UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

A EXPLORAÇÃO-INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: POTENCIALIDADES NA FORMAÇÃO CONTÍNUA DE PROFESSORES

Maiza Lamonato

SÃO CARLOS, SP
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

A EXPLORAÇÃO-INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: POTENCIALIDADES NA FORMAÇÃO CONTÍNUA DE PROFESSORES

Maiza Lamonato

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação, Área de Concentração: Processos de Ensino e de Aprendizagem.
Orientadora: Profa. Dra. Cármen Lúcia Brancaglion Passos.

SÃO CARLOS, SP
2011

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

	Lamonato, Maiza.
L234ei	A exploração-investigação matemática : potencialidades na formação contínua de professores / Maiza Lamonato. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
	250 p.
	Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.
	1. Professores - formação. 2. Educação matemática. 3. Formação continuada de professores. 4. Aprendizagem docente. 5. Matemática - estudo e ensino. 6. Narrativas. I. Título.
	CDD: 370.71 (20ª)

BANCA EXAMINADORA

Profª Drª Cármen Lúcia Brancaglion Passos	
Profª Drª Maria do Carmo de Sousa	
Profª Drª Renata Prenstteter Gama	Renata Prenstteter Gama
Profª Drª Regina Célia Grando	
Prof. Dr Mauro Carlos Romanatto	Mauro Carlos Romanatto

A Deus,
ao meu marido Jean,
ao meu pai,
à minha mãe (*in memorian*) e
aos meus avós (*in memorian*)...
Com muito amor e carinho.

Esse documento foi elaborado com o formatador de textos LaTeX.
No sistema de citações, de referências bibliográficas e de formatação do documento foi utilizado o pacote *abntex*.

mlamonato@fortuna.jard.com.br

Agradecimentos

Agradeço

a Deus pela vida, pela saúde e pela perseverança em todos os momentos. Sei que foi por Ele que esse trabalho se concluiu e que mais esse sonho se realizou.

ao meu marido Jean Piton, pela sua paciência e compreensão nas minhas ausências... Pelo amor e companhia de todos os dias... Por todo o apoio, auxílio e ensinamentos que tornaram esta tese possível. Por dividir sonhos, por ser parte da minha vida... Pelo cuidado e carinho constante...

aos meus avós Oswaldo e Izabel e à minha mãe Maria Izabel, que não estão mais aqui e se dedicaram para que eu pudesse estudar. Ao meu pai Eugênio, pela presença de todos os dias, por acreditar em minhas escolhas. Ao meu irmão Eugênio, por acreditar nas minhas esolhas.

à Gisele, minha amiga-irmã, que sonhou comigo nessa pesquisa e nunca mediu esforços para torná-la realidade.

à minha orientadora, Cármen Lúcia Brancaglion Passos, pela amizade, pelo carinho e pelos ensinamentos. Pela liberdade e confiança que a mim foi depositada. Pelo exemplo e pela atenção em todos os momentos.

à Profa. Dra. Maria do Carmo de Sousa, à Profa. Dra. Regina Célia Grando, à Profa. Dra. Renata Prenstteter Gama e ao Prof. Dr. Mauro Carlos Romanatto, pelas valiosas contribuições no Exame de Qualificação, no Exame de Defesa e nos diversos diálogos sobre essa pesquisa.

aos professores do PPGE da UFSCar e em especial àqueles com os quais tive o prazer de ser aluna. Sou grata aos ensinamentos e às provocações que colaboraram para essa pesquisa.

aos funcionários do PPGE pela atenção e prontidão no atendimento.

aos colegas do curso, da turma de 2008, pelas alegrias e pelos diálogos.

às professoras participantes dessa pesquisa: Andréa, Gisele, Léia, Cidinha, Natália, Dulce e Eunice, pela confiança, pelo apoio, pelas reflexões compartilhadas e pelas aprendizagens que me proporcionaram. Aos seus alunos, principalmente com quem tive contato, pela acolhida e pelo respeito.

aos meus amigos e demais familiares, pela compreensão em todos os meus "não posso, estarei ocupada".

aos colegas de trabalho da Casa da Ciência Galilei Galilei, da Secretaria Municipal da Educação de Ribeirão Preto, pelas palavras de apoio e de reconhecimento. Aos amigos, pela torcida.

aos professores do Departamento de Metodologia de Ensino e do Departamento de Teorias e Práticas Pedagógicas, colegas de trabalho de 2011, pelo estímulo e pelos diálogos acadêmicos que me levaram a muitas reflexões.

à Pró-Reitoria de Extensão da UFSCar pelo apoio e subsídios aos Projetos de Extensão desenvolvidos.

a todas as pessoas não mencionadas anteriormente que contribuíram para a conclusão desta investigação.

Resumo

Esta tese investigou as potencialidades formativas da exploração-investigação matemática para o professor que ensina matemática para crianças de 6 a 11 anos — professoras que lecionam nos anos iniciais do ensino fundamental, uma professora da educação infantil e uma professora de matemática, graduanda em pedagogia — tendo como foco: (a) o desenvolvimento de atividades exploratório-investigativas em um grupo de professoras que se reunem periodicamente e (b) as práticas pedagógicas das professoras que foram desenvolvidas com referência à exploração-investigação matemática. A questão diretriz foi delimitada como "Quais são as potencialidades formativas da exploração-investigação matemática para o conhecimento do professor e de suas práticas?". Tendo como contexto de constituição dos dados, um grupo de formação contínua com as participantes e a pesquisadora, na perspectiva da pesquisa qualitativa, esta tese, em estilo narrativo, analisou a representação da experiência vivida, valorizando a perpectiva das participantes no grupo, resultando em um texto constituído em um movimento contínuo de viver, representar, interpretar (analisar) e novamente representar. O material analisado foi composto por videogravações e respectivas transcrições feitas pela pesquisadora, narrativas (orais e escritas) da pesquisadora e das participantes, diário de campo da pesquisadora, registros escritos das professoras e dos alunos e fotografias. Tendo como fundamento autores que tratam da exploração-investigação matemática, das aprendizagens de professores e destes como profissionais protagonistas de sua formação ao longo da vida, dentre os resultados, destaca-se que as atividades exploratório-investigativas foram favorecedoras da ampliação dos conhecimentos de conteúdos geométricos das professoras, em suas estruturas substantiva e sintática e pelas reflexões sobre o uso de recursos didáticos. Além disso, foi possível relacionar uma ou mais tarefas em uma sequência e identificar as atividades desenvolvidas como promotoras de problematização das práticas das professoras. Na sala de aula dos anos iniciais do ensino fundamental, as atividades se desdobraram em problemas abertos e em exploração-investigação propriamente dita, favorecendo a criação de um ambiente de negociação de significados e comunicação de ideias com as crianças. Isso permitiu aprendizagens docentes, pelo melhor conhecimento sobre o que as crianças já sabem, como elas podem argumentar, questionar e estabelecerem posturas investigativas que ultrapassam as aulas com conteúdos de geometria e sobre os modos de intervenção do professor para possibilitar tais situações.

Palavras-chave: Professores – formação; Formação contínua; Atividade exploratório-investigativa; Ensino de crianças – matemática e geometria; Aprendizagem docente.

Abstract

This thesis work evaluated the formative potentialities in mathematical exploration-investigation for the professionals teaching mathematics for children from six to eleven years old — pre-school teachers, teachers of the elementary school, and a professor of mathematics (student in pedagogy) — focusing: (a) the development of exploratory-investigative activities in a group of teachers which periodically meet together for share new professional experiences, and (b) professional pedagogic practices developed with reference to the mathematical exploration-investigation. The main question was described: "What are the formative potentialities of the mathematics exploration-investigation for teachers' engagement in developing mathematics teaching?". The context of this work was to obtain the data collection of a continuous forming group involving the participants and the researcher, in order to investigate this thesis qualitatively — in narrative style — evaluating the life experiencing representation, valuing the perspectives of the group participants, producing a text based in a continuous movement for life, representing, evaluating, and representing again. The material analyzed was composed by: video recordings transcribed by the researcher; written and oral narratives from researcher and participants; researcher´s diary notes; written data of teacher and their students and pictures. According with the data of the authors who analyze the mathematics exploration-investigation, the professional apprenticeship, and formation in their life we could conclude that the explorative-investigative activities were the responsible for the increasing teachers' knowledge of geometrical contents in their substantive and syntactic structures, and reflections about didactic resources. Besides, it was possible to evidentiate elements that relate tasks in a sequence, and the activities developed as promoter of problematization of professionals practices of the teachers. In the classroom of the first years of the elementary school, the activities were transformed in opened problems and exploration-investigativon, with encouraging the creation of an environment of negotiation of meaning and communication of ideas with the children. This has enabled teachers apprenticeship for improve their knowledge about their students and how they might arguing, questioning and establishing investigative positions in geometry class and in other contents and about way of teacher's intervention to enable such situations.

Key-words: Teachers education; In-service education; Exploratory-investigative activities; Education of chindren — mathematics; Teacher's apprenticeship.

Lista de Figuras

Sumário

1 A constituição da pesquisa, o percurso e as opções teórico-metodológicas

Neste capítulo, na **Seção 1.1 — Das inquietações à proposta da pesquisa**, apresento as origens da pesquisa, delineando o foco de investigação e sua localização na literatura. Os objetivos, a questão diretriz, os princípios norteadores e a constituição de um grupo de professoras e do contexto de formação contínua estão na **Seção 1.2 — Dos objetivos ao planejamento da pesquisa: princípios norteadores e constituição do grupo de professoras**.

Posteriormente, apresento a caracterização das professoras participantes (**Seção 1.3 — As professoras participantes**). As decisões e fundamentos teórico-metodológicos nos quais desenvolvi a pesquisa, incluindo as considerações sobre formação e suas implicações para a obtenção dos dados e para a análise estão na **Seção 1.4 — Do contexto formativo à análise dos dados: decisões que norteiam a pesquisa**. Além disso, detalho e amplio procedimentos de constituição dos dados na **Seção 1.5 — Da constituição dos instrumentos de registro das experiências: outros elementos**.

Na última seção (**Seção 1.6 — A exploração-investigação matemática e aspectos do ensino de geometria**), discuto aspectos da exploração-investigação matemática presente na literatura, provenientes de meus estudos sobre a temática desde 2004, os quais relacionarei com a formação contínua de professores na **Subseção 1.6.1 — A exploração-investigação matemática: da sala de aula da Educação Básica para a formação de professores**. Em outra subseção, acrescento aspectos relacionados às argumentações e provas no ensino de matemática, a favorável relação entre exploração-investigação e os conteúdos geométricos e elementos do ensino de geometria — **Subseção 1.6.2 — A**

exploração-investigação matemática em conteúdos geométricos, aspectos relacionados às argumentações e provas no ensino de matemática e elementos didáticos do ensino de geometria.

1.1 Das inquietações à proposta da pesquisa

O projeto desta tese teve seu início logo após a defesa de minha dissertação de mestrado (LAMONATO, 2007) pois minhas inquietações se dirigiam (e ainda se dirigem) para a exploração-investigação matemática no contexto da sala de aula da educação básica e na formação de professores.

Considerando o professor como produtor de conhecimentos e a formação como um cenário de produção e ressignificação de saberes, em Lamonato (2007) investiguei quais conhecimentos eram revelados por professoras de educação infantil que lecionavam para crianças de seis anos, quando estas se envolviam com atividades exploratório-investigativas. Os conhecimentos das quatro professoras que participaram de um curso de formação contínua revelaram que, durante as atividades propostas, foram mobilizados e reconstruídos conhecimentos de conteúdo específico que incidiram em reelaborações de conhecimento pedagógico do conteúdo e de conhecimentos curricular. A exploração-investigação matemática na sala de aula da educação infantil deu-se principalmente no desenvolvimento de uma dinâmica, na qual o professor investiga *junto* com seus alunos, proporcionando que estes possam levantar hipóteses, testá-las, reformulá-las e justificar suas escolhas. No tocante à aprendizagem docente, a reflexão sobre a prática mostrou-se como fator propulsor de desenvolvimento profissional na medida em que, de modo individual ou coletivo, as professoras puderam reconhecer-se ou estranhar-se ao problematizarem suas práticas planejando e desenvolvendo atividades para/com seus alunos.

A dissertação envolveu professoras que lecionavam para crianças de seis anos e desta vez minha opção foi aprofundar e ampliar a pesquisa sobre a exploração-investigação matemática, focando em suas potencialidades formativas para o conhecimento do professor e suas práticas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Na dissertação, as narrativas não foram mencionadas e eu ainda não tinha estudos sobre suas possibilidades formativas e investigativas. Além disso, durante a dissertação, todas as professoras lecionavam para um mesmo ano escolar (última etapa da Educação Infantil) enquanto que na tese, previamente considerei que os foco de seu trabalho e suas necessidades pudessem nao ser tão próximos entre si quanto na primeira situação. Por fim, as inquietações centraram-se em entender o alcance da exploração-investigação matemática na sala de aula dos anos iniciais *até* ou *para além* da dinâmica já estabelecida na Educação Infantil — em atividade coletiva, do professor junto com seus alunos — e em um contexto de formação contínua de professores.

Ao mencionar anos iniciais do Ensino Fundamental, considero a legislação brasileira[1] que preconiza que a partir de 2007 os sistemas de ensino se reorganizariam de maneira a constituir o Ensino Fundamental com duração de nove anos, sendo que de 1^a a 4^a séries teria o acréscimo de mais um ano escolar, passando a compor cinco anos escolares: 1^o ao 5^o ano. Com isso, as quatro séries finais (5^a a 8^a) passaram a ser entendidas como 6^o ao 9^o ano. Com o acréscimo de um ano, as crianças com seis anos de idade (ou a completar durante o ano letivo) — faixa etária vinda da Educação Infantil — são os alunos do 1^o ano do Ensino Fundamental. A ampliação do Ensino Fundamental ocorre no país conforme determinam seus sistemas de ensino, sejam estaduais, municipais ou federais, tendo estes, a autonomia para legislarem sobre a idade inicial de entrada das crianças no Ensino Fundamental bem como sobre as formas de implantação do ensino de nove anos.

Após a pesquisa do mestrado, pelo meu trabalho docente com a exploração-investigação nos anos finais do ensino fundamental e na formação contínua de professores avistei a necessidade de aprofundar os estudos sobre as potencialidades formativas da exploração-investigação matemática para o conhecimento e prática do professor que aprende e ensina matemática. Imbuída dessa necessidade e com vistas à literatura, a presente pesquisa foi planejada e desenvolvida, com os pressupostos teóricos e metodológicos que adiante estarão expostos.

Para o planejamento da tese, tive como ponto de partida as experiências vivenciadas na dissertação, optando pela mesma perspectiva de formação e novamente em utilizar vários instrumentos de constituição de dados já conhecidos: videogravações (analisadas por

[1] Lei n^o 11.274 de 06 de fevereiro de 2006, disponível em <http://www.http://www6.senado.gov.br/sicon/ListaReferencias.action?codigoBase=2&codigoDocumento=253755> Acesso em 20 de novembro de 2006.

mim), transcrições, diários de campo e fotografias. Além disso, houve registros escritos (anotações e desenhos) e narrativas produzidas pelas participantes, sendo estas entendidas como um recurso para representar suas experiências do contexto formativo do grupo ou de suas práticas docentes.

Deste modo, esta tese foi elaborada com os dados advindos de um curso de formação proposto para professores dos anos iniciais do ensino fundamental que se desenvolveu com características de um grupo — professores participam porque interessam-se em adquirir novos conhecimentos e compartilhar experiências, com pauta de trabalho construída na medida em que são demandadas necessidades e temas nas discussões e flexibilidade de tempo para estender ou finalizar as atividades dependendo do interesse e envolvimento dos participantes.

Nos encontros com as professoras, eu apresentava tarefas exploratório-investigativas com conteúdos geométricos com o intuito de provocar reflexões e discussões sobre os conhecimentos e práticas docentes das participantes. Os desmembramentos das atividades e a elaboração destas eram feitas por mim de modo que fosse ao encontro das reflexões já ocorridas ou ainda da manifestação de interesse de algumas delas. Devido ao objeto de pesquisa, a elaboração das tarefas ficou prioritariamente para mim, mas várias delas surgiram no próprio grupo, por questionamentos ou situações propostas pelas professoras, mesmo que sem o propósito de elaborar uma tarefa.

As atividades exploratório-investigativas apresentadas às professoras subsidiaram a ideia central da tese de que tal abordagem metodológica favorece e promove aprendizagens docentes referentes aos conteúdos envolvidos, aos modos de ensiná-los e desencadeiam a problematização dos conhecimentos das professoras e de suas práticas de sala de aula, incidindo na reelaboração e ressignificação destes a fim de favorecer o desenvolvimento do trabalho do professor como questionador de sua prática.

Para isso, há necessidade de que a perspectiva de formação adotada considere o professor como autor e construtor de conhecimento e a formação como contexto favorável para suas aprendizagens, tomando como elementos sua própria história, suas expectativas e necessidades. Nesse sentido, um curso alinhado à ideia de grupo, com flexibilidade de tempo no desenvolvimento das atividades, com uma dinâmica que permita ouvir e ser ouvido e com a utilização de outros instrumentos que favoreçam a reflexão, como as narrativas, compõem o cenário para o desenvolvimento da pesquisa pretendida.

Nas reflexões após o desenvolvimento dos trabalhos de constituição dos dados, entendo que o contato direto e prolongado com as professoras durante o desenvolvimento da pesquisa proporcionou-me ratificações e reafirmações de suas declarações que enriqueceram a análise dos dados, uma vez que suas falas e seus registros escritos puderam ser melhor compreendidos por eu *estar junto* com elas no grupo e conhecer parte do contexto dessas declarações e registros.

Para melhor delimitar o cenário, optei por priorizar nas tarefas planejadas conteúdos relacionados à geometria para os anos iniciais do ensino fundamental (em síntese: localização e deslocamentos, representações dos objetos e do espaço e formas e figuras geométricas). Essa escolha deu-se pelo meu gosto pessoal por esse campo da matemática, tanto pelo interesse e satisfação em ensiná-lo quanto por perceber, em minha prática em cursos de formação contínua, que a geometria é identificada por muitos professores como uma parte da matemática em que eles sentem necessidade de aprofundar seus conhecimentos. Além disso, é necessário destacar que os conteúdos geométricos são favoráveis à abordagem exploratório-investigativa pelas suas componentes intrínsecas: intuição, representação, visualização e experimentação, mesmo que de modos diferenciados para geometria plana e geometria espacial.

Finalmente, a revisão bibliográfica[2] permitiu-me identificar que nenhuma das dissertações ou teses brasileiras encontradas tiveram como objeto de estudo a exploração-investigação matemática para as aprendizagens docentes de professores que lecionam para alunos do início da Educação Básica (educação infantil ou do 1^o ao 5^o ano do Ensino Fundamental) em contexto de formação contínua.

Localizei dissertações[3] que tiveram como foco de pesquisa a exploração-investigação (ou tarefas investigativas ou atividades exploratório-investigativas, dependendo da

[2]Data-base referência: primeiro semestre de 2009. Após esse período incluí pesquisas do PPGE/UFSCar e aquelas de que tive conhecimento em congressos e eventos da área de Educação Matemática. As buscas foram feitas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) do Instituto Brasileiro de Informações em Ciência e Tecnologia (http://bdtd2.ibict.br/). Além disso, incluí outras bases de dados que percebi não estarem inseridas na BDTD: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita (UNESP), Universidade São Francisco (USF) e Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

[3]Por perceber que diversas pesquisas brasileiras, como minha própria dissertação e leituras feitas, identificam pesquisadores portugueses que escrevem sobre atividades investigativas no ensino de matemática, menciono teses e dissertações portuguesas na revisão bibliográfica.

opção de seus autores) desenvolvidas com um ou mais alunos da Educação Básica: Bertini (2009), Araújo (2006), Baccarin (2008), Calhau (2007), Macena (2007), Godinho (2007), Fernandes (2007), Amaral (2003) e Varandas (2000). Ainda envolvendo alunos da Educação Básica, destaco aquelas que foram desenvolvidas sobre a própria prática do professor-pesquisador: Castro (2004), Abreu (2008), Gomes (2007), Lima (2006), Déchen (2008) e Ferreira (2007). Em síntese, tais dissertações indicam que atividades exploratório-investigativas podem estar presentes nas aulas de matemática desde a educação infantil até o ensino médio, tanto na modalidade de ensino regular quanto na educação de jovens e adultos, entretanto, suas possibilidades para a aprendizagem de matemática dependem da interação entre os participantes (alunos e professores), da dinâmica estabelecida em sala de aula, das tarefas apresentadas, dos conteúdos contemplados bem como das experiências e expectativas dos envolvidos.

Pontuo também a pesquisa de Costa (2008) que investigou os processos de provas e validações em matemática escolar com atividades de investigações geométricas em diferentes mídias, num ambiente de dimensão colaborativa. Em sua análise, o pesquisador considerou seis aspectos: (1) a potencialidade da atividade como incentivadora de formulação de provas, (2) o uso de diferentes mídias no contexto da Matemática Escolar, (3) a aproximação com o “fazer matemático”, (4) a importância do trabalho colaborativo para os participantes na realização da atividade, (5) a dupla dimensão da aprendizagem: para os professores escolares (conhecimento pedagógico) e para os futuros professores (conhecimento como conteúdo escolar) e (6) as provas/validações como mobilizadoras no processo de (re)significação[4] do conhecimento no contexto da matemática escolar. Segundo o autor, os resultados da pesquisa evidenciam que os momentos de trabalho em um grupo de dimensão colaborativa tornam-se potencialmente propícios à formação docente, tanto na dimensão da prática docente quanto do conhecimento matemático e que as atividades exploratório-investigativas associadas ao uso dos programas de Geometria Dinâmica favoreceram a construção de um conhecimento matemático mais significativo, por meio da estruturação de um pensamento argumentativo baseado na experimentação, na análise, na estruturação de provas e/ou validações, no registro escrito, na socialização e na discussão em grupo.

Em acordo com o panorama apresentado, tanto na revisão bibliográfica quanto em

[4]Conforme grafia utilizada pelo autor.

minhas opções sobre a pesquisa pretendida, nas próximas seções, detalharei a pesquisa propriamente dita.

1.2 Dos objetivos ao planejamento da pesquisa: princípios norteadores e constituição do grupo de professoras

Tenho como objetivo investigar as potencialidades formativas da exploração-investigação matemática para o conhecimento do professor[5] e de suas práticas docentes em sala de aula.

Assim, ao investigar tais potencialidades, mantive dois focos: (a) o desenvolvimento de atividades exploratório-investigativas no contexto de formação contínua; (b) as práticas pedagógicas das professoras, que foram desenvolvidas com referência à exploração-investigação matemática.

Objetivei compreender como as professoras desenvolveram as atividades decorrentes das tarefas apresentadas, buscando identificar as interpretações dadas às tarefas, as questões apresentadas, os modos de justificar os resultados obtidos, demarcando aspectos que possibilitaram (ou não) o avanço das atividades da etapa exploratória para a investigativa propriamente dita, incluindo minhas posturas e ações e as das participantes. Com isso, pretendi identificar quais as potencialidades que as tarefas de natureza exploratório-investigativa podem incidir nas aprendizagens das professoras, especificamente em relação aos seus conhecimentos (matemáticos, pedagógicos e curriculares) para o ensino a partir de um contexto de formação contínua. Pelo diálogo com a literatura, procurei pontuar relações entre a exploração-investigação matemática na educação básica e as atividades desenvolvidas no grupo.

Além disso, como decorrência das atividades, busquei identificar e compreender relações entre as atividades desenvolvidas no grupo e aquelas decorrentes dessa experiência para a prática pedagógica das professoras.

[5] Em alguns momentos utilizarei *professor* como uma expressão genérica que engloba professores e professoras, não necessitando de plural nem referindo-me ao gênero que o verbete explicita. Entretanto, ao me referir especificamente às professoras, participantes desta pesquisa, optarei pelo plural e pelo gênero feminino.

A questão norteadora foi delineada como: *Quais são as potencialidades formativas da exploração-investigação matemática para o conhecimento do professor e de suas práticas?* Nesse sentido, para mim, *potencialidades* incluem possibilidades e disposições para ocorrer ou não alguma coisa e o alcance destas, caso ocorram; senão, demarcar limites. *Potencialidades* referem-se ao que pode ou não decorrer a partir de algo e às características particulares de um objeto, conceito ou ideia que aumenta a escolha deste frente a outros. Especificamente, interesso-me em identificar e analisar decorrências e implicações formativas da exploração-investigação matemática para o conhecimento do professor e de suas práticas — suas potencialidades.

Tendo em vista meus objetivos e a questão investigada, pela necessidade e pelas possibilidades de aproximação das participantes, optei pelo desenvolvimento de uma pesquisa tendo como contexto um grupo de professoras em formação contínua como anunciei anteriormente. Para isso, a proposta inicial ocorreu a partir do convite em participarem de um curso para que as professoras pudessem ser certificadas e terem suas atividades incluídas naquilo que é reconhecido como formação pelos sistemas de ensino. Assim, com as diretrizes pautadas no desenvolvimento de um grupo, o curso foi submetido e aprovado como Projeto de Extensão pela Pró-Reitoria de Extensão da UFSCar com os seguintes objetivos:

- Possibilitar aos participantes o envolvimento com atividades matemáticas de caráter exploratório-investigativo, proporcionando criatividade, argumentação e escrita em contexto matemático, com consequências positivas em relação ao ensino e aprendizagem deste campo do conhecimento.
- Proporcionar formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental com relação aos conteúdos geométricos e seu ensino.
- Favorecer a integração escola-universidade na constituição do conhecimento profissional docente.
- Favorecer o desenvolvimento profissional docente a partir de reflexões e registros narrativos sobre a própria prática.
- Fomentar pesquisa sobre a prática docente e o conhecimento do professor a partir

de um grupo de professores que discutem sobre matemática e seu ensino.

O convite foi feito por e-mail a todas as vinte e sete escolas da rede municipal[6], por intermédio de meu e-mail pessoal, com autorização da Secretaria Municipal da Educação. A manifestação de interesse ocorreu por mensagem eletrônica ou por meio do preenchimento de uma ficha que estava anexada à mensagem. Além disso, estavam disponíveis endereços de e-mail e telefone caso fossem necessárias informações complementares. Para facilitar a composição do grupo, foi requisitado que as professoras inscritas informassem sua disponibilidade, e assim, a partir desses dados, os encontros foram marcados no horário que atendeu a maioria delas.

Foram recebidas onze inscrições, entretanto, três delas anotaram na ficha de inscrição que somente participariam se os encontros ocorressem em seus horários de trabalho. Das oito restantes, duas desistiram para participar de outro curso, sendo que uma delas — Natália — retornou em nosso segundo semestre dos encontros. Outra delas foi ao nosso primeiro encontro, mencionou que gostou da proposta, mas que precisava desistir por problemas familiares que surgiram naqueles dias. Das cinco professoras restantes, três tinham horários não comuns para participarem e assim, o grupo iniciou-se com duas das inscritas via e-mail — Léia e Cidinha, e com Gisele e Dulce que já tinham solicitado suas participações, apesar de não ministrarem aulas do 1^o ao 5^o ano. Gisele atua na última etapa da Educação Infantil e Dulce é professora de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Depois do início dos encontros, Andréa e Eunice integraram o grupo pelo convite de Gisele. Todas as professoras estão com seus nomes reais. Ao mencionar cada uma das professoras, precedendo sua própria fala ou registro escrito, nos diálogos, utilizarei, respectivamente, as iniciais C. (Cidinha), G. (Gisele), L. (Léia), D. (Dulce), A. (Andréa), N. (Natália), E. (Eunice) e para mim, P. (Pesquisadora).

Devido ao número de professoras que participariam, considerei pertinente manter o desenvolvimento da pesquisa incluindo Gisele e Dulce, pois não me parecem rotineiros cursos ou grupos que envolvam professores que atuam em diferentes níveis de ensino, cujo objeto de estudos seja a exploração-investigação matemática.

Considerei, ainda, que a opção pelo desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa

[6]Trata-se de um município no interior do Estado de São Paulo, Brasil.

permite que o delineamento e a constituição do objeto de estudo já sejam considerados componentes da própria investigação. Isso expande a ideia de Borba e Araújo (2004) quando estes pesquisadores afirmam que a elaboração e o refinamento de uma pergunta de pesquisa já constituem a própria pergunta; a versão final é a síntese do caminho percorrido.

O entorno temporal e social do desenvolvimento de uma pesquisa devem ser mencionados, quando possível e pertinente, no delineamento da mesma. Das onze pessoas inscritas para o grupo, três delas afirmaram que só teriam interesse em participar se o mesmo ocorresse durante seus horários de trabalho, em sobreposição à atividade docente em sala de aula, ou seja, se para participarem tivessem declínio do horário em que estão nas escolas ministrando aulas. Contudo, como previamente submetido à aprovação à Secretaria Municipal de Educação, as atividades foram planejadas para ocorrer aos sábados ou no período noturno, sem interrupção das aulas dos professores participantes.

A participação do professor, via cursos ou grupo de formação é limitada pela disponibilidade dos professores a partir de sua vida pessoal e familiar. Para alguns professores, participar de um curso ou grupo, só é possível quando este substitui seu horário de aulas. Para outros, havendo disponibilidade, o interesse pessoal e compromisso profissional são suficientes para a participação. Como reafirmado por Chené (1986), "a formação é como um pequeno quadro dentro de um quadro maior, isto é, insere-se na vida da pessoa, desenvolve-se com ela, articula-se em profundidade com a sua problemática existencial." (p. 90). Sendo assim, excluindo-se a autoformação que pode ocorrer pela reflexão da prática no interior das salas de aula em atividades individuais, ou ainda aquelas previstas e desenvolvidas pelos sistemas de ensino (quando ocorrem), a formação contínua do professor, pessoa, adulto e profissional, de certo modo, concorre com sua vida pessoal, podendo ser adiada devido a compromissos com familiares, a afazeres domésticos, ao lazer, a condições de saúde, etc.

Se o interesse e compromisso do professor têm condições de serem atendidos na vida pessoal e profissional, então há a participação dos professores em encontros de formação contínua fora do local de trabalho. Isso é confirmado por uma das professoras participantes (Cidinha) que, na reunião de apresentação, afirmou que só participaria se ela pudesse continuar mesmo que seu contrato com aquela prefeitura fosse finalizado, como estava previsto. Ou seja, a participação de Cidinha estaria desvinculada de fatores impostos pela escola ou rede de ensino em que atuava.

Para o desenvolvimento das atividades, tive como princípios, que a formação docente é um processo pessoal e social, que resulta naquilo que fazemos de nossas experiências formativas ao longo da vida. Concordo com Dominicé (2010, p. 61) que a determinação de miniprocessos de formação que compõem um processo mais global de educação e formação do professor,

> esclarece-nos sobre regulações que a acção educativa pode provocar ou influenciar. Contrariamente (...), os programas ditos de formação, não estão na origem do que os adultos aprendem. Os conhecimentos adquiridos pelos adultos resultam de uma rede de informação. O saber de referência está sobretudo relacionado com a maneira como os adultos voltam a trabalhar ou modificam o que os agentes da sua educação quiseram ensinar-lhes.
> *A formação depende do que cada um faz do que os outros quiseram, ou não quiseram, fazer dele.* Numa palavra, a formação corresponde a um processo global de autonomização, no decurso do qual a forma que damos à nossa vida se assemelha — se é preciso utilizar um conceito — ao que alguns chamam a identidade. (itálicos originais)

A formação de professores é um processo que, de fato, tem amplo campo para investigação, uma vez que a aprendizagem e a autonomia docente ancoram-se na constituição do professor enquanto ser humano, dotado de uma história pessoal e profissional, de uma prática que está inserida na instituição escolar e que tem, como cenário maior as necessidades e implicações sociais. Cabe caracterizar que o professor "é um profissional que procura dar respostas às situações com que se depara, é alguém que se move em circunstâncias muito complexas e contraditórias, que é preciso respeitar, valorizar e, sobretudo, que é preciso conhecer melhor" (PONTE, 1994, p. 2).

O grupo, cenário de constituição dos dados dessa tese, iniciou-se com uma reunião de apresentação, na qual expus às professoras presentes os objetivos e alguns pressupostos teóricos que sustentam meu trabalho. Na mesma ocasião, cada uma das professoras participantes declarou os motivos pelos quais estava interessada em integrar o grupo.

Por intermédio de uma breve narrativa, falei os motivos pelos quais eu planejava os encontros do grupo, relacionando-o à minha prática docente com aulas investigativas, com a pesquisa de mestrado e com minha participação em grupo de pesquisa[7]. Em seguida, destaquei que penso o professor como "ator e autor de seu próprio desenvolvimento pessoal e profissional e essas duas esferas entrelaçadas na sua vida e profissão" e a "formação do professor é um processo contínuo, no contexto de seu desenvolvimento profissional, complexo e inacabado" (Apresentação escrita feita às professoras). Nesse primeiro contato com as participantes, considerei relevante mencionar estas considerações pois estes são alicerces tanto da pesquisa quanto da formação.

Entendo que a partilha de uma situação formativa necessita de diálogo e de apresentação das intenções e não apenas de uma escuta privilegiada por parte do formador e passiva do professor em formação. É importante que as ideias que cada uma traz de si e do processo de formação sejam discutidas e descortinadas, e desse modo, venham favorecer o crescimento de um vínculo profissional e pessoal que possa ocorrer durante os encontros do grupo. Além disso, penso que os objetivos de uma atividade partilhada tendem a ser alcançados na medida em que são objetivos comuns ou ainda, que são de conhecimento de todos. Coube aqui uma reflexão: como posso querer que as professoras sintam-se sujeitos de sua própria formação se elas não souberem o que penso sobre isso? As diferenças de perspectivas ou ainda do conhecimento da perspectiva do outro podem dificultar um processo formativo em todas as suas instâncias e níveis.

Assim, a constituição do grupo partiu de uma aproximação mútua entre mim e as interessadas em participar, considerando que "a aprendizagem do adulto resulta da interação entre adultos, quando experiências são interpretadas, habilidades e conhecimentos são adquiridos e ações são desencadeadas." (PLACCO; SOUZA, 2006, p. 17)

1.3 As professoras participantes

As professoras participantes, como mencionei anteriormente, foram: Cidinha, Gisele, Léia, Dulce, Andréa, Natália e Eunice.

A seguir, apresento a caracterização de cada uma das professoras quanto à atuação, ao tempo de participação no grupo, sua experiência docente e formação. Tais dados são provenientes da ficha de inscrição ou de suas narrativas orais ou escritas.

[7]Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEM) da UFSCar.

Quanto ao período de participação no grupo tivemos:

- Cidinha: ago-dez/2009 e fev-jun/2010.
- Gisele: ago-dez/2009 e fev-jun/2010.
- Léia: ago-dez/2009 e fev-jun/2010.
- Dulce: ago-dez/2009.
- Andréa: set-dez/2009.
- Eunice: nov-dez/2009.
- Natália: fev-jun/2010.

Todas as professoras participantes são graduadas no ensino superior. A formação de cada uma delas segue adiante:

- Cidinha: Curso Normal (década de 1970) e Ciências com Habilitação Plena em Matemática (1998).
- Gisele: Habilitação Específica de 2^o Grau para o Magistério (1990); Pedagogia (1996) e Especialização Lato Sensu em Psicopedagogia (1997).
- Léia: Habilitação Específica de 2^o Grau para o Magistério (1981) e Pedagogia (1995).
- Dulce: Ciências com Habilitação Plena em Matemática (1996); Especialização Lato Sensu em Complementos Matemáticos (1999) e Pedagogia (iniciou em 2009).
- Andréa: Habilitação Específica de 2^o Grau para o Magistério (1988); Educação Física (1991); Pedagogia (1994) e Especialização Lato Sensu em Psicopedagogia (2001).
- Eunice: Habilitação Específica de 2^o Grau para o Magistério (1989); Pedagogia (1996) e Especialização Lato Sensu em Psicopedagogia Clínica e Hospitalar (1999).
- Natália: Pedagogia (2008).

O curso teve início no segundo semestre de 2009 quando cada uma das professoras contava com o seguinte tempo de experiência:

- Cidinha: 20 anos de magistério nos anos iniciais do Ensino Fundamental da rede pública (iniciou em 1989); durante 3 anos também ministrou aulas de Matemática de 5^a a 8^a séries.
- Gisele: 17 anos de magistério na Educação Infantil na rede pública, sendo 14 anos na última etapa da educação infantil (até 2007 com alunos que completavam 6 anos e posteriormente, 5 anos).
- Léia: 17 anos de magistério nos anos iniciais do Ensino Fundamental nas redes pública e privada.
- Dulce: 13 anos de experiência como professora de Matemática de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental e Ensino Médio na rede pública.
- Andréa: 21 anos de experiência docente, com: 5 anos na Educação Infantil e 17 anos de 1^a a 4^a séries nas redes pública e privada.
- Eunice: 5 anos na Educação Infantil e 11 anos nos anos iniciais do Ensino Fundamental na rede pública.
- Natália: 1 ano de docência nos anos iniciais do Ensino Fundamental na rede pública.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, todas as professoras atuavam na rede pública municipal ou estadual, tendo apenas uma delas aulas na rede privada, conforme consta nos seguintes itens:

- Cidinha: 2009: escola municipal e escola estadual com 4^a série; ambos como professora contratada; 2010: mesma escola estadual do ano anterior com 4^a série do Programa Intensivo no Ciclo (PIC) com alunos que reprovaram na referida série.
- Gisele: 2009 e 2010: escola municipal com última etapa da Educação Infantil; professora efetiva.

- Léia: 2009: escola da rede privada: auxiliar de 1^a a 4^a série; escola municipal: 1^o ano, como professora contratada; 2010: escola da rede privada: auxiliar de 1^a a 4^a série.

- Dulce: 2009: escola municipal e escola estadual: professora de Matemática de 5^a a 8^a séries, como professora contratada; 2010: escola estadual: professora de Matemática de 5^a a 8^a séries.

- Andréa: 2009: escola municipal: 1^o ano no período da manhã e 1^o ano à tarde, sendo que parte dos alunos eram os mesmos. (professora efetiva).

- Eunice: 2009: escola municipal: duas classes de 2^o ano (professora efetiva).

- Natália: 2010: escola municipal: 4^a série e em outro período, professora (efetiva) de apoio na Educação Infantil.

1.4 Do contexto formativo à análise dos dados: decisões que norteiam a pesquisa

As minhas indagações sobre a exploração-investigação matemática na formação de professores foram fundamentais por permitirem delimitar a questão, os objetivos e a hipótese. Depois caminhei para os aprofundamentos teórico-metodológicos que fazem parte da pesquisa não apenas pelas sustentações teóricas, mais do que isso, por definirem e caracterizarem o caminho percorrido. Assim, nesta seção, demarco minhas considerações sobre o professor e seu processo de formação ao longo da carreira e sua implicação para os processos de constituição dos dados, de análise e de escrita da tese. Outra parte, relacionada aos instrumentos de registro das experiências será destacada na Seção 1.5.

Ao entender que a aprendizagem docente está diretamente relacionada aos modos pessoais de aprender ao longo da vida e às experiências que constituem o indivíduo que exerce a profissão docente, concordo com Nóvoa (1992), conforme apresentei às professoras no início de nossos encontros, quanto à indissociabilidade do professor pessoa ao professor profissional: “o professor é a pessoa; e uma parte importante da pessoa é o professor” (p. 15). Com isso, não podemos pensar que a formação profissional do professor começa quando inicia seus estudos de habilitação docente como também não podemos separar suas aprendizagens durante o tempo de docência de sua vida pessoal.

A partir desses pressupostos, adoto de Souza (2006) a ideia de que a

> formação é entendida como um movimento constante e contínuo de construção e reconstrução da aprendizagem pessoal e profissional, envolvendo saberes, experiências e práticas. A formação integra a construção da identidade social, da identidade pessoal e profissional, que se inter-relacionam e demarcam a autoconsciência, o sentimento de pertença. (...) Ela resulta das relações que tecemos entre o pessoal e o social, o eu e o outro, o objetivo e o subjetivo, demarcando a definição de si e a percepção interior.

A formação toma então uma dimensão pessoal, intransferível e de autoria do próprio sujeito em sua vida ao mesmo tempo em que tem aspectos sociais na medida em que o indivíduo forma e se forma nos contextos em que vive durante toda sua existência, afinal, "ninguém forma ninguém" e "a formação pertence, de facto, a quem se forma" (NÓVOA, 1988, p. 128).

A formação assim entendida alinha-se ao conceito de desenvolvimento profissional, conforme sublinhado por Gama (2007, p. 29)

> um processo pessoal, interativo, dinâmico, contínuo, evolutivo e sem fim, que envolve aspectos conceituais e comportamentais. As aprendizagens advindas desse processo são de natureza pessoal, profissional, institucional, social e acontecem ao longo da trajetória de vida de cada um. Além disso o desenvolvimento profissional dos professores depende também das políticas públicas e dos contextos escolares nas quais realizam a sua atividade docente.

Essas considerações foram fundamentais na preparação e planejamento das atividades pretendidas no grupo. Com isso, tendo a formação contínua como contexto e não como objeto central na investigação, para seu desenvolvimento, eu planejava e apresentava às professoras tarefas de caráter exploratório-investigativo para desenvolvermos as atividades e reflexões decorrentes. O cronograma era flexível, de modo que o tempo de cada atividade dependia de seu próprio desenvolvimento. As professoras tinham liberdade para discutirem temas relacionados às suas práticas bem como para refletirem e abordarem assuntos problemáticos relacionados ao seu fazer profissional que surgiam no decorrer do tempo. Como exemplo, dentre esses assuntos, os processos seletivos para professor de que algumas delas tiveram que participar, no final do ano de 2009, foram discutidos no grupo pois envolviam a continuidade da carreira e tomavam conta de suas preocupações e tempo.

A condução das atividades do grupo, a partir das considerações teóricas anteriormente definidas que já fazem parte de meu trabalho profissional na formação contínua em outros espaços, distanciou-me de uma formação pautada nos modelos da racionalidade técnica. Segundo Araujo (2003, p. 8), pelo princípio da racionalidade técnica, ao formador é atribuído "o papel de transmissor de técnicas eficientes de ensino" e cabe ao professor, em um momento posterior "a correta utilização de teorias e técnicas científicas". Tal princípio entende a formação como um momento excelente de aprendizagens que posteriormente são instrumentos para a atuação prática. Mizukami et al. (2003, p. 13), apoiando-se em Shön (1983), afirmam que, na lógica da racionalidade técnica, "a atividade profissional consiste em resolução de problemas instrumentais tornada rigorosa por intermédio da aplicação da teoria e da técnica científica". Fiorentini, Nacarato e Pinto (1999) ratificam, afirmando que, nos cursos, sob tal perspectiva, os professores "recebiam um pacote pronto com normas e procedimentos prescritivos de como deveriam realizar seu trabalho docente" (p. 35), preparados por pesquisadores e especialistas. No entanto, estes pesquisadores argumentam que o princípio da racionalidade técnica desconsiderava os conhecimentos dos professores e consistia em um paradigma inadequado uma vez que os conhecimentos eram produzidos de modo fragmentado ou idealizado, privilegiando um ou outro aspecto do processo ensino-aprendizagem.

Outra visão relacionada ao termo formação é a certificação, conforme destaca Araujo (2003). A certificação, entendida como completude e como preparação prévia à atuação tem, do mesmo modo que o princípio da racionalidade técnica, a possibilidade e, digamos, pretensão de prever as necessidades futuras do professor e assim, então, instrumentalizá-lo antes, como prevenção de dificuldades e obstáculos. Por outro lado, concordando com Araujo (2003), tendo-se como base a formação humana, a palavra "formação" é entendida em um sentido de movimento, distanciando de uma ideia de conhecimento que esteja ligada ao determinismo. Deste modo, considero a possibilidade de a formação ocorrer num processo contínuo e não acabado. Mizukami et al. (2003, p. 15) referindo-se a Imbernón (2000), afirmam que uma das funções da formação permanente, entendida num processo contínuo, é "questionar ou legitimar o conhecimento profissional posto em prática" para então, até fundamentar, revisar, ordenar ou combater a teoria.

Isso implica priorizar a participação das professoras nos encontros, dando espaço para aprofundamentos ou discussões de suas necessidades e práticas e entender que as atividades desenvolvidas nas salas de aula das professoras participantes não deveriam ocorrer a partir de minhas solicitações para a pesquisa, ao contrário, eram esperadas a partir das necessidades e desafios evidenciados por elas mesmas, tendo em vista a problematização de suas práticas pedagógicas. Isso de fato ocorreu, uma vez que as atividades realizadas com seus alunos a partir das nossas discussões ou trazidas para o grupo, com ou sem minha participação, foram todas pelo interesse, compromisso, curiosidade e inquietação de cada uma delas. Evidentemente, devido à extensão do período e número (36) dos encontros, nem todas são analisadas neste texto aqui apresentado, sendo escolhidas aquelas que se relacionaram aos dois eixos da análise (Capítulo 2 e Capítulo 3).

Dessa forma, quanto à concepção do curso, contexto da pesquisa, no que diz respeito a outros elementos, o projeto apresentado à seleção de Doutorado para o ano de 2008 no PPGE da UFSCar necessitava de aprofundamento teórico-metodológico. No projeto eu tinha como alicerce de que a pesquisa, coerente ao objeto investigado, seria desenvolvida na perspectiva qualitativa, concordando com Garnica (2004) que reconhece a não neutralidade do pesquisador e a constituição das compreensões em uma trajetória em que estas e os meios de obtê-las podem ser (re)configurados. Ainda, como acrescentam Bogdan e Biklen (1999): (a) o investigador é o instrumento principal e a fonte de dados é natural; (b) o entendimento e o contexto são instrumentos-chave; (c) a investigação tem caráter descritivo, procurando-se manter a riqueza e a sutileza dos dados; (d) o foco de interesse são os processos em sobreposição ao resultado final e aos produtos; (e) os dados tendem a ser analisados de forma indutiva: "as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando" (p. 50) e (e) é dada importância vital ao significado atribuído pelos participantes.

Essas características se associam à presente pesquisa uma vez que, ao desenvolvê-la, participei diretamente da constituição dos dados, cuja análise e registro da pesquisa, com as seções nela incluídas, são provenientes dos possíveis agrupamentos dos dados em cuja análise me dispus a compreender e entendê-los com os detalhes e singularidades que lhe são próprios, revelando e dando-lhes sentidos à luz dos contextos que os produziram.

Tendo claro para mim a abrangência e amplitude desses cinco itens, para os aprofundamentos de que eu precisava, reli diversos trabalhos (dentre eles: Castro (2004), Amaral (2003), Costa (2008), Goldenberg (1999), Ponte, Brocardo e Oliveira (2003)) sobre exploração-investigação matemática, incluindo minha própria dissertação (LAMONATO, 2007) e o que me chamava atenção era a necessidade de ter uma análise que pudesse revelar os detalhes, o que era específico e singular durante as atividades investigativas e revelar minha própria experiência no contexto de constituição dos dados. Com isso, pela leitura de Castro (2004) e posteriormente pela de Freitas (2006) e o texto de Souza (2006), tive meus primeiros encontros com a *pesquisa narrativa*, com a *narrativa enquanto instrumento de formação* e com a pesquisa que utiliza *narrativa como fonte de dados – análise de narrativas*.

Esses três modos de considerar a narrativa fizeram parte de meus estudos e deles pude constituir diversos elementos do escopo teórico-metodológico desta pesquisa. Nas páginas e parágrafos seguintes, apresentarei parte desse estudo sobre narrativas, tendo como referência diversos pesquisadores (Freitas e Fiorentini (2007), Galvão (2005), Freitas (2006), Fiorentini (2006), Bruner (1991), Garnica (2009), Bolivar (2002)), cujo objetivo é sintetizar esses três aspectos e fundamentar minhas opções. Da *narrativa enquanto instrumento de formação*, adotei-a como um recurso que favoreceria as reflexões das professoras sobre a exploração-investigação matemática e possibilitaria representações de suas experiências ocorridas em nossos encontros ou em suas práticas. Para mim, isso foi necessário pelo interesse de aproximação dos entendimentos e perspectivas das participantes, o que incidiu, para isso, em adotar elementos da análise que têm *narrativas como dados*. Da *pesquisa narrativa*, fundamento a necessidade de interessar-me pelas singularidades ocorridas nas experiências formativas ocorridas no grupo ou representadas pelas professoras e, desse modo, desenvolvi meu texto na busca de um *estilo narrativo* para analisar as nossas (minhas e das professoras) representações das experiências.

Em Freitas e Fiorentini (2007) pude complementar minhas compreensões sobre a narrativa enquanto instrumento de formação e de investigação. Desse modo, durante as disciplinas do Doutorado e nas conversas com minha orientadora, imergi nos textos sobre narrativa, encontrando, sucessivamente, em cada um deles, afirmações que me levaram a concordar, a optar e principalmente a refletir e conduzir a pesquisa.

Com a convicção de que “a experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca. Não o que se passa, não o que acontece, ou o que toca. A cada dia passam muitas coisas, porém, ao mesmo tempo, quase nada nos acontece.” (LARROSA-BONDÍA, 2002, p. 21), encontrei a narrativa como uma modo de representar a experiência — na pesquisa: fonte de constituição de dados.

As relações da experiência com formação, caracterizadas individualmente, são mencionadas por Garnica (2009):

> Nas palavras de Larrosa, Kertész fala sobre a relação entre experiência e formação: a experiência é o que me acontece e o que, ao acontecer, me forma ou me transforma, me constitui, me faz ser como sou, marca meu modo de ser, configura minha pessoa e minha personalidade. (p. 83).

Concordo com Freitas e Fiorentini (2007), com referência a Carter (1993), que a narrativa é um modo de produzir sentido à experiência pelo próprio autor (aspecto formativo) e um modo de investigar a experiência (aspecto investigativo).

A opção pela narrativa, enquanto instrumento formativo e investigativo, vai ao encontro dos níveis de representação da experiência vivida no processo da narrativa com base em Riessman (1993) e ampliados por Galvão (2005, p. 332): “dar sentido, constar, transcrever, analisar e ler. E poder-se-ia, ainda, acrescentar interpretar, uma vez que quem lê, necessariamente, dá um novo sentido ao texto, de acordo com suas vivências e referências.”. Tais níveis são ao mesmo tempo reducionistas e expansionistas. São reducionistas na medida em que os narradores escolhem partes significativas do todo para narrar e são expansionistas pois, durante a narração, os autores acrescentam elementos significativos (GALVãO, 2005). O acréscimo de elementos se dá justamente porque a experiência é revivida no tempo presente, sendo portanto reconstituída em uma outra que lhe representa.

Segundo Freitas e Fiorentini (2007, p. 328), as histórias que contamos são “o meio pelo qual tentamos capturar e traduzir a complexidade e as múltiplas relações que atravessam nossa experiência” e, sendo assim, como reafirmam os citados pesquisadores, variam de acordo com o tempo e lugar e são alimentadas segundo nossas crenças e valores. Nossas histórias são suscetíveis ao contexto social no qual estamos e nossas relações com os outros indivíduos. Nas nossas narrativas, entram em jogo o que foi experiência para nós, os significados que damos a cada uma delas levando em conta o que pensamos sobre nossa própria história e nossas intenções e expectativas para aquilo que ainda não experienciamos.

No mesmo sentido, Fiorentini (2006) reafirma as palavras de Connelly e Clandinin (2000) que

> as narrativas representam um modo bastante fecundo e apropriado de os professores produzirem e comunicarem significados e saberes ligados à experiência. As narrativas fazem menção a um determinado tempo (trama) e lugar (cenário), onde o professor é autor, narrador e protagonista principal. São histórias humanas que atribuem sentido, importância e propósito às práticas e resultam da interpretação de quem está falando ou escrevendo. Essas interpretações e significações estão estreitamente ligadas às suas experiências passadas, atuais e futuras. (p. 29).

A narrativa é um modo de organização da experiência e de nossa memória dos acontecimentos (BRUNER, 1991, p. 4) que, para nós, constituiram-se em experiências.

Sendo assim, o saber, proveniente da experiência, é pessoal, multiplamente singular, intransferível, irrepetível, nem sempre consciente ou decodificado pelo próprio indivíduo ou pelo outro, sempre localizado e referente, ao encontro de Larrosa-Bondía (2002, p. 27):

> Se a experiência é o que nos acontece e se o saber da experiência tem a ver com a elaboração do sentido ou do sem-sentido do que nos acontece, trata-se de um saber finito, ligado à existência de um indivíduo ou de uma comunidade humana particular; ou de modo ainda mais explícito, trata-se de um saber que revela ao homem concreto e singular, entendido individual ou coletivamente, o sentido ou o sem-sentido de sua própria existência, de sua própria finitude. Por isso o saber da experiência é um saber particular, subjetivo, relativo, contingente, pessoal.

Na narrativa, não é possível apreender a experiência em sua totalidade, é então um fragmento revivido da experiência, "na ficção da narrativa, o sujeito encontra-se já afastado de si próprio; com efeito, por mais que se conte a experiência, esta nunca cabe por inteiro na narrativa" (CHENÉ, 1986, p. 93).

Dominicé (2010, p. 147) complementa que "cada narrativa [de formação] é o reflexo da maneira como o caminho percorrido foi compreendido, a formação definida e o processo interpretado" uma vez que "o acontecimento é comum. mas a experiência é para cada qual sua, singular e de alguma maneira impossível de ser repetida" (LARROSA-BONDÍA, 2002, p. 27).

Formo-me e transformo-me ao viver minha experiência, reflito ao rememorá-la, reviso, reencontro-me ou estranho-me ao narrá-las e reconstituo-me autor de minha vida e formação ao entender-me como sujeito de minhas próprias experiências localizadas no tempo e nos espaços sociais nos quais permaneço durante a vida.

Diante desse quadro, investigar a experiência é uma atividade também individual de atribuição de significados pelo pesquisador, uma aproximação dos saberes da experiência dos outros com ele mesmo, na constituição de uma história que os represente revelada no registro narrativo que a retrate.

Assim, busco o estilo narrativo na escrita do presente texto da tese, retratando a análise da experiência vivida e representada por mim enquanto pesquisadora, a partir da experiência vivida no grupo com as professoras, representada nos diversos instrumentos de constituição dos dados e da análise que conta, dentre outros instrumentos de dados, com narrativas produzidas pelas professoras.

Segundo Galvão (2005) com referência a Carter (1993),

> o interesse das histórias de professores está ligado à ênfase na reflexão em ação, aos argumentos práticos dos professores e a considerarem-se os professores como investigadores. Mas, não podemos esquecer que não temos acesso à experiência dos outros, lidamos apenas com representações dessa mesma experiência por meio do ouvir contar, dos textos, da interação que se estabelece e das interpretações que são feitas. (p. 330).

Nesse sentido, nossa história é narrada quantas vezes quisermos, tendo nossas significações, valores, crenças, expectativas, o tempo e o lugar como elementos para cada uma das narrativas tornando-as singulares e irrepetíveis. Tal como a história, sua reconstrução na narrativa, torna esta também histórica, e "sempre existirá uma distância entre o que é vivido e o que me é narrado como vivido pelo outro. As formas de narrar vão se modificando e o modo de perceber — tanto o que é narrado quanto o modo de narrar — dos sujeitos vai se configurando junto a essas alterações nas formas de narrar." (GARNICA, 2009, p. 88). Além disso, conforme destacam Placco e Souza (2006, p. 21), "é no processo de narrar o mundo em que se vive que se pode apreender os significados e sentidos de tais vivências para si e para o outro, com o outro".

Segundo Garnica (2009, p. 81) "narrar é contar uma história, e as narrativas, já aprendemos com Barthes, oferecem em si a possibilidade de análise" (p. 81). Ao complementar, para o autor, análise é um

> processo de atribuição de significados que permite a um ouvinte/leitor/apreciador do texto do outro apropriar-se, de algum modo, desse texto, numa trama interpretativa, e tecer a partir dele, significados que podem ser incorporados numa trama narrativa própria, num processo contínuo de ouvir/ler/ver, atribuir significado; incorporar; gerar textos que são ouvidos/lidos/vistos pelo outro que a eles atribui significados, incorporaos, gerando textos que são ouvidos/lidos/vistos... (p. 81)

Como podemos notar, Garnica (2009) trata da análise narrativa, ou seja, a análise que gera uma narrativa. Nesse caso, há a busca pela atribuição dos significados dados pelos sujeitos, que permite, ao escrevê-los, a tentativa de retratá-los a partir de nossa própria interpretação. Nesta tese, ao ouvir as histórias dos professores, estou simultaneamente vendo, e por vezes, lendo. O texto final é uma sequência não linear de ouvir, ler, ver, interpretar. Desses elementos, desenvolvi a escrita da tese, buscando o estilo narrativo, ao entrelaçar representação e análise de representação de experiências.

A análise de narrativas, ou análise paradigmática de dados narrativos (BOLIVAR, 2002) tem as narrativas de formação, história oral ou história de vida como fonte de dados.

Por sua vez, a análise narrativa é a atividade de busca de compreensões que representa experiências e as reconstrói, em um novo tempo e espaço. Conforme Garnica (2009),

> É buscar essa compreensão o objetivo do que, aqui, chamamos de "análise". (...) uma análise não é um julgamento de valor acerca do outro a partir do que me é relatado. Uma análise é um arrazoado das compreensões que consegui costurar nessa trama de escuta atenta ao que a mim foi dito (...) toda análise é um exercício de contraponto entre os "fatos", as percepções, as sistematizações prévias etc., que coabitam os espaços desses pressupostos [existenciais] que tenho como certos — ou operacionais — e a partir dos quais me sinto seguro e sou impelido a agir. Analisar é exercitar contrapontos, e o limite desse exercício é o indizível, incorporado como pressuposto existêncial por percepções que, embora não comunicáveis, participam desse projeto gugidio, amorfo, incontrolável de atribuição de significados (p. 84-85,86-87).

Ao desenvolver a análise e a escrita deste texto optei, conforme mencionei anteriormente, pelo estilo narrativo, dando sentido à experiência vivida no grupo, representando singularidades e compreensões, identificando aprendizagens ocorridas advindas dos momentos formativos decorrentes das explorações-investigações realizadas. O interesse pelas singularidades e não apenas por aquilo que seja comum e constante nos dados é necessário, pois a formação docente e uma atividade exploratório-investigativa são sensíveis a cada sujeito, marcada pelas suas próprias características individuais. Desse modo, a análise aqui realizada traz características da análise narrativa enunciada por Garnica (2009), na qual os dados se tornam significativos pelo realce das singularidades e das exceções, únicas em cada história:

> A análise narrativa das narrativas coletadas pelo pesquisador participa dos estudos cuja ênfase está na consideração de casos particulares, e o produto dessa análise manifesta-se como narração de uma trama ou argumento que torne os dados significativos, que os (re)signifique, não pela busca de elementos comuns mas, ao contrário, pelo realce a elementos singulares que configuram a história. É, em suma, uma narrativa particular que não aspira à generalização.

Bolivar (2002) defende que a análise narrativa não busca elementos comuns, não no sentido de negá-los ou descartá-los, mas em reforçar a importância dos "elementos singulares que configuram a história[8]" (p. 13). tal como pretendi nesta pesquisa.

A tarefa do pesquisador na análise narrativa, tal como busquei fazer ao desenvolver o estilo narrativo, é elaborar :

> uma trama ou argumento que permita unir temporária e tematicamente os elementos, dando uma resposta compreensiva de porque algo aconteceu. Os dados podem vir de várias fontes, mas devem ser integrados e interpretados em uma intriga narrativa. O objetivo final é, neste caso, (...) revelar o caráter único de um caso individual e proporcionar um entendimento de sua complexidade e particular idiossincrasia[9] (BOLIVAR, 2002, p. 13-14).

[8]Traduzido por mim do original em espanhol: *Aquí no buscamos elementos comunes, sino elementos singulares que configuran la historia.*

[9]Traduzido por mim do original em espanhol: *una trama o argumento que le permita unir temporal o temáticamente los elementos, dando una respuesta compreensiva de por qué sucedió algo. Los datos pueden proceder de muy diversas fuentes, pero el asunto es que sean integrados e interpretados en una intriga narrativa. El objetivo último es, en este caso, (...) revelar el caráter único de un caso individual y proporcionar una comprensión de su particular complejidad o idiosincrasia..*

Além disso, minha opção em desenvolver o estilo narrativo, concorda com argumentos de Freitas (2006) por estar imersa em um ambiente de formação e valorizar a perspectiva de mundo dos participantes e o processo interativo entre pesquisadora e participantes.

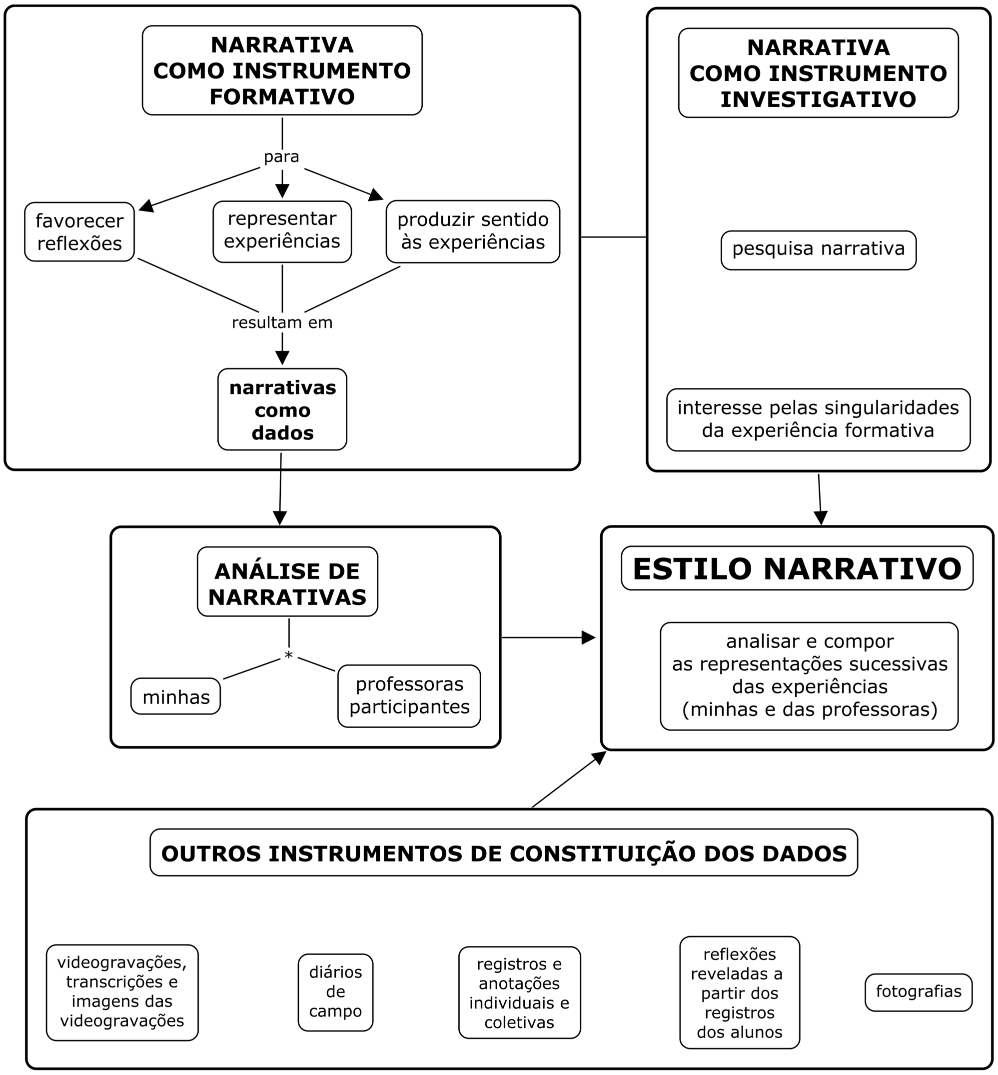
Ao investigar as potencialidades formativas da exploração-investigação matemática a partir do grupo de formação, conforme disposto nesta pesquisa, encontro-me em Clandinin e Connelly (apud FREITAS, 2006, p. 91), uma vez que "a narrativa da experiência do pesquisador é sempre dupla pois o pesquisador experiencia a experiência e é também parte integrante da experiência".

Para isso, ao tomar como referência os documentos produzidos, durante a pesquisa — videogravações, transcrições, notas de campo, narrativas e registros escritos meus e das professoras (detalhados na próxima seção) — decidi, numa primeira versão do capítulo, *narrar para mim mesma*. Esse movimento foi fundamental para atar a realidade que vivenciei nos encontros à tese que aqui se constituía. Ao retomar o texto, nas versões subsequentes, pude identificar as singularidades de cada uma das atividades, podendo perceber o movimento entre a proposta de tarefas investigativas e as atividades desenvolvidas.

Durante a análise e na escrita deste texto, foi necessário destacar fragmentos das falas e das narrativas das professoras, pois minhas reflexões dialogavam com os dados advindos destas fontes e não foi possível manter a íntegra dos diálogos, pois cada encontro do grupo resultou em 20 a 30 páginas de transcrição. Acrescenta-se a isso que, durante os diálogos, ocorriam repetições, desvios e retornos à ideia principal das conversas e reflexões além dos dados que eram provenientes de outras fontes: narrativas, diários de campo, imagens de vídeo e fotografias. Os recortes foram estratégias necessárias para manter-me no foco das potencialidades formativas da exploração-investigação matemática, conforme elucidei na questão de pesquisa e nos objetivos da mesma.

Ressalto que, nos estudos sobre narrativas que desenvolvi, concordo com os diversos pesquisadores que as narrativas também são entendidas como instrumento formativo que incidem em aprendizagens docentes. Isso foi importante para reafirmar a narrativa como modo de representar a experiência, entretanto é impossível isolar seu potencial formativo do investigativo. Durante a análise é necessário mencionar algumas contribuições percebidas, para que também eu não incorra no equívoco de considerar *todas* as aprendizagens docentes ocorridas como resultado *exclusivo* da exploração-investigação matemática. Como síntese, apresento a Figura 1.1.

Figura 1.1 – Estilo narrativo e narrativa enquanto instrumento investigativo e instrumento formativo.



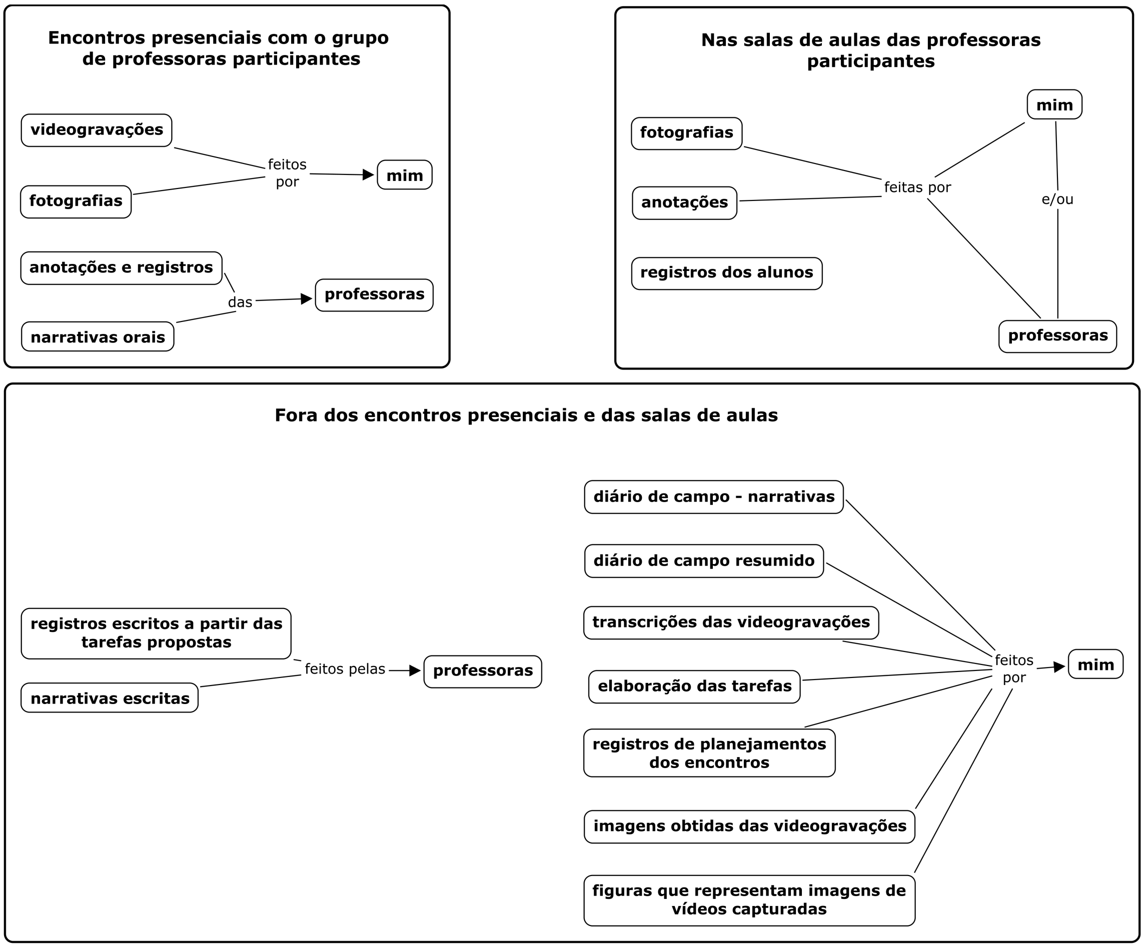
(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Além das narrativas, na próxima seção, apresento outros instrumentos de constituição de dados.

1.5 Da constituição dos instrumentos de registro das experiências: outros elementos

Na presente seção, discutirei instrumentos utilizados para a constituição dos dados, expondo os momentos nos quais estes foram utilizados, as relações entre um ou mais instrumentos e como fizeram parte da análise e da redação do texto da pesquisa. Na Figura 1.2 apresento a síntese de tais instrumentos.

Figura 1.2 – Instrumentos de constituição dos dados.



(Imagem elaborada pela pesquisadora.)

Como mencionei na seção anterior, as narrativas foram um dos instrumentos de constituição dos dados, tanto aquelas feitas por mim no diário de campo e na análise quanto aquelas feitas pelas professoras. Além disso, imediatamente após cada encontro, eu fazia o que denominei de “diário de campo resumido”, registrando: o nome das participantes presentes e o motivo da ausência, quando esta ocorria; o local, data e horário de ínicio e de término dos encontros; o número de videogravações feitas (pela quantidade de arquivos utilizados) e de fotografias; uma lista, em forma de tópicos, dos temas desenvolvidos e anotações para os próximos encontros, necessária para sumarizar nossas atividades.

Ao redigir os tópicos dos diários de campo reduzidos, eu indicava uma seleção prévia de temas que seriam tratados na narrativa, pois é impossível registrar tudo o que ocorre, apenas com referência à memória. Com isso, eu evitava perda de registros, uma vez que eram feitos logo após o encontro. Houve ocasiões em que, do término de uma reunião até minha casa, para não esquecer-me das reflexões que estavam em minha mente, eu coloquei o gravador de áudio pendurado no pescoço e fui conversando comigo mesma no caminho.

Nos diários de campo, o registro das anotações para os próximos encontros era necessário, pois isso era um modo de prepará-los. Nesse item, ficavam anotadas necessidades de que eu não poderia esquecer-me, coisas que eu pensei que deveria levar ou contemplar nas próximas discussões, dentre outras. Depois do diário de campo resumido, eu desenvolvia as narrativas sobre os encontros.

Essas narrativas foram “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (BOGDAN; BIKLEN, 1999, p 150). As impressões e reflexões registradas no diário de campo compõem um dos mais ricos instrumentos de coleta dos dados, segundo Fiorentini e Lorenzato (2006). No caso da pesquisa narrativa, nos diários de campo, temos uma primeira forma de análise, é a primeira (re)constituição da experiência após sua ocorrência. Por estar em um tempo próximo ao da própria experiência, tal representação traz valores e interpretações que podem ter ficado apenas no plano individual durante os acontecimentos. Tais anotações são ricas uma vez que permitem interpretar a experiência de modo legítimo e autêntico, evitando que o próprio pesquisador veja-se esvaziado de suas próprias compreensões tempos depois.

Também foram tomados para análise, registros escritos feitos durante as atividades. A maioria dos registros é das professoras e outros foram feitos coletivamente, como mencionarei em diversos momentos no texto.

Todos os encontros eram videogravados por mim mesma. Havia um gravador para audiogravar, evitando-se perda de dados caso ocorresse algum problema com as filmagens e durante as trocas de fitas. Pela minha experiência anterior, a filmadora ficava em uma das mãos para que eu pudesse focar as atividades escritas feitas ou registrar o movimento dos materiais manipuláveis. Em outros momentos, a filmadora ficava apoiada sobre a mesa em que estávamos, em um tripé.

Os vídeos resultantes das filmagens eram transferidos da filmadora para o computador para serem transcritos. Como mencionei em Lamonato (2007), as transcrições foram necessariamente feitas por mim, pois isso promovia reflexões sobre minha própria atuação e levava-me a redirecionar os encontros subsequentes, uma vez que, durante as transcrições, eu acrescentava elementos de uma primeira análise e também fazia anotações adicionais no diário de campo. Além disso, as transcrições constituem um modo de representar a experiência, não eximindo-se de seu caráter seletivo, para posteriormente melhor compreendê-la. Procurei fazê-las na mesma semana em que os encontros ocorreram. Houve situações nas quais eu vi alguma coisa que ocorreu no curso, como um pequeno comentário entre duas professoras, uma fala simultânea a outras ou algum gesto, apenas na transcrição do vídeo, pois tinha passado despercebido por eu estar envolvida na situação.

As gravações em vídeo e as transcrições somadas ao diário de campo facilitaram a condução da atividade, mantendo-me na distância necessária na análise e na proximidade necessária para a ação no grupo. As reflexões e releitura dos fatos pelas transcrições e pelos vídeos permitiam-me o replanejamento constante de propostas para o grupo e da pesquisa. Essa necessidade e ao mesmo tempo, possibilidade, foi por diversas vezes, mencionada às professoras.

As transcrições não substituem totalmente os vídeos. Houve necessidade, algumas vezes, de eu voltar ao vídeo, pois tanto quanto as transcrições, estes também eram representações da experiência. Por permitir o retorno e a visão sobre múltiplos pontos de vista, o vídeo "pode capturar comportamentos valiosos e interações complexas e permite aos pesquisadores reexaminar continuamente os dados. [...], conforme Powell, Francisco e Maher (2004) em referência às declarações de Clement (2000). Estes mesmos pesquisadores, acrescentam que "o vídeo não apenas permite múltiplas visões, mas também possibilita visões sob múltiplos pontos de vista" (p. 86 e 91).

As videogravações foram fundamentais, pois eu estava em interação com as professoras durante os encontros, não podendo registrar dados descritivos ou reflexivos em tempo real e porque, por tratar de conteúdos geométricos, as representações, imagens e movimentos são indispensáveis para a compreensão e representação do ocorrido.

Os vídeos, estes são apenas "uma limitada janela do fenômeno" (POWELL; FRANCISCO; MATHER, 2003, p. 408), tanto pelo direcionamento da câmera no momento da gravação quanto pela importância dada a cada uma de suas partes durante o uso das transcrições. São ferramentas imprescindíveis, entretanto não dispensam outros recursos de constituição dos dados. Os recortes feitos nas filmagens e na escrita das transcrições são representativos do direcionamento dado intencionalmente por mim à pesquisa, tendo como referência a questão diretriz e os objetivos pretendidos.

Foi acordado com as professoras que sempre que sentissem necessidade, a filmadora poderia ser desligada quando pretendessem fazer comentários de ordem pessoal ou quaisquer outros que não quisessem que fossem registrados. Isso de fato ocorreu em duas situações, no final dos encontros. Durante as gravações de nossas reuniões, as professoras participantes não manifestaram qualquer constrangimento ou censura em suas próprias falas.

De posse de cada um dos vídeos, as transcrições foram realizadas com o auxílio do software *Transana versão 2.12-Win* cujo download foi feito em 20 de agosto de 2006, durante minha pesquisa de mestrado, no endereço eletrônico www.transana.org. De acordo com as informações que o acompanha, trata-se de "uma ferramenta para a transcrição e análise qualitativa de dados de vídeo e áudio"[10] contudo, não o utilizei como ferramenta de análise, apenas para a transcrição manual dos vídeos.

A vantagem, por mim considerada para uso do referido software, é que durante as sessões de transcrição, é possível assistir aos vídeos ao mesmo tempo em que digitamos as falas, entonações ou quaisquer outras anotações que se deseja. O referido software, para realizar transcrições tem a vantagem de permitir que a tela exiba ao mesmo tempo o

[10]Criado por Chris Fassnacht e desenvolvido e mantido atualmente por David K. Woods do Wisconsin Center for Education Research da University of Wisconsin-Madison, nos Estados Unidos da América. Tal software é regido pela licença General Public License (GPL) de http://www.gnu.org, entretanto com download pago para as versões acima de 2.13.

que está sendo visto e o que está sendo digitado, além de ter a funcionalidade de associar pontos da transcrição com seu ponto de parada respectivo no vídeo, facilitando retornos e revisitações.

Como o *Transana* sugere o uso de um conjunto de marcadores que facilitam a transcrição, como por exemplo "<texto>", para indicar que o texto foi falado mais pausadamente foi possível rememorar com mais facilidades os eventos ocorridos durante as reuniões com as professoras na leitura das transcrições.

O registro das vozes não ouvidas é mencionado por Freitas e Fiorentini (2007, p. 69) como um dos elementos presentes na pesquisa narrativa, o qual considero fundamental e necessário ao focar, na presente pesquisa, aspectos das aprendizagens docentes nos encontros do grupo: "o pesquisador, na pesquisa narrativa, dá inclusive atenção às "vozes não ouvidas" as quais compreendemos serem aquelas percebidas por meio das alterações de movimentos, expressões, trocas de olhares e descompasso da respiração.

Durante as seções de transcrição, além dos registros já mencionados, eu acrescentava indicações de tempo (por exemplo: 1h15min12) para as quais eu deveria capturar as imagens da tela para complementar a leitura e interpretação das transcrições, deixando-nas, pelas imagens, mais próximas aos vídeos. Para isso, ao término de cada uma das transcrições, utilizando o software *SMPlayer, versão 0.6.6* eu assistia aos vídeos e capturava tais imagens, organizando-as em uma pasta que acompanha sua respectiva transcrição. Estas figuras foram muito importantes para a análise, pois ilustravam os acontecimentos, remetendo-me com mais detalhes à experiência vivida.

Durante a escrita do presente texto, várias imagens são provenientes dos vídeos e outras são reconstituições dessas. Tendo como origem as imagens provenientes das filmagens para aquelas apresentadas neste texto, houve os seguintes processos:

- Figuras originárias das filmagens: são aquelas em que fiz a captura da tela e estão inseridas nesse texto em seu formato original, como por exemplo: Figura 2.19 (p. 110).

- Figuras originárias da filmagens com recortes: são aquelas em que fiz a captura de tela e para inseri-las fiz um recorte. Isso foi necessário para preservar a imagem das professoras, conforme compromisso assumido com elas e registrado junto ao Comite de Ética e Pesquisa em Seres Humanos da UFSCar. Durante as narrativas não há necessidade de expor as imagens das professoras para ilustrar ou complementar minhas interpretações. Além disso, houve também casos nos quais o recorte foi necessário para ampliar e isolar somente os elementos que eu queria mostrar, para que os materiais que estavam sobre a mesa não deixassem a figura poluída visualmente (Figura 3.1, p. 197, por exemplo.).

- Figuras originárias das filmagens com edição: são aquelas em que foi necessário acrescentar alguma informação ou destacar elementos da imagem original como a Figura 2.44, p. 144 ou a Figura 3.2 da p. 211.

- Figuras construídas utilizando-se software para edição simples de imagens como o *KolourPaint* em associação com as figuras construídas no *Geogebra*: são aquelas figuras construídas para ilustrar determinadas situações nas quais as imagens de captura de tela não estavam nítidas ou estavam em um ângulo indesejado. Primeiramente foram construídas no *Geogebra* e posteriormente editadas no *KolourPaint*, como a Figura 2.4, p. 86, por exemplo. Isso também foi necessário nos momentos em que precisei inserir uma síntese dos trabalhos desenvolvidos, como no caso da Figura 2.15 (p. 100), da Figura 2.20 (p. 111), dentre outras. Em alguns casos também foi necessário construir figuras que pudessem mostrar relações entre diversas figuras geométricas, como aquelas que foram construídas sobre uma malha quadriculada, exemplificadas na Figura 2.39 (p. 140) e na Figura 2.41 (p. 141) ou ainda, para ilustrar uma explicação (como exemplos: Figura 2.64, p. 166 ou Figura 2.65, p. 167).

- Fotografias que substituem as imagens capturadas da tela: isso foi necessário em algumas situações, porque a imagem original estava tremida ou em um ângulo que poderia comprometer sua leitura devido às medidas das formas planas (exemplos: Figura 2.26, p. 119, Figura 2.63, p. 164). O recurso de fotografia também foi utilizado para facilitar a edição e o destaque de elementos em uma dada situação, como por exemplo na Figura 2.45 (p. 145).

- Captura de tela de imagens obtidas com o uso de um software[11] que oferece ati-

[11]Disponível para uso via internet em: http://rh-balingen.de/cv-tangram/cv-categories.htm. Acesso 30 nov. 2010.

> vidades com o tangram: há figuras que foram obtidas pela captura das telas neste software e posteriormente foram editadas no KolourPaint para a retirada de outros elementos do fundo que não são desejados no resultado final, como por exemplo, Figura 2.34 (p. 136), Figura 2.43 (p. 144) e outras.

Na análise, várias das falas advindas da transcrição foram complementadas com fragmentos das narrativas das professoras. A escrita do presente texto em estilo narrativo busca uma aproximação e representação do significado dado pelas participantes à experiência vivida. Quando retrato e (re)constituo a experiência de atividades investigativas durante os encontros do grupo, ao fazer a seleção das falas e intercalá-las em um texto, permeadas por minhas reflexões, no diálogo com autores da literatura e pelo meu próprio discurso indireto, torno a representar novamente a experiência, caracterizando-na, singularmente, em três dimensões conforme metáfora de Clandinin e Connelly (2000), explicitada pelas palavras de Freitas e Fiorentini (2007, p. 69):

> A primeira dimensão seria a "temporalidade", envolvendo passado, presente e futuro. A segunda dimensão corresponderia às interações "pessoais e sociais". A terceira dimensão — refere-se ao "lugar" (situação/posição), isto é, o cenário onde acontece a trama a ser narrada.

Nesse sentido, para mim, há o acréscimo de uma variável às três dimensões citadas. Tal variável é a perspectiva do leitor/ouvinte. Trago novos elementos interpretativos à experiência que podem ser ampliados pelo ponto de vista do leitor/ouvinte. Os instrumentos de constituição dos dados são como um cubo de acrílico. Ao tomar e narrar a partir dos dados, acrescento um ponto fixo nesse cubo. Cada um dos meus leitores/ouvintes verão o cubo de acrílico com o ponto que coloquei segundo seu próprio ponto de vista.

Para a escrita de uma narrativa, recorri a Passos e Oliveira (2007) em busca dos elementos característicos de um estilo narrativo: "personagens, enredo, espaço, tempo e, principalmente, a configuração de um conflito relacionado a mudanças na situação que obrigam a reflexão ou ação dos personagens. É a resposta a esse conflito que leva ao desfecho do enredo". Bruner (1997), citado por Passos e Oliveira (2007), destaca que a característica crucial da narrativa, enquanto gênero textual "é que ela se especializa em forjar ligações entre o excepcional e o comum" (p. 124).

Na redação do presente texto, concordando com Bruner 1988 citado por Bolivar (2002), busquei tecer os parágrafos "construi[indo] simultaneamente duas paisagens: a paisagem exterior da ação e a paisagem interior do pensamento e das intenções" (p. 17). Acrescento que nessas paisagens é necessário que o investigador apareça, como quem fotografa algo em modo automático, colocando-se na cena, fazendo parte dela, sempre que possível. Como afirmado anteriormente, desse modo, tem-se o particular e individual ao mesmo tempo que o contexto permite a expressão dos elementos sociais.

Tendo em vista os pressupostos enunciados anteriormente, na próxima seção apresento minhas discussões sobre a exploração-investigação matemática na educação básica e na formação docente que concordam com a ideia de que o professor é um sujeito em permanente formação pelas suas próprias ações e que suas experiências, ao serem representadas, podem fomentar e revelar aprendizagens.

1.6 A exploração-investigação matemática e aspectos do ensino de geometria

Na primeira subseção, discutirei a exploração-investigação matemática na sala de aula da Educação Básica em diálogo com autores da Educação Matemática, tendo como base meus estudos anteriores sobre a temática e minha experiência com essa metodologia na Educação Básica. Essas discussões têm importância uma vez que constituíram minhas inquietações para o delineamento desta pesquisa, na qual a questão investigada relaciona-se à exploração-investigação na formação contínua do professor. Assim, as ideias apresentadas nessa seção favorecem minhas reflexões sobre as aproximações entre a exploração-investigação matemática na educação básica e na formação de professores.

Na segunda subseção, apresentarei aspectos das argumentações, provas e experimentações no ensino de matemática, relacionando a exploração-investigação matemática com o ensino de geometria e posteriormente, destaco elementos pedagógicos do ensino de geometria.

Para fins de entendimento da nomenclatura, ao tomar como objeto de estudo a investigação matemática opto por utilizar a expressão "exploração-investigação matemática" em decorrência de Fiorentini (2006, p. 29) ao referir-se às aulas exploratório-investigativas:

> aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e

> que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. Essas aulas, servem, geralmente, para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático. Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática.

As atividades exploratório-investigativas são demarcadas pela diversidade de ideias e estratégias em seu desenvolvimento. Mesmo que a atividade não avance propriamente dita para uma situação de investigação, o que se busca não é "a resposta certa", antecipadamente esperada pelo professor, mas que os envolvidos explorem possibilidades e, se a atividade exploratória evoluir para uma situação de investigação, após a elaboração e teste de conjecturas, os participantes, conforme destaca Pirie, citada por Serrazina et al. (2002, p. 43-44), "se convençam a si próprios e aos outros das suas descobertas". As conjecturas, tornam-se verdades provisórias, pois permitem a continuidade da exploração tornando investigativa a atividade, uma vez que o objetivo dos participantes em confirmar e justificar suas declarações resulta no desenvolvimento ou refutação das conjecturas, caracterizando a investigação propriamente dita.

Tendo em vista estes aspectos centrais da exploração-investigação matemática, na próxima seção, aprofundo as discussões sobre essa abordagem metodológica no ensino de matemática expandindo para meus entendimentos e inquietações no contexto da formação contínua de professores.

1.6.1 A exploração-investigação matemática: da sala de aula da Educação Básica para a formação de professores

Desde o ano de 2004, ao desenvolver atividades investigativas com meus alunos de diversos níveis da Educação Básica[12] e com professores na graduação e em cursos de formação contínua, ou ainda em meus próprios estudos de conteúdos matemáticos, sempre me chamaram a atenção os diversos caminhos desenvolvidos a partir de uma mesma

[12] Na Educação Infantil, até 2008, fui professora de crianças com 5-6 anos que cursavam a última etapa. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, atuei junto com professoras dessa tese para o desenvolvimento e atividades que planejamos. Além disso, lecionei nas séries finais do Ensino Fundamental até 2008.

situação e tudo aquilo que era escrito e por vezes descartado no desenvolvimento de algo que eu não sabia qual seria o desfecho. Com o tempo, pude sintetizar o que para mim significa *investigar* e este entendimento, hoje explicito em minhas aulas:

- Investigar é procurar o que ainda não se conhece; investigar é questionar e procurar responder.

- Para investigar é necessário querer saber; para investigar é preciso estar curioso.

Tanto nas atividades individuais quanto naquelas compartilhadas, esses dois aspectos implicam considerar o processo e a intenção de quem o desenvolve. Interesso-me pelas ações e posturas investigativas: de quem parte do que não sabe ou não conhece para investigar o que lhe interessa. Isto vai ao encontro de não se considerar o conhecimento matemático como acabado e pronto para ser conhecido na sua forma mais polida, mas em se considerar a riqueza da exploração e dos diversos caminhos possíveis de serem considerados durante a aprendizagem. Conforme defendem Freire e Faundez (1985), o conhecimento inicia-se com uma pergunta, sendo aprender a perguntar a base do conhecimento, a tarefa primeira na atividade matemática.

Compartilho com D'Ambrósio (1993, p. 36) que as aulas de matemática podem ter suas atividades baseadas na natureza investigativa da construção dessa ciência:

> Assim como no processo de construção da Matemática como disciplina, a essência do processo é a pesquisa, na construção do conhecimento para cada aluno, a essência do processo tem que ser a pesquisa. Dificilmente o aluno de Matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; consequentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância.

De certo modo, o ensino de matemática, em muitas situações é realizado buscando-se uma "economia" de processos, uma lapidação excessiva dos procedimentos utilizados e uma preocupação em evitar erros. Mas, concordando com a citação anterior de D'Ambrósio (1993), prefiro sublinhar ainda que nem sempre o legítimo ato de pensar matemática é escondido somente do aluno, como também o é do professor.

Permito-me questionar: o professor tem oportunidades de aprender matemática investigando? Ele tem o ato legítimo de pensar matematicamente? Ele desenvolve descobertas fascinantes e caminhos produtivos? Parece-me mais razoável colocá-lo em uma posição intermediária e relativa: para o aluno, se ele preparar suas aulas, possivelmente vai vivenciar processos que nem sempre vão à sala de aula, atividades desafiadoras que vão fazê-lo pensar e fazer descobertas. Mas, é possível que o professor seja o "primeiro cliente" do conhecimento pronto, em decorrência de suas experiências formativas ou da ausência destas e ainda do uso que ele faz dos recursos didáticos (materiais concretos, livros-textos e etc).

Tanto para aluno quanto para professor, a aprendizagem ocorre no movimento entre o que não sabemos e o que queremos saber. Para isso, a incerteza, as dúvidas e o estranhamento são elementos fundamentais. Tais elementos compõem uma atividade exploratório-investigativa e suscitam a questão central desta tese, de investigar as potencialidades formativas da exploração-investigação matemática para o conhecimento e prática do professor, tendo como hipótese de que trata-se de uma metodologia formativa não apenas para conteúdos matemáticos, tanto em sua estrutura sintática quando substantiva, mas que incide em reflexões e alterações em suas práticas, tendo em vista sua atuação profissional.

Siegel e Borasi (1994) salientam a importância da dúvida, da incerteza e das hipóteses na construção do conhecimento matemático e afirmam que o conhecimento absoluto é falível e compatível com a ideia de que a verdade absoluta é uma ilusão. Esses autores trazem a ideia de "inquirição" (*inquiry*) a qual interpreto como "questionamento" e "indagação" intencional. É pertinente diferenciar o *inquirir* de qualquer modo de *questionar*, conforme sublinham Matos e Serrazina (1996): "o inquérito é conhecido por muitos como o 'genuíno' ou o 'verdadeiro' questionamento, onde a informação é genuinamente procurada" (p. 182), diferindo-se das perguntas por confirmação (que visam testar o conhecimento dos alunos) ou para focalizar (para melhor precisar uma pergunta anterior ou para buscar entendimento sobre o que o aluno está fazendo).

Durante a realização de uma atividade investigativa, os envolvidos exploram a situação proposta, procuram regularidades, põem problemas, elaboram e testam conjecturas, argumentam e comunicam suas ideias e conclusões (ABRANTES; LEAL; PONTE, 1996b, 1996a). Aporto-me nas palavras de Matos e Serrazina (1996, p. 177) para o entendimento de conjecturas:

> Uma conjectura é uma asserção que pode ser verdadeira, mas a qual pode necessitar de modificação ou mesmo rejeição à luz de pensamento ou evidência posterior. (...) Conjecturas são normalmente expressões de padrões ou regularidades que uma pessoa compreende, expressas em palavras, gravuras, símbolos ou de outra forma. Cobrem um leque de certezas que vão desde crenças não sustentadas, passando por hipóteses que parecem intuitivamente corretas, a asserções que o emissor acredita que pode justificar por evidência e argumento.

Na atividade investigativa, em uma dada situação, a exploração inicial, pautada pelo entendimento do que foi proposto e pela identificação de regularidades, leva quem desenvolve a atividade à proposição de questões que não estão dadas a priori, sendo estas importantes para as etapas subsequentes por nortear o processo investigativo. Cabe ressaltar que a realização da atividade e seu registro são igualmente relevantes. Assim, a dinâmica planejada pelo professor (ou formador[13]) deve contemplar e favorecer o registro da exploração. Desse modo é possível garantir, com mais facilidade, o desenrolar investigativo pela tomada de consciência e pela observação e reflexão de suas próprias anotações.

Tendo em vista as questões propostas, o investigador elabora conjecturas e busca sua veracidade ou falsidade e segue elaborando outras conjecturas ou justificando os resultados obtidos, utilizando-se de exemplos e contraexemplos, o que implica o uso da argumentação, de provas ou de demonstrações. E finalmente, a avaliação do trabalho, prevê a discussão, argumentação, socialização e o debate das ideias e conclusões, de forma oral ou escrita. Processos estes, nem sempre lineares, mas que abarcam a negociação de significados em diversos momentos. Durante o trabalho, em pequenos grupos ou na

[13]Utilizo a expressão formador referindo-me ao professor de professores ou ao planejador da tarefa. Exclua-se do significado dessa palavra a ideia de que o formador é o sujeito exclusivo da ação de “formar” outra pessoa.

socialização dos trabalhos, a discussão — uma das formas de comunicação, na qual os intervenientes interagem questionando e expondo ideias — oportuniza uma igualdade de papéis entre alunos e entre alunos e professor, revelando tanto aspectos matemáticos como modos individuais de pensamento (PONTE; SERRAZINA, 2000).

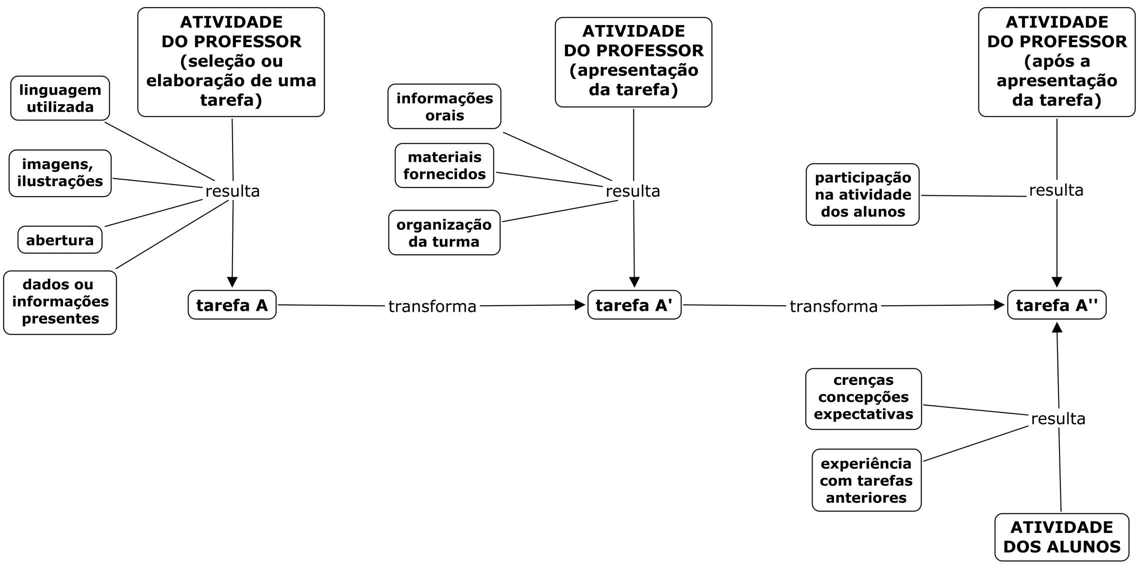
Podemos pensar a exploração-investigação matemática em duas situações principais: uma delas a partir de tarefas preparadas com essa finalidade e outra como decorrente das situações de sala de aula. Na presente pesquisa, prevaleceram as explorações-investigações decorrentes de tarefas preparadas para esse fim específico, mas também ocorreram tarefas que foram decorrentes de situações identificadas nos encontros, como o caso dos quadrados feitos com peças do tangram (*Investigando quadrados com o o tangram*, página 2.5).

Na primeira situação, onde temos tarefas preparadas com a expectativa de desencadear exploração-investigação matemática, a primeira etapa a se considerar antecede a paresentação das mesmas. Previamente à apresentação de uma tarefa, há a atividade do professor que constitui os momentos de *elaboração/seleção/adaptação da tarefa*, nos quais ele mobiliza seus conhecimentos de diversas natureza, tais como: conhecimento de seus alunos, conhecimento de conteúdo específico, conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento curricular, dentre outros, tendo em vista seus objetivos (LAMONATO, 2007).

De acordo com Cunha (2000, p. 3), diversos fatores devem ser levados em consideração pelo professor na seleção, organização e criação de tarefas: os alunos aos quais a tarefa se destina, à forma como eles aprendem Matemática e o conteúdo envolvido. Em outras palavras deve-se considerar se as tarefas (a) "são representativas dos conceitos e dos processos que lhe são subjacentes; (b) são relevantes em termos dos currículos existentes; (c) transmitem aos alunos a ideia de que a Matemática é um corpo de conhecimentos em constante mudança e evolução; (d) permitem que os alunos desenvolvam aptidões e automatismos apropriados". Além disso, a referida pesquisadora alerta que devemos levar em conta os interesses, as predisposições, as experiências e as diferenças cognitivas existentes entre os alunos.

Desse modo, na Figura 1.3 indico alguns estados (A, A', A") de uma tarefa no decorrer da atividade do professor e dos alunos. A tarefa resulta dos objetivos do professor e se diferencia unicamente de outra tarefa pela linguagem utilizada, pela ilustrações nela inseridas, pelo nível de abertura e pelos dados e informações presentes. A partir da tarefa preparada, quando esta é apresentada aos seus alunos, as orientações sobre o desenvolvimento da atividade, o material no qual ela é apresentada, como a turma é organizada e informaçoes adicionais que possam ser inseridas transformam a tarefa do estado inicial (A) na tarefa A'. A partir disso, a participação do professor na atividade de seus alunos bem como as crenças, concepções, conhecimentos anteriores, expectativas e experiências dos alunos podem torná-la próxima ou distante ao que foi inicialmente planejada. Entretanto, ressalto que nesse caso, restrinjo-me aos casos em que a tarefa é preparada sem a participação direta dos alunos.

Figura 1.3 – Transformações de uma tarefa no decorrer da atividade do professor e dos alunos.



(Mapa conceitual elaborado pela pesquisadora.)

A apresentação da tarefa pode ser de modo oral ou escrito e ainda, oral e escrito. Além disso, a linguagem utilizada e as representações que constituem o enunciado influenciam a realização da investigação , conforme pontuo em Lamonato (2007).

O papel do professor para desafiar seus alunos, apoiá-los e fornecer-lhes recursos necessários à continuidade de uma exploração-investigação influenciam a atividade desenvolvida, tanto nas que são decorrentes de uma tarefa preparada com essa finalidade como naquelas que surgem a partir de situações diversas na sala de aula. Conforme Alrø e Skovsmose (2006), é um propício momento para o professor apresentar questões do tipo *o-que-acontece-se* e *por-quê*, incitando os alunos a perceberem, reverem, reconhecerem, posicionarem-se e pensarem alto.

Em uma atividade exploratório-investigativa é importante para o professor que sua intervenção seja um ponto de lançamento de ideias, uma referência que possa auxiliar os demais participantes, com o cuidado de não direcionar ou ainda antecipar etapas. É necessário haver um equilíbrio entre apoio e abandono. Se o apoio for demasiado, pode direcionar e criar dependência entre quem propõe a tarefa e a quem ela se destina. Por outro lado, se o apoio for escasso, ele pode configurar abandono e impedir que aqueles que estão (ou desejam estar) envolvidos prossigam e levem a atividade adiante. Nesse último caso, o professor deixaria de participar da atividade sendo apenas um observador, o que não convém à investigação.

O professor tem o papel de destacar as questões que estão sendo investigadas, principalmente quando as pessoas envolvidas não tenham, necessariamente, experiências com a exploração-investigação matemática. Esta é uma das formas que pode levar à reflexão e à socialização parcial da atividade que se desenvolve. Em uma exploração-investigação matemática, o professor deixa de ter controle sobre as respostas de seus alunos, tendo papel fundamental em apoiá-los (ERNEST, 1996). Isso vai ao encontro de Alrø e Skovsmose (2006) quando estes pesquisadores identificam *reformular* como uma padrão de comunicação no ambiente investigativo. Ao reformular conjecturas, questões ou explicações dadas pelos participantes de uma investigação o professor pode manter contato entre os estudantes ou entre estes, a tarefa apresentada e a atividade que se desenvolve. Novamente ressalto que é necessário estar atento e demandar esforços para a continuidade da investigação. Apenas a observação, mesmo que atenta do professor, pode não ser suficiente para o desenvolvimento de uma investigação por pessoas que tenham experiências de aprendizagem pautadas na memorização ou em modelos como "siga o exemplo" ou "resolva" exercícios com respostas únicas que serão conferidas na "correção".

Desse modo, a dinâmica exploratório investigativa com conteúdos matemáticos se desenvolve com a mediação e participação do professor de modo semelhante na Educação Básica e na formação docente. Considero que a diferença está no segundo contexto, pela possibilidade de expansão das discussões para o ensino de matemática ou outros elementos que estão além dos conteúdos matemáticos envolvidos.

1.6.2 A exploração-investigação matemática em conteúdos geométricos, aspectos relacionados às argumentações e provas no ensino de matemática e elementos didáticos do ensino de geometria

Nesta subseção, discutirei algumas relações mencionadas por diversos pesquisadores entre a exploração-investigação matemática e a geometria, enquanto objeto de ensino. A geometria é um campo da matemática na qual recorremos com facilidade a diversos tipos de representações (desenhos, materiais manipuláveis e objetos virtuais) nos permitindo realizar observações, dar movimento aos objetos e atribuir algumas características antes mesmo de apreender os conceitos. Por exemplo, mesmo que você não tenha o domínio do conceito de quadrado, você pode, elaborar algumas ideias sobre esse elemento geométrico (independente de estarem corretas ou não) pela observação de suas representações. Assim, a geometria permite que o aprendiz possa fazer experimentações, levantar hipóteses e esboçar conjecturas, sem necessidade de ter sólido conhecimento prévio dos conteúdos envolvidos, o que favorece o desenvolvimento de dinâmicas investigativas.

A geometria, para Veloso (1999) é uma campo da matemática que privilegia a valorização de descobertas em contraposição à sua presença na sala de aula com caráter axiomático, onde os conhecimentos são vistos de forma hieráquica. Para este pesquisador,

> Há, portanto que *inventar* uma nova abordagem do ensino da geometria. Tomando como premissa que os dois pilares em que assenta a aprendizagem da matemática são a experiência matemática e a reflexão sobre essa experiência, e aceitando, de acordo com essa premissa, que devem ser valorizadas as atividades de exploração e de investigação na sala de aula. (p. 31)

A geometria permite ter como ponto de partida os aspectos intuitivos do conhecimento humano seguindo-se pelas observações, análise, manipulação de materiais ou objetos e seguindo-se para a sistematização. A intuição, segundo D'Amore (2007), relaciona-se a uma disposição natural para conhecer sem recorrer ao raciocínio. A intuição é representada nas primeiras ideias que vem à nossa mente ao termos contato com uma afirmação, objeto ou elemento matemático. Entretanto, parece-me plausível que a intuição alimenta-se de nossos conhecimentos e experiências prévias e não com aspectos inatos e primitivos. Desse modo, a intuição pode ser ponto de partida para o ensino de geometria e, tal como indica Abrantes (1999, p. 53), é um campo propício para a exploração-investigação matemática:

> Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares. Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da matemática centrada na execução de algoritmos e em "receitas" para resolver exercícios-tipo.

Essas possibilidades enunciadas pelos autores e pela minha própria experiência com atividades exploratório-investigativas foram o cenário que me fizeram optar e inquietar-me em delimitar, nesta pesquisa, os conteúdos geométricos como foco das tarefas que seriam desenvolvidas. Não haveria, evidentemente, problemas em eu não delimitar temas matemáticos para priorizar nas tarefas, entretanto, considerei importante fazê-lo, uma vez que isso viria facilitar a interligação entre os assuntos abordados e, como o cenário desenvolveu-se a partir de um curso, a geometria nem sempre foi, como a aritmética, um tema presente na educação básica e na formação de professores, como destacado por diversos pesquisadores (LORENZATO, 1995; PAVANELLO, 1993; PASSOS, 2005).

A investigação matemática na sala de aula, pelo seu caráter aberto, marcada pelo questionamento, pela busca de regularidades, superação de incertezas e pelo uso da justificativa e argumentação, possibilita o trabalho pedagógico envolvendo diversas formas de raciocínio: dedutivo, indutivo e abdutivo. Para exemplificar, encontrei em Garnica (2002) com referência a Peirce (1977) exemplos que ilustram essas formas de raciocínio: (a) Dedução — Regra: Todos os feijões deste saco são brancos. Caso: Estes feijões são deste saco, Resultado: Estes feijões são brancos. (b) Indução — Caso: Estes feijões são deste saco. Resultado: Estes feijões são brancos. Regra: Todos os feijões deste saco são brancos. (c) Abdução — Regra: Todos os feijões deste saco são brancos. Resultado: Estes feijões são brancos. Caso: Estes feijões são deste saco.

Lopes et al. (1996), em caráter didático, designa raciocínio indutivo como "o processo de obtenção de conclusões gerais com base na experimentação ou observação de um número limitado de casos" (p. 51). Estes autores destacam que as atividades de generalização são contextos para o desenvolvimento do raciocínio indutivo, uma vez que pautam-se na observação de regularidades e na formulação de conjecturas. No entanto, o raciocínio dedutivo é requisito na validação ou demonstração das conjecturas e, nesse sentido, as referidas autoras, destacam a prioridade que pode ser dada à "capacidade de duvidar (Será que esta conjectura é válida?) e de demonstrar (Tenho certeza de que esta conjectura é válida porque...)." (p. 52) em sobreposição ao rigor matemático necessário à formalização de conceitos durante a dedução, respeitado o nível de escolaridade dos alunos envolvidos.

Considero a exploração-investigação um contexto favorável para a abdução, assim como Grando e Marco (2007) com base nos trabalhos de Grando (1995, 2000, 2004) defende para as situações de jogo, pois esta forma de raciocínio "contém em si a possibilidade do risco, a ousadia, propiciando espaços para advinhações" (p. 102) como formas genuínas de uma atividade matemática. Segundo Peirce (1977) citado por Grando e Marco (2007), a abdução se dá na formulação explicativa de algo que não se conhece, representando a única operação de inferência que introduz no raciocínio uma ideia nova e como considero, dando espaço para a intuição. Para Peirce (1977, p. 220), "a dedução prova que algo *deve ser*; a indução mostra que alguma coisa é *realmente* operativa; a abdução simplesmente sugere que alguma coisa *pode ser*." (itálicos originais).

Para além do crescimento do conhecimento matemático a partir dos processos dedutivos, na matemática escolar assim como na história da matemática ao longo da humanidade, outras formas de raciocínio também derivam novos conhecimentos. Nesse sentido, Villiers (2003) caracteriza experimentação como métodos não dedutivos, incluindo raciocínio intuitivo, indutivo e analógico. A busca de validade e convencimento não baseada na exclusividade dos métodos axiomáticos é reafirmada por Domingues (2002, p. 47):

> por vários milênios a matemática se desenvolveu sem se valer desse método. No caso da matemática babilônica e egípcia, por exemplo, os historiadores são concordes em que nenhuma delas se baseou em qualquer estrutura axiomática que pudesse servir de garantia para a validade dos procedimentos práticos de que essencialmente se compunham. O critério de confiabilidade das regras e procedimentos usados era simplesmente a concordância com a realidade a que se destinavam. O que também pode ser tomado como uma ideia de verdade matemática. (...)

> essa forma de conhecimento era o produto da evidência física, da tentativa e erro, da analogia ou do insight dos "matemáticos".

Considero importante que a investigação em sala de aula permita ensinar e aprender matemática não apenas pelos seus conceitos e procedimentos mas também incluindo aspectos das posturas necessárias à construção da matemática enquanto ciência. Nesse escopo, as demonstrações são aspectos centrais. Para fins de tratamento matemático, segundo Silva (2002), "as demonstrações não são nada além de cadeias finitas logicamente articuladas de formas declarativas no contexto de um sistema formal determinado" (p. 62). Isso nos provoca a decidir se, no Ensino Fundamental, queremos ensinar demonstrações (prontas) ou se queremos ensinar matemática tendo diversas formas de provas e raciocínios como parte da atividade matemática. Evidentemente, opto pela segunda opção e para isso é necessário pensar que a atividade matemática presente na formação de professores também precisa ser desta forma caracterizada.

A argumentação, considerando-se os conhecimentos dos alunos e os modos pelas quais eles podem fazê-la, na sala de aula pode ser conduzida pelo professor, não como principal interveniente, mas como mediador, deve ocorrer de modo que os

> alunos ouçam, respondam, comentem e façam perguntas uns aos outros. [O professor] deve procurar que os alunos formulem questões, proponham conjecturas e apresentem soluções, explorem exemplos e contraexemplos e utilizem argumentos matemáticos para determinar a validade de afirmações, tentando convencer-se a si próprios e aos outros. Os alunos devem aprender a aceitar ou rejeitar afirmações com base em raciocínios matemáticos. É através da comunicação que formam consciência dos processos de construção e validação do conhecimento matemático, que aprendem a determinar se uma certa afirmação é ou não uma verdade matemática. (PONTE; SERRAZINA, 2000, p. 6).

Um princípio fundamental para a investigação em sala de aula é a consideração das características da comunidade de produção e interlocução de significados. Na Educação Infantil, destinada aos alunos até os cinco anos de idade, a argumentação centra-se no diálogo oral e na busca de convencimento pelo teste prático das hipóteses, por exemplo. Nos anos iniciais, os modos de os alunos provarem seus argumentos ou requisitarem provas para os argumentos de seus colegas, pode incluir manipulação de recursos didáticos, desenhos, argumentação oral e escrita, o que inclui não apenas aspectos intuitivos, mas também conhecimentos matemáticos anteriores.

Nesse sentido, Lourenço (2002, p. 90) demarca a aproximação entre demonstração e convencimento

> Acreditamos que demonstrar é convencer. Não temos dúvidas de que, em cada nível, o convencimento deve se caracterizar pela coerência e compatibilidade com o meio. O que é necessário num momento talvez seja perfeitamente dispensável em outro momento e em outro meio. Em termos educacionais, o que nos parece ter acontecido ao longo dos anos foi uma exagerada preocupação com a forma, ignorando-se, quase que por completo, a diferença entre o fazer Matemática e o escrever sobre Matemática. Escreveu-se muito, mas ensinou-se pouco.

Conforme pondera Grando, Nacarato e Gonçalves (2008, p. 44), com referência aos trabalhos de Fernandes e Fonseca (2004, p. 249)

> Com a argumentação não se pretende demonstrar a verdade de uma afirmação, nem mostrar a validade lógica de um raciocínio, mas obter a concordância de outrem para a validade de uma dada afirmação. O objetivo da argumentação seria o de obter a concordância do interlocutor, convencer, enquanto que o da demonstração seria o de garantir a verdade. No entanto, nem sempre os argumentos que convencem são válidos. Na argumentação, quaisquer meios, em princípio, são lícitos. (...) Como resultado da argumentação, as soluções dos problemas não têm caráter definitivo.

Desse modo, considero as provas e demonstrações com caráter relativo, ou seja, aproximando-se das formas de argumentação e convencimento, próprias do conhecimento e dos recursos matemáticos de cada nível de ensino. Mantendo-se esta ressalva, considero pertinentes as funções da demonstração apresentadas por Villiers (2002) para as discussões de tais processos durante uma investigação em sala de aula. Nesse sentido, tomo como ponto importante de reflexão a consideração de Garnica (2002) que defende que as demonstrações, entendidas no sentido de "etnoargumentações" "têm sempre a função de convencer, tomado "convencimento", aqui, como a negociação que se estabelece para a atribuição de significados" (p. 80):

> Uma proposta mais geral, no entanto, é o fortalecimento da concepção de que a Matemática profissional — ou Matemática acadêmica — é uma dentre as várias Matemáticas existentes, uma dentre as várias formas de apreensão do mundo, uma dentre as Etnomatemáticas. A partir daí, as classificações das formas de argumentação poderiam ser revistas, não se constituindo mais o formal/semiformal/não-formal, em oposições tão

> definitivas. Por agora, entretanto, afirmo que (a) o estudo das argumentações sobre conteúdos matemáticos pode ser visto sob diferentes perspectivas. Para tanto, torna-se necessário falarmos em diferentes formas de argumentação, ou de modos diferenciados — mas coexistentes nas salas de aula — para o estabelecimento de justificações e que (b) numa Matemática formal, acadêmica que, na prática, segundo a literatura disponível, caracteriza-se como uma Matemática platônica, o modo de argumentação, por excelência, é a prova rigorosa ou demonstração formal, envolta em paradoxos, mas com o objetivo de firmar, definitivamente, a veracidade das afirmações Matemáticas. Dirige-se mais à prática profissional e científica de justificação de conhecimento matemático, devendo ser relativizada e mais estudada quanto a sua forma de utilização em salas de aula. (GARNICA, 2002, p. 78-79).

Pensando na exploração-investigação, considero as funções das demonstrações postas por Villiers (2002) pertinentes para as argumentações e provas. Segundo esse pesquisador, as demonstrações têm geralmente a função de verificação (no original: verification) no contexto da geometria dinâmica. Podemos estender, de modo geral, para a ideia de validação. Mas, além disso, Villiers (2002), chama a atenção para outras funções importantes da demonstração em Matemática: *explicação*, *descoberta*, *comunicação*, *desafio intelectual* e *sistematização*.

A demonstração como um meio de *verificação* atua principalmente quando os resultados são não intutivos ou são duvidosos. (VILLIERS, 2002). Na investigação em sala de aula, procuramos provar alguma declaração quando queremos convencer nós mesmos ou os demais de que esta é verdadeira. A prova é utilizada como uma segurança de verdade, pois requer juntar argumentos para tornar o que se afirma, forte o suficiente.

A demonstração tem a função de *explicação* quando é utilizada para favorecer a compreensão sobre *porque* uma afirmação é ou não válida ou verdadeira. Para o referido pesquisador, as convicções precedem as demonstrações, ou seja, por estar convencido da veracidade de seus resultados, um pesquisador sente-se desafiado a entender porque é que eles são verdadeiros e para isso, desenvolver demonstrações. Para Villiers (2002), isso contrapõe o mito de que a certeza só se adquire com demonstração, esta última permite a compreensão de *porque* uma conjectura é verdadeira. Nas aulas investigativas, o uso da prova é um meio de buscar expor relações implícitas que incidiram na regularidade ou na conjectura surgida. É desvendar elementos ocultos que mostrem o que, escondido, une a situação inicial à conjectura pensada.

A função de *descoberta* de uma demonstração relaciona-se à possibilidade de que, ao desenvolver uma demonstração, um matemático pode explorar e ser conduzido a outros resultados inicialmente não esperados. Para Villiers (2002), a demonstração supera limites impostos pela investigação empírica na identificação de outras propriedades ou resultados. Esse papel da demonstração corresponde ao que Silva (2002) denomina como função heurística. Interessa-nos para a investigação em sala de aula, o arcabouço de argumentos e o encadeamento destes que pode favorecer novas explorações, questionamentos ou até a negação da conjectura, pelo surgimento de contraexemplos ou pelo descarte dos argumentos que se pensava consistentes ou suficientes.

Como meio de *comunicação*, a demonstração pauta-se na necessidade de partilha de significados, a partir de definições ou contraexemplos (VILLIERS, 2002) e na transmissão do conhecimento matemático. Durante aulas investigativas, o registro e a apresentação dos resultados necessita de justificativas e provas, sendo assim, estas servem como meio de comunicar resultados acompanhados de seus respectivos porquês.

A demonstração como um *desafio intelectua*l serve para a realização e satisfação pessoais, em um paralelo ao desafio físico de quem corre uma maratona, por exemplo (VILLIERS, 2002).

E por fim, a demonstração como um *meio de sistematização* permite a convivência com definições e com condições que sejam suficientes ou não para que uma proposição seja considerada verdadeira. Pelos exemplos indicados pelo referido pesquisador, pelo uso de demonstrações na sistematização de resultados, é possível que os alunos possam ter contato com definições paralelas e desse modo, entenderem a construção e os conteúdos envolvidos em uma definição. A demonstração, como meio de sistematização, está interessada na organização dos resultados e no seu encadeamento lógico em um sistema dedutivo (VILLIERS, 2002). Nas atividades investigativas, o uso de provas permite organizar, registrar e sistematizar o que foi realizado, não interessando-nos por reproduzir o que pode estar em algum livro, por exemplo, mas em refinar a escrita esclarecendo e complementando ideias e argumentos, com o objetivo de comunicação e organização do próprio raciocínio.

Concordo com Garnica (2002, p. 79) que defende a importância da argumentação para o convencimento, sensível à atribuição de significados entre os envolvidos, em contraposição ao uso da demonstração pautada exclusivamente no método dedutivo, uma vez que nem o conhecimento matemático advindo das pesquisas, pelo trabalho dos matemáticos profissionais não se inicia com a prova, com a demonstração na sua forma polida, sintética, final. Este pesquisador esclarece que

> Morris Kline, em seu texto "Logic versus Pedagogy", publicado no The American Mathematical Monthly (Mar., 1970) argumenta, em sincronia com nossas afirmações, sobre a distorção de se tomar o método dedutivo como modelo pedagógico: "Primeiro ponto: a Matemática é uma atividade cujo primado é da atividade criativa, e pede por imaginação, intuição geométrica, experimentação, adivinhação judiciosa, tentativa e erro, uso de analogias das mais variadas, enganos e trapalhadas. (...) Os conceitos, teoremas e provas emergem do mundo real./.../ a organização lógica é posterior. (...) A insistência na abordagem dedutiva engana o aluno ainda de outro modo. Ele é levado a acreditar que a Matemática é criada por gênios que começaram pelos axiomas e raciocinaram diretamente desses axiomas para os teoremas.(...) O investigador em Matemática ou em outra ciência, entretanto, não trabalha nesse rigoroso esquema dedutivo. Ao contrário, ele faz uso essencial de sua imaginação e procede indutivamente, apoiado por expedientes heurísticos. Pode-se dar numerosos exemplos de matemáticos que descobriram teoremas da maior importância que eles mesmos não puderam provar. Poderíamos, então, nos recusarmos a reconhecer isso como uma enorme realização e, em referência ao que foi dito acima, insistir que isso não é Matemática? /.../ nenhum julgamento de valor pode negar que o trabalho indutivo da pessoa que primeiro anuncia um teorema é, ao menos, tão valoroso quanto o trabalho dedutivo daquele que primeiro o provou. Pois ambos são igualmente necessários, e a descoberta é a pressuposição de sua conclusão posterior."(p. 79)

Villiers (2002) defende que, em geometria dinâmica, a demonstração não deva ser tratada unilateralmente como meio de verificação e de remoção de dúvidas, e sim

> deve-se utilizar inicialmente a função mais fundamental de explicação e descoberta para introduzir a demonstração como uma actividade significativa para os alunos. Isto requer que os alunos sejam iniciados bem cedo à arte de formular problemas e que tenham sido proporcionadas oportunidades suficientes para explorar, conjecturar, refutar, reformular, explicar, etc. (p. 13)

Tanto a geometria dinâmica quanto o uso de materiais concretos e desenhos mantém características comuns que permitem explorações e verificações, contudo não podemos sobrepor as possibilidades da geometria dinâmica, dos materiais concretos e dos desenhos como se fossem recursos que oferecem as mesmas possibilidades e impõem os mesmos limites. Como veremos na análise desta tese, não o são.

Villiers (2004) destaca a crítica de matemáticos e educadores matemáticos quanto ao ensino de geometria com ênfase nas definições como ponto de partida. Este pesquisador cita de Ohtani (1996) que a prática de contar definições para os estudantes é um método de persuasão moral para justificar o controle do professor sobre os estudantes, buscando uniformidade e evitando discussão de ideias e interações problemáticas.

Conforme referido anteriormente, a experimentação significa os modos de raciocínio não dedutivos. Villiers (2003) caracteriza a experimentação quando: (a) "conjecturas matemáticas e/ou declarações são numérica ou visualmente avaliadas, por casos especiais, construções geométricas precisas e medições, etc" e (b) "conjecturas, generalizações ou conclusões são feitas com base na intuição, analogia ou experiência obtidas através de qualquer método experimental precedente". (p. 174)[14].

Quanto às funções da experimentação[15] discutidas por Villiers (2003), exponho que:

Conjecturar representa, durante a experimentação, a busca por padrões e generalizações. O referido pesquisador afirma que na história da matemática, pela ausência de provas rigorosas, por vezes, as conjecturas que são confirmadas indutivamente podem ser consideradas como se fossem teoremas. Em sua própria experiência como matemático, este pesquisador delineou conjecturas a partir de uma situação experimental prévia. Para tanto, um dos recursos que pode ter influência são softwares gráficos, por permitirem que, em um tempo relativamente pequeno, um grande número de conjecturas sejam testadas. De modo parecido, quando nos referimos aos anos inciais do Ensino Fundamental, o uso de materiais manipuláveis pode facilitar o teste de conjecturas uma vez que permite a construção e desconstrução de situações matemáticas que se deseja representar, superando limites que podem ser impostos pelo desenho, como rigidez e irreversibilidade.

Verificação e convicção significa obter a certeza de uma verdade ou a validade de uma declaração ou conjectura a partir da experimentação. A convicção experimental

[14]Traduzido por mim do original em Inglês: *(i) mathematical conjectures and/or statements are numerically or visually evaluated,by means of special cases, accurate geometric construction and measurement, etc. (ii) conjectures, generalisations or conclusions are made on the basis of intuition, analogy or experience obtained throught any of the preceding experimental methods, etc.*

[15]Traduzido por mim do original em Inglês: *conjecturing*, *verification*, *global refutation*, *heuristic refutation* e *understanding*.

geralmente motiva uma prova, contrariando o mito de que a prova é o instrumento de convencimento. Ou seja, matemáticos precisam estar de alguma forma convencidos para se dedicarem a desenvolver uma prova.

Refutação global ocorre pela apresentação de um contraexemplo que satisfaz às condições da declaração, contudo refuta as conclusões e, desse modo, também a validade da declaração.

Refutação heurística ocorre por contraexemplos que permitem ajustar ou complementar a declaração, seja por uma lacuna na prova ou na escrita da declaração.

Entendimento é permitido pela experimentação na medida em que possibilita um aprofundamento e uma compreensão dos conceitos e definições bem como de sua extensão. O autor exemplifica a validade da declaração "a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360 graus". Na experimentação, por ele entendida, é possível questionarmos o que são de fato ângulos internos, se o quadrilátero em questão é convexo ou pode ser também não convexo. Para Villiers (2003), "a investigação experimental pode também, muitas vezes, contribuir para a descoberta de pistas ocultas ou estruturas implícitas de um problema levando, eventualmente, a construção/invenção de uma prova.[16]" (p. 182).

As argumentações e as experimentações são facilitadas no ensino de estudo da geometria, uma vez que esse campo da matemática, como destaca Passos (2005), é ligado à realidade, sendo mais intuitivo e concreto. Entretanto, apesar disso, a aprendizagem de geometria não se faz apenas pela percepção e observação livres nem tampouco por simples explorações cotidianas do indivíduo em seu meio. É necessário que a escola proporcione atividades que levem a criança a "investigar, experimentar e explorar" (p. 17) objetos do cotidiano ou materiais físicos específicos para o ensino de geometria.

Nacarato e Passos (2003) defendem o trabalho simultâneo com o objeto, o conceito e o desenho no ensino da geometria. Além desses aspectos, essas pesquisadoras também ressaltam a importância da visualização e da representação para a formação do pensamento geométrico. Contudo é relevante dizer que a representação do espaço não é

[16]Traduzido por mim do original em Inglês: "experimental investigation can also sometimes contribute to the discovery of a hidden clue ou underlying structure of a problem leading eventually to the construction/invention of a proof."

simplesmente perceptível e de fácil leitura a partir do ambiente, mas é construída pela interpretação, manipulação e interação com o meio de acordo com Piaget e Inhelder (1977) citados por Passos (2005).

Ao tratarmos dos elementos *objeto*, *conceito*, *desenho* compartilho as ideias defendidas por Pais (1996, 2006) quando trata do interesse didático destes três elementos e do quarto elemento — *imagem mental* — como recursos didáticos auxiliares e representativos do processo de construção dos conceitos geométricos planos e espaciais.

Ao referir-se ao termo *objeto*, Pais (1996) o entende como sendo “os materiais didáticos ou modelos físicos para o ensino da geometria” (p. 67). Este referido pesquisador salienta a necessidade do uso de tais materiais ser acompanhado de cuidadoso planejamento e fundamentação teórica, pois devido a sua natureza particular e concreta não oferecem, por si só, meios para abstração, constrastando com a generalidade e a abstração dos conceitos. Por isso, é necessário que a intervenção educativa seja planejada de maneira que possa buscar a transposição de sua própria materialidade. Conforme suas palavras “o desafio didático, neste caso, é saber como dar a continuidade didática entre o uso do material e as questões que levariam a abstração” (PAIS, 1996, p. 68), uma vez que o objeto como modelo físico contribui para a formação das ideias, porém não as substitui. Isso exemplifica a indissociabilidade do conhecimento curricular e do conhecimento pedagógico do conteúdo.

O *desenho*, por sua vez, também se assemelha ao objeto pela sua natureza concreta e particular, sendo oposto à generalidade e à abstração dos conceitos, e por isso torna-se necessária como no caso dos objetos, a transposição do próprio desenho. No caso da geometria espacial, o desenho traz uma dificuldade a mais aos alunos, ao necessitarem, na representação, fazerem uso da perspectiva para representar a terceira dimensão; dificuldade esta, acentuada também pelos grafismos tradicionais utilizados nos livros didáticos, no que diz respeito à leitura das representações (PAIS, 1996, 2006).

Acredito que são necessárias reflexões em relação ao uso do desenho, pois como justifica Pais (1996, 2006) é um dos recursos didáticos mais fortemente consolidados no ensino de geometria e muitas vezes o aluno não tem claro que o desenho é uma representação e pode tomá-lo como o próprio objeto geométrico (NACARATO; PASSOS, 2003). O ensino de geometria, pautado somente no desenho, pode levar a erros e a construções conceituais que não se referem ao conceito original, mas a criações baseadas nas impressões que o desenho, e somente ele, pode oferecer. Convém salientar também que o desenho é importante suporte na aprendizagem, mas não é imprescindível, haja vista que os portadores de necessidades especiais também podem aprender (PAIS, 2006). Além disso, o uso quase exclusivo de desenhos pode dificultar experimentações.

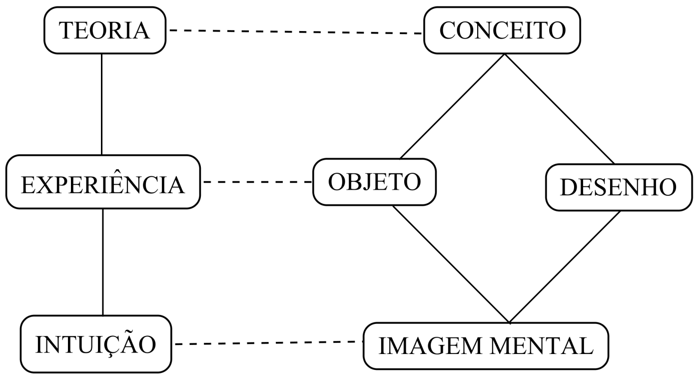
A *imagem mental* associada aos conceitos geométricos é tida pelo indivíduo "quando ele é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos" (PAIS, 1996, 2006, p. 70, p. 99), que é obtida como consequência do trabalho com desenhos e objetos. E, ainda, de acordo com tal pesquisador, "são os objetos e desenhos que podem estimular a formação de boas imagens mentais" (*ib.*). Acrescento que o uso adequado e cuidadoso do desenho e do objeto podem estimular a formação de boas imagens mentais. De acordo com (PASSOS, 2005, p. 37)

> Em muitas situações do dia-a-dia da sala de aula, podem ser encontrados padrões de representação de uma figura geométrica como única maneira de representar graficamente a imagem de um objeto geométrico. Tal procedimento faz com que o conceito de uma figura geométrica, por exemplo, fique restrito à posição que a figura ocupa no plano.

Os *conceitos* são construídos pouco a pouco na dialética entre o mundo físico e a reflexão intelectual sobre este mundo. Por outro lado, o quarto elemento — conceito — não pode ser suscetível a mudanças subjetivas, mesmo que cada indivíduo tenha uma série de imagens mentais associadas a um único conceito. O trabalho didático repousa entre esses dois polos interligados, o conceito e as imagens mentais que são construídas a partir do trabalho como o objeto e o desenho (PAIS, 1996).

Para exemplificar as correlações existentes entre estes quatro elementos fundamentais no ensino de geometria, Pais (1996) apresenta o seguinte esquema:

Figura 1.4 – Correlações entre os elementos *conceito*, *objeto*, *desenho* e *imagem mental*.



(PAIS, 1996, p. 72)

Tendo em vista os parágrafos anteriores e a Figura 1.4, entendo que a *imagem mental* obtida pela evoção do objeto na sua ausência tem suas bases no nível intuitivo, enquanto que ao nível da experiência correspondem o *objeto* e o *desenho*, que permitem uma experiência matemática que parte da intuição com destino ao conceito, que por sua vez, corresponde à teoria. Para isso, as imagens mentais que vão sendo construídas tornam possível a construção do conceito na mente do indivíduo, uma vez que este não é possível de subjetividade. E neste sentido, da intuição à teoria, passando pela experiência também é importante salientar que, sob minha interpretação, não ocorre a passagem de maneira a abandonar o(s) elemento(s) anterior(es), mas estes coexistem. Os conceitos, por sua vez, também influenciam as imagens mentais dos novos conceitos que vão sendo formados, e assim, de maneira cíclica, permitindo idas e voltas.

Quanto aos desenhos é importante destacar dois processos diferentes: a elaboração de desenhos e a leitura destes. Os alunos devem ter oportunidades de fazerem registros que representem conceitos ou elementos geométricos. A socialização dos registros pode permitir que os alunos se apropriem de modos e aspectos dos registros de seus colegas, aprimorando e identificando detalhes e modos de representar que, com o passar do tempo são incorporados aos seus próprios registros. Além disso, permite visualizar e ter contato com formas nem sempre convencionais de registrar que necessitam de discussões sobre as notações ou traços estabelecidos. Nesse sentido, as ilustrações, desenhos e registros feitos pelo professor ou pelos materiais didáticos passam a ser um dos registros e não o registro correto. Segundo indicações de Pais (2000), Andrade (2004) e Nacarato (2004-2005), faz-se necessária uma abordagem exploratória da geometria "num movimento dialético entre a experimentação e a conceitualização/abstração." (NACARATO, 2004-2005, p. 4).

Nos anos iniciais da Educação Básica, o ensino de geometria não deve ficar restrito apenas ao que é perceptível e observacional, necessitando avançar para além do que as representações, desenhos ou registros escritos em língua materna permitem verificar. É necessário centrar-se nas relações entre os elementos, objetos ou desenhos, aprimorando durante os anos escolares o vocabulário, os modos de argumentar, explicar e validar ou refutar conjecturas, os processos de socialização e a comunicação dos resultados obtidos, experiências possíveis quando consideramos a exploração-investigação matemática. Desse modo sim, podemos considerar a geometria campo propício para experimentações que se desenvolvam no eixo exploratório-investigativo, caracterizado pelo desenvolvimento de provas e argumentações, tal como se desenvolve a matemática enquanto ciência.

Considerando os diálogos com os pesquisadores aqui mencionados, nos próximos dois capítulos, analiso os dados da pesquisa, buscando demarcar as potencialidade da exploração-investigação matemática para o conhecimento do professor e de suas práticas, tendo como ponto de partida os aspectos relacionados ao ensino de geometria até aqui discutidos bem como demais referenciais teórico-metodológicos.

2 Historiando investigações: aprendizagens docentes em atividades exploratório-investigativas desenvolvidas no grupo

Neste capítulo, apresento a análise das atividades exploratório-investigativas desenvolvidas no grupo a partir das tarefas por mim apresentadas. Para isso, durante a análise e ao iniciar a escrita desse texto, uma questão surgiu: organizar os dados e narrar as histórias procurando-se manter a cronologia das situações dentro de cada uma delas ou categorizar os dados e conduzir a história a partir das categorias elencadas? À primeira vista, a segunda opção parecia mais direta, pois durante o desenvolvimento dos encontros do grupos e nas narrativas, muitos dos dados se agrupavam tematicamente, como por exemplo, quando em diversas situações as professoras discutiam, comentavam ou refletiam sobre sua própria formação ou sobre as preocupações com suas práticas pedagógicas. Desse modo, tais dados, quando agrupados, facilitam sua análise, pois referem-se a um mesmo tema e, por terem ocorrido em momentos distintos, diversas afirmações ratificam outras, ou ainda acrescentam elementos que facilitam sua compreensão.

Por outro lado, a partir da transcrição do segundo encontro, ficou clara a necessidade de narrar as atividades exploratório-investigativas desenvolvidas mantendo-se a cronologia das situações, possibilitando o entendimento da história propriamente dita, uma vez que o interesse nesse tipo de análise não se centra prioritariamente nos elementos comuns, mas nas singularidades e nos detalhes, únicos em cada situação. Isso configura a narração desse capítulo.

O texto apresentado nesta análise é composto de trechos dos episódios das transcrições das videogravações (com falas e imagens), das narrativas escritas (minhas e das professoras) e demais registros escritos (anotações, desenhos, etc). A interlocução entre os trechos dos episódios e meu discurso indireto é necessário pois as transcrições dos vídeos e os demais documentos constituem uma grande quantidade de dados, conforme mencionei anteriormente.Assim, como a análise iniciou-se durante o período de constituição dos dados, a estes foram acrescidas sinalizações (grifos, chaves e outras formas de destaque) mantendo-se sempre que possível com o foco naqueles elementos que tivessem relação com a questão e os objetivos desta pesquisa. As histórias aqui narradas estão subdivididas em seções que demarcam pontos marcantes do enredo que facilitaram minhas reflexões e consequentemente a do leitor.

Conforme discutido no Capítulo 1, nossos encontros no grupo tinham como ponto de partida tarefas com caráter exploratório-investigativas preparadas para desencadearem nossas atividades, além dos temas e necessidades trazidos pelas professoras para as discussões.

Dentre as atividades exploratório-investigativas desenvolvidas no grupo, nesta narrativa componho seis seções, sendo cada uma decorrente de uma atividade: **Seção 2.1 — Juntando quadrados...**, **Seção 2.2 — Juntando quadrados de novo...: pelos caminhos já trilhados**, **Seção 2.3 — Riscando cubos e economizando papel: o estranhamento em propor questões sem respostas**, **Seção 2.4 — Investigando a composição de figuras geométricas com o tangram**, **Seção 2.5 — Investigando quadrados com o tangram** e **Seção 2.6 — Montando poliedros: explorações sem investigações**. Para favorecer a análise, as seções estão subdivididas em subseções, de acordo com o tema da análise.

2.1 Juntando quadrados...

A primeira tarefa foi preparada por mim com o intuito de trabalhar conteúdos matemáticos que provavelmente seriam de conhecimento das professoras permitindo que estes fossem tratados na perspectiva da exploração-investigação matemática e que pudessem suscitar reflexões e aprendizagens para o conhecimento das professoras e suas práticas.

Tendo como base minha própria experiência docente, tanto com alunos de 5^a a 8^a séries quanto com a formação de professores que atuam na Educação Básica, os desenhos das figuras geométricas planas geralmente estão entre os conteúdos que nomeadamente estão nos diversos anos escolares e, dentre as formas geométricas não-planas, o cubo é aquela que também costuma ser lembrada acompanhada de sua planificação. Com isso, apresentei uma tarefa que envolve a planificação do cubo[1].

Além de tratar das diversas representações planas para a superfície cúbica, a atividade previa discutir a dinâmica exploratório-investigativa, tanto para a aprendizagem docente quanto para a elaboração de atividades para os alunos.

A primeira tarefa foi apresentada de modo escrito, como segue na próxima página. Rassalto que o entendimento para "junção de quadrados" e "união de lados" deu-se do mesmo modo que em pavimentações no plano. Conforme afirma Barbosa (1993) em caráter didático, nas pavimentações do plano a intersecção de dois polígonos tem área nula e uma pavimentação é entendida "lado-a-lado" quando toda aresta é lado comum a dois polígonos.

Como destacado por Alrø e Skovsmose (2006), no início de uma investigação é necessário manter contato com o outro. Christiansen e Walther (1986) defendem que a tarefa é um modo de iniciar a atividade, um modo de contato entre quem a propõe e quem a desenvolve. Para isso, no enunciado, optei por incluir algumas das ações que caracterizam a exploração-investigação: observar, refletir, questionar, duvidar, explicar, argumentar, provar, debater e registrar.

[1] De modo resumido, nesse texto e no diálogo com as professoras, adoto a palavra **cubo** como sinônimo de **superfície cúbica**. Contudo, esse destaque foi feito durante os encontros do grupo, explicitando que um cubo é um sólido geométrico e que, ao montá-lo, a partir de papéis ou cartolinas, por exemplo, temos uma **representação do cubo** a partir da superfície cúbica. Prefiro usar o artigo definido **o** para me referir aos cubos por nós representados. Assim, privilegiarei: **o cubo**; não **um cubo**.

JUNTANDO QUADRADOS...

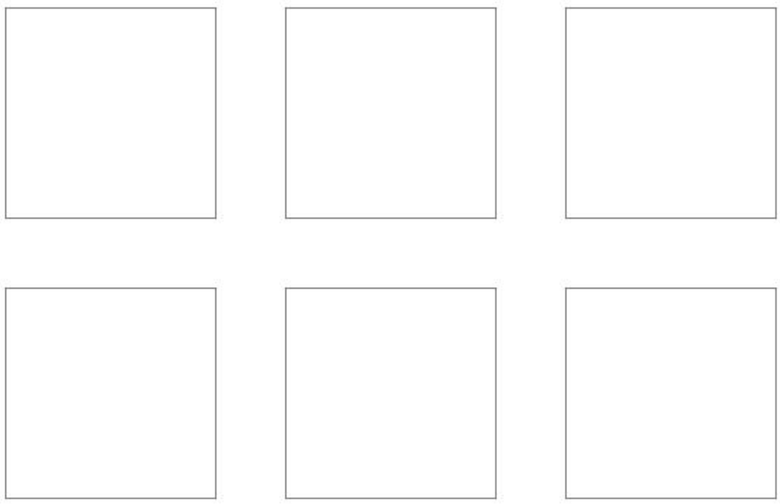
Considerando 6 quadrados recortados, investigue os agrupamentos obtidos a partir da junção de todos eles, sempre com a união de dois lados.

Registre os caminhos percorridos pelo seu grupo para obter as planificações, considerando inclusive ideias e configurações que foram pensadas em um primeiro momento e depois abandonadas. O registro de todo o caminho é muito importante para retomadas e para o momento de socialização da atividade; é isso que possibilita aos demais participantes da atividade questionar, discutir e buscar comparações com seus próprios resultados.

Ainda, é possível que no caminho surjam questões que você queira desvendar. Reflita sobre elas! Vá em frente! Explore! Debata! Discuta! Registre! Questione! Explique! Justifique! Enfim, investigue...!

Para isso, você terá em mãos folhas com quadrados congruentes desenhados que poderão ser recortados. (Figura 2.1). Também terá papel quadriculado, sulfite, cola, tesoura e durex à sua disposição. Bom trabalho!!!

Figura 2.1 – Representação de uma página de papel tamanho A4 com seis quadrados de 4 cm de lado.



(Imagem elaborada pela pesquisadora.)

Conforme mencionei anteriormente, ao preparar tal tarefa pretendi contemplar a identificação de agrupamentos de seis quadrados que representam cubo e discutir o uso de diversas planificações para esse mesmo poliedro. Entretanto, ao preparar uma tarefa exploratório-investigativa, corremos riscos pois não garantimos que todos os conteúdos pretendidos serão de fato compreendidos pela dinâmica que venha a se estabelecer. A aula pode ir além do esperado no tempo e além (ou não) quanto aos conteúdos.

2.1.1 Encontros com a tarefa: olhares de professoras

Tal como destaquei, para o professor, a preparação de uma dinâmica exploratório-investigativa oferece riscos e necessariamente o leva a pensar nos imprevistos, tanto pela abertura que se estabelece de início quanto pelo tempo previsto. Entretanto, num ambiente de formação contínua, a dinâmica exploratório-investigativa prevista é influenciada diretamente pelos motivos das professoras participantes em estar em formação num grupo.

No diálogo a seguir, apresento reflexões de Léia, no diálogo com as demais professoras presentes, diante da primeira tarefa apresentada.

1. *L. Eu não sei nada, te falei, tô aqui para aprender.*
2. *L. Eu continuo com medo. Mas eu quero aprender. É um desafio.*
3. *C. Mas medo de quê?*
4. *D. De errar?*
5. *L. Não é de errar, é de não conseguir. Não saber transmitir para o aluno. (...)*
6. *L. Eu fico montando e já imaginando como eu vou explicar para o aluno.*
7. *L. Eu fico parada, assim, porque eu vou formulando na minha cabeça qual a maneira melhor de passar pro aluno, porque não é só chegar e jogar o comando.*
8. *C. (Em tom de voz muito baixo.) Não era quadrado que eu preciso para amanhã.*

Logo ao se deparar com a tarefa *Juntando quadrados...*, Léia declarou sua posição perante a aprendizagem de geometria (fala 1)[2], destacando preocupações em relação ao

[2] Todas as declarações das professoras estão numeradas sequencialmente no texto. A maioria delas é referente aos diálogos que foram videogravados e depois transcritos. Sendo assim, todas aquelas em que não houver menção de fonte, são provenientes de transcrição de vídeogravação. Entretanto, todas as outras que forem originadas de narrativas escritas e anotações, isto estará mencionado em meu texto.

conhecimento pedagógico do conteúdo (fala 5). Isso ocorreu não somente no contato com a tarefa, mas durante a atividade quando ela construía planificações de cubo a partir das atividades das demais professoras (falas 6 e 7). O conhecimento pedagógico do conteúdo refere-se às compreensões do que significa ensinar um tópico e de como o fazer, incluindo técnicas, princípios, exemplos, contraexemplos, analogias, tarefas e explicações que permitam a compreensão do conteúdo pelo outro, o aluno (SHULMAN, 1986). Tais conhecimentos são elaborados e mobilizados quando o professor prepara suas aulas, na reflexão com seus colegas ou com textos que utiliza e na análise de sua própria prática pedagógica (MIZUKAMI et al., 2003). O conhecimento pedagógico do conteúdo inclui a compreensão profunda do que se sabe (WILSON; SHULMAN; RICHERT, 1987) para que, a partir disso, o professor possa decidir como o fazer, considerando como os alunos aprendem e quais são suas possíveis dificuldades.

Conforme disse Léia, sua opção em participar do curso é pela consciência de que quer ampliar conhecimentos que considera necessários para seu exercício profissional. A aprendizagem docente é motivada pelas necessidades da prática, pelo sentimento de incompletude, pela consciência do que somos. Para Freire (1996, p. 39), "quanto mais me assumo como estou sendo e percebo a ou as razões de por que estou sendo assim, mais me torno capaz de mudar, de promover-me".

O interesse e os modos de participação do professor numa atividade de formação relaciona-se com seu fazer docente e com as demandas da prática. Enquanto no início do grupo minha referência para a preparação das tarefas eram os conteúdos e objetivos das matemática escolar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, para Cidinha a importância de uma atividade se relacionava ao seu uso em sala de aula (fala 8), independente de originar-se de uma tarefa exploratório-investigativa (por mim considerada dessa forma) ou de um problema fechado ou exercício.

Cidinha, com referência aos materiais utilizados e oferecidos com a tarefa, manifestou seu apreço pela atividade (fala 9).

9. *C. Eu gostei de fazer isso.*
10. *C. Quando eu faço essas coisas eu nunca uso fita crepe!*
11. *C. Eu achei tão prática a coisa!*
12. *G. Eu também adorei!*

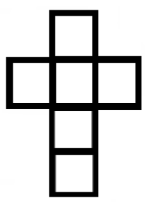
13. *C. Menina, ela dobra direitinho, vai dar certinho para meus alunos.*
14. *C. Eles fazem uma bagunça com cola; fica grudando.*

Para as professoras em formação, o sentido atribuído a uma dada atividade relacionava-se à possibilidade desta poder ser oferecida aos seus alunos, tendo em vista as necessidades que o próprio professor percebe em sua prática. Placco e Souza (2006, p. 19) ao discutir os fatores e motivos internos que influenciam nossa aprendizagem enquanto adulto e professor, afirma que a aprendizagem docente "decorre da consciência da necessidade de mobilizar recursos pessoais e sociais, internos e externos, para atingir determinados objetivos claramente definidos." Complementa ainda que esse aprendiz é um sujeito envolvido em sua realidade e, desse modo, o objeto a ser aprendido pode desencadear ou não a escolha por aprendê-lo.

Para Dulce, os seis quadrados recortados referiam-se a planificações do cubo. No que diz respeito às avaliações externas ou materiais didáticos, esta professora afirmou que a planificação do cubo geralmente aparece nestas sob uma configuração padrão (fala 17). Cabe ressaltar que essa atividade foi desenvolvida no início do mês de setembro e seus alunos fariam avaliações do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e Prova Brasil em novembro.

15. *C. Mas isso costuma cair em muitas provas, principalmente no tal de SARESP.*
16. *C. Então isso é importante.*
17. *D. Vários tipos, e geralmente a gente só dá essa. (Figura 2.2).*
18. *C. É isso mesmo. D. Eu não conhecia todas.*
19. *C. E nem eu.*
20. *D. Não, a gente só vê assim, olha. (Figura 2.2)*
21. *A. Vem pronto.*
22. *D. Até no livro didático é assim.*

Figura 2.2 – Planificação do cubo mencionada por Dulce como se fosse a única.



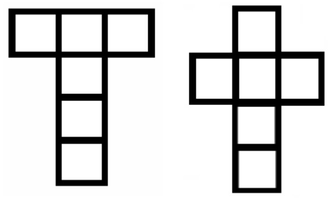
(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

O tratamento das planificações do cubo, a partir da diversidade delas, distanciando-se de uma configuração padrão, permite a exploração de modos diferentes da passagem do plano para o espacial, fazendo-se a representação de objetos tridimensionais pela manipulação de suas planificações. O trabalho com apenas uma planificação, aqui denominada de planificação-padrão no sentido de Pais (2000) para *configuração geométrica*, condiciona e limita a criatividade e o entendimento de quem aprende e vai ao encontro dos *exercícios* com a certeza de que a resposta existe e é unica. Uma única planificação (quando na melhor das situações, duas) para representar este sólido geométrico, por vezes, é utilizada em sala de aula apenas com a finalidade de mostrar seus elementos, como vértices, faces e arestas e ainda com o incoveniente de alguns desses elementos (vértices e arestas) requererem abstração por parte do sujeito para serem visualizados. Ao invés disso, a diversidade de montagem das planificações requer a atividade de evocar o cubo e suas faces mesmo este não estando à vista. A localização no plano, de cada um dos quadrados em relação ao demais contribui para o desenvolvimento do pensamento espacial e das relações entre as representações plana e espacial de um mesmo objeto. Gisele destacou que o hábito é de se usar apenas uma das planificações, revelando nesta primeira etapa, a ideia de o professor "dar" (fala 25) possibilidades para os seus alunos.

23. *G. Tem umas que são mais fáceis para montar.*
24. *G. E a gente fica só, eu pelo menos, sempre na mesma.*
25. *G. Eu acho importante a gente dar todas essas possibilidades para a criança, porque cada um tem uma maneira de perceber. E se a gente só faz de um jeito...*
26. *L. Parece que tem só aquela, né.*
27. *D. E quando aparece um exercício que muda a planificação, já era!*
28. *G. Fica aquela lá e a gente pensa que é só ela, que é a que a gente mais conhece.*

Passos (2000) identificou a presença de planificações-padrão na atividade dos alunos de uma 4^a série. A referida pesquisadora solicitou aos alunos que fizessem a planificação de um cubo que seria posteriormente vincada e recortada para observarem se o resultado incidiria em uma caixa fechada ou aberta. Durante a atividade, dos dezenove alunos que fizeram a caixa fechada, para quinze deles a planificação coincidia com uma dessas (conforme Figura 2.3). Com referência à Fischbein (1993), a referida pesquisadora justifica que tais planificações são aquelas que apresentam simetria na imagem, o que facilita a dobra e a correspondência com o cubo, uma vez que "os componentes figural e conceitual são naturalmente bem integrados e, consequentemente, o que se manipula é o conceito figural com seus elementos" (tradução da referida pesquisadora).

Figura 2.3 – Planificações do cubo em forma de cruz e de T.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir de Passos (2000).)

Assim, no que diz respeito à exploração-investigação matemática, para professores que não tenham experiência com essa abordagem metodológica, é possível pensarmos que poderão primeiramente interessarem-se e analisarem os conteúdos envolvidos e não propriamente a dinâmica estabelecida, mesmo que, o formador tenha tornado tal objetivo explícito. Por outro lado, pela abertura dada pela tarefa e pela dinâmica vivenciada é possível questionar e problematizar conhecimentos que estavam estabelecidos e que a prática por si só, pudesse não favorecer alterações, como a identificação do trabalho com apenas uma (ou talvez duas) planificações do cubo, ocorrida na discussão das professoras.

Na educação básica, com base em meus estudos anteriores, a exploração-investigação matemática permite a vivência do processo e não apenas objetiva o resultado final, sendo deste modo um caminho promissor para o aluno "pensar sobre" o que se investiga, buscando que ele não apenas desenvolva o que foi determinado pelo professor. Na formação de professores, esta ideia se estende, uma vez que o professor pode "pensar sobre seu ensino", problematizando saberes.

2.1.2 Da atividade propriamente dita: contexto para a construção de conhecimento sintático de conteúdo específico

O modo como a tarefa é elaborada e apresentada aos participantes é relevante no desenvolvimento da atividade uma vez que revela modos de pensar a atividade pedagógica do formador e relaciona-se com as expectativas e experiências dos participantes. Como os quadrados foram entregues separadamente, Cidinha estranhou não terem abas para colagem e Gisele destacou que era para não dar pistas de como devem ser juntados. Cada professor traz com ele mesmo representações do ensino e da escola, mesmo antes de um curso de formação de professores, conforme nomeia Gauthier et al. (1998) de tradição pedagógica. Entretanto, tais representações podem permanecer durante sua carreira sendo modificadas no processo de formação contínua ou ainda, não se alterarem. Para Rocha e Fiorentini (2005, p. 3) a tradição pedagógica são "os saberes transmitidos de uma geração para outra e adquiridos implicitamente na própria atividade profissional e internalizados pelas práticas discursivas, as quais expressam um modo de conceber e realizar o trabalho docente".

Enquanto Gisele recortou e coloriu os seis quadrados e iniciou o registro de diversas configurações[3] que podem ser formadas por seis quadrados (mesmo não sendo planificações do cubo), Dulce manifestou (fala 31) seu interesse em descobrir as planificações do cubo, o que veio a direcionar a atividade subsequente, indo ao encontro do que eu tinha pensado, mesmo Gisele advertindo de que o enunciado não se reduzia a essa única possibilidade de interpretação.

29. *G. Tem outras opções, dá pra fazer outras, sem ser o cubo.*
30. *G. Investigue os agrupamentos de todos eles. (Lendo no enunciado.)*
31. *D. Mas eu quero as planificações do cubo!*
32. *D. Ela não falou, mas pode fazer.*

Com algumas configurações de seis quadrados feitas e pela ideia posta por Dulce de descobrir planificações do cubo, Gisele direcionou sua atividade para esse objetivo. Passaram a realizar uma atividade compartilhada, entretanto prevalecia modos individuais de conduzi-la. Dulce primeiro montava as configurações com seis quadrados para depois verificar se eram ou não planificações do cubo e, então, registrá-las. Por sua vez, Gisele utilizava as planificações que desenhou para refletir e elaborar outras, buscando um processo não aleatório que garantisse a diversidade de planificações sem repetição. Isso as distanciava de uma descoberta de planificações por tentativa e erro. Ambas destacaram a importância do registro e ao revelarem o que faziam, facilitavam a participação de Léia e de Cidinha.

[3]Denomino *configuração* qualquer agrupamento dos seis quadrados cuja junção se faça pela coincidência de dois lados, independente de representar ou não uma planificação de cubo.

33. *D. É muito importante esse registro, né, porque a gente se perde. (. . .)*
34. *G. Sem montar é mais fácil para mexer. Eu estou observando o seu. (para Dulce)*
35. *G. Eu estou aproveitando o que você está fazendo. Em cima do que você faz eu estou pensando se tem um jeito de descobrir uma sequência mental [uma regularidade].*

A partir das explorações iniciais, a atividade direcionou-se pela hipótese de Dulce sobre a quantidade de planificações do cubo. A situação apresentada transformou-se em um problema, para o qual começavam a surgir conjecturas. Esta professora afirmou serem oito ou seis, tentando reconhecer em sua memória alguma referência para esse número. A investigação pode ser compreendida como um aprofundamento do processo exploratório, na medida em que, durante a exploração foram percebidas diversas planificações do cubo e na investigação o que se pretende é descobrir quais são essas planificações e não apenas exemplificar algumas.

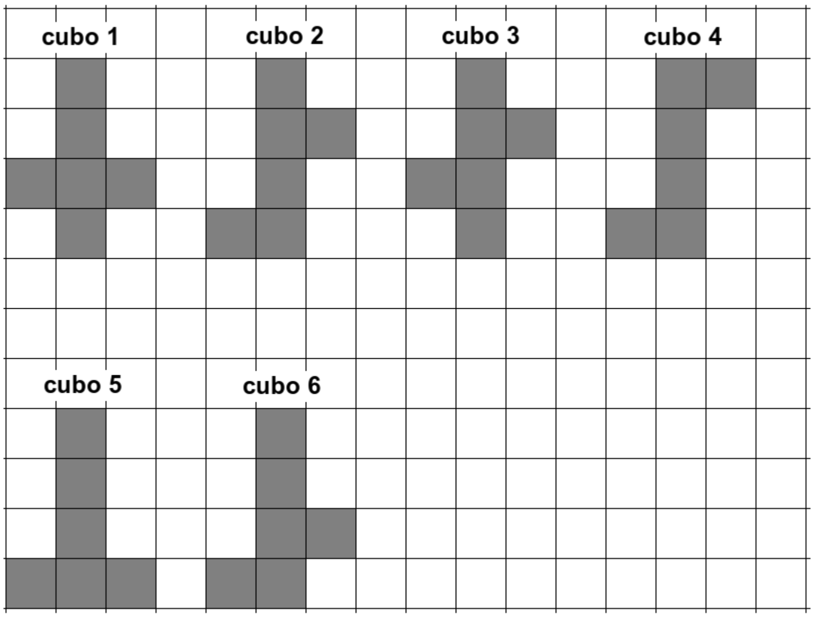
36. *D. São oito. . . Não sei se são oito ou se são seis, não lembro de cor.*
37. *D. Na verdade eu nunca montei de forma diferente. Mas uma vez eu vi numa prova de um jeito diferente e isso ficou na minha cabeça e eu não esqueci.*
38. *D. Agora eu tenho que tirar a dúvida.*
39. *D. As planificações do cubo. . . Eu quero descobrir todas.*

A experimentação (intermediada pelos quadrados recortados ou pelos registros no papel quadriculado), para Gisele, servia-lhe como um modo de buscar padrões e de conjecturar e a verificação era para confirmar a validade de suas declarações (VILLIERS, 2003) ou ainda para realizar outras descobertas. Gisele manteve os quatro quadrados alinhados e movimentando os outros dois pode obter todas as seis planificações com quatro quadrados alinhados, a partir da observação de seu registro escrito. Em sua narrativa escrita, esta professora afirmou que:

40. *G. Iniciei a atividade com planificações que não se transformariam em um objeto tridimensional.*
41. *G. Com o questionamento de Dulce sobre as várias formas para se obter o cubo, fui registrando o posicionamento de cada quadrado.*

42. *G. Observando os dois primeiros registros ("cubo1" e "cubo2" da próxima figura), percebi que existia uma lógica: 4 quadrados na vertical e os outros 2 permaneciam nas laterais (1 de cada lado), revesando o seu posicionamento (ao lado do 1º quadrado da vertical, depois do 2º, depois do último (4º) – "nunca" do lado do 3º porque seria a mesma posição do 2º quadrado –> estaria apenas de ponta-cabeça"). Observação: atividade de "descubra a sequência".*

Figura 2.4 – Registro de Gisele no papel quadriculado com as seis primeiras planificações do cubo.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

43. *G. Acho que o truque é esses quatro no meio e você vai jogando os outros dois [quadrados] na lateral. Não só isso, mas um dos caminhos. Porque pelo desenho acho que fica mais fácil da gente visualizar.*

44. *G. Porque você tá montando e eu tô observando o que você está montando e aqui coincide tá [os quatro quadrados alinhados[4]] e então eu falei: vou mudar só a lateral.*

45. *G. E deu certo, já é outra configuração. E daí dá para tirar as variações.*

[4]Durante o desenvolvimento das atividades, denomino *quadrados alinhados* aqueles que têm medianas contidas em uma mesma reta com apenas um ponto em comum, como exemplificado na Figura 2.5.

46. *G. Talvez ainda tenham outras.*
47. *G. Mas pelo desenho, eu achei que esse é um caminho.*

O registro de Gisele mostra o processo como ocorreu e não o produto final. Ela o fez conforme desenvolvia a atividade. Com isso, naquele momento, Gisele ainda não tinha percebido que ao colocar o quadrado na última posição, repetia-se a primeira novamente, como veio a ocorrer nos diálogos posteriores entre as participantes. O registro escrito permite a sistematização da atividade exploratório-investigativa e do processo de formação, possiblitando ressignificações e reflexões sobre a atividade docente. Assim, conforme mencionam Placco e Souza (2006) "Aprender significa se aproximar do conhecimento oferecido, apropria-se dele a partir da própria história pessoal e particular, em um processo de ressignificação que ocorre na interação com o grupo."

A primeira conjectura ocorreu com base nos aspectos intuitivos e nas planificações que já estavam prontas. Assim, para Gisele (fala 48), o cubo somaria seis planificações (Figura 2.4).

48. *G. Eu acho que são seis.*
49. *D. Eu acho que a gente consegue fazer seis planificações do cubo.*
50. *D. Agora, por que será que a gente consegue só seis?*
51. *D. Pelas faces, né?*
52. *G. Eu pensei nisso, quer dizer, eu também acho.*
53. *D. Eu também tô pensando nisso agora.*
54. *G. Combina o número seis das faces com seis opções [de configurações].*
55. *P. Desse modo que você fez, com quatro quadrados alinhados... (Figura 2.4, que representa parte do registro de Gisele e a imagem das planificações que estavam sobre a mesa.)*

Ao posicionar-se e pensar alto, Gisele comunicou sua conjectura às demais professoras. O pensar alto, como destacado por Alrø e Skovsmose (2006), fomenta a investigação

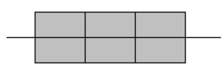


Figura 2.5 – Exemplo de três quadrados alinhados.

por publicar processos, possibilitando aprofundamentos e retomadas. Dulce (fala 49), concordando com Gisele, relacionou a quantidade seis ao número de faces do cubo (fala 54, favorecendo que uma hipótese tornasse o foco da atividade, uma verdade provisória que contrapõe o estilo dedutivista por vezes praticada na matemática escolar, sem lugar à provisoriedade.

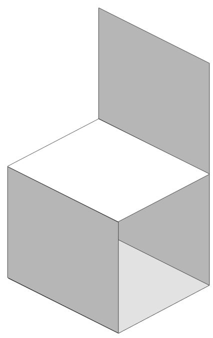
Garcia (2009) defende, a partir dos trabalhos de Paul Ernest, a visão falibilista da matemática no ensino escolar dessa disciplina, na qual os estudantes sejam encorajados a propor ideias, testar hipóteses, generalizar e comparar métodos, de modo que a matemática seja vivida e ensinada pautada na conversação cujas bases são: "experiências compartilhadas, hábitos, compreensões, crenças e participação em atividades comunitárias. Assim, a matemática consiste em jogos de linguagem com regras e padrões bem definidos, estáveis e duradouros, mas sempre abertos para a possibilidade de mudança" (p. 179). Para a referida autora, isso contradiz uma imagem pública sobre a matemática que se relaciona como uma visão absolutista desta disciplina, como se esta fosse uma ciência a-temporal, a-histórica, isolada e não produto da ação humana.

Dulce desafiou a si mesma e a Gisele a reforçar os argumentos ou a ver novas possibilidades (fala 50). Para provocar a reflexão e a continuidade da atividade, completei (fala 55) suas palavras, destacando uma característica que observei em suas planificações. Para seguir a discussão, questionei Gisele (fala 56), desafiando-a a reforçar seus argumentos ou despertando outras possibilidades. Conforme Alrø e Skovsmose (2006), o *o-que-acontece-se* utilizado pelo professor permite a conferência, o teste e a reformulação de conjecturas. Em contrapartida, Gisele e Léia utilizaram uma prova visual, feita por gestos e descrita oralmente (falas 57 e 58). Sua prova teve a função de comprovar para mim, aquilo de que ela já estava convencida.

56. *P. E se você alinhar cinco quadrados? Tem como obter planificação do cubo, que é o que você está procurando, com cinco quadrados alinhados?*
57. *G. Não, porque o cubo tem quatro, por causa do formato do cubo... Ah... (Olha para cima, imaginando mentalmente se tem...)*
58. *G. Não, porque o cubo, se você pensar nele, são quatro faces. (Fazendo gestos com a mão mostrando sobreposição de faces.)*
59. *G. Se ficar cinco, não dá.*
60. *D. Isso, são quatro, por causa das faces. (Com gestos, indicando faces paralelas, duas a duas.)*

61. *G. É uma regra.*
62. *G. Porque se eu colocar cinco vai faltar uma lateral e aqui vai sobrar e ficar em cima [faces sobrepostas], não vai ser um cubo. (Referindo-se à sobreposição de quadrados.)*
63. *P. Porque um único exemplo que...*
64. *D. Que contradiz.*
65. *P. Que contradiz, já joga fora. Para contradizer, um exemplo basta, mas, para provar, não.*
66. *L. Não dá porque não fecha. Passa por cima.*
67. *L. (Mostra com material concreto, conforme representação feita na Figura 2.6.)*

Figura 2.6 – Configuração com cinco quadrados alinhados e a impossibilidade de representar um cubo.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Reportando-me ao trabalho de Rezende e Nasser (1994), citadas por Nasser e Tinoco (2003), um dos tipos de prova é a justificativa gráfica na qual utiliza-se uma figura para mostrar a veracidade de um resultado, como a estratégia utilizada por Gisele e Léia. Por ser a prova da negação de uma afirmação, apenas um exemplo foi suficiente.

O conhecimento sintático do conteúdo de uma disciplina, para Wilson, Shulman e Richert (1987, p. 113) engloba as evidências e provas que guiam a investigação no referido campo de conhecimento e está incluído no conhecimento de conteúdo específico. A estrutura sintática consiste em "um conjunto de formas nas quais a verdade ou a falsidade, validade ou invalidade são estabelecidas"[5] (SHULMAN, 1986, p. 9), ou seja, como tais

[5]Traduzido por mim do original em Inglês: *The syntatic structure of a discipline is the set of ways in which truth or falsehood, validity or invalidity, are established.*

autores definiram "a estrutura sintática envolve o conhecimento das formas pelas quais a disciplina produz e avalia novos conhecimentos"[6] (WILSON; SHULMAN; RICHERT, 1987, p. 118).

Para o professor, a aprendizagem e o desenvolvimento de situações nas quais os alunos também possam adquirir conhecimentos dessa natureza passa pelas experiências as quais ele necessite argumentar, provar, justificar, questionar e fundamentalmente *duvidar*. Assim, durante uma exploração-investigação, torna-se necessário que os modos pelos quais a atividade se desenrola sejam definidos, redefinidos, avaliados e discutidos tanto quanto os resultados obtidos. Há ainda a possibilidade de durante uma atividade investigativa, os participantes vivenciem a importância de que um contraexemplo basta para contrapor uma afirmação e torná-la falsa, ao que Villiers (2003) denomina de refutação global

Uma de minhas preocupações era intervir para manter e levar adiante a atividade e por outro lado, evitar que eu me tornasse o centro e a direcionadora da investigação. Naquele momento, eu sentia a necessidade de participar como um meio de sistematizar o que estavam fazendo, facilitando a participação de Léia e Cidinha. Entretanto, estas professoras estavam prestando atenção ao que acontecia, mas faziam suas coleções de planificações, em silêncio. Isso nos mostra as diferentes formas de aprendizagem de cada professor, dentro de um mesmo contexto de formação.

Quando planejamos uma atividade exploratório-investigativa, consideramos que uma das etapas, conforme preconizado por diversos pesquisadores, é a socialização dos resultados. Para mim, esta etapa não deve ocorrer necessariamente nas etapas finais da atividade, ao invés disso, pode permear seu desenvolvimento, mantendo o contato entre os participantes, um dos padrões de comunicação nas aulas de matemática indicado por Alrø e Skovsmose (2006).

Ponte e Serrazina (2000) indicam que os momentos de discussão podem ocorrer em situações diversas, quer seja quando os participantes têm ideias bem definidas em relação a um dado assunto para argumentar suas convicções ou quando pensam em "voz alta" durante a exploração inicial de um determinado assunto.

---

[6]Traduzido por mim do original em Inglês: *The syntactic structure involve knowledge of the ways in which the discipline creates and evaluates new knowledge.*

Gisele titubeava em afirmar que o cubo tinha apenas seis planificações, considerando a possibilidade de terem oito ou doze, conforme sua narrativa (fala 69). Na narrativa escrita, nem tudo o que ocorreu é registrado. Gisele não escreveu minha provocação anterior sobre a possibilidade de planificações com cinco quadrados alinhados. A escrita, enquanto instrumento de constituição de dados, diferencia-se da discussão oral, uma vez que esta última é mais densa, e nela é possível perceber aquilo que ocorreu e não foi considerado no registro escrito, seja pela necessidade natural de sistematização, própria de uma escrita, seja pelo tempo de escrever ao mesmo tempo em que a atividade se desenvolvia ou ainda por uma opção que revela a prioridade dada pelo autora. De um modo ou de outro, Gisele excluiu um questionamento feito por mim que não incidiu em planificação do cubo — com cinco quadrados alinhados.

68. *G. Terminadas estas possibilidades (6), fomos questionadas pela Maiza se poderíamos montar o cubo com 3 quadrados na vertical. A essa altura, já nos perguntávamos sobre quantas maneiras são possíveis se planificar o cubo (8? 12?)*
(Narrativa escrita)
69. *G. Eu acho que não [tem mais que seis planificações] porque ele tem os quatro.*
70. *P. Será que tem um jeito de eu pensar que esses três estão fixos e eu vou movimentando esses outros três também? Tem alguma planificação de cubo que dá nisso?*
71. *D. Talvez.*
72. *G. (Com seus seis quadrados soltos, manipulava-os na busca de uma resposta.)*

Com o objetivo de avaliarem suas afirmações e de reforçarem seus argumentos, questionei (fala 70) sobre a possibilidade de se ter planificações com três quadrados alinhados. A participação do professor durante uma investigação vai desde o acompanhamento do trabalho dos alunos à participação mais direta. Nesse caso, eu procurava dar-lhes apoio e destacar questões e conjecturas que eram elaboradas. Parafrasear suas declarações e desafiá-las permitia que refletissem sobre sua atividade e impulsionava a investigação. Em aulas investigativas, os papéis do professor são: desafiar seus alunos, avaliar o progresso deles, raciocinar matematicamente, apoiar o trabalho dos alunos, promover reflexões e fornecer e recordar informações (PONTE et al., 1998; PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). Nesse sentido, percebo uma similaridade entre as atividades exploratório-investigativas na educação básica e aquelas desenvolvidas em contexto de formação continuada de professores, pois tanto em um caso quanto no noutro, cabe ao formador estar atento às possibilidades de intervenção que possam ser favoráveis à continuidade do processo investigativo.

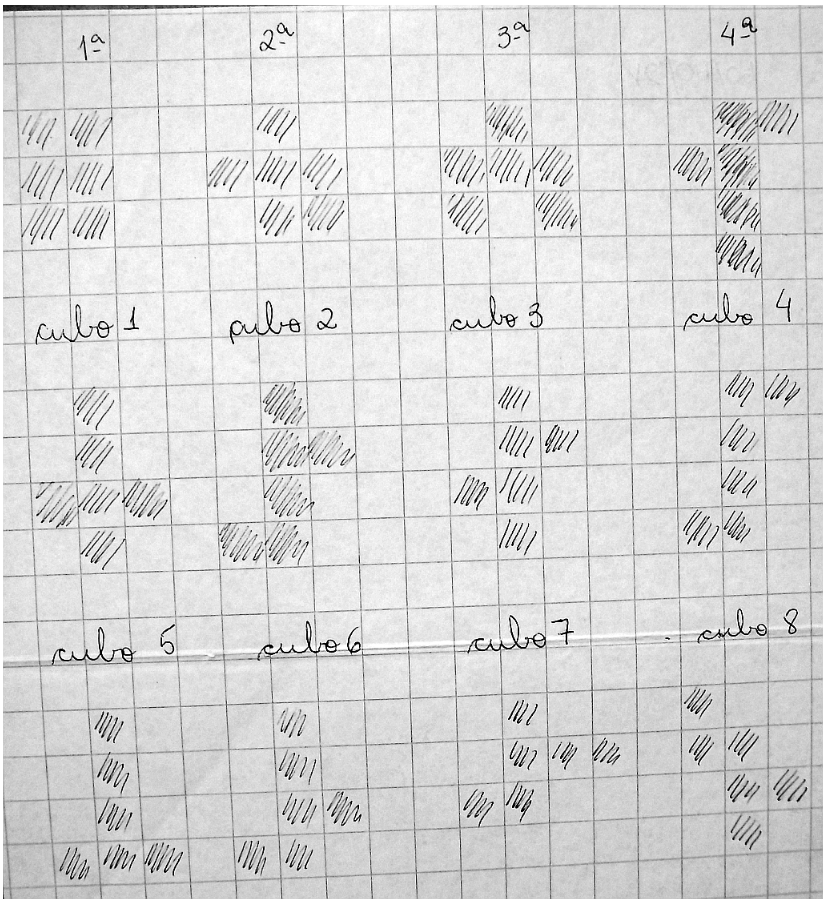
Léia registrou em suas planificações no caderno que uma delas foi feita com meu auxílio confirmando que a atividade foi desenvolvida por *nós*. Ao refletirmos sobre a participação do professor/formador durante uma atividade investigativa, busco, desde minhas primeiras experiências, evitar que eu seja a validadora dos resultados obtidos pelos demais participantes, sejam eles alunos da Educação Básica ou professores. Para tanto, há que se pesar que não me parece possível, nem tampouco recomendável, mantermos uma posição neutra, ou seja, de expectador da situação, mesmo na função de pesquisadora. A minha própria atividade durante o desenvolvimento da investigação influencia o *fazer* dos demais sujeitos envolvidos e, assim o deve ser. Em diversos momentos foi necessário questionar as professoras diretamente com o objetivo de levá-las a refletir sobre determinados conceitos ou situações necessárias para a continuação da atividade, tal como eu o faria com alunos da educação básica.

Gisele procurou compor planificações que tenham três quadrados alinhados e encontrou duas configurações (falas 73 e 74). Com isso, Gisele derrubou a conjectura anterior de que há somente seis planificações de cubo (fala 75). Ao buscar, por meio da manipulação dos seis quadrados, provar que as planificações precisavam exclusivamente de quatro alinhados, ela encontrou contraexemplos para sua declaração (*cubo 7* e *cubo 8* da Figura 2.7[7]), ao que Villiers (2003) denomina de refutação global.

73. *G. Ah, assim, três e três. Legal essa. Três, três e um (Referindo-se ao* cubo 7 *de seu registro no quadriculado, conforme Figura 2.7).*
74. *G. Achei! (Referindo-se ao* cubo 8 *da Figura 2.7.)*
75. *G. Você (para Dulce) estava na dúvida se eram seis. Deu oito já! (...)*
76. *G. Agora eu já fiquei em dúvida!*

[7]Nesta figura, as quatro primeiras configurações referem-se à etapa exploratória, anterior ao questionamento de Dulce sobre as planificações do cubo.

Figura 2.7 – Registro de Gisele no papel quadriculado, com destaque para *cubo7* e *cubo8*.



(Imagem obtida pela pesquisadora por meio de escaneamento.)

Após fazer o registro da planificação no papel quadriculado, Gisele utilizou os seis quadrados recortados para confirmar que se tratava da planificação do cubo. Para esta professora, a experimentação com o material manipulável (seis quadrados recortados) permitia a verificação (VILLIERS, 2003) das representações que ela registrava ao mesmo tempo em que permitia conjecturar quando seu registro não era suficiente para a visualização do cubo pretendido.

Cada uma das professoras, ao seu modo, levada pela sua própria necessidade, desenvolvia e compartilhava parte de sua atividade individual ao mesmo tempo em que considerava a atividade do grupo ao elaborar suas planificações.

Tendo em vista que há mais que seis planificações do cubo (quando estava na nona planificação), Gisele reelaborou sua conjectura afirmando que então o número de planificações é um número múltiplo de seis. Gisele se manteve em busca de uma regra que, para ela, estaria escondida e com isso prosseguiram a atividade. Decidiram investigar (falas 92 e 93). Uma investigação não se faz por imposição ou está dada pela tarefa. Ao contrário, o envolvimento de quem se dispõe a participar delineia as questões e a sequência do processo, não sendo possível senão pelos sujeitos envolvidos. O papel do professor ou formador, centra-se no apoio, no acompanhamento e na orientação, quando necessário.

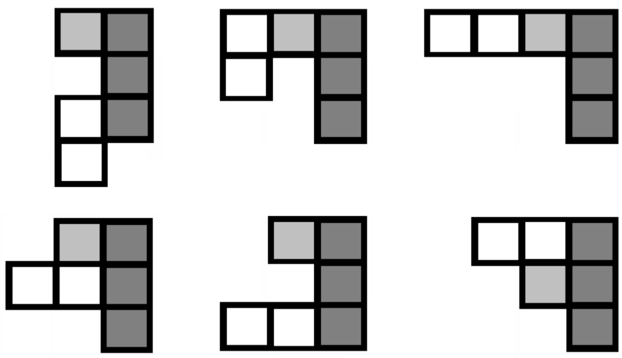
Para Gisele, a matemática é uma disciplina envolta de regras e naquilo que esta professora denomina de "lógica" (fala 78): haveria uma relação entre o número de planificações e o número de faces do cubo, conforme exposto em suas conjecturas. Tal relação pauta-se no raciocínio abdutivo, uma vez que não há certezas anteriores que provém a declaração, entretanto ela é fortemente entendida como algo que vai acontecer. Além disso, pautada em suas experiências, para Dulce, por eu ter-lhes entregue muitas páginas com os quadrados impressos era um indício de que o cubo não teria apenas oito planificações. Por sua vez, para Gisele, motivada pelo seu próprio interesse e questionamento despertado durante a atividade, esta era uma pista (fala 93) que deveria ser considerada.

77. *G. As possibilidades são um número múltiplo de seis?*
78. *G. Tem que ter alguma lógica. (Rindo.)*
79. *G. Porque o cubo é feito por seis [quadrados].*
80. *G. Por causa das faces.*
81. *G. Eu acho que são doze.*
82. *G. Se não são seis, não são oito, são doze, número par!*
83. *G. Contando todas. As de quatro [quadrados alinhados] tem seis [planificações], a de três [quadrados alinhados] já tem mais três...*
84. *D. Então, doze?*
85. *D. Nossa, doze! Eu nunca fiz doze!*
86. *C. Eu nunca vi tantas!*
87. *L. Doze?*
88. *G. Ah, eu tô achando que é.*
89. *D. A gente acha né.*
90. *D. Se ela tirou um monte de cópias [da página de quadrados anexa à tarefa] é porque ela sabe que tem mais do que 8.*
    (todas riem)
91. *G. Faz sentido.*

92. D. Vamos investigar!
93. G. Tudo é uma pista!

Passaram então a investigar quais eram as planificações que tinham menos que quatro quadrados alinhados. Nesse processo, foram também identificadas configurações que não formam planificações do cubo. Com as três peças apoiadas sobre a mesa: três quadrados alinhados grudados, dois quadrados unidos e um quadrado solto, foram feitas, uma a uma, todas as possibilidades que são representadas na Figura 2.8. Estas configurações foram entendidas como aquelas que têm os outros três quadrados todos do mesmo lado em relação aos três alinhados.

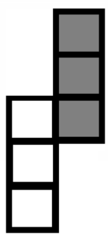
Figura 2.8 – Configurações com três quadrados alinhados que não são planificações do cubo.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Foi identificada a primeira planificação do cubo com três quadrados alinhados (Figura 2.9), somando até aquele momento sete planificações do cubo.

Figura 2.9 – Planificação do cubo com três quadrados alinhados.

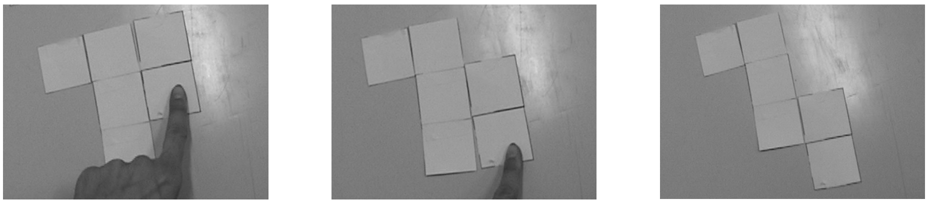


(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Depois, seguiram a investigação das demais planificações que têm três quadrados alinhados, sendo que os outros três estão em duas peças, uma de um quadrado e outra de dois quadrados anexadas em lados diferentes em relação aos três alinhados. Com isso, foram analisadas duas configurações (Figuras 2.10a e 2.10b) que não são planificações do cubo e identificada a oitava (Figura 2.10c).

Figura 2.10 – Configurações com três quadrados alinhados e os outros três em peças de um e dois em lados opostos. Em (a) e (b) não-planificações do cubo. Em (c), a oitava planificação do cubo.

(a) Não-planificação do cubo. **(b)** Não-planificação do cubo. **(c)** Oitava planificação do cubo

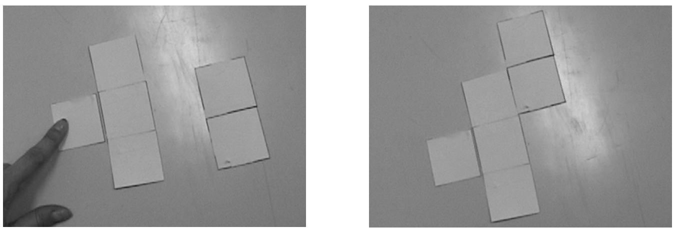


(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Ao se fixar um quadrado unido ao quadrado central do trio de alinhados, conforme indicado no movimento da Figura 2.11 foi descoberta a nona planificação do cubo (Figura 2.11b).

Figura 2.11 – Identificação da nona planificação do cubo (b).

(a) **(b)**

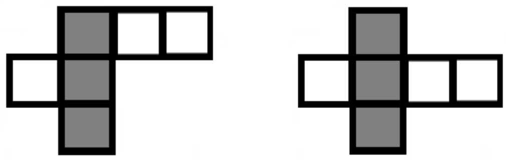


(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Antes da identificação da décima planificação, foram determinadas duas configurações conforme Figura 2.12, mantendo-se um quadrado anexado ao quadrado central do trio de alinhados e os outros dois em lados opostos. A primeira delas é uma não-planificação do cubo e a segunda, uma planificação do cubo, entretanto já incluída naquelas com quatro quadrados alinhados.

Figura 2.12 – Configurações.

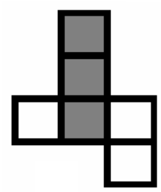
(a) Não-planificação do cubo. **(b)** Planificação repetida.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Finalmente, seguindo o mesmo procedimento, finalizaram-se as planificações com três quadrados alinhados pela identificação da décima planificação do cubo (Figura 2.13).

Figura 2.13 – Planificações do cubo com três quadrados alinhados.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

No processo de identificação das planificações com três quadrados alinhados, Gisele passou a utilizar seus quadrados recortados para experimentar as planificações antes de registrá-las, uma vez que como vinha fazendo anteriormente, apenas pela análise de seu registro, isso não foi mais possível, conforme escreveu em sua narrativa (falas 94). Esta professora não colava os seis quadrados, mas com eles dispostos na mesa, levantando um ou dois quadrados, buscava a imagem mental que transformava a planificação em um cubo.

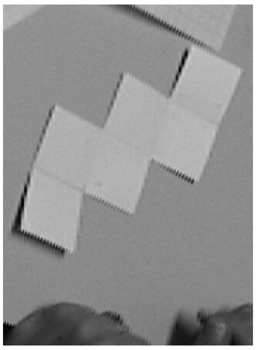
94. *Encontramos 4 possibilidades. Nesses casos foi necessário fazer no concreto, pois não consegui visualizar as posições antecipadamente.*

Segundo Fischbein (1993), como imagens e conceitos são categorias distintas de entidade mentais, nesse caso Gisele procurava mobilizar imagens que representassem planificações do cubo com três quadrados alinhados, entretanto, possivelmente pela falta de experiências anteriores com tais imagens, ela precisou utilizar objeto (quadrados recortados e justapostos) para obtê-las. Para a formação de professores e o ensino de matemática na educação básica, essa diversidade se faz necessária, uma vez que as configurações geométricas — um desenho utilizado como recurso para ilustrar um conceito ou uma propriedade importante — que funcionam como suporte para o raciocínio, contribuem para a formação de imagens mentais, possibilitando a formação e expansão de conceitos e a resolução de problemas (PAIS, 2006).

Após o término da identificação das planificações com três quadrados alinhados, novamente no sentido postulado por Alrø e Skovsmose (2006), desafiei-as se havia mais planificações com quatro, com três quadrados ou ainda com dois quadrados alinhados. Para estes autores, desafiar "significa levar coisas para outra dimensão ou questionar conhecimentos já estabelecidos" (p. 115). Ao ser desafiada, uma pessoa tende a reforçar seus argumentos ou perceber novas possibilidades partindo da análise do que ela mesma está fazendo. Isso levou-as a investigarem e Dulce determinou a planificação com dois quadrados alinhados.

95. *P. Tem de três, tem de quatro. Tem como ter de dois? Ou tem mais alguma de três ou de quatro?*
96. *G. Dois, dois... e aí vira três.*
97. *D. Existe!*
98. *G. É, escadinha! (Olhando para a planificação que Dulce tinha feito.)*
99. *D. Isso, escadinha! (Figura 2.14)*

Figura 2.14 – Décima primeira planificação do cubo.



(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

O resultado da décima primeira planificação dava indícios de que o número poderia chegar a doze, reafirmando a conjectura anterior e era um motivo para a continuidade da investigação, não motivadas por novo questionamento meu, mas pelas próprias conjecturas.

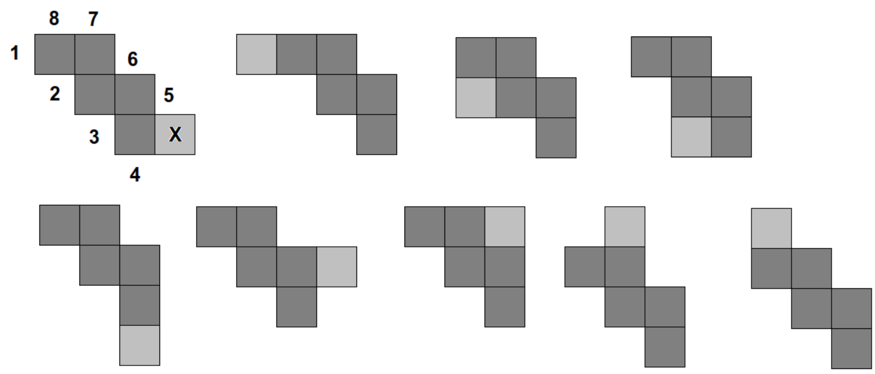
100. *D. Gente, são doze planificações então!*
101. *G. (risos)*
102. *D. Eu gosto do doze.*
103. *D. Gente! Nunca pensei nisso!*
104. *D. E olha que eu adoro geometria, heim!*
105. *D. Isso ainda me intrigava, sabia que um dia eu ia descobrir isso!*
106. *D. Eu pensei nas seis faces do cubo, seis maneiras de... Não sei se tem a ver... Quer dizer...*
107. *D. Quantas possibilidades com quatro? Quantas com três? Quantas com dois [quadrados alinhados]?...*
108. *G. Acho que deve ser seis, quatro e duas, então.*
109. *D. Seis com quatro...*
110. *G. Quatro e duas. Tá diminuindo, olhe.*
111. *G. Eu acho, né... Mas, com dois...*
112. *G. Mas com dois... A gente só conseguiu uma. E não dá para fazer de outra forma.*
113. *G. Tem quatro de três, uma de dois e seis de quatro.*
114. *D. Seis, quatro e duas. Deve ter mesmo duas de dois.*
115. *G. Então, mas a de dois... Como é que você monta outra de dois? Acho que não dá!*

> *116. G. Porque qualquer lugar que você colocar já vai ficar de três.*
>
> *117. G. Se mudar um de lugar [um dos quadrados, deixando cinco] vai ficar três (Fazendo movimentos conforme ilustrado na Figura 2.15).*

Com isso, Dulce lançou outra conjectura (fala 108), buscando regularidade na sequência dos números de planificações com quatro, três e dois quadrados alinhados. Mesmo não tendo encontrado uma segunda peça com dois quadrados alinhados, já consideravam a existência desta (fala 110) para satisfazer a soma igual a doze que lhe era favorável, mesmo contradizendo suas experimentações (fala 112). Dulce concordou com Gisele, mas esta última professora abandonou sua expectativa quanto à existência de uma regra, pautando-se na experimentação e no processo percorrido, que foi sistemático e não aleatório.

Para reafirmar a veracidade de sua afirmação (fala 115), Gisele amplia o movimento ilustrado na Figura 2.15, desenvolvendo uma prova gráfica. A partir dos seis quadrados justapostos que estavam ao seu lado na mesa, Gisele justificou porque não é possível fazer outra planificação com dois quadrados alinhados (Figura 2.15). Para isso, da planificação com dois quadrados alinhados, Gisele retirou um deles (X) e justapôs à peça formada com os cinco restantes, nas posições indicadas pelos números de 1 a 8, sendo que a última configuração formada (referente à posição 8) coincide com a planificação inicial. Gisele quis mostrar que em todos os casos (independente de ser planificação do cubo ou não) esse quadrado (X) se junta aos demais passando de dois para três alinhados (fala 116).

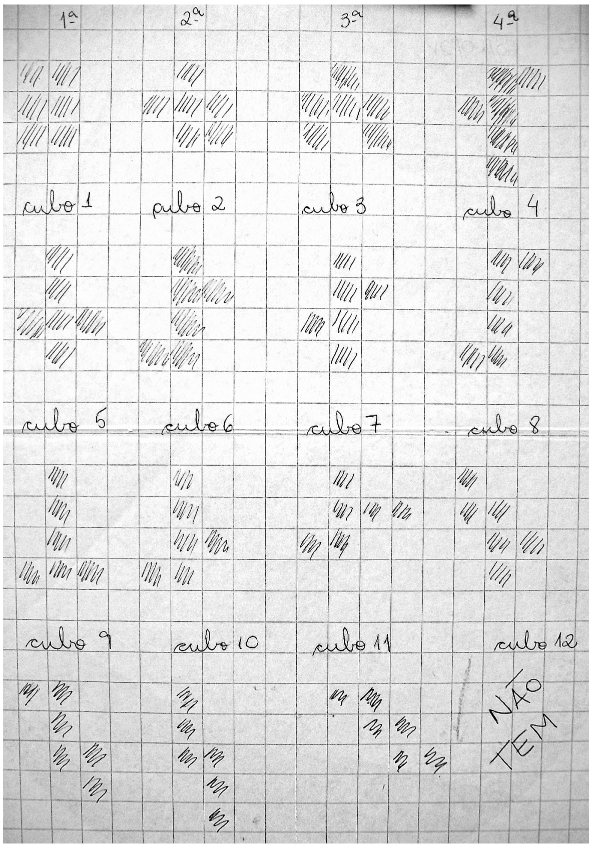
Figura 2.15 – Representação do movimento de Gisele para provar que há somente uma planificação do cubo com dois quadrados alinhados.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

A abertura da tarefa, na perspectiva da investigação matemática, permite o trabalho com estrutura sintática do conhecimento de conteúdo específico. A estrutura sintática inclui as formas pelas quais uma declaração pode ser considerada verdadeira na área, como o conhecimento pode ser produzido e avaliado (WILSON; SHULMAN; RICHERT, 1987). Naquele momento não bastava que tivessem encontrado onze planificações para afirmarem que o cubo tem onze planificações, mas que o processo de obtenção das onze planificações garantisse que não existem outras. Em seu registro no papel quadriculado, Gisele mencionou a não existência da décima segunda planificação do cubo (Figura 2.16).

Figura 2.16 – Registro de Gisele no papel quadriculado com onze planificações e a indicação de que a décima segunda não existe.

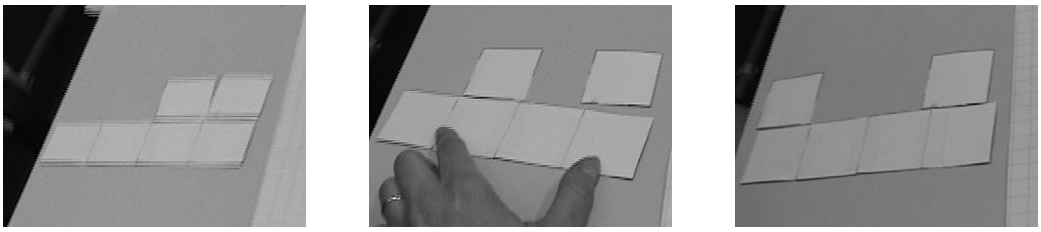


(Imagem obtida pela pesquisadora por meio de escaneamento.)

Além dos exemplos favoráveis, ao final da atividade, revisitamos o caminho percorrido, sistematizando o que já havia sido feito e o processo de prova empenhado. Nessa análise, foram feitas outras configurações que não formam o cubo (Figura 2.17). Durante a sistematização da atividade é importante que estas apareçam, uma vez que fizeram parte da atividade e do caminho percorrido. Tais exemplos serviram de reflexão tanto quanto as planificações identificadas.

Figura 2.17 – Exemplos de não-planificação do cubo.

(a) **(b)** **(c)**



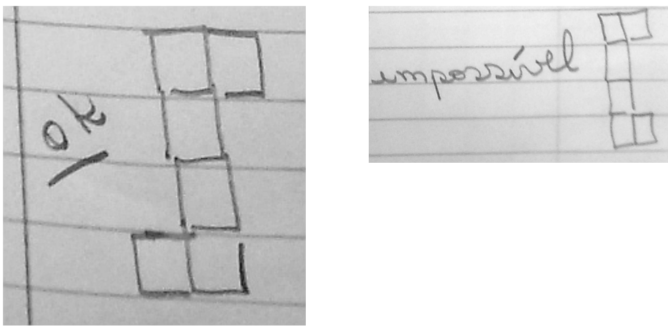
(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

O registro escrito de Léia incluiu nossa atividade ("*estamos verificando*" na fala 118). Nele, esta professora incluiu exemplos e contraexemplos, tal como a atividade desenvolvida (Figura 2.18).

> 118. *L. Nós estamos verificando se não há mais nenhuma possibilidade de montar o cubo com quatro quadrados mudando apenas os outros dois de lados diferentes.*

Figura 2.18 – Exemplos de configurações presentes no registro de Léia. Em (a) uma planificação do cubo e em (b) uma não-planificação do cubo.

(a) **(b)**



(Imagens obtida pela pesquisadora por meio de escaneamento.)

Numa investigação, as situações que não deram certo, as explorações que favoreçam outras descobertas permitem a compreensão das respostas e do processo desenvolvido.

Por outro lado, um caminho moldado, livre de erro, preconizado na tradicional “correção dos exercícios”, feita pelo professor, omite e impede o aluno do contato com a dúvida, com a incerteza e com a tomada de decisões. Nas situações de resolução de problemas e exploração-investigação, na verdade, são essas as aprendizagens que podem ser transferidas para outras situações, demarcando autonomia e criatividade.

Discutimos aspectos relacionados à prova matemática na estrutura sintática do conhecimento de conteúdo específico. Gisele destacou que o cubo ter onze planificações não correspondia com sua expectativa, entretanto ela demonstrou confiança no processo percorrido (falas 119 a 121).

> 119. *G. O onze não combina com o seis.*
> 120. *P. Mesmo não combinando, você se convenceu que são onze, Gisele?*
> 121. *G. A culpa é minha que fui falar que tinha doze. Agora, mesmo eu não gostando, eu sei que são onze.*
> 122. *D. Para mim também.*
> 123. *D. Me convence.*

Uma de minhas reflexões sobre a importância de provas e demonstrações no ensino de matemática concorda com Perdigão (1974) quando este matemático defende que o entendimento sobre os fatos matemáticos e sua utilização deve prevalecer sobre as formalizações utilizadas:

> A compreensão clara dos fatos e a habilidade de bem utilizá-los deve ter preferência sobre a formalização. Quando for conveniente e possível, a formalização deve ser utilizada, porém sempre de maneira local. (p. 2)

Reconhecendo a grandeza do trabalho de Euclides, Perdigão (1974) ressalta que seu trabalho foi de natureza metodológica e não didática, e assim muito importante para a formalização global em Matemática, que ao ser tomada como modelo didático se faz sentir como desastrosa no ensino. Este pesquisador reconhece que

> Hoje parece cada vez mais claro que a formalização absoluta da matemática é um ideal inatingível que deve ser abandonado... Do ponto de vista didático, o problema fundamental é que a apresentação formal da Matemática, na maior parte dos casos, esconde e dissimula os mecanismos de criação. Somente alunos muito bem dotados são capazes de

> apreciar este tipo de apresentação, e estes se transformarão em matemáticos sem que precisemos nos preocupar com eles. O aluno médio, com pouca experiência em Matemática (e este é o caso que nos interessa aqui), tem uma profunda dificuldade em acompanhar longas formalizações. A tendência é reagir com desgosto e medo, ou aceitá-las como um dogma, com grandes prejuízos para sua imaginação criadora. (p. 2-3).

Assim, ainda precedendo o processo de formalização local, as justificativas, os argumentos e os debates que envolvam a criação matemática de um aprendiz nessa área são, ao meu ver, elementos para a compreensão das formalizações locais bem como para o conhecimento do conteúdo específico. Ou seja, distanciando-se da matemática formal, não podemos permanecer no terreno das respostas prontas, inquestionáveis e sem necessidade de justificação ou argumentação. Independente do nível de formalização que possamos desenvolver num determinado conteúdo, o desenvolvimento de investigações pode permitir que a argumentação, a justificação e demais habilidades necessárias ao conhecimento matemático sejam aprendidas e mobilizadas.

Tanto no caso da resolução de problemas no ensino quanto na pesquisa, Perdigão (1974, p. 3) afirma que "a intuição e a imaginação criadora desempenham um papel fundamental e a formalização é apenas um elemento auxiliar".

Uma prova de que o cubo admite somente onze planificações tem a função de *validar* o resultado obtido, ao mesmo tempo em que vai *elucidar* suas dúvidas e pela experiência do processo, também pode alcançar a função de *sistematizar* os resultados obtidos. Então, conforme as funções de uma prova citadas por Nasser e Tinoco (2003), nesse caso, a prova inseparavelmente tem as três funções anteriormente citadas. Na investigação, não apenas os resultados obtidos devam ser socializados e evidenciados, mas igualmente o percurso, ou seja, os *modos de investigar* desenvolvidos. Possivelmente, serão esses modos que nos acompanharão nas futuras experiências de investigar em matemática ou ainda, em outras áreas do conhecimento ou na vida cotidiana. Segundo Alrø e Skovsmose (2006), avaliar é apreciar o processo desenvolvido, emitindo valores, sentimentos, observações. A avaliação favorece que os participantes retomem a investigação desenvolvida, reafirmando suas aprendizagens e conquistas, demarcando a sobreposição do processo sobre o produto final e nem sempre precisa ocorrer somente ao final da atividade.

Ao avaliar a atividade, Dulce destacou a importância das questões e conjecturas levantadas pelo próprio investigador (fala 125): são elas que fazem você ir adiante. Além disso, Léia confrontou (falas 126 e 127) a atividade desenvolvida com suas experiências anteriores.

124. *D. Eu não conseguia ver número ímpar, pensando faces de cubo, entendeu?*
125. *D. Se você procura solução você tem que acreditar em alguma coisa.*
126. *L. Olha! Gostei! (com empolgação). No começo eu achei que eu estava no lugar errado.*
127. *L. Eu já dei aula de quarta série, dezoito anos atrás, dezenove... A gente não trabalhava assim. Era daquele jeito tradicional.*
128. *D. Mas nós não fomos treinados a isso, né, era para a gente ter medo.*
129. *D. Não tinha essa abertura.*

Uma atividade exploratório-investigativa não deve ser pensada com a intenção de se esgotar todas as possibilidades de questões que podem ser propostas. Ao contrário, as questões e a investigação propriamente dita devem ocorrer com o interesse e participação dos alunos e professores. Com isso, ao invés de responder questões objetivando as respostas é possível priorizar o processo desenvolvido.

130. *G. A gente viu que não tinha mais possibilidades.*
131. *G. Quando eu estava pensando nas doze eu estava pensando naquelas coisas malucas que vem à cabeça, de proporcionalidade, de progressão, sei lá, essas coisas.*
132. *G. Para mim é bem isso, na prática a gente constatou que não existiam outras possibilidades, a gente constatou mesmo!*
133. *G. Eu fiquei pensando: deve existir uma maneira, porque o professor colocava tudo, e no final ele dizia: mas dá para calcular assim!*
134. *G. E depois mostrava uma outra maneira, um outro caminho que simplificava, uma fórmula mesmo.*
135. *G. Eu fiquei me questionando aquele dia, que tinha que ser um número par, por causa disso, nesse sentido.*
136. *D. Eu também pensei isso.*
137. *G. Eu ficava procurando essa lógica.*

A atividade desenvolvida parece ter permitido que as professoras buscassem suas experiências anteriores para ressignificar o novo conhecimento. Concordo com Placco e Souza (2006) que o professor, adulto em formação, "opera um vasto reservatório de lembranças. Utiliza-o de várias formas, ora para rejeitar, dissecar, comparar, descartar, ora para se aproximar de novas informações e experiências." (p. 29). Na história de Gisele, o professor possivelmente era um personagem que decidia, que agia, que resolvia e que detinha sempre a certeza. Essas experiências levaram-na a esperar encontrar uma fórmula, uma regra, algo que se sobrepusesse à sua própria atividade. Ao final, chegar-se-ia a um modo polido de declarar, ao "caminho mais curto" que sobressairia e prevaleceria em relação a um processo próprio e individual de pensar (fala 133). Em síntese, parece-me que Gisele vivenciou uma atividade escolar na qual a atividade de seus professores em matemática substituía a sua própria atividade, sobrepondo-se e sendo entendida como a "melhor forma".

A atividade *Juntando quadrados...* possibilitou a mobilização dos conhecimentos de conteúdo específico das professoras tanto no que diz respeito à estrutura substantiva (número de planificações e tipos) quanto à estrutura sintática, na qual houve destaque para alguns processos de prova, pautados na exploração e na experimentação, utilizando-se materiais manipuláveis e representações em papel.

Para as professoras presentes, como mencionaram, a quantidade de planificações do cubo que num primeiro momento pautava-se em aspectos intuitivos trazidos de suas experiências discentes, transformava-se na expectativa de uma regra que relacionasse tal número ao número de faces do cubo. Para o *convencimento* foi necessário fazer um processo sistemático de determinação de todas as planificações, garantindo que não haveria outra e com isso, pudessem validar a quantidade encontrada (onze) que não fazia sentido, senão pela prova. Com isso, ao que Shulman (1986) denomina de estrutura sintática do conhecimento de conteúdo específico, foi possível aproximar-se de aspectos característicos da construção do conhecimento matemático promovidos pela atividade exploratório-investigativa: levantamento de hipóteses e superação de respostas esperadas pautadas na intuição para aquelas que são garantidas por um processo de prova aceito pela comunidade dos participantes.

Andréa iniciou sua participação no grupo no dia em que fizemos a avaliação dessa atividade. Em decorrência de nossa narrativa, ela narrou oralmente (e depois, por escrito) uma atividade feita anteriormente com seus alunos sobre planificação de cubos (Seção 3.1

(p. 180)).

2.2 Juntando quadrados de novo. . . : pelos caminhos já trilhados

A exploração-investigação matemática, marcada pelas ações de observar, questionar, duvidar, explicar, argumentar, provar, debater e registrar pode estar na sala de aula a partir de tarefas especificamente preparadas com tal finalidade ou em situações locais, durante as discussões que surgem no cotidiano das aulas. No caso das tarefas, podemos ter diversas tarefas que são inseridas no planejamento do professor, levando-se em conta as experiências de sua turma e seus propósitos, intercalando-as com outras atividades (problemas abertos, problemas fechados, exercícios) de acordo com o tempo disponível. Uma sequência de tarefas pode permitir a continuidade do trabalho do professor tanto com os conteúdos como também com o próprio processo de *investigar*. Desse modo, a tarefa *Juntando quadrados de novo. . .* dá sequência à atividade *Juntando quadrados. . .* e precede *Riscando cubos e economizando papel*.

2.2.1 Da tarefa à atividade: nem sempre no mesmo caminho

Ao preparar a segunda tarefa, tive como objetivos novamente discutir e tratar a dinâmica investigativa, favorecendo a proposição de questões em um atividade que envolvesse a classificação de figuras planas e a geometria métrica com perímetros e áreas. Entretanto, durante a fase exploratória não houve questões que pudessem propiciar o trabalho com todos estes conteúdos. Durante a atividade, prevaleceu o interesse em identificar todas as configurações com menos de seis quadrados, em decorrência da atividade anterior. Ao término, apresentei questionamentos e outras tarefas para envolver a classificação de figuras pela sua convexidade e discutimos figuras que têm mesma área com perímetro diferente, pautadas em problemas fechados com uma ou mais respostas, no entanto, todas eu já conhecia antecipadamente.

A tarefa foi apresentada como segue, acompanhada de várias páginas com quadrados congruentes desenhados (com 4 cm de lado), além de material para recorte e colagem, tal como a tarefa *Juntando quadrados. . .* .

JUNTANDO QUADRADOS DE NOVO...

Na tarefa anterior foi indicada uma situação na qual deveriam ser feitas investigações juntando-se seis quadrados. Investigue agora, formas planas que podem ser formadas unindo-se menos de seis quadrados. Não se esqueça de que o registro de todos os caminhos, as decisões, as ideias, as conjecturas e os argumentos são aspectos importantes para pensar, discutir e comunicar os resultados e processos.

Durante a análise, ao relacionar a tarefa à atividade desenvolvida vejo que seria necessário que a tarefa tivesse elementos para favorecer o trabalho com os conteúdos que estavam planejados e não foram envolvidos durante a exploração. Com isso, penso que a tarefa poderia incluir outras informações conforme grafado em itálico a seguir:

JUNTANDO QUADRADOS DE NOVO...

Na tarefa anterior foi indicada uma situação na qual deveriam ser feitas investigações juntando-se seis quadrados. Investigue agora, formas planas que podem ser formadas unindo-se menos de seis quadrados. *Estejam atentas para as áreas e perímetros formados*. Não se esqueça de que o registro de todos os caminhos, as decisões, as ideias, as conjecturas e os argumentos são aspectos importantes para pensar, discutir e comunicar os resultados e processos.

Conforme expus anteriormente, uma tarefa pode se transformar no decorrer da atividade de todos os envolvidos, seja intencionalmente, quando o professor acrescenta novas propostas ou a expande, a partir das explorações de seus alunos ou ainda devido às interpretações de quem não elaborou a tarefa, mas está envolvido em desenvolver a atividade subsequente.

Na dinâmica que foi desenvolvida, a tarefa, conforme primeiro enunciado, foi apresentada de forma escrita, sem acréscimos de minha parte. Isso era importante, uma vez que, uma de minhas metas era entender e perceber se o texto era favorável à exploração inicial, sendo suficientemente aberto para permitir a elaboração de questões e o desenvolvimento da investigação propriamente dita. Nesse sentido, o foi. Contudo a atividade decorrente, como mencionei anteriormente, não é garantida exclusivamente pela tarefa. O envolvimento e interesse das professoras e o reduzido número de participantes no grupo foram elementos que caracterizaram as atividades com as singularidades destacadas na análise da pesquisa.

2.2.2 Aproximações com a atividade *Juntando quadrados...*

Como na atividade anterior, alguns modos pessoais de desenvolvê-la se sobressaíram. Cidinha e Dulce faziam recortes, e Gisele utilizava as representações de seu registro escrito para tornar concreto seu pensamento. Léia, por sua vez, acompanhava e refletia sobre tudo o que observava e anotava. A exploração foi conduzida pelas professoras com o interesse de identificar todas as peças[8] possíveis com menos de seis quadrados o que indica, conforme já dito, a influência da atividade anterior.

Gisele e Dulce relembraram a conjectura de que seria doze o número de planificações do cubo, com base em suas experiências e na relação construída com a matemática — a matemática da certeza, na qual correr riscos é algo negativo e indesejável.

> 138. *D. Você colabora, cada um pensa de um jeito e no final de tudo...*
> 139. *G. A gente acha que é doze no final., mas não combina. (rindo) (referindo-se à atividade anterior).*
> 140. *D. Doze! E não é doze!*
> 141. *D. Eu me convenci porque eu vi, mas eu não gostei não.*
> 142. *D. Porque a gente está acostumado com coisas que dão certo, né. Então!*

Por outro lado, a exploração-investigação, por prezar pelo diálogo entre os participantes, pode causar estranheza e também satisfação. Nesse sentido, conforme expõem Alrø e Skovsmose (2006, p. 128)

> Arriscar pode ser visto como algo negativo, quer dizer, associado à primeira vista a sentimentos desconfortáveis que surgem quando uma sugestão ou opinião é refutada ou questionada. Mas, arriscar inclui também uma possível euforia experienciada quando, por exemplo, uma sugestão se encaixa na visão geral do problema e torna-se patente que a sugestão — originalmente um mero detalhe na perspectiva do próprio autor — veio a desempenhar um papel de grande relevância na investigação. Dialogar é arriscado, na medida em que pode mexer com sentimentos ruins, bem como causar alegria.

[8]Utilizo *peças*, no contexto destas atividades, como sinônimo de configuração.

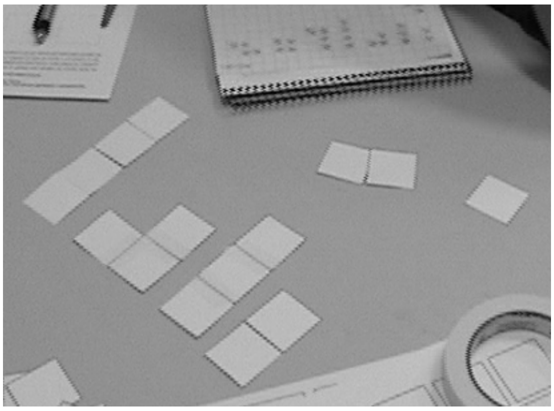
Após identificarem as primeiras configurações com menos de seis quadrados, Dulce interessou-se (fala 143) por determinar quantas são essas peças e quais são. Com esse questionamento, a atividade ficou definida e contou com a participação de todas as presentes.

A exploração-investigação, tendo como elemento o diálogo entre os participantes, permite avanços e não a atividade paralela, repetida entre eles. Conforme sistematizava seus resultados, Gisele os comunicava (fala 144) aos demais, não reservando a socialização apenas para a etapa final. A atividade foi impulsionada pelo contato permamente entre as participantes.

143. *D. Será que são quantas? Quais são elas? (. . .)*

144. *G. Olhe, com dois, com três, eu fiz sempre assim, o reto [quadrados alinhados] e depois trabalhei as laterais. A lógica que eu usei foi essa.*

Figura 2.19 – Primeiras configurações feitas pela Gisele.



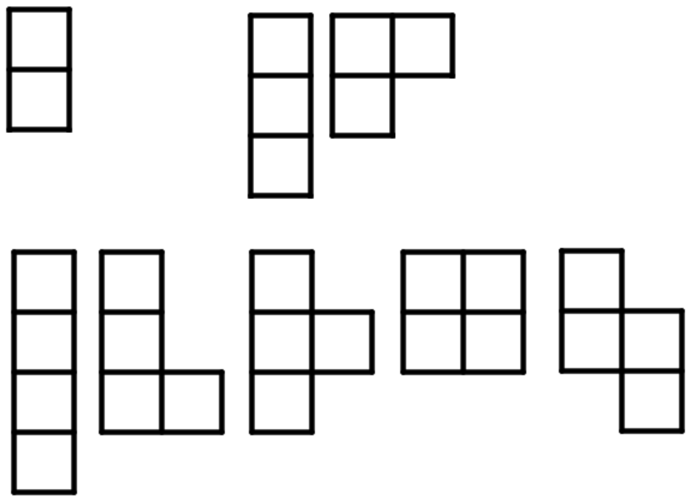
(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Observando as formas geométricas das peças construídas por Gisele (na Figura 2.19), destaquei que algumas delas formavam um retângulo. Eu desejava incitar o levantamento de questões durante o processo exploratório. O que chamava minha atenção eram as figuras geométricas com áreas equivalentes que tinham perímetros diferentes, mas isso provinha de minha própria experiência e relacionava-se aos meus objetivos. Contudo, não deram atenção à essa observação. Gisele estava atenta ao processo percorrido e destacou a necessidade de organizarem as configurações já feitas para se certificarem de que estavam identificando *todas* as configurações.

145. *G. Agora eu vou partir para a de quatro [quadrados alinhados]. As de quatro já vai ter mais opções.*
146. *G. Sempre reta primeiro, depois trabalha com a lateral.*
147. *G. É uma maneira de já comprovar, já cercar as possibilidades.*

Na Figura 2.20, podemos verificar as peças já construídas por Gisele e por Dulce para as quais elas buscam regularidades nas quantidades de peças com dois (dominós), três (triminós) ou quatro (tetraminós[9]) quadrados: respectivamente uma, duas e cinco (falas 148 e 149).

Figura 2.20 – Dominós, triminós e tetraminós.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

148. *D. Um... Dois... Cinco...*
149. *D. Um... Dois... Cinco? (Batendo os dedos na mesa.)*
150. *G. Já tá querendo, né.*
151. *D. (Continua observando e mexendo os dedos sobre a mesa, como quem procura ver uma regularidade nos números.)*
152. *G. Coloquei dois e fui mexendo na lateral.*
153. *G. Eu pensei assim para não perder.*

[9]Essa nomenclatura foi por mim explicada às professoras durante os encontros, assim como "pentaminós" e "poliminós".

Enquanto isso, eu discutia com a Cidinha algumas regularidades entre as configurações que ela tinha formado. Além das duas peças com cinco quadrados, ela já tinha feito algumas com quatro quadrados e todas elas tinham três quadrados alinhados. Desse modo, esta professora também construiu suas peças com quatro quadrados, alinhando-se à atividade de Gisele e de Dulce. Estas, por sua vez, discutiam sobre um procedimento que garantisse, ao final, que não tivessem excluído configurações possíveis de serem feitas. Nesse processo, elas puderam observar figuras que seriam repetidas, ao modificar a posição de um quadrado sobre a mesa.

154. *D. Então nós vamos só girar um quadrado? Então eu vou colocar quatro (colando quatro quadrados) e depois a gente gira o outro.*
155. *G. É, eu fui fazendo assim porque eu acho que a gente vai fechando.*
156. *D. Uma ordem, né.*
157. *G. É.*
158. *D. Aí põe aqui, põe aqui, põe, aqui. (Mostrando com o dedo um quadrado solto ao lado de uma tira com quatro quadrados grudados)*
159. *G. Então, só põe aqui e aqui. (Indicando que para fazer peças com cinco quadrados, tendo quatro alinhados, só é possível em duas posições: onde já está o quadrado anexado e onde ela aponta, conforme Figura 2.21.)*
160. *G. Porque senão fica a mesma coisa e só muda a posição.*
161. *C. Complicado. Você acha que o negócio é tão facinho, aí, veja, de repente. . .*

Figura 2.21 – Posições do quadrado em peças com cinco quadrados, sendo quatro alinhados.

(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Cidinha expressou seu estranhamento com a atividade, pois lhe pareceu que esta seria fácil, sem dificuldades (fala 161). Quando investigamos não partimos do conhecimento pronto, ao invés disso, não sabemos onde vai dar e nem se as explorações conduzirão à questões investigativas. Além disso, não podemos esperar que alguém, como o professor por exemplo, tenha, no final, uma resposta para compararmos com nossos resultados.

Conforme Alrø e Skovsmose (2006), trocar o paradigma do exercício por um cenário para investigação implica também deixar uma zona de conforto e entrar em uma zona de risco[10]. A investigação torna-se uma zona de risco por não conhecermos previamente o que vai dar nem como devemos proceder durante todo o tempo. Uma investigação só tem sentido se houver o que investigar, ou seja, o que não se sabe e o desejo em conhecer.

A investigação seguiu pelo questionamento de Gisele sobre as possíveis configurações com cinco quadrados, com três alinhados e os outros dois alternando-se em diversas posições.

162. *G. Tem que fazer com três agora. Três retinhos e com dois na lateral.*
163. *G. Quais as possibilidades com dois na lateral?*
164. *G. A gente não pode esquecer de fazer também essa possibilidade.*

Para expor sistematicamente as peças que começavam a ficar sobrepostas sobre a mesa, sugeri que estas fossem coladas num painel, conforme represento na Figura 2.22. Nesse caso, ainda faltavam três peças para serem identificadas. Do painel feito para o aqui representado, acrescentei a parte escrita (palavras e números). Para determinar as três últimas configurações, as professoras retomaram todo o processo, uma vez que se lembravam de uma planificação do cubo que tem somente dois quadrados alinhados e ainda não tinham se deparado com uma peça que correspondesse, de algum modo, a essa planificação.

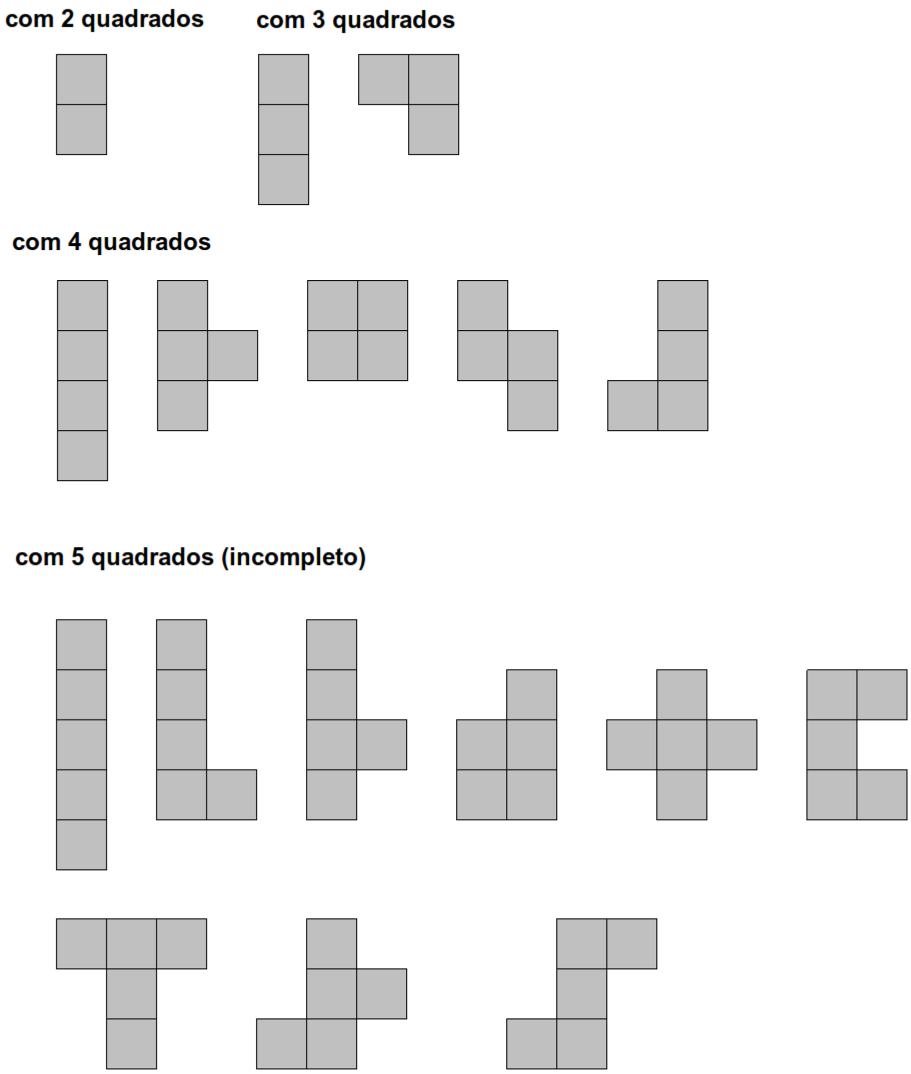
165. *G. E se a gente fizer aquele que escorrega, sabe, que fica para fora.*
166. *G. Aquele igual o do quatro, olha. (Apontando para o painel, o quarto tetraminó na segunda linha da Figura 2.22.)*

[10] Segundo Alrø e Skovsmose (2006), a noção de zona de risco foi desenvolvida por Penteado, Miriam G. Computer-based learning environments: risks and uncertainties for teachers. *Ways of Knowing*, 1(2), p.23-35.

167. D. Dois, dois e um?

168. G. É. (Olhando para o painel.)

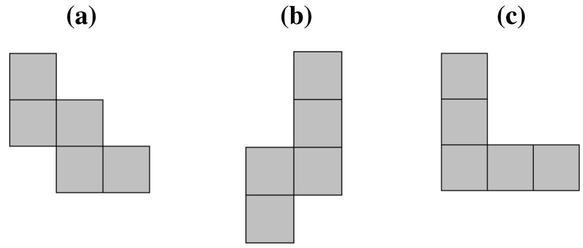
Figura 2.22 – Representação do painel (incompleto) de poliminós.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Depois de analisarem o processo percorrido, identificaram as três peças faltantes (Figura 2.23) dos pentaminós.

Figura 2.23 – Três últimos pentaminós.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Nessa atividade, *quais eram as peças* passou a ser mais importante que *quantas eram*. Após termos todas as peças coladas no painel, questionei quantas tínhamos. Em resposta, contaram (vinte) e demonstraram satisfação por terem todas em seus registros. Mesmo que Dulce anteriormente tenha tido uma iniciativa em relacionar os números de peças por número de quadrados, ao final, esse interesse não mais existiu e a atividade encerrou-se.

Como não foram encontradas mais possibilidades de formarem peças, as professoras deram por encerrada a atividade até porque o término do encontro se aproximava. Em outros encontros, como eu tinha planejado anteriormente, discutimos: (a) classificação dos poliminós segundo eixos de simetria, perímetro, área e convexidade; (b) figuras formadas por peças dos poliminós. Isso foi um modo de ampliar a atividade, complementando com outros conteúdos.

Ao discutirmos a possibilidade de formarmos diversas figuras geométricas com os poliminós, preparei para um encontro posterior outra tarefa (*Riscando cubos e economizando papel*) conforme apresento na próxima seção.

2.3 Riscando cubos e economizando papel: o estranhamento em propor questões sem respostas

Durante a atividade *Juntando quadrados...*, diante das várias planificações do cubo, diferentemente daquelas que comumente figuram em livros didáticos, questionei as professoras sobre a economia de papel quando se deseja fazer as planificações para serem recortadas. De imediato, recebi a afirmação de que há uma que proporcionaria economia de papel.

169. *P. Quando a gente vai riscar no papel para dar pronto, será que tem alguma que economiza papel? Que cabe mais numa folha de papel?*
170. *G. Que encaixa.*
171. *C. Ah, claro que tem!*

Meus objetivos centraram-se na continuidade das discussões e desenvolvimento das atividades investigativas e avistei, inicialmente, que a pavimentação do plano com os polígonos formados pelas planificações e os números máximo e mínimo de planificações poderiam ser ideias relacionadas à área de um retângulo.

Ao redigir a tarefa, considerei alguns elementos que demarcam sua abertura bem como da atividade decorrente, omitindo-os na redação do enunciado: os tipos de planificações que podem ser escolhidas, se haveria ou não espaço para o recorte entre elas, as dimensões da cartolina, o comprimento dos lados do quadrado, a quantidade de cubos, etc.

Para o desenvolvimento da atividade *Riscando cubos e economizando papel* apresentei a tarefa, conforme segue, no final de um dos encontros para que as professoras a desenvolvessem individualmente, em casa, trazendo seus resultados para compartilhar com as demais.

RISCANDO CUBOS E ECONOMIZANDO PAPEL
Investigue como podemos desenhar planificações de cubo em uma folha de cartolina, minimizando os gastos de papel. (Considere que o objetivo seja montar cubos, independentemente da planificação escolhida.)

2.3.1 Propondo questões e buscando respostas

A dinâmica iniciou-se com Gisele e Cidinha que apresentaram como fizeram suas atividades nas quais, pela necessidade de comunicar, foram impulsionadas a fazer o registro escrito. Com base em suas experiências anteriores, Gisele destacou que ficou surpresa com a tarefa, pois previu que seria mais fácil e não foi isso que ocorreu. Além disso, Gisele relacionou (fala 173) a atividade com aquilo que ela já conhecia (jogo Tetris) do mesmo modo que o fez na atividade *Juntando quadrados*, quando anotou que aquela parecia “descobrindo a sequência”.

172. *G. Eu achei que ia ser mais fácil.*

173. *G. No primeiro momento, eu pensei naquele jogo Tetris. Eu pensei, vai ser fácil, porque você vai virando e vai encaixando. Vai ser facinho né.*

174. *G. Aí eu comecei a registrar assim: eu peguei o registro da primeira atividade, das planificações do cubo.*

A partir da planificação do cubo da Figura 2.24a, escolhida por Gisele como de fácil encaixe, esta professora tentou pavimentar um retângulo (Figura 2.24b).

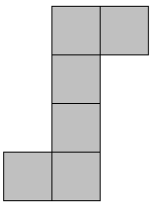
175. *G. Aí eu fui olhando aqui e fui imaginando qual era mais fácil de encaixar um no outro. Então eu lembrei que no Tetris tinha uma forma como essa (Figura 2.24a).*

176. *G. Eu imaginava que essa era a mais fácil de encaixar.*

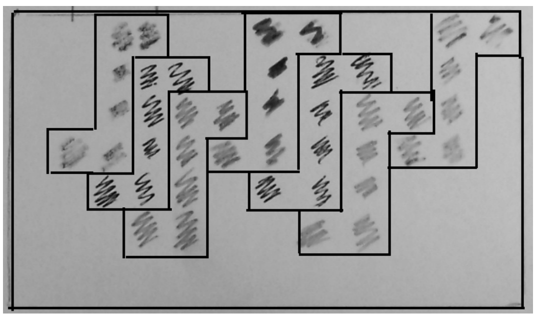
177. *G. Mas na hora que eu colocava no papel sobrava tanto espaço e eu fiquei tão frustrada (Figura 2.24b).*

Figura 2.24 – Planificação do cubo presente no jogo Tetris em (a) e tentativa de Gisele em preencher um retângulo com esta planificação em (b).

(a)



(b)



(Em (b), imagem obtida pela pesquisadora por meio de escaneamento.)

A diferença entre o que prevemos sobre uma determinada atividade e o que ela realmente proporciona é um dos elementos que devem ser tratados na formação docente. Ou seja, o professor necessita, da mesma forma que o aluno, participar de situações que o desafie a buscar respostas, refletindo sobre elas. Para *investigar* precisamos ter interesse em buscar um novo conhecimento.

Conforme pondera Shulman (2004)

> Muitos dos nossos esforços nas reformas educacionais encorajam os professores a criarem condições nas quais os estudantes sejam criativos e inventivos, resolvedores de problemas e inovadores. Os professores são questionados a criar condições de aprendizagem que eles próprios nunca encontraram antes[11]. (p. 506).

Enquanto professores, para nos distanciarmos das aulas, nas quais já temos, antecipadamente, todas as respostas e cabe-nos apenas gerenciar os momentos em que elas devem ser contadas aos nossos alunos — o paradigma do exercício, necessitamos de experiências de aprendizagem na zona de risco, para investigarmos e construirmos conhecimentos que nem sempre estão prontos, à nossa espera, para serem ensinados e aprendidos.

Após desistir, insatisfeita, do primeiro resultado (Figura 2.24b), Gisele apresentou outra tentativa de planificação de um retângulo (Figura 2.25b) com um único tipo de planificação do cubo. Além disso, foi possível localizar em seu registro escrito desenhos de outras formas que ela rascunhou, mas não seguiu.

Figura 2.25 – Planificação do cubo com dois quadrados alinhados em (a) e tentativa de Gisele em preencher um retângulo com esta planificação em (b).

(a) **(b)**

(Em (b), imagem obtida pela pesquisadora por meio de escaneamento.)

A questão perseguida por Gisele foi como ladrilhar completamente um retângulo com planificações congruentes do cubo. Em relação à proposta inicial, duas regras a mais foram criadas, como uma definição de um problema a partir da situação trazida pela tarefa: (i) utilizar um único tipo de planificação e (ii) que não poderia sobrar superfície no papel que não fosse recoberta por planificações. Para ela, sua questão teria necessariamente pelo

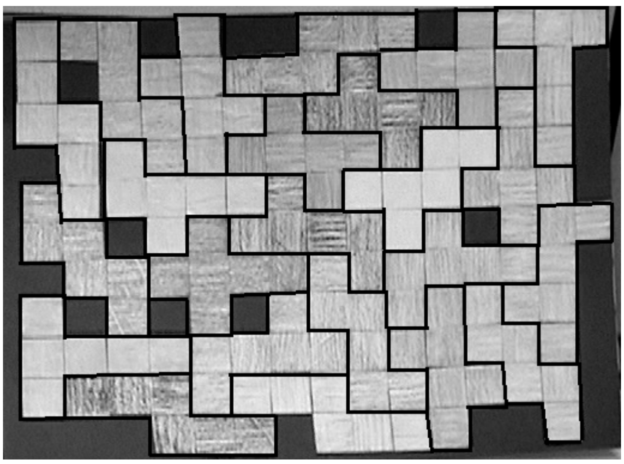
[11] Traduzido por mim do original em Inglês: *Most of our school reform efforts encourage teachers to creat conditions in which students will be creative and inventive, both problem solvers and innovators. Teachers are asked to creat conditions for learning that they themselves may never have encountered before.*

menos uma resposta, uma vez que ela relacionou a tarefa apresentada com o jogo Tetris e não avistava um problema sem resposta. Tendo em vista suas primeiras tentativas, ela alterou o problema, percebendo que não precisava usar planificações idênticas (fala 180).

178. *G. Aí eu achava que um era mais fácil de encaixar, aí eu voltava e registrava. Mas, ainda sobrava espaço.*
179. *G. Eu falava: ah, mas tem alguma coisa errada!*
180. *G. Aí eu falei, ah, mas eu não preciso fazer a mesma planificação, eu posso usar outras. Pensei: que burrice, por que eu não pensei isso antes?*
181. *G. Só que também não deu muito certo, porque eu encaixava e sobrava espaço. Eu não fiquei muito satisfeita.*
182. *G. Eu acho que deve ter um jeito ainda melhor de fazer. Sabe pra não sobrar [espaço em branco] porque daí economiza papel.*
183. *C. Fui experimentando, até! Mas, demorou. Foi desde às cinco horas e eram nove e meia da noite eu estava lá. Só parei algumas vezes para atender meu marido e meu neto.*

Cidinha também procurou pavimentar todo o retângulo da cartolina com as planificações do cubo (Figura 2.26). Acreditar que seria possível pavimentá-lo levou-a a insistir (fala 183) na atividade, ora começando no centro, ora nas bordas. Em sua fala (183), percebemos o destaque em sua convição e no tempo que ela dedicou para fazê-lo. Como não conseguiu a resposta esperada, Cidinha fez o registro de uma de suas tentativas por meio de colagem e trouxe para compartilhar conosco (Figura 2.26).

Figura 2.26 – Retângulo em papel cartonado no qual estão coladas planificações de cubos.



(Fotografia. Autoria da pesquisadora.)

Para Cidinha, a atividade foi envolvente, despertando seu interesse e curiosidade, o que a mantivera convicta de que seria possível recobrir o retângulo sem deixar espaço em branco. Além do resultado obtido, Cidinha também expôs que fez por tentativa e erro (falas 184, 185 e 188). Ao final, esta professora decidiu parar a atividade, pois não conseguia chegar ao resultado esperado. Mesmo com o questionamento (fala 186) de Gisele pela busca de um padrão, ficou evidente que os encaixes foram feitos pelo acúmulo de tentativas, objetivando pavimentar todo o retângulo.

184. *C. Fui mexendo, colocava, colocava, tirava, tornava colocar, voltava. Depois que eu recortei tudo é que eu colei. Eu aproveitei aqueles lá [planificações que estavam prontas] que a gente fez aqui e fui colocando.*

185. *C. Experimentava a outra aqui, a outra lá, tal. De repente perdia o rumo, voltava, mas, essa foi a que eu achei que deu mais certo. (Figura 2.26)*

186. *G. Olhando assim será que tem mais ou menos um padrão. Por exemplo, esse meio tá mais cheio assim, será que se repetisse o meio...*

187. *G. Ah, não, mas sempre sobra uma ponta, tem uma ponta ali em cima, tem uma ponta aqui embaixo.*

188. *C. Experimentei de tudo quanto foi jeito e foi esse o jeito mais fácil e melhor. Sobrava aqui e tal.*

Para provocar questionamentos ou busca de regularidades na atividade desenvolvida por Gisele e Cidinha, perguntei sobre o número de planificações obtidas, uma vez que eu percebia que poderíamos tratar de número máximo e mínimo de planificações. Assim, diferentemente delas, naquele momento, meu foco estava na otimização da superfície a ser preenchida, como se eu tivesse certeza, antecipadamente, de que a questão proposta por elas não tivesse resposta.

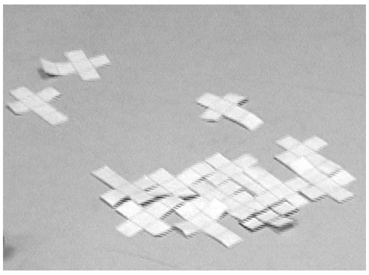
Tanto para Cidinha quanto para Gisele, a atividade individual foi interrompida pela exaustão das tentativas sem sucesso. Houve a exploração, a proposição de questões e o delineamento de vários caminhos para mostrarem o que desejavam. A confiança de que seria possível pavimentar o retângulo foi a motivação para o desenvolvimento da atividade. Além disso, parece-me possível dizer que esta confiança pode ter sido influenciada pelas experiências anteriores de que sempre há uma resposta para as questões matemáticas. Novamente advogo a necessidade de trabalharmos com problemas ou situações abertas que nem sempre têm respostas (ou que tenham várias) nos cursos de formação docente, sendo a exploração-investigação, um cenário propício para tais situações.

A falta de um interlocutor, durante a atividade investigativa de cada uma das professoras, pode ter dificultado sua ampliação e aprofundamento. Tanto Cidinha quanto Gisele mostraram para o grupo o que planejaram e como a desenvolveram, sem mudanças abruptas no percurso e nos problemas propostos, tendo a maior parte do tempo destinado às várias estratégias de solução do único problema proposto. É evidente que esta última reflexão pode ser verdadeira apenas em parte, mas leva-me a considerar a importância do desenvolvimento de atividades investigativas em grupo, uma vez que estes podem, muitas vezes, potencializar a própria investigação.

Após a apresentação das duas professoras, discutimos qual a área da cartolina tendo como unidade um quadrado — face do cubo — com isso foi possível obter o número máximo de planificações (independente da forma) que poderiam ser colocadas. De posse disso, elas continuaram a fazer tentativas. Dulce, que não tinha feito a atividade individual em sua casa, afirmou que ao ver o que Cidinha e Gisele fizeram, *decidiu* utilizar apenas uma das planificações do cubo e verificar se é possível pavimentar um retângulo utilizando somente a planificação escolhida (fala 189). Gisele contrapôs que também tentou utilizar apenas uma, mas ao final, viu como necessário recorrer às outras.

189. *D. Então, a princípio eu pensei em usar um só formato, de uma forma só. Eu não pensei... Não que eu não pensei, eu optei por isso, né.*
190. *D. Eu queria esse. (Figura 2.27)*
191. *G. Eu comecei com uma [planificação] só e no fim eu achei que tinha que encaixar [de outras formas].*

Figura 2.27 – Tentativa de pavimentação da professora Dulce.



(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Numa tarefa com caráter exploratório-investigativo, o professor ou formador, não pode antecipar completamente o que vai ser explorado ou problematizado. No início, eu pensava que fossem investigar as formas de organizarem planificações em uma cartolina maximizando o número de planificações ao mesmo tempo em que pensariam num modo otimizado de fazer os recortes, considerando ainda as dimensões da cartolina e o comprimento dos lados dos quadrados. Entretanto, a atividade fixou-se em decorrência do uso das planificações que estavam prontas.

Mesmo com minha interferência, predominava o interesse delas mesmas na atividade. Cidinha ressaltou (fala 192) que ainda considerava possível fazer a pavimentação do retângulo como ela havia planejado, "para dar certo". Pela sua convição, ainda teria pelo menos uma resposta. Esta professora não demonstrava que o problema poderia não ter resposta única. Todas elas não mencionaram que recortar as planificações poderia fazer alguma diferença na resolução da situação. Cidinha, após eu questionar, reafirmou que não pensou em recortar.

192. *C. Mas eu não tô feliz, eu ainda vou fazer outra pra dar certo. (riem)*
193. *C. Eu não pensei em recortar.*
194. *G. Você não fala recortar (referindo-se ao enunciado), você fala: como podemos desenhar.*
195. *C. Cobrir a cartolina, era isso que eu pensei, se fosse recortar tinha que deixar.*
196. *P. Então, mas vejam a diferença entre minha proposta na tarefa e a atividade desenvolvida. A tarefa aberta possibilita essas interpretações e é justamente isso que nos interessa, senão, eu já teria feito a pergunta diretamente.*
197. *C. Eu quero tampar esses buraquinhos.*
198. *C. Eu sou triste, quando eu invento uma coisa...*
199. *A. Não. É o desafio. Desafiou! Mexeu!*

Como as perguntas centraram-se em preencher toda a superfície de um retângulo com planificações do cubo (primeiro de apenas um tipo e depois msturando-se mais de uma) e não encontraram respostas, a atividade continuou pelo delineamento de argumentos e provas que pudessem ser convincentes da inexistência de respostas para essas questões, apesar de que esperavam que fosse possível determiná-las.

2.3.2 A necessidade de argumentos e provas para o convencimento

A busca de uma prova que garantisse a possibilidade ou impossibilidade de se pavimentar um retângulo com as planificações do cubo ocorreu nos desafios que foram surgindo durante nossos diálogos. O desafio permite que os envolvidos tomem consciência, reflitam e analisem sobre o que está ocorrendo. Numa situação de investigação não se trata de ser ouvinte e de se manter falas alternadas, mas de provocar, debater, desafiar, levando à construção de argumentos e à revisão de declarações. Assim, conforme ponderam Alrø e Skovsmose (2006, p. 133-134), investigação e diálogo andam juntos: "Não é qualquer ato de fala que compõem um diálogo. (...). Dialogar compreende realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade." .

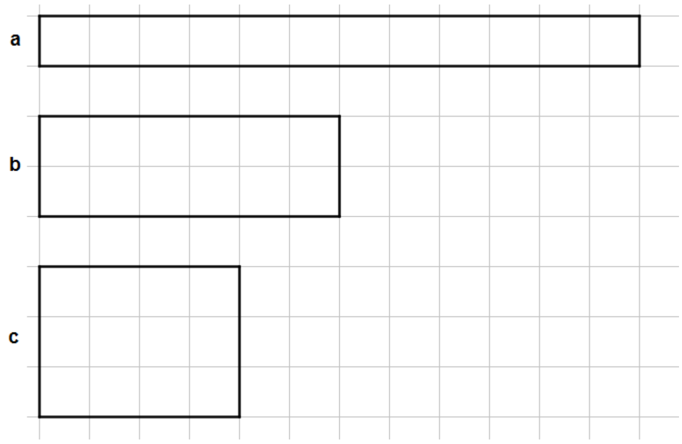
200. *D. Se juntar dois dá para formar um retângulo?*
201. *P. Para caber apenas um hexaminó*[12]*, o retângulo deveria ter seis quadrados de área. Será seis por um (6 x 1) ou três por dois (3 x 2). Teríamos que ter uma peça de hexaminó no formato retangular, e não temos.*
202. *C. Com um não dá.*

Depois de permenecerem pensativas por um tempo, Dulce continuou observando as colagens de Cidinha e notou (fala 204) que nenhuma das planificações tinha um dos lados retilíneo, como se pudesse justapor ao lado de um retângulo.

203. *D. Porque as únicas possibilidades que eu tenho são essas daí e não se encaixa.*
204. *D. É, não tem nenhuma de um lado só.*
205. *D. Mas não necessariamente tem que ter duas só, né.*
206. *P. Para caber duas planificações, o retângulo deve ter doze quadrados, ou seja, ser doze por um (12 x 1), seis por dois (6 x 2) ou três por quatro (3 x 4). Vamos ver? (Fiz esboços em papel quadriculado como a Figura 2.28.)*

[12]Em um momento anterior comentei com as professoras que podemos chamar as planificações de um cubo de hexaminós por serem formadas por seis quadrados, analogamente à ideia de dominó, triminó e assim por diante.

Figura 2.28 – Retângulos formados por doze quadrados.



(Imagem elaborada pela pesquisadora.)

Como todas as planificações do cubo estão dispostas em pelo menos três linhas, Gisele (fala 207) percebeu que nos retângulos de dimensões *doze por um* (12 x 1) e *seis por dois* (6 x 2) não é possível encaixar qualquer uma das onze peças.

> 207. *G. Mas não cabem aí (Apontando os retângulos doze por um (12x1) e seis por dois (6x2).).*

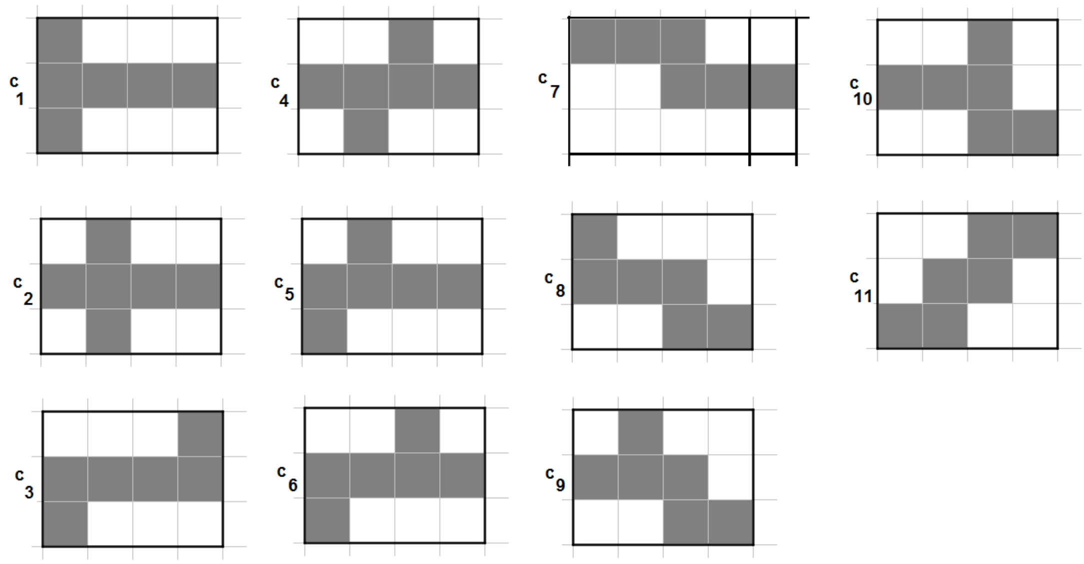
Dulce retomou a análise a partir da página que continha as planificações do cubo, abandonando as colagens de Cidinha. Cada uma delas observava as reflexões de Dulce, que cercava cada uma das planificações com um lápis, como se ela estivesse contornando retângulos ao redor de cada uma delas, vendo se alguma poderia ficar justaposta ao lado de um retângulo.

Para testar se as planificações poderiam ser inseridas em retângulos com dimensões *três por quatro* (3 x 4), entreguei-lhes papel quadriculado e fomos colocando, uma a uma, em cada retângulo 3 x 4. Com isso, Dulce sintetizou que nenhuma das planificações poderia estar nos vértices de um retângulo.

> 208. *D. Sempre vai ficar sobrando nas beiradas, mesmo quando der para grudar no meio.*

Na Figura 2.29 podemos ver que para todas as planificações, ao serem encaixadas em retângulos 3 x 4, os outros seis quadrados não ficam unidos podendo compor outra planificação.

Figura 2.29 – Impossibilidade de pavimentação de retângulos 3 x 4 com planificações do cubo.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Com isso, foi possível utilizar a representação da Figura 2.29 como uma prova gráfica de que não é possível preencher retângulos com planificações do cubo de modo que não sobrem quadrados (congruentes aos que formam a planificação) descobertos. Assim, encerramos essa etapa da atividade.

2.3.3 Da atividade à busca de sentidos para a formação

Nesta seção, discuto duas situações identificadas durante o desenvolvimento da atividade *Riscando cubos e economizando papel*. A primeira delas refere-se à busca de sentidos da professora Léia para a atividade de que participava. Especificamente nesta, esta professora se mostrava muito observadora e reflexiva. Durante os diálogos, ela mencionou que, após as primeiras atividades, já se sentia mais à vontade, mas buscava no movimento das peças, ao formarem um retângulo, uma associação aos seus conhecimentos, mencionando que os encaixes das planificações lembravam o trabalho de um pedreiro ao assentar revestimentos. Por um tempo fiquei pensativa, ao ler a transcrição, vendo distinções entre a forma dos azulejos e das planificações. Entretanto, um tempo depois, ao me deparar com um revestimento que mantinha os ladrilhos quadriculados, mas as estampas combinavam-se por entre os ladrilhos, percebi que deve ter ocorrido um esforço do pedreiro para além da forma e com isso passei a interpretar, de outro modo, o que Léia mencionou.

209. *L. No começo não entendia o enunciado, não entendia nada.*
210. *L. Fiquei só observando... Nossa!*
211. *L. Observando. Observava ela (Dulce), observava essa aqui (Gisele).*
212. *L. Nossa, mas foi... Aí depois é que eu fui pegando o jeito, mas demora, demora.*
213. *L. Olha, pra quem não gosta de matemática!*
214. *D. Não gostava!*
215. *L. Não gostava!*
216. *L. Eu quero aprender gente, eu preciso aprender!*
217. *L. Tá mais fácil, depois disso aqui olha (Apontando seus registros dos primeiros encontros.). Fiquei em casa olhando...*
218. *L. Com essa atividade aqui, eu ouvindo o comentário dela [Gisele], dela [Cidinha], eu tô encaixando, né. Fiquei pensando um monte de coisas, fui até falando ah, é o pedreiro, é o azulejo, pra ver se dá certo.*
219. *L. Mas... São gostosas... De estar descobrindo, de estar investigando, de estar tentando, várias tentativas, não é tarefa pronta.*
220. *D. Eu penso assim, você [Léia] vai vendo o que serve ou não para sua realidade, porque às vezes o que funciona para comigo não funciona com você.*

Conforme entendido por Dulce, a busca por um sentido para a atividade relacionava-se a ela poder utilizar em sala de aula com seus alunos. Pela observação e participação na atividade das demais, Léia analisou seu próprio modo de aprender, do estranhamento inicial com o enunciado para o prazer das descobertas, associando com suas memórias e com suas necessidades. Concordo com (PLACCO; SOUZA, 2006, p. 38), pensando na formação docente que,

> os processos formativos precisam oferecer oportunidades para que os professores busquem pontos de intersecção com seus pares, por meio de depoimentos e relatos de experiências. Nesses processos, convive-se com a declaração de dúvidas e angústias, a confirmação das conquistas e o enfrentamento das dificuldades, num movimento de interlocução, de acolhidas, de pontuações necessárias, que enriquecem o trabalho tanto no individual como no coletivo.

No diálogo subsequente, Léia esclareceu (falas 221 e 223) que se sentia incomodada com o uso que daria para tal atividade no primeiro ano do Ensino Fundamental. Em suas palavras, ela procurava onde "aplicar" isso com seus alunos. Além do estranhamento com o texto do enunciado, é possível que Léia também estivesse na expectativa de que um curso de formação lhe forneceria diretamente o que ela deveria levar para sua sala de aula e como o deve fazer. Segundo Fiorentini, Souza Jr. e Melo (1998), o papel do professor oscilou entre tomar, através de cursos e capacitações, um conhecimento produzido por outro — o especialista, e aplicá-lo, desempenhando um papel técnico e, lutar pela autonomia intelectual em pensar e produzir conhecimento, atuando como agente ativo e reflexivo. O primeiro caso, de acordo com os referidos pesquisadores, pode ser em decorrência da cultura profissional da racionalidade técnica, que "supervaloriza o conhecimento teórico" ou ainda pelo "pragmatismo praticista ou ativista" (p. 131).

Apesar disso, Léia ampliou suas reflexões e relatou que, após as atividades que envolveram planificação de cubo no grupo, ela apresentou "novas" tarefas para seus alunos em decorrência das reflexões e aprendizagens do curso. Esta professora (falas 224 a 226), destacou sua surpresa em alguns alunos não conhecerem um cubo a partir de materiais concretos.

221. *L. Eu fiquei pensando: gente, onde é que eu vou aplicar com meus alunos?*
222. *D. Mas você vai achar. É legal, é muito legal isso. A gente pensa que não vai achar nunca.*
223. *L. Eu fico me questionando sabe.*
224. *L. Eu já comecei dando as figuras para eles, mostrando no concreto o cubo.*
225. *L. Antes do curso eu já tinha dado, mas depois do curso, mostrando os lados [as faces], desmontamos o cubo.*
226. *L. Tinha aluno lá que nunca viu!*

A formação docente, pautada em atividades nas quais o professor possa vivenciar novas formas de aprender e de ensinar e possa, no diálogo, compartilhar aprendizagens, dúvidas, angústias e expectativas podem favorecer a problematização e alteração de suas práticas. Placco e Souza (2006) defendem a importância da memória e da redescoberta de suas próprias experiências como ponto de partida para suas aprendizagens: "o professor, ao recorrer à memória como ferramenta de aprendizagem e formação, percorre o caminho de abertura e disponibilidade para novas indagações e descobertas, cria projetos, revê, abandona e valoriza práticas já percorridas e ilumina esse processo com as lembranças remexidas na gaveta dos guardados" (p. 39).

Por outro lado, provinda de uma experiência de formação diferenciada de Léia, Andréa ressaltou (fala 227) a influência das pessoas com as quais convivemos ao longo da vida em nossa formação. São nossos pais, professores ou colegas de profissão. Quando estes são rememorados em nossas narrativas de vida, podemos dimensionar aspectos de sua contribuição e presença em nossa formação enquanto homens e professores, pois "aquilo em que cada um se torna é atravessado pela presença de todos aqueles de que se recorda" (DOMINICÉ, 2010, p. 56).

227. *A. No [nome de colégio da rede particular] a gente teve muito. A coordenadora de matemática amava matemática e levava todo mundo a amar matemática, a fazer da matemática uma coisa fácil.*

Como veremos mais adiante (Seção 3.1) em decorrência dessa atividade e de sua experiência docente, Andréa apresentou um problema aberto aos seus alunos envolvendo pavimentações de retângulos com planificações de cubos.

2.4 Investigando a composição de figuras geométricas com o tangram

Essa atividade ocorreu em dois encontros consecutivos, nos quais nem todas as participantes foram as mesmas. Após uma primeira etapa, a atividade foi retomada a partir da narrativa oral do que já tinha sido feito e foi sistematizada em um texto coletivo e então foi seguida até o final. Na presente seção, ao narrá-la, parte dos diálogos será complementada com recortes do texto coletivo.

A composição do texto coletivo não se configurou um exercício ou revisão. Ao contrário, possibilitou novas reflexões e análises além de ter sido importante para a sistematização dos resultados já obtidos, conforme salientou Cidinha (falas 228 a 230). Do primeiro para o segundo encontro em que esta atividade foi desenvolvida, as professoras não produziram narrativas, tendo em seus registros as anotações feitas durante a atividade.

228. *C. Eu achei ótimo o registro, ficou mais completo, mais fácil de entender.*

229. *C. Foi bem explicadinho, de onde começou, como é que surgiu.*

230. *C. Porque a gente fez a coisa aqui, anotei, fui passar a limpo, e eu não entendia mais nada.(Referindo-se aos seus registros no intervalo de um encontro para o outro.)*

A escrita do texto coletivo, na forma narrativa, possibilitou a reconstrução e a (re)vivência da atividade, utilizando a língua materna, facilitando a aproximação entre as expressões cotidianas e o vocabulário próprio da área, conforme discutimos no grupo. Do mesmo modo, as argumentações em língua materna foram referências para a elaboração de provas que pudessem garantir as respostas encontradas.

Com referência aos seus estudos sobre formas de linguagem, Garnica (2002, p.77-78) defende

> a necessidade de, nos contextos de ensino e aprendizagem de Matemática, haver uma interconexão entre as linguagens natural e artificial. Mesmo tendo a aparência (ou a pretensão) de impermeabilidade, a linguagem Matemática não pode prescindir da língua materna para sua comunicação, e esse processo de vinculação entre sintaxe e semântica, mesmo que de difícil apreensão, naturalmente impõe-se no dia-a-dia do professor de Matemática. Essa constatação, junto às discussões na comunidade de educadores matemáticos, fez com que, em minha trajetória, a prova rigorosa passasse a ser considerada como uma — dentre as várias — forma de argumentação acerca do objeto matemático.

Meus objetivos nesta atividade foram (i) discutir as possibilidades do uso do tangram[13] na composição e decomposição de formas planas; (iii) identificar figuras planas que possam ser feitas com as peças do tangram; (iii) explorar a noção de área em figuras planas formadas com as peças do tangram e (iv) desenvolver e refletir sobre a dinâmica exploratório-investigativa.

A tarefa foi entregue às professoras na forma escrita como:

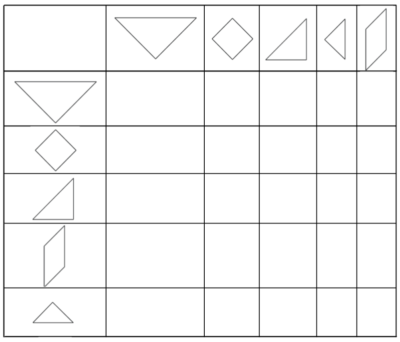
[13]Por não se referir a um modelo comercial ou marca registrada de material didático, durante o texto, utilizarei *tangram* grafado com a letra “t” minúscula. Além disso, preferirei utilizar o artigo “o” ao invés de “um”, escrevendo “o tangram”.

INVESTIGANDO FIGURAS GEOMÉTRICAS COM O TANGRAM

Investigue as figuras geométricas que podem ser formadas a partir da junção de duas[a] peças do tangram. Lembre-se de que uma investigação inicia-se com a exploração da situação proposta, prossegue com a proposição de questões, com o levantamento de conjecturas, testes, refinamento, reelaboração e por fim, com a socialização dos resultados obtidos. Registre todas as etapas!

Para facilitar o registro, em anexo, você está recebendo uma tabela com desenhos das peças.

Figura 2.30 – Tabela de dupla entrada com o desenho das peças do tangram construídas em escala.



(Imagem elaborada pela pesquisadora.)

[a]Optei por restringir a quantidade de peças para não deixar a atividade muito ampla e dificultar seu desenvolvimento ou a socialização e discussão dos resultados.

Ao apresentar o desenho das figuras na tabela, meu objetivo foi facilitar as representações e a organização do registro bem como as análises durante a atividade. Além disso, optei por não lhes dar as peças do tangram para priorizar o registro no qual elas pudessem prever os resultados, para posteriormente utilizarem-no para confirmarem ou refutarem suas conjecturas.

2.4.1 O uso do desenho e de materiais concretos manipuláveis: reflexões quanto ao conhecimento curricular

Logo no início da atividade surgiu a primeira conjectura sobre a figura formada pelos dois triângulos maiores do tangram. Para Cidinha, a justaposição destas duas peças formaria um losango enquanto para Gisele, por ela justapor as duas hipotenusas, resultaria em um quadrado.

> 231. *C. Dá um losango no caso?*
> 232. *G. Achei que era quadrado que ia virar.*
> 233. *C. Pode até virar um quadrado também. O quadrado é também um losango.*

No texto coletivo[14], registramos que

> 234. *TC. Num primeiro momento não tínhamos as peças em mãos. Então, quando pegamos o enunciado da atividade, o lemos e levantamos a primeira hipótese sobre que figura poderia ser formada com os dois triângulos maiores que estavam logo no início da tabela.*
> 235. *TC. A nossa primeira ideia foi que formaria um quadrado ou um losango. A Cidinha lembrou da bandeira da Léia.*
> 236. *TC. Discutimos que o quadrado é um losango, então nossa hipótese inicial é verdadeira.*

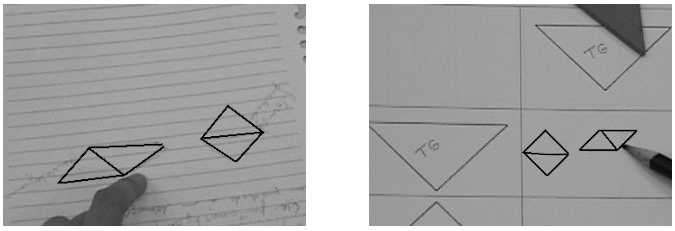
Do mesmo modo que os demais instrumentos de constituição de dados, apresento fragmentos do texto coletivo (entendido como uma narrativa escrita) nos diálogos, não sendo possível também sua apresentação na íntegra. Além disso, ressalto que a escrita da presente seção foi facilitada pelo texto coletivo que também alimentou o diário de campo. Por outro lado, pela dinâmica desenvolvida, as gravações em vídeo foram fundamentais para a representação da experiência, recorrendo à ordem cronológica.

Depois de discutirem outras possibilidades, além de unir os triângulos pela hipotenusa, a discussão contemplou as dificuldades encontradas por Cidinha para fazer o registro das formas desejadas. Durante uma atividade investigativa, a necessidade do registro para representar figuras geométricas permite a elaboração de representações e não apenas sua leitura. A representação, por meio de desenhos, de formas geométricas em posições não convencionais apresenta uma dificuldade ao mesmo tempo em que permite refletir sobre elementos das figuras (lados e ângulos), atividade essa que não me parece estar presente com frequência nas salas de aula da Educação Básica. Na Figura 2.31, temos os desenhos de Cidinha e de Gisele sobre as duas primeiras formas geométricas compostas com os dois triângulos maiores do tangram.

[14] As iniciais TC como indicação do emissor de uma fala significam que as declarações são provenientes de nosso "Texto Coletivo".

Figura 2.31 – Figuras formadas pelos dois maiores triângulos do tangram.

(a) Desenho de Cidinha. **(b)** Desenho de Gisele.



(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

O exemplo anterior da formação de paralelogramo não-losango (apontados simultaneamente por Cidinha e Gisele — Figura 2.31) discordou da primeira conjectura de que, ao juntar os dois triângulos maiores, formariam-se losangos. Com a experimentação (pelo desenho) foi possível realizar uma refutação heurística, como explicado por Villiers (2003), que pelo processo de prova pode ocorrer a melhoria, ajuste ou adequação de uma declaração. Esse aspecto não foi apenas compreendido na análise dos dados, mas foi por mim destacado na conversa com o grupo. Até então prevaleceu a conjectura de que a justaposição dos dois triângulos maiores resultaria em quadriláteros.

Na segunda etapa desta atividade, quando retomamos este ponto, a partir da narrativa oral, buscando a construção do texto coletivo, Gisele refletiu sobre a importância do material concreto para as crianças (fala 237) e relacionou o uso do desenho à sua não percepção de que haveria outras formas (fala 239).

A vivência em atividades com múltiplas respostas ou até com nenhuma resposta parece não ter ocupado lugar de destaque nas experiências anteriores das professoras participantes. Gisele incomodou-se por ter imaginado que teria um resultado único, o que ela ratificou em encontros subsequentes. Isso foi relembrado durante a escrita do texto coletivo (fala 241).

237. *G. Foi bom isso. Não ter as peças. Aí que você percebe como é importante o concreto.*
238. *G. Esse é o x da questão. O concreto dá conta e mentalmente não dava.*
239. *G. Aí, sabe o que eu acho interessante: a princípio eu não me preocupei em fazer outra figura. Eu achei que para mim essa [quadrado formado pela justaposição das hipotenusas dos triângulos*

maiores] já era a solução, já era a resposta. Porque, olha só como é a questão da percepção, quando tá só no desenho.

240. G. Eu falei, ah, que boba, eu achando que só tem um jeito. Não é, né. Porque eu posso pegar a lateral e unir com a lateral menor. (Indicando um cateto de cada um dos triângulos maiores.)

241. TC. A Gi, mentalmente, pensou que não tivesse outras formas e já estava satisfeita com a junção dos dois TG e já partia para o segundo caso.1

O uso de desenhos ou material concreto e o modo como tais recursos podem ser manipulados, tanto pelos professores quanto pelos alunos, refere-se ao conhecimento curricular, conforme indicado por Wilson, Shulman e Richert (1987), pois para estes pesquisadores, admitindo uma visão restrita de currículo, esta categoria de conhecimento inclui a compreensão dos programas e materiais que servem para o trabalho do professor. Nesta atividade, o desenho retratou apenas as imagens mentais já construídas, não sendo facilitador de explorações. Por outro lado, houve a ampliação dos exemplos a partir do momento em que as professoras fizeram uso de um material concreto (tangram em madeira). Essas discussões convergem com as orientações escritas por Nacarato, Mengali e Passos (2009, p. 36), quanto ao repertório de conhecimentos do professor. Concordo com estas pesquisadoras quanto à necessidade do professor ter vivências e conhecimentos que lhes permitam utilizar os materiais didáticos (materiais manipuláveis, livros didáticos, etc), de acordo com suas necessidades e com as possibilidades permitidas por cada um deles para a prática docente em sala de aula.

> É importante ter claro quais recursos podem ser utilizados, quais materiais podem ser disponíveis e onde encontrá-los; ter conhecimentos e compreensão dos documentos curriculares; e, principalmente, ser uma consumidora crítica desses materiais, em especial do livro didático.

Ainda, enquanto faziam desenhos, sem recorrerem aos tangrans de madeira, para melhorar seus desenhos, Cidinha solicitou uma régua. Mas, com esse instrumento, também não foi possível realizar a representação que desejava. Para Gisele, a régua é útil para que os alunos possam validar uma conjectura, deslocando-se da autoridade do professor em classificar um resultado como certo ou errado e de um hábito que também pode ser criado pelos próprios professores (fala 245).

242. *C. Com a régua, a gente teria que medir direitinho.*

> 243. *TC. O registro não estava sendo fácil porque não tínhamos régua inicialmente. Fazíamos um esboço e discutimos a limitação do uso de desenhos. Mesmo depois com a régua, também não dava para fazer em escala direitinho.*
>
> 244. *G. Se você não quer ficar só na palavra do professor, uma maneira de comprovar é usar a régua.*
>
> 245. *G. É, eles [alunos] esperam isso da gente. A gente acostuma eles assim.*

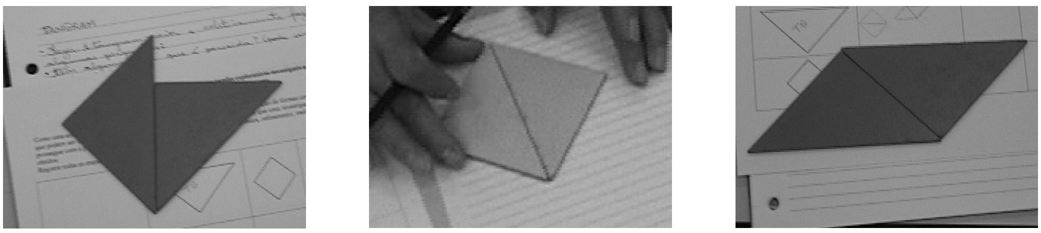
Como alternativa para superar as dificuldades de registrar através dos desenhos, discutimos a possibilidade de usarmos colagens ou contorno das figuras a partir das peças dos tangrans em papel ou madeira, por exemplo.

Se os desenhos dificultaram as explorações, logo de imediato no contato com os tangrans de madeira, Gisele exclamou (fala 247) ter encontrado outra figura geométrica (Figura 2.32(a)). Além disso, as professoras utilizaram o material concreto para representar as formas já registradas (Figura 2.32(b) e Figura 2.32(c)) tanto para compará-las com o desenho quanto para contorná-las, facilitando o registro.

> 246. *G. Vamos testar (no concreto)?*
>
> 247. *G. Tem mais um! De primeira, já foi! Achei! (Figura 2.32a).*

Figura 2.32 – Figuras geométricas obtidas pela justaposição dos dois triângulos maiores do tangram.

(a) **(b)** **(c)**



(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

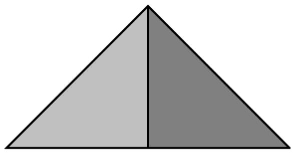
Tendo em vista os quadriláteros obtidos, Gisele se surpreendeu ao ver que Cidinha formou um triângulo e com isso reviu sua primeira conjectura.

> 248. *G. Deu triângulo! (Observando o que Cidinha fazia, conforme representado na Figura 2.33.)*

249. *G. Então, não é só quadrilátero. Isso é falso!*

250. *TC. Daí pegamos os 2 triângulos maiores do material concreto para experimentar as outras formas e encontramos: triângulo retângulo isósceles.*

Figura 2.33 – Triângulo formado com os dois triângulos maiores de um tangram.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

As professoras reafirmaram a importância do uso do material concreto para a ampliação da exploração, para facilitar os registros e para a readequação e refutação de conjecturas. Com o uso do material concreto, as professoras puderam representar diversas figuras geométricas e o interesse voltou-se para a classificação de cada uma delas de acordo com o número de lados. O desenho, como único recurso, incidiu em uma limitação da elaboração de imagens mentais, pautando-se nas lembranças das imagens protótipas, ou configurações geométricas que as professoras tinham em mente. Nacarato e Passos (2003) advertem que a figura estereotipada (ou protótipa) ou o objeto protótipo são um dos grandes obstáculos para o ensino e aprendizagem de geometria.

251. *C. Já ví que o negócio é testar, já vi tudo.*

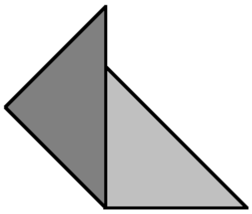
252. *G. Ainda formei outra coisa. Formei uma coisa estranha que eu não ia imaginar nunca. (Figura 2.34)*

253. *G. Que mentalmente eu não ia conseguir chegar nisso. Eu mal e mal só vi o quadrado. Eu, heim!*

254. *G. Pentágono não-convexo.*

255. *G. Como sou ingênua! Como não pensei nisso antes.*

Figura 2.34 – Pentágono não-convexo obtido com os dois triângulos maiores do tangram.



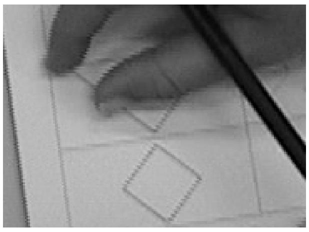
(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Após a exploração inicial, Cidinha e Gisele começaram a movimentar sistematicamente o quadrado ao redor de um dos triângulos maiores para obter todas as possibilidades conforme exemplificado nas Figuras 2.35.

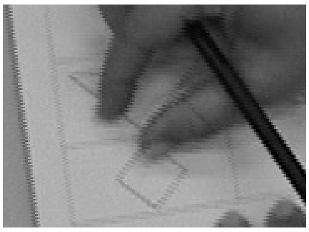
256. *TC. Depois fomos para um triângulo maior com o quadrado.*
257. *G. Você posiciona aqui. (Figura 2.35a)*
258. *G. Ou aqui. (Figura 2.35b)*
259. *G. E aqui. (Figura 2.35c)*

Figura 2.35 – Possíveis posições de um quadrado ao lado de um dos triângulos maiores do tangram.

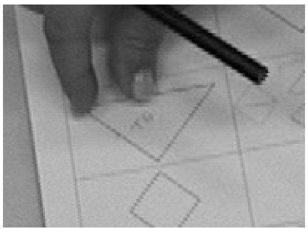
(a) Primeira posição



(b) Segunda posição



(c) Terceira posição



(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Nesta etapa da atividade, a exploração-investigação foi permeada pelas reflexões quanto ao uso dos materiais didáticos e pelas formas de representação das figuras geométricas. Esses dois aspectos, no que diz repeito à formação docente, tomaram lugar central na medida em que pelas dificuldades ou facilidades encontradas, pudemos perceber a importância da seleção de um recurso em nossas aulas e das respostas (ou ausência destas) dos nossos alunos. No que diz respeito à exploração-investigação, apenas pelo desenho, de certo modo, podemos inferir que a atividade poderia ter sido encerrada aproximando-se de um exercício ou problema aberto enquanto que, de outro lado, com o uso dos materiais concretos, foi possível prossegui-la para as etapas subsequentes, não abandonando, entretanto, os desenhos.

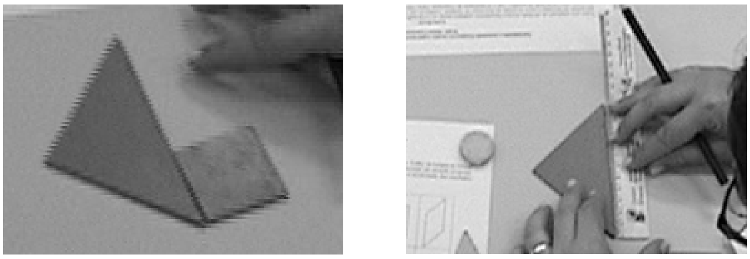
2.4.2 Dos interesses na exploração-investigação à busca de certezas: indo além dos desenhos e das representações com materiais concretos.

Ao colocar o quadrado em várias posições relativas ao triângulo, Gisele questionou (fala 260) se o lado do quadrado equivale a um terço da hipotenusa do triângulo maior, pautando-se na aparência do desenho e nas dimensões visíveis nas peças. Para verificar, esta professora utilizou uma régua que, mesmo não sendo um instrumento adequado tendo em vista que estes dois números não poderão ser simultaneamente números racionais, auxiliou-a na verificação da relação procurada.

260. *G. Dá três aqui? (Figura 2.36a)*
261. *G. Aqui tem onze centímetros. Não. Onze e meio (hipotenusa do triângulo maior). (Figura 2.36b)*
262. *C. E esse? (Indicando o lado do quadrado.)*
263. *G. Quatro [centímetros]. (Afirma após medi-lo.).*
264. *C. Quatro, então doze. Vai dar. É um pedacinho só.*
265. *G. Ah, lá, não dá. Tá vendo, não dá.*
266. *G. É o meio centímetro. Não é um pedacinho só!*
267. *G. Mas não dá, ou!*
268. *C. Eu queria ver se ia caber tudo aí. (Três lados do quadrado em comparação com a hipotenusa do triângulo maior.)*
269. *C. Então, eu queria que desse certo, mas não dava.*

Figura 2.36 – Comparando o lado do quadrado com a hipotenusa do triângulo maior. Observando peças do tangram de madeira em (a) e em (b) com as medidas das peças de madeira obtidas com uma régua.

(a) **(b)**

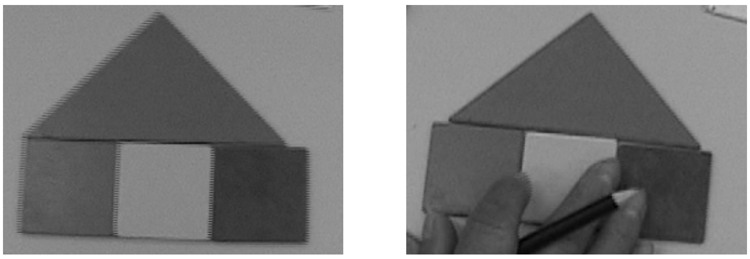


(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Para dialogar com Gisele, Cidinha utilizou três quadrados e os alinhou à hipotenusa do triângulo maior (Figura 2.37a). Em seguida, como uma forma de compensar a diferença entre a medida da soma dos lados dos três quadrados em relação à hipotenusa do triângulo, esta professora deslocou o trio de quadrados (Figura 2.37b), buscando que ocorresse “sobra” congruente nos dois lados, como se assim esta pudesse ser desprezível, conforme mencionado no diálogo anterior.

Figura 2.37 – Comparação da medida da hipotenusa do triângulo maior com a medida do lado do quadrado do tangram.

(a) **(b)**



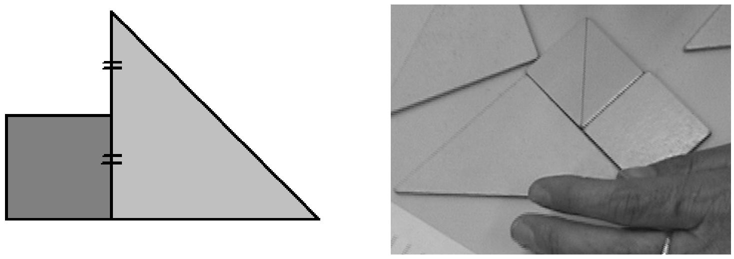
(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Uma atividade investigativa pode revelar observações que o professor nem sempre supõe de antemão. Quando preparei esta tarefa eu não imaginei que fôssemos nos deparar com os limites impostos pelos materiais (madeira ou papel) no que diz respeito às medidas dos lados das peças que, por não serem todos números racionais, não são possíveis de serem percebidos pela experimentação com o material concreto ou com o uso de régua.

Natália também questionou se a medida do cateto do triângulo maior seria o dobro do lado do quadrado, tendo a concordância de Léia de que são de medidas iguais. Entretanto, essa verificação deu-se, num primeiro momento, pela justaposição das peças, conforme Figura 2.38.

Figura 2.38 – Comparando o lado do quadrado com o cateto do triângulo maior.

(a) **(b)**

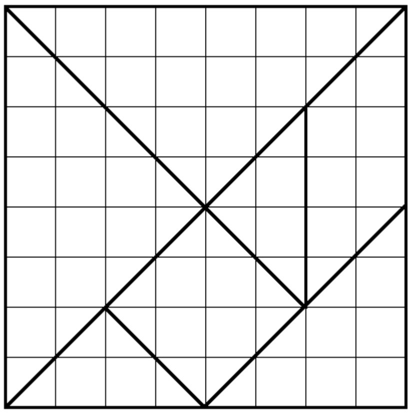


(Em (a) imagem elaborada a partir da videogravação e em (b) captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Sugeri que fizéssemos a representação de um quadrado formado com as sete peças do tangram sobre uma malha quadriculada para que pudéssemos discutir as relações entre as medidas dos lados das peças do tangram, buscando um modo de garantir a comparação que pretendíamos entre os segmentos. Isso foi necessário, pois além das questões de investigação que estavam sendo seguidas nos dois encontros, até aquele momento partíamos das sete peças que não foram recortadas por nós (as do tangram de madeira).

Representei na lousa um quadrado formado com as sete peças do tangram, sobre uma malha quadriculada, conforme represento na Figura 2.39.

Figura 2.39 – Quadrado formado pelas sete peças de um tangram.

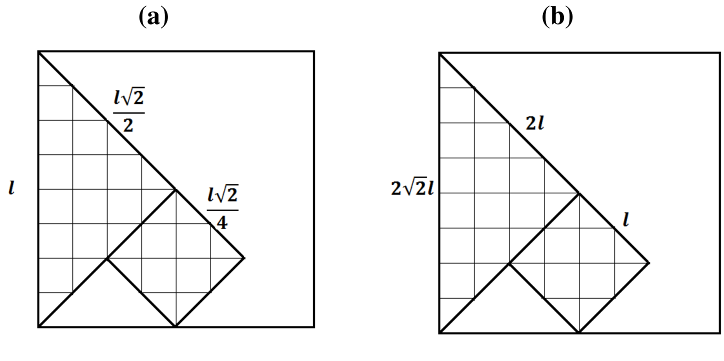


(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Visualmente foi possível perceber, considerando-se os quadrados do quadriculado, que a medida do lado do quadrado equivale à metade da medida do cateto do triângulo maior do tangram.

Considerando a Figura 2.40a, se o lado do quadrado formado pelas sete peças é l, então os catetos do triângulo maior são $\frac{l\sqrt{2}}{2}$ e o lado do quadrado é $\frac{l\sqrt{2}}{4}$. Se a hipotenusa do triângulo maior for um número natural então o lado do quadrado é um número irracional. Por outro lado (Figura 2.40b), partindo-se do lado da peça quadrado como sendo l, temos que o cateto do triângulo maior é $2l$ e sua hipotenusa é $2\sqrt{2}l$. Assim, se o lado do quadrado for um número natural, então os catetos do triângulo maior também o são enquanto a hipotenusa é irracional.

Figura 2.40 – Relações entre as medidas dos lados das peças quadrado e triângulo maior.

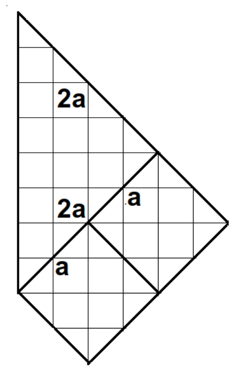


(Imagem elaborada pela pesquisadora.)

Durante o desenvolvimento da atividade, numa abordagem algébrica, por mim sugerida, provamos que o triplo da medida do lado do quadrado não equivale à medida da hipotenusa de um dos triângulos maiores. As professoras demonstraram acompanhar, com tranquilidade, o procedimento que desenvolvi na lousa para garantir as relações entre as medidas de tais segmentos, percebidas visualmente. Além disso, foram atenciosas com minha explanação e a acompanharam com gestos de concordância.

Chamando de a a medida do lado do quadrado, então cada cateto (cat) do triângulo maior (triângulo retângulo isósceles) é igual a $2a$ conforme dados da construção da Figura 2.39 representada na Figura 2.41. Denominamos a hipotenusa do triângulo maior de hip.

Figura 2.41 – Medida do cateto do triângulo maior equivale ao dobro da medida do lado do quadrado.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Aplicando o Teorema de Pitágoras nas medidas dos lados do triângulo maior foi desenvolvida a seguinte sequência de cálculos:

$$hip^2 = cat^2 + cat^2 \tag{2.1}$$

$$hip^2 = (2a)^2 + (2a)^2 \tag{2.2}$$

$$hip^2 = 4a^2 + 4a^2 \tag{2.3}$$

$$hip^2 = 8a^2 \tag{2.4}$$

$$hip = \pm\sqrt{8a^2} \tag{2.5}$$

$$hip = \pm\sqrt{8}\sqrt{a^2} \tag{2.6}$$

$$hip = \sqrt{8}a \tag{2.7}$$

$$hip = a\sqrt{8} \tag{2.8}$$

Da Equação 2.6 para a Equação 2.7 lembrei as professoras que a é um valor positivo pois é a medida de um segmento de reta (no caso, o lado do quadrado), registrando na lousa $a > 0$. Idem para a hipotenusa (hip) do triângulo maior.

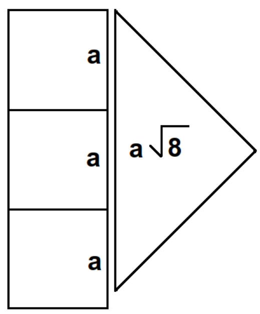
Depois, registramos a comparação do valor do resultado obtido na Equação 2.8 com o triplo do valor do quadrado. Para isso, lembramos que: $\sqrt{9} = 3$

$$a\sqrt{8} < a\sqrt{9} \tag{2.9}$$

$$a\sqrt{8} < 3a \tag{2.10}$$

Assim, confirmamos que a medida da hipotenusa do triângulo maior é menor que o triplo da medida do lado do quadrado, ilustrando, na lousa, conforme representado na Figura 2.42.

Figura 2.42 – Hipotenusa do triângulo maior e segmento formado pelo triplo da medida do lado do quadrado.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

A abordagem algébrica confirmou hipóteses obtidas pela percepção visual do quadrado com as sete peças construído na malha quadriculada. Além disso, Gisele também reafirmou a garantia dada pelo cálculo em sobreposição às informações visuais obtidas com as peças do tangram de madeira ou de papel (fala 270). De um certo modo, uma prova se constitui uma prova se for aceita como tal pela comunidade envolvida, conforme destaque de Garnica (2002, p. 7) para Manin: "Uma prova torna-se uma prova depois de um ato social de 'aceitá-la como uma prova'."(p. 77)[15].

> 270. *G. Porque visualmente o material não dava conta e o cálculo foi o que deu conta.*
>
> 271. *TC. Também provamos que se juntarmos três lados de quadrados, esse segmento é maior do que a hipotenusa do triângulo maior.*

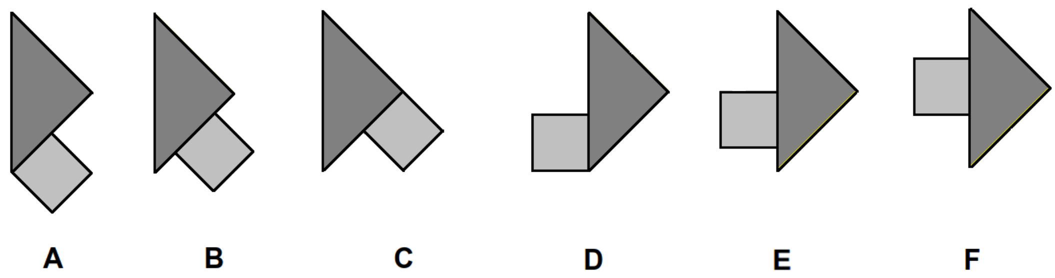
Na formação de professores, no contexto da exploração-investigação matemática, além das diversas possibilidades desenvolvidas a partir da situação proposta, são igualmente importantes a tomada de consciência e as reflexões sobre as estratégias utilizadas pelos próprios participantes. Tais estratégias constituem aprendizagens referentes à estrutura sintática do conhecimento de conteúdo específico e em momentos oportunos, podem fundamentar decisões do professor em suas aulas.

Terminamos a exploração das formas geométricas formadas pela justaposição do triângulo maior e do quadrado sintetizando que é possível obter pentágono não-convexo (Figura 2.43–C), hexágonos não-convexos (Figura 2.43–A–D) e heptágonos não-convexos (Figura 2.43–B–E–F). Além do registro escrito, durante a escrita do texto coletivo, fizemos a colagem das peças recortandas em papel dobradura, formando a representação de cada uma das figuras formadas em um folha de papel tamanho A4, tanto para ilustrar quanto para sistematizar nossos resultados. Na Figura 2.43 apresento as formas que fizemos, entretanto discutimos que estas eram apenas alguns exemplos, pois conforme uma peça se desloca justaposta à outra, temos uma infinidade de outras figuras.

> 272. *TC. Falamos que o quadrado poderia se deslocar pelo lado maior do triângulo formando infinitas figuras.*
>
> 273. *TC. Daí representamos o quadrado grudado no lado maior do triângulo em uma das pontas, e fomos obtendo diversas figuras. (Como representado na Figura 2.43, tendo em vista as colagens feitas por nós.)*
>
> 274. *TC. Depois disso, exploramos as figuras formadas quando apoiamos o quadrado em um dos catetos do triângulo maior.*

[15]Traduzido por mim do original em Inglês: A proof becomes a proof after the social act of 'accepting it as a proof'(...).

Figura 2.43 – Representação de algumas figuras geométricas formadas pela justaposição do triângulo maior e do quadrado do tangram.

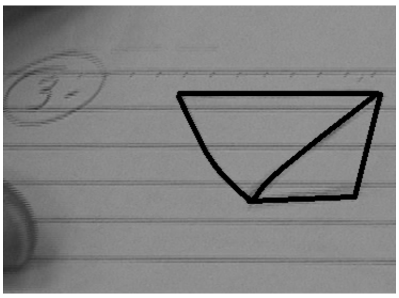


(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Depois, prosseguimos para representar figuras que podem ser formadas pela justaposição do triângulo maior do tangram com o triângulo médio.

Para prever os resultados, Cidinha utilizou seu registro, fazendo o esboço de uma figura como se vê na Figura 2.44. Como esta professora não pegou as peças para primeiramente prever os resultados, a partir de seu desenho, ela questionou se a medida da hipotenusa do triângulo médio equivale à medida do cateto do triângulo maior.

Figura 2.44 – Representação de Cidinha de um triângulo médio com a hipotenusa justaposta a um cateto do triângulo maior.

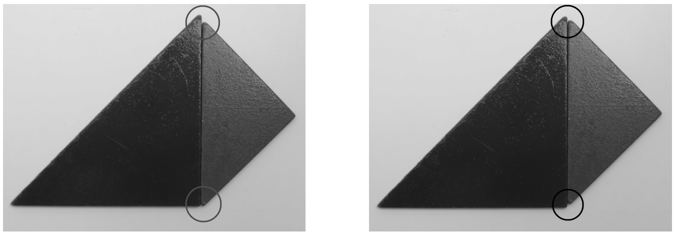


(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Em seguida, Cidinha utilizou o tangram de madeira para exemplificar e pôde perceber que, pela imperfeição das peças de madeira, parecia que a hipotenusa do triângulo médio não coincidia com o cateto do triângulo maior, conforme Figura 2.45.

Figura 2.45 – Justaposição da hipotenusa do triângulo médio ao lado de um cateto do triângulo maior, com deslocamento de (a) para (b).

(a) **(b)**



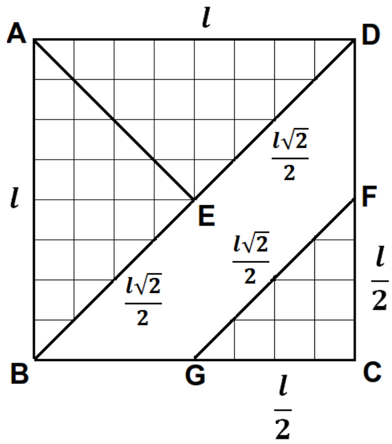
(Reconstituição de imagem de videogravação por meio de fotografia. Autoria da pesquisadora.)

Cidinha ficou em dúvida pois, dependendo do modo como posicionava as peças (Figura 2.45), dava a impressão de que as medidas do cateto do triângulo maior e da hipotenusa do triângulo médio eram ou não iguais (falas 276 a 279).

> 275. *C. Aqui dá. Mas, falta um pedacinho? (Indicando conforme Figura 2.45a.)*
> 276. *C. Falta uma pontinha. (Figura 2.45a)*
> 277. *G. Eu também achei. Pode ser pelo recorte [da madeira].*
> 278. *C. Eu achei que dava.*
> 279. *C. Mas dá! (Figura 2.45b)*
> 280. *G. É só o corte da madeira. São iguais.*
> 281. *G. Eu tinha ficado na dúvida se era ou não.*
> 282. *C. Agora, pela construção [no quadriculado] dá pra ver então.*
> 283. *TC. Discutimos também se a hipotenusa do triângulo médio era "exatamente" da mesma medida que um cateto do triângulo maior. Usando as peças de madeira, até parecia não ser, mas observando o quadrado com as sete peças no quadriculado, dá para ver que são do mesmo tamanho.*

Tendo em vista a dúvida de Cidinha, voltamos ao quadrado formado pelas sete peças e às relações entre as medidas solicitadas, no qual elas identificaram (falas 280 a 282) visualmente que ambos os segmentos são iguais à soma de "quatro diagonais dos quadrados da malha quadriculada". Além disso, sendo l a medida do lado do quadrado (ABCD) formado pelas sete peças, a medida da hipotenusa dos triângulos maiores ($\triangle$ABE e $\triangle$AED) é igual a l e seus catetos são iguais a $\frac{l\sqrt{(2)}}{2}$. No triângulo médio, se l é a medida do lado do quadrado, então os catetos do triângulo médio são iguais a $\frac{l}{2}$ e sua hipotenusa é igual a $\frac{l\sqrt{(2)}}{2}$. Desse modo, concluímos que as medidas dos catetos dos triângulos maiores são congruentes à hipotenusa do triângulo médio (Figura 2.46).

Figura 2.46 – Relações entre as medidas dos catetos dos triângulos maiores e da hipotenusa do triângulo médio.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Com isso, novamente foi possível exemplificar a importância de não trabalharmos, na Educação Básica e nem em contextos de formação docente, apenas com um tipo de representação, nem aquelas feitas pelos alunos nem aquelas que lhe são entregues, prontas. Outros recursos como o contorno com o material concreto e as colagens, fizeram-se necessários para facilitar a elaboração da representação. As informações visuais obtidas pela observação não foram (nem poderiam ser) suficientes para garantir as relações procuradas entre os valores dos segmentos indicados, tendo estas que serem substituídas por uma prova desenvolvida com recursos algébricos.

2.4.3 Novas explorações, novas questões

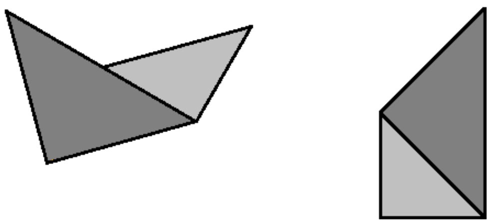
Ao justapor um triângulo maior com um triângulo médio, Cidinha lançou uma conjectura (fala 285). Destaquei a questão posta pela professora (fala 286) e Eunice, que explorava as peças, refutou tal conjectura (fala 288). Segundo Villiers (2003), trata-se de uma das funções da experimentação, a refutação global, que ocorre por um contraexemplo que torna falsa a declaração apresentada.

> 284. *TC. Na sequência, fomos para as figuras formadas por um triângulo maior com o triângulo médio. A primeira ideia (Cidinha) era que só desse para formar figuras não-convexas, mas rapidamente foi possível perceber que isso não era verdade.*
>
> 285. *C. Quando juntamos o [triângulo] maior com o [triângulo] médio, todas [as figuras formadas] são não-convexas.*
>
> 286. *P. Será que todas são não-convexas?*
>
> 287. *C. Essa que eu fiz aqui foi, agora... (Figura 2.47a)*
>
> 288. *E. Mas esta é uma não-convexa? (Figura 2.47b)*
>
> 289. *C. Ah, eu estava só do outro lado. (Referindo-se ao triângulo menor estar justaposto ao triângulo maior na hipotenusa deste último.)*
>
> 290. *G. Então não é só não-convexa.*

Figura 2.47 – Em (b) a apresentação de um contraexemplo em relação à formação de polígonos não-convexos na junção do triângulo maior com o triângulo médio conforme exemplificado em (a).

(a) Pentágono não-convexo.

(b) Quadrilátero convexo (trapézio).



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

A atividade prosseguiu com Gisele e Cidinha explorando outras formas geométricas que podem ser formadas pelo triângulo maior e pelo triângulo médio, cujo interesse era pela classificação das figuras de acordo com o número de lados. Com isso, obtiveram quadriláteros, pentágonos e hexágonos não-convexos, com a exceção do trapézio que é um quadrilátero convexo e assim foi entendido. Com isso, foi possível perceber a existência de diversas figuras geométricas com a mesma nomenclatura, conforme salientou Gisele (fala 291).

291. *G. Então, os dois são pentágonos não-convexos. Mas, têm formas diferentes, com o mesmo nome. (Indicando as figuras representadas na Figura 2.48–F–G.)*

292. *G. Surgiu essa questão do número de lados porque a gente queria nomear.*

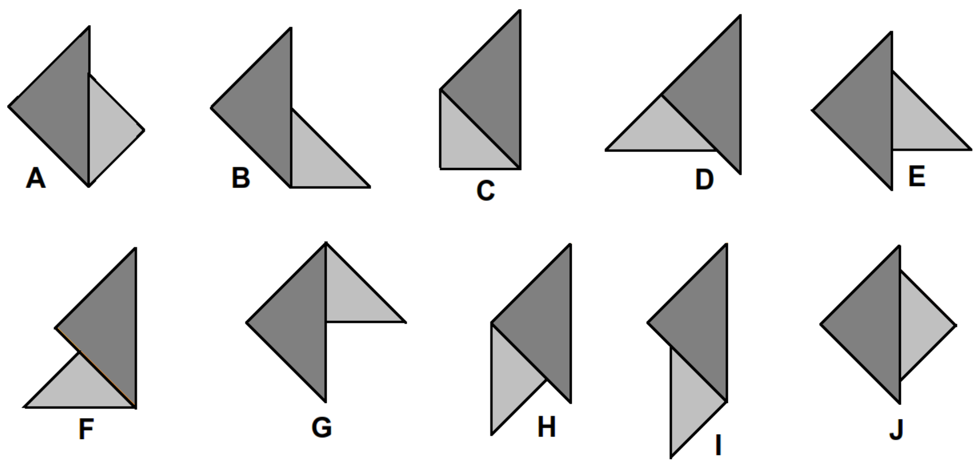
293. *TC. A quantidade de lados surgiu porque nos preocupamos em nomear as figuras e já tínhamos percebido que não dava somente quadriláteros. (Pronunciei o que registramos).*

294. *TC. Os dois primeiros exemplos deram polígonos não-convexos e deram pentágonos (A e B da Figura 2.48). Mas no terceiro exemplo (C da Figura 2.48) percebemos que também dá polígono convexo.*

295. *TC. Lembramos novamente que também temos uma infinidade de figuras a partir do momento em que a gente vai deslocando as peças.*

Na Figura 2.48 represento as figuras construídas e a nomeação dada. As figuras C e D são quadriláteros, sendo que a C é a única figura convexa obtida. São pentágonos as figuras A, B, F, G, H e I. Os hexágonos são as figuras E e J.

Figura 2.48 – Síntese das figuras geométricas formadas com o triângulo maior e o triângulo médio do tangram.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

A diferença entre fazer atividades com respostas prontas e a partir de tarefas exploratório-investigativas foi destacada por Cidinha (falas 296 a 298, página 149). Esta professora enfatizou que normalmente o tangram é utilizado para a construção de diversas figuras sem qualquer exploração sobre as medidas dos lados das peças ou das figuras formadas, interessando-se apenas pelo aspecto decorativo. Pelas falas das professoras ficou evidente, em suas experiências, o uso do tangram desconectado de uma função enquanto material didático que pode ser utilizado para o ensino e aprendizagem de conteúdos geométricos.

> 296. *C. Eu nunca vi, não pensei.*
> 297. *C. Faz só as figuras, no geral, tá lá e pronto.*
> 298. *C. Aqui estamos descobrindo uma porção de coisas, sem uma resposta só. Medidas (relações entre as medidas dos lados das peças do tangram) que eu nunca pensei.*
> 299. *N. Eu tinha muitas dificuldades com o tangram, eu nunca conseguia formar as figuras com o tangram.*
> 300. *N. Na escola mesmo, acho que nenhuma atividade foi trabalhada.*
> 301. *N. Na faculdade também não e no meu primeiro ano como professora eu também não trabalhei.*

O uso de um material didático-pedagógico não se encerra na manipulação correta do objeto e sim no estreitamento entre sua utilização e os conteúdos matemáticos pretendidos. Na prática, conforme advertem Nacarato (2004-2005) e Matos e Serrazina (1996), nem sempre isso ocorre, e assim pode não contribuir para a aprendizagem matemática. Além disso, conforme destaca Pais (2000) e é reafirmado por Nacarato (2004-2005), há que se evitar o risco da "inversão didática" quando um material didático passa a ter finalidade em si mesmo.

Os conhecimentos necessários para o uso adequado de materiais manipuláveis referem-se ao conhecimento curricular e relaciona-se de modo inseparável do conhecimento pedagógico do conteúdo. Tais materiais são recursos que se entrelaçam aos modos pelos quais o professor opta e consequentemente desenvolve o ato pedagógico de ensino.

No caso de conteúdos geométricos, os materiais manipuláveis ganham importância na habilidade de visualizar. Nacarato e Passos (2003, p. 78) destacam que

> A visualização pode ser considerada como a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão) naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. O significado léxico atribuído à visualização é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis.

Na educação básica, pela geometria ser uma parte da matemática ligada à realidade, mais intuitiva e concreta (PASSOS, 2005), a aprendizagem deste campo de conhecimento não se faz apenas pela percepção e observação livres nem tampouco por simples explorações cotidianas do indivíduo em seu meio, incluindo os materiais manipuláveis. É necessário que a escola proporcione atividades que levem a criança a "investigar, experimentar e explorar" (p. 17) objetos do cotidiano ou materiais físicos específicos para o ensino e, o professor proporcionar a aproximação e correspondência entre as relações estabelecidas nos objetos e os conteúdos geométricos desejados.

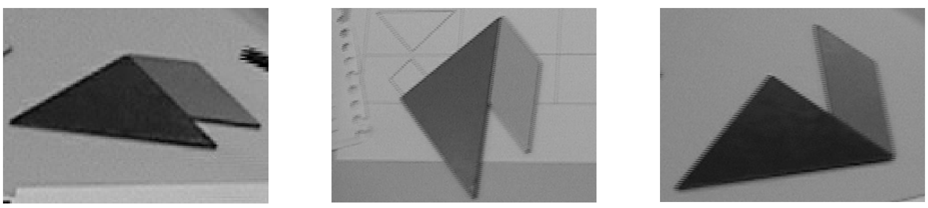
Nesse caso, durante a atividade desenvolvida com as professoras, essa discussão veio à tona, em suas próprias reflexões. A exploração-investigação, no contexto de formação contínua, entrelaça-se às reflexões sobre a prática e sobre as experiências discentes das participantes, uma vez que o fazer docente dá significado, desperta interesses e necessidades. A exploração-investigação matemática pode provocar reflexões e questionamentos tanto em relação às formas de aprender como de ensinar.

Posteriormente, as professoras deram sequência à atividade e foram identificadas e classificadas, segundo o número de lados, as figuras formadas pela justaposição do paralelogramo com o triângulo maior, surgindo novamente dificuldades quanto ao registro na forma de desenho livre. Num primeiro momento, figuras como Figura 2.50a foram vistas com número de lados de uma unidade a menos por Cidinha, que se confundiu na contagem dos lados, retificando em seguida.

Na Figura 2.49 estão hexágonos compostos pelo triângulo maior e pelo paralelogramo enquanto na Figura 2.50 estão um pentágono e um heptágono formados por estas mesmas peças.

Figura 2.49 – Hexágonos não-convexos formados pelo triângulo maior e pelo paralelogramo do tangram.

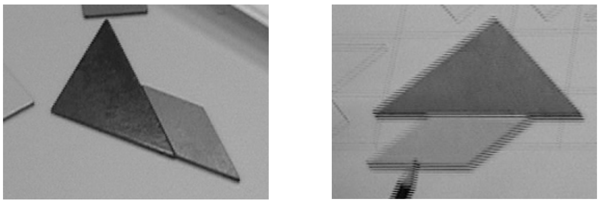
(a) **(b)** **(c)**



(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Figura 2.50 – Pentágono e heptágono não-convexos formados pelo triângulo maior e pelo paralelogramo do tangram.

(a) **(b)**



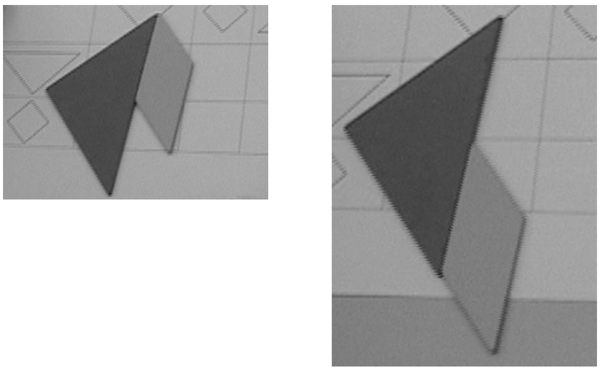
(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

A partir dessa exploração, Gisele sistematizou uma questão (fala 302) sobre o número de lados possíveis de uma figura formada por duas peças de um tangram. Cidinha, com referência a uma das formas feitas (Figura 2.50b), afirmou que pode ser uma figura com até sete lados.

302. *G. Figuras com quantos lados dá para fazer?*
303. *C. Vai, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete. Sete. (Apontando a Figura 2.50b.)*
304. *P. Conseguimos com mais de sete lados?*
305. *G. Com mais não. Mas com menos sim. (Indicando conforme Figura 2.51).*

Figura 2.51 – Representação do deslocamento do paralelogramo pela hipotenusa do triângulo maior, reduzindo o número de lados de (a) para (b). .

(a) **(b)**



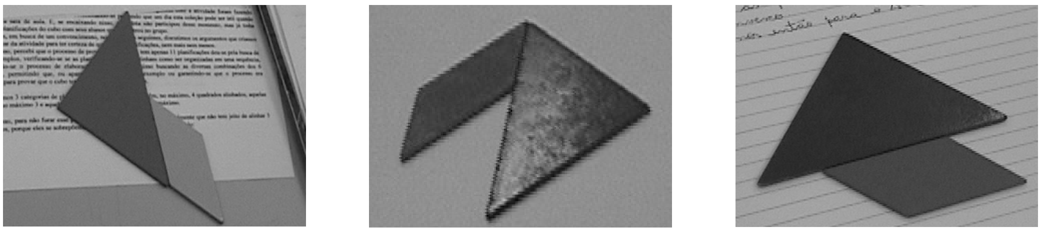
(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Com isso, guiadas pela intenção de classificar as figuras obtidas pela junção de duas peças do tangram, segundo o número de lados e a convexidade, independente das peças utilizadas, começaram a propor uma estratégia para aumentar o número de lados de uma figura, conforme sistematizou Gisele (falas 306 a 309) com relação às figuras representadas na Figura 2.52.

> 306. *G. Você tem que pensar o seguinte: qual a maneira de fazer mais...*
> 307. *C. Mais lados...*
> 308. *G. É colocando no meio. (Ou seja, colocando um lado menor justaposto a um lado maior, de modo que seus vértices não coincidam, conforme movimento indicado por Cidinha na Figura 2.52c.)*
> 309. *G. Aí você consegue mais lados porque você não tem a emendinha (vértices coincidentes).*
> 310. *G. Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete! (Figura 2.52c)*

Figura 2.52 – Polígonos formados em sequência com o triângulo maior e o paralelogramo aumentando o número de lados.

(a) Pentágono. **(b)** Hexágono. **(c)** Heptágono.



(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

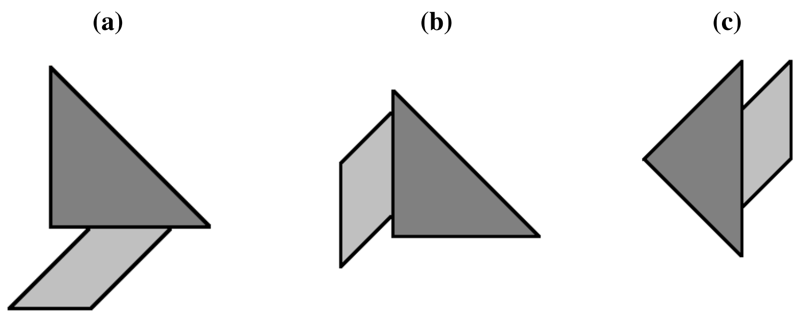
Ao contarem o número de lados, Eunice e Gisele debateram se haveria possibilidade de haver mais de sete lados ao juntarem um triângulo maior com o paralelogramo. Eunice afirmou que para isso deveriam somar o número de lados de cada uma das figuras, entretanto, Gisele discordou, mostrando que, mesmo tendo quatro e três, o que resulta em sete, o resultado não foi obtido apenas pela soma do número de lados, uma vez que na justaposição das peças dois lados se sobrepõem.

> 311. *E. E mais de sete dá?*
> 312. *G. Não.*
> 313. *E. Você junta os três lados desse [do triângulo maior] como quatro desse [paralelogramo] e dá sete.*
> 314. *G. Acho que agora não, porque sempre vai ter um lado grudado no outro. Sempre vai ter que unir dois lados.*

Gisele sistematizou um procedimento para aumentar o número de lados de uma figura (falas 315 a 323).

315. *G. Tem que posicionar a peça... Não necessariamente a peça; tem que ser um lado menor.*
316. *C. Não é realmente no meio, é do jeito que quiser.*
317. *C. Sobrando um pedacinho de cada lado, né.*
318. *G. Tem que ser sempre um lado menor num lado maior.*
319. *G. Pode ser assim. (Figura 2.53a)*
320. *G. Pode ser assim. (Figura 2.53b)*
321. *G. Ou assim. (Figura 2.53c)*
322. *G. Não importa, desde que seja um lado maior e um menor.*
323. *G. A questão é essa, ter as laterais. Você vai dividir esse lado maior.*

Figura 2.53 – Heptágonos formados por um triângulo maior e um paralelogramo. Destaque para a justaposição de lados de comprimentos diferentes em dois polígonos sem coincidência de vértices.

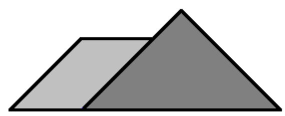


(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Por outro lado, para diminuir a quantidade de lados, Gisele explicou que se deve fazer a figura colocando dois lados alinhados (falas 326 a 330). Na fala 324 apresento a escrita dessa situação em nosso texto coletivo e na fala 325, nossa reescrita, feita em seguida. Durante o texto coletivo, mesmo por sermos adultos e conhecedores de parte do vocabulário matemático necessário em nossa redação, não foi possível (nem desejamos) o abandono de palavras e expressões de nossa língua materna. Ao invés disso, a língua materna permitiu a criação de uma versão do texto que foi sendo remodelada e recriada a partir do momento em que nossa experiência também foi revivida, reexperienciada e refletida.

324. *TC. Para aumentar o número de lados, a Gisele disse que devemos posicionar um lado menor no "meio" de um maior, dando origem a dois ladinhos.*
325. *TC. Para aumentar o número de lados da figura final, devemos justapor um lado de uma peça a um lado de comprimento diferente na outra peça, de modo que eles não tenham vértices coincidentes.*
326. *G. E para diminuir os lados [número de lados] é sempre você unir um lado no outro.*
327. *G. Assim (Figura 2.54).*
328. *G. Para você diminuir lados é só você unir dois lados para ficar um só...*
329. *C. Maiores?*
330. *G. Não precisam ser os maiores. Qualquer um. (Dando outros exemplos.)*

Figura 2.54 – Pentágono formado por um triângulo maior e o paralelogramo com lados alinhados e um vértice coincidente.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

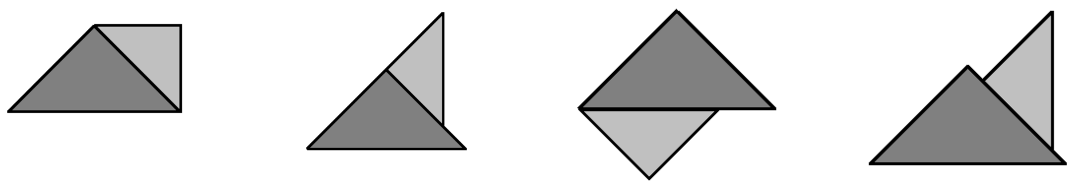
Então, para se obter maior quantidade de lados na figura formada pelas duas peças, devem-se justapor os lados de modo que um lado de uma peça seja colocado justaposto a um lado da outra peça de modo que segmente este em duas partes, formando dois lados da figura final. Por outro lado, para se diminuir a quantidade de lados, deve justapor as peças de modo que um lado de cada polígono forme um único lado na figura final.

Eu complementei que, como a pergunta inicial referia-se à quantidade de lados da figura final, aproveitando a ideia de Eunice, temos como calcular o número da lados da figura formada a partir do número de lados do polígono de cada uma das peças.

Sistematizamos que é necessário obter a soma do número de lados das duas peças e: (i) se as figuras estiverem justapostas por dois lados de mesma medida, então, esta terá a soma anterior menos dois — Figura 2.55a; (ii) se os lados justapostos não forem de mesma medida e estiverem unidos vértice com vértice, formando um só lado, então o número de lados da figura formada será igual a soma obtida menos um (menos dois mais um) — Figura 2.55b; (iii) se os lados justapostos não forem de mesma medida e estiverem unidos vértice com vértice, não formando um só lado, então o número de lados da figura formada será igual a soma do número de lados de cada uma das peças menos um (menos dois mais um) — Figura 2.55c; (iv) se a justaposição ocorrer em lados que são de medidas diferentes sem coincidência de vértices, então, o número de lados da figura formada será a soma do número de lados das duas peças (menos dois mais dois) — (Figura 2.55d). Ao final, as professoras passaram a replicar o procedimento, verificando seguidas vezes com outras peças.

Figura 2.55 – Polígonos formados pelo triângulo maior e pelo triângulo médio do tangram.

(a) Quadrilátero. **(b)** Pentágono. **(c)** Outro pentágono. **(d)** Hexágono.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Após esta etapa, a atividade encerrou-se não havendo a exploração de todos os caminhos possíveis, pois esta desenvolveu-se até quando foi necessário responder às questões propostas pelas professoras.

Numa investigação, a exploração e a resolução do(s) problema(s) proposto(s) não ocorrem obrigatoriamente de modo linear. Há momentos em que estamos resolvendo um problema proposto e, ao surgirem novas perspectivas, a exploração recomeça e, muitas vezes, após tal exploração, retoma-se ao problema anterior. Pela abertura da tarefa, esta possibilidade ocorre na medida em que as professoras participantes atuam como protagonistas e não buscam em mim, autora das tarefas, as respostas esperadas que já estariam "prontas e escondidas".

O movimento dado pela investigação possibilita que não apenas um problema seja resolvido durante a atividade, mas mais do que um e estes terminam quando suas soluções são satisfatórias para o grupo que investiga. A mudança do decurso do processo permite explorações e ampliação de conhecimentos que não poderiam ser previstos antecipadamente na totalidade por quem propõe a tarefa, incidindo em aprendizagens para todas as envolvidas na atividade.

Além da exploração-investigação propriamente dita, uma das discussões que permeou a atividade e esteve presente no debate final foram as ferramentas por nós utilizadas para o registro da atividade: o desenho livre ou com régua, as colagens e a escrita do texto coletivo e a análise algébrica para a validação das hipóteses e a proposição de questões pelas participantes e não explícitas na tarefa.

Conforme vimos no decorrer da atividade, o desenho impõe limites que podem ser superados com a utilização de outros recursos, entretanto, nem todas as limitações são resolvidas simplesmente pela troca dos materiais que o professor dispõe.

Como considerei anteriormente, ao se ter o foco investigativo sobre as potencialidades da exploração-investigação não é possível isolar os aspectos formativos dessa abordagem metodológica daqueles que decorrem do uso de narrativas no processo de formação. No caso específico da atividade narrada nesta seção, o uso do texto coletivo facilitou o registro das professoras sobre o que foi desenvolvido, aliando elementos da narrativa (como por exemplo, temporalidade, sequência) ao registro de atividades matemáticas desejado em aulas investigativas.

Devido à atividade investigativa centrar-se no "fazer", tal como ocorre, muitas vezes, com alunos da Educação Básica (PASSOS et al., 2005), durante seu desenvolvimento, as professoras registraram prioritariamente o desenho das figuras feitas, ficando o processo propriamente dito grafado em minhas anotações rápidas e nas videogravações. De um encontro para o outro (dos dois em que esta atividade ocorreu) as professoras não levaram suas narrativas individuais escritas. Desse modo, o texto coletivo registrou parte de nossa narrativa oral que se compôs nas reflexões e na rememorização compartilhada. Diante dessa situação é importante registrar que por muitas vezes percebi que as professoras esforçavam-se para serem pontuais nos encontros e incomodavam-se quando não faziam narrativas escritas individuais ou qualquer outro registro que fosse elaborado fora de nossos encontros ou de suas salas de aulas. Pude notar que a falta de tempo para fazer tudo o que precisavam levava-as a optarem por aquilo que fosse mais urgente e que tivesse algum comprometimento caso não fizessem, como por exemplo, a entrega de notas ao final dos trimestres, o preenchimento de documentos solicitados pela escola e até, nesse contexto, suas obrigações e compromissos familiares ou pessoais. Por outro lado, se lhe faltava tempo para cumprir com as atividades na totalidade, elas não demonstravam que desistiriam de investir em sua própria formação, por isso, participavam dos encontros, sempre da melhor forma que encontravam.

2.5 Investigando quadrados com o tangram

2.5.1 Origem da tarefa: investindo nas próprias aprendizagens docentes

Esta tarefa surgiu a partir das intenções manifestadas por Cidinha em propor uma tarefa para seus alunos para a qual ela não tinha conhecimento de como esta poderia se desenvolver. Isso ocorreu após a atividade *Investigando a composição de figuras geométricas com o tangram* narrada na Subseção 2.4. Cidinha nos apresentou um esboço para a tarefa (falas 331 e 332) e também ponderou suas preocupações, uma vez que seus alunos da quarta série ainda não estavam proficientes em leitura na língua materna, relacionando isso a não poder ensinar geometria. Sugeri que a tarefa poderia ser apresentada oralmente e que seus registros, na forma de texto coletivo ou desenhos, poderiam ser cenários para o trabalho com a alfabetização na língua materna.

Cidinha desejava apresentar-lhes uma tarefa não diretiva, na qual ela não fosse a *apresentadora*. Ela queria que eles tivessem oportunidades para *experimentarem*, com autonomia; não sendo ela a detentora de uma resposta que seria contada ao final (falas 331 e 332), indo ao encontro do papel do professor na perspectiva exploratório-investigativa.

> 331. *C. Pensei em perguntar para eles, com o tangram, o que dá para montar.*
> 332. *C. Dá para montar quantos quadrados? Quantos triângulos? Quantos quadrados?*
> 333. *C. Para trabalhar as figuras geométricas.*

O interesse de Cidinha em levar a atividade para seus alunos parecia centrar-se na curiosidade sobre a prática, de observar como seus alunos desenvolveriam tal atividade, com “liberdade”, sem vincular o que eles faziam com suas próprias ações. Podemos dizer que ela queria conhecer seus alunos que, apesar de não serem proficientes em leitura e escrita, ela ainda não sabia se conseguiriam fazer atividades de geometria, pois estávamos no início do ano letivo.

No desenvolvimento de uma atividade investigativa, além dos conteúdos específicos, é importante destacar e refletir sobre a tarefa apresentada e os modos pelos quais a atividade se desenvolve (ou pode se desenvolver). Isso relaciona-se diretamente ao conhecimento pedagógico do conteúdo, marca do protagonismo docente, um amplo campo de construção e reelaboração de conhecimentos profissionais por nós, professores e investigadores.

A tarefa ficou redigida do seguinte modo:

INVESTIGANDO QUADRADOS COM O TANGRAM
Investigue os quadrados que podem ser feitos com as peças do tangram.

Para promover o registro, as professoras optaram por sugerir o contorno das peças sobre folhas de papel sulfite, demarcando os segmento internos que indicam as peças utilizadas. Do mesmo modo que foi planejada para ser realizada no 4^o ano de Cidinha, Gisele convidou-nos a desenvolvê-la. Cidinha percebeu, nesse tipo de registro, uma possibilidade para seus alunos que ainda não sabem fazer o registro usando língua materna.

> 334. *C. Não havia pensado nisso, mas... Só assim também, porque eles não sabem escrever.*
> 335. *C. A maioria tá aprendendo a escrever agora.*

Além da tarefa, os recursos e os tipos de registros sugeridos pelos professores podem auxiliar seus alunos no desenvolvimento de atividades abertas que requerem, em geometria, a elaboração das próprias representações. No que diz respeito à formação de professores, a convivência com diversas formas de registros (em palavras e em desenhos) pode auxiliar o professores em pensar e decidir sobre tais recursos em suas decisões cotidianas.

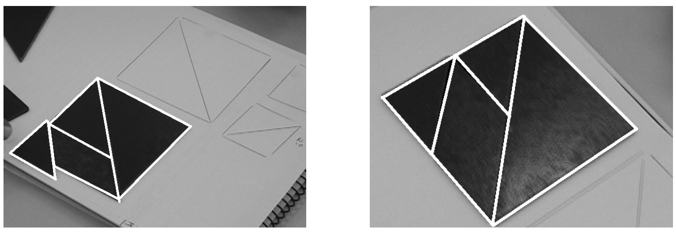
2.5.2 Dos quadrados e não-quadrados: exploração de exemplos e contraexemplos

Logo no início, após identificarem rapidamente os dois quadrados que são formados respectivamente pelos dois triângulos menores e pelos dois triângulos maiores, a exploração da situação proposta permitiu identificar não-quadrados, como Gisele destacou para o grupo ao tentar formar um quadrado com três peças do tangram. Sua tentativa resultou, posteriormente, na formação de um quadrado com quatro peças (Figura 2.56b),o que foi comemorado por esta professora (fala 339). Por sua vez, fundamentando-se na experimentação, Eunice conjecturou que não seria possível formar um quadrado com três peças (fala 341).

> 336. *G. Eu vou cortar, sobrou. (Rindo, referindo-se à Figura 2.56a.)*
> 337. *G. É legal que isso pode acontecer com a criança.*
> 338. *G. O legal é você fazer o que não dá certo. Também é importante! (...)*
> 339. *G. Êeeee! (Bate palmas ao obter um quadrado conforme Figura 2.56b.)*
> 340. *C. Dá com três?*
> 341. *E. Com três não dá.*

Figura 2.56 – Quadrado com quatro peças do tangram: tentativa em (a) e resultado obtido em (b).

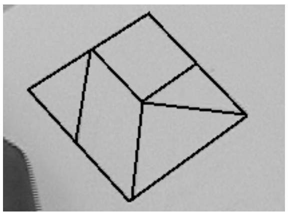
(a) (b)



(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Uma das estratégias utilizadas pelas professoras foi usar o contorno de um dos quadrados já feitos e preenchê-lo com outras peças de modo que formasse outra configuração, como exemplificado por Eunice, ao determinar um quadrado utilizando cinco peças. Ao colocar as peças internas, o contorno do quadrado já tinha sido definido por uma configuração anterior (Figura 2.57).

Figura 2.57 – Registro de Eunice de um quadrado formado por cinco peças do tangram.

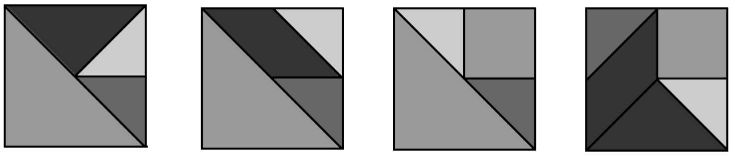


(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Após terem quadrados com duas, quatro e cinco peças (Figura 2.58), Gisele conjecturou que só terá outro com sete peças (fala 343).

342. *E. Pode ter de outro tamanho?*
343. *G. Mas outro tamanho que foge daqui (Figura 2.58) é só aquele outro com as sete peças.*
344. *G. Ah, eu acho!*

Figura 2.58 – Quadrados formados por quatro e por cinco peças do tangram.

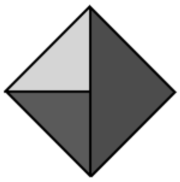


(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação e dos diversos registros das professoras.)

A conjectura de que só teriam outro quadrado se fosse com sete peças confirmava a conjectura anterior de Eunice (fala 341, 159) da impossibilidade de se ter quadrado com três peças ao mesmo tempo em que a ampliava: então não haveria com três nem com seis peças. Conforme Alrø e Skovsmose (2006) reformular afirmações favorece a continuidade do contato entre os participantes numa investigação, levando-na adiante e também incitando reflexões e análises.

Como todos os quadrados com quatro peças foram construídos tendo metade de sua área ocupada por um único triângulo (Figura 2.58), procuraram montar quadrados a partir de cada um dos triângulos. Ao fazer isso, com o triângulo maior, foram obtidos os quadrados com quatro e com duas peças enquanto que com o triângulo menor, o único quadrado obtido foi de duas peças. Ao observarem o último quadrado da Figura 2.58, identificaram dentre as peças, o triângulo médio. As professoras notaram que não tinham montado quadrado tendo sua metade coberta pelo triângulo médio. Com isso, foi encontrado o quadrado formado por três peças, conforme ilustrado na Figura 2.59. Assim, foi refutada a conjectura de Eunice, restando ainda verificar se há quadrados com seis peças do tangram.

Figura 2.59 – Quadrado formado com três peças do tangram (dois triângulos menores e o triângulo médio).



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

A provisoriedade das afirmações é uma das possibilidades que ocorrem em atividades exploratório-investigativas, indo de encontro com um ensino de matemática sem lugar para contraexemplos e dúvidas.Considero importante que estas situações de provisoriedade, emergidas durante explorações-investigações, nos levem a repensarmos o que para mim não parece exceção, de que o ensino dedutivista seja usado como princípio didático no ensino de geometria, contrariando possibilidades advindas de um modo genuíno de aprender alguma coisa, pautado na exploração e na investigação e não no conhecimento pronto, finalizado e lapidado, do qual o estudante possa apenas, na melhor das hipóteses, apreendê-lo como já está sistematizado.

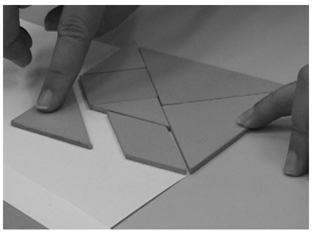
O processo exploratório-investigativo desenvolvido nas atividades com as professoras, como mencionei anteriormente, caracterizou-se pelo diálogo das atividades compartilhadas e das individuais que, por vezes, tomaram a cena e redirecionaram o que ocorreu nas discussões. Assim, a questão sobre a possibilidade de se formarem quadrados de duas a sete peças foi interrompida por uma atividade paralela de Andréa (como veremos na próxima Seção) que passou a ser o foco da atividade de todas. Entretanto, eu permaneci curiosa para entender se a montagem do quadrado com seis peças era possível ou não. Em minha memória eu não me lembrava da veracidade desse fato; vagamente lembrava-me de que alguns polígonos não são possíveis de serem formados com determinadas quantidades de peças. No Apêndice B (página 245), apresento o resultado de minha investigação.

2.5.3 O quadrado de sete peças e a reflexão do paralelogramo

Durante a atividade, Andréa interessou-se em fazer um quadrado com todas as peças do tangram, entretanto, conforme podemos observar pela Figura 2.60, esta professora não conseguia. Isso foi motivo de incômodo tanto para Andréa como para as demais, uma vez que era sabido de antemão que este quadrado seria possível de ser feito. Para formar o quadrado pretendido, Eunice auxiliou Andréa a fazer o movimento de reflexão do paralelogramo em relação a qualquer um de seus lados.

345. *A. Mas, eu não consigo!*
346. *G. O que, com todas não deu certo?*
347. *A. Não tô conseguindo.*
348. *A. Não deu, olha aqui. (Figura 2.60)*
349. *A. Esse negócio está errado!*
350. *A. Estou ficando doida!*
351. *E. Nem assim? Olha? (Fazendo a reflexão do paralelogramo*[16] *e montando corretamente o quadrado. (risos)*

Figura 2.60 – Tentativa de formar um quadrado com as sete peças do tangram.

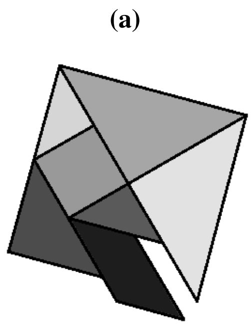


(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

[16]Lembrando que as peças de madeira têm as faces superior e inferior idênticas, pintadas da mesma cor, não sendo permitido fixar qual seria frente e qual seria verso.

Na análise e escrita deste texto, fui construir o tangram com as sete peças a partir de um software disponível na internet[17]. Contudo, com as formas dispostas do mesmo modo que Andréa, também não foi possível (Figura 2.61) compor o quadrado, uma vez que tal recurso não permite a reflexão das peças.

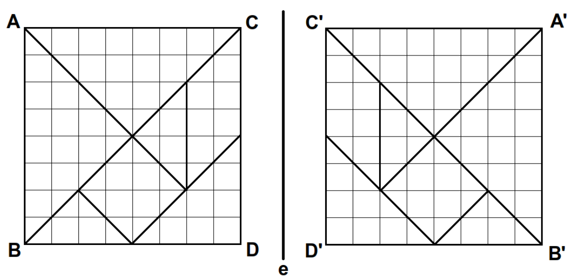
Figura 2.61 – Quadrado de sete peças do tangram sem possibilidade de refletir o paralelogramo. Em (a) a tentativa e em (b) o resultado obtido após a necessidade de alterar a posição de algumas das peças a partir de (a).



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Caso não se queira permitir a reflexão do paralelogramo ou esta não seja facilmente explorada (como no caso de tangrans impressos coloridos em apenas uma face de folhas de papel sulfite, por exemplo), é necessário alterar a posição das peças, conforme Figura 2.62, cujos quadrados $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são simétricos em relação ao eixo e.

Figura 2.62 – Quadrado formado pelas sete peças do tangram e sua reflexão em relação ao eixo e.



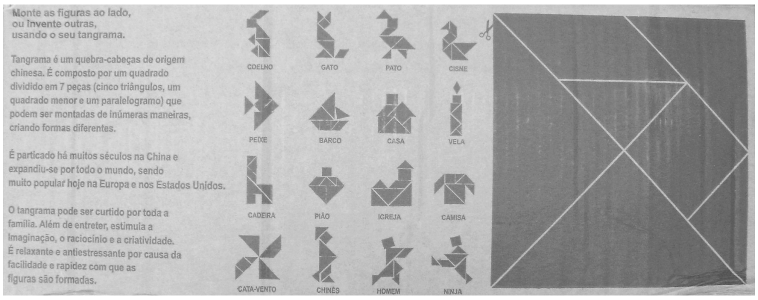
(Imagem elaborada pela pesquisadora.)

[17]Disponível em: http://rh-balingen.de/cv-tangram/cv-categories.htm. Primeiro acesso em 02 dezembro 2010.

Em face da dificuldade apresentada por Andréa, as discussões concentraram-se no material utilizado para a confecção do tangram e nas intervenções do professor para orientar e para provocar reflexões nos alunos quanto à necessidade de se fazer reflexões no paralelogramo.

Com a intenção de trabalhar tangram com seus alunos, Cidinha verificou se havia esse material em sua escola e para sua surpresa, encontrou, sem querer, caixas de papelão (embalagens da merenda escolar) que traziam impressos o tangram (com a inscrição "tangrama") conforme pode ser observado na Figura 2.63. Segundo esta professora, muitas outras caixas podem ter sido descartadas sem os professores perceberem que poderiam utilizá-las em sala de aula.

Figura 2.63 – Imagem de parte da caixa de papelão de merenda escolar que traz a estampa do tangram.



(Fotografia. Autoria da pesquisadora.)

Tendo em vista a intenção de Cidinha, discutimos a necessidade de orientar os alunos quanto aos movimentos de reflexão das peças, mesmo estando estas coloridas em uma única face.

A importância da vivência do professor com a preparação de suas aulas e com momentos de formação contínua permite que este (re)construa conhecimentos de conteúdo específico, conhecimentos pedagógicos do conteúdo e conhecimentos curriculares. A experiência acumulada durante anos de docência com o uso do tangram como um recurso didático pode não ser suficiente para a percepção das características das peças e de seu uso como recurso didático auxiliar no ensino de conteúdos geométricos ou para o preenchimento de figuras pré-determinadas.

Conforme afirma Gauthier et al. (1998, p. 32-33) referindo-se ao saber experiencial, a "experiência e o hábito estão intimamente relacionados". E complementa que a experiência "torna-se então a "regra" e, ao ser repetida, assume muitas vezes a forma de rotina". D. Pimm (1987) citado em epígrafe por Powell e López (1989, p. 157) adverte que: "Há um perigoso mito de que as pessoas aprendem pela experiência... O melhor que podemos reivindicar é a possibilidade de aprender pela *reflexão* da experiência.[18]" (grifos originais).

O deparar-se com o novo, o inesperado e com aquilo que não temos respostas prontas é possível nas atividades abertas que o professor desenvolve com seus pares. Ouso dizer que se cada uma de nós estivesse sozinha, conforme citado por um dos professores dos estudos de Fullan e Hargreaves (2000, p. 20) "você se torna a sua própria companhia" poderia ser que tais discussões não ocorressem. Além disso, se as tarefas apresentadas não fossem suficientemente abertas, ou seja, se fossem um problema com resposta(s) fechada(s), com o objetivo de identificá-las, provavelmente a situação estaria *isolada dos erros e dúvidas*, lapidada, de modo que não pudesse ser questionada ou oferecer embaraços.

A investigação prosseguiu pela pergunta de Cidinha (fala 358) sobre porque o paralelogramo não poderia ser utilizado da mesma forma que as demais peças, independente de sua posição (refletido ou não). Tendo em vista os questionamentos de Cidinha, Gisele apresentou uma conjectura (fala 359): o paralelogramo se difere das outras peças porque não tem eixo de simetria.

352. *C. Que coisa engraçada, eu nunca tinha visto isso.*
353. *G. Por isso que é bom a gente fazer.*
354. *G. Porque o problema aparece. E aparece na sala de aula, a gente fica procurando. Ou nem percebe.*
355. *C. Aí você fica perdida.*
356. *C. Porque a ideia é que seria a mesma coisa. Que dá, mas não dá! (Pegando a peça em suas mãos.)*
357. *C. Que engraçado!*
358. *C. Por que será que não monta, que a figura não é como as outras?*
359. *G. Mas isso não tem a ver com simetria?*
360. *G. Porque ele não é simétrico!*

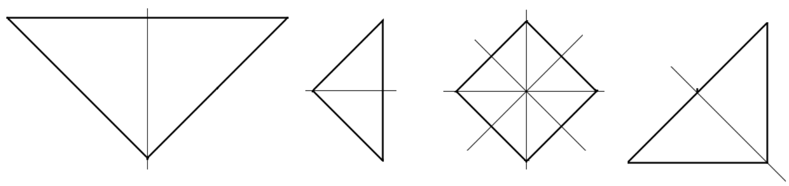
[18]Traduzido por mim do original em Inglês: *There is a dangerous myth going around that people learn from experience. ... the best that can be claimed is the possibility of learning from reflecting on experience.*

361. G. Por isso que não dá certo!

Foi necessário demonstrar, para favorecer a compreensão, por que o paralelogramo não se encaixava. Segundo Villiers (2002), nessas condições, a demonstração tem a função de explicação, permitindo o entendimento de por que algo se manifesta de determinada maneira.

Então, fomos verificar a conjectura de Gisele. Contornamos todas as figuras e indicamos seus eixos de simetria, conforme represento na Figura 2.64, tendo em vista nossos registros. Com isso, verificamos que estas figuras poderiam ser colocadas tanto com uma face quanto com a outra voltada para cima, ou seja, uma peça pode ser recoberta pela sua reflexão.

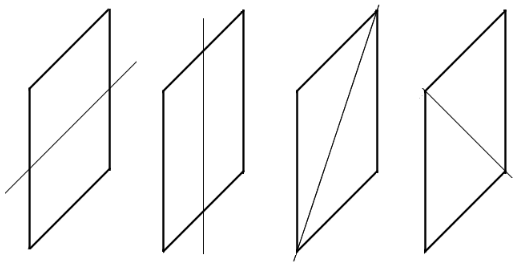
Figura 2.64 – Peças do tangram com indicação de eixos de simetria — Respectivamente: triângulo maior, triângulo menor, quadrado e triângulo médio.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Em seguida, verificamos que o paralelogramo não tem eixo de simetria (Figura 2.65), o que confirmou a explicação de Gisele. Com isso, avançamos de casos particulares para uma explicação que fosse convincente para nós. A aceitação de uma prova depende da comunidade para a qual esta será apresentada, socializada e discutida. É relevante pensar nisso uma vez que, com crianças dos anos inciais do Ensino Fundamental, mesmo que ainda não possamos utilizar demonstrações ou desenvolver provas que sejam do aceite da comunidade de matemáticos profissionais ou por alunos de níveis mais avançados, devemos trabalhar com argumentações, respeitando-se os conhecimentos de cada uma das turmas. Certamente esse é um caminho promissor para que a necessidade de demonstrações esteja presente na atividade matemática dos anos finais da Educação Básica e não sejam ensinadas como um texto pronto, acabado e que deve ser replicado pela memorização.

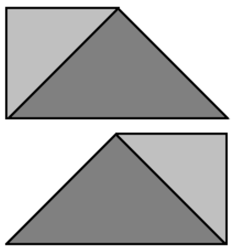
Figura 2.65 – Eixos analisados como de simetria no paralelogramo.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Para a experimentação de se estender para todas as figuras que não tem eixo de simetria, construímos figuras quaisquer com as peças do tangram. Na Figura 2.66 temos o caso de um trapézio que não tem eixo de simetria e conforme pudemos observar, não é possível cobri-lo com outro trapézio obtido pela sua reflexão.

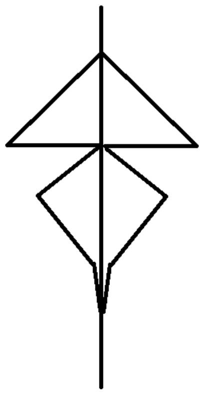
Figura 2.66 – Exemplo de um trapézio retângulo e a impossibilidade de cobri-lo com outro trapézio retângulo congruente obtido pela reflexão do primeiro.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Motivadas pela necessidade de estarmos convencidas, depois de várias figuras (representadas pela composição de peças do tangram e por desenho livre) que corroboravam a conjectura de Gisele, utilizamos um último desenho (Figura 2.67) e assim, expandimos a ideia para qualquer outra figura. Ou seja, uma figura precisa ter eixo de simetria para que possa ser recoberta por outra obtida a partir de sua reflexão.

Figura 2.67 – Exemplo de figura com eixo de simetria.



(Imagem elaborada pela pesquisadora a partir da videogravação.)

Após nossas conclusões sobre a simetria das peças do tangram e o convencimento de que das peças do tangram, o paralelogramo é a única delas que não pode ser recoberta por outro paralelogramo obtido pela reflexão do primeiro, a atividade seguiu-se pela composição de retângulos e de triângulos, sendo que as discussões pautaram-se novamente nas interpretações que a figura poderia dar e na reflexão do paralelogramo.

As discussões finais da atividade giraram em torno da reelaboração do conhecimento curricular. Gisele retornou à questão do material didático e da importância do professor conhecer suas especificidades.

362. *G. Então, a gente volta na questão do material. Essa questão, de pensar como ele é importante. Esse aqui, de madeira, não ia acontecer.*
363. *G. A gente nem sabia que lado a gente estava.*
364. *G. Não ia acontecer com esse material.*
365. *G. Eu acho que se a gente continuasse usando esse material [tangram de madeira cujas faces são da mesma cor] eternamente isso não ia aparecer aqui nunca.*
366. *G. Vira, não vira, nem se dão conta, tá colorido e não tem esse problema.*
367. *G. Cidinha, com as peças do tangram da caixa recortados, você ia falar que eles podiam usá-las do verso?*
368. *C. Nunca pensei nisso.*

Pela exploração-investigação, pudemos questionar o que supostamente não nos apresentava dúvidas. Mesmo que a composição de diversos desenhos com as peças do tangram oferecesse dificuldades e não pudesse ser resolvida de imediato (como mencionou Natália ao se referir às suas experiências anteriores), as opções sobre a confecção do tangram geralmente não são mencionadas e poderia ser entendido que ter tal recurso didático em madeira, em papel com uma ou duas faces coloridas, seriam recursos paralelos sem qualquer diferença quando de sua utilização em sala de aula. Entretanto, como pôde ser percebido pelas reflexões das professoras, há diferenças e estas precisam ser do conhecimento do professor.

Outro aspecto que prevaleceu nas discussões foi a inquietação frente ao que ainda não era conhecido. Foi necessário investigar porque o paralelogramo se difere das demais figuras. O questionamento posto pelas professoras direcionou a atividade e esta encerrou-se quando as respostas encontradas foram suficientes para convencer a todas, superando-se as confirmações obtidas pelos casos particulares para a utilização de um modo de generalização, o que neste caso, no âmbito do conhecimento do professor, refere-se à estrutura sintática do conhecimento de conteúdo específico.

2.6 Montando poliedros: explorações sem investigações

Ao planejar a tarefa *Montando poliedros*, tive como objetivos o desenvolvimento de uma atividade que permitisse às professoras o estabelecimento de relações entre figuras espaciais e suas planificações, a proposição de questões e a consequente investigação contemplando a construção de planificações de poliedros e a discussão sobre atividades exploratório-investigativas.

A presente tarefa foi realizada em um encontro do grupo, próximo ao final dos trabalhos no primeiro semestre em que estes foram desenvolvidos. Este é um fator de relevância que pode ter influenciado seu desenvolvimento, uma vez que, no mesmo encontro, no início e após a atividade, as discussões entre as participantes foram tomadas pelas preocupações de Cidinha e de Léia para permanecerem professoras, uma vez que não sabiam se teriam emprego no próximo ano letivo.

A tarefa foi apresentada de modo escrito, conforme segue. Diferentemente das anteriores, foi necessário acrescentar explicações orais, pois nem todas se lembravam da palavra “poliedro” e “superfícies poliédricas”.

MONTANDO POLIEDROS...
Nas folhas anexas você tem diversas figuras planas (triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos regulares e hexágonos regulares) com lados de mesma medida. Investigue as superfícies poliédricas que podem ser formadas com essas faces (não necessariamente todas). Escreva o processo percorrido pelo seu grupo. O registro é muito importante para a reflexão e para a comunicação.

Após minhas explicações, Gisele mencionou (fala 369) a possibilidade de criar formas que “não existem”, referindo-se àquelas com que ela nunca teve contato. A proposta previa a junção dos lados das figuras formando superfícies poliédricas, entretanto durante parte da atividade Cidinha observava a junção das peças apenas no plano, sem pensar nos poliedros. Ao justapor dois hexágonos exclamou (fala 370) que pretendia anexar um pentágono, tendo os três polígonos com um vértice coincidente cujos ângulos internos completariam 360^o, mas isso não foi possível (Figura 2.68).

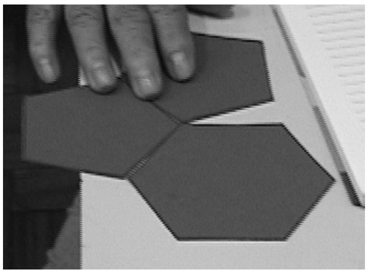
Com isso, pudemos discutir os ângulos internos e ângulo central dos polígonos[19] que estavam recortados e as possibilidades e impossibilidades de pavimentar o plano com tais figuras. Cidinha manifestou sua empolgação com a exploração da atividade e, em tom de brincadeira, reafirmou uma decorrência das atividades do grupo em casa, após os encontros.

369. *G. Pode misturar formas e pode inventar coisas que não existem.*
370. *C. Eu queria juntar, mas esse não dá!*
371. *P. Por que não dá?*
372. *C. Sei lá eu!*
373. *C. Deu. [Rotacionou as peças e afirmou antes de ajustá-las corretamente].*
374. *C. Não, não deu. Deu nada! (Figura 2.68).*
375. *C. Depois chega no domingo e em vez de eu descansar eu fico montando coisa.*
376. *G. (risos)*

[19]Trata-se de uma representação dos polígonos.

377. C. Eu fico montando, aí os netos chegam e eu até tranco a porta.

Figura 2.68 – Tentativa de pavimentar uma região do plano com dois pentágonos regulares e um hexágono regular com os lados destas figuras congruentes entre si.



(Captura da videogravação. Autoria da pesquisadora.)

A atividade seguiu pela exploração de várias possibilidades de montagem de superfícies poliédricas pelas demais professoras, entretanto não foram levantadas questões e nem o estabelecimento de relações ou regularidades. Dulce identificou que, como a tarefa mencionava a formação de poliedros, de um certo modo, isso era uma garantia de que estes poderiam ser formados. Ela disse que não sabia o que seria montado com as peças mas, sem titubear, afirmou que seria uma superfície fechada (381). Mesmo com a participação de Andréa contrapondo (fala 383), não houve mudança nos rumos e na atividade das professoras.

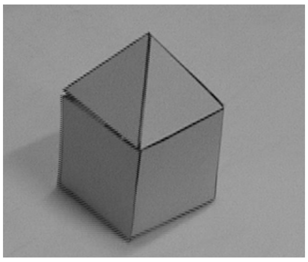
378. *P. O que você está montando, Dulce?*
379. *D. Não sei não.*
380. *P. Vai fechar?*
381. *D. Ah, uma hora fecha.*
382. *P. Sempre fecha?*
383. *A. Não, dependendo do número de faces que você coloca não dá certo.*
384. *G. Uma hora fecha.*

Posteriormente, Gisele denominou de "coisa mista" seu poliedro formado por mais de um tipo dos polígonos oferecidos. A partir da figura formada por Dulce e por ela mesma, Gisele questionou se era um prisma. A partir desse questionamento pudemos discutir o que é um prisma e tendo como referência os exemplos feitos, conversarmos sobre possíveis modificações nas construções para se tornarem prismas.

385. *G. Eu quis fazer uma coisa mista. (Figura 2.69)*

386. G. Quando mistura as formas a gente chama de prisma, não é?

Figura 2.69 – Representação de um poliedro feita por Gisele.



(Captura de videogravação. Autoria da pesquisadora.)

Depois que cada uma das professoras fez um poliedro, ocuparam-se de comparar a aparência de cada um deles com objetos do mundo real, findando-se desse modo a exploração que não conduziu a uma investigação. Com isso, discutimos que nem todas as tarefas desencadeiam investigações, requerendo o interesse e a participação dos envolvidos e fundamentalmente haver questões para serem investigadas. Do contrário, conforme ocorreu nesta atividade, as explorações podem acontecer, sem no entanto avançar-se para as demais etapas.

Em conversa posterior com as professoras, estas confirmaram que "não viram o que poderia ser investigado" e confirmaram que naquela época também houve as discussões sobre as preocupações de Cidinha e Léia.

Esta atividade exemplifica e vem confirmar que nem todas as tarefas consideradas exploratório-investigativas pelos seus autores desencadeiam atividades dessa mesma natureza. Entretanto, essa mesma tarefa foi apresentada anteriormente para professores de Matemática que lecionam nos anos finais do Ensino Fundamental, num contexto de formação contínua e, mesmo estando fora do escopo de análise desta tese, destaco que aqueles professores propuseram questões e seguiram da exploração para a investigação. Não é possível tecer afirmações conclusivas, entretanto de um modo ou de outro, reflito que isso pode ter ocorrido por uma maior familiaridade destes últimos com conteúdos de geometria espacial em relação aos primeiros.

No período de constituição dos dados desta pesquisa, houve outras tarefas que envolveram conteúdos relacionados à geometria espacial, como a representação plana de diversos objetos em um quarto de miniatura tendo materiais manipulativos à disposição. Esta tarefa centrou-se na etapa exploratório também não seguindo-se para as etapas investigativas que contemplam, no início, o levantamento de questões.

Essas considerações sinalizam para a ampliação de atividades exploratório-investigativas que envolvam conteúdos de geometria espacial com a possibilidade de aprofundarmos as relações entre tais conteúdos, esta abordagem metodológica, a formação docente e a prática pedagógica nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

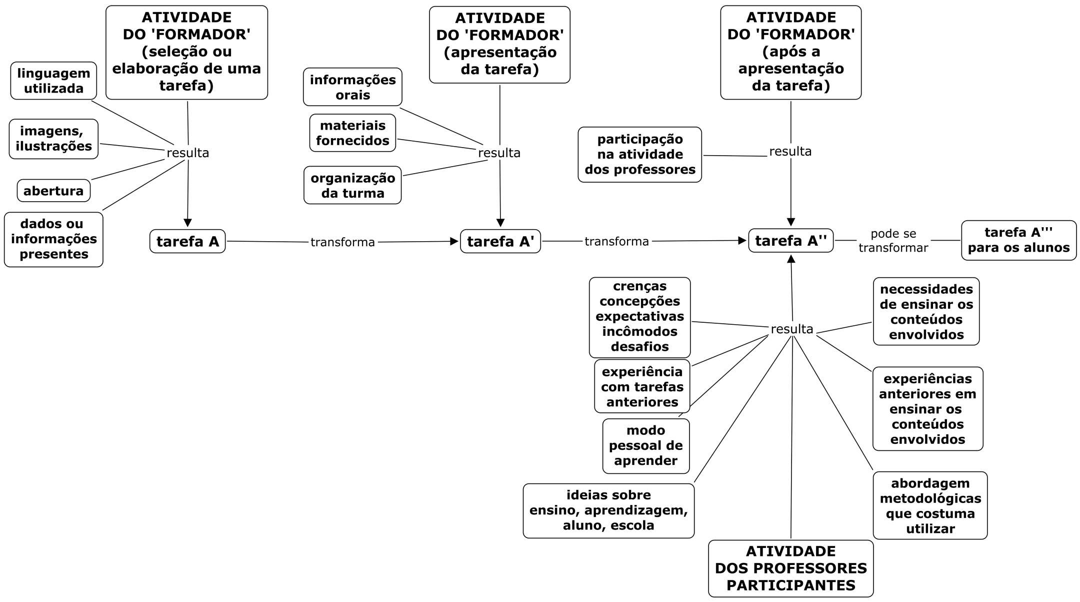
Uma síntese: potencialidades formativas da exploração-investigação matemática a partir das atividades desenvolvidas no grupo

As atividades desenvolvidas no grupo possibilitaram o questionamento e a problematização de conhecimentos anteriores das professoras participantes bem como a ampliação destes no que diz respeito aos conteúdos geométricos envolvidos. Esse aspecto se assemelha à exploração-investigação nas salas de aula da Educação Básica. Entretanto, por tratar-se de um contexto de formação contínua, outros elementos estiveram envolvidos nas atividades, como destacarei adiante, pois o sentido dado à cada uma das tarefas relacionou-se com seus conteúdos e à presença destes nas práticas anteriores das professoras e naquilo que elas entendem como necessário para seus alunos.

Do mesmo modo que na Educação Básica, as tarefas apresentadas às professoras se transformaram no decorrer das atividades, aproximando-se ou distanciando-se daquilo que foi previsto por mim, dependendo do interesse das envolvidas e do enunciado das tarefas. Esse distanciamento ou aproximação deu-se tanto em relação aos conteúdos envolvidos quanto ao tipo de atividade desenvolvida — uma delas iniciou e encerrou na etapa exploratória enquanto as demais desenvolveram-se no eixo exploratório-investigativo. Numa sequência de atividades exploratório-investigativas, a interpretação da tarefa e os processos de justificar ou refutar conjecturas podem ser influenciados pelas atividades anteriores, dependendo do modo pelo qual estas estejam relacionadas (por exemplo, proximidade de tempo entre uma e outra, conteúdos envolvidos e enunciados) tal como ocorreu em *Juntando quadrados* e *Juntando quadrados de novo*.

Na Figura 2.70, reelaboro a Figura 1.3 apresentada anteriormente (página 58), sintetizando as transformações de uma tarefa no decorrer da atividade do "formador" e dos professores num contexto de formação contínua e que podem resultar em uma tarefa para os alunos dos professores participantes, caso estes o desejem, considerando-se suas necessidades, seus objetivos e propósitos.

Figura 2.70 – Transformações de uma tarefa no decorrer da atividade em um contexto de formação contínua.



(Mapa conceitual elaborado pela pesquisadora.)

Para favorecer o trabalho com os conteúdos envolvidos, bem como o desenrolar da atividade no eixo exploratório-investigativo, foi necessária minha presença como agente problematizador e favorecedor de diálogo e reflexão das participantes, valorizando conjecturas e provocando justificativas ou até novas questões. Entretanto, o número de professoras, seus interesses e o tempo de permanência no grupo foram favoráveis para que, durante todo o período de constituição dos dados da pesquisa, enquanto pesquisadora, eu não tivesse a função de validar qualquer resposta desenvolvida por elas. Na condição de participação direta nas atividades, eu procurava desenvolver um genuíno questionamento durante o processo, tendo em vista o equilíbrio de papéis durante os diálogos e esvaindo-me de exercer controle deliberativo naquilo que faziam.

As professoras, imbuídas do propósito de refletir sobre a prática e construirem novos conhecimentos, desenvolveram as atividades nas quais prevaleceram as posturas investigativas, iniciadas e permeadas pela exploração. Além das explorações, as investigações matemáticas realizadas foram proporcionadas pelas questões apresentadas pelas participantes e pelas reflexões e análise sobre o que faziam. Assim, houve reelaboração de conhecimento de conteúdo específico, com o destaque para a estrutura sintática desta mesma categoria do conhecimento no ensino. Nesse campo, houve o avanço das estratégias de tentativa e erro na resolução dos problemas surgidos para a sistematização dos resultados obtidos, na convivência com diversos modos pessoais de explorar, investigar e experimentar, incidindo na necessidade do estabelecimento de provas e argumentos para o convencimento.

A exploração-investigação foi contexto favorável para vivências das professoras com questões sem respostas que, por um tempo, causaram estranhamentos e foram superadas pelo diálogo e pelo apoio mútuo no grupo. Essas aprendizagens também se relacionam à reelaboração de conhecimento na estrutura sintática do conteúdo específico. Nesse caso específico, as provas e os argumentos são desenvolvidos de modo que não confirmem uma resposta, mas neguem todas aquelas que pareciam ser válidas.

Nesse contexto, emergiram alguns modos de registro nas atividades: desenhos, escrita descritiva por extenso em anotações ou no texto coletivo, recortes e colagens. Tais procedimentos promoveram as reflexões das professoras e a problematização de práticas já conhecidas quanto à utilização de recursos didáticos (objetos manipuláveis, desenhos e instrumentos de medida) em suas salas de aula, levando-se em conta, inclusive, os materiais que compõem tais recursos. Esses recursos relacionam-se fundamentalmente às propostas e objetivos do professor e, dependendo do modo como o professor participa da atividade junto com os alunos, podem resultar em aprendizagens relacionadas aos conteúdos geométricos. Isso amplia e confirma a ideia de que os recursos didáticos manipuláveis por si só não apresentam ou não são representativos dos conteúdos que se queira ensinar. Além disso, os materiais (madeira, papel, etc) utilizados em sua confecção também podem diferenciar um recurso de outro, permitindo ou impedindo determinadas explorações a partir de tarefas de natureza aberta.

O uso de desenhos como recursos de representação de figuras geométricas, durante as atividades, possibilitou que as professoras participantes percebessem que os registros pautados em desenhos podem dificultar as explorações ou ainda levarem a informações que não se relacionam aos conceitos que se quer representar. Por outro lado, os desenhos são recursos necessários para registrar as explorações realizadas, permitindo a análise, a retomada e a comunicação do processo desenvolvido. Em ambos os casos, a experiência do professor, em contextos formativos, pautada pela reflexão sobre a prática e sobre a própria experiência, pode desencadear a percepção e as decisões dele mesmo em sua ação docente para gerenciar o uso de desenhos, materiais didáticos manipuláveis ou outras formas de representação ou registro, de acordo com seus propósitos de ensino.

As atividades desenvolvidas no grupo foram marcadas simultaneamente pelos modos pessoais de aprender matemática e pelo diálogo entre as participantes, por um ambiente de comunicação de ideias e negociação de significados. Tais atividades, de acordo com o interesse e disponibilidade de tempo das professoras, estenderam-se também para suas atividades fora do grupo. Por outro lado, também foi possível identificar que nem todas as tarefas abertas incidem em explorações-investigações matemáticas. Perante certas situações, é possível que um grupo de pessoas não tenha problemas a apresentar, como ocorreu a partir da tarefa *Montando poliedros*.

Finalmente, as tarefas também foram transformadas tendo em vista a necessidade das professoras em suas salas de aula, como analisado no próximo capítulo.

3 Caminhos para a sala de aula: significação das atividades exploratório-investigativas com os alunos da Educação Básica

Durante os encontros, foram mencionados muitos dos desafios do trabalho cotidiano das professoras, tendo em vista o compromisso de promoverem a aprendizagem de seus alunos dos conteúdos que devem ensinar. Tais necessidades, muitas vezes, eram advindas de situações para as quais elas não tinham respostas que consideravam suficientes. Destas destaco: o trabalho com alunos não-leitores, salas numerosas, avaliações externas, rotina da escola (horários, número de aulas), incômodo com o próprio modo "direto" de ensinar, dentre outros. Nesse contexto, dois elementos favorecem o movimento entre o que fazem e o que desejam fazer: a ideia de que a prática pedagógica não é prescrita de antemão, que para cada sala de aula as demandas são diferentes dependendo das experiências anteriores de seus alunos e das necessidades curriculares postas para aquele dado nível e sua própria curiosidade sobre o que pode acontecer em sala quando eu, professora, modificar minhas ações.

Tais elementos estão relacionados à incerteza inevitável que caracteriza a atividade docente, conforme Schon (1987), citado por Fullan e Hargreaves (2000, p. 35), frente a qual o professor deve tomar decisões: "(. . .) Deixar a descoberta da criança ir adiante ou interferir e direcioná-la. Decisões sobre disciplina, sobre controle da aula, sobre justiça no fazer pedagógico, sobre liberdade da criança *versus* necessidade de intervenção e apoio do professor (. . .)". Além disso, conforme defende Freire (1996, p. 38), "a prática docente crítica envolve um movimento dinâmico, dialético entre o fazer e o pensar sobre o fazer".

Tal movimento é impulsionado pela curiosidade crítica sobre a prática, como já afirmou Freire (1996), fundamental na formação e no exercício do magistério.

Como mencionado anteriormente, durante as atividades do curso de formação, a escolha de realizar atividades com os alunos ficou a critério das professoras participantes. Considero esse aspecto fundamental, pois não se tratava de *testar* tarefas planejadas por mim, mas de problematizar práticas a partir das experiências das professoras, daquilo que elas mesmas percebem, destacam e caracterizam.

Nesse sentido, em nossos encontros foram discutidas atividades feitas em sala de aula a partir da vivência no curso e algumas anteriores que foram levadas para os encontros durante as reflexões, seja por uma proximidade com as explorações-investigações ou com os conteúdos envolvidos nos diálogos. É importante destacar que as atividades narradas ocorridas anteriormente ao curso fazem parte das experiências docentes e podem ter surgido em decorrência de ressignificações que foram produzidas na reflexão sobre sua própria prática. Conforme mencionam Placco e Souza (2006, p. 36), "não fazer referência às histórias de professores é uma lacuna imperdoável na formação. Essas histórias contém pistas importantes, em seus embates e oportunidades, do que fazemos agora, do que nos motiva ou paralisa e das condições com que nos deparamos." As histórias das professoras trazem as lembranças de suas práticas e o modo como elas mesmas se veem na profissão, seja para compreender e optar por uma experiência já ocorrida ou para revelar incômodos e preocupações. De um modo ou de outro, são as lembranças de nós mesmos as linhas que nos conduzem ao que fazemos hoje. Nas palavras de Placco e Souza (2006, p.29 e 31), "A memória filtra, distorce, seleciona e, por vezes, cuida afetivamente melhor de algumas coisas do que de outras. (...) Às vezes, insiste em ver as mesmas coisas em coisas diferentes.(...) Revisitar e refazer o acervo de nossas memórias podem resultar em abordagens distintas, novos pontos de vista, encorajamentos e ousadias.". A reflexão sobre as experiências nos impulsiona, nos movimenta e nos projeta adiante.

Quanto às experiências advindas do período em que os dados dessa pequisa foram constituídos, os motivos presentes na elaboração das tarefas e nas decisões do professor em conduzir suas práticas relacionaram-se ao desafio que as tarefas poderiam oferecer aos seus alunos e à sua própria participação para promover a participação das crianças, em analisar como estas se envolviam e os resultados obtidos.

Conforme mencionam Nacarato, Mengali e Passos (2009, p. 47-48), a criação de um ambiente de aprendizagem motivador e estimulante pressupõe momentos cujas decisões para sua criação e manutenção são do professor, não podendo ser outorgados a qualquer autoridade ou profissional que esteja fora da sala de aula. Estas autoras, mesmo referindo-se à resolução de problemas, mencionam a participação fundamental do professor no antes, no durante e no depois da apresentação da tarefa aos seus alunos.

> O primeiro momento pressupõe que o professor se assegure de que a situação a ser proposta aos alunos seja ao mesmo tempo desafiadora, mas não gere a frustração da incapacidade de resolvê-la. O professor, pelo contato constante com seus alunos, tem condições de avaliar que situações propor e em que momento de seu planejamento elas podem ser propostas. No momento da resolução da situação — o durante —, o professor acompanha o trabalho dos alunos e avalia para si se a escolha foi ou não adequada ao contexto.

Quanto ao último momento, com referência às palavras de Van de Walle em Onuchic e Allevato (2004), Nacarato, Mengali e Passos (2009), destacam a importância e necessidade do professor requisitar que os alunos justifiquem e avaliem seus resultados e métodos, sem ser o validador ou corretor dos resultados dos educandos. Neste último momento, o professor pode aproveitar para formular novos conteúdos e novos conceitos.

Tanto quanto nos contextos de resolução de problemas estudados pelas pesquisadoras anteriormente referidas quanto nas atividades aqui narradas, as professoras participantes, protagonistas de seu trabalho profissional, por compromisso e interesse, tinham dúvidas e ao mesmo tempo, tomavam decisões que determinaram o que foi realizado em sala de aula. Conforme Fullan e Hargreaves (2000, p. 35), "os propósitos dos professores motivam seu fazer" e com isso, retomo o que caracteriza fundamentalmente a aprendizagem docente ao longo da carreira: a direção dada por eles mesmos ao movimento da prática de hoje para aquela que pretende desenvolver amanhã.

Em busca de identificar e analisar as potencialidades formativas da exploração-investigação matemática para os conhecimentos e práticas das professoras participantes, neste capítulo, apresento e analiso ressonâncias das experiências em sala de aula das professoras advindas das atividades exploratório-investigativas e das reflexões sobre a prática reveladas em suas narrativas orais ou escritas. Isso reafirma a narrativa como um instrumento de investigação, que permite acesso às representações dos conhecimentos e práticas dos professores; um modo de aproximar-me das perspectivas das participantes.

No que diz respeito às atividades desenvolvidas em sala de aula, temos as seções: **Seção 3.1 — Da exploração-investigação para problemas abertos: pavimentando retângulos com as planificações do cubo.**, na qual analiso as narrativas de Andréa sobre um problema aberto trabalhado com seus alunos. Em seguida, apresento uma das atividades que desenvolvemos na sala de Natália — **Seção 3.2 —** ***São quadrados?*** — que permitiu problematizar práticas e tornou-se cenário para aprender e ensinar argumentações nos anos iniciais do Ensino Fundamental, incidindo em aprendizagens para os alunos no que diz respeito aos conteúdos envolvidos e à dinâmica investigativa e para nós, professoras, no tocante a como os alunos podem se envolver com tarefas abertas e o papel do professor durante tais atividades. Nesse caso, as interpretações se deram na análise das revelações de Natália e das minhas próprias representações das aulas de que participei. A **Seção 3.3 — Dos quadrados para os retângulos: ampliando o debate e redefinindo posturas em** ***São retângulos?*** e a **Seção 3.4 —** ***São triângulos?*****: da expectativa do conhecido para novas surpresas** estabeleceram possibilidades da exploração-investigação nas aulas dos anos iniciais e revelaram novas surpresas para todas nós do grupo. Em seguida (**Seção 3.5 — Da participação no grupo para a atividade docente: refletindo sobre suas próprias ações, compartilhando experiências e superando expectativas**), apresento nossas discussões sobre a importância de o professor ir além de sua própria expectativa em relação aos seus alunos. Finalmente, na **Seção 3.6 — Da exploração-investigação em matemática para as posturas investigativas em outros componentes curriculares: o estabelecimento de um ambiente de comunicação e negociação de significados em sala de aula** — analiso nossas discussões sobre a exporação-investigação em matemática e suas relações com as posturas investigativas em outros componentes curriculares possíveis e necessárias na/para a comunicação e a negociação de significados em sala de aula.

3.1 Da exploração-investigação para problemas abertos: pavimentando retângulos com as planificações do cubo

Tendo em vista a atividade *Juntando quadrados...* (analisada na Seção 2.1), Andréa trouxe parte de sua experiência docente (realizada antes de sua participação no grupo) para compartilhar com as demais professoras, por meio de uma narrativa, acompanhada por fotos. A atividade constituiu-se em solicitar que os alunos, de posse de um cubo feito em cartolina, o desmontassem, retirando-se os durex que fixavam as arestas. Conforme seus alunos o faziam, esta professora os acompanhava, destacando e questionando o que já tinham feito, até que todas as faces estivessem coplanares, tendo diversas planificações diferentes na sala de aula. Depois eles contornavam aquela planificação em uma folha de sulfite e desenhavam as arestas internas para remontarem o cubo, cujas novas planificações foram por ela recortadas para que as correções necessárias fossem feitas. Andréa mostrou que é preciso o professor estar atento à cada etapa da atividade de seus alunos, estar junto com eles, ora orientando-os, ora apoiando-os e destacou suas ações para promover a atividade deles, bem como os modos que estes interagiram na sala de aula.

Indo ao encontro dessa experiência narrada por Andréa, após a atividade *Riscando cubos e economizando papel* esta professora ficou curiosa sobre como seus alunos resolveriam o problema de pavimentar um retângulo com planificações do cubo, tendo em vista que poderiam ter múltiplas possibilidades de respostas ou ainda nenhuma. Assim, Andréa apresentou um problema aberto para suas crianças do primeiro ano do Ensino Fundamental.

Andréa, ao propor a tarefa para seus alunos, apontou que o desconhecimento frente ao que eles poderiam fazer foi um de seus maiores desafios em contraste, ao ser professora como aprendeu, ao ensinar sempre pelo caminho que considera mais fácil, sem previsibilidade.

387. *A. Eu gosto de desafio. Não sei se vai dar certo. Fala isso perto de mim, que eu vou tentar ver. Eu posso chegar a conclusão de que não é, que não deu, mas você pode ter certeza que eu tentei.*
388. *A. Tem muita gente que tem medo de começar.*
389. *A. Então é mais fácil você fazer sempre o que estava acostumado, que você já vivenciou dentro da escola, sendo aluno, e repetir. Você fala: ah, mas eu aprendi. . .*
390. *A. É mais fácil eu falar: aprendi com a [nome de uma cartilha de alfabetização]. É mais fácil.*

Para Gauthier et al. (1998), a tradição pedagógica é uma das fontes do conhecimento do professor por formar as representações que temos de escola e de ensino — referências durante a atividade docente. Nesse caso, as oportunidades de formação docente tanto em nível de gradução como também ao longo da carreira podem modificar tais representações, ou ainda, dependendo de como estas ocorrerem, reafirmarem ainda mais. No caso de Andréa, suas experiências anteriores e a curiosidade sobre a prática parecem distanciá-la de um trabalho pautado na tradição pedagógica. Além disso, ela disse que sabe da necessidade de se trabalhar, em suas aulas, as figuras geométricas não-planas com seus alunos, em decorrência de leituras e de suas experiências em um colégio da rede privada. Andréa queria que seus alunos percebessem que o cubo tem seis faces, pelo manuseio de representações do objeto e não pela memorização de um dado desenho.

Andréa planejou parte de sua aula durante a atividade *Riscando cubos e economizando papel*. Ela expôs suas reflexões, entretanto as demais participantes não fizeram acréscimos ou questionamentos. A tarefa que Andréa planejou apresentar era um problema aberto: "Como pavimentar um retângulo com as planificações do cubo?", para o qual ela estava curiosa em ver os resultados que seus alunos poderiam apresentar. Como observa Freire (1996), a curiosidade sobre a prática docente é fundamental para o professor e sua formação.

Inicialmente, ela apresentou a proposta por meio de um título: "Quebra-cabeça de planificações do cubo" com o enunciado oral. Em conversa posterior com Andréa, questionando-a se a atividade se encerraria em montar um quebra cabeça. Esta professora afirmou que também queria que seus alunos trabalhassem em grupos, fizessem a contagem do número de peças utilizadas e que percebessem a necessidade de rotacionar uma planificação para justapô-la com outra. Isso também ficou confirmado em sua narrativa escrita:

391. *A. Eles deveriam cobrir a mesa retangular com as planificações disponíveis. Tinham mais ou menos 6 planificações iguais de cada uma das 11 que os grupos já tinham descoberto ao desmontar os cubos na atividade anterior.*

392. *A. As regras: deixar o menor número de espaço descoberto usando o mesmo tipo de planificação ou não. Se fosse o caso eles poderiam trocar de peça com outra equipe.*

393. *A. Como eu já tinha observado no curso os "ensaios" das outras professoras e tinha concluído que as planificações do cubo não formariam de forma alguma um retângulo, esperei para ver a reação de meus alunos.*

Durante sua narrativa oral, ao apresentar as fotos que tirou, Andréa destacou aos dois grupos de alunos que foram formados: de meninos e de meninas. Ela afirmou que as meninas não se incomodaram em ter espaços não preenchidos por quadrados nas bordas dos retângulos (representados por suas mesas escolares) enquanto os meninos recomeçaram a atividade várias vezes por não admitirem espaços entre as planificações. Para os alunos dela, parecia não ser possível que um problema não tivesse resposta enquanto que as alunas não se importavam se a resposta não era aquela que elas esperavam.

394. *A. Aqui, um buraco, dois buracos. (Mostrando as fotos).*
395. *A. Eles contaram.*
396. *A. Eles não tinham paciência de modificar as peças. As meninas não, as meninas foram e deixavam como dava, modificando sempre.*
397. *A. As meninas sabiam quantas peças elas usaram, elas usaram dezoito peças.*
398. *A. Olha a discussão desses meninos! Eles planejavam antes de por as peças (mostrando as fotos de um grupo de alunos).*
399. *A. Ele (apontando para um aluno da foto) falava para o outro: pensa bem, conta.*
400. *A. Bateu o sinal do recreio e eles estavam fazendo e não queriam sair.*

Por outro lado, Andréa também trouxe em sua narrativa a desistência de uma das crianças ao perceber que o problema poderia não ter resposta. Esta professora comparou este incômodo ao seu próprio sentimento perante a atividade (fala 403). Gisele destacou (fala 401) que é importante que os alunos aprendam que nem tudo dá certo, que nem todos os problemas têm respostas.

401. *G. Também é uma aprendizagem conviver com coisas que não vão dar certo.*
402. *A. Eles falavam, tia só sobrou isso aqui. Então, tudo bem perfeito, entendeu, porque eu disse que queria o menor número de espaços.*
403. *A. Só que eu sei que alguns tiveram o mesmo desespero que eu, porque não vai.*
404. *C. Dá um desespero, porque não vai.*
405. *A. E é desafiante, porque você fala assim: como não?*
406. *A. É tudo quadrado. Então, a primeira ideia que bate: é quadradinho, quadradinho com quadradinho... Vai encaixar.*

407. A. Mas chega uma hora que você vê que não vai.

408. A. É a mania que a gente tem de ficar tudo certinho.

409. A. É tudo certinho, não tem impossibilidade.

410. A. Você tem uma visão, mas o resultado não é sempre aquele que você espera. Só se você, se você dirigir.

A espera (falas 408 e 409) por uma resposta que "dê certo" pode estar pautada em suas experiências anteriores com atividades matemáticas, tanto dos alunos quanto de nós, adultas, professoras, para as quais todos os problemas sempre têm respostas e, muitas vezes, únicas. Nem sempre as atividades matemáticas com as quais nos deparamos na escola são acompanhadas da incerteza, se vão ou não "dar certo". Chegar a uma resposta que seja: "isso é impossível" não parece ocorrer com frequência em atividades matemáticas escolares. Sendo que, quando partimos de atividades exploratório-investigativas ou problemas abertos, para além dos conteúdos envolvidos esta é também uma aprendizagem para os alunos e para seus professores.

Andréa compartilhou conosco que ela esperava que os alunos deixariam espaços entre as planificações (falas 411 a 412).

411. *A. Só que eu não saberia falar se alguém ia realmente conseguir. Eu achava que não ia conseguir, eu tinha certeza que eles iam deixar buraco no meio.*

412. A. Ficaram estudando. A preocupação deles (meninos) era não deixar nenhum [espaço em branco] no meio. E contaram.

413. A. Teve criança que falou assim: ela descobriu! Olha, sobraram três espaços no meio!

414. A. Porque tinha hora que não fechava.

415. A. E quando eu percebia que sobrava, eu falava assim: olhem, tá deixando espaço, tem como modificar [rotacionar] a peça? Eu ficava vendo e perguntando. Daí eles começam: Vira! Vai, faz assim!

416. A. Sabe, eu achei que eles não iam chegar nisso. Eu achei que não ia sair isso não, que iam parar no primeiro, do jeito que desse.

417. A. Eu acho assim: a gente pensa muito por baixo.

Apesar das meninas terem posturas diferentes do que Andréa esperava, esta professora, já sabendo da impossibilidade(comprovada no grupo) de se pavimentar retângulos com planificações do cubo, aproximou-se dos significados dados pelas crianças ao problema e os auxiliou, de modo que eles pudessem continuar a atividade. Ela se surpreendeu com o envolvimento das crianças (fala 417).

Para apresentar os resultados, as duas equipes de alunos fizeram as planificações sobre uma das mesas da sala e a outra equipe pôde observar o que foi feito. Como a apresentação de Andréa ocorreu pela narrativa escrita e pela narrativa oral, Gisele reafirmou (falas 418 a 420) a importância de o professor registrar suas práticas.

> 418. *G. Eu acho interessante que em muitos momentos a gente já faz isso [questionamentos], no nosso dia-a-dia, e a gente nem percebe que tem uma conduta de questionamento. (...) Por isso que o relato é importante.*
>
> *419. G. Eu sei que sou indisciplinada, mas é completamente diferente quando eu registro no meu caderno o que eu dei e acabou e ponto final de quando eu faço uma atividade e eu tenho que fazer um relato. É muito diferente.*
>
> *420. G. Porque quando eu faço o relato eu percebo coisas que eu não perceberia. Eu percebo coisas que eu fiz e que se eu não escrevesse no relato eu não teria consciência, muitas vezes.*

A escrita das narrativas, mesmo que solicitadas por mim, ocorria pelo desejo de escrita das professoras combinado com o tempo disponível e com a concordância de que situação desejada deveria ser registrada. No caso de Andréa, o registro de suas práticas já era um hábito, pelo qual ela organizava as representações de suas experiências em um caderno. Nesse sentido, conforme argumentam Placco e Souza (2006),

> A escrita tem o poder de trazer de novo o que, devido à ação do tempo, ficou esquecido em algum lugar da memória. Conserva e aponta sentidos e sensações que, reencontrados, nos tornam leitores de nós mesmos, mostrando quem éramos naquele tempo e lugar. Recuperar o passado por meio da escrita requer um exercício presente e intencional de registrar hoje o vivido e o pensado. Essa intencionalidade de registrar e escrever para não esquecer implica uma organização do pensamento e um comprometimento com a formalização de desejos, expectativas e experiências que fornecem elementos para a continuidade da história. (p. 27)

A narrativa pode permitir a aproximação entre as práticas existentes e as desejadas, pela tomada de consciência do professor do que ele mesmo já faz acompanhado da manifestação do que ele deseja. Assim, as potencialidades, as vantagens, as dificuldades, os obstáculos e até o alcance da exploração-investigação matemática na prática docente somente poderão ser percebidas pelo próprio professor quando ele experimentar e refletir sobre sua própria experiência ou de seus colegas. A construção de conhecimentos pelos próprios professores a partir de sua ousadia em experimentar a exploração-investigação matemática em suas aulas, pode de fato, torná-las presente no ensino de Matemática em todos os níveis.

Em atividades exploratório-investigativas, devemos estar atentos à intencionalidade de nossas práticas em dois sentidos: no que diz respeito aos conteúdos envolvidos e à própria dinâmica que se pretende que os alunos aprendam. Concordo com Goldenberg (1999) que uma das funções da investigação na aula de matemática é ensinar a investigar, sendo as outras três "explorar, descobrir, pôr em questão". Investigar não se direciona apenas a aprender um conteúdo matemático, mas primeiramente a aprender a investigar, a questionar, a conviver com uma diversidade de respostas ou com nenhuma delas, tanto para os alunos quanto para o professor que questiona sua própria prática.

3.2 *São quadrados?*

Nesta Seção, dividida em outras três subseções, apresento a análise de uma atividade desenvolvida conjuntamente por mim e por Natália, em sua classe, na qual nós duas atuamos como professoras. Essa foi uma opção em comum acordo com Natália, uma vez que, para a socialização no grupo, a presença de nós duas facilitaria o registro da experiência. Do mesmo modo que Andréa, Natália mostrou-se curiosa sobre o envolvimento de seus alunos e avistava diversos conteúdos que precisavam ser ensinados.

3.2.1 Delineando a tarefa: problematizando práticas e aprendizagens

A aula, na sala de Natália, teve seus primórdios durante a atividade *Investigando quadrados com o tangram*. Após o encontro em que investigamos parte dos quadrados que podem ser montados com peças do tangram, Natália apresentou ao grupo ideias de seu plano de aula delineado a partir de reflexões de sua prática.

421. *N. Eu pensei no plano de aula, num primeiro momento, dar as*

peças [do tangram] para eles e deixá-los livres.

422. *N. Daí eles formariam [figuras], contornariam os lados e daí a gente ia expor para a sala; cada um o que fez.*

423. *N. Eu pensei de perguntar para eles quantos triângulos (menores) eles iam precisar para cobrir todo o quadrado do tangram.*

424. *N. Eu pediria para eles fazerem uma estimativa, sem o material. Depois com as peças; para conferirem com o material se era o que eles tinham dito.*

425. *N. Foi isso que eu pensei num primeiro momento.*

426. *P. Nesse momento você estava pensando em áreas.*
(. . .)

427. *N. Com três peças, para formar o triângulo maior.*

428. *G. Você definiu que tem que ser três peças?*

429. *N. Não, eu encontrei três possibilidades [de formar triângulo com todas as peças do tangram].*

430. *N. Eu vou propor que eles façam o triângulo maior.*

431. *P. Se a gente for montar um quadrado com todas as peças, vimos que não é tão fácil. Se eu falo que quero o triângulo com todas as peças, como será?*

Uma das primeiras necessidades e escolhas de Natália foi dar liberdade e abertura às respostas das crianças independente de uma resposta prévia, esperada por ela (fala 421). Entretanto, num primeiro momento poderíamos entender, "deixá-los livres" (fala 421) como colocar-se na posição de espectador, mas diferentemente disso, Natália demarcou sua participação em questioná-los (fala 423) a partir da exploração inicial.

O planejamento de Natália estava aberto às discussões; ela ainda não tinha definido os conteúdos e exatamente quais eram seus propósitos com aquela tarefa que rascunhava. No encontro, já tínhamos feito quadrados com as peças do tangram e suas palavras evidenciam aspectos da atividades realizadas por nós no grupo (fala 429). Com a preocupação de levá-la a refletir sobre o nível de dificuldade da tarefa para os alunos, questionei-a (fala 431) tendo como referência nossa atividade.

Natália, naquele momento, tinha um "problema" como expressão da tarefa que seria apresentada a seus alunos, cujo enunciado era bem claro: formar triângulos com todas as peças do tangram. A abertura da atividade centrava-se na possibilidade de não ter apenas uma resposta esperada; como ela mesma afirmou (fala 429), já encontrara três possibilidades. As reflexões seguiram para os modos de apresentar a tarefa de modo que pudesse ser desafiadora, estivesse ao alcance das experiências anteriores das crianças e em acordo com seus objetivos. Assim, para contornar meu questionamento (fala 431) sobre a dificuldade do problema, Natália mencionou (fala 432) que poderia apresentar o contorno dos triângulos esperados como uma estratégia para orientar os alunos. Diante disso, Gisele e eu ressalvamos que a tarefa poderia ser modificada de acordo com as necessidades das crianças no decorrer da atividade (falas 437 e 438).

432. *N. É mais fácil dar o contorno?*
433. *P. Num primeiro momento, dependendo da turma é, é mais fácil.*
434. *N. Mas eu posso tentar primeiro sem, né?*
435. *P. Sim. E se você observar que eles não conseguem, você auxilia, pode até ser com o contorno.*
436. *G. Algumas crianças às vezes não conseguem. E aí para elas fica uma atividade quase impossível.*
437. *G. Eu acho que você dá um e deixa em aberto os outros, dependendo da resposta deles.*
438. *P. Você também pode começar a atividade aberta e ir afunilando, se for o caso, de acordo com as respostas ou necessidades das crianças.*

O problema proposto, apesar de ter várias respostas, permite explorações, mas, ao final depende de um conjunto esperado de situações. Para alguns alunos, pode ser desafiador, enquanto para outros, podem ocorrer dificuldades com as quais eles não estão acostumados, conforme mencionou Gisele (fala 436).

A partir das ideias acima, relacionadas à preparação de suas aulas, no encontro posterior, Natália narrou oralmente o que fez em sala de aula para conhecer o que seus alunos já sabiam sobre figuras geométricas planas, uma vez que, com isso, ela demonstrou que o ponto de partida deveria ser o conhecimento anterior de seus alunos e não somente sua curiosidade.

439. *N. Eu fiz com eles uma espécie de sondagem sobre o que eles sabiam das figuras geométricas.*
440. *P. O que você descobriu?*
441. *N. Que eles confundiram muito o quadrado com o retângulo.*
442. *N. Na hora de me explicar as características do quadrado e do retângulo, eles não conseguiam.*

443. *N. Dizer que o quadrado tem quatro lados, que os lados são iguais.*
444. *P. Como foi a atividade que você fez com eles?*
445. *N. Eles têm caderno quadriculado. Eu só pedi para eles desenharem as formas geométricas para mim. Depois pedi para eles escreverem quais eram as características de cada uma.*

Com isso, Natália decidiu adiar (fala 446) a montagem de figuras geométricas planas com o tangram para discutir com os alunos o que são as figuras que ela pretendia que eles fizessem.

446. *N. Eu acho que é interessante eles fazerem o tangram depois.*
447. *N. Então, preciso discutir com eles as características do quadrado ao invés de levar para eles quadrados...*
448. *P. Cada um tinha um exemplo e você queria que eles falassem as características de cada um, não é? O que eu pensei é que você...*
449. *P. Pense que eles estão com o quadriculado e façam os quadrados. Depois você faz uma exposição desses quadrados.*
450. *P. Por exemplo, pelo que você disse, eu não imagino que eles façam quadrados inclinados (com lados não apoiados nem paralelos às linhas do papel quadriculado).*
451. *P. Na hora de expor, você tem os quadrados que eles fizeram, e seus exemplos podem aparecer quando precisar.*
452. *N. Isso é fácil porque eu não dependo de material nenhum, eu já tenho tudo. Continua o que eu já fiz.*

A tarefa foi construída durante a reflexão de Natália (fala 447). De suas palavras, também posso destacar a intenção de não ser expositiva para seus alunos (fala 447): "ao invés de levar para eles quadrados". No ensino de geometria, "levar quadrados" e "mostrar quadrados" pode relacionar-se ao desenho — uma representação do conceito — e não ao conceito propriamente dito. Como mencionado por Pais (1996, 2006), os desenhos são recursos e o ensino não deve ser reduzido a casos específicos para que os alunos se apropriem dos exemplos dos professores ou materiais didáticos como pequenas fotografias de um objeto pelas quais não é possível entender quais variações pode-se ter na figura para que esta represente o mesmo conceito. Conforme Nacarato e Passos (2003), os alunos não têm clara a ideia de que os desenhos são representações do conceito e podem tomá-lo como o próprio elemento geométrico.

Frente a isso é necessário que: (a) as aulas contemplem o conceito de quadrado (e demais figuras geométricas) e não fiquem restritas às suas representações, sejam nos objetos ou nos desenhos; (b) as representações utilizadas por alunos e professores sejam objeto de diálogo e análise em sala de aula e não apenas ilustrações; (c) aos alunos sejam dadas oportunidades de fazerem representações para seus colegas e professor e não apenas sejam receptores e registradores (por escrito, em seu caderno, sempre para si mesmo) das representações do professor ou de livros e apostilas.

Enquanto discutíamos a tarefa, percebi que Cidinha e Léia faziam quadrados no papel quadriculado. Questionei-as (fala 453) se seria possível fazê-los de modo que os lados não estivessem apoiados sobre as linhas do quadriculado. Num primeiro momento, as professoras pensaram que não seria possível, mas Léia (fala 458) retificou em seguida, lembrando-se de uma atividade desenvolvida em sua classe. A partir disso, a expectativa foi de que os alunos só fariam quadrados apoiados nas linhas do quadriculado. Com essas reflexões, Natália sintetizou (fala 464) a tarefa que poderia favorecer a exploração dos alunos.

> 453. *P. Tem como construir quadrado que não tenha o lado apoiado nas linhas do quadriculado, nessas linhas que já estão desenhadas no quadriculado?*
> 454. *L. Não.*
> 455. *P. Não.*
> 456. *L. Não.*
> 457. *P. Então tentem, vamos ver. Se não tiver, tudo bem. É legal você (para Léia) supor que não.*
> 458. *L. Ah, tem sim, lembrei da bandeira[1].*
> 459. *N. Porque é muito mais simples seguir a linha [do papel quadriculado], já sabe o que vai sair. Que vai sair corretamente.*
> 460. *P. Pensando nas crianças, será que eles vão fazer quadrados assim?*
> 461. *N. Fazer assim não.*
> 462. *N. Fazer assim eles não vão fazer.*
> 463. *N. Não vão fazer.*
> 464. *N. Então a ideia é pedir para eles fazerem alguns quadrados...*
> 465. *N. E discutir o que foi feito. Para eles explicarem.*

[1] Referindo-se a uma atividade que fizemos na aula de Léia, no 2^o ano do Ensino Fundamental. Nessa atividade, os alunos fizeram representações da bandeira do Brasil a partir das formas geométricas planas que estavam recortadas em papel dobradura, conforme Léia tinha o hábito de fazer. Entretanto, eles não seguiram orientações prontas, o invés disso, tiveram que discutir e argumentar sobre como colar cada uma das partes, criando estratégias para determinar as medianas das figuras geométricas (retângulo e losango) e diâmetros do círculo. Léia, pelos seus gestos com as mãos, lembrava-se do losango da bandeira.

O planejamento da aula de Natália iniciou-se com o propósito de favorecer a multiplicidade de respostas para um problema que ela apresentaria a seus alunos, as quais seriam socializadas com todos eles. Entretanto, percebendo que o problema poderia ser desafiador para alguns alunos e com nível de dificuldade indesejado para outros, tendo como referência a própria atividade desenvolvida com as professoras, Natália buscou identificar primeiramente os conhecimentos prévios de seus alunos. Desse modo, ao problematizar suas práticas, Natália delimitou que o foco de sua aula seria conteúdos de geometria, priorizando-se uma dinâmica que permitisse que seus alunos se posicionassem, discutissem e socializassem seus trabalhos.

3.2.2 A exploração-investigação matemática na sala de aula: cenários para argumentações no ensino fundamental

Planejamos a atividade e combinamos de realizá-la e de escrevermos nossas narrativas individuais com as reflexões compartilhadas no grupo. Por fim, elaborarmos uma narrativa conjunta e comunicá-la em um evento da área. Assim o fizemos e no presente texto trago diversos aspectos de nossa narrativa apresentada no X Encontro Paulista de Educação Matemática. Naquele texto[2], tivemos como questão central "Quais relações são percebidas pelas professoras entre suas intervenções e as atividades dos alunos que possibilitaram o desenvolvimento do processo exploratório-investigativo?".

Após nosso planejamento, encontrei Natália em sua sala de aula, na data combinada. Logo que adentrei à classe, apresentei-me[3] e um dos alunos disse para nós: "Vai ter prova?". Ao explicarmos que não, ele ainda acrescentou: "Vale nota?". Finalmente, expus que não valeria nota, mas que as aprendizagens lhes serviriam para futuras avaliações.

Nesse oportunidade, Natália e eu apresentamos às crianças os motivos que nos levaram a estar juntas, dizendo que "como a Natália está fazendo um curso comigo, nós combinamos de fazer as atividades juntas para facilitar quando formos apresentá-la para as outras professoras do curso". Acrescentamos que íamos tirar fotografias das atividades

[2]LAMONATO, M.; CAPASSO, N. S. Narrativa a quatro mãos: olhares compartilhados sobre aulas exploratório-investigativas com alunos do 4º ano. Anais do X Encontro Paulista de Educação Matemática: X EPEM. São Carlos: SBEM/SBEM-SP, 2010, pp.1-12. (ISBN 978-85-98092-12-6)

[3]Durante as aulas desenvolvidas na sala de Natália não foi possível realizar videogravações. Temos como material de registro dos dados: nossas narrativas, e-mails, anotações, registros dos alunos e fotografias.

deles, mas que eles não precisariam se preocupar porque a gente não ia pegar o rosto deles; isso ficaria para as fotos finais, que guardaríamos de recordação.

Essa conversa inicial, para nós foi importante, pois conforme defende Skovsmose (2000), ao referir-se ao contrato didático como presente na literatura francesa, reafirma a necessidade de harmonia "reconhecida e aceita tanto pelo professor quanto pelos alunos" (p. 16).

Os alunos organizaram-se, com nosso auxílio, em cinco grupos de três alunos e mais um grupo com quatro alunos. Cada grupo tinha em mãos uma folha de papel quadriculado (com quadrados de 1 cm de lado) e seus próprios materiais escolares (lápis, régua, borracha, etc). Segundo Natália, as crianças não tinham experiências anteriores conhecidas por ela com a exploração-investigação matemática, entretanto, eram participativas no diálogo durante as atividades em sala de aula.

Conforme mencionei anteriormente, tivemos como referência na preparação da tarefa a última atividade que Natália desenvolveu com os alunos. Nesse novo momento, não queríamos apresentar uma atividade diretiva, por outro lado, pretendíamos permitir que os alunos atuassem com liberdade e autonomia. Conforme destaca Freire (1996, p. 61), o respeito à autonomia do educando é uma das exigências do ensinar que deve ser coerente com a prática docente do professor: "Saber que devo respeito à autonomia e à identidade do educando exige de mim uma prática em tudo coerente com esse saber.". Como em um ciclo, o respeito à autonomia do aluno também se pauta na autonomia do professor, em escolher e planejar atividades que vão ao encontro das necessidades reais de sua sala de aula.

A tarefa, escrita na lousa, foi: *Em uma página de papel quadriculado, faça três quadrados diferentes.* Optamos por um enunciado relativamente curto, pautando-nos que a atividade investigativa não é resguardada pela tarefa, mas conforme mencionei em Lamonato (2007), se desenvolve pelas demais etapas do processo exploratório-investigativo se os alunos tiverem apoio e acompanhamento do professor. Durante a atividade, visitamos todos os grupos conversando com os alunos para entender o que eles estavam fazendo e colocar questões que pudessem levá-los a refletir e ampliar seus resultados. Em diversos momentos nós também nos encontrávamos e conversávamos com as crianças ou ainda mostrávamos nossos achados uma para a outra. Para as crianças, atuamos como *profes-*

soras. Quanto à minha participação na aula, Natália mencionou em sua narrativa escrita que

> 466. *N. O fato de estarmos em duas, nos possibilitou estar mais presentes nos grupos, permitindo que não perdêssemos as descobertas e discussões que as crianças estavam tendo. Foi muito importante também essa "parceria" na hora da socialização das experiências com a turma toda, pois a experiência da Maiza me ensinou, me fez crescer como profissional, me mostrou a importância de não me antecipar às crianças, e sim fazer questionamentos que as levassem a pensar nas situações expostas.*

Pelas palavras de Natália, sua inserção no grupo e nossa parceria no desenvolvimento de atividades em sua sala, pelas intervenções que realizei, contribuiram para suas aprendizagens. Nesse sentido, destaco de Gama (2007) a contribuição de um grupo colaborativo para a formação de professores iniciantes (a referida pesquisa tratou de professores de Matemática) na formação de uma postura investigativa da própria prática que provoca aperfeiçoamento e socialização docente, pela interlocução com colegas de confiança que os ajudem a desenvolver estranhamentos e aprendizagens.

Em cada grupo, os alunos fizeram seus quadrados em uma mesma folha de papel. A primeira preocupação de dois grupos de alunos foi entender o que seriam "quadrados diferentes", mas percebemos que eles de fato entenderam que era um quadrado com medidas e/ou posição diferentes de um outro já feito por um colega do mesmo grupo. Essa nossa preocupação deu-se porque, logo no primeiro grupo, nos deparamos com dois quadrados cujos lados não estavam sobre as linhas do quadriculado.

Durante nossas discussões no grupo com as professoras, o quadrado com os lados não apoiados nas linhas do quadriculado não era esperado (fala 467), conforme resposta de Gisele e de Cidinha (falas 468 e 469) que se juntaram às nossas expectativas anteriores (falas 461 a 463). Frente a isso, Cidinha reafirmou que o professor pode se surpreender com as respostas de seus alunos (fala 471), tendo como referência uma atividade feita anteriormente com suas crianças[4].

> 467. *P. As crianças fariam um quadrado assim, inclinado? (com os lados não paralelos às bordas do papel e não apoiados nas linhas do quadriculado)*

[4]Em decorrência das experiências no grupo, Cidinha fez uma atividade na qual os alunos investigaram retângulos que podem ser feitos com as peças do tangram.

468. *G. Acho que não.*

469. *C. Só mandando fazer.*

470. *P. Pois eles [alunos da Natália] fizeram!*

471. *C. Eu não te falei, lá [referindo-se à sua própria sala de aula] eu achei que não ia e saiu.*

472. *G. Mas eles conseguiram medir certinho?*

473. *P. Sim, eles usaram réguas.*

Para Natália, houve uma surpresa quando ela se deparou com o grupo que fez o quadrado fora das linhas do quadriculado. De sua narrativa escrita destaco que

474. *N. O grupo que fez os quadrados não apoiados nas linhas do quadriculado me surpreendeu, o esperado era que todos aproveitassem o quadriculado para fazerem os quadrados. Na minha visão, era o mais óbvio e fácil a ser feito.*

475. *N. Isso me mostrou que eles nem sempre vão pelo caminho mais fácil, mais óbvio, que não tenho controle sobre tudo o que planejo, que não posso prever todas as situações que possam surgir em sala de aula, que os alunos são capazes de pensar e agir de forma inesperada.*

A abertura da tarefa permitiu que as crianças mobilizassem seus conhecimentos sobre o conceito de quadrado, pois estavam procurando construir um quadrilátero que tivesse os lados congruentes, mesmo que ainda não tivessem como explicitar preocupações quanto aos ângulos internos. Os exemplos criados pelos alunos levam-nos a reforçar a importância de não nos preocuparmos excessivamente com o ensino de representações do professor ou livro didático para os alunos, em mão única. Quando os alunos são chamados a representar e a mobilizar seus conhecimentos, estes nos fornecem elementos ricos para nossa intervenção, colocam-nos na zona de risco conforme defende Skovsmose (2000) com base nos trabalhos de Penteado. A exploração de um cenário, para o referido pesquisador, ou seja, quando os alunos estão investigando e desenvolvendo experimentações em matemática, "o professor não pode prever que questões vão aparecer" (p. 17), o professor deixa de ter controle sobre a atividade de seus alunos.

A atividade investigativa para os alunos envolve uma mudança no poder do professor que "deixa de ter o controle sobre as respostas, sobre os métodos aplicados pelos alunos e sobre a escolha dos conteúdos de cada aula" (ERNEST, 1996, p. 31). Ou ainda, conforme afirmou Freire em seu diálogo com Faundez: "A curiosidade do estudante às vezes pode abalar a certeza do professor. (...) Por outro lado, a pergunta que o aluno, livre para fazê-la, faz sobre um tema, pode colocar ao professor um ângulo diferente, do qual lhe será possível aprofundar mais tarde uma reflexão mais crítica." (FREIRE; FAUNDEZ, 1985, p. 44).

Outra surpresa deu-se quando os alunos não utilizaram o papel quadriculado como referência de medida, mas recorriam à régua. Nesse caso, em um dos grupos evidenciamos que as crianças utilizavam a régua incorretamente. Nossa intervenção só foi possível porque acompanhamos sua atividade e por ouvir deles o que estavam fazendo, durante o diálogo que mantivemos nos grupos. Como mencionamos em nossa narrativa, se tivéssemos nosso olhar apenas nos resultados finais, poderíamos ter desperdiçado uma valiosa oportunidade de *ensinar*. Para Natália,

> 476. *N. Como os alunos estavam no 4º ano e já tinham familiaridade com a régua, eu imaginava que já era um conhecimento que eles tivessem. Foi uma descoberta perceber que eles não faziam uso correto da régua. Por estarmos atentas e presentes no grupo foi possível intervir imediatamente ensinando o uso correto da régua para as crianças.*

Após todos os grupos terem feito seus quadrados na folha de papel quadriculado, estas foram coladas na lousa por nós, com a ajuda dos alunos que indicaram em qual posição cada uma deveria ser afixada. Havia dezenove desenhos distribuídos em seis folhas. A orientação da folha (retrato ou paisagem) ficou a critério dos alunos, sendo que em um dos casos, houve modificação durante as discussões, onde a posição de uma folha foi alterada, ficando com as bordas não paralelas às da lousa de modo que os alunos pudessem debater sobre a posição de algumas das figuras.

As discussões iniciaram quando pedimos para o primeiro grupo explicar o que fez. Havia um retângulo não-quadrado identificado por um dos alunos ao questionar quem o tinha feito. Com isso, foi possível reconhecerem a necessidade de congruência nas medidas dos lados para ser quadrado. Ainda identificaram outro retângulo não-quadrado dentre as figuras feitas. Alguns quadrados, devido ao tamanho e à cor, foram analisados por alunos que se dirigiram à lousa para conferir se eram mesmo quadrados pela medida dos lados. Em nossas reflexões apontamos que os alunos aumentaram o rigor ao analisar os trabalhos de seus colegas, sendo respeitosos, mas não se contentavam com aquilo que "parecia ser" quadrado.

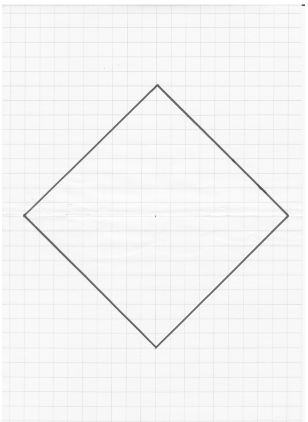
Durante essas discussões, houve a afirmação de alguns alunos de que aqueles quadrados, com os lados não paralelos às bordas da folha e da lousa, não seriam quadrados. Foi nesse momento que seus autores garantiram que as medidas eram corretas e nós reafirmamos que os vimos fazendo as medições. Frente a isso ficou uma dúvida geral sobre como poderia haver figuras com lados de mesma medida que não eram quadrados. Então, questionamos os alunos que se eles estavam dizendo que para ser quadrado tinha que ter os lados de mesma medida e aqueles lá tinham, então porque não seriam quadrados? Um dos alunos argumentou que aqueles quadrados que estavam com os lados não paralelos às bordas[5] pareciam aquelas figuras (losango) da régua geométrica, retirando sua régua para mostrar-nos. Com isso, o impasse se manteve e perguntei se poderíamos mudar a posição da folha na lousa. Ao dizerem que dava na mesma, a Natália colou-a com os lados dos quadrados paralelos às bordas da lousa. Naquele momento, foi unânime que tratava-se de um quadrado.

Natália e eu tínhamos a preocupação de gerenciar as falas dos alunos, para que todos aqueles que quisessem se manifestar tivessem oportunidade e fosse ouvido pelos demais. Natália continuou a discutir com eles se também poderia mudar as demais folhas de posição e os alunos confirmaram que as figuras que já eram quadrados se manteriam quadrados. Enquanto isso, fiz um quadrado em uma página de papel quadriculado com os lados não paralelos às bordas (Figura 3.1a). Ao apresentar para eles, antes de afixá-la na lousa, movimentando a folha, todos concordaram que era quadrado e que a posição não importava. Depois disso, apresentei-lhes um losango não-quadrado, também no quadriculado (Figura 3.1b) e o mesmo aluno que comentou sobre a régua geométrica retornou ao assunto dizendo que aquela figura, "agora", não era quadrado. Ao perguntarmos o porquê, ele fez gestos com as mãos representando os dois lados superiores adjacentes e movimentando as mãos de modo que pudemos perceber que ele se referia ao ângulo agudo formado por aqueles lados. Esse aluno, com as mãos unidas pelos seus dedos médios, fez movimentos indicando aumento na medida do ângulo agudo.

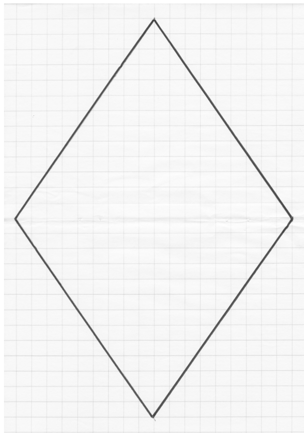
[5]Evidentemente que os alunos não utilizavam as expressões e as palavras que escrevo aqui. Eles indicaram tais quadrados apontando diretamente na lousa ou dizendo "aquele assim", acompanhado de gestos manuais.

Figura 3.1 – Quadrado e losango não-quadrado desenhados em uma página de papel quadriculado.

(a) Quadrado.



(b) Losango não-quadrado.



(Imagens obtidas pela pesquisadora por meio de escaneamento.)

Meses depois, em um encontro com Natália, esta professora afirmou que, em outras oportunidades, ela pôde identificar aprendizagens provenientes dessas aulas em seus alunos.

477. *N. Num dos exercícios da prova da prefeitura, as crianças tinham que identificar entre alguns quadriláteros desenhados numa malha quadriculado, qual deles eram quadrados, e um desses quadrados estava desenhado fora das linhas, como um dos grupos fez na atividade que realizamos. Quando fiz a correção coletiva com eles, logo se lembraram da situação. Para mim, ficou claro que a lembrança veio porque a atividade que realizaram foi significativa, já que não foi uma atividade em que o conteúdo foi apenas repassado a eles, mas sim um conhecimento que, através de discussões, eles construíram e consolidaram.*

Conforme pondera Ernest (1996, p. 31), é importante que as atividades matemáticas em sala de aula tenham características da genuína atividade matemática, marcada pela superação e evolução dos métodos e das construções que ocorrem pela natureza humana e social do conhecimento que se dá num contexto histórico:

> O que é também necessário é que através das experiências na sala de aula se passe uma visão evolutiva ou falibilista da matemática. Isto retira ênfase à unicidade e à correção de respostas e métodos, e em vez disso

> *centra-se no indivíduo* com criador ativo do conhecimento e na *natureza temporária* das suas criações. (meus grifos).

Os primeiros exemplos que tínhamos já não eram suficientes para representar quadrados e as explicações precisavam ser ampliadas. Frente à fala do aluno, fiz que eu não tinha entendido e apoiei quatro canetas (de mesmo comprimento) sobre aquele losango não-quadrado, solicitando-lhe que nos explicasse o que estava falando: "Como assim? Vem mostrar". Quando o aluno se aproximou da lousa, ao pegar as canetas, ele alterou o ângulo e disse: "o quadrado é mais aberto e aí está mais fechado". Com isso, as discussões avançaram para as primeiras noções de ângulos e pudemos concluir com eles que não bastava ter quatro lados de mesma medida, mas que para ser quadrado os ângulos também precisavam ser "retos". Concordo com Ponte e Serrazina (2000) que, durante a comunicação na sala de aula, o professor desempenha um papel de regulação : "Ele precisa saber ouvir com atenção as ideias dos alunos e pedir-lhes que as clarifiquem e justifiquem". (p. 1).

Quando pensamos na exploração-investigação matemática na sala de aula, o papel do professor em ouvir seus alunos e solicitar justificativas pode favorecer a continuidade do processo, pelo aprofundamento de ideias e pela superação de argumentos que pareçam frágeis. Quando compartilhamos nossa narrativa no grupo, Gisele reafirmou (falas 478 a 486) a importância de o aluno vivenciar momentos de debate na sala de aula, nos quais ele possa apresentar e solicitar argumentos. Para muitas crianças, esta é uma atitude que precisa ser aprendida não porque o professor quer que ela se posicione desse modo em momentos específicos, mas porque isso precisa fazer parte das atividades rotineiras da sala de aula.

478. *G. Eu acho interessante é que a criança não vai pensar só nos seus próprios questionamentos. Ele vai ter que ouvir o questionamento do outro e vai ter que pensar: isso que meu amigo tá falando é ou não é?*
479. *G. Tem aquela criança que tem mais dificuldade de se expor, que não fala, não se posiciona, não faz perguntas. Mas quando o outro está questionando e perguntando ele está pensando sobre o assunto. Mesmo que ele não se exponha, isso é importante.*
480. *G. Porque nem sempre a gente consegue que todos falem. Mesmo que você dê oportunidade e pergunte: o que você acha? Há criança que não se sente à vontade para falar.*

481. *G. E quanto mais vezes essas situações acontecem na sala, maiores são as chances dessa criança que não fala e que tem medo ou vergonha. Ela vai se soltando aos poucos e começa a fazer questionamentos. É interessante que ela vai se sentindo segura e percebe que ninguém critica o que ela perguntou. Vão se acostumando com esse processo.*

482. *L. É legal que você ensina a criança a observar.*

483. *G. Hum, hum*

484. *L. Não é gostoso?*

485. *G. Isso é muito bom! Ver além do que está colocado.*

486. *G. Você ensina a criança a ver além.*

O diálogo de Gisele e Léia e as afirmações anteriores de Natália reafirmam que a exploração-investigação matemática na sala de aula possibilita, na prática docente, a experiência do professor em aulas nas quais seus alunos sejam chamados a argumentar e assim permaneçam pelas suas próprias necessidades, tendo o professor como orientador e promotor de tal atividade. Por sua vez, este cenário também favorece ao professor condições para conhecer os modos de pensar e de justificar ideias com conteúdos matemáticos de seus alunos, um conhecimento necessário para uma ação docente orientada para a aprendizagem de ambos.

3.2.3 Da exploração-investigação matemática na sala de aula para a aprendizagem docente: conhecendo seus alunos e estabelecendo prioridades

Na atividade *São quadrados?*, pudemos perceber que o uso de vocabulário matemático fez-se necessário e foi oportuno. Com nossas explicações, as crianças demonstravam entender e passaram a utilizar as palavras "congruentes", "ângulo" e "reto" nos momentos necessários. Isso levou-nos a ponderar que numa aula, cujo foco esteja nas argumentações e a oralidade tenha espaço garantido, o professor tem um campo propício para trabalhar com vocabulário matemático e com aspectos das definições matemáticas que não estão pautadas simplesmente na memorização. No registro escrito dos alunos, solicitado individualmente ao final da aula, como uma forma de sistematizar o que foi feito e de contar para nós o que foi aprendido, pudemos evidenciar essa apropriação.

Natália se surpreendeu com os resultados escritos de seus alunos. Na mesma ocasião, ela reafirmou sua participação para auxiliá-los em suas escritas (fala 491). Como acrescentou Gisele (fala 492), mesmo na escrita, ela os acompanhou e os orientou (fala 491).

> 487. *N. Me surpreendeu que mesmo com as dificuldades deles, eles conseguiram expressar alguma coisa. Alguns conseguem se expressar mais, tudo o que a gente viu. Tem alguns que conseguem expressar pelo menos alguma coisinha que aprendeu.*
>
> 488. *N. Então eu achei que foi bem diferente.*
>
> 489. *P. Quando a gente usa a escrita para se expressar a gente acaba tendo uma oportunidade de usar vocabulário e de pensar sobre o que está escrevendo.*
>
> 490. *P. Eles usaram as próprias palavras, alguns usaram cantos, outros ângulos, conseguiram usar os nomes que aprenderam. E a gente só usa algum nome novo que aprende se tem alguma compreensão do que significa, ou seja, se isso serve para o que você precisa explicar.*
>
> 491. *N. É engraçado que eles foram para o recreio e voltaram para terminar, porque uns não tinham terminado de escrever. Então, eles iam escrevendo, eu ia falando, mas é só isso. E eles: não né, tem aquele cantinho assim.*
>
> 492. *G. Ir questionando.*
>
> 493. *C. Não vai esquecer nunca mais.*

A leitura do professor sobre os registros de seus alunos pode fornecer-lhes elementos para sua intervenção e para melhor conhecê-los. Para os alunos, a produção de registros escritos com conteúdo matemático possibilita comunicação e reelaboração conceitual. Assim, a ampliação do conhecimento que o professor tem de seus alunos pode ocorrer a partir da análise e da avaliação dos registros de suas atividades matemáticas.

> Produzir textos nas aulas de matemática é desenvolver a habilidade de comunicação escrita, dividindo, assim, um espaço constantemente predominado pela comunicação oral. Apenas a oralidade não garante atingir os objetivos que traçamos em nossos planos de aula; por isso, partindo do desenvolvimento de outra habilidade de comunicação, é possível integrar duas disciplinas: língua portuguesa e matemática, de maneira significativa para os alunos. (...) Assim, ao aluno é dada uma função para o texto que deverá produzir, pois ele deve ter ciência de que toda escrita pressupõe um leitor e que uma produção mal-elaborada pode levar o leitor ao não entendimento da mensagem que se deseja transmitir. (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009, p. 114).

A interlocução professor-aluno em aulas de matemática pode ter a comunicação escrita como um meio de aprendizagem para ambos. Em seus registros os alunos podem revelar o que sabem e o que pensam sobre conceitos e procedimentos matemáticos. Para o professor, pensando em sua formação, além do olhar sobre o que seus alunos demonstram conhecer, pode favorecer a definição do que ainda precisa ser feito ou retomado e do que pode ser aprofundado ou priorizado. E, com isso, o próprio professor também tem elementos do que precisa melhor conhecer e das demandas de sua prática.

A expressão escrita favorece a organização do pensamento, a reflexão e a sistematização de conhecimentos. Na aula de Natália, os alunos não tiveram que devolver uma definição de quadrado que lhes foi dada. Os alunos de Natália utilizaram as imagens (representações) e discutiam aspectos do conceito. Isso difere das características geralmente observadas nas escritas dos alunos, conforme apontaram Ponte e Serrazina (2000, p. 1-2): "de um modo geral, a produção escrita dos alunos tende a ser muito limitada, reduzindo-se com frequência à simples realização de cálculos necessários para obter a solução dos exercícios e problemas.". Como estes mesmos autores apontaram, no entanto, os registros escritos dos alunos podem desempenhar um papel importante no ensino e aprendizagem de Matemática, a partir da redação de composições com suas ideias e relatórios que revelem como realizaram um problema ou investigação.

Em Lamonato (2007), a professora Laura[6] ressignificou o registro dos alunos como "Não havia pensado no riquíssimo material que tais registros podem constituir, pois a partir de sua análise, podemos perceber as aprendizagens realizadas pelas crianças, os percursos percorridos para construí-las bem como os pontos que devem ser melhorados ou mesmo trabalhados com mais ênfase." (p. 224). Cristóvão (2006) também destaca que os registros permitem intervenções e retomada do trabalho, bem como são recursos para as reflexões e investigações do professor sobre o processo vivido e sobre suas práticas.

A necessidade de escrever, dialogar, questionar e argumentar aumentou o rigor dos alunos quanto às representações, sendo detalhistas e destacando aquelas que "parecem ser". Natália contou-nos que isso foi transferido para outras situações (falas 494 a 497) e pontuou suas aprendizagens (falas 498 a 504).

494. *N. Sabe que, depois, eu estava trabalhando relógio com eles. Não*

[6] Uma das professoras participantes naquela pesquisa.

estava dando certo, eu pedi para eles fazerem um relógio que a gente pudesse ficar manipulando. Aí eles falaram: aí tia, pode fazer um relógio quadrado? Porque eles não tinham instrumento para fazer um relógio redondo. Eu falei: pode. E a preocupação deles para ficar reto!

495. *N. Então foi muito legal. Tinham alguns que falavam, esse seu relógio não está quadrado, olha aí.*

496. *N. Eles: nossa, é verdade!*

497. *N. Com as medidas, antes eles não se preocupavam muito em usar a régua para ter medida correta e agora sim. Tudo eles querem medir e conferir.*

498. *N. Para a Natália professora, serviu para ela ver que ela dá pouca voz aos alunos e que às vezes a gente tem tanta coisa para fazer que a gente não pára para fazer atividades nas quais eles possam argumentar, estar se expressando de formas diferentes, por eles mesmos.*

499. *N. Porque são atividades que demandam tempo. Para a gente chegar na construção do conceito do quadrado a gente demorou duas aulas. E a gente acha que não tem esse tempo.*

500. *N. A gente acha e prefere trazer pronto. Eu já tinha conversando com eles antes e talvez por não te sido esse processo tão completo, de construção, eles não fixaram. Passou.*

501. *G. A cobrança é muito grande e temos que prestar conta para muita gente. O que me preocupa é que isso não é o mais importante.*

502. *N. E às vezes ele sabia como fazer um quadrado, mas não saberia argumentar.*

503. *N. Ou não saberia argumentar porque [um desenho] não era um quadrado.*

504. *N. Eu acho que é o que possibilitou para eles. E é o que a gente precisa observar no dia a dia, porque às vezes a gente é cobrada por coisas que não é o mais importante, mas é o que a gente tem que fazer. A gente tem que bater o pé e fazer o que é mais importante.*

Se para os alunos houve aprendizagens, para Natália também (falas 498 a 504), pois concordando com Freire (1996), "quem forma se forma e re-forma ao formar e quem é formado forma-se e forma ao ser formado" (p. 23)." — as aprendizagens são construídas em mão dupla, sem hierarquias. Para Natália, a experiência levou-a a repensar sua conduta profissional: fazer tudo o que lhes é pedido ou decidir a partir das necessidades de seus alunos, como o fez? (fala 504). Esta professora reivindica ter autonomia para decidir os rumos de suas aulas a partir das necessidades de seus alunos ponderando que algumas atividades que demandam tempo maior podem ser mais importantes do que aquelas que ela necessita fazer rotineiramente.

Conforme ponderou Natália, é necessário tomar decisões que vão além do conteúdo: o professor precisa optar em fazer atividades que gastem um tempo maior mas que, tanto ele quanto seus alunos, compreendam os significados.

505. *N. A gente acaba podando esses momentos para dar conta. São atividades demoradas, você dá espaço para o aluno, demanda às vezes, até eles te pegarem de calças curtas, não saber responder na hora, lembrar de pesquisar, lembrar de trazer, aí retomar, retomar tudo de novo. Pega mais uma aula. E ao mesmo tempo você percebe que vai deixando isso esquecido, e aí quando você tem isso, você percebe a importância.*

506. *N. Você percebe o que é importante: acabar tudo de qualquer jeito ou fazer ser significativo para eles. Eu acho que isso... Apesar da gente saber que é importante ser significativo, a gente tenta dar conta de tudo e não dá conta de nada.*

507. *N. A gente percebe que tem coisas que tem que parar, pensar e priorizar.*

A atividade *São quadrados?* favoreceu a aprendizagem dos alunos quanto à formação do conceito de quadrado, por intermédio de discussões de ideias associadas a esse conteúdo geométrico. Os alunos elaboraram e analisaram representações de quadrados ampliando seu vocabulário matemático e puderam revelar suas aprendizagens tanto oralmente, durante a socialização de suas representações quanto de forma escrita. Para a professora Natália, a exploração-investigação matemática constituiu um cenário favorável para ensinar conteúdos de geometria para as crianças e para ampliar o conhecimento sobre elas, tomando decisões quanto ao que é prioritário (conteúdos que precisam ser aprofundados, modos de favorecer a expressão escrita das crianças e decisões quanto ao tempo que deve ser dedicado às atividades em concordância ao que considera mais importante) em sala de aula e as implicações destas decisões para a aprendizagem de seus alunos. Para o professor que questiona e problematiza suas práticas, os registros produzidos pelas crianças são instrumentos que favorecem reflexões e fundamentam decisões. Tais registros encontram as atividades exploratório-investigativas como cenário para sua produção e foram necessários para a comunicação.

As decisões de Natália em continuar com tarefas abertas, priorizando a socialização e o debate em sua sala de aula incidiram em outras atividades como podemos analisar na próxima seção.

3.3 Dos quadrados para os retângulos: ampliando o debate e redefinindo posturas em *São retângulos?*

Após *São quadrados?*, Natália desenvolveu uma atividade com a mesma dinâmica da primeira envolvendo retângulos.

Durante o debate, a partir dos "retângulos" feitos pelos seus alunos, esta professora pôde ampliar o vocabulário e acrescentar novos conceitos ("lados paralelos"), discutir as características dos retângulos e colocar em pauta a inclusão dos quadrados na classe dos retângulos. Ao gerir a participação dos alunos na comunicação em sala de aula, o professor "toma constantes decisões — o que deve ser aprofundado, quando se devem introduzir convenções matemáticas e linguagem matemática, quando se deve fornecer informação, quando deve deixar os alunos lutarem com uma dada dificuldade, etc." (PONTE; SERRAZINA, 2000, p. 1). Nesse sentido, Natália aproveitou as investigações dos alunos sobre exemplos e características dos retângulos num momento oportuno: um dos alunos fez um retângulo de dimensões 6 cm por 7 cm. Ao colocá-lo na lousa (afixando a página de papel quadriculado no qual a figura estava desenhada), os demais perceberam que parecia ser um quadrado.

> 508. *N. Ficou uma discussão porque de longe parece um quadrado. Porque as medidas são muito próximas, é um retângulo seis por sete.*
> 509. *N. Quando coloquei isso [representação de um aluno] na lousa caíram em cima porque era quadrado e não era retângulo.*
> 510. *N. Ele [aluno] falou que era sim, foram na lousa, foram com a régua. Em vez de contar quadrados, eles foram com a régua na lousa.*
> 511. *N. Aí viram que era um retângulo seis por sete [centímetros].*
> 512. *N. A gente sentou para falar então o que seria um retângulo. Eles falaram: o lado da figura na frente do outro tem que ser igual e o outro lado da frente igual ao outro.*
> 513. *N. Eu falei que isso significava que os lados eram paralelos.*

514. *N. Então, coloca aí tia, que para ser retângulo, os lados paralelos tem que ter a mesma medida.*

515. *N. Aí chegaram de novo nos cantinhos, que os cantinhos eram iguais. Que também tem que ser retos senão não é [retângulo].*

516. *N. Que os cantinhos tem que ser retos, iguais aos do quadrado.*

517. *N. A linha tem que ser reta... E tem quatro lados.*

518. *N. Eu peguei e desenhei um quadrado na lousa. Falei: esse lado é paralelo a esse? Eles: É. E esse desse? É. Esse é igual a esse? É. Esse é igual a esse? É. Tem 4 lados? Tem. A linha está reta? Está. Os cantinhos são iguais? São. Então é um retângulo?*

519. *N. Aí: É... Não é... É... Não é... (rindo)*

520. *N. É um quadrado, tia. Mas, não tem as mesmas coisas? Tem, mas os quatro lados são iguais. É, mas os lados são paralelos e são iguais.*

521. *N. Aí eles ficaram pensando, pensando, (com cara de estranheza, como se imitasse seus alunos).*

522. *N. Aí uns já falaram: Não, não é, é o quadrado.*

O diálogo estabelecido entre Natália e seus alunos contemplou a inclusão dos quadrados na classe dos retângulos quando estes perceberam que tanto quadrados quanto retângulos têm ângulos internos congruentes e retos. Mesmo observando que as crianças atribuíram corretamente características comuns dos retângulos e dos quadrados, Natália interveio apresentando-lhes um quadrado e analisando-o sob as condições postas para uma figura ser retângulo (falas 518 a 522). Segundo Ponte e Serrazina (2000), "na resolução de um problema, os professores devem explorar as sugestões dos alunos, ajudá-los a avaliar as sugestões dos colegas e refletir criticamente sobre elas, levantando objeções e implicações" (p. 5). Assim, era necessário que os alunos percebessem que, ao caracterizarem o retângulo poderiam estar incluindo os quadrados nessa mesma classe de figuras, e, com isso, também precisariam decidir, suas posições e entendimentos com relação a isso. Percebi que o debate de ideias no qual as crianças têm que solicitar ou apresentar argumentos tomou a maior parte do tempo e ocorreu com a sala toda e não nos pequenos grupos, onde eles fizeram seus exemplos.

A exploração-investigação matemática pressupõe que o professor participe da atividade com seus alunos, oriente-os e faça o que for necessário para que estes prossigam naqueles momentos em que os conhecimentos que já trazem e suas ações podem não ser suficientes. Para o professor, o desenvolvimento de atividades investigativas pode ser fonte para suas aprendizagens e dos modos como ele pode participar da atividade de seus alunos, tendo, como no caso do grupo constituído, a interlocução dos demais integrantes para favorecer reflexões e perceber-se.

523. *N. Eu falei: então, eu vou contar um segredo para vocês: o quadrado é um retângulo também.*
524. *N. Porque vocês estão vendo que ele tem as mesmas especificidades do retângulo.*
525. *N. Eles: ham, ham. Eu: então, é um retângulo especial? Por que?*
526. *N. Eles: porque tem os quatro lados iguais.*
527. *N. Na hora de escrever, eles: especifi... O que tia, que você falou mesmo?*
528. *N. Especificidade, característica.*
529. *N. Aí teve uma que eu nem falei e escreveu: aspectos.*

Mais uma vez, é fundamental o papel do professor para servir-se de recurso de seus alunos, dando-lhes outras informações, clarificando suas dúvidas, como o fez Natália (falas 523 a 529). Ponte et al. (1998) destaca os papéis do professor em aulas investigativas: desafiar, apoiar, avaliar, dar informação, promover a reflexão e pensar matematicamente com seus alunos. Tais papéis foram evidenciados na aula de Natália e podem ter sido influenciados pela sua vivência no grupo. Natália destacou que a dinâmica estabelecida na aula anterior prevaleceu nesta, tanto por suas decisões quanto de seus alunos (fala 530). Esta professora mencionou (falas 532 e 533) que a vivência na aula anterior permititu que ela e seus alunos tivessem consciência e segurança do processo desenvolvido o que incidiu em maior participação dos alunos e um melhor aproveitamento do tempo.

530. *N. Foi bem legal e eles quiseram ir fazendo no estilo da outra aula mesmo. Uma hora um falou: mas eu posso fazer pergunta para esse grupo?*
531. *N. Eu falei, pode, claro. Aí ele perguntou alguma coisa das medidas e continuaram.*
532. *N. Mas eles têm as características deles também, sempre tem os que questionam mais, isso é normal.*
533. *N. Como eles já conheciam o estilo da aula, eles participaram mais.*
534. *N. Foi super legal, eles adoraram e achei que foi mais rápido do que... Demorou as duas aulas de novo, mas a gente sabia o que estava fazendo, tanto eu quanto eles.*

Uma das dificuldades que podem ser creditadas à resistência dos professores em desenvolver aulas investigativas é o tempo que estas demandam em detrimento de outras atividades. Entretanto, conforme os alunos vão se acostumando com a dinâmica investigativa é possível que esse tempo seja minimizado e até compense o período que o professor gastaria para ensinar separadamente todos os conteúdos envolvidos em uma determinada atividade.

Para a formação de professores, a experiência em aulas investigativas na formação contínua desencadeou curiosidade sobre a prática e ousadia em apresentar tarefas com tais características para seus alunos. Além disso, a vivência de alunos e professores com uma dinâmica investigativa, resultou em novas experiências nas quais ambos consolidaram aprendizagens anteriores e reelaboraram a própria forma de participação, decorrendo na ampliação de conhecimentos. Isso vem favorecer a presença de diversos elementos exploratório-investigativos no cotidiano escolar, distanciando-se de uma experiência pontual e passada.

Além do envolvimento com a dinâmica estabelecida, os alunos trouxeram aprendizagens em relação aos conteúdos já tratados, como disse Natália (falas 535 e 538) e demonstraram curiosidade quanto ao que ainda não sabiam (falas 536, 539 e 540). Finalmente, para sistematizar o que foi feito, Natália optou por elaborar texto coletivo (falas 541 e 542).

535. *N. Aí eles recordaram do quadrado.*
536. *N. Um aluno perguntou: como chamam os [lados] que encostam, tia?*
537. *N. Eu falei: eu acho que são adjacentes, mas eu não me recordo direito, vou ver e falo.*
538. *N. Eu nem precisei ficar falando muito da posição dessa vez. Eu fui perguntando e eles, ah, tia, não precisa, se virar não importa a posição, é que nem no quadrado.*
539. *N. Porque eu não tinha pensado que ia chegar em "paralelo" e depois em "adjacente". Eu não lembrava se é isso mesmo. Eu acho que era.*
540. *N. Outro dia, eles falaram: tia, coloca uma palavra difícil agora.*
541. *N. Eu achei legal a retomada da gente estar fazendo a reescrita porque além de ter sido uma oportunidade de rever conceitos, retomar, reexplicar, até para quem não tinha ido na aula (alunos novos) deu para esclarecer aqueles que estavam com dúvidas ainda.*

> 542. *N. A gente colocou todas as características do retângulo e por fim a gente falou: se além dessas características, a figura ainda tiver todos os lados iguais, aí é um quadrado.*

A vivência com a exploração-investigação matemática e o contexto formativo desenvolvido no grupo suscitou a curiosidade de Natália, levando-a a planejar atividades para seus alunos e as reflexões sobre como eles se envolveram nelas incidiram na redefinição de uma dinâmica de aula na qual suas crianças puderam investigar conteúdos geométricos e ela, sua própria prática. Dessas experiências, sobressaíram as posturas investigativas como um propício meio de ensino e aprendizagem de matemática e a necessidade de registros escritos como uma estratégia para sistematizar os conceitos envolvidos e o que foi aprendido no debate em sala de aula. Assim, a exploração-investigação não parou por aí. Na próxima seção, analiso a atividade *São triângulos?*

3.4 *São triângulos?*: da expectativa do conhecido para novas surpresas

A aula *São triângulos?* foi solicitada pelos alunos ao final da aula anterior, quando Natália fez o texto coletivo com eles, antes mesmo de nosso planejamento. Em sua narrativa oral, esta professora mencionou que

> 543. *N. Aí, vira um menino e fala: Tia, e o triângulo? A gente já fez o quadrado, já fez o retângulo e o triângulo?*
> 544. *N. Eu falei: o triângulo a gente vai ver. E ele: vai ver? Falei: vai.*
> 545. *N. Quando ela [eu] vai voltar? Ela vai voltar para fazer o triângulo?*

Então planejamos desenvolver uma aula sobre triângulos mantendo-se a dinâmica das anteriores. Mencionei (fala 546) minha curiosidade sobre os tipos de triângulos que as crianças fariam e aqueles que elas reconheceriam.

> 546. *P. Eu fico com a curiosidade: que ideia eles têm de triângulos? Será que vai aparecer obtusângulo, será que eles o reconhecem?*

No entanto, tivemos muitas surpresas nessa aula, como represento a seguir. Nas atividades anteriores, na sala de Natália, os alunos tiveram o início da exploração enquanto estavam nos grupos e esta se concluiu e avançou para os questionamentos e justificativas durante o debate. De modo diferente, nessa aula cujos conteúdos centrais foram triângulos, o levantamento de questões deu-se em vários dos pequenos grupos. Essa ampliação da investigação dos alunos foi para nós uma surpresa, uma vez que, a princípio, pensávamos que a atividade pudesse ser mais rápida por ter se tornado rotineira (fala 547). Nos grupos, eles não se detiveram a fazer apenas exemplos, como nas aulas anteriores,, mas iniciaram a proposição de questões e preocuparam-se em questionar e argumentar (falas 548 a 561).

547. *N. Eu falei, ah, vou fazer a do triângulo, mas só para concluir, imaginando que ia ser simples, que eles iam pegar a folha, desenhar os triângulos e pronto.*

548. *N. Aí, eles começaram a questionar enquanto estavam fazendo a atividade. Por exemplo: Tem triângulo que os três lados são iguais?*

549. *N. Como que eu consigo fazer esse? Sabe, queriam saber o lado, confundiam com a altura, queriam saber o ângulo, se podia ter ângulo reto ou se não podia. Surgiram muitas questões.*

550. *N. São coisas que a gente não imaginava que ia aparecer. Sabe, pensávamos que eles iam desenhar e pronto.*

551. *N. Eles trouxeram as questões.*

552. *P. Nós pensamos anteriormente... Eu não via, por não ter contato direto com a sala, eu imaginava que eles fossem discutir, que a parte mais rica da atividade fosse na exposição na lousa; eu tinha essa expectativa.*

553. *P. Só que enquanto eles começaram a fazer... Logo que eles começaram a explorar os primeiros triângulos, eles começaram a fazer perguntas, aquilo que gente postula na investigação matemática, que as perguntas, os problemas são colocados por quem está desenvolvendo a atividade.*

554. *P. Então eles começaram a perguntar: ah, mas tem jeito de fazer do mesmo tamanho?*

555. *C. Você falou que tinha os três lados do mesmo tamanho?*

556. *N. Não.*

557. *C. Vocês não deram exemplos?*

558. *N. Nada.*

559. *P. Eles começaram a perguntar para nós: ô, tia, mas tem jeito de fazer com os três lados de mesmo tamanho?*

560. *N. Porque tinha grupo que estava tentando... Queriam fazer com os três lados iguais mas na hora de desenhar não conseguiam.*

> *561. N. Mas aí, tem jeito? Tem como?*
>
> *562. N. E aí que a gente foi levando eles a procurarem ver se era possível ou não.*
>
> *563. P. Existiram duas situações. Uma delas é você fazer o triângulo com três lados iguais num papel e a outra é fazer com material manipulável.*

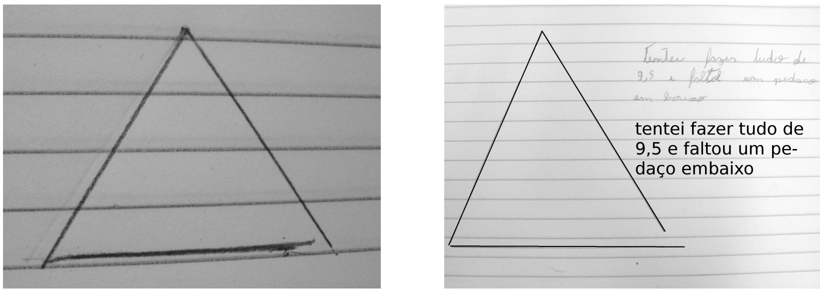
O enunciado manteve-se da mesma forma que o anterior — *Em uma página de papel quadriculado, faça triângulos.* — e acrescentamos que eles iriam apresentá-los aos colegas e iríamos fazer um debate. Durante o debate, nossa participação foi importante não apenas para ouvir e destacar as questões, mas para acompanhá-los em suas tentativas, auxiliando-os, em alguns casos, a perceberem o que eles mesmos faziam ou tinham feito. Aproveitávamos também para socializar com a sala toda a dinâmica que estava estabelecida.

Em nossas conversas (fala 563), emergiram reflexões quanto aos materiais utilizados, que conforme preconiza Shulman (1986) referem-se ao conhecimento curricular, ao arsenal que o professor dispõe para facilitar ou ampliar o entendimento de seus alunos sobre os conteúdos que deseja ensinar. Refletimos sobre o que poderíamos fazer ou propor para promover avanço nas investigações dos alunos, uma vez que eles se depararam com a ideia de que poderia haver triângulo com três lados de mesma medida, mas suas representações não condiziam com isso.

Conforme Figura 3.2, um dos grupos que considerava a existência de triângulos equiláteros não conseguia registrá-los. Eles primeiramente disseram que "*de três lados do mesmo tamanho não dá*". Eu disse: "*Ah, então não dá!*". Como resposta, um dos alunos do grupo rebateu: "*Ah, parece que dá, mas eu não sei [desenhar].* Isso não ocorreu em apenas um dos grupos.

Figura 3.2 – Tentativas feitas pelos alunos para desenhar triângulo equilátero.

(a) **(b)**



(Imagens obtidas pela pesquisadora por meio de escaneamento.)

Tanto eu quanto Natália, ao chegarmos nos grupos, perguntávamos para os alunos o que eles estavam fazendo, e com isso, eles começavam a explicar, a questionar e a argumentar, justificando seus registros e escolhas. Como nesse caso, quando nos deparávamos com algo que considerávamos relevante de não ser esquecido durante o debate posterior; nós lembrávamos a todos que "*Vários de vocês estão fazendo perguntas, isso é importante. Anotem para não esquecermos depois.*". Em sintonia com Ponte e Serrazina (2000, p. 5), acredito que:

> Usando os diversos modos de comunicação, os alunos devem explicar o significado de conceitos, fazer conjecturas, propor estratégias e soluções para os problemas, devem discutir, testar, aplicar e verificar as suas descobertas. Ao raciocinar em voz alta, desenvolvem em cooperação as ideias e o conhecimento matemático.

Como podemos observar na Figura 3.2b, um aluno afirmou sua tentativa de fazer um triângulo com todos os lados de medidas iguais a 9,5 cm. Para facilitar as representações, em um dos grupos que afirmava que existia o triângulo equilátero, mas que não dava certo o desenho, sugeri que pegassem três objetos de mesmo tamanho, como lápis por exemplo. Elas pegaram três gizes de cera novos e rapidamente fizeram a representação de um triângulo equilátero como o queriam. Nesse caso, não mediram nem se importaram com detalhes, como a junção das pontas dos gizes ou coisa parecida; identificaram, na representação com os gizes aquilo que pelo desenho não conseguiam.

Estas duas intervenções foram feitas por mim, compartilhadas e seguidas imediatamente por Natália, pois estas ocorreram nos grupos que eu visitava enquanto ela estava em outros. Em sua narrativa escrita, esta professora registrou esse episódio (fala 564) e destacou nossa passagem pelos grupos (fala 565) e a surpresa quanto ao desenvolvimento da atividade (fala 566).

564. *N. O uso do material concreto possibilitou aos alunos, naquele momento, comprovarem uma situação que estavam supondo, já que com lápis e papel não estavam conseguindo desenhar o triangulo equilátero. Com o uso dos gizes de cera, puderam comprovar que era possível formar um triangulo com os lados iguais e isso os estimulou a continuar tentando desenhá-lo.*

565. *N. Como estávamos andando nos grupos separadamente, esses momentos se fizeram necessários para que dividíssemos o que estávamos presenciando, o que estava acontecendo nos grupos, e nos dava um parâmetro do desenvolvimento da atividade para que pudéssemos fazer nossas novas intervenções.*

566. *N. Nessa atividade dos triângulos, achávamos que por já terem realizado as atividades do "São quadrados?" e "São retângulos?", seria uma atividade sem muitas questões, mais tranquila e rápida, mas as questões continuaram surgindo e nos surpreendendo.*

Se o desenho era um recurso que atrapalhava os alunos no registro do que desejavam, por não conhecerem qualquer procedimento para construir triângulo equilátero, por outro lado, ao usarem os gizes de cera (como se fossem varetas) sentiram-se aliviados em alcançar a representação esperada. O uso de material concreto manipulável permite construções, desconstruções e readequações com mais facilidade e precisão que o desenho.

567. *N. Elas não estavam conseguindo com a régua porque não estavam conseguindo o ângulo correto.*

568. *N. Então passava ou faltava.*

Nós ficamos atentas a perceber e a questioná-los se o registro era condizente com o que queriam ou se, no entanto, tinham uma intenção e ao registrá-la, o triângulo (ou polígono aberto) era diferente do que tinham previsto. Isso foi importante em nossos diálogos, pois permitiu as discussões anteriores. As representações de triângulos da Figura 3.2 (página 211) poderiam ter sido entendidas como triângulos quaisquer tanto pelos alunos quanto por nós, professoras, se nós não tivéssemos presenciado o ocorrido.

Frente à dificuldade de desenhar triângulo equilátero, os alunos tinham questionado a existência destes e com o material concreto puderam fazer experimentações e refutarem sua conjectura. Naquele momento, as intervenções focaram nas questões feitas pelos alunos, sobre a possibilidade de se fazerem triângulos equiláteros. No entanto, durante a análise, é possível identificar, para situações futuras, que pode-se explorar a existência de triângulos a partir das medidas de seus lados.

O registro foi ampliado a partir do momento em que estávamos acompanhando a atividade dos alunos no grupo e eles tinham a oportunidade de verbalizarem o que faziam, não estavam apenas registrando "o que passou". O registro era para reflexão e para uma conversa, sendo ampliado e readequado, a partir do diálogo entre eles e conosco. Esses registros foram utilizados para se comunicarem no grupo, para experimentarem, para contarem para nós e posteriormente para a socialização e análise dos demais colegas.

As opções do professor, ao distribuir materiais, podem fazer diferença na atividade dos alunos tanto quanto as representações que ele pode incluir ou não nas tarefas. Trata-se de opções que precisam ser pensadas e nem sempre teremos, sozinhos, as melhores respostas. A vivência do professor, no ambiente de formação contínua ao longo da carreira, pode promover reflexões que poderiam ficar adormecidas em seu cotidiano se não fossem problematizadas. Em nosso caso, oferecemos papéis quadriculados para os alunos fazerem suas representações e, de acordo com as necessidades, propusemos o uso de recurso alternativos para favorecer suas experimentações e representações, como os gizes de cera.

Frente às nossas narrativas, durante as discussões no grupo, Cidinha acrescentou (fala 569) um novo elemento que também provocou nossas reflexões:

569. *C. O fósforo deve ser igual [aos gizes de cera].*
570. *C. O fósforo vai dar [para representar triângulo equilátero].*
571. *P. Tenho a hipótese que se ele tiver que construir triângulos com o fósforo é que ele construa diretamente o triângulo o equilátero enquanto que no papel acontecia tudo, menos ser triângulo equilátero.*
572. *N. Eu nunca pensei.*
573. *P. Mas a questão das crianças foi: será que tem triângulos que têm os lados de mesma medida?*
574. *N. O que pode surgir também é: só tem triângulo equilátero? Mas pelo material, esse não foi o caso.*
575. *N. Se você levar o fósforo pode ser que eles pensem que o correto é esse [equilátero].*

576. *C. Para montar os outros também vai ficar difícil.*

577. *P. Nos desenhos prontos, em livros, pelo que vejo, geralmente, são os triângulos equiláteros. Entretanto, nos registros, esse é o mais difícil. E se bobear a gente nem pára para pensar nisso.*

Na socialização dos trabalhos, percebemos que os alunos tinham se convencido de que existem triângulos equiláteros, mas encontraram quase uma impossibilidade de construí-los no papel. Novamente nos servimos de recursos para eles. Expliquei, junto com Natália, como poderiam fazer para construir um triângulo equilátero, com a participação deles na lousa. Com um segmento desenhado na lousa (horizontal), eles indicaram onde deveriam ficar as extremidades dos outros dois lados do triângulo, dizendo "*no meio, no meio*" e indicando com as mãos. Com isso, indiquei e nomeei a reta perpendicular ao primeiro segmento (lado) pelo ponto médio como sendo a mediatriz daquele lado do triângulo. Eles anotaram essa nova palavra e começaram a usá-la no diálogo também. Com isso, desenhamos outros triângulos equiláteros em diferentes posições na lousa. O uso do vocabulário foi destacado pelas crianças, conforme observou Natália:

578. *N. Ele [uma criança] tinha uns papeizinhos dobrados onde ele foi escrevendo todas as palavras novas que foram surgindo. Ele foi fazendo uma coleção de palavras.*

579. *P. Foi equilátero...*

580. *N. Mediatriz.*

581. *N. Isósceles e escaleno.*

582. *N. Porque ele quis. Nenhuma interferência desse tipo. Ele quis. Cada palavra estava saltada porque tinha uma sanfoninha. Eram as palavras que ele não conhecia ainda.*

583. *P. Ele também quis que fotografássemos.*

No debate, os alunos questionaram a existência de triângulos retângulos e triângulos obtusângulos (evidentemente que ainda não utilizando esta nomenclatura) e conseguiram, com nossos questionamentos, apresentar exemplos para tais figuras. Natália afimou em sua narrativa escrita que

584. *N. Os debates em sala me ajudaram a conhecer mais sobre as crianças, sobre o senso crítico e a capacidade de investigar que elas têm. O quanto elas são capazes de aprimorar os conhecimentos prévios que possuem e me mostrou que a promoção dos debates é uma ótima estratégia, que dá a eles oportunidade de falar, de*

> *argumentar, de contrapor hipóteses. É uma forma de construir o conhecimento com eles, de torná-lo mais significativo.*

Para finalizar a atividade, nas aulas posteriores, Natália fez um texto coletivo com seus alunos pela necessidade percebida quando ela leu os registros das crianças. Os registros dos alunos, em primeira instância, constituem material para a tomada de decisões, pois constituem um acesso aos seus conhecimentos, aos modos pelos quais eles revelam o que aprenderam.

Esta atividade consolidou a dinâmica exploratório-investigativa na classe de Natália, ampliando o que ocorreu nas aulas anteriores quanto às formas de participação dos alunos e às aprendizagens de Natália. Quanto às aprendizagens de Natália, foi possível identificar que as atividades desenvolvidas ampliaram o conhecimento desta professora sobre seus alunos quanto aos conteúdos de geometria, à capacidade de investigar das crianças, incluindo os modos como eles argumentam oralmente e como registram, às possibilidade de os alunos levantarem hipóteses a partir do debate em sala de aula e de aprimorarem as ideias matemáticas que já trazem.

3.5 Da participação no grupo para a atividade docente: refletindo sobre suas próprias ações, compartilhando experiências e superando expectativas

Nessa seção, apresento reflexões que ratificam situações indicadas nas seções anteriores sobre como os alunos podem surpreender o professor em atividades nas quais eles tenham autonomia para criar e se posicionarem perante o que lhes é apresentado ou suas próprias produções.

Uma das situações discutidas pelas professoras no grupo foi a necessidade de o professor superar as expectativas que eles têm de seus alunos, tendo a primeira ocorrência disso após a narrativa oral de Andréa sobre como seus alunos desmontaram cubos (representações de superfícies de um cubo), fizeram o contorno de sua superfície e novamente os representaram. Léia questionou Gisele se os alunos dela também conseguiam realizar tal atividade (fala 585).

585. *L. Os seus [alunos] dão conta?*

> *586. G. Eu digo que às vezes a gente tem o receio de que eles não vão conseguir fazer porque são menores (em relação à idade das crianças) e tal.*
>
> *587. G. Pode fazer assim: vai chamando, vai fazendo individual. Num segundo momento, talvez dê para fazer com todos porque ele já sabe como vai ser. Você pode perguntar quantos [quadrados] tiramos para a gente conseguir desmontar o cubo?*
>
> *588. G. Então, eu acho que na educação infantil podemos ir adaptando: faz coletivamente, faz em grupos menores, trabalha com uma mesa (um grupo de três alunos), depois vai para outra mesa.*

No diálogo acima, Gisele sugeriu (falas 587 e 588) que se os alunos não sabem ou não têm autonomia para desenvolverem atividades em grupos, o professor deve organizar a turma de modo que ele possa intervir e superar obstáculos, como a idade dos alunos, no caso da Educação Infantil.

A importância do grupo, cenário da formação, para as aprendizagens docentes foi destacada por Natália como um suporte para sua atuação durante o tempo da pesquisa, convergindo também para a superação das expectativas que o professor tem de seus alunos.

> 589. *N. Aqui são pessoas com experiências completamente diferentes das minhas e que tem muito mais experiência do que eu. É sempre algo que você fala: nossa, é verdade, posso usar isso!*
>
> *590. N. A interferência do outro, eu acho que só acrescenta. Tanto de todas daqui quanto quando você [para mim] foi lá [na escola].*
>
> *591. N. Foi significativo para mim transpor isso para o resto [outros componentes curriculares] também. Perceber que usar o debate deles (seus alunos), a partir do que eles estão explorando pode ser feito em outras ocasiões também e que eles têm maturidade para fazer isso.*
>
> *592. N. Porque às vezes a gente acha que eles não vão dar conta, mas eles dão conta.*

A exploração-investigação matemática acompanhada pela reflexão sobre a prática e pelos registros narrativos permite ao professor compartilhar experiências e um melhor entendimentos de sua própria prática. Sendo assim, é plausível afirmar que a exploração-investigação matemática como estratégia formativa para a aprendizagem docente vai ao encontro de outros instrumentos formativos que consideram o professor como autor de suas aprendizagens. Além disso, no que diz respeito à formação em grupo de professores, pela reflexão compartilhada das experiências, conforme declaram Placco e Souza (2006):

> Se de um lado esse encontro de pessoas possibilita a atribuição de significados comuns à experiência de formação, de outro conservam-se, em cada uma delas, características singulares. (...) É preciso considerar, nas relações que se desenvolvem nesses espaços, a manifestação das igualdades e das diferenças como constituintes do processo de ensino e aprendizagem. (...) Não são as semelhanças que promovem o crescimento do grupo, mas as diferenças, que põem em xeque nossas certezas, nos levam a fazer novas perguntas e nos fazem aprender em situações de formação (p. 42).

Gisele, que participou do grupo e anteriormente já teve contato com a exploração-investigação por ocasião de um outro curso, mencionou diferenças entre as duas experiências reafirmando a necessidade do grupo continuar após o desenvolvimento da presente tese.

593. *G. Dessa vez eu conseguia ver as ideias da investigação em outros lugares, em textos ou situações que aparentemente não teriam nada a ver. No primeiro grupo não, era mais difícil, eu ficava presa nos procedimentos da investigação na sala de aula.*
594. *G. Agora eu consigo ampliar um pouco mais, acho que por isso que eu gosto e quero continuar discutindo e até estudando isso, porque eu vejo diferente.*

Pela imprevisibilidade da prática, pela sua própria apropriação e pela seleção do que lhe é significativo, as falas de Cidinha revelam que ela também investiu em suas aprendizagens ao preocupar-se em não *dar* respostas ou informações ao alunos, mas em priorizar um ambiente de discussão e troca de ideias. Após a narrativa da aula com Natália (*São quadrados?)*, Cidinha apresentou a mesma tarefa para seus alunos:

595. *C. Eu poderia ter dito: isso aqui não é quadrado, mas não. Eles iam ver se é quadrado ou não.*
596. *G. A resposta não era sua. A verdade não estava só com você.*
597. *G. Não adianta a gente ficar pensando numa coisa muito grande, que a gente não dá conta.*
598. *G. As crianças, às vezes, não dão conta, porque eles estão acostumados a ter uma resposta única. Muitas vezes a gente pergunta uma coisa e só tem uma resposta.*

599. G. Por causa da conduta do professor. Eu acho que tem muito a ver. E se você fizer várias etapas da investigação, em momentos diferentes, com conteúdos diferentes, não importando se é matemática ou não, você em um determinado momento pode trabalhar a investigação. Daí você pode trabalhar uma investigação, com começo, meio e fim.

600. G. Uma coisa que acontece com a gente na educação infantil é que temos que ter muito cuidado, pois a gente apresenta a tarefa e os objetivos verbalmente.

601. G. Tem criança que fala, eu não entendi, o que é para fazer?

602. G. E na hora que você vai explicar, você tem que ter muito cuidado.

603. G. Não vai escrever porque eles não leem. E se você não se policiar muito, você não apresenta da maneira correta.

604. L. É, vai falando, falando, e quando vê, deu a resposta para o aluno.

605. G. A gente tem que estar se cuidando, refletindo, analisando.

606. G. Porque na faixa etária que eles não leem, a apresentação da tarefa vai ser oral.

607. G. Esse cuidado é muito maior, muito mais difícil.

608. G. Na hora de escrever a tarefa você tem que repensar muitas coisas. Muitas coisas que às vezes a gente nem percebe.

609. G. Que você deixa muito encaminhado às vezes.

610. G. É um exercício interessante.

611. G. Tem que pensar no que está fazendo senão nem percebe.

Na sequência, Gisele apontou (fala 597 a 611) a importância de o professor partir do contexto de sua sala de aula para realizar atividades que vão ao encontro das necessidades suas e de seus alunos. A exploração-investigação não deve ser vista como algo específico, peculiar e que requer todo um aparato para sua realização. Retomo, nesse sentido, a ideia da necessidade do cuidado com as tarefas preparadas pelo professor que, conforme falas de Gisele (597 a 611), influenciam a atividade dos alunos e, além disso, que podem-se expandir as posturas investigativas para outros componentes curriculares e não necessariamente uma investigação pode originar-se exclusivamente a partir de tarefas preparadas com essa finalidade.

Tanto no contexto de formação docente quanto em aulas da educação básica, a exploração-investigação matemática não requer contextos, rotinas, dinâmicas e principalmente pré-requisitos ideais para sua realização. Gisele acrescentou que as dificuldades dos alunos em atividades abertas podem estar relacionadas aos hábitos criados pelos próprios professores. Segundo esta professora, é importante o professor estar atento e refletir sobre como ele apresenta tarefas aos seus alunos, sobre os exemplos que utiliza e sobre como intervém para ajudá-los. Nestas intervenções estão prioritariamente as posturas investigativas do professor que pretende que seus alunos sejam também investigadores.

Pelo compromisso em ir além, em mover-se da prática de hoje para aquela desejada, as professoras sinalizaram para a presença de posturas investigativas em aulas de Matemática: dar oportunidades para os alunos se pocisionarem e favorecer o debate em sala de aula, não somente com conteúdos matemáticos, como podemos observar na próxima seção. Esses indícios e possibilidades ocorreram nas reflexões sobre a prática e nas reflexões sobre as experiências ocorridas durante as reuniões do grupo.

3.6 Da exploração-investigação em matemática para as posturas investigativas em outros componentes curriculares: o estabelecimento de um ambiente de comunicação e negociação de significados em sala de aula

Nesta seção, apresento as possibilidades indicadas pelas professoras quanto à ampliação das posturas e ações investigativas dos alunos com seus professores para além das aulas de matemática, tendo como referência as experiências advindas de uma sequência de atividades investigativas desenvolvidas na sala de aula de Natália, analisada nas seções anteriores. Esta professora manifestou, por diversas vezes, contribuições das aulas sobre quadrados, retângulos e triângulos para suas aprendizagens e as de seus alunos.

Para Natália (falas 612 a 623), as crianças passaram a argumentar na forma escrita e a participar criticamente da avaliação das produções de seus colegas como consequência das aulas desenvolvidas por nós e por ela e também resultantes de mudanças em suas próprias ações. Ela, por ter percebido tais aprendizagens em seus alunos, passou a oferecer-lhes outras oportunidades para ampliarem ainda mais a argumentação em situações orais e para analisarem os textos escritos de seus colegas.

612. *N. Eu acho que com essas aulas, eles adquiriram muito a questão*

do argumentar na escrita. De colocar no papel o que eu aprendi. Tanto é que no projeto [nome] eles tinham que fazer o diário de bordo. É completamente diferente agora. Eles já tinham começado e mudou. Agora eles têm outra postura de escrita.

613. *N. Eu achei que trouxe isso para eles, porque eles não tinham hábito de fazer isso. Eu mesma, não era uma coisa que me preocupava.*

614. *N. Começaram a relatar o que aprendeu; isso é uma sistematização muito grande para eles. Tanto é que eu acho que no começo era bem mais difícil para eles, agora, eles já conseguem ir melhor, mais fácil.*

615. *N. Eles perguntam, relatam e sistematizam com maior facilidade. Eles sistematizam melhor e mais fácil.Eu acho que foi nesse trabalho que fizemos.*

616. *N. É uma classe que participa bastante, mas eles não tinham o hábito de debater sobre o que o outro fez.*

617. *N. Tanto é que agora, por exemplo, eu pedi autorização deles, eu levo as redações deles, xeroco para a sala inteira para a gente corrigir junto. Aproveitando esse debate sobre o outro, um debate construtivo. Olha, podia melhorar aqui, podia fazer assim.*

618. *N. Corrigem e ninguém dá risada. Hoje é a dele e amanhã é a sua. Eles não dão risadas. Eles começaram a respeitar muito mais.*

619. *N. É procurando erro: mas, aqui, se você fizesse isso, João, ia ficar bem melhor a sua redação. Aí depois a gente constrói de novo, juntos, ninguém fica triste, ninguém acha que errou.*

620. *N. Eles acham até legal quando é a deles. Eles falam, quando vai ser a minha, tia?*

621. *N. Porque virou um debate construtivo mesmo. Eles conseguem observar o do outro não para menosprezar, mas observar para ver o que tem de bom, o que tem de ruim. Eles falam: nossa, isso ele acerta, isso eu não acerto ainda, tia.*

622. *N. Eles já conseguem perceber isso. Foi um debate que eu trouxe daquelas aulas. Trouxe para Língua Portuguesa, para ver se melhoram as produções.*

623. *N. O que me surpreendeu desde que dei início a essas atividades, foi o respeito com o qual eles têm tratado o texto do colega, as discussões das melhorias possíveis assim como a apreciação do trabalho do outro e a seriedade com que tem feito as observações, inclusive explicando o porquê das sugestões que dão.*

Natália ampliou aspectos da dinâmica investigativa em matemática para outros componentes curriculares: a socialização dos trabalhos realizados, o debate de ideias e a negociação de significados. As propostas de Natália vão ao encontro das indicações de Ponte e Serrazina (2000) para o trabalho docente.

> Cabe ao professor estabelecer condições favoráveis ao desenvolvimento normal do processo de negociação de significados matemáticos na sala de aula. Ele deve estimular os alunos a falar e contribuir com frequência. Os alunos, pelo seu lado, necessitam de desenvolver a sua confiança para intervir neste processo e interiorizar as regras adequadas de participação. Precisam de compreender que devem dar uns aos outros a possibilidade de falarem, tratar de diversas contribuições com respeito, perguntar quando não entendem as ideias dos outros, objectar se sentem que uma contribuição é de algum modo inválida, apresentar razões para as afirmações realizadas. (p. 7)

Além disso, em relação às aulas de matemática como em outras disciplinas, concordo com Nacarato, Mengali e Passos (2009, p. 81) de que é necessário criar em sala de aula

> contextos em que o aluno seja colocado diante de situações-problema nas quais ele deve se posicionar e tomar decisões, o que exige a capacidade de argumentar e comunicar suas ideias. Assim, a sala de aula precisa tornar-se um espaço de diálogo, de troca de ideias e de negociação de significados — exige a criação de um ambiente de aprendizagem.

Um ambiente de aprendizagem, segundo estas pesquisadoras, preconiza pelos processos de comunicação e negociação de significados que constituem para as crianças não uma obrigação, antes um objetivo e uma necessidade.

> Se, desde os primeiros anos do ensino fundamental, o aluno for colocado em situações em que tenha de justificar, levantar hipóteses, argumentar, convencer o outro, convencer-se, ele produzirá significados para a matemática escolar. Esses significados precisam ser partilhados e comunicados no ambiente de sala de aula. (...) (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2009, p. 88).

Entretanto, para que o professor tenha condições de favorecer tais situações em suas aulas, é preciso que eles tenham oportunidade de conhecer, vivenciar e analisar suas próprias aprendizagens em um contexto exploratório-investigativo. Nesse caso, a exploração-investigação matemática na formação docente vai ao encontro, amplia e aprofunda processos formativos pautados na reflexão compartilhada da experiência profissional e da própria formação.

Segundo Natália, seus alunos demonstraram aprendizagens e novos hábitos com relação às posturas durante as atividades escolares e à uma nova forma de organização das aulas. Nesse mesmo sentido, as narrativas de Gisele também sinalizaram para a exploração-investigação além das fronteiras da matemática enquanto disciplina, mas alcançando um delineamento pedagógico que pode demarcar as posturas de alunos e professores durante o trabalho com outros componentes curriculares. Ao relatar atividades lúdicas com bolhas de sabão, Gisele apontou que esta foi significativa, pois permitiu que seus alunos de seis anos tivessem oportunidades para "perguntar" e não apenas para "responder".

624. *G. A criança precisa aprender a perguntar e a se questionar. Será que isso que eu estou falando faz sentido?*
625. *G. Foi muito gostoso e para mim também foi bom, porque eu pude me aprofundar.*
626. *G. Eu cheguei e falei para o meu marido, eu estou tão feliz, acho que eu fui inteligente hoje. (Gargalhando).*
627. *G. Descobrir alguma coisa que você não sabia (. . .) envolve outras coisas, a questão da confiança, a questão de poder questionar, de poder ter dúvida, de poder perguntar. Isso é muito importante para a vida inteira.*

Além disso, em outra situação, Gisele também mencionou (falas 628 a 629) a necessidade de o professor não se antecipar às respostas de seus alunos.

628. *G. A gente tem o hábito de dar a resposta para a criança.*
629. *G. Minha preocupação agora é fazer perguntas junto com elas para chegar às respostas.Eu acho isso difícil, mas tem que ser assim.*

Uma situação ou ideia torna-se uma experiência significativa na medida em que se conecta aos conhecimentos anteriores de um indivíduo bem como atende às suas expectativas. Para Gisele, o episódio a que ela se reportou permitiu-lhe aprofundamentos quanto ao seu saber docente, de possibilitar aos seus alunos fazerem perguntas e a ela de poder ouvi-los. Descobrir-se a si mesma enquanto docente profissional é necessário, traz angústias, desafios e prazer (fala 625), uma vez que, conforme afirma Shor "poucos de nós somos experientes o suficiente para romper drasticamente com nossos velhos hábitos de ensino e aprendizagem. Nós internalizamos as formas tradicionais, a velha arquitetura da transferência de conhecimento, os hábitos autoritários do discurso professoral em sala de aula" (SHOR; FREIRE, 1986, p. 100).

A aprendizagem de um novo modo de aprender e de ensinar, na perspectiva da exploração-investigação, é tanto para os alunos quanto para o professor. Para o professor, é necessário se deslocar da zona de conforto para a zona de risco, conforme advertem Alrø e Skovsmose (2006), dando oportunidades para os alunos se posicionarem e dizerem o que pensam sobre as coisas, rompendo com o hábito de dar atividades prontas. Cidinha e Natália também reafirmaram a necessidade de minimizarem o direcionamento que dão às respostas de seus alunos (falas 630 a 634).

> 630. *N. Dar esse espaço para eles, porque geralmente a gente tem o hábito de chegar e já dar a atividade pronta e não esperar muito eles pensarem sobre aquilo.*
>
> 631. *C. Eu direcionava, eu dizia: eu quero isso, isso e isso. Agora eu dou liberdade, eu deixo mais à vontade.*
>
> 632. *N. Eu acho que é muito do que você (para mim) fez aqui. Você primeiro dá e a gente tem que explorar, a gente faz, tenta fazer de alguma forma. Depois a gente discute o que a gente fez, não é que fica jogado pelo que a gente acha. Não é o que fica jogado pelo que as crianças acham.*
>
> 633. *N. Eu acho que é... O ver do outro... Nossa eu acho que é verdade. Aí chegar o professor e mediar, mas os dois são corretos, e se for assim? Você pensou desse jeito? Como você pensou?*
>
> 634. *N. Eu acho que foi muito do que a gente viu aqui também. Acho que foi muito do que a gente levou para a sala.*

Para o estabelecimento de um ambiente de comunicação e negociação de significados em sala de aula, como consequência de experiências significativas com conteúdo matemático, é necessário o movimento intencional do professor das práticas já conhecidas para outras que favoreçam a nova situação pretendida, passando pela reflexão e pela ousadia, sendo estas caracterizadas pelo debate, pela argumentação e pela atividade compartilhada em contextos formativos.

Outra síntese: os caminhos da exploração-investigação na sala de aula e as aprendizagens docentes

A exploração-investigação matemática na sala de aula das professoras participantes teve suas raízes nas experiências anteriores de cada uma delas na medida em que se compreendem como aprendentes de seu próprio ofício em movimento de aprendizagem contínua. Assim, só posso considerar tudo o que foi desenvolvido porque as participantes tiveram interesse e compromisso com o grupo e com seu trabalho. Com isso, a curiosidade sobre a prática impulsionou nossas ações e reflexões.

Nesse contexto, pude encontrar elementos que sinalizam e demarcam um espaço possível para a exploração-investigação no ensino de matemática para crianças do final da educação infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental. São eles: tarefas que constituem problemas abertos, tarefas consideradas exploratório-investigativas pelas professoras e situações investigativas que podem ser desenvolvidas com conteúdos de outros componentes curriculares. Tais elementos complementam as respostas à questão pesquisada: *Quais as potencialidades formativas da exploração-investigação matemática para o conhecimento do professor e de suas práticas?* por serem disparadores de aprendizagens das professoras envolvidas.

Um dos primeiros caminhos para a exploração-investigação na prática das professores e destas para suas reflexões e aprendizagens ocorreu a partir da apresentação de um problema aberto às crianças. Mesmo que de início já se tenha uma questão posta pela professora, para ser respondida pelos alunos, a dinâmica da aula foi demarcada pela exploração de diversas possibilidades de respostas, na qual à professora coube orientar, instigar e promover a atividade no eixo exploratório-investigativo. De certo modo, para que isso ocorresse, a professora estava imbuída de curiosidade sobre como seus alunos desenvolveriam a atividade e de outro, ela não tinha todas as respostas nem pretendia que estes chegassem obrigatoriamente a um consenso, priorizando-se a abertura dada pela tarefa e as estratégias, explicações e justificativas dadas pelas crianças.

Se no primeiro caso prevaleceu o ensinar a investigar e o aprender sobre como os alunos podem fazer isso, ficando os conteúdos envolvidos em segundo plano, a exploração-investigação encontrou suas potencialidades formativas para as professoras e seus alunos quando há a preocupação com os conteúdos a ensinar e com as formas de aprendê-los, como ocorreu nas demais situações analisadas nesta pesquisa.

As aulas exploratório-investigativas foram planejadas durante os momentos de reflexão compartilhada e na problematização do professor sobre suas próprias práticas, identificando necessidades e incômodos, tendo o grupo como fomentador de reflexões e ações.

Para ensinar conteúdos matemáticos nessa abordagem metodológica, houve interesse das professoras em preparar tarefas que dessem autonomia aos alunos para a criação de representações de conceitos geométricos e para a argumentação de seu próprio trabalho ou de seus colegas. Isso incidiu em ações que retratam a necessidade e a possibilidade do ensino de geometria superando-se o foco dado às representações de um objeto em substituição ao objeto em si. Nesse sentido, a negociação de significados tomou a cena, permitindo que as crianças observem, questionem, gerem hipóteses e conjecturas e argumentem suas escolhas, tendo a interlocução dos demais colegas e da professora, com progressiva ampliação da participação individual, do vocabulário utilizado e das formas de registro. Tais situações revelaram-se potencializadoras para as aprendizagens dos alunos quanto aos conteúdos aprendidos, às posturas investigativas e, para as professoras, de um modo de ensinar e conhecer seus alunos, identificando que eles são capazes de argumentar, de respeitar as produções do colegas, de questionar e sobre os conhecimentos que eles já trazem.

As atividades desenvolvidas favoreceram a tomada de decisões e o questionamento das professoras quanto às prioridades que devem ser dadas em sala de aula na gestão do tempo e em relação ao tipo de participação que desejam e objetivam de seus alunos. A participação dos alunos e as ações investigativas desenvolvidas se expandiram para outros componentes curriculares, tanto pela rotina estabelecida quanto pelas condições oferecidas pela professora, o que reafirma a exploração-investigação tanto em matemática quanto em outros conteúdos. Para tanto, a exploração-investigação mtemática na formação contínua mostrou-se como possível e potencializadora de aprendizagens e alterações de práticas docentes, não podendo, entretanto, ter suas potencialidades isoladas daquelas que podem decorrer das demais condições formativas ocorridas (registro narrativo da própria prática, o grupo com reduzido número de participantes com espaço para o diálogo, as narrativas orais e minha participação em algumas das aulas desenvolvidas). Cabe salientar que, não foi a intenção desta pesquisa, demarcar, os elementos formativos das demais condições aqui referidas.

Considerações finais

A exploração-investigação matemática constituiu um contexto favorável para as aprendizagens de diversas naturezas das professoras e de seus alunos. As potencialidades dessa abordagem metodológica evidenciaram-se no contexto de formação contínua estudado por ampliar, aprofundar e problematizar conhecimentos das professoras sobre conteúdos de geometria, sobre os modos de ensinar e de aprender tais conteúdos, sobre o conhecimento que as professoras têm ou podem ter de seus alunos, sobre o uso de recursos didáticos e sobre o gerenciamento de sua sala de aula, levando em consideração sua própria postura na interlocução com seus alunos e as decisões necessárias (quanto ao tempo, aos conteúdos, aos modos de organizar a sala) para conduzir seu trabalho profissional. Além disso, dentre as potencialidades da exploração-investigação matemática aliada à formação ocorrida na perspectiva de um grupo de professor e à escrita narrativa, as atividades desenvolvidas desencadearam o planejamento compartilhado de aulas, incluindo-se as problematizações trazidas pelas professoras e incidiram em um ambiente de aprendizagens, pautado pela negociação de significados e pelo compartilhamento de ideias sobre conteúdos matemáticos e seu ensino.

Conviver com respostas e afirmações provisórias e a busca de argumentos e provas para as próprias declarações — aspectos do conhecimento sintático do conteúdo específico — permearam as atividades desenvolvidas no grupo, favorecendo e potencializando a retomada, o aprofundamento e a aprendizagem de conteúdos matemáticos e relacionaram-se com o desafio de proporcionar aprendizagens de matemática, caracterizadas por uma postura investigativa para os alunos, indo além de fatos e procedimentos matemáticos. Com a proposta de tarefas com mais de uma resposta aos alunos, para as professoras, foi possível perceber o processo de aprendizagem das crianças, identificando modos de interpretar, de resolver as situações, de se posicionar e de registrar, que não necessariamente eram aqueles esperados ou previstos pela professora.

Além disso, as ressonâncias da exploração-investigação matemática da formação para a prática das professoras despertaram a ampliação e a oferta de novos modos de comunicação e debate em sala de aula, em uma dinâmica de aprender e de ensinar caracterizada pela negociação de significados e pelo diálogo entre alunos e entre esses e a professora.

No âmbito da formação contínua, a exploração-investigação matemática, pelo questionamento dos conhecimentos que as professoras já trazem, favoreceu a tomada de consciência de seu próprio modo de aprender e de atuar enquanto profissional, revelando e fazendo emergir suas dúvidas, incômodos e intenções. Se por um lado, as aprendizagens decorrentes das experiências vivenciadas no grupo desencadeiam questionamentos, reflexões sobre a prática e oportunizam o planejamento de aulas, as experiências de sala de aula, por sua vez, ressignificam e despertam interesses das professoras nas atividades com que elas se deparam na formação.

Com isso, pelo escopo teórico-metodológico desenvolvido nessa pesquisa, é necessário destacar que, para mim, enquanto formadora e pesquisadora, também houve ampliação de conhecimentos provenientes das respostas à questão investigada e de minha própria prática enquanto formadora.

Essa experiência permitiu-me tomar consciência de minha prática e de diversas situações que ocorrem em aulas investigativas e que, por eu estar imersa no contexto, poderiam não ser identificadas. Nesse sentido, tanto na dissertação de mestrado (LAMONATO, 2007) quanto agora, destaco as possibilidades que vão surgindo quando, enquanto pesquisadora, eu mesma assumo a função de transcrição do vídeos, um trabalho que permite uma aproximação-distanciamento dos dados. Permite aproximação, pois enquanto formadora, esses registros levam-me a redirecionar, refletir, organizar, sistematizar, questionar e fundamentalmente *conhecer* minha própria prática. Além disso, enquanto pesquisadora, essa tarefa de transcrição e análise proporciona-me distanciamento para analisar a minha prática em um momento posterior, refletindo sobre a ação e, consequentemente, torna-se uma nova forma de conhecer, quando meu texto revela tal conhecimento e tais reflexões.

Por diversos momentos, envolvi-me na atividade como quem investiga, como quem não sabe como esta vai se desenrolar. Aprendo como professora e como pesquisadora. Construo conhecimentos para a pesquisa, construo conhecimentos para minha atividade docente profissional. Por sua vez, as professoras tiveram a possibilidade de conviver com meu próprio modo de ensinar e de desenvolver aulas investigativas e, para cada uma, isso pode ser uma experiência de aprendizagem.

Tenho clareza que ao buscar o estilo narrativo no texto, enquanto pesquisadora pude aproximar-me dos significados dados pelas professoras participantes, narrando, reconstituindo, representando e analisando experiências que fizeram sentido pelas singularidades admitidas e entrelaçadas na historiação das investigações, nas falas, reflexões e imagens com as quais dialoguei e que, ao final, deixam-me novamente curiosa, quase inquieta para outras provocações que colocam-me no olhar para trás para traçar outras indagações. Dessas, é possível esboçar que a exploração-investigação matemática, nos diversos contextos de formação contínua, pode incitar em aprendizagens docentes tal como identifiquei nesta pesquisa, contudo há ainda um caminho fértil para novas pesquisas que investiguem a integração de diversos instrumentos formativos que incidem na ampliação do conhecimento do professor com compromisso de alteração de suas práticas. Acrescento também que percebo possibilidades de pesquisas sobre a exploração-investigação matemática na formação contínua com conteúdos além do campo da geometria plana, cujos resultados podem dialogar e aprofundar as potencialidades aqui discutidas. No caso específico dos conteúdos de geometria plana, o recurso às diversas formas de representação podem facilitar explorações e questionamentos e provocam indagações quanto às dificuldades que podem surgir quando os elementos geométricos forem tridimensionais ou ainda quando os conteúdos envolvidos referirem-se a outros campos da matemática escolar, como números e operações, estocástica ou grandezas e medidas, por exemplo.

Finalmente, cabe acrescentar e destacar a valiosa contribuição que as professoras deram à pesquisa, ultrapassando suas próprias aprendizagens e permitindo-nos compartilhar conhecimentos, desvendar respostas e fazer desabrochar novas indagações e reflexões. A participação no grupo permitiu a aprendizagem compartilhada e superou os limites impostos pelo seu trabalho cotidiano e pelas condições nas quais estes se desenvolve, incluindo horários, demandas e obstáculos que, por muitas vezes, colocam ensinar e aprender em direções diferentes e sentidos opostos.

Referências

ABRANTES, Paulo. Investigações em geometria na sala de aula. In: VELOSO, E.; FONSECA, H.; PONTE, J. P. da; ABRANTES, P. (Org.). *Ensino da Geometria no virar do milénio*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999. p. 51–62.

ABRANTES, Paulo; LEAL, Joana; PONTE, João Pedro da. Introdução. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Org.). *Investigar para Aprender Matemática*: (textos selecionados). Lisboa: Grupo "Matemática Para Todos - investigações na sala de aula"(CIEFCUL) e Associação de Professores de Matemática, 1996. p. 1–4.

____. Matemática para todos: Investigação na sala de aula. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Org.). *Investigar para Aprender Matemática*: (textos selecionados). Lisboa: Grupo "Matemática Para Todos - investigações na sala de aula"(CIEFCUL) e Associação de Professores de Matemática, 1996. p. 165–172.

ABREU, Maria das Graças dos Santos. *Uma investigação sobre a prática pedagógica*: refletindo sobre a investigação nas aulas de matemática. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia de Ensino) — Centro de Educação e Ciências Humanas da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2008.

ALRø, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. (Tradução: Orlando de A. Figueiredo).

AMARAL, Helena Maria Reis Pacheco de. *Actividades Investigativas na aprendizagem da matemática no primeiro ciclo*. Dissertação (Mestrado em Educação: Especialidade de Didáctica da Matemática) — Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2003. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt>. Acesso em: 10 mai. 2005.

ANDRADE, José Antonio Araújo. *O ensino de Geometria*: uma análise das atuais tendências, tomando como referência as publicações nos anais dos ENEM's. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2004.

ARAÚJO, Elsa da Conceição Coutinho da Silva Mesquita de. *Os padrões repetitivos como actividade de investigação matemática na sala de quatro anos do pré-escolar*. Dissertação (Mestrado em Estudos da Criança - Ensino e Aprendizagem da Matemática) — Instituto de Estudos da Criança da Universidade do Minho, Minho, 2006.

ARAUJO, Elaine Sampaio. *Da formação e do formar-se*: a Atividade de aprendizagem docente em uma escola pública. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2003.

BACCARIN, Sandra Aparecida de Oliveira. *Investigação matemática*: uma análise da sua contribuição na construção de conceitos algébricos. Dissertação (Mestrado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo padrões em mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993. 125 p.

BERTINI, Luciane de Fatima. *Compartilhando conhecimentos no ensino de matemática nas séries iniciais*: uma professora no contexto de tarefas investigativas. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia de Ensino) — Centro de Educação e Ciências Humanas da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2009.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. *Investigação qualitativa em educação*. Porto, Portugal: Porto Editora, 1999. (Colecção Ciências da Educação).

BOLIVAR, Antonio Botía. "¿de nobis ipsis silemus?": Epistemología de la investigación biográfico-narrativa en educación. *Revista Eletrónica de Investigación Educativa*, v. 4, n. 1, p. 1–26, 2002. Disponível em: <http://www.investigacioncualitativa.es/Paginas/Articulos/Metodosytecnicas/Bolivar.pdf>. Acesso em: 19 dez. 2010.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara Loyola. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara Loyola (Org.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25–45.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática*: Matemática. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1997. 147 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 13 set. 2004.

BRUNER, Jerome. The narrative construction of reality. *Critical Inquiry*, v. 18, n. 1, p. 1–21, Autumm 1991. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1343711>. Acesso em: 09 set.2008.

CALHAU, Mari Emilia dos Santos. *Investigação em sala de aula*: uma proposta de atividade em salas de aula do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2007.

CASTRO, Juliana Facanali de. *Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004. 197 p.

CHENÉ, Adèle. A narrativa de formação e a formação de formadores. In: NÓVOA, António; FINGER, Matthias (Ed.). *O método (auto)biográfico e a formação*. Lisboa: Departamento de Recursos Humanos - Ministério da Saúde - Centro de Formação e Aperfeiçoamento Profissional, 1986.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Task and activity. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (Eds.). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel, 1986. p. 243–307. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/mestrado-bibliografia.htm>. Acesso em: 28 mai. 2005.

CLANDININ, J.; CONNELLY, M. *Narrative inquiry*: experience and story in qualitative research. São Francisco: Jossey-Bass, 2000.

COSTA, Jorge Luís. *Provas e validações em geometria em um grupo de dimensão colaborativa*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2008.

CRISTÓVãO, Eliane Matesco. Investigando, Começamos a Aprender a Investigar. In: FIORENTINI, Dario; CRISTÓVãO, Eliane Matesco (Org.). *História e investigação de/em aulas de matemática*. Campinas/SP: Editora Alínea, 2006. p. 153–172.

CUNHA, Maria Helena. Saberes profissionais de professores de matemática: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. *Revista Millenium on line*, n. 17, 2000. Disponível em: <www.ipv.pt>. Acesso em: 10 mai. 2005.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pro-Posições*, v. 4, n. 1, p. 35–41, Março 1993.

D'AMORE, Bruno. *Elementos de didática da Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. Tradução: Maria Cristina Bonomi.

DÉCHEN, Tatiane. *Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de álgebra na sexta série do ensino fundamental*: indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia de Ensino) — Centro de Educação e Ciências Humanas da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2008.

DOMINGUES, Hygino H. A demonstração ao longo dos séculos. *Bolema*, n. 18, p. 46–55, 2002.

DOMINICÉ, Pierre. O processo de formação e alguns dos seus componentes relacionais. In: NÓVOA, Antonio; FINGER, Mathias (Org.). *O método (auto) biográfico e formação*. São Paulo: Paulus, 2010. cap. 3, p. 81–95.

ERNEST, Paul. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: ABRANTES, Paulo; LEAL, Leonor Cunha; PONTE, João Pedro da (Org.). *Investigar para*

Aprender Matemática: (textos selecionados). Lisboa: Projeto Matemática para Todos – investigações na sala de aula e Associação dos Professores de Matemática, 1996. p. 25–48.

FERNANDES, Sónia Maria da Silva Garcia. *Actividades de investigação matemática no 1º Ciclo do Ensino Básico*: o contributo dos ambientes de aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) — Departamento de Educação da Universidade Aberta de Lisboa, 2007. Disponível em: <http://repositorioaberto.univ-ab.pt/handle/10400.2/568>. Acesso em: 07 nov. 2010.

FERREIRA, M. S. *Integração das tarefas de investigação matemática nas aulas do primeiro ciclo*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2007.

FIORENTINI, Dario. Grupo de sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: FIORENTINI, Dario; CRISTÓVãO, Eliane Matesco (Org.). *Histórias e investigação de/em aulas de matemática*. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006. p. 13–36.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

FIORENTINI, Dario; NACARATO, Adair Mendes; PINTO, Renata Anastácio. Os saberes da experiência docente em matemática e a formação continuada de professores. *Quadrante*, Lisboa, Portugal, v. 8, p. 33–59, 1999.

FIORENTINI, Dario; SOUZA JR., Arlindo José de; MELO, Gilberto Francisco Alves de. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, Corinta Maria Grisolia; FIORENTINI, Dario; PEREIRA, Elisabete Monteiro de A. (Org.). *Cartografias do trabalho docente*: professor(a)-pesquisador(a). Campinas/SP: Mercado de Letras: Associação de Leitura do Brasil - ALB, 1998. p. 307–335. (Coleção Leituras no Brasil).

FISCHBEIN, Efraim. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, v. 24, n. 2, p. 139–162, 1993.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. 31. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura).

FREIRE, Paulo; FAUNDEZ, Antonio. *Por uma pedagogia da pergunta*. 5. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1985. (Coleção Educação e comunicação: v. 15).

FREITAS, Maria Tereza Menezes. *A escrita no processo de formação contínua do professor de matemática*. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, UNICAMP, 2006.

FREITAS, Maria Tereza Menezes; FIORENTINI, Dario. As possibilidades formativas e investigativas da narrativa em educação matemática. *Horizontes*, Bragança Paulista, v. 25, p. 63–67, 2007.

FULLAN, Michael; HARGREAVES, Andy. *A escola como organização aprendente*: buscando uma educação de qualidade. 2. ed. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000. Tradução: Regina Garcez.

GALVãO, Cecília. Narrativas em educação. *Ciência e Educação*, v. 11, n. 2, p. 327–345, 2005. Disponível em: <www.scielo.br/pdf/ciedu/v11n2/12.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2009.

GAMA, Renata Prenstteter. *Desenvolvimento profissional com apoio de grupos colaborativos*: o caso de professores de matemática em início de carreira. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2007.

GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é matemática? por que ensinar? como se ensina e como se aprende? *Educação*, v. 32, n. 2, p. 176–184, mai/ago 2009. Disponível em: <http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/viewFile/5516/4014>. Acesso em: 10 dez. 2011.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. As demonstrações em educação matemática: um ensaio. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, n. 18, p. 73–81, 2002. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema/Bolema%2018.pdf>. Acesso em: 18 out. 2010.

____. História oral e educação matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loyola (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 77–98.

____. Notas sobre narrativa e educação matemática. In: LOPES, Celi Espasandin; NACARATO, Adair Mendes (Org.). *Educação matemática, leitura e escrita*: armadilhas, utopias e realidades. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2009. p. 79–99. Série Educação Matemática.

GAUTHIER, Clermont; MARTINEAU, Stéphane; DESBIENS, Jean-Francois; MALO, Annie; SIMARD, Denis. *Por uma teoria da pedagogia*: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Ijuí, RS: Editora Unijuí, 1998. Trad. Francisco Pereira (Coleção Fronteiras da Educação).

GODINHO, R. M. P. *As actividades de investigação em Educação Matemática num contexto inclusivo no primeiro ciclo do Ensino Básico*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2007.

GOLDENBERG, E. Paul. Quatro funções da investigação na aula de matemática. In: ABRANTES, Paulo; PONTE, João Pedro da; FONSECA, Helena; BRUNHEIRA, Lina (Org.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: Grupo "Matemática Para Todos - investigações na sala de aula"(CIEFCUL) e Associação de Professores de Matemática, 1999. p. 35–49.

GOMES, Adriana Aparecida Molina. *Aulas investigativas na educação de jovens e adultos (EJA)*: o movimento de mobilizar-se e apropriar-se de saber(es) matemático(s) e profissional(is). Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2007.

GRANDO, Regina Célia; MARCO, Fabiana Fiorezi de. O movimento da resolução de problemas em situações com jogo na produção do conhecimento matemático. In: *Múltiplos olhares*: matemática e produção de conhecimento. São Paulo: Musa Editora, 2007, (Musa Educação Matemática, v. 3). p. 95–118.

GRANDO, Regina Célia; NACARATO, Adair Mendes; GONçALVES, Luci Mara Gotardo. Compartilhando saberes em geometria:: investigando e aprendendo com nossos alunos. *Caderno Cedes*, v. 28, n. 74, p. 39–56, jan./abr. 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S0101-32622008000100004>. Acesso em: 10 ago 2010.

LAMONATO, Maiza. *Investigando geometria*: aprendizagens de professoras da Educação Infantil. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia de Ensino) — Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação e Ciências Humanas da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2007. 244p.

LARROSA-BONDÍA, Jorge. Notas sobre a experiência e o saber da experiência. *Revista Brasileira de Educação*, n. 19, p. 20–28, Jan/Fev/Mar/Abr 2002.

LIMA, Claudia Neves do Monte Freitas de. *Investigação da própria prática docente utilizando tarefas exploratório-investigativas em um ambiente de comunicação de idéias matemáticas no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade São Francisco, Mestrado em Educação, 2006.

LOPES, Ana Vieira; BERNARDES, António; CRISTINA, Loureiro; VARANDAS, José Manuel; OLIVEIRA, Maria José C.; DELGADO, Maria José; BASTOS, Rita; GRAçA, Teresa. *Actividades matemáticas na sala de aula*. 3. ed. Lisboa: Texto Editora, 1996. 127 p.

LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar geometria? *A Educação Matemática em Revista*, n. 4, p. 3–13, 1 semestre 1995.

LOURENçO, Marcos Luiz. A demonstração com informática aplicada à educação. *Bolema*, n. 18, p. 82–92, 2002.

MACENA, Marta Maria Maurício. *Contribuições da investigação em sala de aula para uma aprendizagem das secções cônicas com significado*. Dissertação (Mestrado em

Ensino de Ciências Naturais e Matemática) — Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, 2007.

MATOS, José Manuel; SERRAZINA, Maria de Lurdes. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996. 294 p.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti; REALI, Aline Maria de Medeiros Rodrigues; REYES, Cláudia Raimundo; MARTUCCI, Elisabeth Márcia; LIMA, Emília Freitas de; TANCREDI, Regina Maria Simões Puccinelli; MELLO, Roseli Rodrigues de. *Escola e Aprendizagem da Docência*: Processos de investigação e formação. São Carlos: EdUFSCar/INEP/COMPED, 2003. 203p.

NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, v. 9, n. 9-10, p. 1–6, 2004–2005. Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/RevEdMatVol9.pdf>. Acesso em: 12 out. 2010.

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2009. (Tendências em Educação Matemática).

NACARATO, Adair Mendes; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. *A Geometria nas séries iniciais*: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

NASSER, Lilian; TINOCO, Lucia A. de A. *Argumentação e provas no ensino de matemática*. 2 ed.. ed. [S.l.]: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

NÓVOA, António. A formação tem de passar por aqui: as história de vida no Projecto Prosalus. In: *O método (auto)biográfico e a formação*. [S.l.]: Departamento de Recursos Humanos - Ministério da Saúde e Centro de Formação e Aperfeiçoamento Profissional, 1988.

____. Os professores e as histórias da sua vida. In: NÓVOA, António (Org.). *Vidas de Professores*. Porto: Porto Editora, 1992. p. 11–30.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké*, v. 4, n. 6, p. 65–74, jul/dez 1996.

____. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. In: *23a. Reunião Anual da Anped. Anais...* Caxambu, MG: Anped, 2000. Disponível em: <www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1919t.PDF>. Acesso em: 20 mar. 07.

____. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. *Representações, interpretações e prática pedagógica*: a geometria na sala de aula. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2000.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Que geometria acontece na sala de aula? In: MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti; REALI, Aline Maria de Medeiros Rodrigues (Org.). *Processos formativos da docência*: conteúdos e práticas. São Carlos: EdUFSCar, 2005. p. 17–44.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion; OLIVEIRA, Rosa Maria Moraes Anunciato de. Elaborando histórias infantis com conteúdo matemático: uma contribuição para a formação de professores. In: MENDES, Jackeline Rodrigues; GRANDO, Regina Célia (Org.). *Múltiplos olhares*: matemática e produção de conhecimento. São Paulo: Musa Editora, 2007. v. 3, p. 119–135.

PASSOS, Cármén Lúcia Brancaglion; ZUFFI, Edna Maria; MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel; LAMONATO, Maiza; GONçALVES, Jean Piton; SOUZA, Raquel Duarte de; SOUZA, Verônica Simão Esteves de; CAMPAñA, Thelma Cardinal Duarte; SOUZA, Jacqueline P. de. Investigações geométricas no contexto de uma escola pública brasileira. In: *ACTAS V CIBEM - Congresso Ibero-americano de Educação Matemática*. Porto, Portugal: APM-Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005. p. 1–15.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Zetetiké*, v. 1, n. 1, p. 7–17, março 1993.

PEIRCE, Charles Sanders. *Semiótica*. São Paulo: Perspectiva, 1977.

PERDIGãO, Manfredo. Considerações sobre o ensino da matemática. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, v. 5, n. 1, p. 105–112, 1974.

PLACCO, Vera Maria Nigro de Souza; SOUZA, Vera Lucia Trevisan de. *Aprendizagem do adulto professor*. São Paulo: Edições Loyola, 2006.

PONTE, João Pedro; SERRAZINA, Lurdes. *Didáctica da Matemática para o 1o. ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

PONTE, João Pedro da. O desenvolvimento profissional do professor de matemática. *Educação e Matemática*, n. 31, p. 9–12 e 20, 1994. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/94-Ponte(Educ&Mat).rtf>. Acesso em: 27 jun. 2006.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PONTE, João Pedro da; OLIVEIRA, Hélia; BRUNHEIRA, Lina; VARANDAS, José Manuel; FERREIRA, Catarina. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, v. 7 (2), p. 41–70, 1998. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/98-Ponte-etc(Quadrante-MPT).doc>. Acesso em: 08 mai. 2005.

POWELL, Arthur B.; FRANCISCO, John M.; MAHER, Carolyn A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de idéias e raciocínios matemáticos de estudantes. *Bolema*, n. 21, p. 81–140, 2004. Tradução: Antonio Olimpio Junior.

POWELL, Arthur B.; FRANCISCO, John M.; MATHER, Carolyn A. An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, n. 22, p. 405–435, 2003.

POWELL, Arthur B.; LÓPEZ, José A. Writing as a Vehicle to Learn Mathematics: A Case Study. In: CONOLLY, P.; VILARDI, T. (Ed.). *The Role of Writing in Learning Mathematics and Science*. New York: Teachers College Press, 1989. cap. 13, p. 157–177.

RIESSMAN, C. *Narrative analysis*. California: Sage, 1993.

ROCHA, Luciana Parente; FIORENTINI, Dario. O desafio de ser e constituir-se professor de matemática durante os primeiros anos de docência. In: *Anais da 28a. Reunião Anual da ANPED - Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*. Caxambu/MG: [s.n.], 2005. v. 1, p. 1–17. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/28/inicio.htm>. Acesso em: 27 jun. 2007.

SERRAZINA, Lurdes; VALE, Isabel; FONSECA, Helena; PIMENTEL, Teresa. Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In: PONTE, João Pedro da; COSTA, Conceição; ROSENDO, Ana Isabel; MAIA, Ema; FIGUEIREDO, Nisa; DIONÍSIO, Ana Filipa (Org.). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2002. p. 41–58. Disponível em: <http://www.esec.pt/eventos/xieiem/pdfs/gt1.PDF>. Acesso em: 03 ago. 2005.

SHOR, Ira; FREIRE, Paulo. *Medo e ousadia*: o cotidiano do professor. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1986. (Tradução: Adriana Lopez).

SHULMAN, Lee S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Reseacher*, n. 15(2), p. 4–14, 1986.

____. Professional Development: Learning from Experience. In: WILSON, Suzanne M. (Ed.). *The wisdom of pratice*: essays on teaching, learning and learning to teach. 1. ed. United States of America: Jossey-Bass, 2004, (The Jossey-Bass higher and adult educational series). cap. 21, p. 501–520.

SIEGEL, Marjorie; BORASI, Raffaella. Demystifyng mathematics education throught inquiry. In: ERNEST, Paul (Ed.). *Constructing Mathematical Knowledge*: Epistemology and mathematics education. 2. ed. London: The Falmer Press, 1994, (Studies in Mathematics Education Series: 4). cap. 16, p. 201–214.

SILVA, Jairo José da. A demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, p. 68–78, 2002.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, n. 14, p. 66–91, 2000.

SOUZA, Elizeu Clementino de. *O Conhecimento de si*: estágio e narrativa de formação de professores. 1. ed. Rio de Janeiro: DP&A Editora, 2006. 205 p.

VARANDAS, José Manuel. *A avaliação de investigações matemáticas*: uma experiência. Dissertação (Mestrado em Educação) — Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal., 2000. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/jvarandas/index.htm>. Acesso em: 13 nov. 2010.

VELOSO, Eduardo. Ensino da geometria: Ideias para um futuro melhor. In: VELOSO, Eduardo; FONSECA, Helena; PONTE, João Pedro da; ABRANTES, Paulo (Org.). *Ensino da geometria no virar do milénio*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999. p. 17–32.

VILLIERS, Michael de. Developing understanding for different roles of proof in dynamic geometry. In: *Actas do ProfMat 2002*. Visue, Portugal: [s.n.], 2002. p. 1–12. Tradução de Rita Bastos. Disponível em: <mzone.mweb.co.za/residents/profmd/profmat.pdf>. Acesso em: 13 set. 2010.

____. The value of experimentation in mathematics. In: *Proceedings of 9th National Congress of AMESA*. Cape Town: [s.n.], 2003. p. 174–185. Disponível em: <mzone.mweb.co.za/residents/profmd/experiment.pdf>. Acesso em: 13 set. 2010.

____. Dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 35, n. 5, p. 703–724, 2004. Disponível em: <http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/vanhiele.pdf>. Acesso em: 13 set. 2010.

WILSON, Suzanne M.; SHULMAN, Lee S.; RICHERT, Anna E. 150 different ways' of knowing: representations of knowledge in teaching. In: CALDERHEAD, James (Ed.). *Exploring Teachers' Thinking*. London: Cassel Educational Limited, 1987. p. 104–124.

Apêndice A — Cronograma resumido das atividades do grupo.

1^o encontro (02 set. 2009)

Reunião inicial.

Apresentação das professoras e os interesses em participar do grupo.

Apresentação dos objetivos do trabalho do grupo e sua relação com a pesquisa.

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

2^o encontro: (16 set. 2009)

Tarefa *Juntando quadrados...* e a atividade decorrente.

3^o encontro: (23 set. 2009)

Sistematização da atividade *Juntando quadrados...* a partir dos registros escritos das professoras participantes e da transcrição da videogravação do encontro anterior.

4^o encontro: (30 set. 2009)

Tarefa *Juntando quadrados de novo...* e a atividade decorrente.

Discussão de atividades com poliminós.

5^o encontro: (07 out. 2009)

Não houve encontro devido a um temporal.

6^o encontro: (14 out. 2009)

Socialização e sistematização da atividade *Riscando cubos e economizando papel*.

Planejamento de atividades para serem desenvolvidas com os alunos e reflexões sobre as características da exploração-investigação matemática a partir das atividades desenvolvidas.

7^o encontro: (21 out. 2009)

Narrativa da Andréa sobre sua própria prática.

Narrativas da Léia e minha sobre atividade desenvolvida em sua sala de aula.

Comentários das professoras sobre problemas do cotidiano escolar, principalmente sobre a Prova Brasil para os alunos da 4 série e sobre os critérios de aprovação e reprovação dos alunos.

8º encontro: (28 out. 2009)

Narrativa da Andréa sobre a *Pavimentando retângulos com as planificações do cubo* e com *Pavimentando retângulos com triminós*.

Leitura do Capítulo *Investigação Matemática* (LAMONATO, 2007)

9º encontro: (04 nov. 2009)

Narrativa da Léia sobre suas experiências anterior com geometria e apresentação de uma atividade já realizada em sala de aula.

Planejamento de aulas para Léia, Andréa e Gisele.

10º encontro: (11 nov. 2009)

Reflexões sobre a exploração-investigação matemática e a filosofia para crianças.

11º encontro: (18 nov. 2009)

Reelaboração de tarefa com caracteristicas exploratório-investigativas a partir de uma tarefa presente em um material didático (Tarefa *Formas que compõem formas*).

Narrativa de Cidinha sobre sua própria prática.

12º encontro: (25 nov. 2009)

Discussões sobre a exploração-investigação e outro texto proposto por Gisele a partir de suas leituras individuais.

Tarefa *Formas que compõem formas* e a atividade decorrente.

13º encontro: (02 dez. 2009) Discussões sobre a permanência na carreira frente aos processos seletivos da rede estadual e municipal (Preocupações de Cidinha e de Léia).

Tarefa *Polígonos diversos e muito mais (Arranjos Geométricos)* e a atividade decorrente.

14º encontro: (09 dez. 2009)

Tarefa *Montando poliedros* e a atividade decorrente.

15º encontro: (11 dez. 2009)

Discussões sobre a exploração-investigação em salas de aulas com crianças não-leitoras.

Encerramento das atividades com discussões/reflexões das aprendizagens ocorridas.

16^o encontro: (04 fev. 2010)

Apresentação de Gisele sobre seu plano de aula envolvendo o tangram, a partir das reflexões sobre sua prática de atividades que já realizou em sala de aula. Tarefa *Montando e representando um quarto em miniatura* e atividade decorrente. Minha narrativa sobre atividades anteriores do grupo. Discussões sobre o planejamento de aula de Cidinha e discussões sobre as especificidades dos alunos de sua classe de 4ano.

17^o encontro: (10 fev. 2010)

Narrativa da Gisele sobre sua própria prática.

Tarefa *Investigando figuras geométricas com o tangram* e a atividade decorrente.

18^o encontro: (17 fev. 2010)

Continuação da atividade.

Escrita de narrativa coletiva sistematizando a atividade *Investigando figuras geométricas com o tangram*.

19^o encontro: (24 fev. 2010)

Narrativa de Andréa sobre sua própria prática. Elaboração de mapas conceituais sobre Espaço e Forma nos anos iniciais do Ensino Fundamental a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

20^o encontro: (01 mar. 2010)

Representação de deslocamentos. Elaboração de tarefa com características exploratório-investigativas a partir de uma dada tarefa.

Tarefa *Montando um quarto*.

Discussão sobre a representação plana de objetos tridimensionais.

21^o encontro: (08 mar. 2010)

Leitura dos objetivos e conteúdos do campo Espaço e Forma de Brasil (1997)

Discussão sobre o planejamento de aulas de Cidinha.

Narrativa de Léia sobre sua própria prática. Tarefa *Investigando quadrados com o tangram* e a atividade decorrente.

22^o encontro: (15 mar. 2010)

Discussão sobre o planejamento de aula de Natália.

Sistematização da atividade *Investigando quadrados com o tangram*.

23^o encontro: (22 mar. 2010)

Cancelamento do encontro por falta de energia elétrica.

24^o encontro: (29 mar. 2010)

Construção do quadrado formado pelas sete peças do tangram utilizando dobraduras.

Elaboração de um texto coletivo instrucional para a construção do quadrado formadopelas sete peças do tangram.

25^o encontro: (05 abr. 2010)

Preparação de materiais para trabalhar com o tangram em sala de aula.

26^o encontro: (12 abr. 2010)

Discussão de atividades com o uso do tangram em sala de aula.

27^o encontro: (19 abr. 2010)

Narrativa de Natália sobre sua própria prática.

Planejamento de aula para a classe de Natália.

28^o encontro: (26 abr. 2010)

Sistematização de atividade *Investigando quadrados em uma malha triangular*.

Minha narrativa sobre a atividade *Investigando quadrados em uma malha triangular*.

Narrativa de Gisele sobre sua própria prática.

28^o encontro: (03 mai. 2010)

Narrativa de Natália e minha sobre atividade na classe de Natália.

Narrativa de Cidinha sobre sua própria prática.

29^o encontro: (10 mai. 2010)

Narrativa de Léia sobre sua prática.

Discussão sobre aspectos da exploração-investigação no cotidiano da sala de aula.

Discussão sobre os registros dos alunos da Natália durante a atividade *São quadrados?*

30^o encontro: (17 mai. 2010)

Narrativa da Natália sobre a atividade *São retângulos?* e discussão dos registros dos alunos.

31^o encontro: (24 mai. 2010)

Planejamento de aula de Natália.

Narrativa de Léia sobre sua própria prática.

32^o encontro: (31 mai. 2010)

Discussão sobre os registros dos alunos de Cidinha.

Discussão sobre a aprendizagem de matemática ao longo da vida discente.

33^o encontro: (07 jun. 2010)

Narrativa de Natália e minha sobre a atividade *São triângulos?*.

Reelaboração de tarefa: de problema fechado para a exploração-investigação matemática.

34^o encontro: (14 jun. 2010)

Reelaboração de tarefa (*Quadriculados*): de problema fechado para a exploração-investigação matemática.

Desenvolvimento da atividade e registro de atividades desenvolvidas no espaço da sala de aula para o papel.

35^o encontro: (21 jun. 2010)

Tarefa *Construindo com cubos* e atividade decorrente.

Discussão sobre a atividade realizada.

36^o encontro: (28 jun. 2010)

Reflexões compartilhadas e encerramento das atividades.

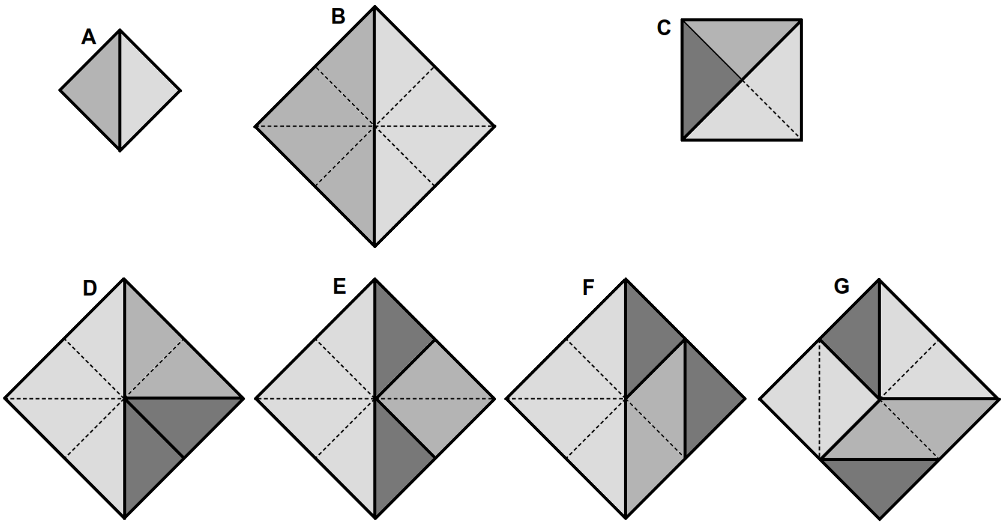
Apêndice B — Investigando a formação do quadrado com seis peças do tangram.

Neste apêndice apresento uma investigação desenvolvida por mim sobre a possibilidade de se formar um quadrado com seis peças do tangram que surgiu durante as discussões no grupo com as professoras quando estavam investigando a formação de quadrados com duas a sete peças do tangram (Seção 2.5 — *Investigando quadrados com o tangram.*, página 157). Naquele momento a atividade direcionou-se para a reflexão do paralelogramo durante a formação do quadrado de sete peças. Entretanto, movida pela minha curiosidade, após a transcrição das videogravações daquele encontro, desenvolvi o texto a seguir. Mesmo concordando com Villiers (2002) de que uma das funções da demonstração é para confirmar uma declaração previamente admitida como verdadeira, nesse caso, eu procurava um modo de demonstrar a impossibilidade de se formar um quadrado com seis peças para eu ter esse certeza. Assim, tanto a parte de dúvida quanto a parte de certeza me inquietavam para uma prova.

Ao analisar os quadrados formados com duas, três, quatro ou cinco peças do tangram percebi que estes podem ser recobertos com o triângulos menores, conforme mostro na Figura 1, deixando nos segmentos pontilhados a indicação da pavimentação com triângulos menores , sendo:

- Figura A: quadrado com duas peças — dois triângulos menores;
- Figura B: quadrado com duas peças — dois triângulos maiores;
- Figura C: quadrado com três peças — dois triângulos menores e um triângulo médio;
- Figura D: quadrado com quatro peças — dois triângulos menores, um triângulo maior e um triângulo médio;
- Figura E: quadrado com quatro peças — dois triângulos menores, um triângulo maior e um quadrado;
- Figura F: quadrado com quatro peças — dois triângulos menores, um triângulo maior e um paralelogramo;
- Figura G: quadrado com cinco peças — dois triângulos menores, um paralelogramo, um triângulo médio e um quadrado.

Figura 1 – Quadrados com duas, com três, com quatro e com cinco peças do tangram.



(Imagem elaborada pela pesquisadora.)

Ao determinar a área de cada um dos quadrados (Figura 1) formados, tendo como unidade o triângulo menor, obtive:

- Figura A (2 peças): 2 unidades;
- Figura B (2 peças): 8 unidades;
- Figura C (3 peças): 4 unidades;
- Figura D (4 peças): 8 unidades;
- Figura E (4 peças): 8 unidades;
- Figura F (4 peças): 8 unidades;
- Figura G (5 peças): 8 unidades.

Ou seja, todos os quadrados formados têm como serem recortados nos triângulos menores pois estes são as unidades que constituem todas as peças do tangram. Ainda, todos os quadrados formados têm como lado um ou dois catetos do triângulo menor.

Acrescentando-se a esses dados o quadrado formado pelas sete peças do tangram, temos: 16 unidades — sete peças. Nesse caso, o lado equivale a quatro catetos do triângulo menor.

Com isso, um quadrado formado por seis peças deveria ter uma área que varia de 8 unidades a 16 unidades (triângulo menor).

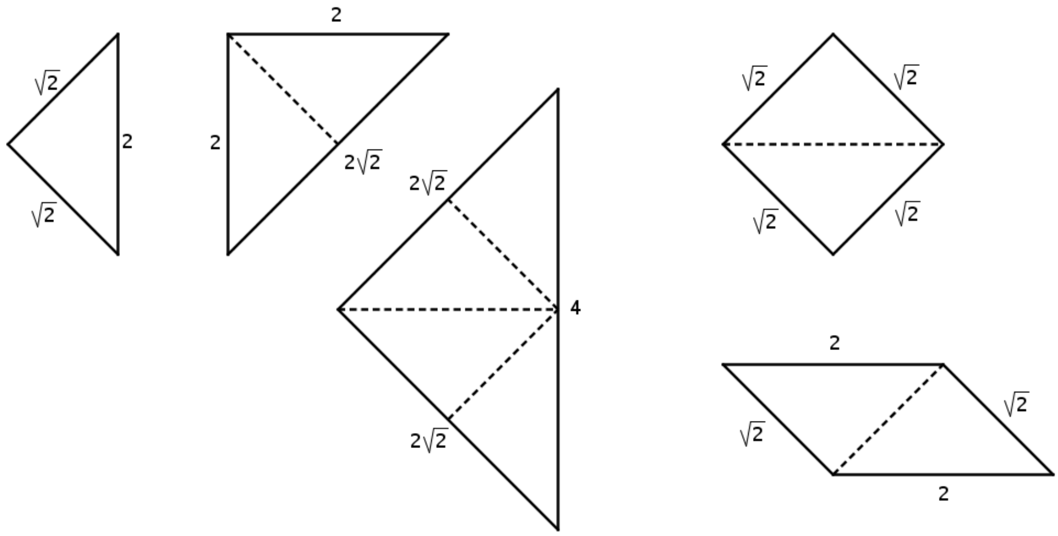
A área de cada uma das peças do tangram, considerando o triângulo menor como unidade de área é:

- triângulo maior: 4 unidades de área (4 triângulos menores);
- triângulo médio: 2 unidades de área (2 triângulos menores);
- triângulo menor: 1 unidade de área;
- quadrado: 2 unidades de área (2 triângulos menores);
- paralelogramo: 2 unidades de área (2 triângulos menores).

Se o triângulo menor é considerado como unidade de área, podemos admitir que seus lados têm as seguintes medidas: os catetos medem $\sqrt{2}$ e a hipotenusa é igual a 2. Então as peças do tangram têm as seguintes medidas em seus lados (Figura 2):

- triângulo menor: catetos medem $\sqrt{2}$ e hipotenusa mede 2;
- triângulo médio: catetos medem 2 e hipotenusa mede $2\sqrt{2}$;
- triângulo maior: catetos medem $2\sqrt{2}$ e a hipotenusa mede 4;
- quadrado: lados medem $\sqrt{2}$;
- paralelogramo: dois lados medem $\sqrt{2}$ e os outros dois lados medem 2.

Figura 2 – Uma possibilidade de medidas dos lados das peças do tangram tendo o triângulo menor como unidade de área.



(Imagem elaborada pela pesquisadora.)

No tangram completo temos peças com 4, 4, 2, 1, 1, 2 e 2 unidades. Ao invés de combinarmos a soma de seis desses números para formar o quadrado com as seis peças, totalizando área entre 8 e 16, podemos fazer 5 tentativas, retirando, em cada caso, uma das peças do total 16 (4 + 4 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2). Com isso:

- Se retirarmos um triângulo maior então a área do quadrado esperado é de (16 – 4) 12 triângulos menores, que é o mesmo que 6 quadrados do tangram, incidindo em lado do quadrado esperado igual a $\sqrt{6}$.

- Se retirarmos um quadrado então a área do quadrado esperado é de (16 – 2) 14 triângulos menores, que é o mesmo que 7 quadrados do tangram, incidindo em lado do quadrado esperado igual a $\sqrt{7}$.

- Se retirarmos um paralelogramo então a área do quadrado esperado é de (16 – 2) 14 triângulos menores, que é o mesmo que 7 quadrados do tangram, incidindo em lado do quadrado esperado igual a $\sqrt{7}$.

- Se retirarmos um triângulo médio então a área do quadrado esperado é de (16 – 2)

14 triângulos menores, que é o mesmo que 7 quadrados do tangram, incidindo em lado do quadrado esperado igual a $\sqrt{7}$.

- Se retirarmos um triângulo menor então a área do quadrado esperado é de (16 – 1) 15 triângulos menores, que é o mesmo que 7,5 quadrados do tangram, incidindo em lado do quadrado esperado igual a $\sqrt{7,5}$.

Todos os valores dos lados dos quadrados esperados ($\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ e $\sqrt{7,5}$) não podem ser obtidos pela soma dos lados das peças (2, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ e 4). Logo, os quadrados pretendidos com quaisquer um dos agrupamentos de seis peças não podem ser formados.

Com a certeza de que não há quadrados que possam ser formados com as seis peças do tangram, no encontro seguinte, optei por não chegar com “minha resposta” às professoras. Seguimos a discussão sobre a reflexão do paralelogramo no triângulo de sete peças e, posteriormente, levei às professoras a prova que conduzi para apresentar-lhes. Quando o fiz elas acompanharam, mas já não demonstravam querer realizar esta investigação.