ser resolvida ou usando a fórmula atribuída a Bhaskara, ou a fatoração. Os grupos encontraram os valores de x: x_1 = 6cm e x_2 = -2cm. O valor negativo foi descartado por eles, pois as dimensões da caixa não podem ter medida negativa. O valor encontrado para x, x_1 = 6cm, respondia ao enunciado do problema, que pedia para encontrar a medida do papelão original antes da caixa ser construída Abaixo dois resultados dos grupos:




2) $16\ cm^2 = (x-2)\cdot(x-2)$
$16 = (x-2)\cdot(x-2)$
$16 = x^2 - 2x - 2x + 4$
$16 = x^2 - 4x + 4$
$16 = (x-2)^2$
$\sqrt{16} = x - 2$
$4 = x - 2$
$4 + 2 = x$
$x = 6$

Logo, o papelão original media
$6 \times 6\ cm^2$
base da caixa 4×4 cm

O Problema 3, o que mais gerou discussão nos grupos, durante a resolução da lista, como também na Plenária, explorava o conceito de função.

Ao iniciarem o Problema 3, os alunos pareciam não ter dúvidas sobre a resolução do mesmo. Embora estivéssemos atentos ao trabalho dos grupos, foi, somente na Plenária, que verificamos que os grupos não haviam respondido ao problema.

Todos os problemas da lista foram lidos pelos grupos sem nossa intervenção. Como esta lista era uma atividade de fechamento de trabalho, queríamos saber qual seria a dinâmica assumida pelos grupos para a identificação de conteúdos necessários para em cada um dos problemas e, ainda, que estratégias de resolução utilizariam.

Ao abrirmos a discussão em Plenária, perguntamos aos alunos qual conceito seria explorado no Problema 3 e eles não responderam. Os grupos pareciam não ter percebido, durante a resolução dessa atividade, que o problema envolvia o conceito de função.

Quando questionados sobre os resultados obtidos, os grupos apresentaram respostas como: "*...quanto mais a figura se aproxima de um quadrado, maior será sua área*" ou *"... o último retângulo, pois sua área é 99m^2, maior que os outros retângulos. Por isso, retângulos com o mesmo perímetro não têm necessariamente a mesma área. Quanto mais próxima a área for de um quadrado, maior será sua área*".

Ao trabalhar o conceito de função, como já dissemos, fizemos somente a apresentação do conceito, dentro da problemática da construção das caixas, sem nos aprofundarmos no assunto. Até aquele momento, os alunos, não haviam trabalho com problemas envolvendo o conceito de função. Sendo assim, diante das respostas que obtivemos, insatisfatórias, já que os alunos não haviam chegado ao retângulo de perímetro 40m com maior área, desenhamos um retângulo na lousa e perguntamos:

PESQ: Qual é o perímetro dos retângulos considerados no enunciado do problema?

CLASSE: 40m.

PESQ: Como fazer para encontrar o perímetro de um retângulo?

CLASSE: É a soma dos lados.

PESQ: O problema mostrou que retângulos de mesmo perímetro não têm, necessariamente, a mesma área e perguntou vocês: "... dentre TODOS os retângulos com perímetro igual a 40m...". Por quê TODOS???

CLASSE: Porque não tem só esses.

PESQ: Então, dentre TODOS com perímetro igual a 40m, qual deles tem maior área? Vocês partiram de uma afirmativa que está correta: "*quanto mais a figura se aproxima de um quadrado, maior será sua área*", mas vocês não apresentaram, dentre TODOS os retângulos, aquele que tem a maior área.

Deixamos que pensassem um pouco mais no problema e perguntamos:

PESQ: Sabemos que, para calcular o perímetro, somamos seus lados. Assim, como encontrar o retângulo que tem maior área e cujo perímetro mede 40m?

CLASSE: Vamos fazendo até achar ele.

PESQ: Mas como?

Alguns alunos disseram: "*Não sabemos o lado do retângulo de maior área*! *E se a gente chamar o comprimento de x e a largura de y?".*

Outros disseram: "*É, isso mesmo*!!"

Depois de algum tempo, esses mesmos alunos continuaram: "*ah, se x for 8, então vai ser 16* (referindo-se à soma de dois lados de um retângulo de medida 8m). *E aí o y vai ser 24* (referindo-se à soma de dois lados de retângulo de medida 12m)... *Não*! *12*! *Somando dá 24*!".

Quando se referiam a x=16 e y=24, estavam calculando o perímetro do retângulo de comprimento 12m e largura 8m.

PESQ: Isso mesmo! É por aí gente!!

Esses mesmos alunos fizeram uma nova colocação: "*A gente pode fazer assim também:* $2x + 2y = 40$*".*

PESQ: Dividindo esta equação por dois, tem-se: $x + y = 20$. Dividimos por dois para simplificar a equação. Assim, com a equação simplificada, fica mais fácil trabalhar. Chamamos essa igualdade semi-perímetro, pois ela representa a metade do perímetro e fica mais fácil trabalhar com números menores. E agora, sabendo quanto vale o semi-perímetro, o que fazer?

Mais um tempo em silêncio e o diálogo continuou:

CLASSE: E a área? É a área que o problema pede!

PESQ: Isso! É a área que o problema pede. Como encontrar a área, sabendo que no retângulo o comprimento é x e a largura é y, ou vice-versa?

CLASSE: É $x \,.\, y$!

Alguns alunos perceberam que não havia uma área comum aos retângulos de perímetro 40m. Sabiam eles que se montassem um sistema de duas equações, a duas incógnitas: x e y, assunto já estudado no 9º ano, poderiam ir em busca da solução do sistema envolvendo $x.y$. Quando viram que não poderiam escrever uma igualdade envolvendo x e y, como a área do retângulo de dimensões x e y, desistiram desta última idéia.

A sugestão $2x + 2y = 40$m ou $x + y = 20$m, deveria recair num sistema de duas equações a duas variáveis envolvendo perímetro e área. Mas, no caso da área não se conhecia o valor de $x.y$. Nesse raciocínio, não teriam montado um sistema de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{cases} x + y = 20m \\ x \cdot y = ? \end{cases}$$

Na segunda equação, levando à área máxima.

O que fazer com isso, eles não sabiam!

Considerando-se que, para resolver uma equação do 1º grau a duas incógnitas o recurso é construir uma tabela onde um dos parâmetros é livre, ao qual podemos ir dando valores convenientes e encontrar os correspondentes valores do y.

Os alunos pareciam não saber como continuar e então sugerimos:

PESQ: Gente, vamos voltar à idéia inicial que vocês apresentaram! Estavam indo bem. Sabemos que $x + y = 20$m, certo?

CLASSE: Sim.

PESQ: Vou sugerir a construção de uma tabela a partir da idéia inicial de vocês.

Montamos uma tabela com as variáveis do problema: **y, x**, **x+y** e **x.y** indicando as unidades de medida para cada variável.

m	m	m	m^2
y	x	$x+y$	$x \cdot y$
12	8	20	

PESQ: Observem a quarta coluna. Coloquei aí a área do retângulo: $x.y$. Partindo do exemplo dado por vocês: comprimento 12m e largura igual a 8m, é possível saber a área do retângulo tendo os valores de x e y?

CLASSE: Sim! É 96m^2.

Preenchemos a quarta coluna referente à área do retângulo, escrevendo 96.

m	m	m	m^2
y	x	$x + y$	$x \cdot y$
12	8	20	96

Como queríamos achar a área máxima do retângulo, sugerimos que montassem uma tabela maior com possíveis valores de x. Foi lhes apresentada assim:

m	m	m	m^2
y	x	$x + y$	$x \cdot y$

PESQ: Há alguma coluna na tabela da qual já sabemos o valor “de cara”?

Demoraram um tempo até que responderam:

CLASSE: $x + y$.

PESQ: Muito bem, $x + y$ que é o semi-perímetro Quanto mede o semi-perímetro?

CLASSE: 20.

PESQ: Completem a tabela dada, partindo do semi-perímetro $x + y = 20$m. Vou sugerir alguns valores para x. Então, vocês, usando o mesmo raciocínio, preencham as demais colunas da tabela.

Antes de os alunos iniciarem o trabalho, demos outro exemplo:

PESQ: Vamos supor que x seja igual a 1m. Qual será o valor de y, em metros, para que tenhamos o semi-perímetro igual a 20m?

CLASSE: 19m.

PESQ: Muito bem! Sabendo que $x = 1$m e que $y = 19$m, podemos calcular a área do retângulo?

CLASSE: Sim. É 19 *vezes* 1 que dá 19.

PESQ: 19 o quê?

CLASSE: 19m^2.

Inicialmente os valores, sugeridos pelos alunos e os sugeridos por nós, foram sendo colocados aleatoriamente na tabela. Mas como a Matemática é uma ciência de padrão e ordem, resolvemos colocar ordenadamente os dados na tabela. Assim, os alunos poderiam perceber o comportamento dos valores encontrados para as áreas dos retângulos conservando-se o valor constante dado ao semi-perímetro.

A tabela a seguir foi entregue aos alunos para que a preenchessem conforme nossa orientação.

m	*m*	*m*	m^2
y	*x*	$x + y$	$x \cdot y$
1	19	20	19
1,5			
2			
3			
4			
5			
5,2			
6			
7			
8	12	20	92
9			
10			
11			
11,1			
12			
13			
17			
19			

Nessa tabela, as variáveis do problema são os lados do retângulo: *x*, *y*; a expressão algébrica do semi-perímetro: $x + y$; e a expressão de área do retângulo: $x \cdot y$.

Depois da Plenária, optamos por deixar que os grupos ainda discutissem e buscassem chegar a um consenso. Enquanto discutíamos, alguns alunos não se manifestavam. Entretanto, depois dessas discussões, até esses mesmos alunos pareciam animados na busca do retângulo de maior área com perímetro igual a 40m.

Após um determinado tempo, todos os grupos haviam conseguido preencher a tabela, conforme fora solicitado, encontrando a solução do problema proposto: o retângulo de maior área e perímetro 40m é um quadrado de lado 10m. É verdade que os grupos poderiam chegar, a partir dessa tabela, aos gráficos das funções perímetro e área do retângulo, ambas em função de uma de suas dimensões. Infelizmente, não houve mais tempo para discutir outras idéias nascidas desse problema, já que este era nosso último encontro. Como estávamos trabalhando com uma metodologia de ensino diferenciada, estávamos expostos a situações inesperadas e esta foi uma delas. Queríamos que os alunos percebessem a dependência de alguns valores em função de outros: o perímetro e a área do retângulo em função dos lados desse mesmo retângulo. Esperávamos que, até por outro caminho, eles pudessem já fazer uso da álgebra, já sua conhecida e, interpretando os dados do retângulo, pudessem descrever um lado como uma variável: x e o outro lado em função dela. De fato se $x + y = 20$, então $x = 20 - x$ e, como já sabiam que $A = x.y$, então: $A = x(20 - x)$

$A = - x^2 + 20x$ e, ao atribuir diferentes valores a x, daí chegar até à construção do gráfico: um arco de parábola.

Conforme apresentamos na lista de atividades, este problema foi extraído do livro de Imenes & Lellis, 2006, 9º ano, páginas 191 e 192. No livro, os autores resolvem este problema no capítulo 10 – Funções, usando a estratégia que apresentamos por último [comprimento: x e largura ($x - 20$)]. Nesta pesquisa, como já dissemos anteriormente, estamos considerando os alunos como co-construtores do conhecimento, fato que nos levou a explorar o problema a partir do raciocínio dos alunos, como podemos ver na tabela a seguir, preenchida por um dos quatro grupos:

m	m	m²	m³
Y	X	X+Y	X.Y
1	19	20	19
1,5	18,5	20	27,75
2	18	20	36
3	17	20	51
4	16	20	64
5	15	20	75
5,2	14,8	20	76,96
6	14	20	84
7	13	20	91
8	12	20	96
9	11	20	99
10	10	20	100
11	9	20	99
11,1	8,9	20	98,79
12	8	20	96
13	7	20	91
14	6	20	84
17	3	20	51
19	1	20	19

$P = 2x + 2y$

$2x + 2y = 40m$

$\begin{cases} x + y = 20m \\ x \cdot y = ? \end{cases}$

Aqui está o retângulo de perimetro 40m e de maior Área → $A = x \cdot y$

$A = 10 \cdot 10$

$A = 100 m^2$

Os lados do retângulo medem 10m, logo ele é um quadrado.

Os Problemas 4, 5 e 6, escolhidos no livro de Krulik & Rudnick (2005), exploram o conceito de volume e medida de blocos retangulares, usando expressões algébricas.

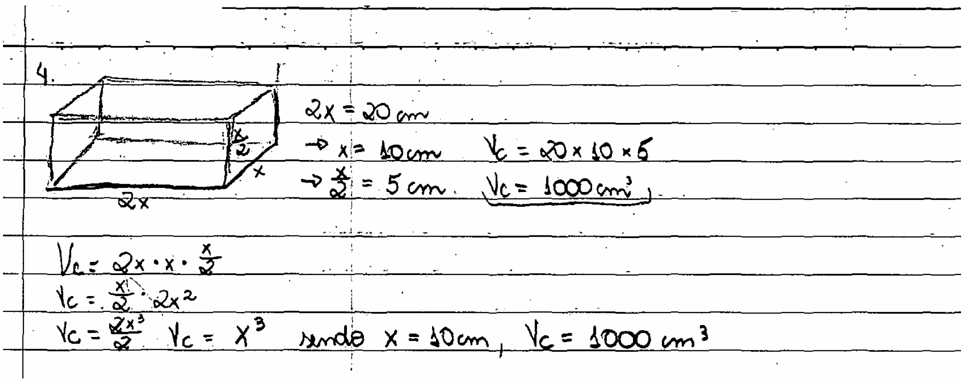
O Problema 4 é o problema gerador da construção dos conceitos pretendidos para esta aula. Os demais, Problemas 5 e 6, são trabalhados como extensões do Problema 4.

Ao fazer a leitura dos problemas, os grupos identificaram de imediato que o enfoque desses problemas envolvia o conceito de volume.

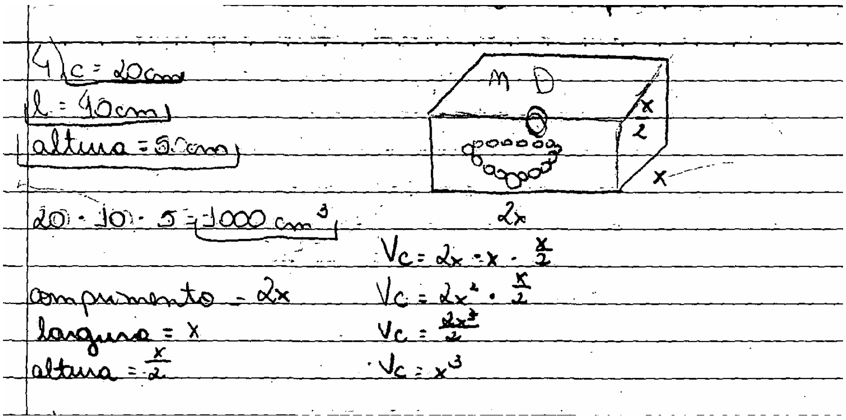
A medida do comprimento da caixa do Problema 4, 20cm, permitiu aos alunos, utilizando dados do problema, o cálculo imediato de sua largura e de sua altura e, a partir delas, encontraram o valor do volume da caixa.

Ao verificar, reconhecendo que os alunos já dispunham de um bom conhecimento de álgebra, que haviam encontrado o volume usando essa estratégia, pedimos que escrevessem uma expressão algébrica para o volume da caixa. Não demorou muito para os grupos encontrar a expressão algébrica que representava o volume dessa caixa, conforme resultados a seguir:

Resultado de um grupo:



Resultado de outro grupo:



A expressão algébrica V_c = c. λ.a $= 2x.x.\frac{x}{2}$, resultou em $V_c = x^3$. Este foi o resultado que todos os grupos encontraram. $V_c = x^3$ é uma potência de base real e expoente natural. Esse volume depende de *x*, pois depende das dimensões da caixa e cada uma dessas dimensões é dependente de *x*.

O Problema 5, muito interessante por questionar o que acontece com o volume do cubo quando se dobra o comprimento de cada lado, foi bem aceito pelos alunos. Este tipo de problema poderia ter gerado nos alunos uma impressão errônea de que, dobrando o comprimento de cada lado, dobrar-se-ia o volume.

Não foi o que aconteceu com os alunos desta pesquisa. O problema pedia para verificar quantas vezes maior ficaria o volume da caixa ao se dobrar o comprimento de cada lado. Esses alunos não tomaram nenhuma conclusão de imediato. Fizeram o problema, aritmeticamente sobre uma fórmula geométrica que dá o volume do cubo. Calcularam o volume do cubo de lado 5cm. Calcularam o volume do cubo de lado 10cm. Obtendo V = 1000cm^3. Daí, fazendo a razão desses dois volumes $\frac{1000cm^3}{125cm^3} = \frac{8}{1}$, que indica quantas vezes o volume do cubo maior cabe no volume do cubo menor, atendendo ao pedido do problema, conforme resultados abaixo:

Resultado de um grupo:

5. 1ª caixa: cubo de 5 cm
$5^3 = 125$ cm^3
2ª caixa: cubo de 10 cm
$10^3 = 1000$ cm^3
→ O volume não dobra na mesma proporção que os lados na 2ª caixa. Ele aumenta 8 vezes em relação à primeira caixa.

Resultado de outro grupo:

5) 1ª caixa: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ cm^3
2ª caixa: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ cm^3
$1000 \div 125 = 8$
→ O volume não dobra na mesma proporção que os lados na 2ª caixa. Ele aumenta 8 vezes em relação à 1ª caixa

Instigamos os alunos se, dobrando o lado, dobraríamos o volume, e eles pareciam certos de suas respostas, afirmando que o volume do cubo aumenta 8 vezes, quando dobra-se o lado desse cubo.

Os alunos resolveram esse problema, mas uma coisa interessante que poderia ter sido discutida com eles seria fazê-los imaginar um cubo de lado 5cm, cujo volume seria V = 125cm^3. Seria pedido a eles que dobrassem apenas o comprimento do cubo. Neste caso, teriam um volume V_1 = 10cm x 5cm x 5cm

$$V_1 = 250\text{cm}^3 \quad \text{e} \quad \text{assim,} \quad V_1 = 2V.$$

Em continuação, dobraríamos a largura. O volume deste bloco retangular seria dado por V_2 = 10cm x 10cm x 5cm.

$V_2 = 500\text{cm}^3$; $V_2 = 2V_1$ e $V_2 = 4V$.

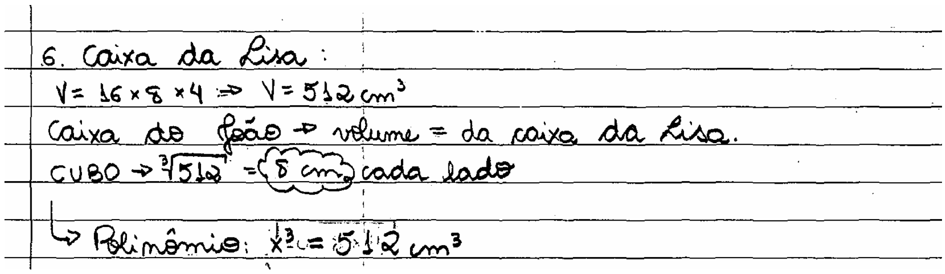
Mais uma vez, dobrando também a altura do bloco, este ficaria com o volume

$V_3 = 10cm \times 10cm \times 10cm$

$V_3 = 1000cm^3$

$V_3 = 2V_2$; $V_3 = 4V_1$; $V_3 = 8V$

O Problema 6, apresentado como uma extensão da matemática construída no problema 4, poderia ser resolvido por tentativas. Os alunos, em geral, fizeram o cálculo do volume da caixa de Lisa e, usando a fórmula que dá o volume de um cubo $V = \lambda^3$, escreveram, para o volume da caixa de João, $x^3 = 512cm^3$. O problema mudou então para resolver essa equação de 3º grau. Um dos grupos conseguiu avançar, quando trabalharam em seu grupo, chegando a: se $x^3 = 512cm^3$, então, $x = \sqrt[3]{512cm^3} = \sqrt[3]{2^9 cm^3}$ que, fatorando, obtém-se $\sqrt[3]{2^3.2^3.2^3 cm^3}$ que leva a $x = 8cm$, como podemos conferir abaixo:



6. Caixa da Lisa:
V= 16 x 8 x 4 => V = 512 cm³
Caixa do João -> volume = da caixa da Lisa.
CUBO -> ∛512 = 8 cm cada lado
↳ Polinômio: x³ = 512 cm³

Os demais grupos precisaram da discussão em Plenária para perceber que, para encontrar o comprimento da caixa de João, era preciso encontrar a raiz cúbica de $512cm^3$, por meio de fatoração. Os grupos que não conseguiram fatorar o $512cm^3$, quando questionados, disseram não ter se lembrado como agir no processo da raiz cúbica, nem ao menos do fazer no processo que usa a fatoração para isso. No caso, 512 é um cubo perfeito e, portanto fatorável.

Se tivéssemos feito algumas perguntas como "*Qual era o volume da caixa de Lisa? Qual deve ser o comprimento da caixa de João, de modo que, multiplicando o comprimento por ele mesmo, três vezes, obtenha $512cm^3$? O cubo pode ter lados com medida 10cm? Lados de 6cm? ...*", acreditamos que os alunos, se isso tivesse sido feito, encontrariam o lado da caixa de João, por tentativa, sem a necessidade de extrair a raiz cúbica de $512cm^3$.

Ao abrirmos a discussão em Plenária, falamos com os alunos sobre as duas possibilidades de resolução do problema.

CONCLUSÕES

Conclusões Finais

A modalidade de pesquisa adotada neste trabalho foi a da pesquisa qualitativa, por termos como objeto de estudo problemas específicos do dia a dia escolar, retratando as relações que ocorreram num ambiente de ensino-aprendizagem em todas as suas variações durante a aplicação dos projetos desenvolvidos.

Neste trabalho, procurou-se atender às características próprias de uma pesquisa qualitativa onde a fonte discreta de dados é o ambiente natural da sala de aula, constituindo o investigador como instrumento principal.

Na metodologia de pesquisa qualitativa, dentre as estratégias designadas qualitativas, escolhemos o Estudo de Caso, por se tratar da compreensão dos problemas relacionados à escola, visando à interpretação do contexto em que se deu a aprendizagem dos alunos, a partir de uma metodologia de ensino diferenciada. Neste sentido, buscamos verificar, em detalhes, como se deu a aprendizagem dos polinômios, através da construção de caixas de papelão, estendendo-se esse trabalho à busca do conceito de função polinomial, por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Na perspectiva de Romberg (2007), o pesquisador, num estudo de caso, "está interessado em contar uma história detalhada sobre um caso particular" (p.115) e, em concordância com este autor, considerando sempre os aspectos mais relevantes, buscamos chegar a uma compreensão mais completa da situação estudada, enfatizando mais o processo do que o produto (BOGDAN E BIKLEN, 1982).

Em sala de aula, para atingir os objetivos propostos, foi utilizada a Metodologia de Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, tendo o problema como ponto de partida de cada atividade proposta. Nessa metodologia, o importante é que o aluno seja um co-construtor do conhecimento, não se colocando apenas como um receptor de informações. O professor é quem conduz o processo, de modo a possibilitar um ambiente de ensino que favoreça a motivação e a aprendizagem de todos os envolvidos nela.

Aos alunos, dentro dessa metodologia, tivemos o cuidado de enfocar que problemas são situações que nos são postas e que não sabemos resolver de imediato, mas que estamos interessados em resolver. Assim, os alunos trabalharam em grupos de três, em cooperação, aprendendo Matemática enquanto resolviam problemas por meio da construção de caixas de papelão.

Nos grupos, os alunos foram construindo caixas e, gradativamente, foram se dando conta de que estavam, por meio dessas construções, fazendo matemática com as mãos, no concreto, num trabalho colaborativo, ajudando-se uns aos outros nas dificuldades, num processo que Vygotsky (1979) chamou de interação social.

Inicialmente estávamos interessados em verificar como se daria a aprendizagem dos alunos, usando a metodologia adotada em sala de aula, sobre o conceito de polinômio, numa abordagem de ensino contextualizada. Com essa problemática em mãos, elaboramos o Projeto I, que teve como eixo principal o trabalho com caixas de papelão, chegando ao conceito de Polinômio e das operações definidas sobre ele, sempre considerando os alunos como os principais responsáveis pela construção do conhecimento e o professor-pesquisador como responsável por "dirigir esse processo".

No Projeto I, consideramos os conhecimentos prévios dos alunos sobre Álgebra, sobre Desenho Geométrico e, também, suas experiências do mundo real não ligadas diretamente à escola, mas trazidas da vivência desses alunos, como sendo desencadeadoras dos processos de resolução de problemas que lhes foram apresentados. Isso, porque partimos da premissa de que, concordando com Van de Walle (2001), "o ensino deveria sempre começar com as idéias que as crianças já têm, as idéias que eles usam ao criar novas idéias" (p.40-41, tradução nossa). Nessa concepção, ao elaborar as atividades na construção do Projeto I, nossa expectativa era a de que os problemas por nós escolhidos pudessem ser desenvolvidos através de um ensino contextualizado.

Nesta pesquisa consideramos ensino contextualizado aquele onde o professor se propõe a elaborar estratégias diferenciadas nas aulas, buscando estabelecer o maior número de relações entre o novo conteúdo e aquilo que o aluno já sabe. Além disso, nesse trabalho, o professor, levantando questionamentos, dá oportunidade aos alunos de participarem ativamente num trabalho individual, depois em grupos e, finalmente, em Plenária, com a classe toda propondo-se a colaborar na busca de um consenso que lhes permitiria chegar à solução correta do problema. Sempre que possível, nesse tipo de ensino, o professor deveria estar consciente a respeito dos conhecimentos prévios dos alunos, necessários para a construção de novos conceitos e novos conteúdos. Ainda no desenvolvimento da resolução de um problema dado, o professor deveria considerar que, em muitos momentos, a contextualização dos problemas poderia ocorrer dentro da própria Matemática, isto é, ao propor um problema destinado à construção de novos conceitos, o professor deveria, dentro e fora da Matemática, se utilizar de argumentos familiares à situação problema apresentada. Esses novos problemas, secundários à resolução do problema dado, podem acontecer inesperadamente durante sua resolução. Mas, apesar disso, eles devem ser trabalhados, nesse momento, por professores e alunos. Pois, se não resolvidos, impediriam avançar na resolução do problema original. Todo trabalho, nesta pesquisa, foi realizado, pelos alunos, no contexto da construção de um material concreto, as caixas de papelão. Pudemos verificar que os alunos, ao se depararem com o problema da construção da "caixa teste", no Projeto I, talvez por não reconhecerem a passagem da geometria plana para a geometria espacial, não conseguiam construí-la. Com os questionamentos feitos pela professora-pesquisadora, especificamente o uso da palavra levantar, foi possível, aos alunos, chegarem à construção da caixa. Num sentido mais amplo, respondendo a um questionamento que já surgiu no início desta pesquisa, nas páginas 4 e 5, a realização da atividade "caixa teste" estava na dependência não somente dos conceitos matemáticos presentes na situação, mas, também, na dependência de outro conceito como o do significado da palavra levantar, que não estava diretamente ligado à escola. Conforme a teoria de Bransford (2000, p.10, tradução nossa), "as pessoas constroem novo conhecimento e novas compreensões, baseados naquilo que elas já conhecem e acreditam".

O trabalho em grupos e a atividade, que usou o material concreto, fizeram, em muitos momentos desta pesquisa, com que chegássemos à conclusão de que, para alguns alunos, o fazer matemática com as mãos e a troca de experiências com os colegas, lhes possibilitava chegar, com mais segurança, ao conceito pretendido. Como exemplo, lembramos os recortes feitos na largura do retângulo ao construir uma caixa de altura 5cm e a percepção de que, com essas medidas para a altura, não haveria caixa. E, ainda, numa situação análoga, desta vez no Projeto II, não haveria perímetro. Nessas situações, para alguns alunos, foi necessária a manipulação do material concreto e a colaboração dos colegas de grupo. Concordando com Moreira (1999), podemos dizer que intercambiando informações com certo grau de reciprocidade entre os participantes, esses alunos puderam chegar à compreensão.

O Projeto II foi desenvolvido com o objetivo de verificar se os conteúdos estudados no Projeto I haviam se fixado como conhecimento nos alunos e, ainda, no contexto da construção das caixas de papelão, o de explorar o conceito de função polinomial.

Tratar desse conceito, com alunos ainda na 8ª série, considerando o trabalho realizado com as caixas e, verificando a variação das áreas e dos perímetros das bases das caixas e dos volumes das caixas, proporcionou aos alunos uma primeira idéia dessa lei funcional. De fato, não foi possível tratarmos esse conceito com todo seu rigor e força, mas pudemos trabalhar com tabelas, com seus gráficos, com a idéia de variabilidade, com o contexto e com palavras, tendo todo esse trabalho voltado ao contexto da construção das caixas de papelão. Com esse trabalho, pudemos verificar, na prática, a teoria de Jon Davis (2007), citando Hiebert et al (1996), quando afirmaram que "resolver problemas postos em contexto pode promover conexões entre o mundo real e a Matemática e ajuda os estudantes a desenvolver sua compreensão" (p.141, tradução nossa). Os alunos puderam ver os gráficos dos perímetros e das áreas das bases das caixas e dos volumes das caixas e a eles associar o trabalho que foi sendo realizado ao se utilizar o material concreto.

Perceber que os gráficos do perímetro da base, da área da base e do volume das caixas, em função da altura *x*, tratados como gráficos de funções polinomiais e não apenas da localização de pontos do polinômio, para eles, inicialmente não fazia muito sentido. O que sabiam era que, no intervalo entre uma altura e outra, haviam infinitas alturas possíveis o que, para eles, permitia ligar os pontos encontrados. Já na aplicação do Projeto II, estando esses alunos, no final da 8ª série, já conhecendo o conjunto dos números irracionais e, portanto, o conjunto dos números reais, onde R = Q U I e a reta R fica completa, a formalização dessa atividade, pela professora-pesquisadora, tornou possível levar os alunos à percepção de que, o que havíamos construído, quando unimos alguns pontos do gráfico, era na realidade o gráfico de funções polinomiais referentes às áreas e aos perímetros das bases das caixas e dos volumes das caixas. Essa formalização, com certeza, nos pareceu ter mais significado para os alunos. Com a exploração das atividades da construção de caixas, o conceito de função na forma explorada com os gráficos foi valiosa.

Nesta pesquisa, conforme aponta Van de Walle (2001), abordamos o conceito de função por meio da percepção de padrões, de tabelas e de gráficos, enfocando as diferentes formas com que "a mudança de uma variável afeta a mudança de outra" (p.284-285, tradução nossa).

Além dos conceitos de vértices e de lados no retângulo, foram trabalhados também, os conceitos de vértices, de arestas, de faces, perímetro e volume do bloco retangular. Demos atenção especial para os conceitos referentes a grandezas e medidas.

As atividades mostraram que os conceitos de volume e de grandezas e medidas poderiam ter sido explorados já no Projeto I. Mas, devido às dificuldades que os alunos apresentaram naquela ocasião, somente no Projeto II é que conseguimos trabalhar bem com esses conceitos, pois, ao prepararmos atividades que visavam à exploração desses conceitos, no Projeto II, verificamos que, infelizmente, quando foram solicitados os conceitos de áreas e volume de um bloco retangular, os alunos sempre recorriam às fórmulas analíticas que lhes tinham sido apresentadas, não mostrando uma compreensão clara do que diziam e faziam. Neste sentido, reconhecer o volume como sendo a quantidade de unidades cúbicas que cabem num sólido e a área como sendo a medida de uma superfície, considerando os quadrados com $1cm^2$ de área que cobrem essa superfície, permite-nos chamar a atenção para a superficialidade com que esses temas são abordados em geral nas salas de aula. Os alunos terminam a Educação Básica sem conhecer ou reconhecer esses conceitos elementares da Matemática.

Outro aspecto que nos chamou atenção foi o pouco caso dado às grandezas e medidas. De acordo com os PCN (1988), essa dificuldade pode estar atrelada ao "pouco destaque nas aulas de Matemática [...] que, apesar de reconhecerem sua importância, preferem que elas sejam estudadas de forma mais detalhada nas Ciências Naturais" (p.129). No Projeto II, tomamos mais cuidado com esses temas, exigindo que os alunos fizessem uso das medidas padrão em cada grandeza, de forma a chegar à unidade padrão correta na resposta ao dado solicitado.

Quanto aos conteúdos trabalhados no Projeto I e retomados no Projeto II, ora como problemas, ora como exercícios de fixação, consideramos que houve uma transferência dos conhecimentos construídos do primeiro para o segundo projeto. É fato que esses alunos, estando no final da 8ª série, haviam tido uma vivência maior com a Álgebra, podendo ser este um fator que também devesse ser incorporado à "manutenção", por parte dos alunos, dos conceitos trabalhados no Projeto I.

Entretanto, como já citamos ao longo desta pesquisa, de experiências anteriores que a professora-pesquisadora havia tido com alunos de outras 8ªs séries, que haviam trabalhado o conteúdo Polinômio de forma tradicional, ao questioná-los, naquelas ocasiões, sobre conceitos desse conteúdo, pareciam nunca terem trabalhado esse tema ou tinham apenas vagas lembranças.

Esse fato nos permite considerar que o trabalho realizado, com o ensino de Polinômios no contexto da construção das caixas de papelão, considerando sempre os conhecimentos prévios trazidos pelos alunos, como desencadeadores da nova aprendizagem, resultou numa aprendizagem mais significativa. Como exemplo, ao cortarem quadrados, de lado 1cm, do canto do retângulo dado, na "caixa 1", do Projeto II, imediatamente após o recorte os alunos já sabiam que a nova figura formada tratava-se de uma caixa planificada. Relembrando, este foi um dos grandes problemas enfrentados no Projeto I.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas permitiu-nos, conforme apontou Branca (1997), aplicar conhecimentos adquiridos previamente (no Projeto I) a situações novas e desconhecidas (no Projeto II), bem como a situações já vivenciadas.

A importância dada aos conhecimentos prévios e à interação social deve ser ressaltada, por termos trabalhado, durante toda a pesquisa, com os alunos dispostos em grupos. As discussões freqüentes dos alunos e da professora-pesquisadora possibilitaram a compreensão dos conceitos trabalhados, partindo de uma situação concreta para a generalização e abstração num estágio mais elevado da aprendizagem. Esse aspecto pôde ser verificado, por exemplo, no Projeto I, quando, ao apresentar a atividade envolvendo as operações com polinômios, no que se refere ao algoritmo da divisão, os alunos terem pensado, inicialmente, tratar-se de uma divisão do polinômio representante da área da base da "caixa 1", pelo polinômio representante da área da base da "caixa 2". Ao compartilharem seus posicionamentos em Plenária, considerando as áreas das bases das caixas construídas, foi possível, com uma forte intervenção da pesquisadora, verificar que o que estavam fazendo era a comparação multiplicativa entre duas grandezas: as áreas das bases das caixas, chegando à conclusão de que essa comparação multiplicativa era uma razão da área da base de uma das caixas em relação à área da base da outra caixa, num determinado ponto em que o polinômio era definido.

A resolução de Problemas, conforme apontou Onuchic e Allevato (2004), "coloca o foco da atenção dos alunos sobre idéias e sobre o 'dar sentido'" (p.223) aos conteúdos trabalhados. Este foi um aspecto muito forte nesta pesquisa, pois os alunos tiveram a oportunidade de irem construindo o conhecimento por meio de representações que foram sendo aperfeiçoadas ao longo das discussões. Neste sentido, "quanto mais condições se dêem aos alunos para pensar e testar uma idéia emergente, maior é a chance de essa idéia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de idéias e compreensão relacional" (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p.220). Todo esse processo foi mediado pela professora-pesquisadora por meio da interação social, agindo na zona de desenvolvimento proximal que, segundo Vygotsky (1979), é definida como sendo "a discrepância entre a idade mental real de uma criança e o nível que ela atinge quando resolve problemas com auxílio" (p.137).

Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, o professor age na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, de modo a levá-los a desenvolver o raciocínio e a compreensão dos conteúdos trabalhados, pois, na visão dessa metodologia, "compreender é essencialmente relacionar" (ONUCHIC e ALLEVATO, p.222). Assim, nesta pesquisa, observar os gráficos, construídos para os perímetros e áreas das bases das caixas e para os volumes das caixas e a eles associar a construção das caixas até chegar ao conceito de função, proporcionou a esses alunos uma aprendizagem, com compreensão e significado, em que os conceitos se apresentaram sempre ligados a um contexto.

> Vamos notar imediatamente que uma representação Matemática não pode ser compreendida isoladamente. Uma fórmula específica ou uma equação, um arranjo concreto de blocos de base dez ou um gráfico particular em coordenadas cartesianas, faz sentido somente como parte de mais um amplo sistema dentro do qual, significados e convenções foram estabelecidos. Os sistemas representacionais importantes para a Matemática e sua aprendizagem têm estrutura, de modo que diferentes representações dentro de um sistema estão ricamente relacionadas um ao outro (GOLDIN, G., SHTEINGOLD, N. NCTM, 2001, p.1, tradução nossa).

No Capítulo 1, citando Romberg (2007), nos propusemos a apresentar sugestões, dificuldades ou modificações, neste trabalho de pesquisa, que possam contribuir com o trabalho de futuros educadores que venham a ter acesso a este material. Neste sentido, convém ressaltar que, caso o trabalho aqui desenvolvido seja aplicado em salas mais numerosas, a estratégia de registro das aulas (se este for o caso) baseada nas gravações de áudio, devam ser reconsideradas. Durante toda pesquisa de intervenção, tivemos muito trabalho para entender o que os alunos diziam devido ao alto nível de ruído externo ao trabalho. Dessa forma, antes de um trabalho extenso como este, é preciso preparar os alunos para os registros das conclusões. Esses registros não podem ser como os alunos imaginam. Seria interessante que o pesquisador desenvolvesse, de antemão, um roteiro de como devam ser registradas as conclusões. Assim, diante de uma gravação complicada, a busca do esclarecimento seria mais direta.

Outros aspectos devem ser reconsiderados neste trabalho de pesquisa, entretanto, não iremos enumerá-los. O mais difícil de todos talvez seja o fato de ter sido, ao mesmo tempo, a professora da sala e a pesquisadora. Foi muito difícil separar estes dois aspectos em função de seu caráter subjetivo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referências Bibliográficas

ALVES-MASOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O planejamento de pesquisas qualitativas.** O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998. p.147-178.

ANDRADE, S. **Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Decodificação de Problemas e a Multicontextualidade da Sala de Aula.** 1998. (325p.) Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campus Rio Claro.

AULETE, Caldas. **Dicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa**. 2ª Edição Brasileira, Vol.5. Rio de Janeiro: Editora Delta S. A., 1964. (5 Volumes).

AZEVEDO, E. Q.; **Ensino-aprendizagem das Equações Algébricas através da Resolução de Problemas.** 2002. (176 p.) Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campus Rio Claro.

BALDINO, R. R. **O "Mundo Real" e o Dia-a-Dia na Produção de Significados Matemáticos**. In: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Ano 11, nº 12, 1997. UNESP – Rio Claro. p. 1-11.

BARALDI, I. M. **Matemática na escola:** que ciência é esta? Cadernos de divulgação cultural. Editora USC, 1999, Bauru, EDUSC, 179 páginas.

BARNETT, Charles Jeffrey. Problemas de livros didáticos: complementando-os e contendendo-os. In: KRULIK, S; REYS, R. E. (Ed.). **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p.133-147.

BIKLEN, S. K.; **Investigação Qualitativa em Educação**. Uma Introdução a teoria dos métodos. Fundamentos da Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução. p. 13-18. Porto Editora. 1982.

BOGDAN R. C.; BIKLEN, S. K.; **Características da investigação qualitativa.** Investigação Qualitativa em Educação. p. 47-51. Porto Editora. 1982.

BRANCA, N. A. Resolução de Problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S; REYS, R. E. (Ed.). **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 4-12.

BRANSFORD, J.; *et al* (Ed); How People Learn – Brain, Mind, Experience, and School. Expanded Edition. National Research Council. National Academy Press; 2000. 374 páginas.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio.** Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999. nº3. 113p.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental, 1998. 148p.

BRUNHEIRA, L. ; FONSECA, H. Investigar na aula de Matemática. In: ABRANTES, P. *et al*. (Org**.). Investigar para aprender Matemática**. Lisboa, Grupo "Matemática para todos – investigações na sala de aula" (CIEFCUL) e associação de Professores de Matemática, 1996.

BUSQUETS, M. D. *et al*. **Temas transversais em educação**. São Paulo: Editora Ática, 1997.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S; REYS, R. E. (Ed.). **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

CAPRARA, A. O Papel e as Características do Professor. In: MAMEDE, S.; PENAFORTE, J. (Orgs.) **Aprendizagem baseada em problemas***:* anatomia de uma nova abordagem educacional. Fortaleza: Hucitec, 2001. p. 157-182.

CARRAHER, T. N.; CARRHAER, D.; SCHLIEMANN, A.; **Na vida de na escola zero**. 2001. Editora Cortez. (11ª edição). 182 p.

CASTORINA, J. A. *et al*. **Piaget/Vygotsky. Novas contribuições para o debate**. Ática, São Paulo, 2001. 175p.

CECI, S. O tratado bioecológico de Stephen Ceci sobre o desenvolvimento intelectual. In: GARDNER, H; KORNHABER, M. L.; WAKE, W. K. **Inteligência:** múltiplas perspectivas. Porto Alegre: Artmed, 1995. 244-256p.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Tarefa e Actividade. In: ________. **Perspectives on mathematics education.** Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 243-307. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/mestrado-bibliografia.htm> Acesso em: 28 maio. 2005.

CUNHA, M. H. **Saberes profissionais de professores de matemática**. Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. *Revista Millenium on line.* n. 17, 2000. Disponível em: <www.ipv.pt> Acesso em: 10 maio. 2006.

DAVIS, J. D. Putting it All into Context: "Students and Teachers" Learning in One Mathematics Classroom. Charter 9. p.141-151. In: MARTIN W.G.; et al (Ed**). The Learning of Mathematics** – Sixty-ninth Yearbook. 2007.

EISENBERG, T.; DREYFUS, T.; Os polinômios no currículo da escola média. In: CONFORD, A. F; SHULTE, A. P. (Org). **"As idéias da álgebra".** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. Primeira publicação 1988 pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). p. 127-134.

ERNEST, Paul. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: ABRANTES, P; LEAL, L. C.; Ponte, J. P. **Investigar para Aprender Matemática** (textos selecionados). *Lisboa:* Associação dos Professores de Matemática, 1996. p. 25-48.

ESCHEVERRIA, M. del P. P. A solução de problemas em matemática. In: POZO, J. I (Org). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 43-65.

ESCHEVERRIA, M. del P. P; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-42.

GARDNER, H. *et al*. **Inteligência**: Múltiplas perspectivas. Porto Alegre: Artmed, 2003. p. 244-256.

GOLDIN, G.; SHTEINGOLD, N. Roles for representations – Part 1. Systems of representations and the development of Mathematical concepts. p. 1-23. In: **The roles of representation in school Mathematics.** Albert A. Cuoco; Francês R. Curcio. 2001. Yearbook. National Council of teachers of Mathematics (NCTM). Reston. Vírginia.

HOUAISS, Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa, São Paulo, Editora Objetiva, 2001. 3008p.

HOUSE, P. A.; Álgebra: Idéias e Questões. In: COXFORD, A. F; SHULTE, A. P. (Org). **"As idéias da álgebra".** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. Primeira publicação 1988 pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). p. 1-8.

IMENES, L. M.; LELLIS, M.C. Matemática para todos: 7ª série do Ensino Fundamental. São Paulo: Scipione, 2002. 336p. (Coleção para todos).

IMENES, L. M.; LELLIS, M.C. Matemática para todos: 8 ano do Ensino Fundamental. São Paulo: Scipione, 2006. 352p. (Coleção para todos).

IRACEMA, M.; ONAGA, D. S.; Matemática: Idéias e Desafios. 7ª série: 8º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: Saraiva. 2006. 320p. (13ª edição reformulada).

KANTOWSKI, M. G. Algumas considerações sobre o ensino para a resolução e problemas. In: KRULIK, S; REYS, R. E. (Ed.). **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 270-282.

KÁTIA, C. S. S.; ROKU, K. Matemática. Ensino Médio, Volume 3. São Paulo: Saraiva, 1999. Segunda edição. 333p.

KRULIK E RUDNNICK; Roads to Reasoning – Developing Thinking Skills Through Problem Solving, Mac Graw-Hill. Grade 5, Chicago: Creative Publications. 2001, 84p.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo. EPU, 1986, p.11-24.

MAMED, S. E PÉNAFORT (Org.). Aprendizagem baseada em problemas. São Paulo: Hucitec, 2001. p. 13-23.

MENDONÇA, M. C. Resolução de Problemas Pede (Re) Formulação. In: ABRANTES, P.; PONTE, J. P. da; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. ***Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo.*** Lisboa: Grupo "Matemática Para Todos – investigações na sala de aula" (CIEFCUL) e Associação dos Professores de Matemática. 1999. p. 15-33.

MIRAS, M. Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In: Coll. C. *et. al*. **O construtivismo na sala de aula.** São Paulo: Ática, 2003. p 57-77.

MOREIRA, M. A.; Teorias de Aprendizagem. Educação Pedagógica. São Paulo EPU, 1999. 195 páginas.

MORETI, V. D., O Conceito de função: Os conhecimentos prévios e as interações sociais como desencadeadoras da aprendizagem. 1998. (158 p). Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo. Faculdade de Educação. São Paulo, 1998.

MOYSÉS, L. Aplicação de Vygotsky à educação Matemática. Campinas: Papirus, 1997.

NCTM. Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar. Lisboa, APM e IIE, 1994.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky – Aprendizado e desenvolvimento**. Um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1997. 111p.

ONUCHIC, L. De la R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Orgs.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

ONUCHIC, L. De la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) ***Pesquisa em educação matemática***: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** Um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2ª Reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 1ª tiragem: 01 de Agosto de 1944; 196 p.

POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S; REYS, R. E. (Ed.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, ano de publicação: 1997. 1ª tiragem: 1980; p. 1-3.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H**. Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

POZO, J.I. (Org.). **A solução de Problemas**. Artmed, Porto Alegre, 1998.

PROJETO ARARIBÁ, Matemática. 7ª série do Ensino Fundamental. Livro do Professor. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. 2005. Editora responsável: Juliane Matsubara Barroso.

RIBEIRO, L. R. C. A aprendizagem baseada em problemas (PBL): Uma implementação na educação em engenharia na voz dos atores. 2005. 209f. Tese (Doutorado em Metodologia de Ensino). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2005.

RIBEIRO, L. R. C.; MIZUKAMI, M. G. An experiment with PBL in higher education as appraised by the teacher and students. *Interface.* mar./ago. 2005, vol.9, nº.17, p.357-368.

RIBEIRO, L. R. C.; MIZUKAMI, M. G. Uma Implementação da Aprendizagem Baseada e Problemas (PBL) na Pós-Graduação em Engenharia sob Ótica dos Alunos. *Interface.* Setembro. 2004. vol.25, p.89-102.

ROMBERG, A. T.; **Perspectivas sobre o Conhecimento e o Método de pesquisa** – Perspectives on Scholarship and Research Methods. Seção especial. In: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Ano 20, nº 27, 2007. Tradução: Lourdes de la Rosa Onuchic e Maria Lúcia Boero. UNESP – Rio Claro. p. 93-139.

STANIC, G.M.A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: SILVER, R.I.C.E.A. (Ed.). *The Teaching And Assessment of Mathematical Problem Solving.* VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989, p. 1-22.

STEPHEN, K.; RUDNICK, J. A; Problem – Driven Math. Appling the Mathematics Beyond Solution. Grade 6; 2005; Editora Mc Graw-Hill. p. 79-81.

STEPHEN, K.; RUDNICK, J. A; Roads to Reasoning – Developing Thinking Skills Through Problem Solvingn. Grade 8; 2002; Editora Mc Graw-Hill. p. iv-v.

STERNBERG, R.J. Psicologia cognitiva. Porto alegre: Artmed, 2000.

TOMAZ, J. B. A Construção Narrativa de Problemas. In: MAMEDE, S.; PENAFORTE, J. (Orgs.) **Aprendizagem baseada em problemas***:* anatomia de uma nova abordagem educacional. Fortaleza: Hucitec, 2001. p. 141-156.

USISKIN, Z.; Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: CONFORD, A. F; SHULTE, A. P. (Org). **"As idéias da álgebra".** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. Primeira publicação 1988 pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). p. 9-22.

VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R; LEONTIEV, A. N. **Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar.** Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. Tradução: Maria da Penha Villalobos. São Paulo: Ícone, 1988. p.103-117.

VYGOTSKY, L. S., Pensamento e Linguagem. Lisboa: Antídoto, 1979, 1988. Edição 42.

VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes, 1984. 6ª edição.

WALLE, J. A. V. Elementary and middle school Mathematics. Teaching Developmentally. Fourth Edition. 2001. New York. 576p.

WALLE, J. A. V.; LOVIN, J. A. H. **Teahing Student-Centered. Mathematics**. Grades 5-8. Volume Three. Chapter 10 - Functions concepts and representations. Exploring Functions. United States. 2006. p. 284-307.

APÊNDICE

APÊNDICE

1. Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Piracicaba, 27 de Setembro de 2006.
Projeto de Mestrado: Professora Rosilda dos Santos Morais.
Escola Cooperativa de Piracicaba – COOPEP
Componente Curricular: Matemática

Venho, por meio deste, informar aos pais ou responsáveis dos estudantes da Escola COOPEP de Piracicaba, freqüentadores do 7º ano do Ensino Fundamental II, que sou estudante do curso de Mestrado em Educação na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), no departamento de Metodologia de Ensino, linha de pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática.

Como parte integrante deste projeto, intitulado: O Processo de Formulação e Solução de Problemas Contextualizados de Matemática: uma abordagem sócio-interacionista, tenho que realizar uma coleta de dados com estudantes de 7º ano, visando estudar “Como e em que extensão os estudantes irão propor problemas correspondentes ao contexto fornecido?” e “Qual será o processo de resolução utilizado pelos estudantes em problemas de Matemática contextualizados, tanto no aspecto individual como no social?”.

O ponto de partida, para o desenvolvimento desse trabalho, será a partir dos conhecimentos prévios que os estudantes já dispõem, dado num ambiente contextualizado. A escolha do 7º ano para a realização da coleta, deu-se em função do trabalho que venho desempenhando com os estudantes desta série na Escola COOPEP, há mais de um ano, o que viabiliza as relações interpessoais entre a pesquisadora, eu, neste caso, e os sujeitos da pesquisa, os estudantes.

Para tanto, realizaremos um estudo sobre Polinômios, conforme conteúdo programático para esta série, a partir da construção de caixas de papelão. Ou seja, tenho como objetivo desenvolver o estudo de Polinômios com todas as suas operações, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir, a partir da construção dessas caixas.

Os objetivos do projeto aqui proposto podem ser assim expressos:

- Inserir contextualização em conceitos de Matemática, visando verificar se a mesma propicia formulação de problemas pelos próprios estudantes.
- Analisar o processo de resolução de problemas utilizado pelos estudantes no aspecto individual e no social.
- Verificar quais conhecimentos os estudantes já dispõem que viabilizarão o processo de aprendizagem.

Venho por meio deste, solicitar sua(s) autorização(ões) para gravar as vozes de seu filho(a), estudante do 7º ano, durante a realização das aulas de Matemática, especificamente, no mês de Outubro.

O objetivo dessa gravação consiste em verificar as manifestações dos estudantes quanto às dúvidas, sugestões ou opiniões que venham à colaborar para esta pesquisa.

Os estudantes estarão dispostos em grupos de 3 elementos, escolhidos por sorteio, para a realização das atividades. Cada grupo receberá um gravador de voz que deverá ficar sobre a mesa. A partir daí, o conteúdo será desenvolvido e posteriormente suas falas serão analisadas pela pesquisadora.

Convém ressaltar que, em nenhum momento, o conteúdo programático para esta série será interrompido por conta deste trabalho. Iremos apenas, aplicar uma metodologia diferenciada para o desenvolvimento deste conteúdo de modo mais significativa.

Atenciosamente: Rosilda dos Santos Morais ______________________________

Visto: Cláulida Helena Georgine Genaro ________________________________

Diretora da Escola COOPEP

Autorização: Eu ____

responsável pelo (a) estudante (a) ____

freqüentador (a) do 7º ano do Ensino Fundamental da Escola COOPEP de Piracicaba, autorizo-o (a) a participar do projeto de pesquisa-mestrado da professora de Matemática, Rosilda dos Santos Morais, durante as aulas de Matemática.

Piracicaba, __/__/_____

Assinatura: ____

2. Questionário de Avaliação

Questionário de análise da coleta de dados, entregue aos alunos da 7ª série da Escola Cooperativa de Piracicaba (COOPEP), referente à dissertação de mestrado da professora Rosilda dos Santos Morais, aluna do Programa de Pós Graduação em Educação (PPGE), da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Área: Metodologia de Ensino. Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática.
Disciplina: Matemática

Tema: Polinômios

1) Qual é a sua opinião sobre o método utilizado no ensino de Polinômios?

2) Houve alguma parte no ensino de Polinômios que você teve mais dificuldade em compreender o que estava fazendo? Em caso positivo, explique qual (is) foi (ram) a (s) dificuldade (s).

3) O que você gostaria que tivesse sido considerado durante o ensino dos Polinômios para aumentar a sua aprendizagem? Explique.

4) Você gostaria que outros assuntos de Matemática fossem desenvolvidos da mesma forma como foi o ensino de Polinômios?

5) O que lhe despertou mais ou menos interesse durante o ensino dos Polinômios? Explique.

6) Você já teve outras aulas de Matemática que tenha utilizado o mesmo método que o do ensino de Polinômios? Em caso positivo, como foram desenvolvidas essas aulas?

7) Você gostou de trabalhar em grupos de discussão durante as aulas sobre Polinômios? Explique.

8) Quais os conhecimentos sobre Polinômios que você adquiriu durante o ensino desse assunto? Seja detalhista.
9) De que forma esses conhecimentos serão úteis?

10) Comentários, sugestões e críticas que deseja fazer.