

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

# **Novas Propostas em Filtragem de Projeções Tomográficas sob Ruído Poisson**

**Eduardo da Silva Ribeiro**

São Carlos  
2010

# Novas Propostas em Filtragem de Projeções Tomográficas sob Ruído Poisson

Eduardo da Silva Ribeiro

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Departamento de Computação da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Nelson Delfino d'Ávila Mascarenhas

SÃO CARLOS

2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

R484np

Ribeiro, Eduardo da Silva.

Novas propostas em filtragem de projeções tomográficas sob ruído Poisson / Eduardo da Silva Ribeiro. -- São Carlos : UFSCar, 2010.

149 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Processamento de imagens. 2. Tomografia computadorizada. 3. Filtragem de ruído. 4. Estimadores de Bayes. 5. Filtro de Wiener. 6. Transformada de Wavelet. I. Título.

CDD: 006.42 (20<sup>a</sup>)

**Universidade Federal de São Carlos**  
**Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia**  
**Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação**

**“Novas Propostas em Filtragem de Projeções  
Tomográficas sob Ruído Poisson”**

**EDUARDO DA SILVA RIBEIRO**

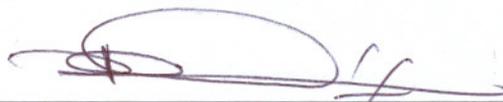
Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação

**Membros da Banca:**

*Nelson Delfino d'Ávila Mascarenhas*

---

**Prof. Dr. Nelson Delfino d'Ávila Mascarenhas**  
(Orientador - DC/UFSCar)



---

**Prof. Dr. Paulo Estevão Cruvinel**  
(EMBRAPA - Instrumentação Agropecuária)



---

**Prof. Dr. Aparecido Nilceu Marana**  
(Departamento de Computação/UNESP-Bauru)

São Carlos  
Maio/2010

*A meus pais*

*Sr. Acir e Sra. Maria de Lourdes.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me guiar em todos os momentos na minha vida. Agradeço a minha família pelo apoio, motivação e por sempre estar ao meu lado. Agradeço a minha namorada Mara pelo amor, carinho e por suportar a distância durante estes dois anos.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Nelson Mascarenhas, pela paciência, amizade e oportunidade de realização deste trabalho. Agradeço ao Dr. Paulo Cruvinel pelas importantes contribuições feitas a este trabalho e por gentilmente ceder as projeções tomográficas capturadas no CNPDIA-EMBRAPA. Agradeço aos professores do Departamento de Computação pelas contribuições na minha formação e a Capes pela bolsa de fomento.

Cabe um agradecimento especial para Fabrício Coutinho, Humberto Coutinho e André Coutinho pelo apoio que recebi deste a graduação. Ficarei eternamente grato pela amizade mantida comigo com a minha família. Agradeço também ao meu padrinho, Dr. Márcio Heleno Junqueira e a Dra. Ana Maria Squetinno pelo apoio e incentivo.

Agradeço aos colegas do GAPIS: Alexandre, Denis, Michelle, Débora, Ana Luísa, Márcia, Renato, Chohfi, Marcos, Marcelo e João pelo companheirismo e amizade.

# Resumo

Nesta dissertação técnicas de filtragem de projeções tomográficas com ruído Poisson são apresentadas. Utilizamos variações de três técnicas de filtragem: estimação Bayesiana, filtragem de Wiener e limiarização no domínio Wavelet. Foram utilizados dez estimadores MAP, em cada uma densidade de probabilidade foi utilizada como informação *a priori*. Foi utilizado um janelamento adaptativo para o cálculo das estimativas locais e um teste de hipóteses para a escolha da melhor densidade de probabilidade que se adequa a cada projeção. Utilizamos o filtro de Wiener na versão pontual e FIR, em ambos os casos utilizamos um esquema adaptativo durante a filtragem. Para a limiarização no domínio Wavelet, verificamos o desempenho de quatro famílias de funções Wavelet e quatro técnicas de obtenção de limiares. Os experimentos foram feitos com o *phantom* de Shepp e Logan e cinco conjunto de projeções de *phantoms* capturas por um minitomógrafo no CNPDIA-EMBRAPA. A reconstrução da imagem feita com o algoritmo POCS paralelo. A avaliação da filtragem foi feita após a reconstrução com os seguintes critérios de medida de erro: ISNR, PSNR, IDIV e SSIM.

Palavras-chave: Tomografia Computadorizada, Filtragem de Sinais, Estimadores MAP, Filtro de Wiener, Limiarização Wavelet.

# Abstract

In this dissertation we present techniques for filtering of tomographic projections with Poisson noise. For the filtering of the tomographic projections we use variations of three filtering techniques: Bayesian estimation, Wiener filtering and thresholding in Wavelet domain. We used ten MAP estimators, each estimator with a different probability density as prior information. An adaptive windowing was used to calculate the local estimates. A hypothesis test was used to select the best probability density to each projection. We used the Pointwise Wiener filter and FIR Wiener Filter, in both cases we used an adaptive scheme for the filtering. For thresholding in wavelet domain, we tested the performance of four families basis of wavelet functions and four techniques for obtaining thresholds. The experiments were done with the phantom of Shepp and Logan and five sets of projections of phantoms captured by a CT scanner developed by CNPDIA-EMBRAPA. The image reconstruction was made with the parallel POCS algorithm. The evaluation of the filtering was made after reconstruction with the following criteria for measurement of error: ISNR, PSNR, SSIM and IDIV.

Keywords: Computed Tomography, Filtering of Signals, MAP Estimators, Wiener Filter, Wavelet Thresholding.

# Lista de Figuras

Figura 1 - Tomógrafos utilizados na ciência dos solos e para medir o crescimento de árvores . . . . .	16
Figura 2 - Passos para um sistema de reconstrução tomográfica com filtragem das projeções. . . . .	16
Figura 3 - Gerações dos tomógrafos de transmissão. . . . .	27
Figura 4 - Transformada de Radon, adaptado de (RANGAYYAN, 2005). . . . .	29
Figura 5 - Representação do teorema do corte de Fourier, adaptado de (RANGAYYAN, 2005). . . . .	30
Figura 6 - Modelo discretizado para reconstrução de imagens de tomografia de transmissão, adaptado de (KAK & SLANEY, 1988). . . . .	34
Figura 7 - O método ART para o caso de dois hiperplanos, adaptado de (RANGAYYAN, 2005). . . . .	35
Figura 8 - Convergência do algoritmo POCS. . . . .	38
Figura 9 - Histograma de uma projeção tomográfica com a densidade de probabilidade Gaussiana sobreposta. . . . .	50
Figura 10 - Passos para a filtragem das projeções utilizando o filtro de Wiener, TA representa a transformada de Anscombe e TAI a sua inversa. . . . .	52
Figura 11 - Sinal com ruído Poisson e o mesmo sinal no domínio de Anscombe. A variância do ruído se torna aproximadamente unitária no domínio de Anscombe. . . . .	58
Figura 12 - Passos para a filtragem das projeções utilizando a limiarização Wavelet, onde TA representa a Transformada de Anscombe e TWD representa a Transformada Wavelet Discreta. . . . .	59
Figura 13 - Base Haar. . . . .	61
Figura 14 - Bases de Daubechies. . . . .	63
Figura 15 - Bases Symmlets. . . . .	64
Figura 16 - Bases Coiflets. . . . .	65

Figura 17 - <i>Hard e Soft Thresholding</i> . . . . .	66
Figura 18 - Conjuntos de projeções e reconstruções do <i>phantom</i> de Shepp e Logan. . . . .	73
Figura 19 - Projeção ruidosa do <i>phantom</i> de Shepp e Logan e a mesma projeção filtrada sobreposta. A filtragem foi realizada com o estimador MAP desenvolvido com a densidade Gaussiana e uso de janelamento adaptativo para o cálculos das estimativas locais. . . . .	75
Figura 20 - Imagens reconstruídas a partir do conjunto de projeções do <i>phantom</i> de Shepp e Logan filtrado por estimadores MAP. . . . .	76
Figura 21 - Histograma de uma projeção do <i>phantom</i> de Shepp e Logan com as densidades de probabilidade sobrepostas. . . . .	77
Figura 22 - Projeção ruidosa do <i>phantom</i> de Shepp e Logan e a mesma projeção filtrada com os filtros de Wiener FIR e Pontual. . . . .	79
Figura 23 - Filtragem de Wiener <i>phantom</i> de Shepp e Logan. . . . .	79
Figura 24 - Projeção ruidosa do <i>phantom</i> de Shepp e Logan e a mesma projeção filtrada a partir da limiarização no domínio Wavelet. Foi utilizada a base Haar com a transformada Wavelet e o Oracle <i>threshold</i> para a escolha do limiar. . . . .	80
Figura 25 - Imagens reconstruídas por projeções do <i>phantom</i> de Shepp e Logan filtradas pela limiarização no domínio Wavelet. . . . .	82
Figura 26 - Conjuntos de projeções e reconstruções do <i>phantom</i> homogêneo. . . . .	84
Figura 27 - Imagens reconstruídas a partir de projeções <i>phantom</i> homogêneo filtradas por estimadores MAP. . . . .	86
Figura 28 - Histograma de uma projeção do <i>phantom</i> homogêneo com as densidades de probabilidade sobrepostas. . . . .	86
Figura 29 - Filtragem de Wiener do <i>phantom</i> homogêneo. . . . .	88
Figura 30 - Imagens reconstruídas por projeções do <i>phantom</i> homogêneo filtradas pela limiarização no domínio Wavelet. . . . .	90
Figura 31 - Conjuntos de projeções e reconstruções do <i>phantom</i> simétrico. . . . .	92
Figura 32 - Imagens reconstruídas a partir do conjunto de projeções do <i>phantom</i> simétrico, filtrado por estimadores MAP. . . . .	94
Figura 33 - Histograma de uma projeção do <i>phantom</i> simétrico com as densidades de probabilidade sobrepostas. . . . .	95

Figura 34 - Filtragem de Wiener do <i>phantom</i> simétrico. . . . .	96
Figura 35 - Imagens reconstruídas por projeções do <i>phantom</i> simétrico filtradas pela limiarização no domínio Wavelet. . . . .	98
Figura 36 - Conjuntos de projeções e reconstruções do <i>phantom</i> assimétrico. . . . .	100
Figura 37 - Filtragens do <i>phantom</i> assimétrico pelos estimadores MAP com janela 3 e 5 as estimativas locais. . . . .	105
Figura 38 - Histograma de uma projeção do <i>phantom</i> assimétrico com as densidades de probabilidade sobrepostas. . . . .	106
Figura 39 - Filtragem de Wiener do <i>phantom</i> assimétrico. . . . .	106
Figura 40 - Imagens reconstruídas por projeções do <i>phantom</i> assimétrico filtradas pela limiarização no domínio Wavelet. . . . .	107
Figura 41 - Conjuntos de projeções e reconstruções da madeira 1. . . . .	108
Figura 42 - Imagens reconstruídas a partir de projeções da madeira 1 filtradas com estimadores MAP. . . . .	109
Figura 43 - Histograma de uma projeção da madeira 1 com as densidades de probabilidade sobrepostas. . . . .	111
Figura 44 - Filtragem de Wiener da madeira 1. . . . .	112
Figura 45 - Imagens reconstruídas por projeções da madeira 1 filtradas pela limiarização no domínio Wavelet. . . . .	114
Figura 46 - Conjuntos de projeções e reconstruções da madeira 2. . . . .	115
Figura 47 - Imagens reconstruídas a partir de projeções da madeira 2 filtradas com estimadores MAP. . . . .	119
Figura 48 - Aproximação das densidades com o histograma de uma projeção Madeira2. . . . .	120
Figura 49 - Filtragem de Wiener da madeira 2. . . . .	120
Figura 50 - Imagens reconstruídas por projeções da madeira 2 filtradas pela limiarização no domínio Wavelet. . . . .	123

# Lista de Tabelas

Tabela 1 - Características das gerações dos tomógrafos, retirado de (HENDEE, 1983). . . . .	26
Tabela 2 - Medida dos critérios de qualidade entre as imagens ruidosas e sem ruído do <i>phantom</i> de Shepp e Logan2. . . . .	73
Tabela 3 - Medidas de erro das filtragens realizadas com estimadores MAP nas projeções do <i>phantom</i> de Shepp e Logan. . . . .	74
Tabela 4 - Filtragem com estimadores MAP das projeções do <i>phantom</i> de Shepp e Logan utilizando o teste $\chi^2$ para a escolha da densidade <i>a priori</i> . . . . .	77
Tabela 5 - Densidades <i>a priori</i> escolhidas nas projeções do <i>phantom</i> de Shepp e Logan. . . . .	77
Tabela 6 - Medidas de erro das imagens do <i>phantom</i> de Shepp e Logan2 reconstruídas a partir de sinogramas com a filtragem de Wiener. . . . .	78
Tabela 7 - Limiarização Wavelet das projeções do <i>phantom</i> de Shepp e Logan. . . . .	81
Tabela 8 - Medida dos critérios de qualidade entre as imagens de 3s e 20s do <i>phantom</i> homogêneo. . . . .	83
Tabela 9 - Filtragem com estimadores MAP das projeções do <i>phantom</i> homogêneo. . . . .	85
Tabela 10 - Filtragem de Wiener das projeções do <i>phantom</i> homogêneo. . . . .	87
Tabela 11 - Limiarização Wavelet das projeções do <i>phantom</i> homogêneo. . . . .	89
Tabela 12 - Medida dos critérios de qualidade entre as imagens de 3s e 20s do <i>phantom</i> simétrico. . . . .	91
Tabela 13 - Filtragem com estimadores MAP das projeções do <i>phantom</i> simétrico. . . . .	93
Tabela 14 - Filtragem de Wiener das projeções do <i>phantom</i> simétrico. . . . .	95
Tabela 15 - Limiarização Wavelet das projeções do <i>phantom</i> simétrico. . . . .	97
Tabela 16 - Medida dos critérios de qualidade entre as imagens de 3s e 20s do <i>phantom</i> assimétrico. . . . .	99
Tabela 17 - Filtragem com estimadores MAP das projeções do <i>phantom</i> assimétrico. . . . .	101

Tabela 18 - Filtragem com estimadores MAP das projeções do <i>phantom</i> assimétrico utilizando o teste $\chi^2$ para a escolha da densidade <i>a priori</i> . . . . .	102
Tabela 19 - Densidades a priori escolhidas nas projeções do <i>phantom</i> assimétrico.	102
Tabela 20 - Filtragem de Wiener das projeções do <i>phantom</i> assimétrico. . . . .	102
Tabela 21 - Limiarização Wavelet das projeções do <i>phantom</i> assimétrico. . . . .	104
Tabela 22 - Medida dos critérios de qualidade entre as imagens de 3s e 20s da madeira 1. . . . .	109
Tabela 23 - Filtragem com estimadores MAP das projeções da madeira 1. . . . .	110
Tabela 24 - Filtragem de Wiener das projeções da madeira 1. . . . .	111
Tabela 25 - Limiarização Wavelet das projeções da madeira 1. . . . .	113
Tabela 26 - Medida dos critérios de qualidade entre as imagens de 3s e 20s da madeira 2. . . . .	116
Tabela 27 - Filtragem com estimadores MAP das projeções da madeira 2. . . . .	116
Tabela 28 - Filtragem com estimadores MAP das projeções da madeira 2 utilizando o teste $\chi^2$ para a escolha da densidade <i>a priori</i> . . . . .	117
Tabela 29 - Densidades a priori escolhidas nas projeções da madeira 2. . . . .	117
Tabela 30 - Filtragem de Wiener das projeções da madeira 2. . . . .	118
Tabela 31 - Limiarização Wavelet das projeções da madeira 2. . . . .	122
Tabela 32 - Relação dos melhores resultados obtidos pelas técnicas de filtragem em cada <i>phantom</i> de teste. . . . .	124

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
1.1	Motivação e objetivos . . . . .	14
1.2	Trabalhos relacionados . . . . .	15
1.3	Contribuições do Trabalho . . . . .	20
1.4	Organização do texto . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Tomografia Computadorizada</b>	<b>23</b>
2.1	Histórico . . . . .	23
2.2	Tomografia por Transmissão . . . . .	24
2.3	Tomografia por Emissão . . . . .	25
2.4	Reconstrução Tomográfica . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Estimadores MAP</b>	<b>39</b>
3.1	Estimador MAP com densidades de probabilidade com informação <i>a priori</i> . . . . .	40
3.2	Estimativas Locais . . . . .	47
3.3	Teste Chi-quadrado . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Filtro de Wiener</b>	<b>51</b>
4.1	Filtro de Wiener Pontual . . . . .	52
4.2	Filtro de Wiener FIR . . . . .	53
4.3	Transformada de Anscombe . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Redução de Ruído por Limiarização da Transformada Wavelet</b>	<b>59</b>
5.1	Transformada Wavelet . . . . .	60
5.2	Funções Wavelets . . . . .	61

5.3	Limiarização - <i>Thresholding</i> . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Metodologia e Experimentos</b>	<b>69</b>
6.1	Avaliação dos resultados . . . . .	69
6.2	<i>Phantoms</i> de Teste . . . . .	71
6.3	Análise dos resultados . . . . .	124
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>126</b>
7.1	Trabalhos Futuros . . . . .	128
	<b>Referências</b>	<b>130</b>
<b>A</b>	<b>Desenvolvimento dos Estimadores MAP</b>	<b>136</b>
A.1	Densidade Gaussiana . . . . .	136
A.2	Densidade Gama . . . . .	137
A.3	Densidade Beta . . . . .	138
A.4	Densidade Log-Normal . . . . .	140
A.5	Densidade Nakagami . . . . .	142
A.6	Densidade Gaussiana Inversa . . . . .	143
A.7	Densidade Weibull . . . . .	144
A.8	Densidade Chi-Quadrado . . . . .	147
A.9	Densidade Rayleigh . . . . .	147
A.10	Densidade Exponencial . . . . .	148

# Capítulo 1

## Introdução

A tomografia computadorizada (CT) é uma tecnologia utilizada em diversos segmentos. Encontra-se aplicações da tomografia principalmente na área médica, agricultura, engenharia, biologia e indústria. Esta tecnologia ganhou destaque na área médica. A possibilidade de visualizar o interior de um corpo de forma não invasiva e não destrutiva trouxe grandes avanços no diagnóstico clínico. Os primeiros tomógrafos utilizavam raios-X. Mais tarde surgiram tomógrafos clínicos que utilizavam outros processos físicos para a aquisição dos dados, como a inserção de radioisótopos no corpo a ser imageado.

A aquisição dos dados tomográficos é feita com a exposição do corpo a ser imageado aos raios do tomógrafo. Neste processo, projeções do corpo são capturadas em diversos ângulos ao seu redor. A imagem do interior do corpo é obtida por um processo de reconstrução. Durante este processo é feito o processamento do conjunto de projeções unidimensionais para a obtenção da imagem bidimensional.

A qualidade das projeções tomográficas, conseqüentemente da imagem, está relacionada ao processo de aquisição. Um dos principais fatores que influenciam é a quantidade de radiação emitida. Os níveis de radiação estão relacionados ao tempo de exposição do corpo aos raios do tomógrafo e a dosagem dos raios. Alguns tomógrafos utilizam técnicas de captura que necessitam ser realizadas em um curto intervalo de tempo. Além disso, a exposição de pacientes a excessiva radiação pode causar diversos males à saúde. Em outras aplicações, como na agricultura, o objetivo é reduzir o tempo de captura dos dados e não comprometer a integridade da amostra. Entretanto, a captura de dados com um baixo nível de radiação gera baixas taxas de contagens de fótons produzindo projeções corrompidas por ruído. Este é o ruído quântico, caracterizado pela natureza estatística da geração dos fótons. O ruído também é conhecido como ruído Poisson, por seguir a distribuição de probabilidade de Poisson.

A imagem obtida a partir de projeções ruidosas possui uma baixa qualidade visual.

Para manter um compromisso entre o processo de aquisição e a qualidade da imagem pode-se fazer a filtragem das projeções ruidosas. Esta filtragem tem o objetivo de reduzir o ruído, estimando desta forma a projeção livre de ruído. Após a reconstrução da imagem a partir de projeções filtradas é obtida uma representação mais fiel ao corte seccional do interior do objeto imageado.

## 1.1 Motivação e objetivos

Com o intuito de melhorar a qualidade visual das imagens tomográficas, este trabalho tem o objetivo de investigar o desempenho de técnicas de filtragem de projeções tomográficas corrompidas por ruído Poisson. Para validar os métodos utilizamos dados capturados por um mini-tomógrafo desenvolvido no CNPDIA-EMBRAPA (Centro Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento de Instrumentação Agropecuária - Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária). Este tomógrafo, exibido na Figura 1(a), é utilizado principalmente para aplicações relacionadas a ciência dos solos.

O uso da tomografia na ciência dos solos possibilita fazer um estudo do transporte da água, dos solutos no solo e a interação entre as raízes e o solo. O uso de tomógrafos permite também a visualização no próprio local, sendo possível ter um parecer imediato sobre o estado do solo. Na Figura 1(b) é mostrado um tomógrafo de aplicação em campo. Nos primeiros estudos, (PETROVIC; SIEBERT & RIEKE, 1982) demonstraram a possibilidade de usar um tomógrafo computadorizado de raios-X para medir a densidade de volumes de solos. Crestana (CRESTANA, 1985) demonstrou que a tomografia computadorizada pode solucionar problemas ligados aos estudos da física da água no solo.

Além do uso na ciência dos solos, a tomografia pode ser empregada para outros fins na agricultura. É utilizada para a visualização não destrutiva de raízes e a seleção de matrizes de árvores. Em (ONOE et al., 1983) foi desenvolvido um tomógrafo utilizado para medir o crescimento anual de árvores, como exibido na Figura 1(c). Ataques de cupins e formigas no interior de árvores podem ser verificados com o uso da tomografia, o que pode ser útil em áreas rurais e urbanas. A seleção genética de grãos é outra aplicação. É possível investigar, por exemplo, as imagens da fratura de um grão de milho sem destruí-lo (EMBRAPA, 2009). Na indústria, o principal uso deste tipo de tecnologia é a aplicação em processos industriais. Tomógrafos são utilizados para verificar, por exemplo, a qualidade de peças de madeira e de cerâmicas (PEREIRA, 2007) (ERENO, 2006).

Pesquisas recentes na área da medicina mostraram que o uso de tomógrafos aumen-

tou o risco de câncer. O número de tomógrafos cresceu de 3 milhões em 1980 para 70 milhões em 2007 nos Estados Unidos. A estimativa é que estes 70 milhões de tomógrafos causaram 29000 casos de câncer, resultando em 14500 mortes (GONZALEZ et al., 2009) (SAVAGE, 2010). Os fabricantes de tomógrafos clínicos estão investigando técnicas de reduzir a radiação e manter a qualidade das imagens. A GE Healthcare está analisando a implantação do método ASIR (*Adaptive Statistical Iterative Reconstruction*) nos seus tomógrafos (SILVA et al., 2010). Pesquisadores conseguiram reconstruir uma imagem com boa qualidade com este algoritmo reduzindo de 30 a 90% a radiação. A Siemens está investigando um método similar chamado IRIS *Iterative Reconstruction in Image Space* (TIPNIS et al., 2010). Por se tratar de técnicas iterativas, ambos os métodos dependem de um esforço computacional muito grande (SAVAGE, 2010).

## 1.2 Trabalhos relacionados

Diversos pesquisadores têm estudado técnicas para a filtragem de ruído em projeções e em imagens tomográficas. As pesquisas mostram que a reconstrução tomográfica com a filtragem das projeções apresenta melhores resultados do que a reconstrução sem nenhum pré-processamento. Na literatura encontramos diversos trabalhos que utilizam dados de tomógrafos clínicos. Estes trabalhos são analisados a seguir.

Na tese de doutorado de Furuie, (FURUIE, 1990) foi desenvolvido uma metodologia para a reconstrução tomográfica com a estimativa das projeções. Um estimador Bayesiano (MAP) foi derivado para ruído Poisson com densidade *a priori* Gaussiana. Foi utilizado o filtro de Wiener local, após a transformada de Anscombe. Foi também avaliado o filtro de Maeda, um estimador heurístico que combina o uso da média e da mediana para a filtragem. Os experimentos foram realizados com sinais simulados e projeções de tomógrafos do tipo PET. Para a reconstrução da imagem foi utilizado o algoritmo de retroprojeção filtrada. Os resultados foram avaliados sob os critérios REMQN e ISNR. Os melhores resultados apontam para o filtro de Maeda.

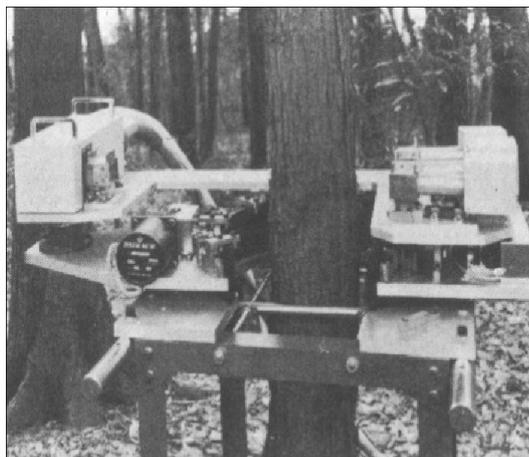
A dissertação de (PORTAL, 1991) se concentrou em realizar refinamentos nos métodos utilizados por (FURUIE, 1990). Foi desenvolvido o estimador MAP com a informação *a priori* dada por uma matriz de covariância Markoviana. Também foi derivado um estimador MAP com densidade *a priori* Laplaciano. Foi utilizado o filtro de Wiener local e global após a transformada de Anscombe. Um janelamento adaptativo foi utilizado para o cálculo das estimativas locais.



(a) Mini-tomógrafo de mesa (CRUVINEL, 1987)



(b) Tomógrafos para aplicações em campo (EMBRAPA, 2009)



(c) Tomógrafo utilizado para medir o crescimento de árvores, retirado de (ONOE et al., 1983)

Figura 1: Tomógrafos utilizados na ciência dos solos e para medir o crescimento de árvores



Figura 2: Passos para um sistema de reconstrução tomográfica com filtragem das projeções.

Em (LU et al., 2001) foi feita uma análise do ruído presente no conjunto das projeções tomográficas (sinograma) de um tomógrafo GE helicoidal para aplicações clínicas. Pela análise do relacionamento entre o desvio padrão e a média das projeções foi proposta a transformada do logaritmo para estabilização do ruído. Depois da transformada a variância do ruído torna-se aproximadamente constante. O filtro de Wiener no domínio da frequência foi aplicado para a filtragem 2D sinograma do depois da transformada do logaritmo. Experimentos foram realizados com um *phantom* cilíndrico com pequenos detalhes no interior. Por julgamento visual constatou-se que o método proposto foi melhor para a redução de ruído, suprimindo artefatos circulares, em comparação com o filtro de Hanning.

No trabalho de (LI et al., 2004) foi feita a filtragem de um sinograma obtido por um tomógrafo de aplicações clínicas. Constatou-se que após a calibração do tomógrafo e a transformada do logaritmo, o ruído do sinograma segue a distribuição Gaussiana. Foi proposto um método empírico para calcular a variância dos dados. Foi realizada a filtragem 2D do sinograma com um estimador Bayesiano, onde a informação *a priori* foi modelada com campos aleatórios Markovianos caracterizada por uma distribuição de Gibbs. O estimador MAP foi derivado, chegando a um conjunto de equações não-lineares. O algoritmo iterativo ICM (*Iterated Conditional Mode*) foi empregado para a resolução destas equações. Nos experimentos foi utilizado um sinograma obtido por um *phantom* de tórax capturado por um tomógrafo GE HiSpeed com baixa dosagem de raios-X. Os resultados do método foram comparados com os filtros de Hanning e Butterworth.

No artigo de (WANG et al., 2006b), foram propostos outros métodos de filtragem para projeções do mesmo tomógrafo do trabalho de (LI et al., 2004). O trabalho investiga uma abordagem de mínimos quadrados penalizado (*Penalized Weighted Least-Squares - PWLS*) para a filtragem 2D do sinograma e da imagem. Foram comparadas três diferentes implementações para o problema da minimização PWLS. Uma utiliza campos aleatórios Markovianos com uma distribuição de Gibbs para a filtragem do sinograma. A função de custo PWLS é minimizada pelo algoritmo iterativo de Gauss-Seidel. Outra abordagem emprega a transformada de Karhunen-Loève(KL) para decorrelacionar os dados entre as projeções próximas e minimizar a função de custo PWLS adaptativamente para cada componente KL. O terceiro método modela a correlação espacial entre os pixels no domínio da imagem, também com MRF com a distribuição de Gibbs. A função de custo é minimizada com o algoritmo iterativo *Over-Relaxation*. Os experimentos mostraram resultados equivalentes entre os métodos. O método de PWLS no domínio KL demonstrou melhores resultados com sinogramas capturados com baixa dosagens de raios-X. O método no domínio da imagem apresentou um custo computacional mais elevado do que os demais.

Em (WANG et al., 2006a) o método de mínimos quadrados penalizado (PWLS) no domínio KL, foi aplicado em sinogramas de tomografia computadorizada helicoidal. O

método foi comparado com o OSEM (*Ordered Subsets Expected Maximization*) e o filtro passa-baixa de Hanning. Os experimentos foram feitos com um *phantom* de Shepp-Logan, e foram feitas análises visuais e o estudo da curva ROC. O PWLS-KL demonstrou melhores resultados.

No trabalho de (WANG et al., 2008) foi realizado a filtragem com método de mínimos quadrados penalizado multi-escala. O método utiliza a transformada Wavelet multi-escala para análise do sinograma. A transformada Wavelet foi aplicada para decompor o sinograma em diferentes níveis de resolução. Em cada nível decomposto o critério PWLS foi aplicado para filtrar os coeficiente Wavelet referentes ao ruído. A penalização foi adaptativa para cada escala, onde o peso foi atualizado pelo relacionamento exponencial entre a variância e a média em cada escala e local.

Já foram realizadas pesquisas em filtragem de projeções tomográficas que utilizaram dados capturados pelos tomógrafos do CNPDIA-EMBRAPA. Estas estão descritos a seguir.

Em (RIBEIRO, 1994) é apresentado o desenvolvimento de um algoritmo para a reconstrução tridimensional de imagens obtidas por um mini-tomógrafo no CNPDIA-EMBRAPA. Esta ferramenta gera de mapas tridimensionais de coeficientes de atenuação de raios-X ou  $\gamma$  com resolução espacial maior ou igual a 1 mm. A técnica de reconstrução algébrica aditiva modificada (ART) foi aplicada ao método. Para a interpolação foi utilizada a função Spline . A técnica ART apresentou vantagem quando comparada ao método de retroprojeção e apresentou grande desempenho na reconstrução de objetos assimétricos.

(SANTOS, 1996) desenvolveu estimadores MAP utilizando outras densidades de probabilidade como informação *a priori*. Foram utilizadas as densidades: Beta, Chi-quadrado, Exponencial, Gama, Log-normal e Rayleigh. As densidades utilizadas são definidas na semi-reta positiva, o que é mais coerente para filtragem de projeções tomográficas que possuem contagens positivas. Santos utilizou projeções tomográficas obtidas por um mini-tomógrafo de transmissão no CNPDIA-EMBRAPA. Os experimentos foram realizados com projeções capturadas de *phantoms* com formato cilíndrico com composição de ferro e alumínio. As filtragens das projeções foram avaliadas pelo critério REMQN, sendo que os melhores resultados foram os estimadores com as densidades: Gama, Beta e Log-normal.

No trabalho de (MINATEL, 1997) foi desenvolvido um algoritmo para reconstrução tridimensional de imagens obtidas com um mini-tomógrafo no CNPDIA-EMBRAPA. A técnica de reconstrução foi feita com a filtragem adaptativa com transformadas Wavelets. A interpolação foi feita com o uso da função B-Wavelet. A técnica apresentou vantagens quando comparada ao método de retroprojeção filtrada e apresentou grande desempenho para reconstrução de objetos assimétricos. Os planos reconstruídos foram interpolados

utilizando-se as funções B-Wavelets para a obtenção da reconstrução tridimensional da imagem obtida pelo mini-tomógrafo.

Em (GRANATO, 1998) foi apresentado o desenvolvimento de um sistema para a melhoria quantitativa dos coeficientes de atenuação e de características visuais de imagens obtidas em tomografia de raios-X em múltiplas energias. O método desenvolvido utiliza a técnica de restauração com filtragem adaptativa a qual visa a obtenção de resultados que são comparáveis a resultados obtidos por tomografia computadorizada em simples energias.

Em (PEREIRA, 2001) é apresentado um sistema para a reconstrução de imagens tomográficas usando a plataforma com a arquitetura DSP para a paralelização dos algoritmos de reconstrução de imagens com técnicas Wavelets. Os dados tomográficos foram obtidos por um mini-tomógrafo de raios-X e  $\gamma$  no CNPDIA-EMBRAPA. A técnica de reconstrução de imagens com filtragem e transformada Wavelet foi aplicada e o método de interpolação com o uso de função B-Wavelets foi utilizado na geração das imagens tridimensionais. As tarefas de reconstrução 2D e 3D foram distribuídas entre os processadores e utilizou-se a memória cache dos processadores para diminuição das taxas de perda e aumentar o poder de processamento e a velocidade do sistema. Resultados com dados de amostras tomográficas reais utilizando o método de retroprojeção mostram boa performance, com uma redução de aproximadamente 80% do tempo de reconstrução demandado em plataforma convencional.

Em (SALINA, 2002) são apresentados quatro algoritmos para a reconstrução tomográfica de imagens. São eles: ART (Algebraic Reconstruction Technique), SIRT ( Simultaneous Iterative Reconstruction Technique), POCS sequencial e POCS paralelo. Foi feita a comparação entre os métodos de reconstrução na presença de ruído e na reconstrução à partir de ângulos limitados. Utilizaram-se para reconstrução tomográfica projeções simuladas e projeções obtidas por um mini-tomógrafo no CNPDIA-EMBRAPA. O uso de restrições sobre as soluções, como no caso do POCS sequencial e paralelo, mostrou-se eficaz para reduzir as variações devido ao mal-condicionamento do problema.

Em (LAIA, 2007) foi apresentada a filtragem de projeções tomográficas com ruído variantes no espaço com base na filtragem de Kalman. Para o desenvolvimento e seleção dos filtros foram avaliadas diferentes modalidades da configuração do filtro de Kalman, incluindo o uso da transformada de Anscombe e redes neurais. Os resultados foram analisados com base em medidas da melhoria na relação sinal/ruído (ISNR), as quais foram obtidas em uma região de interesse (ROI) nas imagens resultantes, reconstruídas com o uso do algoritmo de retroprojeção. Os resultados qualificaram o filtro de Kalman descentralizado com uma rede neural possuindo três camadas do tipo *perceptron* como a melhor opção para a filtragem de projeções tomográficas de ciência do solo.

Na tese de (SALINA, 2007) foi apresentada uma metodologia de reconstrução tomográfica utilizando o algoritmo POCS paralelo e a filtragem das projeções por diversas técnicas de estimação. Foi utilizado o filtro de Goodman-Belsher e o uso da transformada Wavelet, além do filtro de Wiener e estimadores MAP. No domínio Wavelet foi utilizado o *Universal Threshold*, nas variações *hard* e *soft*, nos coeficientes Wavelet. A transformada Wavelet foi feita no domínio de Anscombe com o uso das bases Haar e Daubechies. Os estimadores MAP empregavam com informação *a priori* as densidades de probabilidade: Beta, Gama, Gaussiana e Chi-Quadrado. Para os experimentos foi utilizado o *phantom* de Shepp-Logan e projeções tomográficas capturadas por um mini-tomógrafo no CNPDIA-EMBRAPA. Para a obtenção das projeções tomográficas foram utilizados *phantoms* com composições diferenciadas: homogênea, simétrica e assimétrica. Os resultados foram avaliados sob o critério ISNR.

Na tese de doutorado de (PEREIRA, 2007), foi desenvolvido um sistema de reconstrução tomográfica 3D para amostras agrícolas. Antes da reconstrução foi feita uma estimação das projeções com o filtro de Wiener FIR no domínio de Anscombe e os resultados foram comparados com o filtro da mediana. Foi utilizado o critério MSE para a comparação dos resultados. Os melhores resultados foram obtidos com o filtro de Wiener com 6 pesos.

## 1.3 Contribuições do Trabalho

Considerando trabalhos já realizados abordando o problema de filtragem de projeções tomográficas, este trabalho se concentrou em realizar melhorias e variações em técnicas já empregadas. As técnicas que abordamos foram: estimadores MAP, filtragem de Wiener e limiarização no domínio Wavelet. (deixar claro as contribuições)

Neste trabalho foram desenvolvidos estimadores MAP com novas densidades de probabilidade como informação *a priori*: densidade Gaussiana Inversa, Nakagami e Weibull. Foi utilizado um teste de hipóteses para a escolha da densidade de probabilidade que é mais adequada para cada projeção. A ideia é utilizar para filtrar cada projeção o estimador MAP que emprega como informação *a priori* a densidade de probabilidade que mais se aproxima do histograma da projeção. Foi utilizado para realizar o teste de hipótese o teste Chi-Quadrado. Como já utilizado em (PORTAL, 1991) foi utilizado para melhorar a performance dos estimadores MAP um janelamento adaptativo para o cálculo das estimativas locais.

Neste trabalho foi utilizado o filtro de Wiener na versão pontual. O desempenho com

o filtro de Wiener pontual foi comparado com o filtro de Wiener FIR (*Finite Impulse Response*). Em ambos os filtros foi utilizado um esquema adaptativo para a filtragem. No filtro de Wiener pontual foi utilizado o janelamento adaptativo para cálculo das estimativas locais. A contribuição original deste trabalho na filtragem de Wiener é o uso de um esquema adaptativo para determinar o número de pesos do filtro para filtrar cada ponto do sinal.

Para a filtragem no domínio Wavelet, utilizamos novas bases durante a transformada Wavelet. Foram analisadas as bases Symmlets e Coiflets além das bases Haar e Daubechies já utilizadas no trabalho de (SALINA, 2007). Foram utilizadas outras técnicas para a obtenção de *thresholds* para a limiarização dos coeficientes Wavelet. Utilizamos o *Minimax threshold*, *SURE threshold* e *Oracle shrink*, além do *Universal threshold* já utilizado em trabalhos anteriores.

## 1.4 Organização do texto

No capítulo seguinte, abordamos a tomografia computadorizada. Os equipamentos utilizados no processo tomográfico são analisados. É feita uma breve análise dos principais algoritmos de reconstrução.

No capítulo 3, é discutida a filtragem com o uso da técnica estatística baseada na estimação Bayesiana. Discutimos o processo de desenvolvimento de estimadores MAP com diferentes densidades de probabilidade como informação *a priori*. Analisamos também técnicas para o cálculo de estimativas locais que são utilizadas durante a filtragem. Abordamos os aspectos relacionados ao teste de hipótese utilizado para a escolha adaptativa das densidades de probabilidade utilizadas como informação *a priori*.

A filtragem com uso do filtro de Wiener é abordada no capítulo 4. Será apresentado o filtro de Wiener pontual e a construção do filtro de Wiener FIR. É desenvolvido o esquema de filtragem adaptativa em ambos os filtros. A filtragem adaptativa é baseada no método de janelamento adaptativo de Rabbani (RABBANI, 1988).

No capítulo 5, analisamos o uso da transformada Wavelet para a filtragem de ruído. Discutiremos aspectos relacionadas à transformada Wavelet, como a escolha de bases e níveis de decomposição. São discutidas algumas técnicas de construção de *thresholds* para aplicação nos coeficientes Wavelets.

No capítulo 6, os resultados experimentais são apresentados. As medidas de qualidade

para a avaliação das estimações são discutidas. E é feita uma análise dos resultados obtidos.

Por fim, no capítulo 7 discutimos os resultados. As conclusões do trabalho e alguns possíveis trabalhos futuros são apresentados.

No apêndice A é abordado o desenvolvimento dos estimadores MAP com as densidades de probabilidade utilizadas.

## Capítulo 2

# Tomografia Computadorizada

A palavra tomografia tem origem grega, *τομοσ* e *γραφος*, que significam corte e escrita, respectivamente. A tomografia, consiste na representação de um corpo por fatias. Refere-se tradicionalmente a métodos que procuram produzir uma imagem do interior de um corpo baseados na atenuação de raios em um dado plano de interseção. Em seu uso atual, tomografia refere-se a qualquer imageamento não invasivo de uma região inacessível (KAPIO & SOMERSALO, 2005).

Antes da tomografia computadorizada, a visualização de órgãos internos de um corpo para o diagnóstico médico só era possível com a radiografia. Neste método raios-X são emitidos em um corpo e impressionados em um filme radiográfico. Na radiografia, estruturas internas do corpo são sobrepostas e o tecido mole não é diferenciável. A tomografia não apresenta estes problemas.

O uso da tomografia cresceu rapidamente com o aperfeiçoamento dos tomógrafos e desenvolvimento de novas tecnologias para obtenção dos dados tomográficos. As técnicas de reconstrução e filtragem empregadas na tomografia também foram aperfeiçoadas.

### 2.1 Histórico

A primeira contribuição teórica para as bases da tomografia computadorizada foi feita pelo matemático austríaco John Radon em 1917 (RADON, 1917). Radon propôs uma solução matemática das equações de reconstrução de corpos a partir de projeções.

Allan Cormack, em 1963, sem conhecer o trabalho de Radon, propôs a reconstrução de um corpo com base em um número finito de projeções. Ele utilizava o método de

retroprojeção. Cormack, em 1956, era professor de Física da *University of Cape Town* e foi solicitado para supervisionar o uso de isótopos radioativos no *Groote Schuur Hospital*. Durante algumas semanas, Cormack trabalhou com os isótopos radioativos e acompanhou tratamentos de radioterapia. Com base em experimentos e observações, formulou uma matriz de coeficientes para cortes seccionais que poderia ser obtida pela medida da transmissão de raios-X em vários ângulos através de um corpo. A partir de transmissões de raios-X, aplicou-a para obter imagens de *phantoms* simples (CORMACK, 1983).

Na década de 70, Godfrey Hounsfield construiu o primeiro tomógrafo de raios-X. Este invento foi fruto das pesquisas nos laboratórios da EMI (*Electric & Musical Industries*), que apresentou em 1973 o primeiro tomógrafo computadorizado de raios-X. Em 1979, Hounsfield e Cormack dividiram o prêmio Nobel de Medicina (KAK & SLANEY, 1988).

Em 1971, foi proposto o algoritmo de convolução e retroprojeção, primeiramente desenvolvido por Ramachandran e Lakshminarayanan (RAMANCHANDRAN & LAKSHMINARAYANAN, 1971), sendo aprimorado posteriormente por Shepp e Logan (LOGAN & SHEPP, 1975). Esses dois algoritmos reduzem consideravelmente o tempo de processamento para reconstrução e a imagem produzida é numericamente mais precisa. Como resultado, fabricantes comerciais de tomógrafos iniciaram a construção de um sistema capaz de reconstruir imagens com maior precisão (KAK & SLANEY, 1988).

## 2.2 Tomografia por Transmissão

A tomografia por transmissão consiste em irradiar o corpo a partir de várias direções. Um feixe de radiação colimado é utilizado para definir os planos verticais, estes são finos quanto o próprio feixe. As intensidades transmitidas e as recebidas são armazenadas para cada direção, definindo assim uma projeção do corpo. Com o uso de vários feixes colimados paralelos definem-se vários planos verticais, obtendo-se perfis em várias posições angulares. Esses valores são armazenados para o processo de reconstrução da imagem.

Em menos de quatro anos depois da introdução da tomografia computadorizada, surgiram quatro gerações de tomógrafos. Essa evolução foi devida ao aprimoramento do projeto mecânico do tomógrafo. As melhorias tinham o objetivo de realizar a obtenção dos dados tomográficos em menor tempo e proporcionar melhor controle sobre os movimentos do paciente.

No tomógrafo de primeira geração, mostrado na Figura 3(a), o tubo de raios-X, colimador e detetor são partes de um corpo comum. O tubo de raios-X e o detetor se movem

em sincronia, em lados opostos do corpo da tomografia. Esse tipo de tomógrafo usa um único feixe de raio-X colimado para fazer a tomografia. Nesse tomógrafo são tomadas sequências de medidas, até que se atinja o final do movimento de translação. Então, é feita uma rotação de um certo grau e o movimento de translação se repete. Todo o processo é repetido para um ângulo de 0 a 180 graus.

Foram colocados vários detetores lado a lado, na segunda geração dos tomógrafos, segundo mostra a Figura 3(b). O feixe de raio-X formava um leque e não apenas uma linha única de aquisição de dados. Dessa maneira, o tempo de obtenção de dados de uma seção diminui de acordo com o número de detetores empregados.

No tomógrafo de terceira geração, mostrado na Figura 3(c), não é mais necessário fazer o movimento de translação do tubo de raios-X e dos detetores. O número de detetores era suficiente para a coleta dos dados de toda uma projeção com o tubo de raios-X em uma única posição. Nos tomógrafos de quarta geração, Figura 3(d), vários detetores são colocados lado a lado até formarem um anel ao redor do corpo em estudo. Esses detetores são fixos e o tubo de raios-X rotaciona dentro do anel de detetores e ao redor do corpo.

Para se reduzir o tempo de tomografia para milionésimos de segundo, foi proposto um novo modelo, em que vários tubos de raios-X são colocados ao redor do paciente e do lado de fora do anel de detetores. Esse tipo de tomógrafo reduziu ainda mais o tempo de tomografia (HENDEE, 1983).

A Tabela 1 apresenta as particularidades de cada geração dos tomógrafos (HENDEE, 1983).

Neste trabalho, os conjuntos de projeções utilizadas foram obtidas por um mini-tomógrafo de primeira geração desenvolvido no CNPDIA-EMBRAPA. Este mini-tomógrafo é dedicado à ciência dos solos e sua fabricação é de baixo custo em comparação aos tomógrafos utilizados na medicina. O mini-tomógrafo utiliza raios-X e raios $\gamma$  como fontes de radiação. Este equipamento é de resolução micrométrica, o que permite visualizar detalhes em amostras de solo, como os poros do solo e partículas (EMBRAPA, 2009) (CRUVINEL, 1987).

## 2.3 Tomografia por Emissão

A diferença da tomografia por emissão com a tomografia por transmissão, está na forma de obtenção dos dados. Na tomografia por emissão, a fonte do sinal que gera as

Características	1ª geração	2ª geração	3ª geração	4ª geração	5ª geração
Movimento do tubo de raio-X e do detetor	translação e rotação	translação e rotação	rotação	rotação do tubo de raio-X com detetores estacionários	rotação do tubo de raio-X com detetores estacionários
Detetor por projeção	1	3-52	128-511	242-72000	242-72000
Número de feixes de raio-X por projeção	Único feixe fino	Múltiplos feixes em forma de leque	Vários feixes em leque envolvendo o objeto	Vários feixes em leque envolvendo o objeto	Vários feixes em leque envolvendo todo objeto
Tempo para aquisição dos dados	4 min - 5 min	5.3 seg - 3.5 min	3 seg - 4.8 seg	1 seg - 5 seg	milionésimos de segundos

Tabela 1: Características das gerações dos tomógrafos, retirado de (HENDEE, 1983).

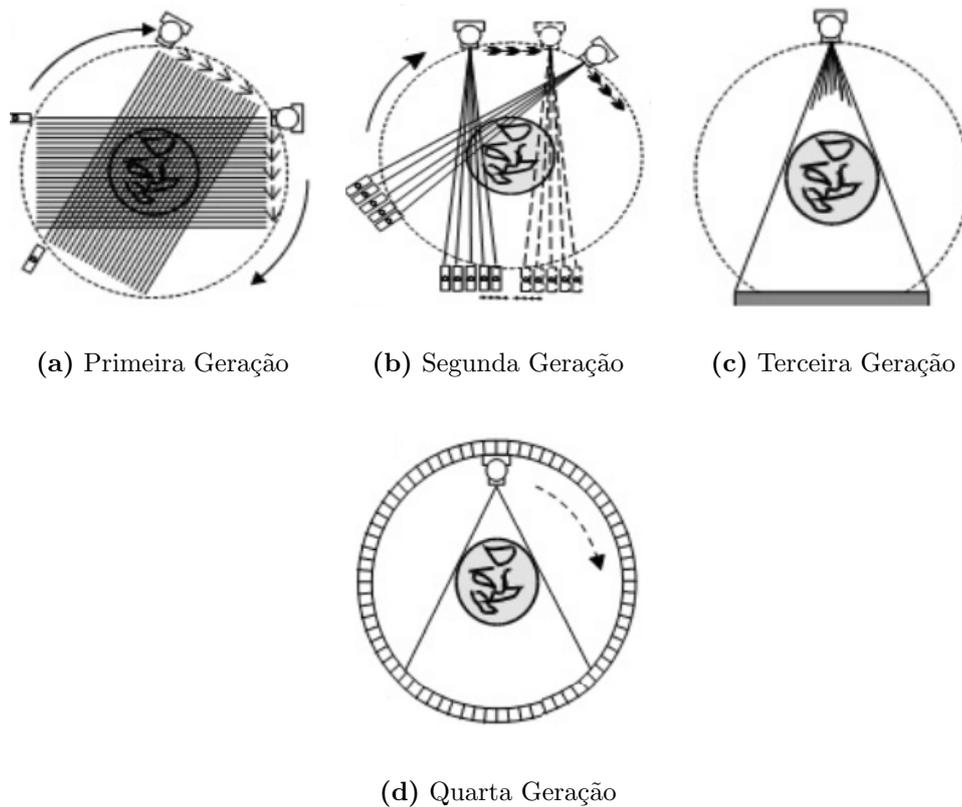


Figura 3: Gerações dos tomógrafos de transmissão.

projeções provém do próprio paciente. Um produto radio-farmacêutico (isótopos radioativos) é administrado ao paciente por via intravenosa, ingestão ou inalação.

Na obtenção dos dados o paciente é colocado sobre a mesa do tomógrafo. Esta se move gradualmente através de uma cobertura em forma de anel. Esta cobertura contém um arranjo circular de detectores de raios Gama, que possui uma série de cristais de cintilação, cada um conectado a um tubo fotomultiplicador. Os cristais convertem os raios Gama emitidos do paciente em fótons de luz, e os tubos fotomultiplicadores convertem os fótons em sinais elétricos e os amplificam. Estes sinais elétricos são então processados para reconstruir a imagem. A mesa é então movida, e o processo é repetido, resultando em uma série de imagens de finas fatias do corpo na região de interesse (JR, 1998) (BOVIK, 2000).

Existem dois tipos de tomógrafos por emissão: PET (*Positron Emission Tomography*) e SPECT (*Single Photon Emission Computed Tomography*). A tomografia do tipo PET é caracterizada pela emissão do pósitron. Alguns minutos após a administração do isótopo no paciente, este acumula-se na área do corpo ao qual a molécula tem afinidade. O núcleo radioativo instável decai a um estado mais estável pela emissão de elétrons carregados positivamente (isto é, pósitron). O pósitron ejetado combina-se com um elétron quase instantaneamente e essas duas partículas sofrem um processo de aniquilação, emitindo

sua energia sob a forma de dois fótons de alta energia. Esses raios Gama emergem do corpo em direções opostas e podem ser detectados pelo anel do tomógrafo (JR, 1998) (BOVIK, 2000).

SPECT é uma técnica similar à PET. Na tomografia do tipo SPECT as substâncias radioativas possuem tempos de decaimento mais longos e emitem raios Gama simples ao invés de duplos.

## 2.4 Reconstrução Tomográfica

A reconstrução tomográfica consiste em um processamento do conjunto de projeções unidimensionais para a obtenção da imagem bidimensional. Nesta seção é analisada primeiramente a transformada de Radon (RADON, 1917), que decompõe uma imagem em projeções. Os algoritmos de reconstrução basicamente procuram realizar a transformada inversa de Radon.

Discutiremos duas abordagens para a reconstrução. A primeira utiliza uma propriedade da transformada de Fourier, sendo que a reconstrução é feita no domínio de frequência. Outra utiliza uma abordagem algébrica onde a imagem é obtida pela solução de um conjunto de equações.

### 2.4.1 Transformada de Radon

O procedimento para a reconstrução a partir da transformada de Radon está esquematizado na Figura 4. Nela, o raio  $\overline{AB}$  pode ser expresso matematicamente por:

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.1)$$

onde  $t$  é a distância perpendicular da origem até a linha. Com o uso desta equação do raio, a integral do raio  $P_\theta(t)$  é dada por:

$$P_\theta(t) = \int_{AB} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy, \quad (2.2)$$

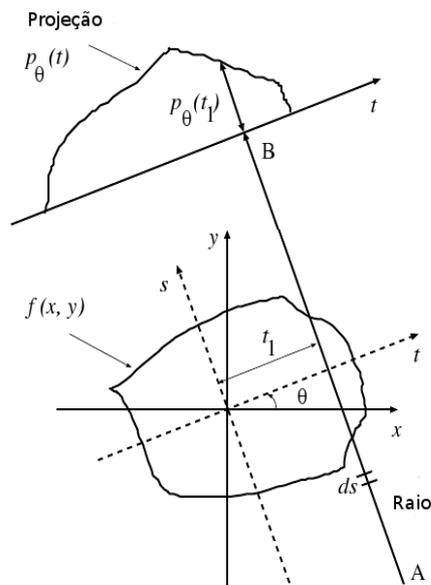


Figura 4: Transformada de Radon, adaptado de (RANGAYYAN, 2005).

Com  $P_{\theta_i}(t)$  sendo uma função de  $t$  representando a projeção paralela com ângulo  $\theta_i$ . Para  $\theta$  contínuo, a função  $P_{\theta}(t)$  é a transformada de Radon de  $f(x, y)$ . As projeções dadas foram obtidas paralelamente à rotação no eixo  $x$ .

## 2.4.2 Métodos de Reconstrução no Domínio da Frequência

O teorema de Fourier para a secção tomográfica é a base das técnicas para alguns algoritmos de reconstrução. A reconstrução é feita no domínio da frequência. O algoritmo de retroprojeção filtrada é baseado no teorema do corte de Fourier. Este emprega técnicas de interpolação do domínio da frequência para suprir o número limitado de projeções utilizado no processo de reconstrução (KAK & SLANEY, 1988) (RANGAYYAN, 2005).

### 2.4.2.1 Teorema do Corte de Fourier

Dada a transformada de Fourier de uma projeção paralela de uma imagem  $f(x, y)$ , tomada de um ângulo  $\theta$ , esta é equivalente à fatia de uma transformada bidimensional de  $f(x, y)$ , definida como  $F(u, v)$ . Subentende-se um ângulo  $\theta$  com o eixo  $u$  de forma

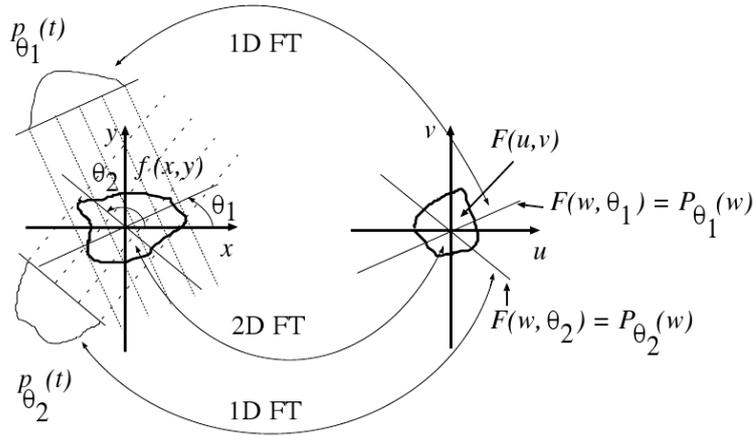


Figura 5: Representação do teorema do corte de Fourier, adaptado de (RANGAYYAN, 2005).

que a transformada de Fourier é denominada  $P_\theta$ . O teorema é exemplificado na Figura 5. Depois de relizar a transformada unidimensional de Fourier de todas as projeções, é possível estimar-se a imagem  $f(x, y)$  simplesmente executando a transformada inversa bidimensional de Fourier (KAK & SLANEY, 1988).

O teorema do corte de Fourier para a secção tomográfica pode ser provado de forma que, dada  $F(u, v)$  como sendo a transformada de Fourier da imagem  $f(x, y)$ , que é definida pela equação 2.3,

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2.3)$$

e sua inversa pela equação 2.4.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.4)$$

Utiliza-se  $P_\theta(t)$ , conforme definido anteriormente, como sendo uma projeção do ângulo  $\theta$ . Com isso, sua transformada de Fourier é dada pela equação 2.5 (KAK & SLANEY, 1988).

$$S_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t) e^{-j2\pi\omega t} dt, \quad (2.5)$$

Partindo de  $\theta = 0$ , considerando-se a transformada de Fourier do objeto ao longo da linha  $v = 0$ , no domínio da frequência, tem-se a transformada de Fourier de forma simplificada:

$$\begin{aligned} f(u, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \right] e^{-j2\pi ux} dx dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta=0}(x) e^{-j2\pi ux} dx dy$$

No lado direito da igualdade na equação 2.6, tem-se representada a transformada de Fourier unidimensional da projeção  $P_{\theta=0}(t)$ , com isso tem-se uma função de relacionamento entre a projeção e a transformada bidimensional do objeto dada pela equação 2.7.

$$F(u, 0) = S_{\theta=0}(u) \quad (2.7)$$

Este resultado pode ser expandido para se obter um resultado similar para  $\theta$  diferente de 0. Para tanto, faz-se a rotação dos eixos de coordenadas  $(x, y)$  por um ângulo  $\theta$  para formar o eixo  $t$  e  $s$ , de acordo com a matriz de rotação dada por:

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Transcrevendo  $(t, s)$  para as coordenadas  $(x, y)$ , obtém-se a equação 2.9 (KAK & SLANEY, 1988).

$$S_{\theta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)} dx dy \quad (2.9)$$

O lado direito da igualdade na equação 2.9 representa a transformada de Fourier bidimensional do espaço de frequência de  $(u = \omega\cos\theta, v = \omega\sin\theta)$  ou

$$S_{\theta}(\omega) = F(\omega, \theta) \quad (2.10)$$

Na prática, apenas um número finito de projeções é adquirido. Neste caso, é possível observar que a função  $F(u, v)$  será conhecida em apenas um número finito de pontos ao longo das linhas radiais. Para utilizar-se os valores ao longo das linhas cartesianas será necessário o uso de interpolações lineares ou aproximações de vizinhança. A densidade de pontos radiais se torna esparsa à medida que se afasta do centro, acarretando em aumento do erro de interpolação. Haverá um erro maior no cálculo dos componentes de alta frequência de uma imagem do que dos de baixa. Na imagem reconstruída, isto resultará em degradações na imagem. Pode-se utilizar-se algoritmos que garantam maior precisão na reconstrução. Destaca-se entre estes, o algoritmo de retroprojeção filtrada (KAK & SLANEY, 1988) (RANGAYYAN, 2005).

### 2.4.2.2 Retroprojeção Filtrada

O algoritmo da retroprojeção filtrada é uma derivação do teorema do corte de Fourier, com uma implementação diferente do teorema básico. Para iniciar a derivação, é necessário o uso de coordenadas polares  $(\omega, \theta)$  no lugar do sistema de coordenadas retangulares  $(u, v)$  no domínio da frequência, para reescrever a equação abaixo (KAK & SLANEY, 1988):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)} \omega d\omega d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)} \omega d\omega d\theta \\ &+ \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega, \theta + 180) e^{j2\pi\omega[x\cos(\theta+180) + y\sin(\theta+180)]} \omega d\omega d\theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Usando  $F(\omega, \theta + 180) = F(-\omega, \theta)$  e a equação 2.1 pode-se escrever  $f(x, y)$  com a ajuda do Teorema das Secções de Fourier e a expressão para  $t$  em termos de  $x$  e  $y$  como definido pela Transformada Inversa de Fourier, ou seja:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega \right] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta=0}(\omega) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega \right] d\theta \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para construir a equação 2.12 em sua forma filtrada retroprojetada, é necessário separar a equação em duas operações diferentes. A primeira é a filtragem dos dados de projeção para cada ângulo  $\theta$ , como segue:

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta}(\omega) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega \quad (2.13)$$

Depois, as projeções são retroprojetadas para obter-se a função objeto

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(x\cos\theta + y\sin\theta) d\theta \quad (2.14)$$

Para cada pixel  $(x, y)$  no plano da imagem, existirá um valor de  $t = x\cos\theta + y\sin\theta$  para cada projeção filtrada,  $Q_{\theta}$ , obtida no ângulo  $\theta$ . Cada uma destas projeções filtradas contribuirá para reconstrução do ponto  $(x, y)$  com seu valor  $t$  (KAK & SLANEY, 1988).

Na atual implementação, tem-se a versão truncada da equação 2.13 como sendo (KAK

& SLANEY, 1988):

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \sum_{k=0}^{N-1} h(n\tau - k\tau) P_{\theta}(k\tau) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.15)$$

onde  $\tau$  representa o intervalo de amostragem das projeções e  $P_{\theta}(k\tau) = 0$  para  $k < 0$  e  $k > N-1$ . A função  $h(n\tau)$  é a versão amostrada da resposta ao impulso, a qual é definida por:

$$h(n\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}\tau^2, & n = 0 \\ 0, & n = \text{par} \\ -\frac{1}{n^2\pi^2\tau^2}, & n = \text{impar} \end{cases} \quad (2.16)$$

A implementação no domínio da frequência, sob a forma de equação, pode ser expressa como:

$$Q_{\theta}(n\tau) = \tau \text{IFFT}\{\text{FFT}[P_{\theta}(n\tau)] \times \text{FFT}[h(n\tau)]\} \quad (2.17)$$

onde FFT e IFFT representam as transformadas Rápidas de Fourier e sua inversa, respectivamente.

O passo seguinte no algoritmo de reconstrução é a retroprojeção das projeções filtradas que tem sua aproximação discretizada por:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\pi}{K} \sum_{i=1}^K Q_{\theta_i}(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) \quad (2.18)$$

onde  $K$  ângulos  $\theta_i$  são valores discretos de  $Q$  para cada  $P_{\theta}(t)$  conhecido. Em outras palavras, a imagem da reconstrução é gerada pela soma de todos os valores  $t$  de  $Q_{\theta_i}$ , para cada valor  $\theta_i$ , projetados e multiplicados por  $\frac{\pi}{K}$ .

Quando o valor de  $t$  calculado não corresponde a algum dos valores de  $t$  na função discretizada  $Q_{\theta_i}$ , existe a necessidade de interpolação. A utilização de uma simples interpolação linear é adequada, nestes casos, na solução do problema (STARK; WOODS & HINGORANI, 1981).

### 2.4.3 Algoritmos de Reconstrução Algébrica

A reconstrução tomográfica feita por algoritmos algébricos assume que a imagem é uma matriz desconhecida. A partir daí são produzidas equações algébricas em termos das medidas dos dados projetados. Esta reconstrução está relacionada ao método de projeções de Kaczmarz para a resolução equações simultâneas (KAK & SLANEY, 1988).

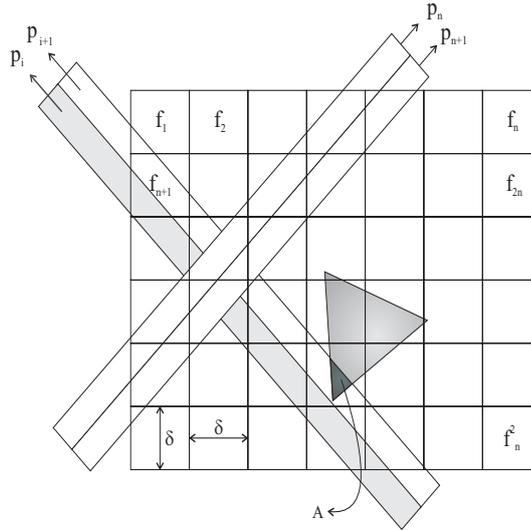


Figura 6: Modelo discretizado para reconstrução de imagens de tomografia de transmissão, adaptado de (KAK & SLANEY, 1988).

Os algoritmos algébricos tem uma abordagem completamente diferente dos métodos de reconstrução no domínio da frequência. As projeções são tratadas como um raio soma individual em uma representação discreta. Estes são vistos como um conjunto de equações simultâneas, com os valores desconhecidas sendo os pixels discretos da imagem.

Na técnica algébrica, um raio é definido de maneira diferente. Um raio é uma linha com uma certa espessura, passando pelo plano  $(x, y)$ . Na maioria dos casos a largura do raio é aproximadamente igual à largura da célula da imagem. A integral de linha é chamada de raio-soma.

A projeção tem uma representação indexada assim como a imagem. Seja  $p_i$  a medida do raio soma com o  $i$ -ésimo raio, conforme mostrado na Figura 6. A relação entre  $f_j$  e  $p_i$  pode ser expressa conforme a equação 2.19, onde  $M$  é o número total de raios (em todas as projeções) e  $w_{ij}$  é o fator de peso, que representa a contribuição da  $j$ -ésima célula da imagem interceptada pelo  $i$ -ésimo raio, como mostrado para uma célula. Note que a maioria dos  $w_{ij}$  são zero, tendo em vista que somente um pequeno número de células contribui para um dado raio-soma.

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} f_j = p_i \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2.19)$$

Se  $M$  e  $N$  são pequenos, pode-se usar o método convencional para inverter o sistema de equações em 2.19. Quando existe ruído nas projeções e quando  $M < N$ , ou  $N < M$ , não é possível utilizar a inversão direta de matriz e o método da pseudo-inversa pode ser usado. Quando  $M$  e  $N$  são grandes, tal método também é computacionalmente impraticável.

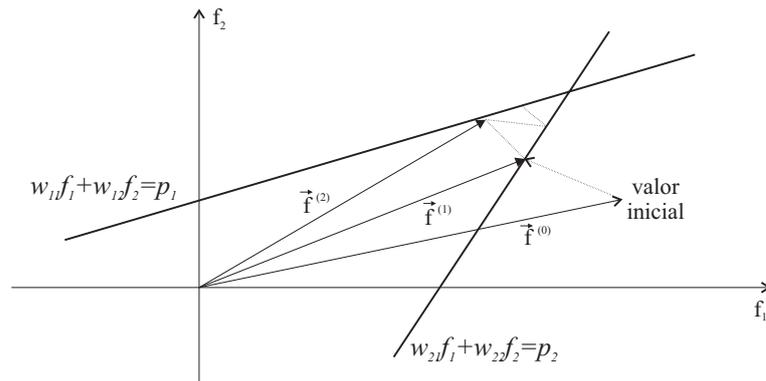


Figura 7: O método ART para o caso de dois hiperplanos, adaptado de (RANGAYYAN, 2005).

Para grandes valores de  $M$  e  $N$  existem métodos iterativos para resolver 2.19. Para expor os métodos de cálculo envolvidos nestes métodos, a equação 2.19 será primeiramente reescrita conforme mostrado no sistema da equação 2.20.

$$\begin{aligned}
 w_{11}f_1 + w_{12}f_2 + w_{13}f_3 + \cdots + w_{1N}f_N &= p_1 \\
 w_{21}f_1 + w_{22}f_2 + w_{23}f_3 + \cdots + w_{2N}f_N &= p_2 \\
 &\vdots \\
 w_{M1}f_1 + w_{M2}f_2 + w_{M3}f_3 + \cdots + w_{MN}f_N &= p_M
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Uma imagem representada por  $(f_1, f_2, \dots, f_N)$  pode ser considerada um único ponto em um espaço  $N$ -dimensional. Neste espaço, cada uma das equações acima representam um hiperplano. Quando existe uma única solução para essas equações, a interseção de todos esses hiperplanos é um único ponto, dado pela solução. Esse conceito é ilustrado na Figura 7, onde foi considerado o caso de somente duas variáveis  $f_1$  e  $f_2$ , satisfazendo as equações 2.21.

$$\begin{aligned}
 w_{11}f_1 + w_{12}f_2 &= p_1 \\
 w_{21}f_1 + w_{22}f_2 &= p_2
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

O procedimento computacional para localizar a solução na Figura 7 consiste em primeiro considerar uma solução inicial, projetando esse valor na primeira linha, projetando o ponto resultante na segunda linha e, novamente, projetando na primeira linha, e assim por diante. Se existe uma única solução, as iterações irão convergir para essa solução.

Para implementar este método, primeiramente considere uma solução inicial. Essa solução representada por  $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_N^{(0)}$  é representada vetorialmente por  $\vec{f}^{(0)}$  no espaço  $N$ -dimensional. Na maioria dos casos, simplifica-se fazendo-se com que todos os  $f_i$  tenham inicialmente valor 0. Este valor inicial é projetado no hiperplano representado pela

primeira equação em 2.21, resultando  $\vec{f}^{(1)}$ , como ilustrado na Figura 7, para o caso bidimensional.  $\vec{f}^{(1)}$  é projetado no hiperplano representado pela segunda equação em 2.21, resultando em  $\vec{f}^{(2)}$  e assim por diante. Quando  $\vec{f}^{(i-1)}$  é projetado no hiperplano representado pela  $i$ -ésima equação, resultando em  $\vec{f}^{(i)}$ , o processo pode ser matematicamente descrito pela equação 2.22, onde  $\vec{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN})$  e  $\vec{w}_i \vec{w}_i$  é o produto interno de  $\vec{w}_i$  com ele mesmo.

$$\vec{f}^i = \vec{f}^{i-1} - \frac{(\vec{f}^{i-1} \vec{w}_i - p_i)}{\vec{w}_i \vec{w}_i} \vec{w}_i \quad (2.22)$$

Conforme mostrado anteriormente, a Técnica de Reconstrução Algébrica (ART) busca a solução pela projeção sequencial, a partir de uma estimativa inicial, no conjunto de soluções das equações lineares, onde cada um desses conjuntos é um hiperplano. A Técnica de Reconstrução Iterativa Simultânea (SIRT) busca a solução através da projeção paralela nos hiperplanos e dá melhores resultados na presença de ruído.

No método de projeções sequenciais é feita a projeção de um ponto e, em seguida, esse ponto é projetado sequencialmente nos hiperplanos, de forma cíclica. Já no método de projeções paralelas, as projeções são feitas em todos os hiperplanos em uma única iteração. Os dois métodos convergem para uma única interseção caso a interseção não seja vazia. Se a interseção é vazia, o método de projeção sequencial não encontra a convergência. A solução fica oscilando entre os hiperplanos. Já o método de projeção paralela converge para a solução dos mínimos quadrados, isto é, converge para um ponto cuja distância dos hiperplanos de restrições é tal que a soma dos quadrados destas distâncias é mínima (COMBETTES, 1993).

Conjuntos que não possuem interseção são muitas vezes gerados por projeções ruidosas, o que gera equações lineares inconsistentes. O método SIRT tem melhor desempenho na presença de ruído do que o método ART.

#### 2.4.4 Algoritmo de Reconstrução utilizando POCS

Os métodos algébricos de reconstrução de imagens tomográficas, como ART e SIRT, são casos particulares de POCS (*Projections Onto Convex Sets*), nos quais são considerados como conjuntos de restrição convexos somente os hiperplanos gerados para cada raio-soma. Além das observações, é possível considerar outros conjuntos de restrição baseados em algum conhecimento *a priori* sobre o material em estudo (STARK & YANG,

1998).

Muitos problemas podem ser descritos sob a forma de conjuntos de restrições convexas. A solução para esses problemas satisfaz todas as restrições impostas, ou seja, a busca da solução desejada consiste em encontrar um valor pertencente à interseção entre os conjuntos.

Admitindo que existam  $n$  conjuntos de restrições, representados por  $C_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , a solução para o problema está na interseção dos conjuntos, representada pela equação 2.23.

$$C_0 = \bigcap_{i=1}^n C_i \quad (2.23)$$

Se os conjuntos  $C_i (i = 1, 2, \dots, n)$  são convexos e sua interseção é não vazia, as sucessivas projeções nos conjuntos convergirão para um ponto pertencente a  $C_0$ . A equação 2.24 representa o algoritmo, admitindo que  $x_0$  é um ponto qualquer e representa a estimativa inicial.

$$x_{k+1} = P_{C_k} \cdots P_{C_2} P_{C_1} x_k \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

O algoritmo descrito pela equação 2.24 faz a projeção sequencial nos conjuntos de restrições. O algoritmo de POCS (*Projections onto Convex Sets*) pode ser também implementado de maneira paralela. Nessa implementação, o ponto é projetado em todos os conjuntos. A cada projeção em um conjunto é atribuído um peso, fazendo que seja considerada a projeção em todos os conjuntos ao mesmo tempo. A equação 2.25 descreve esse algoritmo. O somatório dos pesos, representado por  $w_i$ , é igual a 1 conforme a equação 2.26.

$$x_{k+1} = x_k + \sum_{i=1}^n w_i (P_{C_i} x_k - x_k) \quad (2.25)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (2.26)$$

Quando não existe interseção entre os conjuntos de restrição, o algoritmo POCS sequencial não converge para um ponto e fica oscilando entre os conjuntos de restrições, conforme mostrado na Figura 8(a). Se a implementação for paralela, o algoritmo convergirá para um ponto tal que a soma dos quadrados das distâncias dos conjuntos é minimizada (STARK & YANG, 1998). Este caso é representado geometricamente pela Figura 8(b).

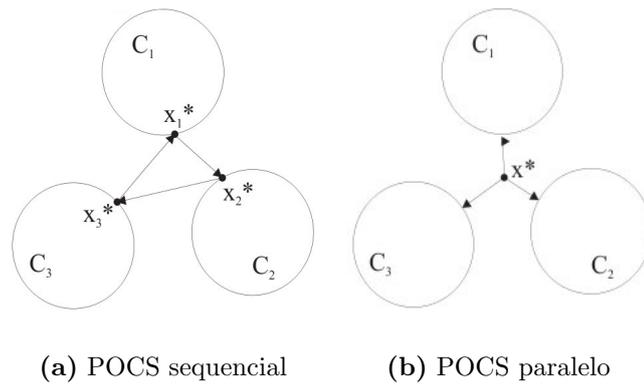


Figura 8: Convergência do algoritmo POCS.

O método de reconstrução POCS permite considerar o conhecimento *a priori* sobre a imagem a ser reconstruída. Tais restrições têm que ser expressas em forma de conjunto. O ruído faz com que os conjuntos gerados pelas observações não possuam interseção. As iterações do POCS sequencial fazem com que a solução oscile entre os conjuntos existentes. Já o POCS paralelo produz um resultado mais próximo dos conjuntos de restrições impostos.

No trabalho de (SALINA, 2007), foi utilizado no algoritmo POCS novos conjuntos de restrições, além das restrições dos hiperplanos. Foi utilizado o conjunto de restrição de não negatividade, onde os *pixels* da imagem reconstruída só podem assumir valores positivos. Utilizou-se também o conjunto de restrição de amplitude limitada. Este conjunto descreve o limite inferior e o limite superior para os valores dos *pixels* da imagem a ser reconstruída.

## Capítulo 3

### Estimadores MAP

O método Bayesiano de estimação é caracterizado por combinar informação amostral com conhecimento *a priori*. A informação *a priori* resume o grau de crença subjetivo sobre o valor do parâmetro desconhecido. Esta informação pode ser expressa por uma densidade de probabilidade. Após a densidade *a priori*, os valores observados são usados para computar o que é chamado de distribuição *a posteriori*. A regra de Bayes é definida pela equação 3.1, onde  $f(g|y)$  é a função de densidade de probabilidade *a posteriori* e  $P(g)$  é a probabilidade *a priori* (STARK & WOODS, 2002).

$$f(g|y) = \frac{P(y|g)f(g)}{P(y)} \propto P(y|g)f(g) \quad (3.1)$$

Considere-se que a amostra segue a distribuição de Poisson, que é o caso de projeções tomográficas ruidosas. Considere-se também que o conhecimento *a priori* será dado por uma função de densidade de probabilidade. Então, reescrevemos a 3.1 da seguinte forma:

$$f(g|y) = \frac{e^{-g}g^y}{y!}f(g) \quad (3.2)$$

Para maximizar a função de densidade de probabilidade *a posteriori* utilizaremos o estimador MAP (*Maximum a Posteriori*). Este é obtido a partir da derivada do logaritmo da fórmula de Bayes igualada a zero, conforme mostra a equação 3.3.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = 0 \quad (3.3)$$

Além de calcular o estimador MAP, é preciso estimar os parâmetros para as densidades de probabilidades. Existem diversas formas de estimar estes valores. Neste trabalho utilizamos o método dos momentos (*Method of Moments* - MOM), que utiliza informação dos momentos amostrais das distribuições.

### 3.1 Estimador MAP com densidades de probabilidade com informação a priori

Nesta seção discutiremos alguns estimadores MAP desenvolvidos para ruído Poisson com as densidades de probabilidade mais comuns utilizadas como informação *a priori*. O resultado do estimador é uma fórmula fechada. Em alguns casos onde não é possível chegar a uma equação fechada é preciso utilizar um método numérico de aproximação.

No trabalho de (RABBANI, 1988) e de (FURUIE, 1990) foi utilizado um estimador MAP com densidade *a priori* Gaussiana. Na dissertação de mestrado de Santos (SANTOS, 1996), foram desenvolvidos estimadores MAP com densidades *a priori* definidas na semi-reta positiva, o que é mais conveniente do que uma densidade *a priori* Gaussiana porque as taxas de contagens de uma projeção tomográfica são sempre positivas. Santos derivou estimadores com as densidades *a priori*: Beta, Chi-quadrado, Exponencial, Log-normal, Gama e Rayleigh. Neste trabalho foram desenvolvidos estimadores MAP com as densidades de probabilidade *a priori*: Nakagami, Gaussiana Inversa e Weibull.

Os cálculos dos estimadores e dos parâmetros das densidades estão detalhados no apêndice A.

#### 3.1.1 Densidade Gaussiana

A densidade de probabilidade Gaussiana foi descoberta por DeMoivre em 1733. Esta também conhecida como densidade Normal (GIBRA, 1973). É definida pela equação 3.4.

$$f(g) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{g - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

O estimador MAP para esta densidade é dado pela equação 3.5.

$$\hat{g} = \frac{\mu - \sigma^2 + \sqrt{(\sigma^2 - \mu)^2 + 4\sigma^2 y}}{2} \quad (3.5)$$

A média da distribuição é definida pelo parâmetro  $\mu$  e a variância por  $\sigma^2$ , estes podem ser estimados pela média amostral e a variância amostral.

### 3.1.2 Densidade Gama

A função de densidade de probabilidade Gama é dada pela equação 3.6,

$$f(g) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} (\beta g)^{\alpha-1} e^{-\beta g} \quad (3.6)$$

onde  $\Gamma(\alpha)$  representa a função Gama, definida pela equação 3.7. A média e a variância da densidade são definidas pelas equações 3.8 e 3.9.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} g^{\alpha-1} e^{-\alpha g} dg \quad (3.7)$$

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.8)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (3.9)$$

O estimador MAP com a densidade *a priori* Gama é definido pela equação 3.10.

$$\hat{g} = \frac{y + \alpha - 1}{1 + \beta} \quad (3.10)$$

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são estimados pelos momentos da distribuição. Através das equações 3.8 e 3.9 chegamos às equações 3.11 e 3.12, onde  $\mu$  corresponde à média amostral e  $\sigma^2$  a variância amostral.

$$\hat{\alpha} = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (3.11)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (3.12)$$

### 3.1.3 Densidade Beta

A densidade Beta, definida pela equação 3.13, tem a particularidade de ser definida no intervalo entre 0 e 1.

$$f(g) = \frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} g^{\alpha-1} (1-g)^{\beta-1} \quad (3.13)$$

A média e a variância da distribuição são definidas pelas equações 3.14 e 3.15.

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (3.14)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (3.15)$$

O estimador MAP desenvolvido com a densidade de probabilidade Beta como informação *a priori* é definido pela equação 3.16,

$$\hat{g} = \frac{y + \alpha + \beta + \Delta - 2 + \sqrt{(-y - \alpha - \beta - \Delta + 2)^2 - 4\Delta(y + \alpha - 1)}}{2} \quad (3.16)$$

onde  $\Delta$  é o maior valor que o sinal pode assumir.

A estimativa dos parâmetros feita pelo método dos momentos é dada pelas equações 3.17 e 3.18

$$\hat{\alpha} = \frac{-\mu^3 + \mu^2\Delta - \mu\sigma^2}{\sigma^2\Delta} \quad (3.17)$$

$$\hat{\beta} = \frac{(-\sigma^2 - \mu^2 + \mu\Delta)(-\mu + \Delta)}{\sigma^2\Delta} \quad (3.18)$$

### 3.1.4 Densidade Log-Normal

A função de densidade de probabilidade Log-normal é definida pela equação 3.19.

$$f(g) = \frac{1}{g\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left[-\frac{(\ln(g) - \alpha)^2}{2\beta}\right] \quad (3.19)$$

Os momentos amostrais correspondentes a média e a variância das distribuição são definidos pelas equações 3.20 e 3.21, respectivamente.

$$\mu = e^{\alpha + \frac{\beta}{2}} \quad (3.20)$$

$$\sigma^2 = e^{2\alpha + \beta}(e^\beta - 1) \quad (3.21)$$

Desenvolvendo o estimador MAP chegamos à equação 3.22.

$$\hat{g} = \frac{W(\beta e^{y\beta - \beta + \alpha})}{\beta} \quad (3.22)$$

onde  $W()$  representa a função LambertW, descrita na seção A.4 do apêndice A.

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são estimados pelo método dos momentos e definidos pelas equações 3.23 e 3.24, onde  $\mu$  é a média amostral e  $\sigma^2$  a variância amostral

$$\hat{\alpha} = \log \left[ \frac{\mu^2}{\sqrt{(\sigma^2 + \mu^2)}} \right] \quad (3.23)$$

$$\hat{\beta} = 2 \log \left[ \frac{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}}{\mu} \right] \quad (3.24)$$

### 3.1.5 Densidade Nakagami

A densidade de probabilidade Nakagami é definida pela equação 3.25

$$f(g) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m} g^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega}g^2\right) \quad (3.25)$$

A média e a variância da densidade Nakagami são definidos pelas equações 3.26 e 3.27.

$$\mu = \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

$$\sigma^2 = \Omega \left[ 1 - \frac{1}{m} \left(\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)}\right)^2 \right] \quad (3.27)$$

O estimador MAP desenvolvido é definido pela equação 3.28.

$$\hat{g} = \frac{\Omega - \sqrt{\Omega^2 + 8m\Omega(y + 2m - 1)}}{-4m} \quad (3.28)$$

Em (GAEDDERT & ANNAMALAI, 2005) e (PROAKIS, 2000) uma forma simplificada de estimar os parâmetros da densidade Nakagami pelo Métodos dos Momentos é utilizada. A equação da média da densidade é reescrita considerando o quadrado das observações. Desta forma pode-se encontrar os parâmetros da densidade. Os detalhes deste cálculo são abordados na seção A.5.1 do apêndice A. Antes do cálculo da média e da variância da amostra, é preciso elevar ao quadrado cada elemento utilizado no cálculo. Desta forma os parâmetros  $m$  e  $\Omega$  podem ser definidos pelas equações 3.29 e 3.30,

$$\hat{m} = \frac{\mu_{g^2}^2}{\sigma_{g^2}^2} \quad (3.29)$$

$$\hat{\Omega} = \mu_{g^2} \quad (3.30)$$

onde  $g^2$  representa a estimativa prévia do sinal elevada ao quadrado.

### 3.1.6 Gaussiana Inversa

A densidade de probabilidade Gaussiana Inversa é definida pela equação 3.31.

$$f(g) = \left[ \frac{\lambda}{2\pi g^3} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{-\lambda(g - \mu)^2}{2\mu^2 g} \right] \quad (3.31)$$

A média da distribuição é definida pelo parâmetro  $\mu$  e a variância pela equação 3.32.

$$\sigma^2 = \frac{\mu^3}{\lambda} \quad (3.32)$$

O estimador MAP desenvolvido com a densidade de probabilidade Gaussiana Inversa utilizada como informação *a priori* é definido pela equação 3.33.

$$\hat{g} = \frac{\mu \left[ 2\mu y - 3\mu + \sqrt{(2\mu y - 3\mu)^2 + 4\lambda(\lambda + 2\mu^2)} \right]}{4\mu^2 + 2\lambda} \quad (3.33)$$

O parâmetro  $\lambda$  é estimado pela equação 3.34

$$\hat{\lambda} = \frac{\mu^3}{\sigma^2} \quad (3.34)$$

### 3.1.7 Densidade Weibull

Em 1951 W. Weibull derivou uma densidade probabilidade que ficou conhecida como distribuição de Weibull (GIBRA, 1973).

$$f(g) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{g}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{g}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (3.35)$$

A média e a variância da distribuição Weibull são definidas pelas equações 3.36 e 3.37,

$$\mu = \eta \Gamma \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) \quad (3.36)$$

$$\sigma^2 = \eta^2 \left[ \Gamma \left( \frac{2}{\beta} + 1 \right) - \Gamma^2 \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) \right] \quad (3.37)$$

onde  $\Gamma()$  representa a função Gama, definida pela equação 3.7.

Não é possível isolar a variável  $g$  no desenvolvimento estimador MAP com a densidade Weibull como informação *a priori*. Aplicando a função logaritmo e derivando em relação a  $g$  e chega-se a função 3.38.

$$f(g) = -\frac{g\beta}{\eta} \left( \frac{g}{\eta} \right)^{\beta-1} - g + y + \beta - 1 \quad (3.38)$$

Neste caso o método de Newton-Raphson foi utilizado para fazer uma aproximação do valor do estimador. Na seção A.7 do apêndice A o método de Newton-Raphson é discutido.

A estimação dos parâmetros  $\beta$  e  $\eta$ , também não pode ser feita analiticamente. Para estimar os parâmetros utilizamos um método de aproximação baseado no coeficiente variacional dos dados amostrais. Este método é discutido com detalhes na seção A.7.1 do apêndice A.

### 3.1.8 Densidade Chi-Quadrado

A densidade de probabilidade Chi-Quadrado é definida pela equação 3.39. Ela é um caso particular da densidade Gama.

$$f(g) = \frac{1}{2^{\frac{\mu}{2}} \Gamma \left( \frac{\mu}{2} \right)} g^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\frac{g}{2}} \quad (3.39)$$

A média da distribuição corresponde ao parâmetro  $\mu$  e a variância a  $2\mu$ . O único parâmetro da distribuição  $\mu$  corresponde à média amostral. O estimador MAP é definido pela equação 3.40.

$$\hat{g} = \frac{2y + \mu - 2}{3} \quad (3.40)$$

### 3.1.9 Densidade Exponencial

A densidade de probabilidade Exponencial é descrita pela equação 3.41.

$$f(g) = \lambda e^{-\lambda g} \quad (3.41)$$

A média da densidade Exponencial é dada pela equação 3.42 e a variância pela equação 3.43.

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad (3.42)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.43)$$

O estimador MAP derivado com densidade Exponencial como informação *a priori*, é obtido pela equação 3.44.

$$\hat{g} = \frac{y}{1 + \lambda} \quad (3.44)$$

O único parâmetro da distribuição  $\lambda$  é obtido pela equação 3.45, onde  $\mu$  é a média amostral.

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\mu} \quad (3.45)$$

### 3.1.10 Densidade Rayleigh

A função de densidade de probabilidade Rayleigh é dada pela equação 3.46.

$$f(g) = \frac{g}{\lambda^2} \exp\left(\frac{-g^2}{2\lambda^2}\right) \quad (3.46)$$

A média da densidade Rayleigh é dada pela equação 3.47 e a variância pela equação 3.48.

$$\mu = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (3.47)$$

$$\sigma^2 = \lambda^2 \sqrt{\frac{4 - \pi}{2}} \quad (3.48)$$

Aplicando o logaritmo e derivando em função de  $g$  chegamos ao estimador dado pela equação 3.49.

$$\hat{g} = \frac{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 + 4\lambda^2(y+1)}}{-2} \quad (3.49)$$

O parâmetro  $\lambda$  é dado pela equação 3.50, onde  $\mu$  é a média amostral.

$$\hat{\lambda} = \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (3.50)$$

## 3.2 Estimativas Locais

Para o cálculo dos parâmetros das distribuições é preciso fazer algumas medidas no sinal. Estas medidas são o cálculo da média amostral e da variância amostral. Como as densidades *a priori* incorporam informações do sinal original, é preciso fazer uma estimativa inicial do sinal original. Chamaremos de  $\hat{g}_p$  essa estimativa inicial, que foi obtida com a aplicação de um filtro de média no sinal ruidoso, conforme mostra a equação 3.51.

$$\hat{g}_p = N^{-1} \sum_{i=1}^N y_i \quad (3.51)$$

A média amostral (equação 3.52) e a variância amostral (equação 3.53), são as medidas utilizadas para estimar os parâmetros das densidades de probabilidade utilizadas como informação *a priori*, pelo Método dos Momentos. Estas medidas são obtidas a partir da estimativa inicial do sinal original  $\hat{g}_p$ .

$$\mu_g = N^{-1} \sum_{i=1}^N \hat{g}_{p,i} \quad (3.52)$$

$$\sigma_g^2 = (N-1)^{-1} \sum_{i=1}^N (g_{p,i} - \mu_g)^2 \quad (3.53)$$

Nas equações 3.51, 3.52 e 3.53, o parâmetro  $N$  corresponde ao tamanho da janela utilizada no cálculo das estimativas. Este tamanho pode ser fixo ou variável. Com o janelamento variável ou adaptativo, pode-se obter uma maior suavização da projeção,

sem comprometer os detalhes presentes em regiões de bordas. Em regiões onde não se caracterizam a presença de bordas, utilizamos um janelamento maior e em regiões com bordas um janelamento menor.

### 3.2.1 Estimativas Locais com Janelamento Adaptativo

Utilizamos para o cálculo do janelamento adaptativo o método de Rabbani (RABBANI, 1988) com algumas modificações. Inicialmente calcula-se a variância do sinal ruidoso ( $\sigma_y^2$ ) e do sinal sem ruído ( $\sigma_g^2$ ), utilizando-se uma janela fixa de 5 elementos. Como não se tem o sinal original livre de ruído, foi aplicado um filtro de média no sinal ruidoso e em seguida foi calculada a variância. O método original de Rabbani utiliza para o cálculo da variância do sinal original a subtração da média do sinal ruidoso. De posse destes valores, calcula-se o parâmetro  $\alpha_i$  dado pela equação 3.54.

$$\alpha_i = \frac{\sigma_{gi}^2}{\sigma_{yi}^2} \quad (3.54)$$

O parâmetro  $\alpha$  é uma medida relativa da atividade do sinal. Os valores de  $\alpha$  variam entre 0 e 1. Valores próximos de 0 correspondem à pequena variação no sinal e indica áreas planas no sinal. Nesse caso pode-se usar uma janela maior no processo de filtragem. Valores para  $\alpha$  próximos de 1, indica que a variância do sinal domina a variância do ruído e indica variações no sinal original. Nessa situação, um janelamento menor durante a filtragem é mais adequado. Foi utilizada uma janela com 5 elementos para as regiões suaves e 3 elementos para regiões de bordas. É preciso definir um limiar para saber até qual valor  $\alpha$  separa as regiões suaves das regiões de bordas. Após alguns experimentos estabelecemos um limiar  $t$  com valor 0.3.

Para confirmar se uma região realmente é caracterizada por borda e não somente uma rugosidade do sinal, utiliza-se o cálculo de uma aproximação do gradiente (RABBANI, 1988). O cálculo dessa aproximação do gradiente em uma região é definido pela equação 3.55,

$$r = \frac{|Mn - M| - |Ms - M|}{|Ms - Ms|} \quad (3.55)$$

onde  $M$  é o ponto central,  $Ms$  é a soma dos seus 2 vizinhos da esquerda e  $Mn$  é a soma dos seus 2 vizinhos da direita. O valor de  $Mn$  deve ser diferente de  $Ms$ .

Assim como nos valores de  $\alpha$  utilizamos um limiar para limitar os valores de  $r$ , definimos o limiar  $T$  com valor de 0.2. A escolha do tamanho da janela será feita com a análise

dos valores de  $\alpha$  e  $r$ , em relação a seus limiares  $t$  e  $T$ .

Quando  $\alpha_i \leq t$ , podemos afirmar que é uma área de atividade moderada do sinal e o cálculo das estimativas locais é feito com janela de 5 elementos.

Quando tem-se  $\alpha_i > t$ , analisaremos também o valor de  $r$ . Quando  $|r| \leq T$  há indicação de rugosidade local mas não borda. Neste caso, ainda se utiliza a janela com 5 elementos para o cálculo das estimativas. Mas quando encontramos  $\alpha_i > t$  e  $|r| > T$ , existe uma evidência de borda. Neste caso, as estimativas locais são calculadas com janela de 3 elementos.

### 3.3 Teste Chi-quadrado

Não se sabe qual densidade probabilidade que o conjunto de projeções segue. O estimador MAP com uma determinada densidade de probabilidade pode ter bom desempenho em algumas imagens tomográficas e em outras não. No conjunto de projeções, cada projeção pode seguir um densidade de probabilidade diferente. Para encontrar qual densidade de probabilidade possui melhor aderência à projeção a ser filtrada, pode-se fazer um teste de hipóteses. Utilizamos para tal propósito o teste Chi-Quadrado ( $\chi^2$  test), ou teste de Pearson (GIBRA, 1973).

O teste Chi-Quadrado, é um teste de hipóteses que se destina a encontrar um valor da dispersão para duas variáveis nominais, avaliando a associação existente entre variáveis qualitativas. É um teste não paramétrico, portanto não depende dos parâmetros populacionais, como média e variância. O princípio básico deste método é comparar proporções, isto é, as possíveis divergências entre as frequências observadas e esperadas para um certo evento. Dois grupos se comportam de forma semelhante se as diferenças entre as frequências observadas e as esperadas em cada categoria forem muito pequenas, próximas a zero. A formulação do teste é dada pela equação 3.56, onde  $o_i$  são as frequências observadas e  $e_i$  as frequências esperadas.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \quad (3.56)$$

As frequências observadas  $o$  serão dadas pelo histograma da projeção. Antes de obter o histograma da projeção aplicamos um filtro de média para obter uma estimativa da projeção livre de ruído. Sabemos que as densidades de probabilidade possuem área

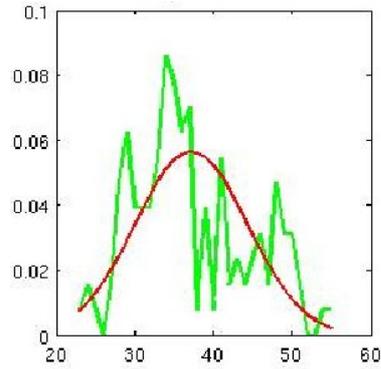


Figura 9: Histograma de uma projeção tomográfica com a densidade de probabilidade Gaussiana sobreposta.

unitária, então é preciso fazer uma normalização no histograma da projeção para que este também possua área unitária. A partir desta estimativa inicial da projeção calculamos a média amostral e a variância amostral da projeção e obtivemos os parâmetros das densidades pelo Método dos Momentos. De posse dos parâmetros é possível plotar a densidade no intervalo de ocorrências das observações da projeção. Na Figura 9 é exibido um histograma normalizado de uma projeção com a densidade de probabilidade Gaussiana sobreposta.

Todas as densidades de probabilidade que compõem o dicionário de densidades foram submetidas ao teste  $\chi^2$ . Como é possível que mais de uma densidade seja aceitável, escolhemos a que apresentar menor valor resultante do teste.

# Capítulo 4

## Filtro de Wiener

Nobert Wiener foi pioneiro nas pesquisas no problema de projetar um filtro que produzisse uma estimação ótima de um sinal a partir de observações ruidosas. Suas investigações na década de 1940 foram impulsionadas por uma importante aplicação na teoria de comunicação. A forma discreta do problema da filtragem de Wiener, é recuperar um sinal a partir de observações ruidosas.

$$y(n) = g(n) + v(n) \quad (4.1)$$

Assumindo que  $g(n)$  e  $v(n)$  são processos aleatórios estacionários, a elaboração do filtro consiste em minimizar o valor esperado do erro médio quadrático ( $\xi$ ) da estimativa de  $g(n)$ , conforme mostra a equação 4.2 (HAYES, 1996). O valor de  $e(n)$  é definido pela equação 4.3. O problema na filtragem de Wiener consiste em encontrar o filtro que minimize  $\xi$ .

$$\xi = E\{|e(n)|^2\} \quad (4.2)$$

$$e(n) = g(n) - \hat{g}(n) \quad (4.3)$$

No trabalho de (PEREIRA, 2007) foi utilizado o filtro de Wiener FIR para a filtragem das projeções tomográficas. Na tese de (SALINA, 2007), foi utilizado o filtro de Wiener Pontual. Como o filtro de Wiener assume que o ruído é aditivo, em ambos os trabalhos a filtragem foi feita no domínio de Anscombe.



Figura 10: Passos para a filtragem das projeções utilizando o filtro de Wiener, TA representa a transformada de Anscombe e TAI a sua inversa.

## 4.1 Filtro de Wiener Pontual

O filtro de Wiener Pontual é também conhecido como filtro LLMMSE (*Local Linear Minimum Mean Square Error* - LLMMSE). Assumindo que as componentes do sinal podem ser representadas como um processo estocástico com média e variância não estacionárias e variáveis aleatórias não correlacionadas entre si, pode-se utilizar o filtro de Wiener descrito pela equação 4.4 para estimar o sinal original a partir das observações sujeitas ao ruído aditivo.

$$\hat{g} = \mu_g + \frac{\sigma_g^2}{\sigma_g^2 + \sigma_n^2}(y - \mu_y) \quad (4.4)$$

$y$  é o sinal corrompido por ruído aditivo,  $\mu_y$  é a média do sinal ruidoso,  $\mu_g$  é a média do sinal original,  $\sigma_g^2$  é a variância do sinal original,  $\sigma_n^2$  é a variância do ruído. Considerando o fato de que o ruído tem média zero a média do sinal original é igual a média do sinal ruidoso, conforme mostra a equação 4.5 (KUAN et al., 1985).

$$\mu_y = \mu_g \quad (4.5)$$

A estimação da variância do sinal original apresentada em (KUAN et al., 1985) é feita subtraindo a variância do ruído da variância do sinal ruidoso, conforme mostra a equação 4.6. A estimação da variância do sinal original feita desta forma é perigosa porque pode obter valores negativos em algumas situações.

$$\sigma_g^2 = \sigma_y^2 - \sigma_n^2 \quad (4.6)$$

Uma forma mais consistente de calcular a variância do sinal original é fazendo uma estimativa prévia deste sinal com um filtro de média. Após a aplicação do filtro de média a variância é obtida com o cálculo da variância amostral. Pode-se fazer o janelamento adaptativo no filtro de Wiener Pontual da mesma forma em que é feito com os estimadores MAP. O método de Rabbani pode ser utilizado para variar o número de elementos

utilizados para o cálculo das estimativas locais (média e variância).

## 4.2 Filtro de Wiener FIR

O filtro de Wiener tem como objetivo recuperar um sinal desejado  $g(n)$ , de uma observação com ruído  $y(n)$ .

Um filtro FIR (*Finite Impulse Response*) ou de resposta ao impulso finita é um tipo de filtro digital caracterizado por uma resposta ao impulso que se torna nula após um tempo finito, em contraste com os filtros IIR (*Infinite Impulse Response*).

A saída do filtro,  $\hat{d}(n)$ , é dada pela convolução de  $w(n)$  com a entrada do filtro  $y(n)$ , conforme mostra a equação 4.7 (POULARIKAS & RAMADAN, 2006) (HAYES, 1996).

$$\hat{g}(n) = \sum_{l=0}^{p-1} w(l)y(n-l) \quad (4.7)$$

Os coeficientes do filtro devem ser determinados de tal forma que minimizem o erro médio quadrático  $\xi$ , entre o sinal desejado e o sinal após a filtragem, conforme a equação 4.8.

$$\xi = E\{|e(n)|^2\} = E\{|g(n) - \hat{g}(n)|^2\} \quad (4.8)$$

Para a minimização do erro médio quadrático é necessário que a derivada de  $\xi$  em relação a  $w^*(k)$  seja igual a zero para  $k = 0, 1, \dots, p-1$ . A equação 4.9 mostra este processo de minimização, onde  $e(n)$  é determinado pela equação 4.10 e a última expressão da equação 4.9 é dada pela equação 4.11.

$$\frac{\partial \xi}{\partial w^*(k)} = \frac{\partial}{\partial w^*(k)} E\{e(n)e^*(n)\} = E\left\{e(n) \frac{\partial e^*(n)}{\partial w^*(k)}\right\} = 0 \quad (4.9)$$

$$e(n) = g(n) - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)y(n-l) \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial e^*(n)}{\partial w^*(k)} = y^*(n-k) \quad (4.11)$$

Desta forma a a equação 4.9 pode ser redefinida pela equação 4.12 .

$$E\{e(n)y^*(n-k)\} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (4.12)$$

Substituindo a equação 4.10 na equação 4.12, chegamos à equação 4.13. Após realizar a multiplicação chegamos a equação 4.14

$$E \left\{ \left[ g(n) - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)y(n-l) \right] y^*(n-k) \right\} = 0 \quad (4.13)$$

$$E\{g(n)y^*(n-k)\} - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)E\{y(n-l)y^*(n-k)\} = 0 \quad (4.14)$$

A equação 4.13 apresenta o princípio da ortogonalidade, também conhecido como teorema da projeção. Na equação 4.14, o primeiro termo antes da subtração denota a função de autocorrelação do sinal de entrada  $y(n)$ , conforme a equação mostra a equação 4.15.

$$E\{y(n-l)y^*(n-k)\} = r_y(k-l) \quad (4.15)$$

O segundo termo da equação 4.14 denota a função de correlação cruzada entre o sinal desejado  $g(n)$  e o sinal de entrada  $y(n)$ , conforme a equação 4.16 (HAYES, 1996).

$$E\{g(n)y^*(n-k)\} = r_{gy}(k) \quad (4.16)$$

Considerando as equações 4.15 e 4.16 a equação 4.14 pode ser reescrita com a equação 4.17.

$$\sum_{k=0}^{p-1} w(l)r_y(k-l) = r_{gy}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (4.17)$$

A equação 4.17 corresponde a um conjunto de  $p$  equações lineares com  $p$  incógnitas  $w(k)$ , com  $k = 0, 1, \dots, p-1$ , esta corresponde as equações de Wiener-Hopf e pode ser representada na forma matricial, conforme a equação 4.18.

$$\begin{bmatrix} r_y(0) & r_y(1) & \dots & r_y(p-1) \\ r_y(1) & r_y(0) & \dots & r_y(p-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_y(p-1) & r_y(p-2) & \dots & r_y(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ \dots \\ w(p-1)e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{gy}(0) \\ r_{gy}(1) \\ \dots \\ r_{gy}(p-1) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

A equação 4.18 pode ser escrita de forma concisa pela equação 4.19,

$$R_y w = r_{gy} \quad (4.19)$$

onde  $R_y$  é a matriz de dimensão  $p \times p$  de valores de coeficientes de autocorrelação,  $w$  é o vetor de coeficientes do filtro e  $r_{gy}$  é o vetor com os coeficientes de correlação cruzadas entre o sinal desejado  $g(n)$  e o sinal observado  $y(n)$ . A determinação do vetor de coeficientes do filtro pode ser realizada aplicando-se a equação 4.20 (HAYES, 1996).

$$w = R_y^{-1} r_{gy} \quad (4.20)$$

Utilizando os valores dos coeficientes, pode-se obter o erro médio quadrático mínimo,  $\xi_{min}$  de estimativa de  $g(n)$  e que pode ser avaliado através da equação 4.21.

$$\xi_{min} = r_g(0) - \sum_{l=0}^{p-1} w(l) r_{gy}(l) \quad (4.21)$$

### 4.2.1 Filtragem

Em problemas de filtragem, um sinal  $g(n)$  é estimado a partir de medidas ou observações que estão corrompidas por ruído, tal qual apresentado na equação 4.2. O filtro FIR ótimo de Wiener pode ser facilmente derivado. Assume-se que o ruído tem média zero e é decorrelacionado com o sinal desejado  $g(n)$ . Pode-se afirmar que  $E\{g(n)v^*(n-k)\} = 0$ . A correlação cruzada entre  $g(n)$  e  $y(n)$  é dada pela equação 4.22.

$$\begin{aligned} r_{gy} &= E\{g(n)y^*(n-k)\} \\ &= E\{g(n)g^*(n-k)\} + E\{g(n)v^*(n-k)\} \\ &= r_g(k) \end{aligned} \quad (4.22)$$

A autocorrelação do sinal de entrada  $r_y$ , é redefinida pela 4.23, considerando a correlação do ruído.

$$\begin{aligned} r_y &= E\{y(n+k)y^*(n)\} \\ &= E\{[g(n+k) + v(n+k)][g(n) + v(n)]^*\} \\ &= r_g(k) + r_v(k) \end{aligned} \quad (4.23)$$

As equações de Wiener-Hopf para o processo de filtragem tornam-se a equação 4.24 (HAYES, 1996).

$$[R_g + R_v]w = r_g \quad (4.24)$$

Na seção 3.2.1 foi apresentado um esquema adaptativo para a escolha do tamanho da janela para o cálculo das estimativas locais. Utilizamos este método de janelamento adaptativo para escolher o tamanho das janelas utilizado para os cálculos das estimativas locais que mais se adéqua a cada área do sinal. Em regiões homogêneas utiliza-se uma janela maior e em regiões de borda utiliza-se uma janela menor. Entretanto a filtragem utilizando o filtro de Wiener FIR é realizada pela convolução dos coeficientes do filtro com o sinal ruidoso. Então, foi gerado um filtro com um número maior de pesos para ser usado em regiões homogêneas do sinal. Um filtro com um número menor de pesos será usado em regiões de borda do sinal. Durante o processo de filtragem utiliza-se o método de janelamento adaptativo de Rabbani para determinar qual filtro será utilizado para realizar a convolução naquele ponto do sinal.

### 4.3 Transformada de Anscombe

O ruído Poisson é caracterizado por ter a variância igual a média. A filtragem de Wiener considera o ruído aditivo, ou seja independente do sinal que possua variância constante. É possível utilizar de transformadas para estabilizar a variância do ruído. O ruído Poisson é dependente do sinal. No entanto, através de uma transformação não linear, o ruído pode tornar-se aproximadamente independente do sinal, aditivo e mais próximo da distribuição Gaussiana (ANSCOMBE, 1948).

Sendo  $y$  uma variável aleatória com distribuição Poisson com valor esperado  $g = E(y)$ , tem-se pelo modelo aditivo:  $y = g + u$ , onde  $E(u) = 0$  e  $var(u) = g$ . Para a transformada de Anscombe considere primeiramente a transformação da raiz quadrada, dada pela equação 4.25.

$$z = \sqrt{y} = \sqrt{g + u} \quad (4.25)$$

Expandindo a equação 4.25 em série de Taylor, tem-se a equação 4.26.

$$z = \sqrt{g} \left[ 1 + \frac{u}{2g} - \frac{1}{8} \left( \frac{u}{g} \right)^2 + \frac{1}{16} \left( \frac{u}{g} \right)^3 - \dots \right] \quad (4.26)$$

O valor esperado da equação 4.26 é dado pela equação 4.27 e a sua variância é dada por 4.28.

$$\begin{aligned} E(z) &= \sqrt{g} \left[ 1 + \frac{E(u)}{2g} - \frac{1}{8} \frac{E(u)^2}{g^2} + \frac{1}{16} \frac{E(u)^3}{g^3} - \dots \right] \\ &= \sqrt{g} \left( 1 - \frac{1}{8g} + \frac{1}{16g^2} - \dots \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} var(z) &= E(z)^2 - [E(z)]^2 \\ &= E(y) - [E(z)]^2 \\ &= g - g \left( 1 + \frac{1}{64g^2} - \frac{1}{4g} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{32} + \dots \end{aligned} \quad (4.28)$$

Portanto  $var(z) \simeq \frac{1}{4}$ , o sinal pode ser escrito pela equação 4.29,

$$z = \sqrt{g} + v, \quad (4.29)$$

onde  $E(v) \simeq 0$  e  $var(v) \simeq \frac{1}{4}$ .

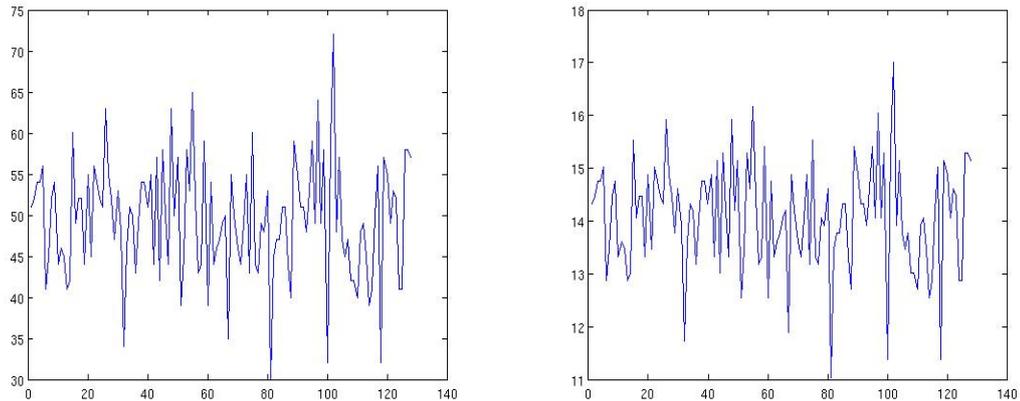
Nota-se que a relação sinal ruído após a transformação da raiz quadrada é melhor que do que sem a transformação, da ordem de 4 vezes, devido a retirada da dependência do ruído em relação ao sinal.

Anscombe propôs uma transformação da raiz quadrada, de uma variável aleatória, acrescida de uma constante no intuito de tornar o viés da estimativa de  $g$  aproximadamente constante. Sendo  $y$  uma variável aleatória com distribuição Poisson, a transformação de Anscombe é dada pela equação 4.30.

$$z = 2\sqrt{y + \frac{3}{8}} \quad (4.30)$$

Após a transformação  $z$  torna-se uma variável aleatória com média aproximadamente igual a equação 4.31, e variância unitária, onde  $g = E(y)$ . Isto equivale ao modelo aditivo.

$$E(z) = 2\sqrt{g_i + \frac{1}{8}} \quad (4.31)$$



(a) Sinal com ruído Poisson, média=49,5391 e variância=50,2347.

(b) Sinal no domínio de Anscombe, média=14,0937 e variância=1,0312.

Figura 11: Sinal com ruído Poisson e o mesmo sinal no domínio de Anscombe. A variância do ruído se torna aproximadamente unitária no domínio de Anscombe.

Nestas condições, o procedimento para a estimativa das projeções é local e envolve a estimativa do sinal original( $s$ ) a partir de  $z$ . A estimativa é feita conhecendo-se a estatística do ruído aditivo. Uma vez obtido uma estimativa do sinal original  $s$  no domínio de Anscombe, a transformada inversa de Anscombe é dada pela equação 4.32

$$\hat{g} = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} \quad (4.32)$$

Para demonstrar a eficiência da transformada de Anscombe fizemos uma simulação. Em um sinal constante com média 50, aplicamos ruído Poisson e verificamos a sua média e a sua variância, conforme mostra a Figura 11(a). Neste sinal aplicamos a transformada de Anscombe e verificamos que a variância do ruído se torna unitária, conforme exibido na Figura 11(b).

## Capítulo 5

# Redução de Ruído por Limiarização da Transformada Wavelet

A teoria de Wavelets faz a análise de dados de acordo com escalas variáveis no domínio do tempo e da frequência. A Transformada Discreta Wavelet representa um sinal em termos de deslocamentos de funções de baixa escala  $\phi$  e deslocamento de funções de alta escala  $\psi$ .

Uma característica da representação de dados no domínio Wavelet é a análise multi-escala. O sinal pode ser decomposto em diversos níveis, que podem ser analisados de forma independente.

Com a decomposição de um sinal ruidoso por meio da transformada Wavelet, os coeficientes Wavelets também representam o ruído. O ruído está presente nas altas frequências do sinal. Para a redução de ruído é preciso distinguir os coeficientes que pertencem ao sinal dos que pertencem ao ruído. Pode-se aplicar um *threshold*, ou limiar, que mantém os coeficientes que pertencem ao sinal e modifica os que pertencem ao ruído.

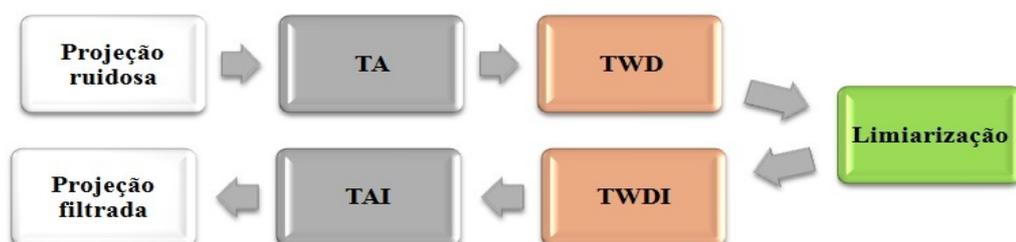


Figura 12: Passos para a filtragem das projeções utilizando a limiarização Wavelet, onde TA representa a Transformada de Anscombe e TWD representa a Transformada Wavelet Discreta.

## 5.1 Transformada Wavelet

Muitos algoritmos para a transformada Wavelet vêm sendo desenvolvidos. O mais conhecido é a transformada ortogonal proposta por Mallat (MALLAT, 1989). Usando a transformada Wavelet ortogonal um sinal  $s$  pode ser decomposto da seguinte forma (STARCK & MURTAGH, 2006):

$$s(l) = \sum_k c_{J,k} \phi_{J,l}(k) + \sum_k \sum_{j=1}^J \psi_{j,l}(k) w_{j,k} \quad (5.1)$$

onde

$$\phi_{j,l}(x) = 2^{-j} \phi(2^{-j}x - l) \quad (5.2)$$

$$\psi_{j,l}(x) = 2^{-j} \psi(2^{-j}x - l) \quad (5.3)$$

$\phi$  representa a função de escala e  $\psi$  a função Wavelet.  $J$  é o número de resoluções usadas na decomposição.  $w_j$  são os coeficientes Wavelets (ou detalhes) na escala  $j$  e  $c_J$  é a versão suavizada do sinal original  $s$ . A saída do algoritmo é um array com  $J + 1$  sub-bandas, a indexação é de tal forma que  $j = 1$  corresponde à escala mais fina (alta frequência). Os coeficientes  $c_{j,k}$  e  $w_{j,k}$  são obtidos por meio dos filtros  $h$  e  $g$ .

$$c_{j+1,l} = \sum_k h(k - 2l) c_{j,k} \quad (5.4)$$

$$w_{j+1,l} = \sum_k g(k - 2l) c_{j,k} \quad (5.5)$$

onde  $h$  e  $g$  verificam:

$$\frac{1}{2} \phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_k h(k) \phi(x - k) \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_k g(k) \phi(x - k) \quad (5.7)$$

e a reconstrução do sinal é realizada com:

$$c_{j,l} = 2 \sum_k \left[ \tilde{h}(k + 2l) c_{j+1,k} + \tilde{g}(k + 2l) w_{j+1,k} \right] \quad (5.8)$$

onde os filtros  $\tilde{g}$  e  $\tilde{h}$  devem verificar as condições de *dealising* e reconstrução exata.

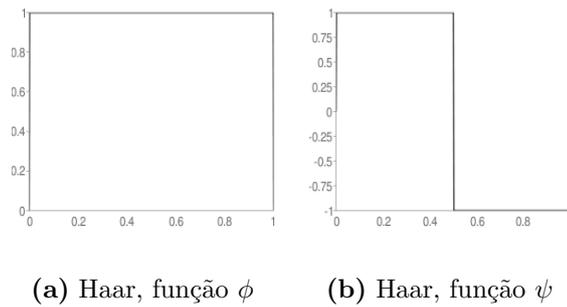


Figura 13: Base Haar.

$$\hat{h}\left(v + \frac{1}{2}\right)\hat{h}(v) + \hat{g}\left(v + \frac{1}{2}\right)\hat{g}(v) = 0 \quad (5.9)$$

$$\hat{h}(v)\hat{h}(v) + \hat{g}(v)\hat{g}(v) = 1 \quad (5.10)$$

## 5.2 Funções Wavelets

Para a realização da transformada Wavelet é preciso definir as funções de baixa escala  $\phi$  e a função de alta escala  $\psi$ . Algumas famílias de bases wavelets foram desenvolvidas. Nesta seção analisaremos as bases: Haar, Daubechies, Symmlets e Coiflets.

### 5.2.1 Haar

A Wavelet Haar é o exemplo mais simples de uma Wavelet ortonormal. Sua função de escala contém somente dois coeficientes diferentes de zero, conforme mostra a equação 5.11, onde ambos os coeficientes de escala são unitários ( $c_0 = c_1 = 1$ ).

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t - 1) \quad (5.11)$$

A partir da equação 5.11 é possível obter a função de escala, considerando que a Wavelet tem suporte compacto e é ortogonal. A função de escala  $\phi(t)$  é mostrada na equação 5.12.

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.12)$$

A função Wavelet possui, conseqüentemente, dois coeficientes diferentes de zero, devendo satisfazer a equação 5.13. A equação 5.14 mostra a função de dilatação  $\psi(t)$ .

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1) \quad (5.13)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.14)$$

## 5.2.2 Daubechies

As Wavelets propostas por Daubechies formam sistemas completos de Wavelets ortonormais. Os sistemas são gerados a partir da função de escala, descrita pela equação 5.15, onde os parâmetros  $a_k$  são denominados coeficientes de filtro. Impondo determinadas restrições sobre os valores que estes coeficientes assumem, é possível obter determinadas propriedades para um sistema de Wavelets, tal como a ortonormalidade (DAUBECHIES, 1992).

$$\phi(t) = \sum_k a_k \phi(2t - k) \quad (5.15)$$

Para que as Wavelets tenham suporte compacto é necessário que apenas um número finito de coeficientes do filtro tenha valores diferentes de zero. Os sistemas Wavelets de Daubechies são organizados em diferentes famílias, caracterizadas pelos números de coeficientes  $a_k$  não nulos. Cada família é identificada pelo número de família, representado aqui por  $N$ , cujo valor é igual à metade do número de coeficientes do filtro utilizados na equação 5.15.

É possível reescrever a equação 5.15, em função de  $N$ , de maneira que represente cada uma das famílias Wavelets de Daubechies, conforme apresentado na equação 5.16.

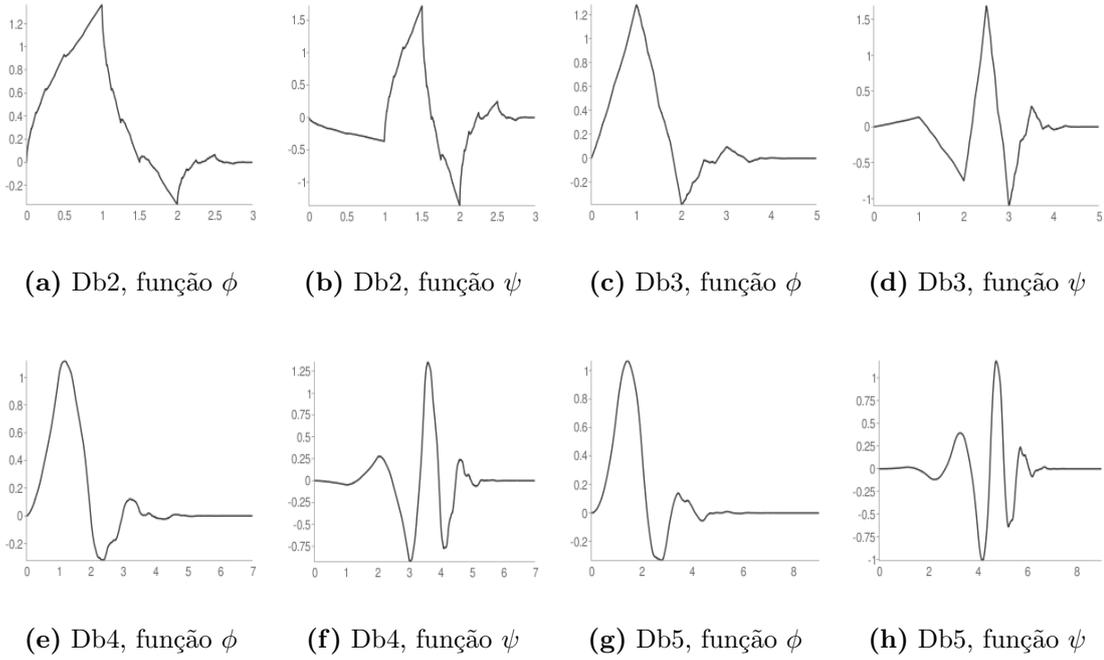


Figura 14: Bases de Daubechies.

$${}_N\phi(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k {}_N\phi(2t - k) \quad (5.16)$$

As funções de escala possuem valores não nulos apenas no intervalo  $[0, 2 - N]$ , o qual é denominado suporte da função de escala  ${}_N\phi(t)$ .

A Wavelet primária de cada uma das famílias pode ser definida através da equação 5.17, onde o valor de  $b_k$  é definido pela equação 5.18.

$${}_N\psi(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} b_k {}_N\phi(2t - k) \quad (5.17)$$

$$b_k = (-1)^k a_{2N-1-k} \quad (5.18)$$

Daubechies definiu as famílias Wavelets com valores de  $N$  compreendidos entre 2 e 10. Cada família Wavelet é indicada como  $DBN$ , onde  $DB$  indica que são as Wavelets propostas por Daubechies e  $N$  indica o suporte da função. Apesar de Daubechies definir em seu trabalho apenas valores para  $N$  até dez, outras famílias de diferentes suportes podem ser obtidas a partir das equações 5.16 e 5.17 (DAUBECHIES, 1992). Na Figura 5.2.2 são exibidas algumas funções Wavelets da família de Daubechies.

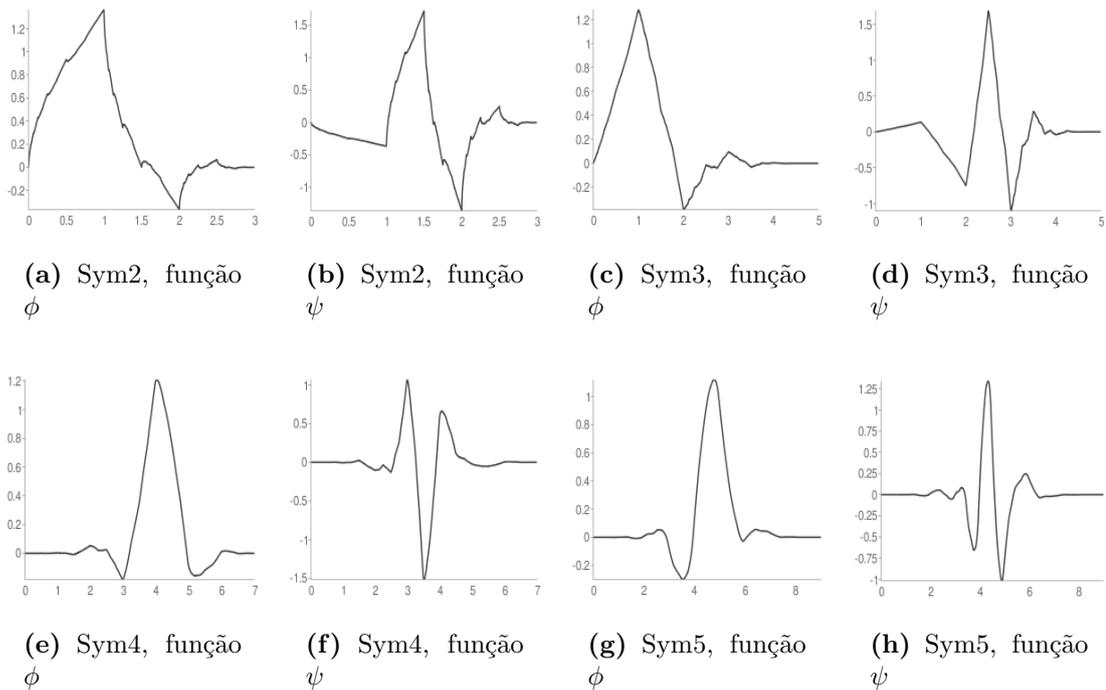


Figura 15: Bases Symmlets.

### 5.2.3 Symmlets

Ingrid Daubechies, desenvolveu além das bases que levam o seu nome, as bases Symmlets e Coiflets. As Symmlets são bases ortonormais, têm  $p$  momentos nulos e suporte entre  $(-p + 1)$  e  $p$ . São mais simétricas que as wavelets de Daubechies. Na Figura 5.2.3 são exibidas algumas funções Wavelets da família Symmlets.

### 5.2.4 Coiflets

As Coiflets foram sugeridas por R. Coifman em 1989. Coifman sugeriu a construção de bases de Wavelets ortonormais com momentos nulos não apenas para a função  $\psi$  mas também para a função  $\phi$  (DAUBECHIES, 1992). Daubechies construiu tais wavelets e as denominou Coiflets em homenagem a R. Coifman. As Coiflets são Wavelets ortonormais quase simétricas. O objetivo é que  $\psi$  e  $\phi$  satisfaçam as equações 5.19, 5.20 e 5.21.

$$\int x^l \psi(x) dx = 0 \quad (5.19)$$

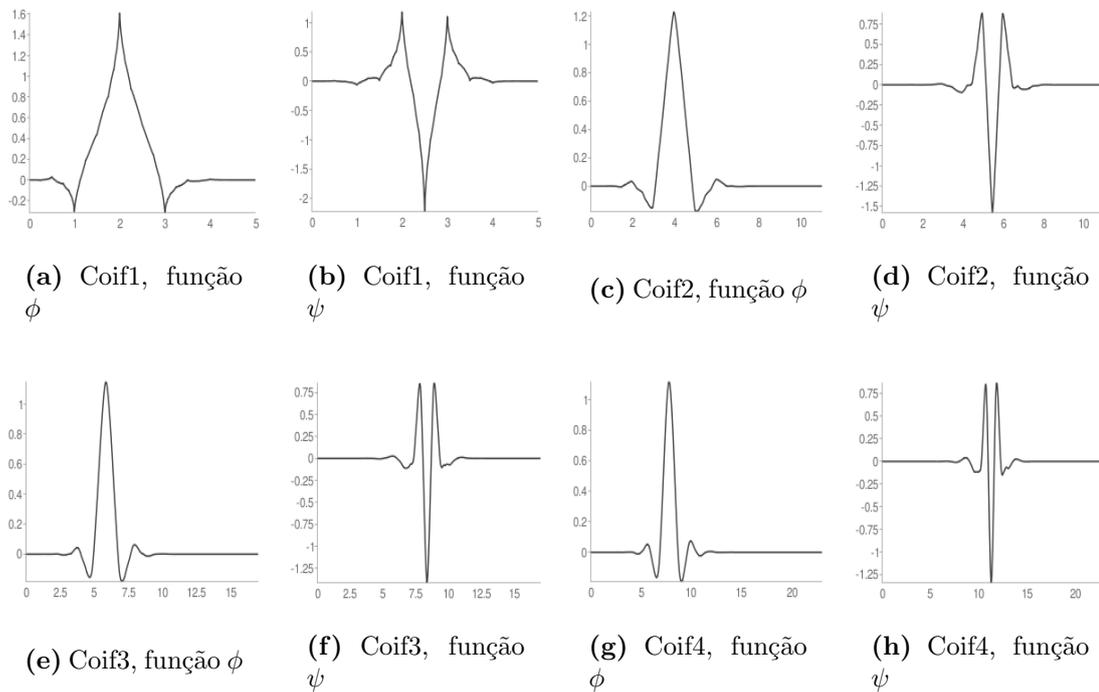


Figura 16: Bases Coiflets.

$$\int \phi(x) dx = 0 \quad (5.20)$$

$$\int x^l \phi(x) dx = 0 \quad (5.21)$$

Na Figura 5.2.4 são exibidas algumas funções Wavelets da família Symmlets.

### 5.3 Limiarização - *Thresholding*

O sinal  $g$  livre de ruído, é tipicamente esparso, contendo uma grande quantidade de valores próximos de zero (JANSEN, 2006). O sinal livre de ruído pode ser estimado utilizando um limiar  $\lambda$ . A equação 5.22 representa esse processo, onde  $y_\lambda$  representa a aplicação de um limiar (*thresholding*) no vetor  $y$ .

$$\hat{g} = y_\lambda \quad (5.22)$$

O procedimento no qual valores menores que um limiar são removidos enquanto os

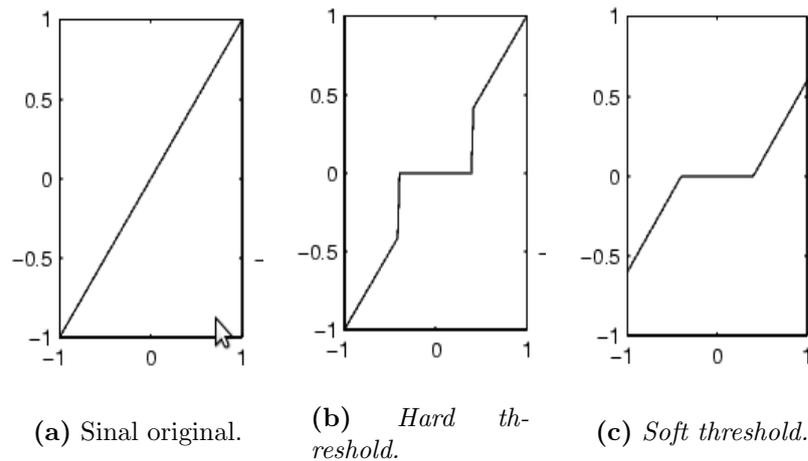


Figura 17: *Hard e Soft Thresholding.*

valores maiores ou iguais são mantidos é chamado *hard-thresholding*. A função que representa o *hard-thresholding* é mostrada na equação 5.23.

$$\rho_{hard}(y) = \begin{cases} y, & |y| > \lambda \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.23)$$

Uma alternativa para amenizar a descontinuidade nos coeficientes Wavelets gerados pelo *hard-thresholding* é o *soft-thresholding*, mostrado na equação 5.24, onde os coeficientes com valores absolutos acima do limiar  $\lambda$  são reduzidos, ou seja, não somente pequenos valores são colocados como zero, mas valores maiores são reduzidos por um valor igual ao limiar  $\lambda$ .

$$\rho_{soft}(y) = \begin{cases} y - \lambda, & y \geq \lambda \\ y + \lambda, & y \leq -\lambda \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.24)$$

Nas próximas seções serão abordado formas de obtenção do valor do *threshold* para a limiarização dos coeficientes Wavelets. Os *thresholds* analisados consideram ruído Gaussiano, portanto a transformada Wavelet deve ser feita no domínio de Anscombe (seção 4.3).

### 5.3.1 *Universal Threshold*

Nos trabalhos de (DONOHO & JOHNSTONE, 1994) e (DONOHO & JOHNSTONE, 1998) foi demonstrado que o *Universal Threshold*, descrito pela equação 5.25 possui propriedades ótimas para eliminação de ruído nos coeficientes Wavelets.

$$\lambda_{universal} = \sqrt{2 \log N} \sigma \quad (5.25)$$

Onde  $N$  é o comprimento do sinal e  $\sigma$  é desvio padrão do ruído. O nome *Universal Threshold* reflete a ideia de que o limiar é válido para todos sinais de comprimento  $N$ .

### 5.3.2 *SURE Threshold*

Este *threshold* foi proposto por (DONOHO & JOHNSTONE, 1995). A escolha do limiar segue o princípio da estimação de risco não enviesada de Stein (*Stein's Unbiased Risk Estimate* - SURE). Consiste em encontrar um valor que minimiza a função de risco descrita pela equação 5.26, onde a função  $SURE(\lambda)$  é dada pela equação 5.27.

$$\lambda_{SURE} = \arg \min_{\lambda} \{SURE(\lambda)\} \quad (5.26)$$

$$SURE(\lambda) = \left[ \left( \frac{1}{N} \|y_{\lambda} - y\|^2 \right) - \sigma^2 \right] + \left[ 2\lambda^2 \frac{N - N_0}{N} \right] \quad (5.27)$$

Na equação 5.27  $y_{\lambda}$  são os coeficientes Wavelet após a aplicação do *threshold*,  $N$  é número de coeficientes na sub-banda,  $N_0$  é o número de coeficientes nulos após a aplicação do *threshold* e  $\sigma^2$  é a variância do ruído.

### 5.3.3 *Oracle Threshold*

Este *threshold* é ótimo sob o critério de erro médio quadrático. Assume-se que a sinal original é conhecido. O *threshold* é obtido pelo valor que minimiza a equação 5.28,

$$\lambda^* = \arg \min_y \{\|y_\lambda - g\|^2\} \quad (5.28)$$

onde  $y_\lambda$  é vetor de coeficientes com a aplicação de um *threshold*  $\lambda$  e  $g$  é o vetor de coeficientes do sinal livre de ruído (DONOHO & JOHNSTONE, 1994).

### 5.3.4 Minimax *Threshold*

Donoho e Johnstone propuseram o Minimax *threshold* (DONOHO & JOHNSTONE, 1994), este difere do universal *threshold* pelo fato de não realizar uma suavização excessiva. Isto é devido ao fato que o Minimax *threshold* é concentrado em reduzir o erro médio quadrático. Assim o Minimax *threshold* mantém mudanças abruptas do sinal, não as suavizando. O *threshold* depende do tamanho da amostra  $n$ . O valor do *threshold*  $\lambda$  é definido quando este alcança o valor definido pela equação 5.29,

$$\lambda_n = \inf_{\lambda} \sup_y \left\{ \frac{R_\lambda(y)}{n^{-1} + R_{oracle}(y)} \right\} \quad (5.29)$$

onde  $y$  são os coeficientes Wavelets e  $R_\lambda(y) = E(y_\lambda - y)^2$ .

Dois *Oracles* foram considerados por Donoho. A projeção da diagonal linear (DPL), um oracle que fornece a informação para manter ou não cada coeficiente Wavelet empírico. A diagonal linear de limiarização (DLS) é um oracle que informa o quanto limiarizar cada coeficiente Wavelet. O risco ideal destes *oracles* é dado pelas equações 5.30 e 5.31.

$$R_{oracle}^{DLP}(y) = \min(y^2, 1) \quad (5.30)$$

$$R_{oracle}^{DLS}(y) = \frac{y^2}{y^2 + 1} \quad (5.31)$$

# Capítulo 6

## Metodologia e Experimentos

Para os testes de desempenho dos métodos de filtragem utilizamos um corpo de prova simulado e 5 conjuntos de projeções capturados por um mini-tomógrafo de transmissão no CNPDIA-EMBRAPA. As projeções foram filtradas e em seguida a imagem foi reconstruída com algoritmo POCS paralelo. A avaliação dos critérios de filtragem foi feita após a reconstrução da imagem.

A codificação dos métodos de filtragem foi feita utilizando a linguagem MATLAB na sua versão 2008b. O algoritmo POCS paralelo utilizado para a reconstrução foi implementado por (SALINA, 2007) e utilizado em sua tese.

Nas próximas seções discutimos os critérios de avaliação das imagens. Em seguida é apresentada a composição dos corpos de prova (*phantoms*) e o desempenho dos métodos de filtragem nas projeções de cada *phantom*.

### 6.1 Avaliação dos resultados

Para avaliar o desempenho dos métodos de filtragem consideramos 4 critérios: a melhora de relação sinal ruído (*Improvement in Signal-to-Noise Ratio* - ISNR), a potência máxima na relação sinal ruído (*Peak in Signal-to-Noise Ratio* - PSNR), a divergência de Csiszar (IDIV) e o índice de semelhança estrutural (*Structural Similarity Index*-SSIM). O SSIM é um critério mais elaborado porque considera a combinação de três medidas. O objetivo deste critério é se aproximar ao critério de julgamento visual humano. Os critérios de avaliação são abordados nas próximas seções.

### 6.1.1 *Improvement in Signal-to-Noise Ratio - ISNR*

O critério de comparação ISNR, descrito na equação 6.1, verifica a melhora da relação sinal-ruído. Este critério utiliza três imagens para o cálculo: a imagem original  $g$ , a imagem estimada  $\hat{g}$  e a imagem ruidosa  $y$ . O valor do ISNR é dado em decibéis, quanto maior o valor obtido pelo critério, maior a aproximação da imagem estimada da ideal. O valor resultante é 0 quando a imagem estimada for igual a imagem ruidosa ( $\hat{g} = y$ ) e é infinito quando a imagem estimada for igual à ideal ( $\hat{g} = g$ ).

$$ISNR = 10 \log \frac{\sum_{i=1}^n (g_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (g_i - \hat{g}_i)^2} \quad (6.1)$$

### 6.1.2 *Peak Signal-to-Noise Ratio - PSNR*

Este critério mede a razão entre a potência máxima possível de um sinal e o erro de sua estimação. Sua formulação é descrita pela equação 6.2,

$$PSNR = 10 \log_{10} \left[ \frac{MAX_{\hat{g}}^2}{MSE(\hat{g}, g)} \right] \quad (6.2)$$

onde  $\hat{g}$  é a imagem estimada e  $g$  a ideal.  $MAX_{\hat{g}}$  é o valor máximo observado na imagem  $\hat{g}$ .  $MSE(\hat{g}, g)$  é o valor do erro médio quadrático (*Mean Square Error - MSE*) entre as imagens  $\hat{g}$  e  $g$  (equação 6.3). Quando as imagens  $\hat{g}$  e  $g$  são iguais o valor do PSNR é infinito.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{g}_i - g_i)^2 \quad (6.3)$$

### 6.1.3 *Csiszar's I-Divergence*

Esse método de mensuração do erro foi proposto por (CSISZAR, 1991). Consiste em calcular a divergência entre uma imagem estimada  $\hat{g}$  e a imagem ideal  $g$ . Quanto menor o valor obtido pelo critério, mais as duas imagens se aproximam. O valor chega a 0 quando

as imagens são iguais. O índice de divergência é calculado pela equação 6.4.

$$IDIV = \sum_{i=1}^n \left[ \hat{g}_i \ln \left( \frac{\hat{g}_i}{g_i} \right) - (\hat{g}_i - g_i) \right] \quad (6.4)$$

#### 6.1.4 *Structural Similarity Index - SSIM*

O critério SSIM, proposto por (WANG et al., 2004), mede as semelhanças entre duas imagens  $\hat{g}$  e  $g$ . Essa medida é feita tomando como base três elementos: a similaridade da luminância  $l(\hat{g}, g)$ , a semelhança do contraste  $c(\hat{g}, g)$  e semelhanças das estruturas  $s(\hat{g}, g)$ . Estas medidas estatísticas são combinadas para formar o SSIM, conforme mostra a equação 6.5 (WANG et al., 2004) (WANG & BOVIK, 2009). A combinação destas 3 medidas tem o objetivo se aproximar ao critério de julgamento visual humano.

$$SSIM = l(\hat{g}, g)c(\hat{g}, g)s(\hat{g}, g) = \left( \frac{2\mu_{\hat{g}}\mu_g + C_1}{\mu_{\hat{g}}^2 + \mu_g^2 + C_1} \right) \left( \frac{2\sigma_{\hat{g}}\sigma_g + C_2}{\sigma_{\hat{g}}^2 + \sigma_g^2 + C_2} \right) \left( \frac{2\sigma_{\hat{g}g} + C_3}{\sigma_{\hat{g}}\sigma_g + C_3} \right) \quad (6.5)$$

Os parâmetros  $\mu_{\hat{g}}$  e  $\mu_g$  são as médias de  $\hat{g}$  e  $g$ ,  $\sigma_{\hat{g}}$  e  $\sigma_g$  são os desvios padrões de  $\hat{g}$  e  $g$ ,  $\sigma_{\hat{g}g}$  é a correlação entre  $\hat{g}$  e  $g$ . Os parâmetros C1, C2 e C3 são constantes positivas que estabilizam cada termo, em geral o método funciona bem quando se atribui 0 para estas constantes (WANG & BOVIK, 2009). O índice é delimitado no intervalo entre -1 e 1, o valor máximo 1 é alcançado somente quando as duas imagens são iguais.

## 6.2 *Phantoms de Teste*

Para os testes dos métodos de filtragem utilizamos projeções de um *phantom* simulado e projeções de *phantoms* capturadas por um mini-tomógrafo no CNPDIA-EMBRAPA. O *phantom* simulado que utilizamos no trabalho é mostrado na Figura 18(a). Este *phantom* foi utilizado primeiramente por Shepp e Logan (LOGAN & SHEPP, 1975) e posteriormente passou a ser amplamente utilizado em problemas que envolvem tomografia computadorizada.

Os *phantoms* utilizados para a captura de projeções no mini-tomógrafo foram cons-

truídos utilizando os seguintes materiais: água, ar, plexiglass e alumínio. Cada material produz um nível de atenuação diferente nas projeções do objeto. Além destes *phantoms* foram utilizados dois pedaços de madeira. O objetivo de utilizar a madeira é verificar o desempenho dos métodos de filtragem em projeções de materiais que são utilizados em aplicações reais. Os detalhes sobre a composição dos *phantoms* são abordados nas próximas seções.

Foram capturados pelo mini-tomógrafo dois conjuntos de projeções por *phantom*, com tempos diferentes de exposição aos raios do tomógrafo. As projeções com menor tempo de exposição foram expostas 3 segundos aos raios do tomógrafo para a obtenção de cada ponto da projeção. Chamaremos estas projeções capturadas com menor tempo de projeções ruidosas. Nelas serão aplicados os métodos de filtragem. Já as projeções com maior tempo de exposição foram obtidos com 20 segundos de exposição em cada ponto. Estas projeções têm uma representação mais fiel ao corte seccional do objeto irradiado. Chamaremos estas projeções de ideais. Estas projeções serão utilizadas para comparar a eficiência dos métodos de filtragem.

### 6.2.1 *Phantom de Shepp e Logan*

Shepp e Logan desenvolveram este *phantom* simulado com o objetivo de se aproximar a um cérebro humano. No seu interior são encontradas estruturas de tamanhos diferentes e com intensidades de níveis de cinza diferenciadas. Na Figura 18(a) é mostrada a imagem do *phantom* de Shepp e Logan. Para a obtenção das projeções do *phantom* de Shepp e Logan, aplicamos a transformada de Radon na imagem do *phantom*. foi aplicado ruído Poisson nas projeções para a obtenção das projeções ruidosas. A transformada de Radon foi utilizada para gerar um sinograma de dimensão quadrada de 128 pontos em cada lado. Nas Figuras 18(b) e 18(c) são exibidas perspectivas 3D do sinograma de Shepp Logan e o mesmo sinograma com ruído Poisson. Já nas Figura 18(d) e 18(e) são exibidos os mesmo sinogramas em uma visão 2D. Nas Figuras 18(f) e 18(g) são exibidas as imagens reconstruídas a partir dos sinogramas sem ruído e com ruído. A reconstrução destas imagens foi feita pelo algoritmo POCS paralelo.

Na Tabela 2, são exibidas as medidas de erro entre a imagem reconstruída pelo conjunto de projeções com ruído e a imagem reconstruída pelo conjunto de projeções sem ruído. Não foi inserida a medida de erro do ISNR porque esta sempre será zero quando a imagem estimada é igual a ruidosa.

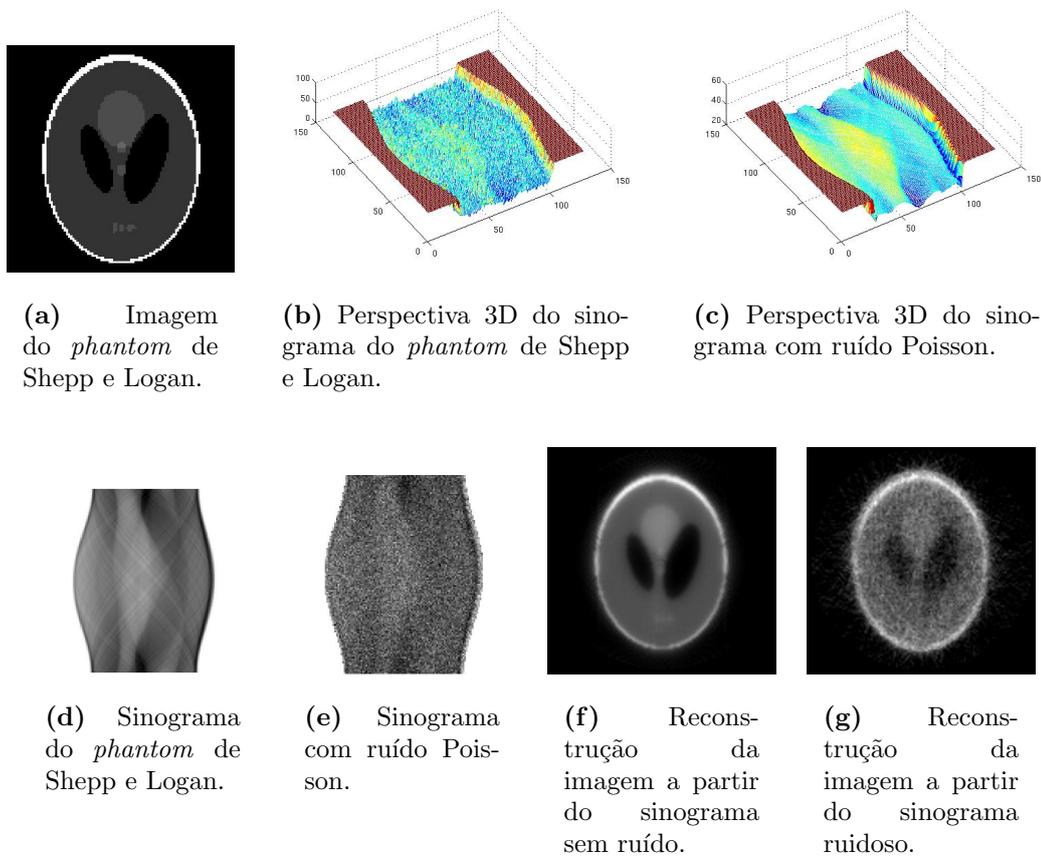


Figura 18: Conjuntos de projeções e reconstruções do *phantom* de Shepp e Logan.

Tabela 2: Medida dos critérios de qualidade entre as imagens ruidosas e sem ruído do *phantom* de Shepp e Logan2.

<i>Phantom</i>	PSNR	IDIV	SSIM
Shepp e Logan	22.4422	331.2951	0.32906

### 6.2.1.1 Estimadores MAP

São exibidas na Tabela 3 as medidas de erro das imagens reconstruídas a partir de projeções filtradas com estimadores MAP. As estimativas locais utilizadas na estimação dos parâmetros das densidades foram obtidas com janelamento fixo e adaptativo. Nesta tabela os melhores resultados para cada tipo de janelamento foram destacados em negrito. O janelamento adaptativo foi realizado pelo método de Rabbani, abordado na seção 3.2.1, onde são combinadas as janelas de 3 e 5 elementos para a filtragem.

Na Figura 19 é exibida uma projeção ruidosa do *phantom* de Shepp e Logan e a mesma projeção após a filtragem com um estimador MAP que utiliza a densidade Gaussiana como

Tabela 3: Medidas de erro das filtragens realizadas com estimadores MAP nas projeções do *phantom* de Shepp e Logan.

Densidade <i>a priori</i>	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Beta	3	-2.7075	19.7346	522.1738	0.37827
	5	-3.9091	18.5330	623.2203	0.38843
	3 e 5	-4.1098	18.3323	646.2820	0.39279
Gama	3	-1.7914	20.6507	334.7688	0.42024
	5	-2.9884	19.4538	387.7529	0.44020
	3 e 5	-3.0128	19.4293	380.9233	0.44658
Gaussiana	3	-1.7171	20.7250	331.9282	<b>0.42198</b>
	5	-2.8420	19.6001	380.5825	0.44155
	3 e 5	-3.0125	19.4296	380.8091	<b>0.44771</b>
Log-Normal	3	-1.8448	20.5973	336.7879	0.41962
	5	-3.0928	19.3493	393.3942	0.43929
	3 e 5	-3.0293	19.4128	381.5069	0.44611
Nakagami	3	-1.7613	20.6808	333.5230	0.42082
	5	-2.7652	19.6769	376.8618	<b>0.44255</b>
	3 e 5	-2.9405	19.5016	377.3867	0.44713
Weibull	3	-1.4523	20.9898	320.1333	0.41949
	5	-2.5410	19.9011	365.3295	0.43930
	3 e 5	-2.5736	19.8685	359.7171	0.44541
Gaussiana Inversa	3	-1.8393	20.6028	336.5767	0.41950
	5	-3.0824	19.3597	392.7393	0.43927
	3 e 5	-3.0235	19.4186	381.2351	0.44603
Chi-Quadrado	3	-0.3470	22.0951	<b>312.3382</b>	0.36226
	5	-1.0318	21.4103	332.0092	0.35921
	3 e 5	-0.7972	21.6449	<b>323.5437</b>	0.36443
Exponencial	3	<b>0.0495</b>	<b>22.4917</b>	327.6738	0.33191
	5	<b>0.0073</b>	<b>22.4495</b>	328.5831	0.33152
	3 e 5	<b>0.0191</b>	<b>22.4613</b>	328.1999	0.33179
Rayleigh	3	-0.0493	22.3928	324.3882	0.33709
	5	-0.1697	22.2724	<b>327.1267</b>	0.33634
	3 e 5	-0.1386	22.3035	326.1756	0.33723

informação *a priori*.

Na figura 19 é exibida uma projeção do *phantom* de Shepp e Logan com ruído e a mesma projeção filtrada com o uso do estimador MAP com a densidade *a priori* Gaussiana, foi utilizado janelamento adaptativo para o cálculo das estimativas locais. Na Figura 20 são exibidas as imagens reconstruídas a partir do sinograma filtrado com os estimadores MAP empregando as densidades *a priori*: Gaussiana e Exponencial. Note que a imagem reconstruída a partir de projeções filtradas com o estimador desenvolvido com a densidade Gaussiana apresenta melhor qualidade do que a imagem reconstruída a partir de projeções filtradas com o estimador que utiliza a densidade Exponencial. Os critérios de medida ISNR, PSNR e IDIV apontam o uso das densidades Exponencial, Rayleigh e

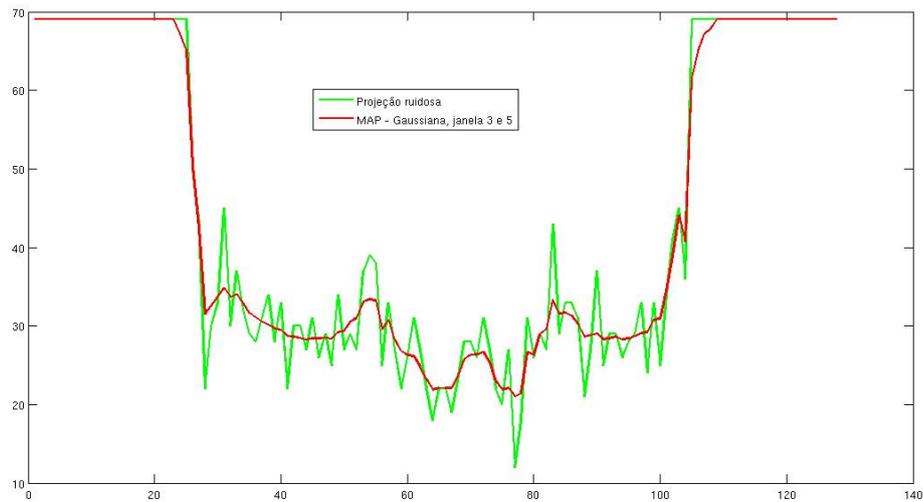


Figura 19: Projeção ruidosa do *phantom* de Shepp e Logan e a mesma projeção filtrada sobreposta. A filtragem foi realizada com o estimador MAP desenvolvido com a densidade Gaussiana e uso de janelamento adaptativo para o cálculos das estimativas locais.

Chi-Quadrado como as melhores densidades empregadas como informação *a priori*. Entretanto, visualmente não constatamos isto. O critério SSIM aponta a densidade Gaussiana como a melhor informação *a priori* com uso de janela de 3 elementos e adaptativa. Com o uso de janela de 5 elementos o critério SSIM aponta a densidade Nakagami como a melhor informação *a priori* para a filtragem das projeções do *phantom* de Shepp e Logan. O critério de medida SSIM se mostra mais coerente por considerar a correção entre as estruturas das imagens comparadas.

Na Figura 20 também são exibidas as imagens reconstruídas a partir de projeções filtradas com diferentes estimadores escolhidos pelo teste de hipóteses.

Para a realização do teste de hipóteses, foi obtido o histograma de cada projeção depois de uma suavização prévia feita por um filtro de média com um janela de 5 elementos. Foram utilizados 10 pontos para a obtenção do histograma.

Na Tabela 4 são exibidos os resultados das imagens reconstruídas a partir de projeções filtradas com estimadores MAP onde a densidade *a priori* foi selecionada pelo teste de hipóteses. Na Tabela 5 estão relacionadas as densidades probabilidade e o número de vezes que foram escolhidas para a filtragem do conjunto de projeções. Na Figura 21 são apresentadas as aproximações das densidades de probabilidade utilizadas no teste de hipóteses com o histograma de uma projeção do *phantom* de Shepp e Logan. Por apresentar medidas de erro abaixo das demais (considerando o critério SSIM), as densidades de probabilidade Exponencial, Rayleigh e Chi-Quadrado não foram incluídas no dicionário de densidades. A filtragem MAP com a escolha das densidades com o uso do teste de

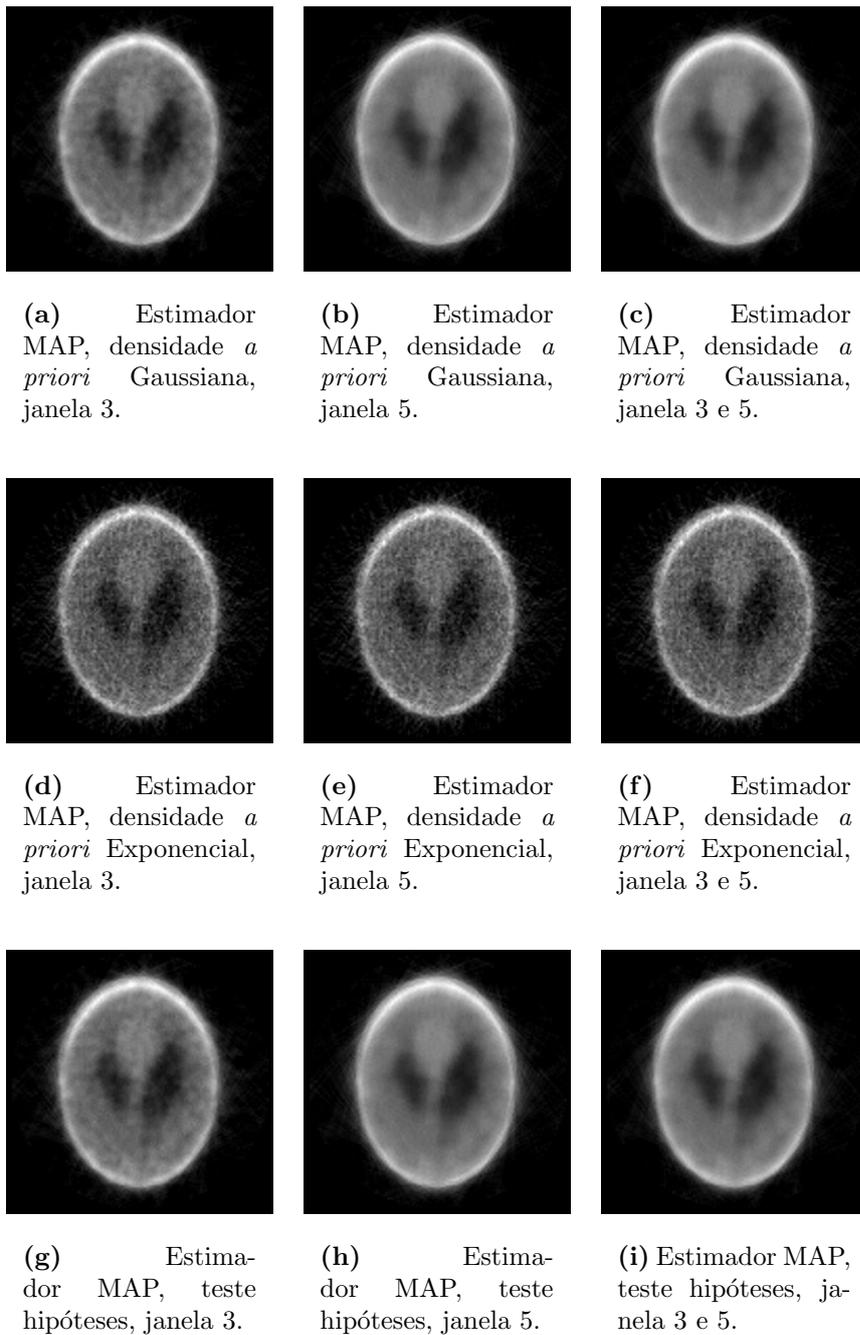


Figura 20: Imagens reconstruídas a partir do conjunto de projeções do *phantom* de Shepp e Logan filtrado por estimadores MAP.

hipóteses não superou o resultado das imagens reconstruídas com o estimador MAP com o uso de uma única densidade  $a$  priori. Porém os resultados se aproximam bastante. O histograma utilizado no teste foi gerado com 20 pontos. A suavização prévia da projeção foi realizada com um filtro de média com janela de 3 elementos.

Tabela 4: Filtragem com estimadores MAP das projeções do *phantom* de Shepp e Logan utilizando o teste  $\chi^2$  para a escolha da densidade *a priori*.

Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
3	-1.7694	20.6727	334.5629	0.42026
5	-2.9951	19.4470	388.5376	0.44001
3 e 5	-3.0164	19.4257	381.4029	0.44632

Tabela 5: Densidades a priori escolhidas nas projeções do *phantom* de Shepp e Logan.

Densidade de probabilidade	Número escolhida
Gama	96
Log-Normal	32
Total	128

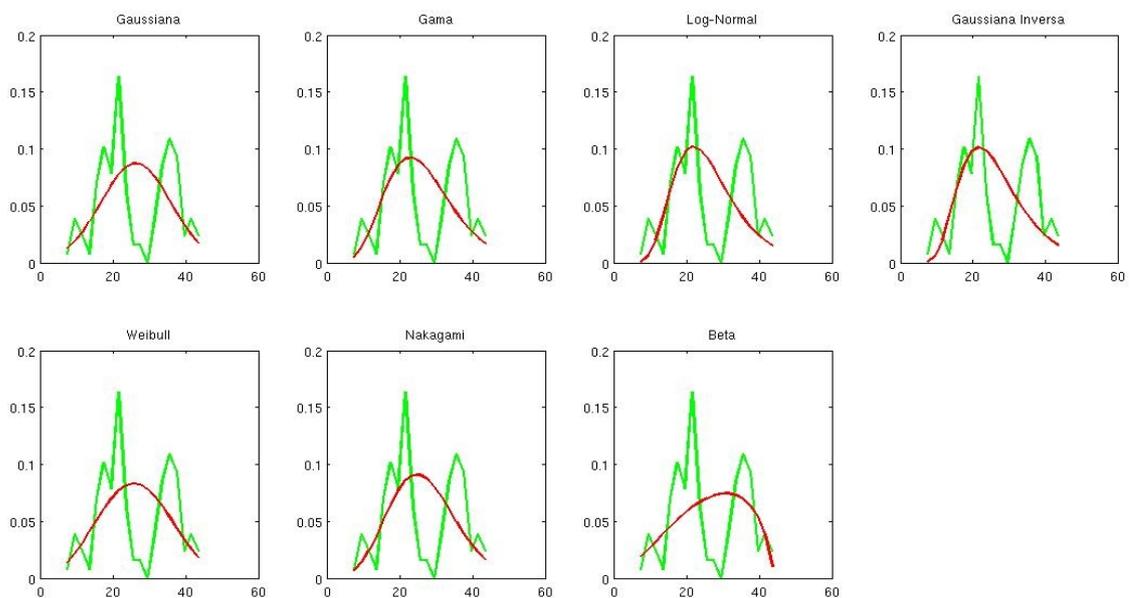


Figura 21: Histograma de uma projeção do *phantom* de Shepp e Logan com as densidades de probabilidade sobrepostas.

### 6.2.1.2 Filtro de Wiener

Os resultados da filtragem do conjunto de projeções utilizando o filtro de Wiener são exibidos na Tabela 6. O filtro de Wiener Pontual obteve resultados melhores do que o filtro de Wiener FIR. Apesar do filtro de Wiener FIR considerar a correlação do sinal a sua implementação é bastante distinta do filtro de Wiener Pontual. O filtro de Wiener FIR utiliza a filtragem unilateral, ou seja, só os pontos anteriores ao ponto que se quer filtrar são considerados para a filtragem. A convolução do vetor do filtro com o sinal ruidoso é realizada para a filtragem. Foram gerados dois vetores de filtros para cada projeção: um com 2 pesos e outro com 4 pesos. O sinal original é estimado aplicando um filtro de média no sinal ruidoso. Já o filtro de Wiener Pontual utiliza pontos anteriores e posteriores ao ponto que se quer filtrar para o cálculo das estimativas locais. Percebe-se que em ambos os filtros o janelamento adaptativo melhorou o desempenho dos filtros.

Como os filtros de Wiener desenvolvidos consideram ruído aditivo, a filtragem foi feita no domínio de Anscombe. Na seção 4.3 é abordada a transformada de Anscombe.

Tabela 6: Medidas de erro das imagens do *phantom* de Shepp e Logan2 reconstruídas a partir de sinogramas com a filtragem de Wiener.

Filtro	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Wiener - Pontual	3	-1.7327	20.7094	331.9659	0.42204
	5	-3.1975	19.2446	398.7242	0.43849
	3 e 5	-3.4094	19.0327	402.4819	0.44317
Wiener - FIR	2	-0.7236	21.7186	311.3489	0.37589
	4	-1.8845	20.5576	347.3892	0.38517
	2 e 4	-1.5240	20.9181	328.7562	0.39707

Na Figura 22 é exibida uma projeção ruidosa do *phantom* de Shepp e Logan, a mesma projeção após a filtragem com o filtro de Wiener Pontual e o filtro de Wiener FIR. Note que o filtro de Wiener Pontual suaviza mais a projeção fazendo uma maior redução do ruído. Na Figura 23 são exibidas as imagens reconstruídas a partir de projeções com filtragem de Wiener.

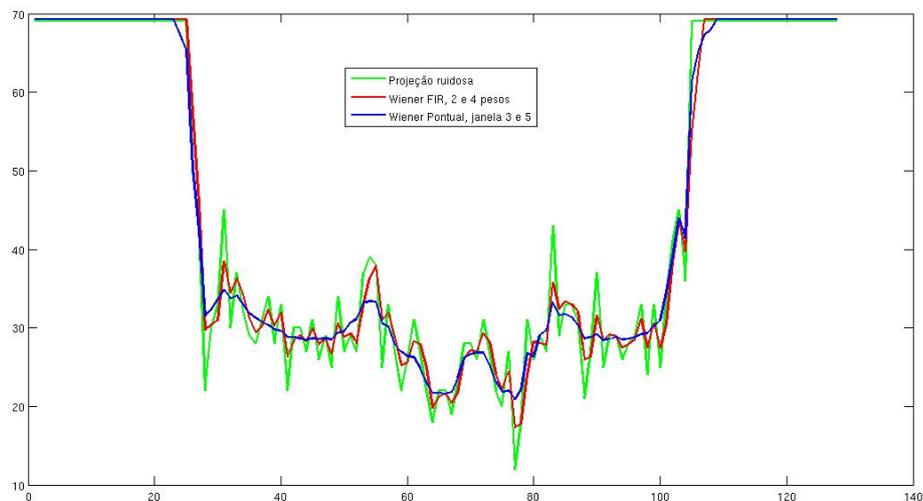
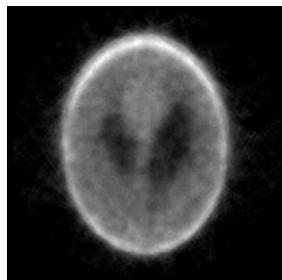
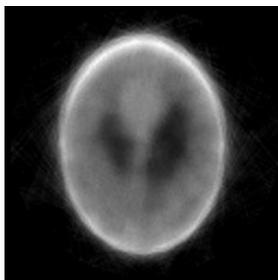


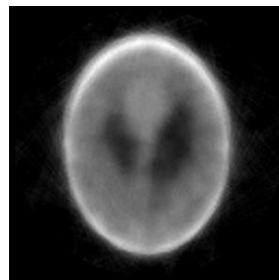
Figura 22: Projeção ruidosa do *phantom* de Shepp e Logan e a mesma projeção filtrada com os filtros de Wiener FIR e Pontual.



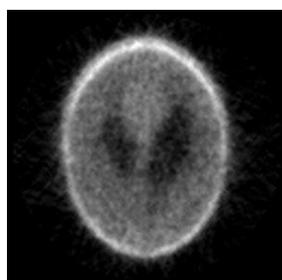
(a) Filtro de Wiener Pontual, Janela de 3 elementos.



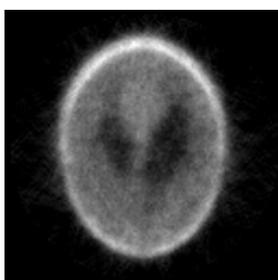
(b) Filtro de Wiener Pontual, Janela de 5 elementos.



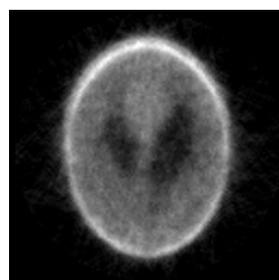
(c) Filtro de Wiener Pontual, Janela de 3 e 5 elementos.



(d) Filtro de Wiener FIR, 2 pesos.



(e) Filtro de Wiener FIR, 4 pesos.



(f) Filtro de Wiener FIR, 2 e 4 pesos.

Figura 23: Filtragem de Wiener *phantom* de Shepp e Logan.

### 6.2.1.3 Limiarização Wavelet

Os resultados da filtragem das projeções utilizando a limiarização no domínio Wavelet estão relacionados na Tabela 7. A partir de teste experimentais escolhemos 2 níveis de decomposição e o *soft threshold* para a limiarização dos coeficientes Wavelet. Foram escolhidas também algumas bases das famílias Haar, Daubechies, Symlets e Coiflets. Analisando os resultados percebe-se que não existe diferença acentuada entre as técnicas de escolha dos *thresholds*. A maior diferença está entre as bases escolhidas para a transformada Wavelet.

Na Figura 24 é exibida uma projeção ruidosa do *phantom* de Shepp e Logan, a mesma projeção após a filtragem com a limiarização dos coeficientes da transformada Wavelet. A transformada Wavelet foi realizada com a base Haar em dois níveis de decomposição e a limiarização foi feita com o Oracle *threshold*. Fica evidente a influencia da base durante o processo de filtragem.

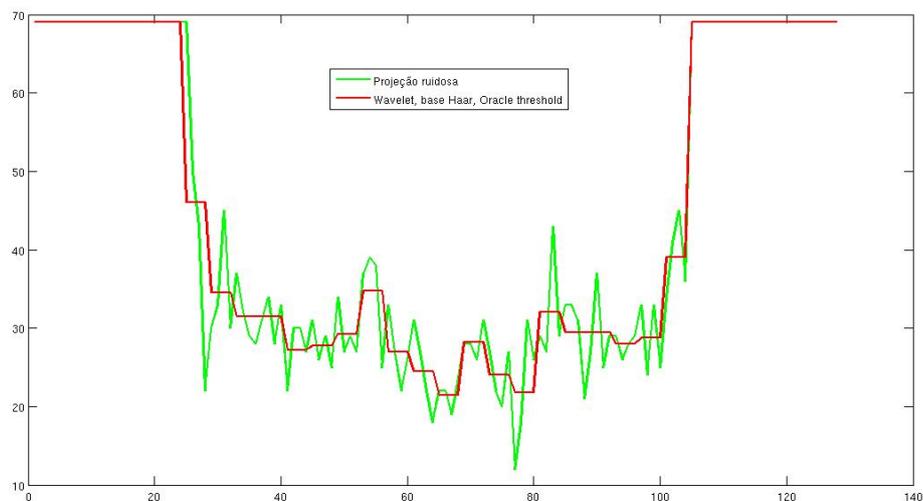


Figura 24: Projeção ruidosa do *phantom* de Shepp e Logan e a mesma projeção filtrada a partir da limiarização no domínio Wavelet. Foi utilizada a base Haar com a transformada Wavelet e o Oracle *threshold* para a escolha do limiar.

Alguns resultados visuais das filtrações utilizando Wavelets são mostrados na Figura 25. A filtragem com o uso da base Haar foi escolhida a melhor em quase todos os critérios. Como exceção ficaram os *thresholds* Oracle e SURE que apontaram outras bases como melhores. Este fato pode ser comprovado visualmente (observando das imagens da Figura 25), onde percebemos que o uso do Oracle *threshold* com a base Haar introduz artefatos circulares nas extremidades da *phantom* na imagem reconstruída. Já uso do

Tabela 7: Limiarização Wavelet das projeções do *phantom* de Shepp e Logan.

Base	Níveis	<i>Threshold</i>	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Haar	2	Oracle - Soft	-2.6209	19.8212	<b>381.0000</b>	0.37174
		Universal - Soft	<b>-0.4679</b>	<b>21.9742</b>	<b>310.8958</b>	<b>0.36697</b>
		Minimax - Soft	<b>-0.1340</b>	<b>22.3081</b>	<b>312.8100</b>	<b>0.35049</b>
		SURE - Soft	<b>-0.0620</b>	<b>22.4146</b>	332.5416	0.32871
Db9	2	Oracle - Soft	-2.9345	19.5076	511.1343	0.37861
		Universal - Soft	-0.7000	21.7421	345.3825	0.35569
		Minimax - Soft	-0.6065	21.8356	339.0650	0.34030
		SURE - Soft	-0.1537	22.2885	331.7321	0.33003
Db12	2	Oracle - Soft	-2.9812	19.4609	505.1060	0.37791
		Universal - Soft	-1.3688	21.0733	374.9976	0.34809
		Minimax - Soft	-0.6493	21.7929	341.8596	0.33796
		SURE - Soft	-0.1115	22.3306	331.0069	0.33104
Db15	2	Oracle - Soft	-2.9924	19.4497	500.3668	0.37727
		Universal - Soft	-1.3967	21.0454	391.5644	0.34437
		Minimax - Soft	-0.7410	21.7011	347.6113	0.33604
		SURE - Soft	-0.1636	22.2785	332.8375	0.32840
Db16	2	Oracle - Soft	-3.0859	19.3562	519.4725	0.38148
		Universal - Soft	-1.2446	21.1975	381.9488	0.34837
		Minimax - Soft	-0.5310	21.9111	337.6903	0.33994
		SURE - Soft	-0.1400	22.3021	331.5531	0.32948
Sym3	2	Oracle - Soft	<b>-2.1915</b>	<b>20.2506</b>	484.6118	0.38197
		Universal - Soft	-1.1407	21.3014	362.8364	0.34978
		Minimax - Soft	-0.6362	21.8059	332.9725	0.34187
		SURE - Soft	-0.0620	22.3801	330.2963	0.33002
Sym7	2	Oracle - Soft	-2.7159	19.7262	509.6129	0.38058
		Universal - Soft	-0.8572	21.5849	339.0344	0.35735
		Minimax - Soft	-0.5875	21.8546	335.9310	0.34086
		SURE - Soft	-0.1546	22.2875	331.6599	0.33100
Sym10	2	Oracle - Soft	-3.0686	19.3735	511.6943	0.37601
		Universal - Soft	-1.4198	21.0224	376.6730	0.34813
		Minimax - Soft	-0.7327	21.7094	340.3895	0.33937
		SURE - Soft	-0.0914	22.3507	328.5860	0.33212
Sym12	2	Oracle - Soft	-3.0795	19.3626	529.0009	0.38071
		Universal - Soft	-0.7138	21.7283	348.6271	0.35561
		Minimax - Soft	-0.4212	22.0209	331.2086	0.34291
		SURE - Soft	-0.0898	22.3523	327.7841	<b>0.33246</b>
Sym15	2	Oracle - Soft	-2.8358	19.6063	503.6722	0.37941
		Universal - Soft	-0.7895	21.6526	343.6993	0.35574
		Minimax - Soft	-0.3999	22.0422	328.7353	0.34460
		SURE - Soft	-0.1302	22.3119	330.0800	0.33220
Coif3	2	Oracle - Soft	-2.2465	20.1956	473.5004	<b>0.38408</b>
		Universal - Soft	-0.6321	21.8100	339.3128	0.35524
		Minimax - Soft	-0.4317	22.0104	330.2695	0.34124
		SURE - Soft	-0.0786	22.3635	<b>327.4178</b>	0.33180

SURE *threshold* com a base Haar apresenta uma baixa redução do ruído.

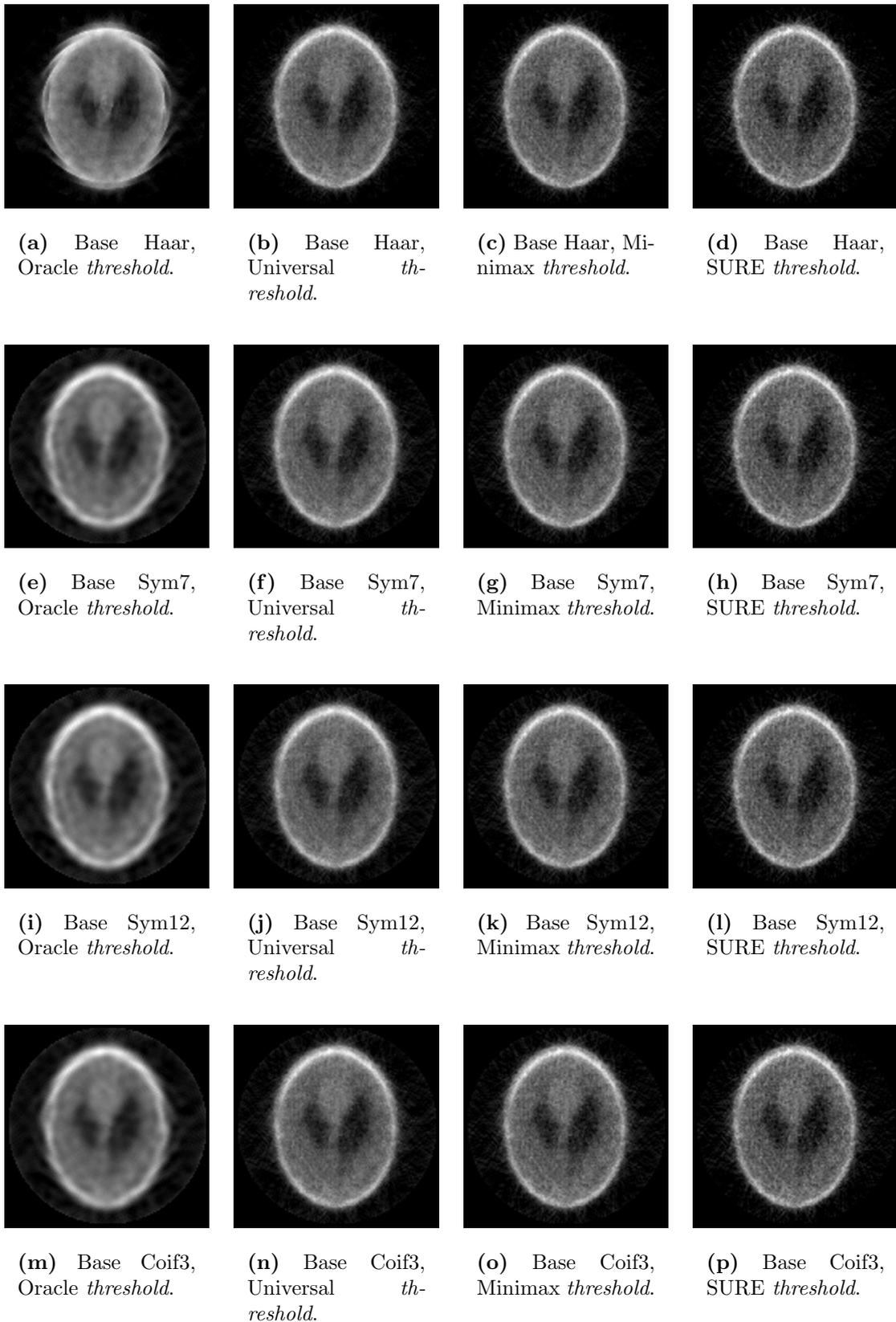


Figura 25: Imagens reconstruídas por projeções do *phantom* de Shepp e Logan filtradas pela limiarização no domínio Wavelet.

## 6.2.2 *Phantom* Homogêneo

Este *phantom* foi construído com uma estrutura cilíndrica de *plexiglass* com água (H<sub>2</sub>O) no seu interior.

Nas Figuras 26(a) e 26(b) são mostrados uma perspectiva 3D dos conjuntos de projeções obtidos através da exposição do *phantom* homogêneo a 3 e 20 segundos aos raios do tomógrafo. Nas Figuras 26(c) e 26(d) são exibidas os mesmos conjuntos de projeções em uma visão bidimensional.

O conjunto de projeções deste *phantom* possui dimensão de 79 x 79, ou seja cada projeção possui 79 pontos e foram obtidas 79 projeções. O conjunto de projeções foi obtido com passo angular de aproximadamente 2,4 graus entre as projeções. O objetivo de utilizar este *phantom* é verificar o desempenho dos métodos de filtragens em projeções sem nenhuma estrutura interna. As projeções possuem regiões planas no centro e a taxa de contagem aumenta gradativamente nas bordas das projeções. No sinograma ruidoso a menor taxa de contagem é 159 e a maior é 555.

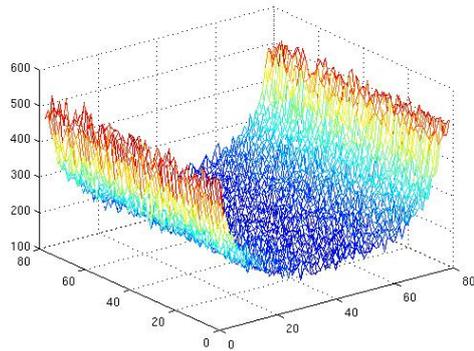
Nas Figuras 26(e) e 26(f) são exibidas as imagens reconstruídas partir dos sinogramas obtidos com 3 e 20 segundos de exposição. A reconstrução foi feita com o algoritmo POCS paralelo. Na Figura 26(f) foram adicionados os nomes dos materiais que compõem o *phantom*. Na Tabela 8 são exibidas as medidas de erro obtidas entre as imagens de 20 segundos e a de 3 de segundos sem filtragem.

Tabela 8: Medida dos critérios de qualidade entre as imagens de 3s e 20s do *phantom* homogêneo.

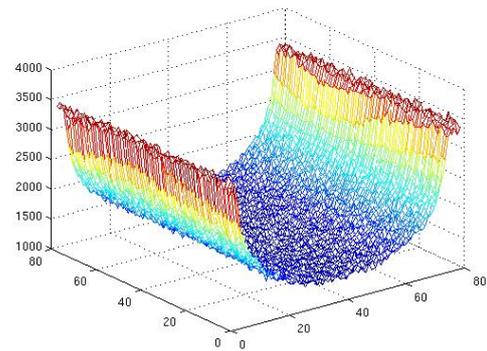
<i>Phantom</i>	PSNR	IDIV	SSIM
Homogêneo	15.4691	132.1648	0.15555

### 6.2.2.1 Estimadores MAP

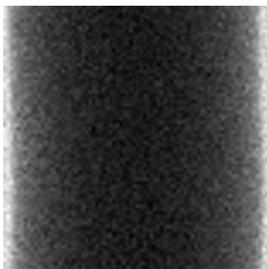
Na Tabela 9 são apresentados os resultados das filtragens utilizando os estimadores MAP. A filtragem das projeções deste *phantom* com o uso de janela fixa com 5 elementos apresenta os melhores resultados. O estimador com a densidade Beta superou os demais em consenso com quatro critérios de avaliação, quando utiliza-se a janela fixa de 5 elementos para o cálculo das estimativas locais. Quando utiliza-se janela de 3 elementos e



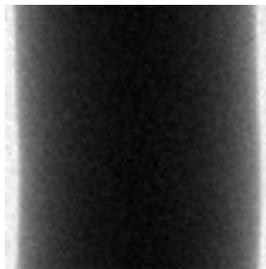
(a) Perspectiva 3D do sinograma com 3 segundos de exposição.



(b) Perspectiva 3D do sinograma com 20 segundos de exposição.



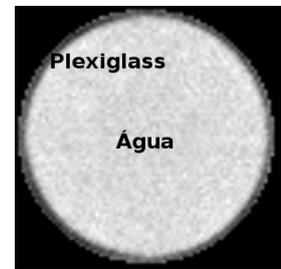
(c) Sinograma com 3 segundos de exposição.



(d) Sinograma com 20 segundos de exposição.



(e) Reconstrução da imagem a partir do sinograma de 3 segundos.



(f) Reconstrução da imagem a partir do sinograma de 20 segundos.

Figura 26: Conjuntos de projeções e reconstruções do *phantom* homogêneo.

adaptativa o estimador com a densidade Weibull tem melhor desempenho.

Tabela 9: Filtragem com estimadores MAP das projeções do *phantom* homogêneo.

Dens. <i>a priori</i>	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Beta	3	2.2100	17.6792	81.4436	0.25027
	5	<b>3.8826</b>	<b>19.3517</b>	<b>57.6985</b>	<b>0.29433</b>
	3 e 5	2.1878	17.6569	81.8746	0.26180
Gama	3	2.0662	17.5353	84.2228	0.24311
	5	2.2018	17.6710	81.9098	0.25611
	3 e 5	2.1221	17.5912	83.3049	0.25714
Gaussiana	3	2.1537	17.6229	82.7516	0.24552
	5	2.4005	17.8696	78.7003	0.26025
	3 e 5	2.2329	17.7020	81.4809	0.25989
Log-Normal	3	2.0273	17.4964	84.8887	0.24203
	5	2.1150	17.5841	83.3623	0.25431
	3 e 5	2.0725	17.5416	84.1381	0.25591
Nakagami	3	2.1155	17.5846	83.3823	0.24444
	5	2.2956	17.7648	80.3752	0.25820
	3 e 5	2.1494	17.6185	82.8643	0.25633
Weibull	3	<b>2.5905</b>	<b>18.0596</b>	<b>75.7299</b>	<b>0.25343</b>
	5	3.3597	18.8288	64.7295	0.27904
	3 e 5	<b>2.4190</b>	<b>17.8881</b>	<b>78.5429</b>	<b>0.26581</b>
Gaussiana Inversa	3	2.0253	17.4944	84.9210	0.24197
	5	2.1133	17.5824	83.3879	0.25426
	3 e 5	2.0706	17.5397	84.1689	0.25586
Chi-Quadrado	3	1.8418	17.3110	88.2925	0.19613
	5	2.7944	18.2635	72.7911	0.21394
	3 e 5	2.1023	17.5714	83.6202	0.20048
Exponencial	3	0.0266	15.4958	131.3546	0.15588
	5	0.0335	15.5026	131.1485	0.15596
	3 e 5	0.0292	15.4983	131.2742	0.15590
Rayleigh	3	0.0604	15.5296	130.3105	0.15640
	5	0.0835	15.5526	129.6245	0.15667
	3 e 5	0.0688	15.5379	130.0524	0.15644

Nas Figuras 27 são exibidas as imagens reconstruídas a partir do conjunto de projeções filtrados com os estimadores MAP desenvolvidos com as densidades de probabilidade Beta e Weibull.

O teste de hipóteses escolheu só a densidade Beta como densidade *a priori*. O teste foi realizado considerando 40 pontos no histograma e suavização prévia da projeções por filtro de média com janela de 15 elementos. Na Figura 28 são exibidos histogramas de uma projeção do *phantom* homogêneo com as densidades de probabilidade sobrepostas.

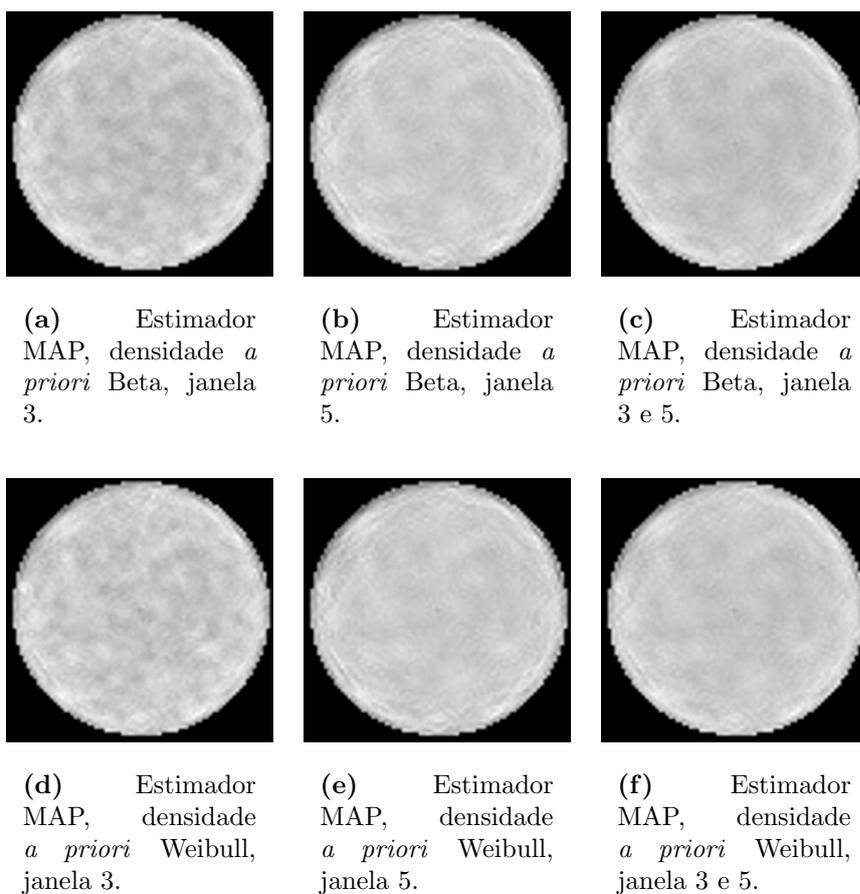


Figura 27: Imagens reconstruídas a partir de projeções *phantom* homogêneo filtradas por estimadores MAP.

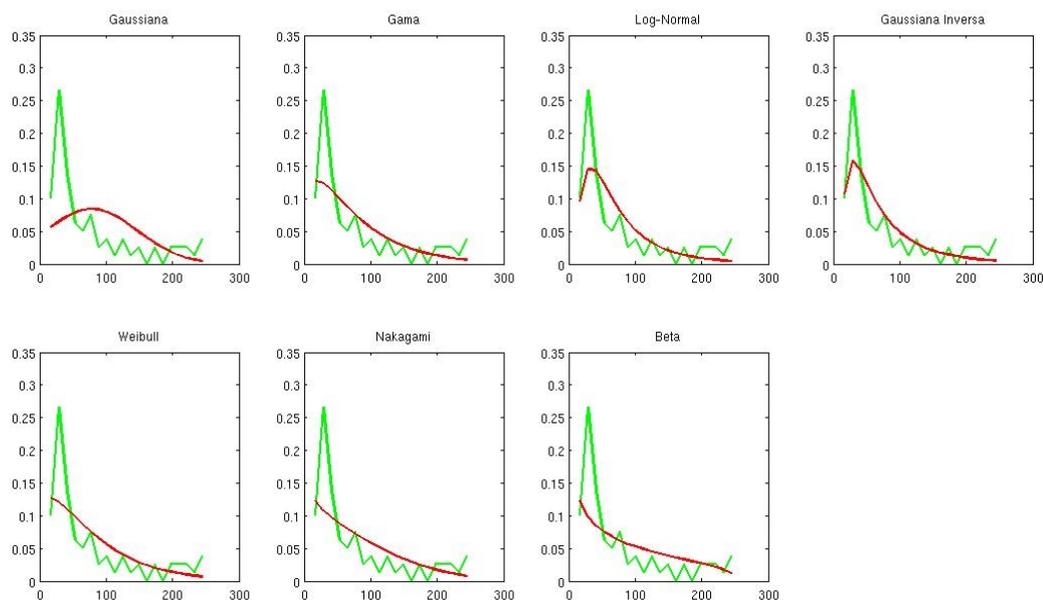


Figura 28: Histograma de uma projeção do *phantom* homogêneo com as densidades de probabilidade sobrepostas.

### 6.2.2.2 Filtragem de Wiener

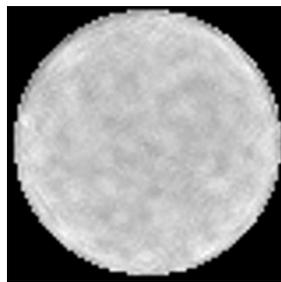
A filtragem das projeções com o filtro de Wiener Pontual e FIR não apresentaram resultados superiores ao estimador MAP com densidade de probabilidade Beta. A Tabela 10 mostra os resultados dos filtros de Wiener e a Figura 29 mostra os resultados visuais das imagens obtidas a partir do conjunto de projeções filtrados pelo filtro de Wiener. O filtro de Wiener Pontual apresentou melhores resultados com o uso de janela adaptativa, considerando o critério SSIM. Os demais critérios indicam que o uso de janela fixa de 5 elementos apresenta melhor resultado.

Tabela 10: Filtragem de Wiener das projeções do *phantom* homogêneo.

Filtro	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Wiener - Pontual	3	2.0726	17.5417	84.1396	0.24357
	5	<b>2.2442</b>	<b>17.7133</b>	<b>81.2470</b>	0.25668
	3 e 5	2.1659	17.6350	82.5918	<b>0.26297</b>
Wiener - FIR	2	1.3094	16.7785	98.3276	0.20661
	4	-2.2999	13.1691	227.0004	0.24864
	2 e 4	0.6690	16.1381	112.5833	0.24639

### 6.2.2.3 Limiarização Wavelet

Na Tabela 11 são exibidos os resultados da filtragem utilizando a limiarização dos coeficientes Wavelets. Na Figura 30 são mostrados os resultados visuais de algumas destas filtragens. A melhor combinação para a filtragem utilizando Wavelets foi o uso da base Sym3 durante da transformada Wavelet. Considerando o critério SSIM o Oracle *threshold* apresentou melhor desempenho com o uso da base Sym3, entretanto esta diferença é muito pequena em relação ao Universal *threshold*, conforme apresentado na Tabela 11. Este bom desempenho é devido à composição do *phantom* que não possui estruturas em seu interior. A limiarização dos coeficientes Wavelets, com o uso da base Haar durante a transformada Wavelet, não se mostrou eficiente porque introduziu artefatos circulares na imagem reconstruída.



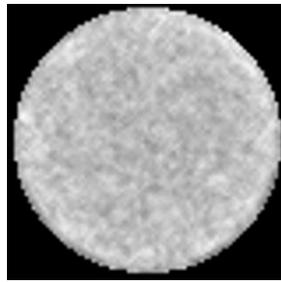
(a) Filtro de Wiener Pontual, janela de 3 elementos.



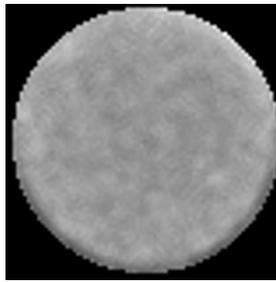
(b) Filtro Wiener Pontual, janela de 5 elementos.



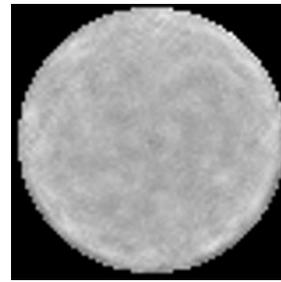
(c) Filtro de Wiener Pontual, janela de 3 e 5 elementos



(d) Filtro de Wiener FIR, 2 pesos.



(e) Filtro de Wiener FIR, 4 pesos.



(f) Filtro de Wiener FIR, 2 e 4 pesos.

Figura 29: Filtragem de Wiener do *phantom* homogêneo.

Tabela 11: Limiarização Wavelet das projeções do *phantom* homogêneo.

Base	Níveis	<i>Threshold</i>	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Haar	2	Oracle - Soft	-0.2231	15.2459	136.5094	0.22486
		Universal - Soft	0.1095	15.5786	125.9878	0.22426
		Minimax - Soft	1.0467	16.5158	102.2902	0.22229
		SURE - Soft	1.2319	16.7010	99.1701	0.21297
Db9	2	Oracle - Soft	2.1823	17.6514	82.4891	0.28289
		Universal - Soft	2.1511	17.6202	82.9944	0.28502
		Minimax - Soft	2.3765	17.8456	79.4436	0.27397
		SURE - Soft	2.2039	17.6730	82.1942	0.25115
Db12	2	Oracle - Soft	2.3076	17.7767	80.3072	0.29158
		Universal - Soft	2.4391	17.9083	78.1565	0.29666
		Minimax - Soft	2.6277	18.0968	75.3904	<b>0.28871</b>
		SURE - Soft	2.5047	17.9739	<b>77.2343</b>	<b>0.27009</b>
Db15	2	Oracle - Soft	2.3960	17.8651	78.8632	0.29348
		Universal - Soft	2.3839	17.8531	79.0857	0.29554
		Minimax - Soft	<b>2.8232</b>	<b>18.2923</b>	<b>72.4834</b>	0.28451
		SURE - Soft	1.9013	17.3704	87.5248	0.25004
Db16	2	Oracle - Soft	2.2845	17.7536	81.5528	0.26778
		Universal - Soft	2.2853	17.7544	81.5399	0.26907
		Minimax - Soft	2.5957	18.0648	76.5536	0.26083
		SURE - Soft	2.3687	17.8378	79.7124	0.24008
Sym3	2	Oracle - Soft	<b>3.1353</b>	<b>18.6044</b>	<b>67.9416</b>	<b>0.30453</b>
		Universal - Soft	<b>3.1589</b>	<b>18.6280</b>	<b>67.6983</b>	<b>0.30452</b>
		Minimax - Soft	2.8097	18.2788	72.9724	0.28290
		SURE - Soft	<b>2.5083</b>	<b>17.9774</b>	77.3559	0.26616
Sym7	2	Oracle - Soft	1.9209	17.3901	87.2939	0.27472
		Universal - Soft	1.9088	17.3779	87.5125	0.27434
		Minimax - Soft	1.9938	17.4629	85.9100	0.26561
		SURE - Soft	1.9511	17.4202	86.5913	0.25036
Sym10	2	Oracle - Soft	2.1225	17.5916	83.5781	0.29466
		Universal - Soft	2.1639	17.6330	82.9185	0.29828
		Minimax - Soft	2.5204	17.9895	77.3363	0.28226
		SURE - Soft	2.1912	17.6604	82.4562	0.25100
Sym12	2	Oracle - Soft	2.3570	17.8261	80.5459	0.27467
		Universal - Soft	2.3455	17.8147	80.7208	0.27292
		Minimax - Soft	2.3923	17.8615	79.8790	0.26272
		SURE - Soft	2.3547	17.8238	80.2608	0.24438
Sym15	2	Oracle - Soft	2.0868	17.5559	84.4793	0.28708
		Universal - Soft	2.0829	17.5520	84.5417	0.28726
		Minimax - Soft	2.3768	17.8459	79.7463	0.28548
		SURE - Soft	2.2830	17.7521	81.0999	0.26786
Coif3	2	Oracle - Soft	1.6875	17.1567	91.9206	0.25946
		Universal - Soft	1.6959	17.1650	91.7892	0.26162
		Minimax - Soft	1.6889	17.1580	91.8514	0.24717
		SURE - Soft	1.6833	17.1525	91.7241	0.22756

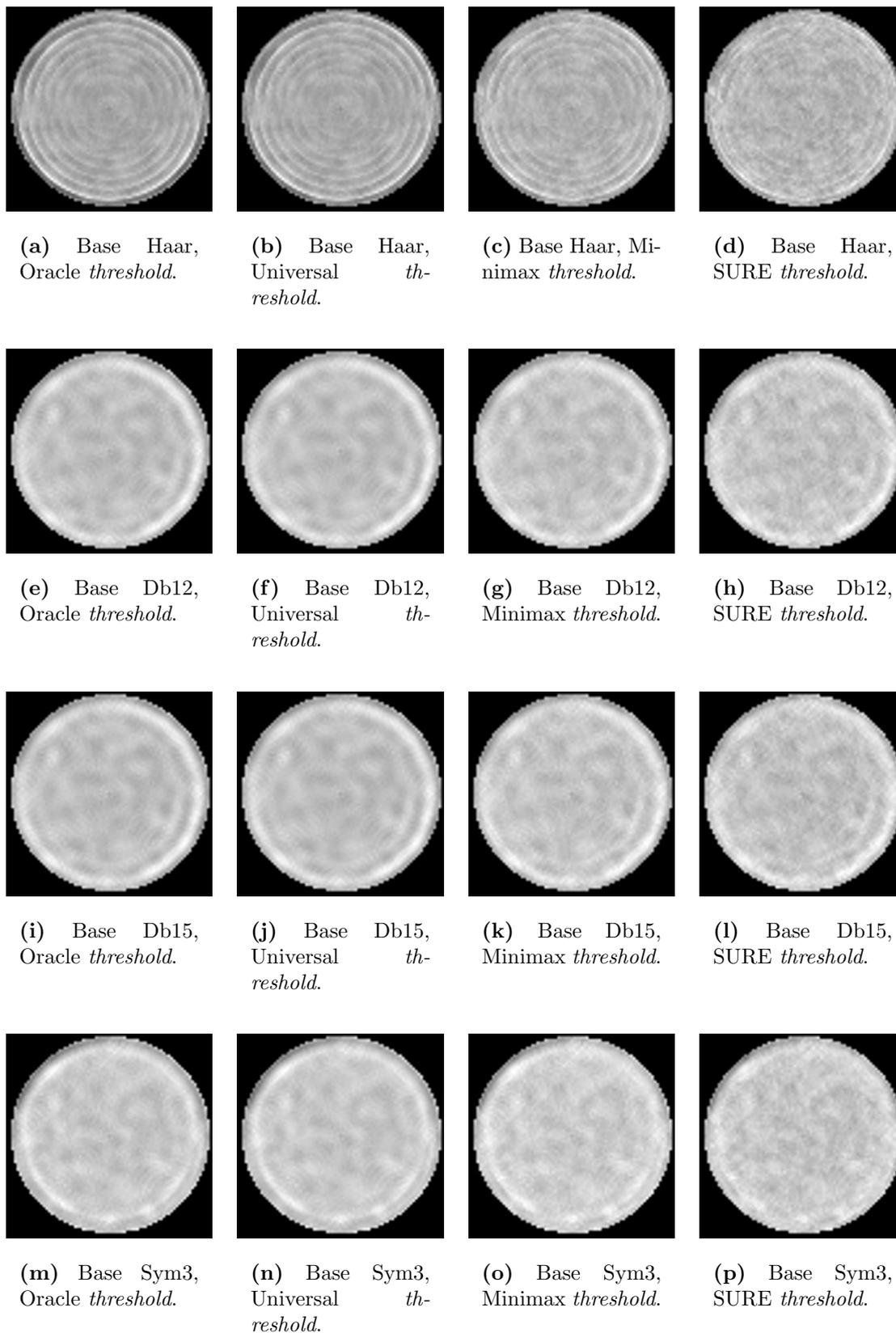


Figura 30: Imagens reconstruídas por projeções do *phantom* homogêneo filtradas pela limiarização no domínio Wavelet.

Considerando as três técnicas de filtragem, a que obteve melhor resultado foi o uso da técnica Wavelets, com a base Sym3. O Oracle *threshold* apresenta melhor resultado sobre o critério SSIM, porém com uma diferença muito pequena no índice. Sob julgamento dos demais critérios o Universal *threshold* tem melhor desempenho com a base Sym3.

### 6.2.3 *Phantom Simétrico*

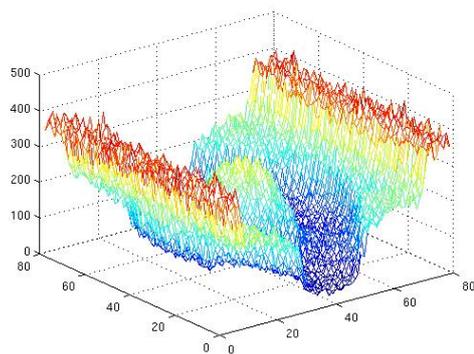
Este *phantom* é composto por uma estrutura cilíndrica de plexiglass com quatro furos em seu interior, dispostos de forma simétrica. Dois furos paralelos foram preenchidos com alumínio (Al) e os outros dois não foram preenchidos, ficando com ar em seu interior. O alumínio possui um coeficiente de atenuação diferente do plexiglass. Os pontos das projeções onde o raio do tomógrafo atravessou o alumínio apresentam taxas de contagens mais baixas. Enquanto nos pontos em que o raio do tomógrafo atravessou somente o plexiglass apresentaram taxas de contagens mais altas. A menor taxa de contagem observada nas projeções ruidosas é 24 e a maior é 443. O objetivo de utilizar este *phantom* é verificar o desempenho dos métodos de filtragem em projeções que possuam uma maior variação nas taxas de contagem.

Nas Figuras 31(a) e 31(b) são exibidas perspectivas 3D dos sinogramas obtidos através da exposição deste *phantom* aos raios do tomógrafo por 3 e 20 segundos. Nas figuras 31(c) e 31(d) são exibidos nos mesmos sinogramas em uma visão 2D. O conjunto de projeções deste *phantom* também possui dimensão de 79x79. Já nas Figuras 31(e) e 31(f) são exibidas as imagens após a reconstrução feita a partir destes sinogramas com o algoritmo POCS paralelo. Na Figura 31(f) foram adicionados os nomes dos materiais que compõem o *phantom*.

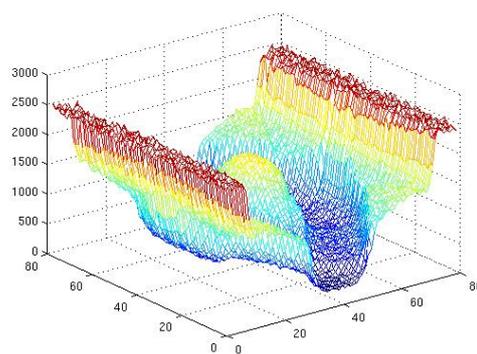
Na Tabela 12 são exibidas as medidas de erro obtida entre as imagens de 20 segundos e a de 3 segundos sem filtragem.

Tabela 12: Medida dos critérios de qualidade entre as imagens de 3s e 20s do *phantom* simétrico.

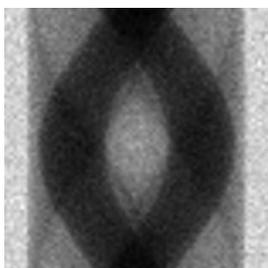
<i>Phantom</i>	PSNR	IDIV	SSIM
Simétrico	27.511079	37.600339	0.727346



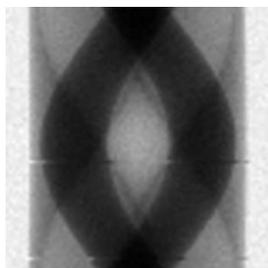
(a) Sinograma com 3 segundos de exposição.



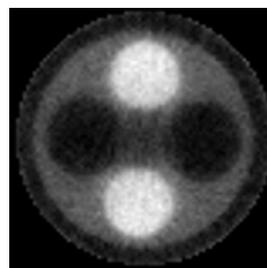
(b) Sinograma com 20 segundos de exposição.



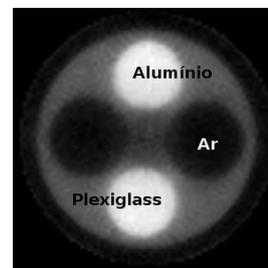
(c) Sinograma com 3 segundos de exposição.



(d) Sinograma com 20 segundos de exposição.



(e) Reconstrução da imagem a partir do sinograma de 3 segundos.



(f) Reconstrução da imagem a partir do sinograma de 20 segundos.

Figura 31: Conjuntos de projeções e reconstruções do *phantom* simétrico.

### 6.2.3.1 Estimadores MAP

Na Tabela 13 são apresentados os resultados das filtrações utilizando os estimadores MAP nas projeções do *phantom* simétrico.

Tabela 13: Filtragem com estimadores MAP das projeções do *phantom* simétrico.

Dens. <i>a priori</i>	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Beta	3	<b>4.2307</b>	<b>31.7418</b>	<b>13.9183</b>	<b>0.86293</b>
	5	<b>5.0417</b>	<b>32.5528</b>	<b>11.8499</b>	<b>0.87234</b>
	3 e 5	4.9869	32.4980	11.2626	0.87988
Gama	3	3.4672	30.9782	17.5717	0.85044
	5	2.2568	29.7679	24.1548	0.82867
	3 e 5	5.4606	32.9717	10.4284	0.88455
Gaussiana	3	3.6810	31.1921	16.9243	0.85200
	5	2.6184	30.1294	22.4209	0.83209
	3 e 5	<b>5.5942</b>	<b>33.1053</b>	<b>10.2808</b>	0.88454
Log-Normal	3	3.3699	30.8810	17.8776	0.84987
	5	2.0935	29.6045	24.9910	0.82741
	3 e 5	5.3826	32.8937	10.5145	<b>0.88463</b>
Nakagami	3	3.5877	31.0988	17.0609	0.85189
	5	2.5147	30.0258	22.8167	0.83147
	3 e 5	5.5144	33.0254	10.8733	0.87877
Weibull	3	3.9635	31.4746	14.3409	0.86074
	5	2.0586	29.5697	24.3192	0.82539
	3 e 5	2.5745	30.0856	21.8246	0.84150
Gaussiana Inversa	3	3.3633	30.8744	17.8932	0.84975
	5	2.0864	29.5974	25.0038	0.82724
	3 e 5	5.3760	32.8871	10.5286	0.88450
Chi-Quadrado	3	2.7287	30.2398	22.2231	0.80098
	5	2.7000	30.2111	21.9729	0.80731
	3 e 5	3.1899	30.7009	20.1695	0.81162
Exponencial	3	0.0948	27.6058	36.9444	0.72939
	5	0.0950	27.6061	36.9422	0.72958
	3 e 5	0.0974	27.6085	36.9377	0.72951
Rayleigh	3	0.1374	27.6485	36.8479	0.73202
	5	0.1379	27.6490	36.8375	0.73251
	3 e 5	0.1464	27.6575	36.8072	0.73240

O estimador MAP que utiliza a densidade Beta como informação *a priori* apresentou os melhores resultados com uso de janela fixa, segundo os quatro critérios de avaliação. Entretanto, o estimador MAP com a densidade Log-Normal e uso de janela adaptativa obteve o melhor resultado segundo a avaliação do critério SSIM. Este resultado superou a filtração com uso de janela fixa para o cálculo das estimativas locais. Os critérios ISNR,

PSNR e IDIV apontam o estimador MAP desenvolvido com a densidade Gaussiana e uso de janela adaptativa como o melhor método filtragem entre os estimadores MAP. O estimador MAP com a densidade Weibull não apresentou bons resultados com o janelamento adaptativo.

Na Figura 6.2.3.1 são exibidas imagens reconstruídas com a filtragem das projeções feita por estimadores MAP.

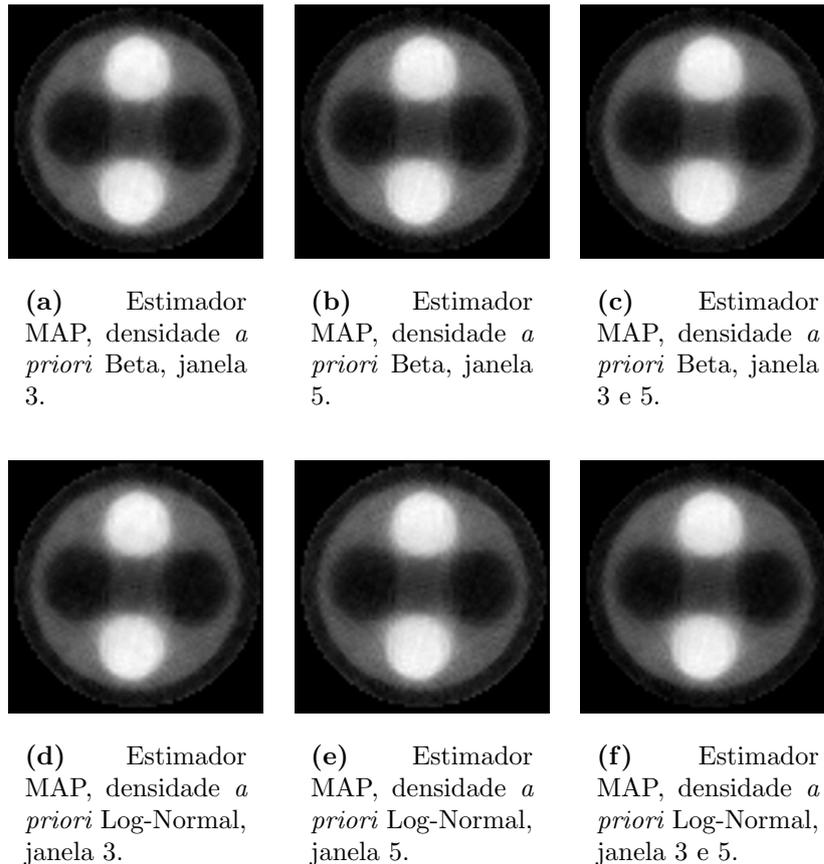


Figura 32: Imagens reconstruídas a partir do conjunto de projeções do *phantom* simétrico, filtrado por estimadores MAP.

O teste de hipóteses escolheu só a densidade Beta como densidade *a priori*. O teste foi realizado considerando 35 pontos no histograma e suavização prévia das projeções por filtro de média com janela de 5 elementos. Na Figura 33 são mostrados histogramas de uma projeção do *phantom* simétrico com as densidades de probabilidade sobrepostas.

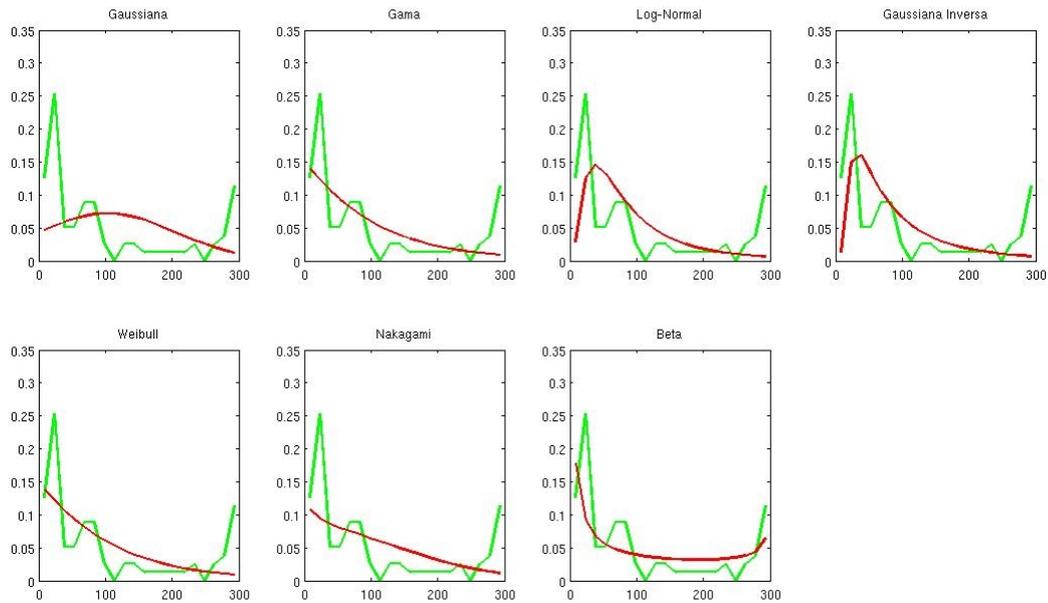


Figura 33: Histograma de uma projeção do *phantom* simétrico com as densidades de probabilidade sobrepostas.

### 6.2.3.2 Filtros de Wiener

Na Tabela 14 são exibidos os resultados da filtragem de Wiener. Os resultados do filtro de Wiener Pontual foram muito semelhantes aos resultados da filtragem com os estimadores MAP. Considerando o critério SSIM o filtro de Wiener Pontual com o uso de janela adaptativa supera o estimador MAP que apresentou melhor resultado (estimador com a densidade *a priori* Log-Normal). Porém considerando os demais critérios o estimador MAP com a densidade *a priori* Gaussiana supera o filtro de Wiener Pontual. Novamente o filtro de Wiener FIR apresentou resultados inferiores ao filtro de Wiener Pontual. Na Figura 34 são exibidas as imagens reconstruídas a partir das projeções filtradas com os filtros de Wiener.

Tabela 14: Filtragem de Wiener das projeções do *phantom* simétrico.

Filtro	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Wiener - Pontual	3	3.3845	30.8955	18.3810	0.84747
	5	2.1820	29.6931	24.8497	0.82658
	3 e 5	<b>5.3709</b>	<b>32.8820</b>	<b>10.6038</b>	<b>0.88644</b>
Wiener - FIR	2	2.5949	30.1060	21.6091	0.80669
	4	2.4807	29.9918	22.0405	0.80828
	2 e 4	2.6211	30.1321	21.3953	0.80731

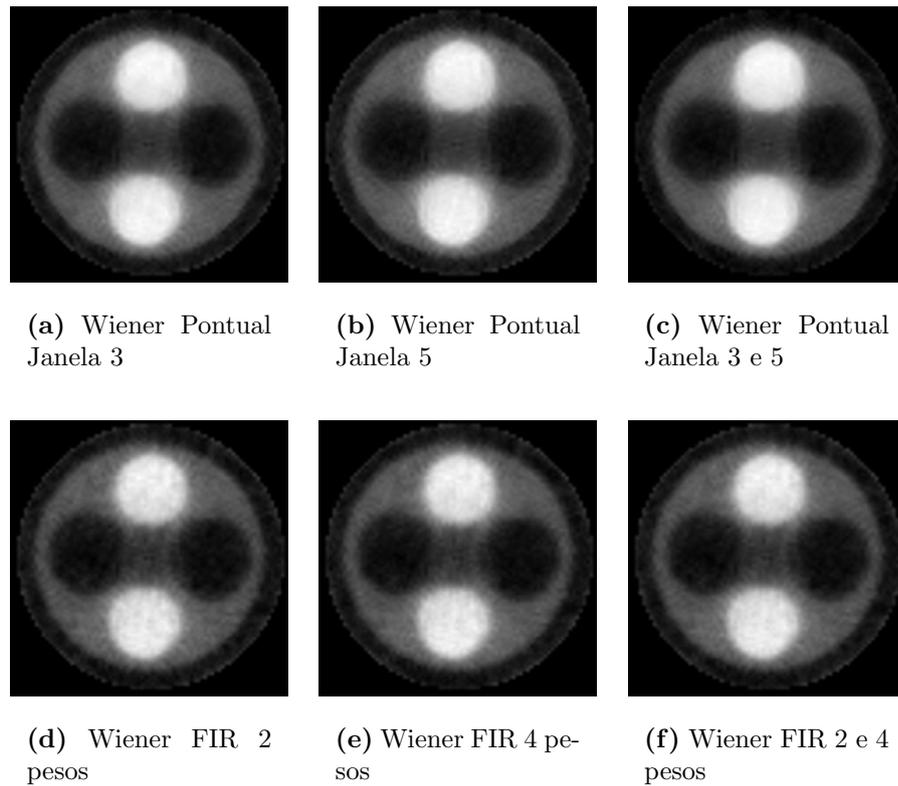


Figura 34: Filtragem de Wiener do *phantom* simétrico.

### 6.2.3.3 Limiarização Wavelet

Na Tabela 15 são exibidos os resultados da filtragem utilizando a limiarização dos coeficientes Wavelet. Esta técnica não apresentou bons resultados em comparação aos estimadores MAP e ao filtro de Wiener Pontual. Na Figura 35 são apresentadas as imagens reconstruídas a partir das projeções filtradas com a limiarização dos coeficientes Wavelets. A limiarização utilizando a base Haar durante a transformada Wavelet, distorce a imagem inserindo artefatos circulares. O uso das outras bases produzem uma suavização excessiva na imagem. Os critérios apontaram combinações diferentes para a melhor filtragem utilizando Wavelets. O critério SSIM considerou para a limiarização Wavelet o uso da base Db16 e *Minimax threshold* como a melhor combinação. Já os critérios ISNR e PSNR apontam a melhor combinação para a base Db12 com o *SURE threshold*. A divergência de Csiszar diz que a reconstrução da imagem feita a partir do sinograma filtrado com uso da base Coif3 e o *Oracle threshold* para a limiarização Wavelet apresenta menor divergência com a imagem ideal.

Tabela 15: Limiarização Wavelet das projeções do *phantom* simétrico.

Base	Níveis	<i>Threshold</i>	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Haar	2	Oracle - soft	-0.6844	26.8266	43.7683	0.69374
		Universal - Soft	1.0174	28.5285	30.5120	0.74287
		Minimax - Soft	2.2101	29.7212	22.1667	0.77951
		SURE - Soft	1.7344	29.2454	27.6161	0.77497
Db9	2	Oracle - soft	2.3520	29.8630	21.9448	0.81307
		Universal - Soft	2.3779	29.8889	21.9057	0.81454
		Minimax - Soft	3.0032	30.5143	20.3580	0.82418
		SURE - Soft	3.6069	31.1180	18.3328	0.82994
Db12	2	Oracle - soft	2.5060	30.0171	21.1561	0.81538
		Universal - Soft	2.5814	30.0925	20.9493	0.81654
		Minimax - Soft	3.2064	30.7175	19.0686	0.82621
		SURE - Soft	<b>3.9305</b>	<b>31.4415</b>	<b>16.7352</b>	<b>0.83610</b>
Db15	2	Oracle - soft	2.9671	30.4782	18.4814	0.82460
		Universal - Soft	3.0147	30.5258	18.3460	0.82534
		Minimax - Soft	3.3216	30.8327	17.9567	0.82979
		SURE - Soft	2.6309	30.1420	22.9236	0.81653
Db16	2	Oracle - soft	2.5953	30.1064	19.9279	0.82622
		Universal - Soft	2.6275	30.1385	19.8492	0.82765
		Minimax - Soft	3.4302	30.9412	<b>17.5535</b>	<b>0.83997</b>
		SURE - Soft	2.5017	30.0128	23.1270	0.82003
Sym3	2	Oracle - soft	1.6695	29.1805	27.3882	0.79689
		Universal - Soft	1.8057	29.3168	26.8884	0.80212
		Minimax - Soft	<b>3.4915</b>	<b>31.0026</b>	18.8796	0.83869
		SURE - Soft	2.9991	30.5101	21.2438	0.83062
Sym7	2	Oracle - soft	2.5627	30.0738	21.2334	0.81863
		Universal - Soft	2.6400	30.1511	21.0564	0.82118
		Minimax - Soft	3.4842	30.9953	18.3007	0.83702
		SURE - Soft	2.8132	30.3243	22.5065	0.82661
Sym10	2	Oracle - soft	2.8338	30.3449	19.0360	0.82172
		Universal - Soft	2.8960	30.4071	18.9220	0.82431
		Minimax - Soft	3.4186	30.9297	17.5808	0.83461
		SURE - Soft	1.7627	29.2738	28.0919	0.80670
Sym12	2	Oracle - soft	3.0430	30.5540	18.1827	0.83039
		Universal - Soft	3.0789	30.5900	18.0798	0.83290
		Minimax - Soft	2.8584	30.3695	20.6264	0.83392
		SURE - Soft	2.6553	30.1664	23.2621	0.82112
Sym15	2	Oracle - soft	2.8585	30.3696	19.1872	0.82407
		Universal - Soft	2.9277	30.4388	19.0416	0.82552
		Minimax - Soft	3.3348	30.8459	18.4348	0.83455
		SURE - Soft	3.2600	30.7710	19.7513	0.83093
Coif3	2	Oracle - soft	<b>3.7757</b>	<b>31.2868</b>	<b>15.2294</b>	<b>0.83437</b>
		Universal - Soft	<b>3.8073</b>	<b>31.3183</b>	<b>15.6253</b>	<b>0.83590</b>
		Minimax - Soft	1.8868	29.3979	28.0337	0.81013
		SURE - Soft	0.2305	27.7416	39.4496	0.78566

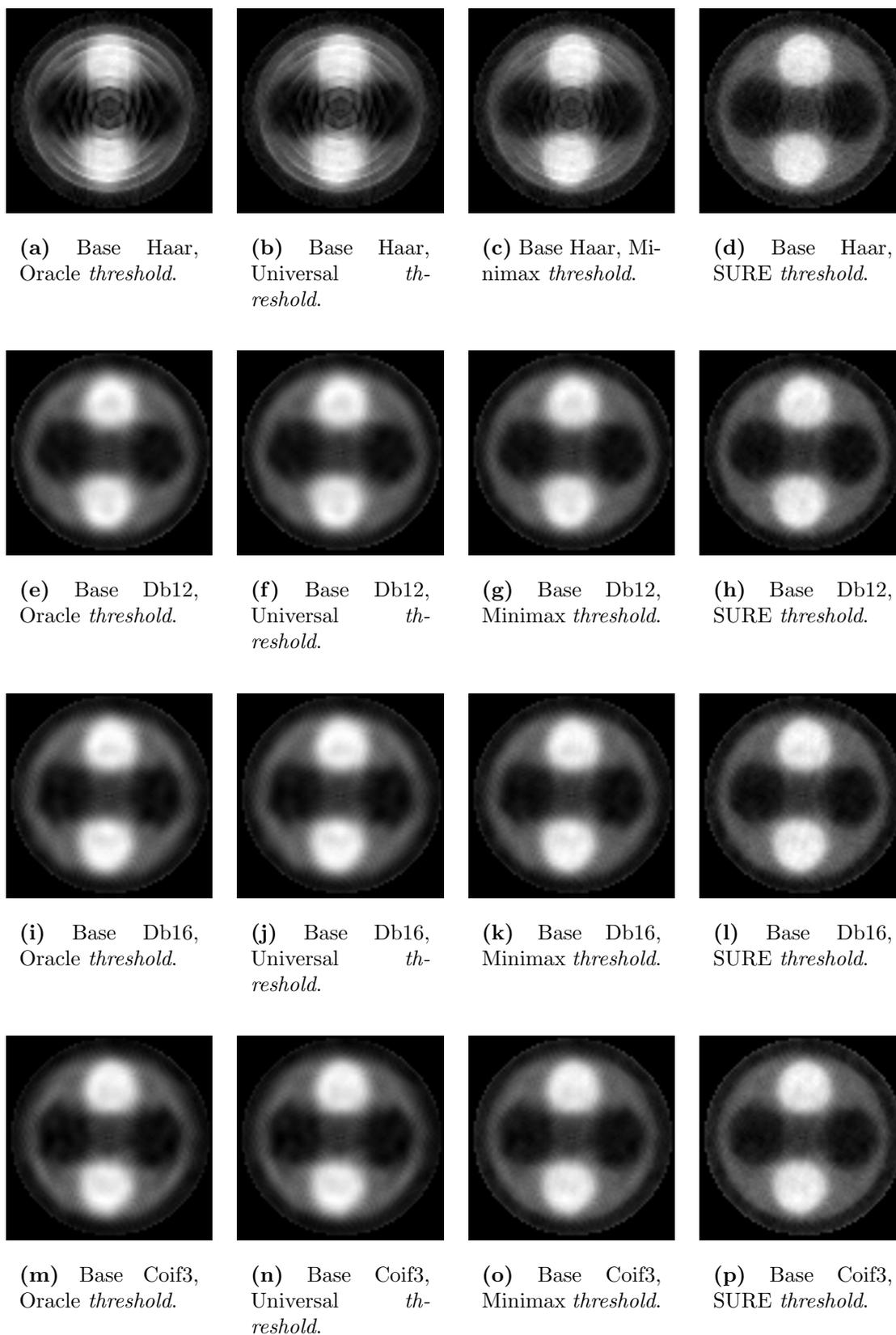


Figura 35: Imagens reconstruídas por projeções do *phantom* simétrico filtradas pela limitarização no domínio Wavelet.

## 6.2.4 *Phantom* Assimétrico

Este *phantom* foi construído a partir de uma estrutura cilíndrica de plexiglass com dez furos em seu interior. Os furos possuem diâmetros diferentes, o primeiro tem o maior diâmetro e nos outros o diâmetro vai diminuindo gradativamente. O objetivo de utilizar estes furos de tamanhos diferentes é verificar a resolução suportada pelos métodos de filtragem e o algoritmo de reconstrução. O furo menor pode não ser visível na imagem reconstruída se o processo de filtragem suavizar excessivamente as projeções. O sinograma do *phantom* assimétrico possui dimensão 100x100. O conjunto de projeções foi obtido com passo angular de aproximadamente 1,27 graus entre as projeções.

Nas Figuras 36(a) e 36(b) são mostradas perspectivas 3D dos sinogramas obtidos através da exposição do *phantom* homogêneo a 3 segundos e 20 segundos aos raios do tomógrafo. Nas Figuras 36(c) e 36(d) são exibidos mesmos sinogramas em uma visão bidimensional. Já nas Figuras 36(e) e 36(f) são exibidas as imagens após a reconstrução feita com o algoritmo POCS paralelo a partir destes sinogramas. Na Figura 36(f) foram adicionados os nomes dos materiais que compõem o *phantom*.

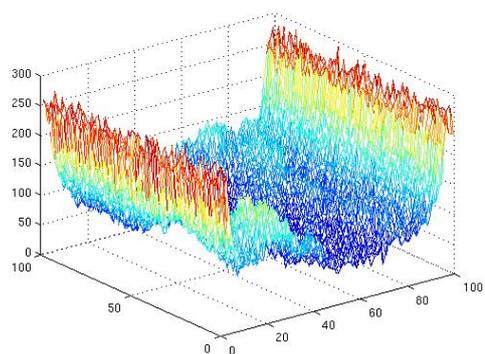
Na Tabela 16 são apresentadas as medidas de erro obtidas entre as imagens de 20 e de 3 segundos sem filtragem.

Tabela 16: Medida dos critérios de qualidade entre as imagens de 3s e 20s do *phantom* assimétrico.

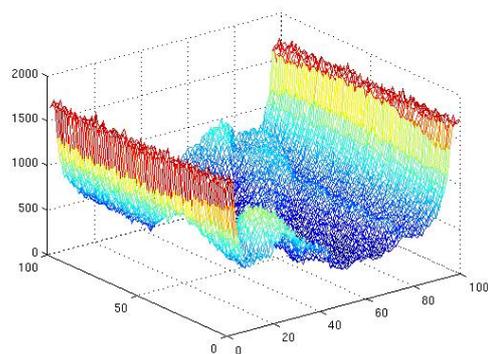
<i>Phantom</i>	PSNR	IDIV	SSIM
Assimétrico	22.1697	63.9899	0.56941

### 6.2.4.1 Estimadores MAP

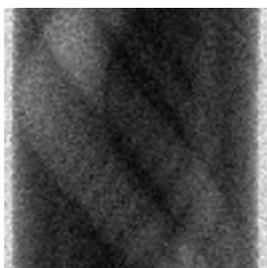
Na Tabela 17 são apresentados os resultados das filtrações utilizando os estimadores MAP. Considerando o critério SSIM, o estimador com a densidade Beta apresentou melhores resultados com janelamento fixo, todavia com janelamento adaptativo o estimador com a densidade Log-Normal tem melhor desempenho. O critério SSIM apontou que em todos os casos o janelamento adaptativo obtém resultados melhores do que o janelamento fixo. Já os demais critérios dizem que o janelamento fixo com 3 pontos para o cálculo das estimativas locais apresenta melhores resultados.



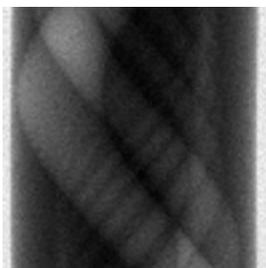
(a) Sinograma com 3 segundos de exposição.



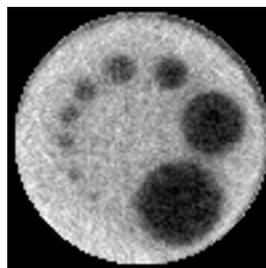
(b) Sinograma com 20 segundos de exposição.



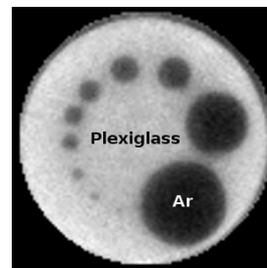
(c) Sinograma com 3 segundos de exposição.



(d) Sinograma com 20 segundos de exposição.



(e) Reconstrução da imagem a partir do sinograma de 3 segundos.



(f) Reconstrução da imagem a partir do sinograma de 20 segundos.

Figura 36: Conjuntos de projeções e reconstruções do *phantom* assimétrico.

Tabela 17: Filtragem com estimadores MAP das projeções do *phantom* assimétrico.

Dens. <i>a priori</i>	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Beta	3	5.7617	27.9314	17.0910	<b>0.70584</b>
	5	5.1960	27.3657	18.4753	<b>0.71201</b>
	3 e 5	5.8415	28.0113	17.2834	0.71888
Gama	3	6.2569	28.4266	15.6246	0.70481
	5	5.0762	27.2460	18.9348	0.71002
	3 e 5	<b>6.1100</b>	<b>28.2797</b>	16.3051	0.71899
Gaussiana	3	<b>6.2767</b>	<b>28.4465</b>	<b>15.5623</b>	0.70459
	5	5.2222	27.3920	18.5590	0.70909
	3 e 5	6.0916	28.2614	16.4367	0.71848
Log-Normal	3	6.2398	28.4096	15.6766	0.70502
	5	5.0402	27.2100	19.0436	0.71063
	3 e 5	6.1065	28.2763	16.2909	<b>0.71933</b>
Nakagami	3	6.2568	28.4265	15.6097	0.70463
	5	<b>5.2300</b>	<b>27.3998</b>	18.4586	0.70987
	3 e 5	6.0352	28.2050	16.4378	0.71517
Weibull	3	6.0497	28.2195	16.2812	0.70230
	5	5.1829	27.3527	<b>18.2338</b>	0.70441
	3 e 5	5.6622	27.8320	17.5578	0.71157
Gaussiana Inversa	3	6.2365	28.4063	15.6842	0.70496
	5	5.0192	27.1890	19.0970	0.71054
	3 e 5	6.1067	28.2765	<b>16.2814</b>	0.71927
Chi-Quadrado	3	3.5985	25.7683	29.3729	0.62160
	5	3.5489	25.7187	28.5330	0.62571
	3 e 5	3.8272	25.9970	27.2619	0.62917
Exponencial	3	0.1420	22.3118	62.6072	0.57041
	5	0.1531	22.3229	62.3841	0.57053
	3 e 5	0.1436	22.3134	62.4835	0.57058
Rayleigh	3	0.2772	22.4470	60.3673	0.57409
	5	0.3099	22.4797	59.4979	0.57442
	3 e 5	0.2821	22.4519	59.7427	0.57459

Com a escolha adaptativa da densidade *a priori* os resultados não superaram o estimador com a escolha de uma densidade única, porém os resultados se aproximaram. Na Figura 38 são apresentadas as aproximações das densidades de probabilidade utilizadas no teste de hipóteses com o histograma de uma projeção do *phantom* assimétrico. O teste de hipóteses foi realizado considerando 15 pontos no histograma. Antes da obtenção do histograma a projeção foi suavizada com filtro de média com janela de 5 elementos.

Na Tabela 18 são apresentados os resultados da mensuração de erro da imagem reconstruída a partir do sinograma filtrado com os estimadores MAP com a escolha adaptativa da densidade *a priori*. Na Tabela 19 são exibidos o número de vezes que cada densidade de probabilidade foi escolhida.

Na Figura 6.2.4.1 são apresentadas as imagens reconstruídas a partir do sinograma filtrado com estimadores MAP.

Tabela 18: Filtragem com estimadores MAP das projeções do *phantom* assimétrico utilizando o teste  $\chi^2$  para a escolha da densidade *a priori*.

Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
3	6.2359	28.4056	15.6843	0.70489
5	5.0210	27.1908	19.0879	0.71037
3 e 5	6.3691	28.5389	15.1129	0.71292

Tabela 19: Densidades a priori escolhidas nas projeções do *phantom* assimétrico.

Densidade de probabilidade	qtd escolhida
Gaussiana Inversa	18
Log-Normal	82
Nakagami	82
total	100

#### 6.2.4.2 Filtragem de Wiener

A filtragem com o filtro de Wiener Pontual se mostrou bastante eficiente para este *phantom*. Com o janelamento fixo alguns estimadores MAP superam o filtro de Wiener Pontual, todavia com o uso do janelamento adaptativo para o cálculo das estimativas locais o filtro de Wiener Pontual supera os estimadores MAP, considerando o critério SSIM. Vale ressaltar que os critérios não apresentam os mesmos resultados. Os critérios ISNR, PSNR e IDIV consideram que o janelamento fixo de 3 pontos apresenta melhor filtragem. Na Tabela 20 são apresentados os resultados da mensuração de erro da imagem reconstruída a partir do sinograma com a filtragem de Wiener. Na Figura 39 são apresentadas as imagens reconstruídas a partir do sinograma filtrado com os filtros de Wiener.

Tabela 20: Filtragem de Wiener das projeções do *phantom* assimétrico.

Filtro	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Wiener - Pontual	3	<b>6.2718</b>	<b>28.4416</b>	<b>15.5937</b>	0.70479
	5	5.0834	27.2532	19.1400	0.70890
	3 e 5	6.0210	28.1908	16.7152	<b>0.72149</b>
Wiener - FIR	2	3.0283	25.1981	33.3821	0.63296
	4	0.8185	22.9883	48.8988	0.63084
	2 e 4	3.1062	25.2759	31.1298	0.65607

### 6.2.4.3 Limiarização Wavelet

A limiarização da transformada Wavelet realizada com as base Db12, Db15, Sym10 e Sym15, apresentaram resultados próximos a filtragem realizada com os estimadores MAP. Porém, em nenhuma situação, a limiarização Wavelet aplicada nas projeções do *phantom* assimético superou os melhores resultados dos estimadores MAP e o Filtro de Wiener Pontual. Na Figura 40 são exibidas as imagens cujas as projeções foram filtradas utilizando a técnica com o uso da transformada Wavelet.

Tabela 21: Limiarização Wavelet das projeções do *phantom* assimétrico.

Base	Níveis	<i>Threshold</i>	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Haar	2	Oracle - Soft	-2.0462	20.1235	84.4184	0.58780
		Universal - Soft	-1.3294	20.8403	71.2681	0.60444
		Minimax - Soft	-0.5360	21.6337	57.7237	0.63065
		SURE - Soft	0.2227	22.3925	49.2483	0.63347
Db9	2	Oracle - Soft	4.1286	26.2984	24.0879	0.69812
		Universal - Soft	4.2557	26.4255	23.5496	0.69930
		Minimax - Soft	4.9861	27.1559	20.4968	0.69577
		SURE - Soft	4.9346	27.1044	20.7608	0.68519
Db12	2	Oracle - Soft	<b>4.2005</b>	<b>26.3703</b>	24.1828	0.70009
		Universal - Soft	<b>4.7233</b>	<b>26.8931</b>	<b>21.5393</b>	0.70765
		Minimax - Soft	<b>5.3530</b>	<b>27.5228</b>	<b>18.8713</b>	0.70607
		SURE - Soft	<b>5.2798</b>	<b>27.4496</b>	<b>19.6912</b>	<b>0.69614</b>
Db15	2	Oracle - Soft	4.0489	26.2187	25.1152	0.70172
		Universal - Soft	4.0136	26.1834	25.3106	0.70277
		Minimax - Soft	5.1318	27.3015	19.8602	<b>0.70226</b>
		SURE - Soft	4.9226	27.0924	21.1563	0.68961
Db16	2	Oracle - Soft	3.3946	25.5644	27.2200	0.69050
		Universal - Soft	3.4897	25.6595	26.7974	0.69149
		Minimax - Soft	4.7666	26.9364	21.4289	0.68919
		SURE - Soft	4.5172	26.6870	22.5795	0.68284
Sym3	2	Oracle - Soft	2.3621	24.5319	32.5296	0.68337
		Universal - Soft	2.5237	24.6935	31.4942	0.68664
		Minimax - Soft	3.7051	25.8749	26.0342	0.68890
		SURE - Soft	3.2531	25.4229	28.3486	0.67722
Sym7	2	Oracle - Soft	3.1835	25.3533	28.1931	0.69644
		Universal - Soft	4.0779	26.2476	24.1165	0.69983
		Minimax - Soft	5.0329	27.2027	20.4116	0.69779
		SURE - Soft	4.6834	26.8532	22.1736	0.68470
Sym10	2	Oracle - Soft	4.1445	26.3143	24.6228	<b>0.70280</b>
		Universal - Soft	4.1556	26.3254	24.6398	<b>0.70408</b>
		Minimax - Soft	4.6148	26.7846	22.3249	0.69835
		SURE - Soft	4.6180	26.7878	22.5920	0.68676
Sym12	2	Oracle - Soft	3.3514	25.5212	27.4302	0.68900
		Universal - Soft	3.4659	25.6357	26.9106	0.68989
		Minimax - Soft	4.7341	26.9039	21.3816	0.69408
		SURE - Soft	4.9014	27.0712	20.8661	0.68778
Sym15	2	Oracle - Soft	4.0670	26.2368	24.5272	0.70269
		Universal - Soft	4.1511	26.3208	24.2705	0.70369
		Minimax - Soft	4.9601	27.1299	20.6850	0.70067
		SURE - Soft	4.4453	26.6151	23.3134	0.68074
Coif3	2	Oracle - Soft	3.5545	25.7243	26.8304	0.68531
		Universal - Soft	3.9739	26.1436	24.7513	0.68434
		Minimax - Soft	4.3308	26.5006	22.9819	0.68857
		SURE - Soft	4.7923	26.9621	21.0932	0.68482

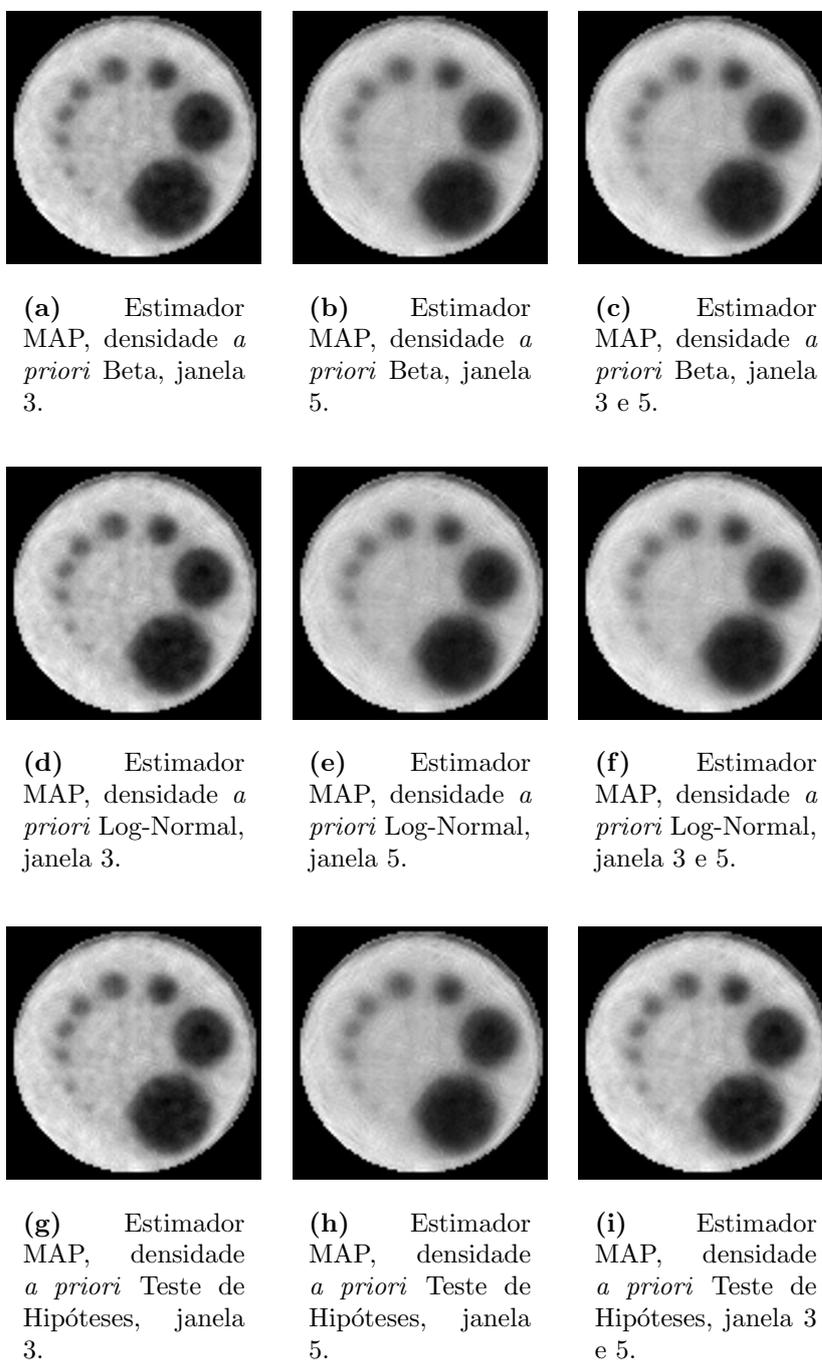


Figura 37: Filtragens do *phantom* assimétrico pelos estimadores MAP com janela 3 e 5 as estimativas locais.

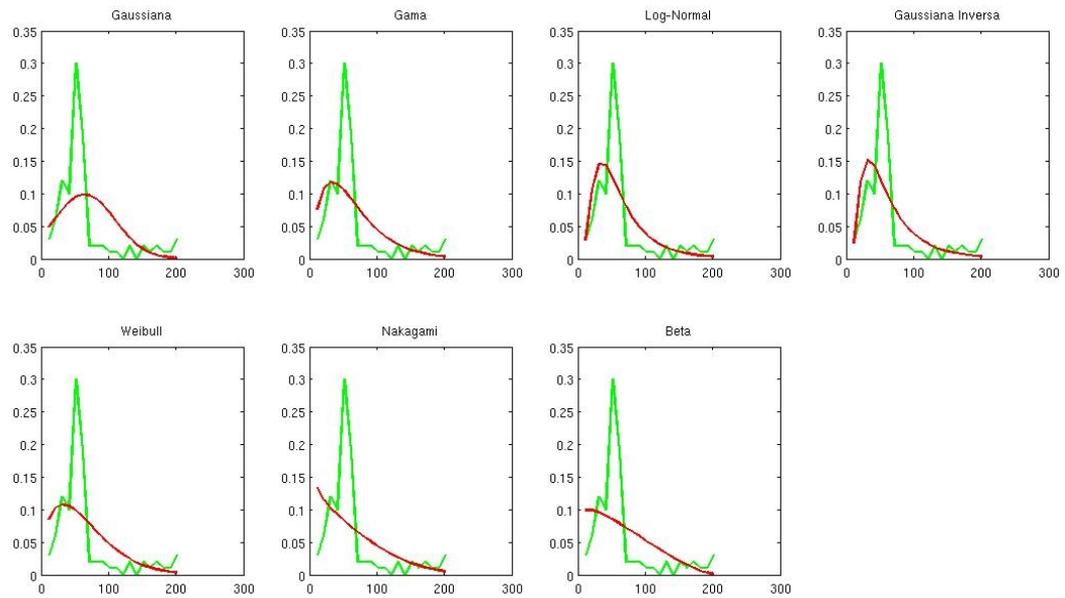


Figura 38: Histograma de uma projeção do *phantom* assimétrico com as densidades de probabilidade sobrepostas.

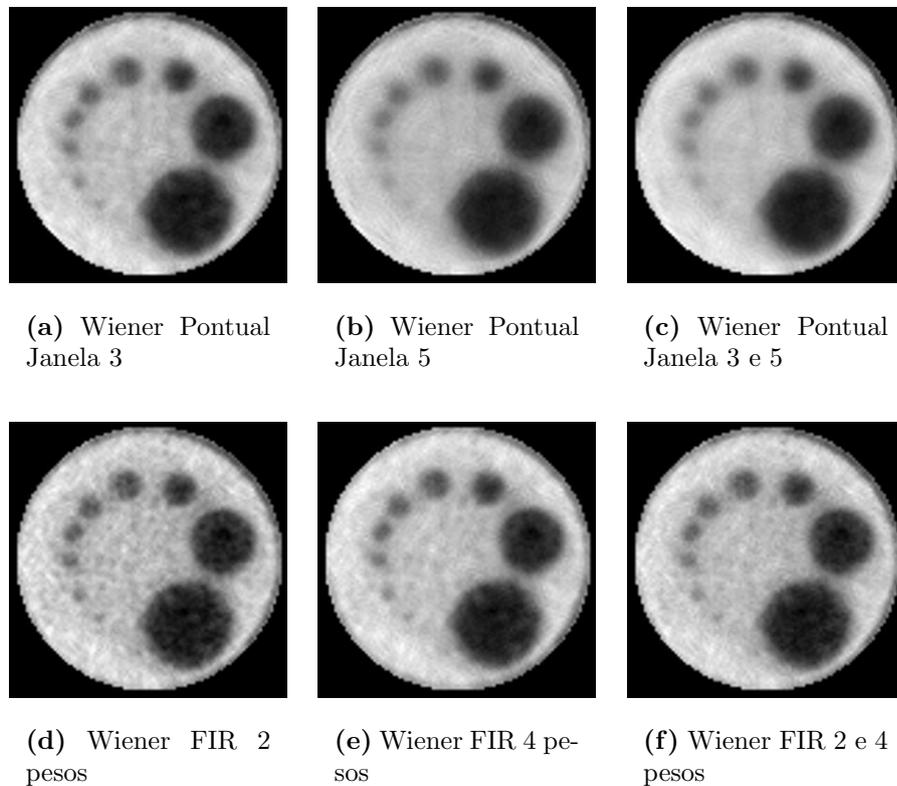


Figura 39: Filtragem de Wiener do *phantom* assimétrico.

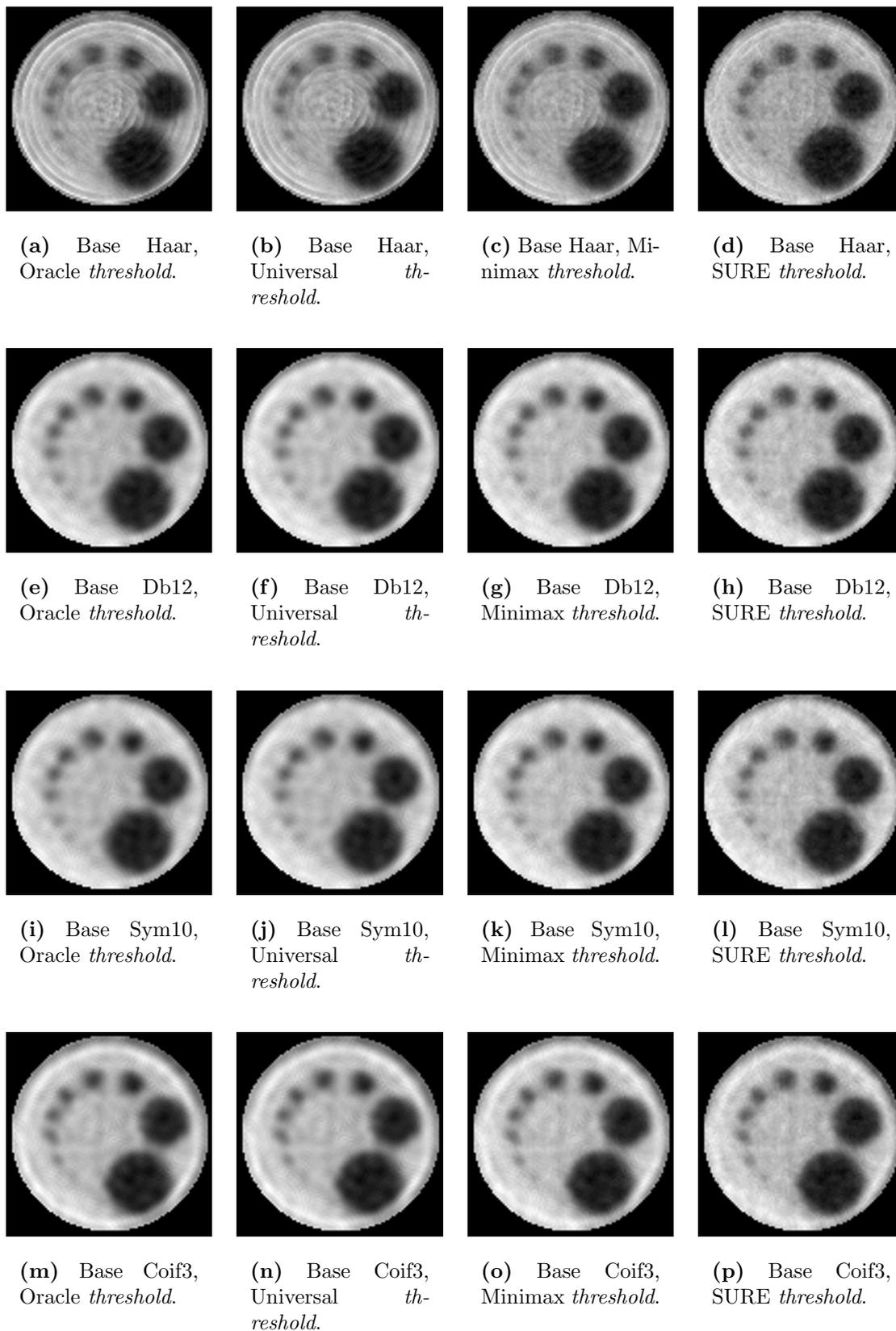
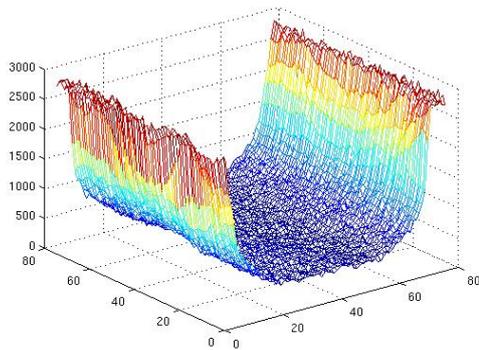


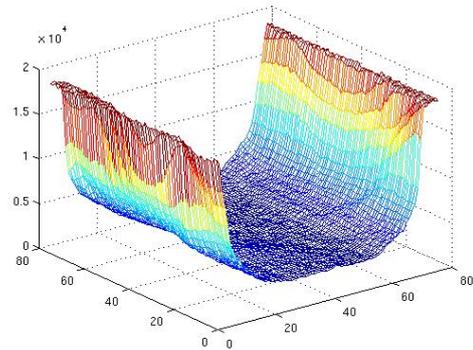
Figura 40: Imagens reconstruídas por projeções do *phantom* assimétrico filtradas pela limiarização no domínio Wavelet.

### 6.2.5 Madeira 1

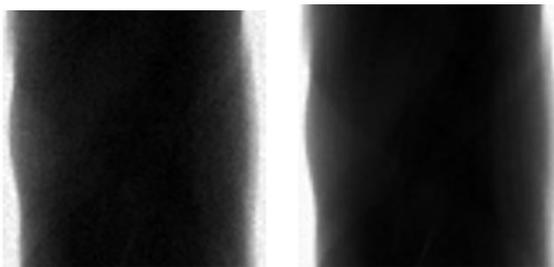
Para simular aplicações reais utilizamos duas peças de madeira. A primeira peça possui um formato cilíndrico com poucos detalhes em seu interior. O conjunto de projeções desta madeira possui dimensão de  $76 \times 76$ . Este sinograma foi obtido com passo angular de aproximadamente  $2,37$  graus entre as projeções. Nas Figuras 41(a) e 41(b) são mostradas perspectivas 3D dos sinogramas obtidos através da exposição desta madeira a 3 segundos e 20 segundos aos raios do tomógrafo. Nas Figuras 41(c) e 41(d) são exibidos os sinogramas em uma visão bidimensional. Já nas Figuras 41(e) e 41(f) são exibidas as imagens após a reconstrução a partir dos sinogramas com o algoritmo POCS paralelo.



(a) Sinograma com 3 segundos de exposição.

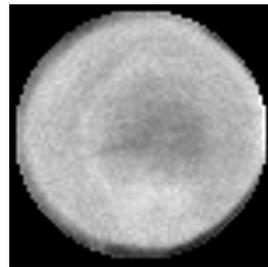


(b) Sinograma com 20 segundos de exposição.

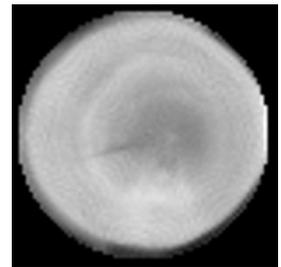


(c) Sinograma com 3 segundos de exposição.

(d) Sinograma com 20 segundos de exposição.



(e) Reconstrução da imagem a partir do sinograma de 3 segundos.



(f) Reconstrução da imagem a partir do sinograma de 20 segundos.

Figura 41: Conjuntos de projeções e reconstruções da madeira 1.

Na Tabela 22 são apresentadas as medidas de erro obtida entre as imagens de 20 segundos e a de 3 segundos sem filtragem. Note que pela medida IDIV as duas imagens são muito próximas.

Tabela 22: Medida dos critérios de qualidade entre as imagens de 3s e 20s da madeira 1.

Madeira	PSNR	IDIV	SSIM
1	34.0797	1.9638	0.78750

### 6.2.5.1 Estimadores MAP

Na Tabela 23 são apresentados os resultados das filtragens utilizando os estimadores MAP. Nestas projeções de madeira as contagens são mais altas do que as projeções dos *phantoms*. O janelamento adaptativo não apresentou bons resultados para estes níveis de contagens com os mesmos valores dos limiares utilizados nas projeções do *phantoms*. Então os valores dos limiares do janelamento adaptativo foram redefinidos para  $t = 0.04$  e  $T = 0.03$ . Na Figura 42 são exibidas imagens reconstruídas com o conjunto de projeções filtrado com os estimadores MAP que empregam as densidades Beta e Weibull como informação *a priori*.

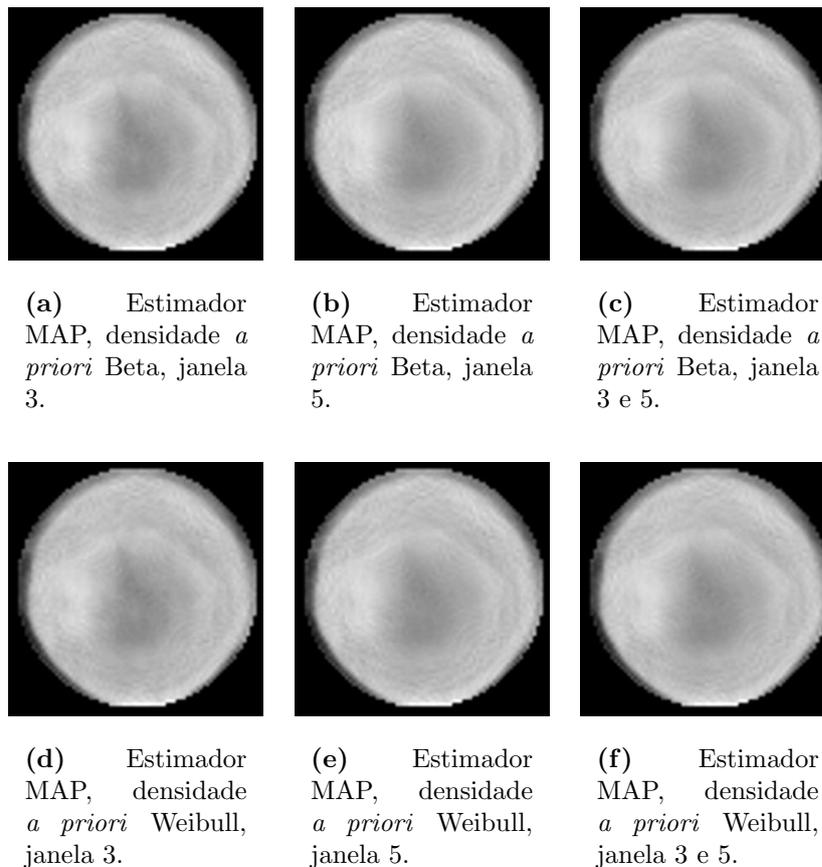


Figura 42: Imagens reconstruídas a partir de projeções da madeira 1 filtradas com estimadores MAP.

Tabela 23: Filtragem com estimadores MAP das projeções da madeira 1.

Dens. <i>a priori</i>	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Beta	3	0.7704	34.8502	1.5755	<b>0.88446</b>
	5	-1.2844	32.7953	2.2435	<b>0.87522</b>
	3 5	0.9075	34.9872	1.5447	<b>0.88631</b>
Gama	3	0.8526	34.9324	1.6444	0.88404
	5	0.6968	34.7766	1.7410	0.87463
	3 5	1.0588	35.1386	1.5925	0.88584
Gaussiana	3	0.8118	34.8916	1.6522	0.88390
	5	0.6483	34.7281	1.7521	0.87427
	3 5	0.9928	35.0726	1.6077	0.88566
Log-Normal	3	0.8836	34.9634	1.6369	0.88415
	5	0.7147	34.7945	1.7373	0.87487
	3 5	1.0882	35.1680	1.5858	0.88595
Nakagami	3	0.8261	34.9059	1.6473	0.88397
	5	0.6469	34.7267	1.7522	0.87434
	3 5	0.8465	34.9263	1.6486	0.87893
Weibull	3	<b>2.4782</b>	<b>36.5580</b>	<b>1.2138</b>	0.87943
	5	<b>0.7340</b>	<b>34.8137</b>	<b>1.7138</b>	0.86805
	3 5	<b>1.3510</b>	<b>35.4308</b>	<b>1.5270</b>	0.88055
Gaussiana Inversa	3	0.8853	34.9651	1.6365	0.88413
	5	0.7179	34.7977	1.7362	0.87484
	3 5	1.0898	35.1696	1.5854	0.88593
Chi-Quadrado	3	-2.3532	31.7265	3.1532	0.84088
	5	-5.6315	28.4482	6.4142	0.83265
	3 5	-2.3993	31.6804	3.1915	0.84589
Exponencial	3	0.0135	34.0933	1.9570	0.78762
	5	0.0155	34.0953	1.9562	0.78764
	3 5	0.0143	34.0941	1.9567	0.78764
Rayleigh	3	0.0318	34.1115	1.9506	0.78840
	5	0.0376	34.1174	1.9483	0.78846
	3 5	0.0341	34.1139	1.9498	0.78848

Na Figura 42 são apresentadas algumas imagens reconstruídas a partir das projeções da madeira 1 filtradas estimadores MAP.

A densidade Beta foi escolhida pelo teste de hipóteses em todas a projeções. Esta escolha é previsível porque as projeções são semelhantes devido ao fato da peça de madeira ter uma constituição aproximadamente homogênea. Vale ressaltar que o estimador desenvolvido com a densidade Beta obteve os melhores resultados na filtragem das projeções desta peça de madeira, conforme apresentado na Tabela 23. O teste foi realizado considerando 250 pontos no histograma. Foi escolhida um número maior de pontos para o histograma por causa da grande variação na taxas de contagem nas projeções do *phantom*, o menor valor é 405 e o maior é 2983. A suavização prévia das projeções foi feita por filtro de média com janela de 5 elementos. Na 28 são histogramas de uma projeção do *phantom*

Tabela 24: Filtragem de Wiener das projeções da madeira 1.

Filtro	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Wiener - Pontual	3	0.8747	34.9545	1.6456	0.88392
	5	0.7280	34.8078	1.7354	0.87462
	3 e 5	<b>1.2393</b>	<b>35.3190</b>	<b>1.5417</b>	<b>0.88491</b>
Wiener - FIR	2	-7.9707	26.1090	10.7745	0.82696
	4	-9.4694	24.6103	14.6494	0.82579
	2 e 4	-7.9956	26.0841	10.9591	0.83126

homogêneo com as densidades de probabilidade sobrepostas.

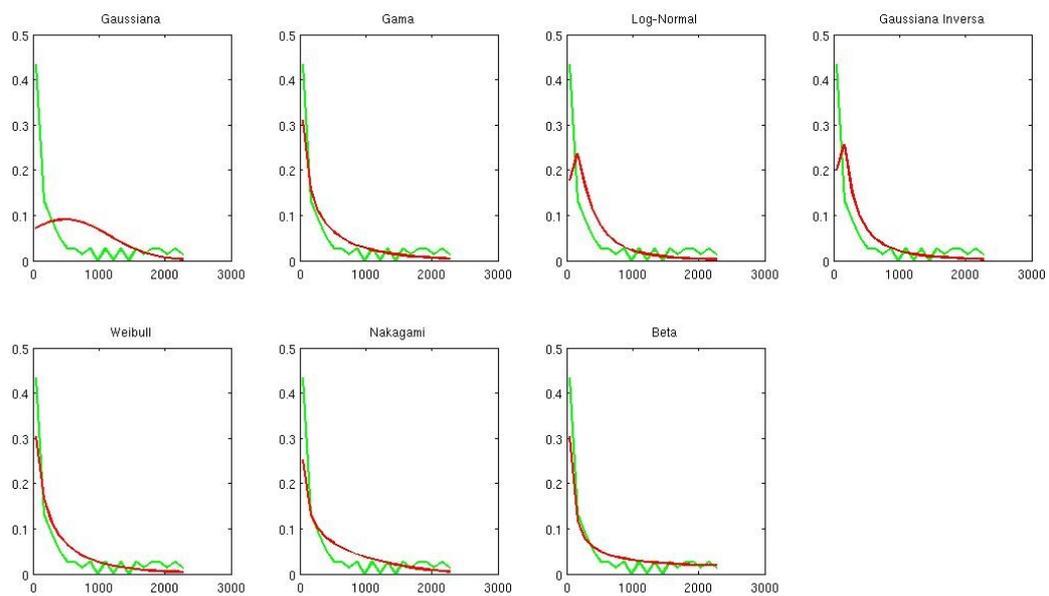


Figura 43: Histograma de uma projeção da madeira 1 com as densidades de probabilidade sobrepostas.

### 6.2.5.2 Filtragem de Wiener

A filtragem das projeções utilizando o filtro de Wiener FIR apresentou pouca melhora na imagem, conforme os resultados apresentados na Tabela 24. Já os resultados do filtro de Wiener Pontual se aproximaram dos melhores resultados das filtrações realizadas com os estimadores MAP. Na Figura 44 são apresentadas as imagens reconstruídas a partir das projeções filtradas com os filtros de Wiener.

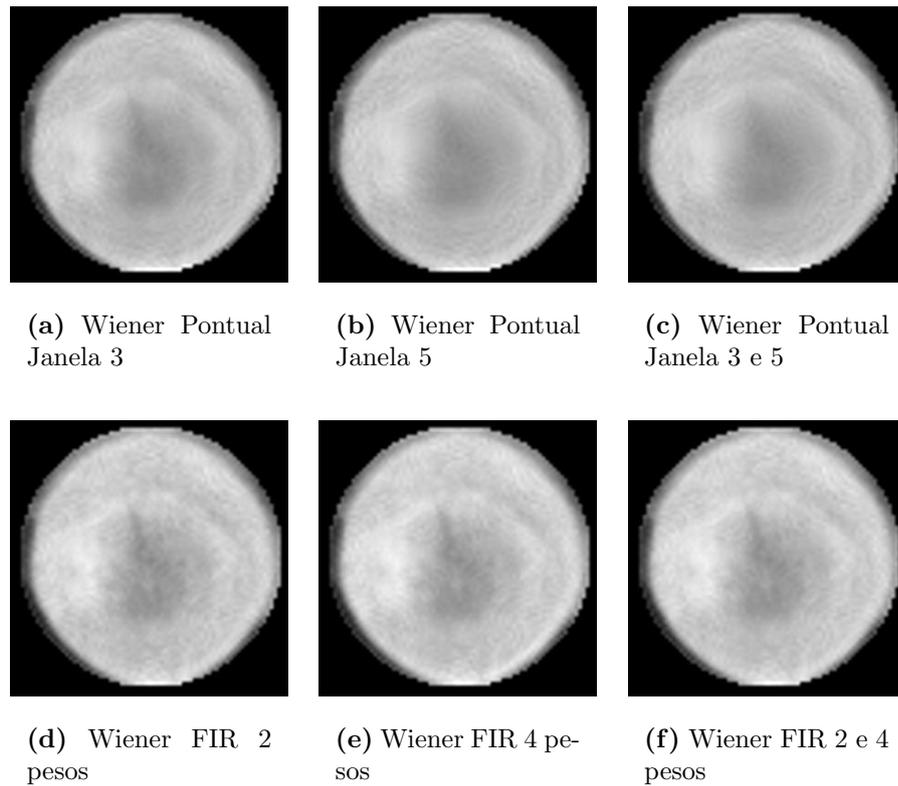


Figura 44: Filtragem de Wiener da madeira 1.

### 6.2.5.3 Limiarização Wavelet

A limiarização da transformada Wavelet produziu resultados semelhantes com as diferentes bases. Na Tabela são apresentados os resultados da mensuração de erro entre as imagens reconstruídas a partir de conjuntos de projeções filtrados com a limiarização Wavelet. Em nenhuma situação, a limiarização dos coeficientes da transformada Wavelet para as projeções da madeira 1 superou os melhores resultados dos estimadores MAP. Os melhores resultados da limiarização no domínio Wavelet ficaram com o uso do *SURE threshold*. Este *threshold* é caracterizado por não realizar uma limiarização excessiva nos coeficientes Wavelets. Como as projeções desta peça de madeira não são muito ruidosas em comparação as projeções dos outros *phantoms*, o *SURE threshold* sobressaiu aos demais *thresholds*. Na Figura 45 são exibidas as imagens cujas as projeções foram filtradas utilizando a técnica com o uso da transformada Wavelet.

Tabela 25: Limiarização Wavelet das projeções da madeira 1.

Base	Níveis	<i>Threshold</i>	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Haar	2	Oracle - Soft	-11.3873	22.6924	26.6759	0.52784
		Universal - Soft	-5.3259	28.7538	5.4261	0.63495
		Minimax - Soft	-1.9456	32.1340	2.6479	0.74358
		SURE - Soft	-0.0659	34.0138	1.7971	0.81857
Db9	2	Oracle - Soft	-6.8498	27.2299	11.2144	0.76024
		Universal - Soft	-3.1649	30.9148	5.0266	0.78759
		Minimax - Soft	-0.3564	33.7233	2.6559	0.83389
		SURE - Soft	1.2225	35.3023	1.7254	0.85175
Db12	2	Oracle - Soft	-6.2260	27.8537	10.2592	0.74623
		Universal - Soft	-2.3544	31.7253	3.9872	0.78216
		Minimax - Soft	-0.5573	33.5224	2.6315	0.83292
		SURE - Soft	1.6353	35.7150	1.5177	0.85185
Db15	2	Oracle - Soft	-6.3784	27.7013	10.5316	0.72977
		Universal - Soft	-3.5015	30.5782	4.9212	0.76681
		Minimax - Soft	-1.8242	32.2555	3.1916	0.81932
		SURE - Soft	0.6119	34.6917	1.8583	0.84795
Db16	2	Oracle - Soft	-5.4221	28.6576	8.7228	0.76987
		Universal - Soft	-2.0983	31.9813	3.9152	0.79197
		Minimax - Soft	-0.0019	34.0778	2.3098	0.83458
		SURE - Soft	0.4708	34.5506	1.9436	0.85338
Sym3	2	Oracle - Soft	-6.4225	27.6572	9.5492	0.74858
		Universal - Soft	-3.0465	31.0332	4.6432	0.79273
		Minimax - Soft	0.4007	34.4805	2.1442	0.83853
		SURE - Soft	1.0653	35.1451	1.6312	0.85075
Sym7	2	Oracle - Soft	-7.2295	26.8501	11.7326	<b>0.77526</b>
		Universal - Soft	-2.8304	31.2492	4.7389	0.80744
		Minimax - Soft	-0.2574	33.8223	2.6134	0.84621
		SURE - Soft	0.9489	35.0287	1.8791	0.85612
Sym10	2	Oracle - Soft	-6.7884	27.2913	11.6786	0.77238
		Universal - Soft	-2.0468	32.0329	4.0564	<b>0.81608</b>
		Minimax - Soft	<b>0.6805</b>	<b>34.7603</b>	<b>2.1076</b>	<b>0.85234</b>
		SURE - Soft	<b>2.1760</b>	<b>36.2558</b>	<b>1.3210</b>	0.85990
Sym12	2	Oracle - Soft	<b>-4.9764</b>	<b>29.1033</b>	<b>7.7950</b>	0.77126
		Universal - Soft	-2.8402	31.2394	4.7021	0.80147
		Minimax - Soft	-1.3203	32.7593	3.1141	0.84115
		SURE - Soft	0.7086	34.7884	1.8976	0.85561
Sym15	2	Oracle - Soft	-6.5239	27.5558	10.7393	0.76597
		Universal - Soft	-2.4327	31.6470	4.4057	0.80939
		Minimax - Soft	-0.4597	33.6200	2.7049	0.84788
		SURE - Soft	0.4685	34.5483	2.0515	0.85560
Coif3	2	Oracle - Soft	-8.9418	25.1379	15.7823	0.76713
		Universal - Soft	<b>-1.9435</b>	<b>32.1362</b>	<b>3.8823</b>	0.80835
		Minimax - Soft	-0.1643	33.9154	2.3659	0.85012
		SURE - Soft	1.7109	35.7907	1.5312	<b>0.85995</b>

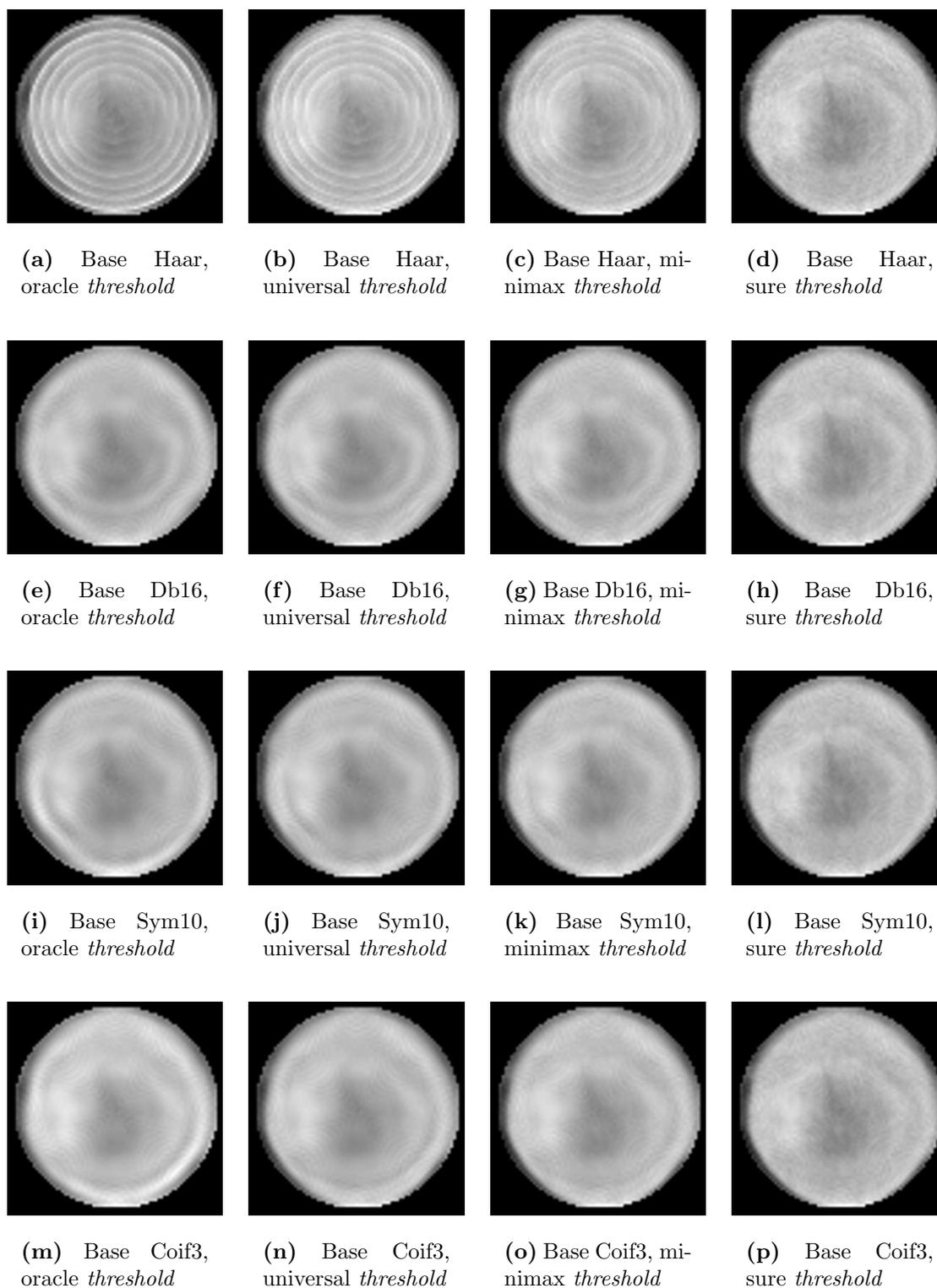
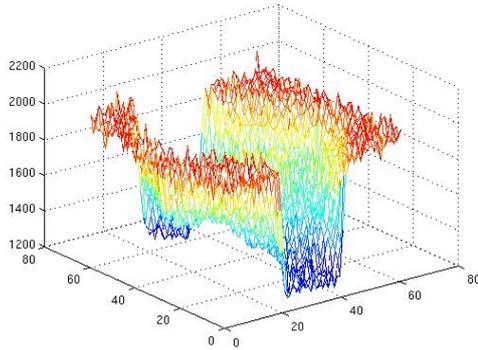
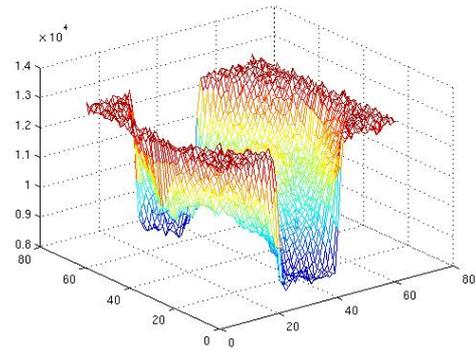


Figura 45: Imagens reconstruídas por projeções da madeira 1 filtradas pela limiarização no domínio Wavelet.



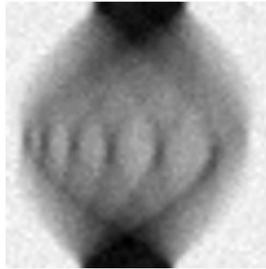
(a) Sinograma com 3 segundos de exposição.



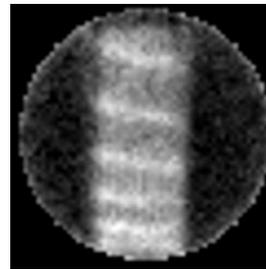
(b) Sinograma com 20 segundos de exposição.



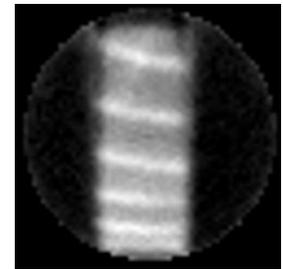
(c) Sinograma com 3 segundos de exposição.



(d) Sinograma com 20 segundos de exposição.



(e) Reconstrução da imagem a partir do sinograma de 3 segundos.



(f) Reconstrução da imagem a partir do sinograma de 20 segundos.

Figura 46: Conjuntos de projeções e reconstruções da madeira 2.

### 6.2.6 Madeira 2

A segunda peça de madeira possui um formato retangular. Esta peça de madeira possui diferentes níveis de atenuação no seu corpo. O conjunto de projeções desta madeira possui dimensão de  $61 \times 61$ . Este sinograma foi obtido com passo angular de aproximadamente  $2,95$  graus entre as projeções. Nas Figuras 46(a) e 46(b) são mostrados perspectivas 3D dos sinogramas obtidos através da exposição desta madeira a 3 segundos e 20 segundos aos raios do tomógrafo. Nas figuras 46(c) e 46(d) são exibidos os sinogramas em uma visão bidimensional. Já nas Figuras 46(e) e 46(f) são exibidas as imagens após a reconstrução feita a partir destes sinogramas com o algoritmo POCS paralelo.

Na Tabela 26 são apresentadas as medidas de erro obtida entre as imagens de 20 segundos e a de 3 segundos sem filtragem.

Tabela 26: Medida dos critérios de qualidade entre as imagens de 3s e 20s da madeira 2.

Madeira	PSNR	IDIV	SSIM
2	21.6642	72.6802	0.61678

### 6.2.6.1 Estimadores MAP

Na Tabela 27 são apresentados os resultados das filtragens utilizando os estimadores MAP.

Tabela 27: Filtragem com estimadores MAP das projeções da madeira 2.

Dens. <i>a priori</i>	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Beta	3	5.5674	27.2317	30.3752	0.75554
	5	4.3739	26.0382	30.3256	0.74138
	3 5	5.2939	26.9582	31.1914	0.75288
Gama	3	7.9742	29.6385	25.0294	0.80062
	5	5.4711	27.1354	28.3659	0.77830
	3 5	7.7531	29.4173	24.2226	0.80123
Gaussiana	3	<b>7.9984</b>	<b>29.6627</b>	<b>24.9754</b>	<b>0.80079</b>
	5	5.5399	27.2042	28.5313	0.77949
	3 5	<b>7.7752</b>	<b>29.4395</b>	24.3114	<b>0.80135</b>
Log-Normal	3	7.9619	29.6262	25.0566	0.80054
	5	5.4364	27.1007	<b>28.1426</b>	0.77773
	3 5	7.7414	29.4057	<b>24.2162</b>	0.80118
Nakagami	3	7.9854	29.6497	25.0052	0.80072
	5	<b>5.5712</b>	<b>27.2355</b>	28.4987	<b>0.77994</b>
	3 5	7.6957	29.3600	24.6211	0.80134
Weibull	3	-0.0536	21.6106	75.0711	0.64912
	5	-0.8259	20.8382	83.9309	0.61003
	3 5	2.5298	24.1941	47.4545	0.69427
Gaussiana Inversa	3	7.9618	29.6261	25.0574	0.80053
	5	5.4365	27.1007	28.1983	0.77772
	3 5	7.7415	29.4058	24.2175	0.80117
Chi-Quadrado	3	2.3484	24.0127	50.2889	0.68188
	5	2.2976	23.9618	50.7935	0.67775
	3 5	2.8779	24.5422	46.4630	0.69203
Exponencial	3	0.0042	21.6685	72.6312	0.61691
	5	0.0043	21.6686	72.6325	0.61690
	3 5	0.0048	21.6691	72.6255	0.61692
Rayleigh	3	0.0102	21.6745	72.5683	0.61710
	5	0.0105	21.6748	72.5713	0.61708
	3 5	0.0121	21.6764	72.5490	0.61713

Os melhores resultados foram alcançados com o uso do estimador MAP que utiliza

a densidade Gaussiana como informação *a priori* e uso de janelamento adaptativo, considerando os critério ISNR, PSNR e SSIM. A divergência de Csiszar aponta o estimador de desenvolvido com a densidade Log-Normal, utilizando janelamento adaptativo, como a melhor técnica de filtragem. Na figura 47 são apresentadas imagens reconstruída a partir de projeções filtradas com os estimadores MAP que utilizam as densidades Gaussiana e Nakagami.

Os estimadores com as densidades Beta e Weibull apresentaram resultados ruins em comparação com os outros estimadores, conforme apresentado na Tabela 27. Então, retiramos as densidades Beta e Weibull do dicionário de densidades utilizado pelo teste de hipóteses. Para o teste de hipóteses foi utilizado 15 pontos no histograma e uma suavização prévia realizada com filtro de média com janela de 3 elementos. Os resultados das filtragem utilizando o teste de hipóteses para escolha da densidade *a priori* são exibidos na Tabela 28. Na Tabela 29 está relacionado o número de vezes que cada densidade probabilidade foi escolhida. A filtragem utilizando o teste de hipóteses supera a filtragem que utiliza estimadores MAP com uma única densidade *a priori* em todas as projeções. Considerando o uso do janelamento adaptativo e a avaliação sob o critério SSIM.

Na Figura 47 são apresentadas imagens reconstruídas a partir de projeções da madeira 2 filtradas com os estimadores MAP. Na Figura 48 são apresentadas as aproximações das densidades de probabilidade utilizadas no teste de hipóteses com o histograma de uma projeção da madeira 2. Nesta projeção a densidade Gaussiana foi escolhida pelo teste de hipótese por apresentar o menor valor no teste  $\chi^2$ .

Tabela 28: Filtragem com estimadores MAP das projeções da madeira 2 utilizando o teste  $\chi^2$  para a escolha da densidade *a priori*.

Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
3	7.9936	29.6578	24.8612	0.80073
5	5.5359	27.2002	28.5294	0.77941
3 5	7.7705	29.4347	24.4376	0.80155

Tabela 29: Densidades a priori escolhidas nas projeções da madeira 2.

Densidade de probabilidade	qtd escolhida
Gaussiana	41
Gama	5
Nakagami	15
total	61

Tabela 30: Filtragem de Wiener das projeções da madeira 2.

Filtro	Janela	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Wiener - Pontual	3	<b>8.0073</b>	<b>29.6715</b>	24.9866	0.80086
	5	5.4334	27.0977	27.9258	0.77718
	3 e 5	7.7968	29.4611	<b>24.4606</b>	<b>0.80111</b>
Wiener - FIR	2	2.2424	23.9067	51.0639	0.67797
	4	1.8948	23.5591	51.0319	0.67716
	2 e 4	2.3486	24.0129	48.9030	0.68145

### 6.2.6.2 Filtragem de Wiener

Na Figura 49 são apresentadas imagens reconstruídas a partir de projeções filtradas com os filtros de Wiener. O filtro de Wiener Pontual apresentou resultados semelhantes aos melhores resultados da filtragem realizada com os estimadores MAP, conforme apresentado na Tabela 30. O filtro de Wiener FIR apresentou resultados inferiores aos resultados do filtro de Wiener Pontual.

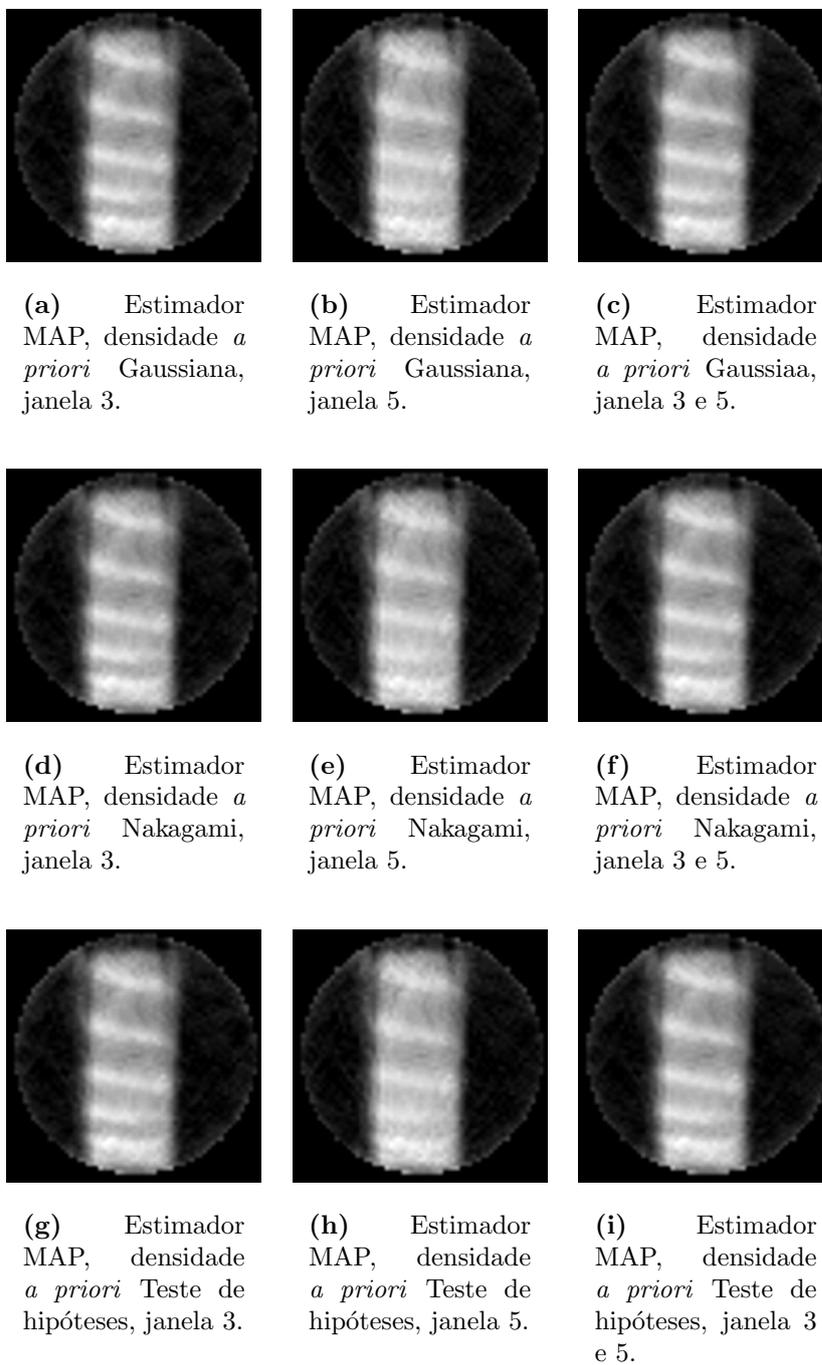


Figura 47: Imagens reconstruídas a partir de projeções da madeira 2 filtradas com estimadores MAP.

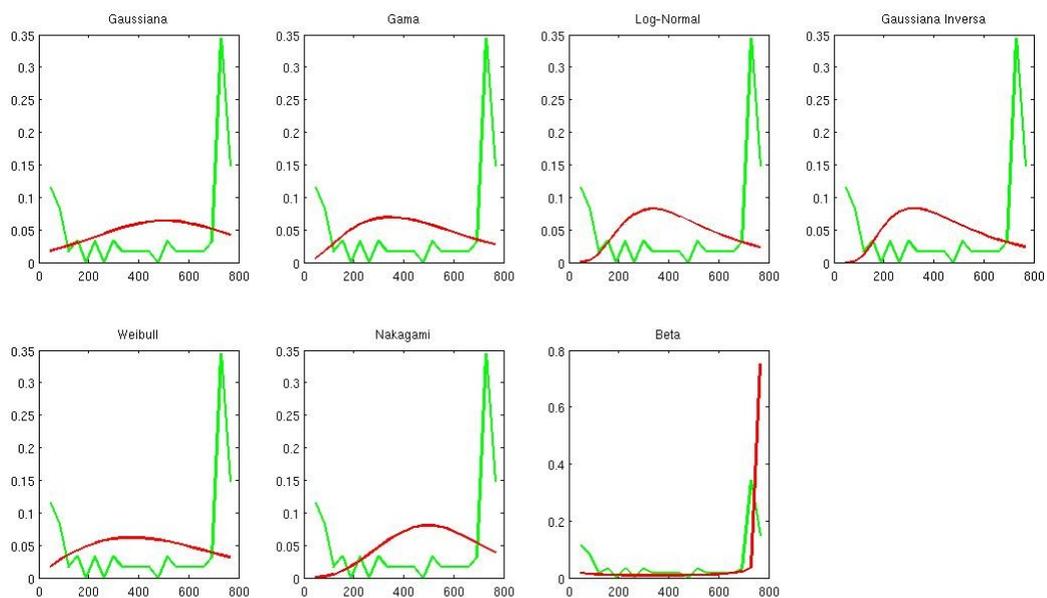


Figura 48: Aproximação das densidades com o histograma de uma projeção Madeira2.

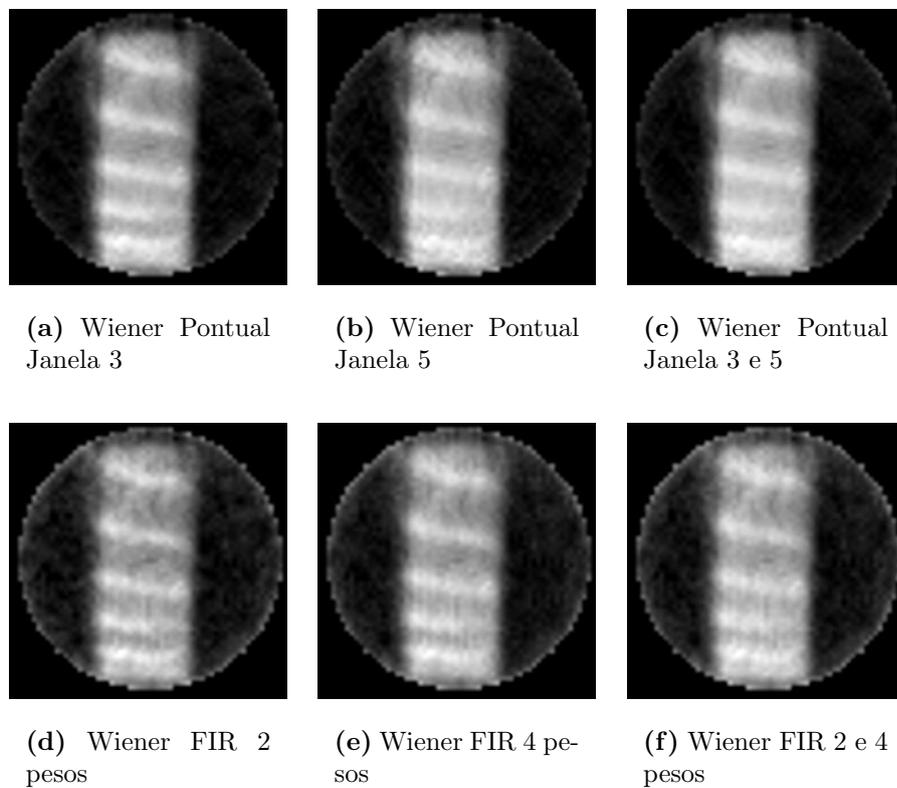


Figura 49: Filtragem de Wiener da madeira 2.

### 6.2.6.3 Limiarização Wavelet

A filtragem das projeções da peça da madeira 2 utilizando a limiarização dos coeficientes Wavelets não apresentou resultados superiores aos estimadores MAP e filtro de Wiener Pontual. O melhor resultado ocorre com o uso da base Sym10 com a transformada Wavelet e o uso do Minimax threshold para a limiarização dos coeficientes, conforme é apresentado na Tabela 31. Este melhor resultado é bem distante dos melhores resultados dos estimadores MAP.

Na Figura 50 é apresentada algumas imagens da peça da madeira 2 reconstruídas após a filtragem das projeções utilizando a limiarização no domínio Wavelet.

Tabela 31: Limiarização Wavelet das projeções da madeira 2.

Base	Níveis	<i>Threshold</i>	ISNR	PSNR	IDIV	SSIM
Haar	2	Oracle - Soft	0.8468	22.5111	71.5771	0.53926
		Universal - Soft	1.8598	23.5241	64.0701	0.58956
		Minimax - Soft	3.2908	24.9551	47.5754	0.66509
		SURE - Soft	1.4550	23.1192	58.3859	0.65484
Db9	2	Oracle - Soft	4.4638	26.1280	32.3564	0.71222
		Universal - Soft	4.6038	26.2681	31.2685	0.71671
		Minimax - Soft	<b>6.3612</b>	<b>28.0254</b>	<b>25.4359</b>	<b>0.76406</b>
		SURE - Soft	4.7239	26.3881	32.9946	<b>0.74213</b>
Db12	2	Oracle - Soft	3.9359	25.6002	34.5391	0.70222
		Universal - Soft	4.4389	26.1032	31.9987	0.71134
		Minimax - Soft	5.0359	26.7001	31.1121	0.73858
		SURE - Soft	3.3869	25.0512	41.2731	0.70700
Db15	2	Oracle - Soft	3.5598	25.2240	36.3950	0.69153
		Universal - Soft	4.5557	26.2199	31.5124	0.71395
		Minimax - Soft	5.6227	27.2870	27.5330	0.75527
		SURE - Soft	4.6050	26.2693	<b>32.2632</b>	0.74157
Db16	2	Oracle - Soft	4.2590	25.9233	31.2640	0.71909
		Universal - Soft	4.7356	26.3999	29.8585	0.72641
		Minimax - Soft	2.9815	24.6458	43.6954	0.70630
		SURE - Soft	4.5689	26.2332	34.5034	0.73311
Sym3	2	Oracle - Soft	4.4411	26.1053	34.1069	0.71885
		Universal - Soft	<b>5.7682</b>	<b>27.4325</b>	29.5603	<b>0.74432</b>
		Minimax - Soft	3.8218	25.4861	38.1457	0.71983
		SURE - Soft	3.6663	25.3306	40.2083	0.71250
Sym7	2	Oracle - Soft	4.2455	25.9098	33.8260	0.71628
		Universal - Soft	4.9947	26.6590	30.3460	0.72857
		Minimax - Soft	3.9762	25.6405	37.9571	0.72310
		SURE - Soft	2.5766	24.2409	48.4684	0.69659
Sym10	2	Oracle - Soft	3.4050	25.0692	37.9961	0.68841
		Universal - Soft	3.9746	25.6388	34.2393	0.70473
		Minimax - Soft	6.1855	27.8497	25.7694	0.76111
		SURE - Soft	3.4852	25.1495	40.0248	0.71791
Sym12	2	Oracle - Soft	<b>4.9080</b>	<b>26.5722</b>	<b>28.8044</b>	<b>0.73110</b>
		Universal - Soft	4.9330	26.5973	<b>28.7094</b>	0.73979
		Minimax - Soft	5.3411	27.0054	28.6149	0.75578
		SURE - Soft	3.9030	25.5673	38.9799	0.72176
Sym15	2	Oracle - Soft	3.9501	25.6144	34.4061	0.70678
		Universal - Soft	4.1743	25.8386	33.6044	0.71138
		Minimax - Soft	4.5119	26.1762	34.0433	0.73455
		SURE - Soft	3.1627	24.8270	43.2132	0.70699
Coif3	2	Oracle - Soft	3.1620	24.8262	35.5033	0.67047
		Universal - Soft	2.7724	24.4367	37.5354	0.68035
		Minimax - Soft	4.4563	26.1206	30.6291	0.73714
		SURE - Soft	<b>4.8395</b>	<b>26.5038</b>	33.5142	0.72736

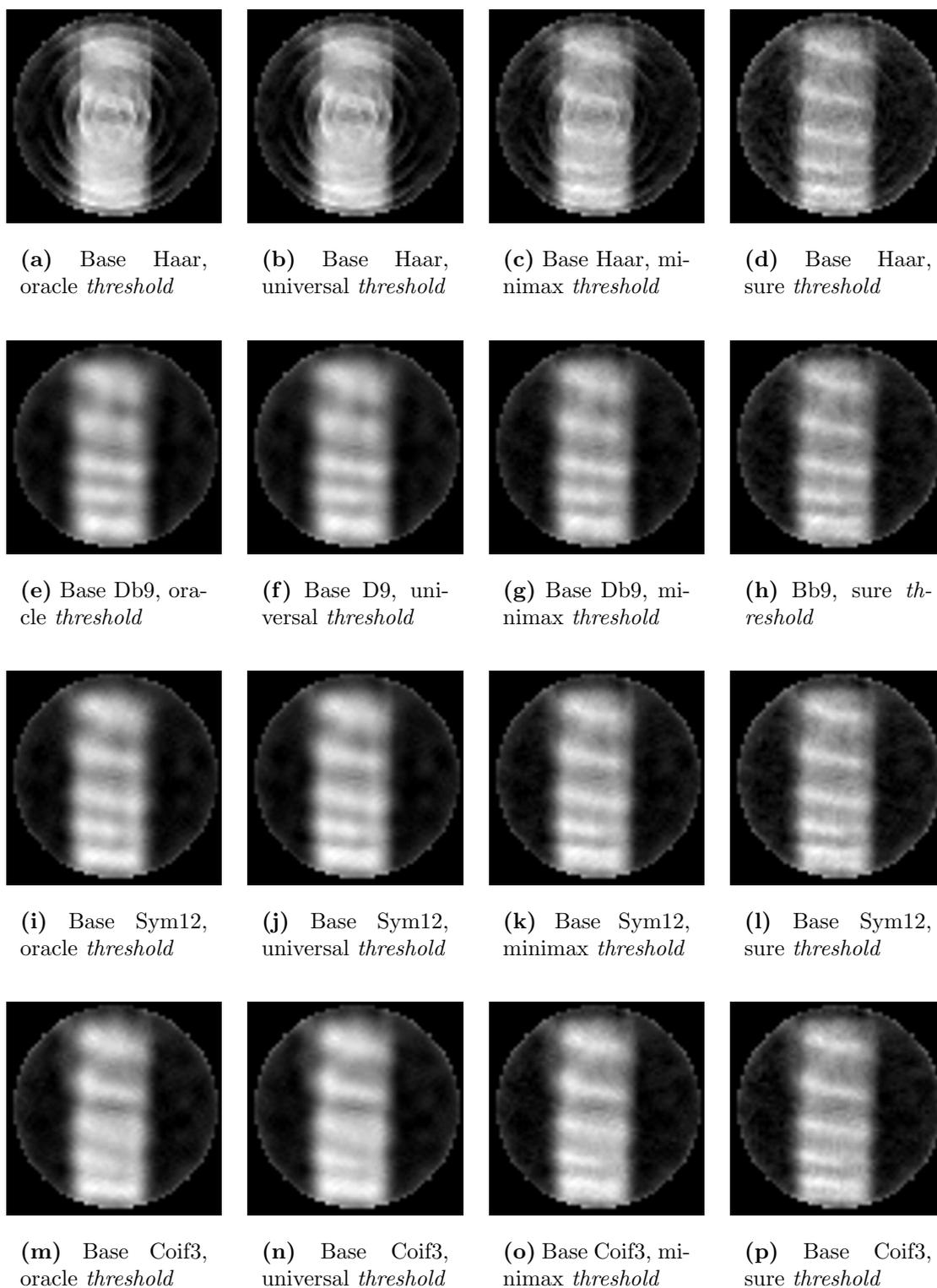


Figura 50: Imagens reconstruídas por projeções da madeira 2 filtradas pela limiarização no domínio Wavelet.

## 6.3 Análise dos resultados

Verificamos que os critérios de mensuração de erro nem sempre têm consenso para os melhores métodos de filtragem. Como exemplo podemos citar os resultados das filtra-gens do phantom simulado de Shepp e Logan. Os critérios ISNR e PSNR apontavam a densidade Exponencial como melhor densidade para ser empregada como informação *a priori*, o que não foi comprovado visualmente. Neste caso o critério SSIM se mostrou mais robusto e apontou métricas coerentes com os resultados visuais.

O estimadores MAP desenvolvidos com as densidades Chi-Quadrado, Exponencial e Rayleigh apresentaram os piores resultados para a filtragem. Esta densidades possuem somente um parâmetro. Portanto, a estimação dos parâmetros para estes estimadores é feita utilizando somente a média amostral. Este fato pode ter contribuído para o baixo desempenho destes estimadores.

Na tabela 6.3 é apresentada uma relação dos *phantoms* utilizados para os testes. Nesta Tabela estão relacionados também a composição e as características de cada *phantom* e os melhores da filtragem das projeções considerando o critério SSIM. Nesta tabela a terceira coloca se refere as características dos conjuntos de projeções dos *phantoms*, onde são apresentadas informações da dimensão do conjunto de projeções, mínimo e máximo valores observados no conjunto de projeções com ruído.

<i>Phantom</i>	Composição	Carac.	SSIM			
Shepp Logan	Simulado	dim. 128x128	1) 0.44771	MAP	Gaussiana	jan 3 e 5
		min. 10	2) 0.44317	Wiener	Pontual	jan 3 e 5
		máx. 80	3) 0.38408	Wavelet	Coif3	Oracle
Homogêneo	Água Plexiglass	dim. 79x79	1) 0.30453	Wavelet	Sym3	Oracle
		min. 159	2) 0.29433	MAP	Beta	jan 5
		máx. 555	3) 0.26297	Wiener	Pontual	jan 3 e 5
Simétrico	Alumínio Ar Plexiglass	dim. 79x79	1) 0.88644	Wiener	Pontual	jan 3 e 5
		min. 24	2) 0.88463	MAP	Log-Normal	jan 3 e 5
		máx. 443	3) 0.83997	Wavelet	Db16	Minimax
Assimétrico	Ar Plexiglass	dim. 100x100	1) 0.72149	Wiener	Pontual	jan 3 e 5
		min. 40	2) 0.71933	MAP	Log-Normal	jan 3 e 5
		máx. 294	3) 0.70408	Wavelet	Sym10	Universal
Madeira 1	Madeira	dim. 76x76	1) 0.88631	MAP	Beta	jan 3 e 5
		min. 405	2) 0.88491	Wiener	Pontual	jan 3 e 5
		máx. 2983	3) 0.85995	Wavelet	Coif3	SURE
Madeira 2	Madeira	dim. 61x61	1) 0.80135	MAP	Gaussiana	jan 3 e 5
		min. 1234	2) 0.80111	Wiener	Pontual	jan 3 e 5
		máx. 2160	3) 0.76406	Wavelet	Db9	Minimax

Tabela 32: Relação dos melhores resultados obtidos pelas técnicas de filtragem em cada *phantom* de teste.

O estimador MAP com a densidade de probabilidade Beta mostrou bom desempenho para a filtragem de projeções com regiões planas. É o caso das projeções do *phantom* homogêneo e da madeira 1. Nas projeções do *phantom* homogêneo as taxas de contagem são maiores no início e no final da projeção, porém não existe um crescimento acentuado. Portanto, o uso de uma janela maior (5 elementos) se mostrou mais adequada do que a adaptativa. Porém nas projeções da madeira 1, as contagens do início e no fim da projeção sofrem um aumento acentuado, neste caso o uso do janelamento adaptativo foi mais adequado.

Os melhores resultados da filtragem das projeções do *phantom* homogêneo foi alcançado com o uso da limiarização Wavelet com a base Sym3 e Oracle *threshold*. O uso da técnica Wavelet provocou uma suavização excessiva das projeções, no caso *phantom* homogêneo este tipo de filtragem é adequado porque não existem estruturas no seu interior.

No *phantom* simulado de Shepp e Logan a melhor técnica de filtragem foi o estimador MAP com a densidade *a priori* Weibull e uso de janelamento adaptativo. Este *phantom* possui estruturas internas com formatos arredondados e tamanhos e tons de cinza diferenciados. O conjunto de projeções deste *phantom* possui uma taxa média de contagem inferior aos demais *phantoms*.

Nas projeções dos *phantoms* simétrico e assimétrico o estimador MAP com a densidade Beta apresentou resultados superiores quando utiliza-se janela fixa. Porém, quando utiliza-se janela adaptativa o melhor resultado é o uso da densidade Log-Normal como informação *a priori*. O janelamento adaptativo influencia no desempenho dos estimadores. A melhor técnica de filtragem para as projeções dos *phantoms* simétrico e assimétrico foi o filtro de Wiener Pontual, com janelamento adaptativo. Estes *phantoms* possuem estruturas internas arredondadas em seu interior. As taxas média de contagens nas projeções destes *phantoms* são superiores as do *phantom* de Shepp e Logan.

Nos *phantoms* as estruturas internas são de formatos redondos ou arredondados, na imagem de madeira 2 existem estruturas de formatos aproximadamente retangulares. Para as projeções de madeira 2 que possuem estas características a filtragem com o estimador MAP com a densidade *a priori* Gaussiana apresentou melhores resultados.

Todos os métodos de filtragem possuem ordem de complexidade algorítmica linear. O maior esforço computacional é gasto no processo de reconstrução da imagem utilizando o algoritmo POCS paralelo. Isto torna viável o uso da filtragem das projeções tomográficas antes da reconstrução. A imagem reconstruída a partir visto que apresentam uma melhora acentuada em relação a imagem reconstruída sem nenhuma filtragem.

# Capítulo 7

## Conclusões

Os novos estimadores MAP desenvolvidos neste trabalho com as densidades de probabilidade Nakagami, Gaussiana Inversa e Weibull mostraram resultados próximos aos estimadores MAP que apresentaram melhor filtragem. O estimador com a densidade Weibull foi a melhor técnica de filtragem para *phantom* de Shepp e Logan sob julgamento de todos os critérios.

Os estimadores MAP que utilizam as densidades Rayleigh, Exponencial e Chi-Quadrado sempre apresentaram resultados muito abaixo dos demais estimadores, sob interpretação dos quatro critérios. Este fato é devido ao uso somente da média amostral para estimar os parâmetros destas densidades utilizando o método dos momentos.

O filtro de Wiener Pontual obteve melhores resultados do que o filtro de Wiener FIR. O filtro FIR filtra o sinal de forma diferente. A convolução com os coeficientes do filtro é realizada de forma unilateral, ou seja, somente pontos anteriores ao que se quer filtrar são considerados para a convolução. O filtro de Wiener Pontual utiliza estimativas locais para a filtragem. Estas foram obtidas com pontos anteriores e posteriores ao ponto que se quer filtrar.

Em quase todas as situações o uso do janelamento adaptativo apresentou melhores resultados que o uso do janelamento fixo. O método de janelamento adaptativo foi utilizado para o cálculo das estimativas locais dos estimadores MAP e filtro de Wiener Pontual. Este método também foi utilizado para determinar o número de pesos para o filtro de Wiener FIR. O método entretanto não se mostrou robusto a variação da taxa de contagem. O valor dos limiares precisaram ser redefinidos para a escolha do tamanho da janelas nas projeções de madeira, que apresentam taxa média de contagem superior aos *phantoms*.

O índice SSIM se mostrou um método mais robusto para a avaliação de imagens, conforme constatado analisando a tabela 7 e a figura 25.

A filtragem utilizando o dicionário de famílias no geral obteve um bom desempenho em comparação com o uso de um único estimador em todas as projeções. Entretanto, observa-se que em algumas situações o valor obtido pela medida de erro da imagem reconstruída a partir do conjunto de projeções filtrado com estimadores MAP com a escolha da densidade *a priori* feita com o teste de hipóteses não supera o uso de uma única densidade *a priori*.

A melhor técnica de filtragem para o *phantom* de Shepp e Logan foi o estimador MAP com a densidade *a priori* Gaussiana com 0.44771 pontos no índice SSIM. O filtro de Wiener Pontual alcançou 0.44317 pontos, ambas as técnicas de filtragem utilizando o janelamento adaptativo.

No *phantom* homogêneo a técnica utilizando Wavelets apresentou melhores resultados, porque este *phantom* não possui detalhes no seu interior. Os resultados foram muito variáveis em relação a escolha da base para a transformada Wavelet. As diversas técnicas para a obtenção de *thresholds* para a limiarização dos coeficientes não apresentaram resultados muito diferentes exceto o SURE *threshold* que mantém mais os detalhes da projeções, não provocando uma suavização excessiva. A diferença entre imagem obtidas com 20 segundos de exposição e a obtida a 3 segundos de exposição sem filtragem é dada por 0.15555 pontos no índice SSIM. A melhor técnica, a limiarização Wavelet com a base Sym3 e Oracle *threshold*, apresentou 0.30453 pontos. O estimador MAP com densidade *a priori* Beta e janelamento de 5 pontos apresentou resultados próximos com 0.29433. O filtro de Wiener apresentou resultados um pouco abaixo com 0.26297 no índice SSIM.

O filtro de Wiener Pontual foi a melhor técnica para a filtragem das projeções do *phantom* simétrico e assimétrico, quando utilizado com janelamento adaptativo. Este resultado foi muito próximo ao estimador MAP com a densidade Log-Normal, também com janelamento adaptativo. O filtro de Wiener Pontual obteve 0.88644 pontos no índice SSIM, enquanto o estimador MAP com a densidade Log-Normal obteve 0.88463 pontos com uso de janelamento adaptativo. Esta diferença não é muito acentuada visto que a imagem sem filtragem obtém 0.72734 pontos. O mesmo ocorre com a imagem *phantom* assimétrico que obteve 0.72149 pontos no índice SSIM, quando as projeções são filtradas com o filtro de Wiener Pontual com janelamento adaptativo. enquanto o estimador MAP com a densidade Log-Normal obter 0.71933, a imagem sem filtragem obtém 0.56941 pontos.

As projeções da madeira 1 possuem uma constituição um pouco parecida com o *phantom* de homogêneo, apesar da madeira 1 não possuir composição totalmente homogênea. A principal diferença está na taxa de contagem no início e no fim das projeções, que sofrem um aumento acentuado. Por este motivo a limiarização Wavelet não apresentou bons resultados para a filtragem das projeções desta madeira. A melhor técnica de filtragem foi o estimador MAP com a densidade *a priori* Beta e uso de janelamento

adaptativo, com 0.88631 pontos no índice SSIM. O filtro de Wiener Pontual com janelamento adaptativo apresenta 0.0014 pontos abaixo. A medida do índice SSIM entre a imagem ruidosa e ideal é de 0.78750.

Como mencionado, a madeira 2 possui estruturas internas aproximadamente retangulares. Nas projeções desta madeira a filtragem com o estimador MAP com a densidade *a priori* Gaussiana apresentou melhores resultados, com 0.80135 pontos no índice SSIM, quando utilizado o janelamento adaptativo. O filtro de Wiener Pontual com janelamento adaptativo apresenta índice 0.80111. A imagem sem filtragem obtém 0.61678 pontos no índice.

Para projeções com taxas média de contagem mais baixa e estruturas arredondadas no interior da imagem (*phantom* de Shepp e Logan) a melhor a filtragem com o estimador MAP com densidade Weibull é mais adequada. Em projeções com regiões planas sem detalhes no interior o uso da técnica Wavelet foi mais adequada, no caso do *phantom* homogêneo, verificamos isto com o uso de Base Sym3 e Oracle *threshold*. Em projeções com constituição mais homogênea e com crescimento da taxa de contagem no início e fim das projeções (madeira 1), o estimador MAP com a densidade Beta com janelamento adaptativo apresenta melhores resultados. Já em projeções com constituição mais variada com estruturas aproximadamente retangulares (madeira 2) a densidade Gaussiana é indicada como melhor densidade *a priori*. Nas projeções de imagens com estruturas arredondadas no interior e com taxas de contagens um pouco superiores (*phantom* simétrico e assimétrico), o uso do filtro de Wiener Pontual com janelamento adaptativo é mais adequado.

## 7.1 Trabalhos Futuros

Sugerimos como trabalhos futuros os seguintes pontos:

- Pesquisar uma forma de fazer a escolha automática dos limiares para o janelamento adaptativo de acordo com as taxas de contagens de cada projeção.
- Utilizar o teste de hipótese de Kolmogorov-Smirnov para a escolha da densidade de probabilidade que melhor se adequa para cada projeção.
- Utilizar técnicas de interpolação nos histogramas antes da submissão para o teste de hipóteses.

- 
- Verificar o desempenho dos métodos de filtragem utilizados neste trabalho para realizar uma filtragem 2D do conjunto de projeções.
  - Investigar uma forma de realizar a escolha adaptativa da melhor base para realizar a transformada Wavelet em cada projeção.
  - Analisar o desempenho dos métodos de filtragem utilizados nesta dissertação em projeções capturadas por *phantoms* em tomógrafos de aplicações clínicas, com baixas doses de radiação.
  - Modificar a implementar o algoritmo de reconstrução utilizado neste trabalho (POCS paralelo) para poder ser executado em arquiteturas paralelas ou distribuídas.
  - Comparar a metodologia de reconstrução tomográfica desenvolvida nesta dissertação com o algoritmo de reconstrução ASIR, este algoritmo a GE pretende utilizar em seus tomógrafos (SILVA et al., 2010).

## Referências

ANSCOMBE, F. J. The transformation of poisson, binomial and negative-binomial data. *Biometrika*, v. 35, n. 3-4, p. 246-254, may 1948.

BOVIK, A. *Handbook of Image and Video Processing*. San Diego: Academic Press, 2000. ISBN 0-12-119790-5.

COMBETTES, P. L. The foundations of set theoretic estimation. *Proceedings of the IEEE*, v. 81, n. 2, p. 182-208, February 1993.

CORMACK, A. M. Representation of a foundation by its line with some radiological application. *Applied Physics Letters*, v. 34, n. 9, p. 2722 - 2727, 1983.

CRESTANA, S. *A tomografia computadorizada como um novo método para estudos da física da água no solo*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos, 1985.

CRUVINEL, P. E. *Minitomógrafo de Raios X e Raios  $\gamma$  Computadorizado para Aplicações Multidisciplinares*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, 1987.

CSISZAR, I. Why least squares and maximum entropy? an axiomatic approach to inference for linear inverse problems. *Annals of Statistics*, v. 19, n. 4, p. 2032-2066, 1991.

DAUBECHIES, I. *Ten lectures on wavelets*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. ISBN 0898712742.

DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. Minimax estimation via wavelet shrinkage. *Annals of Statistics*, v. 26, p. 879-921, 1998.

DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, v. 81, p. 425-455, 1994.

DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *American Statistical Association*, v. 90, p. 1200-1224, 1995.

EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISAS AGROPECUARIAS. *Página da Web*. 2009. Disponível em: <<http://www.cnpdia.embrapa.br>>. Acesso em: 27 de fevereiro de 2009.

ERENO, D. Texturas e sabores - da língua eletrônica ao analisador de pó de café, novos equipamentos são licenciados pela embrapa. *Revista Pesquisa Fapesp*, n. 119, p. 62 – 67, Janeiro 2006.

FURUIE, S. S. *Reconstrução Tomográfica de Imagens com Ruído Poisson: Estimativa das Projeções*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica da USP - Departamento de Engenharia Elétrica, São Paulo, March 1990.

GAEDDERT, J.; ANNAMALAI, A. Some remarks on nakagami-m parameter estimation using method of moments. *IEEE Communications Letters*, v. 9, n. 4, p. 313–315, April 2005.

GIBRA, I. N. *Probability and statistical inference for scientists and engineers*. New Jersey: Prentice-Hall, 1973. ISBN 0-13-711622-5.

GONZALEZ, A. B. de et al. Projected cancer risks from computed tomographic scans performed in the united states in 2007. *Archives of Internal Medicine*, v. 169, n. 22, p. 2071 – 2077, December 2009.

GRANATO, L. F. *Desenvolvimento de métodos frequenciais e adaptativos para a restauração de imagens de um tomógrafo dedicado à Ciência de Solos*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Computação - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1998.

GUERIN, F.; DUMON, B.; HAMBLI, R. Determining the shape parameter of a weibull distribution from mechanical damage models. In: ANNUAL RELIABILITY AND MAINTAINABILITY SYMPOSIUM. [S.l.], 2001. p. 156–160.

HAYES, M. H. *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. New York: Jhon Wiley and Sons, 1996. ISBN 0-47159431-8.

HENDEE, W. R. *The physical principles of computed tomography*. Boston: Little Brown and Company, 1983.

JANSEN. Minimum risk thresholds for data with heavy noise. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 13, n. 5, p. 296–299, May 2006.

JR, H. N. W. A brief history of positron emission tomography (pet). *Seminars in Nuclear Medicine*, v. 28, n. 3, p. 213 – 220, 1998.

KAIPIO, J.; SOMERSALO, E. *Statistical and Computational Inverse Problems*. New York: Springer, 2005. ISBN 0-387-22073-9.

KAK, A. C.; SLANEY, M. *Principles of Computadorized Tomographic Imaging*. [S.l.]: IEEE Press, 1988.

KUAN, D. T. et al. Adaptive noise smoothing filter for images with signal-dependent noise. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 7, n. 2, p. 165 – 177, 1985.

LAIA, M. A. de M. *Filtragem de projeções tomográficas da ciência do solo utilizando kalman e redes neurais*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Computação - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2007.

LI, T. et al. Nonlinear sinogram smoothing for low-dose x-ray ct. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, v. 51, n. 5, p. 2505–2513, October 2004.

LOGAN, B. F.; SHEPP, L. A. Optimal reconstruction of a function from its projections. *Duke Mathematical Journal*, v. 42, n. 4, p. 645–659, 1975.

LU, H. et al. Noise properties of low-dose ct projections and noise treatment by scale transformations. *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, p. 1662 – 1666, 2001.

MALLAT, S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 674–693, 1989.

MINATEL, E. R. *Desenvolvimento de algoritmo para reconstrução e visualização tridimensional de imagens tomográficas com o uso de técnicas frequenciais e Wavelets*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Computação - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1997.

ONOE, M. et al. Computed tomography for measuring annual rings of a live tree. *Proceedings of the IEEE*, v. 71, p. 907 – 908, July 1983.

PEREIRA, M. F. L. *Algoritmo paralelo para reconstrução tridimensional de imagens tomográficas de amostras agrícolas em arquitetura DSP com técnicas Wavelets*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Computação - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2001.

PEREIRA, M. F. L. *Um Modelo de Reconstrução Tomográfica 3D para Amostras Agrícolas com Filtragem de Wiener em Processamento Paralelo*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos, São Carlos, 2007.

PETROVIC, A. M.; SIEBERT, J.; RIEKE, P. Soil bulk density analysis in three dimensions by computed tomographic scanning. *Soil Science Society of America*, n. 46, p. 445 – 450, 1982.

PORTAL, A. L. S. *Refinamentos nos métodos de estimação das projeções para a reconstrução tomográfica de imagens com ruído Poisson*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

POULARIKAS, A. D.; RAMADAN, Z. M. *Adaptive Filtering Primer with Matlab*. Boca Raton: Taylor and Francis Group, 2006. ISBN 0-8493-7043-4.

PROAKIS, J. G. *Digital Communications*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2000.

RABBANI, M. Bayesian filtering of poisson noise using local statistics. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech Signal Processing*, v. 36, n. 6, p. 933–937, june 1988.

RADON, J. On the determination of functions from their integrals along certain manifolds. *Leipzig Math. Phys.*, v. 69, p. 262–277, 1917.

RAMANCHANDRAN, G. N.; LAKSHMINARAYANAN, A. V. Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: Application of convolutions instead of fourier transformers. *Proceedings of National Academy of Sciences - USA*, v. 68, p. 2236–2240, 1971.

RANGAYYAN, R. M. *Biomedical Image Analysis*. Boca Raton: CRC Press LLC, 2005. ISBN 0-8493-9695-6.

RIBEIRO, G. C. *Desenvolvimento de um algoritmo para a reconstrução tridimensional para imagens de um minitomógrafo, baseado no método de reconstrução algébrica modificado e interpolação Spline*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Computação - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1994.

SALINA, F. V. *Reconstrução tomográfica de imagens utilizando técnicas POCS sequenciais e paralelas*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Computação - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2002.

SALINA, F. V. *Métodos híbridos para a reconstrução Tomográfica de Imagens Utilizando POCS e Teoria da Estimação*. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

SANTOS, S. S. L. *Reconstrução tomográfica de imagens com ruído Poisson por estimadores MAP das projeções utilizando densidades a priori definidas na semi-reta não-negativa*.

Dissertação (Mestrado) — Departamento de Computação - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 1996.

SAVAGE, N. Medical imagers lowers the dose, radiation-lowering techniques were in the works even before studies showed a danger. *IEEE Spectrum*, v. 47, n. 3, p. 15 – 16, March 2010.

SILVA, A. C. et al. Innovations in ct dose reduction strategy: Application of the adaptive statistical iterative reconstruction algorithm. *MEDICAL PHYSICS AND INFORMATICS*, n. 194, p. 191 – 199, January 2010.

STARCK, J.-L.; MURTAGH, F. *Astronomical Image and Data Analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 2006. ISBN 3-540-33024-0.

STARK, H.; WOODS, J. P.; HINGORANI, I. R. Direct fourier reconstruction in computer tomography. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-29, n. 1, p. 237 – 245, Feb. 1981.

STARK, H.; WOODS, J. W. *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing*. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. ISBN 0-13-020071-9.

STARK, H.; YANG, Y. *Vector Space Projections - A Numerical Approach to Signal and Image Processing, Neural Nets, and Optics*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1998.

TIPNIS, S. et al. Iterative reconstruction in image space (iris) and lesion detection in abdominal ct. In: SAMEI, E.; PELC, N. J. (Ed.). [S.l.]: SPIE, 2010. v. 7622, n. 1.

WANG, J. et al. Noise reduction for low-dose single-slice helical ct sinograms. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, v. 53, n. 3, p. 1230–1237, june 2006.

WANG, J. et al. Penalized weighted least-squares approach to sinogram noise reduction and image reconstruction for low-dose x-ray computed tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 25, n. 10, p. 1272–1283, october 2006.

WANG, J. et al. Multiscale penalized weighted least-squares sinogram restoration for low-dose x-ray computed tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v. 55, n. 3, p. 1022–1031, march 2008.

WANG, Z.; BOVIK, A. Mean squared error: Love it or leave it? *IEEE Signal Processing Magazine*, n. 98, p. 98–117, 2009.

WANG, Z. et al. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 13, n. 4, p. 600–612, 2004.

---

WOLFRAM ALPHA. *Página da Web*. 2010. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html>>. Acesso em: 29 de janeiro de 2010.

# Apêndice A

## Desenvolvimento dos Estimadores MAP

Neste Apêndice será descrito o desenvolvimento dos estimadores MAP. A formulação do estimador MAP é dada pela equação A.1, onde  $p(y|g)$  será substituído pela distribuição de Poisson. A informação *a priori*  $f(g)$ , será substituída por uma densidade de probabilidade.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln [p(y|g)f(g)] = 0 \quad (\text{A.1})$$

Considerando que algumas densidades podem estender sua área para negativa, multiplicamos a fórmula de Bayes, pelo função unitária  $u(g)$ . Esta função retorna 1 para valores de entrada positivos e 0 para valores de entrada negativos. No desenvolvimento dos estimadores esta função não teve influência nos resultados.

Os cálculos realizados para chegar aos estimadores foram conferidos pelo *toolbox* de matemática simbólica do MATLAB.

### A.1 Densidade Gaussiana

Considerando que as projeções possuem densidade de probabilidade Gaussiana, a equação da fórmula de Bayes pode ser representada pela equação A.2.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g}g^y}{y!} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{g - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (\text{A.2})$$

Com o objetivo de simplificar a expressão, toma-se o logaritmo da mesma, o que resulta na equação A.3.

$$\ln f(g|y) = -g + y \ln g - \ln y! - \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2} \left( \frac{g - \mu}{\sigma} \right)^2 \quad (\text{A.3})$$

Tomando a derivada em relação a  $g$ , obtém-se a equação A.4.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = -1 + \frac{y}{g} - \frac{g - \mu}{\sigma^2} \quad (\text{A.4})$$

Após igualar a equação a zero chegamos à função A.5.

$$g^2 + g(\sigma^2 - \mu) - y\sigma^2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

Aplicando a fórmula para a resolução de equações do segundo grau chegamos à fórmula do estimador MAP com a densidade Gaussiana como informação *a priori*, dada pela equação A.6.

$$\hat{g} = \frac{\mu - \sigma^2 + \sqrt{(\sigma^2 - \mu)^2 + 4\sigma^2 y}}{2} \quad (\text{A.6})$$

Os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  da densidade Gaussiana se referem à média amostral e à variância amostral, respectivamente.

## A.2 Densidade Gama

Utilizando a densidade probabilidade Gama com informação *a priori*, a equação da fórmula de Bayes pode ser representada pela equação A.7.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} (\beta g)^{\alpha-1} e^{-\beta g} \quad (\text{A.7})$$

Aplicando a função logaritmo na equação A.7, chegamos à equação A.8.

$$\ln f(g|y) = -g + y \ln g - \ln y! + \ln \beta - \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \ln(\beta g) - \beta g \quad (\text{A.8})$$

Derivando a expressão A.8 em relação a  $g$  obtém-se a equação A.9.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = -1 + \frac{y}{g} + \frac{\alpha - 1}{g} - \beta \quad (\text{A.9})$$

Após igualar a equação a zero chegamos a equação A.10.

$$-g(1 + \beta) + y + \alpha - 1 = 0 \quad (\text{A.10})$$

O estimador MAP é dado pela equação A.11.

$$\hat{g} = \frac{y + \alpha - 1}{\beta + 1} \quad (\text{A.11})$$

### A.2.1 Estimação dos parâmetros para a densidade Gama

A média e a variância da densidade Gama são mostradas na equação A.12.

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta} \quad \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (\text{A.12})$$

Isolando o parâmetro  $\beta$  na equação da média e substituindo na equação da variância chegamos ao parâmetro  $\alpha$ , conforme demonstrado a equação A.13.

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu} \quad \sigma^2 = \alpha \frac{\mu^2}{\alpha^2} \quad \alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo o parâmetro  $\alpha$  encontrado na equação A.13 na equação da média da densidade Gama e trabalhando algebricamente chegamos ao parâmetro  $\beta$ , conforme exibido na equação A.14.

$$\beta = \frac{\alpha}{\mu} \quad \beta = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \frac{1}{\mu} \quad \beta = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (\text{A.14})$$

## A.3 Densidade Beta

Utilizando a densidade probabilidade Beta como informação *a priori*, a equação da fórmula de Bayes pode ser representada pela equação A.16. Como a densidade Beta é definida no intervalo entre 0 e 1, temos que aplicar uma função de variável aleatória na densidade, conforme mostra a equação A.15,

$$x = \Delta g \quad f(x) = \frac{1}{\Delta} f_g\left(\frac{x}{\Delta}\right) \quad (\text{A.15})$$

onde  $\Delta$  representa o maior valor que um ponto no sinal pode assumir.

$$f(x|y) = \frac{e^{-x} g^y}{y!} \frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\Delta}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right)^{\beta-1} \quad (\text{A.16})$$

Com o objetivo de simplificar a expressão, toma-se o logaritmo da mesma, o que resulta na equação A.17.

$$\begin{aligned} \ln f(x|y) &= -x + y \ln x - \ln y! + \ln \Gamma(\beta + \alpha) - \ln [\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)] \\ &\quad - \ln \Delta + (\alpha - 1) \ln \left( \frac{x}{\Delta} \right) + (\beta - 1) \ln \left( 1 - \frac{x}{\Delta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Derivando a equação A.17 em relação a  $g$  obtém-se a equação A.18.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = -1 + \frac{y}{g} - \frac{\alpha - 1}{x} + \frac{1 - \beta}{\Delta - x} \quad (\text{A.18})$$

Após igualar a expressão A.18 a zero chegamos à equação A.19.

$$x^2 + x(-y - \alpha - \beta - \Delta + 2) + \Delta(y + \alpha - 1) = 0 \quad (\text{A.19})$$

Utilizando a fórmula para a resolução de equações do segundo grau chegamos à equação A.20, que define o estimador MAP que utiliza como informação *a priori* a densidade Beta.

$$\hat{x} = \frac{y + \alpha + \beta + \Delta - 2 + \sqrt{(-y - \alpha - \beta - \Delta + 2)^2 - 4\Delta(y + \alpha - 1)}}{2} \quad (\text{A.20})$$

### A.3.1 Estimação dos parâmetros para a densidade Beta

Para a estimação correta dos parâmetros da densidade Beta a partir do momentos amostrais precisamos multiplicar a média da densidade por  $\Delta$  (equação A.21) e a variância por  $\Delta^2$  (equação A.22).

$$\mu(x) = \mu(g)\Delta \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma^2(x) = \sigma^2(g)\Delta^2 \quad (\text{A.22})$$

$$\mu = \left[ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right] \Delta \quad (\text{A.23})$$

$$\sigma^2 = \left[ \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \right] \Delta^2 \quad (\text{A.24})$$

Os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são obtidos através do sistema formado pelas equações A.23 e A.24. Isolando  $\beta$  na equação A.23 é obtida a expressão A.25.

$$\mu = \frac{\alpha\Delta}{\alpha + \beta} \quad (\alpha + \beta)\mu = \alpha\Delta \quad \beta = \frac{\alpha\Delta}{\mu} - \alpha \quad (\text{A.25})$$

Substituindo a última expressão da equação A.25 na equação A.24 que corresponde à variância da densidade Beta, chegamos à equação A.26.

$$\sigma^2 = \frac{\alpha \left( \frac{\alpha\Delta}{\mu} - \alpha \right) \Delta^2}{\left( \alpha + \frac{\alpha\Delta}{\mu} - \alpha \right)^2 \left( \alpha + \frac{\alpha\Delta}{\mu} - \alpha + 1 \right)} \quad (\text{A.26})$$

Trabalhando algebricamente (equação A.27) e isolando o parâmetro  $\alpha$ , chegamos à equação A.28.

$$\sigma^2 = \frac{\alpha^2 \Delta^3 - \alpha^2 \Delta^2 \mu}{\mu} \frac{\mu^3}{\mu \alpha^2 \Delta^2 + \alpha^3 \Delta^3} \quad (\text{A.27})$$

$$\hat{\alpha} = \frac{-\mu^3 + \mu^2 \Delta - \mu \sigma^2}{\sigma^2 \Delta} \quad (\text{A.28})$$

Para obter a estimativa do parâmetro  $\beta$ , substituímos o parâmetro  $\alpha$  dado pela equação A.28, na última expressão da equação A.25, conforme mostra a equação A.29.

$$\beta = \left[ \frac{-\mu^3 + \mu^2 \Delta - \mu \sigma^2}{\sigma^2 \Delta} \right] \frac{\Delta}{\mu} - \left[ \frac{-\mu^3 + \mu^2 \Delta - \mu \sigma^2}{\sigma^2 \Delta} \right] \quad (\text{A.29})$$

Trabalhando algebricamente chegamos a equação A.30.

$$\beta = \frac{-\mu^2 \Delta + \mu \Delta^2 - \sigma^2 \Delta + \mu^3 - \mu^2 \Delta + \mu \sigma^2}{\sigma^2 \Delta} \quad (\text{A.30})$$

A estimação do parametro  $\beta$ , é dada pela equação A.31.

$$\hat{\beta} = \frac{(-\sigma^2 - \mu^2 + \mu \Delta)(-\mu + \Delta)}{\sigma^2 \Delta} \quad (\text{A.31})$$

## A.4 Densidade Log-Normal

Utilizando a densidade probabilidade Log-Normal como informação *a priori*, a equação da fórmula de Bayes pode ser representada pela equação A.32.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \frac{1}{g \sqrt{2\pi\beta}} \exp \left[ -\frac{(\ln(g) - \alpha)^2}{2\beta} \right] \quad (\text{A.32})$$

Com o objetivo de simplificar a expressão, toma-se o logaritmo da mesma, o que resulta na equação A.33.

$$\ln f(g|y) = -g + y \ln g - \ln y! - \ln g \sqrt{2\pi\beta} - \frac{(\ln(g) - \alpha)^2}{2\beta} \quad (\text{A.33})$$

Derivando em relação a  $g$  obtém-se a equação A.34.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = -1 + \frac{y}{g} - \frac{1}{g} - \frac{\ln(g) - \alpha}{\beta g} \quad (\text{A.34})$$

Após igualar a equação a zero chegamos à função A.35.

$$-\beta g - \ln(g) + \beta(y - 1) + \alpha = 0 \quad (\text{A.35})$$

Utilizando a função LambertW chegamos à formula do estimador MAP com a densidade Log-Normal como informação *a priori*, dada pela equação A.36.

$$\hat{g} = \frac{W(\beta e^{y\beta - \beta + \alpha})}{\beta} \quad (\text{A.36})$$

A função LambertW, também chamada de função Omega é a função inversa da equação A.37. Esta função não pode ser expressa em termo de funções elementares (WOLFRAM, 2010).

$$f(W) = We^W \quad (\text{A.37})$$

### A.4.1 Estimação dos parâmetros da densidade Log-Normal

A partir da equação da média de densidade Log-Normal isolamos o parâmetro  $\alpha$ , conforme as equações A.38.

$$\mu = e^{\alpha + \frac{\beta}{2}} \quad \alpha = \ln \mu - \frac{\beta}{2} \quad (\text{A.38})$$

Em seguida,  $\alpha$  é substituído na fórmula da variância da densidade Log-Normal, mostrado nas equações A.39.

$$\sigma^2 = e^{2\alpha + \beta}(e^\beta - 1) \quad \sigma^2 = e^{2(\ln \mu - \frac{\beta}{2}) + \beta}(e^\beta - 1) \quad \sigma^2 = e^{2\ln \mu + \beta} - e^{2\ln \mu} \quad (\text{A.39})$$

A partir da última expressão da equação A.39 isola-se o parâmetro  $\beta$ , obtendo assim a fórmula da sua estimativa, conforme as equações A.40.

$$\beta = -2 \ln \mu + \ln(\sigma^2 + \mu^2) \quad \beta = \ln \left[ \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2} \right] \quad (\text{A.40})$$

Substituindo a fórmula do valor estimado de  $\beta$  na equação A.38, chegamos à formulação para a estimação do parâmetro  $\alpha$ , mostrado na equação A.41.

$$\alpha = \ln \mu - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2} \right] \quad \alpha = \ln \left[ \frac{\mu^2}{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}} \right] \quad (\text{A.41})$$

## A.5 Densidade Nakagami

Considerando que as projeções possuem densidade de probabilidade Nakagami, a equação da fórmula de Bayes pode ser representada pela equação A.42.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m} g^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} g^2\right) \quad (\text{A.42})$$

Aplicando a função logaritmo na equação A.42, chegamos à equação A.43.

$$\ln f(g|y) = -g + y \ln g - \ln y! + \ln \left[ \frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m} \right] + (2m-1) \ln g - \frac{m}{\Omega} g^2 \quad (\text{A.43})$$

Derivando em relação a  $g$  obtém-se a equação A.44.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = -1 + \frac{y}{g} + \frac{2m-1}{g} - \frac{2g^2 m}{\Omega} = 0 \quad (\text{A.44})$$

Após igualar a equação a zero chegamos à função A.45.

$$g^2(-2m) - g\Omega + \Omega(y + 2m - 1) = 0 \quad (\text{A.45})$$

Aplicando a fórmula para a resolução de equações do segundo grau chegamos a equação do estimador MAP com a densidade Nakagami como informação *a priori* dada pela equação A.46.

$$\hat{g} = \frac{\Omega - \sqrt{\Omega^2 + 8m\Omega(y + 2m - 1)}}{-4m} \quad (\text{A.46})$$

### A.5.1 Estimação dos parâmetros da densidade Nakagami

Uma forma de obter as estimativas dos parâmetros da densidade Nakagami a partir dos momentos amostrais pode ser encontrada em (GAEDDERT & ANNAMALAI, 2005) e

(PROAKIS, 2000). O momento de ordem  $k$  é definido segundo a equação A.47.

$$E(g^k) = \frac{\Gamma(m + \frac{k}{2})}{\Gamma(m)} \left( \frac{\Omega}{m} \right)^{\frac{k}{2}} \quad (\text{A.47})$$

Utilizando o parâmetro  $k$  equação A.47 igual a 2, chegamos à estimativa do parametro  $\Omega$ , conforme exemplificado na equação A.48.

$$\hat{\Omega} = E(g^2) \quad (\text{A.48})$$

A equação A.48 pode ser computada calculando a média da observação elevada ao quadrado (equação A.49).

$$\hat{\Omega} = \mu_{g^2} \quad (\text{A.49})$$

A partir da estimativa do parâmetro  $\Omega$  o parâmetro  $m$  é obtido segundo a equação A.50 (PROAKIS, 2000).

$$\hat{m} = \frac{\Omega^2}{E[(R^2 - \Omega)^2]} \quad (\text{A.50})$$

Para computar a equação A.50 pode-se substituir o denominador pela variância calculada a partir das observação elevada ao quadrado, conforme mostra a equação A.51.

$$\hat{m} = \frac{\mu_{g^2}^2}{\sigma_{g^2}^2} \quad (\text{A.51})$$

## A.6 Densidade Gaussiana Inversa

Considerando que as projeções possuem densidade de probabilidade Gaussiana Inversa, a equação da fórmula de Bayes pode ser representada pela equação A.52.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \left[ \frac{\lambda}{2\pi g^3} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{-\lambda(g - \mu)^2}{2\mu^2 g} \right] \quad (\text{A.52})$$

Com o objetivo de simplificar a expressão, toma-se o logaritmo da mesma, o que resulta na equação A.53.

$$\ln f(g|y) = -g + y \ln g - \ln y! + \frac{1}{2} \ln \lambda - \frac{1}{2} \ln(2\pi g^3) - \frac{\lambda(g - \mu)^2}{2\mu^2 g} \quad (\text{A.53})$$

Derivando em relação a  $g$  obtém-se a equação A.54.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = -1 + \frac{y}{g} - \frac{3}{2g} - \frac{\lambda(g - \mu)}{\mu^2 g} + \frac{\lambda(g - \mu)^2}{2g^2 \mu^2} \quad (\text{A.54})$$

Após igualar a equação a zero chegamos a função A.55.

$$g^2(2\mu^2 + \lambda) + g\mu^2(-2y + 3) - \mu^2\lambda = 0 \quad (\text{A.55})$$

Aplicando a fórmula para a resolução de equações do segundo grau chegamos à equação do estimador MAP com a densidade Gaussiana Inversa como informação *a priori*, dado pela equação A.56.

$$\hat{g} = \frac{\mu \left[ 2\mu y - 3\mu + \sqrt{(2\mu y - 3\mu)^2 + 4\lambda(\lambda + 2\mu^2)} \right]}{4\mu^2 + 2\lambda} \quad (\text{A.56})$$

### A.6.1 Estimação dos parâmetros da densidade Gaussiana Inversa

O parâmetro  $\mu$  da densidade Gaussiana Inversa pode ser estimado a partir da média amostral. Já o parâmetro  $\lambda$  pode ser obtido trabalhando algebricamente a equação da variância da densidade, conforme mostra a equação A.57.

$$\sigma^2 = \frac{\mu^3}{\lambda} \quad \lambda = \frac{\mu^3}{\sigma^2} \quad (\text{A.57})$$

## A.7 Densidade Weibull

Utilizando a densidade probabilidade Weibull como informação *a priori*, a fórmula de Bayes pode ser representada pela equação A.58.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{g}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{g}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (\text{A.58})$$

Com o objetivo de simplificar a expressão, toma-se o logaritmo da mesma, o que resulta na equação A.59.

$$\ln f(g|y) = -g + y \ln g - \ln y! + \ln \frac{\beta}{\eta} + (\beta - 1) \ln g - (\beta - 1) \ln \eta - \left( \frac{g}{\eta} \right)^\beta \quad (\text{A.59})$$

Derivando em relação a  $g$  obtém-se a equação A.60.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = -1 + \frac{y}{g} + \frac{\beta - 1}{g} - \frac{\beta g^{\beta-1}}{\eta^\beta} \quad (\text{A.60})$$

Igualando a 0 a equação A.60 chegamos à função A.61. Como não é possível isolar  $g$ , utilizaremos um método numérico para a aproximação do valor de  $g$ .

$$-\beta g^\beta - \eta^\beta g + \eta^\beta (y + \beta - 1) = 0 \quad (\text{A.61})$$

Empregamos para fazer a estimativa de  $g$  o método de Newton-Raphson definido pela equação A.62.

$$\hat{g}_{n+1} = \hat{g}_n - \frac{f(\hat{g}_n)}{f'(\hat{g}_n)} \quad (\text{A.62})$$

onde  $f(\hat{g}_n)$  será substituída pela equação A.61.  $f'(\hat{g}_n)$  corresponde a derivada da função A.61, dada pela equação A.63. Após as substituições chegamos a equação A.64.

$$f'(g) = -\beta^2 g^{\beta-1} - \eta^\beta \quad (\text{A.63})$$

$$\hat{g}_{n+1} = \hat{g}_n - \frac{-\beta g^\beta + \eta^\beta (-\hat{g}_n + y + \beta - 1)}{-\beta^2 g^{\beta-1} - \eta^\beta} \quad (\text{A.64})$$

A estimativa inicial para  $\hat{g}_n$  é feita pela média amostral. A convergência do método ocorre quando o valor de  $\hat{g}_{n+1}$  se estabiliza.

Em algumas situações quando valor de  $\beta$  é muito grande não é possível computar a equação A.64. Então, dividindo a equação A.61 e A.63 por  $(g\eta)^{\frac{\beta}{2}}$  e reorganizando os termos chegamos à equação A.65. As equações A.64 e A.65 são equivalentes.

$$\hat{g}_{n+1} = \hat{g}_n - \frac{\left[\frac{g}{\eta}\right]^{\frac{\beta}{2}} (-\beta) + \left[\frac{\eta}{g}\right]^{\frac{\beta}{2}} (-\hat{g}_n + y + \beta - 1)}{\left[\frac{g}{\eta}\right]^{\frac{\beta}{2}} (-\beta^2 g^{-1}) - \left[\frac{\eta}{g}\right]^{\frac{\beta}{2}}} \quad (\text{A.65})$$

Desta forma os termos  $\left[\frac{g}{\eta}\right]^{\frac{\beta}{2}}$  e  $\left[\frac{\eta}{g}\right]^{\frac{\beta}{2}}$  não assumem valores tão grandes quando  $g^\beta$  e  $\eta^\beta$ .

### A.7.1 Estimação dos parâmetros da densidade Weibull

Não existe uma forma analítica de isolar os parâmetros destas equações porque o parâmetro  $\beta$  está dentro da função Gama, conforme mostram as equações da média (A.66)

e da variância (equação A.67) da densidade Weibull.

$$\mu = \eta \Gamma \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) \quad (\text{A.66})$$

$$\sigma^2 = \eta^2 \left[ \Gamma \left( \frac{2}{\beta} + 1 \right) - \Gamma^2 \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) \right] \quad (\text{A.67})$$

Uma possibilidade de estimar os parâmetros é fazer uma aproximação utilizando o coeficiente variacional, conforme utilizado no artigo de (GUERIN; DUMON & HAMBLLI, 2001). Este coeficiente é obtido pela divisão do desvio padrão pela média, descrito pela equação A.68

$$\delta = \frac{\sigma}{\mu} \quad (\text{A.68})$$

Substituindo os momentos amostrais da distribuição Weibull (equações 3.36 e 3.37) na equação A.68, utilizamos a variância e a média ao quadrado e chegamos à equação A.69:

$$\delta^2 = \frac{\Gamma \left( 1 + \frac{2}{\beta} \right)}{\Gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right)} - 1 \quad (\text{A.69})$$

Foi gerado um vetor com valores de  $\delta^2$  para um intervalo de valores de entrada simulados para  $\beta$ . Utilizamos um intervalo de 0 a 300, com variação de 0.01. Agora obtemos o valor do coeficiente variacional obtido pela média ao quadrado e a variância medidos no sinal. No vetor gerado, escolhemos para  $\hat{\beta}$  o valor que gerou o  $\delta^2$  que mais se aproxima do coeficiente variacional obtido nas medidas na amostra.

Quando conhecemos o valor estimado de  $\beta$  podemos chegar ao valor de  $\eta$  a partir da equação da média da densidade Weibull, exemplificado nas equações A.70.

$$\mu = \eta \Gamma \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) \quad \hat{\eta} = \frac{\mu}{\Gamma \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right)} \quad (\text{A.70})$$

## A.8 Densidade Chi-Quadrado

Utilizando a densidade de probabilidade Chi-Quadrado como informação *a priori*, a equação da fórmula de Bayes pode ser representada pela equação A.71.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g}g^y}{y!} \frac{1}{2^{\frac{\mu}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} g^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\frac{g}{2}} \quad (\text{A.71})$$

Com o objetivo de simplificar a expressão, toma-se o logaritmo da mesma, o que resulta na equação A.72.

$$\ln f(g|y) = -g + y \ln g - \ln y! + \ln \left[ \frac{1}{2^{\frac{\mu}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \right] + \left( \frac{\mu}{2} - 1 \right) \ln g - \frac{g}{2} \quad (\text{A.72})$$

Derivando em relação a  $g$  obtém-se a equação A.73.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = -1 + \frac{y}{g} + \frac{\mu}{2g} - \frac{1}{g} - \frac{1}{2} \quad (\text{A.73})$$

Após igualar a equação a zero chegamos a função A.74.

$$-3g + 2y + \mu - 2 = 0 \quad (\text{A.74})$$

O estimador MAP é dado pela equação A.75.

$$\hat{g} = \frac{2y + \mu - 2}{3} \quad (\text{A.75})$$

O único parametro do estimador  $\mu$ , representa a média da densidade e é calculado pela média amostral.

## A.9 Densidade Rayleigh

Utilizando a densidade probabilidade Rayleigh como informação *a priori*, a equação da fórmula de Bayes pode ser representada pela equação A.76.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g}g^y}{y!} \frac{g}{\lambda^2} \exp\left(\frac{-g^2}{2\lambda^2}\right) \quad (\text{A.76})$$

Aplicando a função logaritmo na equação A.76, chegamos à equação A.77.

$$\ln f(g|y) = -g + y \ln g - \ln y! + \ln g - \ln \lambda^2 - \frac{g^2}{2\lambda^2} \quad (\text{A.77})$$

Tomando a derivada em relação a  $g$ , buscando maximizá-la, obtém-se a equação A.78.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = -1 + \frac{y}{g} + \frac{1}{g} - \frac{g}{\lambda^2} \quad (\text{A.78})$$

Após igualar a equação a zero chegamos à função A.79.

$$-g^2 - \lambda^2 g + \lambda^2(y + 1) = 0 \quad (\text{A.79})$$

Aplicando a fórmula para a resolução de equações do segundo grau obtém-se a equação do estimador MAP com a densidade Rayleigh como informação *a priori* A.80.

$$\hat{g} = \frac{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 + 4\lambda^2(y + 1)}}{-2} \quad (\text{A.80})$$

### A.9.1 Estimação dos parâmetros da densidade Rayleigh

A estimativa do parâmetro  $\lambda$  da densidade Rayleigh pode ser feita simplesmente isolando este parâmetro na equação da média da densidade, conforme mostra a equação A.81.

$$\mu = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \hat{\lambda} = \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (\text{A.81})$$

## A.10 Densidade Exponencial

Utilizando a densidade probabilidade Exponencial como informação *a priori*, a equação da fórmula de Bayes pode ser representada pela equação A.82.

$$f(g|y) = \frac{e^{-g} g^y}{y!} \lambda e^{-\lambda g} \quad (\text{A.82})$$

Aplicando a função logaritmo na equação A.82, chegamos à equação A.83.

$$\ln f(g|y) = -g + y \ln g - \ln y! + \ln \lambda - \lambda g \quad (\text{A.83})$$

Tomando a derivada em relação a  $g$ , buscando maximizá-la, obtém-se a equação A.84.

$$\frac{\partial}{\partial g} \ln[f(g|y)] = -1 + \frac{y}{g} - \lambda \quad (\text{A.84})$$

Após igualar a equação a zero chegamos à função A.85.

$$-g(\lambda + 1) + y = 0 \quad (\text{A.85})$$

O estimador MAP é dado pela equação A.86.

$$\hat{g} = \frac{y}{1 + \lambda} \quad (\text{A.86})$$

### A.10.1 Estimação dos parâmetros da densidade Exponencial

A estimativa do parâmetro  $\lambda$  da densidade Exponencial pode ser feita simplesmente isolando este parâmetro na equação da média da densidade, conforme mostra a equação A.87.

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad \lambda = \frac{1}{\mu} \quad (\text{A.87})$$