

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO

**Reconstrução Tomográfica de Imagens
Utilizando Técnicas POCS Sequenciais e
Paralelas**

Fernando Vernal Salina

**São Carlos
Julho/2001**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S165rt

Salina, Fernando Vernal.

Reconstrução tomográfica de imagens utilizando técnicas
POCS seqüenciais e paralelas / Fernando Vernal Salina. --
São Carlos : UFSCar, 2004.

111 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2001.

1. Processamento de imagens. 2. Reconstrução de
imagens tomográficas. 3. POCS I. Título.

CDD: 006.42 (20ª)

Agradecimentos

A Deus, porque através d'Ele tudo é possível.

Ao Prof. Nelson Mascarenhas, pela orientação, amizade, paciência e principalmente pela oportunidade oferecida para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Paulo Cruvinel pela cooperação e ajuda.

À minha família pelo incentivo e carinho.

À Maria das Graças Bruno Marietto e Conceição Galvez Butera pelo incentivo dado no início do mestrado.

Aos professores e funcionários do programa de pós-graduação.

Aos colegas da pós-graduação Vital, Murillo, Márcia, Maurício e demais pela ajuda nos momentos necessários.

Aos amigos Ângelo, Luciano, André, Janice, Maria Helena e Walter Britto pelo constante apoio.

Ao projeto FINEPE-RECOPE nº 77.97.0575.00 e à CAPES, pelo auxílio financeiro concedido.

A todas as pessoas que contribuíram para que esse trabalho pudesse ser realizado.

Lista de Figuras

Figura 2.1	(a) geometria de fonte-detetor de feixes de raios paralelos (b) geometria de fonte-detetor de feixe de raios em leque.....	23
Figura 2.2	Quatro gerações de Tomografos.....	24
Figura 2.3	Esquema simplificado de um tomógrafo de primeira geração.....	26
Figura 2.4	Diagrama de bloco do minitomógrafo do CNPDIA.....	27
Figura 2.5	Relação entre coordenadas retangulares x-y e sistemas de coordenadas s-t.....	29
Figura 2.6	Em tomografia utilizando raios X, uma seção transversal 2-D de um objeto 3-D é penetrada por uma série de raios paralelos ou divergentes.....	30
Figura 2.7	Modelo discretizado para reconstrução de imagens de tomografia de transmissão.....	31
Figura 2.8	Para o método de reconstrução algébrica assume-se que existe um grid sobre a imagem desconhecida. Assume-se que o valor de em cada célula é constante.....	35
Figura 2.9	O método ART é ilustrado para o caso de dois hiperplanos.....	37
Figura 3.1	(a) conjunto convexo e (b) conjunto não convexo.....	39
Figura 3.2	(a) reta l e uma reta perpendicular a l passando por um ponto arbitrário x ; (b) figura bidimensional com círculos centrados em y , somente um disco toca o disco D em um ponto, representado por y^*	40

Figura 3.3	representação geométrica da convergência do método POCS sequencial	45
Figura 3.4	comportamento do algoritmo de POCS (a) sequencial e (b) paralelo quando não há interseção entre os conjuntos convexos.....	45
Figura 3.5	Em conjuntos não convexos a solução pode convergir para (a) um trap ou para (b) a interseção, dependendo da estimativa inicial	46
Figura 3.6	Os pontos projetados em C_{nc} nas proximidades de x_T convergem para x_T	46
Figura 3.7	: <i>trap</i> repulsivo.....	47
Figura 3.8	(a) l_1 e l_2 tem uma interseção, (b) l_1 e l_2 são coincidentes, ou seja, possuem infinitas soluções, (c) l_1 e l_2 são paralelas, não possuindo nenhuma interseção	48
Figura 3.9	(a) as sucessivas projeções convergem para a solução do sistema, (b) a projeção converge para a solução mais próxima da estimativa inicial e (c) como não existe solução as projeções ficam oscilando entre dois valores	51
Figura 3.10	: (a) as sucessivas projeções convergem para a solução do sistema, (b) a projeção converge para a solução mais próxima da estimativa inicial e (c) como não existe solução as projeções convergem para a solução dos mínimos quadrados.....	52
Figura 3.11	projeção de q no conjunto C_R , todos componentes estão representados por vetores	54
Figura 4.1	: <i>Phantoms</i> (a) homogêneo, (b) assimétrico e (c) simétrico utilizado na simulação da tomografia	60
Figura 4.2	: Ilustração do corte transversal dos <i>Phantoms</i> experimentais (a) homogêneo, (b) simétrico e (c) assimétrico.....	62
Figura 4.3	Imagens reconstruídas pelo método SIRT a partir de projeções ruidosas, phantoms (a) homogêneo, (b) assimétrico e (c) simétrico.....	64

Figura 4.4	Gráfico demonstrando o erro entre a imagem de referência e a imagem original	64
Figura 4.5	Imagem do <i>Phantom</i> homogêneo reconstruída a partir de projeções ruidosas com os métodos (a) ART, (b) SIRT, (c) POCS sequencial e (d) POCS paralelo	65
Figura 4.6	Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do phantom homogêneo, a partir de projeções ruidosas	65
Figura 4.7	Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> homogêneo	66
Figura 4.8	Imagens do <i>Phantom</i> assimétrico reconstruída a partir de projeções ruidosas com os métodos (a) ART, (b) SIRT, (c) POCS sequencial e (d) POCS paralelo	66
Figura 4.9	Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do phantom Assimétrico, a partir de projeções ruidosas.....	67
Figura 4.10	Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> assimétrico reconstruída a partir de projeções ruidosas	67
Figura 4.11	Imagens do <i>Phantom</i> Simétrico reconstruída a partir de projeções ruidosas com os métodos (a) ART, (b) SIRT, (c) POCS sequencial e (d) POCS paralelo	68
Figura 4.12	Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do phantom Simétrico, a partir de projeções ruidosas	68
Figura 4.13	Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> simétrico reconstruída a partir de projeções ruidosas	69
Figura 4.14	<i>Phantom</i> Homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT .	69
Figura 4.15	<i>Phantom</i> Homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	70
Figura 4.16	<i>Phantom</i> Homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	70

Figura 4.17 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do phantom homogêneo com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°	71
Figura 4.18 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> homogêneo reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°	71
Figura 4.19 <i>Phantom</i> Assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT	72
Figura 4.20 <i>Phantom</i> Assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	72
Figura 4.21 <i>Phantom</i> Assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	73
Figura 4.22 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do phantom assimétrico com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°	73
Figura 4.23 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> assimétrico reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°	74
Figura 4.24 <i>Phantom</i> Simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT	75
Figura 4.25 <i>Phantom</i> Simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	75
Figura 4.26 <i>Phantom</i> Simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	75

Figura 4.27 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do phantom simétrico com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°	76
Figura 4.28 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> simétrico reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°	76
Figura 4.29 <i>Phantom</i> homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT	77
Figura 4.30 <i>Phantom</i> homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	77
Figura 4.31 <i>Phantom</i> homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	78
Figura 4.32 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do phantom homogêneo com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°	78
Figura 4.33 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> homogêneo reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°	79
Figura 4.34 <i>Phantom</i> assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT	79
Figura 4.35 <i>Phantom</i> assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	79
Figura 4.36 <i>Phantom</i> assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	80

Figura 4.37 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do phantom assimétrico com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 135°	80
Figura 4.38 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> assimétrico reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 135°	81
Figura 4.39 <i>Phantom</i> simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT	82
Figura 4.40 <i>Phantom</i> simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	82
Figura 4.41 <i>Phantom</i> simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	82
Figura 4.42 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do phantom simétrico com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 135°	83
Figura 4.43 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> simétrico reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 135°	83
Figura 4.44 Imagens dos <i>phantoms</i> (a) homogêneo, (b) assimétrico e (c) simétrico reconstruída a partir de projeções com alta contagem de fótons.....	84
Figura 4.45 Imagens de referência do <i>phantom</i> (a) homogêneo, (b) assimétrico e (c) simétrico, obtidas a partir de baixa contagem de fótons	84
Figura 4.46 Gráfico de erro percentual entre as imagens de referência e as imagens consideradas ideais.	85
Figura 4.47 Imagem reconstruída do <i>phantom</i> homogêneo pelos métodos (a) POCS, (b) SIRT, (d) POCS sequencial e (e) POCS paralelo	85
Figura 4.48 Gráfico que mostra a convergência para o <i>phantom</i> homogêneo.....	86
Figura 4.49 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> homogêneo	86

Figura 4.50 Imagem reconstruída do <i>phantom</i> assimétrico pelos métodos (a) POCS, (b) SIRT, (d) POCS sequencial e (e) POCS paralelo	87
Figura 4.51 Gráfico que mostra a convergência para o <i>phantom</i> assimétrico	87
Figura 4.52 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> assimétrico.....	88
Figura 4.53 Imagem reconstruída do <i>phantom</i> simétrico pelos métodos (a) POCS, (b) SIRT, (d) POCS sequencial e (e) POCS paralelo	88
Figura 4.54 Gráfico que mostra a convergência para o <i>phantom</i> assimétrico	89
Figura 4.55 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> assimétrico.....	89
Figura 4.56 Imagens de referência 2 do <i>phantom</i> (a) homogêneo, (b) assimétrico e (c) simétrico.....	90
Figura 4.57 Gráfico de erro percentual entre as imagens de referência e as imagens consideradas ideais.	90
Figura 4.58 <i>Phantom</i> homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT.....	91
Figura 4.59 <i>Phantom</i> homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	91
Figura 4.60 <i>Phantom</i> Homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	91
Figura 4.61 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do <i>phantom</i> homogêneo com ângulo de projeções limitados entre 0° e 90°	92
Figura 4.62 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> homogêneo, reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°.....	92
Figura 4.63 <i>Phantom</i> assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT.....	93

Figura 4.64 <i>Phantom</i> assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método	
(a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e	
(b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	93
Figura 4.65 <i>Phantom</i> assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método	
(a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e	
(b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	93
Figura 4.66 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do <i>phantom</i> assimétrico com ângulo de projeções limitados entre 0° e 90°	94
Figura 4.67 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> assimétrico, reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°	94
Figura 4.68 <i>Phantom</i> simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT	95
Figura 4.69 <i>Phantom</i> simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método	
(a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e	
(b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	95
Figura 4.70 <i>Phantom</i> simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método	
(a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e	
(b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	95
Figura 4.71 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do <i>phantom</i> simétrico com ângulo de projeções limitados entre 0° e 90°	96
Figura 4.72 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> assimétrico, reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°	97
Figura 4.73 <i>Phantom</i> homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT	98

Figura 4.74 <i>Phantom</i> homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método	
(a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e	
(b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	98
Figura 4.75 <i>Phantom</i> homogêneo reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método	
(a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e	
(b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	98
Figura 4.76 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do <i>phantom</i> homogêneo com ângulo de projeções limitados entre 0° e 135°	99
Figura 4.77 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> homogêneo, reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo de 0° a 135°	99
Figura 4.78 <i>Phantom</i> assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através dos métodos (a) ART, (b) SIRT	100
Figura 4.79 <i>Phantom</i> assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método	
(a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e	
(b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	100
Figura 4.80 <i>Phantom</i> assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método	
(a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e	
(b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	100
Figura 4.81 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do <i>phantom</i> homogêneo com ângulo de projeções limitados entre 0° e 135°	101
Figura 4.82 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> homogêneo, reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo de 0° a 135°	101
Figura 4.83 <i>Phantom</i> simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através dos métodos (a) ART, (b) SIRT	102

Figura 4.84 <i>Phantom</i> simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método	
(a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e	
(b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1	102
Figura 4.85 <i>Phantom</i> simétrico reconstruído, a partir de ângulo de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método	
(a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e	
(b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1	102
Figura 4.86 Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do <i>phantom</i> homogêneo com ângulo de projeções limitados entre 0° e 135°	103
Figura 4.87 Erro percentual da imagem do <i>phantom</i> homogêneo, reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo de 0° a 135°	104
Figura 4.88 Distância entre as projeções feitas no método POCS sequencial, o <i>phantom</i> homogêneo simulado.....	104
Figura 4.89 Erro percentual do <i>phantom</i> simétrico reconstruído através do SIRT em 200 iterações.....	105

Resumo

Nesta dissertação são apresentados quatro algoritmos para reconstrução tomográfica de imagens utilizando o método de projeções em conjuntos convexos (POCS - *Projections onto Convex Sets*), sendo eles o ART (*Algebraic Reconstruction Technique*), o SIRT (*Simultaneous Iterative Reconstructive Technique*), o POCS sequencial e o POCS paralelo.

É feita a comparação entre os métodos de reconstrução, acima citados, na presença de ruído e na reconstrução à partir de ângulos limitados. Em cada reconstrução o resultado obtido em cada iteração é comparado com a imagem desejada, mostrando-se também o gráfico de convergência de cada método.

Utilizaram-se, para reconstrução tomográfica, projeções de corpos de testes obtidas através de simulação e também projeções obtidas experimentalmente no minitomógrafo do CNPDIA-EMBRAPA.

Embora seja considerada somente a reconstrução a partir de projeções obtidas em tomógrafos com feixe de raios paralelos, os métodos expostos podem reconstruir imagens independentemente da geometria fonte-detector utilizada pelo tomógrafo.

O uso de restrições sobre as soluções, como no caso dos métodos POCS sequencial e paralelo, mostrou-se eficaz para reduzir as variações devido ao malcondicionamento do problema.

Abstract

In this dissertation four algorithms are presented for the tomographic reconstruction of images using methods denominated POCS - Projections onto Convex Sets, which are the ART - Algebraic Reconstruction Technique, the SIRT - Simultaneous Iterative Reconstructive Technique, the sequential POCS and parallel POCS.

A comparison is made between the reconstruction methods named above, in the presence of noise and in the reconstruction from limited view. In each reconstruction, the result of each iteration is compared with the desired image, also showing the convergence curve for each method.

For the tomographic reconstructions, projections from test bodies obtained through simulation were used and also experimental projections obtained by the mini-tomograph scanner of CNPDIA-EMBRAPA.

Although were considered only the reconstruction based on projections obtained with parallel beams, the methods here described can also reconstruct images that are independent of the source-detector geometry used by the tomograph scanner.

The use of restrictions over the solutions, as in the case of serial and parallel POCS, demonstrated efficiency in reducing the variability due to the ill-conditioning of the problem.

Sumário

1. Introdução	17
1.1 Objetivo	18
1.2 Apresentação do Trabalho	18
2. Tomografia Computadorizada	20
2.1 Princípios da Tomografia Computadorizada	22
2.1.1 Tomógrafo	22
2.1.2 Minitomógrafo desenvolvido pelo CNPDIA	25
2.1.3 Modelo Matemático de Reconstrução	28
2.1.4 Modelo de Discretização para o Problema de Tomografia Computadorizada	31
2.2 Algoritmos de Reconstrução Tomográfica	32
2.2.1 Método de Retroprjeção Simples	33
2.2.2 Reconstrução por Retroprojeção Filtrada	33
2.2.3 Reconstrução utilizando a Transformada de Fourier	34
2.2.4 Algoritmos de Reconstrução Algébrica	34
3. POCS (Projections onto Convex Sets)	39
3.1 Conjuntos Convexos	39
3.2 Projeção	40
3.3 Algoritmo de POCS	41
3.3.1 Controle da Sequencia de Projeção	43
3.3.2 Convergência	45

3.4	Projeções em Conjuntos Não Convexos	46
3.5	O Uso de POCS para Solução de Sistemas de Equações Lineares	47
3.5.1	Projetores	49
3.5.2	Convergência	51
3.6	Conjuntos de Restrições Convexas	52
3.6.1	Conjunto de Restrição da Imagem de Referência.....	53
3.6.2	Conjunto de Restrição de Suporte Finito.....	54
3.6.3	Conjunto de Restrição de Não Negatividade.....	55
3.6.4	Conjunto de Restrição de Amplitude Limitada	55
3.6.5	Conjunto de Restrição de Energia.....	56
3.6.6	Conjunto de Imagens com Pontos Conhecidos.....	56
4.	Resultados	58
4.1	Implementação dos Algoritmos.....	58
4.1.1	O Algoritmo ART	58
4.1.2	O Algoritmo SIRT	59
4.1.3	O Algoritmo POCS Sequencial	59
4.1.4	O Algoritmo POCS Paralelo.....	59
4.2	Obtenção dos Dados Tomográficos	60
4.2.1	<i>Phantoms</i> Simulados.....	60
4.2.2	<i>Phantoms</i> experimentais	61
4.3	Resultados	63
4.3.1	<i>Phantoms</i> Simulados.....	63
4.3.2	<i>Phantoms</i> Experimentais	84
4.4	Análise dos Resultados.....	104
5.	Conclusões	106
6.	Bibliografia	108

1. Introdução

Muitos problemas, envolvendo processamento de imagens e sinais (como por exemplo reconstrução tomográfica e restauração de imagens), podem apresentar um melhor resultado se forem impostas restrições em seu conjunto de soluções. Tais restrições podem, em certos casos, também ser consideradas como conjuntos.

Uma maneira de incorporar essas restrições ao algoritmo, é utilizar o método de projeções. Se os conjuntos que representam as restrições são convexos, é possível encontrar a solução do problema, representada pela interseção dos conjuntos (caso haja alguma interseção).

O método de projeções além de permitir a incorporação de conhecimento a priori, através de restrições convexas, permite a reconstrução tomográfica independente da geometria fonte-detector utilizada pelo tomógrafo. Isso faz com que o método em questão tenha uma vasta aplicação, não só em tomografia computadorizada, mas também em outras áreas tais como: radioastronomia, microscopia eletrônica e holografia.

Em tomografia computadorizada existem muitos algoritmos que utilizam o conceito de projeção em conjunto convexas. Alguns métodos existentes tal como o ART (*Algebraic Reconstruction Techniques*) e o SIRT (*Simultaneous Iterative Reconstructive Technique*) utilizam esta técnica, ou seja, são casos específicos de projeções em conjuntos convexas (onde cada conjunto é um hiperplano).

As imagens geradas por tomografia computadorizada são utilizadas por diversas áreas, tais como, por exemplo, a medicina e a indústria (realização de testes não destrutivos), onde as informações contidas são as mais variadas. A principal diferença entre a área de medicina e a área industrial é a variação da densidade nos materiais. Na medicina,

devido a se trabalhar com corpo humano, a dose de radiação recebida pelo paciente é alvo de grande atenção.

O tempo de exposição de um corpo à radiação está diretamente ligada à contagem de *fótons* realizada pelo tomógrafo, ou seja, quanto maior a exposição maior a contagem para um mesmo corpo. Quando se tem baixa contagem de *fótons* produz-se projeções muito ruidosas, o que pode produzir imagens com quantidade de ruído inaceitável.

Um outro problema encontrado é quando, por problemas diversos, se torna impossível capturar as projeções do corpo em um determinado intervalo angular. Essa ausência de dados pode fazer com que a imagem reconstruída não seja uma boa representação do objeto analisado.

1.1 Objetivo

O objetivo principal desse trabalho é a comparação entre os métodos de projeção na reconstrução com dados ruidosos e com ângulo de projeção limitado, onde serão analisados os métodos de projeções sequenciais e paralelas.

Foram feitos estudos de seis *phantoms*, sendo três simulados e três experimentais. Cada um dos três *phantoms*, tanto os simulados como os experimentais, tem as seguintes características: (a) homogêneo, com baixa ou nenhuma variação de atenuação ao longo do corpo; (b) assimétrico, com diferentes estruturas dispostas assimetricamente ao longo do corpo; (c) simétrico, com estruturas de diferentes graus de atenuação disposta ao longo do corpo de forma simétrica. Mais detalhes sobre os *phantoms* são apresentados na seção 4.2.

As projeções dos *phantoms* experimentais foram obtidas pelo minitomógrafo de transmissão do CNPDIA-EMBRAPA. Para obtenção das projeções dos *phantoms* simulados, fez-se a implementação do código em matlab.

1.2 Apresentação do Trabalho

O trabalho está disposto em 6 capítulos, dispostos da maneira a seguir.

No capítulo 2 é apresentada a evolução histórica da tomografia computadorizada, uma descrição das considerações físicas da tomografia, a descrição do tomógrafo de primeira geração utilizado na obtenção das projeções dos *phantoms* experimentais e a apresentação dos algoritmos mais utilizados na reconstrução de imagens tomográficas.

No capítulo 3 é apresentado um sumário da teoria de POCS, mostrando os métodos de projeção, bem como alguns projetores. Neste capítulo são apresentados também os conjuntos convexos utilizados nos algoritmos que foram implementados.

No capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos com os *phantoms* utilizados, mostrando tanto a convergência em cada reconstrução como também o erro entre a imagem reconstruída e a imagem desejada.

No capítulo 5 é apresentada a análise dos resultados, sendo apresentadas também as linhas para pesquisas futuras.

O capítulo 6 contém as referências bibliográficas utilizadas no desenvolvimento desse trabalho.

2 Tomografia computadorizada

A tomografia computadorizada é uma técnica que resolve alguns problemas encontrados em radiografia convencional. Na radiografia convencional, o corpo é atravessado por raios X, produzindo assim uma imagem a partir da atenuação causada pelos diferentes tipos de materiais que o corpo possui; já a tomografia computadorizada produz uma imagem que representa o corte perpendicular do corpo. O impacto desta técnica no diagnóstico médico tem sido revolucionário, tendo em vista que permite aos médicos visualizarem órgãos internos com precisão. A primeira aplicação médica utilizava raios X para formar as imagens de tecidos, tendo por base seu coeficiente de atenuação. Atualmente, estas imagens também têm sido geradas a partir de radioisótopos, ultrassom e ressonância magnética, sendo o parâmetro para reconstrução da imagem diferente em cada um desses casos.

As aplicações de tomografia não ficam restritas somente à área médica. Alguns pesquisadores têm utilizado esta técnica para mapear recursos presentes no solo, gerando imagens com testes não destrutivos. Pode-se citar outras aplicações, tais como a criação de imagens tridimensionais com microscopia eletrônica, tomografia na área agrícola, para verificar, por exemplo, se alguma praga afetou o interior de determinada planta, dentre outras aplicações. O aspecto inovador apresentado pela Tomografia Computadorizada é a possibilidade da reconstrução de uma imagem a partir de suas projeções. A projeção em um dado ângulo é a integral da imagem na direção especificada pelo ângulo, a projeção é a medida da energia transmitida quando um objeto é irradiado em um dado ângulo. O termo “projeção difratada” pode ser usado quando a fonte de energia é difratada, como no caso do ultrassom e de microondas.

Do ponto de vista matemático, a solução para o problema da reconstrução de uma função a partir de seus dados de projeção foi proposto por Radon em 1917

[RADO17], embora somente na década de 70 Hounsfield tenha inventado o primeiro *scanner* de tomografia computadorizada [HOUN73], utilizando raios X, invenção pela qual recebeu o prêmio Nobel em 1979. Ele dividiu o prêmio com Allan Cormack, que em 1963 contribuiu de maneira relevante para o desenvolvimento de algoritmos para reconstrução [CORM63]. Radon descobriu as bases matemáticas para reconstrução de um corpo a partir de suas projeções, porém apenas mediante infinitas projeções de um corpo, Cormack, por outro lado, propôs a reconstrução de um corpo com base em um número finito de projeções.

Depois da invenção de Hounsfield, a tomografia computadorizada por transmissão obteve grandes avanços, principalmente no desenvolvimento dos algoritmos para reconstrução. Hounsfield empregou a técnica de reconstrução algébrica, que será descrita oportunamente, e reconstruiu uma imagem de tamanho 80x80. Em 1971 foi proposto o algoritmo de convolução e retroprojeção, primeiramente desenvolvido por Ramachandran e Lakshminarayanan [RAMA71], sendo aprimorado posteriormente por Shepp e Logan [LOGA75]. Estes dois algoritmos reduzem consideravelmente o tempo de processamento para reconstrução e a imagem produzida é numericamente mais precisa. Como resultado, fabricantes comerciais de *scanners* tomográficos iniciaram a construção de um sistema capaz de reconstruir imagens de 256x256 e 512x512 com maior precisão (os resultados produzidos condiziam com as formas anatômicas) [KAK_88].

A tomografia por Ressonância Magnética Nuclear (RMN) baseia-se nas propriedades magnéticas naturais dos núcleos atômicos. Ela não emprega radiação ionizante e, apesar de não exigir o uso de meios de contraste, gera imagens que diferenciam claramente cada tipo de tecido mole. P. C. Lauterbur foi o pioneiro no desenvolvimento das técnicas de imagens por ressonância magnética. Ele divulgou, em 1973, um método de geração de uma imagem bidimensional que mostrava a densidade de prótons e a distribuição dos tempos de relaxação *spin-rede* de uma amostra que consistia em dois pequenos tubos cheios d'água. Nos anos seguintes grupos liderados por P. Mansfield, W.S. Hinshaw, J. M. S. Hutchison, R. R. Ernest e Z. H. Cho desenvolveram técnicas alternativas para gerar essas imagens, capazes de ajudar tanto em diagnósticos médicos como no estudo das reações bioquímicas que ocorrem a nível celular [BUEN95].

Nos últimos anos, graças à eficácia da tomografia computadorizada, tem se dado muita atenção às técnicas de reconstrução de imagens, tais como na medicina nuclear, ressonância magnética, ultrassom e microondas. Na medicina nuclear, o interesse é o de

reconstruir a seção transversal da imagem a partir da distribuição dos isótopos radioativos no corpo em estudo. Na imagem gerada por ressonância magnética a reconstrução é feita levando-se em conta as propriedades magnéticas do objeto, neste método os dados capturados já estão no domínio de Fourier. No uso do ultrassom e microondas como fontes de energia, o objetivo também é o de reconstruir a seção transversal da imagem, porém, utilizando o coeficiente de atenuação do corpo a esses diferentes comprimentos de ondas eletromagnéticas. Os casos descritos podem ter seu problema central descritos como a reconstrução de uma imagem a partir de suas projeções. Quando um objeto é irradiado por uma fonte difratável, como as microondas e o ultrassom, o campo de onda é espalhado em todas as direções. O raio X não sofre difração, isto é, ele segue uma linha reta. Neste trabalho será abordado a tomografia não difratada, cujos princípios serão expostos a seguir.

4.2 Princípios da Tomografia Computadorizada

A tomografia por transmissão consiste basicamente em irradiar o objeto a partir de várias direções, armazenando para cada direção as intensidades transmitidas e as recebidas. Para isso, é utilizado um feixe de radiação colimado, o qual define planos verticais tão finos quanto o próprio feixe. A intensidade emitida e a recebida são armazenadas, definindo assim uma vista longitudinal do corpo. Através do uso de vários feixes colimados paralelos definem-se vários planos verticais, obtendo-se perfis em várias posições angulares. Esses valores armazenados podem, então, ser processados para formarem uma matriz, denominada imagem, onde cada ponto representa a função coeficiente de atenuação linear, a qual poderá ser montada, ponto a ponto, segundo uma escala de tons ou densidades de pontos nos *pixels*.

4.2.1 Tomógrafo

Tomógrafo é a máquina que captura dados para a construção da imagem. Ela consiste basicamente de um emissor, como por exemplo um emissor de raios X¹, e um receptor que captura a intensidade com que o raio chega ao destino; tais entidades serão chamadas doravante de fonte-detector. Existem muitas geometrias de fonte-detector, sendo que

¹ em alguns casos esse emissor pode ser uma substância radioativa colocada no objeto a ser analisado

as mais usadas são as do tipo de feixe de raios paralelos e feixes de raios em leque, mostrados nas Figuras 2.1.a e 2.1.b respectivamente. Observa-se que a geometria de feixe de raios em leque é a mais rápida [STAR98].

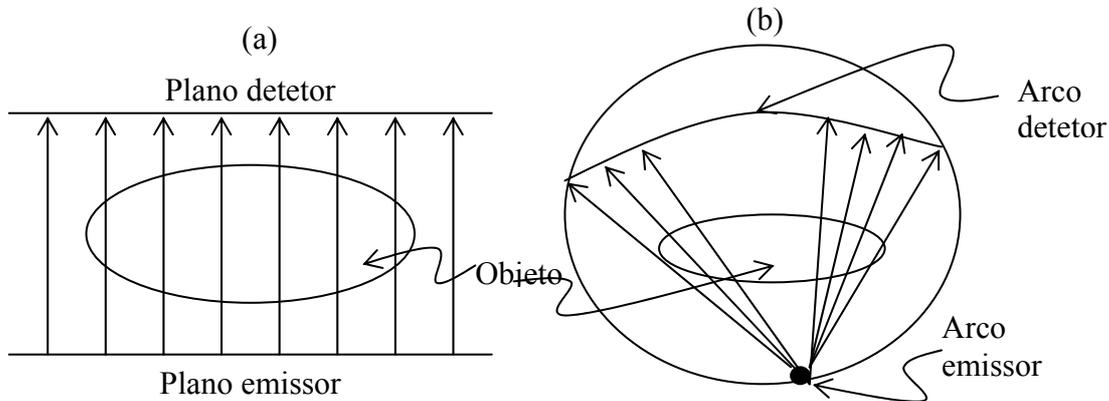


Figura 2.1: (a) geometria de fonte-detetor de feixes de raios paralelos (b) geometria de fonte-detetor de feixe de raios em leque

Além da fonte e do detetor um tomógrafo possui um sistema para a obtenção da imagem, dados capturados pelo detetor, uma mesa tomográfica, na qual se posiciona o material, e um sistema de movimentação para captura dos diferentes perfis angulares.

Em menos de quatro anos depois da introdução da tomografia computadorizada, surgiram quatro gerações de tomógrafos. Essa rápida evolução foi motivada, fundamentalmente, pela tentativa da melhoria do projeto mecânico do tomógrafo, para que se pudesse produzir uma tomografia em menor tempo e proporcionasse melhor controle sobre os movimentos do paciente, quando em tomografia médica [RIBE94].

No tomógrafo de primeira geração (Figura 2.2.a), o tubo de raios X, colimador e detetor são partes de um corpo comum, tal que o tubo de raios X e o detetor se movem, em sincronia, em lados opostos do paciente ou objeto da tomografia. Este tipo de tomógrafo usa um único feixe de raio X colimado para se fazer a tomografia. Nesse tipo de aparelho são tomadas seqüências de medidas, até que se atinja o final do movimento de translação e, então, opera-se uma rotação de um certo grau e o movimento de translação se repete. Todo o processo é repetido para um ângulo θ compreendido ente zero e π ($0 \leq \theta < \pi$).

Os tomógrafos de segunda geração foram desenvolvidos para solucionar um dos problemas apresentados pelos tomógrafos de primeira geração, a saber, o longo tempo que estes demandavam para realização da tomografia. Vale lembrar que a redução do tempo da tomografia tem por objetivo principal a redução do tempo de exposição do paciente à radiação.

O tomógrafo de segunda geração passou a usar feixe de radiação em leque.

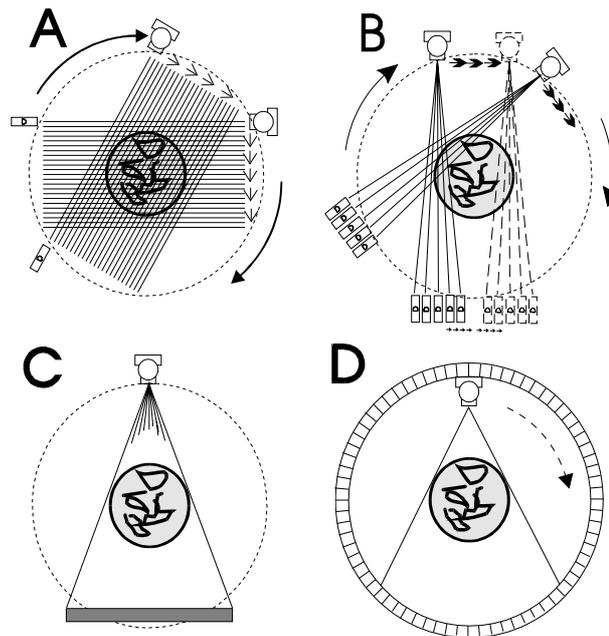


Figura 2.2: Geometria e arquitetura dos tomógrafos de a) primeira geração, b) segunda geração, c) terceira geração e d) quarta geração

No Tomógrafo de segunda geração (Figura 2.2.b) foram colocados vários detectores lado a lado, e cada detector recebe um feixe de radiação ao mesmo tempo, diminuindo assim o tempo da tomografia. Dessa maneira, a obtenção de dados de uma seção foi diminuído de acordo com o número de detectores empregados. Mesmo assim, o tempo de obtenção de dados era grande e os esforços para reduzir o tempo de tomografia resultaram nos tomógrafos de terceira geração.

No tomógrafo de terceira geração (Figura 2.2.c) não era mais necessário fazer o movimento de translação do tubo de raios X e dos detectores, pois o número de detectores era suficiente para a coleta dos dados de toda uma projeção com o tubo de raios X em uma única posição.

Nos tomógrafos de quarta geração (Figura 2.2.d) vários detectores foram colocados lado a lado até formarem um anel ao redor do corpo em estudo. Esses detectores são fixos e o tubo de raios X rotaciona dentro do anel de detectores e ao redor do corpo. Nos tomógrafos de quarta geração, a redução do tempo de tomografia estava mais limitado à saída do tubo de raio-X do que pelo modelo do tomógrafo.

Para se reduzir o tempo de tomografia para milionésimos de segundo, foi proposto um novo modelo, onde vários tubos de raios X são colocados ao redor do paciente e do lado de fora do anel de detectores. Este tipo de tomógrafo reduziu ainda mais o tempo de tomografia [RIBE94].

A tabela 2.1 [HEND83] apresenta as particularidades de cada geração de tomógrafo.

Características	Primeira geração	Segunda geração	Terceira geração	Quarta geração	Quinta geração
Movimento do tubo de raio-X e do detector	translação e rotação	translação e rotação	rotação	rotação do tubo de raio- X com detectores estacionários	rotação do tubo de raio- X com detectores estacionários
Detector por projeção	1	3-52	128-511	242-72000	242-72000
Feixe de raio-X por projeção	único feixe fino	múltiplos feixes em forma de leque	Vários feixes em leque envolvendo o objeto	vários feixes em leque envolvendo o objeto	vários feixes em leque envolvendo todo objeto
Tempo para realizar tomografia	4-5 min	5.3 seg - 3.5 min	3 - 4.8 seg	1-5 seg	milionésimos de segundos

Tabela 2.1 - Tabela de descrição das gerações de tomógrafos

4.2.2 Minitomógrafo desenvolvido no CNPDIA

O minitomógrafo é um equipamento para realizar tomografia, que é utilizado para o uso dedicado à física de solos e foi desenvolvido no CNPDIA-EMBRAPA utilizando Raios X e Raios γ como fontes de radiação [CRUV87].

O minitomógrafo utilizado no desenvolvimento do projeto é do tipo de um tomógrafo de primeira geração, mas nesse caso o tubo de raios X ou raios γ e o detetor são fixos, enquanto que a amostra em estudo é que sofre o movimento de translação e rotação. A Figura 2.3 mostra um esquema simplificado do minitomógrafo de primeira geração.

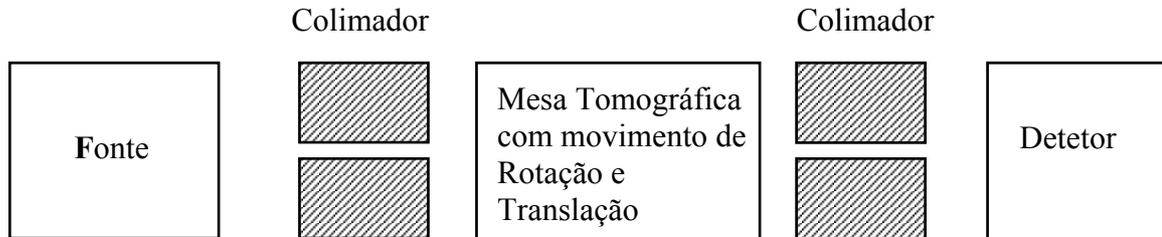


Figura 2.3: Esquema simplificado de um tomógrafo de primeira geração

Esse equipamento possui um sistema de obtenção de imagens, uma interface com o computador, e um sistema computacional(hardware) onde é feito o processamento e reconstrução das imagens.

Ribeiro descreveu, em sua tese de mestrado [RIBE94], o minitomógrafo de maneira mais detalhada, descrevendo-o de acordo com o diagrama de bloco mostrado na Figura 2.4.

O hardware possui uma mesa mecânica, uma fonte emissora de raios X ou raios γ , dois colimadores de tamanho variável, um detetor de cristal do tipo NaI(Tl), um contador eletrônico de pulsos, um sistema eletrônico para o processamento e medidas nucleares e um microcomputador.

A mesa mecânica possui dois motores que controlam a posição relativa da mesa, na qual é colocada a amostra que se deseja produzir a imagem. Um motor é utilizado para a rotação e o outro para a translação e foram projetados usando motores de passo. Um dispositivo optoeletrônico e um circuito comparador é utilizado para definir e inicializar as coordenadas de posição da mesa tomográfica. Os motores são controlados por um computador através de uma interface.

O sistema usa um sistema fonte-detector estacionário, enquanto o objeto faz movimentos de translação e rotação.

Um tubo de raios X ou raios γ emite um feixe de raios que sofrem uma colimação e incide sobre a amostra na mesa, atravessa a amostra, onde é atenuada, sofre uma

outra colimação e é detectada no detetor. Essa atenuação é devido ao coeficiente de atenuação da amostra.

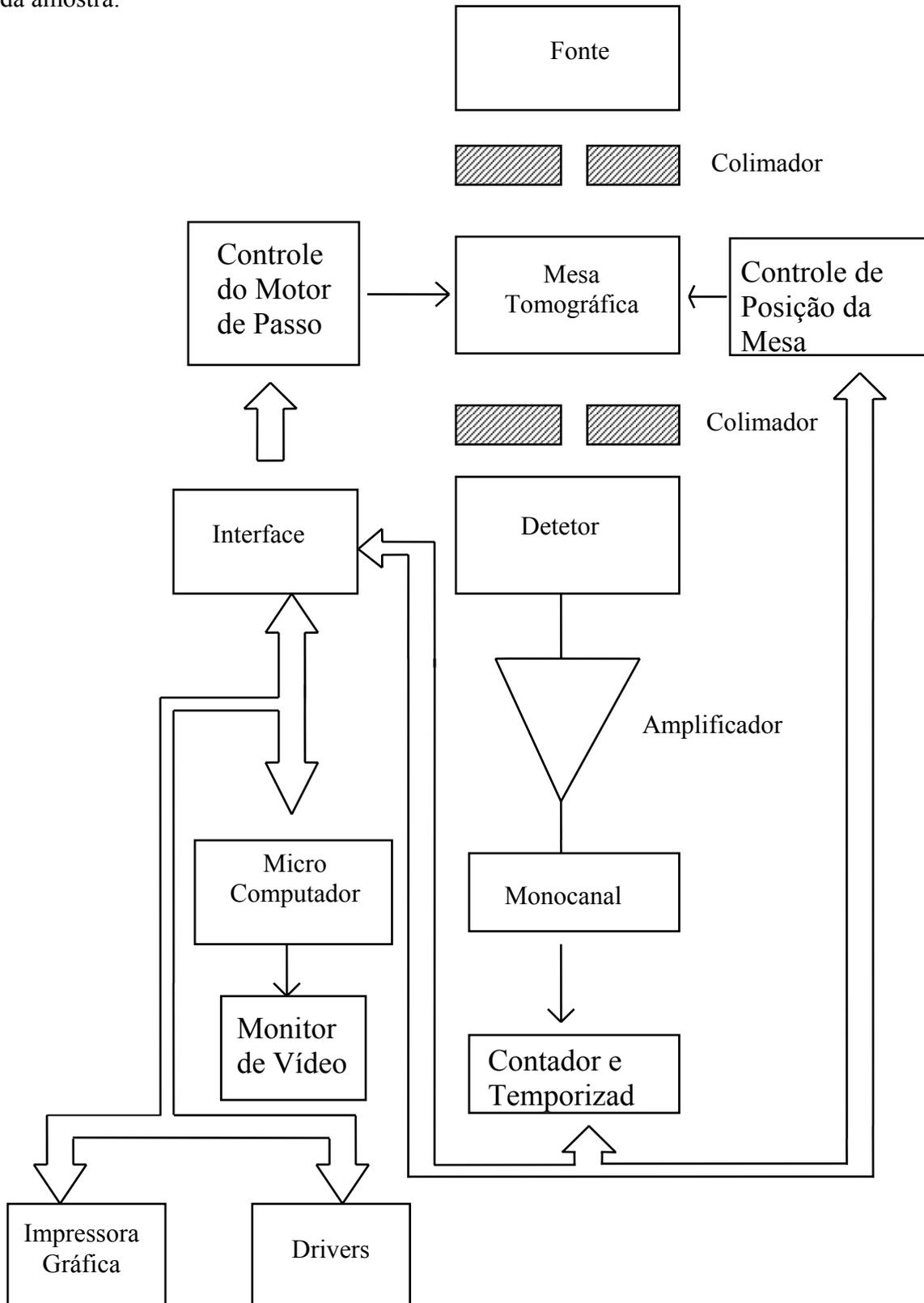


Figura 2.4: Diagrama de bloco do minitomógrafo do CNPDIA

A fonte e o detetor possuem um colimador e tanto a fonte quanto o detetor sofrem colimação a fim de evitar de radiação indesejada e para melhorar a resolução espacial da medida tomográfica. O emprego de uma colimação muito fina na fonte e no detetor limita o efeito da dispersão dos *fótons* no detetor.

O par de colimadores, da fonte e do detetor, são feitos de chumbo e possuem tamanhos variáveis, onde a escolha do tamanho ideal será feita conforme a resolução desejada.

Cada *fóton* que chega ao detetor gera um pulso de amplitude proporcional a sua energia. Um sistema composto de amplificador, analisador monocanal, contador e temporizador conta este pulso e o armazena na memória do computador.

O tempo necessário para a aquisição de dados depende do tamanho da amostra, da resolução desejada e da precisão do equipamento.

4.2.3 Modelo Matemático de Reconstrução

Seja $f_c(x,y)$ uma função de duas variáveis contínuas x e y . Por exemplo, $f_c(x,y)$ pode representar a opacidade de um ponto ou a função de atenuação de um objeto a ser reconstruído. Considere a geometria mostrada na Figura 2.5, na qual um sistema de coordenadas retangulares x - y é rotacionado sobre a origem em um ângulo θ gerando um novo sistema de coordenadas s - t . Cada ponto neste plano possui dois conjuntos de coordenadas: coordenadas (x,y) relativas ao sistema x - y e coordenadas (s,t) relativas ao sistema de coordenadas s - t . É possível converter um ponto com coordenadas no sistema s - t para o sistema de coordenadas x - y utilizando a seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Note que para cada valor de s no sistema de coordenadas s - t existe uma única linha que é paralela ao eixo t com valor de deslocamento s do eixo t . Seja $p_\theta(s)$ a representação da integral da função $f_c(x,y)$, então tem-se que:

$$p_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_c(x, y) \Big|_{x=s \cdot \cos \theta - t \cdot \sin \theta, y=s \cdot \sin \theta + t \cdot \cos \theta} dt \quad (2.2)$$

A partir desta função pode-se ter as bases para a teoria da tomografia computadorizada. Em tomografia de raios X, uma seção bi-dimensional de um objeto tri-dimensional, tal como o corpo humano, é penetrado por um feixe de raios X, conforme representado na Figura 2.6. De acordo com a física da tomografia de raios X, um feixe de raio tem sua intensidade atenuada pelo objeto atravessado. O grau de atenuação do feixe depende da composição do objeto. Pode-se citar como exemplo a atenuação causada pelo tecido humano, que é diferente da atenuação causada pelos ossos.

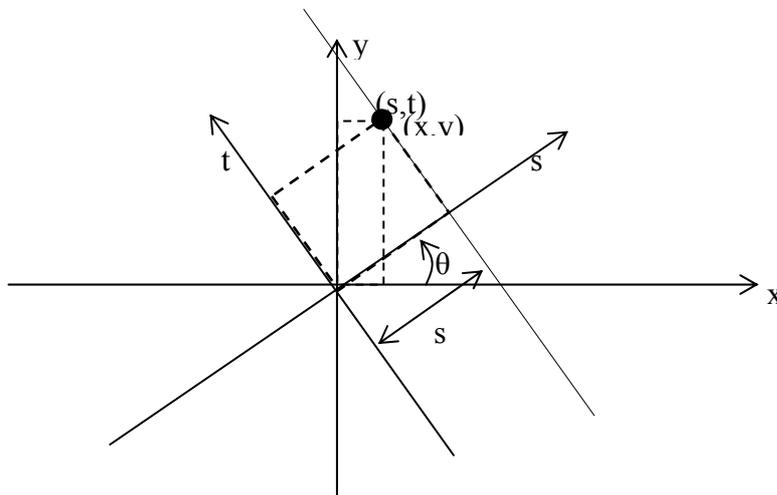


Figura 2.5: relação entre coordenadas retangulares x-y e sistemas de coordenadas s-t

A transmissão na direção (s, t) pode ser representada pela equação (2.3), onde I_0 é a intensidade do raio incidente, $I_{\theta}(s)$ é o raio atenuado - armazenada no detetor com ângulo θ e deslocamento s (Figura 2.6). A função $p_{\theta}(s)$ é a função de distribuição de coeficientes de atenuação linear (integral de linha no ângulo θ e deslocamento s).

$$I_{\theta}(s) \approx I_0 \exp[-p_{\theta}(s)] \quad (2.3)$$

A equação (2.3) pode ser escrita novamente em função de $p_{\theta}(s)$, tendo em vista que I_0 e $I_{\theta}(s)$ são obtidos experimentalmente, como demonstrado pela equação (2.4)

$$p_{\theta}(s) \approx \ln \frac{I_0}{I_{\theta}(s)}. \quad (2.4)$$

O valor de $f_c(x,y)$ depende do conteúdo do objeto na posição espacial (x,y) . Isto pode ser usado para determinar a composição material do objeto. Logo, é de interesse reconstruir a função $f_c(x,y)$ a partir da medida de $p_{\theta}(s)$, que é o objetivo da tomografia computadorizada.

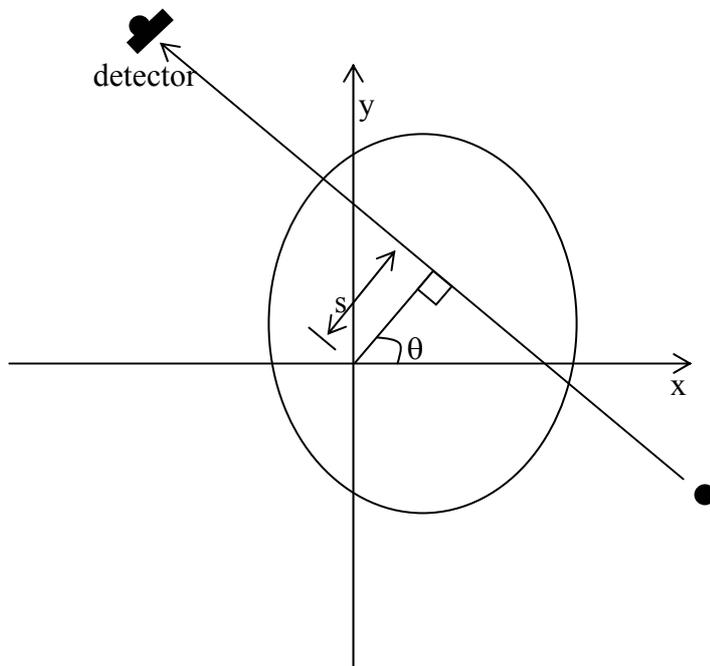


Figura 2.6: Em tomografia utilizando raio-X, uma seção transversal 2-D de um objeto 3-D é penetrada por uma série de raios paralelos ou divergentes.

O ângulo θ na equação (2.2), como ilustrado na Figura 2.6, é chamado de ângulo de visão e a integral de linha é chamada de projeção (transformada de Radon), ou raio-soma de $f_c(x,y)$ no ângulo de visão θ com deslocamento s .

Na prática os raios-soma $\{p_{\theta}\}$ são medidos em um número finito de ângulos de visão $\{\theta_k, k = 1, 2, \dots, K_{\theta}\}$, sobre um número finito de deslocamentos $\{s_l, l=1,2,\dots,K_s\}$. Estas limitações são impostas por muitos fatores, tais como o tamanho do detetor, a medida de precisão do instrumento físico o tempo de exposição do material a ser examinado, etc.

O problema fundamental da tomografia computadorizada é reconstruir a função de atenuação $f_c(x,y)$ de um total de $K_\theta K_s$ raios-soma $p_{\theta_k}(s_l)$, onde $p_{\theta_k}(s_l)$ representa o raio-soma obtido no ângulo de visão θ_k com deslocamento s_l . Tendo em vista que o algoritmo enfrenta as limitações impostas pelo computador, a função $f_c(x,y)$ é reconstruída sobre um número finito de posições 2D (x_i, y_i) . A coleção destas posições espaciais é chamada de *sampling grid* (grade de amostra) ou *sampling lattice* (amostragem reticulada) e os valores da função $f_c(x,y)$ são chamadas de *sampled representation* (representação amostrada) de $f_c(x,y)$. Pode-se afirmar que se a grade de amostra for suficientemente fina, a representação amostrada nos dará uma precisão suficiente para obter a função de atenuação $f_c(x,y)$.

4.2.4 Modelo de Discretização para o Problema de Tomografia Computadorizada

Como descrito no início do capítulo, a Tomografia Computadorizada por transmissão reconstrói uma imagem da seção transversal do corpo em estudo, baseando-se no grau de atenuação que a fonte radioativa sofre ao atravessar o objeto. Para representar a imagem a ser reconstruída, considera-se que a mesma é representada por pequenos quadrados denominados *pixels* (*picture elements*). Censor [CENS88] propôs um método, descrito a seguir, para representar o problema. Os *pixels* são numerados de um (canto superior esquerdo) à J (canto inferior direito), conforme mostrado na Figura 2.7.

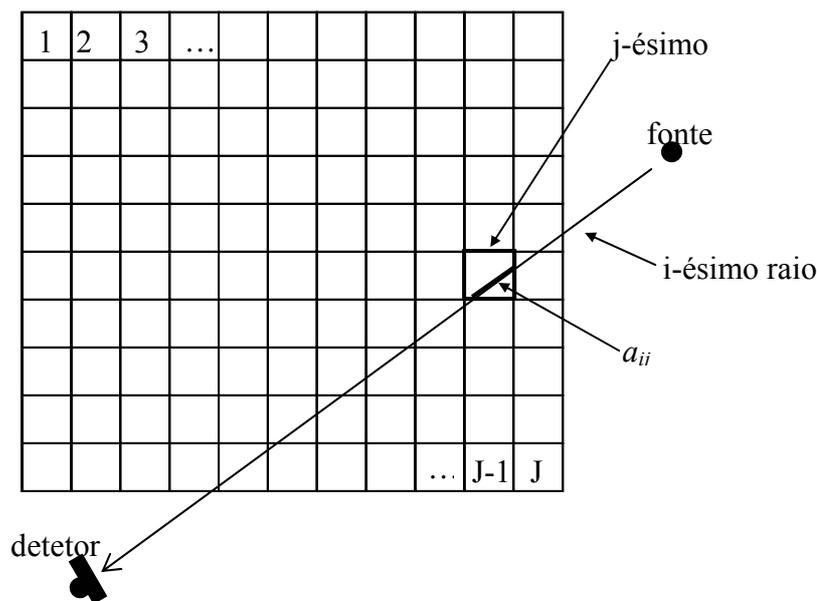


Figura 2.7: Modelo discretizado para reconstrução de imagens de tomografia de transmissão

Assume-se que a função de atenuação tem valor constante (real e não negativo) x_j ao passar pelo j -ésimo pixel ($j= 1, 2, \dots, J$). A fonte e detetor são considerados pontos e os raios considerados linhas. O comprimento do i -ésimo raio no j -ésimo *pixel*, representado por a_{ij} para todo $i=1,2,\dots,I$ e $j=1,2,\dots,J$, representa a contribuição do j -ésimo pixel para atenuação do i -ésimo raio. A medida física de atenuação no i -ésimo raio, representada por y_i , é a integral de linha ao longo do raio da função de atenuação conhecida. Para completar o modelo discreto cada integral de linha passa a ser uma soma finita e o modelo passa a ser um sistema de equações lineares representada pelo sistema de equações (2.5).

$$y_i = \sum_{j=1}^J x_j a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (2.5)$$

Onde $y=(y_i) \in R^I$ (espaço Euclidiano I-dimensional) é o vetor de medidas, $x=(x_j) \in R^J$ é o vetor imagem e a matriz $A=(a_{ij})$ (de dimensão $I \times J$) é a matriz de projeção.

$$y = Ax \quad (2.6)$$

O sistema de equações (2.5) pode ser escrito na forma vetorial descrito pela equação (2.6), ou considerando o ruído η presente na aquisição de imagem, conforme mostrado na equação (2.7)

$$y = Ax + \eta \quad (2.7)$$

4.3 Algoritmos de Reconstrução Tomográfica

Dentre os métodos de reconstrução de imagem tomográfica, destacam-se os de Retroprojeção Simples, Retroprojeção Filtrada, Transformada de Fourier e a Técnica de Reconstrução Algébrica.

4.3.1 Método de Retroprojeção Simples

Para reconstrução de uma seção transversal de um determinado corpo, é necessário um grande número de raios X. Essas medidas devem ser obtidas de diferentes projeções angulares sob vários raios.

A partir das medidas de projeção pode-se chegar a uma matriz de números que representa uma seção transversal do corpo em estudo. Esses números são os coeficientes de atenuação linear.

Supondo que a transmissão de raios X seja feita por várias direções, para cada orientação em particular tem-se um perfil. Após os perfis serem obtidos, os dados podem ser retroprojetados para formarem a imagem em questão.

Aumentando-se o número de raios e perfis, pode-se obter uma imagem mais próxima da original, ou seja, com melhor resolução.

O método de retroprojeção simples apresenta problemas na imagem reconstruída devido ao fato de cada raio soma ser aplicado a todos os pontos do raio e não somente aos pontos de alta densidade. Este problema aparecerá com maior intensidade quando a amostra tem áreas com altas densidades discretas, o que produzirá o artefato “estrela”. Neste artefato ocorre a formação de um conjunto de pixels devido às contribuições positivas dos diferentes perfis.

4.3.2 Reconstrução por Retroprojeção Filtrada

Na retroprojeção filtrada, os dados obtidos através de raios X são modificados antes de serem retroprojetados. Devido a essa modificação diz-se que os dados são filtrados.

A filtragem de uma projeção, no espaço real, é feita pela convolução da projeção com uma função pré-determinada, chamada de filtro. Os componentes negativos são somados aos dados projetados e os artefatos são eliminados a um nível razoável.

Ramachadran e Lakshminarayanan foram os primeiros a discutir a função filtro em 1971 [RAMA71].

4.3.3 Reconstrução utilizando a Transformada de Fourier

Este método é baseado no teorema de projeções em cortes, Este teorema foi apresentado e demonstrado por Bracewell em 1956 [BRAC56], e expressa a relação entre uma imagem, suas projeções, e a Transformada de Fourier bidimensional.

Seja g uma imagem com projeção \underline{g} , Transformada de Fourier G , sendo $g_{\theta}(R)$ a integral de linha da projeção em um ângulo θ . O teorema diz que a Transformada de Fourier unidimensional de $g_{\theta}(R)$ é igual a Transformada de Fourier bidimensional da imagem g em uma linha com inclinação θ , daí o nome corte de Fourier. Isto é:

$$G(\rho, \theta) = F \underline{g}_{\theta}(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{g}_{\theta}(R) e^{i\rho R} dR \quad (2.8)$$

A equação (2.8) é mapeada para o plano cartesiano e em seguida aplicada a Transformada Inversa de Fourier, para o caso bidimensional, resultando assim na imagem reconstruída.

4.3.4 Algoritmos de Reconstrução Algébrica

Um outro tipo de solução para reconstrução de imagens tomográficas consiste em assumir que a seção transversal é uma matriz desconhecida, e então produzir equações algébricas em termos das medidas dos dados projetados.

Na Figura 2.7 é apresentado um grid retangular em uma imagem $f(x,y)$. Assume-se que em cada célula a função $f(x,y)$ é constante. Seja f_j o valor constante da j -ésima célula. Na técnica algébrica um raio é definido de maneira diferente. Um raio é agora uma linha com uma certa espessura passando pelo plano (x,y) . Para ilustrar foi sombreado o i -ésimo raio, onde cada raio tem largura τ . Na maioria dos casos a largura do raio é aproximadamente igual à largura da imagem da célula. A integral de linha é chamada de raio soma.

Tal como a imagem, a projeção tem uma representação indexada. Seja p_i a medida do raio soma com o i -ésimo raio conforme mostrado na Figura 2.8. A relação entre f_j e p_i pode ser expressa como:

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} f_j = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2.9)$$

onde M é o número total de raios (em todas as projeções) e w_{ij} é o fator de peso, que representa a contribuição da j -ésima célula da imagem interceptada pelo i -ésimo raio, como mostrado para uma célula. Note que a maioria dos w_{ij} são zero tendo em vista que somente um pequeno número de células contribuem para um dado raio soma.

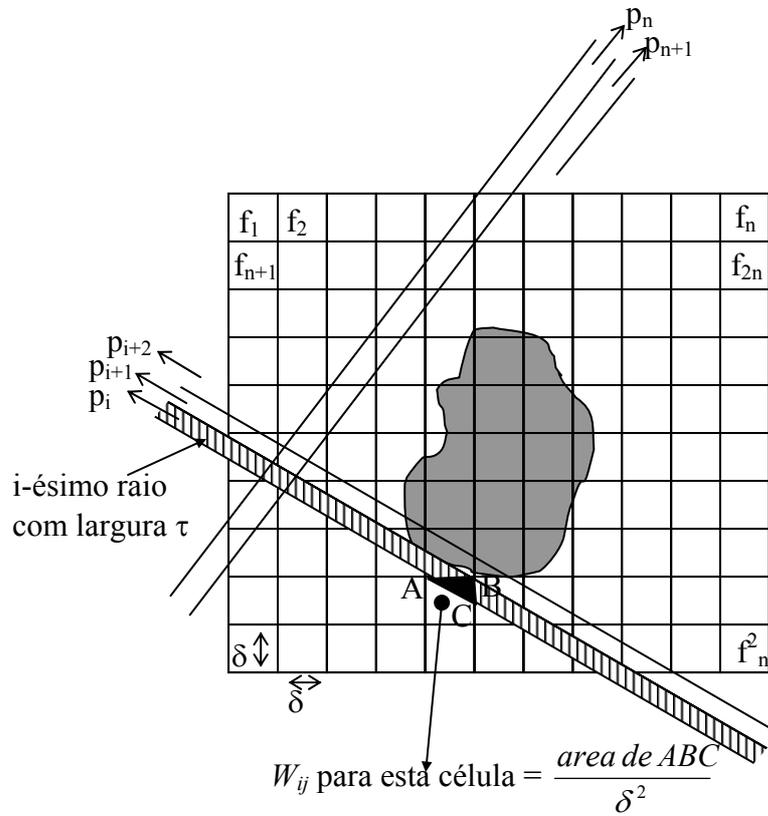


Figura 2.8: Para o método de reconstrução algébrica assume-se que existe um grid sobre a imagem desconhecida. Assume-se que o valor de em cada célula é constante.

Se M e N são pequenos, pode-se usar o método convencional para inverter o sistema de equações em (2.9). No entanto, na prática N pode ser maior que 65.000 (para imagens 256x256) e na maioria dos casos, para imagens deste tamanho, M terá a mesma magnitude. Para esses valores de M e N o tamanho da matriz $[w_{ij}]$ é 65.000x65.000 o que impede qualquer possibilidade de inversão direta da matriz. Quando existe ruído nas

projeções e quando $M < N$, ou $N < M$, não é possível utilizar a inversão direta de matriz e o método dos mínimos quadrados pode ser usado. Quando M e N são grandes, tal método também é computacionalmente impraticável.

Para grandes valores de M e N existem métodos iterativos para resolver (2.9). Para expor os métodos de cálculo envolvidos nestes métodos a equação (2.9) será primeiramente reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + w_{13}f_3 + \dots + w_{1N}f_N &= p_1 \\
 w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + w_{23}f_3 + \dots + w_{2N}f_N &= p_2 \\
 &\vdots \\
 w_{M1}f_1 + w_{M2}f_2 + w_{M3}f_3 + \dots + w_{MN}f_N &= p_M
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Uma imagem representada por (f_1, f_2, \dots, f_N) , pode ser considerada um único ponto em um espaço N -dimensional. Neste espaço, cada uma das equações acima representam um hiper-plano. Quando existe uma única solução para essas equações, a interseção de todos esses hiperplanos é um único ponto, dado pela solução. Este conceito é ilustrado na Figura 2.9, onde foi considerado o caso de somente duas variáveis f_1 e f_2 satisfazendo as equações a seguir:

$$\begin{aligned}
 w_{11}f_1 + w_{12}f_2 &= p_1 \\
 w_{21}f_1 + w_{22}f_2 &= p_2
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

O procedimento computacional para localizar a solução na Figura 2.9 consiste em primeiro considerar uma solução inicial, projetando esse valor na primeira linha, reprojetoando o ponto resultante na segunda linha, e novamente projetando na primeira linha, e assim por diante. Se existe uma única solução, as iterações irão convergir para essa solução.

Para implementar este método, primeiramente considere uma solução inicial. Esta solução representada por $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_N^{(0)}$ é representada vetorialmente por $\vec{f}^{(0)}$ no espaço N -dimensional. Na maioria dos casos, simplifica-se fazendo-se com que todos os f_i tenham valor 0. Este valor inicial é projetado no hiperplano representado pela primeira equação em (2.11) resultando $\vec{f}^{(1)}$, como ilustrado na Figura 2.9, para o caso bidimensional. $\vec{f}^{(1)}$ é projetado no hiperplano representado pela segunda equação em (2.11) resultando em

$\vec{f}^{(2)}$ e assim por diante. Quando $\vec{f}^{(i-1)}$ é projetado no hiperplano representado pela i -ésima equação resultando em $\vec{f}^{(i)}$, o processo pode ser matematicamente descrito por

$$\vec{f}^{(i)} = \vec{f}^{(i-1)} - \frac{(\vec{f}^{(i-1)} \cdot \vec{w}_i - p_i)}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i} \vec{w}_i \quad (2.12)$$

onde $\vec{w} = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN})$ e $\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i$ é o produto interno de \vec{w}_i com ele mesmo.

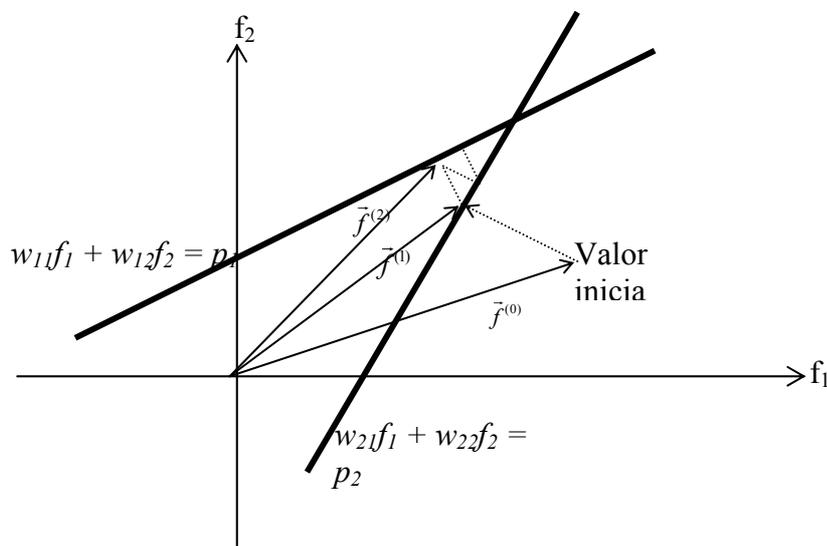


Figura 2.9: O método ART é ilustrado para o caso de dois hiperplanos

Conforme mostrado anteriormente, a Técnica de Reconstrução Algébrica (ART) busca a solução pela projeção sequencial, a partir de uma estimaco inicial, no conjunto de soluoes das equaoes lineares, onde cada um desses conjuntos é um hiperplano. A Técnica de Reconstruo Iterativa Simultnea (SIRT) busca a soluo através da projeo paralela nos hiperplanos e dá melhores resultados na presena de ruído. Embora não propostos inicialmente como tal, esses métodos pertencem à classe de algoritmos POCS (Projection onto Convex Sets) [STAR98].

O método de projeo sequencial, em conjuntos de restrioes fechados e convexos, para o problema de recuperao de imagens foi proposto por Youla e Webb em 1982 [YOUL82] e implementado sem o uso de informaoes sobre o ruído em imagens

tomográficas por Sezan e Stark [SEZA82]. Em 1993 Combettes [COMB93] mostrou que os algoritmos de reconstrução paralela são mais adaptados ao ruído que métodos sequenciais. Os fundamentos da estimação por restrições dadas por conjuntos são discutidos em detalhes em [COMB96], onde o método de projeções sequenciais é referido como MOSP (Method of Sequential Projections) e o de projeções paralelas como MOPP (Method of Parallel Projections).

No método de projeções sequenciais é feita a projeção de um ponto, e em seguida este ponto é projetado sequencialmente nos conjuntos, de forma cíclica. Já no método de projeções paralelas as projeções são feitas em todos os conjuntos em uma única iteração. Os dois métodos convergem para uma única interseção, caso a interseção seja não vazia. Se a interseção é vazia o método de projeção sequencial não encontra a convergência, oscilando entre os conjuntos de restrição. Por outro lado o método de projeção paralela converge para a solução dos mínimos quadrados, isto é, converge para um ponto cuja distância dos conjuntos de restrições é tal que a soma dos quadrados destas distâncias é mínima [COMB93].

Conjuntos que não possuem interseção são muitas vezes gerados por projeções ruidosas, o que acaba gerando equações lineares inconsistentes. O método SIRT tem melhor desempenho, na presença de ruído, do que o ART. Bhumkar propôs uma maneira de tratar o ruído, utilizando ART, como um processo randômico [BHUM95].

4 Projeções em Conjuntos Convexos (POCS – *Projections onto Convex Sets*)

3.1. Conjuntos Convexos

Para que se tenha um conjunto convexo C é necessário que o segmento de reta definido por um par de elementos quaisquer, pertencente ao conjunto, possua somente pontos pertencentes a ele. A equação (3.1) representa esta condição, onde o ponto x (obtido a partir da combinação linear de x_1 e x_2) pertence também ao conjunto C .

$$x = \mu x_1 + (1 - \mu)x_2, \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (3.1)$$

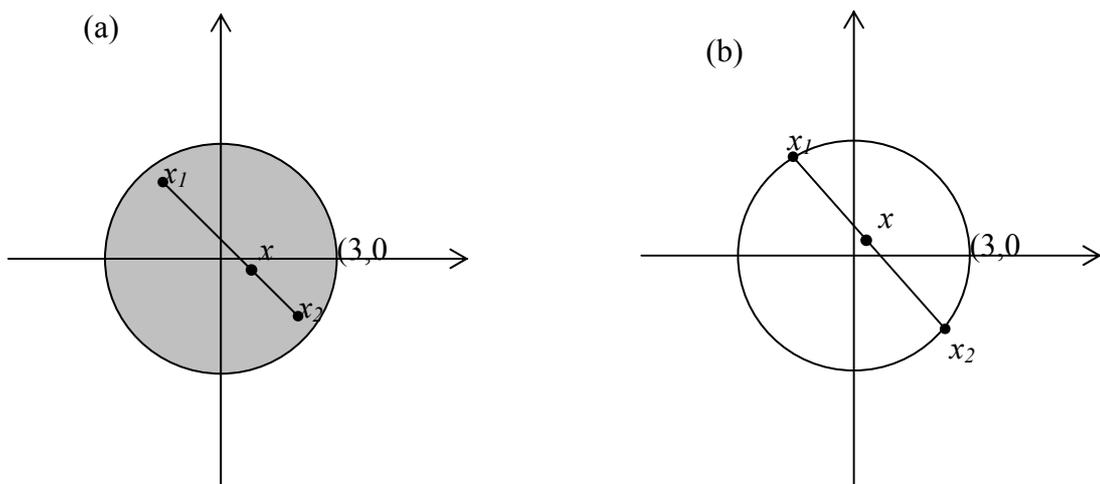


Figura 3.1: (a) conjunto convexo $C_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 9\}$ e (b) conjunto não convexo

$$C_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 9\}$$

Podemos citar como exemplo o conjunto $C_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 9\}$ onde é possível unir dois pontos quaisquer, pertencentes ao conjunto, o que definirá um segmento de reta que também pertence a ele, definindo assim um conjunto convexo (Figura 3.1.a). Já o conjunto $C_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 9\}$ não representa um conjunto convexo, pois existe um segmento de reta definido por dois pontos, pertencente ao conjunto, que possui pontos que não pertencem a ele (Figura 3.1.b).

3.2. Projeção

Considere a geometria do seguinte problema: Em um plano bidimensional (2-D), a reta perpendicular a uma linha l passa por um ponto arbitrário x , interceptando esta linha exatamente em um ponto x^* (conforme mostrado na Figura 3.2.a). Este ponto tem uma propriedade importante dentre os demais da linha l , pois é o ponto mais próximo de x (distância Euclidiana). Na Figura 3.2.b existe um círculo com centro em D e outros n círculos com centro em y . Note que somente um círculo (com centro em y) toca a circunferência D em um único ponto, denominado y^* .

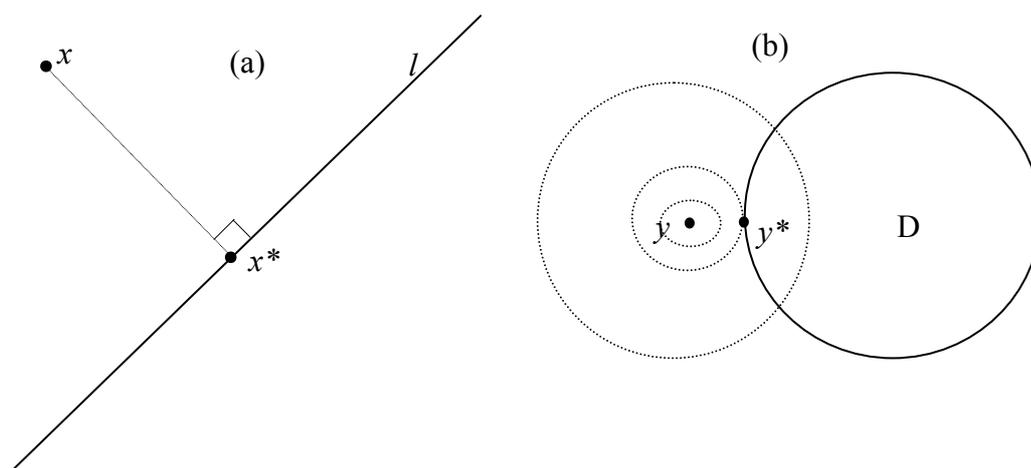


Figura 3.2: (a) reta l e uma reta perpendicular à l passando por um ponto arbitrário x ;
 (b) figura bidimensional com círculos centrados em y , somente um disco toca o disco D em um ponto,
 representado por y^*

Tanto x^* como y^* são projeções de seus elementos em outros conjuntos, que no caso são convexos.

Seja C um conjunto convexo em um espaço de Hilbert H , então para cada x em H , existe um único x^* em C que é mais próximo de x . A equação (3.2) descreve esta condição, admitido-se que $x^* \in C$.

$$\|x - x^*\| = \min_{y \in C} \|x - y\| \quad (3.2)$$

A equação (3.2) fornece uma solução única, que é uma das principais características associadas aos conjuntos convexos no espaço de Hilbert, ou seja para todo $x \in H$ existe um único ponto mais próximo no conjunto C , o qual será chamado de projeção de x em C . A regra que determina a projeção no conjunto C é denominada *projetor* ou *operador de projeção* em C , o qual é denotado por P_C , ou seja, para todo $x \in H$ a projeção $P_C x$ em C é definida pela equação (3.3).

$$\|x - P_C x\| = \min_{y \in C} \|x - y\| \quad (3.3)$$

A Figura 3.2 mostra que x^* é a projeção de x na linha l e o ponto y^* é a projeção de y no disco D .

3.3. Algoritmo de POCS

Muitos problemas podem ser descritos sob a forma de conjuntos de restrições convexas. A solução para esses problemas satisfaz todas as restrições impostas, ou seja, a busca da solução desejada consiste em encontrar um valor pertencente à interseção entre os conjuntos.

Admitindo que existem n conjuntos de restrições, representados por C_i ($i=1,2,\dots,n$), a solução para o problema está na interseção dos conjuntos, representada pela equação (3.4).

$$C_0 = \bigcap_{i=0}^n C_i \quad (3.4)$$

Se os conjuntos C_i ($i=1,2,\dots,n$) são convexos e sua interseção é não vazia, as sucessivas projeções nos conjuntos convergirão para um ponto pertencente a C_0 . A equação (3.5) representa o algoritmo, admitindo que x_0 é um ponto qualquer e representa a estimativa inicial.

$$x_{k+1} = P_{C_n} \cdots P_{C_2} P_{C_1} x_k \quad k = 0,1,2,3,\dots \quad (3.5)$$

O algoritmo descrito pela equação (3.5) faz a projeção sequencial nos conjuntos de restrições. O algoritmo de POCS (*Projections onto Convex Sets*) pode ser também implementado de maneira paralela. Nesta implementação o ponto é projetado em todos os conjuntos e a cada projeção em um conjunto é atribuído um peso, fazendo com isso que seja considerada a projeção em todos os conjuntos ao mesmo tempo. A equação (3.6) descreve este algoritmo. Note que o somatório dos pesos, representada por w_i , é igual a 1 conforme a equação (3.7).

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{i=1}^n w_i (P_{C_i} x_k - x_k) \quad k = 0,1,2,3,\dots \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.7)$$

Os algoritmos descritos pelas equações (3.5) e (3.6) podem ter sua convergência acelerada via parâmetro de relaxação que será representado por λ_i ($i=1,2,\dots,n$), onde $0 < \lambda_i < 2$. Quando $0 < \lambda_i < 1$ tem-se a projeção sub-relaxada e quando $1 \leq \lambda_i < 2$ tem-se a projeção sobre-relaxada [COMB93b]. Cada projeção descrita na equação (3.5) pode ser representada, com o parâmetro de relaxação, pela equação (3.8).

$$T_i x_k = x_k + \lambda_i (P_{C_i} x_k - x_k) \quad k = 0,1,2,\dots \quad e \quad i = 1,2,\dots,n \quad (3.8)$$

Desta maneira a equação (3.5) pode ser representada pela equação (3.9).

$$x_{k+1} = T_n \cdots T_2 T_1 x_k \quad k = 0,1,2,3,\dots \quad (3.9)$$

Para utilizar o parâmetro de relaxação no método paralelo pode-se acrescentar o valor de λ_k na equação (3.6) obtendo-se assim a equação (3.10).

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \sum_{i=1}^n w_i (P_{C_i} x_k - x_k) \quad k = 0,1,2,3,\dots \quad (3.10)$$

Note que na equação (3.8) é possível aplicar diferentes parâmetros de relaxação em cada conjunto, pois a projeção é feita em um conjunto por vez. Já na equação (3.10), que descreve o método paralelo, o parâmetro de relaxação é aplicado ao resultado de todas projeções, pois é considerado que a projeção nesses conjuntos acontecem ao mesmo tempo.

3.3.1. Controle da Sequência de Projeção

No método POCS é possível controlar a sequência dos conjuntos onde serão feitas as projeções. Em uma única iteração não é necessário que a projeção seja feita em todos os conjuntos. Se for considerado que em cada iteração do método POCS paralelo, descrito pela equação (3.6), a projeção é feita em apenas um conjunto o método passa a ser idêntico ao POCS sequencial, ou seja, pode-se concluir que o método sequencial é um caso específico do método paralelo.

O objetivo de controlar a sequência das projeções é acelerar a convergência. Censor [CENS97] apresentou seis métodos, descritos a seguir, para controle dessa sequência, sendo eles o controle cíclico, o controle quase cíclico, o controle repetitivo, o controle dos conjuntos mais distantes, o controle dos conjuntos aproximadamente mais distantes e o controle das restrições mais violadas.

No controle cíclico os conjuntos são percorridos sempre em uma sequência. A equação (3.11) representa o controle cíclico, onde n é o número total de conjuntos, k é o número da iteração e $i(k)$ é o índice do conjunto.

$$i(k) = k \bmod n + 1 \quad (3.11)$$

Quando o controle é quase cíclico a projeção tem que ter sido feita em todos os conjuntos após M iterações, sendo $M > n$, ou seja, se $I = \{1, 2, \dots, n\}$ então $I \subseteq \{i(k+1), i(k+2), \dots, i(k+M)\}$ para todo $k \geq 0$. Se $M = n$ o controle quase cíclico passa a ser um controle cíclico.

O controle é repetitivo quando, para todo $k \geq 0$, $i(k+1) = i(k+M+1)$.

O controle dos conjuntos mais distantes é obtido pela equação (3.12), onde $d(x_k, C_{i(k)})$ é a distância euclidiana entre a k -ésima iteração de x_k e o conjunto C_i .

$$d(x_k, C_{i(k)}) = \max\{d(x_k, C_{i(k)}) \mid i \in I\} \quad (3.12)$$

No controle de conjuntos aproximadamente mais distantes o objetivo é escolher um conjunto cuja distância de x_k seja maximizada, representado por $\max\{d(x_k, C_{i(k)}) \mid i \in I\} = \theta(x_k)$, e escolher índices que satisfaçam a condição representada pela equação (3.13). Um controle de conjuntos mais distante pode ser considerado um controle de conjuntos aproximadamente mais distante. Todo controle cíclico pode também ser considerado um controle de conjunto aproximadamente mais distante, o que faz deste tipo de controle uma importante ferramenta teórica.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, C_{i(k)}) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \theta(x_k) = 0 \quad (3.13)$$

O controle de restrições mais violadas é semelhante ao controle de conjuntos mais distantes. Ele é obtido a partir da restrição mais violada pela iteração x_k .

3.3.2. Convergência

Youla demonstrou em 1982 [YOUL82] que, sendo C_0 não vazio, para todo $x \in H$ a equação (3.5) converge fracamente para um ponto em C_0 . Embora em teoria essa convergência seja fraca, na prática a convergência para C_0 é forte. A Figura 3.3 mostra a representação gráfica dessa convergência

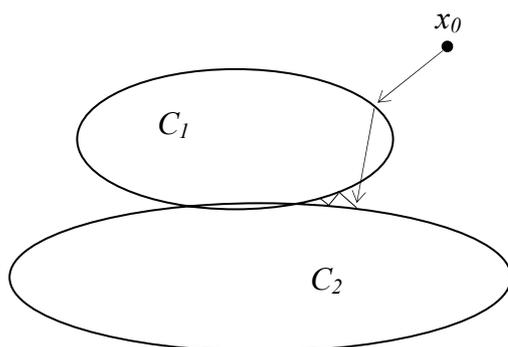


Figura 3.3: representação geométrica da convergência do método POCS sequencial

Essa convergência pode ser acelerada utilizando o parâmetro de relaxação. Para o caso sequencial não existe uma regra para obter um parâmetro de relaxação que acelere a convergência. Já para o caso paralelo, se a projeção é sobre-relaxada, a convergência é mais rápida [COMB93b]. Embora o valor de λ pertença ao intervalo $]0,2[$ é possível obter uma melhor convergência com valores para λ muito superiores a dois. Neste caso tem-se o parâmetro de relaxação extrapolado, conforme mostrado em [COMB96].

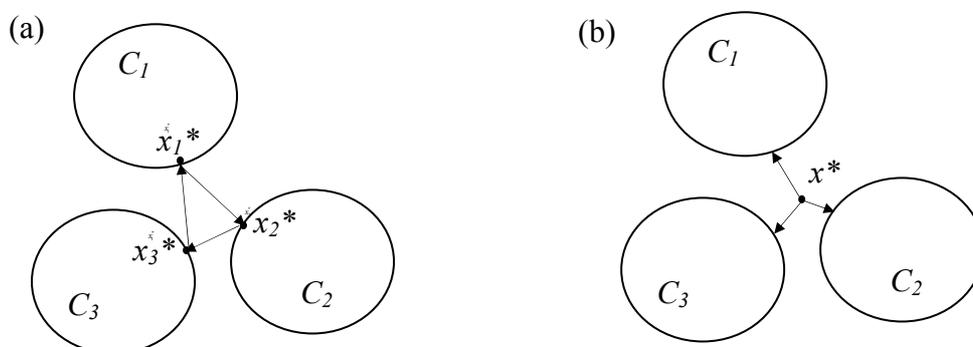


Figura 3.4: comportamento do algoritmo de POCS (a) sequencial e (b) paralelo quando não há interseção entre os conjuntos convexos

Quando não existe interseção entre os conjuntos de restrição o algoritmo POCS sequencial não converge para um ponto e fica oscilando entre os conjuntos de restrições, conforme mostrado na Figura 3.4.a. Se a implementação for paralela o algoritmo convergirá para um ponto tal que a soma dos quadrados das distâncias dos conjuntos é minimizada [STAR98]. Este caso é representado geometricamente pela Figura 3.4b.

3.4. Projeções em Conjuntos não Convexos

Quando os conjuntos não são convexos a condição definida pela equação (3.1) nem sempre é satisfeita, conforme mostrado pela Figura 3.1.b. É mais usual encontrar conjuntos de restrições não convexos do que convexos [STAR98].

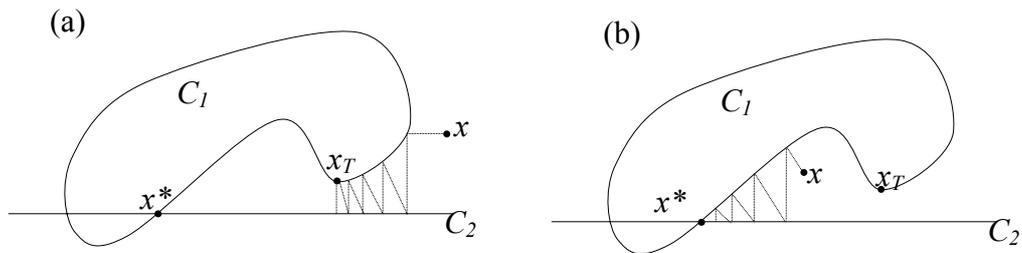


Figura 3.5: Em conjuntos não convexos a solução pode convergir para (a) um *trap* ou para (b) a interseção, dependendo da estimativa inicial

Quando um dos conjuntos é não convexo a convergência para a interseção entre eles não é garantida através do método de projeções. A solução, dependendo da estimativa inicial, pode convergir para um *trap* (armadilha), conforme ilustrado pela Figura 3.5.a, ou para a interseção dos conjuntos (Figura 3.5.b).

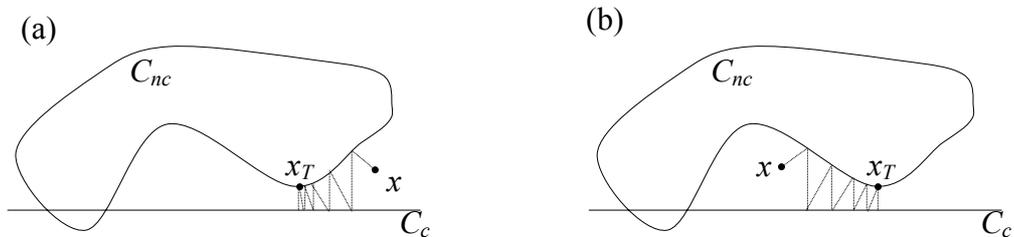


Figura 3.6: Os pontos projetados em C_{nc} nas proximidades de x_T convergem para x_T

Os *traps* podem ser classificados em atrativos e repulsivos. Para ilustrar os dois tipos de *traps* considere um conjunto não convexo C_{nc} que tem um *trap* x_T , um conjunto convexo C_c e uma estimativa inicial x . Se uma projeção no conjunto C_{nc} é feita nas proximidades de x_T , e o *trap* é atrativo, as projeções seguintes convergirão para x_T , conforme ilustrado pela Figura 3.6. Se o *trap* é repulsivo qualquer projeção feita nas imediações de x_T convergirá para outro valor (Figura 3.7.a), nesse caso, as iterações convergirão para este *trap* somente se a projeção em C_{nc} é feita diretamente em x_T , conforme ilustrado pela Figura 3.7.b.

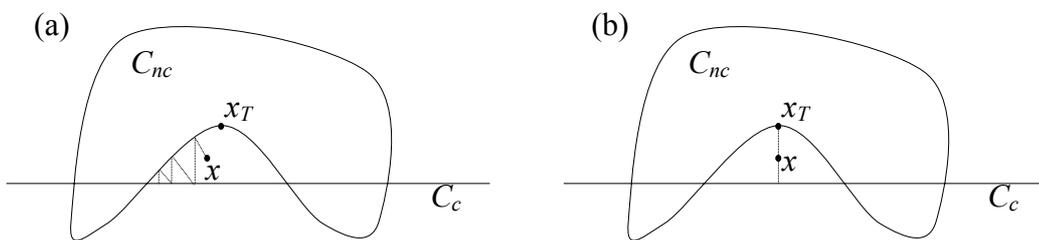


Figura 3.7: *trap* repulsivo

3.5. O Uso de POCS para solução de equações lineares

Considere-se o sistema de equações lineares da equação (3.14), o qual consiste de duas equações e duas variáveis x e y . Da álgebra elementar sabe-se que as equações dadas são representadas por uma reta em \mathbb{R}^2 . As equações podem ser representadas pelos gráficos da Figura 3.8.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad & \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad & \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Como as retas são conjuntos convexos, é possível resolver cada sistema utilizando projeções em conjuntos convexos, ou seja, pode ser considerada como solução para um sistema linear o ponto que pertença aos dois conjuntos, isto é, a interseção entre os

conjuntos. Note que na Figura 3.8.a existe somente um ponto que satisfaz esta condição, já em 3.8.b existem infinitas soluções enquanto em 3.8.c não existe nenhuma solução, ou seja, para um sistema linear podemos concluir que se admite como resposta uma solução, nenhuma solução ou infinitas soluções.

As equações lineares podem ser representadas em forma de produto interno. A equação (3.15) representa um conjunto de equações lineares, onde a_i ($i=1,2,\dots,n$) representam os coeficientes, y representa a variável, b_i ($i=1,\dots,n$) representam os termos independentes e n representa o número de equações.

$$\langle a_i, y \rangle = b_i \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.15)$$

O conjunto de soluções para cada equação pode ser representado pela equação (3.16).

$$C_i = \{y : \langle a_i, y \rangle = b_i\} \quad i=1,2,\dots,n \quad (3.16)$$

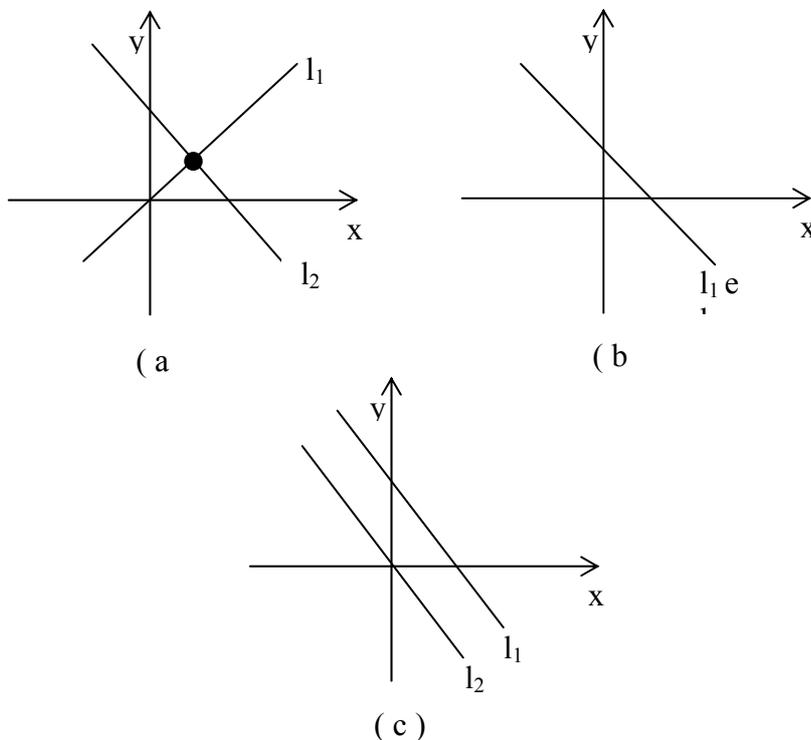


Figura 3.8: (a) l_1 e l_2 tem uma interseção (b) l_1 e l_2 são coincidentes, ou seja, possuem infinitas soluções
 (c) l_1 e l_2 são paralelas, não possuindo nenhuma interseção

Pode-se representar o conjunto de soluções do sistema de equações, representado pela equação (3.15), como C_0 , onde os conjuntos têm suas soluções representadas pela equação (3.16). Desta maneira, o conjunto de soluções pode ser representado pela equação (3.17).

$$C_0 = \bigcap_{i=1}^n C_i \quad (3.17)$$

Se a interseção é não vazia, o objetivo passa a ser encontrar este conjunto de interseção, o que pode ser resolvido através do método de projeções em conjuntos convexos. O problema passa a ser o de como calcular as projeções em cada conjunto, o que é feito através do projetores.

3.5.1. Projetores

Pela definição, a projeção $P_i x$ de um vetor x no conjunto C_i é o ponto em C_i que é mais próximo de x . Suponha-se que o conjunto C_i represente um hiperplano com normal a_i . A reta que conecta x e sua projeção $P_i x$ é ortogonal a este hiperplano, com isso é possível estabelecer a relação apresentada na equação (3.18).

$$x - P_i x = \alpha a_i \quad (3.18)$$

A constante α pode ser calculada sabendo-se que $P_i x$ pertence ao conjunto C_i , ou seja, $P_i x$ satisfaz a equação (3.15). Substituindo $P_i x$ na equação (3.15) obtém-se a equação (3.19).

$$\langle a_i, P_i x \rangle = b_i \quad (3.19)$$

Aplicando a equação (3.18) na equação (3.19) obtém-se a equação (3.20).

$$\langle a_i, x - \alpha a_i \rangle = b_i \quad (3.20)$$

Utilizando os multiplicadores de Lagrange, é possível encontrar o valor de α , mostrado na equação (3.21), que fornece a regra de projeção descrito pela equação (3.22).

$$\alpha = \frac{\langle a_i, x \rangle - b_i}{\|a_i\|^2} \quad (3.21)$$

$$P_i x = x - \frac{\langle a_i, x \rangle - b_i}{\|a_i\|^2} a_i \quad (3.22)$$

Tendo o operador de projeção, para obter a solução do sistema de equações lineares basta escolher um x inicial e utilizar a equação (3.23) iterativamente, até que se verifique a convergência.

$$x_{k+1} = P_m \dots P_2 P_1 x_k \quad k=0,1,2,\dots \quad (3.23)$$

A equação (3.23) descreve uma implementação sequencial para o problema apresentado. A implementação paralela pode ser feita utilizando a equação (3.24), lembrando que os projetores são os mesmos, equação (3.22).

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i x_k - x_k) \quad k = 0,1,2,\dots \quad (3.24)$$

O algoritmo representado pela equação (3.24) é o mesmo algoritmo representado pela equação (3.6), porém os pesos w_i possuem os mesmos valores para $i=1,2,\dots,n$. Como existem n conjuntos e a condição descrita pela equação (3.7) tem que ser satisfeita, cada conjunto é normalizado por n .

3.5.2. Convergência

Para analisar a convergência das projeções, serão considerados os sistemas de equações apresentados na equação (3.14). A seguir será apresentada a análise de convergência para a implementação através de projeção paralela e sequencial.

Convergência do Algoritmo de Projeção Sequencial

Dado um ponto qualquer, a equação (3.14.a) convergirá assintoticamente para a solução esperada, conforme mostrado na Figura 3.9.a. A equação (3.14.b) converge, em uma iteração, para o ponto mais próximo da solução inicialmente estimada (lembrando que este sistema possui infinitas soluções) como mostrado na Figura 3.9.b. A equação (3.14.c) não irá convergir e a projeção ficará oscilando entre dois valores (tendo em vista que este sistema não possui solução), conforme mostrado na Figura 3.9.c.

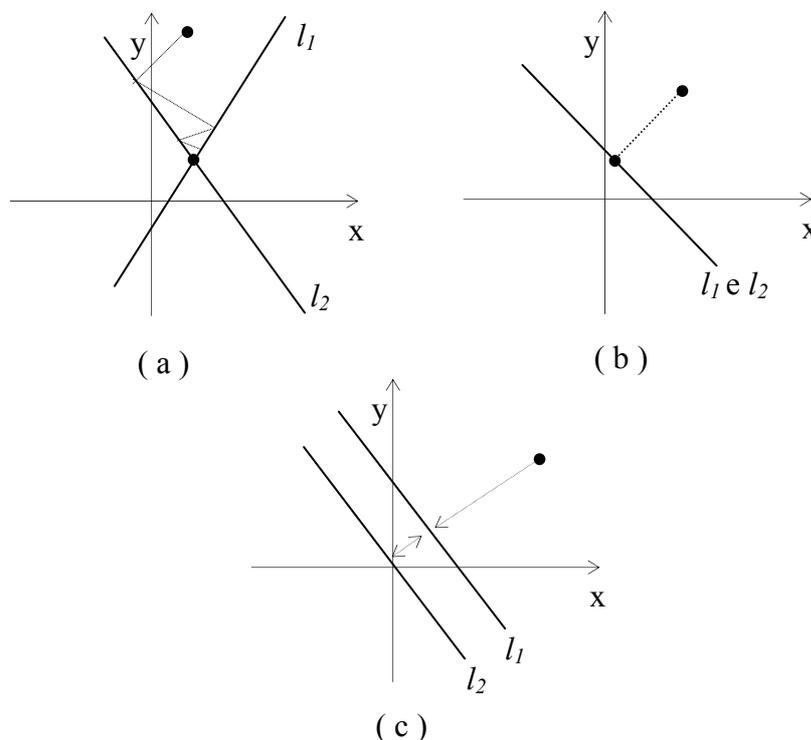


Figura 3.9: (a) as sucessivas projeções convergem para a solução do sistema, (b) a projeção converge para a solução mais próxima da estimativa inicial e (c) como não existe solução as projeções ficam oscilando entre dois valores.

Convergência do Algoritmo de Projeção Paralela

A equação (3.14.a) converge para a solução desejada, conforme mostrado na Figura 3.10.a. A equação (3.11.b) tem sua convergência de maneira similar à descrita no método sequencial (Figura 3.10.b). A equação (3.11.c) converge para um ponto equidistante de l_1 e l_2 (Figura 3.10.c).

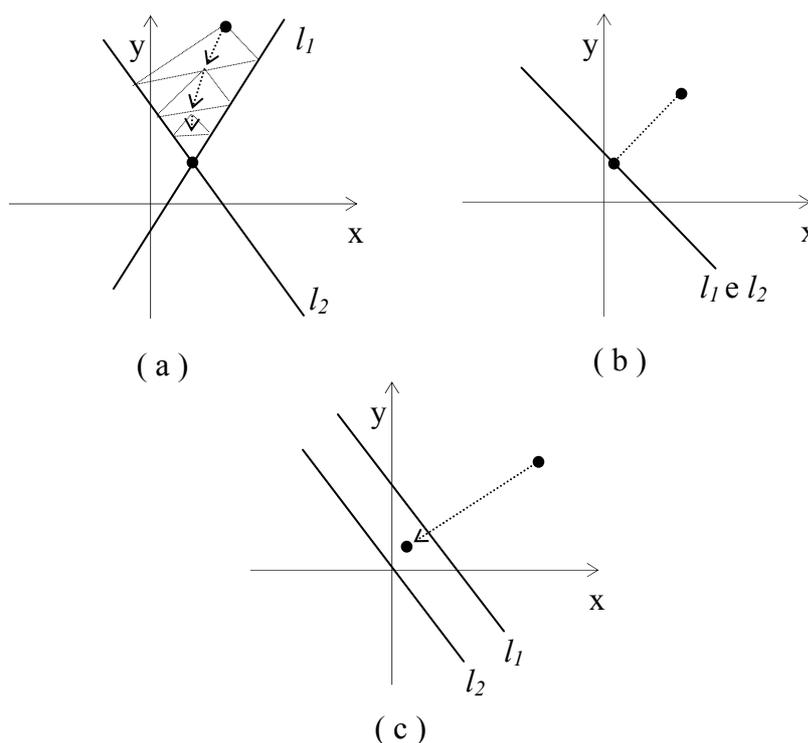


Figura 3.10: (a) as sucessivas projeções convergem para a solução do sistema, (b) a projeção converge para a solução mais próxima da estimacão inicial e (c) como não existe solução as projeções convergem para a solução dos mínimos quadrados.

3.6. Conjuntos de Restrições Convexas

O modelo linear para reconstrução de imagem pode ser descrito pela equação (3.25), onde g representa os dados do vetor de projeção de tamanho $(M \times 1)$, f é o vetor da imagem original de tamanho $(N^2 \times 1)$, H é a matriz de pesos de tamanho $(M \times N^2)$ e n é o vetor de ruído de tamanho $(M \times 1)$.

$$g = Hf+n \quad (3.25)$$

Assume-se que a imagem estimada, \tilde{f} , é quadrada e que $f(i)$ representa o i -ésimo pixel de uma imagem $f \in \mathcal{R}^{N \times N}$. O resíduo, $r = g - H.\tilde{f}$, é o vetor de *ruído estimado*. Restrições sobre o resíduo podem ser expressas como restrições sobre a imagem estimada [BHU95].

A equação (3.25) descreve um sistema de equações lineares, onde cada linha de g descreve uma equação linear que pode ser representada por um hiperplano. Cada hiperplano é um conjunto convexo e sua solução pode ser encontrada através do método de POCS, conforme descrito no capítulo 3.5.

Além dos conjuntos de restrições expressos pela equação (3.25) é possível considerar o conhecimento a priori, sobre a imagem a ser reconstruída. Tais restrições têm que ser expressas em forma de conjunto. A seguir serão descritos alguns conjuntos convexos que podem ser usados na reconstrução de imagens tomográficas.

3.6.1. Conjunto de Restrição da Imagem de Referência

O conjunto de restrição que utiliza uma imagem de referência é descrito pela equação (3.26), onde H é o espaço de Hilbert e ε_R é a distância máxima que a imagem reconstruída pode estar da imagem de referência f_R .

$$C_R = \{h : h \in H \text{ e } \|h - f_R\| \leq \varepsilon_R\} \quad (3.26)$$

A Figura 3.11 ilustra a projeção de um ponto q no conjunto C_R para o caso bidimensional. Analisando esta figura pode-se observar que g satisfaz a equação (3.3), que determina uma projeção, e pertence ao segmento de reta com extremidade em q e f_R . O vetor unitário neste segmento de reta é mostrado na equação (3.27).

$$\frac{q - f_R}{\|q - f_R\|} \quad (3.27)$$

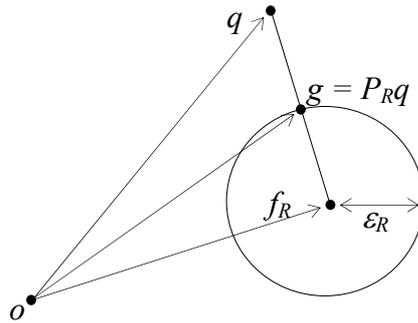


Figura 3.11: projeção de q no conjunto C_R , todos componentes estão representados por vetores

Com base na equação (3.27) é possível encontrar a projeção de q no conjunto C_R , equação (3.28).

$$P_R q = f_R + \varepsilon_R \frac{q - f_R}{\|q - f_R\|} \quad (3.28)$$

Em tomografia computadorizada a imagem de referência f_R pode ser obtida através de uma tomografia, do mesmo objeto, realizada anteriormente ou através da média de imagens tomográficas de objetos similares [OSKO88].

O valor de ε_R pode ser obtido através da equação (3.29), onde f_{TRUE} é a imagem original.

$$\varepsilon_R = \frac{3}{2} \|f_R - f_{TRUE}\| \quad (3.29)$$

3.6.2. Conjunto de Restrição de Suporte Finito

A equação (3.30) descreve o conjunto de restrição de suporte finito, onde todas as funções estão no espaço de Hilbert H e pertencem a uma região Ω .

$$C_{SF} = \{h : h \in H \text{ e } h(i) = 0 \text{ para } i \notin \Omega\} \quad (3.30)$$

O operador de projeção do conjunto definido pela equação (3.30) é mostrado na equação (3.31).

$$P_{SF}q = \begin{cases} q(i), & \text{se } i \in \Omega \\ 0, & \text{se } i \notin \Omega \end{cases} \quad (3.31)$$

3.6.3. Conjunto de Restrição de Não Negatividade

O conjunto descrito pela equação (3.32) descreve um conjunto cujos elementos não podem assumir valores negativos, ou seja, estabelece um limite inferior para o grau de atenuação da imagem a ser reconstruída.

$$C_+ = \{h : h \in H \text{ e } h(i) \geq 0 \quad \forall i\} \quad (3.32)$$

A regra projeção no conjunto C_+ é descrita pela equação (3.33).

$$P_+q(i) = \begin{cases} q(i), & \text{se } q(i) \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.33)$$

3.6.4. Conjunto de Restrição de Amplitude Limitada

Este conjunto descreve o limite inferior e o limite superior para os valores dos *pixels* da imagem a ser reconstruída. A equação (3.34) descreve este conjunto, onde α é o limite inferior, β é o limite superior e Ω é a região onde se encontra a imagem.

$$C_{AL} = \{h : h \in H \text{ e } \alpha \leq h(i) \leq \beta \text{ para } \forall i \in \Omega\} \quad (3.34)$$

O projetor da equação (3.34) é dado pela equação (3.35).

$$P_{AL}q(i) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } q(i) < \alpha \\ q(i), & \text{se } \alpha \leq q(i) \leq \beta \\ \beta, & \text{se } q(i) > \beta \end{cases} \quad (3.35)$$

3.6.5. Conjunto de Restrição de Energia

O conjunto descrito pela equação (3.36) descreve todas as funções pertencentes ao espaço de Hilbert H que possuem energia menor que E .

$$C_E = \left\{ h : h \in H \text{ e } \|h\|^2 \leq E = \rho^2 \right\} \quad (3.36)$$

O projetor da equação (3.36) é fornecido pela equação (3.37), onde $E_q = \|q\|^2$.

$$P_E q = \begin{cases} q, & \text{se } \|q\| \leq \rho \\ \sqrt{\left(\frac{E}{E_q}\right)} q, & \text{se } \|q\| > \rho \end{cases} \quad (3.37)$$

Note que esse projetor será idêntico ao descrito na equação (3.28) se $f_R=0$, $\varepsilon_R = \sqrt{E}$ e $E_q = \|q\|^2$.

3.6.6. Conjunto de Imagens com Pontos Conhecidos.

É possível estabelecer um conjunto de restrição quando se tem o conhecimento dos valores assumidos por alguns *pixels* na imagem a ser reconstruída. A equação (3.38) descreve este conjunto, onde γ_i é a intensidade assumida pelo i -ésimo *pixel*.

$$C_{PC} = \left\{ h : h \in H \text{ e } h(i) = \gamma_i \quad \forall i \in I \subset \{1, 2, \dots, N^2\} \right\} \quad (3.38)$$

O projetor é dado pela equação (3.39).

$$P_{PC}q(i) = \begin{cases} \gamma_i & i \in I \\ q(i) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.39)$$

Este conjunto pode ser considerado uma generalização do conjunto de restrição de suporte finito, descrito pela equação (3.30). Onde γ_i assume valor nulo para os pontos fora da região de interesse.

4. Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados e conclusões obtidos no estudo da reconstrução de imagens tomográficas através dos algoritmos de POCS (*Projections onto Convex Sets*).

Foram implementados os algoritmos ART, SIRT, POCS sequencial e POCS paralelo, sendo feita a comparação entre eles na presença de ruído e com ângulo limitado de visão. Os algoritmos citados foram implementados em MATLAB 5.2 em um computador Pentium 166 MHz com 32 MBytes de RAM.

4.1 Implementação dos Algoritmos

Foram implementado quatro algoritmos de reconstrução tomográfica, descritos na sequência. Os conjuntos de restrições utilizados nestes métodos foram descritos anteriormente, bem como seus projetores.

4.1.1 O Algoritmo ART

O algoritmo ART (*Algebraic Reconstruction Techniques*) foi implementado de acordo com a equação (2.12), sendo os valores obtidos conforme mostrado na seção 2.1.4.

Neste algoritmo não foi considerado nenhum conjunto de restrição, além dos fornecidos pelas projeções. Porém, ao final das iterações foi feita a projeção no conjunto de não negatividade para garantir que todos os *pixels* da imagem reconstruída possuam valores iguais ou superiores a zero.

4.1.2 O Algoritmo SIRT

O algoritmo SIRT (*Simultaneous Iterative Reconstructive Technique*) é a implementação paralela do algoritmo ART. Neste caso a projeção é feita em todos os conjuntos ao mesmo tempo, sendo que cada conjunto possui o mesmo peso. A equação (3.24) representa a implementação deste algoritmo, sendo que os conjuntos e os projetores foram os mesmos utilizados no algoritmo ART.

4.1.3 O Algoritmo POCS Sequencial

Para construção desse algoritmo foram utilizados os conjuntos descritos pelas equações (3.25), (3.26), (3.29), (3.31), (3.33) e (3.35). A implementação do método utilizado é descrita pela equação (4.1), onde $P_M \dots P_2 P_1$ representam as projeções nos M conjuntos gerados a partir dos dados de projeção, equação (4.1).

$$x_{k+1} = P_{SF} P_{AL} P_E P_R P_M \dots P_2 P_1 x_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Como estimativa inicial x_0 , é considerado que a região na qual a imagem está inserida (restrição de suporte finito) tem valor constante dado pela maior intensidade que cada *pixel* pode assumir (restrição de amplitude limitada). Este valor depende do grau de atenuação máximo da amostra.

4.1.4 O Algoritmo POCS Paralelo

Neste algoritmo foram considerados os mesmos conjuntos descritos no item anterior. A projeção não é feita em todos os conjuntos ao mesmo tempo, ao contrário do SIRT. Primeiramente é feita a projeção em todos os M conjuntos de restrições dos dados de projeção, em seguida projeta-se paralelamente nos conjuntos C_R e C_E e posteriormente é feita a projeção sequencial nos conjuntos C_{AL} e C_{SF} .

A ordem em que é feita a projeção nos conjuntos pode influenciar nos resultados obtidos. A ordem mostrada acima foi a que, experimentalmente, apresentou os menores erros percentuais.

A equação (4.2) descreve o algoritmo utilizado. Observar que é computado uma iteração apenas quando a projeção já foi feita em todos os conjuntos.

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= P_{SF} P_{AL} y_{k+1} \\
 y_{k+1} &= z_{k+1} + \frac{1}{2} ((P_R - z_{k+1}) + (P_E - z_{k+1})) \\
 z_{k+1} &= x_k + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (P_i x_k - x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2 Obtenção dos Dados Tomográficos

Os dados tomográficos são as projeções de um corpo de teste, que é denominado *phantom*. Neste trabalho existem dois tipos de *phantoms*, a saber: simulado e experimental.

4.2.1 *Phantoms Simulados*

Para comparação da reconstrução feita pelo métodos utilizados, foram criadas imagens cujos valores dos *pixels* representam a atenuação do corpo naquele ponto. O objetivo de construir essas imagens é o de posteriormente simular a tomografia das mesmas, tendo assim as projeções tomográficas de uma imagem conhecida.

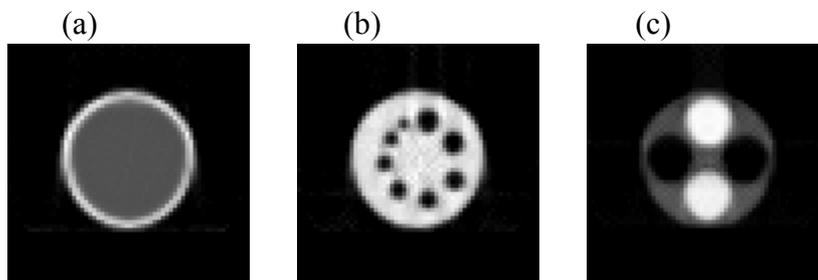


Figura 4.1: Phantoms (a) homogêneo, (b) assimétrico e (c) simétrico utilizado na simulação da tomografia

Foram escolhidos três *phantoms* com forma e grau de atenuação diferentes, conforme mostrado na Figura 4.1.

A simulação da tomografia foi feita no matlab, utilizando-se para isso a Transformada de Radon da imagem em questão, representada por $p_{\theta}(s)$ na equação(2.2). Para simular a captura das projeções do corpo, a partir $p_{\theta}(s)$, foi utilizada a equação (2.3), onde I_0 representa a intensidade do raio incidente e $I_{\theta}(s)$ representa o raio atenuado. Foram obtida duas projeções de cada *phantom*: (a) uma com valores reduzidos para I_0 , simulando assim baixa contagem de *fótons*; (b) outra com altos valores de I_0 , representando assim um tempo de exposição maior do material à radiação.

Para simular o ruído presente na tomografia experimental, foi inserido o ruído *Poisson* nas projeções simuladas. Para baixas contagens de *fótons* as projeções passam a ser extremamente ruidosas. Embora o ruído seja maior para altas contagens de *fótons*, a relação sinal-ruído aumenta.

Os dados da tomografia foram obtidos em 60 ângulos diferentes, igualmente espaçados em um intervalo $0^{\circ} \leq \theta < 180^{\circ}$ (onde θ é o ângulo em graus), considerando que em cada ângulo de projeção são capturados 60 raios soma (igualmente espaçados).

Para a obtenção dos dados com ângulo de visão limitado foram considerados os mesmos dados, sem inserção de ruído, porém em um intervalo $0^{\circ} \leq \theta < 90^{\circ}$ e $0^{\circ} \leq \theta < 135^{\circ}$ conservando o mesmo número de raios soma em cada ângulo de projeção.

4.2.2 *Phantoms Experimentais*

Foram utilizados três *phantoms* experimentais: homogêneo, assimétrico e simétrico. O *phantom* homogêneo é um cilindro de nylon contendo água em seu interior, conforme mostrado na Figura 4.2.a. O *phantom* assimétrico é um objeto cilíndrico de nylon, com furos de diferentes tamanhos (Figura 4.2.b). O *phantom* simétrico é um corpo cilíndrico de *plexiglass* com dois furos e dois cilindros de alumínio em seu interior. Tanto os furos quanto os cilindros de alumínio estão dispostos de maneira simétrica, conforme mostrado na Figura 4.2.c.

A obtenção dos dados foi feita no CNPDIA-EMBRAPA, com um tomógrafo de primeira geração descrito na seção 2.1.2.

Cada *phantom* teve sua projeção obtida em três diferentes tempos de exposição à radiação, sendo eles: (a) três segundos por raio soma, obtendo-se baixa contagem de *fótons* e conseqüentemente um alto ruído; (b) dez segundos por raio soma, obtendo-se menos ruído; (c) vinte segundos por raio soma, obtendo-se alta contagem de *fótons* e, conseqüentemente, aumentando substancialmente a relação sinal-ruído.

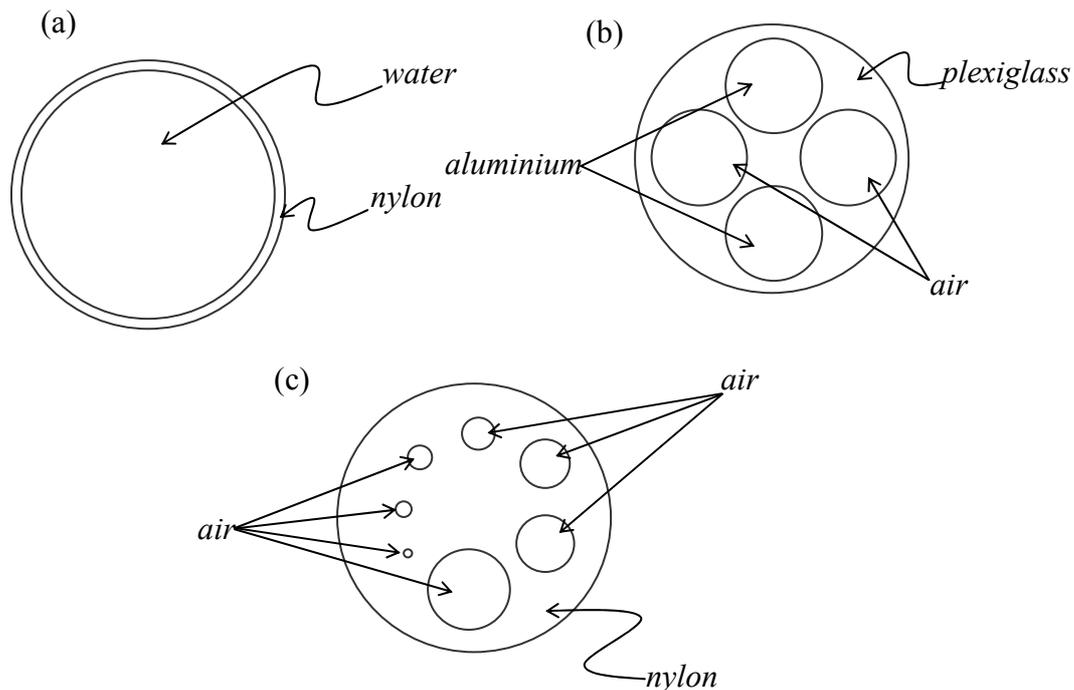


Figura 4.2: Ilustração do corte transversal dos Phantoms experimentais (a) homogêneo, (b) simétrico e (c) assimétrico

As projeções foram feitas primeiramente em 40 ângulos igualmente espaçados, onde $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$, com 40 (quarenta) raios soma em cada ângulo de projeção, gerando matrizes de dimensão 40X40, onde em cada linha eram armazenadas as projeções em um dado ângulo. Posteriormente o processo foi repetido para gerar matrizes de dimensão 100X100.

Como o tomógrafo só produzia matrizes quadradas, cobrindo sempre 180° , as amostras de dados limitados foram obtidas a partir da coleta de dados em todos os ângulos de visão. Para este fim foram eliminadas primeiramente as projeções feitas em ângulos iguais ou superiores a 90° , obtendo-se assim as projeções no intervalo $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$. Posteriormente

foram eliminados também os ângulos iguais ou superiores a 135° , admitindo projeções no intervalo $0^\circ \leq \theta < 135^\circ$.

A seguir serão mostrados os resultados das reconstruções tomográficas utilizando os algoritmos descritos neste capítulo.

4.3 Resultados

Primeiramente serão apresentados os resultados obtidos a partir das projeções dos *phantoms* simulados, podendo, neste caso, medir o erro percentual entre a imagem reconstruída e a imagem original.

Para medir o erro foi adotado o método sugerido por Oskouid-Fard e Stark [OSKO88], dado pela equação (4.3), onde δ_n é o erro percentual na n-ésima iteração, f_n é a n-ésima projeção e f é a imagem original.

$$\delta_n = \frac{\|f_n - f\|}{\|f\|} \times 100 \quad (4.3)$$

Em cada reconstrução é apresentado o gráfico de convergência do método utilizado na n-ésima iteração. Para verificar se o algoritmo convergiu para uma determinada solução utilizou-se a distância euclidiana entre a imagem atual e a gerada pela iteração anterior, conforme ilustrado pela equação (4.4). Se essa distância, representada por d_n , é menor que ε então o algoritmo convergiu para f_k .

$$d_n = \|f_n - f_{n-1}\| \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

4.3.1 *Phantoms Simulados*

Foi feita a reconstrução dos corpos de teste simulados na presença de ruído e a partir de um número limitado de ângulos de projeção. Nos métodos POCS paralelo e sequencial foram impostas restrições que utilizam uma imagem de referência. Foi admitida como imagem de referência a imagem reconstruída a partir de projeções ruidosas, onde a

relação sinal-ruído seja baixa. Como o método paralelo tem melhor desempenho na presença de ruído se comparado ao método sequencial [COMB93], a imagem de referência foi reconstruída utilizando o método SIRT, pois, neste caso, obtém-se um desempenho melhor que o ART. As imagens de referência utilizadas são apresentadas na Figura 4.3.

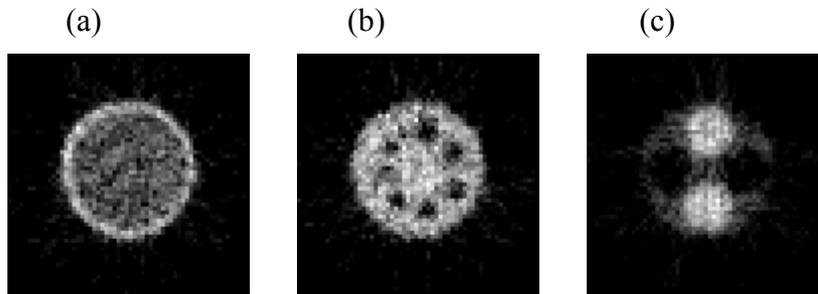


Figura 4.3: Imagens reconstruídas pelo método SIRT a partir de projeções ruidosas, *phantoms*
(a) homogêneo, (b) assimétrico e (c) simétrico

Note que, se comparada com a Figura 4.1, a Figura 4.3 é muito ruidosa. O erro na reconstrução é mostrado no gráfico presente na Figura 4.4, onde o erro na trigésima iteração é de 32,06% para o *phantom* homogêneo, 26,57% para o *phantom* assimétrico e 25,29% para o *phantom* simétrico.

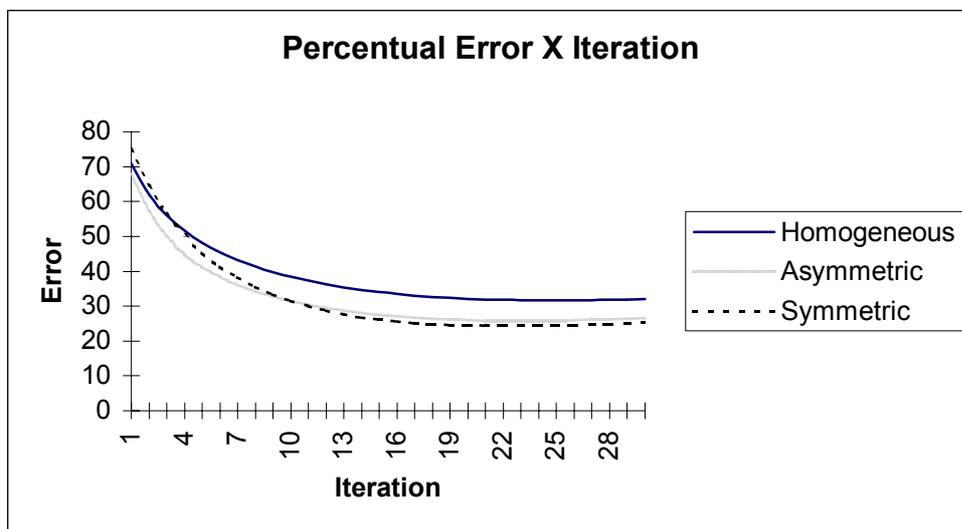


Figura 4.4: Gráfico demonstrando o erro entre a imagem de referência e a imagem original

Antes de iniciar a reconstrução, a imagem de referência foi degradada com o filtro da média com o objetivo de suavizar o ruído presente na imagem de referência.

A seguir serão apresentados os resultados obtidos na presença de ruído, bem como o gráfico de convergência e o erro percentual.

Resultados Obtidos na Presença de Ruído

A Figura 4.5 mostra o resultado da reconstrução do *phantom* homogêneo na presença de ruído. Visualmente os métodos paralelos (SIRT e POCS paralelo) obtiveram melhores resultados.

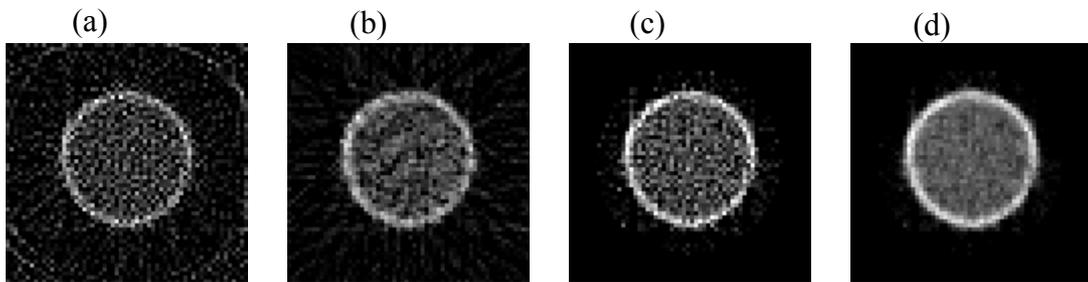


Figura 4.5: Imagem do *Phantom* Homogêneo reconstruída a partir de projeções ruidosas com os métodos (a) ART, (b) SIRT, (c) POCS sequencial e (d) POCS paralelo

A Figura 4.6 mostra o gráfico de convergência dos métodos utilizados para o *phantom* homogêneo. Note que, com exceção do ART, todos os algoritmos obtiveram aproximadamente a mesma taxa de convergência.

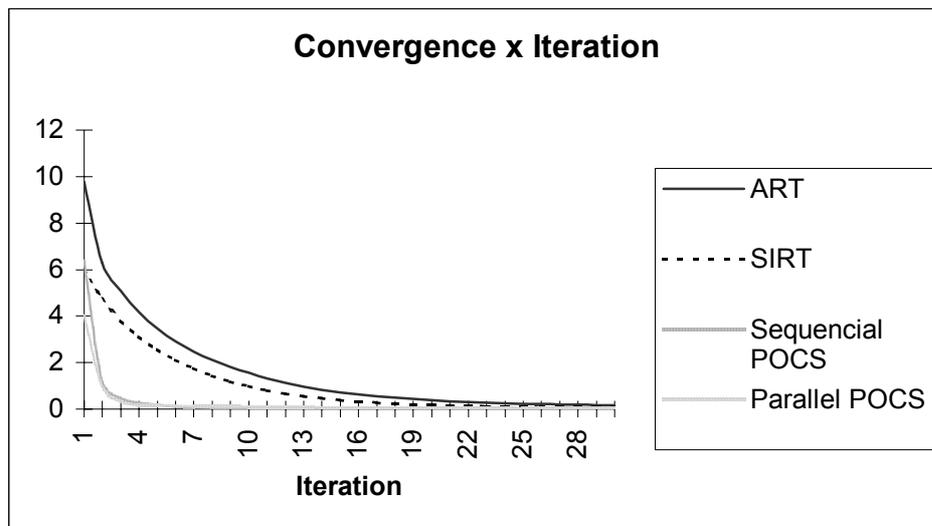


Figura 4.6: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* Homogêneo, a partir de projeções ruidosas

A Figura 4.7 mostra o erro percentual entre a imagem original, do *phantom* homogêneo, e a imagem reconstruída a partir das projeções ruidosas. Na última iteração o erro entre a imagem original e a imagem reconstruída a partir de projeções ruidosas pelo métodos utilizados foi de 94,35% para reconstrução pelo ART, 49,38% para reconstrução feita através do SIRT, 41,44% para o POCS sequencial e 17,40% para o POCS paralelo.

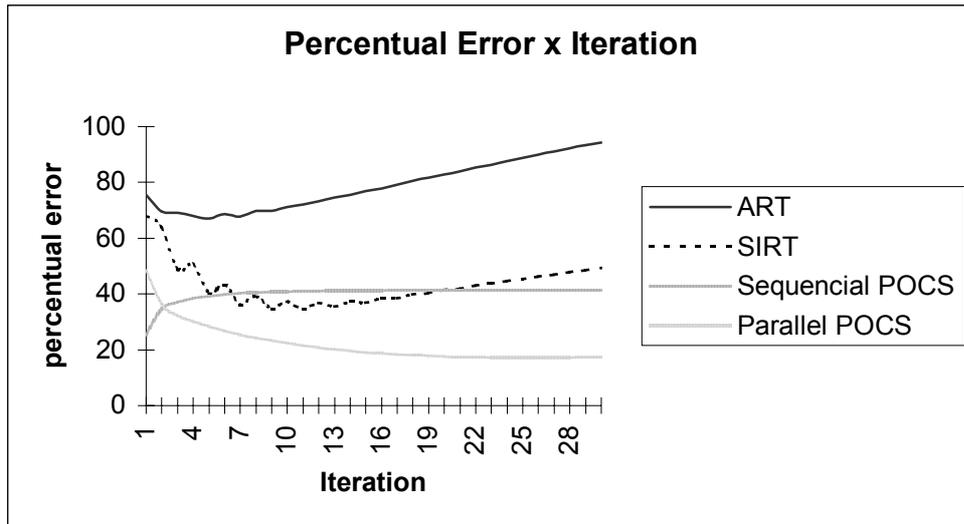


Figura 4.7: Erro percentual da imagem do *phantom* homogêneo

A Figura 4.8 mostra as imagens reconstruídas a partir de projeções ruidosas do *phantom* assimétrico.

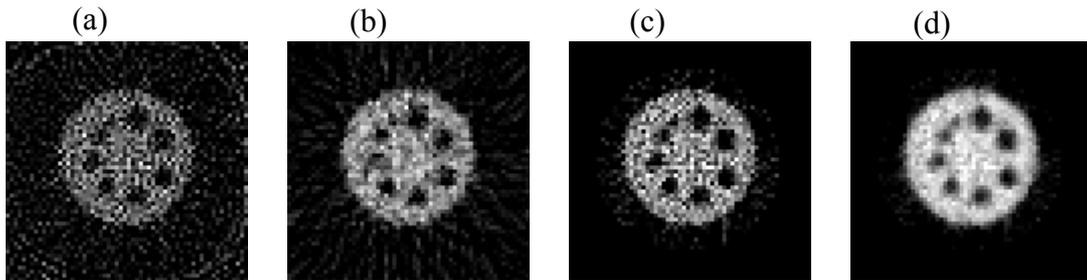


Figura 4.8: Imagens do *phantom* assimétrico reconstruída a partir de projeções ruidosas com os métodos (a) ART, (b) SIRT, (c) POCS sequencial e (d) POCS paralelo

A Figura 4.9 mostra o gráfico de convergência dos métodos utilizados para o *phantom* assimétrico.

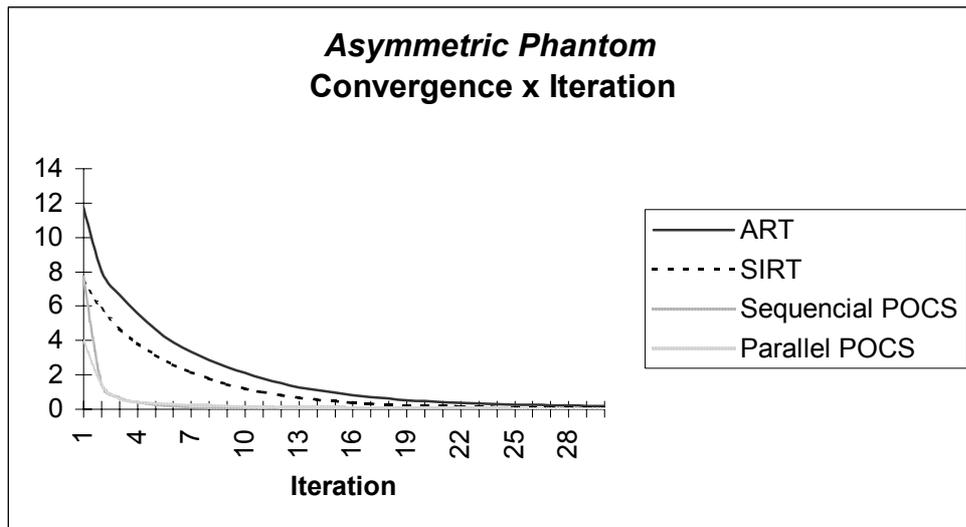


Figura 4.9: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* assimétrico, a partir de projeções ruidosas

A Figura 4.10 mostra o gráfico do erro percentual, em cada iteração, na reconstrução do *phantom* assimétrico com projeções ruidosas. Na última iteração o erro entre a imagem original e a imagem reconstruída foi de 88,77% para reconstrução pelo método ART, 42,92% para reconstrução feita através do SIRT, 38,43% para o POCS sequencial e 16,46% para o POCS paralelo. Para este *phantom* a diferença entre o método SIRT e o método POCS paralelo foi desprezível, ou seja, os conjuntos de restrições adicionados não influenciaram muito no resultado.

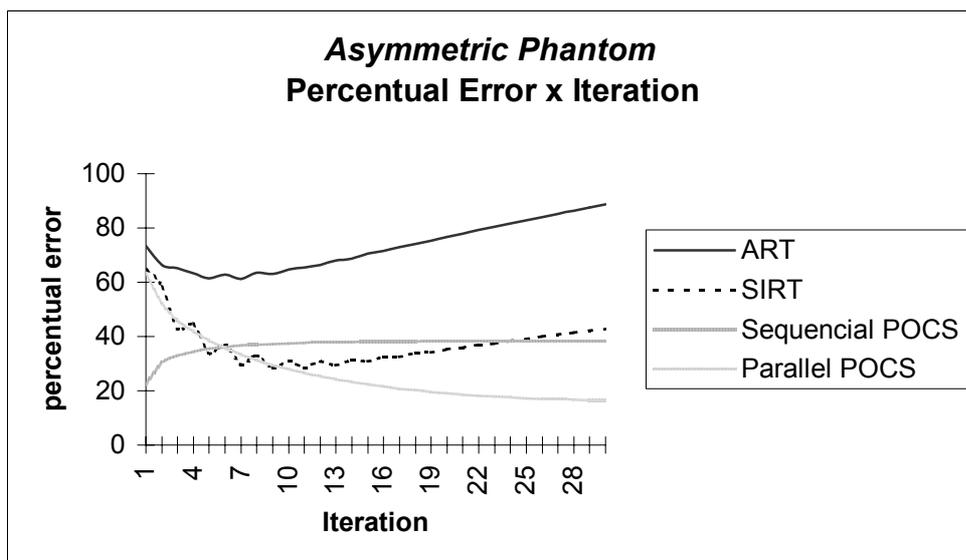


Figura 4.10: Erro percentual da imagem do *phantom* assimétrico reconstruída a partir de projeções ruidosas

A Figura 4.11 mostra as imagens reconstruídas, através dos métodos descritos neste capítulo, do *phantom* simétrico a partir de projeções ruidosas do mesmo.

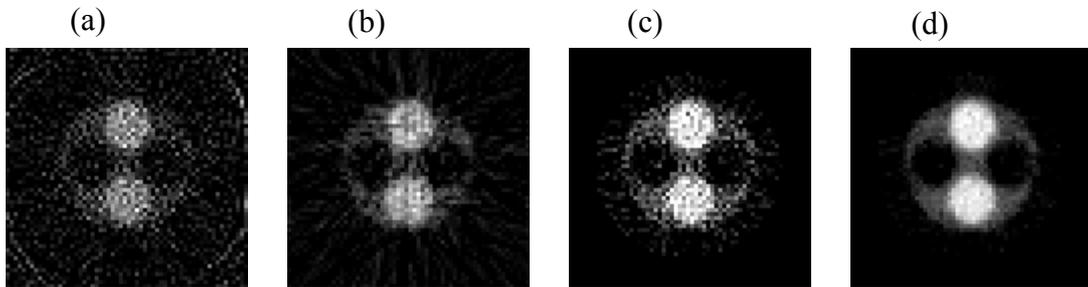


Figura 4.11: Imagens do *phantom* simétrico reconstruída a partir de projeções ruidosas com os métodos (a) ART, (b) SIRT, (c) POCS sequencial e (d) POCS paralelo

A Figura 4.12 mostra o gráfico de convergência dos métodos utilizados para o *phantom* simétrico.

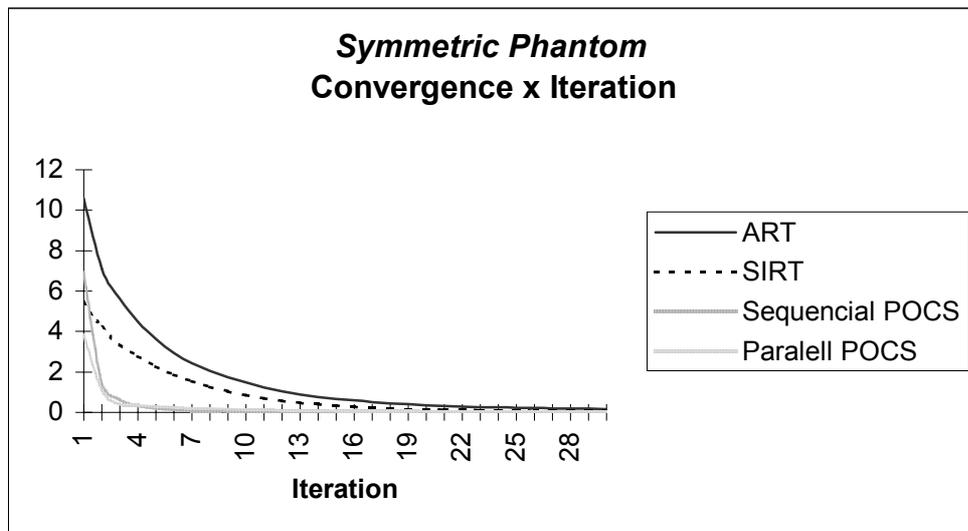


Figura 4.12: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* Simétrico, a partir de projeções ruidosas

A Figura 4.13 mostra o gráfico do erro percentual obtido durante a reconstrução do *phantom* assimétrico com projeções ruidosas. Na última iteração o erro entre a imagem original e a imagem reconstruída foi de 86,93% para reconstrução pelo método

ART, 42,87% para reconstrução feita através do SIRT, 34,26% para o POCS sequencial e 13,48% para o POCS paralelo.

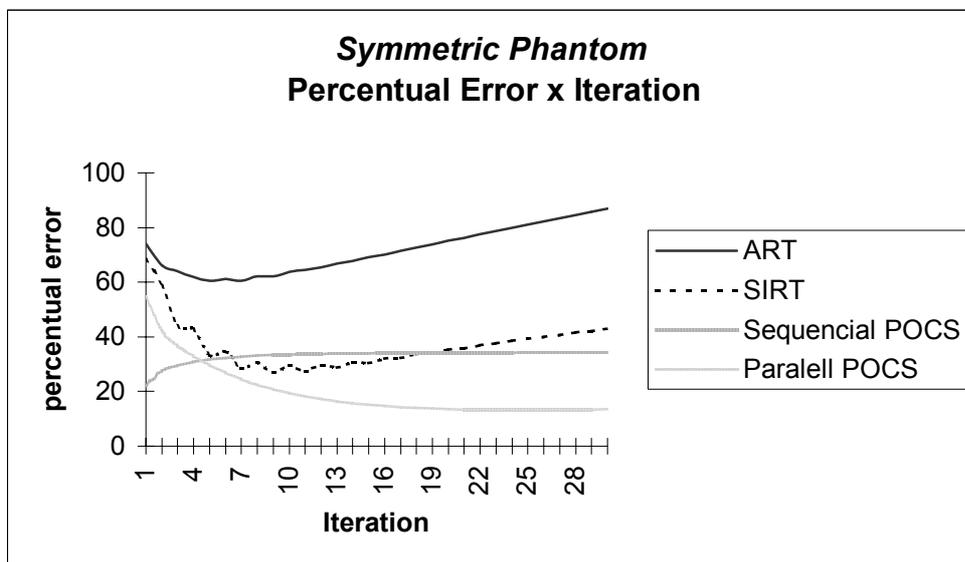


Figura 4.13: Erro percentual da imagem do *phantom* simétrico reconstruída a partir de projeções ruidosas

Serão expostos na sequencia os resultados obtidos com ângulos de projeções limitados a um intervalo.

Resultados Obtidos com Ângulos de Projeções Limitados (0° a 90°)

Para estas reconstruções foram utilizadas como imagens de referência as mostradas na Figura 4.3, doravante chamadas imagens de referência 1, e outras com menos ruído, reconstruídas também com o método SIRT, mostradas nas Figuras 4.5.b, 4.8.b e 4.11.b, que serão chamadas imagens de referência 2.

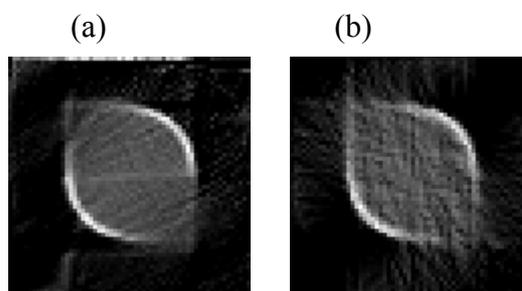


Figura 4.14: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através dos métodos (a) ART, (b) SIRT

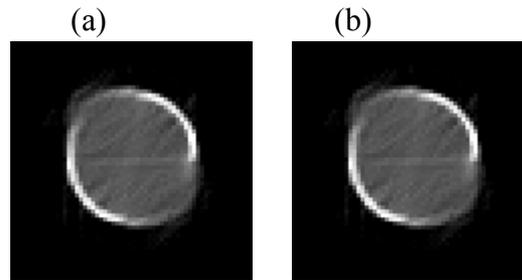


Figura 4.15: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

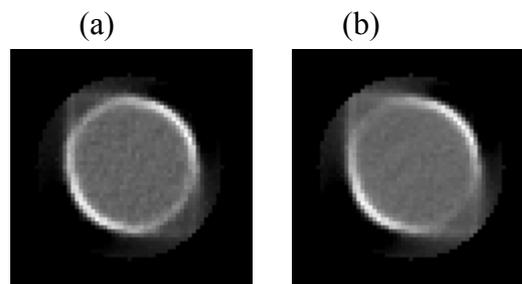


Figura 4.16: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

As Figuras 4.14, 4.15 e 4.16 mostram as imagens do *phantom* homogêneo, obtidas através da reconstrução das projeções, com ângulo variando de 0° a 90° . A Figura 4.14.a mostra a imagem reconstruída através de método ART e a Figura 4.14.b mostra a reconstrução através do método SIRT. A Figura 4.15 mostra as imagens reconstruídas através do método POCS sequencial, sendo a Figura 4.15.a utilizando a imagem de referência 2 e a Figura 4.15.b utilizando a imagem de referência 1, gerando imagens praticamente idênticas. A Figura 4.16.a mostra a imagem reconstruída através do método POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e a imagem 4.16.b, que foi reconstruída utilizando o mesmo método, porém com a imagem de referência 1.

A Figura 4.17 mostra o gráfico de convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* homogêneo a partir de ângulos de projeções limitados. Note que na reconstrução através de POCS sequencial, mesmo alterando a imagem de referência, a taxa de convergência é a mesma.

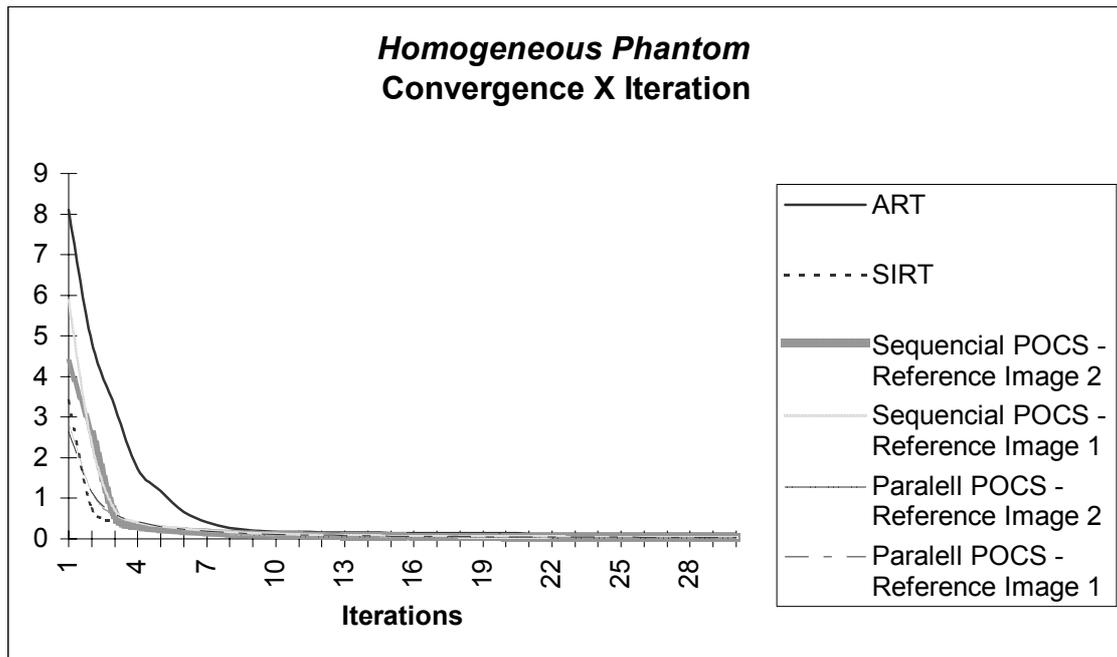


Figura 4.17: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* homogêneo com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

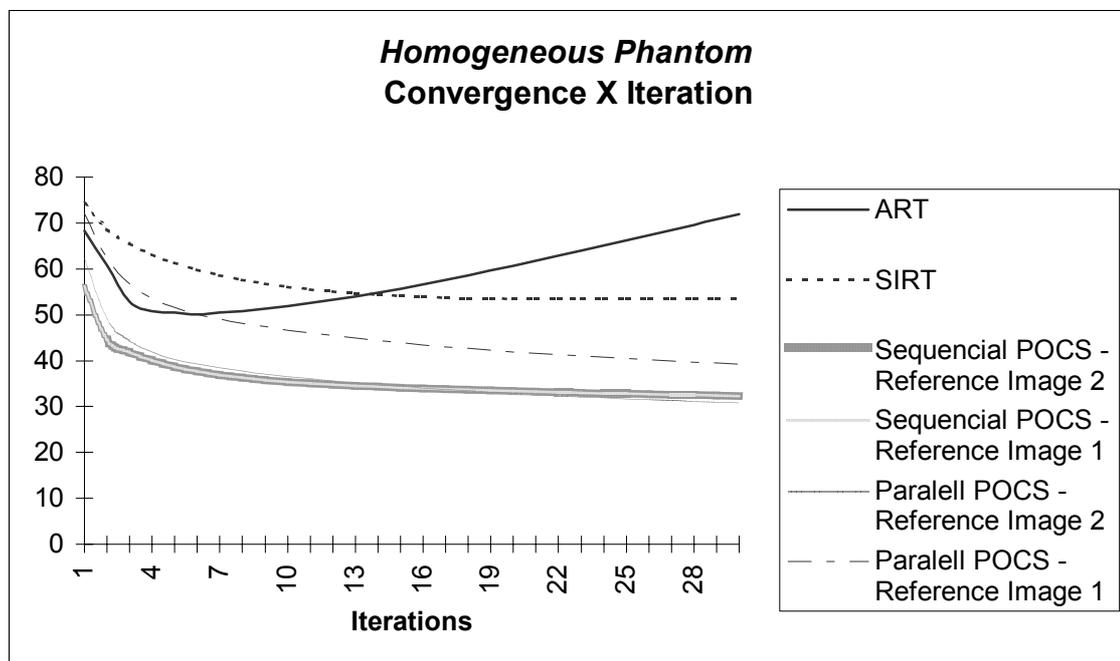


Figura 4.18: Erro percentual da imagem do *phantom* homogêneo reconstruída a partir de ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

A Figura 4.18 mostra o erro percentual entre a imagem original, do *phantom* homogêneo, e a imagem reconstruída a partir das projeções limitadas entre 0° e 90° . Na última iteração o erro entre a imagem original e a imagem reconstruída foi de 71,92% para reconstrução pelo ART, 53,53% para reconstrução através do SIRT, 32,34% para o POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1 e imagem de referência 2 (os resultados foram praticamente idênticos), 30,87% para o POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e 39,27% para a reconstrução através de POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1.

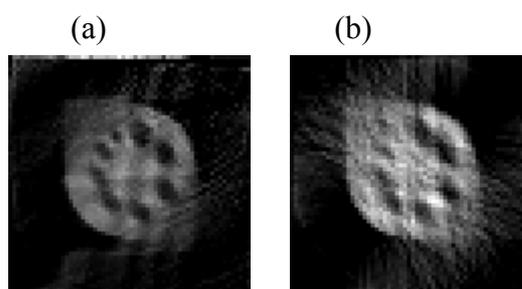


Figura 4.19: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT

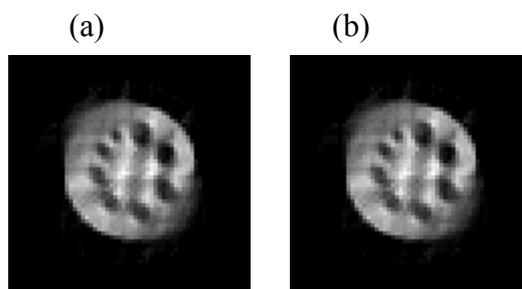


Figura 4.20: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

A Figura 4.19.a mostra a imagem do *phantom* assimétrico reconstruída através de método ART e a Figura 4.19.b mostra a reconstrução através do método SIRT. A Figura 4.20 mostra as imagens, do *phantom* assimétrico, reconstruídas através do método POCS sequencial, sendo a Figura 4.20.a utilizando a imagem de referência 2 e a Figura 4.20.b utilizando a imagem de referência 1. A Figura 4.21.a mostra a imagem, do *phantom* assimétrico, reconstruída através do método POCS paralelo utilizando a imagem de referência

2 e a imagem 4.21.b foi reconstruída utilizando o mesmo método, porém com a imagem de referência 1.

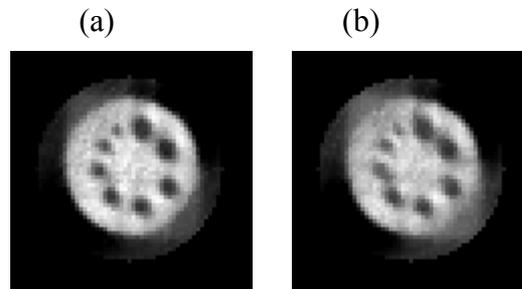


Figura 4.21: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

É possível observar na Figura 4.22 o gráfico de convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* assimétrico a partir de ângulos de projeções limitados.

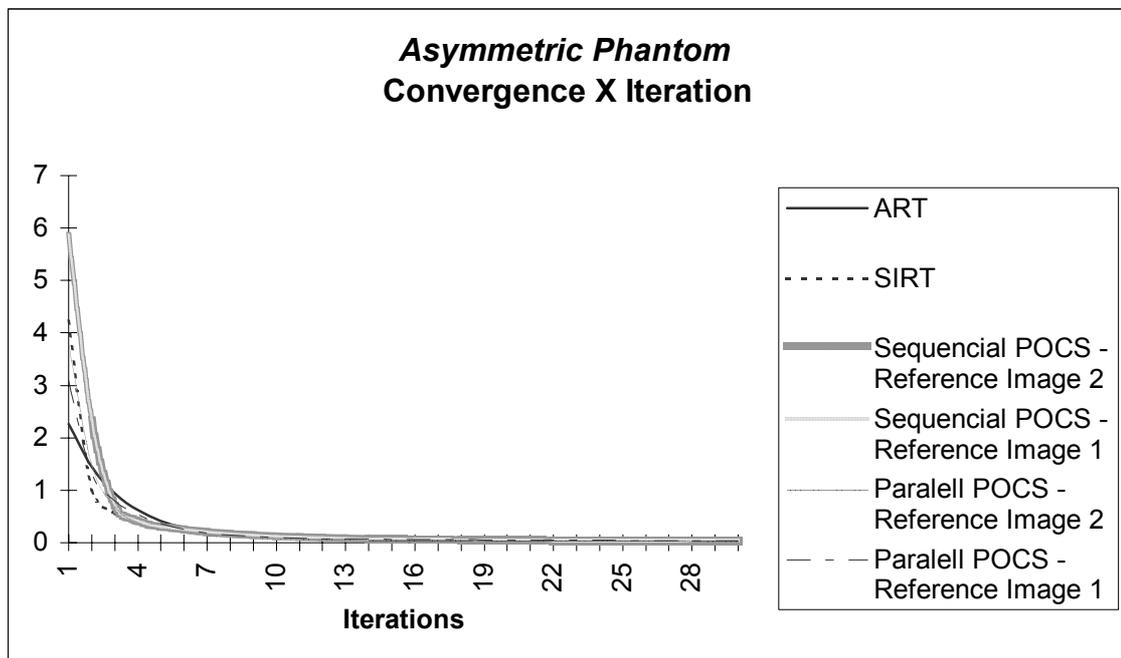


Figura 4.22: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* assimétrico com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

A Figura 4.23 mostra o erro percentual entre a imagem original, do *phantom* assimétrico, e a imagem reconstruída a partir das projeções limitadas entre 0° e 90° . Na última iteração, o erro percentual foi de 70,95% para reconstrução pelo ART, 49,23% para reconstrução pelo SIRT e 28,85% para o POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1, sendo que o mesmo valor para este método foi obtido utilizando a imagem de referência 2. O método POCS paralelo, utilizando a imagem de referência 2, obteve um erro de 23,75% e 32,04% utilizando a imagem de referência 1.

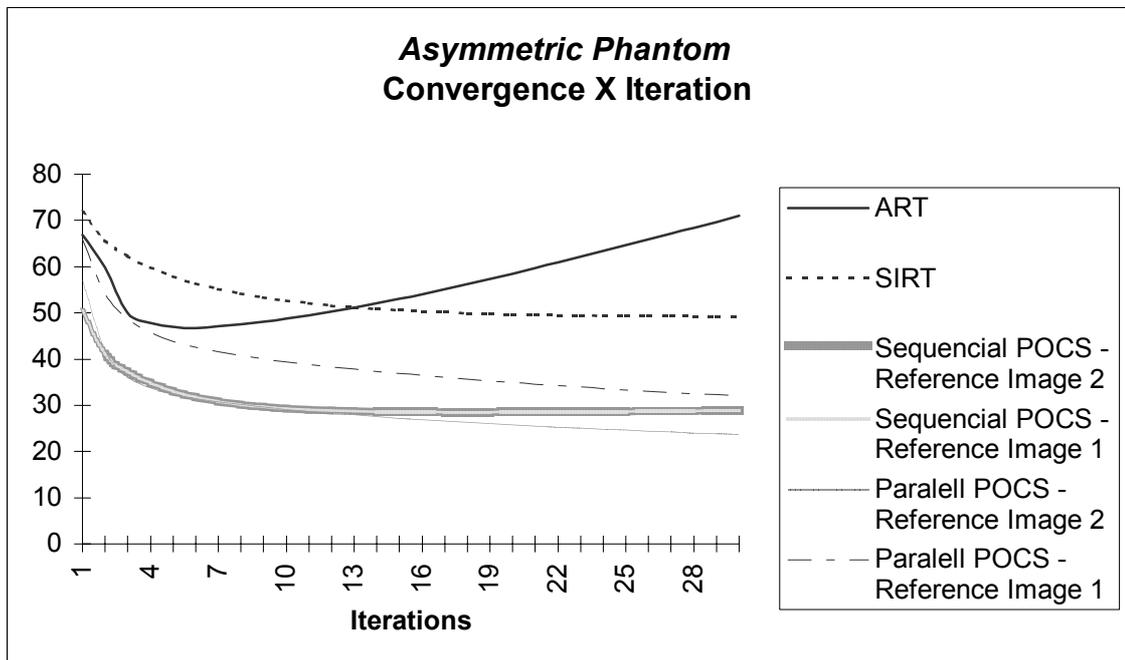


Figura 4.23: Erro percentual da imagem do *phantom* assimétrico reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

A Figura 4.24.a mostra a imagem do *phantom* simétrico, com ângulo limitado, reconstruída através dos métodos ART, enquanto a Figura 4.24.b mostra a imagem reconstruída através do SIRT.

A Figura 4.25.b e 4.25.c mostra a reconstrução do *phantom* simétrico através do método POCS sequencial utilizando as imagens de referência 2 e 1, respectivamente. Já a Figura 4.26.b e 4.26.c mostra o resultado da reconstrução através do método POCS paralelo utilizando as imagens de referência 2 e 1 respectivamente.

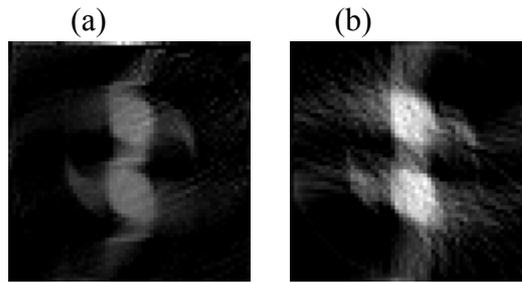


Figura 4.24: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT

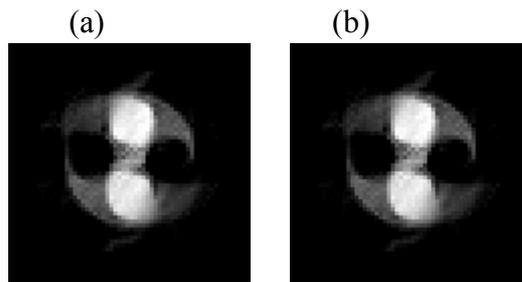


Figura 4.25: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

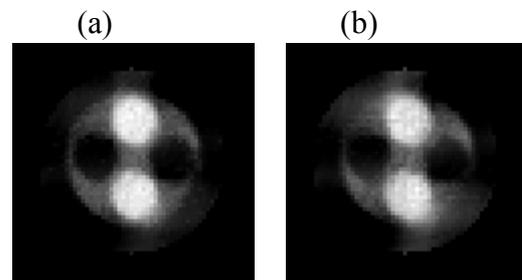


Figura 4.26: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

A Figura 4.27 mostra o gráfico de convergência, da reconstrução do *phantom* simétrico, para os métodos utilizados

A Figura 4.28 mostra o erro percentual na reconstrução do *phantom* homogêneo a partir das projeções limitadas entre 0° e 90° . Na última iteração o erro entre a imagem original e a imagem reconstruída foi de 78,29% na reconstrução pelo ART, 51,19% para reconstrução através do SIRT, 32,34% para o POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1 e imagem de referência, 20,04% para o POCS paralelo utilizando a imagem de

referência 2 e 30,92% para a reconstrução através de POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1.

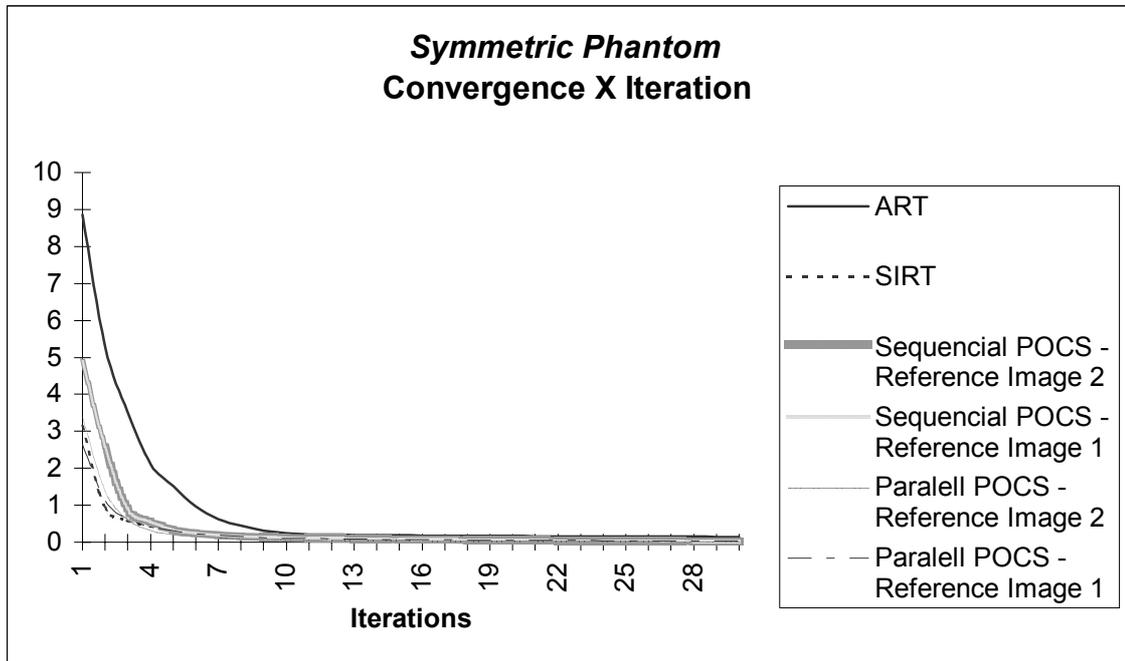


Figura 4.27: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* simétrico com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

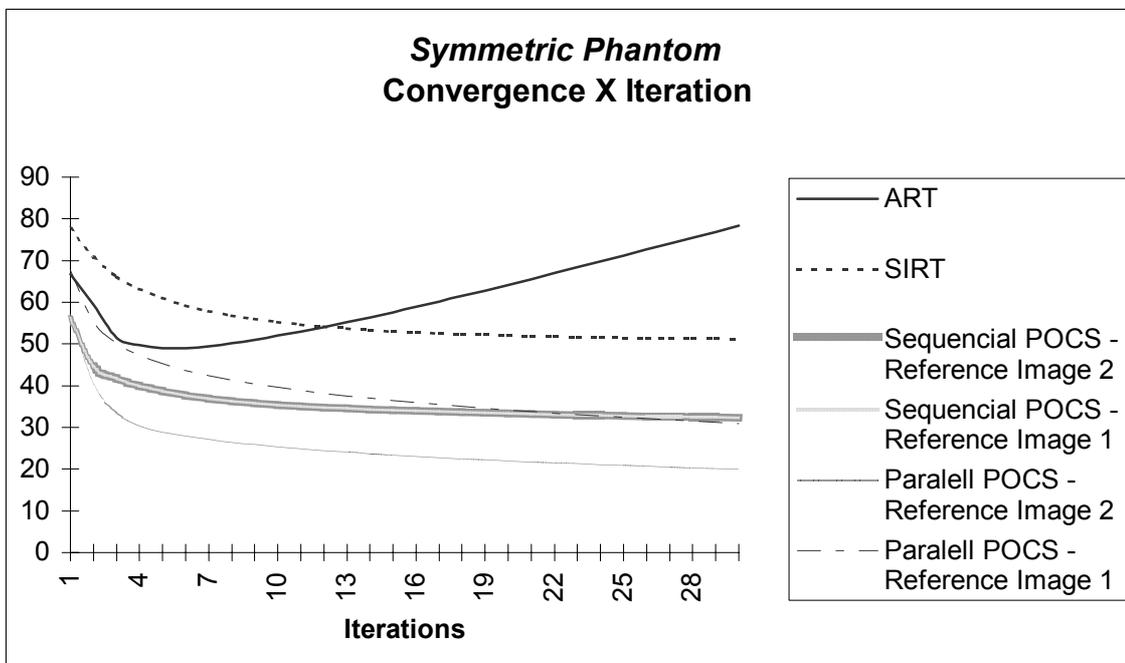


Figura 4.28: Erro percentual da imagem do *phantom* simétrico reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

Resultados Obtidos com Ângulos de Projeções Limitados (0° a 135°)

As Figuras 4.29, 4.30 e 4.31 mostram as imagens do *phantom* homogêneo, obtidas através da reconstrução das projeções com ângulo variando de 0° a 135°. A Figura 4.29.a mostra a imagem reconstruída através de método ART e a Figura 4.29.b mostra a reconstrução através do método SIRT. A Figura 4.30 mostra as imagens reconstruídas através do método POCS sequencial, sendo a Figura 4.30.a utilizando a imagem de referência 2 e a Figura 4.30.b utilizando a imagem de referência 1. A Figura 4.31.a mostra a imagem reconstruída através do método POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e a imagem 4.31.b foi reconstruída utilizando o mesmo método, porém com a imagem de referência 1.

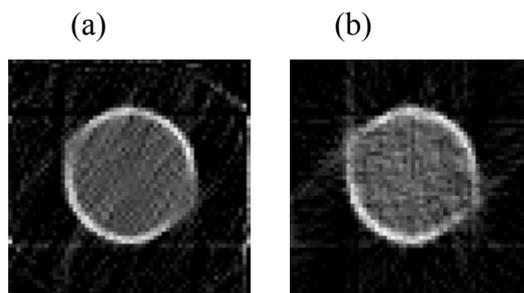


Figura 4.28: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através dos métodos (a) ART, (b) SIRT

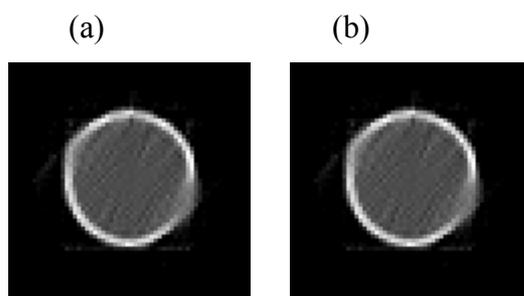


Figura 4.30: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

A Figura 4.32 mostra o gráfico de convergência para reconstrução do *phantom* homogêneo a partir de ângulos de projeções limitados.

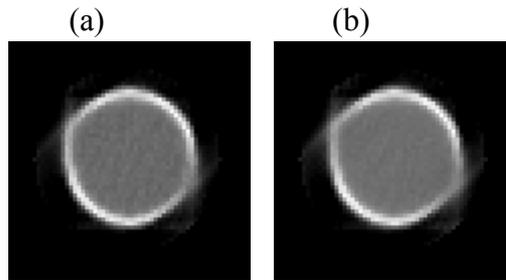


Figura 4.31: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

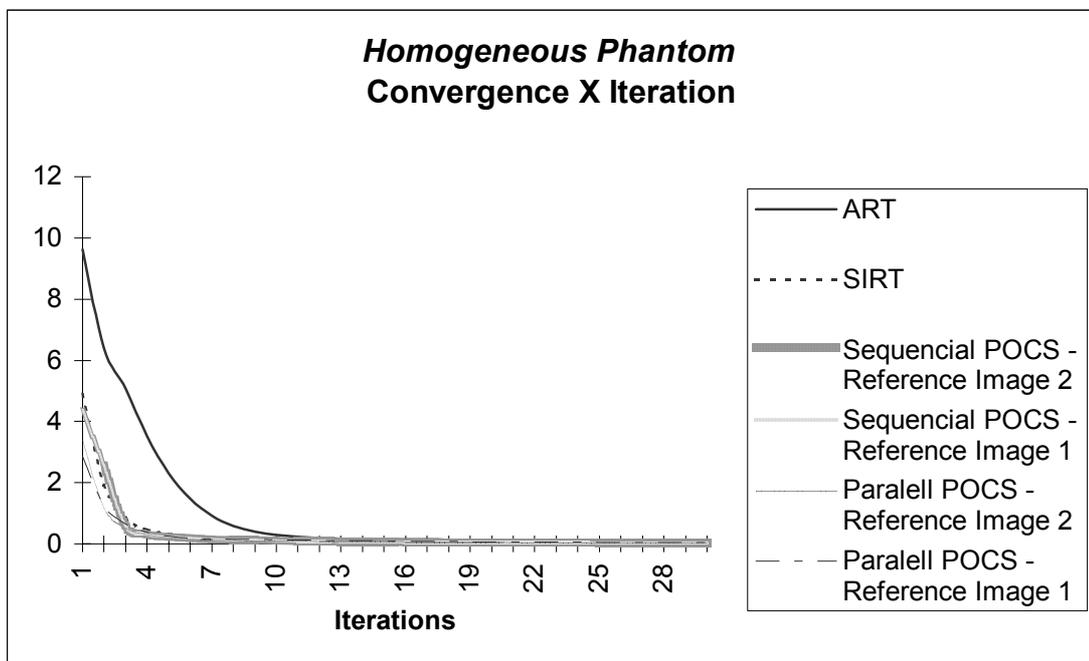


Figura 4.32: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* homogêneo com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

A Figura 4.33 mostra o erro percentual entre a imagem original, do *phantom* homogêneo, e a imagem reconstruída a partir das projeções limitadas entre 0° e 135° . Na última iteração o erro entre a imagem original e a imagem reconstruída foi de 68,31% para reconstrução pelo ART, 38,60% para reconstrução através do SIRT, 18,55% para o POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1 e imagem de referência 2, 21,21% para o

POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e 25,49% para a reconstrução através de POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1.

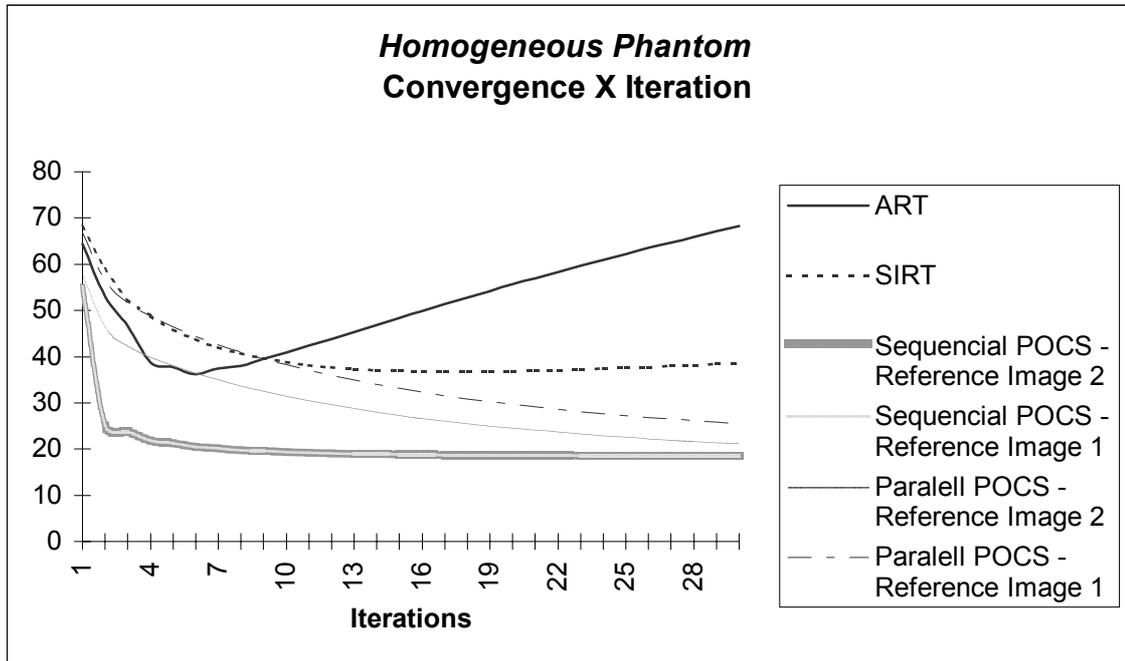


Figura 4.33: Erro percentual da imagem do *phantom* homogêneo reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

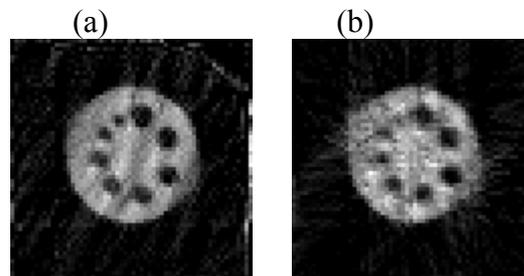


Figura 4.34: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT

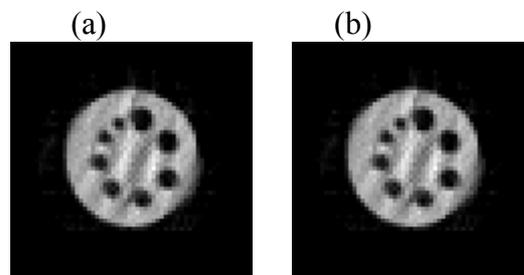


Figura 4.35: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

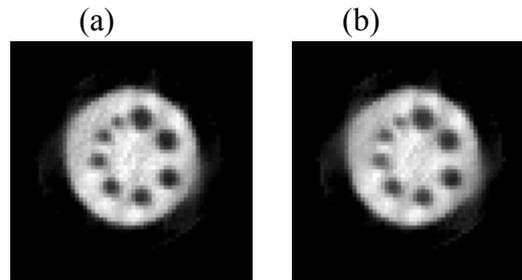


Figura 4.36: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

A Figura 4.34.a mostra a imagem do *phantom* assimétrico reconstruída através de método ART e a Figura 4.34.b mostra a reconstrução através do método SIRT. A Figura 4.35 mostra as imagens, do *phantom* assimétrico, reconstruídas através do método POCS sequencial, sendo a Figura 4.35.a utilizando a imagem de referência 2 e a Figura 4.35.b utilizando a imagem de referência 1. A Figura 4.36.a mostra a imagem, do *phantom* assimétrico, reconstruída através do método POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e a imagem 4.36.b foi reconstruída utilizando o mesmo método, porém com a imagem de referência 1.

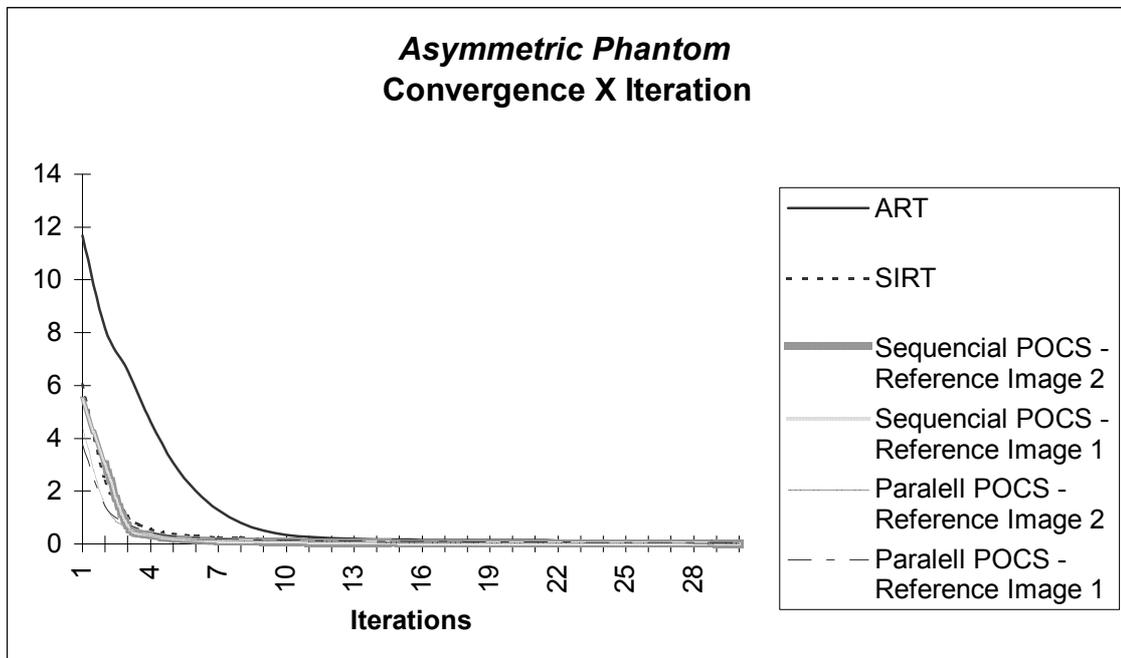
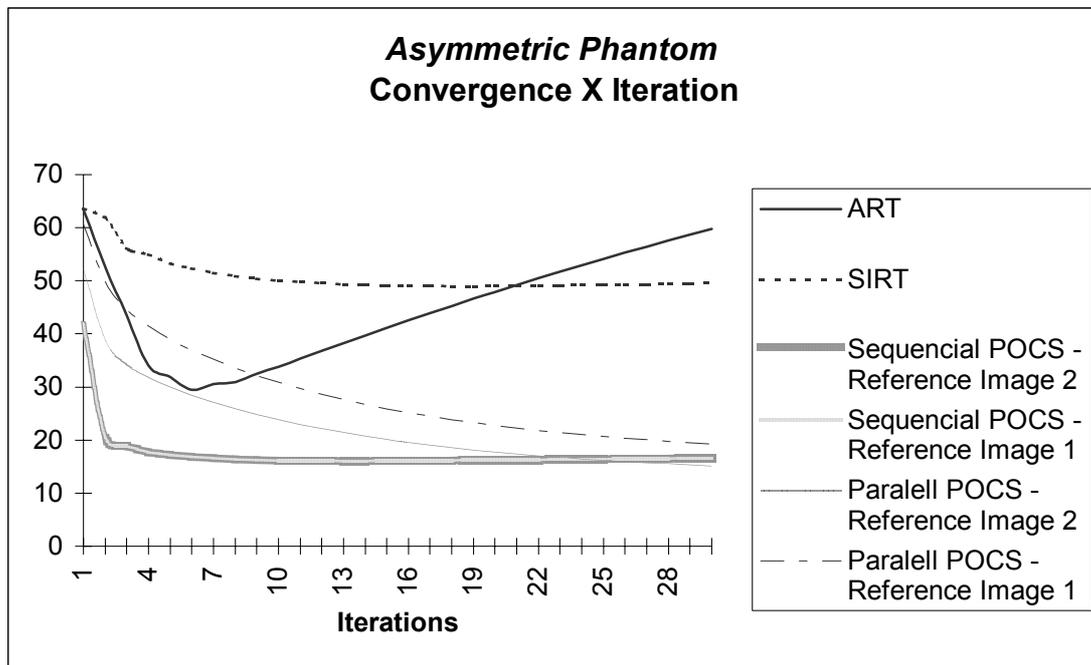


Figura 4.37: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* assimétrico com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 135°

A Figura 4.37 apresenta o gráfico de convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* assimétrico a partir de ângulos de projeções limitados.

A Figura 4.38 mostra o erro percentual entre a imagem original e a imagem reconstruída a partir das projeções limitadas entre 0° e 135°. Na última iteração, o erro percentual foi de 59,77% para reconstrução pelo ART, 49,55% para reconstrução pelo SIRT e 16,59% para o POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1, sendo que o mesmo valor para este método foi obtido utilizando a imagem de referência 2. O método POCS paralelo, utilizando a imagem de referência 2, obteve um erro de 15,21% e 19,25% utilizando a imagem de referência 1.



Figura

4.38: Erro percentual da imagem do *phantom* assimétrico reconstruída a partir de ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 135°

A Figura 4.39.a mostra a imagem, com ângulo limitado, reconstruída através dos métodos ART, enquanto a Figura 4.39.b mostra a imagem reconstruída através do SIRT.

A Figura 4.40.b e 4.40.c mostra a reconstrução do *phantom* simétrico através do método POCS sequencial utilizando as imagens de referência 2 e 1, respectivamente. Já a Figura 4.41.b e 4.41.c mostra o resultado da reconstrução através do método POCS paralelo utilizando as imagens de referência 2 e 1 respectivamente.

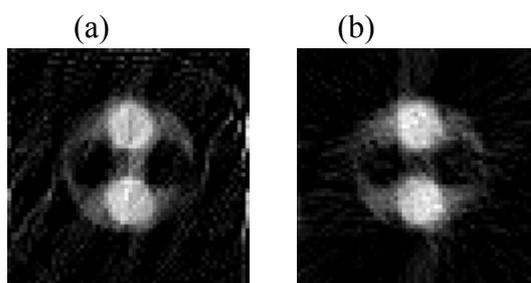


Figura 4.39: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT

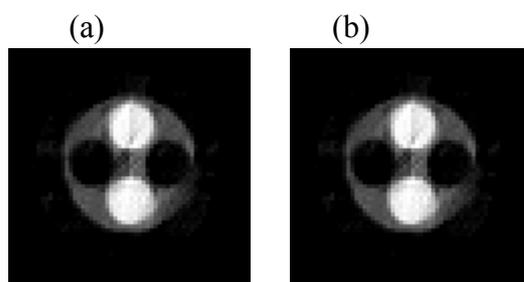


Figura 4.40: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

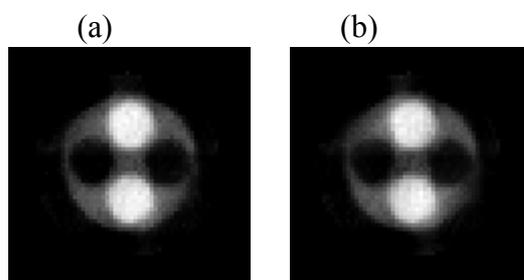


Figura 4.41: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

A Figura 4.42 mostra o gráfico de convergência, da reconstrução do *phantom* simétrico a partir de ângulos de projeções limitados, para os métodos utilizados

A Figura 4.43 mostra o erro percentual na reconstrução do *phantom* simétrico a partir das projeções limitadas entre 0° e 135° . Na última iteração o erro entre a imagem original e a imagem reconstruída foi de 64,89% na reconstrução pelo ART, 30,41% para reconstrução através do SIRT, 13,18% para o POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1 e imagem de referência, 10,90% para o POCS paralelo utilizando a imagem de

referência 2 e 15,28% para a reconstrução através de POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1.

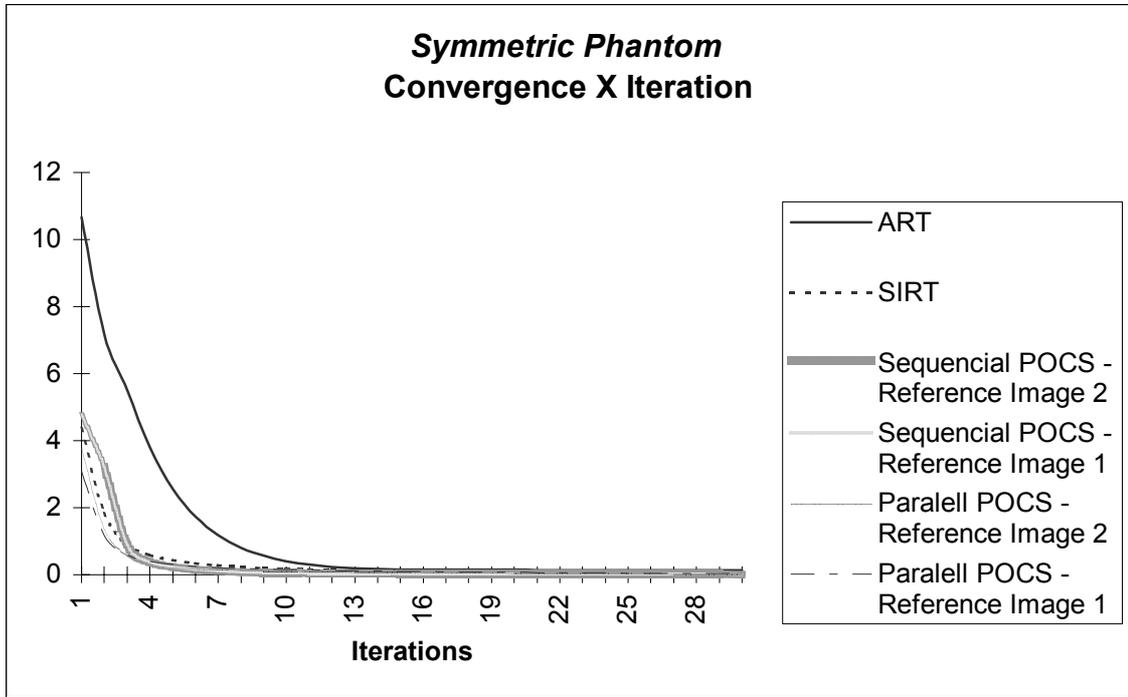


Figura 4.42: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* simétrico com ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 135°

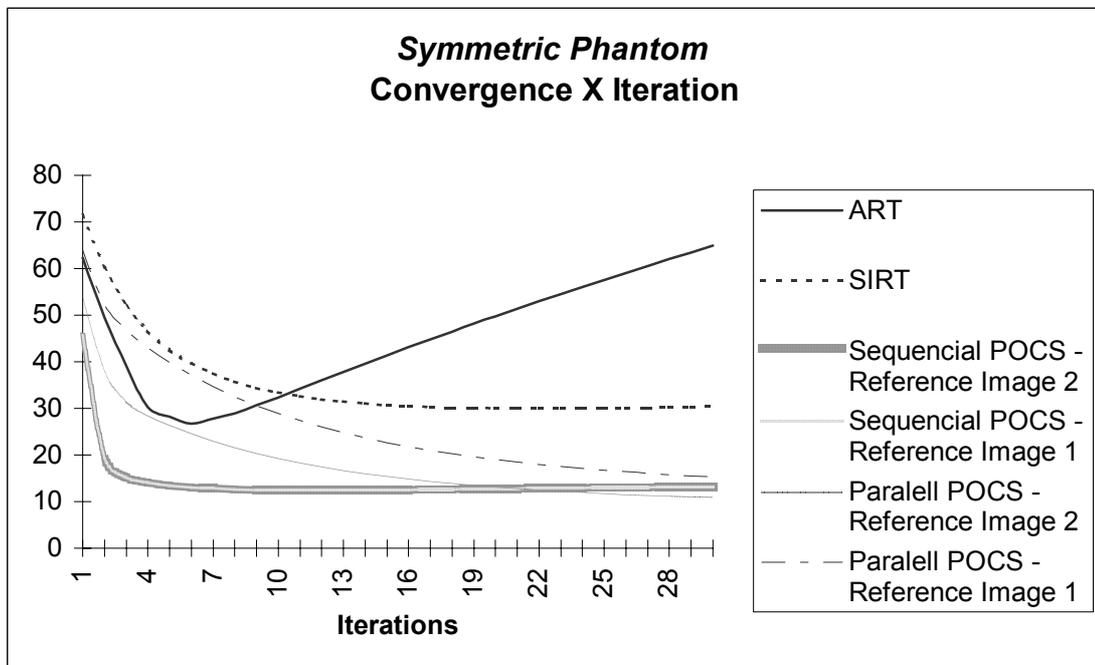


Figura 4.43: Erro percentual da imagem do *phantom* simétrico reconstruída a partir de ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 135°

Na sequência serão mostrados os resultados obtidos a partir dos *phantoms* experimentais.

4.3.2 *Phantoms Experimentais*

Foi feita a reconstrução dos *phantoms* descritos na seção 4.2.2, sendo considerado que as imagens obtidas a partir de projeções com baixo tempo de exposição (três segundos por raio) são as imagens de referência. As imagens reconstruídas a partir da maior exposição (vinte segundos por raio) representam a imagem ideal e as projeções obtidas a partir de dez segundos de exposição por raio representam a imagem que se deseja reconstruir.

A reconstrução das imagens com tempo de exposição de vinte segundos por raio é apresentado na Figura 4.44. A reconstrução foi feita utilizando o algoritmo SIRT. Neste caso acrescentaram-se as restrições de não negatividade e suporte finito.

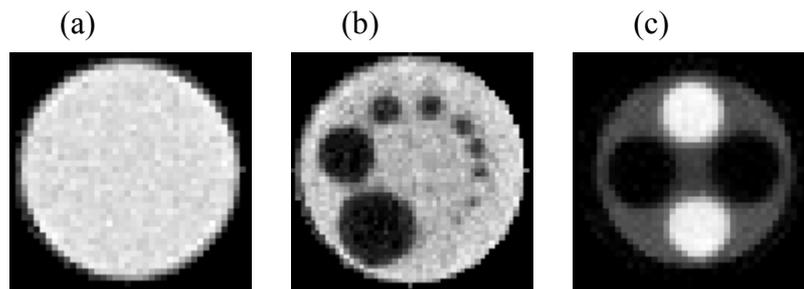


Figura 4.44: Imagens dos *phantoms* (a) homogêneo, (b) assimétrico e (c) simétrico reconstruída a partir de projeções com alta contagem de *fótons*

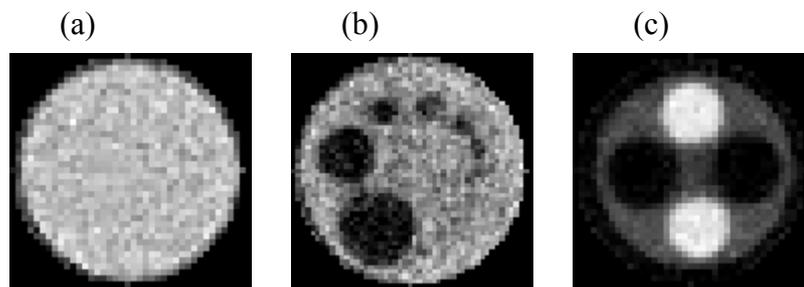


Figura 4.45: Imagens de referência do *phantom* (a) homogêneo, (b) assimétrico e (c) simétrico, obtidas a partir de baixa contagem de *fótons*

Para reconstrução da imagem de referência foi utilizado o mesmo método descrito no parágrafo anterior. A Figura 4.45 mostra as imagens utilizadas como referência.

A Figura 4.46 mostra o gráfico de erro percentual entre os *phantoms* das imagens da Figura 4.45 (imagens de referência) e da Figura 4.44 (imagens consideradas ideais). Na última iteração o *phantom* homogêneo possui um erro de 12,54%, o *phantom* assimétrico um erro de 21,93% e o *phantom* simétrico um erro de 8,99%.

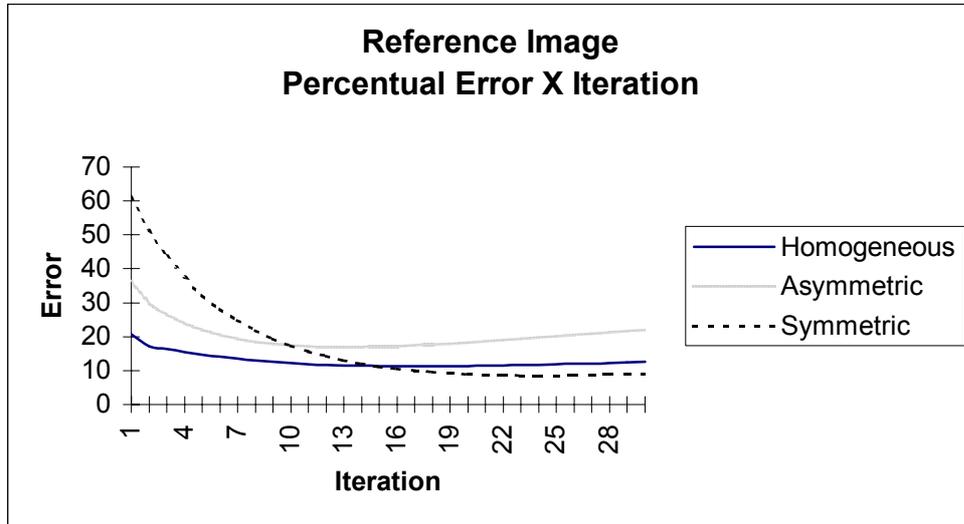


Figura 4.46: Gráfico de erro percentual entre as imagens de referência e as imagens consideradas ideais.

A Figura 4.47 mostra a imagem do *phantom* homogêneo reconstruída a partir dos algoritmos apresentados neste capítulo.

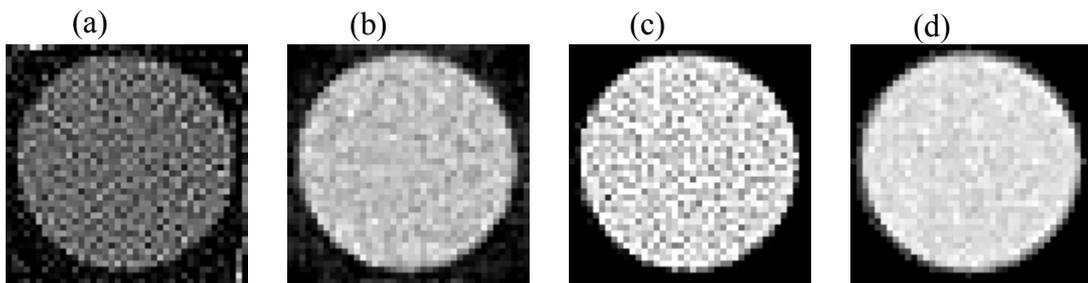


Figura 4.47: Imagem reconstruída do *phantom* homogêneo pelos métodos (a) POCS, (b) SIRT, (c) POCS sequencial e (d) POCS paralelo

Na Figura 4.48 é possível observar a taxa de convergência dos algoritmos na reconstrução do *phantom* homogêneo.

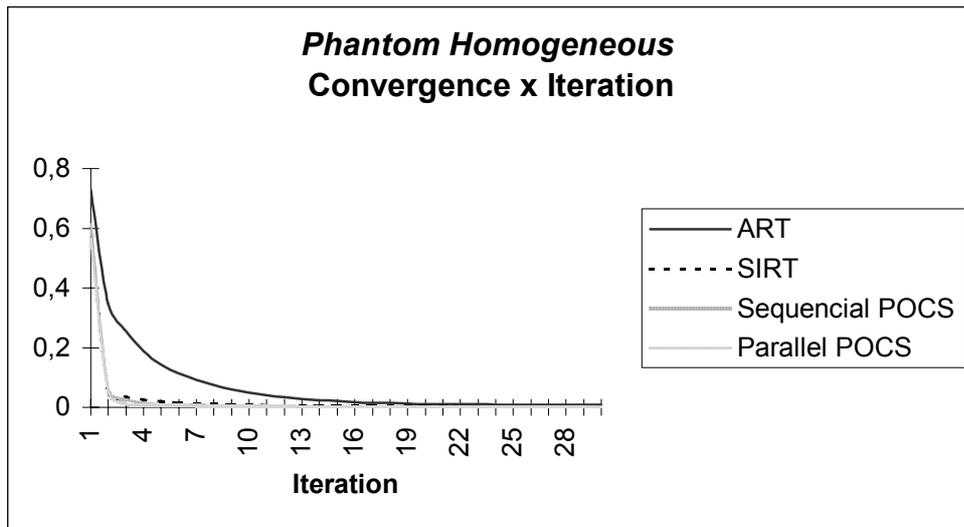


Figura 4.48: Gráfico que mostra a convergência para o *phantom* homogêneo

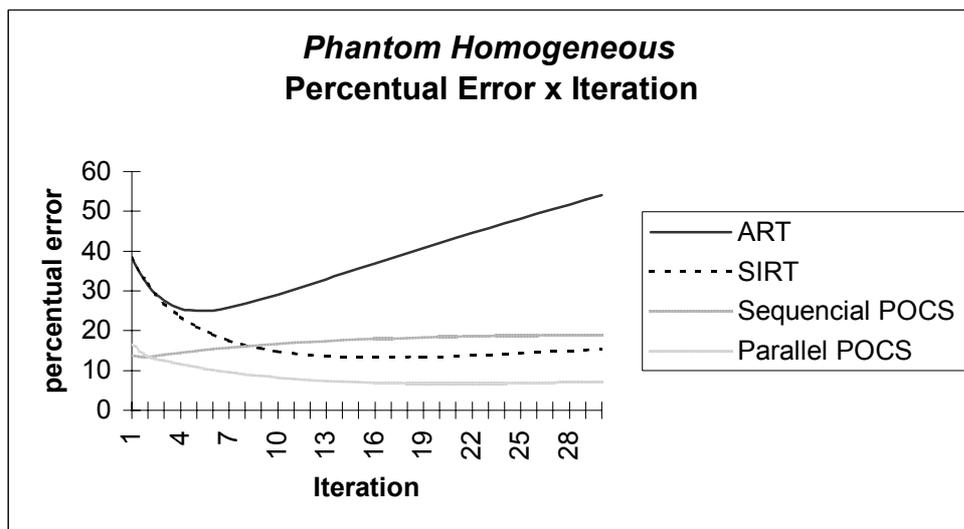


Figura 4.49: Erro percentual da imagem do *phantom* homogêneo

A Figura 4.49 mostra o erro percentual entre a imagem ideal, do *phantom* homogêneo, e a imagem reconstruída a partir das projeções com baixa exposição. Na última iteração o erro entre a imagem original e a imagem reconstruída a partir de projeções ruidosas pelo métodos utilizados foi de 54,01% para reconstrução pelo ART, 15,33% para reconstrução feita através do SIRT, 18,97% para o POCS sequencial e 7,09% para o POCS paralelo.

A Figura 4.50 mostra as imagens reconstruídas, do *phantom* assimétrico, com os métodos discutidos neste capítulo.

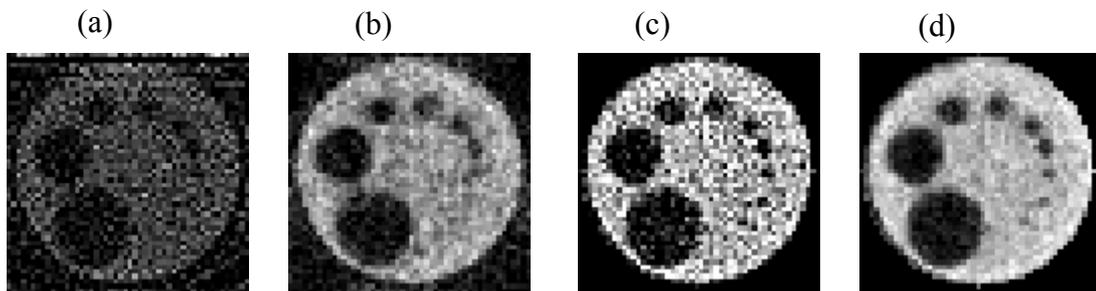


Figura 4.50: Imagem reconstruída do *phantom* assimétrico pelos métodos (a) ART, (b) SIRT, (d) POCS sequencial e (e) POCS paralelo

A Figura 4.51 mostra o gráfico de convergência para esta reconstrução. Os métodos, com exceção do ART, têm uma taxa de convergência muito próxima.

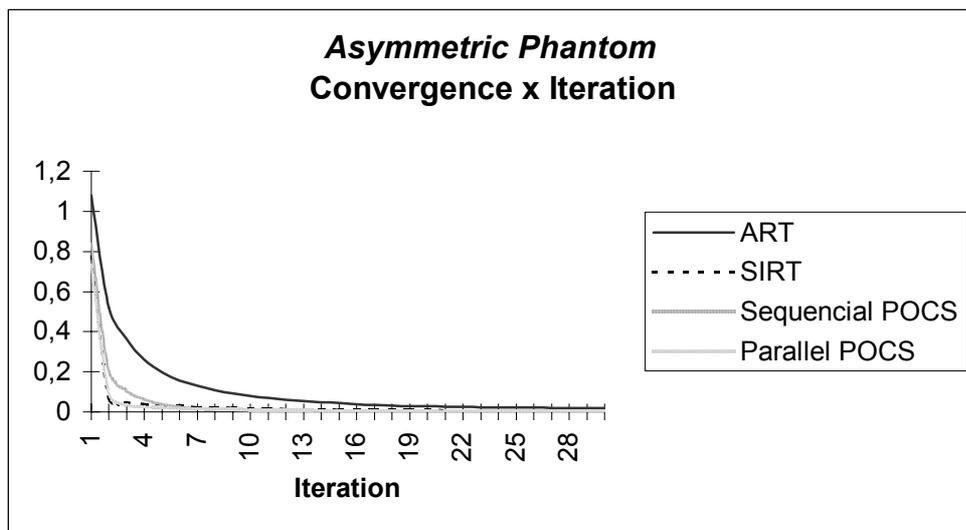


Figura 4.51: Gráfico que mostra a convergência para o *phantom* assimétrico

A Figura 4.52 mostra o gráfico do erro percentual, em cada iteração, na reconstrução do *phantom* assimétrico. Na última iteração o erro entre a imagem ideal e a imagem reconstruída foi de 95,98% para reconstrução pelo método ART, 27,57% para reconstrução feita através do SIRT, 34,73% para o POCS sequencial e 13,52% para o POCS paralelo.

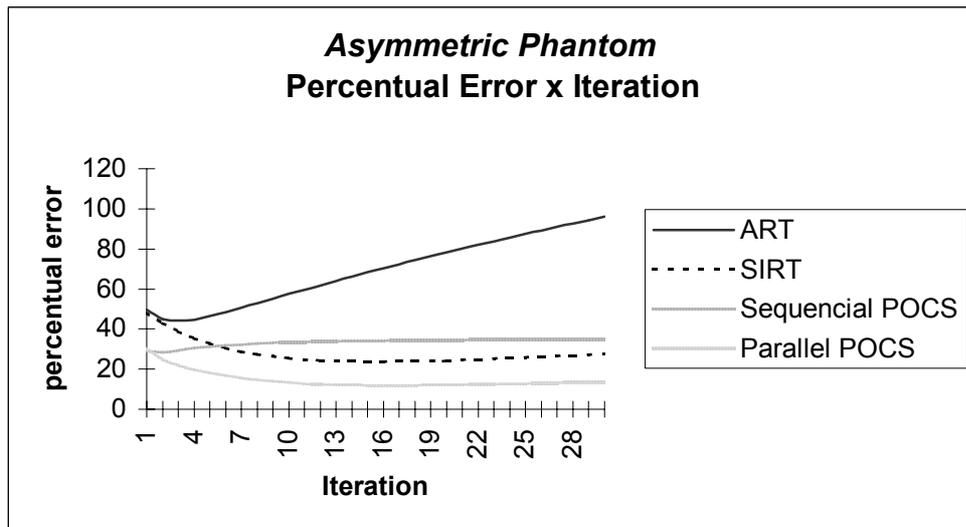


Figura 4.52: Erro percentual da imagem do *phantom* assimétrico

As imagens reconstruídas, do *phantom* simétrico, são mostradas na Figura 4.53.

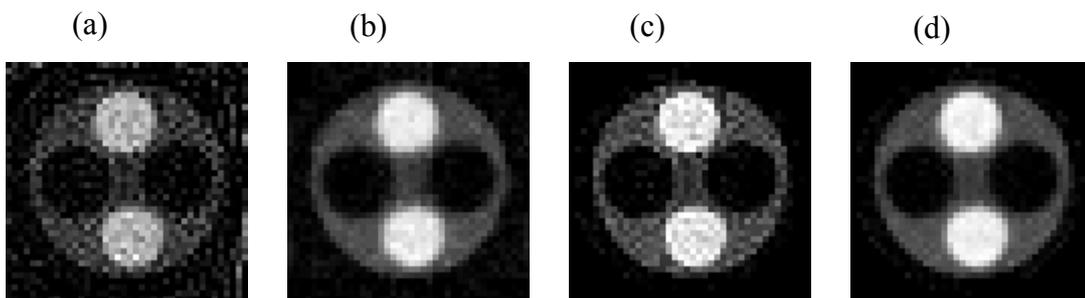


Figura 4.53: Imagem reconstruída do *phantom* simétrico pelos métodos (a) ART, (b) SIRT, (d) POCS sequencial e (e) POCS paralelo

O gráfico de convergência é mostrado na Figura 4.54.

A Figura 4.55 mostra o gráfico do erro percentual, em cada iteração, na reconstrução do *phantom* simétrico. Na última iteração o erro entre a imagem original e a imagem reconstruída foi de 49,69% para reconstrução pelo método ART, 11,66% para reconstrução feita através do SIRT, 18,89% para o POCS sequencial e 6,04% para o POCS paralelo.

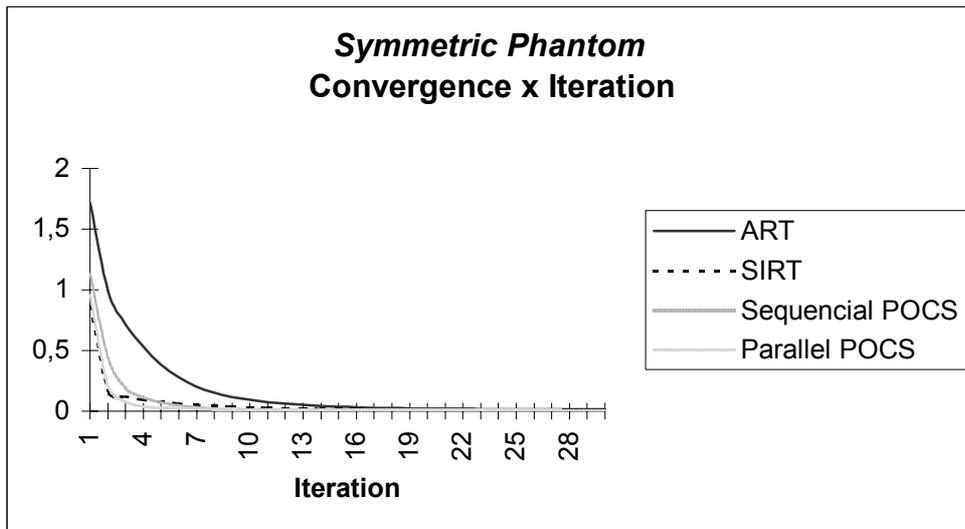


Figura 4.54: Gráfico que mostra a convergência para o *phantom* assimétrico

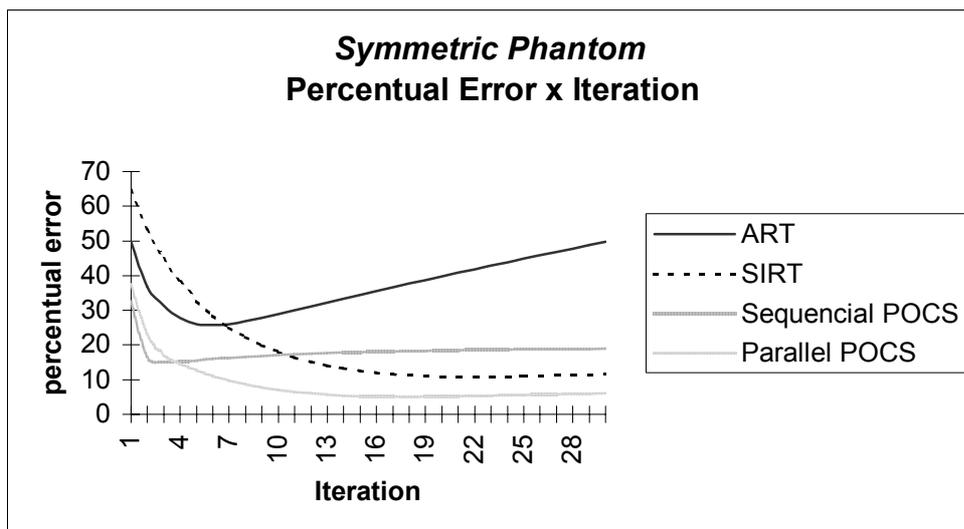


Figura 4.55: Erro percentual da imagem do *phantom* assimétrico

Resultados Obtidos com Ângulos de Projeções Limitados (0° a 90°)

As imagens de referência mostradas na Figura 4.45 serão chamadas doravante de imagens de referência 1. Para reconstrução com ângulos de projeções limitados, serão também admitidos como imagens de referência a reconstrução dos *phantons* obtidos a partir da exposição de 10 segundos por projeção. Essas imagens foram reconstruídas usando o

método SIRT, considerando a projeção no conjunto de suporte finito e não negatividade. A Figura 4.56 mostra essas imagens de referência, chamadas imagens de referência 2.

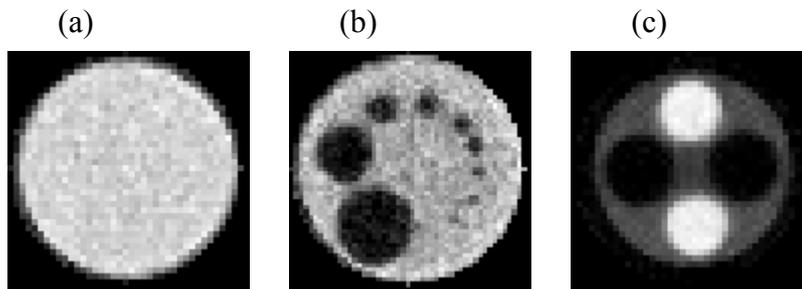


Figura 4.56: Imagens de referência 2 do *phantom* (a) homogêneo, (b) assimétrico e (c) simétrico.

O gráfico do erro percentual, comparado à imagem ideal, é mostrado na Figura 4.57. Na última iteração o *phantom* homogêneo possui um erro de 7,17%, o *phantom* assimétrico um erro de 13,82% e o *phantom* simétrico um erro de 4,80%.

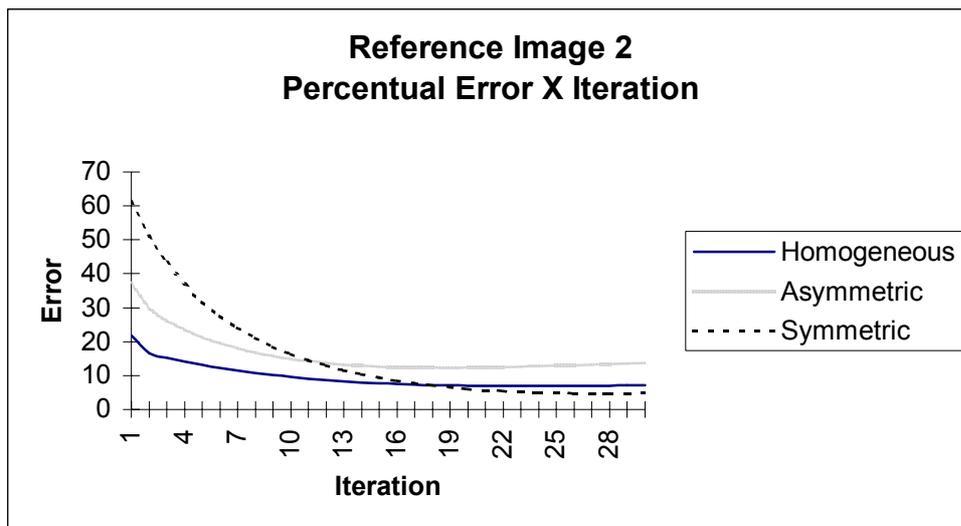


Figura 4.57: Gráfico de erro percentual entre as imagens de referência e as imagens consideradas ideais.

As Figuras 4.58, 4.59 e 4.60 mostram as imagens reconstruídas do *phantom* homogêneo, com ângulo de projeção variando de 0° a 90° . A Figura 4.58.a mostra a imagem reconstruída através de método ART e a Figura 4.58.b mostra a reconstrução através do método SIRT. A Figura 4.59 mostra as imagens reconstruídas através do método POCS sequencial, sendo que a Figura 4.59.a utiliza a imagem de referência 2 e a Figura 4.59.b utiliza a imagem de referência 1. A Figura 4.60.a mostra a imagem reconstruída através do

método POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2, a imagem 4.60.b foi reconstruída utilizando este mesmo método, porém utilizando a imagem de referência 1.

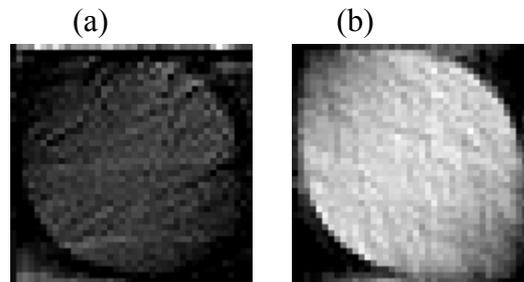


Figura 4.58: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT

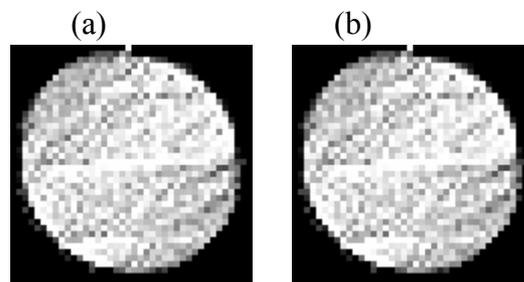


Figura 4.59: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

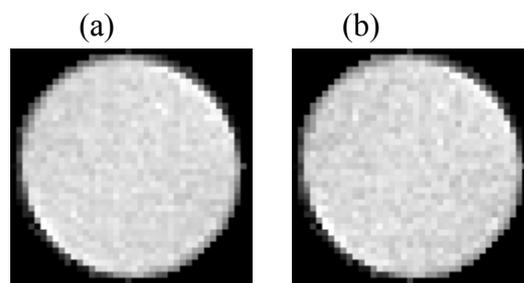


Figura 4.60: *Phantom* Homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

O gráfico de convergência dos métodos nesta reconstrução é mostrado na Figura 4.61.

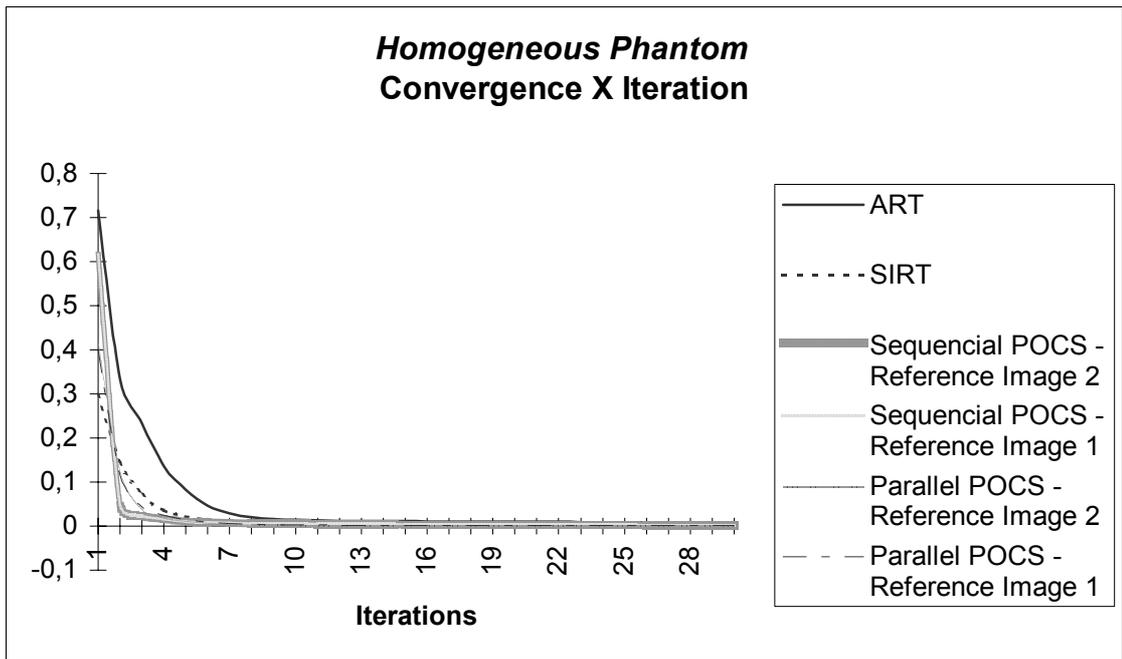


Figura 4.61: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* homogêneo com ângulo de projeções limitados entre 0° e 90°

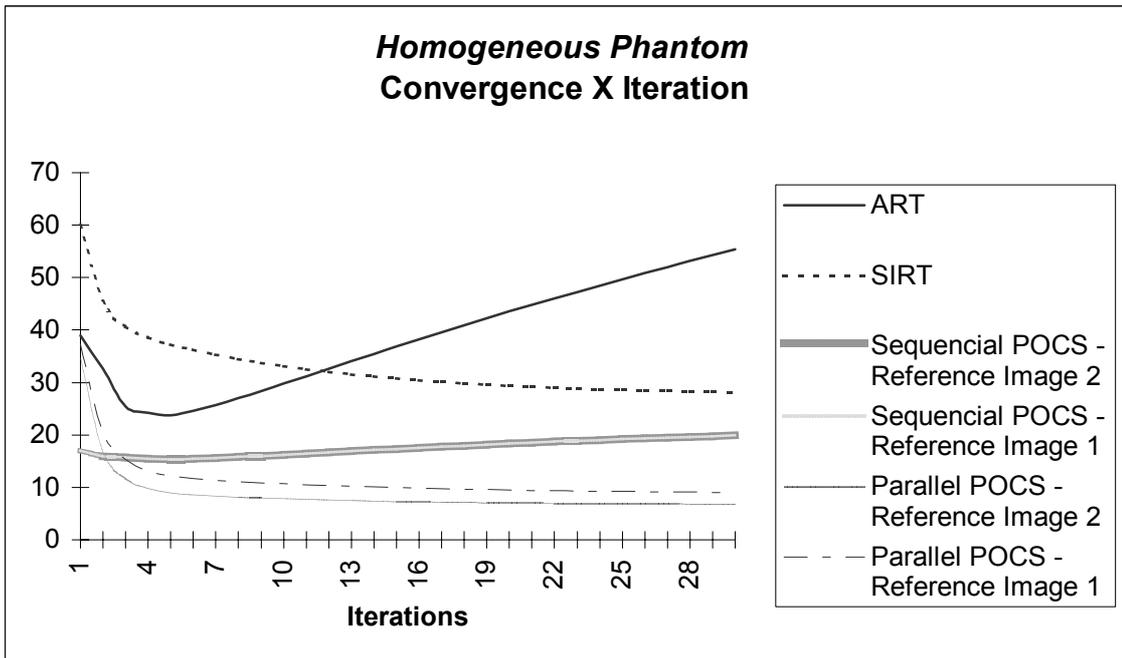


Figura 4.62: Erro percentual da imagem do *phantom* homogêneo, reconstruída a partir de ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

A Figura 4.62 mostra o erro percentual entre a imagem ideal, do *phantom* homogêneo, e a imagem reconstruída a partir das projeções limitadas entre 0° e 90° . Na

última iteração, o erro percentual foi de 55,41% para reconstrução pelo ART, 28,12% para reconstrução pelo SIRT e 19,91% para o POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1, sendo que o mesmo valor para este método foi obtido utilizando a imagem de referência 2. O método POCS paralelo, utilizando a imagem de referência 2, obteve um erro de 6,85% e 9,01% utilizando a imagem de referência 1.

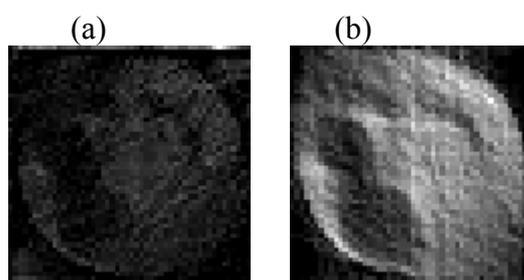


Figura 4.63: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através dos métodos (a) ART, (b) SIRT

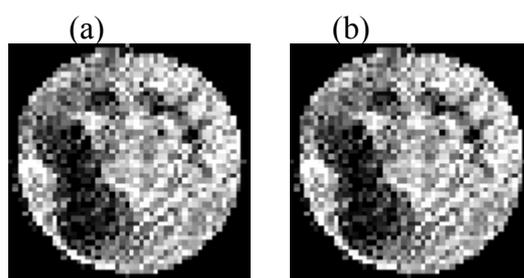


Figura 4.64: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

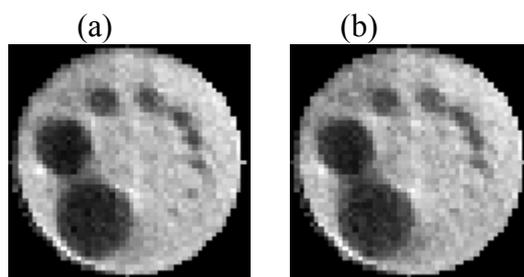


Figura 4.65: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

O *phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulo de visão limitado entre 0° e 90° , através dos métodos ART e SIRT é mostrado nas Figuras 4.63.a e 4.63.b

respectivamente. A Figura 4.64 mostra os resultado dessa reconstrução através do POCS sequencial e a Figura 4.65 através do POCS paralelo.

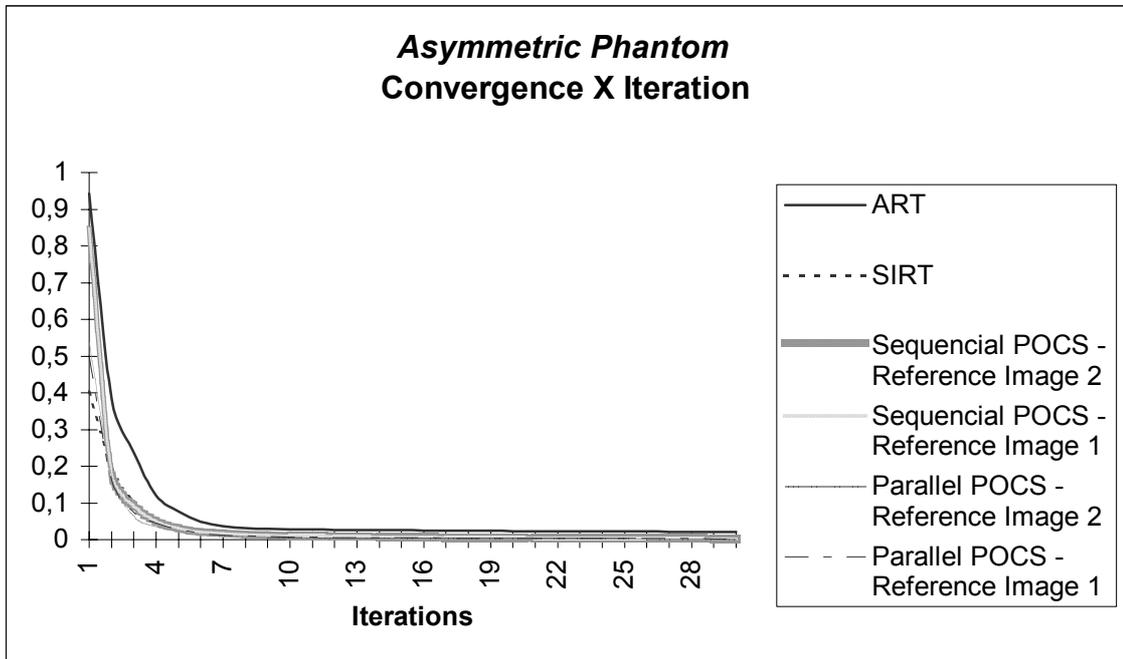


Figura 4.66: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* assimétrico com ângulo de projeções limitados entre 0° e 90°

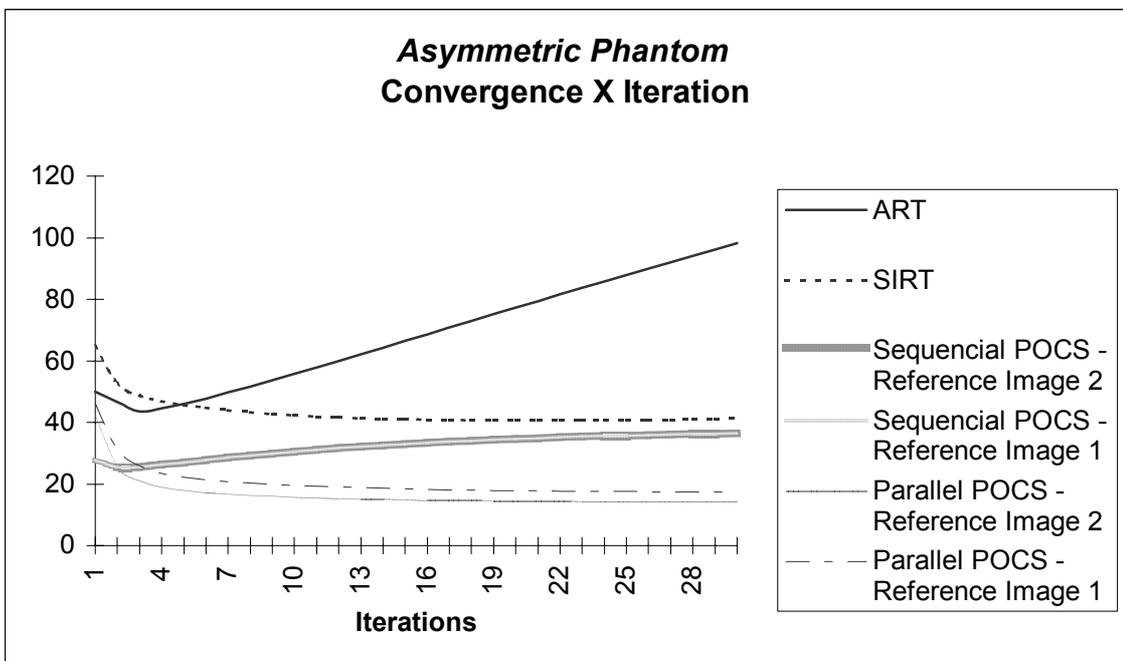


Figura 4.67: Erro percentual da imagem do *phantom* assimétrico, reconstruída a partir de ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

A Figura 4.66 mostra o gráfico de convergência dos métodos utilizados para a reconstrução do *phantom* assimétrico com dados limitados (0° a 90°).

O erro percentual, de cada imagem reconstruída em comparação com a imagem ideal, é apresentado no gráfico presente na Figura 4.67, onde o erro para a imagem reconstruída é 98,22% para o método ART, 41,19% para o método SIRT, 36,46% para o método POCS sequencial (utilizando a imagem de referência 1 e imagem de referência 2), 14,33% para o POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1 e 17,38% utilizando a imagem de referência 2.

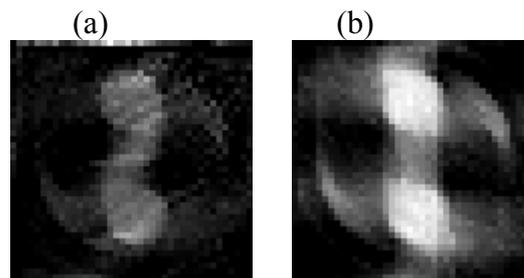


Figura 4.68: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT

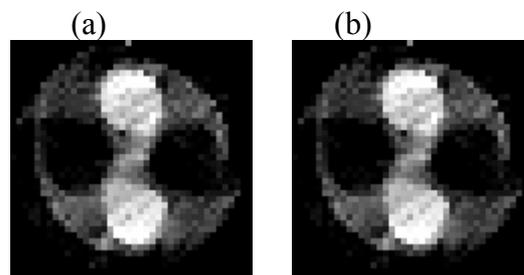


Figura 4.69: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

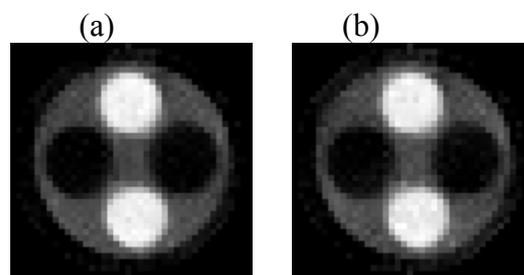


Figura 4.70: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 90°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

As imagens geradas pela reconstrução do *phantom* simétrico, com ângulo de projeções variando de 0° a 90°, são mostradas nas Figuras 4.68, 4.69 e 4.70. A imagem da Figura 4.68.a foi reconstruída utilizando o ART e a da Figura 4.68.b utilizando o SIRT. O resultado da reconstrução através de POCS sequencial é mostrado na Figura 4.69 e o resultado através de POCS paralelo é mostrado na Figura 4.70.

O gráfico de convergência dos métodos utilizados, para reconstrução deste *phantom*, é mostrado na Figura 4.71.

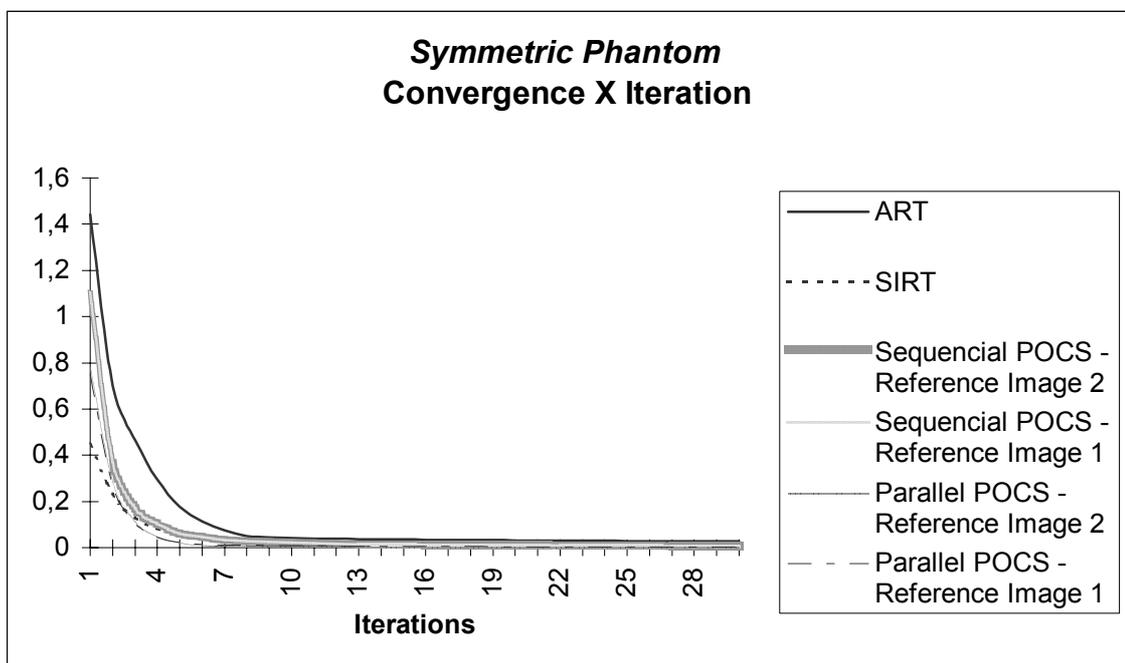


Figura 4.71: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* simétrico com ângulo de projeções limitados entre 0° e 90°

A Figura 4.72 mostra o erro percentual na reconstrução do *phantom* simétrico a partir das projeções limitadas (entre 0° e 90°). Na última iteração o erro entre a imagem ideal e a imagem reconstruída foi de 81,22% na reconstrução pelo ART, 44% para reconstrução através do SIRT, 33,09% para o POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1 e imagem de referência, 7,53% para o POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e 11,54% para a reconstrução através de POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1.

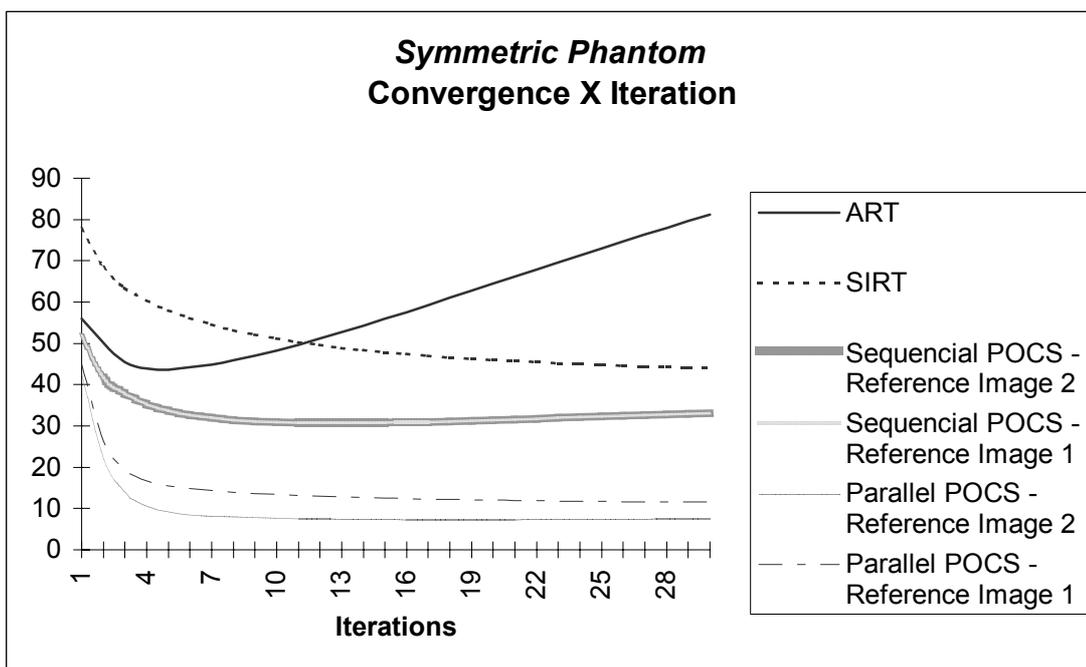


Figura 4.72: Erro percentual da imagem do *phantom* assimétrico, reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo entre 0° e 90°

Na sequência serão mostrados os resultados da reconstrução dos *phantoms* experimentais a partir de ângulos de visão limitado, com ângulos no intervalo de 0° a 135° .

Resultados Obtidos com Ângulos de Projeções Limitados (0° a 135°)

As imagens da reconstrução do *phantom* homogêneo, obtidas a partir de projeções com ângulo variando de 0° a 135° , são mostradas nas Figuras 4.73, 4.74 e 4.75. A Figura 4.73.a mostra a imagem reconstruída através de método ART e a Figura 4.73.b mostra a reconstrução através do método SIRT. A Figura 4.74 mostra as imagens reconstruídas através do método POCS sequencial, sendo a Figura 4.74.a utilizando a imagem de referência 2 e a Figura 4.74.b utilizando a imagem de referência 1. A Figura 4.75.a mostra a imagem reconstruída através do método POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e a imagem 4.76.b foi reconstruída utilizando o mesmo método, porém com a imagem de referência 1.

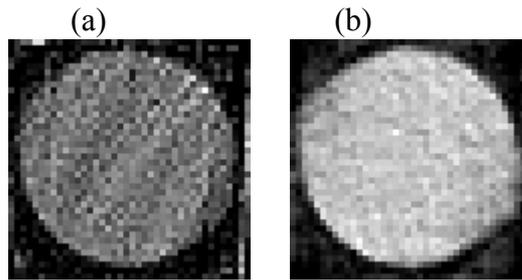


Figura 4.73: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT

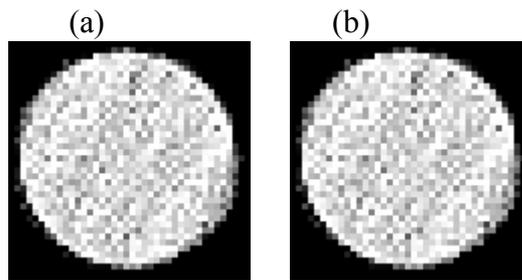


Figura 4.74: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

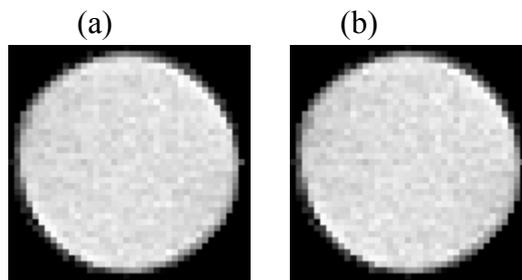


Figura 4.75: *Phantom* homogêneo reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

A Figura 4.76 mostra o gráfico de convergência na reconstrução do *phantom* homogêneo.

A Figura 4.77 mostra o erro percentual entre a imagem ideal, do *phantom* homogêneo, e a imagem reconstruída a partir das projeções limitadas entre 0° e 135° . Na última iteração, o erro percentual foi de 55,41% para reconstrução pelo ART, 18,76% para reconstrução pelo SIRT e 16,41% para o POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1, sendo que o mesmo valor para este método foi obtido utilizando a imagem de referência 2.

O método POCS paralelo, utilizando a imagem de referência 2, obteve um erro de 4,87% e 5,93% utilizando a imagem de referência 1.

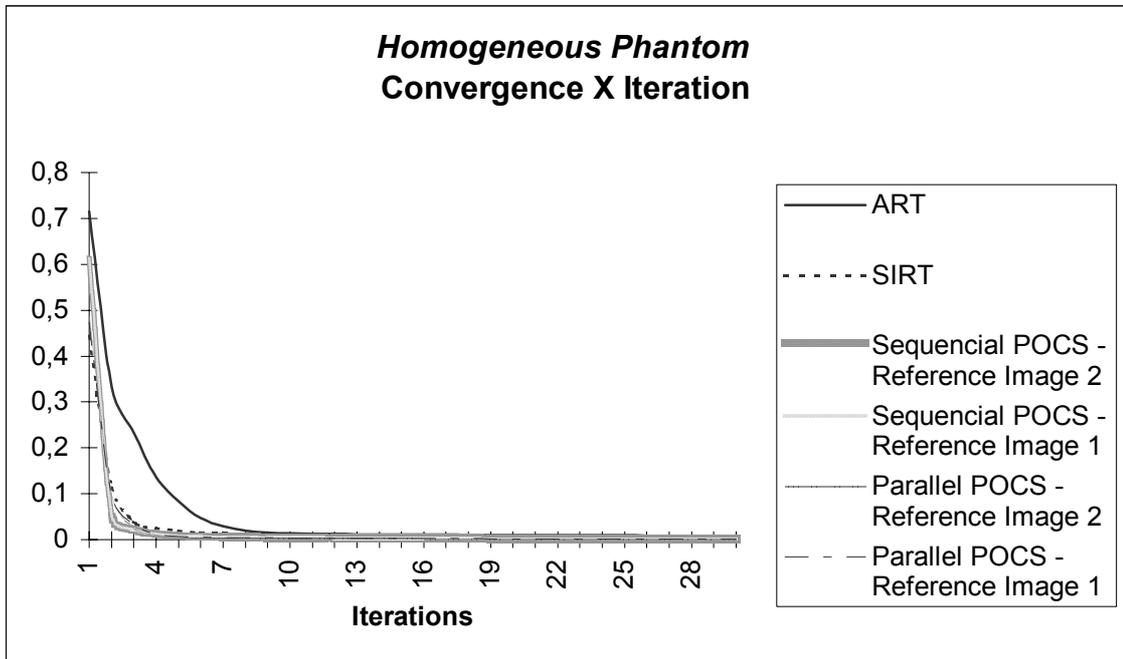


Figura 4.76: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* homogêneo com ângulo de projeções limitados entre 0° e 135°

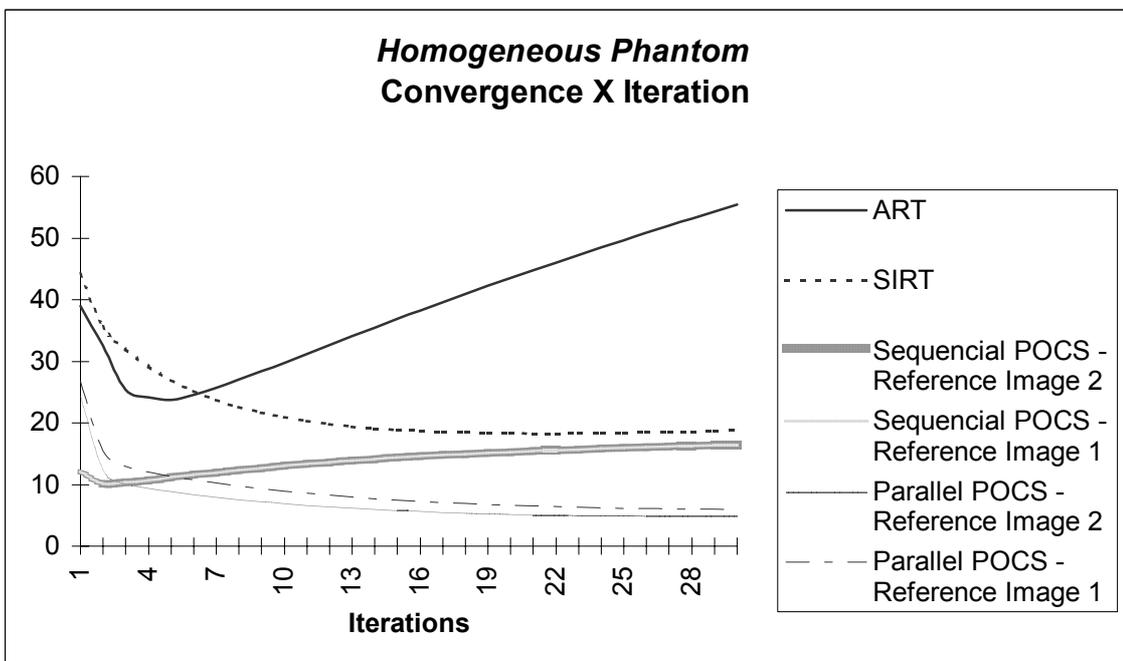


Figura 4.77: Erro percentual da imagem do *phantom* homogêneo, reconstruída a partir de ângulos de projeções limitados ao intervalo de 0° a 135°

A reconstrução, com ângulos de projeções limitados, do *phantom* assimétrico gera as imagens mostradas nas Figuras 4.78, 4.79 e 4.80. A Figura 4.78.a mostra o resultado da reconstrução através do ART e a 4.78.b através do SIRT. A Figura 4.79 mostra a imagem reconstruída através do POCS sequencial e a 4.80 através do POCS paralelo.

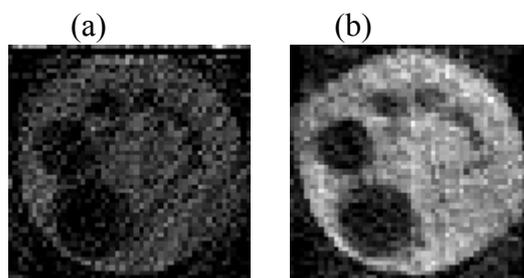


Figura 4.78: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do métodos (a) ART, (b) SIRT

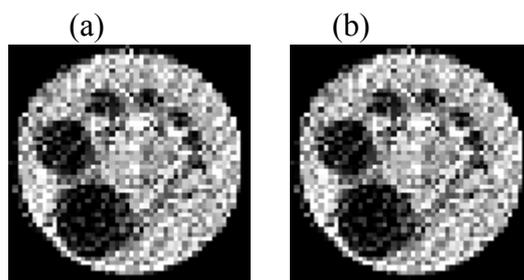


Figura 4.79: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

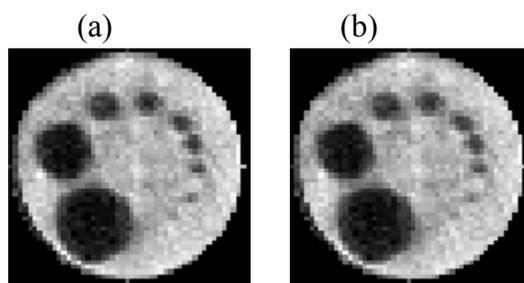


Figura 4.80: *Phantom* assimétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

O gráfico de convergência para a reconstrução em questão é mostrado na Figura 4.81.

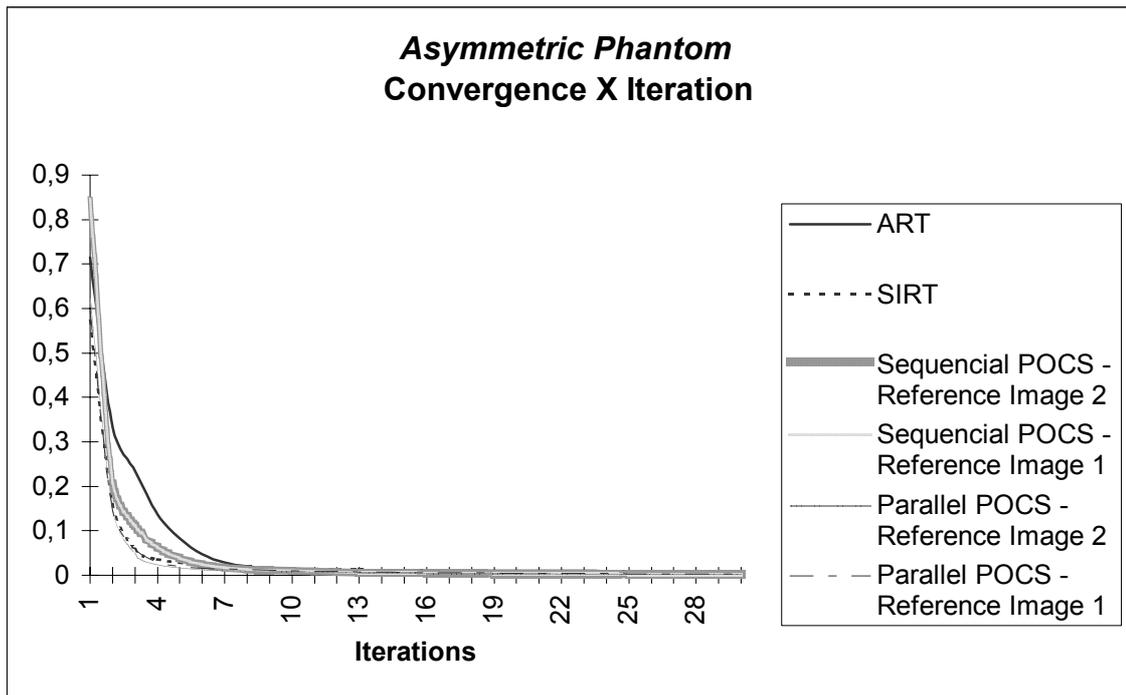


Figura 4.81: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* homogêneo com ângulo de projeções limitados entre 0° e 135°

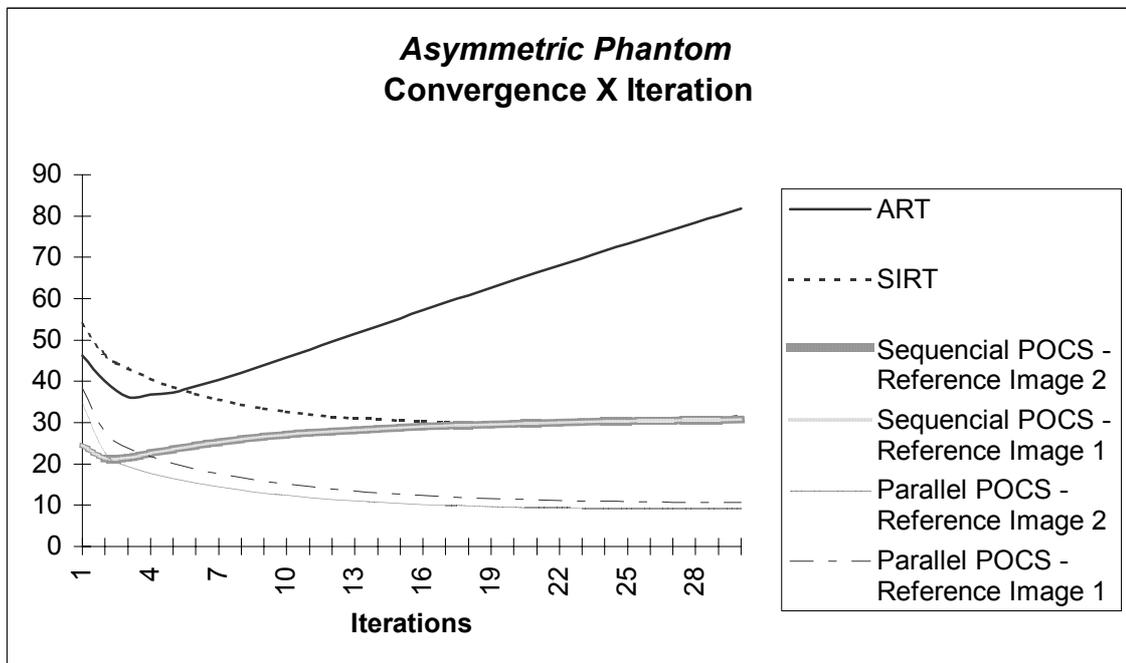


Figura 4.82: Erro percentual da imagem do *phantom* homogêneo, reconstruída a partir de ângulos de projeções limitados ao intervalo de 0° a 135°

O erro percentual, de cada imagem reconstruída em comparação com a imagem ideal, é apresentado no gráfico presente na Figura 4.82, onde o erro para a imagem reconstruída é 81,75% para o método ART, 31,48% para o método SIRT, 30,73% para o método POCS sequencial (utilizando a imagem de referência 1 e imagem de referência 2), 9,24% para o POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1 e 10,67% utilizando a imagem de referência 2.

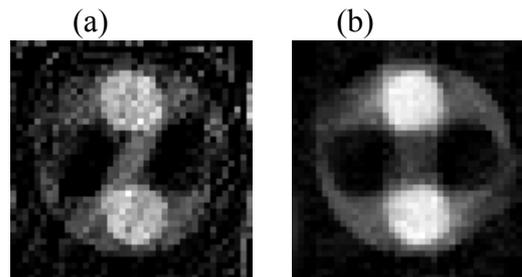


Figura 4.83: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através dos métodos (a) ART, (b) SIRT

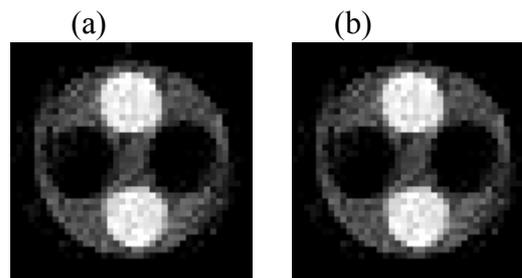


Figura 4.84: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1

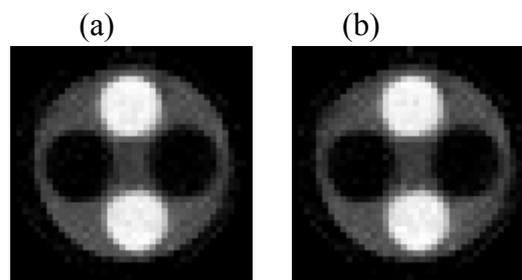


Figura 4.85: *Phantom* simétrico reconstruído, a partir de ângulos de projeções limitados (entre 0° e 135°), através do método (a) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e (b) POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1

As imagens geradas pela reconstrução do *phantom* simétrico, com ângulo de projeções variando de 0° a 135°, são mostradas nas Figuras 4.83, 4.84 e 4.85. A imagem da Figura 4.83.a foi reconstruída utilizando o ART e a da Figura 4.83.b utilizando o SIRT. O resultado da reconstrução através de POCS sequencial é mostrado na Figura 4.84 e o resultado através de POCS paralelo é mostrado na Figura 4.85.

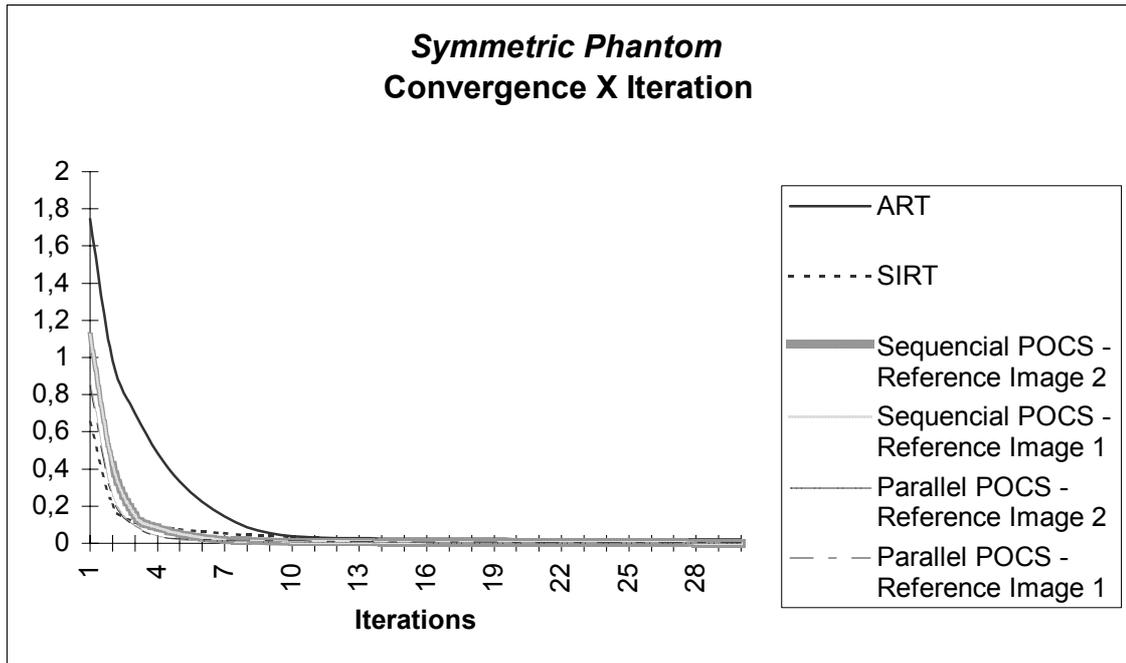


Figura 4.86: Convergência dos métodos utilizados para reconstrução do *phantom* homogêneo com ângulo de projeções limitados entre 0° e 135°

O gráfico de convergência na reconstrução do *phantom* assimétrico é mostrado na Figura 4.86.

A Figura 4.87 mostra o erro percentual na reconstrução do *phantom* simétrico a partir das projeções limitadas entre 0° e 135°. Na última iteração o erro entre a imagem original e a imagem reconstruída foi de 60,16% na reconstrução pelo ART, 16,76% para reconstrução através do SIRT, 16,61% para o POCS sequencial utilizando a imagem de referência 1 e imagem de referência, 4,73% para o POCS paralelo utilizando a imagem de referência 2 e 5,77% para a reconstrução através de POCS paralelo utilizando a imagem de referência 1.

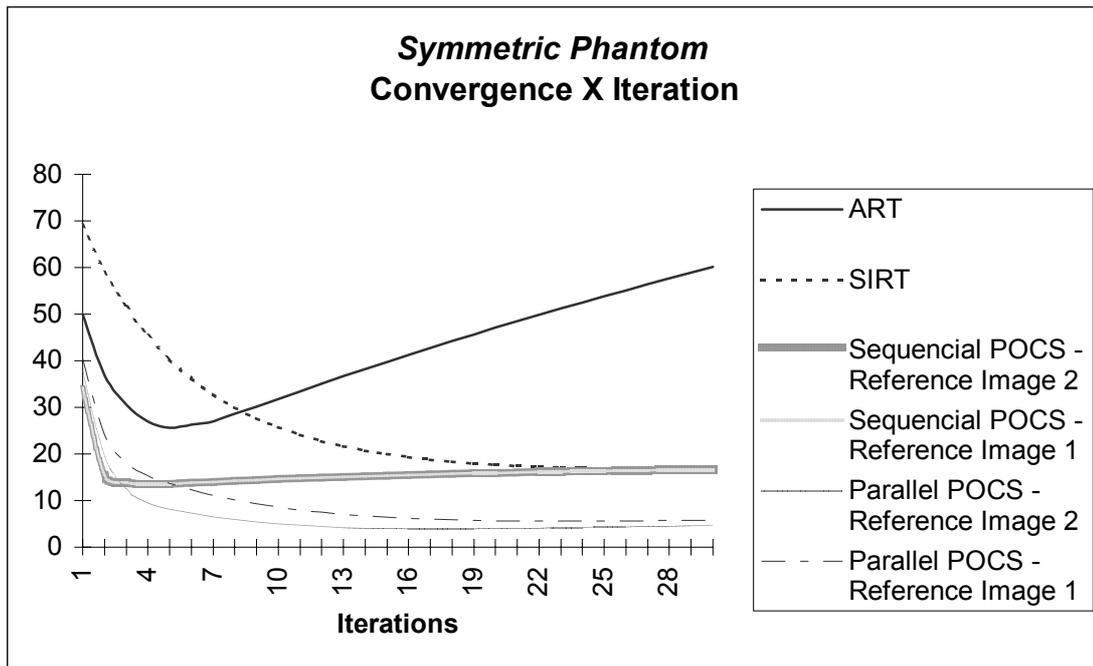


Figura 4.87: Erro percentual da imagem do *phantom* homogêneo, reconstruída a partir ângulos de projeções limitados ao intervalo de 0° a 135°

4.4 Análise dos Resultados

A presença de ruído nas projeções faz com que não exista interseção entre os conjuntos de restrição. Conseqüentemente os métodos seqüenciais não convergem para um ponto e portanto ficam oscilando entre os conjuntos.

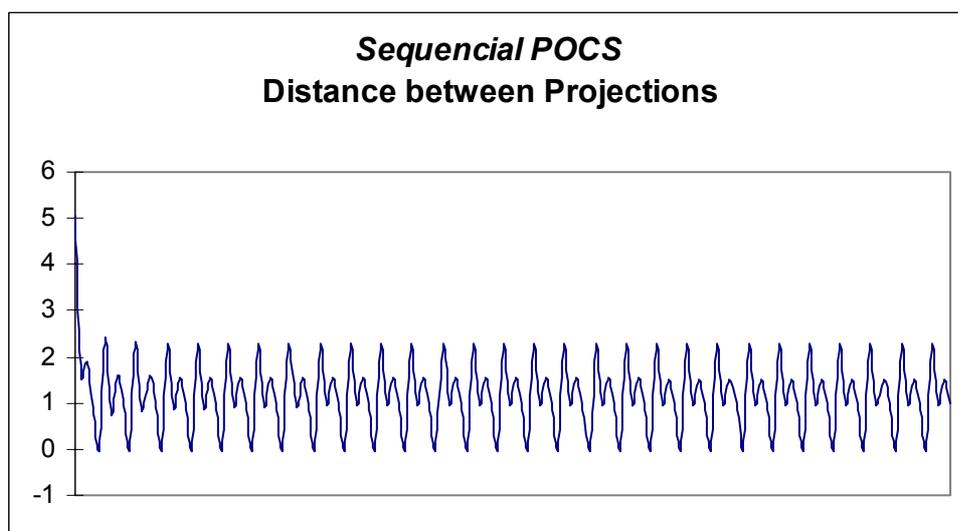


Figura 4.88: Distância entre as projeções feitas no método POCS seqüencial, no *phantom* homogêneo simulado.

A figura 4.88 mostra o gráfico que representa a distância entre as projeções em cada conjunto, no método POCS sequencial, para o *phantom* homogêneo simulado. Os demais *phantoms* têm o mesmo comportamento para os métodos sequenciais.

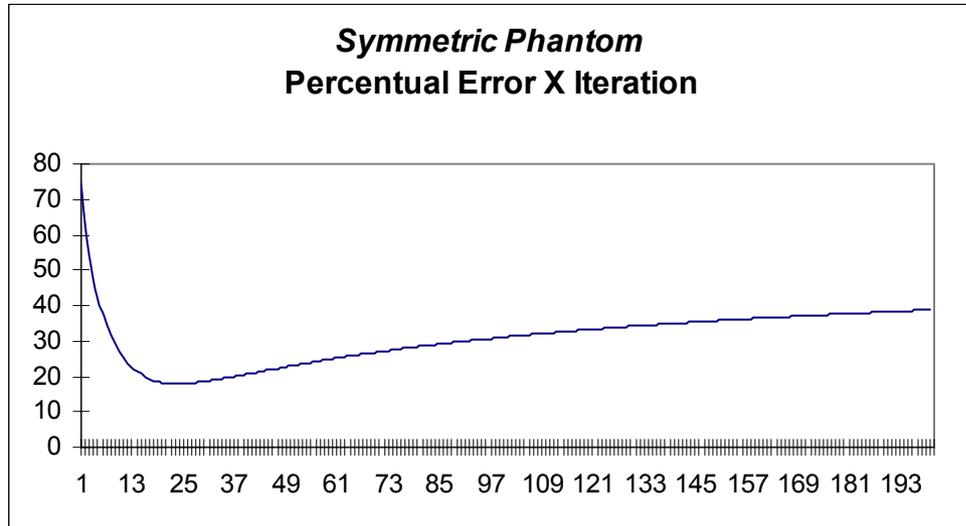


Figura 4.89: Erro percentual do *phantom* simétrico reconstruído através do SIRT em 200 iterações.

Em uma primeira análise o SIRT produz resultados aparentemente melhores que o POCS sequencial. Entretanto isso não é verdadeiro, pois se for analisado o gráfico de erro percentual do método, para um grande número de iterações, verifica-se que o mesmo diverge da solução desejada, de maneira similar ao ART porém em uma proporção inferior. A Figura 4.89, mostra o gráfico de convergência do SIRT em 200 iterações, para a reconstrução do *phantom* simétrico simulado.

5 Conclusão

Analisando-se os dados obtidos no estudo comparativo entre os métodos abordados, verificou-se que na presença de ruído o algoritmo POCS paralelo possibilitou melhores resultados, enquanto que o POCS sequencial e o SIRT obtiveram margens de erro (descritas pela equação 4.3) muito próximas, apesar de serem visualmente muito diferentes. O pior resultado foi obtido com o algoritmo ART.

As imagens produzidas pelo ART possuem bastante ruído, sendo que este aumenta com o número de iterações. A variação entre as intensidades em cada *pixel* aumenta consideravelmente devido malcondicionamento do problema. Para exemplificar este caso basta citar que para o *phantom* assimétrico experimental a atenuação varia entre 0 e 0,033, sendo que o resultado da reconstrução feita pelo método ART produz uma imagem com atenuação variando entre $-0,12$ e $0,14$ em 30 iterações.

O método POCS sequencial restringe esta variação através do uso de conhecimento *a priori*, produzindo assim resultados bem superiores ao método ART.

A não convergência do SIRT se também ao malcondicionamento do sistema de equações algébricas. O método POCS paralelo as variações da solução o que faz com que ele produza melhores resultados.

Para o caso de ângulos de projeções limitados, o POCS paralelo apresentou melhores resultados seguido pelo POCS sequencial. O SIRT não apresentou resultados melhores que os obtidos pelos métodos anteriores, porém sua margem de erro foi menor que a do método ART.

O sistema de equações lineares produzido neste caso é subdeterminado, ou seja, existem mais variáveis que equações, admitindo infinitas soluções. As restrições impostas pelos métodos POCS sequencial e paralelo limitam as soluções a um intervalo

aceitável. Observou-se que as imagens reconstruídas pelos métodos POCS com ângulos limitados ao intervalo entre 0° e 90° tiveram um desempenho melhor se comparado aos métodos SIRT e ART. Com ângulos limitados ao intervalo entre 0° e 135° a diferença é reduzida, lembrando que as projeções possuem baixo (*phantoms* experimentais) ou nenhum ruído (*phantoms* simulados).

O uso de restrições fez com que os algoritmos de reconstrução tomográfica produzissem melhores resultados, tanto na falta de dados como na presença de ruído. Os métodos que usaram restrições tiveram, em geral, a convergência acelerada, conforme mostrados pelos gráficos de convergência do capítulo 4.

O trabalho pode ter continuidade nos seguintes tópicos:

- pesquisa do valor de ε_R (distância máxima entre a imagem de referência e a imagem reconstruída) na equação (3.28);
- pesquisa de conjuntos de restrição sobre o ruído estatístico na imagem;
- implementação dos métodos em máquinas paralelas e análise de performance;
- comparação dos métodos POCS com os métodos de Transformadas.

6 Bibliografia

- [BRAC56] BRACEWELL, R.N. “*Strip Integration in Radio Astronomy*”, Aust. J. Phys. 9, pp 198-217, 1956
- [BHUM95] BHUMKAR, B.; Vora, P.L. e Shankar, K. “*A Set Approach to Image Reconstruction from Projections*”, ICP, 1995
- [BUEN95] BUENO, Josiane M. “*Reconstrução Tridimensional de Imagens Tomográficas baseada no uso de Transformada Rápida de Fourier*”, dissertação de mestrado no Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos – USP, março/1995
- [CENS81] CENSOR, Y. “*Row-action Methods for Huge and Sparse Systems and Their Applications*”, SIAM Review, vol 23, nr. 4, October 1981
- [CENS83] CENSOR, Y. “*Finite Series-Expansion Reconstruction Methods*”, Proceedings of IEEE, vol 71, nr. 3, March 83
- [CENS88] CENSOR, Y. “*Parallel Application of Block-Iterative Methods in Medical Imaging and Radiation Therapy*”, Mathematical Programming, vol 42, pp 307-325, 1988
- [CENS97] CENSOR, Y; ZENIOS. S.A. “*Parallel Optimization – Theory, Algorithms, and Application*”, Oxford University Press, New York, 1997
- [COMB93a] COMBETTES, P.L., “*The foundations of set theoretic estimation*”, Proc. IEEE, VI. 81, No. 2, pp 182-208, Feb. 1993
- [COMB93b] COMBETTES, P.L.; PUH, H. “*Parallel Projection Methods for Set Theoretic Signal Reconstruction and Restoration*”, ICASSP, Vol 5, pp 297-300, 1993
- [COMB96] COMBETTES, P. L., “*The Convex Feasibility Problem in Image Recovery*”, Advances in Imaging and Electron Physics, Vol.95, pp 155-270, Academic Press, 1996.

- [CORM63] CORMACK, A. M. “*Representation of a Function by Its Line Integrals, with some Radiological Applications*”, J. Appl. Physics, v. 34, pp 2722-2727, 1963.
- [CRUV87] CRUVINEL, P.E.. “*Minitomógrafo de Raio X e Raio γ Computadorizado para Aplicações Multidisciplinares*”Campinas, UNICAMP, 1987 (tese)
- [GILB72] GILBERT, P. “*Iterative Methods for the Three-dimensional Reconstruction of an Object from Projections*”, J. Theor. Biology, vol 36, pp 105-117, 1972
- [GORD70] GORDON, R; BENDER, R.; HERMAN, G.T. “*Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for a Three-dimensional Electron Microscopy and X-ray Photography*”, J. Theor. Biology, vol 29, pp 471-481, 1970
- [HERM75] HERMAN, G.T.. “*A Relaxation Methods for Reconstructing Objects from Noisy X-Rays*”, Mathematical Programming, vol 8, pp 1-19, 1975.
- [HERM78] HERMAN, G.T.; LENT, A. e LUTZ, P.H. “*Relaxation Methods for Image Reconstruction*”, Communications of the ACM, Vol 21, no. 2, February 1978.
- [HERM93] HERMAN, G.T.; MEYER, L.B. “*Algebraic Reconstruction Techniques Can Be Made Computationally Efficient*”, IEEE Trans. On Medical Imaging, vol 12, nr. 3, pp 600-609. september, 1993
- [HOUN73] HOUNSFIELD, G.N. “*Computerized Transverse Axial Scanning (Tomography) I: Description of System*”, Brit. J. Radiol., v 46, pp 1016-1022, 1973
- [KAK_88] KAK, A.C. and Slaney, M. “*Principles of Computerized Tomographic Imaging*”, IEEE Press, 1988
- [LIBB71] LIBBEY, Robert L. “*Signal and Image Processing Sourcebook*”, Multiscience Press, 1994.
- [LOPE88] LOPES, R.T. “*Tomografia Computadorizada em Testes não Destrutivos*”, Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1988, (Tese)
- [OSKO88] OSKOU-FARD, P. e STARK, H. “*Tomographic Image Reconstruction Using the Theory of Convex Projections*”, IEEE Transactions on Medical Imaging, vol7, n. 1, pp 45-58, march 1988.
- [OSKO89] OSKOU-FARD, P. e STARK, H. “*A Comparative Study of Three Reconstruction Methods for a Limited-View Computer Tomography Problem*”, IEEE Transactions on Medical Imaging, vol 8, n. 1, pp 43-49, march 1989.

- [PENG89] PENG, H. e STARK, H. “*One-Step Image Reconstruction from Incomplete Data in Computer Tomography*”. IEEE Transactions on Medical Imaging, vol 8, no. 1, pp 16-31, march 1989.
- [PENG92] PENG, H. e STARK, H. “*Image Recovery in Computer Tomography from Partial Fan-Beam Data by Convex Projections*”. IEEE Transactions on Medical Imaging, vol 11, no. 4, pp 470-478, december 1992.
- [RADO17] RADON, J. “*On the Determination of Functions from their Integrals along Certain Manifolds*”, Ber. Saechs. Akad. Wiss, Leipzig Math. Phys., v. 69, pp 262-277, 1917
- [RAMA71] RAMACHANDRAN, G. N.; LAKSHMINARAYANAN, A. V. “*Three-Dimensional Reconstruction from Radiographs and Eletron Micrographs: Application of Convolutions intead of Fourier Transformers*”, Proc. National Academic Science USA, v. 68, pp 2236-2240, 1971.
- [SEZA82] SEZAN, M.I. and Stark H., “*Image restoration by the method of convex projections: part2- Applications and numerical results*”, IEEE Trans. Medical Imaging, Vol. MI-1, pp 95-101, Oct 1982
- [SEZA83] SEZAN, M.I. and STARK, H. “*Image Restoration by Convex Projections int the Presence of Noise*”, Applied Optics, vol 22, nr 18, pp 2781-2789, september 1983
- [SEZA84] SEZAN, M.I. and STARK, H. “*Tomographic Image Reconstruction from Incomplete View Data by Convex Projections and Direct Fourier Inversion*”, IEEE Transactions on Medical, Vol. MI-3, No. 2, June 1984
- [STAR98] STARK, H.; YANG, Y. “*Vector Space Projections – A Numerical Approach to Signal and Image Processing, Neural Nets, and Optics*”, John Wiley & Sons, Inc 1998.
- [RIBE94] RIBEIRO, Gilmar C. “*Desenvolvimento de um algoritmo para a reconstrução tridimensional para imagens de um ninitomógrafo, baseado no Método de Reconstrução Algébrica Modificado e interpolação Spline*”, dissertação de mestrado na Ciência da Computação UFSCar, dezembro/1994
- [RUST72] RUST, B.W.; BURRUS, W.R. “*Mathematical Programming and the Numerical Solution of Linear Equations*”, American Elsevier Publishing Company, 1972

- [TANA71] TANABE, K. “*Projection method for solving a singular system*” Numer. Math., vol 17, pp 203.214, 1971
- [YOUL82] YOULA, D.C; WEBB, H. “*Image Restoration by the Method of Convex Projections: Part1 – Theory*”, IEEE Trans. Med. Imaging, MI-1 pp 81-94, oct 1982.
- [ZANI99] ZANIBONI, G.T. e MASCARENHAS, N.D.A “*Image Data Fusion Using Projection over the Set of Solutions of an Underdetermined Least Squares Problem*”, Proceedings of XII SIBIGRAPI, 1999.