

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**“Um circuito quântico para a correlação dos sinais  
do Arranjo Decimétrico Brasileiro (BDA)”**

**Renato de Oliveira Violin**

**Orientação:** Prof. Dr. José Hiroki Saito

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em ciência da computação, como parte dos requisitos para obtenção de grau de Mestre em Ciência da Computação.

São Carlos – SP  
Agosto – 2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

V795cq

Violin, Renato de Oliveira.

Um circuito quântico para a correlação dos sinais do Arranjo Decimétrico Brasileiro (BDA) / Renato de Oliveira Violin. -- São Carlos : UFSCar, 2013.  
132 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Computação quântica. 2. Somador quântico. 3. Transformada de Fourier quântica. 4. Radioastronomia. 5. Correlação de sinais complexos. I. Título.

CDD: 004.1 (20<sup>a</sup>)

# Universidade Federal de São Carlos

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

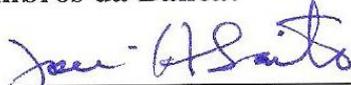
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

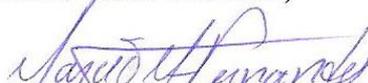
## “Um circuito quântico para a correlação dos sinais do Arranjo Decimétrico Brasileira (BDA)”

RENATO DE OLIVEIRA VIOLIN

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação

Membros da Banca:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Hiroki Saito  
(Orientador - DC/UFSCar)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Márcio Merino Fernandes  
(DC/UFSCar)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José de Oliveira Guimarães  
(UFSCar/Sorocaba)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Luiz Otávio Murta Jr.  
(FFCL - RP/USP)

São Carlos  
Agosto/2010

*A Deus pela força sem a qual nada teria feito,  
Aos meus pais Celso e Ofélia  
A minha namorada Letícia*

## **Agradecimentos**

Primeiramente e acima de tudo, agradeço a Deus por ter me guiado principalmente nos momentos de dificuldades durante a execução desse trabalho.

Agradeço também a meus pais que me proporcionaram a educação a qual me possibilitou estar defendendo este título de Mestre.

Agradeço a minha namorada, Letícia, por ter aceitado e compreendido minhas ausências durante esta fase de minha vida.

Agradeço aos colegas do grupo de estudos GAPIS: Alexandre, Denis, Eduardo, Michelle, Débora, Marcos, Marcelo e João pela ajuda, principalmente no início do curso.

Por fim, e de modo muito especial, agradeço ao Prof. Dr. José Hiroki Saito, que não mediu esforços durante essa jornada, me guiando, ajudando e motivando durante todo este curso.

A todos esses, meus sinceros agradecimentos.

## Resumo

A computação quântica é uma forma de realizar a computação com base na física quântica. Desde seu surgimento em 1985, ela promete revolucionar a forma de processar os dados. Trabalhos já desenvolvidos provam que a computação quântica, dadas suas características só encontradas graças à física quântica, oferece um poder de processamento superior à computação clássica (computação convencional). O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um circuito quântico que realiza a correlação dos sinais para o Arranjo Decimétrico Brasileiro (BDA), um radiointerferômetro que está sendo desenvolvido pelo INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) com o objetivo de visualizar objetos celestes por meio da detecção de radiofrequências emitidas pelos mesmos. Foram estudados alguns possíveis circuitos quânticos e os mesmos foram comparados com o circuito convencional utilizado no BDA, quanto a quantidade de operações necessárias para se realizar a correlação, durante um período de integração de 100 ms. Os resultados mostram que o circuito quântico proposto necessita de uma quantidade menor de operações em relação ao circuito convencional. Assim, o circuito quântico proposto é mais eficiente que o circuito convencional.

**Palavras-chave:** computação quântica, somador quântico, transformada de Fourier quântica, radioastronomia, correlação.

## Abstract

Quantum computation is a way to perform the computation based on the quantum physics. Since it is appeared in 1985, it promises a revolution in the data processing. Works that had already been done prove that quantum computation, regarding its features that comes from quantum physics, provides a better power computation than the classical computation.

The goal of this work is to develop a quantum circuit that performs the correlation of the BDA (Brazilian Decimetric Array), a radiointerferometer that has been developed by INPE (National Institute of Space Research) to visualize cosmic objects through the detection of radiofrequencies radiated by these objects.

It was studied some possible quantum circuits and made comparisons with the classical correlator circuit used in BDA. The comparison was made with respect to the number of operations needed to process the correlation in a integration period of 100 ms. The results show that the developed quantum correlator circuit uses less operations than the classical one, proving that the developed quantum circuit is more efficient than the corresponding classical circuit.

**Keywords:** quantum computation, quantum adder, quantum Fourier transform, radioastronomy, correlation.

## Lista de Figuras

Figura 2.1. Diferentes imagens do Sol. (a) Obtida por um telescópio óptico [9]; (b) obtida por um radiotelescópio [7]; (c) obtida por uma nave espacial utilizando sinal ultravioleta [9].	5
Figura 2.2. Espectro eletromagnético [8].	7
Figura 2.3. Sinais em diferentes frequências e suas respectivas técnicas para receptá-los [3].	8
Figura 2.4. Imagem noturna do céu como se fosse obtida por um radiotelescópio [3].	9
Figura 2.5. Radiação de um corpo negro para objetos com três temperaturas diferentes. Nota-se que, com altas temperaturas os objetos emitem radiação eletromagnética em comprimentos de onda menores [7].	11
Figura 2.6. Espiral formado pelos elétrons ao redor do campo magnético.	12
Figura 2.7. Tipos de antena. (a) dipolo; (b) Yagi; (c) Espiral. [10].	14
Figura 2.8. Diferentes radiotelescópios [7].	15
Figura 2.9. Tipos de ajuste de foco. (a) <i>prime focus</i> ; (b) <i>Cassegrain focus</i> ; (c) <i>Naysmith focus</i> ; (d) <i>offset Cassegrain focus</i> [1].	16
Figura 2.10. Elementos de um radiotelescópio [10].	16
Figura 2.11. Resolução angular.	18
Figura 2.12. Efeito da resolução angular para ondas com $\lambda = 20$ cm. (a) $D = 30$ m e $R = 30$ arc min; (b) $D = 80$ e $R = 10$ arc min; (c) $D = 1.6$ Km e $R = 0.23$ arc sec. [11].	18
Figura 2.13. Diagrama de blocos de um radiointerferômetro [10].	21
Figura 2.14. Exemplo de diferentes resoluções angulares [15].	22
Figura 2.15. Esquema de um interferômetro mostrando a linha base e a diferença do caminho da onda, que deve ser compensada utilizando um <i>delay</i> [1].	23
Figura 2.16. Exemplo da técnica de <i>aperture synthesis</i> [13].	24
Figura 3.1. Arranjo linear com $n_a = 5$ antenas [14].	28
Figura 3.2. Arranjo com mínima redundância [1] [14].	28
Figura 3.3. Arranjo com uma antena móvel [1].	29
Figura 3.4. Arranjo em cruz (acima) e em T (abaixo) com suas respectivas coberturas no plano $(u, v)$ [14].	30
Figura 3.5. Arranjo em Y [1].	30
Figura 3.6. BDA em sua primeira fase, instalado no campus do INPE em São José dos Campos [14].	32
Figura 3.7. BDA instalado no campus do INPE em Cachoeira Paulista [14].	33
Figura 3.8. Figura artística do BDA quando for concluída a segunda fase [14].	33
Figura 3.9. Esquema dos módulos computacionais utilizados no BDA [14].	34
Figura 3.10. Correlacionador <i>Jive</i> que utiliza o modelo de correlação XF [15].	36
Figura 3.12. Circuito de correlação (parte real) de 1 bit com acumulador de 22 bits.	38
Figura 3.13. Somador 1 bit para a soma das correlações.	38
Figura 3.14. Circuito acumulador de 22 bits.	39
Figura 3.15. Circuito somador completo.	39
Figura 4.1 Circuito quântico utilizando uma porta quântica U-controlada [49].	49

Figura 4.2. Representação da porta Pauli I.....	50
Figura 4.3. Representação da porta Pauli X.....	51
Figura 4.4. Representação da porta Pauli Y.....	51
Figura 4.5. Representação da porta Pauli Z.....	52
Figura 4.6. Representação da porta Phase S.....	52
Figura 4.7. Representação da porta de rotação $\pi/8$ .....	53
Figura 4.8. Representação da porta Hadamard H.....	53
Figura 4.9. Representação da porta CNOT.....	54
Figura 4.10. Representação da porta Toffoli.....	55
Figura 4.11. Representação da porta Fredkin.....	56
Figura 4.12. Representação da porta arbitrária $U$ .....	57
Figura 4.13. Representação da porta SWAP.....	57
Figura 4.14. Circuito quântico que implementa a QFT.....	62
Figura 4.15. Circuito quântico que implementa a QFT para 3 qubits.....	63
Figura 4.16. Circuito para QFT quando $n = 4$ e $k = 4$ .....	65
Figura 4.17. Circuito para AQFT quando $n = 4$ e $k = 2$ .....	66
Figura 5.1. Circuito quântico somador “Vedral” [74].....	70
Figura 5.2. Blocos CARRY e SUM utilizados no circuito somador “Vedral” [74].....	70
Figura 5.3. Quantidade de portas quânticas para implementar o somador “Vedral”.....	72
Figura 5.4. Circuito quântico somador “Cuccaro” [78].....	73
Figura 5.5. Blocos MAJ e UMA utilizados no circuito quântico “Cuccaro” [78].....	73
Figura 5.6. Quantidade de portas quânticas para implementar o somador “Cuccaro”.....	74
Figura 5.7. Somador quântico “Draper” [75].....	75
Figura 5.8. Reordenação das portas quânticas no circuito somador Draper. [75].....	77
Figura 5.9. Quantidade de portas quânticas para implementar o somador “Draper”.....	78
Figura 5.10. Comparação entre os circuitos quânticos somadores. Nas implementações QFT e AQFT foram consideradas apenas as portas relacionadas ao circuito somador.....	79
Figura 5.11. Esquema de um acumulador.....	80
Figura 6.1. Parte do circuito que correlaciona e acumula a parte real.....	82
Figura 6.2. Parte do circuito que correlaciona e acumula a parte imaginária.....	83
Figura 6.3. Circuito quântico somador 2 qubits.....	83
Figura 6.4. Circuito quântico somador 2 + 22 utilizado para a acumulação.....	84
Figura 6.5 Uma linha de resultado produzido pelo simulador QCAD.....	87
Figura 6.6. Diagrama ilustrando as operações do correlacionador quântico.....	89
Figura 6.7. Gráfico apresentando o crescimento do número de operações lógicas para o circuito correlacionador convencional.....	92
Figura 6.8. Comparação do número de operações necessárias entre o circuito correlacionador convencional e duas implementações quânticas.....	93

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1. Bandas utilizadas em radioastronomia [7].....	10
Tabela 2.2. Desempenho do radiotelescópio VLA [3]. .....	20
Tabela 3.1. Eficiência da quantização do sinal em função da quantidade de níveis e da taxa de amostragem. Adaptado de d’Addario [18]. .....	41
Tabela 3.2. Número de portas para cada ciclo de correlação do circuito convencional.....	43
Tabela 4.1. Notação utilizada em mecânica quântica [44]. .....	44
Tabela 5.1. Comparação entre os circuitos somadores quânticos. ....	79
Tabela 6.1. Cálculo dos fatores de rotação dado o índice $k$ .....	85
Tabela 6.2. Resultados obtidos a partir do circuito correlacionador quântico .....	88
Tabela 6.3. Número total de operações para 1 ciclo de correlação. ....	90
Tabela 6.4. Comparação sobre o número de operações entre os circuitos para correlação.....	93
Tabela 6.5. Comparação sobre o número de operações entre os circuitos para correlação, considerando amostragem a uma taxa de 10 MHz. ....	94

# Sumário

## CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

1.1 Contexto, motivação e definição do problema .....	1
1.2 Organização do trabalho .....	2

## CAPÍTULO 2: INTRODUÇÃO À RADIOASTRONOMIA E RADIOINTERFEROMETRIA

2.1 Introdução .....	4
2.2 Astronomia .....	4
2.3 Radioastronomia .....	5
2.4 Sinais cósmicos .....	10
2.5 Processos de emissão de sinais de rádio [7] .....	10
2.5.1 <i>Mecanismos termais</i> .....	11
2.6 Mecanismos não-termais .....	12
2.7 Antenas .....	13
2.8 Desempenho da antena .....	17
2.9 Radiotelescópios de uma antena e de arranjo de antenas .....	20
2.10 Síntese de abertura e Síntese de Fourier [12] .....	23
2.11 Correlação .....	25
2.12 Considerações finais .....	26

## CAPÍTULO 3: ARRANJOS INTERFEROMÉTRICOS E O ARRANJO DECIMÉTRICO BRASILEIRO (BDA)

3.1 Introdução .....	27
3.2 Arranjos unidimensionais e bidimensionais .....	27
3.2.1 <i>Arranjo unidimensional</i> .....	28
3.2.2 <i>Arranjo bidimensional</i> .....	29
3.3 O projeto BDA .....	31
3.3.1 <i>Desenvolvimento do BDA</i> .....	32
3.3.2 <i>Sistemas computacionais utilizados no BDA</i> .....	34
3.4 O circuito correlacionador do BDA .....	35
3.5 Estudo da complexidade das operações no circuito correlacionador convencional do BDA .....	37
3.6 Desempenho e custo computacional do circuito correlacionador convencional do BDA .....	40
3.7 Considerações finais .....	43

## CAPÍTULO 4: COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

4.1	Introdução .....	44
4.2	Mecânica Quântica .....	45
4.3	Qubit – quantum bit .....	45
4.4	Notação de Dirac .....	46
4.5	Superposição .....	47
4.6	Emaranhamento .....	48
4.7	Computação Quântica: Portas lógicas e circuitos.....	48
	4.7.1 Portas quânticas de um qubit .....	50
	4.7.2 Portas quânticas de múltiplos qubits .....	54
	4.7.3 Portas quânticas universais .....	58
4.8	Medidas .....	58
4.9	Paralelismo quântico .....	60
4.10	Transformada de Fourier Quântica (QFT).....	61
	4.10.1 Transformada de Fourier quântica aproximada (AQFT).....	64
4.11	Considerações finais .....	66

## CAPÍTULO 5: PROJETO DO CÍRCUITO CORRELACIONADOR QUÂNTICO – ESTUDO DAS OPERAÇÕES QUÂNTICAS

5.1	Introdução .....	67
5.2	Metodologia aplicada .....	67
5.3	Operações quânticas XOR e $\overline{\text{XOR}}$ .....	68
5.4	Operação quântica de soma .....	69
5.5	Circuito quântico somador “Vedral” [74] .....	69
5.6	Circuito quântico somador “Cuccaro” [78] .....	72
5.7	Circuito quântico somador “Draper” [75] .....	74
5.8	Comparação dos circuitos somadores quânticos .....	79
5.9	Operação quântica de acumulação .....	80
5.10	Considerações finais .....	81

## CAPÍTULO 6: PROJETO DO CÍRCUITO CORRELACIONADOR QUÂNTICO – IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

6.1	Introdução .....	82
6.2	O circuito correlacionador quântico .....	82
6.3	Validação do circuito usando simulação .....	86
6.4	Número total de operações do circuito correlacionador quântico .....	88
6.5	Comparativo: circuito convencional x circuito quântico.....	91
6.6	Considerações finais .....	94

## **CAPÍTULO 7: CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS**

7.1 Conclusão .....	96
7.2 Desafios encontrados e proposta de trabalho futuro.....	97

## **APÊNDICE I: CONCEITOS DE ALGEBRA LINEAR IMPORTANTES PARA A COMPUTAÇÃO QUÂNTICA**

1. Operador unitário .....	99
2. Operador Hermitiano .....	100
3. Produto externo.....	100
4. Operador de projeção (Projetor) .....	101
5. Produto tensorial .....	102

## **APÊNDICE II: MEDIDAS PROJETIVAS E A REGRA DE BORN..... 103**

## **APÊNDICE III: PARALELISMO QUÂNTICO E O ALGORITMO DE DEUTSCH ..... 106**

## **APÊNDICE IV: IMPLEMENTAÇÃO FÍSICA DE COMPUTADORES QUÂNTICOS**

1. Ressonância magnética nuclear .....	114
2. Armadilha de íons .....	114
3. Supercondutividade (usado no computador quântico da <i>D-Wave system</i> ) [30] .....	114
4. Pontos quânticos .....	116

## **APÊNDICE V: EXEMPLO DE EMARANHAMENTO..... 117**

## **APÊNDICE VI: CIRCUITO QUÂNTICO CORRELACIONADOR IMPLEMENTADO NO SIMULADOR QCAD ..... 121**

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 127**

# CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

---

## 1.1 Contexto, motivação e definição do problema

A computação quântica é um ramo da computação que estuda a possibilidade de implementar computadores utilizando os princípios da física quântica. Esse estudo originou-se quando o físico Richard Feynman [76] percebeu que não era possível simular, eficientemente, efeitos quânticos em computadores convencionais. De acordo com Feynman, para que fosse possível simular efeitos quânticos, deveria existir um computador em que a informação fosse representada por objetos quânticos, os quais obedeceriam as leis da física quântica.

As propostas para a computação quântica começaram em 1985 com David Deutsch [65] que iniciou a descrição de um modelo de computação quântica semelhante ao modelo de computação da máquina de Turing.

Baseado no fato de que a teoria da computação quântica promete computadores com maior poder de processamento, este trabalho tenta aplicar a computação quântica em uma área de pesquisa que é a radioastronomia.

A radioastronomia é o ramo da astronomia que estuda os objetos celestes por meio das emissões em radiofrequência que estes emitem. No Brasil, o INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais), em parceria com outras instituições, está desenvolvendo um arranjo de antenas parabólicas que forma um radiointerferômetro para observação de fenômenos solares.

O interesse em radioastronomia solar está relacionado com alguns efeitos catastróficos na magnetosfera e ionosfera terrestre, além de afetar artefatos de alta

tecnologia como satélites e outros meios de comunicação, que são altamente sensíveis à atividade solar [14].

Num radiointerferômetro, os sinais elétricos que são captados pelas antenas são amplificados, digitalizados, quantizados, correlacionados e tratados por um módulo de geração de imagens.

A etapa que exige um poder de processamento maior é a correlação. A correlação consiste em multiplicar e acumular os sinais recebidos por cada par de antenas para serem processados posteriormente. Apesar de ser uma operação simples, este processo é feito todo o tempo em que o radiointerferômetro está recebendo sinais, e existem hardwares específicos para realizar esta operação.

Por fim, além de mostrar uma aplicação prática para a computação quântica, este trabalho pretende colaborar com o desenvolvimento tecnológico na área da radioastronomia propondo um novo modelo de circuito correlacionador utilizando, para isso, a computação quântica.

## **1.2 Organização do trabalho**

O presente trabalho está dividido nos seguintes capítulos, além deste capítulo introdutório.

No capítulo 2 é apresentada uma introdução à radioastronomia, onde são apresentados os conceitos sobre radiointerferometria, incluindo uma análise sobre as antenas e seus respectivos detalhes que são importantes para a radioastronomia.

No capítulo 3 são apresentados os arranjos interferométricos com destaque no Arranjo Decimétrico Brasileiro (BDA), dando ênfase maior para o circuito correlacionador.

O capítulo 4 trata sobre a computação quântica, abordando os principais conceitos matemáticos e físicos relacionados com a computação quântica. Este capítulo também descreve as portas e os circuitos quânticos.

O capítulo 5 detalha as operações necessárias para implementar o circuito correlacionador quântico. É também apresentada uma comparação entre os circuitos quântico somadores.

No capítulo 6 é descrito o circuito quântico correlacionador proposto, além de uma comparação entre este e o circuito correlacionador convencional utilizado no BDA.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões, os problemas e as soluções encontrados durante a simulação e sugestões para trabalhos futuros.

Ao final do trabalho encontram-se 6 apêndices que tratam dos seguintes assuntos:

- I. Conceitos de álgebra linear importantes para a computação quântica.
- II. Medidas projetivas e a regra de Born.
- III. Paralelismo quântico e o algoritmo de Deutsch.
- IV. Implementação física de computadores quânticos.
- V. Exemplo de emaranhamento.
- VI. Circuito quântico correlacionador implementado no simulador QCAD.

## **CAPÍTULO 2: INTRODUÇÃO À RADIOASTRONOMIA E RADIOINTERFEROMETRIA**

---

### **2.1 Introdução**

Este capítulo tem como objetivo descrever os conceitos básicos sobre radioastronomia. A astronomia é o estudo dos objetos celestes<sup>1</sup> no universo e seus movimentos. Para isso, existem equipamentos como, por exemplo, telescópios ópticos e radiotelescópios. O uso de radiotelescópios possibilita observar fenômenos não observáveis com a utilização de telescópios ópticos. Aqui abordaremos os conceitos de astronomia relacionados aos radiotelescópios.

Este capítulo tem como objetivo introduzir os conceitos sobre radiointerferometria. Primeiro será feita uma análise sobre as antenas e seus respectivos detalhes que são importantes para a radioastronomia. Em seguida, será feita uma análise e comparação das técnicas de radioastronomia utilizando uma antena (radiotelescópio) e utilizando um arranjo de antenas (radiointerferômetro). Nota-se, no entanto, que o termo radiotelescópio será usado também para os radiointerferômetros ao longo do texto quando a descrição independer do número de antenas. O capítulo termina com comentários sobre a correlação.

### **2.2 Astronomia**

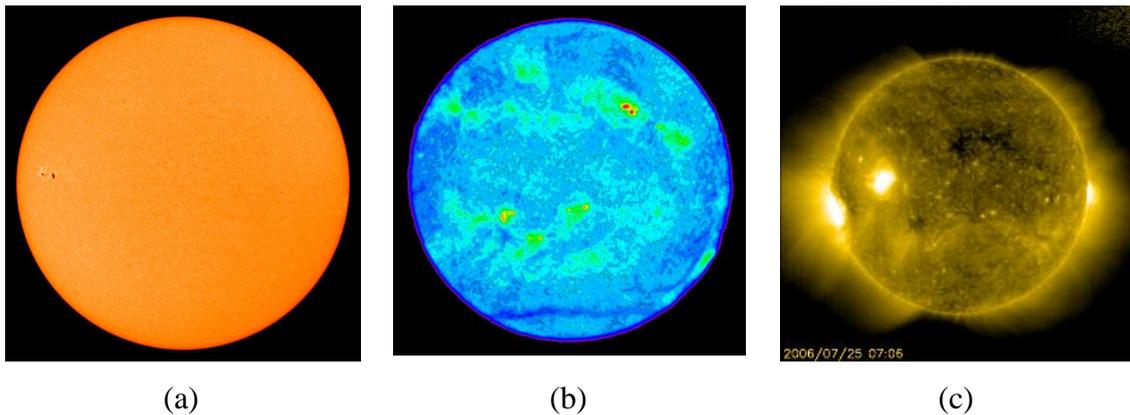
A astronomia é uma área da ciência que estuda os objetos celestes e seus movimentos. Para coletar e analisar esses movimentos, os astrônomos fazem uso de

---

<sup>1</sup> Os objetos celestes são estrelas, planetas, cometas, galáxias etc.

imagens obtidas por dispositivos que podem ser telescópios ópticos, radiotelescópios, dispositivos acoplados a naves espaciais ou satélites que estão em órbita, sendo que os dois últimos são capazes de obter imagens a partir de sinais de alta frequência.

Cada dispositivo fornece imagens de determinadas características do objeto celeste em questão. As figuras a seguir mostram as diferentes imagens obtidas por cada um dos dispositivos citados acima.



**Figura 2.1. Diferentes imagens do Sol. (a) Obtida por um telescópio óptico [9]; (b) obtida por um radiotelescópio [7]; (c) obtida por uma nave espacial utilizando sinal ultravioleta [9].**

As imagens da Figura 2.1 mostram as diferentes formas de visualização de um mesmo objeto celeste, que neste caso é o Sol. A imagem (a) foi obtida por um telescópio óptico, ou seja, os sinais que foram capturados do Sol são raios de luz visível. A imagem (b) foi obtida por um radiotelescópio operando numa frequência de 4.6 GHz. Esta imagem destaca a temperatura do Sol, onde os pontos vermelhos representam a máxima temperatura, cerca de um milhão de graus [7]. A imagem (c) foi obtida pela nave espacial SOHO, operando na faixa das ondas ultravioleta [9].

## 2.3 Radioastronomia

Radioastronomia é o estudo de objetos celestes pela coleta e análise das ondas de rádio que os objetos emitem, da mesma forma que um astrônomo obtém imagens dos objetos celestes utilizando telescópios ópticos que recebem sinais de luz.

Os objetos celestes emitem sinais em diferentes comprimentos de onda. A luz visível é um sinal que tem o comprimento de onda entre 400nm – 700nm, ou seja, o olho humano é capaz de visualizar um pequeno intervalo do espectro eletromagnético

(Figura 2.2). Com o uso de radiotelescópio, é possível visualizar os sinais que possuem outros comprimentos de onda.

Fazendo uso da radioastronomia, cientistas podem visualizar objetos que não são visíveis a olho nu como, por exemplo, sinais de rádio recebidos pelo gás do espaço, poeira e partículas muito energizadas que estão no espaço entre as estrelas. Todos esses objetos não são visíveis a olho nu, pois emitem sinais em frequências que não são perceptíveis ao olho humano [7].

Atualmente, radiotelescópios estão entre as mais poderosas ferramentas disponíveis para astrônomos estudar quase todos os tipos de objetos conhecidos no universo [7].

### The Electromagnetic Spectrum: Wavelength/frequency chart

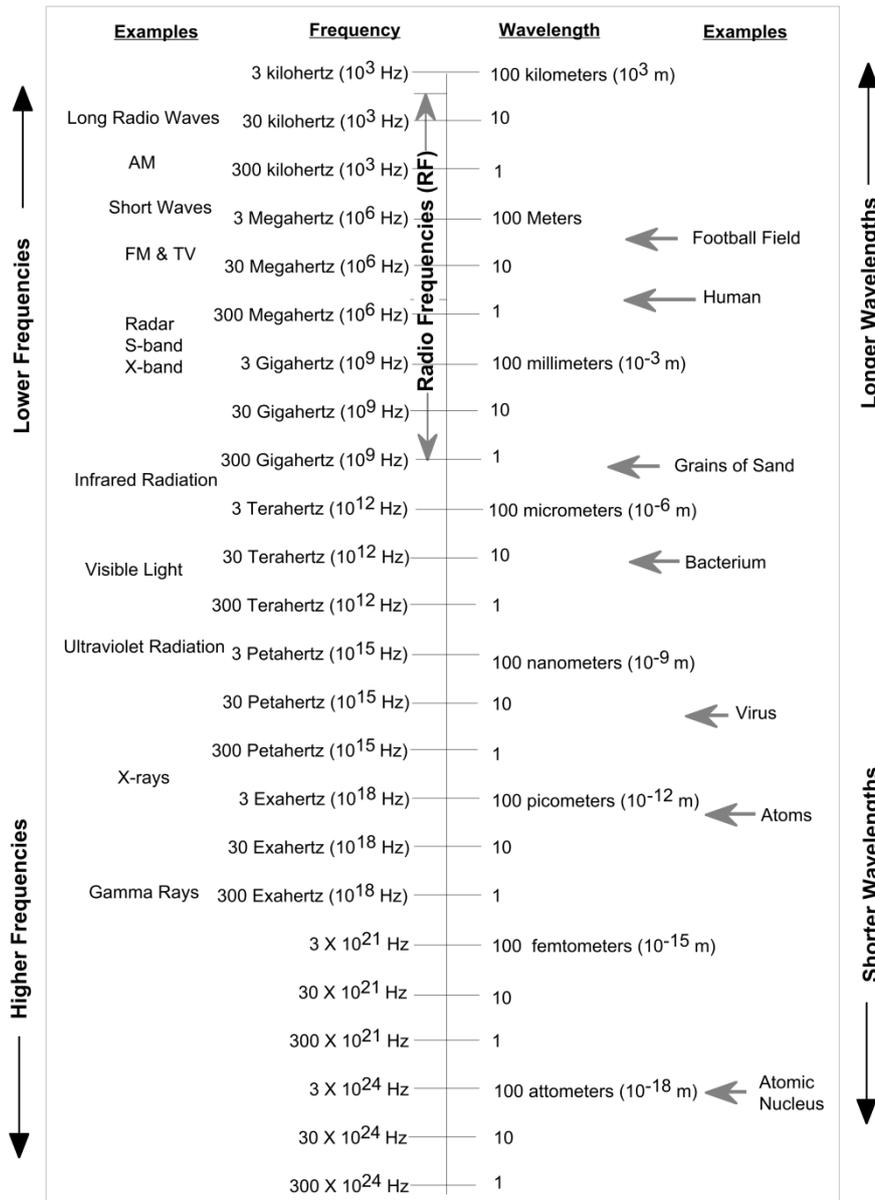


Figura 2.2. Espectro eletromagnético [8].

As ondas de rádio variam de 5 kHz até 300 GHz [8]. Algumas vantagens em utilizar sinais de rádio são [3]:

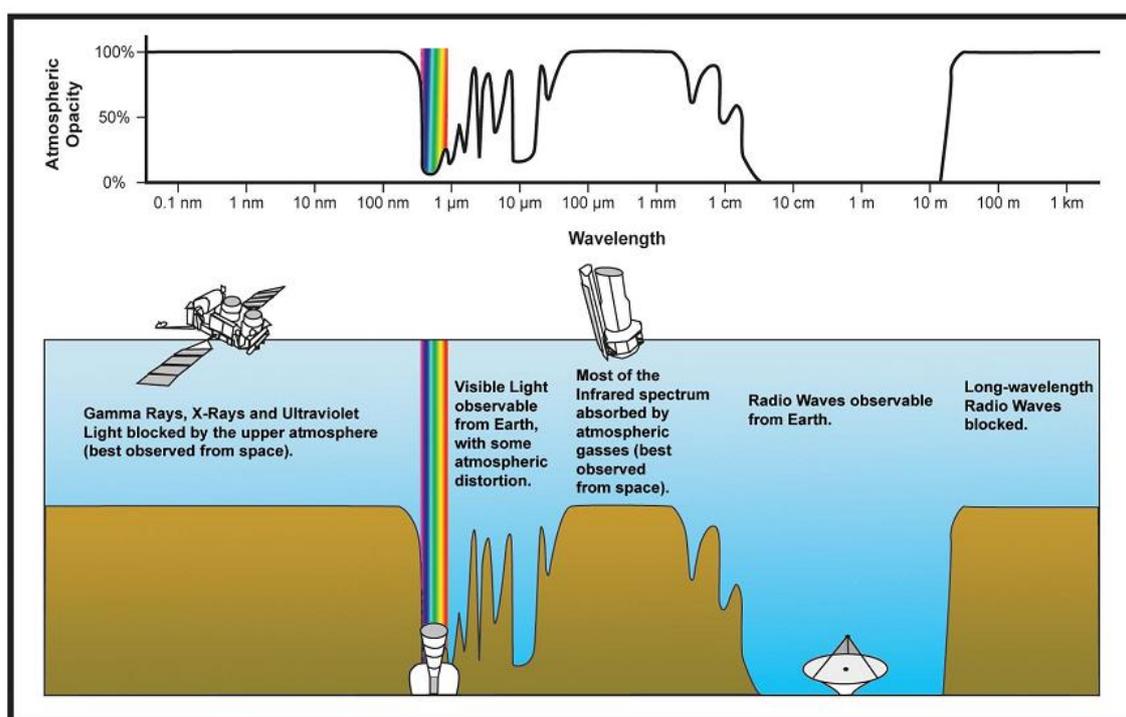
As ondas de rádio alcançam a terra.

Entre os objetos celestes e a terra está a atmosfera<sup>2</sup>, que bloqueia os sinais que são emitidos em frequências mais altas, como por exemplo, raios gama, raios X e ultravioleta. Como os sinais de rádio possuem baixa frequência (comprimento de onda maior), eles sofrem menos variação de fase causada pela atmosfera da Terra do que os

<sup>2</sup> Atmosfera: Camada de gases que envolvem a Terra [4].

sinais de maior frequência (comprimento de onda menor) e não são refletidos pela ionosfera<sup>3</sup> [1].

Em altas frequências são utilizadas naves espaciais para receptor os sinais que não atravessam a atmosfera, pois a nave fica sobre a atmosfera. Em baixas frequências são usados os radiotelescópios (Figura 2.3) [3].



**Figura 2.3. Sinais em diferentes frequências e suas respectivas técnicas para receptor-los [3].**

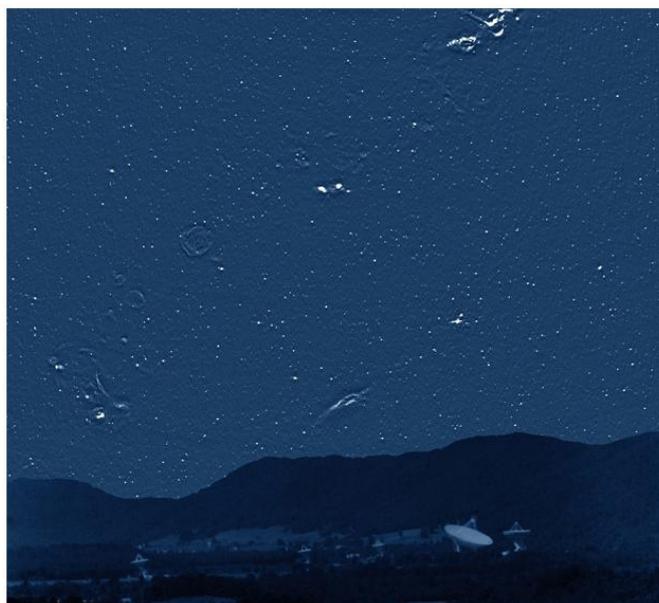
Podem ser observados objetos ou fenômenos que são difíceis ou impossíveis de serem observados em outras frequências.

Como exemplo desses objetos, considera-se a Figura 2.4. Esta figura mostra uma imagem do céu à noite como se fosse obtida por um radiotelescópio. A princípio parece um céu estrelado, porém, muitos dos pontos luminosos não são estrelas, mas sim galáxias que estão bilhões de anos luz<sup>4</sup> de distância. As fontes luminosas mais largas

<sup>3</sup> Ionosfera: Várias camadas de partículas ionizadas e elétrons encontrados em altitudes de 80-250 km na atmosfera. A ionização é principalmente causada pelos sinais de alta frequência (raio-X e ultravioleta) emitidos pela radiação solar durante o dia [4].

<sup>4</sup> Ano luz: Unidade de distância utilizada em astronomia, a qual representa a distância que a luz viaja em um ano. 1 ano luz é igual a  $9,46 \times 10^{12}$  Km.

são nuvens de hidrogênio ionizadas ou restos de supernova<sup>5</sup>. Nota-se a diferença desta imagem com a imagem que temos quando olhamos à noite para o céu.



**Figura 2.4. Imagem noturna do céu como se fosse obtida por um radiotelescópio [3].**

Pode-se usar a emissão de rádio para diagnósticos físicos quantitativos dos parâmetros dos objetos. Isso significa que por meio da emissão de rádio é possível obter informações sobre as condições da fonte (objeto celeste) como, por exemplo, o mecanismo de emissão daquele objeto celeste.

A relação entre o comprimento de onda e a frequência é dada por:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (\text{eq. 1})$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda,  $c$  é a velocidade da luz e  $f$  é a frequência do sinal.

Como as ondas de rádio possuem um intervalo de frequências muito amplo, este intervalo foi dividido em bandas. As bandas que os astrônomos utilizam nos radiotelescópios estão na Tabela 2.1 [7].

---

<sup>5</sup> Supernova: Violenta explosão onde algumas estrelas podem se tornar muito mais brilhantes do que o sol [4].

**Tabela 2.1. Bandas utilizadas em radioastronomia [7].**

Banda	Comprimento de onda	Frequência
P	90 cm	327 MHz
L	20 cm	1.4 GHz
C	6.0 cm	5.0 GHz
X	3.6 cm	8.5 GHz
U	2.0 cm	15 GHz
K	1.3 cm	23 GHz
Q	7 mm	45 GHz

Os sinais recebidos pelos radiotelescópios dos objetos celestes são chamados sinais cósmicos, que serão abordados na próxima seção.

## 2.4 Sinais cósmicos

Os sinais cósmicos são considerados sinais de voltagem em função do tempo, que as antenas do radiotelescópio recebem do céu. Esses sinais são gerados por processos naturais e possuem ruído Gaussiano [1].

Para muitos objetos celestes, os sinais são invariantes com o tempo e a potência desse sinal é da forma de radiação contínua, ou seja, possui pouca variação com a frequência e pode ser considerada contínua sobre a largura de banda dos instrumentos [1].

A força do sinal de rádio recebido de um objeto celeste é conhecida como densidade de fluxo (*flux density*) e é medida em watts por metro quadrado por hertz ( $\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$ ). A unidade de medida normalmente utilizada pelos astrônomos é o *jansky* (Jy), onde  $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$  [1].

## 2.5 Processos de emissão de sinais de rádio [7]

A radiação eletromagnética é emitida quando partículas carregadas, como o elétron, mudam de velocidade ou direção (ou aceleração).

Existem duas formas de emissão de radiação eletromagnética, por mecanismos termais e não-termais. Os mecanismos termais dependem apenas da temperatura do

objeto que está emitindo a radiação, e os mecanismos não-termais não dependem da temperatura do objeto.

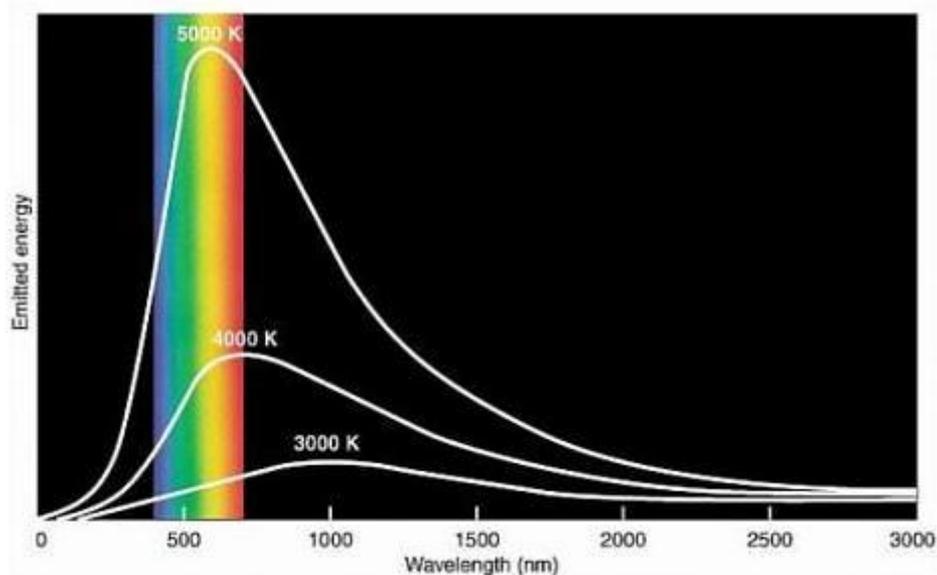
### 2.5.1 Mecanismos termais

O primeiro mecanismo é a radiação do corpo negro. Este tipo de radiação é a forma mais básica de emissão de radiação eletromagnética, pois qualquer objeto ou partícula que possui a temperatura acima de zero grau absoluto emite radiação termal.

Quando as moléculas de gás, que estão na atmosfera do planeta, se chocam, elas mudam de direção. Mudando de direção, as partículas carregadas aceleram, portanto, elas emitem radiação eletromagnética. Como resultado, a quantidade de movimento das partículas dentro do objeto representa a temperatura.

Os cientistas chamam este efeito de corpo negro<sup>6</sup>. Quando este objeto alcança uma temperatura de equilíbrio, ele irradia sua energia no espectro, onde o comprimento de onda está relacionado com sua temperatura. Objetos com altas temperaturas emitem radiação em comprimentos de ondas menores. Todos os objetos do universo se comportam desta forma.

A Figura 2.5 mostra o espectro de um corpo negro para objetos com três temperaturas diferentes. A sigla K é a temperatura em Kelvin.



**Figura 2.5. Radiação de um corpo negro para objetos com três temperaturas diferentes. Nota-se que, com altas temperaturas os objetos emitem radiação eletromagnética em comprimentos de onda menores [7].**

<sup>6</sup> Corpo negro: um objeto hipotético que absorve toda a radiação que é incidida sobre ele, e não reflete nenhuma radiação. [7]

Outro mecanismo termal é a emissão *free-free* que emite radiação quando um gás se torna ionizado, ou seja, quando seus elétrons se tornam livres de um átomo. Isto resulta em partículas carregadas se movendo em volta de um gás ou plasma. Quando isso acontece, os elétrons são acelerados por partículas carregadas, emitindo fótons. Como o fóton pode ser de qualquer comprimento de onda, a radiação emitida tem um espectro contínuo.

O último mecanismo termal é a emissão de linha de espectro (*spectral line emission*) onde a emissão de radiação envolve a transição de um elétron de um nível superior para um nível inferior dentro do átomo. Quando isto acontece, um fóton é emitido contendo a diferença da energia entre os dois níveis. Esse fóton mostra uma linha discreta ou comprimento de onda no espectro eletromagnético.

## 2.6 Mecanismos não-termiais

Os mecanismos não-termiais é o oposto dos mecanismos termiais, pois não dependem da temperatura do objeto e a emissão de radiação aumenta com o aumento do comprimento de onda.

O primeiro e mais comum mecanismo não-termal é a emissão sincrotron (*synchrotron emission*). Basicamente, essa radiação se dá pela aceleração de elétrons carregados em um campo magnético. Como os elétrons encontram o campo magnético, eles giram em volta do campo magnético formando um espiral (Figura 2.6). A radiação é emitida pela contínua mudança de direção do elétron (que tem o mesmo efeito de acelerar e desacelerar o elétron). A frequência da emissão está relacionada com a velocidade do elétron e com a força do campo magnético, pois quando o campo magnético é forte, os elétrons criam um espiral mais estreito e, portanto, maior aceleração.

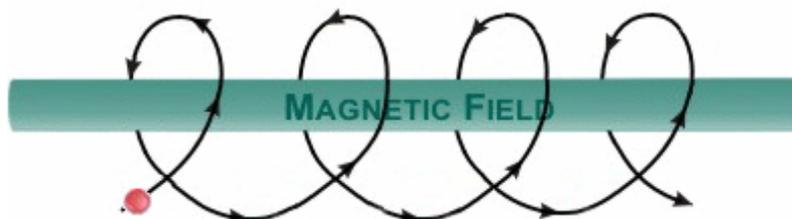


Figura 2.6. Espiral formado pelos elétrons ao redor do campo magnético.

Para que a emissão seja forte o suficiente para que tenha algum valor para a astronomia, os elétrons devem viajar a uma velocidade próxima da luz quando encontra o campo magnético. Como os elétrons viajam ao redor do campo magnético eles liberam energia. Quanto maior o campo magnético, mais energia os elétrons liberam. Como resultado, os elétrons emitem radiação eletromagnética em comprimentos de onda maiores.

Outro mecanismo é a emissão girossincrotron (*gyrosynchrotron emission*), que é uma forma especial de emissão sincrotron emitida por pulsar<sup>7</sup>. Um pulsar tem um campo eletromagnético muito mais forte que o da Terra, acelerando os elétrons a uma velocidade próxima à velocidade da luz, fazendo com que eles emitam feixes de radiação, incluindo ondas de rádio.

Por fim, o último mecanismo são os *masers*. Eles são similares aos lasers, porém amplifica micro-ondas através da radiação, diferente do laser que amplifica a luz visível através da radiação. Um *maser* requer que um grupo de moléculas seja levado a um estado energizado. Quando estas moléculas energizadas são expostas a uma pequena quantidade de radiação na frequência correta, elas saltam para um nível de baixa energia e emitem fótons com a mesma frequência da radiação usada para estimular as moléculas. Este processo faz com que as outras moléculas façam o mesmo, ou seja, conforme os fótons vão sendo emitidos, eles vão estimulando as outras moléculas a emitirem os fótons na mesma direção, resultando numa avalanche de fótons, que por fim gera uma linha de *maser* monocromática (todas com a mesma frequência) brilhante.

Os *masers* necessitam de uma fonte externa de energia para levar as moléculas a um estado energizado. No espaço, as fontes de energia são as estrelas quentes.

## 2.7 Antenas

Em radioastronomia, as antenas são os elementos responsáveis por receber os sinais de rádio do céu. Existem diversos tipos de antenas, que vão desde as pequenas antenas que são utilizadas em residências para captar sinal de TV, até antenas gigantes construídas sobre crateras na terra, como o *Arecibo radio telescope* (Figura 2.8b).

A história das antenas, no âmbito geral, inicia com Heinrich Hertz em 1886, desenvolvida comercialmente por Guglielmo Marconi, e seus principais avanços se

---

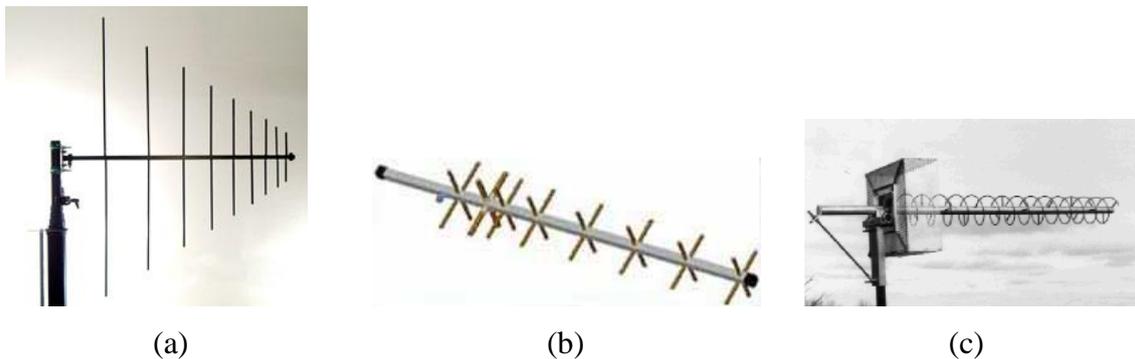
<sup>7</sup> Pulsar: Corpo celeste (estrela) que emite radiação eletromagnética em intervalos fixos.

deram no período da primeira guerra mundial. Na astronomia, as antenas foram utilizadas pela primeira vez por Karl Guthe Jansky em 1932 [4]. Jansky é considerado o fundador da radioastronomia.

Os tipos de antenas utilizados em radiotelescópios são:

Antenas dipolo, Yagi ou Espiral: usadas quando o comprimento de onda é maior que 1 metro (300 MHz). Exemplos na Figura 2.7.

Antenas do tipo parabólica: usadas quando o comprimento de onda é menor que 1 metro (Figura 2.8).



**Figura 2.7. Tipos de antena. (a) dipolo; (b) Yagi; (c) Espiral. [10]**

As antenas que são frequentemente utilizadas são as do tipo parabólica, pois quando o comprimento de onda diminui, os fios que compõem a antena não conseguem receber estas ondas [3]. Para os radiotelescópios atuais que estão trabalhando acima de 1.5 GHz, são necessárias antenas parabólicas, pois com o refletor maior é possível receber as ondas de comprimento menor.

Os principais itens que qualificam uma antena parabólica são o seu diâmetro e o tipo de alimentador (*feed*). A Figura 2.8a exemplifica o uso de uma antena parabólica.



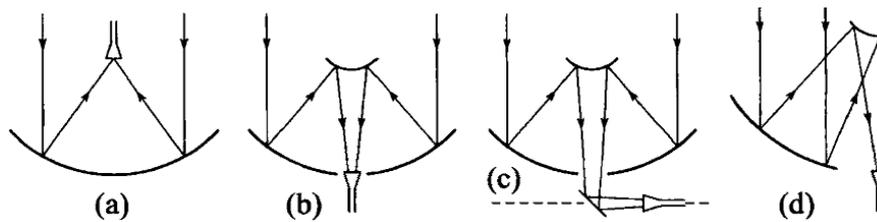
(a) Radiotelescópio composto por uma antena parabólica.



(b) Arecibo, o maior radiotelescópio de uma única antena com diâmetro de 305 m.

Figura 2.8. Diferentes radiotelescópios [7].

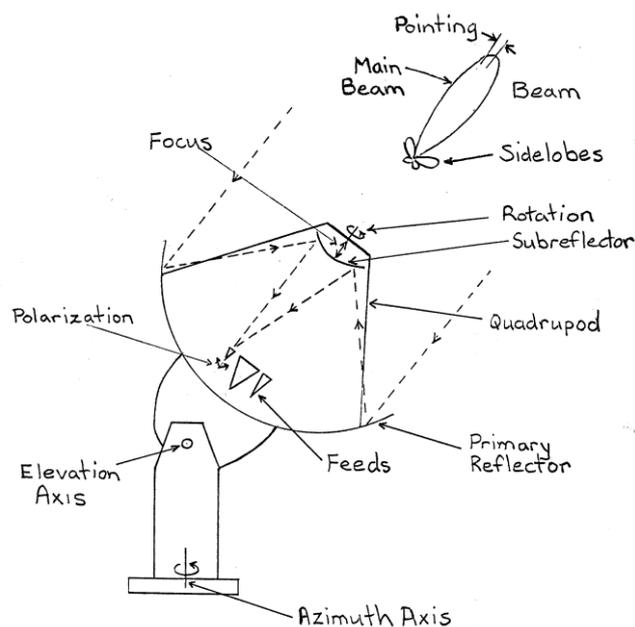
Existem diversos métodos para ajustar o foco da antena, dependendo do tipo de alimentador que ela utiliza. A Figura 2.9 mostra os métodos para ajustar o foco da antena, dados os diferentes tipos de alimentadores, que são: a) *prime focus*; b) *cassegrain focus*; c) *Naysmith focus*; d) *offset Cassegrain focus*.



**Figura 2.9. Tipos de ajusto de foco. (a) *prime focus*; (b) *Cassegrain focus*; (c) *Naysmith focus*; (d) *offset Cassegrain focus* [1].**

Dos métodos apresentados, o mais comum é o *Cassegrain focus* [1]. A principal característica deste método é que com ele pode ser aumentada a eficiência da abertura (*aperture efficient*<sup>8</sup>) ajustando o subrefletor da antena, distribuindo o campo eletromagnético por todo o refletor principal (refletor maior).

A Figura 2.10 ilustra o funcionamento de uma antena com *Cassegrain focus* e o caminho que o sinal faz até chegar ao receptor.



**Figura 2.10. Elementos de um radiotelescópio [10].**

Os sinais que são emitidos pelos objetos celestes chegam ao refletor principal. O refletor principal reflete os sinais para o subrefletor, que por sua vez reflete para o alimentador (*feed*) que detecta os sinais.

Pelo fato de que os sinais cósmicos são muito fracos, os radiotelescópios são grandes e necessitam de um receptor muito sensível. Outro detalhe é que como os

<sup>8</sup> *Aperture efficient*: Uma medida que indica a eficiência do radiotelescópio em receber os sinais de rádio. Para antenas parabólicas simples, o *aperture efficient* raramente excede 65% [4].

sinais cósmicos são muito fracos, podem existir interferências terrestres nos sinais que chegam às antenas, sendo necessário instalar as antenas em locais isolados de construções que possam interferir no sinal [7].

Com o movimento da Terra e dos objetos celestes, a antena precisa acompanhar estes movimentos, ou seja, conforme a objeto celeste ou a Terra se deslocam, a antena precisa se ajustar. Os radiotelescópios modernos são dotados de suportes com controle por computador da posição *alt-azimuth*, ou seja, a antena pode se mover para baixo e para cima (altitude) e horizontalmente (*azimuth*<sup>9</sup>) [4].

## 2.8 Desempenho da antena

O desempenho da antena está relacionado com os seguintes fatores:

- Sensibilidade.
- Resolução angular.
- Área de recepção dos sinais.
- Eficiência da abertura.

A **sensibilidade do radiotelescópio**, que é a capacidade de receptor sinais de rádio de baixa potência, como é o caso dos objetos celestes, depende da área da antena e da sensibilidade do receptor [7]. A sensibilidade aumenta em proporção a  $D^2$ , onde  $D$  é o diâmetro da antena.

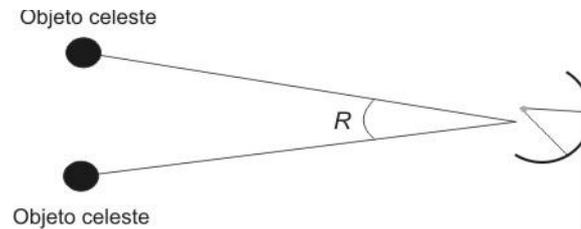
A **resolução angular**  $R$ , representa a menor distância angular na quais duas fontes pontuais podem ser distintas [14]. É a capacidade de o radiotelescópio distinguir os detalhes dos sinais recebidos do objeto celeste [7]. Portanto, quanto menor a resolução angular, mais detalhes do objeto observado será adquirido, produzindo uma imagem de melhor qualidade, pois os objetos, principalmente os que estão próximos uns dos outros, podem ser facilmente distintos. Este parâmetro depende do comprimento de onda observado e do diâmetro da antena,

$$R = \frac{\lambda}{D} \quad (\text{eq. 2})$$

---

<sup>9</sup> *Azimuth*: Direção de um objeto celeste medido em graus, em sentido horário partindo do norte em volta do horizonte do observador. A posição *Azimuth* é 0° para um objeto no norte, 90° no leste, 180° no sul e 270° no oeste [4].

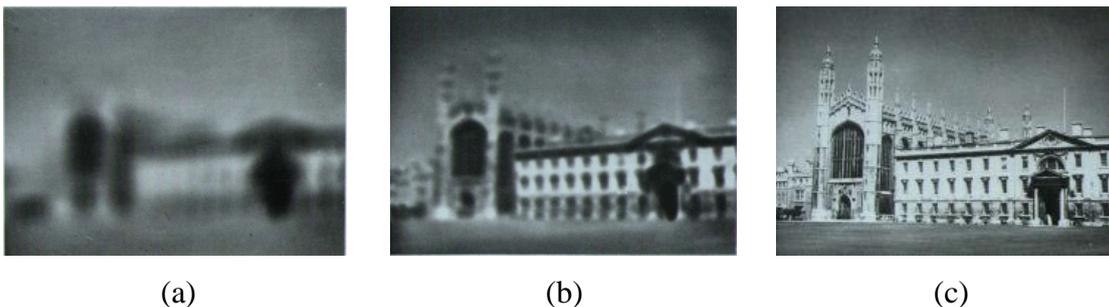
onde  $R$  é dado em radianos<sup>10</sup>,  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $D$  é o diâmetro da antena. Para um dado comprimento de onda, quanto melhor a resolução angular (menor  $R$ ) maior deve ser o diâmetro da antena.



**Figura 2.11. Resolução angular.**

Comparando a resolução angular de um radiotelescópio e de um telescópio óptico, verifica-se que para um radiotelescópio atingir a mesma resolução angular que um telescópio óptico, é preciso que o refletor da antena seja enorme (ordem de quilômetros de diâmetro), pois as ondas de rádio tem comprimento de onda maior que as ondas visíveis [7].

Para exemplificar o efeito da resolução angular (Figura 2.12), considera-se um radiotelescópio que recebe ondas eletromagnéticas de 20 cm. Uma antena com diâmetro  $D = 30$  m resultando em  $R = 30$  arc min<sup>11</sup>, produz a imagem (a); com diâmetro  $D = 80$  m resultando em  $R = 10$  arc min, produz a imagem (b); e com diâmetro  $D = 1.6$  Km resultando em  $R = 0.23$  arc sec, produz a imagem (c) [11].



**Figura 2.12. Efeito da resolução angular para ondas com  $\lambda = 20$  cm.**  
**(a)  $D = 30$  m e  $R = 30$  arc min; (b)  $D = 80$  e  $R = 10$  arc min;**  
**(c)  $D = 1.6$  Km e  $R = 0.23$  arc sec. [11]**

<sup>10</sup> 1 radiano = 206265 arc sec [4].

<sup>11</sup> Arc min: notação utilizada em astronomia para descrever o tamanho e a distância aparente dos objetos celestes.  $1^\circ = 60$  arc min =  $60'$ ;  $1' = 60$  arc sec =  $60''$ .

A **área de recepção** dos sinais  $A_0$  é a área da antena quando ela está apontada diretamente para a fonte. A relação entre a área de recepção e a área física da antena  $A$  é definida por [3]

$$A_0 = nA \quad (\text{eq. 3})$$

onde  $n$  é a **eficiência da abertura**. Este fator é dado pelo produto de outros fatores de perda [3]:

$$n = n_{sf} n_{bl} n_s n_t n_{misc} \quad (\text{eq. 4})$$

onde

$n_{sf}$  = eficiência da superfície do refletor

$n_{bl}$  = eficiência da obstrução do refletor

$n_s$  = eficiência da sobra do alimentador

$n_t$  = eficiência da iluminação

$n_{misc}$  = outras perdas

A obstrução do refletor acontece em antenas que o alimentador ou o subrefletor fica suspenso sobre o refletor principal por meio de braços de metal (Figura 2.8a), e estes braços e o próprio alimentador ou subrefletor interferem na eficiência da abertura, espalhando a potência do sinal para o lóbulo lateral (*side lobe*).

A eficiência da sobra do alimentador diz respeito à perda de radiação que é redirecionada do refletor principal para o alimentador, pois o alimentador não consegue receber toda a radiação captada e redirecionada pelo refletor principal [3].

A eficiência de iluminação é a perda causada por usar uma espécie de fita colocada na borda do refletor principal com o objetivo de evitar o efeito de sobra do alimentador, ou seja, evitar que a radiação da borda do refletor principal escape da antena e vá em direção a terra, aumentando o ruído. Porém, usar esta fita gera uma perda, pois o alimentador não recebe a radiação que vem das bordas do refletor principal.

A Tabela 2.2 mostra um exemplo do desempenho do radiotelescópio VLA<sup>12</sup>, considerando os fatores descritos acima.

**Tabela 2.2. Desempenho do radiotelescópio VLA [3].**

$\lambda$	$\eta_{sf}$	$\eta_{bl}$	$\eta_s$	$\eta_t$	$\eta_{diff}$	$\eta_{misc}$	$\eta_{tot}$
20 cm	1.0	0.85	0.82	0.98	0.86	0.94	0.55
6 cm	0.97	0.85	0.92	0.98	0.96	0.94	0.67
2 cm	0.85	0.85	0.90	0.95	0.98	0.94	0.57
1.3 cm	0.68	0.85	0.90	0.95	0.99	0.94	0.46

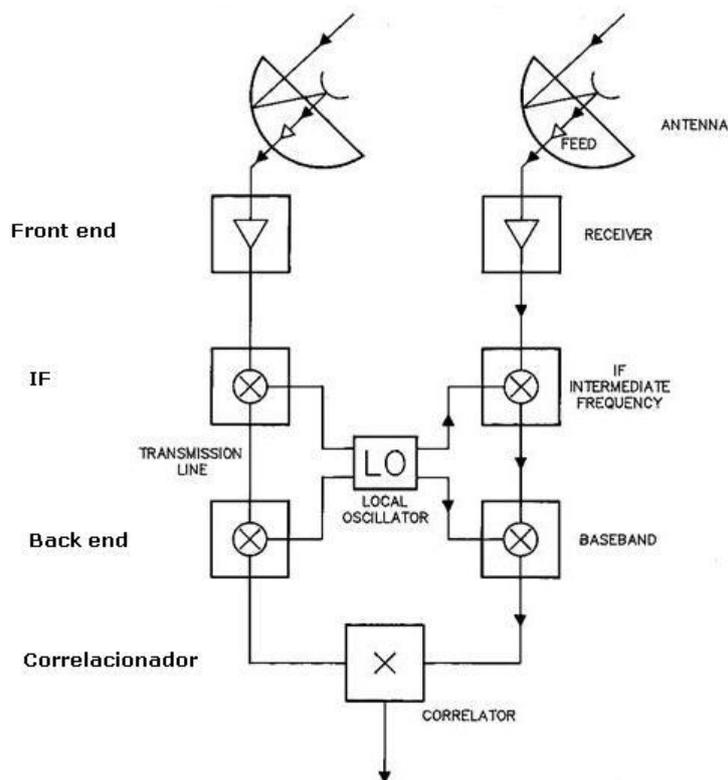
Analisando a tabela acima, usando como padrão o fator  $\eta_{tot}$  do radiotelescópio VLA, observa-se que acumulando as perdas, uma antena de tamanho  $x$  trabalha, na verdade, como se fosse uma antena de tamanho  $x/2$  [3].

## 2.9 Radiotelescópios de uma antena e de arranjo de antenas

Por hora, será apresentada uma visão geral da técnica de radiointerferômetro que utiliza vários radiotelescópios para simular um único radiotelescópio gigante. O capítulo 3 tratará com mais detalhes a implementação brasileira, o Arranjo Decimétrico Brasileiro (*Brazilian Decimetric Array*).

Para facilitar o entendimento de um radiointerferômetro, será analisado o diagrama de blocos da Figura 2.13.

<sup>12</sup> VLA: *Very Large Array*: radiotelescópio com 27 antenas e 25 m de abertura cada.



**Figura 2.13. Diagrama de blocos de um radiointerferômetro [10].**

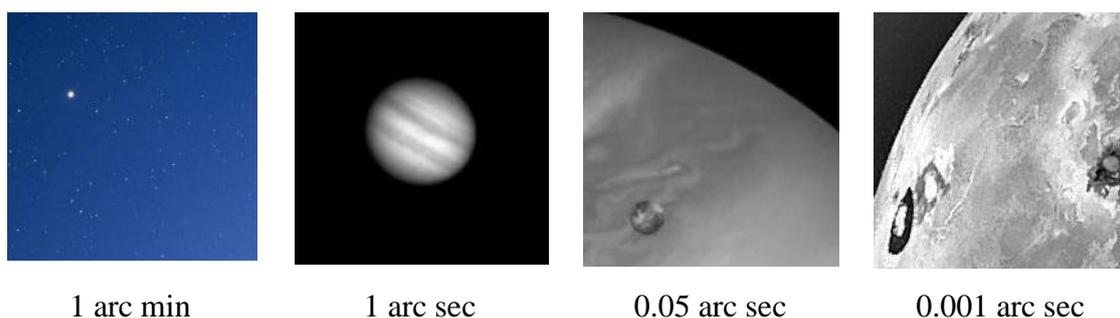
Os sinais recebidos pelas antenas são muito fracos, portanto precisam ser amplificados. No *Front end* o sinal recebido pelas antenas (RF) é amplificado pela primeira vez. Pelo motivo do sinal ser muito fraco nesta etapa, é importante que o amplificador introduza o mínimo de ruído possível no sinal [12].

Depois de amplificado, o sinal passa por uma etapa, que altera a frequência do sinal de entrada. Este dispositivo possui duas entradas, a primeira entrada é o sinal original que vem do *front end*, e a segunda entrada é o sinal gerado pelo oscilador local (*local oscillator*). O sinal gerado é diferente do sinal original, e com frequência menor. Nesta etapa o sinal é conhecido como frequência intermediária (*intermediate frequency*) (IF). Este processo se faz necessário, pois as antenas recebem os sinais de rádio não apenas na frequência desejada, mas também em outras frequências que estão dentro do intervalo. Para facilitar os processos subsequentes, os sinais são convertidos para um padrão intermediário [12].

Depois dessa conversão, o sinal é mais uma vez amplificado e misturado com frequências próximas de 0 Hz que são chamadas de *baseband* [12]. Por fim, o sinal que está numa frequência baixa é correlacionado, isto é, são somados e armazenados.

Como visto na seção anterior, um único radiotelescópio pode produzir imagens insuficientes para a astronomia moderna. Assim, muitas vezes há a necessidade de desenvolver radiointerferômetros.

Para atingir altas resoluções, tem-se duas opções: criar radiotelescópios com quilômetros de diâmetro, ou reduzir o comprimento de onda, aumentando a frequência. A Figura 2.14 mostra diferentes resoluções angulares de uma observação do planeta Júpiter.



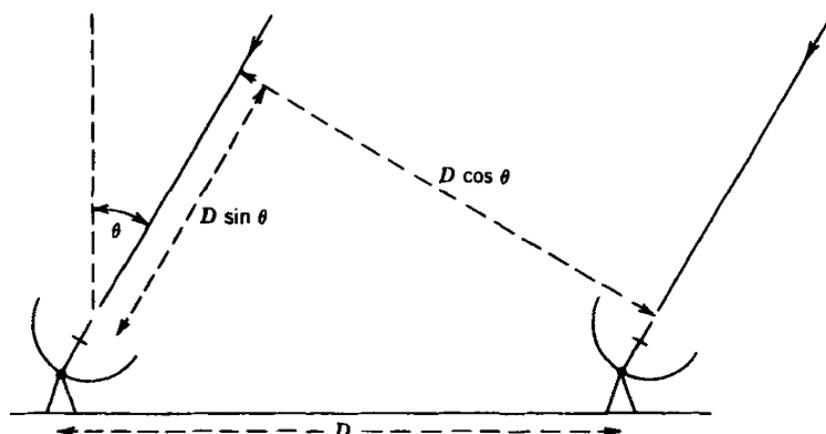
**Figura 2.14. Exemplo de diferentes resoluções angulares [15].**

Para ilustrar este conceito (utilizando a eq. 2), consideremos como exemplo o maior radiotelescópio de uma única antena (Arecibo, Figura 2.8b) possui diâmetro de 305 metros, trabalhando a 430 MHz ( $\lambda = 70\text{cm}$ ). Nessas configurações, a resolução angular obtida é  $R = 7$  arc min. Para efeitos de comparação, um telescópio óptico possui resolução angular de 0.0015 arc sec [1], ou seja, possui uma resolução muito superior do que este radiotelescópio. Em [13] o autor cita que uma resolução angular desejada seria 1 arc sec. Para obter 1 arc sec, trabalhando a 430 MHz, o diâmetro da antena seria  $\approx 1.400$  m. Elevando a frequência para 1.4 GHz ( $\lambda = 20\text{cm}$ ), o diâmetro da antena seria  $\approx 40$  Km.

Pode-se observar que neste caso a escolha a ser feita é diminuir a frequência para aumentar menos o diâmetro da antena. Mesmo com frequências mais baixas, o diâmetro da antena ainda continua muito grande para que possa ser implementada. Para resolver esse problema, é necessário o uso da técnica de síntese de abertura (*Aperture Synthesis*), ou seja, a radiointerferometria.

A Figura 2.15 mostra um radiointerferômetro com duas antenas observando o mesmo objeto celeste.  $D$  é a linha base (*baseline*), que é a distância entre as antenas. O sinal que vem da fonte na direção  $\theta$  alcança a antena da direita no tempo  $\tau_g = \text{sen } \theta \frac{D}{c}$

antes de alcançar a antena da esquerda, onde  $\tau_g$  é o *geometric delay* e  $c$  é a velocidade da luz [1].



**Figura 2.15. Esquema de um interferômetro mostrando a linha base e a diferença do caminho da onda, que deve ser compensada utilizando um *delay* [1].**

A linha base interfere na resolução angular do sistema. Quanto maior a linha base, maior a riqueza de detalhes o radiotelescópio é capaz de obter.

O radiotelescópio GMRT [12] é composto por 30 antenas e divididas em duas configurações. A primeira configuração é um cluster de antenas com linha base de 1 km. A outra configuração inclui três antenas com linha base de 14 km. Com essas configurações, este radiotelescópio é capaz de obter imagens de objetos celestes com grande estrutura angular, utilizando a configuração com linha base menor, e também objetos com pequena estrutura angular, utilizando as antenas com linha base de 14 km. Pelo motivo de haver duas configurações diferentes, este radiotelescópio é considerado flexível nos tipos de objetos celestes que podem ser observados [12].

## 2.10 Síntese de abertura e Síntese de Fourier [12]

Quando é utilizado um arranjo de antenas é necessário utilizar as técnicas de Síntese de abertura (*Aperture synthesis*) e a Síntese de Fourier.

Como visto anteriormente neste capítulo, para melhorar a resolução angular é necessário aumentar o diâmetro da antena. Utilizando a técnica de síntese de abertura é possível simular um radiotelescópio com quilômetros de diâmetro.

Pode-se imaginar um sistema com duas antenas, a primeira fixa e a segunda móvel. A cada vez que a antena móvel for colocada em uma posição diferente, será obtido um coeficiente de Fourier diferente. Este método de construir uma imagem por meio da aquisição gradativa dos componentes de Fourier é a técnica de síntese de abertura [12].

Na Figura 2.16 é possível verificar o esquema de funcionamento desta técnica. Na parte superior da figura, é ilustrada a técnica convencional, ou seja, uma antena parabólica recebendo o mesmo sinal em toda região de recepção. Na parte inferior da figura, a área de recepção é dividida em pares de miniantenas, onde cada par é responsável por obter um componente de Fourier. Se a síntese de abertura for quebrada em  $N$  sub-aberturas, então haverá  $N(N-1)/2$  pares de antenas para fazer a combinação [13].

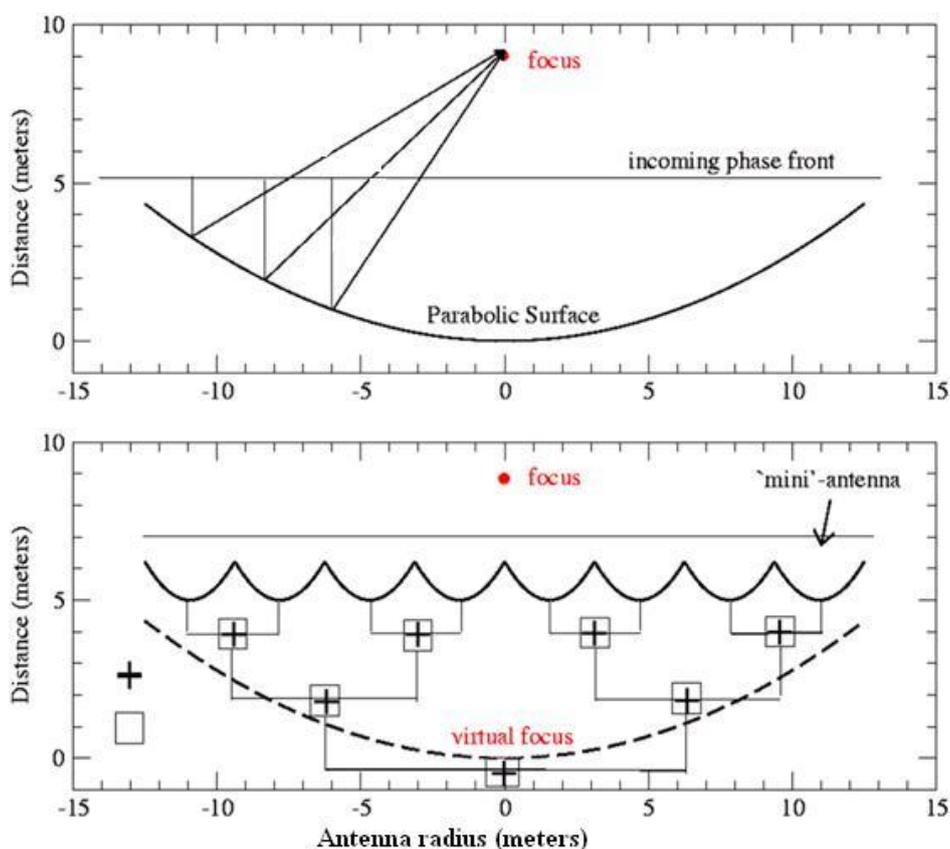


Figura 2.16. Exemplo da técnica de *aperture synthesis* [13].

Se for utilizado um sistema com um par de antenas, com linha base de 25 km, então a imagem obtida por esse sistema tem a mesma resolução de uma imagem obtida

por um radiotelescópio de 25 km de diâmetro, isto é, sintetizado com uma abertura de 25 km [12].

A técnica de síntese de Fourier é utilizada para estimar a distribuição de brilho do objeto celeste sendo observado. Essa estimativa dá-se necessária, pois cada par de interferômetros produz um componente de Fourier e a quantidade de componentes de Fourier obtidas por um arranjo com  $N$  antenas é  $N(N - 1) / 2$ . Portanto, os arranjos interferométricos produzem um número finito de amostras, fazendo necessário estimar outros componentes a partir das amostras obtidas, pois a distribuição de brilho de um objeto celeste é uma função contínua.

## 2.11 Correlação

A última etapa do esquema da Figura 2.13 é a correlação dos sinais. A correlação dos sinais é feita para produzir uma medida de coerência do plano de onda do objeto celeste observado [14]. Cada par de antenas fornece uma medida de um componente de Fourier da distribuição de brilho da região observada (eq. 5), ou seja, para cada par interferométrico há uma correlação e um ponto amostrado para que se possa gerar a imagem.

Um correlacionador é um dispositivo para multiplicar e acumular os sinais recebidos de cada par de antenas.

Em radiointerferômetros como o VLBI (*Very long baseline interferometry*), onde as antenas estão espalhadas por uma grande área do planeta, atingindo linhas base de até 3000 Km, a correlação não é feita em tempo real<sup>15</sup>, pois não há conexão longa o suficiente entre as diversas estações de observação. Nesse caso, os dados são gravados em fitas ou discos e então levados até uma central onde esses dados serão correlacionados com os demais. Os dados armazenados podem ser de dias ou até anos de observação [15]. Para a sincronização do tempo e da frequência dos dados são utilizados relógios atômicos.

---

<sup>15</sup> Existem esforços nesta área para utilizar fibra ótica na comunicação entre as estações [15].

## **2.12 Considerações finais**

Este capítulo apresentou os conceitos básicos sobre de astronomia, radioastronomia e radiointerferometria, descrevendo sobre os tipos de antenas utilizadas e as técnicas de síntese de abertura e síntese de Fourier que são utilizadas para aumentar a qualidade da imagem gerada a partir dos sinais receptados.

No próximo capítulo será apresentado detalhes sobre o radiointerferômetro BDA.

## **CAPÍTULO 3: ARRANJOS INTERFEROMÉTRICOS E O ARRANJO DECIMÉTRICO BRASILEIRO (BDA)**

---

### **3.1 Introdução**

Este capítulo abordará a implementação do Arranjo Decimétrico Brasileiro (BDA), uma implementação de um radiointerferômetro que está sendo construído no Brasil e que trabalha com ondas de rádio de comprimento decimétrico.

O capítulo também descreve o circuito correlacionador convencional utilizado no BDA, bem como as operações convencionais envolvidas em sua construção.

O capítulo termina analisando a performance do resultado da correlação em termos da sensibilidade do sinal digitalizado, apresentando também o custo computacional do circuito correlacionador convencional.

### **3.2 Arranjos unidimensionais e bidimensionais**

Antes de descrever os arranjos interferométricos, será visto algumas considerações sobre a configuração do arranjo.

A configuração do arranjo, isto é, a forma que as antenas são distribuídas fisicamente, tem um papel muito importante nos resultados obtidos pelo radiointerferômetro. A configuração do arranjo determina a função de amostragem das frequências, interferindo na fidelidade de imagem obtida a partir das visibilidades obtidas [14].

A configuração do arranjo envolve aspectos de distância entre as antenas (linhas base), a distribuição geográfica das antenas e a possibilidade das antenas se moverem ou não.

A distância entre as antenas foi discutida anteriormente, e diz respeito à resolução espacial do arranjo. A distribuição geográfica das antenas pode ser dividida em arranjos unidimensional e bidimensional.

### 3.2.1 Arranjo unidimensional

O arranjo unidimensional é composto por um conjunto de antenas distribuídas em linha reta, normalmente na posição leste-oeste. Este tipo de arranjo é conhecido como *grating array*, onde o arranjo possui antenas uniformemente espaçadas em intervalos  $d$ , onde  $d$  é a distância fundamental [1]. Com  $n_a$  antenas, a saída do arranjo será  $(n_a - 1)$  combinações com distância fundamental  $d$ ,  $(n_a - 2)$  com distância fundamental  $2d$  e assim sucessivamente [14]. A Figura 3.1 mostra um exemplo deste arranjo.

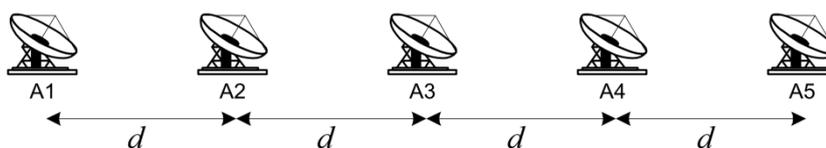


Figura 3.1. Arranjo linear com  $n_a = 5$  antenas [14].

Lembrando que cada par de interferômetros fornece um ponto no plano de Fourier, e considerando que as antenas estão uniformemente espaçadas, existe uma grande quantidade de dados redundantes, isto é, para pequenos espaçamentos, a redundância dos dados em baixas frequências implica na perda de amostras em outras frequências, tendo como consequência, uma amostra no plano de Fourier mais pobre [14].

Para minimizar a redundância e aumentar a quantidade de amostras no plano de Fourier, as antenas são dispostas com diferentes espaçamentos. No exemplo da Figura 3.2, as seis possíveis combinações tem espaçamentos diferentes.

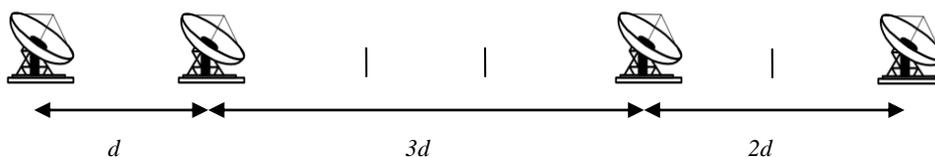
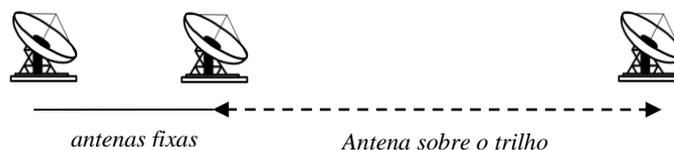


Figura 3.2. Arranjo com mínima redundância [1] [14].

Outra possibilidade para os arranjos unidimensionais é a possibilidade de algumas das antenas serem montadas sobre um trilho, permitindo que ela se mova, aumentando o desempenho do arranjo, conforme mostra a Figura 3.3.



**Figura 3.3. Arranjo com uma antena móvel [1].**

### 3.2.2 Arranjo bidimensional

Os arranjos unidimensionais não fornecem uma cobertura na coordenada  $v$ , apenas na coordenada  $u$ , ou seja, possui sensibilidade espectral em apenas uma direção [14]. Assim, com um arranjo unidimensional é impossível obter uma imagem bidimensional em tempo real, apesar da possibilidade de se obter esta imagem com um arranjo unidimensional fazendo uso do movimento de rotação da Terra.

Utilizando um arranjo bidimensional é possível obter uma amostra bidimensional do plano de Fourier, ou seja, para cada par de interferômetros a função de visibilidade é bidimensional  $(u, v)$  [14].

As configurações geométricas para arranjos bidimensionais seguem algumas figuras predefinidas, tais como cruz, “T” e “Y”.

O primeiro arranjo bidimensional foi construído por Mills em 1958, consistindo de dois arranjos lineares, um deles está na direção leste – oeste e o outro na direção norte – sul [14]. O arranjo construído em “T” é semelhante ao arranjo construído em cruz, porém, a redundância de dados é menor [14]. A Figura 3.4 mostra uma comparação entre estes dois arranjos. Note que a cobertura  $(u, v)$  é a mesma.

O arranjo em Y (Figura 3.5) é a configuração adotada no VLA (*Very large array*) e é uma otimização da configuração T [14]. A principal característica é a angulação de  $5^\circ$  no braço norte – sul para reduzir a redundância quando a declinação do objeto celeste está próxima a  $0^\circ$ .

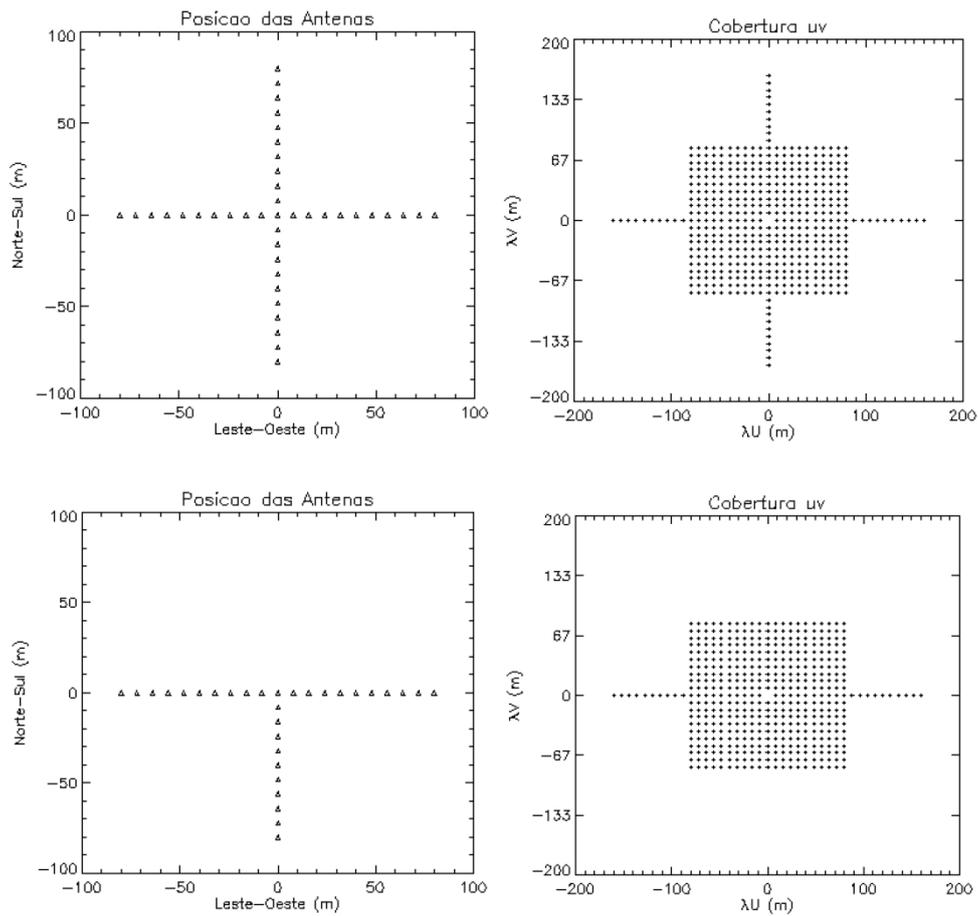


Figura 3.4. Arranjo em cruz (acima) e em T (abaixo) com suas respectivas coberturas no plano  $(u, v)$  [14].

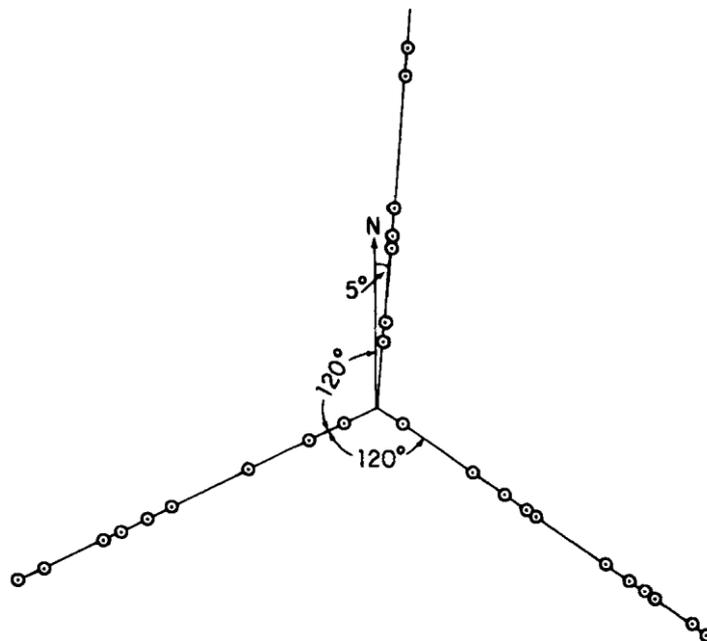


Figura 3.5. Arranjo em Y [1].

### 3.3 O projeto BDA

O interesse em radioastronomia solar está relacionado com alguns efeitos catastróficos na magnetosfera<sup>17</sup>, ionosfera e superfície terrestre, afetando artefatos de alta tecnologia como satélites e outros meios de comunicação, que são altamente sensíveis à atividade solar [14].

O projeto BDA está sendo desenvolvido pelo INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) em parceria com outras instituições nacionais (UFSCar, PUC - Minas, UFMS) e internacionais (NCRA / Índia, IIA / Índia, RAL / USA, Universidade de Berkeley / USA e NRAO / Japão) [14].

O BDA está sendo construído principalmente para observação de fenômenos solares, ou seja, ele será utilizado para investigar alguns problemas fundamentais da física solar associada aos *flares* e CMEs (*Coronal Mass Ejection*).

Os *flares* são liberações de energia do Sol que podem durar horas ou até mesmo dias, emitindo radiação por todo espectro eletromagnético, desde raios- $\gamma$  até ondas de rádio. Eles também liberam partículas (elétrons, prótons, núcleos atômicos) em velocidades de 70% da velocidade da luz, que atingem a Terra em aproximadamente 15 minutos. A energia liberada pode ser de até  $10^{27}$  joules [4]. Essa energia liberada é a causadora de efeitos catastróficos referidos anteriormente.

Os CMEs são a expulsão em larga escala de matéria da corona<sup>18</sup> do Sol em velocidades de 10 – 1000 Km/s. Essa matéria tem o peso de aproximadamente  $10^{13}$  kg [4].

Algumas investigações mostraram que a liberação de energia durante os *flares* ocorrem próxima às regiões onde a emissão decimétrica é gerada [14], mostrando a importância dos estudos da emissão solar na faixa decimétrica e, portanto, justificando a criação do projeto BDA.

É importante observar que já foram desenvolvidos no INPE outros instrumentos anteriormente (Radiômetro Milimétrico de Frequência Variável e o *Brazilian Solar Spectroscope*) para observação radio astronômica dos fenômenos solares, porém, sem a capacidade de fornecer informações espaciais sobre a localização na atmosfera solar das explosões decimétricas observadas [14].

---

<sup>17</sup> Magnetosfera: campo magnético que envolve o planeta [4].

<sup>18</sup> Corona: um gás ionizado extremamente quente (aproximadamente 2.000.000 K) que envolve o Sol [4].

Para atingir o objetivo de observação, o BDA está sendo criado para operar nas faixas de 1,4 a 1,7, 2,8 e 5,6 GHz. As investigações do BDA irá complementar as observações realizadas por outros radiointerferômetros em operação no mundo.

### 3.3.1 Desenvolvimento do BDA

O projeto BDA está sendo construído em três fases, onde em cada fase apresenta um acréscimo na quantidade de antenas, nas linhas base e, portanto, no desempenho do arranjo.

A primeira fase foi iniciada em 2003, e era composto por cinco antenas de quatro metros de diâmetro, distribuídas a distâncias de 8 metros na direção leste-oeste, obtendo a máxima linha base de 32 metros. Esta primeira fase teve como objetivo testar os subsistemas mecânico e eletrônico do BDA [14]. A Figura 3.6 mostra este arranjo.



**Figura 3.6. BDA em sua primeira fase, instalado no campus do INPE em São José dos Campos [14].**

Ainda na primeira fase, os mesmos componentes foram transferidos para o campus do INPE em Cachoeira Paulista (Figura 3.7). Nesse novo sitio, a máxima linha base foi aumentada para 216 metros.



**Figura 3.7. BDA instalado no campus do INPE em Cachoeira Paulista [14].**

A segunda e atual fase do projeto teve início em 2006, onde houve a ampliação do número de antenas para 26 antenas, um aumento da linha base na direção leste-oeste para 252 metros e na direção sul para 162 metros. Nota-se que nesta fase o projeto BDA está sendo desenvolvido de forma bidimensional, utilizando a forma da figura geométrica T (Figura 3.8).



**Figura 3.8. Figura artística do BDA quando for concluída a segunda fase [14].**

Por fim, na terceira e última fase, o projeto tomará sua forma final, possuindo um total de 38 antenas, onde 26 antenas formam o T de forma compacta e outras 4

antenas serão igualmente distribuídas (252 metros) em cada extremidade do T, totalizando as 38 antenas. Com essas modificações, a máxima linha base passará para 2268 metros na direção leste-oeste e 1170 metros na direção sul, aumentando a resolução espacial do arranjo, que será de  $\approx 4,5$  arcsec na frequência de 5,6 GHz.

### 3.3.2 Sistemas computacionais utilizados no BDA

Até o momento foram discutidos apenas assuntos relacionados às antenas e sua configuração, porém, há a parte computacional para manipular as antenas, fazer a aquisição e armazenamento dos dados, o processamento e a visualização. A Figura 3.9 mostra o esquema dos módulos utilizados no BDA.

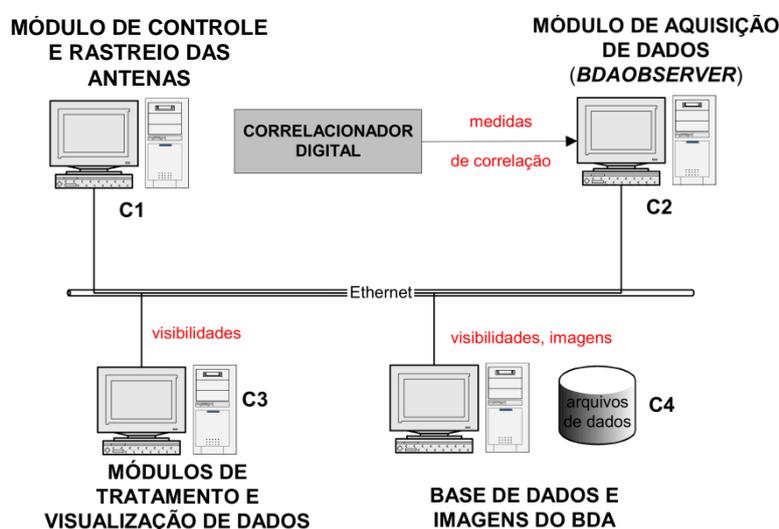


Figura 3.9. Esquema dos módulos computacionais utilizados no BDA [14].

O primeiro módulo é o de **controle e rastreamento** das antenas, que tem a função de controlar o movimento das antenas nos eixos azimute e elevação. Para isso, são utilizados dois servos-motores. É possível fazer observações através da entrada de uma coordenada específica, especificando a elevação e azimute, e é permitido realizar observações com todas as antenas rastreando uma determinada fonte no céu [14].

O **módulo de aquisição de dados** foi desenvolvido pelo IIA/Índia e adaptado para permitir a visualização dos dados quase em tempo real, permitindo uma análise quase imediata [14]. Este módulo está interligado com o correlacionador digital, e é onde os dados são armazenados em cada período.

O **correlacionador digital** é responsável pela leitura e tratamento dos dados adquiridos pelas antenas. O correlacionador de 1 bit gera uma medida de similaridade entre os sinais de cada par de interferômetros, correspondendo ao número de coincidências existentes entre os sinais correlacionados. A saída do correlacionador digital é uma matriz ASCII contendo os coeficientes de correlação de cada par [14].

Em seguida tem-se o **módulo de tratamento e visualização de dados**, que faz a leitura dos dados gerados pelo módulo de aquisição de dados e gera um gráfico 2D do objeto celeste observado.

Por fim, tem-se o **módulo de base de dados e imagens do BDA**. Essa base corresponde aos resultados de uma aquisição de dados por vários dias e são disponibilizados para os interessados.

### 3.4 O circuito correlacionador do BDA

Como visto no capítulo 2, a correlação é parte fundamental para qualquer radiointerferômetro com mais de uma antena. Por se tratar de um número de operações muito grande, existem *hardwares* específicos para essa finalidade, como pode ser visto na Figura 3.12 que mostra o correlacionador do projeto *Jive* (Joint Institute for VLBI in Europe), composto por 16 estações, onde cada estação tem 8 placas com 32 chips correlacionadores [87]. Mesmo com um hardware específico para realizar a correlação, alguns pesquisadores acreditam que o uso do computador pessoal em clusters, ainda que seja mais lento que um hardware específico, será utilizado com mais frequência pelo fato de que é mais fácil alterar o software de correlação para um novo algoritmo de correlação do que alterar a lógica do circuito do hardware [88].



Figura 3.10. Correlacionador *Jive* que utiliza o modelo de correlação XF [15].

No atual esquema de correlação do projeto BDA é utilizado um correlacionador de 1 bit, isto é, o digitalizador converte os sinais apenas para 0's e 1's. O esquema de blocos do circuito correlacionador utilizado no BDA pode ser analisado na Figura 3.11.

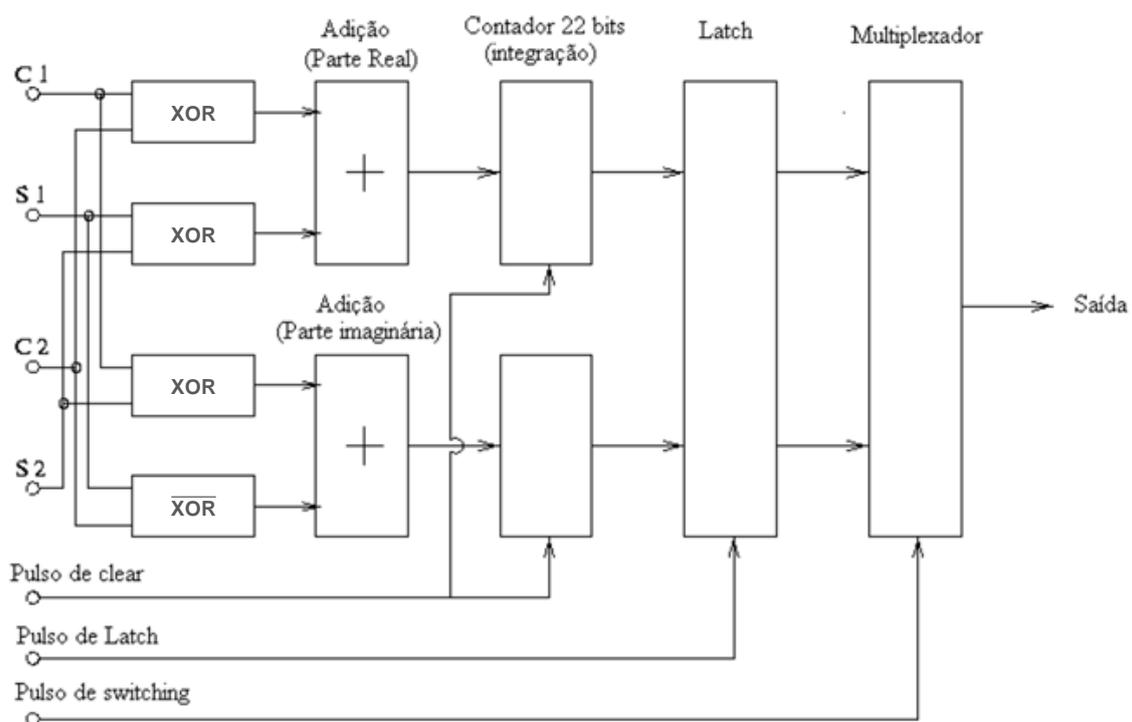


Figura 3.11. Esquema do circuito correlacionador utilizado no BDA [14].

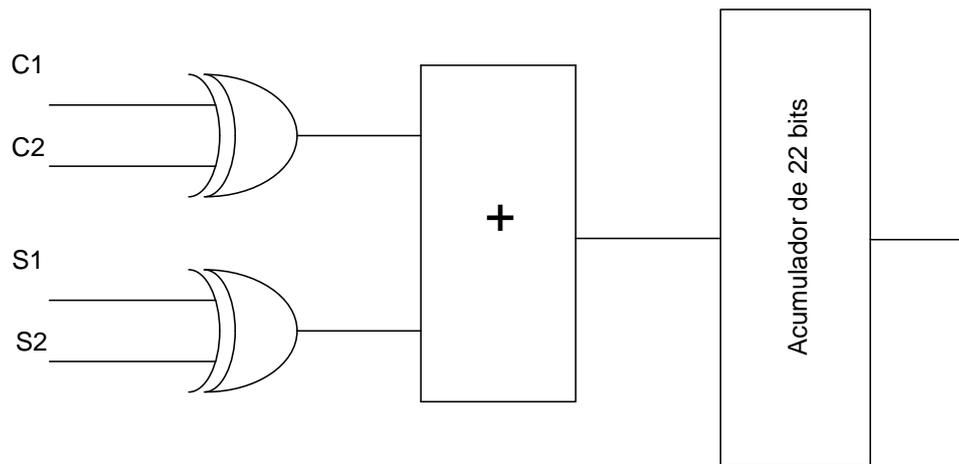
As entradas  $C1$ ,  $S1$ ,  $C2$ ,  $S2$  são os sinais convertidos para a banda base a 2.5 MHz e já digitalizados a uma taxa de amostragem de 5 MHz, de acordo com o teorema de Nyquist, sendo  $C1$  e  $S1$  sinais cosseno e seno da antena 1, e  $C2$  e  $S2$  sinais cosseno e seno da antena 2. A correlação da parte real tem com a saída igual a  $C1 \oplus C2 + S1 \oplus S2$  e a correlação da parte imaginária tem com a saída  $C1 \oplus S2 + S1 \odot C2$ . Esses resultados são acumulados em contadores de 22 bits, num período de integração de aproximadamente 100 ms, após o qual, o resultado (parte real e parte imaginária) é gravado em memória, e posteriormente, após um período de 256 integrações, enviado para um computador (módulo de tratamento e visualização dos dados) para processamento. Após o resultado ser guardado em memória, a parte anterior do circuito de correlação acumula novos dados correlacionados nos acumuladores de 22 bits, portanto o processamento do correlacionador é ininterrupto.

O BDA utiliza o modelo de correlacionador XF que faz primeiro a correlação dos sinais e depois a análise em frequência, que contrasta com o modelo de correlacionador FX em que primeiro é feita a análise em frequência e em seguida a correlação. Para uma comparação detalhada sobre os dois modelos de correlação recomenda-se a leitura das obras [1] e [18].

O circuito da Figura 3.11 foi construído usando chips correlacionadores projetados para o Rádio-Heliógrafo de Nobeyama, que também é usado no Rádio-Heliógrafo de Gauribidanur [23]. Analisando este circuito encontram-se quatro operações fundamentais: operação XOR,  $\overline{\text{XOR}}$ , soma e acumulação.

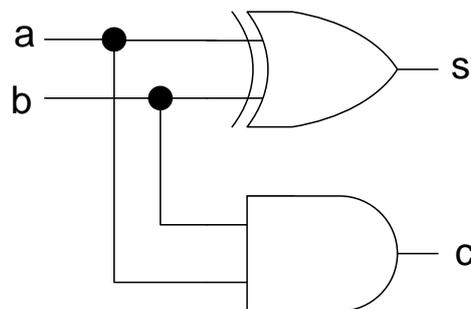
### **3.5 Estudo da complexidade das operações no circuito correlacionador convencional do BDA**

Para que possa ser feita uma comparação entre o circuito correlacionador convencional e quântico, será apresentado um estudo das operações bem como o número de portas lógicas necessárias para implementar cada operação. A Figura 3.12 apresenta o esquema do circuito para a correlação da parte real.



**Figura 3.12. Circuito de correlação (parte real) de 1 bit com acumulador de 22 bits.**

Para a operação de correlação são utilizadas duas portas XOR. Para o circuito de soma é utilizada uma porta XOR e uma porta AND, conforme Figura 3.13.



**Figura 3.13. Somador 1 bit para a soma das correlações.**

A Figura 3.14 mostra o circuito acumulador de 22 bits, que integra o resultado da correlação a cada ciclo de clock. Do lado esquerdo do diagrama da Figura 3.14 (b) pode-se observar 22 somadores completos e do lado direito, 22 latches que integram os resultados.

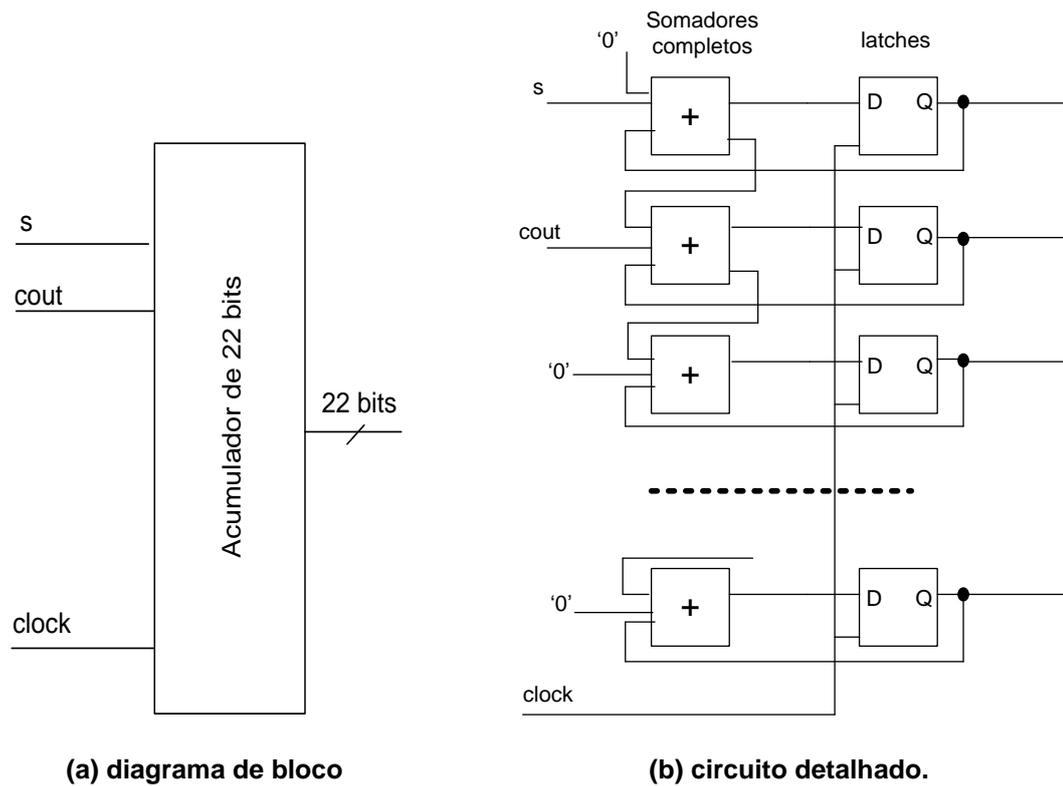


Figura 3.14. Circuito acumulador de 22 bits.

Um somador completo, conforme mostra Figura 3.15, é composto de um circuito de soma ( $s = a \text{ xor } b \text{ xor } \text{cin}$ ) e um circuito cout ( $\text{cout} = ab + (a \text{ xor } b) \text{ cin}$ ), onde cin é o valor do vem-um.

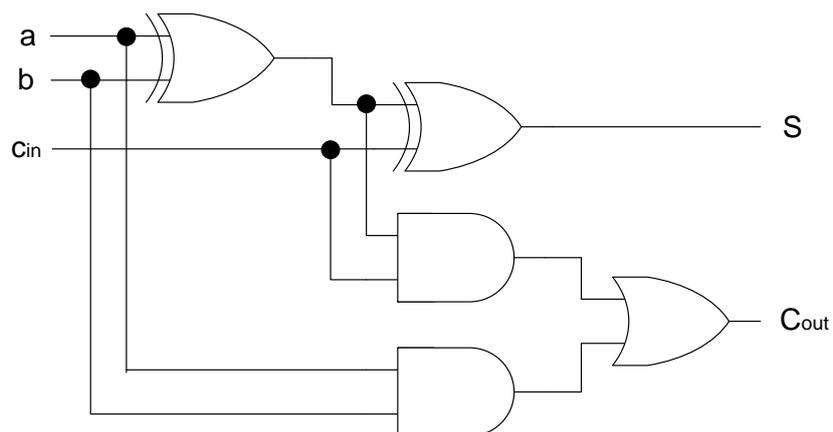


Figura 3.15. Circuito somador completo.

### 3.6 Desempenho e custo computacional do circuito correlacionador convencional do BDA

O desempenho do correlacionador pode ser avaliado por diversas métricas [1] [16] [18]. Aqui será considerada apenas a métrica que diz respeito à sensibilidade do correlacionador.

A sensibilidade do correlacionador não está relacionada com o circuito utilizado para a correlação, mas sim com a qualidade do sinal digitalizado. O processo de digitalização envolve duas etapas: amostragem e quantização.

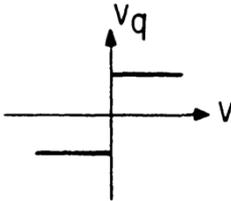
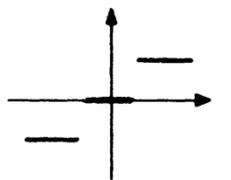
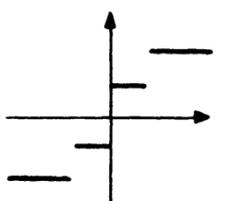
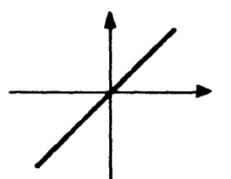
O primeiro passo é fazer a amostragem. Dado um sinal  $v(t)$ , limitado entre as frequências 0 e  $\Delta\nu$ , de acordo com o teorema da amostragem de Shannon, este sinal pode ser reconstruído tomando-se amostras com intervalos de  $\Delta t \leq \frac{1}{2\Delta\nu}$ . Como os sinais são contínuos, seria necessário fazer a amostragem durante todo o tempo, porém, de acordo com o taxa de Nyquist, o sinal pode ser reconstruído sem perdas se o mesmo for amostrado a uma taxa de no mínimo  $2\Delta\nu$ , onde  $\Delta\nu$  é a maior frequência do sinal.

A segunda tarefa do digitalizador é fazer a quantização, que converte o valor de uma variável contínua para um dos seus possíveis valores dentro de um conjunto finito de valores. Nessa etapa é necessário especificar o número de níveis utilizados para digitalizar o sinal, onde os níveis mais comuns são 2, 3 e 4 níveis.

Com 2 níveis de quantização o valor quantizado poderá assumir apenas dois possíveis valores (positivo e negativo) e podendo ser armazenado utilizando apenas 1 bit. Considerando 3 ou 4 níveis obtém-se maior qualidade na quantização com a desvantagem de utilizar 2 bits para armazenar cada valor. Esses 2 bits necessitam de mais processamento e maior quantidade de dados a serem armazenados.

A Tabela 3.1 mostra a eficiência de quantização em função do número de níveis utilizados para amostrar o sinal e também da taxa de amostragem. O projeto BDA utiliza correlacionador de 1 bit, que produz uma sensibilidade de 0.64 comparado a um correlacionador analógico [17].

Tabela 3.1. Eficiência da quantização do sinal em função da quantidade de níveis e da taxa de amostragem. Adaptado de d'Addario [18].

Signal-to-Noise Ratio vs. Quantization and Sampling Rate			
Quantization		Sampling Rate	$\frac{S/N \text{ (digital)}}{S/N \text{ (continuous)}}$
 <p>2-level (1 bit)</p>		$2\Delta\nu$	.64
		$4\Delta\nu$	.74
 <p>3-level</p>		$2\Delta\nu$	.81*
		$4\Delta\nu$	.89
 <p>4-level</p>		$2\Delta\nu$	.88
		$4\Delta\nu$	.94
 <p><math>\infty</math>-level (continuous)</p>		$2\Delta\nu$	1.00
		$4\Delta\nu$	1.00

Analisando a tabela 3.1 nota-se que o melhor caso possível seria utilizar 4 níveis para quantizar o sinal junto com uma taxa de amostragem de  $4\Delta\nu$ , produzindo sensibilidade de 0.94 em relação a um correlacionador analógico. Para implementar 4 níveis de quantização seria necessário um novo hardware para trabalhar com operações envolvendo 4 bits, além do aumento significativo na quantidade de dados armazenados.

A solução para melhorar o desempenho do correlacionador sem mudanças na arquitetura do circuito seria utilizar os mesmos 2 níveis de quantização, porém amostrados a uma taxa de  $4\Delta\nu$ , ou seja, aumentar o número de amostras no mesmo

período de tempo. Com isso a sensibilidade do correlacionador passaria de 0.64 para 0.74.

Com o aumento do número de amostras aumenta-se também o número de cálculos, que implica no aumento do número de operações lógicas num período de tempo. Como os sinais são convertidos para a banda base de 2.5 MHz, para a versão melhorada é necessário amostrar o sinal a uma taxa de  $4\Delta\nu = 10$  MHz.

Calculando o número de amostras para cada taxa de amostragem, tem-se:

$$\begin{aligned} 5 \text{ MHz} &= 5 \cdot 10^6 \text{ amostras por segundo e} \\ 10 \text{ MHz} &= 1 \cdot 10^7 \text{ amostras por segundo.} \end{aligned}$$

Calculando o número de amostras para um período de integração de 100 ms, que equivale a 1/10 de segundo, tem-se:

$$\frac{5 \cdot 10^6}{10} = 5 \cdot 10^5 \text{ amostras por período de integração e}$$

$$\frac{1 \cdot 10^7}{10} = 1 \cdot 10^6 \text{ amostras por período de integração, respectivamente.}$$

Assim chega-se ao número de amostras que o circuito correlacionador deverá manipular. Dobrando a frequência de amostragem dobra-se o número de amostras, o que implica também no dobro da quantidade de operações lógicas para obter o resultado final.

Com o número de entradas no circuito correlacionador já obtido, é preciso calcular o custo computacional do circuito, ou seja, quantas operações lógicas são necessárias para manipular cada par de amostras de entrada num ciclo de correlação do circuito correlacionador. Esse número de operações é obtido somando todas as operações descritas na seção anterior, o que resulta num total de portas lógicas para implementar uma operação de correlação, conforme Tabela 3.2.

**Tabela 3.2. Número de portas para cada ciclo de correlação do circuito convencional.**

<b>Operação</b>	<b>Número de portas</b>
Correlação	2 portas
Soma 1 bit	2 portas
Somador 22 bits	110 portas
Latches	44 portas
<b>Total</b>	<b>158 portas</b>

Assim chega-se ao número de portas lógicas necessárias para implementar uma operação de correlação e acumulação que é 158 portas lógicas. Considerando-se que cada porta corresponda a uma operação, tem-se por exemplo, para um período de integração de 100 ms,  $158 \times 5 \times 10^5$  operações para a taxa de amostragem de 5 MHz e  $158 \times 10^6$  operações para a taxa de amostragem de 10 MHz.

### **3.7 Considerações finais**

O objetivo deste capítulo foi apresentar os arranjos interferométricos e o projeto BDA. Também, neste capítulo foi descrito o circuito correlacionador convencional e as operações lógicas envolvidas. Para que sejam feitas comparações posteriores sobre o desempenho, foi descrito como o circuito correlacionador convencional é implementado fisicamente, calculando também o número de operações lógicas necessárias para a operação de correlação.

O próximo capítulo trata da computação quântica com ênfase nos principais conceitos matemáticos e físicos utilizados na computação quântica.

## CAPÍTULO 4: COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

---

### 4.1 Introdução

Este capítulo tem como propósito introduzir os conceitos básicos da computação quântica. Por este ser um assunto extenso e que envolve Matemática, Física e Computação, será exibido um resumo dos principais tópicos relacionados diretamente com a computação quântica.

O capítulo inicia com a Tabela 4.1 ilustrando a notação matemática utilizada em mecânica quântica, a qual é ligeiramente diferente da notação matemática padrão. Mais detalhes dos aspectos da álgebra linear relacionados com a computação quântica são disponíveis no apêndice I.

**Tabela 4.1. Notação utilizada em mecânica quântica [44].**

Notação	Descrição
$z^*$	Complexo conjugado do número complexo $z$ . $1 + i^* = 1 - i$
$ u\rangle$	Representação de vetor. Também chamado ket.
$\langle u $	Vetor dual de $ u\rangle$ . Também chamado de bra.
$\langle u v\rangle$	Produto interno dos vetores $ u\rangle$ e $ v\rangle$ .
$ u\rangle \otimes  v\rangle$ $ u\rangle  v\rangle$ $ u, v\rangle$ $ u v\rangle$	Produto tensorial de $ u\rangle$ e $ v\rangle$ .
$A^*$	Complexo conjugado da matriz $A$ .

$A^T$	Transposta da matriz $A$ .
$A^\dagger$	Hermitiano conjugado ou matriz adjunta de $A$ , $A^\dagger = A^{T*}$ . $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix}$
$\langle v A u\rangle$	Produto interno entre $ v\rangle$ e $A u\rangle$ .

## 4.2 Mecânica Quântica

A computação quântica faz uso dos postulados da mecânica quântica. A mecânica quântica é a teoria física que descreve os fenômenos microscópicos de partículas como fótons, elétrons, átomos etc. A seguir, serão apresentados os conceitos matemáticos da mecânica quântica relevantes à computação quântica.

## 4.3 Qubit – quantum bit

Apesar do conceito de qubit não ser um conceito de mecânica quântica e sim de computação quântica, será adiantado aqui este assunto para facilitar o entendimento do restante do capítulo.

Em computação quântica, a menor unidade de informação é o quantum bit (qubit ou q-bit). O qubit é o análogo ao bit em computação convencional com uma diferença: o qubit pode estar nos dois possíveis estados da base computacional (0 e 1) ao mesmo tempo, diferente do bit, que pode estar em apenas um dos possíveis estados.

Um computador quântico com 4 qubits pode representar  $2^4 = 16$  valores simultâneos, enquanto um computador convencional com 4 bits pode representar apenas 1 dentre os 16 valores possíveis. Essa possibilidade de representar todos os possíveis valores simultaneamente deve-se ao fenômeno da superposição de estados, que será descrito mais adiante neste capítulo.

A equação 1 mostra a representação matemática de um qubit.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (\text{eq. 1})$$

$|\psi\rangle$  é um estado arbitrário. Os componentes  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos, no qual o quadrado da norma diz qual a probabilidade de obter  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$  quando uma

medida é feita, obedecendo a restrição  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Assim, se uma medida é feita, tem-se a probabilidade  $|\alpha|^2$  de obter  $|0\rangle$  e a probabilidade  $|\beta|^2$  de obter  $|1\rangle$ .

Os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  formam uma base computacional no espaço vetorial complexo de Hilbert, significando os valores binários 0 e 1 respectivamente. Esses estados tem a seguinte representação matricial:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 2})$$

É importante lembrar que a representação de qubit dado pelas equações 1 e 2 é uma abstração matemática para manipular os objetos físicos que serão utilizados para implementar os qubits fisicamente. No apêndice IV são apresentadas algumas propostas de implementação física para os qubits e computadores quânticos.

#### 4.4 Notação de Dirac

Notação de Dirac é a notação padrão da mecânica quântica [44]. Esta notação é utilizada também para representar vetores no espaço vetorial de *Hilbert* (espaço vetorial complexo). É de interesse para a computação quântica apenas espaços vetoriais com dimensão finita, mais especificamente, na base  $C^2$ . Com esta base, é possível representar os valores da base computacional “0” e “1”. Portanto, utilizando a notação de Dirac, um vetor pode ser representado da seguinte forma:

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 3})$$

onde  $u_1 = a + bi$  e  $u_2 = c + di$ .

O símbolo  $| \rangle$  é chamado de *ket*. Existe também o vetor dual  $\langle |$  chamado *bra*, obtido transpondo o vetor  $|u\rangle$  e conjugando seus componentes.

$$\langle u| = |u\rangle^\dagger = [u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*] \quad (\text{eq. 4})$$

Dado o vetor  $|\nu\rangle$ , onde

$$|\nu\rangle = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5})$$

o vetor dual de  $|\nu\rangle$  é:

$$\langle\nu| = |\nu\rangle^\dagger = [(1-i)^*, (1+i)^*] \quad (\text{eq. 6})$$

$$\langle\nu| = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 7})$$

## 4.5 Superposição

Superposição é um fenômeno da física quântica que indica que um sistema quântico pode estar em dois ou mais estados simultaneamente.

Em computação quântica, este fenômeno permite que um qubit possa assumir os dois valores da base computacional simultaneamente, isto é, um qubit pode armazenar os valores “0” e “1” ao mesmo tempo. Isto significa que um registrador quântico de  $n$  qubits pode armazenar  $2^n$  valores simultaneamente. Com isto percebe-se o aumento exponencial de capacidade de armazenamento/processamento de informação em relação à computação convencional. Este fenômeno é também conhecido como paralelismo quântico, do computador quântico executar vários cálculos simultaneamente [44].

A representação matemática para um qubit em superposição já foi apresentada na equação 1.

De acordo com as leis da mecânica quântica, um estado permanece em superposição até que uma medida seja realizada. Assim, quando uma medida é realizada, o estado que antes estava em superposição colapsa para um único estado (o estado de maior probabilidade), e os demais estados se perdem.

Portanto, pode-se dizer que um qubit pode estar em superposição em tempo de execução, pois quando é realizada uma medida, o valor deste se colapsa para um dos estados (“0” ou “1”) de acordo com a probabilidade de cada um dos estados.

## 4.6 Emaranhamento

“Emaranhamento é a capacidade de pares de partículas interagirem a qualquer distância instantaneamente” [48]. Um exemplo de emaranhamento é:

um processo atômico que produz fótons gêmeos, os mesmos que, pela conservação do momento linear são emitidos em direções contrárias, e pela conservação do momento angular devem ter polarizações ortogonais. Agora, quando um dos fótons atravessa um polarizador (adquirindo a polarização correspondente), simultaneamente o fóton gêmeo (sem ter atravessado nenhum polarizador) adquire a polarização ortogonal [28].

Como pode ser observado no exemplo acima, é como se o segundo fóton soubesse do resultado da polarização do primeiro fóton, e assim, assumindo o resultado oposto ao do primeiro. Este fenômeno não possui um análogo clássico [44].

O paradoxo EPR (Einstein, Podolski e Rosen), que tinha como objetivo mostrar que a mecânica quântica era uma teoria incompleta colaborou para confirmar a existência deste fenômeno.

Ao leitor interessado, recomenda-se a leitura do apêndice V que mostra um exemplo de emaranhamento.

## 4.7 Computação Quântica: Portas lógicas e circuitos

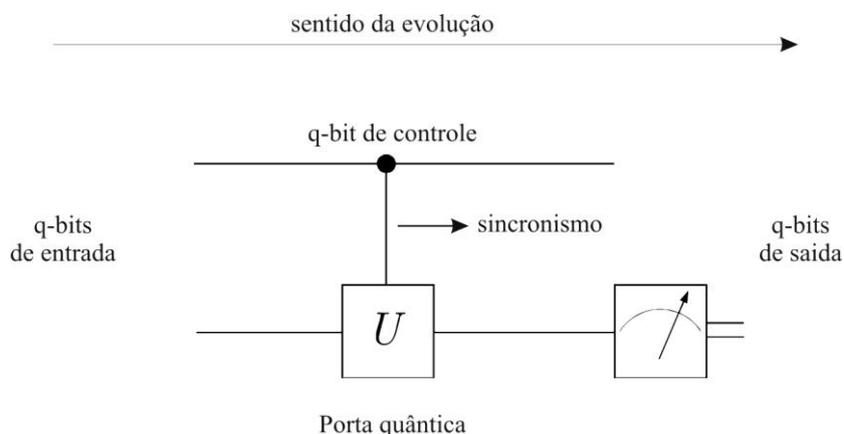
Circuitos (convencionais ou quânticos) são compostos por um conjunto de portas lógicas que são dispositivos primitivos que manipulam os dados, convertendo-os de uma forma para a outra. As portas lógicas são responsáveis pelas operações básicas de um computador. Operações complexas (soma, multiplicação etc.) são obtidas pela composição das portas lógicas básicas.

Em computação quântica a nomenclatura passa de portas lógicas para portas quânticas, que são representadas matematicamente por operadores unitários realizando transformações unitárias no sistema quântico de um ou mais qubits.

As portas quânticas são divididas em três segmentos:

- Portas quânticas de um qubit.
- Portas quânticas de múltiplos qubits.
- Portas quânticas universais.

A Figura 4.1 mostra o esquema de um circuito quântico típico composto de uma porta quântica. A esquerda estão os qubits de entrada e a direita os qubits de saída. Nota-se também a operação de medida, que está ligada ao qubit inferior.



**Figura 4.1** Circuito quântico utilizando uma porta quântica U-controlada [49].

A descrição de um circuito quântico pode ser resumida em:

- A entrada pode ser o produto tensorial entre os qubits ou um estado emaranhado.
- O sentido de execução (também conhecido como evolução do sistema) do circuito é da esquerda para a direita. Circuitos quânticos são acíclicos, isto é, não permite retroalimentação (*feedback*).
- As linhas horizontais representam a evolução do qubit, como por exemplo, a passagem do tempo ou o deslocamento de um fóton.
- A linha vertical que une o símbolo  $\bullet$  e o símbolo  $\boxed{U}$  representa o sincronismo. Isto significa que quando os qubits alcançarem aquele ponto o circuito atuará simultaneamente nos qubits.
- O símbolo  $\bullet$  indica que o qubit que está nessa linha é um qubit de controle. Se o símbolo estiver preenchido ( $\bullet$ ) significa que o valor é  $|1\rangle$  ou seja, a operação definida em  $\boxed{U}$  será realizada. Se o símbolo estiver vazio ( $\circ$ ) significa que o valor é  $|0\rangle$  ou seja, a operação definida em  $\boxed{U}$  não será realizada. Essa convenção é frequentemente ignorada, aparecendo apenas o símbolo  $\bullet$  para ambos os valores  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

- A medida é representada pelo símbolo de medição. A saída de um circuito pode ou não ser medida. No exemplo acima, apenas o qubit da linha inferior é medido.

#### 4.7.1 Portas quânticas de um qubit

Portas quânticas de um qubit são descritas por matrizes unitárias 2x2. As matrizes unitárias garantem que a computação possa ser reversível<sup>22</sup>. Lembra-se que um vetor de estado (qubit) deve ser unitário, e portanto, após a aplicação de uma porta quântica, obtem-se outro vetor de estado que continuará sendo unitário.

A seguir são apresentadas as principais portas quânticas de um qubit denotadas pela representação gráfica e pela matriz correspondente.

##### 4.7.1.1 Pauli I

Esta porta também é conhecida como porta identidade e o resultado de sua operação não altera o estado do qubit de entrada. Em algumas referências ela é omitida da lista das matrizes de Pauli.



**Figura 4.2. Representação da porta Pauli I.**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 8})$$

Os resultados da aplicação desta porta estão a seguir:

$$I|0\rangle = |0\rangle \quad (\text{eq. 9})$$

$$I|1\rangle = |1\rangle \quad (\text{eq. 10})$$

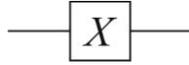
$$I(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (\text{eq. 11})$$

---

<sup>22</sup> Computação reversível: dado um qubit  $\psi$  em um estado arbitrário que passará por uma porta quântica  $U$  produzindo o resultado  $\psi'$ . Se aplicar a porta quântica inversa (i.e. a matriz inversa) da porta quântica  $U$  no qubit  $\psi'$ , obter-se-a o qubit inicial  $\psi$ .

#### 4.7.1.2 Pauli X (Not)

Esta porta também é conhecida como porta NOT (não) e sua operação inverte o estado do qubit de entrada.



**Figura 4.3. Representação da porta Pauli X.**

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 12})$$

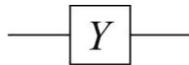
Os resultados da aplicação desta porta estão a seguir:

$$X|0\rangle = |1\rangle \quad (\text{eq. 13})$$

$$X|1\rangle = |0\rangle \quad (\text{eq. 14})$$

$$X(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle \quad (\text{eq. 15})$$

#### 4.7.1.3 Pauli Y



**Figura 4.4. Representação da porta Pauli Y.**

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 16})$$

Os resultados da aplicação desta porta estão a seguir:

$$Y|0\rangle = i|1\rangle \quad (\text{eq. 17})$$

$$Y|1\rangle = -i|0\rangle \quad (\text{eq. 18})$$

$$Y(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = -\beta i|0\rangle + \alpha i|1\rangle \quad (\text{eq. 19})$$

## 4.7.1.4 Pauli Z



Figura 4.5. Representação da porta Pauli Z.

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 20})$$

Os resultados da aplicação desta porta estão a seguir:

$$Z|0\rangle = |0\rangle \quad (\text{eq. 21})$$

$$Z|1\rangle = -|1\rangle \quad (\text{eq. 22})$$

$$Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \quad (\text{eq. 23})$$

## 4.7.1.5 Phase (S)



Figura 4.6. Representação da porta Phase S.

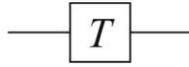
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 24})$$

Os resultados da aplicação desta porta estão a seguir:

$$S|0\rangle = |0\rangle \quad (\text{eq. 25})$$

$$S|1\rangle = i|1\rangle \quad (\text{eq. 26})$$

$$S(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + \beta i|1\rangle \quad (\text{eq. 27})$$

4.7.1.6  $\pi/8$  ( $T$ )Figura 4.7. Representação da porta de rotação  $\pi/8$ .

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 28})$$

Os resultados da aplicação desta porta estão a seguir:

$$T|0\rangle = |0\rangle \quad (\text{eq. 29})$$

$$T|1\rangle = e^{i\frac{\pi}{8}}|1\rangle \quad (\text{eq. 30})$$

$$T(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{8}}\beta|1\rangle \quad (\text{eq. 31})$$

4.7.1.7 Hadarmard ( $H$ )

Esta porta é utilizada para colocar o estado de um qubit em superposição com mesma probabilidade para os dois estados. Ela é muito utilizada no circuito quântico que implementa a QFT (Quantum Fourier Transform).

Figura 4.8. Representação da porta Hadamard  $H$ .

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 32})$$

Os resultados da aplicação desta porta estão a seguir:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (\text{eq. 33})$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (\text{eq. 34})$$

$$H \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \beta \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \quad (\text{eq. 35})$$

#### 4.7.2 Portas quânticas de múltiplos qubits

São portas onde a entrada é dada por mais de um qubit. Um protótipo para uma porta quântica de múltiplos qubits é a porta CNOT (*controlled not*). Esta porta possui dois qubits de entrada, um chamado *qubit de controle* (qubit superior) e o outro chamado *qubit alvo* (qubit inferior). A Figura 4.9 mostra a representação da porta quântica CNOT.

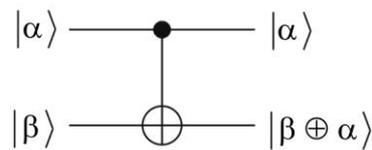


Figura 4.9. Representação da porta CNOT.

Note que o qubit de controle não sofre nenhuma alteração. O símbolo  $\oplus$  representa a operação XOR que resulta em 1 se, e somente se, um dos qubits for 1 e o outro for 0. A representação matricial da porta quântica CNOT é a dada pela equação 49:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 36})$$

A aplicação desta porta é (o qubit mais a esquerda é o qubit de controle) produz os seguintes resultados:

$$CNOT|00\rangle = |00\rangle \quad (\text{eq. 37})$$

$$CNOT|01\rangle = |01\rangle \quad (\text{eq. 38})$$

$$CNOT|10\rangle = |11\rangle \quad (\text{eq. 39})$$

$$CNOT|11\rangle = |10\rangle \quad (\text{eq. 40})$$

Quando o qubit de controle está em superposição, os resultados são:

$$CNOT \frac{\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} |0\rangle = \frac{\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (\text{eq. 41})$$

$$CNOT \frac{\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} |1\rangle = \frac{\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (\text{eq. 42})$$

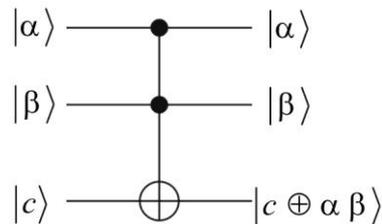
Quando o qubit alvo está em superposição, os resultados são:

$$CNOT |0\rangle \frac{\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (\text{eq. 43})$$

$$CNOT |1\rangle \frac{\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{\alpha|11\rangle + \beta|10\rangle}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (\text{eq. 44})$$

#### 4.7.2.1 Porta Toffoli

Esta porta possui três qubits de entrada, onde o primeiro e o segundo são os qubits de controle, e o terceiro o qubit alvo. O qubit alvo só inverte de estado se os dois qubits de controle forem  $|1\rangle$ . Pode-se notar que esta porta faz a mesma operação que a porta CNOT, porém, utilizando dois qubits como controle. A seguir tem-se a representação desta porta:



**Figura 4.10. Representação da porta Toffoli.**

$$TOFFOLI = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 45})$$

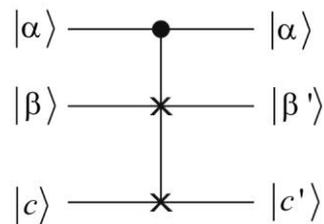
Considerando apenas os casos onde os qubits de controle são 1, tem-se os seguintes resultados:

$$|111\rangle = |110\rangle \quad (\text{eq. 46})$$

$$|110\rangle = |111\rangle \quad (\text{eq. 47})$$

#### 4.7.2.2 Porta Fredkin

Esta porta possui três qubits de entrada, onde o primeiro deles é o qubit de controle e os dois últimos são os qubits alvo. A função dessa porta é trocar os estados entre os qubits alvo, ou seja, o qubit 2 troca para o estado do qubit 3 e o qubit 3 troca para o estado do qubit 2. Os qubits alvo só trocam de estado caso o qubit de controle for  $|1\rangle$ . A seguir é apresentada a representação gráfica e matricial desta porta:



**Figura 4.11. Representação da porta Fredkin.**

$$FREDKIN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 48})$$

Considerando apenas os casos onde o qubit de controle é 1, o resultado da aplicação desta porta é:

$$|100\rangle = |100\rangle \quad (\text{eq. 49})$$

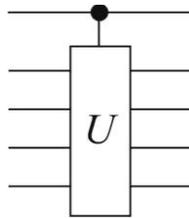
$$|101\rangle = |110\rangle \quad (\text{eq. 50})$$

$$|110\rangle = |101\rangle \quad (\text{eq. 51})$$

$$|111\rangle = |111\rangle \quad (\text{eq. 52})$$

#### 4.7.2.3 Porta arbitrária U

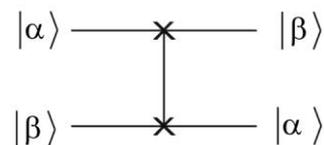
É uma porta genérica muitas vezes chamada de “black box”. É uma porta que não é pré-definida e, portanto, pode ser utilizada para manipular qualquer número de qubits. Em outras palavras, ela é uma porta “genérica” onde se pode implementar qualquer operação, desde que esta obedeça as regras dos operadores unitários.



**Figura 4.12. Representação da porta arbitrária U.**

#### 4.7.2.4 Porta Swap

Esta porta simplesmente troca o estado dos qubits de entrada. Dado dois qubits de entrada  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$ , essa porta troca o estado do qubit  $|\alpha\rangle$  pelo estado do qubit  $|\beta\rangle$  e vice-versa. Ela é utilizada no circuito que implementa a Transformada de Fourier quântica (QFT) para trocar a ordem dos qubits, porém, é raramente mostrada como parte do circuito.



**Figura 4.13. Representação da porta SWAP.**

$$SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 53})$$

### 4.7.3 Portas quânticas universais

Mesmo existindo uma quantidade infinita de portas quânticas de 1 qubit (o número de matrizes unitárias  $2 \times 2$  é infinito), esse conjunto não é universal, isto é, mesmo com essa infinidade de portas, este conjunto não é suficiente para construir qualquer operação.

Porém, da mesma forma que na computação convencional existe a porta lógica universal NAND, na computação quântica também existe uma porta quântica universal que é a porta CNOT. Assim, qualquer porta lógica de múltiplos qubits pode ser construída a partir da porta CNOT e de portas de um qubit [44].

## 4.8 Medidas

Medida é a forma de obter a probabilidade associada ao estado de um qubit. As medidas desempenham um papel fundamental na computação quântica, pois por meio das medidas conseguimos obter os resultados dos algoritmos.

As medidas impõem a restrição de que não podemos obter todos os valores em superposição que estão no registrador quântico. Anteriormente, foi descrito que um registrador quântico de 3 qubits pode estar em oito possíveis estados simultaneamente, porém, quando aplicamos uma medida nesse registrador, obtemos apenas o estado quântico que estava com a maior probabilidade. Após a medida, aquele registrador que antes estava em superposição nos oito possíveis estados, transforma-se em outro estado definido por uma equação que será apresentada a seguir.

Considere o qubit a seguir:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (\text{eq. 54})$$

Quando aplica-se uma medida no qubit  $|\psi\rangle$  o estado do qubit é forçado para um dos seus possíveis estados, isto é,  $|\psi\rangle \rightarrow |0\rangle$  ou  $|\psi\rangle \rightarrow |1\rangle$ , de acordo com as amplitudes  $\alpha$  e  $\beta$ . Após a medida, o estado original da equação 54 é perdido, sendo impossível determinar ambos  $\alpha$  e  $\beta$ .

O modelo de medidas que será apresentado a seguir são as medidas projetivas [41], também conhecidas como medidas de von Neumann. A ideia básica das medidas projetivas é baseada na seguinte questão: “Dado um conjunto exclusivo de possíveis estados em qual estado o sistema está?” Por exemplo, um átomo poderia estar em dois estados exclusivos – um estado de baixa energia denotado por  $|g\rangle$  e um estado excitado denotado por  $|e\rangle$ . Usando medidas projetivas é possível saber em qual estado o átomo se encontra.

Matematicamente estas medidas também são definidas por projetores apresentados no apêndice II. Um conjunto de resultados de medidas mutuamente exclusivos corresponde a um conjunto de projetores ortogonais no espaço de estados do sistema. Um conjunto completo de projetores ortogonais  $P$  são aqueles que

$$\sum_i P_i = I \quad (\text{eq. 55})$$

Todo conjunto completo de projetores ortogonais especificam que haverá pelo menos uma medida válida. O número de projetores é determinado pela dimensão do espaço de Hilbert que descreve o sistema. Se a dimensão do espaço de Hilbert é  $d$  e existe  $m$  projetores, então

$$m \leq d \quad (\text{eq. 56})$$

Por exemplo, considerando o qubit  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , onde a dimensão do espaço de Hilbert é 2, os projetores correspondentes aos possíveis resultados da medida,  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  são dados pelas equações 57 e 58:

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| \quad (\text{eq. 57})$$

$$P_1 = |1\rangle\langle 1| \quad (\text{eq. 58})$$

Os projetores correspondentes aos estados de baixa energia e excitado do átomo anterior poderiam ser escritos de acordo com as equações 59 e 60:

$$P_g = |g\rangle\langle g| \quad (\text{eq. 59})$$

$$P_e = |e\rangle\langle e| \quad (\text{eq. 60})$$

Considera-se um sistema de dimensão  $n$ , e também um conjunto de projetores ortogonais  $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$ . O sistema está preparado no estado  $|\psi\rangle$ . A probabilidade de obter o  $i$ -ésimo resultado da medida é

$$\text{Pr}(i) = \langle \psi | P_i | \psi \rangle \quad (\text{eq. 61})$$

O resultado também pode ser obtido pela regra de Born:

$$\text{Pr}(i) = \left| \langle u_i | \psi \rangle \right|^2 \quad (\text{eq. 62})$$

Após a medida o sistema é projetado para um estado base que corresponde ao resultado obtido pela medida. Formalmente, o estado após a medida  $|\psi'\rangle$  é definido como:

$$|\psi'\rangle = \frac{P_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_i | \psi \rangle}} \quad (\text{eq. 63})$$

No apêndice II é apresentado um exemplo de aplicação das medidas.

## 4.9 Paralelismo quântico

Paralelismo é uma técnica que permite a execução de varias funções simultaneamente. Na computação convencional, esta técnica é implementada por meio de vários circuitos diferentes. Isto significa que para realizar duas operações simultaneamente, são necessários dois circuitos. Na computação quântica não são necessários dois circuitos, pois utilizando qubits em estado de superposição é possível realizar a computação nos vários estados do qubit simultaneamente utilizando apenas um circuito.

Para mostrar como funciona o paralelismo quântico, é apresentando, no apêndice III, o algoritmo de Deutsch [65].

#### 4.10 Transformada de Fourier Quântica (QFT)

Na computação quântica tem-se uma transformada análoga à transformada discreta de Fourier (DFT). Na computação convencional a DFT toma como entrada um vetor de números complexos  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ , onde  $N$  é o comprimento do vetor, e produz como saída um vetor de números complexos  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  dado pela seguinte equação:

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{2\pi ijk/N} \quad (\text{eq. 64})$$

A QFT é a mesma transformação, porém toma como entrada um vetor na base ortonormal (vetores ortogonais e normalizados)  $|x\rangle = |x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0\rangle$  e produz como resultado:

$$U_F |x\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} e^{2\pi ixy/2^n} |y\rangle \quad (\text{eq. 65})$$

onde  $U_F$  é um operador unitário que representa a QFT e  $n$  é um número inteiro. Pode-se escrever a equação acima como:

$$U_F |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} e^{2\pi i y_0 \cdot 0.x_0x_1\dots x_{n-1} + y_1 \cdot 0.x_0x_1\dots x_{n-2} + y_{n-1} \cdot 0.x_0} |y\rangle \quad (\text{eq. 66})$$

Considerando que  $|y\rangle = |y_0\rangle \otimes |y_1\rangle \otimes \dots \otimes |y_{n-1}\rangle$  onde cada  $y_i \in \{0,1\}$ , pode-se escrever a equação 66 na forma de produto tensorial:

$$U_F |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} e^{2\pi i y_0 \cdot 0.x_0x_1\dots x_{n-1}} |y_0\rangle \otimes \dots \otimes e^{2\pi i y_{n-1} \cdot 0.x_0} |y_{n-1}\rangle \quad (\text{eq. 67})$$

Se  $y_i = 0$  então  $e^{2\pi i y_i 0.x_0 x_1 \dots x_{n-1}} |y_i\rangle = e^0 |0\rangle = 1|0\rangle$ . Se  $y_i = 1$  então o termo  $e^{2\pi i y_i 0.x_0 x_1 \dots x_{n-1}}$  permanece.

A notação utilizada nas equações 66 e 67 referem-se à fração binária, definida pelas seguintes equações:

$$0.x_0 = \frac{x_0}{2^1} \quad (\text{eq. 68})$$

$$0.x_1 x_0 = \frac{x_1}{2^2} + \frac{x_0}{2^1} \quad (\text{eq. 69})$$

$$0.x_2 x_1 x_0 = \frac{x_2}{2^3} + \frac{x_1}{2^2} + \frac{x_0}{2^1} \quad (\text{eq. 70})$$

A equação acima pode ser construída pelas portas quânticas de Hadamard  $H$  e pela porta de rotação condicional  $R_k$ . Relembrando as duas portas quânticas (equação 71 e 72):

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 71})$$

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{2^k}} \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 72})$$

Com essas duas portas quânticas chega-se ao circuito da Figura 4.14 que implementa a QFT.

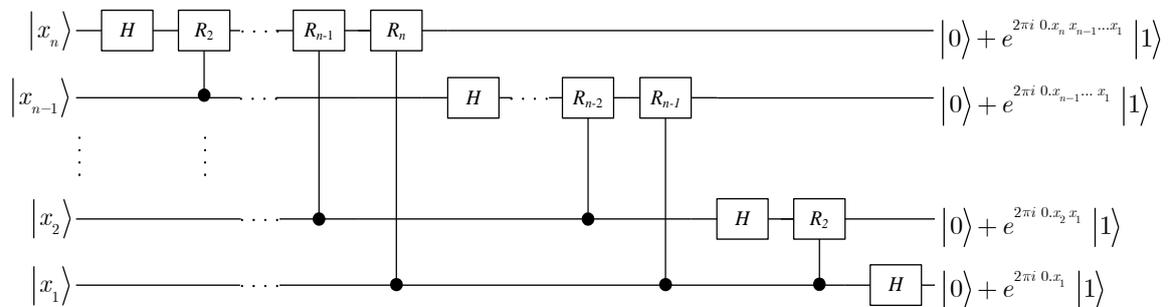


Figura 4.14. Circuito quântico que implementa a QFT.

Considerando a aplicação da QFT em um vetor de estado  $|x\rangle = |x_2 x_1 x_0\rangle$  tem-se o seguinte circuito da Figura 4.15:

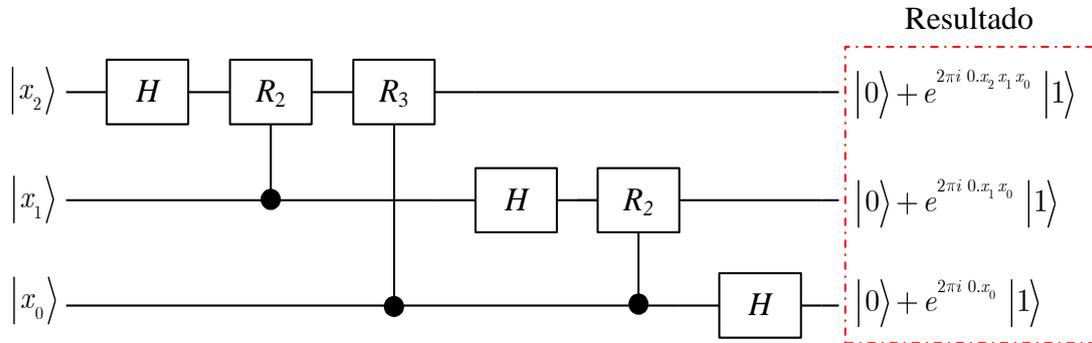


Figura 4.15. Circuito quântico que implementa a QFT para 3 qubits.

O resultado acima é obtido da seguinte maneira:

Primeiro aplica-se a porta  $H$  no qubit  $|x_2\rangle$ :

$$H|x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_y (-1)^{x_2 y} |y\rangle \quad (\text{eq. 73})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_y e^{2\pi i x_2 y/2} |y\rangle \quad (\text{eq. 74})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + e^{2\pi i 0.x_2} |1\rangle \quad (\text{eq. 75})$$

É importante notar que  $e^{\pi i} = e^{2\pi i/2} = -1$ . Assim obtem-se a equação 73. Para  $y = 0$  obtem-se  $e^{2\pi i x_2 0/2} = 1$  e para  $y = 1$  obtem-se  $e^{2\pi i x_2 1/2} = e^{2\pi i 0.x_2}$ . Assim chega-se à equação 75.

Em seguida aplica-se  $R_2$ . O qubit de controle está em  $x_1$ , que pode ser  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ . Se for  $|0\rangle$  a operação não é realizada, e se for  $|1\rangle$  o resultado é  $R|1\rangle = e^{\pi i x_1/2} = e^{2\pi i x_1/4}$ . Aplicando este resultado no estado atual do qubit  $|x_2\rangle$  (dado pela equação 75), tem-se:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + e^{2\pi i 0.x_2 x_1} |1\rangle \quad (\text{eq. 76})$$

Continuando ainda no qubit  $|x_2\rangle$ , aplica-se a porta  $R_3$  que está condicionada no qubit  $|x_0\rangle$ , obtendo como resultado:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x_2 x_1 x_0} |1\rangle \quad (\text{eq. 77})$$

Assim chega-se ao estado final para o qubit  $|x_2\rangle$ . Os outros resultados são obtidos da mesma forma descrita acima. O estado final do sistema após todas as operações é:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x_2 x_1 x_0} |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x_2 x_1} |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + e^{2\pi i \cdot 0 \cdot x_2} |1\rangle \quad (\text{eq. 78})$$

Uma alternativa às equações apresentadas acima é a representação matricial. A matriz unitária que implementa a QFT é:

$$QFT = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{2^n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(2^n-1)} \\ 1 & w^3 & w^6 & \dots & w^{3(2^n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{2^n-1} & w^{2(2^n-1)} & \dots & w^{(2^n-1)(2^n-1)} \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 79})$$

onde  $w = e^{2\pi i/2^n}$ .

#### 4.10.1 Transformada de Fourier quântica aproximada (AQFT)

O circuito quântico apresentado na Figura 4.14 pode ser implementado de forma mais eficiente reduzindo o número de portas quânticas. Barenco et. al [86] mostra em seu trabalho que a transformada aproximada produz resultados semelhantes à transformada completa, porém com um redução do número de portas quânticas do circuito.

A técnica para implementar a transformada aproximada é reduzir o número de rotações condicionais. Barenco et. al [86] mostra que é possível reduzir o número de

rotações de  $n \frac{(n+1)}{2}$  para  $n \log_2 n$  ( $n$  é o número total de qubits de entrada) rotações estabelecendo um limite para o índice  $k$ .

À medida que o índice  $k$  cresce, o fator  $e^{2\pi i/2^k}$  que determina a rotação diminui. Com o aumento de  $k$ , cresce também o número de rotações, resultando em maior descoerência para o sistema.

Para definir qual o número mínimo de rotações necessárias, Barenco et. al [86] quantificaram a qualidade do resultado definindo um fator de qualidade  $Q$ . Assim, para atingir uma precisão mínima aceitável e para reduzir o número de portas quânticas do circuito, foi estabelecido que o número de rotações determinado pelo índice  $k$  deve ser:

$$k > \log_2 n + 2 \quad (\text{eq. 80})$$

onde  $n$  é o número de qubits. Desconsiderando o fator constante 2, pode-se dizer que  $k \approx \log_2 n$ . Considerando o novo índice  $k$ , o custo computacional da QFT aproximada é de  $n \log_2 n$  operações.

Assim, um circuito que implementa uma QFT de 4 qubits, portanto  $k = 4$  rotações (Figura 4.16) pode ser reescrito utilizando a AQFT onde  $k = 2$  rotações (Figura 4.17).

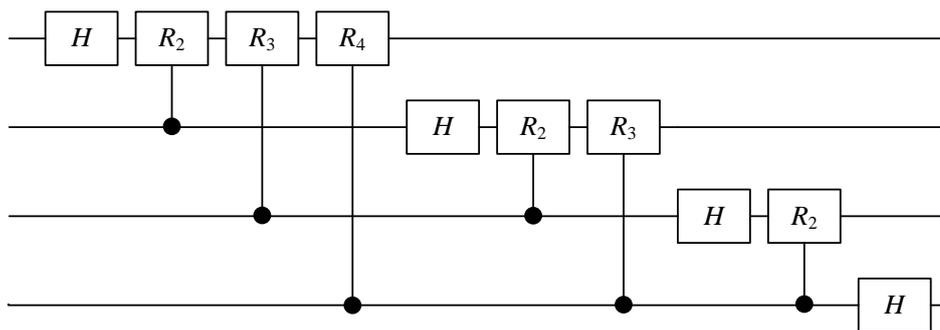


Figura 4.16. Circuito para QFT quando  $n = 4$  e  $k = 4$ .

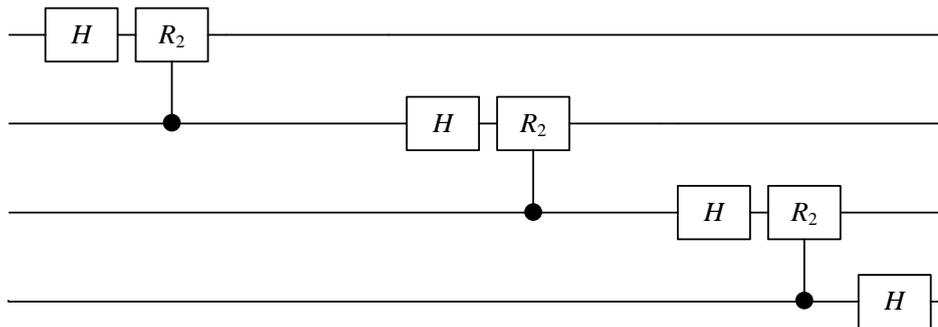


Figura 4.17. Circuito para AQFT quando  $n = 4$  e  $k = 2$ .

## 4.11 Considerações finais

Este capítulo abordou a computação quântica dando ênfase a aspectos essenciais, tais como as portas lógicas, circuitos, medidas, e os algoritmos que implementam a QFT e a AQFT.

O próximo capítulo é o primeiro de dois capítulos que trata do circuito correlacionador quântico, onde será apresentada as operações quânticas necessárias para implementar o circuito correlacionador quântico.

## **CAPÍTULO 5: PROJETO DO CÍRCUITO CORRELACIONADOR QUÂNTICO – ESTUDO DAS OPERAÇÕES QUÂNTICAS**

---

### **5.1 Introdução**

Este capítulo tem como objetivo descrever as operações quânticas necessárias para implementar o circuito correlacionador quântico proposto como tema de dissertação, dando maior ênfase na operação de soma.

A operação de soma já foi explorada em alguns trabalhos [74] [75] [78]. Neste capítulo será feito um comparativo, em termos de custo computacional, para justificar a escolha do circuito quântico somador que será utilizado para implementar a operação de acumulação, a qual será apresentada na descrição completa do circuito correlacionador quântico no próximo capítulo.

Ao final do capítulo é feita uma comparação, em termos de custo computacional, entre os circuitos somadores para que seja possível escolher qual circuito somador utilizar no correlacionador quântico.

Antes de iniciar o estudo sobre as operações quânticas, será apresentado a metodologia utilizada para desenvolver este trabalho.

### **5.2 Metodologia aplicada**

Este trabalho foi baseado em referências teóricas e práticas em simulador. Como não existe um computador quântico disponível, todos os resultados foram obtidos utilizando o simulador de computação quântica QCAD [79].

Além do simulador QCAD, foram avaliados para ser utilizado neste trabalho o simulador Zeno [72] e a biblioteca para Matlab QCF [68].

O simulador Zeno apresentou problemas em simulador 26 qubits, gerando erros de estouro de memória mesmo com memória RAM suficiente.

A biblioteca QCF foi utilizada apenas para validar alguns resultados, pois com a interface em modo texto, torna-se difícil descrever um circuito grande como o apresentado no apêndice VI.

Dentre as opções, foi escolhido o simulador QCAD por apresentar uma interface simples e amigável e por simular os 26 qubits sem gerar nenhum tipo de erro. Desenvolvido em C++, o simulador apresenta bom desempenho e gerenciamento de memória, pois para simular 26 qubits foram necessários 2 GB de memória RAM, e um tempo aproximado de 40 minutos para cada simulação em um computador com processador Intel Core 2 Duo 2.0 GHz e 3 GB de memória RAM.

Para fazer os cálculos, foram utilizados valores sintetizados, visto que não foi possível obter valores gerados pelo BDA. Todos os resultados demonstrados na Tabela 6.2 foram obtidos a partir do simulador QCAD.

### 5.3 Operações quânticas XOR e $\overline{\text{XOR}}$

Como apresentado anteriormente, a operação XOR é representada em computação quântica pela porta quântica CNOT:

$$\text{XOR} = \text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 1})$$

A operação  $\overline{\text{XOR}}$  é obtida pela junção das portas NOT e XOR. Essa junção é obtida, matematicamente pela multiplicação das portas quânticas NOT e XOR:

$$\begin{array}{c}
 \text{NOT} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \text{XOR} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \overline{\text{XOR}} \\
 \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (\text{eq. 2})$$

## 5.4 Operação quântica de soma

Para implementar a operação de soma são utilizados circuitos mais complexos. Na literatura foram encontrados diferentes circuitos quânticos para efetuar a soma porém, neste trabalho serão apresentados três deles, devido aos demais circuitos serem suas variações: a versão mais simples do somador proposta por Vedral et. all [74] o qual será referenciado por “Vedral”; uma versão otimizada proposta por Cuccaro et. all [78] o qual será referenciado por “Cuccaro”; e por fim uma versão que utiliza a QFT proposta por Draper [75] o qual será referenciado por “Draper”. Na próxima seção serão omitidos detalhes que provam o funcionamento de cada proposta. Para obter tais detalhes, tais como a prova de que estes circuitos funcionam, recomenda-se a leitura de cada trabalho referenciado. Uma lista com esses e outros circuitos somadores pode ser encontrado em Van Meter III [77].

## 5.5 Circuito quântico somador “Vedral” [74]

O primeiro circuito somador foi desenvolvido por Vedral, Barenco e Ekert [74]. Este circuito é composto de portas CNOT e Toffoli. O circuito quântico denotado “Vedral” é descrito na Figura 5.1.

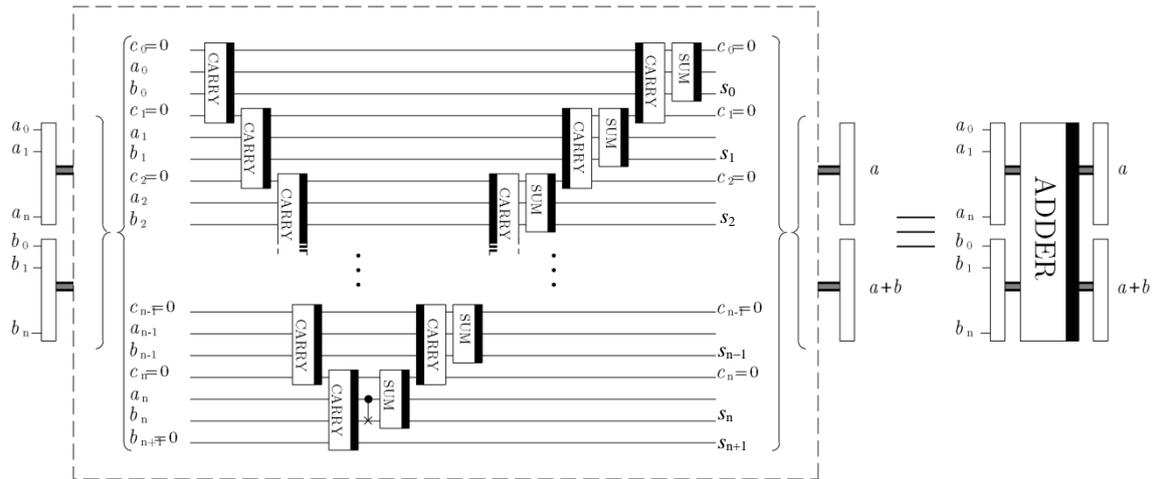


Figura 5.1. Circuito quântico somador “Vedral” [74].

Os blocos CARRY e SUM são definidos conforme mostra a Figura 5.2:

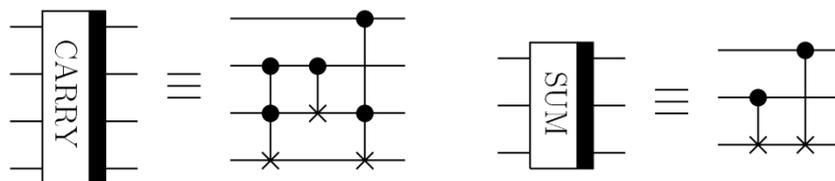


Figura 5.2. Blocos CARRY e SUM utilizados no circuito somador “Vedral” [74].

Nota-se que todo o circuito é composto por portas quânticas CNOT e Toffoli. A representação matricial da porta CNOT pode ser verificada na equação 1. A porta Toffoli nada mais é que uma porta CNOT com dois controles e sua representação matricial segue na equação 3:

$$\text{TOFFOLI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 3})$$

O circuito da Figura 5.1 soma dois estados quânticos  $|a\rangle = |a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0\rangle$  e  $|b\rangle = |b_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_0\rangle$ , e produz o resultado

$$|\psi\rangle = |a\rangle + |b\rangle = s_{n+1} + s_n + s_{n-1} + \dots + s_0 \quad (\text{eq. 4})$$

onde  $s_{n+1}$  é o último vai-um. Observando a Figura 5.1 pode-se notar que o resultado  $s_i$  está codificado nos qubits do estado  $|b\rangle$ .

Esse circuito apresenta a desvantagem de utilizar muitos qubits auxiliares  $c_i$ . Para cada qubit  $a_i$  e  $b_i$  o circuito utiliza um qubit auxiliar  $c_i$ . Portanto, para implementar uma soma de dois números de  $n$  qubits cada, são necessários:

$$3n \text{ qubits}$$

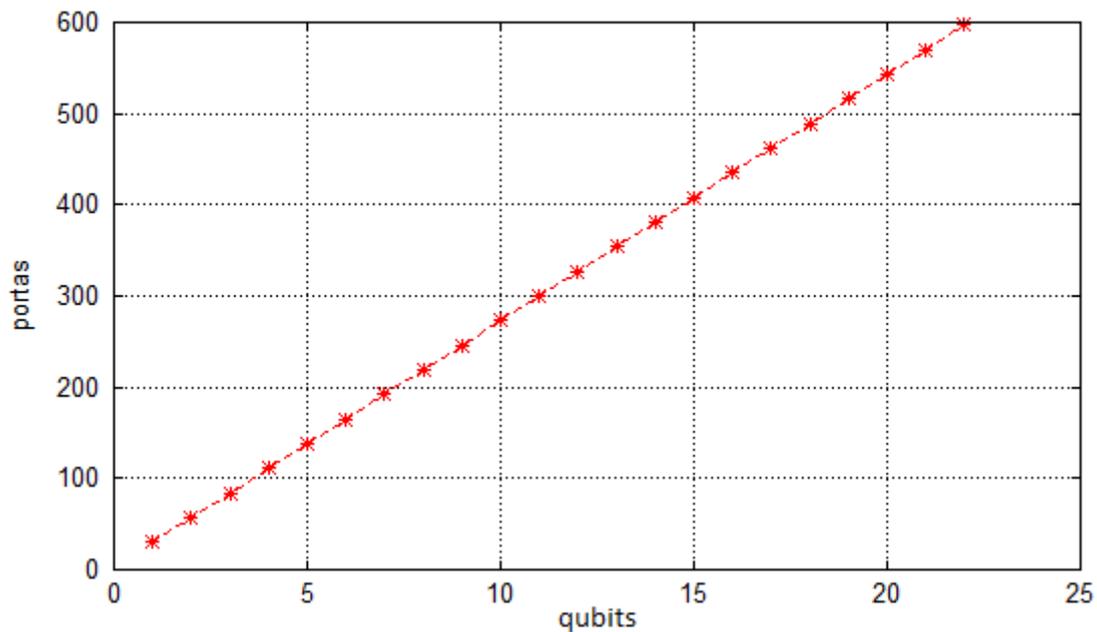
No que diz respeito à quantidade de portas quânticas necessárias para implementar o circuito, são necessárias:

$$4n \text{ portas Toffoli} \quad + \quad 3n + 1 \text{ portas CNOT} \quad + \quad 2 \text{ portas NOT.}$$

Cada porta Toffoli pode ser simulada por 6 portas CNOT [74]. O gráfico da Figura 5.3 mostra o crescimento na quantidade de portas quânticas para  $n = 22$ .<sup>24</sup>

---

<sup>24</sup> Foi escolhido  $n = 22$  por ser a quantidade de bits utilizados pelo correlacionador convencional utilizado no projeto BDA.

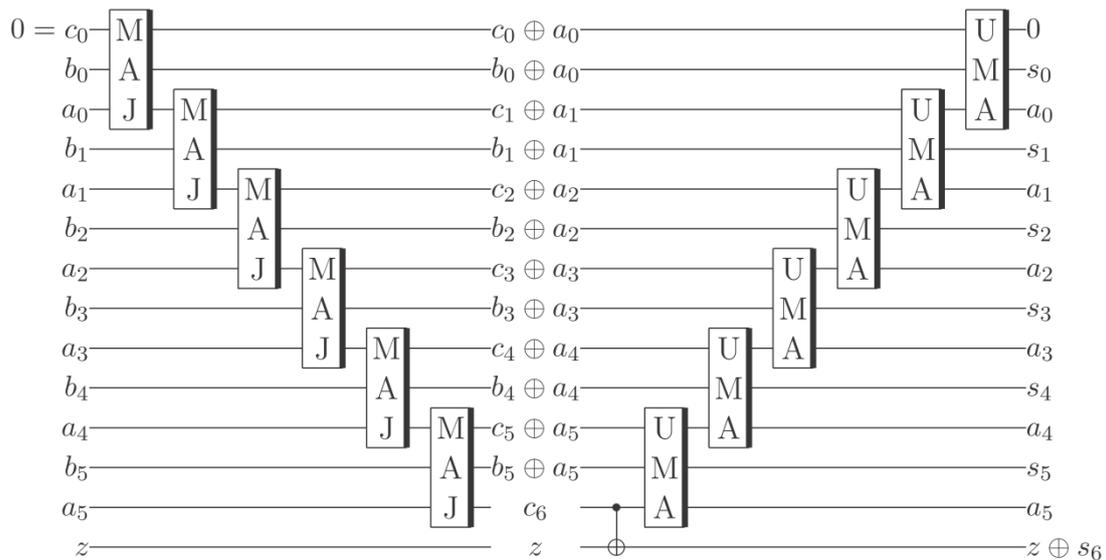


**Figura 5.3. Quantidade de portas quânticas para implementar o somador “Vedral”.**

O gráfico acima foi obtido considerando apenas portas CNOT, ou seja, para cada porta Toffoli foi contabilizado 6 portas CNOT [74]. Para  $n = 22$ , são necessárias um total de 597 portas quânticas CNOT e um total de 66 qubits, sendo 22 qubits para o registrador  $|a\rangle = |a_{21}a_{20}a_{19}\dots a_0\rangle$ , 22 qubits para o registrador  $|b\rangle = |b_{21}b_{20}b_{19}\dots b_0\rangle$  e 22 qubits auxiliares  $c_i$ .

## 5.6 Circuito quântico somador “Cuccaro” [78]

Outro circuito quântico para efetuar a soma foi proposto por Cuccaro et. all [78]. Este circuito é composto por portas CNOT, Toffoli e NOT. A Figura 5.4 mostra o esquema do circuito “Cuccaro”.



**Figura 5.4. Circuito quântico somador “Cuccaro” [78].**

Os blocos MAJ e UMA são mostrados na Figura 5.5:



**Figura 5.5. Blocos MAJ e UMA utilizados no circuito quântico “Cuccaro” [78].**

Semelhante ao circuito somador “Vedral”, o resultado  $s_i$  está codificado nos qubits  $b_i$ .

Neste circuito, para implementar uma soma de dois números com  $n$  bits cada, são necessários:

$$2n + 2 \text{ qubits}$$

No que diz respeito à quantidade de portas quânticas necessárias para implementar o circuito são utilizadas:

$$2n - 1 \text{ portas Toffoli} + 5n - 3 \text{ portas CNOT} + 2n - 4 \text{ portas NOT.}$$

lembrando que cada porta Toffoli é descrita por 6 portas CNOT.

A primeira vantagem deste circuito em relação ao anterior é a quantidade de qubits necessários para implementar a soma ( $3n$  qubits para o circuito “Vedral” e  $2n + 2$  para o circuito “Cuccaro”).

A segunda vantagem deste circuito é que ele necessita de uma quantidade menor de operações para realizar a soma, conforme mostra o gráfico da Figura 5.6:

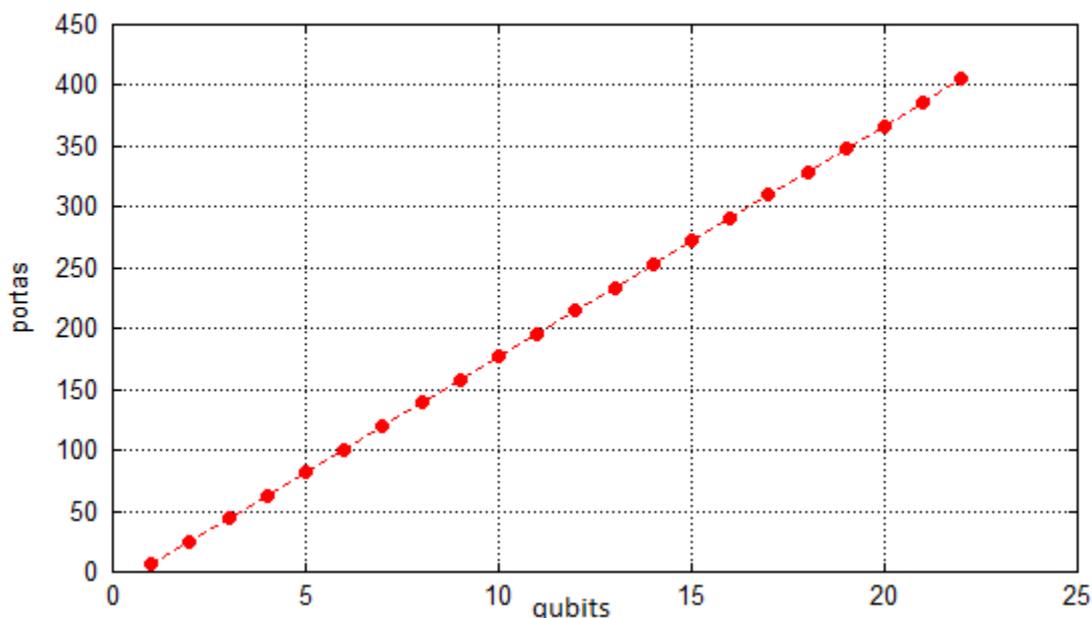


Figura 5.6. Quantidade de portas quânticas para implementar o somador “Cuccaro”.

O gráfico acima foi obtido considerando apenas portas CNOT, ou seja, para cada porta Toffoli foram contabilizadas 6 portas CNOT. Para  $n = 22$ , são necessários um total de 405 portas quânticas CNOT e um total de 46 qubits, sendo 22 qubits para o registrador  $|a\rangle = |a_{21} a_{20} a_{19} \dots a_0\rangle$ , 22 qubits para o registrador  $|b\rangle = |b_{21} b_{20} b_{19} \dots b_0\rangle$  e 2 qubits auxiliares  $c_0$  e  $z$ .

Assim, fica claro que o circuito somador “Cuccaro” é mais eficiente por utilizar menos portas quânticas e menos qubits auxiliares.

## 5.7 Circuito quântico somador “Draper” [75]

O circuito quântico somador proposto por Draper [75] difere significativamente dos somadores apresentados anteriormente. Os dois algoritmos quânticos de soma “Vedral” e “Cuccaro” implementam técnicas que utilizam qubits para “vem-um” e “vai-um”. A versão mais eficiente, apresentada por “Cuccaro”, mostra





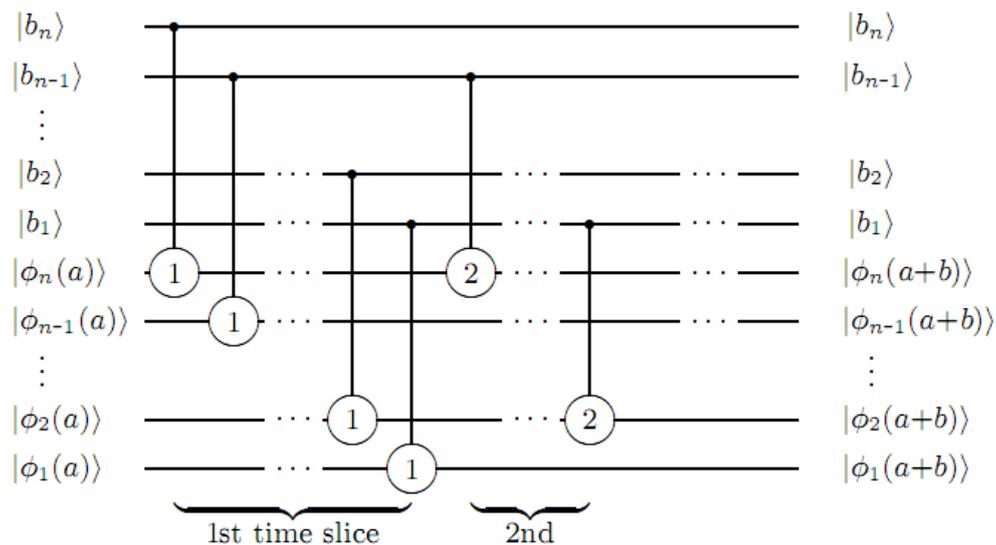
$$\text{custo}_{\text{QFT}} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{eq. 7})$$

É importante lembrar que esse número de portas quânticas não inclui a QFT no qubit  $a$  e também não considera a QFT inversa para obter o resultado final. Portanto o custo computacional completo para realizar uma soma utilizando o somador “Draper” é:

$$\text{custo}_{\text{Draper}} = 3 \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) \quad (\text{eq. 8})$$

Da mesma forma que é possível reduzir o custo computacional da QFT utilizando a transformada aproximada AQFT, é possível também reduzir o número de operações para este somador utilizando a mesma dedução utilizada na QFT.

Por fim é possível fazer um último melhoramento que não é possível na QFT. É possível reduzir o tempo de execução reordenando as portas quânticas do circuito. De acordo com Draper [75] uma possível sequência de operações seria executar todas as rotações 1, seguido por todas as rotações 2 etc. A Figura 5.8 mostra esta implementação.

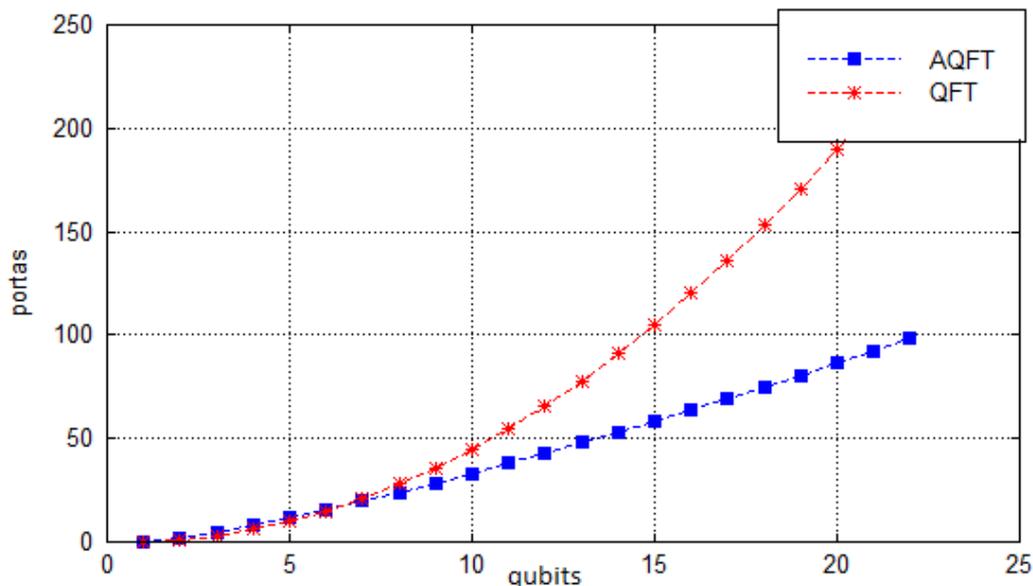


**Figura 5.8. Reordenação das portas quânticas no circuito somador Draper. [75]**

De acordo com Draper, para que se obtenha esta vantagem no tempo de execução do circuito, o computador quântico deve ser capaz de executar pelo menos  $n/2$  operações quânticas de 2 qubits simultaneamente. Com isso a soma pode ser feita com  $n$

+ 1 time slices. Se o circuito for implementado utilizando a técnica da AQFT, a soma pode ser feita utilizando  $\log_2 n$  time slices.

O gráfico da Figura 5.9 mostra um comparativo da quantidade de portas quânticas necessárias para realizar a soma utilizando o somador Draper e sua versão aproximada denominada AQFT.



**Figura 5.9. Quantidade de portas quânticas para implementar o somador “Draper”.**

Para  $n = 22$  qubits, são necessários 231 portas quânticas para o somador Draper e 99 portas para o somador Draper utilizando a versão aproximada AQFT. Em relação à quantidade de qubits, o circuito utiliza  $2n = 44$  qubits, ou seja, menos qubits que as propostas de somadores anteriores. É importante lembrar que neste gráfico não foram contabilizadas as operações para aplicar a QFT em  $a$  e nem a QFT inversa para obter o resultado.

Para obter a operação completa da soma deve-se considerar a aplicação da QFT e da QFT inversa. Como nesta seção é apresentado os detalhes apenas sobre os circuitos somadores, o comparativo considerando todas as operações quânticas envolvidas incluindo a QFT e QFT inversa é apresentado na seção seguinte.

## 5.8 Comparação dos circuitos somadores quânticos

Esta seção apresenta um comparativo em termos de custo computacional de cada somador, considerando uma soma com dois números de  $n = 22$  qubits cada. Foi escolhido o número 22 por ser o número de bits utilizado no correlacionador convencional.

Tabela 5.1. Comparação entre os circuitos somadores quânticos.

Circuito somador	Número de qubits	Número de portas quânticas
Vedral	66	597
Cuccaro	46	405
Draper (QFT)	44	231
Draper (AQFT)	44	99

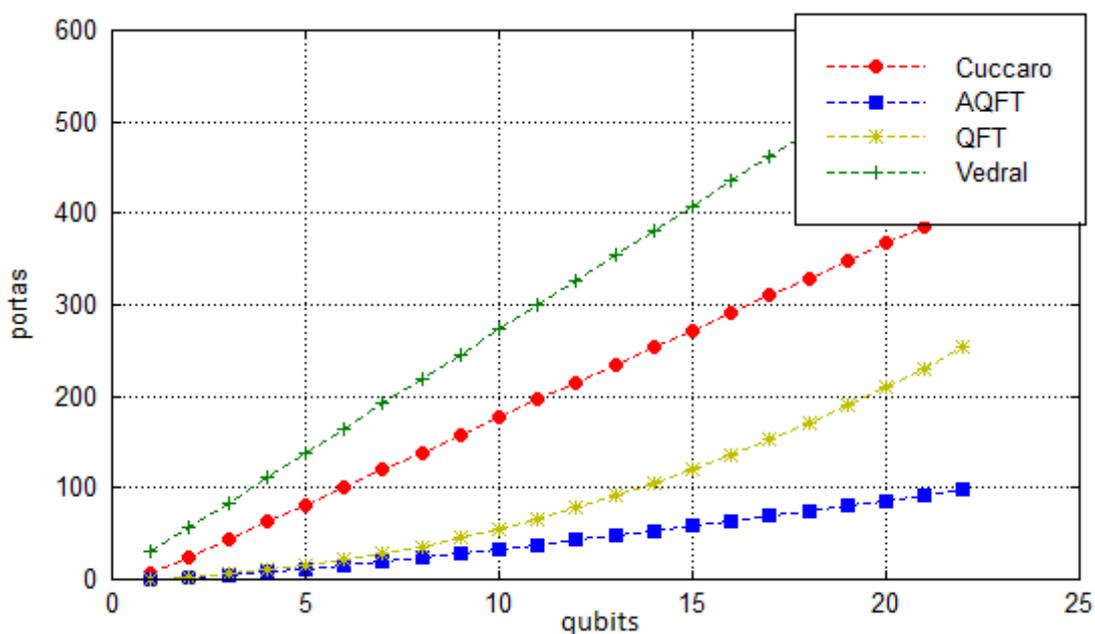


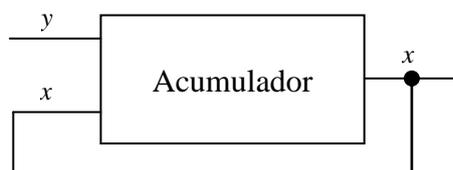
Figura 5.10. Comparação entre os circuitos quânticos somadores. Nas implementações QFT e AQFT foram consideradas apenas as portas relacionadas ao circuito somador.

Analisando o gráfico da Figura 5.10 pode-se observar que as versões que implementam a soma utilizando a QFT possuem um custo computacional reduzido em comparação com os dois métodos (Vedral e Cuccaro) que utilizam a técnica clássica de vem-um e vai-um para implementar a soma.

Assim, para implementar as operações de soma e acumulação do correlacionador quântico, será utilizada a implementação do circuito quântico somador “Draper” utilizando a técnica de aproximação AQFT.

## 5.9 Operação quântica de acumulação

A operação de acumulação é realizada pela aplicação sucessiva do circuito somador, tomando como entrada o novo valor a ser acumulado  $y$  e na outra entrada o valor acumulado anteriormente  $x$ , resultando na operação  $x = x + y$  que está esquematizada na Figura 5.11.



**Figura 5.11. Esquema de um acumulador.**

No entanto, na computação quântica, o sentido de execução (também conhecido como evolução do sistema) do circuito é da esquerda para a direita. Circuitos quânticos são acíclicos, isto é, não permitem retroalimentação (*feedback*). Por esse motivo o circuito propriamente dito não pode ser realimentado da mesma forma que é possível na computação convencional.

Para realizar a operação de acumulação são necessárias repetições sucessivas do circuito somador. Essa repetição deve ser implementada de forma algorítmica, ficando a cargo do computador quântico implementar tal repetição, a qual pode ser obtida por uso de uma memória quântica para armazenar os valores. Por esse motivo deve-se considerar cada operação do circuito não como um todo, mas sim como partes funcionais que possam ser executadas independentemente umas das outras, ficando a cargo do computador quântico selecionar a operação desejada no momento correto.

Conforme a seção 3.4, como o período de integração do BDA é  $\approx 100$  ms com uma taxa de amostragem de 5 MHz, resulta-se num total de  $5 \times 10^5$  ou 500.000 operações de acumulação a cada período de integração. Desde que, para cada acumulação, é preciso repetir o somador, serão necessárias 500.000 aplicações do circuito somador para obter o resultado de um período de integração.

A operação de acumulação é melhor compreendida junto com as demais operações quânticas. Por esse motivo, esta operação será detalhada no próximo capítulo.

## **5.10 Considerações finais**

Este capítulo teve como objetivo apresentar as operações quânticas necessárias para o projeto do circuito correlacionador quântico, com ênfase no circuito de soma, o qual concentra o maior número de operações quânticas e que será adaptado para realizar a acumulação dos valores. Essa adaptação é apresentada no próximo capítulo junto com a implementação do circuito correlacionador.

## CAPÍTULO 6: PROJETO DO CIRCUITO CORRELACIONADOR QUÂNTICO – IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

---

### 6.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo descrever o trabalho desenvolvido, as ferramentas utilizadas e os resultados obtidos. Neste capítulo serão utilizadas as operações quânticas descritas no capítulo anterior para compor o circuito correlacionador quântico.

O capítulo termina com a comparação entre o custo computacional do circuito correlacionador convencional e do circuito correlacionador quântico aqui proposto.

### 6.2 O circuito correlacionador quântico

O circuito correlacionador quântico será apresentado em dois diagramas, sendo o primeiro para a acumulação da parte real e o segundo para a acumulação da parte imaginária. Ambas as representações possuem a mesma implementação do circuito quântico acumulador, conforme apresentado nas Figuras 6.1 e 6.2.

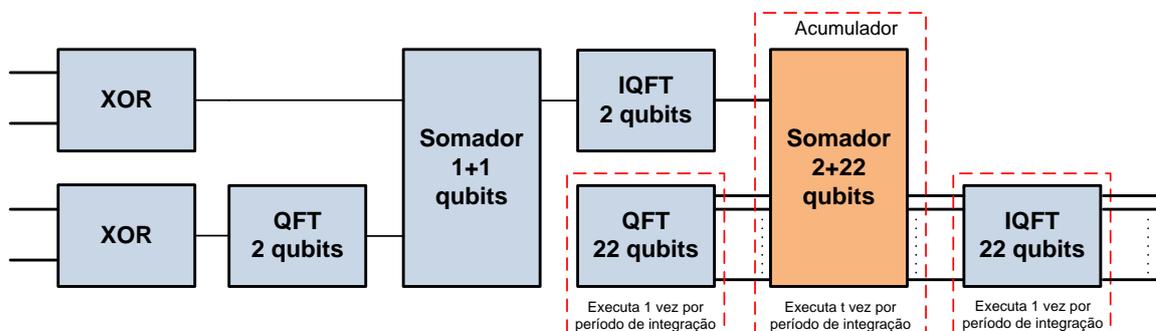
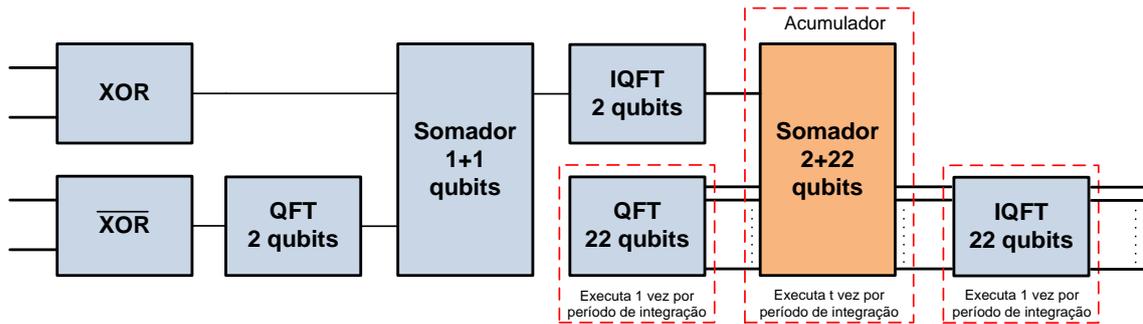


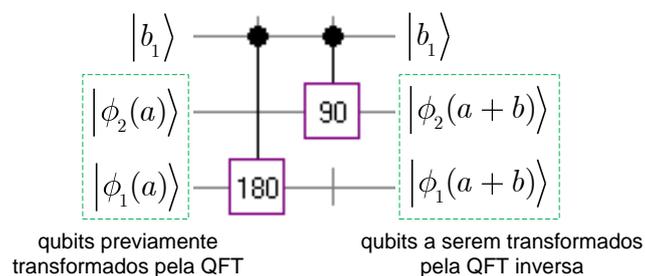
Figura 6.1. Parte do circuito que correlaciona e acumula a parte real.



**Figura 6.2. Parte do circuito que correlaciona e acumula a parte imaginária.**

Nos circuitos correlacionadores acima, cada bloco deve ser considerado como uma unidade funcional que pode trabalhar isoladamente uma da outra. Isso permite visualizar como o circuito Somador 2+22 é aplicado repetidas vezes sem a necessidade de aplicar as operações QFT 22 e IQFT 22. Essa repetição, bem como a seleção de cada unidade funcional, é uma tarefa do computador quântico. A operação QFT 22 deve ser aplicada somente no primeiro ciclo de correlação, no início do período de integração, enquanto a IQFT 22 deve ser aplicada somente no último ciclo, no final do período de integração para obter o resultado acumulado do período de integração.

Os circuitos acima diferem apenas na operação  $\overline{\text{XOR}}$  que é composta pela operação XOR e a operação NOT. As operações que implementam os blocos XOR,  $\overline{\text{XOR}}$  já foram apresentadas no capítulo anterior. O bloco “Somador 1+1” que soma duas entradas de 1 qubit e produz um resultado de 2 qubits é representado pelo seguinte circuito da Figura 6.3:

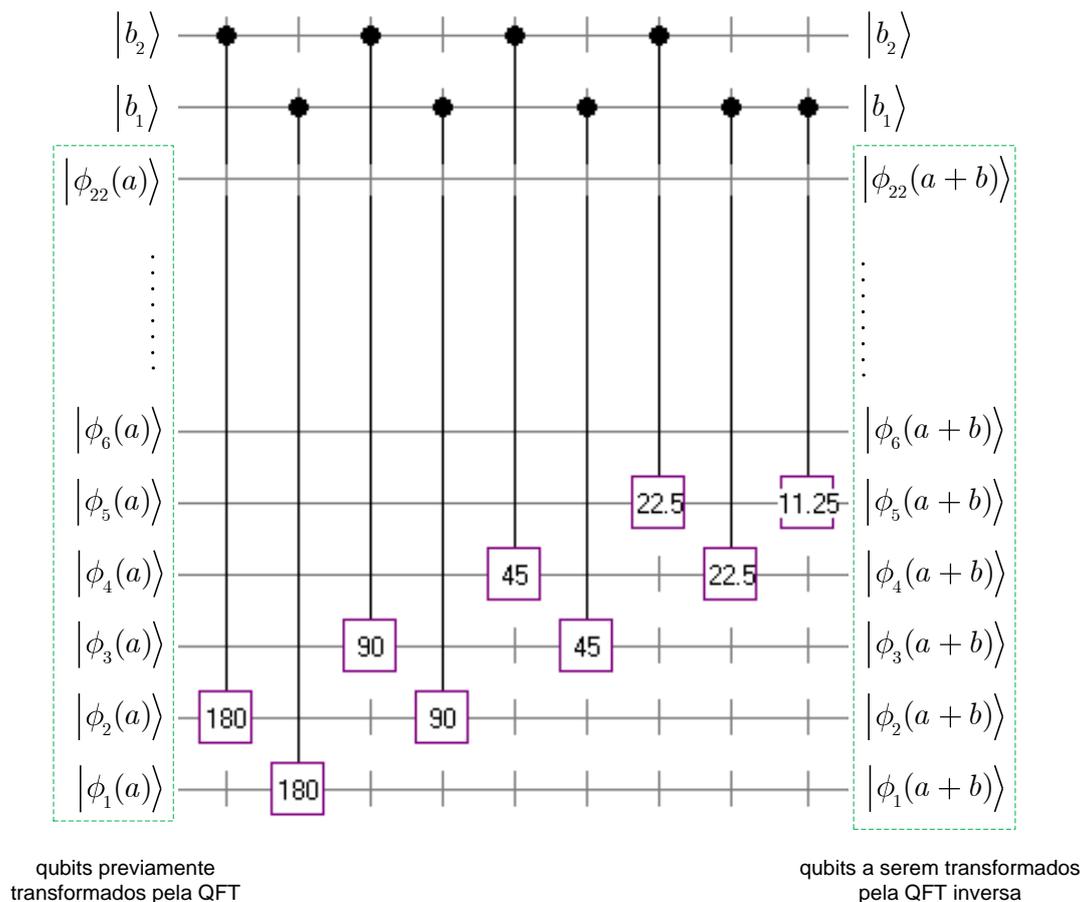


**Figura 6.3. Circuito quântico somador 2 qubits.**

Note que este circuito somador é uma implementação do circuito somador Draper, somando apenas 2 qubits. Os blocos 180 e 90 referem-se respectivamente às portas quânticas de rotação, onde  $k = 180$  e  $k = 90$ .

É importante notar que no circuito da Figura 6.3 ainda não está considerando as operações de QFT e IQFT. O somador completo com as operações da QFT e IQFT será apresentado mais adiante neste capítulo.

O circuito acumulador é um somador quântico de 24 qubits (2+22), onde os 2 qubits são os novos valores a serem acumulados e os 22 qubits são os valores já acumulados que são zerados no início da integração. A Figura 6.4 mostra o circuito utilizando a implementação do circuito somador Draper, utilizando a técnica de aproximação.



**Figura 6.4. Circuito quântico somador 2 + 22 utilizado para a acumulação.**

O circuito da Figura 6.4 já considera a técnica de aproximação da QFT, a qual permite reduzir o número de rotações condicionais<sup>25</sup>. O índice  $k$  que representa o número de níveis de rotações é calculado da seguinte maneira:

$$k > \log_2 n \quad (\text{eq. 1})$$

<sup>25</sup> O apêndice VI apresenta o circuito correlacionador completo desenhado no simulador QCAD.

$$k > \log_2 24 \quad (\text{eq. 2})$$

$$k > 4.5850 \quad (\text{eq. 3})$$

$$k = 5 \quad (\text{eq. 4})$$

A tabela 6.1 mostra os fatores de rotação para cada valor do índice  $k$ .

**Tabela 6.1. Cálculo dos fatores de rotação dado o índice  $k$ .**

$k$	$e^{2\pi i/2^k}$
1	180
2	90
3	45
4	22.5
5	11.25

O número de portas quânticas para implementar o circuito somador Draper já foi apresentado como  $n \log_2 n$  para somar números com  $n$  qubits. No somador da Figura 6.4 foram utilizadas nove portas devido ao fato de que este somador realiza uma soma de 2 qubits num valor já acumulado. Se considerar o circuito somador Draper em sua forma original, seriam necessários 22 qubits para o valor acumulado e mais 22 qubits para o valor a ser acumulado, mesmo considerando que o valor a ser acumulado pode ser no máximo 2 (dois), ou seja, 10 em binário, portanto 2 qubits. Assim os dois qubits menos significativos seriam suficientes para armazenar o valor enquanto os outros 20 qubits seriam inicializados com 0. Esse número extra de qubits implicaria numa quantidade de 99 portas quânticas de rotação condicional.

Ao implementar o circuito notou-se que a soma poderia ser feita utilizando apenas os 2 qubits necessários, descartando os 20 qubits extras e, portanto, reduzindo o número de portas quânticas sem perder a precisão dos resultados. Todos os resultados experimentais realizados no simulador de computação quântica mostram que os resultados da soma são obtidos com probabilidade maior que 0,9, lembrando que a probabilidade máxima 1 é obtida somente utilizando o somador completo sem a técnica de aproximação.

Reduzindo o número de qubits, a expressão  $n \log_2 n$  não pode ser considerada. A nova expressão que representa o custo computacional do circuito que utiliza a técnica

de aproximação, e com o número de qubits do estado  $|b\rangle$  sendo menor que o número de qubits do estado  $|a\rangle$ , tem-se:

$$\text{custo}_{\text{AQFT\_reduzido}} = (k * n_b) - 1 \quad (\text{eq. 5})$$

onde  $k$  é o índice de rotações condicionais calculado na equação 4 e  $n_b$  é o número de qubits do estado de entrada  $|b\rangle$  que representa o valor a ser acumulado, e que no caso do projeto BDA é de 2 qubits.

Utilizando a equação 5, chega-se a:

$$\begin{aligned} & (5 * 2) - 1 \\ & = 9 \text{ portas} \end{aligned} \quad (\text{eq. 6})$$

onde 9 é o número de portas utilizadas no circuito somador da Figura 6.4.

### 6.3 Validação do circuito usando simulação

Para validar os resultados do circuito correlacionador quântico, foram utilizados alguns valores de entrada sintetizados. A princípio pensou-se em utilizar dados gerados pelo BDA, porém não foi possível pelo fato de que os valores são armazenados já transformados e prontos para a visualização em forma de imagens.

Como os dados de entrada do circuito são sinais digitalizados em dois níveis, foram escolhidas algumas sequências binárias de valores para validar o correlacionador. Todos os testes que seguem tratam da correlação da parte real<sup>26</sup>. O circuito foi desenvolvido e simulado no simulador de computação quântica QCAD. O diagrama completo do circuito quântico correlacionador pode ser visualizado no apêndice VI.

Os resultados são produzidos em um arquivo texto contendo  $2^{26} = 67108864$  linhas, onde 26 é o número de qubits sendo simulado, ou seja, 4 qubits para as entradas C1 C2, S1 e S2 e 22 qubits para acumulação. Cada linha do arquivo texto, conforme mostra

---

<sup>26</sup> Optou-se por simular apenas uma das partes da correlação por ambas serem semelhantes. De forma semelhante poderia ter sido escolhido a parte imaginária, que difere apenas na operação  $\overline{\text{XOR}}$  (Figuras 6.1 e 6.2).



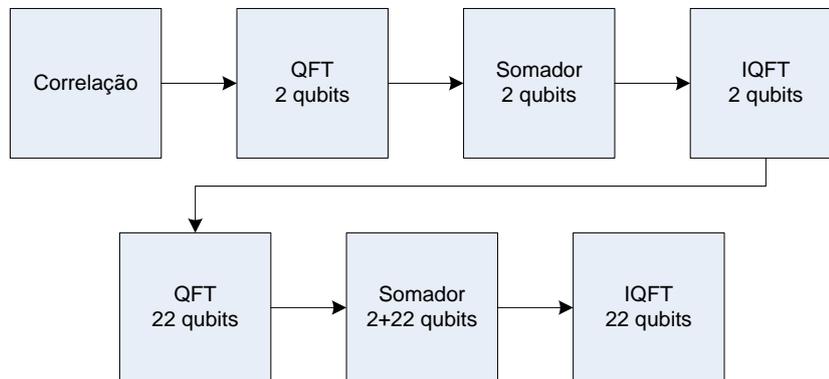
Tabela 6.2. Resultados obtidos a partir do circuito correlacionador quântico

	C1	C2	S1	S2
<b>Entrada</b>	1	0	1	1
<b>Soma 1+1</b>	01			
<b>Acumulado</b>	0000100100001010000110			
<b>Novo Acumulado</b>	0000100100001010000111>, 0.998795			
	C1	C2	S1	S2
<b>Entrada</b>	0	0	0	0
<b>Soma 1+1</b>	00			
<b>Acumulado</b>	0100100100001010000111			
<b>Novo Acumulado</b>	0100100100001010000111>, 1.000000			
	C1	C2	S1	S2
<b>Entrada</b>	1	1	1	0
<b>Soma 1+1</b>	01			
<b>Acumulado</b>	1100100100001010000111			
<b>Novo Acumulado</b>	1100100100001010001000>, 0.995191			
	C1	C2	S1	S2
<b>Entrada</b>	0	1	1	0
<b>Soma 1+1</b>	10			
<b>Acumulado</b>	1000100100001010001111			
<b>Novo Acumulado</b>	1000100100001010010001>, 0.990398			
	C1	C2	S1	S2
<b>Entrada</b>	0	1	0	1
<b>Soma 1+1</b>	10			
<b>Acumulado</b>	1010111011011111111111			
<b>Novo Acumulado</b>	1010111011100000000001>, 0.982078			

#### 6.4 Número total de operações do circuito correlacionador quântico

Para calcular o número total de operações do circuito quântico para realizar a integração de um subperíodo, devem-se considerar todas as operações envolvidas

conforme o diagrama da Figura 6.6. Esse diagrama é válido tanto para a correlação da parte real quanto para a correlação da parte imaginária.



**Figura 6.6. Diagrama ilustrando as operações do correlacionador quântico.**

O circuito que correlaciona a parte real é composto por duas operações XOR onde cada uma é implementada em computação quântica pela porta CNOT. Portanto são utilizadas 2 portas quânticas. Já a correlação imaginária é composta por uma operação XOR e uma operação  $\overline{\text{XOR}}$ , que são implementadas em computação quântica, respectivamente, a primeira pela porta CNOT e a segunda pela porta CNOT combinada com a porta NOT. Portanto são utilizadas 3 portas quânticas.

A única diferença entre as duas correlações, parte real e parte imaginária, está na operação  $\overline{\text{XOR}}$  que necessita de 2 portas. As demais operações do circuito serão as mesmas para ambas as partes.

Para a QFT de 2 qubits são necessárias 3 portas quânticas. Para o somador 2 qubits são utilizadas 2 operações. Para a IQFT são utilizadas 3 operações. Assim o conjunto de operações de QFT + Soma + IQFT = 8 operações.

Para a operação QFT 22 qubits, foi utilizada a técnica de aproximação AQFT, resultando num total de 99 portas quânticas. O mesmo número de portas é utilizado para a IQFT 22 qubits.

Para a operação de soma 2+22 qubits foram utilizadas 9 portas quânticas, de acordo com a equação 6.

Nesse momento é possível calcular o número total de operações para um ciclo de correlação, ou seja, para uma entrada. A Tabela 6.3 mostra esses valores.

**Tabela 6.3. Número total de operações para 1 ciclo de correlação.**

Operação	Número de portas quânticas
Correlação (parte real)*	2
QFT 2 qubits	3
Somador 2 qubits	2
IQFT 2 qubits	3
QFT 22 qubits	99
Somador 2+22 qubits	9
IQFT 22 qubits	99
Total	217

\* para a correlação parte imaginária são necessárias 3 portas quânticas, totalizando 218 portas.

O número de operações para um período de integração de 100 ms a uma taxa de amostragem de 5 MHz, resultando em 500.000 operações de correlação por período de integração, ou seja, o circuito será aplicado repetidamente 500.000 vezes. Porém é importante notar que a operação QFT e IQFT de 22 qubits, as quais utilizam o maior número de portas quânticas dentre todas as operações do correlacionador, não precisam ser repetidas junto com as demais operações. Isso se deve ao fato de que o somador Draper, diferentemente dos demais somadores quânticos apresentados, realiza a soma de um valor transformado  $|\phi a\rangle$  com um valor em seu estado original  $|b\rangle$ . Assim, a saída do Somador 22, que está num estado transformado, pode ser reaproveitada como entrada para o próximo ciclo de integração, não sendo necessário repetir  $t$  vezes as operações de QFT e IQFT 22.

Neste momento é possível calcular o número total de operações do circuito proposto, que é dado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 & [(2 + 3 + 2 + 3) * t + n \log_2 n + \{(k * n_b) - 1\} * t + n \log_2 n] * 2 \\
 & = [10 * t + 2 * (n \log_2 n) + \{(k * n_b) - 1\} * t] * 2
 \end{aligned}
 \tag{eq. 7}$$

onde  $k$  e  $n_b$  originam da equação 5,  $n$  é o número de qubits (22),  $t$  é o número de repetições do período de integração e o último fator 2 refere-se à correlação da parte real e da parte imaginária. Nota-se que as operações de QFT e IQFT 22 não são repetidas  $t$  vezes.

Considerando os dados a serem processados no projeto BDA, tem-se:

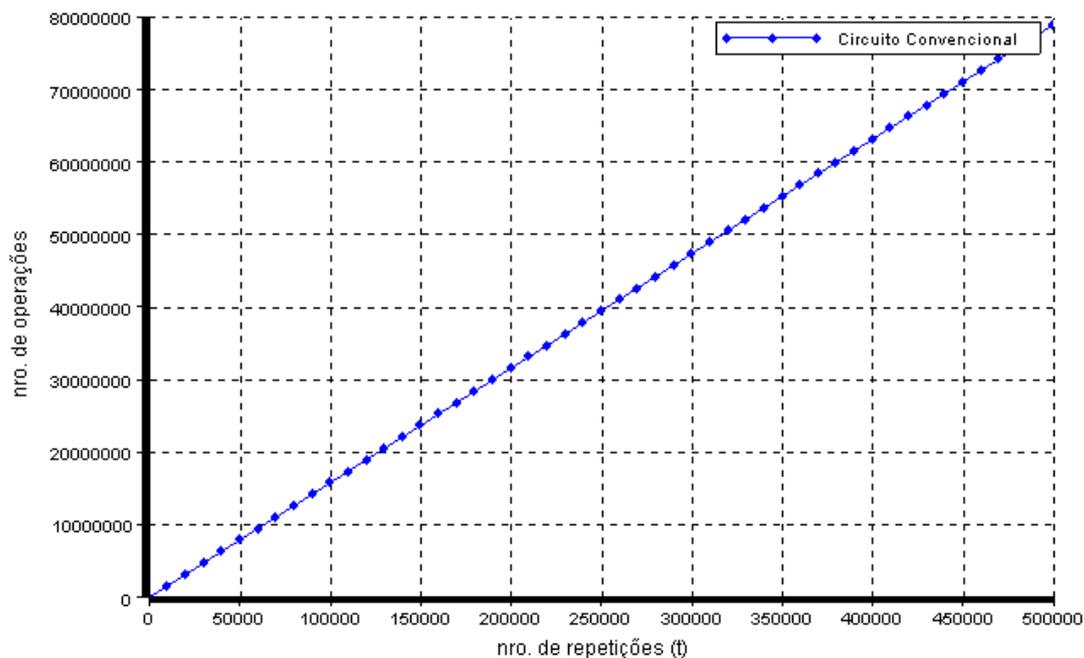
$$n = 22, \quad k = 5, \quad n_b = 2, \quad t = 500.000$$

resultando num total de **19.000.000 operações quânticas** para um subperíodo de integração de 100 ms, considerando a correlação da parte real e imaginária.

## 6.5 Comparativo: circuito convencional x circuito quântico

Esta seção mostra o comparativo entre o circuito correlacionador quântico e o circuito correlacionador convencional. Também foi colocado na comparação o circuito correlacionador quântico utilizando o somador proposto por Cuccaro. Com esse somador, o circuito apresenta 432 operações por ciclo. Nesta comparação está sendo considerada apenas a correlação da parte real. O eixo vertical refere-se ao número de operações e o eixo horizontal refere-se ao número de repetições  $t$ .

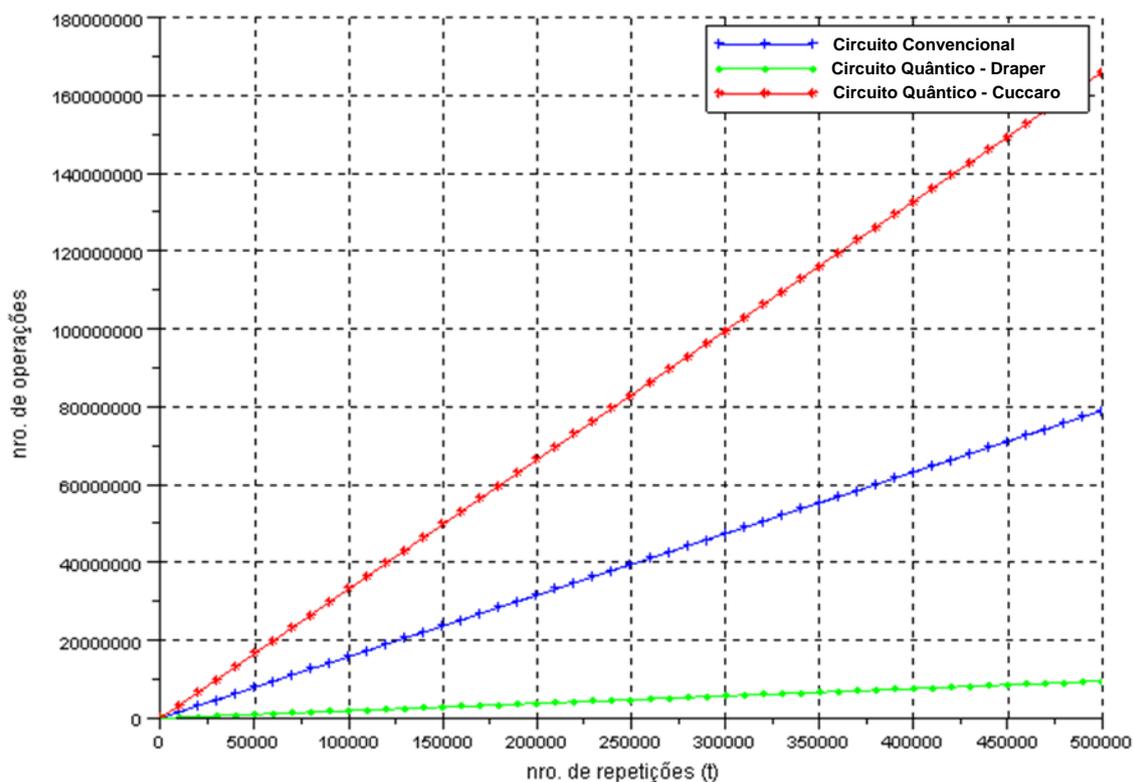
O gráfico da Figura 6.7 apresenta o crescimento do número de operações do circuito correlacionador convencional para um período de integração de 100 ms, o que representa um valor  $t = 500.000$  repetições.



**Figura 6.7. Gráfico apresentando o crescimento do número de operações lógicas para o circuito correlacionador convencional.**

Quando o número de repetições  $t = 500.000$ , isto é, um período de integração, o correlacionador convencional atinge um total de 79.000.000 operações lógicas.

O circuito da Figura 6.8 apresenta a comparação entre o circuito correlacionador convencional e o circuito correlacionador quântico proposto. Também foi incluído na comparação o circuito correlacionador quântico utilizando o somador Cuccaro para implementar as operações de soma e acumulação.



**Figura 6.8. Comparação do número de operações necessárias entre o circuito correlacionador convencional e duas implementações quânticas.**

O número de operações para cada um dos circuitos, quando  $t = 500.000$  é dado na Tabela 6.4.

**Tabela 6.4. Comparação sobre o número de operações entre os circuitos para correlação**

Modelo de circuito	Número de operações	Número de bits/qubits
Convencional	79.000.000 operações	22
Quântico (Cuccaro)	166.000.000 operações	46
Quântico (Draper)	9.500.196 operações	24

O número de operações para a implementação do circuito quântico utilizando o somador Cuccaro apresenta um número maior de operações quânticas além do número extra de qubits (46 qubits). De acordo com Draper [75] um circuito quântico para soma não deve seguir o modelo convencional como é o caso do circuito quântico Cuccaro. O circuito quântico deve explorar a superposição de estados, o que é alcançado pelo circuito Draper que soma um valor convencional a um registrador quântico em superposição, lembrando que a superposição de estados com iguais probabilidades é obtida por meio da porta de Hadamard.

É importante notar que para  $t$  muito pequeno o circuito quântico não apresenta vantagem em relação ao circuito convencional, pois as duas transformadas QFT 22 e IQFT 22 consomem juntas 198 portas quânticas, o que já representa um número superior ao número de portas do circuito convencional.

Entretanto, quando o procedimento necessita ser repetido diversas vezes, como é o caso do correlacionador do projeto BDA, o circuito quântico apresenta enorme vantagem sobre o circuito convencional, pois as operações QFT 22 e IQFT 22 serão aplicadas apenas uma vez durante o período de integração. As operações que serão repetidas para cada ciclo somam um total de 19 portas, um valor bem abaixo do total de 158 portas utilizadas em cada ciclo para o circuito convencional.

Comparando o circuito quântico com a versão clássica atualmente utilizada no BDA, observa-se que é possível melhorar a sensibilidade do BDA aumentando o número de amostras digitalizadas. Lembrando que o sistema de digitalização do BDA amostra os sinais a uma taxa de 5 MHz (de acordo com o teorema de Nyquist) produzindo 64% de sensibilidade, passando a taxa de amostragem para 10 MHz o que aumenta a sensibilidade para 74%, dobra-se o número de operações para ambos os circuitos convencional e quântico. Como o circuito quântico utiliza 88% menos operações que o circuito convencional, dobrando o número de operações quântica ainda sim produz um número de operações muito inferior ao número de operações clássicas, conforme mostra a tabela a 6.5.

**Tabela 6.5. Comparação sobre o número de operações entre os circuitos para correlação, considerando amostragem a uma taxa de 10 MHz.**

Modelo de circuito	Taxa de amostragem	Número de operações
Convencional	5 MHz	79.000.000 operações
Quântico (Draper)	10 MHz	19.000.392 operações

Como pode-se observar, é possível melhorar a sensibilidade do BDA e ainda assim ter uma redução de 76% no número de operações lógicas comparando com o atual circuito correlacionador convencional correlacionando dados amostrados a 5 MHz.

## 6.6 Considerações finais

Este capítulo apresentou o projeto do circuito quântico para o correlacionador do BDA, e a sua implementação no simulador de computação quântica QCAD.

Também foram apresentados resultados de aplicação do circuito com entradas sintetizadas que validam o funcionamento do circuito.

Ao final foi comparado o custo computacional do circuito correlacionador quântico utilizando o somador Draper aproximado com uma redução do número de portas quânticas com o circuito correlacionador convencional, mostrando que o circuito quântico apresenta vantagem em termos de custo computacional.

O próximo capítulo apresenta as conclusões do trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

## **CAPÍTULO 7: CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS**

### **7.1 Conclusão**

Neste trabalho foi apresentada uma proposta de circuito quântico capaz de realizar, a operação de correlação utilizada no radiointerferômetro BDA. Como visto no capítulo anterior, o circuito quântico desenvolvido apresenta um custo computacional 8 vezes melhor que a implementação clássica.

Isso se deve ao fato de utilizar o somador quântico Draper aproximado, que é a operação mais complexa do circuito correlacionador.

Notou-se também que para realizar uma soma de dois números quânticos, sendo um dos números com menor quantidade de qubits que o outro, o número de portas quânticas para implementar o circuito somador Draper aproximado pode ser reduzido, de acordo com a equação 5 no capítulo 6.

O conjunto de melhorias (somador Draper aproximado, e sua versão reduzida apresentada neste trabalho) possibilitou que o circuito correlacionador quântico obtivesse desempenho melhor que seu análogo convencional.

Assim, chegou-se ao objetivo final do trabalho que era de apresentar uma possível aplicação da computação quântica num problema do mundo real que é o correlacionador de sinais do projeto BDA, além das aplicações específicas da física já explorada na literatura.

Após finalizar o estudo e constatando que o circuito quântico possui um número de operações 8 vezes menor que o circuito convencional, verificou-se também que é possível melhorar a sensibilidade do BDA sem ultrapassar o custo computacional do circuito correlacionador convencional em uso atualmente. Retornando à Tabela 3.1

pode-se observar que aumentando o número de amostras digitalizadas e, portanto correlacionadas, aumenta-se também a sensibilidade do radiotelescópio. Assim, dobrando o número de amostras obtém-se uma sensibilidade de 74% diante de 64% do método atual.

Em relação ao número de operações, como dobra o número de amostras, a vantagem computacional do correlacionador quântico para um sinal amostrado a 10 MHz é de 4 vezes melhor que o correlacionador convencional utilizando um sinal amostrado a 5 MHz. Portanto, conclui-se que é possível aumentar a sensibilidade do BDA e ainda sim obter um número 4 vezes menor de operações em comparação com o correlacionador convencional utilizado atualmente.

Espera-se que esse trabalho possa servir de incentivo para o estudo de outras aplicações práticas para a computação quântica, visto que atualmente muito se estuda em como implementar um computador quântico e pouco estudo é feito sobre as suas aplicações nos problemas reais, além dos problemas tratados pela física quântica.

## **7.2 Desafios encontrados e proposta de trabalho futuro**

O principal desafio desta proposta é demonstrar como será feito o controle de seleção de cada unidade funcional. Isto é um desafio pouco explorado porque os algoritmos existentes não fazem uso de diversas unidades funcionais nem de estruturas para criar um ciclo de repetição de determinada unidade funcional, como por exemplo, o somador  $2+2$ .

A maior parte dos algoritmos desenvolvidos por demais pesquisadores focam na solução por meio da aplicação de uma função e, ao final, avaliam se o resultado foi obtido corretamente.

Pelo algoritmo apresentado neste trabalho ser semelhante a um algoritmo convencional o qual necessita de várias iterações para se obter um resultado, ele necessita de alguns controles semelhantes aos computadores convencionais.

Por esse motivo, como trabalho futuro recomenda-se a investigação de uma forma de implementar tais controles, permitindo que determinadas unidades funcionais sejam ou não acionadas. Com isso rompe-se a visão “sequencial” e unidirecional que um circuito quântico apresenta.

Outro trabalho futuro é descrever o circuito correlacionador na notação de computação adiabática, ou seja, converter este algoritmo representado na forma de circuito para uma representação na forma de computação adiabática. Com essa conversão, seria possível experimentá-lo no computador quântico da D-Wave Systems. Em contatos com a D-Wave Systems, verificou-se que esta conversão não é uma tarefa simples, porém está sendo analisada a viabilidade dessa conversão em conjunto com o Dr. Bill Macready da D-Wave Systems.

## APÊNDICE I: CONCEITOS DE ALGEBRA LINEAR IMPORTANTES PARA A COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

---

Neste apêndice é apresentado com exemplos, alguns conceitos de álgebra linear importantes para o entendimento da computação quântica.

### 1. Operador unitário

Operadores unitários são representados por matrizes unitárias. Uma matriz  $U$  é unitária (operadores unitários normalmente são representados por  $U$ ) se:

$$U^{-1} = U^\dagger \quad (\text{eq. 1})$$

ou

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \quad (\text{eq. 2})$$

Operadores unitários sempre preservam a norma do vetor e são inversíveis. Em computação quântica todas as operações devem ser unitárias e, portanto, inversíveis. Segue, como exemplo, as matrizes de Pauli I, X, Y, Z são operadores unitários.

$$I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 3})$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 4})$$

$$Y^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 5})$$

$$Z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 6})$$

## 2. Operador Hermitiano

Uma matriz  $A$  é hermitiana se possui a seguinte propriedade:

$$A = A^\dagger \quad (\text{eq. 7})$$

As matrizes de Pauli são hermitianas, pois:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 8})$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 9})$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad Y^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 10})$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Z^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 11})$$

## 3. Produto externo

O produto externo, ou produto vetorial,  $|u\rangle\langle v|$  é definido como um operador linear que realiza a seguinte operação:

$$|u\rangle\langle v| |w\rangle = |u\rangle\langle v|w\rangle = \langle v|w\rangle |u\rangle \quad (\text{eq. 12})$$

Este resultado pode ser interpretado como:

- O resultado do operador linear  $|u\rangle\langle v|$  atuando sobre  $|w\rangle$  ou
- O resultado da multiplicação de  $|u\rangle$  por  $\langle v|w\rangle$ .

Na forma matricial,  $|u\rangle\langle v|$  pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^* & v_2^* & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1^* & u_1 v_2^* & \dots & u_1 v_n^* \\ u_2 v_1^* & u_2 v_2^* & \dots & u_2 v_n^* \\ \vdots & & \ddots & \\ u_n v_1^* & u_n v_2^* & \dots & u_n v_n^* \end{bmatrix} \quad (\text{eq. 13})$$

#### 4. Operador de projeção (Projektor)

Projektor é um operador que pode ser formado tomando o produto externo de um único vetor *ket*. Dado um estado  $|\psi\rangle$ , o projetor é dado por:

$$P = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (\text{eq. 14})$$

Se o espaço vetorial em questão possuir  $n$  dimensões, então o projetor pode ser representado por uma somatória de produtos externos:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^n |u_i\rangle\langle u_i| \\ &= |u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| + \dots + |u_n\rangle\langle u_n| \end{aligned} \quad (\text{eq. 15})$$

Por exemplo, um projetor  $P$  que projeta um espaço vetorial  $V = |00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  em um subespaço  $V_s = |00\rangle, |01\rangle$  é dado por:

$$P \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle \quad (\text{eq. 16})$$

Assim, pode-se pensar nos projetores como um filtro que descarta os vetores que não estão contidos no seu subespaço.

## 5. Produto tensorial

É uma maneira de juntar espaços vetoriais para formar espaços vetoriais maiores. Essa construção é fundamental para entender a computação quântica quando estamos lidando com sistemas de muitos qubits. Se  $U$  e  $V$  são espaços vetoriais de dimensão  $m$  e  $n$  respectivamente,  $U \otimes V$  produz um espaço vetorial de dimensão  $mn$ .

Considerando um elemento  $|u\rangle$  de  $U$  e um elemento  $|v\rangle$  de  $V$ , podemos escrever o produto tensorial de diferentes formas:

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = |u\rangle |v\rangle = |u, v\rangle = |uv\rangle \quad (\text{eq. 17})$$

A operação é definida por:

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad |v\rangle = \begin{bmatrix} x & y \\ v & w \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (\text{eq. 18})$$

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2 \times 2} \otimes \begin{bmatrix} x & y \\ v & w \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (\text{eq. 19})$$

$$= \begin{bmatrix} a \cdot x & b \cdot x \\ c \cdot x & d \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay & bx & by \\ av & aw & bv & bw \\ cx & cy & dx & dy \\ cv & cw & dv & dw \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (\text{eq. 20})$$

## APÊNDICE II: MEDIDAS PROJATIVAS E A REGRA DE BORN

---

Neste apêndice é apresentado um exemplo de medida quântica utilizando projetores e a regra de Born.

Considerando um sistema quântico no seguinte estado [41]:

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{19}}|u_1\rangle + \frac{2}{\sqrt{19}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{19}}|u_3\rangle + \frac{2}{\sqrt{19}}|u_4\rangle + \sqrt{\frac{6}{19}}|u_5\rangle \quad (\text{eq. 1})$$

onde os vetores  $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, |u_4\rangle, |u_5\rangle$  formam um conjunto ortonormal e completo.

- a) O conjunto de projetores correspondentes a todas as possíveis medidas,  $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, |u_4\rangle, |u_5\rangle$ , são:

$$P_1 = |u_1\rangle\langle u_1| \quad (\text{eq. 2})$$

$$P_2 = |u_2\rangle\langle u_2| \quad (\text{eq. 3})$$

$$P_3 = |u_3\rangle\langle u_3| \quad (\text{eq. 4})$$

$$P_4 = |u_4\rangle\langle u_4| \quad (\text{eq. 5})$$

$$P_5 = |u_5\rangle\langle u_5| \quad (\text{eq. 6})$$

- b) A probabilidade de obter os resultados  $|u_1\rangle$  e  $|u_2\rangle$  utilizando a regra de Born é:

$$\text{Pr}(1) = \left| \langle u_1 | \psi \rangle \right|^2 = \left| \langle u_1 | \left( \frac{2}{\sqrt{19}}|u_1\rangle + \frac{2}{\sqrt{19}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{19}}|u_3\rangle + \frac{2}{\sqrt{19}}|u_4\rangle + \sqrt{\frac{6}{19}}|u_5\rangle \right) \right|^2 \quad (\text{eq. 7})$$

$$= \left| \frac{2}{\sqrt{19}} \langle u_1 | u_1 \rangle + \frac{2}{\sqrt{19}} \langle u_1 | u_2 \rangle + \frac{1}{\sqrt{19}} \langle u_1 | u_3 \rangle + \frac{2}{\sqrt{19}} \langle u_1 | u_4 \rangle + \sqrt{\frac{6}{19}} \langle u_1 | u_5 \rangle \right|^2 \quad (\text{eq. 8})$$

$$= \left| \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot 1 + \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot 0 + \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot 0 + \sqrt{\frac{6}{19}} \cdot 0 \right|^2 \quad (\text{eq. 9})$$

$$= \left| \frac{2}{\sqrt{19}} \right|^2 \quad (\text{eq. 10})$$

$$\text{Pr}(1) = \frac{4}{19}$$

$$\text{Pr}(2) = \left| \langle u_2 | \psi \rangle \right|^2 = \left| \langle u_2 | \left( \frac{2}{\sqrt{19}} |u_1\rangle + \frac{2}{\sqrt{19}} |u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{19}} |u_3\rangle + \frac{2}{\sqrt{19}} |u_4\rangle + \sqrt{\frac{6}{19}} |u_5\rangle \right) \right|^2 \quad (\text{eq. 11})$$

$$= \left| \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot 0 + \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot 0 + \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot 0 + \sqrt{\frac{6}{19}} \cdot 0 \right|^2 \quad (\text{eq. 12})$$

$$= \left| \frac{2}{\sqrt{19}} \right|^2 \quad (\text{eq. 13})$$

$$\text{Pr}(2) = \frac{4}{19}$$

c) Calculando o restante das probabilidades usando projetores:

$$\text{Pr}(i) = \langle \psi | P_i | \psi \rangle \quad (\text{eq. 14})$$

Primeiro é calculado  $P_i | \psi \rangle$ :

$$P_3 | \psi \rangle = |u_3\rangle \langle u_3 | \left( \frac{2}{\sqrt{19}} |u_1\rangle + \frac{2}{\sqrt{19}} |u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{19}} |u_3\rangle + \frac{2}{\sqrt{19}} |u_4\rangle + \sqrt{\frac{6}{19}} |u_5\rangle \right) \quad (\text{eq. 15})$$

$$= |u_3\rangle \left( \frac{2}{\sqrt{19}} \langle u_3 | u_1 \rangle + \frac{2}{\sqrt{19}} \langle u_3 | u_2 \rangle + \frac{1}{\sqrt{19}} \langle u_3 | u_3 \rangle + \frac{2}{\sqrt{19}} \langle u_3 | u_4 \rangle + \sqrt{\frac{6}{19}} \langle u_3 | u_5 \rangle \right) \quad (\text{eq. 16})$$

$$= |u_3\rangle \left( \frac{1}{\sqrt{19}} \langle u_3 | u_3 \rangle \right) \quad (\text{eq. 17})$$

$$P_3 |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{19}} |u_3\rangle \quad (\text{eq. 18})$$

Com  $P_3 |\psi\rangle$  calculado pode-se calcular

$$\text{Pr}(3) = \langle \psi | P_3 | \psi \rangle \quad (\text{eq. 19})$$

$$= \left( \frac{2}{\sqrt{19}} \langle u_1 | + \frac{2}{\sqrt{19}} \langle u_2 | + \frac{1}{\sqrt{19}} \langle u_3 | + \frac{2}{\sqrt{19}} \langle u_4 | + \sqrt{\frac{6}{19}} \langle u_5 | \right) \frac{1}{\sqrt{19}} |u_3\rangle \quad (\text{eq. 20})$$

$$= \left( \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \right) \langle u_1 | u_3 \rangle + \left( \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \right) \langle u_2 | u_3 \rangle + \left( \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \right) \langle u_3 | u_3 \rangle + \left( \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \right) \langle u_4 | u_3 \rangle + \left( \sqrt{\frac{6}{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \right) \langle u_5 | u_3 \rangle \quad (\text{eq. 21})$$

$$= \left( \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \right) (0) + \left( \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \right) (0) + \left( \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \right) (1) + \left( \frac{2}{\sqrt{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \right) (0) + \left( \sqrt{\frac{6}{19}} \cdot \frac{1}{\sqrt{19}} \right) (0) \quad (\text{eq. 22})$$

$$\text{Pr}(3) = \frac{1}{19} \quad (\text{eq. 23})$$

De forma similar, as probabilidades de  $|u_4\rangle$  e  $|u_5\rangle$  são obtidas.

$$\text{Pr}(4) = \langle \psi | P_4 | \psi \rangle = \frac{4}{19} \quad (\text{eq. 24})$$

$$\text{Pr}(5) = \langle \psi | P_5 | \psi \rangle = \frac{6}{19} \quad (\text{eq. 25})$$

## APÊNDICE III: PARALELISMO QUÂNTICO E O ALGORITMO DE DEUTSCH

---

Para mostrar como funciona o paralelismo quântico, será apresentado o algoritmo de Deutsch [65]. Esse algoritmo não possui aplicação real, mas serve para exemplificar o paralelismo quântico e a superposição de estados do qubit.

O problema de Deutsch é definido como: dada uma função  $f(x): \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$  definida por um operador linear, determinar se ela é constante ou balanceada.

A função  $f(x)$  é balanceada se,

$$f(0) = 0 \text{ e } f(1) = 1 \quad \text{ou} \quad f(0) = 1 \text{ e } f(1) = 0 \quad (\text{eq. 1})$$

ou seja, se  $f(0) \neq f(1)$ .

A função  $f(x)$  é constante se,

$$f(0) = 1 \text{ e } f(1) = 1 \quad \text{ou} \quad f(0) = 0 \text{ e } f(1) = 0 \quad (\text{eq. 2})$$

ou seja, se  $f(0) = f(1)$ .

A solução para esse problema é porá seguinte: se  $f(0) \oplus f(1) = 1$ , ou seja,  $f(0) \neq f(1)$ , então a função é balanceada. Se  $f(0) \oplus f(1) = 0$ , ou seja,  $f(0) = f(1)$ , ela é constante. O símbolo  $\oplus$  representa a operação XOR. A tabela verdade da operação XOR é a seguinte.

Tabela 1. Tabela verdade da operação XOR.

$f$ 0	$f$ 1	$f$ 0 $\oplus$ $f$ 1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A solução em um computador convencional pode ser obtida pelas seguintes etapas:

1.  $x = f$  0
2.  $y = f$  1
3.  $z = x \oplus y$

Em um computador convencional precisamos de dois passos para encontrar o resultado da função  $f(x)$ : o primeiro para encontrar  $f(0)$  e o segundo para encontrar  $f(1)$ . Por fim, são comparados os resultados das duas aplicações para verificar se a função é constante ou balanceada.

Em um computador quântico também teremos que avaliar a função duas vezes, porém, será feita em um único passo, usando para isso a superposição de estados na entrada e processamento paralelo. A Figura 1 mostra o circuito utilizado para implementar o algoritmo de Deutsch.

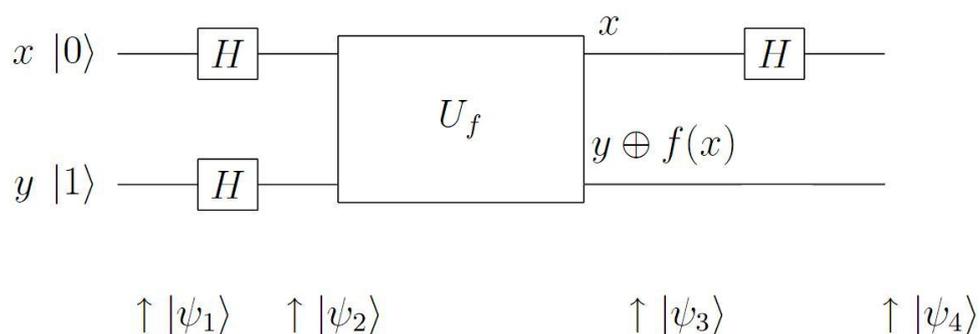


Figura 1. Circuito quântico que implementa o algoritmo de Deutsch [44].

Esse algoritmo realiza as etapas 1 e 2 da solução apresentada anteriormente em uma única operação. A seguir, é apresentado os passos de  $|\psi_1\rangle$  até  $|\psi_4\rangle$  para resolver o problema de Deutsch.

$|\psi_1\rangle$  Os qubits  $x$  e  $y$  são iniciados como:

$$\begin{aligned} x &= |0\rangle \\ y &= |1\rangle \end{aligned} \quad (\text{eq. 3})$$

$|\psi_2\rangle$  Aplicando a porta  $H$  em ambos os registradores de entrada. O estado se torna:

$$|\Psi\rangle = \left[ \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{eq. 4})$$

$|\psi_3\rangle$  A operação  $U_f$  é definida por:

$$|x\rangle |y \oplus f(x)\rangle \quad (\text{eq. 5})$$

Nota-se que ambos qubits  $x$  e  $y$  estão em superposição. É nesse momento que o processamento paralelo é realizado, ou seja, os valores de  $x = \{0, 1\}$  serão aplicados junto com  $y = \{0, 1\}$ . Após algumas manipulações algébricas, que serão vistas passo a passo a seguir, se o resultado em  $x = |0\rangle$ , a função  $f(x)$  é constante. Se o resultado em  $x = |1\rangle$ , a função  $f(x)$  é balanceada.

Para  $f(0) \neq f(1)$ , ou seja, a função é balanceada, o resultado é:

$$|\Psi\rangle = \pm \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{eq. 6})$$

Para  $f(0) = f(1)$ , ou seja, a função é constante, o resultado é:

$$|\Psi\rangle = \pm \left[ \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{eq. 7})$$

o sinal  $\pm$  pode ser ignorado.

$|\psi_4\rangle$  O qubit  $x$  é acionado pela porta  $H$  novamente. Lembre-se de que o qubit  $x$  está em superposição. Lembre-se também de que quando um qubit está em superposição com iguais probabilidades e é aplicada uma porta  $H$  ele retorna para seu estado base  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ . Assim, o resultado de  $x$  pode ser:

$$H \left[ \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] = |0\rangle \quad (\text{eq. 8})$$

$$H \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] = |1\rangle \quad (\text{eq. 9})$$

Portanto, nessa etapa, se  $f(0) \neq f(1)$  obtem-se:

$$|\Psi\rangle = \pm |1\rangle \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{eq. 10})$$

Se  $f(0) = f(1)$  temos:

$$|\Psi\rangle = \pm |0\rangle \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{eq. 11})$$

Nota-se que a aplicação da porta  $H$  no qubit  $x$  faz com que ele saia da superposição e colapse para um dos estados  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ .

Nesse momento pode-se descartar o qubit  $y$ , pois o resultado necessário já foi obtido no qubit  $x$ . É possível verificar que o resultado foi obtido com apenas uma aplicação da operação  $U_f$ . A seguir pode-se verificar os conceitos apresentados acima[48].

Após os qubits passarem pela etapa 1 do circuito anterior, o estado  $|\psi_2\rangle$  será:

$$|\psi_2\rangle = \left[ \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{eq. 12})$$

O estado  $|\psi_3\rangle$ , após a aplicação da operação  $U_f$  será:

$$|\psi_3\rangle = \left[ \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{eq. 13})$$

Calculando algebricamente:

$$\frac{1}{2} |0\rangle |0 \oplus f(0)\rangle - |0\rangle |1 \oplus f(0)\rangle + |1\rangle |0 \oplus f(1)\rangle - |1\rangle |1 \oplus f(1)\rangle \quad (\text{eq. 14})$$

Supondo que  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 1$ , isto é, a função é balanceada:

$$\frac{1}{2} |0\rangle |0 \oplus 0\rangle - |0\rangle |1 \oplus 0\rangle + |1\rangle |0 \oplus 1\rangle - |1\rangle |1 \oplus 1\rangle \quad (\text{eq. 15})$$

A partir da tabela verdade da operação XOR:

$$\frac{1}{2} |00\rangle - |01\rangle + |11\rangle - |10\rangle \quad (\text{eq. 16})$$

Reordenando os fatores:

$$\frac{1}{2} |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle \quad (\text{eq. 17})$$

O estado acima é o mesmo que:

$$\left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{eq. 18})$$

Por fim, no estado  $|\psi_4\rangle$ , após a aplicação da porta  $H$  no qubit  $x$  e descartando o qubit  $y$ , obtem-se:

$$x = |1\rangle \quad (\text{eq. 19})$$

O algoritmo termina mostrando que se for realizado uma medida e obtido o qubit  $x$  no estado  $|1\rangle$  a função é balanceada.

Agora considerando que  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 0$  (a função é constante), tem-se:

$$\frac{1}{2} |0\rangle|0 \oplus 0\rangle - |0\rangle|1 \oplus 0\rangle + |1\rangle|0 \oplus 0\rangle - |1\rangle|1 \oplus 0\rangle \quad (\text{eq. 20})$$

A partir da tabela verdade da operação XOR:

$$\frac{1}{2} |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \quad (\text{eq. 21})$$

Pode-se escrever a equação 21 da seguinte forma:

$$\left[ \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \left[ \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (\text{eq. 22})$$

Por fim, no estado  $|\psi_4\rangle$  após a aplicação da porta  $H$  no qubit  $x$  e descartando o qubit  $y$ :

$$x = |0\rangle \quad (\text{eq. 23})$$

O algoritmo termina mostrando que se for realizado uma medida e obtido o qubit  $x$  no estado  $|0\rangle$  a função é constante.

## APÊNDICE IV: IMPLEMENTAÇÃO FÍSICA DE COMPUTADORES QUÂNTICOS

---

Uma das maiores dificuldades da computação quântica está na implementação física de um computador quântico. Até o momento, a maior parte dos resultados obtidos na computação quântica foram resultados teóricos, resultados obtidos utilizando protótipos em laboratório e resultados simulados em computadores convencionais.

Simular computação quântica em computadores convencionais é um processo limitado que necessita de uma grande quantidade de memória e de poder de processamento. Considere a implementação de 50 qubits. Para descrever esse sistema serão necessárias  $2^{50} \approx 10^{15}$  amplitudes complexas, e considerando que cada número complexo seria armazenado com 128 bits de precisão, cada amplitude usaria 32 bytes, totalizando  $32 \times 10^{15}$  bytes, ou aproximadamente 32 mil terabytes de memória necessárias para descrever todo o sistema [44].

Os simuladores quânticos atuais que executam localmente na máquina possuem, em geral, capacidade para simular em aproximadamente 26 qubits. Para implementar o circuito proposto este trabalho foi utilizado o simulador QCAD [79] para simular 26 qubits. O simulador quântico mais poderoso criado até hoje usava computadores distribuídos na internet e mesmo assim só conseguiu simular 31 bits quânticos [81].

A implementação mais próxima de um computador quântico até a presente data é da empresa canadense *D-Wave systems* [30] que construiu e apresentou o primeiro computador quântico (codinome Orion) com 16 qubits em Fevereiro de 2007. Em Novembro do mesmo ano a mesma empresa demonstrou seu novo computador quântico com 28 qubits. Em 2008 a mesma empresa produziu um novo chip (codinome *Rainier*)

de 128 qubits. A tecnologia empregada para a construção destes computadores quânticos é a supercondutividade e utiliza o nióbio como metal [61]. Outras empresas também estão envolvidas com o desenvolvimento de computadores quânticos, MagiQ [63] e Id Quantique [64].

Alguns pesquisadores tais como Scott Aaronson [82] (MIT), Umesh Vazirani [83] [84] (Berkeley) e Dave Bacon [85] (Washington) fizeram críticas e levantaram pontos duvidosos sobre o computador quântico apresentado pela D-Wave.

Todas as propostas de implementações físicas tentam satisfazer os critérios apontados pelo pesquisador David P. DiVincenzo. Em seu trabalho [60], ele afirma que para que possa existir computação quântica, o hardware deve atender aos seguintes critérios:

1. Deve ser escalável, isto é, capaz de ser estendido para um número suficiente de qubits, onde os qubits sejam bem definidos.
2. Possuir qubits que possam ser inicializados no estado  $|0\rangle$ .
3. Possuir qubits com tempo de descoerência<sup>29</sup> maior que o tempo de operação de uma porta lógica, para garantir que os estados quânticos fiquem coerentes com os cálculos.
4. Ter um conjunto de portas quânticas universais.
5. Ter um procedimento eficiente para medir o estado dos qubits.

Um hardware do computador quântico ainda se encontra em fase preliminar de desenvolvimento. Devido ao grande esforço por parte dos pesquisadores, a todo tempo surgem novas propostas apresentando vantagens e desvantagens. Uma boa referência para encontrar informações sobre as futuras direções da computação quântica é dada por Huges [36].

A seguir, serão apresentadas as principais tecnologias para a implementação de computadores quânticos exploradas no meio acadêmico/científico [29] [43].

---

<sup>29</sup> Tempo de descoerência: é o tempo que um estado quântico consegue armazenar a informação sem que haja nenhuma alteração. Normalmente um estado quântico perde sua coerência quando interage com o ambiente externo.

## 1. Ressonância magnética nuclear

A ressonância magnética nuclear é o instrumento mais utilizado para executar algoritmos quânticos, onde destaca-se o experimento feito em 2001 utilizando 7 qubits para executar o algoritmo de Shor e fatorar o número 15 [59]. Basicamente o aparato é composto por um tubo de ensaio contendo as moléculas. Este tubo de ensaio é colocado no espectrômetro onde são emitidos campos de radiofrequência para controlar o estado dos spins dos núcleos das moléculas.

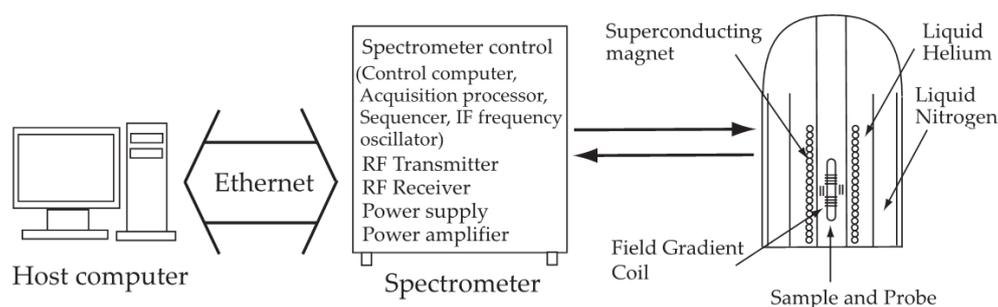


Figura 2. Esquema de um espectrômetro de Ressonância Magnética Nuclear [43].

## 2. Armadilha de íons

Nesta forma de implementação, os dois estados base do qubit são representados pelos dois níveis de energia do átomo, isto é, estado fundamental  $|g\rangle \equiv |0\rangle$  e o estado excitado  $|e\rangle \equiv |1\rangle$  do íon (átomo com carga elétrica) [26].

Os qubits são manipulados por pulsos de laser. Quando um átomo está no estado fundamental, e ele recebe energia, ele passa para o estado excitado. Quando um átomo perde energia, ele emite um fóton e volta para o estado fundamental [58].

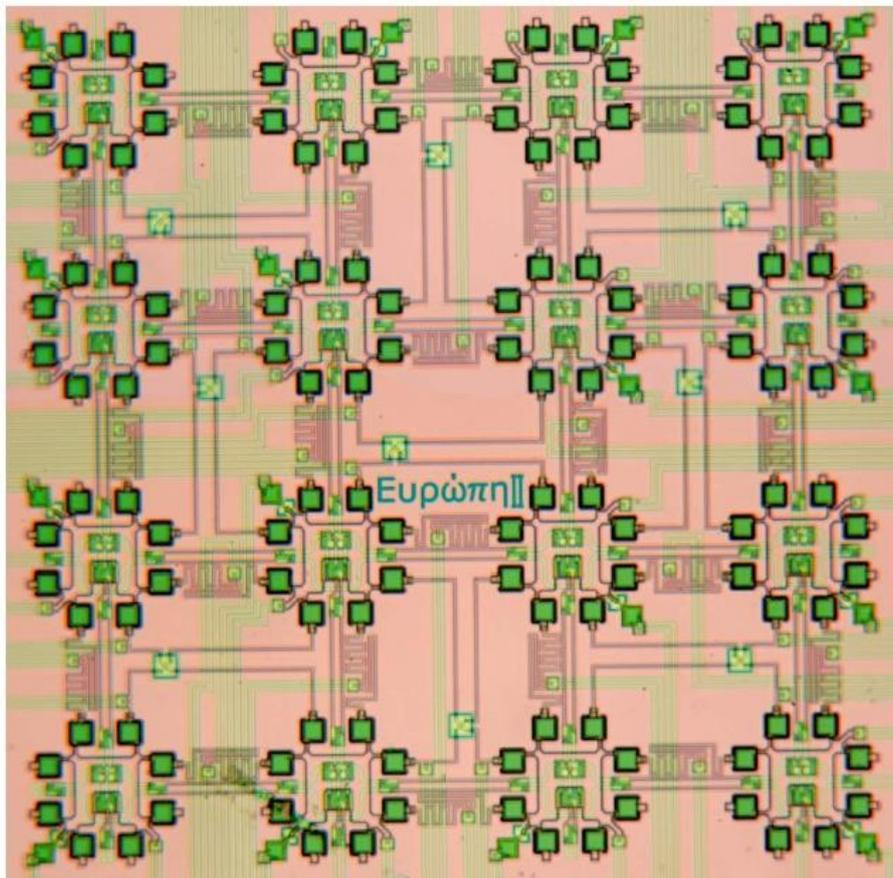
As vantagens desta tecnologia de implementação são que as armadilhas de íons possuem um tempo de coerência alto e as medidas são extremamente confiáveis. Como desvantagens, as armadilhas de íons possuem de tempo de porta (*gate time*) lento – uma operação gasta dezenas de milissegundos – e aparenta ser difícil de escalar para milhares de qubits [58].

## 3. Supercondutividade (usado no computador quântico da *D-Wave system*) [30]

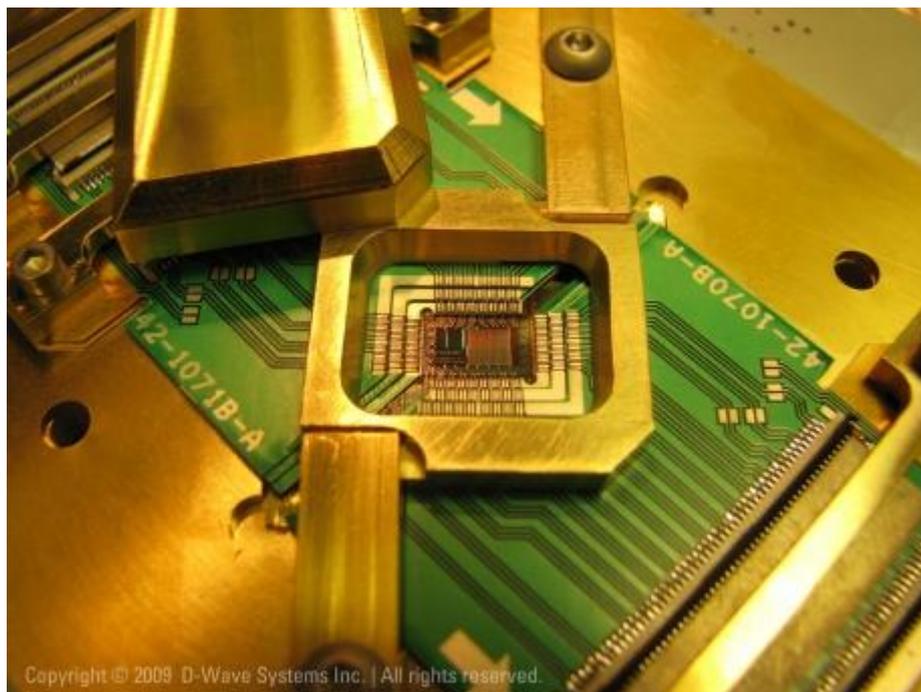
Os supercondutores são certos tipos de metais que, quando resfriados a uma temperatura de aproximadamente 0 graus Kelvin ( $-273^{\circ}\text{C}$ ), não representam resistência

elétrica. Nessa temperatura os circuitos começam a comportar-se quanticamente. São estruturas grandes (alguns micrômetros) comparados com estruturas atômicas, ou seja, é uma estrutura grande que apresenta os efeitos quânticos. Por ser uma estrutura macroscópica, torna-se mais fácil construí-las e manipulá-las. Os supercondutores também criam uma proteção contra os ruídos externos que causam a decoerência.

O nióbio foi o metal supercondutor utilizado pela D-Wave para construir o primeiro computador quântico [30]. A Figura 2 mostra o chip Orion, com 16 qubits, criado em 2007 pela D-Wave utilizando supercondutividade. A Figura 3 mostra o chip Rainier, com 128 qubits, criado pela mesma companhia em 2009 também utilizando o nióbio.



**Figura 3. Chip Orion de 16 qubits criado em 2007 pela D-Wave usando supercondutividade. É utilizado o Nióbio como metal supercondutor. Cada array verde representa um qubit [30].**



**Figura 3. Chip Rainier de 128 qubits criado em 2009 pela D-Wave usando supercondutividade. É utilizado o Nióbio como metal supercondutor [30].**

#### 4. Pontos quânticos

É uma estrutura semicondutora artificialmente fabricada, com tamanho de aproximadamente  $10^{-5}$  cm e que contem aproximadamente  $10^3 \sim 10^9$  átomos e aproximadamente o mesmo número de elétrons. Há duas formas de usar os elétrons aprisionados no semicondutor [43]:

- Ponto quântico duplo (Double Quantum Dot): usa dois pontos quânticos adjacentes. Se o elétron é residente em um ponto quântico representa o estado  $|0\rangle$ , e quando reside no outro ponto quântico representa o estado  $|1\rangle$ .
- Carga do ponto quântico (Charge Quantum Dot): o elétron ocupa o mesmo ponto quântico e os dois estados do spin  $|\downarrow\rangle$  e  $|\uparrow\rangle$  representam os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

## APÊNDICE V: EXEMPLO DE EMARANHAMENTO

---

Para representar o emaranhamento vamos, primeiro, mostrar um caso onde não ocorre emaranhamento e, em seguida, um caso de emaranhamento.

Consideremos dois sistemas quânticos, cada qual com seu espaço vetorial complexo  $V_1$  e  $V_2$  e seus respectivos vetores de estado:

$$V_1 = \{|x_0\rangle, |x_1\rangle\} \quad (\text{eq. 1})$$

$$V_2 = \{|y_0\rangle, |y_1\rangle\} \quad (\text{eq. 2})$$

Tomando o produto tensorial dos espaços vetoriais complexos  $\mathbb{C}^2$  obteremos um espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^4$ :

$$V_1 \otimes V_2 = \{|x_0\rangle|y_0\rangle, |x_0\rangle|y_1\rangle, |x_1\rangle|y_0\rangle, |x_1\rangle|y_1\rangle\} \quad (\text{eq. 3})$$

Considerando um vetor de estado genérico  $|\psi\rangle$  como uma superposição dos estados básicos, tem-se:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|x_0\rangle|y_0\rangle + \alpha_{01}|x_0\rangle|y_1\rangle + \alpha_{10}|x_1\rangle|y_0\rangle + \alpha_{11}|x_1\rangle|y_1\rangle \quad (\text{eq. 4})$$

Como exemplo, atribuindo algumas probabilidades para os estados básicos (lembra-se que a soma das probabilidades deve ser igual a 1), tem-se:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}|x_0\rangle|y_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}|x_0\rangle|y_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}|x_1\rangle|y_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}|x_1\rangle|y_1\rangle \quad (\text{eq. 5})$$

Se desejar saber qual a probabilidade de, ao realizar uma medida, encontrar o vetor de estado  $|\psi\rangle$  no estado básico  $|x_1\rangle|y_0\rangle$ , calcula-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4}}|x_1\rangle|y_0\rangle \\ & \left| \frac{1}{\sqrt{4}} \right|^2 = \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned} \quad (\text{eq. 6})$$

Portanto, tem-se 25% de chances de obter o estado básico  $|x_1\rangle|y_0\rangle$ . Em outras palavras, os dois sistemas quânticos foram juntados e agora são descritos como se fosse apenas um sistema. Assim, quando realizamos a medida acima, verificamos que o sistema  $V_1$  está no estado  $|x_1\rangle$  e que o sistema  $V_2$  está no estado  $|y_0\rangle$  com probabilidade 0.25.

Agora será visto um estado emaranhado. Considera-se o seguinte vetor de estados:

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x_0\rangle|y_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x_1\rangle|y_1\rangle \quad (\text{eq. 7})$$

Para facilitar a visualização, pode-se escrever o estado anterior como:

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x_0\rangle|y_0\rangle + 0|x_0\rangle|y_1\rangle + 0|x_1\rangle|y_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x_1\rangle|y_1\rangle \quad (\text{eq. 8})$$

nota-se que os estados básicos que não fazem parte do vetor de estados estão com probabilidade 0.

Como já mencionado, a maneira de juntar dois espaços vetoriais é fazer o produto tensorial. Vamos verificar se é possível escrever o vetor de estados acima tomando o produto tensorial dos espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$ .

A representação dos estados básicos para os dois espaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2$  são:

$$c_0|x_0\rangle + c_1|x_1\rangle \quad \text{e} \quad d_0|y_0\rangle + d_1|y_1\rangle \quad (\text{eq. 9})$$

Assim, o vetor de estados da equação 38 pode ser escrito como:

$$|\psi'\rangle = c_0d_0|x_0\rangle|y_0\rangle + c_0d_1|x_0\rangle|y_1\rangle + c_1d_0|x_1\rangle|y_0\rangle + c_1d_1|x_1\rangle|y_1\rangle \quad (\text{eq. 10})$$

Nota-se que  $c_0d_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $c_1d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , e também que  $c_0d_1 = 0$  e  $c_1d_0 = 0$ .

Como não há valores para  $c_0$   $c_1$   $d_0$   $d_1$  que satisfaça todas as relações acima, conclui-se que o vetor de estados  $|\psi'\rangle$  não pode ser escrito como produto tensorial.

Se um vetor de estados não pode ser escrito como produto tensorial, significa que o sistema está emaranhando, como é o caso de vetor de estados  $|\psi'\rangle$ . Se o sistema pode ser descrito como produto tensorial, o sistema é considerado separável, como é o caso do vetor de estados  $|\psi\rangle$ .

Um caso físico de emaranhamento é o de dois sistemas quânticos representados por duas partículas com seus spins. Pela lei da conservação do spin total do sistema, duas partículas juntas devem ter um spin total zero, isto é, o spin de uma partícula deve cancelar o spin da outra partícula [58].

Como a soma dos spins das duas partículas devem ser zero, quando for realizada uma medida no spin de uma partícula e for encontrado o estado  $|\uparrow_E\rangle$  a outra partícula deverá estar no estado oposto  $|\downarrow_D\rangle$  (os subscritos representam as partículas da esquerda e direita respectivamente).

Em termos de espaços vetoriais, o primeiro espaço vetorial possui as bases  $B_E = |\uparrow_E\rangle, |\downarrow_E\rangle$  e o segundo espaço vetorial possui as bases  $B_D = |\uparrow_D\rangle, |\downarrow_D\rangle$ . Todas as bases do sistema são:

$$|\uparrow_E\rangle|\uparrow_D\rangle, |\uparrow_E\rangle|\downarrow_D\rangle, |\downarrow_E\rangle|\uparrow_D\rangle, |\downarrow_E\rangle|\downarrow_D\rangle$$

Assim, o vetor de estados emaranhado desse sistema é descrito por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_E\rangle|\downarrow_D\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow_E\rangle|\uparrow_D\rangle \quad (\text{eq. 11})$$

Nota-se que os estados  $|\uparrow_E\rangle|\downarrow_D\rangle$  e  $|\downarrow_E\rangle|\downarrow_D\rangle$  não fazem parte do vetor de estados porque a lei da conservação do spin não permite. Quando é realizada uma medida no spin da partícula da esquerda e for encontrado o estado  $|\uparrow_E\rangle$  então, instantaneamente o estado da partícula da direita será  $|\downarrow_D\rangle$ , e se for encontrado o estado  $|\downarrow_E\rangle$  o estado da partícula da direita será  $|\uparrow_D\rangle$ , mesmo que as partículas estejam muito distantes uma da outra.

O emaranhamento possui algumas aplicações tais como o teleporte quântico, a codificação superdensa e a violação da desigualdade de Bell, que podem ser encontradas com detalhes em [44].

## APÊNDICE VI: CIRCUITO QUÂNTICO CORRELACIONADOR IMPLEMENTADO NO SIMULADOR QCAD

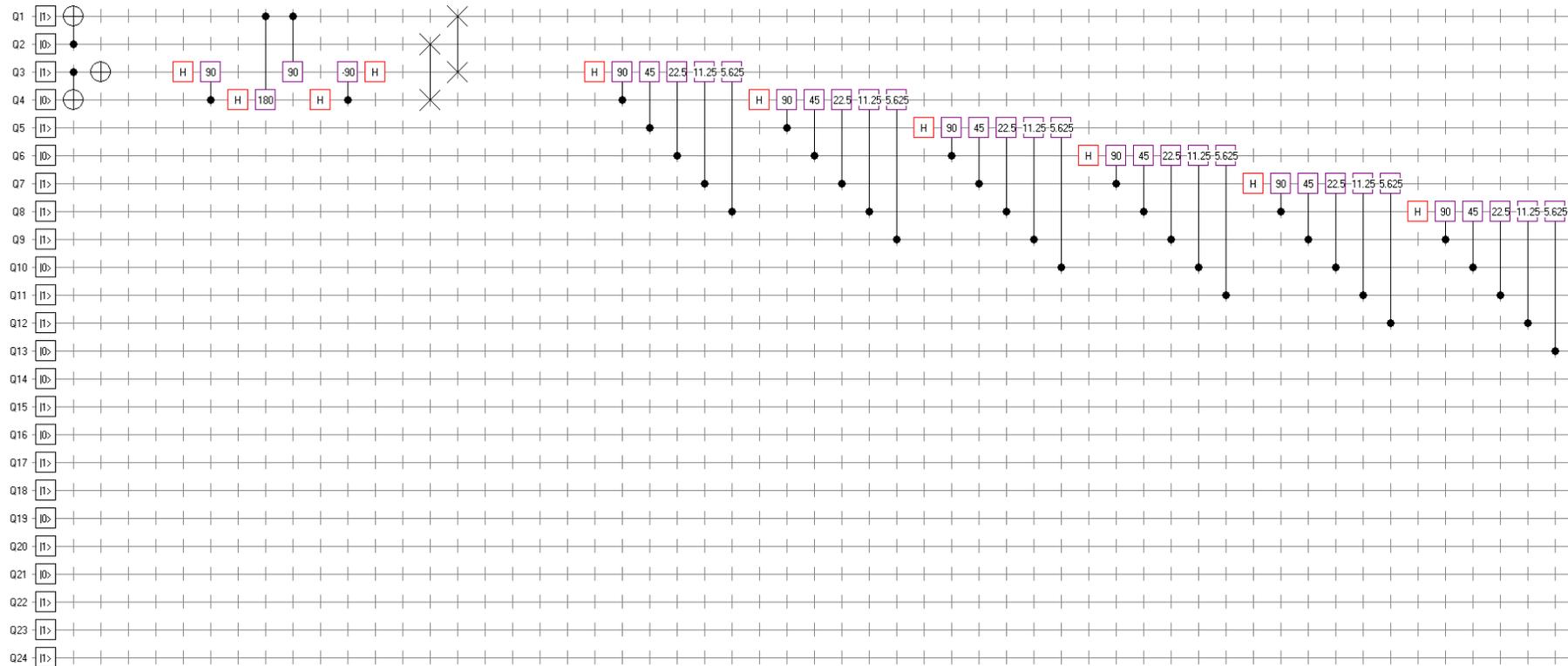


Figura 1. Circuito correlacionador quântico implementado no simulador QCAD.

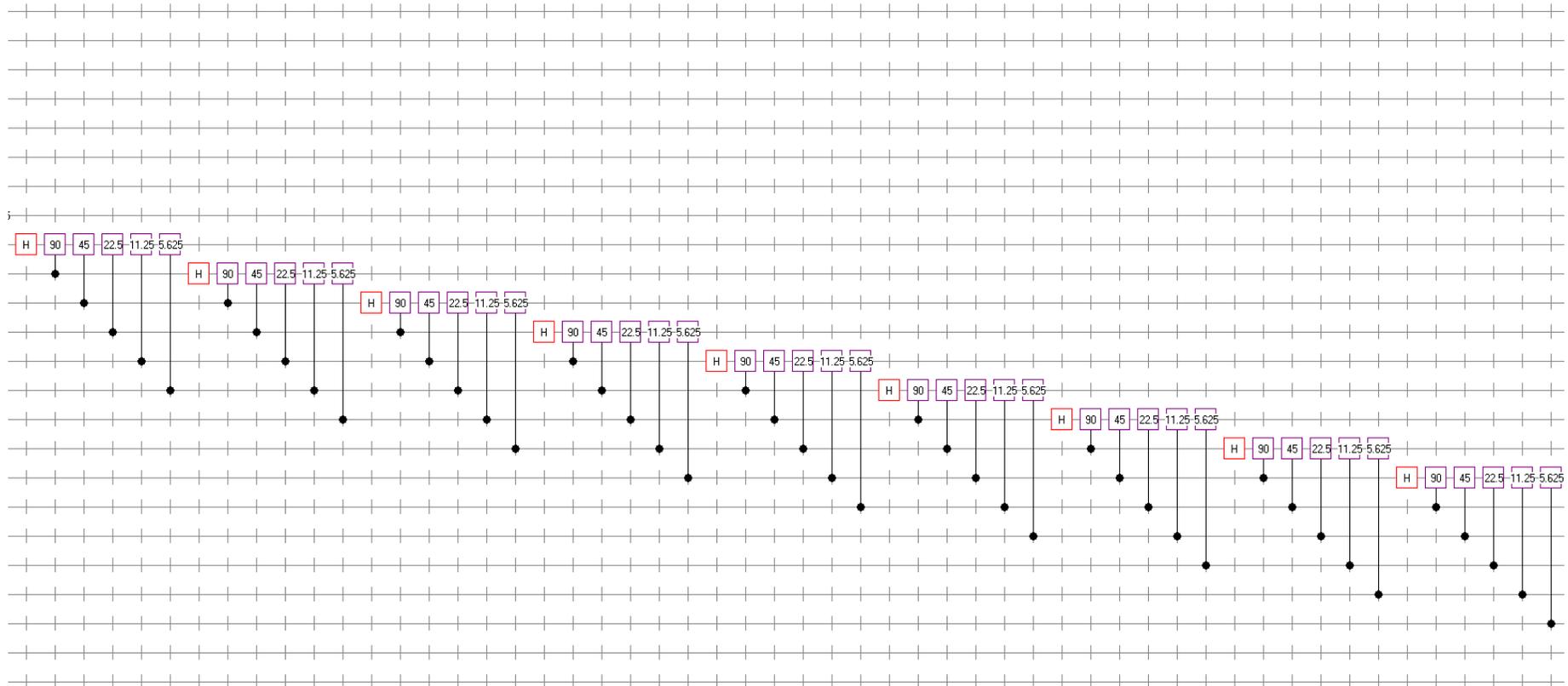


Figura 1. Continuação

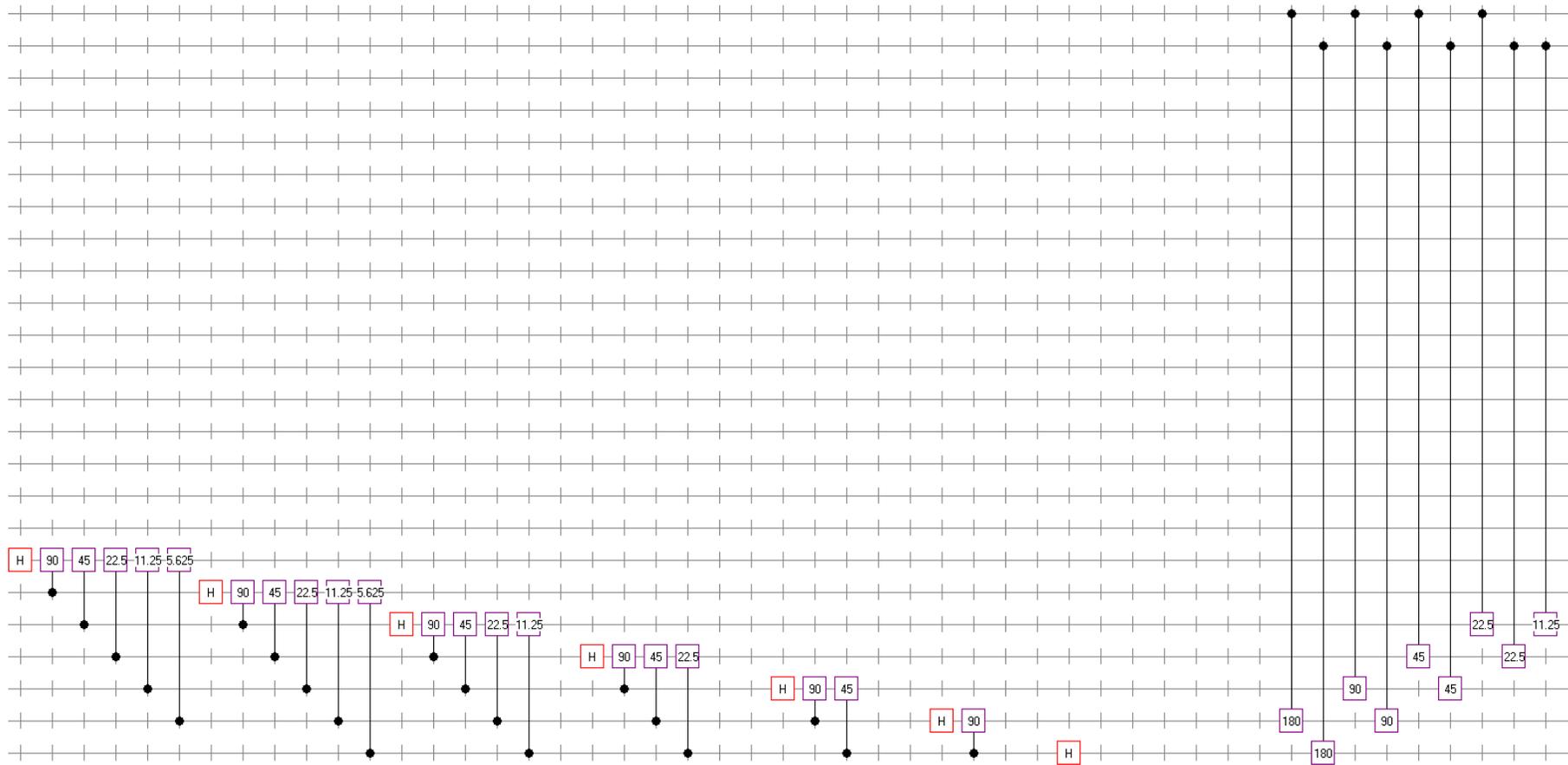


Figura 1. Continuação. As operações a direita implementam a soma 2+22 qubits.

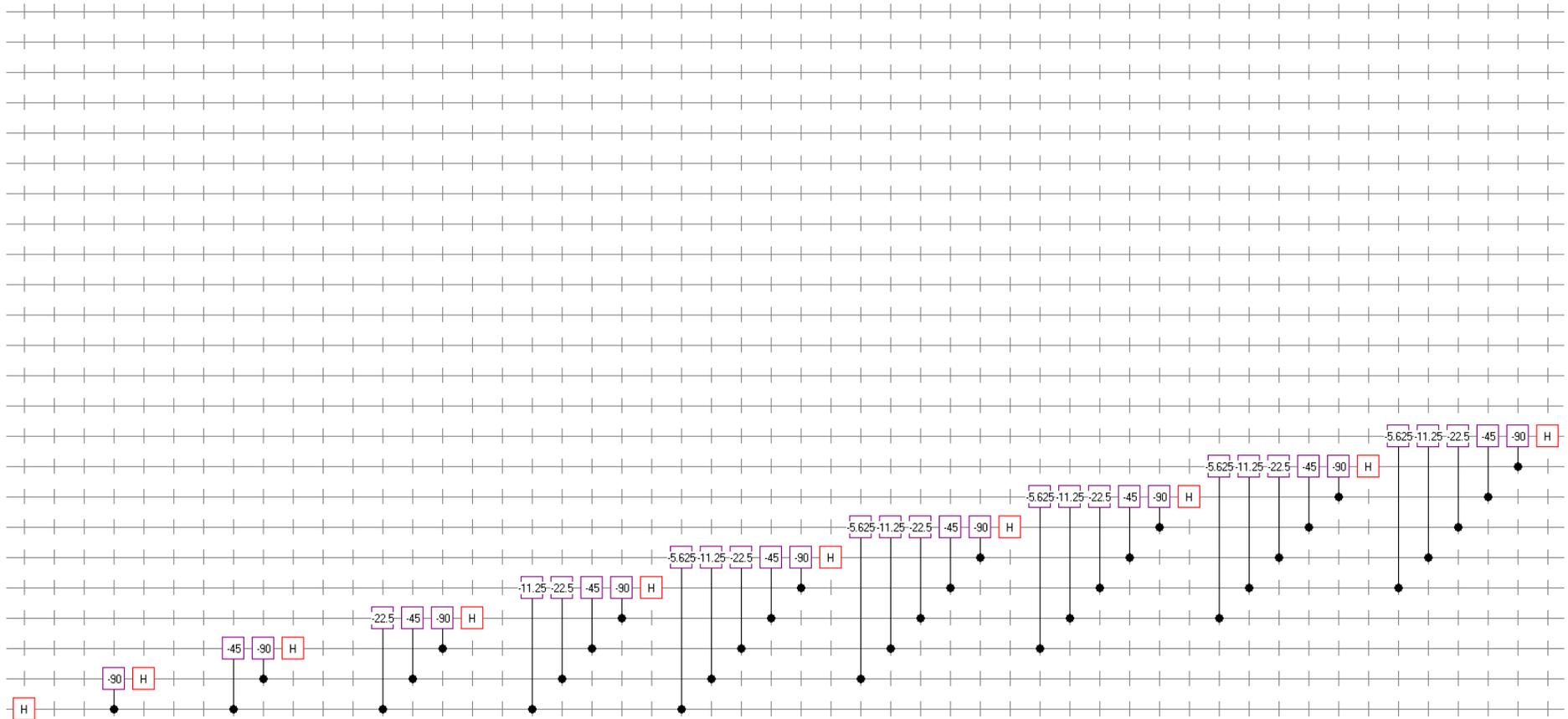


Figura 1. Continuação. A partir desse momento é aplicado a QFT inversa para obter o resultado final.

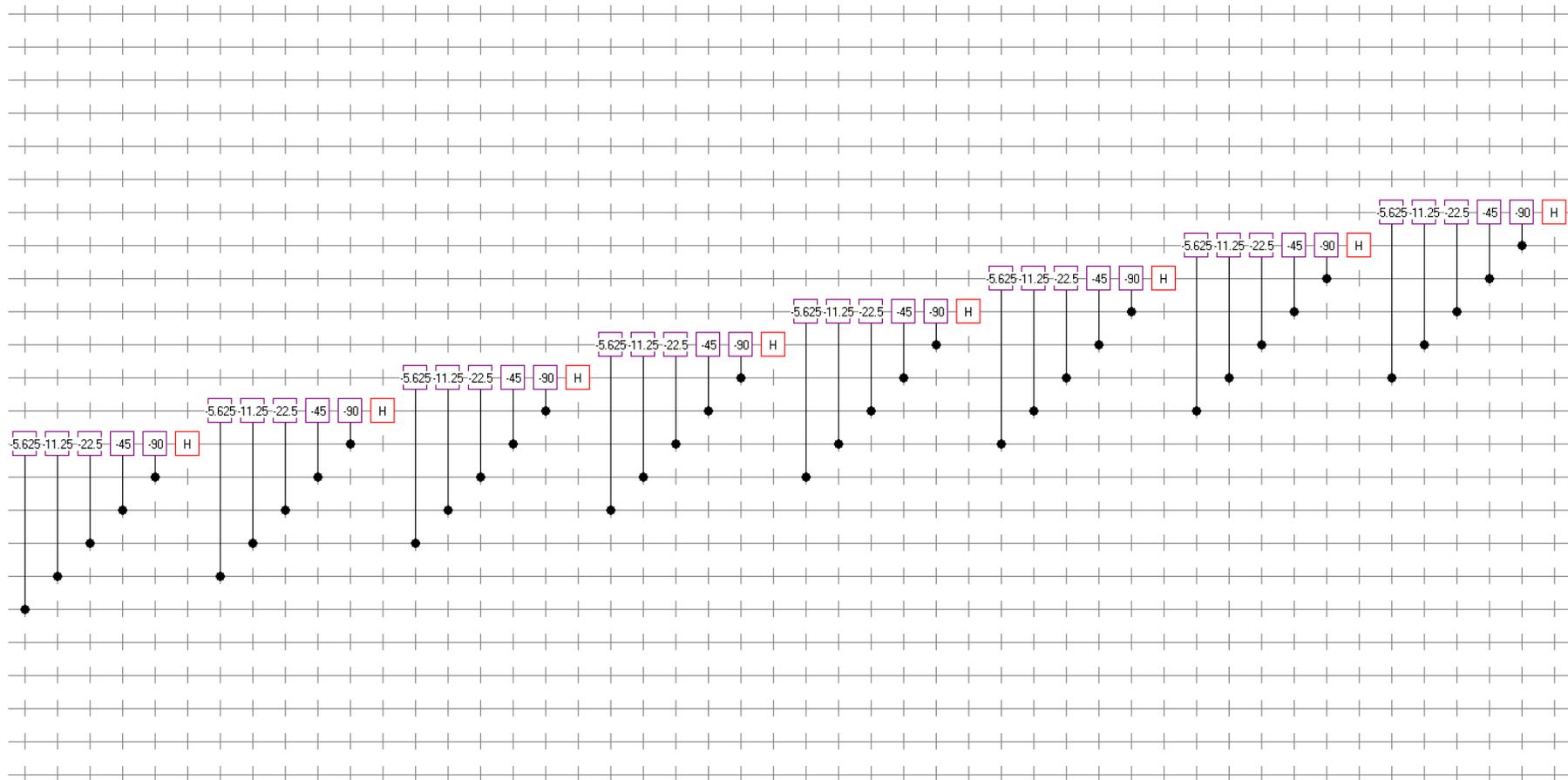
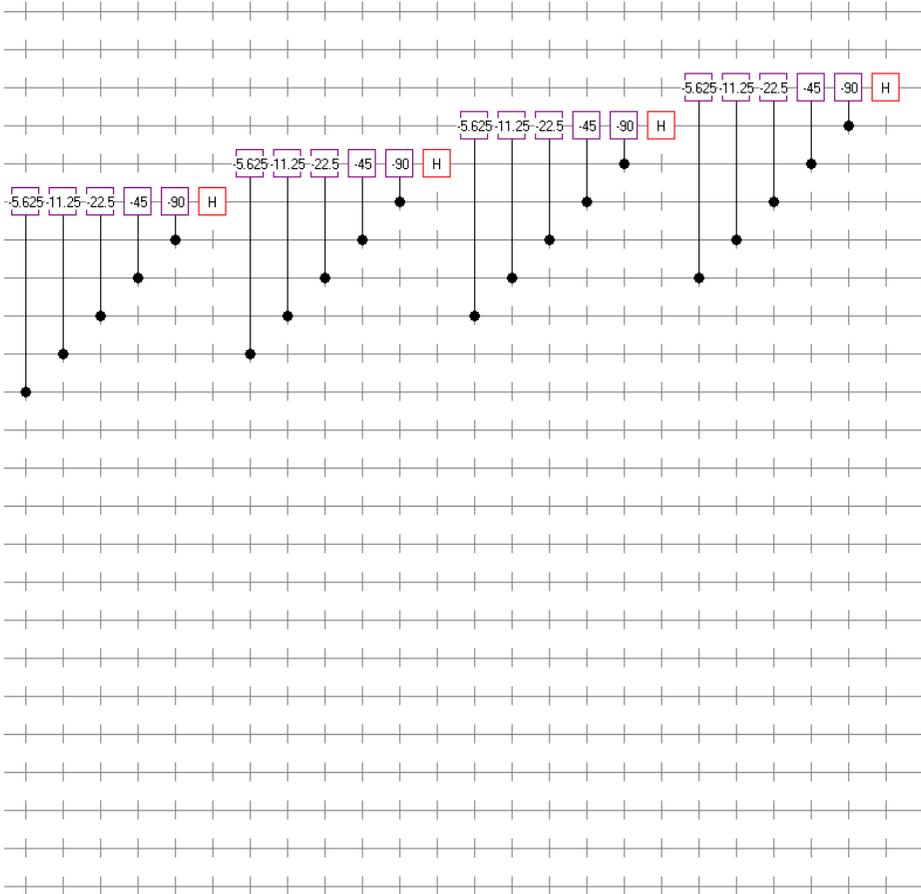


Figura 1. Continuação



## Referências bibliográficas

---

- [1] THOMPSON, A. R.; MORAN, J. M.; SWENSON, G. W. *Interferometry and synthesis in radio astronomy*. Wiley-VCH, Germany, 2004.
- [2] VISSER, H. J. *Array and phased array antenna basics*. John Wiley & Sons, Chichester, 2005.
- [3] GARY, D. E. *Radio astronomy: lectures*. Disponível em: <<http://web.njit.edu/~gary/728/Lecture1.html>>. Acesso em: 10 dez. 2008.
- [4] RIDPATH, I. *Dictionary of astronomy*. Oxford University Press, Kent, 1997.
- [5] BERRY, R. *Build your own telescope*.
- [6] PORCAS, R. *Introduction to radio astronomy*. Max Planck institut fuer Radioastronomie.
- [7] NRAO. *Radio astronomy*. Disponível em: <<http://www.nrao.edu/index.php/learn/radioastronomy>>. Acesso em: 05 dez. 2008.
- [8] MILLER, D. F. *Basics of radio astronomy for the Gold-Apple Valley radio telescope*. Jet Propulsion Laboratory - California Institute of Technology: Pasadena, 1998.
- [9] BARTON, M.; GRAM, K. *Radio astronomy*. Disponível em: <[www.aoc.nrao.edu/epo/teachers/RAFT/RAFT2006/solar.ppt](http://www.aoc.nrao.edu/epo/teachers/RAFT/RAFT2006/solar.ppt)>. Acesso em: 08 dez. 2008.
- [10] NAPIER, P. *Antennas in radio astronomy*. Disponível em: <<http://www.aoc.nrao.edu/events/synthesis/2006/lectures/TuesdayJune13/Napier.ppt>>. Acesso em: 10 dez. 2008.
- [11] *Instruments of radio telescope*. Disponível em: <[http://www.scienzagiovane.unibo.it/English/radio-window/9\\_Instruments.html](http://www.scienzagiovane.unibo.it/English/radio-window/9_Instruments.html)>. Acesso em: 08 dez. 2008.
- [12] CHENGALUR, J. N.; GUPTA, Y.; DWARAKANATH, K. S. GMRT. *Low frequency radio astronomy*. Pune, 2003.
- [13] PERLY, R. *Fundamentals of radio astronomy*. Ninth Synthesis Image Summer school, Socorro, 2004.

- [14] FARIA, C. Uma nova estratégia de otimização de arranjos interferométricos aplicada ao Brazilian Decimetric Array. Tese de doutorado, INPE, São José dos Campos, 2006.
- [15] WALKER, C. *Very long baseline interferometry*. Ninth Synthesis Image Summer school, Socorro, 2004.
- [16] TATKE, V. M. *A Digital Spectral Correlator for GMRT*. Thesis submitted for the degree of Master of Science in the Faculty of Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore, 1998.
- [17] VAN VLECK, J. H.; MIDDLETON, D. *The spectrum of clipped noise*. IEEE proceedings, v. 54, n. 1, 1966.
- [18] D'ADDARIO, L. R. *Cross correlators*. Synthesis image in radio astronomy. *Astronomical Society of the Pacific*.
- [19] BRISKEN, W. *Cross correlators*. Ninth Synthesis Image Summer school, Socorro, 2004.
- [20] RUPEN, M. P. *Cross correlators & New correlators*. Ninth Synthesis Image Summer school, Socorro, 2008.
- [21] BRACEWELL, R. N. *The Fourier transform and its applications*. 3. Ed. McGraw-Hill, Singapore, 2000.
- [22] RAMESH, R. *Multi-frequency observations of the outer solar corona with the gauribidanur radioheliograph*. Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Science, Bangalore University, 1998.
- [23] SAWANT, H. S. RAMESH, R. et al. *Brazilian decimetric array (phase-I)*. *Solar Phys.*, 242, 1-2, 213-220 2007.
- [24] ALVES, F. L. *Computação quântica: fundamentos físicos e perspectivas*. Lavras: Universidade Federal de Lavras, 2003.
- [25] BASDEVANT, J. L. *Lectures on quantum mechanics*. New York: Springer, 2007.
- [26] BELLAC, M. L. *A short introduction to quantum information and quantum computation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [27] BENETI, G.; CASATI, G.; STRINI, G. *Principles of quantum computation and information*. Volume I: basic concepts. New Jersey: World Scientific Publishing Company, 2004.
- [28] BULNES, J. J. D. *Emaranhamento e separabilidade de estados em computação quântica por ressonância magnética nuclear*. Rio de Janeiro: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2005.
- [29] CHEN, G.; CHURCH, D. A.; et. al. *Quantum computing devices: principles, designs and analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2007.

- [30] D-WAVE. *Quantum computing at D-Wave: an introduction to Orion*. Disponível em: <<http://www.dwavesys.com/>>. Acesso em: 10 set. 2007.
- [31] EDALAT, A. *Quantum computing: lectures and tutorials*. Disponível em: <<http://www.doc.ic.ac.uk/~ae>>. Acesso em: 01 ago. 2008.
- [32] EINSTEIN, A. *The old quantum theory: on a heuristic point of view about the creation and conversion of light?* Disponível em: <<http://www.fing.edu.uy/if/cursos/qcomp/extras/papers/einstein1905brownian.pdf>>. Acesso em: 20 jan. 2007.
- [33] FRANCO, H. *O nascimento da mecânica quântica*. Disponível em: <<http://plato.if.usp.br/1-2003/fmt0405d/apostila/quantum7/index.html>>. Acesso em: 01 jul 2007.
- [34] GILMORE, R. *Alice no país do quantum: a física quântica ao alcance de todos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.
- [35] HSU, H. P. *Theory and problems of signals and systems*. [s.l.]. McGRAW-HILL, 1995. (Col. Schaum's Outline Series).
- [36] HUGES, R. *A quantum information science and technology roadmap*. Disponível em: <<http://qist.lanl.gov>>.
- [37] IMRE, S.; BALÁZS, F. *Quantum computing and communications: an engineering approach*. Chichester: John Wiley & Sons, 2005.
- [38] KAYE, P.; LAFLAMME, R.; MOSCA, M. *An introduction to quantum computing*. New York: Oxford University Press, 2007.
- [39] JOZSA, R. *Quantum algorithms and the Fourier transform*. Disponível em: <<http://qso.lanl.gov/qc/proceedings/josza.ps>>. Acesso em: 01 jul. 2007.
- [40] MARQUEZINO, F. L. *A transformada de Fourier Quântica aproximada e sua simulação*. 2006. 135 p. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Coordenação de Formação de Recursos Humanos, Laboratório Nacional de Computação Científica, Rio de Janeiro.
- [41] MCMAHON, D. *Quantum computing explained*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008.
- [42] MERMIN, N. D. *Quantum computer science: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [43] NAKAHARA, M.; OHMI, T. *Quantum computing: from linear algebra to physical realizations*. Boca Raton: CRC Press, 2008.
- [44] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum computation and Quantum information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [45] OLIVEIRA, I. S. *Física Moderna para iniciados, interessados e aficionados Volume 1*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.

- [46] PALMER, G. *Technical Java: Developing Scientific and Engineering Applications*. New Jersey: Prentice Hall, 2003.
- [47] PERES, A. *Quantum theory: concepts and methods*. Denver: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [48] PERRY, R. T. *The temple of quantum computation*. Disponível em: <<http://www.toqc.com/>>. Acesso em: 20 out. 2006.
- [49] PORTUGAL, R. et. al. *Uma introdução à computação quântica*. São Carlos: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2004.
- [50] PRESKILL, J. *Lecture Notes for Physics 229: quantum information and computation*. California Institute of Technology, 1998. Disponível em: <<http://theory.caltech.edu/~preskill/ph229/#lecture>>. Acesso em: 09 ago. 2007.
- [51] SAKURAI, J. J. *Modern quantum mechanics*. Addison Wesley, 1994.
- [52] SCHLEICH, W. P.; WALTHER, H. *Elements of quantum information*. Mörlenbach: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co KGaA, Weinheim, 2007.
- [53] SHENOI, B. A. *Introduction to digital signal processing and filter design*. New Jersey: John Wiley and Sons, 2006.
- [54] SHUKLA, S. K.; BAHAR, R. I. *Nano, quantum and molecular computing*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [55] SPECTOR, L. *Automatic quantum computer programming: a genetic programming approach*. New York: Springer, 2004.
- [56] STENHOLM, S.; SUOMINEN, K.; *Quantum approach to informatics*. New Jersey: John Wiley & Sons Ltd, 2005.
- [57] STOLZE, J.; SUTER, D. *Quantum computing: a short course from theory to experiment*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004.
- [58] YANOFSKY, N. S.; MANNUCCI, M. A. *Quantum computing for computer scientists*. New York: Cambridge University Press, 2008.
- [59] VANDERSYPEN, L. M. K.; STEFFEN, M.; BREYTA, G.; YANNONI, C. S.; SHERWOOD, M. H.; CHUANG, I. L. *Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*. ArXive <[quant-ph/0112176](http://arxiv.org/abs/quant-ph/0112176)>, 2001.
- [60] DIVINCENZO, D. P. *The physical implementation of quantum computation*. ArXive <[quant-ph/0002077](http://arxiv.org/abs/quant-ph/0002077)>, 2000.
- [61] DWAVE. *Most powerfull ever quantum chip undergoing tests*. NewScientist magazine, 2009.

- [62] Tutorial sobre mecânica quântica, Universidade Federal de Campina Grande. Disponível em: <<http://www.dsc.ufcg.edu.br/~gmcc/mq/frames.html>>. Acesso em: 20 jan. 2007.
- [63] MAGIQ. Disponível em: <[www.magiqtech.com](http://www.magiqtech.com)>. Acesso em: 14 abr. 2009.
- [64] IDQUANTIQUE. Disponível em: <[www.idquantique.com](http://www.idquantique.com)>. Acesso em: 14 abr. 2009.
- [65] DEUTSCH, D. *Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer*. Proceedings of the Royal Society of London A 400, PP 97-117, 1985.
- [66] ALTENKIRCH, T.; GRATTAJE, J. *A Functional quantum programming language*. ArXive <[quant-ph/0409065](http://arxiv.org/abs/quant-ph/0409065)>.
- [67] GAY, S. J. *Quantum programming languages: survey and bibliography*. Mathematical structures in Computer Science, 2006.
- [68] FOX, C. *Quantum computing functions (QCF) for Matlab*. Oxford, 2003.
- [69] ÖMER, B. *Quantum programming in QCL*. Master thesis, Universidade de Viena, 2000.
- [70] ÖMER, B. *Classical concepts in quantum programming*. ArXiv <[quant-ph/0211100](http://arxiv.org/abs/quant-ph/0211100)>, 2002.
- [71] QUANTIKIWIKI. *List of QC simulators*. Disponível em: <[http://www.quantiki.org/wiki/index.php/List\\_of\\_QC\\_simulators](http://www.quantiki.org/wiki/index.php/List_of_QC_simulators)>.
- [72] CABRAL, G. E. *Uma ferramenta para projeto e simulação de circuitos quânticos*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, 2004.
- [73] CHIRIBELLA, G.; D'ARIANO, G. M.; PERINOTTI, P. *Quantum circuits architecture*. ArXive <[quant-ph/0712.1325v1](http://arxiv.org/abs/quant-ph/0712.1325v1)>, 2007.
- [74] VEDRAL, V.; BARENCO, A.; EKERT, A. *Quantum networks for elementary arithmetic operations*. ArXive <[quant-ph/9511018v1](http://arxiv.org/abs/quant-ph/9511018v1)>, 1995.
- [75] DRAPER, T. G. *Addition on a quantum computer*. ArXive <[quant-ph/0008033v1](http://arxiv.org/abs/quant-ph/0008033v1)>, 2000.
- [76] FEYNMAN, R. *Simulating physics with computers*. International Journal of Theoretical Physics, pp 467-488, 1982.
- [77] VAN METER III, R. D. *Architecture of a quantum multicomputer optimized for Shor's factoring algorithm*. Thesis submitted to the Department of Computer Science of Keio University for the degree of doctor of philosophy, 2008.
- [78] CUCCARO, S. A.; DRAPER, T. G.; KUTIN, S. A. *A new quantum ripple-carry addition circuit*. ArXive <[quant-ph/0410184v1](http://arxiv.org/abs/quant-ph/0410184v1)>, 2004.

- [79] WATANABE, H.; SUZUKI, M.; YAMAZAKI, J. *QCAD*. Disponível em: <<http://apollon.cc.u-tokyo.ac.jp/~watanabe/qcad/>>.
- [80] SHOR, P. W. *Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring*, in Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, pp. 124–134, 1994.
- [81] FRAUNHOFER. *Simulador quântico*. Disponível em: <<http://www.qc.fraunhofer.de/>>. Acesso em: 12 maio 2007.
- [82] AARONSON, S. *The blog of Scott Aaronson: the Orion quantum computer anti-hype faq*. Disponível em: <<http://scottaaronson.com/blog/?p=198>>. Acesso em: 25 maio 2009.
- [83] \_\_\_\_\_. *The blog of Scott Aaronson*. Disponível em: <<http://scottaaronson.com/blog/?p=204>>. Acesso em: 25 maio 2009.
- [84] \_\_\_\_\_. *The blog of Scott Aaronson*. Disponível em: <<http://www.scottaaronson.com/blog/?p=225>>. Acesso em: 25 maio 2009.
- [85] BACON, D. *The quantum pontiff: Orion in the future*. Disponível em: <<http://dabacon.org/pontiff/?p=1427>>. Acesso em: 25 maio 2009.
- [86] BARENCO, A.; EKERT, A.; SUOMINEN, K.; TORMA, P. *Approximate Quantum Fourier Transform and Decoherence*. ArXive <quant-ph/9601018v1>, 2008.
- [87] *Joint Institute for VLBI in Europe*. Disponível em: <<http://www.jive.nl/correlator-overview>>. Acesso em: 10 jun. 2010.
- [88] WILSON, T. H.; ROHLFS, K.; HÜTTMESIER, S. *Tools of radio astronomy*. Berlin: Springer, 2009.