UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

THAÍS DE OLIVEIRA

TRIGONOMETRIA:

A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos.

SÃO CARLOS
2010

TRIGONOMETRIA:

A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

THAÍS DE OLIVEIRA

TRIGONOMETRIA:

A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob orientação do Professor Doutor João Carlos Vieira Sampaio

SÃO CARLOS
2010

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

Oliveira, Thaís de.
O48tm Trigonometria: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos / Thaís de Oliveira. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
177 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Trigonometria. 3. Prática docente. 4. Aprendizagem. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
DM - UFSCar

Prof. Dr. Cláudio Carlos Dias
DMAT - UFRN

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
DM - UFSCar

Dedicatória

A meu noivo Antonio, pelo amor, dedicação e compreensão durante toda a realização deste trabalho e, especialmente a duas pessoas a quem devo minha vida e todas as minhas realizações, meus pais Arnaldo e Cristina.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado a oportunidade e força para a realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Professor Doutor João Carlos Vieira Sampaio, pela paciência, dedicação, apoio e competência. Sua contribuição foi essencial para a realização deste trabalho.

A todos os Professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da UFSCar, que com seus ensinamentos deram contribuição significativa para minha formação, especialmente ao Professor Doutor Pedro Luiz Aparecido Malagutti por compartilhar idéias e ter muita atenção com o meu trabalho.

A todos os colegas do mestrado, Clóvis, Danilo, Jayme, Luciano, Mário, Patrícia, Renato, Rodrigo, Rita, Santinho e Thiago, onde a colaboração, amizade e companheirismo se fizeram presente de forma inesquecível e, cada um contribuiu de forma muito significativa não só para a minha vida profissional, mas também, pessoal.

Ao secretário do PPGECE, Júnior, que sempre esteve pronto para nos ajudar.

Aos meus colegas de profissão que incentivaram e dividiram comigo muito de sua experiência, especialmente ao Seu Gilson e Dona Suely, diretores das escolas em que trabalho, que compartilharam idéias e investiram no meu trabalho.

A todos os meus alunos que sempre foram inspiração para o meu trabalho e, principalmente, a todos os que se comprometeram com as atividades propostas nesta dissertação.

Aos meus pais, Arnaldo e Cristina, por sempre me ensinar o caminho correto para percorrer as trilhas da vida.

A minha irmã Tábata, que sempre me incentivou e me apoiou principalmente nos momentos mais difíceis.

Ao meu noivo Antonio pelo amor e pela paciência com os meus descontroles durante esses dois anos.

Muito obrigada a todos.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi de investigar uma abordagem de ensino da Trigonometria desde o triângulo retângulo até sua forma analítica no Ciclo Trigonométrico. Pretendeu-se formular atividades com diferentes metodologias que relacionassem tanto a necessidade do estudo da Trigonometria no Triângulo Retângulo, quanto sua relação com o Ciclo Trigonométrico gerando as funções Trigonométricas. Pretendeu-se ainda contextualizar as diversas aplicações destas funções. A hipótese de trabalho é que se pode construir uma aprendizagem significativa para o aluno por meio de novos conhecimentos do professor. Tais conhecimentos permitem ao professor transcender os limites da lousa e giz e trabalhar com dinamismo e movimento envolvendo os elementos da Trigonometria. Para tanto, elaborou-se quatro atividades que exploram a Trigonometria e, construiu-se uma sequência de aplicativos que usam o software livre de Geometria dinâmica GeoGebra fundamentando o Ciclo e as Funções Trigonométricas. A maioria destas atividades foram aplicadas nos colégios de nível médio nos quais a pesquisadora é professora.

Palavras-Chave: Ensino de Matemática. Trigonometria. Prática docente. Aprendizagem significativa.

ABSTRACT

The aim of this work was to investigate an approach to the teaching of Trigonometry from the right triangle to its analytical form in the Unit Circle. In the work, it was intended to formulate activities with different methodologies, which related the necessity of the study of Trigonometry of the right triangle, as well as its relation with the trigonometric unit circle, generating the trigonometric functions. It was also intended to contextualize the different applications of these functions. The hypothesis of this work is that a significant learning for the students can be constructed by means of a new knowledge of the teacher. Such knowledge allows the teacher to exceed the limits of the blackboard and chalk, and to work with dynamism and movement involving the elements of Trigonometry. For such, four activities that explore Trigonometry were elaborated, and a sequence of applets was constructed, about the Unit Circle and the Trigonometric Functions, based on the free software of dynamic geometry GeoGebra. The majority of these activities has been applied in high schools where the author is a teacher.

Keywords: Teaching of Mathematics. Trigonometry. Teaching Practice. Significant learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho se inicia tomando como referência a própria prática da professora autora, Thais de Oliveira, que faz a reflexão e análise da sua própria prática docente como professora-pesquisadora.

Levando em consideração a experiência da professora no Ensino Médio, tanto em escola pública quanto particular, observou-se a dificuldade que os alunos têm em adquirir significado sobre os elementos da Trigonometria. Muitas vezes, os alunos se referem ao tema como um amontoado de fórmulas sem significado algum.

Nas escolas de referência desta pesquisa, Colégios Objetivo de Mogi Mirim e de Mogi Guaçu, usa-se material apostilado que propõe o estudo da Trigonometria na primeira série do Ensino Médio e sua revisão na terceira série. No primeiro momento os alunos estão em processo de adaptação ao Ensino Médio e é proposto um estudo das estruturas básicas que envolvem a Trigonometria (Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, Ciclo Trigonométrico e as Funções Trigonométricas). Na última série do Ensino Médio é proposta uma rápida revisão e, a partir daí, são exigidos conceitos mais aprofundados sobre o tema, principalmente com o foco em vestibulares, tornando o trabalho pouco proveitoso caso o aluno não tenha aprendido os conceitos básicos anteriormente.

A observação de materiais didáticos e de propostas pedagógicas sobre o tema permitiu a reflexão sobre a dificuldade que os alunos encontram em dar significado a estas relações trigonométricas, talvez pela maneira expositiva e sem movimento da exploração do tema, talvez pela falta de preparação do professor em explorar as diversas situações experimentais propostas. Vale ressaltar que nos referimos a essa falta de preparação por, na maioria dos experimentos propostos termos a geração de erros por manipulação imprecisa de objetos.

O tema escolhido tem uma rica abordagem didática sobre assuntos do cotidiano, contextos da História da Matemática e em Experimentos Práticos. Há, também, uma contribuição significativa da informática e do uso de tecnologia em sala de aula. Neste trabalho foram estruturadas algumas atividades, com diferentes metodologias, que abordam os diversos contextos da Trigonometria:

- Em uma primeira atividade optou-se pelo estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo através de manipulação de triângulos semelhantes, coleta de dados, registro em tabelas e confronto dos resultados obtidos com as Tábuas Trigonométricas;
- Na segunda atividade, foi escolhido fazer experimento prático com a manipulação de um objeto rústico chamado Inclinômetro para a exploração de alturas inacessíveis;
- A terceira atividade confronta a necessidade de usar o radiano como unidade de medida de ângulos e arcos. A transição é explorada através da quantidade de raios que cabem no comprimento da circunferência.
- A quarta atividade promove a transição das Funções Trigonométricas do Ciclo Trigonométrico para o Plano Cartesiano através da manipulação de materiais concretos como barbante e canudos para a construção do gráfico da Função Seno.
- Ainda há o momento a produção de aplicativos que relaciona a Trigonometria do triângulo retângulo, o Ciclo trigonométrico e as Funções Trigonométricas usando Geometria Dinâmica e a tecnologia disponível na sala de aula.

Todas as atividades foram aplicadas durante as aulas da professora-pesquisadora que adaptou este trabalho ao conteúdo programático das escolas. Apenas algumas são relatadas neste trabalho.

A validação da sequência de atividades aplicadas foi feita pelo confronto entre a análise das dificuldades detectadas sobre o tema e a opinião de alunos e professores referente à experiência e contato com as atividades. A partir disso e da confirmação das hipóteses de pesquisa, foi possível responder à questão de pesquisa: “Pode-se construir uma aprendizagem significativa para o aluno, no conteúdo de Trigonometria, por meio de novos conhecimentos do professor?”

Para estruturar a dissertação, apresentam-se, no primeiro capítulo, os referenciais teóricos com o objetivo de refletir sobre a necessidade da reformulação da educação e da prática docente. O foco é desenvolver habilidades e competências nos alunos da escola básica e, a partir do conteúdo e do conhecimento do professor promover uma aprendizagem significativa sobre Trigonometria.

No segundo capítulo tem-se um estudo epistemológico da Trigonometria. Este estudo ampara a construção da sequência de atividades e a comparação entre a sequência histórica e a sequência didática escolhida que nem sempre coincidem. Exemplo: ensinam-se, primeiramente, as razões trigonométricas no triângulo retângulo e, posteriormente, as relações trigonométricas no ciclo, porém historicamente inicia-se o estudo da trigonometria pelas cordas do círculo.

No terceiro capítulo propõe-se um referencial teórico que envolve tecnologia e a sala de aula, fundamentando, assim, as propostas didáticas que envolvem essas dinâmicas atuais e a prática e formação do professor frente a esse referencial.

No quarto capítulo são relatadas três atividades aplicadas com suas respectivas descrições e análises: o procedimento metodológico do trabalho de campo, os procedimentos didático-pedagógicos das atividades em classe, as escolhas feitas e os motivos para tal em cada atividade e os resultados obtidos sob diferentes pontos de vista. Ainda neste capítulo são relatadas as experiências com o software GeoGebra e a análise feita sob o ponto de vista de alunos que tiveram contato com esses aplicativos produzidos.

Vale ressaltar que todos os produtos obtidos com essa dissertação de mestrado foram publicados como aulas no Portal do Professor do MEC, para divulgação e disponibilização do material a fim de contribuir para o Ensino de Trigonometria nas escolas básicas.

CAPÍTULO 1

O Currículo Escolar e a Prática Docente

1.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo descreve e contextualiza a fundamentação teórica escolhida como referência de metodologia desta dissertação: construir uma prática docente diferenciada com o desafio de construir uma metodologia a partir de um determinado conteúdo, desenvolvendo muitos dos diferenciais pedagógicos propostos para o Ensino de Matemática, principalmente no Ensino Médio.

Esta proposta parte dos pressupostos descritos nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio[1] (PCNEM) que objetiva para o professor as habilidades e competências que seu aluno deve adquirir ao ser formado na educação básica e, discute a condução do aprendizado com referencias a uma teoria que propõe o desenvolvimento do potencial pedagógico a partir do conhecimento do próprio professor, trazida por Lee S. Shulman (SHULMAN 1986).

1.2 TRANSFORMAÇÕES NA PROPOSTA DE ENSINO

Frente às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, as leis e diretrizes que redirecionam a educação básica se adequam com o intuito de repensar sobre suas estruturas. Nos últimos anos, principalmente em 2009, pôde-se perceber uma

[1] Esta referência do PCNEM é uma proposta para o Ensino Médio que relaciona as competências indicadas na Base Nacional Comum, correspondentes à área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e pode ser consultada pelo site http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf.

corrente de mudanças acontecendo, principalmente no âmbito dos vestibulares e do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) que são os principais indicadores de como está a educação no Brasil.

Segundo as informações do PCNEM, o cenário escolar era dominado por um ensino tradicional. A partir da promulgação da Lei de Diretrizes de Bases de 1961, LDB 4024/61, houve esforços para renovação do ensino propondo uma mudança de currículo. Mudança essa que propunha uma reestruturação do conhecimento científico para as novas concepções educacionais, deslocando o eixo da questão pedagógica, dos aspectos puramente lógicos para aspectos psicológicos, valorizando a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem.

Essa necessidade também teve influência do surgimento da Matemática Moderna nesta mesma época, que, além de propor uma reformulação acadêmica do conhecimento matemático, expandiu os centros de Ciências e de Matemática que acabaram contribuindo para uma responsabilidade destes em relação à formação dos docentes das escolas de nível básico, fossem na tradução de projetos já existentes na área e/ou produções próprias.

Portanto, na década de 70, começaram as mudanças no ensino. Há a democratização do pensamento científico propondo que a ciência não seja exclusiva para cientistas e academia, mas sim, faça parte da vida de todos os cidadãos. Assim, há inovação na proposta da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96) onde os objetivos educacionais do Ensino Médio foram interpretados e detalhados para direcionar e organizar o aprendizado.

De maneira geral houve a necessidade de conectar uma matéria a outra propondo um currículo com objetivos educacionais amplos: estrutura em que o conteúdo seja aliado à interdisciplinaridade, à contextualização e, a partir de competências e habilidades definidas, permitir que o aluno saia do Ensino Médio como um cidadão completo (percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente).

Neste contexto não temos mais o Ensino Médio dividido somente por matérias e, sim, por grandes áreas:

- **Linguagens, Códigos e suas Tecnologias**
- **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**

• Ciências Humanas e suas Tecnologias

As três áreas interligam e organizam as diversas disciplinas em uma ação articulada, no interior de cada área e no conjunto das áreas. Essa ação articulada não é compatível com um trabalho solitário, definido independentemente no interior de cada disciplina, como acontecia no antigo ensino de segundo grau – no qual se pressupunha outra etapa formativa na qual os saberes se interligariam e, eventualmente, ganhariam sentido. Agora, a articulação e o sentido dos conhecimentos devem ser garantidos já no ensino médio.

Para completar esse movimento, estabelece-se a estrutura das novas habilidades e competências exigidas para satisfazer as necessidades dessa nova sociedade. Apresentam-se, logo abaixo, as competências e habilidades sugeridas pela Resolução CNE/98:

I. **Representação e comunicação:** Desenvolver a capacidade de comunicação.

• Ler e interpretar textos de interesse científico e tecnológico.

• Interpretar e utilizar diferentes formas de representação (tabelas, gráficos, expressões, ícones...).

• Exprimir-se oralmente com correção e clareza, usando a terminologia correta.

• Produzir textos adequados para relatar experiências, formular dúvidas ou apresentar conclusões.

• Utilizar as tecnologias básicas de redação e informação, como computadores.

• Identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para a produção, análise e interpretação de resultados de processos e experimentos científicos e tecnológicos.

• Identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade.

• Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações e interpretações.

• Analisar qualitativamente dados quantitativos representados gráfica ou algebricamente relacionados a contextos sócio-econômicos, científicos ou cotidianos.

II. **Investigação e compreensão:** Desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções. Desenvolver o raciocínio e a capacidade de aprender.

• Formular questões a partir de situações reais e compreender aquelas já enunciadas.

• Desenvolver modelos explicativos para sistemas tecnológicos e naturais.

• Utilizar instrumentos de medição e de cálculo.

• Procurar e sistematizar informações relevantes para a compreensão da situação-problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Elaborar estratégias de enfrentamento das questões.

• Interpretar e criticar resultados a partir de experimentos e demonstrações.

• Articular o conhecimento científico e tecnológico numa perspectiva interdisciplinar.

• Entender e aplicar métodos e procedimentos próprios das Ciências Naturais.

• Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades.

• Fazer uso dos conhecimentos da Física, da Química e da Biologia para explicar o mundo natural e para planejar, executar e avaliar intervenções práticas.

• Aplicar as tecnologias associadas às Ciências Naturais na escola, no trabalho e em outros contextos relevantes para sua vida.

III. **Contextualização sócio-cultural:** Compreender e utilizar a ciência, como elemento de interpretação e intervenção, e a tecnologia como conhecimento sistemático de sentido prático.

• Utilizar elementos e conhecimentos científicos e tecnológicos para diagnosticar e equacionar questões sociais e ambientais.

• Associar conhecimentos e métodos científicos com a tecnologia do sistema produtivo e dos serviços.

• Reconhecer o sentido histórico da ciência e da tecnologia, percebendo seu papel na vida humana em diferentes épocas e na capacidade humana de transformar o meio.

• Compreender as ciências como construções humanas, entendendo como elas se desenvolveram por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade.

• Entender a relação entre o desenvolvimento de Ciências Naturais e o desenvolvimento tecnológico e associar as diferentes tecnologias aos problemas que se propuser e se propõe solucionar.

• Entender o impacto das tecnologias associadas às Ciências Naturais, na sua vida pessoal, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social. (CNE/98, *apud* PCNEM p. 12-13)

A estruturação dessas competências e habilidades são referenciais teóricos para uma readequação de toda uma organização que será discutida na sequência. Cada uma das disciplinas deve estabelecer conexão entre o aprendizado do conhecimento específico e as competências gerais a partir da organização de programas de ensino e busca por novos conhecimentos.

1.3 O ENSINO DA MATEMÁTICA NESTA PERSPECTIVA

No conjunto das disciplinas estudadas em todo o ensino básico, a Matemática recebe certo privilégio pela sua universalidade:

> No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. (PCNEM, p.9)

A partir dessa visão há a necessidade da conexão do programa de ensino com atividades que promovam o raciocínio de forma coordenada permitindo que o aluno consiga construir abstrações matemáticas sem se preocupar em somente decorar algoritmos sem saber seu significado. Esta proposta diferencia a prática docente em seu trabalho, pois exige a integração da sua tarefa com atividades que proponham um desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. E, ainda, adequar esses elementos à Matemática a fim de motivar o aluno a aprender e a estruturar seu pensamento e seu raciocínio dedutivo.

A Matemática deve ser vista pelos alunos como ferramenta para enfrentar seus mais diversos problemas, como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la a fim de melhorar a própria condição humana. E, ainda, não perder o foco de que a Matemática é uma ciência com suas características estruturais específicas (com definições e demonstrações).

Observe que ao se envolver com a Matemática, muito mais que conteúdos, o aluno desenvolve a capacidade de abstrair uma idéia, investigar e analisar um contexto a fim de definir conexões entre eles com o intuito de interpretá-lo e assim, o aluno aprende a aprender, passa a ter autonomia e capacidade de pesquisa para confiar no seu próprio conhecimento.

Segundo o PCNEM, as finalidades da Matemática para esse nível é levar o aluno a:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
> • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (PCNEM p. 42)

Além de todas essas exigências é preciso explorar o exercício e atividades de fixação, já que a exposição com a repetição também desenvolve o cognitivo do aluno. A criatividade dos planos de aula de matemática é evidenciada pela escolha de metodologias variadas a fim de conectar idéias e produzir significações.

1.4 A PRÁTICA DOCENTE

O professor é o mediador de levar todas estas propostas para a sua sala de aula e, várias pesquisas apontam que a formação de professores, seja no aprendizado de Ciência e Tecnologia, ou na interpretação e/ou na elaboração de materiais instrucionais apropriados não tem acompanhado a necessidade da população. Por isso, com esse trabalho há a proposta de modificação do posicionamento e da estrutura da própria escola, relativamente ao aprendizado individual e coletivo e a sua avaliação.

Muitos procedimentos usados neste trabalho são fortemente influenciados pelo pensamento de Shulman (SHULMAN, 1986), pesquisador que tem contribuído para o fortalecimento adequado dos saberes docentes.

Shulman aponta para o fato de que a ênfase de muitas pesquisas de referência à formação docente tem sido em administração das salas de aula, organização de atividades, planejamento de tempos e turnos, estruturação de tarefas, comportamento do professor com respeito a críticas e elogios aos alunos, planejamento de lições e julgamento do entendimento dos alunos (ALMEIDA e BIAJONE, 2005).

Há um ponto essencial não contemplado nessas pesquisas que é chamado por Shulman de "paradigma perdido" (tradução livre), caracterizado pela ausência de foco na matéria a ser ensinada, que consiste em não se questionar como a matéria a ser ensinada é transformada, a partir do conhecimento do professor, no conteúdo instrucional. Formuladores de políticas educacionais, e mesmo parte significativa da comunidade de pesquisa tem esquecido a importância do conhecimento do conteúdo a ser ensinado.

Citando Shulman (SHULMAN, 1986), encontramos:

> Formuladores de políticas de ensino deixam de compreender que existe uma inevitável restrição em qualquer peça de pesquisa em qualquer disciplina. Para conduzir uma peça de pesquisa, estudiosos tem que estreitar a abrangência, colocar em foco suas visões, e formular uma questão bem menos complexa do que a forma em que o mundo se apresenta na prática. …Nessa necessária simplificação das complexidades do ensino em sala de aula, investigadores têm ignorado um aspecto central: o assunto a ser ensinado (tradução livre).

Para Shulman, a primeira fonte do que ele denomina base de conhecimento (knowledge base) é o conhecimento do conteúdo a ser ensinado. O professor tem responsabilidades em relação a isso, e serve como fonte primária do entendimento que o aluno terá dos conteúdos objetos de ensino. O conhecimento do conteúdo refere-se ao montante e organização do conhecimento na mente do professor.

> Pensar adequadamente no conhecimento do conteúdo requer ir além do conhecimento dos fatos ou conceitos de um domínio. Requer entender as estruturas do assunto, que incluem estruturas substantivas e estruturas sintáticas. As estruturas substantivas constituem a variedade de modos em que os conceitos e princípios básicos da disciplina são organizados. As estruturas sintáticas constituem o conjunto de modos pelos quais veracidade ou falsidade são estabelecidas (Shulman, 1986, tradução livre).

Para Shulman, um segundo tipo de conhecimento é o conhecimento pedagógico do conteúdo (pedagogical content knowledge). O conhecimento pedagógico do conteúdo vai além do conhecimento da matéria a ser ensinada, e refere-se aos modos de representação e formulação do conteúdo que o torna compreensível pelos alunos.

Devido à diversidade encontrada no espírito humano, não há uma forma preferencial de representação e formulação em nenhum conteúdo a ser ensinado. Ele depende de muitos óbvios fatores, tais como contexto social dos alunos de uma classe, formação prévia dos alunos, recursos instrucionais disponíveis, etc.. Assim, o professor deve munir-se de um instrumental, um repertório de formas alternativas de representação e formulação do conteúdo a ser ensinado. Muitas dessas formas derivam-se de pesquisa, enquanto outras se originam na sabedoria da prática docente do professor.

Assim, como pesquisadora dentro de um programa de mestrado profissional, as idéias de Shulman incitaram a autora a construir um repertório de práticas de sala de aula para o ensino introdutório de Trigonometria, práticas essas que são delineadas e analisadas ao longo desta dissertação.

CAPÍTULO 2

A Epistemologia da Trigonometria

Desde os tempos remotos, o homem teve curiosidade sobre o tamanho das coisas, mas medi-las nem sempre foi uma tarefa simples. Quando se deseja medir distâncias inacessíveis, como a largura de um rio, a altura de um prédio, por exemplo, precisamos de instrumentos específicos e uma teoria fundamentada: A Trigonometria.

2.1 AS CORDAS DE HIPARCO E PTOLOMEU

Com o intuito de desvendar os mistérios do céu (uma esfera gigantesca) os astrônomos gregos, em especial, Hiparco de Rodes (190-120 a.C.) levantou proposições que relacionassem a posição dos astros com ângulos. E, para estudar os ângulos, relacionou-os com um segmento de reta na circunferência: a CORDA.

Observe nas figuras abaixo o conceito da corda a partir do estudo da época. Vale ressaltar que este conceito prevalece até os dias atuais.

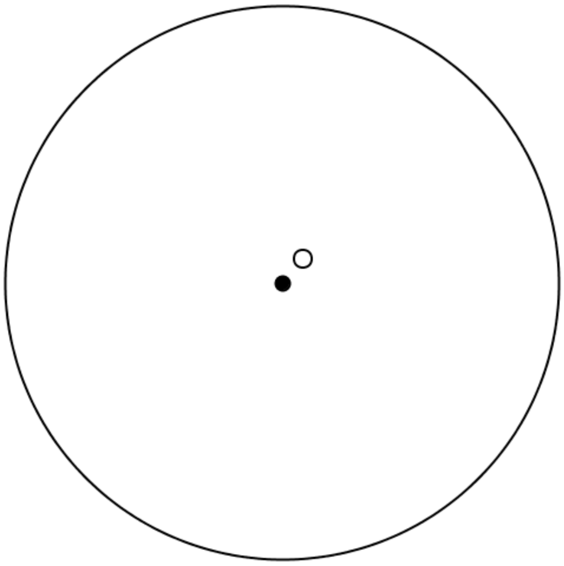


Figura 1: Circunferência de centro O.

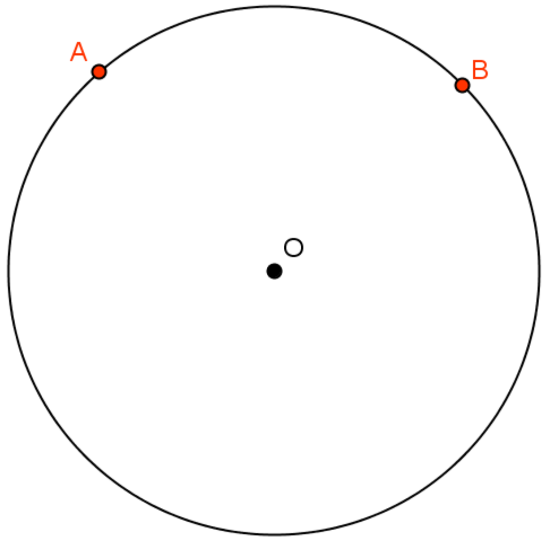


Figura 2: Pontos A e B na circunferência (representação da posição presente e futura dos astros e planetas no imenso céu).

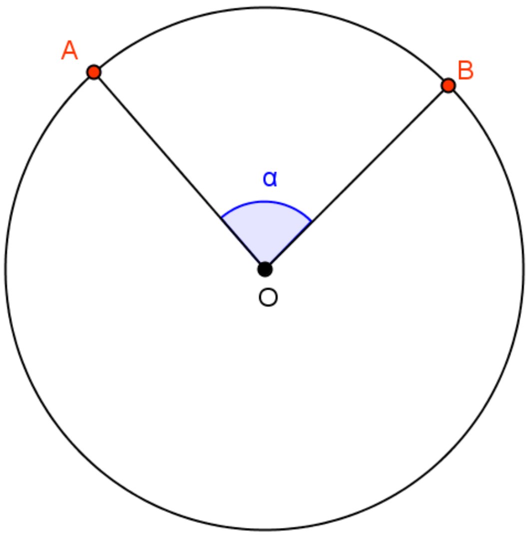


Figura 3: Os segmentos de reta AO e OB (raios da circunferência) geram o ângulo central α.

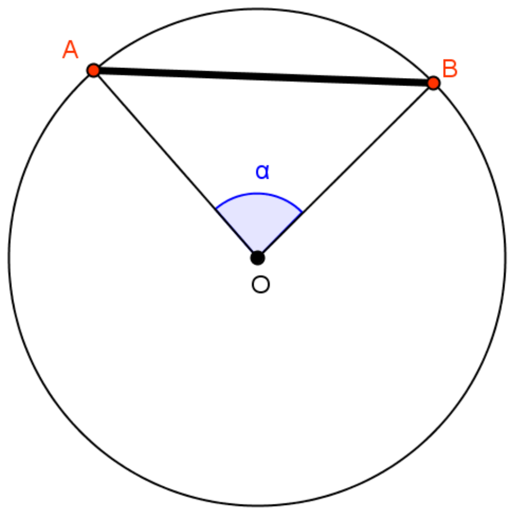


Figura 4: O segmento de reta AB (a corda) estabelece relação com o ângulo α, "corda de α".

Apesar de não ter registros, a crença geral é que Hiparco tenha construído uma tabela de tais cordas: em uma circunferência específica media diversos ângulos e registrava, para cada um deles, o valor da corda obtida. Hiparco escolheu uma circunferência de raio 3438. Essa escolha tem correspondência com os minutos de uma circunferência: o comprimento desta circunferência, $2 \cdot \pi \cdot r$, para $r = 3438$, é próximo de 21600, e este valor é 360×60, o total de minutos do arco de uma circunferência, logo cada minuto corresponde aproximadamente a uma unidade de comprimento sobre a circunferência. A constante π, tal como a conhecemos agora, não era conhecida à época de Hiparco. Mas quando calculamos 21600/(2π), obtemos 3437,74677 (valor aproximado), sendo 3438 o inteiro mais próximo.

Os babilônios, em algum momento antes de 300 a.C., optaram por dividir o ângulo total subtendido por uma circunferência em 360 partes, ou 360 *graus*. O sistema de numeração babilônico era sexagesimal, e assim foram convenientemente definidas subdivisões do grau, o minuto, 1/60 de grau, e o segundo, 1/60 de minuto. Hiparco, ao inaugurar a trigonometria, adotou o sistema babilônico em suas medidas.

Não há documentos reproduzindo as tábuas de cordas de Hiparco, mas outros matemáticos de épocas posteriores lhe creditam a construção de uma tábua trigonométrica de cordas, dos ângulos múltiplos de 7,5 graus, até 180 graus.

Trazidas para uma linguagem contemporânea, os cálculos de Hiparco baseiam-se em dois fatos.

Chamando de $\text{corda}(\alpha)$ a corda subtendida por um ângulo central α, temos, e denotando $(\text{corda}(\alpha))^2$ por $\text{corda}^2(\alpha)$, Hiparco deduziu que

$$\text{corda}(180° - \alpha) = \sqrt{(2r)^2 - \text{corda}^2(\alpha)}$$

Uma tal propriedade pode ser deduzida a partir dos dados geométricos da figura 5, apontando desde então a importância dos triângulos retângulos nesse primeiro momento da história da trigonometria.

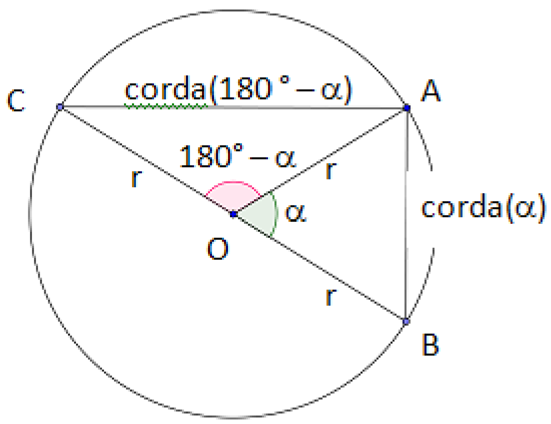


Figura 5: $\text{corda}^2(\alpha) + \text{corda}^2(180° - \alpha) = (2r)^2$.

Um teorema também estabelecido por Hiparco é o fato de que

$$\text{corda}^2(\alpha/2) = \frac{r}{2}\left(2r - \text{corda}(180° - \alpha)\right)$$

Tendo em vista a relação

$$\frac{\frac{1}{2}\,\text{corda}(\alpha)}{r} = \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

tradução das cordas de Hiparco para a trigonometria dos dias de hoje, e também o fato de que $\text{sen}\,(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$, a tradução do teorema de Hiparco é

$$\left(2r\ \text{sen}\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2 = r\left(2r - 2r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

ou seja, trocando-se $\alpha/2$ por α,

$$\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

De posse de seus dois teoremas, Hiparco foi capaz de calcular uma primeira tábua trigonométrica de cordas, para ângulos múltiplos de 7,5°, de 7,5° a 180°. Por exemplo, 2 × 7,5° = 15°, e a corda do ângulo de 15° é calculada bisseccionando o ângulo de 60° duas vezes.

Logo depois se tem registros do maior astrônomo grego da Antiguidade, Claudius Ptolomeu (85-165 d.C.), que escreveu sobre a Teoria das cordas em *Almagesto,* um tratado de astronomia que prevaleceu até a revolução copernicana no Renascimento. Nesta obra, todo o primeiro capítulo do livro é dedicado a demonstrar teoremas básicos sobre cordas.

Em Katz (KATZ, 1998) encontramos Ptolomeu como autor do seguinte interessante teorema acerca de cordas de uma circunferência.

Se A, B, C e D são quatro vértices consecutivos de um quadrilátero qualquer, inscrito em uma circunferência, então:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} = \overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

Em outras palavras, a soma dos produtos dos pares de lados opostos, do quadrilátero, é igual ao produto das suas duas diagonais.

Por simplicidade, dados dois pontos P e Q, estamos denotando por $\overline{PQ}$ a medida do segmento de extremos P e Q.

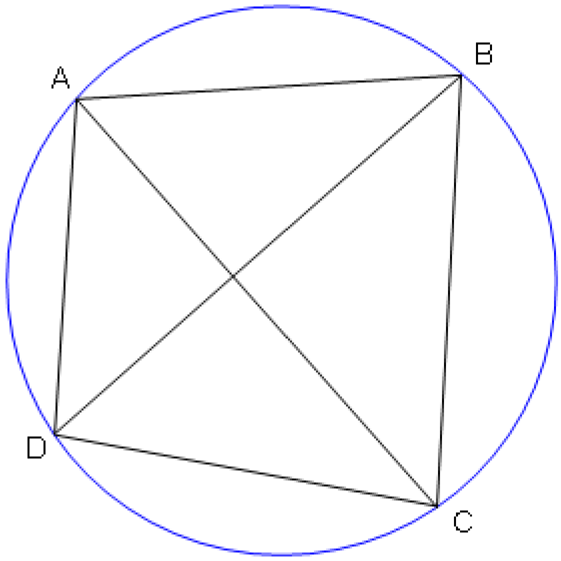


Figura 6: Teorema de Ptolomeu. $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$.

Para demonstrar seu teorema, Ptolomeu considera um ponto E sobre $\overline{AC}$ de tal forma que os ângulos $A\hat{B}E$ e $D\hat{B}C$ tenham a mesma abertura. Isto será indicado escrevendo-se $A\hat{B}E = D\hat{B}C$.

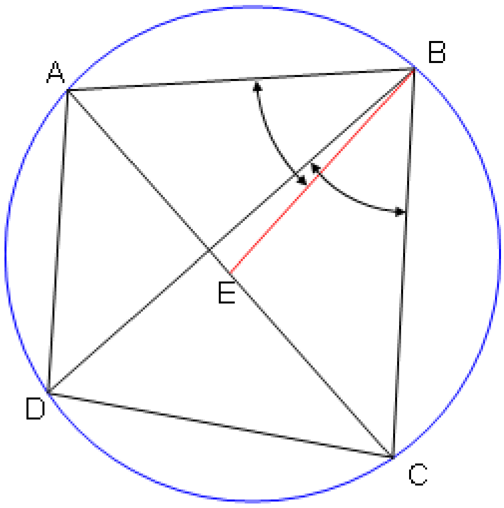


Figura 7: O ponto E é escolhido de modo que se tenha $A\hat{B}E = D\hat{B}C$.

Feito isto, Ptolomeu procede a demonstrar que os triângulos ABD e EBC são semelhantes.

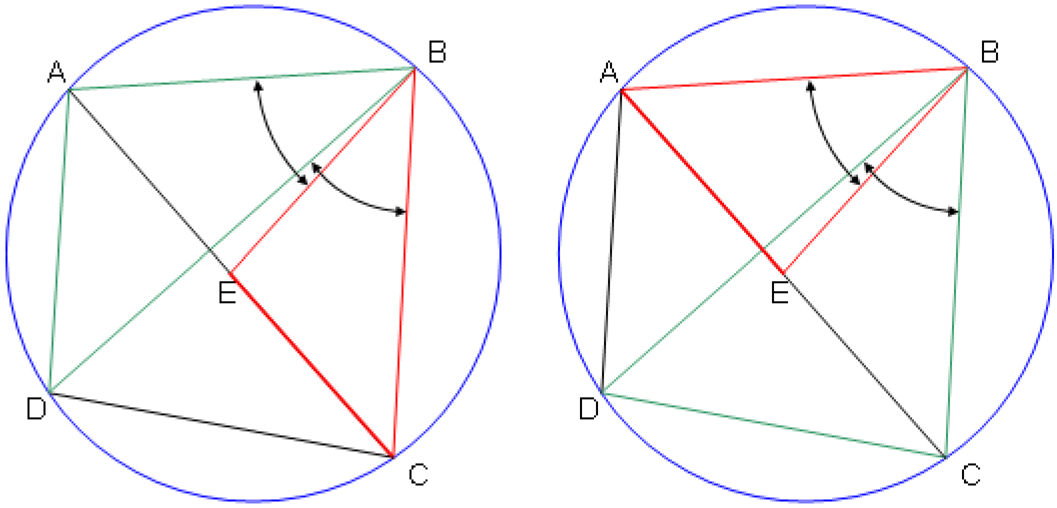


Figura 8: Duas etapas da demonstração do teorema de Ptolomeu. Os triângulos ABD e EBC, bem como os triângulos EBA e CBD, são semelhantes.

Isto é verificado notando primeiramente que os ângulos $A\hat{B}D$ e $E\hat{B}C$ são congruentes, pois pela escolha adequada do ponto E, os ângulos $A\hat{B}E$ e $C\hat{B}D$ tem a mesma abertura.

Além disso, os ângulos $A\hat{D}B$ e $B\hat{C}A$ são congruentes, pois são ângulos inscritos na circunferência "enxergando" o mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$.

Como $B\hat{C}E = B\hat{C}A$, temos também a congruência dos ângulos $A\hat{D}B$ e $B\hat{C}E$, o que garante a semelhança dos triângulos ABD e EBC. Nesta notação é indicada a correspondência de lados na relação de semelhança, por exemplo $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{EB}}{\overline{BC}}$, etc.

Assim tem-se $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$, e então $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{EC}$.

De maneira análoga, Ptolomeu deduz a semelhança dos triângulos e CBD e EBA.

Agora, tem-se $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{AB}}$, e então $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = \overline{BD} \cdot \overline{EA}$.

Finalmente, Ptolomeu deduz:

$$\begin{aligned}
\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AD} \cdot \overline{CD} &= \overline{BD} \cdot \overline{EC} + \overline{BD} \cdot \overline{EA} \\
&= \overline{BD} \cdot (\overline{EC} + \overline{EA}) \\
&= \overline{BD} \cdot \overline{AC}
\end{aligned}$$

A demonstração do teorema de Ptolomeu está completa.

Mas para que serve? O que tem a ver com a sua trigonometria? A surpreendente resposta vem a seguir. Com base nesse teorema, Ptolomeu deduz o que viria a ser a mãe das fórmulas de subtração e adição, frequentemente usadas na trigonometria.

Se α e β são ângulos centrais dentro de uma circunferência, sendo α > β, então

$$2R \cdot \text{corda}(\alpha - \beta) = \text{corda}(\alpha) \cdot \text{corda}(180° - \beta) - \text{corda}(\beta) \cdot \text{corda}(180° - \alpha)$$

Para deduzir isto, toma-se uma circunferência de raio R, e nela são tomados dois ângulos centrais de medidas $\alpha = A\hat{O}C$ e $\beta = A\hat{O}B$, com $\alpha > \beta$, tal como indica a figura abaixo.

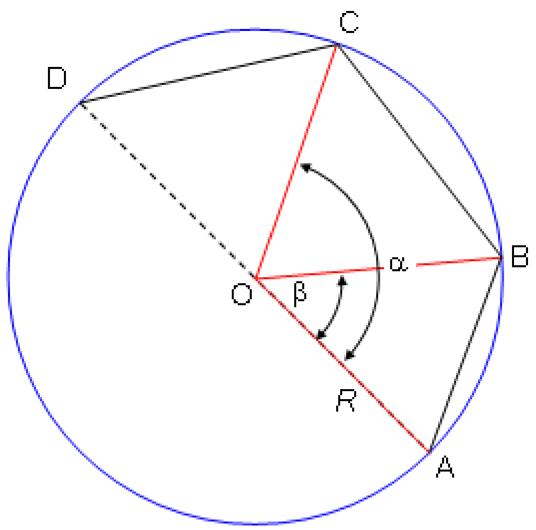


Figura 9: Diagrama para dedução da corda da diferença de dois arcos.

Sendo O o centro da circunferência de raio R, o raio $\overline{OA}$ é prolongado ao diâmetro $\overline{AD}$, tal como indicado na figura 9.

O quadrilátero $ABCD$ estará então inscrito na circunferência de diâmetro $\overline{AD}$. Usando o teorema anterior de Ptolomeu, tem-se:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

Esta igualdade, traduzida em termos dos elementos da figura 9, fica:

$$\text{corda}(\beta) \cdot \text{corda}(180° - \alpha) + 2R \cdot \text{corda}(\alpha - \beta) = \text{corda}(\alpha) \cdot \text{corda}(180° - \beta), \text{ ou seja,}$$

$$2R \cdot \text{corda}(\alpha - \beta) = \text{corda}(\alpha) \cdot \text{corda}(180° - \beta) - \text{corda}(\beta) \cdot \text{corda}(180° - \alpha)$$

Como $\text{corda}(\alpha) = 2R \cdot \text{sen}\frac{\alpha}{2}$ e $\text{sen}(90° - a) = \cos a$, da equação da corda da diferença imediatamente podemos deduzir a mais moderna relação:

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \text{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \text{ isto é,}$$

$$\text{sen}\left(a - b\right) = \text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a$$

Ptolomeu então construiu sua primeira tábua de cordas tomando um círculo de raio 60. Ele conhecia, a partir dos pitagóricos, o valor da corda do ângulo de 36°, que é o lado do decágono regular inscrito na circunferência.

Assim, por cálculo de corda da diferença, ele foi capaz de calcular a corda de 6° = 36° – 30°. Por bissecções, ele chegou às cordas de 3°, de 1,5°, e de 0,75°. A partir daí construiu uma tábua de cordas com variações de 0,75° em 0,75°.

Depois do mundo grego, a Trigonometria passou a ser estudada na Índia. Os matemáticos da Índia faziam um estudo da meia-corda, relacionando-os com o dobro do ângulo central, como figura abaixo:

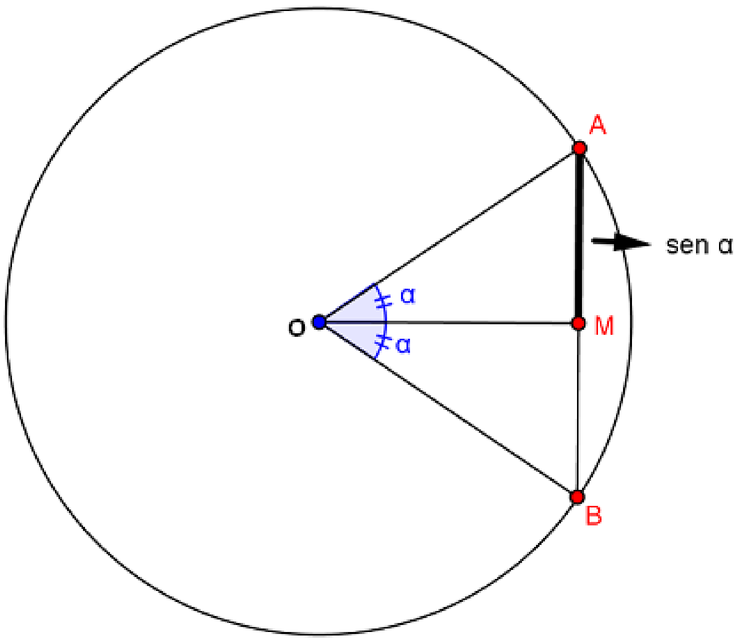


Figura 10: As meias-cordas estudadas na Índia

Os matemáticos indianos registravam a medida da meia corda e calculavam e registravam a razão entre o segmento AM e o raio AO do círculo. Os métodos para encontrar o comprimento da corda para ângulos arbitrários tiveram uma evolução durante todo o período até que no século XII, Bhaskara trouxe inovações aperfeiçoando estas técnicas de aproximação.

O motivo para esta preferência dos indianos pode ter sido o fato de que com o uso de triângulos retângulos, a trigonometria passou a ser tratada a partir de semelhanças de triângulos e não mais a partir de cordas de um círculo.

2.2 O TRIÂNGULO RETÂNGULO

Atualmente, a proposta do estudo da Trigonometria se inicia com o estudo de um triângulo retângulo e não mais uma corda. Observe na figura 10 que M é o ponto médio da corda AB da circunferência de centro O, portanto o triângulo OAM é retângulo em M. Pode-se, portanto, estudar as razões em um triângulo retângulo qualquer, sem ter a necessidade de pensar na circunferência como os indianos.

O estudo do triângulo retângulo vem como proposta inicial para introduzir-se trigonometria nos livros didáticos desde a última série do (9º ano) do Ensino Fundamental II. Nesta proposta tem-se uma conexão muito presente deste tema com a Geometria. Propõe-se aos alunos olhar de maneira diferenciada ao estudo das Semelhanças de Triângulos: a observação de que a razão entre dimensões de um triângulo retângulo comparadas às razões correspondentes obtidas em um triângulo semelhante gera o mesmo valor. Observem, na figura abaixo, dois triângulos retângulos semelhantes ABC e $A_1B_1C_1$ (medidas dos comprimentos dos lados do triângulo aproximadas com apenas duas casas decimais de aproximação):

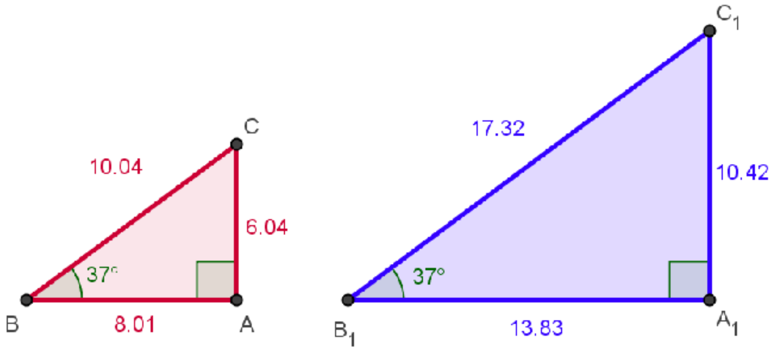


Figura 11: Triângulos semelhantes e suas medidas.

Mostra-se, na tabela abaixo, o cálculo de algumas razões feitas entre os lados escolhidos em ambos os triângulos:

$\frac{AC}{BC} = \frac{6.04}{10.04} = 0.6$	$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{10.42}{17.32} = 0.6$
$\frac{AB}{BC} = \frac{8.01}{10.04} = 0.8$	$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{13.83}{17.32} = 0.8$
$\frac{AC}{AB} = \frac{6.04}{8.01} = 0.75$	$\frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{10.42}{13.83} = 0.75$

Tabela 2: Razões calculadas nos triângulos da figura 11 (valores aproximados).

A partir do estudo da semelhança de triângulos, sabe-se que a razão entre lados correspondentes em triângulos semelhantes mantém uma razão de proporcionalidade constante. Desta forma, pode-se ampliar este estudo para a trigonometria: se essa razão é constante, portanto, pode-se observá-la em um triângulo acessível (que seja possível tirar suas medidas com régua, trena, metro) e transferir seus dados obtidos para um outro triângulo semelhante, cuja as proporções sejam inacessíveis. E essa idéia irá contribuir para a evolução dos conhecimentos da Geografia e Astronomia de forma direta.

Aprofunda-se nesta idéia matemática afim da observação de regularidades em triângulos semelhantes. Dois triângulos semelhantes têm lados proporcionais, porém, nestes triângulos ângulos internos correspondentes são congruentes. A partir desta regularidade, pode-se estabelecer uma tabulação para cada uma destas razões em função de um determinado ângulo agudo observado em um conjunto de triângulos semelhantes.

2.3 A NOMENCLATURA

Depois de observadas regularidades em Matemática é necessário estabelecer padrões de nomenclatura para facilitar o registro das informações obtidas. Historicamente, as idéias indianas das meias cordas foram levadas para a Europa pelos árabes de uma maneira muito interessante que gerou certa confusão. Na língua sânscrita (ou sânscrito) da Índia, a tradução de meia corda era $jy\bar{a} - ardha$ (ou só $jy\bar{a}$) e foi traduzido para $jiba$ na Arábia e, como este povo não costumava a usar vogais tivemos de $jiba$ para jb. Jb foi traduzido na Europa com $jaib$ que significa angra ou baía e posteriormente traduzida por *Sinus* (palavra latina que lembra concavidade, sinuosidade, logo, baía) e assim chegamos ao SENO, nomenclatura que se mantém até os dias atuais.

Com a evolução dos conhecimentos era necessário trabalhar com o seno do ângulo complementar: *sinus complementi*. Este termo foi modificado para *co. sinus* e, então, *cosinus*. Chegamos então ao COSSENO.

Percebemos que a partir do seno é possível construir todas as outras relações trigonométricas como tangente e secante, por exemplo. Estes termos surgiram após 1500. Finalmente, em 1595 o nome Trigonometria (Medida de Triângulos) foi inventado por Bartholomeo Pitiscus (1561-1613) que usou este nome para titulo de seu livro. A partir desta publicação, os estudos sobre Trigonometria não se restringiram à astronomia, mas também servia para medições de terra, à geografia e até mesmo na álgebra (para resolver equações cúbicas).

Para o estudo do Triângulo retângulo, torna-se também necessário estabelecer nomes aos diferentes lados do triângulo retângulo a fim de facilitar a linguagem, comunicação e o registro das descobertas. Primeiro, torna-se necessária a familiarização com os nomes dos três lados do triângulo retângulo dado um ângulo agudo determinado:

- ***HIPOTENUSA:*** lado oposto ao ângulo reto;
- ***CATETO OPOSTO:*** lado oposto ao ângulo agudo determinado;
- ***CATETO ADJACENTE:*** lado que com a hipotenusa compõe o ângulo determinado;

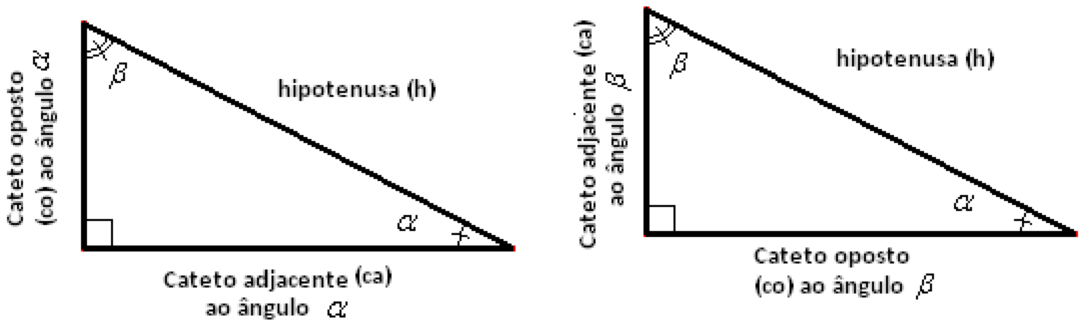


Figura 12: Nomenclatura no Triângulo Retângulo.

Observa-se que esta nomenclatura dos catetos do triângulo retângulo estão diretamente ligados à escolha de um ângulo agudo determinado. Transpondo-se os conhecimentos adquiridos na Índia para os referenciais didáticos estudados atualmente sobre triângulos retângulos, tem-se estabelecida uma nomenclatura às razões calculadas, facilitando o registro de seus dados. Dado, α um ângulo interno (agudo) de um triângulo retângulo, tem-se:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto \quad oposto}{hipotenusa} \qquad \cos\alpha = \frac{cateto \quad adjacente}{hipotenusa}$$

A construção do SENO e do COSSENO então intimamente relacionadas. Como já visto, o **Cosseno** é entendido como o Seno do complemento. Lembrando que ângulos complementares são ângulos cuja soma vale 90°, tem-se no triângulo retângulo necessariamente um ângulo reto e dois ângulos agudos e a soma de ângulos internos de um triângulo retângulo sendo 180º. Como o reto já contribui com 90º, os outros 90º são a soma dos agudos.

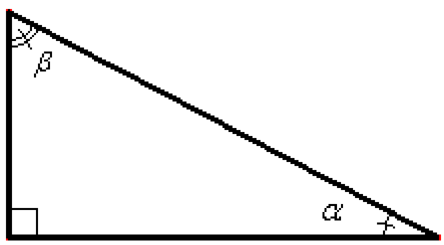


Figura 13: Em um triângulo retângulo de ângulos agudos internos α e β, temos que α + β = 90º.

Assim, sendo, é estabelecido que: $\alpha + \beta = 90° \Leftrightarrow$ α e β são complementares e, portanto, $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ e $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$.

Também torna-se necessário explorar outras as relações que intermediam o seno (razão primitiva) e o cosseno, por exemplo, a tangente.

A Tangente é entendida como a razão entre o Seno e o Cosseno. Observe os cálculos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\dfrac{cateto\ oposto}{hipotenusa}}{\dfrac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}}=\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}=tg\,\alpha$$

Da mesma forma, pode-se estabelecer outras razões trigonométricas, as razões trigonométricas secante (inverso do cosseno), cossecante (inverso do seno) e cotangente (inverso da tangente).

Conclui-se que a construção das tabelas trigonométricas foram feitas a partir da medição de meias cordas e, no Ensino Básico, a Trigonometria começa a ser estudada a partir do Triângulo Retângulo, reafirmando a idéia que o ordem didática escolhida pelo professor não precisa seguir rigorosamente os fatos como o surgimento histórico do próprio conceito.

2.4 O CICLO TRIGONOMÉTRICO

Dando continuidade à evolução do estudo da Trigonometria, no Ensino Médio é proposto seu estudo com um fundo muito mais algébrico que geométrico. Volta-se ao estudo do círculo para construir a idéia fundamental de modelar fenômenos periódicos. Leonhard Euler (1707-1783) introduziu a idéia de que o seno poderia ser entendido como uma função do arco em uma circunferência com raio unitário, circunferência esta que é denominada Ciclo (círculo) Trigonométrico.

Para trabalhar a transição do Triângulo Retângulo para o Ciclo Trigonométrico vê-se a necessidade de estudar novamente o círculo. É fundamental o estudo de diversos elementos de sua construção para que todos os pormenores desta construção sejam detalhados.

Na Trigonometria é de essencial importância a medida dos ângulos em radianos. Entende-se que um ângulo central de um círculo cujo arco definido tem o mesmo comprimento que o raio do círculo é 1 radiano. Exemplo: dado um círculo de centro O e raio

$\overline{OA}$, o ângulo $B\hat{O}A$ mede 1 radiano (1 rad = 1 raio) já que se trata de um ângulo central cujo arco $\overset{\frown}{BA}$ tem a medida de um raio desta circunferência:

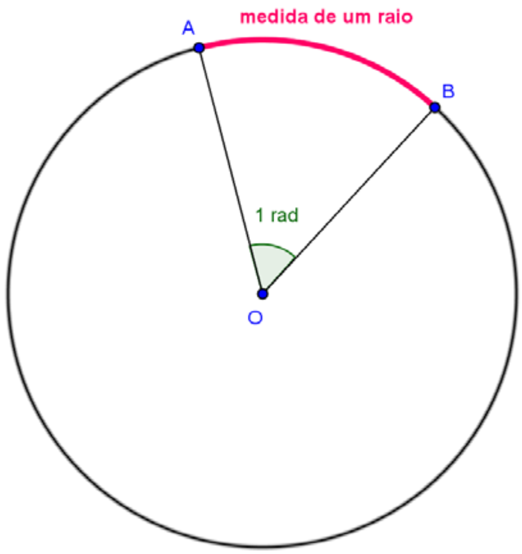


Figura 14: Representação de um radiano.

Em radiano, pode-se apontar a forma especialmente simples que tomam as expressões que permitem calcular o perímetro de um arco de circunferência ou a área de um setor circular, em função do raio e do ângulo, quando este está em radianos. Exemplo: Um arco de 3 radianos em uma circunferência de raio 2 cm mede 6 cm. Entende-se por 3 radianos, 3 raios. Já que cada raio mede 2 cm, 3 raios serão 6 cm.

Pode-se associar aos conceitos de trigonometria a periodicidade, já que muitos fenômenos naturais e/ou situações do cotidiano podem ser modeladas para as funções trigonométricas a partir do estudo da repetição de certo padrão.

> Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimentos de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação de sangue, batimentos cardíacos, etc.
> A importância das funções trigonométricas foi grandemente reforçada com a descoberta de Joseph Fourier, em 1822, de que toda função periódica (com ligeiras e naturais restrições) é uma soma (finita ou infinita) de funções do tipo $a \cdot \cos(nx) + b \cdot sen(nx)$. Para que se tenha idéia da relevância deste fato, que deu origem à chamada Análise de Fourier, basta dizer que, segundo o banco de dados da revista "Mathematical Reviews", o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é o Fourier. (LIMA, 2006, p. 214)

Relacionam-se as razões trigonométricas do triângulo retângulo com as medidas das projeções de um ponto sobre os eixos coordenados, dando uma nova interpretação ao seno e cosseno.

Para compreender esse estudo é preciso recorrer à idéia de Descartes da organização de pontos no plano para desenvolver o estudo do Ciclo Trigonométrico, por isso, entendemos que a associação do centro de uma circunferência de raio unitário à origem do plano cartesiano se faz necessária para o estudo da Trigonometria neste contexto.

É proposto abaixo certo detalhamento desta teoria a partir do modelo de um ponto girando em torno de uma circunferência. Inicialmente parti-se da junção do centro da circunferência de raio r com a origem do Plano Cartesiano para se estabelecer os elementos principais:

- **<u>Pontos estratégicos</u>**: $O(0,0)$ – origem do Plano Cartesiano e Centro da circunferência; $A(r,0)$ – origem da trajetória a ser estudada; $P(x_P, y_P)$ – ponto genérico da circunferência estudada; $X_p(x_P,0)$ – ponto que representa a projeção de P no eixo x; $Y_p(0, y_P)$ – ponto que representa a projeção de P no eixo y;
- Sentido anti-horário: adotado como o sentido positivo da trajetória de P, sobre a circunferência, a partir de A;

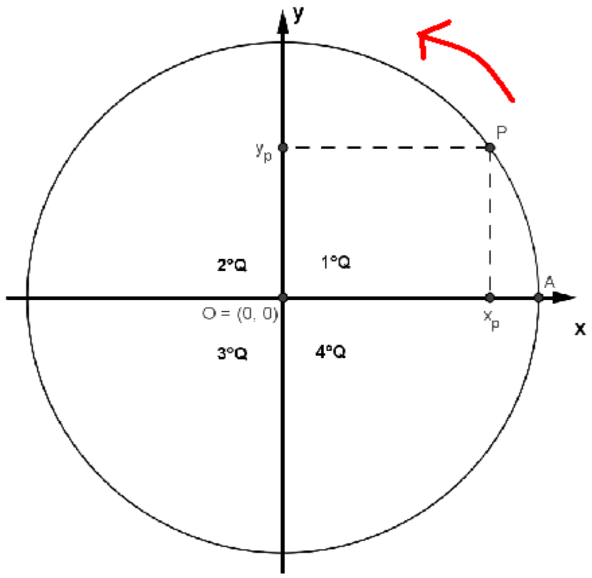
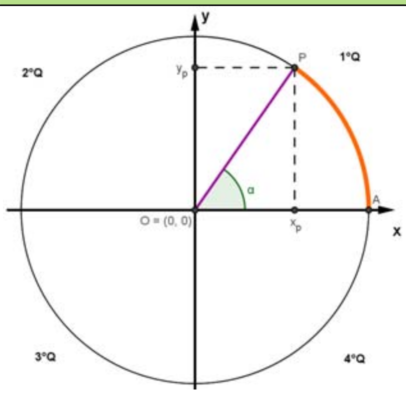
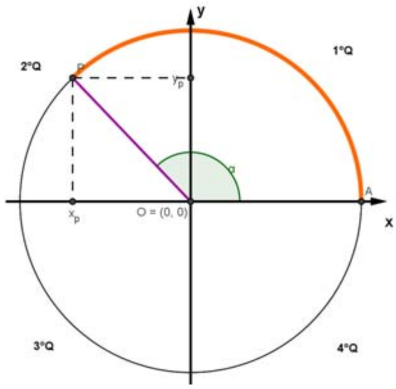


Figura 15: Modelo ideal para contextualizar as funções trigonométricas.

A partir dos objetos já construídos para o modelo, podem-se atribuir algumas relações importantes e fundamentar novos objetos de estudo. O primeiro objeto a ser estudado é o arco $\overset{\frown}{AP}$. Para estudá-lo, traça-se o raio $\overline{OP}$ para relacionar o ângulo α formado por $A\hat{O}P$.

É muito importante deixar claro que apesar da diferença de conceito entre o arco e o ângulo muitas vezes uma palavra é usada pela outra já que a medida em graus ou radianos do arco $\overset{\frown}{AP}$ coincide com a medida do ângulo α (ângulo central), portanto, não haverá perigo de confusão no uso da mesma palavra para significar duas coisas diferentes. No contexto será sempre claro o conceito a que se refere.

QUADRANTE	***FIGURA***	α	***PONTO P***
1º		$0° < \alpha < 90°$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	Ponto com abscissa positiva e ordenada positiva
2º		$90° < \alpha < 180°$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	Ponto com abscissa negativa e ordenada positiva

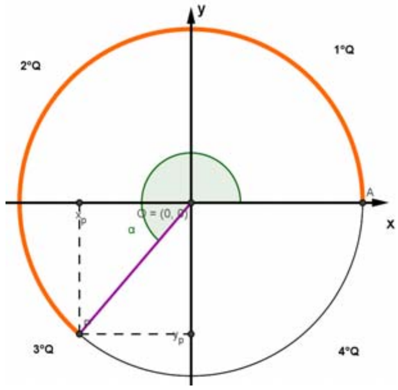
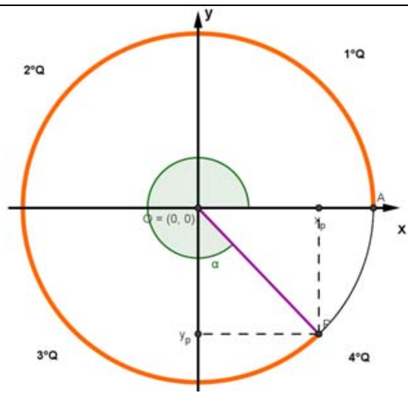
<table>
<tr><td>3º</td><td>
</td><td>$180° < \alpha < 270°$
$\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$</td><td>Ponto com abscissa negativa e ordenada negativa</td></tr>
<tr><td>4º</td><td>
</td><td>$270° < \alpha < 360°$
$\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$</td><td>Ponto com abscissa positiva e ordenada negativa</td></tr>
</table>

Tabela 3: Estudo do Ciclo Trigonométrico na Primeira determinação Positiva

Se o ponto P continuar sua trajetória haverá sempre uma repetição de posição correspondente a uma trajetória já estudada no percurso citado acima (refere-se a esse percurso como primeira determinação positiva). Assim, tem-se estabelecida a relação de periodicidade.

Neste momento tem-se estabelecida a relação do triângulo retângulo com o ciclo trigonométrico. Para o professor é muito interessante a observação que este contexto se aproxima muito da idéia inicial das cordas de Ptolomeu. Propõe-se, como análise inicial, o estudo apenas no primeiro quadrante. Observa-se a formação do triângulo retângulo OX_PP e toma-se como referência o ângulo agudo α.

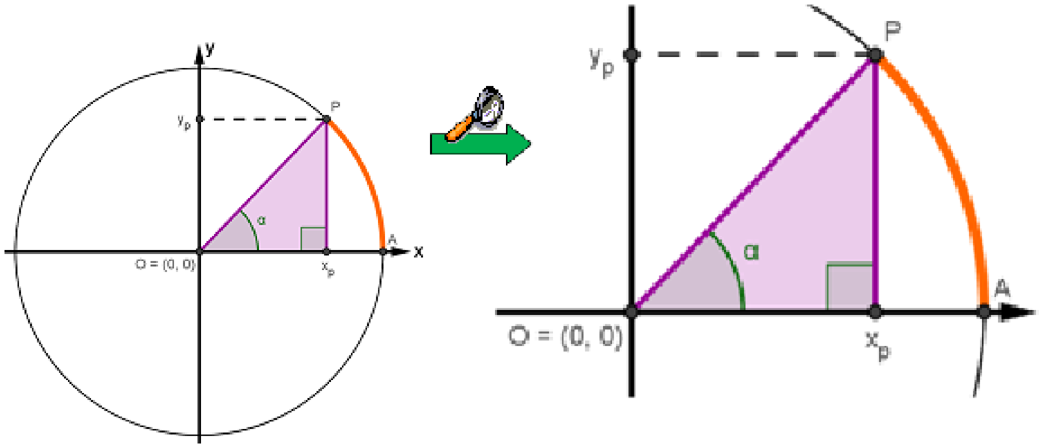


Figura 16: Imagem com um zoom no triângulo retângulo formado.

Para este triângulo, tem-se:

– $\overline{OP}$: hipotenusa do triângulo retângulo e raio r da circunferência;

– $\overline{PX_P}$: cateto oposto a α;

– $\overline{OX_P}$: cateto adjacente a α;

– O segmento $\overline{OY_P}$ é congruente ao segmento $\overline{PX_P}$;

Calculando-se as razões trigonométricas para este triângulo retângulo, tem-se:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \qquad \cos(\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{PX_P}}{\overline{OP}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\overline{OX_P}}{\overline{OP}}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{OY_P}}{r} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\overline{OX_P}}{r}$$

$$\overline{OY_P} = r \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \qquad \overline{OX_P} = r \cdot \cos(\alpha)$$

Observe que os segmentos que ligam a origem às projeções do ponto P nos eixos dependem do raio da circunferência e das razões trigonométricas. Desta forma, padronizou-se que no Ciclo Trigonométrico o raio seria unitário. Como conseqüência o segmento que liga a origem à projeção de P no eixo y é a representação do seno de α ($\overline{OY_P} = \operatorname{sen}(\alpha)$) e o segmento que liga a origem à projeção de P no eixo x é a representação do cosseno de α ($\overline{OX_P} = \cos(\alpha)$).

Pode-se transferir essa idéia para os outros quadrantes. O ângulo α tem um comportamento específico em cada um dos quadrantes: no primeiro quadrante temos $0° < \alpha < 90°$; no segundo quadrante temos $90° < \alpha < 180°$; no terceiro quadrante temos $180° < \alpha < 270°$ e, no quarto quadrante temos $270° < \alpha < 360°$. Agora, apropria-se de um ângulo β que seja um ângulo agudo interno do triângulo retângulo para o estabelecimento de novas relações:

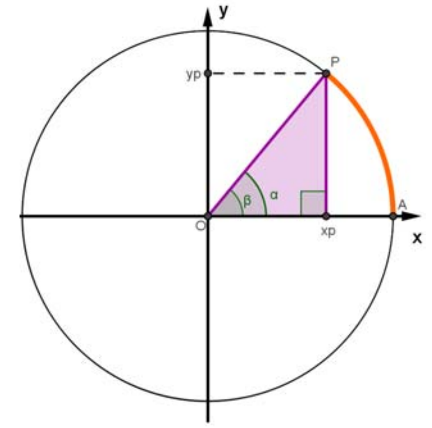
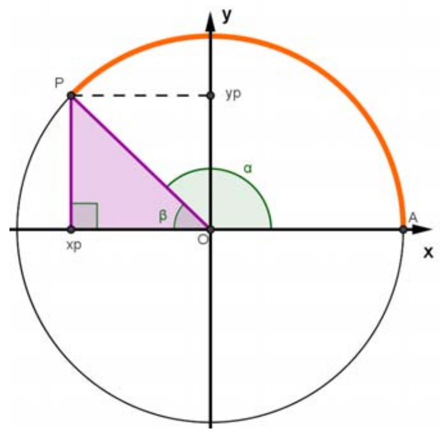
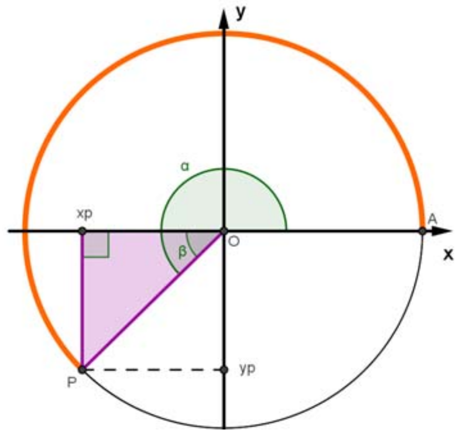
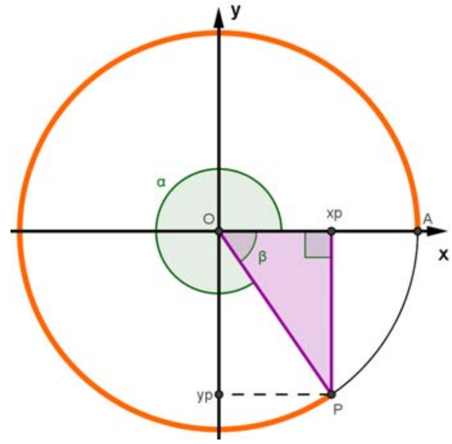
	
No primeiro quadrante temos $0° < \alpha < 90°$ e $\alpha \cong \beta$	No segundo quadrante temos $90° < \alpha < 180°$ e $\alpha = 180^{o} - \beta$
	
No terceiro quadrante temos $180° < \alpha < 270°$ e $\alpha = 180° + \beta$	No quarto quadrante temos $270° < \alpha < 360°$ e $\alpha = 360° - \beta$

Tabela 4: Estudo do ângulo interno do triângulo β com o ângulo α do Ciclo em cada quadrante.

Portanto, estabelecem-se simetrias do segundo, terceiro e quarto quadrantes com o primeiro. E, pode-se definir de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ as funções trigonométricas definidas por $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$.

Estes conceitos, tratados aqui neste capítulo com detalhamento, não costumam aparecer com tanta freqüência nos livros didáticos e trata-se de uma transição de informações carregadas de conteúdos que devem ser pormenorizados.

CAPÍTULO 3

A Matemática e a Tecnologia

3.1 INTRODUÇÃO

As Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) promovem uma mudança nos paradigmas educacionais com o uso de hardware, software e telecomunicações pela sociedade. Iniciamos esta reflexão a partir da abordagem de Ubiratan D'Ambrosio sobre as tecnologias:

> "As novas tecnologias exigem o despertar de uma nova consciência. Revalorizam o indivíduo pelo que ele é, não pelo que ele tem. Alguns dirão: Quem manda é quem tem o hardware e o software. Não posso concordar. O hardware e o software são e continuarão sendo estúpidos, incapazes de iniciativas. (...) Assim como o hardware, o software só é operacional se houver um operador, e este é um indivíduo." (Apud Miskulin, 1999, p. 40)

Para contribuir para a constante evolução da humanidade ressalta-se a necessidade do indivíduo se adaptar às novas exigências de um mundo globalizado. Exigências essas que vão de frente com o próprio currículo de sala de aula e à prática docente: de um lado temos o professor, que teve uma educação tradicional, acostumado a usar somente giz e lousa em suas aulas e, do outro, alunos que vivem em meio à tecnologia fazendo uso de vídeo-game e computador com propósito de se divertirem e gastarem a maior parte de seu tempo, e que precisam de uma formação condizente com as expectativas de um mercado de trabalho exigente em constante mutação.

3.2 O ALUNO E A TECNOLOGIA

O público do cotidiano escolar atual tem propósitos bem delimitados. Eles querem dar sentido à vida, e rápido, enquanto fazem outras dez coisas ao mesmo tempo. Comunicam-se através de diversos recursos, seja ao vivo, pelo celular, e-mail, programas de mensagens instantâneas ou qualquer outra ferramenta de comunicação que venha a surgir no mundo. Não precisaram aprender a dominar as máquinas, mas nasceram com TV, computador e comunicação rápida dentro de casa.

A geração que convive com ferramentas virtuais desenvolve um sistema cognitivo diferente. São exigentes e seletivos com a intenção de estar aprendendo o tempo todo. Mas, dessa vez, o professor precisa ser alguém ético e competente, afinal, estamos em um ambiente onde o acesso a qualquer informação é muito rápida e há exigência de atualização contínua. O processo de ensino-aprendizagem tornou-se uma relação horizontal, pois os alunos são estimulados a se expressarem e contribuem muito com a relação de ensino do ambiente escolar.

Para enfrentar o momento atual, todos os elementos envolvidos na educação, seja a escola, os professores, os pais, precisam de formação continuada tanto para prender a atenção do aluno com o intuito de formá-lo como cidadão e prepará-lo para enfrentar os processos de busca e investigação de novas formas e meios de se compreender a realidade. O professor, em específico, precisa de treinamento criterioso e uma preparação sólida para definir novas metodologias que o conectem com esse avanço.

3.3 ESTRUTURAS COGNITIVAS EXPLORADAS COM A TECNOLOGIA

Aulas tradicionais tornam-se inconcebíveis, pois, para que os alunos desenvolvam as habilidades e competências exigidas no ensino médio, a sua formação deve contemplar uma integração de conteúdos. Assim, o envolvimento da tecnologia com a sala de aula pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem permitindo que algumas visualizações abstratas tornem-se mais concretas aos alunos. Trata-se de novos ambientes, contextos propícios para o desenvolvimento de noções e conceitos geométricos e algébricos.

Podem-se destacar algumas possibilidades que o uso da informática pode trazer ao processo de ensino-aprendizagem de Matemática:

> a) a *linguagem visual*, que estimula novo meio de comunicação de conceitos abstratos, tornando a tarefa de compreensão da linguagem matemática mais agradável;
> b) a *interatividade*, que propicia a oportunidade de introduzir experiências em laboratórios para instigar o espírito de investigação de propriedades, conjecturas de novas propriedades, confirmação de resultados, etc.;
> c) o desenvolvimento de *atividades manipulativas* concretas, que permitem o acompanhamento mais personalizado da aprendizagem, respeitando as diferenças individuais;
> d) o desenvolvimento da sensibilidade em relação aos conceitos matemáticos de natureza pura e aqueles inerentes ao uso de equipamentos etc. (Yuriko; Villagra, 2004, p. 8)

Essas possibilidades destacadas são referenciais de inovação e adaptação a uma sociedade que está sempre em movimento, correndo contra o tempo.

A linguagem visual é uma característica desta sociedade, já que a imagem contribui para uma comunicação rápida. Na imagem é possível colocar elementos principais que se deseja transmitir e, explorar as informações qualitativas e quantitativas sobre determinado referencial de forma clara e resumida. Na Matemática, além de desenhos comumente explorados em Geometria, temos a necessidade de uso de tabelas e gráficos.

A interatividade em meios as TIC podem ser exemplificadas pelo computador: informações trocadas nos computadores via Internet são mais rápidas e inovadoras em frente às informações dadas por um jornal de papel.

As atividades manipulativas fazem parte de uma cultura que não quer ser só expectadora, mas sim, participar das interações inclusive para validar as informações trocadas. Na maioria das aulas tradicionais de matemática, o conteúdo é passado de uma forma organizada, como se os matemáticos passassem de teorema a teorema de forma quase que natural, superando qualquer dificuldade. São exposições polidas que não mostram o processo criativo, as frustrações e o longo e árduo caminho que estes tiveram para obter o conhecimento. A manipulação do conhecimento promove as descobertas e permite a construção de significações.

3.4 O PROFESSOR E A TECNOLOGIA

Para adaptar-se a uma sociedade dinâmica em constante evolução é necessário atualização com relação às diversas informações disponíveis inclusive às das TIC. O profissional de hoje, inclusive o professor, deve selecionar e analisar as informações obtidas e, a partir disso, decidir como usar essas ferramentas para atualizar e aperfeiçoar suas práticas profissionais.

Evidentemente, a sociedade e os professores têm um tempo de adaptação. João Pedro da Ponte, em seu texto *Tecnologias de Informação e Comunicação na Formação de Professores: Que desafios?* Aponta certo desconforto dos professores frente às TIC:

> "Encontramos actualmente entre os professores atitudes diversas em relação às tecnologias de informação e comunicação (TIC). Alguns, olham-nas com desconfiança. Outros, usam-nas na sua vida diária, mas não sabem muito bem como integrar na sua vida profissional. Outros, ainda procuram usá-las em suas aulas sem, contudo, alterar as suas práticas. Uma minoria entusiasta desbrava caminhos, explorando incessantemente novos produtos e idéias, porém defrontam-se com muitas dificuldades como também perplexidades. Nada disto é de admirar. Toda a técnica nova só é utilizada com desenvoltura e naturalidade no fim de um longo processo de apropriação." (Apud CRECCI, 2009, p. 67)

Pesquisas apontam a dificuldade do professor em usar a tecnologia em sala de aula. Inclusive recentemente foi publicada uma pesquisa feita pela Fundação Victor Civita[2], onde se conclui que a maioria das escolas analisadas tem recursos materiais para fazerem algum tipo de uso pedagógico do computador, porém, os professores não apresentam formação para isso e usam pouco ou nem usam o computador para desenvolver seus trabalhos docentes.

Essa dificuldade em inovar o ambiente de sala de aula utilizando as TIC pode ser modificada a partir de novas práticas partindo do interesse por pesquisar novas fontes e usar a criatividade para explorá-la. O trabalho com tecnologia exige aprender continuamente e esse processo fica facilitado se não for solitário. É necessário que o professor seja munido de informações e em cooperação com outros profissionais busque um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão

[2] Pesquisa que pode ser obtida através do site http://revistaescola.abril.uol.com.br/fvc/pdf/estudo-computador-internet.pdf

de conhecimentos para reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.

Concordando com as idéias acima apresentadas, acredita-se que a prática docente não necessite ser superada ou substituída, mas sim, renovada. Segundo Miskulin 2006, é preciso um redimensionamento no processo educativo que conceba o "aprender fazendo", de forma que professores sejam aprendizes e construtores de sua própria formação a partir de buscas de novas estratégias e criação de novos caminhos que favoreçam a reconstrução da prática pedagógica do professor a partir do uso de tecnologias no contexto educacional.

Segundo Papert (1985):

> O educador deve atuar como antropólogo. E, como tal, sua tarefa é trabalhar para entender que materiais dentre os disponíveis são relevantes para o desenvolvimento intelectual. Assim, ele deve identificar que tendências estão ocorrendo no meio em que vivemos. Uma intervenção significativa só acontece quando se trabalha de acordo com essas tendências. Em meu papel de educador-antropólogo eu vejo as novas necessidades sendo geradas pela penetração dos computadores na vida das pessoas. (Apud MISKULIN, 2006)

Uma primeira iniciativa a ser explorada trata da busca de materiais desenvolvidos na Internet, uma rede dinâmica que faz parte integral da vida das pessoas seja na Educação, em negócios, em lazer. A Internet pode ser interpretada como uma biblioteca de tamanho incalculável que permite pesquisa ampla. Nesta pesquisa podem-se encontrar boas idéias e, a partir delas, construir novos conhecimentos usando a criatividade para adaptar projetos para atender necessidades especiais, locais e pessoais e, assim, desenvolver no indivíduo a liberdade de expressar-se como cidadão pleno integrado e consciente de seus direitos em uma sociedade cada vez mais competitiva.

Neste âmbito, encontram-se projetos que estão sendo construídos, principalmente por financiamento do MEC, que buscam o aumento de bancos de dados confiáveis e trazem uma perspectiva diferenciada à prática de professores. Podemos citar três bons exemplos: Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE), Portal do Professor e Projeto M[3];

O BIOE[3] e o Portal do Professor[4] foram lançados em 2008 pelo Ministério da Educação.

---

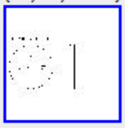
[3] Para ter acesso ao BIOE, basta acessar gratuitamente o link http://objetoseducacionais.mec.gov.br/.

[4] O Portal do Professor está disponível em http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html.

O BIOE é um repositório que compartilha recursos educacionais em diversas mídias e idiomas (áudio, vídeo, animação, imagem, hipertexto, softwares educacionais). Esses recursos são de acesso público e livre e atendem à educação infantil, ensino fundamental, médio, profissional e superior, nas diversas áreas do conhecimento. Ao acessar o BIOE, o professor poderá efetuar, além de pesquisa, download das mídias que tiver interesse.

Figura 17: Interface inicial do site de buscas de Objetos Educacionais BIOE

Para Matemática no Ensino Médio estão dispostos mais de 500 recursos neste site, a maioria deles trata de Animações e Simulações, destes, apenas sete tratam o assunto de Trigonometria:

Data de Publicação	Tipo	Título	Autores	Tamanho dos Arquivos
(28/08/2008)		Trigonometria	Silva, Aparecida Augusta	227.1Kb
(10/06/2009)		Trigonometria	Bornatto, Gilmar	43.98Kb
(20/07/2009)		Definição das razões trigonométricas	Correia, Paulo Manuel Inácio	2.016Mb
(17/02/2009)		Seno, Coseno y Tangente de un Angulo	Fendt, Walter	17.64Kb
(01/04/2009) 		Ciclo trigonométrico e função cosseno	Andrade, Lenimar Nunes de	975.8Kb
(06/10/2009)		Gráficos das funções trigonométricas - Função seno	Correia, Paulo Manuel Inácio	2.019Mb
(29/08/2008)		Are you ready for calculus I?	Lovelock, David	173.7Kb

Mostrando os Itens 1-7 de 7

Figura 18: Informações do site do BIOE[5]

O primeiro objeto é um software educacional que apresenta cada uma das funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante no Ciclo Trigonométrico separadamente.

Já o segundo objeto é uma Animação/Simulação chamada de Flash trigonometria, trata-se de um teste com perguntas relacionadas às funções trigonométricas. São apresentadas perguntas, seguidas de alternativas às soluções. O aluno é convidado a escolher a opção que melhor satisfaz ao questionamento, em um determinado espaço de tempo, e em seguida é verificado o resultado correto.

O Terceiro objeto é um simulador as razões trigonométricas associadas a um triângulo retângulo que utiliza como recurso o GeoGebra. O quarto, quinto e sexto objetos também são casos de animação/simulação que apresentam uma circunferência trigonométrica que descreve ao lado uma senóide, referente às funções seno e/ou cosseno, e/ou uma tangentóide para a função tangente.

Desta maneira, através de buscas no site, o professor pode ter acesso a muitos objetos educacionais que facilitam a aprendizagem e, simultaneamente, transformam a aula do professor.

[5] Informações extraídas do site http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/44/search *no dia 17/02/2010 às 17h.*

Já o Portal do Professor é um site que auxilia o professor na criação e divulgação de suas aulas, assim como permite pesquisa de aulas de outros professores sobre o assunto desejado, permitindo assim uma comunicação e a troca de experiência entre profissionais dos mais diversos locais, possibilitando um trabalho colaborativo e uma disseminação de idéias.

Figura 19: Interface inicial do Portal do Professor.

O conteúdo do portal inclui sugestões de aulas de acordo com o currículo de cada disciplina e recursos como vídeos, fotos, mapas, áudio e textos, que tornam o conteúdo mais dinâmico e interessante para o aluno. Nele, o professor poderá socializar suas aulas e ficar informado sobre os cursos de capacitação oferecidos em municípios, estados e na área federal e, sobre a legislação específica.

Pode-se encontrar 39 sugestões de aulas de Trigonometria dentre 4994 aulas postadas neste site até a data da consulta[6].

O Projeto[7] M³, Matemática e Multimídia, é um dos projetos aprovados pelo FNDE, SED, MCT e MEC para produzir material didático para o Ensino Médio em cinco

---

[6] Consulta no site dia 17/02/2010 às 17h38.

[7] O projeto M^3 pode ser acessado por http://www.m3.mat.br/.

disciplinas (Matemática, Língua Portuguesa, Física, Química e Biologia) em diferentes mídias (Vídeo, Áudio, Software e Experimento) em formato digital sob coordenação do GGPE - PRPG - UNICAMP. Trata-se de um exemplo de trabalho colaborativo em diferentes áreas, já que conta com uma equipe de professores e estudantes dos Institutos de Matemática, Física, Artes, Computação e Faculdade de Educação, além de diversos profissionais externos e, tem como desafio produzir materiais didáticos de qualidade e compatíveis com a realidade educacional brasileira. Os materiais produzidos por este projeto também serão postados integralmente no Portal do Professor.

Esses espaços virtuais são privilegiados para troca e compartilhamento de experiências, saberes e conhecimento sobre os desafios propostos à docência. Trata-se de um ambiente de trabalho colaborativo de forma que todos participam e refletem ativamente de novas experiências de trabalho que intermedeiam os conceitos matemáticos através de análise das potencialidades computacionais e pedagógicas.

Apresenta-se neste trabalho dois softwares livres, o GeoGebra e o Grapes. Ambos apresentam comandos amigáveis e linguagem apropriada para estimular o desenvolvimento do raciocínio matemático. A partir deles, e principalmente do GeoGebra, foi preparado um material instrucional que faz uso da sabedoria do professor para propor atividades inovadoras de ensino. Esse material será apresentado no quinto capítulo desta dissertação.

3.5 O GEOGEBRA

O GeoGebra[8] é um software livre de geometria dinâmica criado em 2001 na Universidade de Salzburg por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. É escrito em Java e assim está disponível em múltiplas plataformas. Observa-se que o software apresenta contínuo desenvolvimento, e para este trabalho usou-se a versão GeoGebra 3.2 (3. 6. 2009). Por ser um software livre a sua manipulação em sala de aula torna-se muito viável, pois alunos e professores podem tê-lo em seus computadores domiciliares.

[8] A versão GeoGebra 3.2 (3. 6. 2009) que está disponível para download no site www.geogebra.org, assim como, neste mesmo site é possível encontrar manual, fórum de discussão e exemplo de atividades desenvolvidas.

A característica dinâmica aparece pela possibilidade de manipular os objetos permitindo o movimento quase contínuo deste, permitindo que os vínculos estabelecidos inicialmente na sua construção sejam mantidos.

Para o professor utilizar do movimento em suas aulas preservando as construções iniciais é uma evolução, pois em aulas tradicionais usando somente giz e lousa a geometria tradicional de régua e compasso é estática e não permite a visualização e análise do objeto construído em outra posição, a menos que se construa um novo desenho.

Com o GeoGebra é possível construir pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas bem como funções e alterar todos esses objetos dinamicamente após a construção estar finalizada. E também podem ser incluídas equações e coordenadas diretamente por uma entrada na janela inicial. Assim, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, vetores e pontos, derivar e integrar funções e ainda oferece comandos para encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Deste modo, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria, com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Traz a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

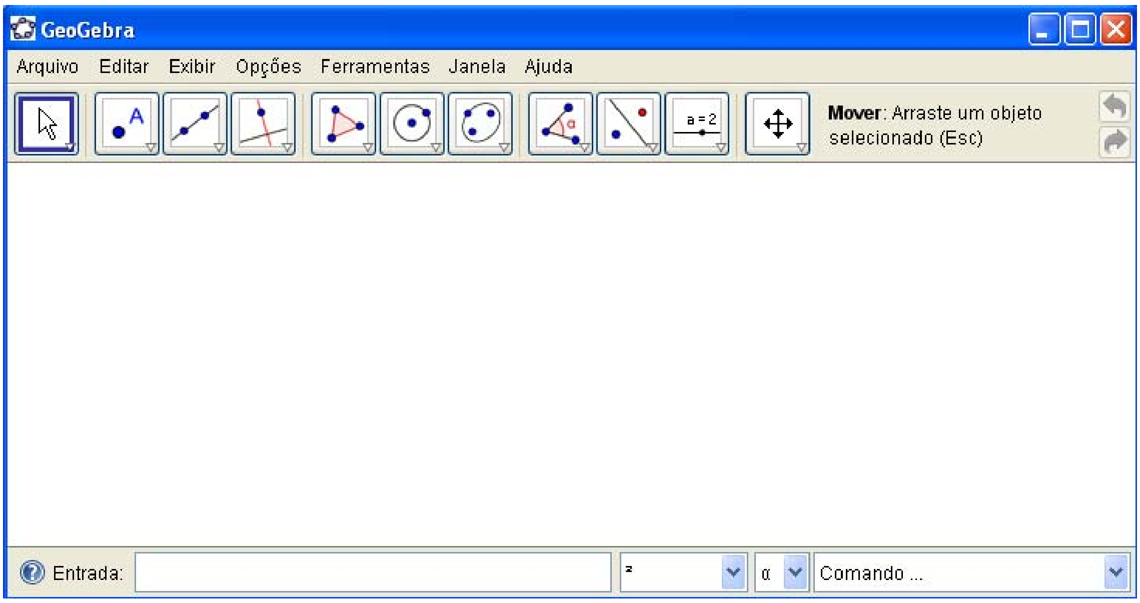


Figura 20: Interface inicial do GeoGebra 3.2

No capítulo 5 é sugerido um material instrucional para alguns dos temas estudados na Trigonometria no Ensino Médio que faz uso do GeoGebra como ferramenta para dar o dinamismo aos conteúdos.

O primeiro aplicativo proposto se inicia com o estudo das Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo a partir da semelhança de triângulos dando ênfase na construção da trigonometria em função de ângulos. Aproveitando os resultados do primeiro aplicativo, o segundo aplicativo trabalha com as relações entre ângulos complementares no Triângulo Retângulo. Num terceiro aplicativo exploramos a construção e características do Ciclo Trigonométrico, explorando seus elementos de forma detalhada. Logo em seguida, propõe-se um olhar mais cuidadoso para os Arcos Notáveis no Ciclo Trigonométrico. Apresenta-se, então, um aplicativo que transporta os elementos do ciclo para a sua construção gráfica e, por último, três aplicativos explorando as transformações gráficas que ocorrem a partir da variação de certos parâmetros reais das funções seno, cosseno e tangente.

3.6 O GRAPES

O Grapes[9] é um programa de desenvolvimento matemático, voltado para plotar gráficos de funções. Sua funcionalidade diversificada possibilita a utilização do programa para aplicações básicas de matemática de ensino fundamental e médio, e até mesmo para tópicos de cálculo avançado, como séries de Fourier, que decompõem uma função periódica através de senos e cossenos.

Uma característica interessante deste programa é a possibilidade de se alterar parâmetros matemáticos em tempo real. Um gráfico plotado pode ser alterado passo a passo, até se obter a função desejada. O Grapes suporta operações vetoriais, essenciais para aplicações em Engenharia, e também pode ser personalizado através de programação simples.

O desenvolvedor, Katsuhisa Tomoda, optou pela facilidade de uso no seu programa, desenvolvendo assim uma ferramenta simples, amigável e dinâmica, porém retirando boa parte das opções e possibilidades mais avançadas de outros softwares matemáticos mais complexos, como MATLAB, Mathematica e Maple.

Com simples movimentos de mouse, é possível analisar os gráficos sob diversos aspectos. A sua interface é auto-explicativa.

[9] O Programa Grapes pode baixado no site http://www.criced.tsukuba.ac.jp/grapes/pt/volume.html e nem precisa ser instalado, pois sua configuração comporta menos que 700 Kb, basta baixar e usar.

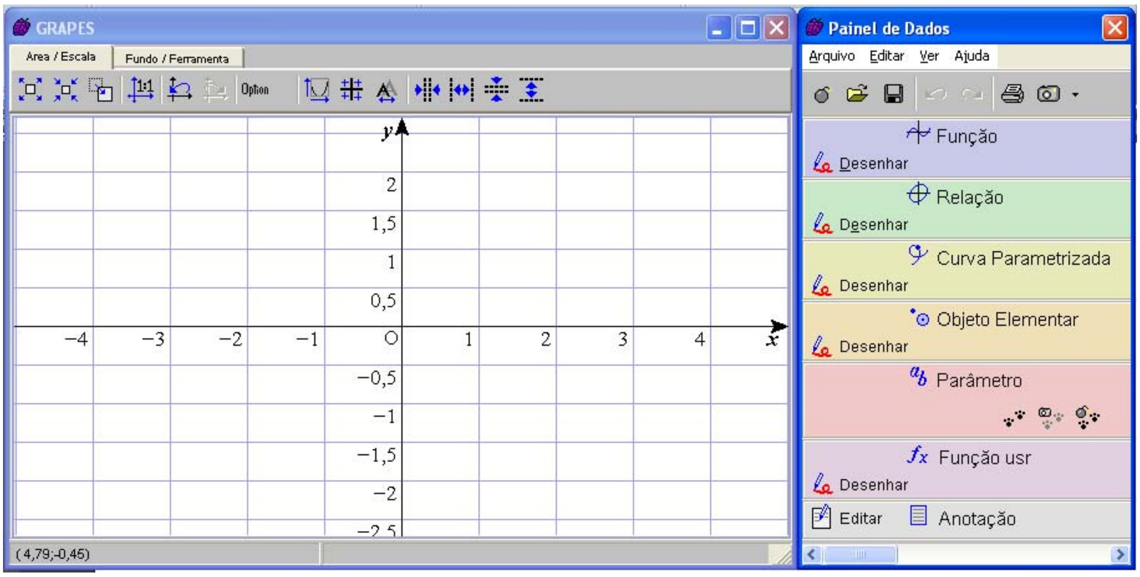
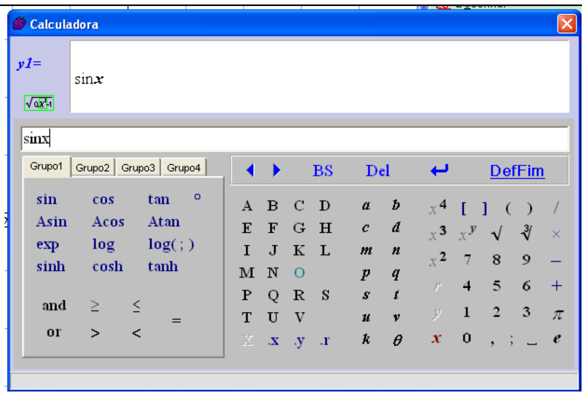


Figura 21: Interface inicial do Grapes

Podem-se citar exemplos práticos que utilizam o Grapes como alternativas didático-pedagógicas para aprimorar o trabalho docente no ensino de Trigonometria: ferramenta para justificar uma das conveniências de se usar os ângulos medidos em radianos ao invés de graus e, para desenvolver um trabalho rápido e prático sobre as variações gráficas das Funções Trigonométricas.

A tabela abaixo apresenta a primeira atividade dada no exemplo como sugestão de conhecimento do software, assim como a manipulação de algumas de suas ferramentas:

Vá até o Campo FUNÇÃO e clique em Desenhar.	
Irá aparecer uma calculadora. Nela, clique na tecla ***sin*** e em seguida em ***x*** e aperte a tecla DefFim.	

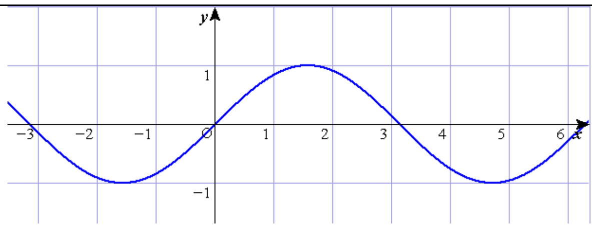
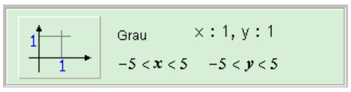
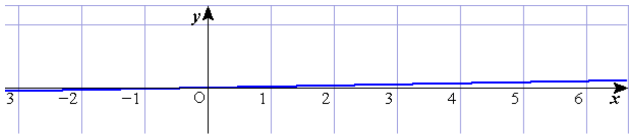
Aparecerá uma nova janela de formatação do gráfico, se quiser mude a cor, espessura e estilo da curva, em seguida, clique em **<u>ok</u>**.	
Imediatamente aparecerá na tela o gráfico da função seno na escala 1:1. Observe que o eixo x esta em radianos.	
Para visualizar o mesmo gráfico em graus na escala 1:1 vá até **Option** e clique em  e depois ok.	

Tabela 5: Instruções para atividade com o Grapes.

Ao comparar os dois gráficos obtidos, pode-se perceber a impossibilidade de representar o gráfico na escala de 1:1 em graus em uma folha de papel. Desta maneira, esta é uma possível justificativa para a conveniência de utilizar o radiano para medidas de ângulos em Trigonometria.

Na verdade, a grande necessidade se utilizar os arcos em radianos surge na matemática computacional, que tem algoritmos eficazes para o cálculo de valores das funções trigonométricas, naturalmente construídos a partir de resultados do cálculo diferencial e integral, quando os arcos são tomados em radianos.

CAPÍTULO 4

A Construção da Proposta Pedagógica

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os referenciais teóricos de trigonometria dos quais, a partir da prática docente da professora pesquisadora, foram construídos um conjunto de propostas pedagógicas, em uma determinada sequência a ser seguida para o ensino da trigonometria.

Descreve-se, inicialmente, a relação da trigonometria no currículo e nos materiais disponíveis ao acesso dos professores. Logo em seguida, propõe-se uma visão geral da prática diária da professora pesquisadora e uma descrição geral da sequência de atividades preparadas e, em seguida, relata-se os aspectos gerais da aplicação destas atividades.

4.2 A PROPOSTA NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA NAS ESCOLAS DE ENSINO FUNDAMENTAL II E MÉDIO

Segundo o PCN+[10], a matemática das três séries do Ensino médio podem ser divididas em três eixos ou temas estruturadores

1. Álgebra: números e funções
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados (PCN+, p. 120)

Este conjunto de temas possibilita o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das idéias e conteúdos matemáticos.

A Trigonometria está envolvida tanto com o primeiro quanto com o segundo eixo, porém, segundo as propostas curriculares, vamos enquadrá-las no primeiro eixo. De maneira geral, a trigonometria aparece nos Parâmetros Curriculares da seguinte maneira:

> Apesar de sua importância, tradicionalmente a **trigonometria** é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo. (PCN+, p. 118)

A proposta aborda este primeiro eixo como o responsável por desenvolver habilidades aos alunos de interpretar modelos, perceber o sentido de transformações, buscar regularidades, conhecer o desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura e adquirir uma visão sistematizada de parte do conhecimento matemático. Este eixo é dividido em duas unidades temáticas:

> **1. Variação de grandezas:** noção de função; funções analíticas e não-analíticas; representação e análise gráfica; seqüências numéricas: progressões e noção de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas.
> • Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática.
> • Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana.
> • Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes.

[10] O PCN+ complementa os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM). A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias deste documento pode ser acessada em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf .

> • Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas.
> • Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.
>
> **2. Trigonometria:** do triângulo retângulo; do triângulo qualquer; da primeira volta.
> • Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
> • Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais. (PCN+, p. 122-123) (grifo da pesquisadora)

A partir das palavras acima, é possível observar as teorias e conceitos de Trigonometrias nas mais diversas áreas da matemática. No Caderno do Professor de Matemática da proposta pedagógica do Estado de São Paulo, da 2ª série do Ensino Médio, 1º bimestre de 2008, na página 8, temos um diagrama que representa essa afinidade da Trigonometria com as outras grandes áreas da Matemática:

Figura 22: Eixo de relacionamento da Trigonometria com as outras áreas da Matemática.

Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de Trigonometria em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações, incluindo problemas de Matemática e de outras áreas. O aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre Trigonometria para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

A Trigonometria começa a ser estudada ainda no Ensino Fundamental na sua última etapa (8ª série ou 9º ano) e segue por todo o Ensino Médio. Existem variações da grade curricular em diferentes escolas. Esta variação tem relações com a proposta pedagógica da escola e, principalmente, com os materiais didáticos adotados. Desta forma, a descrição e a análise dos materiais são referências para a construção de um produto que tenha inovações e auxilie o aperfeiçoamento da prática do professor no ensino de trigonometria.

Em seguida, serão descritas e analisadas duas referências de grade curricular e, de encadeamento do conteúdo da trigonometria proposto nos materiais sob aspectos como:

abordagem histórica, problemas aplicados, experimentos, propostas com o uso do computador ou, se existem atividades diferenciadas. As referencias são:

- O material da rede estadual de São Paulo: São Paulo Faz a Escola;
- O material apostilado do Objetivo, o qual foi utilizado nas escolas em que esta pesquisa foi aplicada;

4.21 PROPOSTA SÃO PAULO FAZ A ESCOLA

Na proposta do governo do Estado de São Paulo são escolhidos alguns temas para compor o conteúdo disciplinar sem se afastar do que é apresentado nos livros didáticos. Propõem uma inovação sob a contextualização dos conteúdos, as competências individuais envolvidas e os elementos culturais internos e externos à matemática.

A trigonometria aparece em diversos momentos a partir da última série do Ensino Fundamental II. Veja a tabela com as informações do conteúdo abordado nos diferentes bimestres:

8ª série EFII	3º Bimestre	**Proporcionalidade na geometria** • O conceito de semelhança. • Semelhança de triângulos. • Razões trigonométricas.
1ª série EM	4º Bimestre	**Geometria-Trigonometria** • Razões trigonométricas nos triângulos retângulos. • Polígonos regulares: inscrição, circunscrição • e pavimentação de superfícies. • Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos co-senos.
2ª série EM	1º Bimestre	**Trigonometria** • Fenômenos periódicos. • Funções trigonométricas. • Equações e inequações. • Adição de arcos.
3ª série EM	3º Bimestre	**Estudo das funções** • Qualidades das funções. • Gráficos: funções trigonométricas,exponencial, logarítmica e polinomiais. • Gráficos: analise de sinal,crescimento e taxa de variação. • Composição: translações e reflexões. • Inversão.

Tabela 6: Grade Curricular de Trigonometria na proposta do governo do Estado de São Paulo.

Observe que há fases diferentes da exploração da trigonometria na grade curricular. Na ultima série do Ensino Fundamental II há uma preocupação com a fundamentação geométrica da trigonometria, principalmente com a exploração das regularidades encontradas nas semelhanças de triângulos. No ensino Médio, na primeira série, no último bimestre, é proposta uma consolidação das idéias iniciadas anteriormente, através da contextualização de diferentes situações práticas e a extensão do significado das razões trigonométricas para ângulos maiores que 90^o (inclinação de rampas, inclinação das retas, uso de cordas para cálculo de distâncias astronômicas). Ainda neste momento inicia-se o estudo do ciclo trigonométrico.

Na segunda série do Ensino Médio a proposta parte para a modelagem de fenômenos periódicos observados em diversos fenômenos naturais. Desta maneira, depois de reconhecida e registrada a periodicidade, é proposto o estudo do modelo da circunferência trigonométrica com as medidas dos arcos na primeira determinação positiva, em graus e em radianos, inclusive dos arcos notáveis. Na continuação, há um estudo de funções, equações e inequações trigonométricas e o fechamento da proposta é com o tratamento da adição de arcos. A contextualização fica por conta da análise do movimento aparente do Sol e o comprimento das sombras, do tratamento da periodicidade da claridade ou da temperatura de uma cidade e, dos fenômenos das marés.

Na terceira série do Ensino Médio resgatam-se as funções trigonométricas tratadas na segunda série sob o enfoque de apesar dos valores de x poderem variar livremente ao longo de toda a reta real e os valores correspondentes de $f(x)$ repetirem-se periodicamente, as funções seno e cosseno são limitadas ao intervalo [-1,1].

É sugerido que o professor use, sempre que possível, materiais disponíveis como textos, softwares, sites, vídeos, em sintonia com a forma de abordagem do conteúdo para o enriquecimento das aulas. Esta idéia se relaciona intrinsecamente com a proposta desta dissertação de mestrado.

4.22 MATERIAL OBJETIVO

Nas escolas, cuja professora pesquisadora aplicou as atividades desta pesquisa, utilizam como referência o material apostilado Objetivo. Como a maioria dos materiais, o conteúdo programático de trigonometria aparece em diversos momentos com nível de aprofundamento diferentes.

Neste material, cada série vem com um conjunto de quatro apostilas. Na Primeira Série do Ensino Médio a matemática é dividida em duas frentes – frente 1 e frente 2. A trigonometria aparece na segunda e na terceira apostila desta série na frente 1 segundo a seguinte proposta:

> a) Definir seno, cosseno e tangente como a razão entre dois determinados lados de um triângulo retângulo. Calcular o seno, o cosseno e a tangente de 30º, 45º e 60º. Obter as relações fundamentais entre o seno, o cosseno e a tangente. Apresentar, por meio de exercícios, as inúmeras aplicações práticas, principalmente as que se referem ao cálculo de "certas distâncias".
>
> b) Estudar detalhadamente, a função seno, a função cosseno e a função tangente com as mesmas orientações das demais funções.
>
> c) Resolver equações e inequações trigonométricas, dando ênfase às soluções que pertencem ao primeiro ciclo.
>
> d) Apresentar o formulário básico de trigonometria, que deve se restringir às fórmulas relativas ao arco soma e ao arco duplo.
>
> e) Resolver triângulos com o auxilio do teorema dos senos e do teorema dos cossenos e apresentar o maior número possível de aplicações.

A dinâmica proposta é através de aulas tradicionais divididas em 23 módulos para serem desenvolvidos em aulas de 50 minutos cada, seguindo a seguinte programação:

- Seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo;
- Arcos notáveis (I);
- Arcos notáveis (II);
- Arcos notáveis (III);
- Relações fundamentais (I);
- Relações fundamentais (II);
- Medidas de arcos e ângulos;
- Ciclo trigonométrico – determinações;

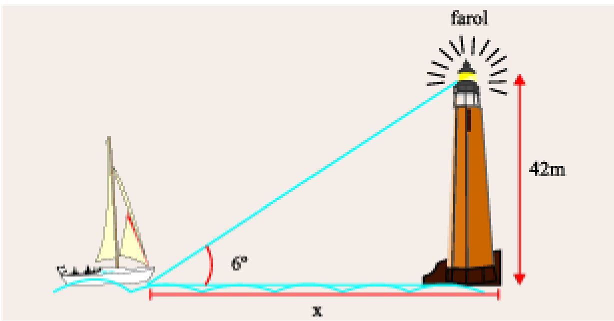
- Função seno;
- Equações e inequações que envolvem a função seno;
- Função cosseno;
- Equações e inequações que envolvem a função cosseno;
- Função tangente;
- Equações e inequações que envolvem a função tangente;
- Equações trigonométricas;
- Equações trigonométricas;
- Inequações trigonométricas;
- Inequações trigonométricas;
- Adição e subtração de arcos;
- Arco duplo;
- Lei dos senos;
- Lei dos co-senos;
- Resolução de triângulos;

Para cada módulo são sugeridos alguns exercícios para serem feitos em aulas e, junto ao material, tem-se outra apostila com listas de exercícios para serem estudados em casa.

Podem-se dividir os exercícios propostos em três categorias, especificadas abaixo com os respectivos exemplos:

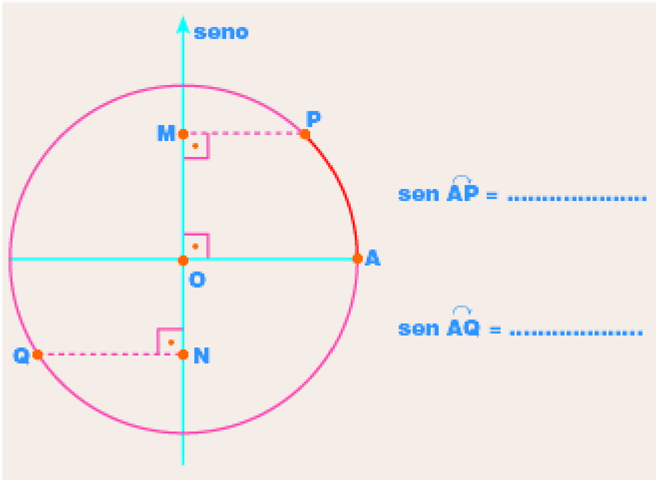
- Os exercícios contextualizados (alturas de prédios, rampas, sombras, etc.).

Um barco avista a torre de um farol segundo um ângulo de 6° com o nível do mar. Sabendo que a altura do farol é de 42m, determinar a distância do barco até o farol. Dado tg 6° = 0,105.



- Os exercícios teóricos que dão ênfase a manipulações algébricas.

Utilizando a figura, complete as definições:



- Os exercícios de fixação.

Calcular a 1ª determinação positiva dos arcos:
a) 1630°   b) –1630°   c) 2100°

A origem destes exercícios, em sua maioria, é de provas de vestibular.

Esse mesmo conteúdo volta na terceira série do Ensino médio, na frente 3 (a terceira série do ensino médio é dividida em quatro frentes) apenas na primeira apostila. A abordagem é diferente: além de resumir várias aulas em uma, principalmente por considerar que o aluno já aprendeu as noções básicas sobre o assunto na primeira série, a proposta de exercícios é bem diferenciada com uma estrutura mais reflexiva e abrangente caracterizando questões de vestibular.

São propostos nove módulos (aulas de 50 minutos) que seguem a seguinte divisão:

- Funções trigonométricas no triângulo retângulo;
- Relações fundamentais e auxiliares;
- Medidas de arcos e ângulos – ciclo trigonométrico;
- Função seno e função cosseno;
- Função tangente, cotangente, secante e cossecante;
- Equações trigonométricas;
- Inequações e gráficos;
- Adição de arcos – arco duplo;
- Relações trigonométricas em um triângulo qualquer;

No material de aula tem-se apenas o título da aula e alguns (em torno de seis) exercícios propostos, porém o aluno recebe uma coleção de livros que explora a teoria detalhadamente seguida de uma grande quantidade de exercícios extraídos principalmente de vestibulares.

Torna-se evidente que o aluno que não aprendeu de fato as teorias a respeito de Trigonometria na primeira série, tem dificuldade em acompanhar a terceira série seja pela agilidade com que os conteúdos são apresentados, seja pelo aprofundamento dado a esta matéria neste período.

Observa-se que há a possibilidade do professor inserir experimentos, aulas em laboratórios de informática, elementos da História da Matemática às aulas tradicionais, porém, isso é de responsabilidade única do professor ao preparar sua aula. Desta forma, este deve contar com a busca de muitos conhecimentos extras.

4.3 DIFICULDADES NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Após analisar as grades curriculares e os materiais disponíveis como referência, é possível identificar uma corrente de esforços para contextualizar e dar significado ao ensino da Trigonometria na escola básica. O ensino inicial de Trigonometria, ainda no triângulo retângulo, sempre teve uma abordagem mais histórica em seus livros e programas, principalmente pela necessidade do uso de tábuas trigonométricas.

Porém, apesar de aparecerem uma série de exercícios contextualizados que usam este contexto para o cálculo de distâncias – sejam na escada, alturas de prédios, distâncias astronômicas – eles aparecem de forma repetitiva e mecanizada, cheia de regras e, até mesmo, sem significado. Atribuímos esta falta de significado pela falta de vivência dos alunos de atividades mais concretas neste contexto. Muitos materiais apresentam sugestões de atividades, porém, não deixam o professor consciente de que experimentos nesta área geram erros com muita facilidade e o professor deve estar preparado para vivenciar situações de contorno relativamente delicadas.

Já na abordagem Analítica dada à trigonometria no ensino médio, temos muitas propostas bem tradicionais que usam a trigonometria como um amontoado de contas, resolução de equações e inequações sem contextualizá-las, ou ainda, explorando as diversas identidades trigonométricas de forma dura. Por esta razão e, ainda, por se tratar de um tema com muitos detalhes, simetrias e limitações, os alunos no ensino médio costumam caracterizar a trigonometria como uma matéria difícil. Muitos até desistem de aprender aceitando um fracasso.

Desta maneira, a proposta desta pesquisa é provocar no aluno um interesse maior pelo estudo da trigonometria, propondo, além de um material instrucional para auxiliar o professor neste trabalho, deixar evidentes as dificuldades que podem ser esperadas em cada etapa.

4.4 A PESQUISADORA COMO PROFESSORA

Professora do Ensino Médio desde sua formação, atualmente, em fevereiro de 2010, trabalha em duas escolas da rede Objetivo das cidades de Mogi Mirim e Mogi Guaçu, escolas que foram referências para esta pesquisa. No ano de 2009, foi professora das três séries do Ensino Médio de Mogi Mirim e apenas da primeira e segunda séries do Ensino Médio de Mogi Guaçu, porém, a terceira série do Ensino Médio desta escola também fez parte desta pesquisa.

No inicio da sua carreira teve várias frustrações por conta de não entender como a Matemática podia não ser interessante para muitos dos seus alunos. Assim sendo, sempre procurou trabalhar com o foco no raciocínio, e para o desenvolvimento de habilidades de resolver problemas ou interpretação de situações em que a matemática pudesse aparecer.

Para proporcionar aos estudantes um aprendizado significativo dos conceitos e técnicas da Matemática, sempre procurou justificar o conteúdo, seja com demonstrações, seja contextualizando ou utilizando outras dinâmicas diferenciadas.

Durante sua experiência profissional percebeu que a trigonometria era um tema do qual os alunos não se aproximavam muito. Depois de ingressar no Mestrado Profissional da UFSCar, através das aulas de Tecnologias da Informação para o Ensino de Ciências e Matemática do Professor Paulo Caetano, viu no GeoGebra uma ferramenta capaz de inovar seu ambiente escolar, principalmente no assunto de Trigonometria. Este foi o início deste projeto que conta com a produção de um material instrucional que utiliza diversas técnicas (atividades concretas, experimentos, aplicativos, aulas tradicionais, aulas em laboratório de informática) para o ensino de trigonometria com foco em atrair a atenção dos alunos e facilitar o entendimento dos diversos conceitos e detalhes para que os alunos venham a ter uma aprendizagem significativa.

O foco do trabalho foi essencialmente na primeira série do Ensino Médio, enquadrando a teoria de Trigonometria ao currículo desta série. Como o tema volta a ser revisto na terceira série do Ensino Médio, nesta série, a autora pesquisadora procurou trabalhar com aulas expositivas, tendo para isso confeccionado um conjunto de aplicativos que dessem movimento e consequentemente, significado à trigonometria. Com o apoio da coordenação das duas escolas, ficou estipulado que seriam ministradas aulas inovadoras, mas também aulas tradicionais de modo que os estudantes não perdessem a conexão com o conteúdo programático adotado pelos colégios.

Durante o primeiro semestre de 2009 estruturaram-se as atividades que seriam aplicadas ao longo do ano acompanhando a programação determinada e com apoio na experiência da professora autora e em outras metodologias.

4.5 SÍNTESE DAS ATIVIDADES PROPOSTAS NESTE TRABALHO

O material instrucional construído nesta dissertação utiliza diferentes recursos propostos pela Educação Matemática que se conectam com a grade curricular proposta para o ensino médio e, também, vai de encontro com os textos, recursos, sites, softwares disponíveis a respeito do assunto. Vale ressaltar que procuramos construir a metodologia a partir do conteúdo programático.

Pode-se dividir o produto desta dissertação em dois grupos distintos:

a) Atividades com dinâmicas diversas (experimentos concretos, história da matemática e material manipulativo) que usam um tempo maior de aula – em torno de três horas/aula - escritas na íntegra no Apêndice A:

- **Atividade 1**: *A Construção das Tábuas Trigonométricas;*
- **Atividade 2**: O Inclinômetro;
- **Atividade 3**: O radiano;
- **Atividade 4**: Funções Trigonométricas com canudos;

b) Aplicativos que contextualizam os conceitos estudados em trigonometria de forma detalhada e dinâmica que usam o software GeoGebra para sua construção. São seis aplicativos que podem ser usados em espaços curtos de uma aula para fundamentar a teoria dada e serão descritos no capítulo 5:

- **Aplicativo 1**: Aplicativo dos Triângulos Semelhantes;
- **Aplicativo 2**: Aplicativo das Razões Trigonométricas em Ângulos Complementares
- **Aplicativo 3**: Aplicativo do Ciclo Trigonométrico
- **Aplicativo 4**: Aplicativo do Arcos Notáveis no Ciclo Trigonométrico
- **Aplicativo 5**: Aplicativo das Funções Trigonométricas
- **Aplicativo 6**: Conjunto de três aplicativos que exploram as Variações dos Gráficos das Funções Trigonométricas

Apenas as aplicações de três destas atividades foram descritas neste trabalho no capítulo 5. Os aplicativos criados no GeoGebra estão descritos no capítulo 5 e, seu conteúdo digital está disponibilizado, na íntegra, em um CD anexado a esta dissertação.

A maioria destas atividades também foi postada no Portal do Professor.

CAPÍTULO 5

Descrição e Análise das Atividades

5.1 INTRODUÇÃO

A proposta construída neste trabalho relaciona várias abordagens da trigonometria para serem exploradas em diferentes momentos do currículo escolar com objetivos específicos. Desta maneira, neste capítulo descrevem-se algumas atividades que foram aplicadas em diferentes turmas da qual a professora pesquisadora é (era) docente.

As duas primeiras atividades, "A Construção das Tábuas Trigonométricas" e "O Inclinômetro", foram aplicadas na primeira série do Ensino Médio. É preciso informar que alunos da 1ª série do Ensino Médio estão em processo de adaptação e apresentam, de maneira geral, muito medo pela cobrança e a quantidade de estudos que deles é exigida. Inicialmente, pediu-se para que eles escrevessem qual a relação que eles tinham com a Trigonometria. Apresentam-se algumas das respostas abaixo:

> "Trigonometria é um jeito criado um pouco complicado para medir os ângulos de algumas formas geométricas."
> "Trigonometria é uma matéria complicada, mas legal, onde exige muito estudo."
> "Trigonometria para mim agora é muito importante, mas bem complicado de entender. É algo que necessita de muito treino e dedicação. Mas é muito difícil e no começo não consigo entender, quem sabe depois."

De maneira geral os alunos apontam dificuldades diversas: familiarização com fórmulas, dificuldade de interpretar problemas, manipulações algébricas com as funções e identidades trigonométricas, aplicação de adição (e subtração) de arcos, ou ainda, arcos duplos. Outro agravante é a preocupação com a Matemática no Ensino Médio: com o foco no desenvolvimento das habilidades e competências, é preciso desenvolver raciocínio e a relação e interpretação de informações, fator que causa dificuldades se não existir o comprometimento do aluno e a persistência em obter o conhecimento.

Para o desenvolvimento do projeto, os alunos compareceram nas escolas no período complementar ao das aulas regulares, em um momento chamado de Laboratório de Matemática. As duas atividades, 1 e 2, foram aplicadas aos alunos da 1ª série do Ensino Médio das escolas Objetivo de Mogi Guaçu, no dia 25 de maio de 2009 e, de Mogi Mirim, no dia 27 de maio de 2009. A aplicação da atividade em Mogi Mirim teve a presença do orientador deste trabalho, professor João C. V. Sampaio.

A Atividade 4, "Funções Trigonométricas com Canudos", foi aplicada no terceiro ano do Objetivo de Mogi Mirim já em 2010 e, a aplicação dos aplicativos que usam o GeoGebra foram propostos na terceira série do Ensino Médio de Mogi Guaçu de 2009.

As atividades 1, 2 e 4 foram aplicadas também em outras turmas, porém, restringimos a análise destas aplicações às turmas citadas acima. Também foi trabalhada, em uma turma de alunos, a atividade 3, "Exploração do Radiano com Barbantes", cujo texto instrucional encontra-se no apêndice, mas cuja análise foi omitida aqui.

Para uma leitura adequada das seções 5.2, 5.3 e 5.4 deste capítulo, recomenda-se a leitura preliminar das atividades do Apêndice deste trabalho, que contém o texto instrucional das atividades.

5.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE 1

A Atividade 1 foi planejada para tratar das regularidades dos triângulos retângulos semelhantes e, para construir, a partir da observação dos padrões, as razões e as tábuas trigonométricas. A proposta é que o aluno tenha contato com a atividade experimental – manipulando triângulos, fazendo medições com transferidor e régua, e cálculos em calculadora – mas que também vivencie elementos da História da Matemática – para familiarizar-se com as regularidades observadas e vivenciar idéias que foram concebidas na antiguidade, a fim de entender o significado das construções das tábuas e o nome dado às razões.

5.2.1 PROPOSTA E APLICAÇÃO

Foi utilizado um período de três horas-aulas para a aplicação desta atividade. Para facilitar a análise, dividimos a aplicação em momentos:

- **Momento 1**: Separação em grupos de quatro integrantes e distribuição do material;
- **Momento 2**: Em cada grupo, cada integrante se responsabiliza pela medição dos lados (usando régua) e dos ângulos (usando transferidor) de dois dos oito triângulos retângulos que foram distribuídos nas fichas.
- **Momento 3**: Depois das medições feitas, cada aluno deverá preencher a tabela abaixo do triângulo com o cálculo das razões entre lados determinados. Em seguida, o grupo deve juntar as fichas e separá-las segundo os pares de triângulos semelhantes.
- **Momento 4**: Agora é o momento da comparação dos dados encontrados entre os triângulos semelhantes (registrado em duas fichas) e, os dados da tábua trigonométrica fornecida com aproximação de quatro casas decimais, para isso, cada aluno deverá preencher uma das quatro tabelas (Tabela1 – para as fichas 1 e 2, Tabela2 – para as fichas 3 e 4, Tabela3 – para as fichas 5 e 6 e, Tabela4 – para as fichas 7 e 8) como as do apêndice;
- **Momento 5**: Depois das tabelas preenchidas será conveniente cada grupo fazer a análise dos resultados encontrados e responder às questões propostas da Folha de Atividades.

Depois dos alunos divididos em grupos e distribuídos os materiais, tornou-se necessária a explicação da atividade de uma maneira geral para os grupos. É importante que o professor fique atento para esse tipo de proposta, pois o envolvimento do aluno é diferente do seu envolvimento em uma aula tradicional e o trabalho permite movimentação: alunos medindo, calculando, refletindo e argumentando durante a produção da atividade. A organização deve estar sempre presente para não haver perda de controle por parte do professor.

Durante o Momento 2, causou grande surpresa o fato de que muitos alunos não sabem utilizar o transferidor e não se preocupam com a precisão no uso da régua. Desta maneira, o professor deve estar atento para as medidas feitas, para orientar a possibilidade de erros maiores se não houver cuidado e atenção com a coleta de dados.

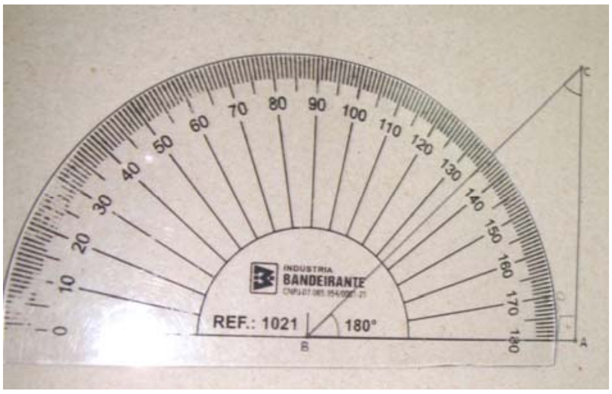


Figura 23: Medição dos ângulos do triângulo com transferidor.

A percepção sobre os erros acontece em dois momentos, um que envolve o transferidor e outro que envolve a régua. Ao circular pela classe e conferir as medições é possível observar anotações de triângulos cuja soma dos ângulos internos excedem 180º. Observe as figuras abaixo que ilustram este equívoco:

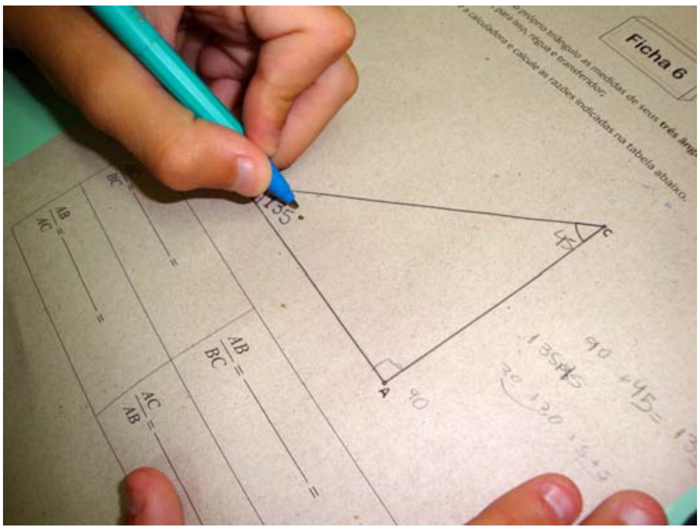


Figura 24: Triângulo com um ângulo interno de 45º, um de 90º e o terceiro de 135º.

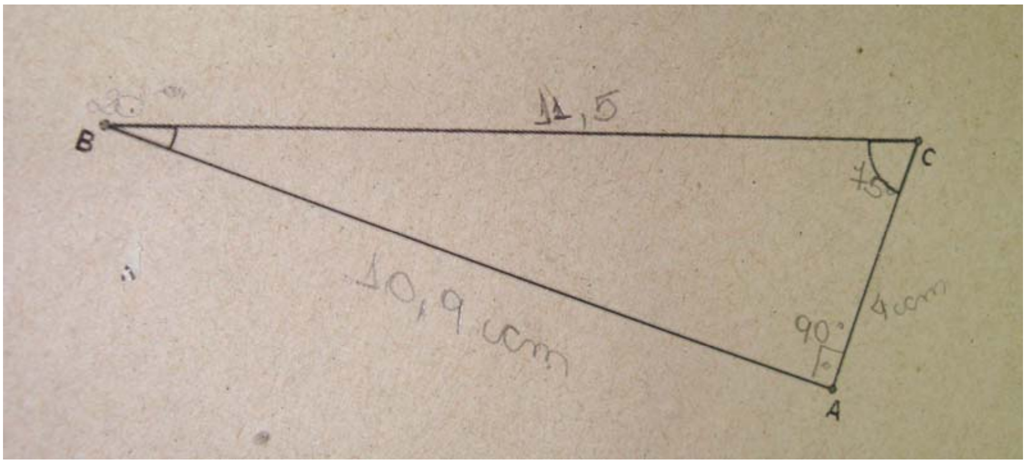


Figura 25: Triângulo com um ângulo interno de 20º, um de 90º e o terceiro de 75º.

Esse erro acontece pelo mau uso do transferidor: o aluno vê a medida do ângulo a partir de 180º e não da origem, 0º, do transferidor. Nestes momentos o professor pode aproveitar para reflexões: “Este ângulo é agudo ou obtuso?”, ou ainda, “Qual o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo?”. Em hipótese alguma foi apontado a esse aluno o erro, mas sim, proposta uma reflexão para que este reconsiderasse o uso da ferramenta com mais cuidado.

Ainda neste momento de medições, a relação de semelhança entre os triângulos deve ser observada: congruência entre ângulos internos correspondentes, e proporcionalidade entre os lados correspondentes. Como os alunos estão com calculadora em mãos, este cálculo fica facilitado.

Em um dos grupos, ao calcular a razão de proporcionalidade entre triângulos semelhantes, observou-se divergência dos resultados coletados. Propôs-se, então, uma nova medição e o aluno pode rever a falta de atenção para com a contagem dos milímetros na régua.

Depois da atividade aplicada observou-se a necessidade de colocar na FOLHA DE ATIVIDADES alguns questionamentos que permitissem a discussão sobre os triângulos semelhantes para facilitar a condução da atividade na classe. A primeira série do ensino Médio ainda é bem dependente do professor. Desta maneira, enquanto existe dúvida sobre a atividade e alguns procedimentos, os alunos ficam sem ação, esperando a resposta do professor.

Agora, segue-se para o terceiro momento cuja proposta é que os alunos preencham as quatro tabelas para cada par de triângulos semelhantes.

Então, é um momento de reflexão sobre o que é seno, cosseno e tangente. Os alunos lembram-se das razões trigonométricas, mas apontam um amontoado de fórmulas com nomes difíceis. Neste momento torna-se oportuno abordar a história do nome SENO e, consequentemente, do COSSENO. Após esta reflexão, os alunos sentem-se mais familiarizados.

Para fazer os cálculos, muitos alunos querem usar a calculadora do telefone celular. Esta opção não é recomendada, pois o celular tem outros atrativos e, o aluno pode se dispersar facilmente para escrever ou receber uma mensagem de texto, tirar fotos, enfim, explorar outros recursos do aparelho.

Este é o momento de maior trabalho do professor, pois deve levar o aluno a refletir sobre diversos padrões que aparecem: a relação existente nos ângulos complementares $\hat{B}$ e $\hat{C}$ ($\operatorname{sen}\hat{B} = \cos\hat{C}$ e $\operatorname{sen}\hat{C} = \cos\hat{B}$; $\operatorname{tg}\hat{B} = \operatorname{cotg}\hat{C}$ e $\operatorname{tg}\hat{C} = \operatorname{cotg}\hat{B}$); como foram construídas as tábuas trigonométricas e com qual objetivo; a relação de dependência que há das razões trigonométricas com o ângulo medido e não necessariamente do triângulo observado.

Foram propostas algumas perguntas de forma corrida para que os grupos respondessem. Observa-se que este questionário foi reconfigurado para ser apresentado no Apêndice A de forma que as questões fossem separadas, facilitando a análise das respostas.

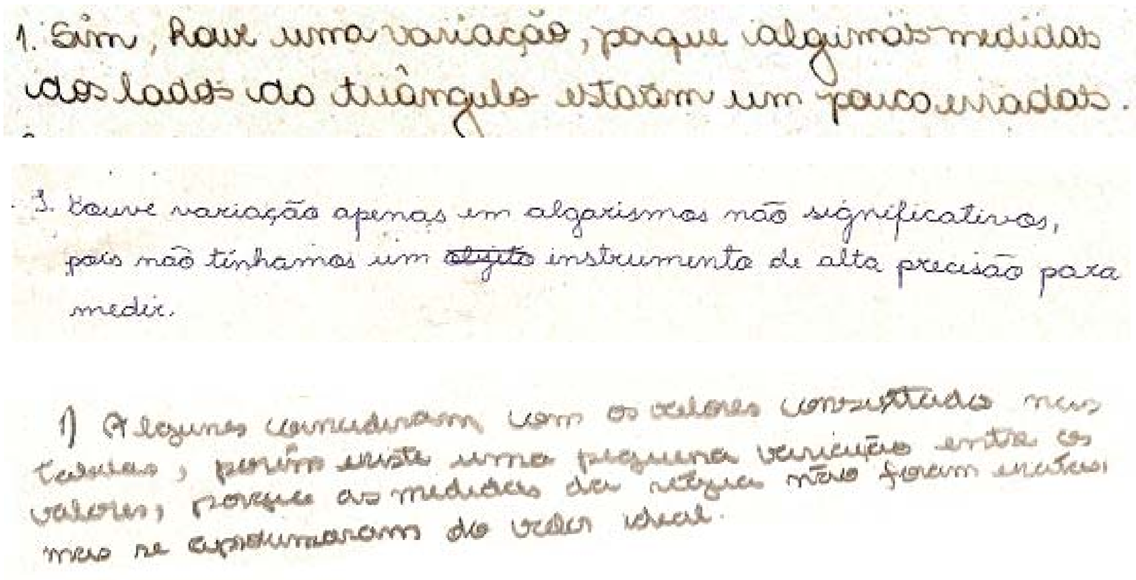
Apresentam-se abaixo as questões propostas e algumas respostas dos alunos que mostram a reflexão e o envolvimento com a atividade:

Questão 1:

Avalie se os valores que o seu grupo encontrou coincidem com os valores consultados nas tabelas. Houve alguma variação? Se sim, justifique por quê.

Algumas respostas encontradas:

> "Sim, houve uma variação, porque algumas medidas dos lados do triângulo estavam um pouco erradas."
> "Houve variação apenas em algarismos não significativos, pois não tínhamos um instrumento de alta precisão para medir."
> "Alguns coincidiram com os valores consultados nas tabelas, porém existe uma pequena variação entre os valores, porque as medidas da régua não foram exatas, mas se aproximaram do valor real."


1. Sim, houve uma variação, porque algumas medidas dos lados do triângulo estavam um pouco erradas.

3. Houve variação apenas em algarismos não significativos, pois não tínhamos um ~~objeto~~ instrumento de alta precisão para medir.

1) Algumas coincidiram com os valores consultados nas tabelas, porém existe uma pequena variação entre os valores, porque as medidas da régua não foram exatas mas se aproximaram do valor ideal.

Figura 26: Respostas de grupos de alunos à questão 1

Para responder essa questão, os alunos compararam os dados coletados a partir dos dois triângulos com os dados encontrados na tabela trigonométrica distribuída inicialmente.

Foi interessante notar que houve variação dos valores a partir da segunda casa decimal, justificadas pela precisão dos instrumentos utilizados. A professora aproveitou esta oportunidade para discutir que: “se em triângulos retângulos semelhantes, que tem os mesmos ângulos internos, a razão se mantém, então, é possível tabular esses valores e usá-los para outros triângulos, até mesmo com medidas astronômicas, desde que o padrão angular seja mantido.

Também é explorada a relação do erro pela utilização de instrumentos de baixa precisão, principalmente da régua que garante precisão apenas de um milímetro.

Questão 2:

Quais conclusões podemos estabelecer das relações encontradas na Atividade 1? Algumas perguntas-dicas:

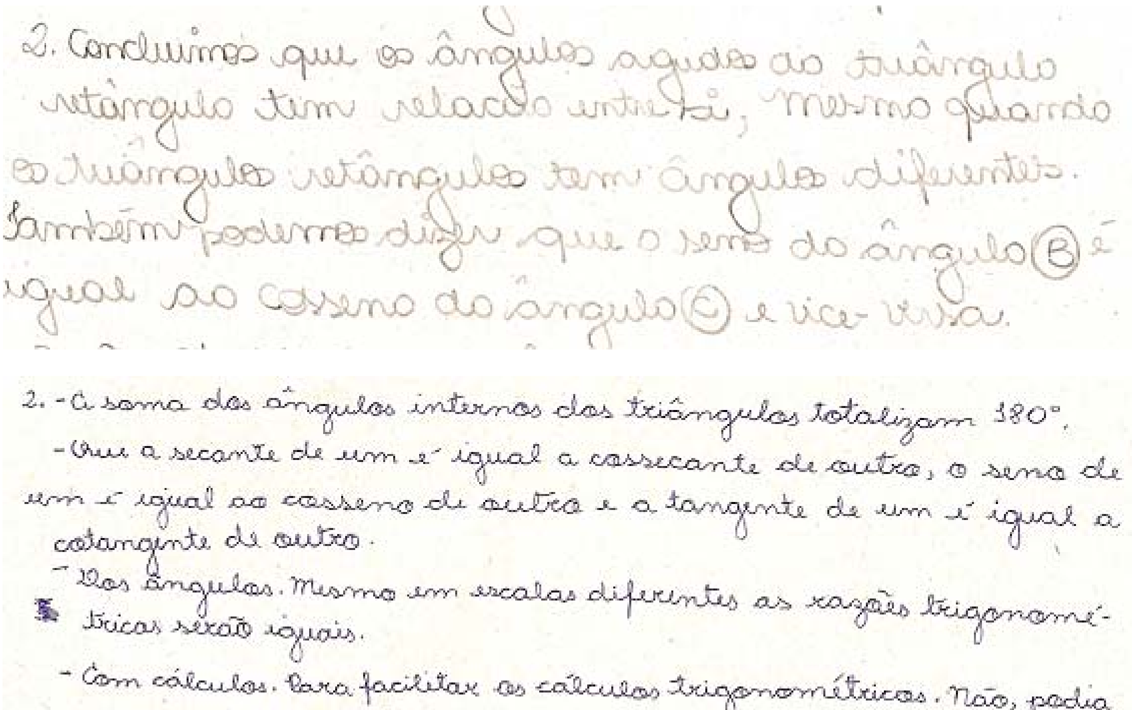
- ✓ *Existe alguma relação entre os ângulos agudos de um triângulo retângulo?*
- ✓ *Existe alguma relação entre os triângulos retângulos com mesmos ângulos internos, porém lados diferentes?*

- ✓ *Do que dependem as razões trigonométricas? Do triângulo retângulo ou do ângulo agudo considerado? Como podemos usar isso a nosso favor?*

- ✓ *Como seu grupo imagina que foi construída a tabela trigonométrica? Para que ela foi construída? Ela precisava ir até 89º como na tabela trigonométrica apresentada aqui?*

Algumas respostas encontradas:

> "Concluímos que os ângulos agudos do triângulo retângulo tem relação entre si, mesmo quando os triângulos retângulos tem ângulos diferentes Também podemos dizer que o seno do ângulo B é igual ao cosseno do ângulo C e vice-versa."
> "A soma dos ângulos internos dos triângulos totaliza 180º.
> – Que a secante de um é igual à cossecante de outro, o seno de um é igual ao cosseno de outro e a tangente de um é igual à cotangente de outro.
> – Dos ângulos. Mesmo em escalas diferentes as razões trigonométricas serão iguais.
> – Com cálculo. Para facilitar os cálculos trigonométricos. Não podia ir apenas até o 45º."


2. Concluímos que os ângulos agudos ao triângulo retângulo tem relacão entre si, mesmo quando os triângulos retângulos tem ângulos diferentes. Também podemos dizer que o seno do ângulo B é igual ao cosseno do ângulo C e vice-versa.

2. - A soma dos ângulos internos dos triângulos totalizam 180°.
- Que a secante de um é igual a cossecante de outro, o seno de um é igual ao cosseno de outro e a tangente de um é igual a cotangente de outro.
- Dos ângulos. Mesmo em escalas diferentes as razões trigonométricas serão iguais.
- Com cálculos. Para facilitar os cálculos trigonométricos. Não, podia ir apenas até o 45°.

Figura 27: Respostas de grupos de alunos à questão 2.

A proposta desta questão era formalizar os conceitos explorados com a atividade para que os alunos refletissem sobre os padrões observados. De maneira geral, os grupos encontraram as regularidades pedidas, porém, atualizou-se esta parte da folha de atividade, colocando as perguntas separadas, pois muitos alunos têm dificuldades em responder uma sequência de perguntas sem numeração distinta, e isso pode restringir o registro.

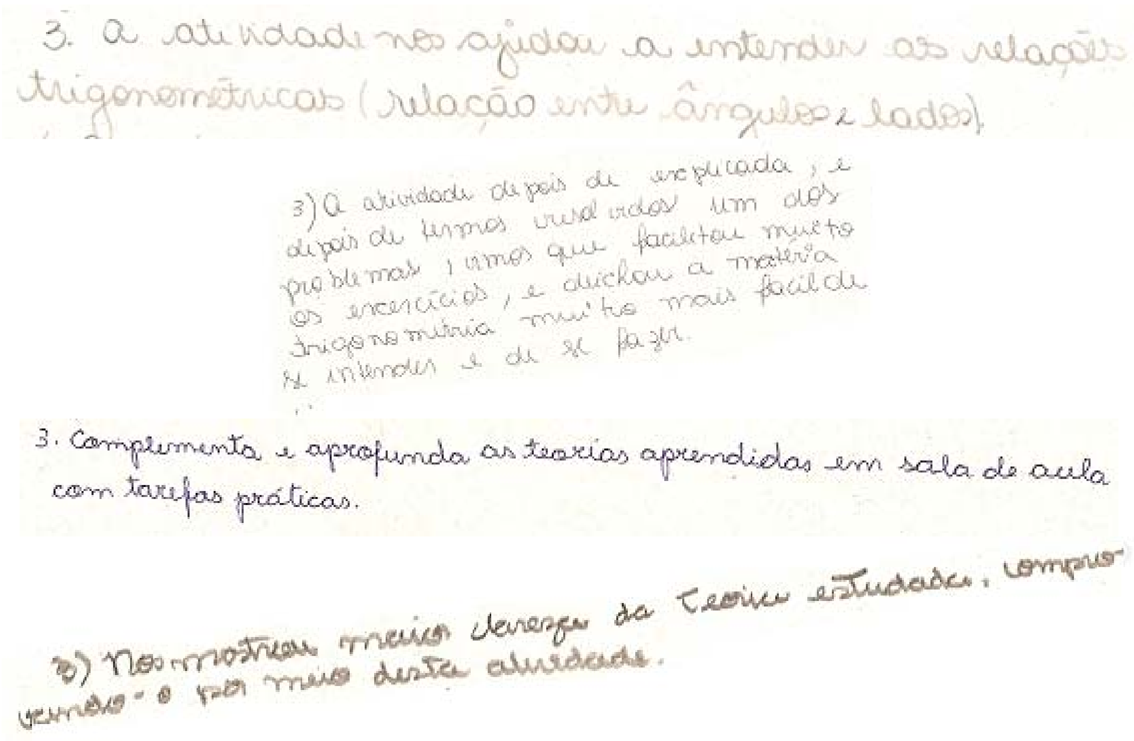
Ao registrar as informações com palavras, os alunos acabam refletindo mais sobre os elementos discutidos e isso facilita muito a aprendizagem do conceito.

Questão 3:

Como o grupo avalia a atividade? De que maneira ela contribui para dar um significado à teoria estudada em sala de aula?

Algumas respostas encontradas:

> "A atividade nos ajudou a entender as relações trigonométricas (relação entre ângulos e lados)."
> "A atividade depois de explicada, e depois de termos resolvido um dos problemas, vimos que facilitou muito os exercícios, e deixou a matéria trigonometria muito mais fácil de se entender e de se fazer."
> "Complementa e aprofunda as teorias aprendidas em sala de aula com tarefas práticas."
> "Nos mostrou maior clareza da teoria estudada, compreendendo-a por meio desta atividade."


3. a atividade nos ajudou a entender as relações trigonométricas (relação entre ângulos e lados).

3) a atividade depois de explicada, e depois de termos resolvidos um dos problemas, vimos que facilitou muito os exercícios, e deixou a matéria trigonometria muito mais fácil de se entender e de se fazer.

3. Complementa e aprofunda as teorias aprendidas em sala de aula com tarefas práticas.

3) Nos mostrou maior clareza da teoria estudada, comprovando-a por meio desta atividade.

Figura 28: Respostas de grupos de alunos à questão 3.

Pode-se concluir que os alunos conseguiram atingir os objetivos da atividade, uma vez que entenderam o processo de construção das razões trigonométricas e exploraram os padrões que facilitam o bom andamento deste conteúdo quanto maior for sua profundidade.

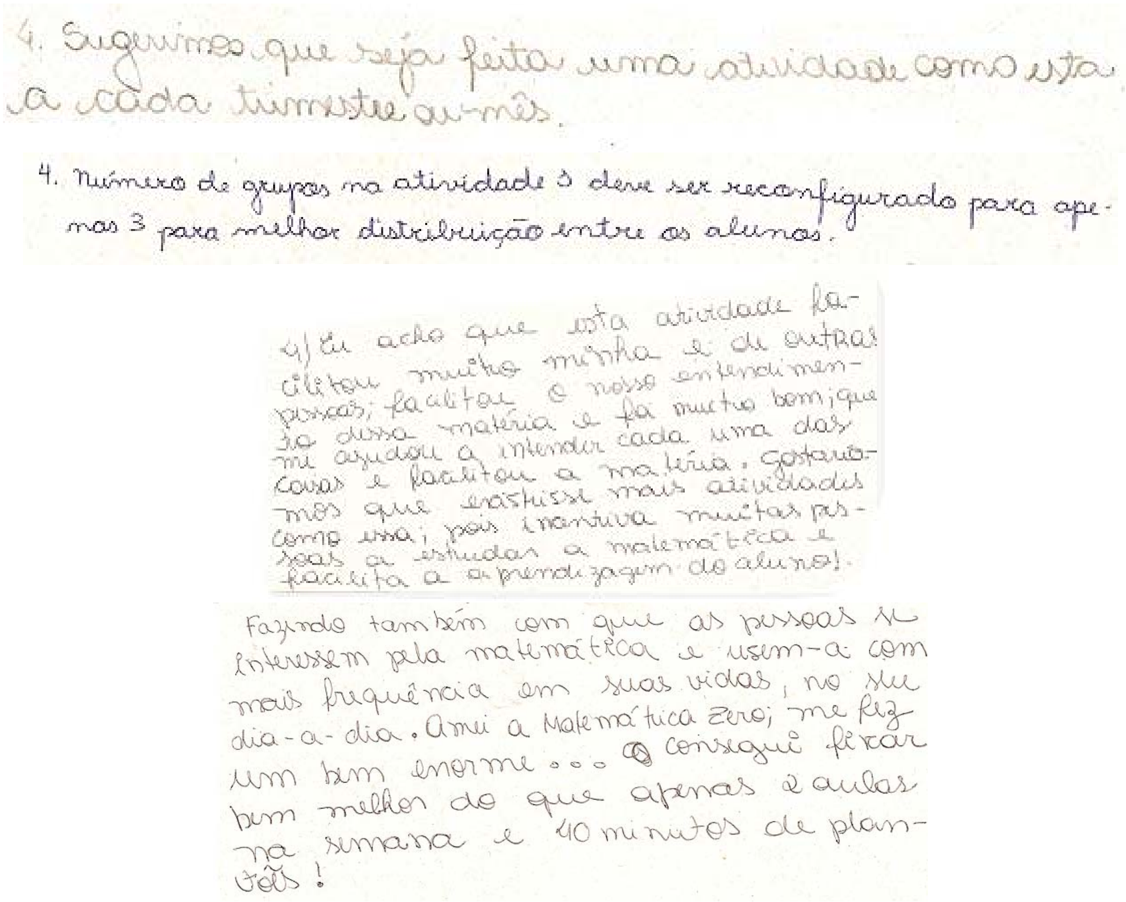
Questão 4:

Dê sugestões e críticas.

Algumas respostas encontradas:

> "Sugerimos que seja feita uma atividade como esta a cada trimestre ou mês."
> "Número de grupos na atividade 3 deve ser reconfigurado para apenas 3 para melhor distribuição entre alunos."
> "Eu acho que esta atividade facilitou muito a minha e de outras pessoas; facilitou o nosso entendimento dessa matéria e foi muito bom; que me ajudou a entender cada uma das coisas e facilitou a matéria. Gostaríamos que existissem mais atividades como essa; pois incentiva muitas pessoas a estudar a matemática e facilita a aprendizagem do aluno."
> "Fazendo também com que as pessoas se interessem pela matemática e usem-na com mais frequência em suas vidas, no seu dia-a-dia. Amei a Matemática Zero; me

fez um bem enorme… Consegui ficar bem melhor do que apenas 2 aulas na semana e 40 minutos de plantões.”


4. Sugerimos que seja feita uma atividade como esta a cada trimestre ou mês.

4. Número de grupos na atividade 3 deve ser reconfigurado para apenas 3 para melhor distribuição entre os alunos.

4) Eu acho que esta atividade facilitou muito minha e de outras pessoas; facilitou o nosso entendimento dessa matéria e foi muito bom, que me ajudou a entender cada uma das coisas e facilitou a matéria. Gostaríamos que existisse mais atividades como essa, pois incentiva muitas pessoas a estudar a matemática e facilita a aprendizagem dos alunos!

Fazendo também com que as pessoas se interessem pela matemática e usem-a com mais frequência em suas vidas, no seu dia-a-dia. Amei a Matemática Zero; me fez um bem enorme... Consegui ficar bem melhor do que apenas 2 aulas na semana e 40 minutos de plantões!

Figura 29: Respostas de grupos de alunos à questão 4.

Houve aceitação da atividade, justificada principalmente pela compreensão do conteúdo e, também, pela exploração de uma dinâmica diferenciada da habitual durante as aulas tradicionais de matemática.

5.2.2 Conclusão da Atividade 1

Depois de terminada a atividade, a professora retomou os conceitos explorados em aula utilizando, além dos dados coletados nesta tarefa, os dois primeiros aplicativos apresentados no capítulo 5.5: Aplicativo dos triângulos semelhantes e Aplicativo das Razões Trigonométricas em Ângulos Complementares.

Desta forma, foi trazido para a sala de aula mais uma dinâmica diferente de socialização dos padrões encontrados e, neste momento, a sala participou com discussão sobre o assunto, ressignificando os conceitos explorados.

A Atividade 1 proposta no anexo tem algumas alterações que viabilizam a aplicação na sala de aula. O fato dos alunos recortarem as tabelas e de imprimir-se uma folha com um triângulo em cada página diferente permite que todos trabalhem simultaneamente e ninguém desista da atividade em si. De maneira geral o experimento foi satisfatório, pois os alunos se envolveram muito com a proposta e o envolvimento deles nas aulas de matemática foi muito diferenciado a partir de então.

No final da atividade os alunos abordaram o orientador deste trabalho, João Sampaio, afirmando que tinham gostado muito da atividade e, que gostariam de uma proposta assim sempre.

De certa forma, a grande evolução foi o fato dos alunos conseguirem entender relações que intermedeiam a trigonometria e se envolverem com a atividade.

5.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE 2

Este experimento foi planejado com o objetivo de permitir aos alunos a experiência de calcular a altura inacessível de um determinado objeto, usando as razões trigonométricas do triângulo retângulo, principalmente a tangente.

A proposta era usar um instrumento, chamado de Inclinômetro, que medisse o ângulo de visada, e feito com canudo, transferidor e barbante como indica a figura 30.

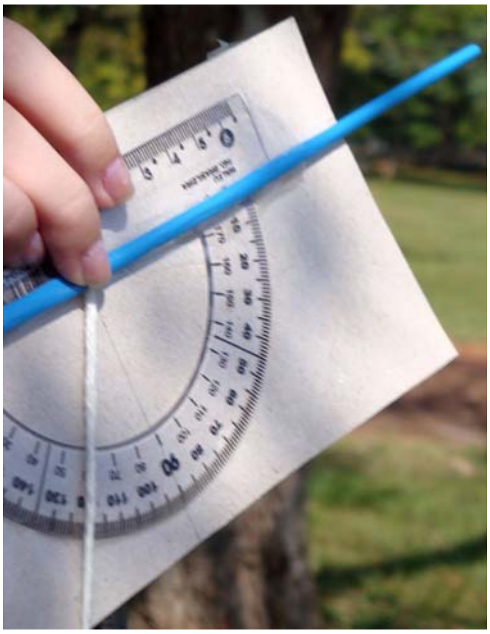


Figura 30: O Inclinômetro.

Todo o procedimento de construção do instrumento e as instruções da atividade estão propostas no Apêndice.

Durante o planejamento foram feitos testes de medir uma caixa d'água que fica na praça central da Unicamp (um ambiente aberto) de duas maneiras: sem conhecer a distância do observador até a caixa d'água, mas tendo em mãos dois ângulos de visada e, conhecendo a distância do observador à caixa d'água.

No primeiro teste verificou-se uma dificuldade muito grande em determinar um plano que contivesse as medições. A figura abaixo mostra a simulação feita:

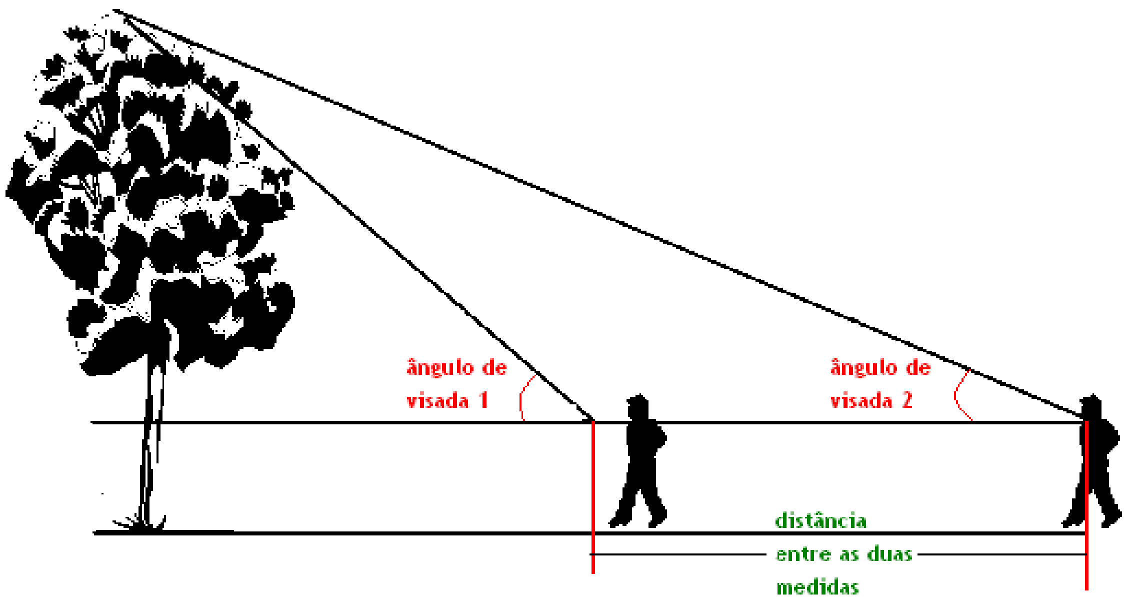


Figura 31: Simulação do primeiro experimento.

Observe que esta construção teórica para medição de dois ângulos diferentes exige que todo o percurso do observador ao objeto observado esteja em uma linha horizontal, o que é muito difícil de ser determinado em um ambiente real, gerando uma quantidade de erros expressiva.

Para a segunda simulação de medir a caixa d'água conhecendo a distância do observador até o objeto, há também restrições: como o objeto é muito alto – em torno de 35 metros de altura – com uma trena conseguiu-se medir em torno de 30 metros de distância da caixa para encontrar o ângulo de visada. Desta forma, o ângulo de visada fica muito grande – acima de 45 graus – e uma alteração de um grau para esta medida gera um erro muito grande. Observe a escala de variação da tangente para variações de grau em grau, na ilustração apresentada na figura 32:

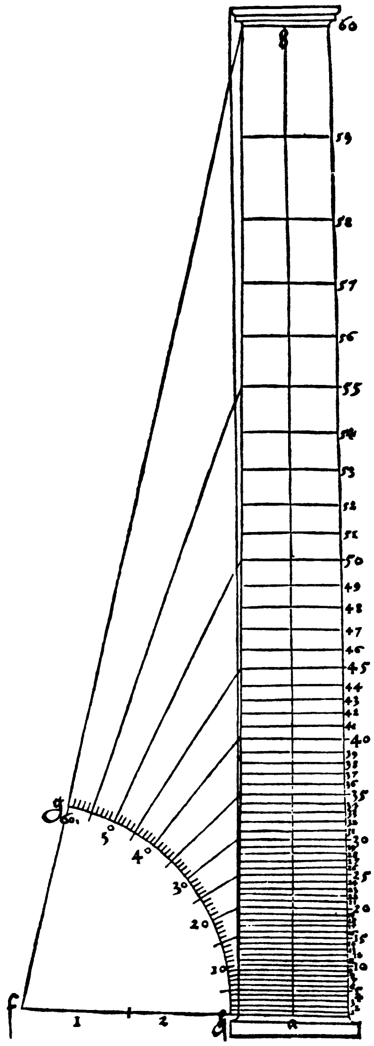


Figura 32: Variações da tangente para variações angulares de grau em grau, de 0 a 60 graus. Ilustração de Albrecht Dürer. (MAOR, 1998).

Desta maneira, não há muita fidelidade dos dados coletados.

Assim, planejou-se o experimento no ginásio de esportes da escola para a medição da altura da tabela que suporta a cesta de basquete. Esse foi o ambiente escolhido para minimizar os erros cometidos nos testes por se tratar de um objeto de baixa altura – em torno de 4 metros – a ser medido, cuja altura calculada, a distâncias adequadas, não seria suscetível a pequenas variações angulares de ângulos de visada. Desta maneira, propôs-se fixar na quadra as medidas de 2, 5, 10 e 15 metros de distância à base do suporte da cesta de basquete e, a partir deste referencial, cada grupo usaria seu inclinômetro e colheria dados para o futuro cálculo da altura do objeto escolhido.

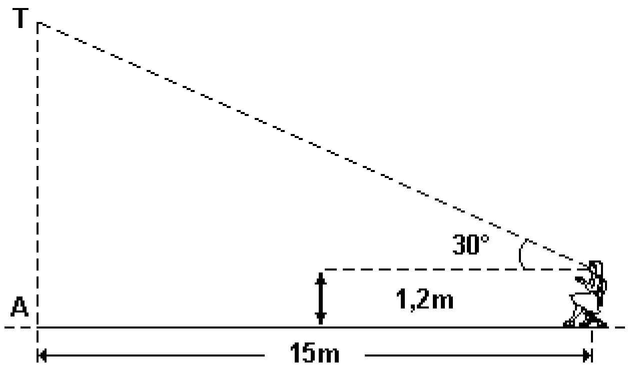
Depois dos ajustes efetuados, este experimento foi aplicado aos mesmos alunos da primeira série do Ensino Médio de Mogi Mirim e Mogi Guaçu durante o Laboratório de

Trigonometria. Usou-se em torno de uma aula e meia para a coleta dos dados e socialização dos resultados ficou para um momento posterior durante as aulas normais da semana.

5.3.1 PROPOSTA E APLICAÇÃO

Não foi proposto que os alunos construíssem o inclinômetro, mas sim que compreendessem o seu funcionamento.

Para isso, foram discutidos alguns exercícios que envolvem ângulos de visada e, o cateto oposto (altura do objeto) e o cateto adjacente (distância do objeto ao observador), por exemplo:

> (FAAP – adaptado) Temos abaixo um esquema de uma sala de cinema, com o piso horizontal.
>
> 
>
>
> É possível calcular a distância do observador até a tela (no exemplo 15 metros) e a altura do observador (no exemplo 1,2 metros). Podemos, então, calcular a medida de AT se conhecemos o ângulo de visada de 30° da horizontal. Discuta com seu grupo como fazer isso e apresente os seus cálculos.

Para uma descrição detalhada do inclinômetro, sua construção, e seu uso, ver o Apêndice.

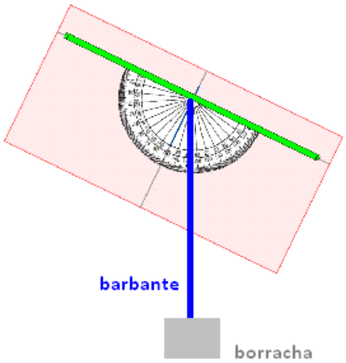


Figura 33: Diagrama dos elementos de um Inclinômetro.

Como indicado na figura 33, cola-se um transferidor a um cartão retangular, e então um canudo sobre a linha base do transferidor (linha de extremos 0^o e 180^o). Ao usar o inclinômetro, o observador mira, através do canudo, o objeto a ser observado à distância. Do ponto médio do canudo desce um pêndulo (barbante) com um peso na outra ponta, de tal modo que quando o canudo estiver na horizontal, o barbante ficará alinhado com a marca de 90□ do transferidor. No apêndice encontram-se os detalhes sobre o uso do inclinômetro para obtenção de ângulos de visada de objetos a alturas inacessíveis ao observador.

A preocupação era que os alunos observassem a semelhança do evento descrito no exercício com o experimento que iriam fazer. Então, tornou-se necessário discutir o funcionamento do inclinômetro para encontrar o ângulo de visada:

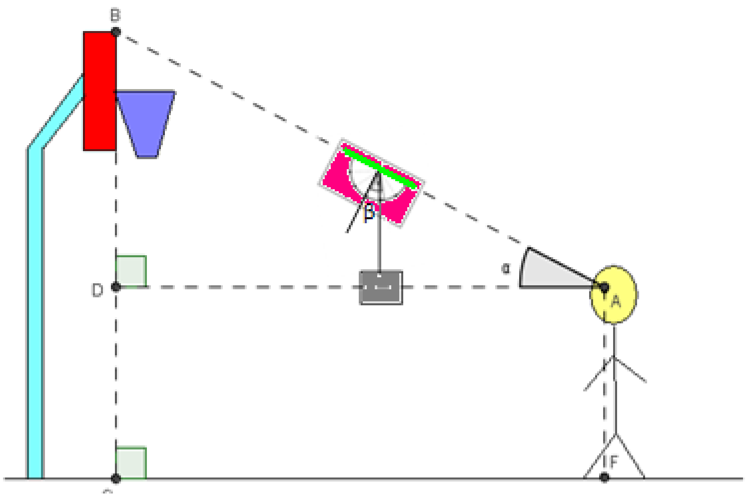


Figura 34: *Diagrama ilustrando uso do inclinômetro, no qual observador vê objeto inacessível segundo um ângulo de visada α.*

Com o esboço do desenho e os conceitos explorados de triângulos retângulos e a complementaridade de seus ângulos agudos, os alunos observam a congruência entre o ângulo β (coletado do inclinômetro) e o ângulo α (ângulo de visada):

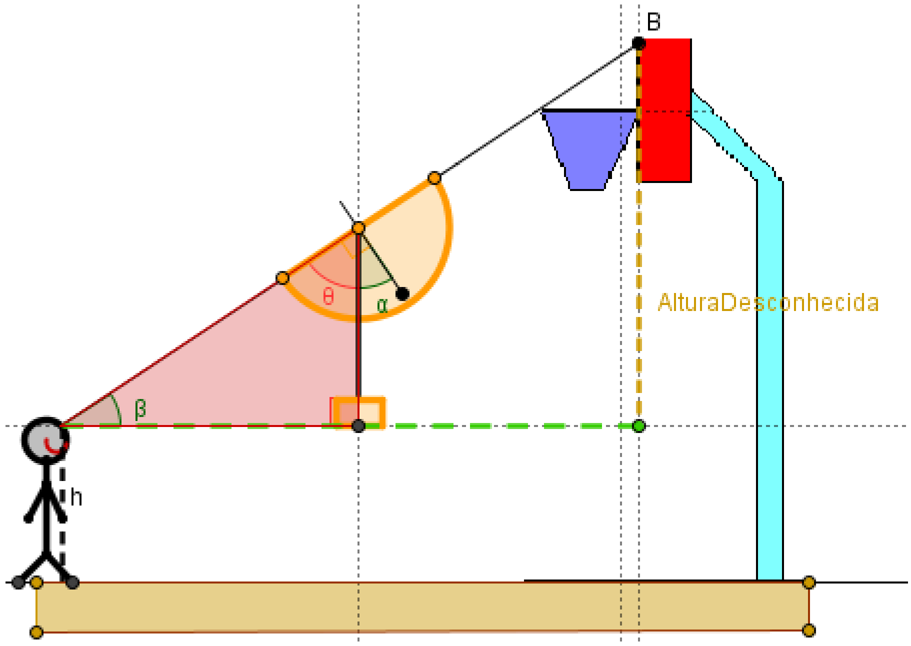


Figura 35: Representação geométrica dos pares de ângulos complementares β e θ, e θ e α, da qual se pode concluir que β = α.

Este estudo deve preceder o experimento para que os alunos não cometam equívocos ao anotar o ângulo de visada do experimento.

Para o momento de trabalho de campo, os alunos devem observar a medida do ângulo de visada e a altura da observação (altura que vai do piso ao olho do observador) para preenchimento da tabela para diferentes alturas. Estas medidas são feitas com trenas. Logo em seguida, o grupo deve fazer os cálculos e concluir a altura do objeto desejado. Veja na figura 36 algumas tabelas preenchidas:

Distância da cesta até o observador	Medida do ângulo de visada	Altura da Observação	Altura da cesta de basquete
2 metros	50°	1,52	3.902
5 metros	25°	1,52	3.85
10 metros	12°	1,52	3.64
15 metros	9°	1,52	3.89

Distância da cesta até o observador	Medida do ângulo de visada	Altura da Observação	Altura da cesta de basquete
2 metros	30°	174	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m
5 metros	25°	1,74	2,3 m
10 metros	20°	1,74	3,6 m
15 metros	10°	1,74	2,55 m

Distância da cesta até o observador (d)	Medida do ângulo de visada	Altura da Observação	Altura da cesta de basquete
2 metros	45°	1,76m	H = 2+1,76 = 3,76 m
5 metros	20°	1,76m	H = 1,81985+1,76 = 3,57985
10 metros	12°	1,76m	H = 2,12557 +1,76 = 3,88557
15 metros	9°	1,76m	H = 2,37570+1,76 = 4,1357

Figura 36: Anotações feitas pelos alunos no experimento do inclinômetro.

A classe foi dividida em grupos de quatro alunos cada. De cada grupo, foi escolhido um integrante para fazer as visualizações e os demais membros o auxiliavam na coleta e anotação de medidas. Este procedimento foi seguido para que os dados coletados fossem conferidos pelos membros do grupo, evitando anotações incorretas.

Figura 37: Momentos da aplicação do Experimento – tomadas da medida da altura do observador (esquerda) e do ângulo de visada (direita).

Depois de coletados os dados e efetuados os cálculos, a professora retomou a atividade, repassando aos alunos a informação dada pela figura 38, retirada do Wikipédia:

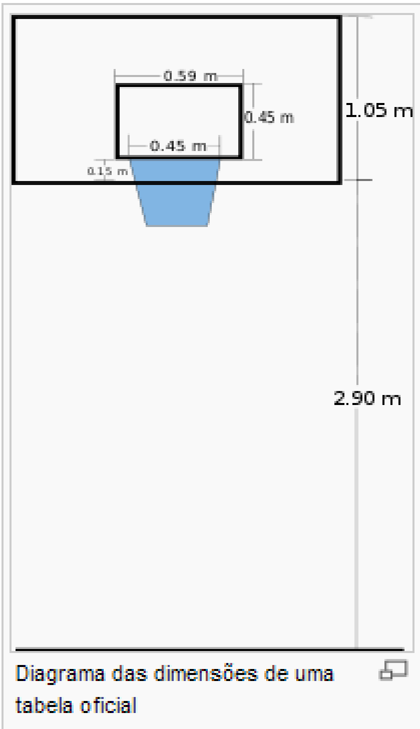


Figura 38: *Diagrama das dimensões de uma tabela de basquete, obtido no site http://pt.wikipedia.org/wiki/Basquetebol dia 26/05/2009 às 13h34.*

Então os alunos puderam comparar os dados encontrados com os dados trazidos de uma pesquisa.

Apesar de o inclinômetro ser rústico, ele até promove o experimento de forma satisfatória, não pelo resultado final (a maioria dos cálculos se aproximou dos quatro metros de altura), mas sim, por toda a experiência vivenciada com a atividade. Torna-se importante ressaltar a grande diferença entre os resultados matemáticos gerados pelos Experimentos e os da Matemática Teórica.

Mesmo nestas condições, consideradas ideais, houve algumas discrepâncias nos dados coletados, por exemplo, esperava-se que para a medição de maiores distâncias, o ângulo de visada fosse menor, porém, pode-se observar na tabela que os alunos não fizeram esta estimativa. Este fato evidencia a necessidade de promover uma maior cautela na coleta dos dados.

5.3.2 CONCLUSÃO DA ATIVIDADE 2

Pela postura dos alunos e dos resultados obtidos foi possível concluir que experimentos desse tipo são importantes para a construção de diversos significados como: experiência de utilizar o conteúdo estudado em uma atividade real; estudo sobre instrumentos e sua precisão e/ou geração de erros; significação das razões trigonométricas, em especial, a tangente e explorações de detalhes de seu comportamento não regular para diferentes ângulos;

De uma forma geral, estas atividades ocupam muito tempo, tanto na sua preparação, quanto na sua aplicação e conclusão, porém, os alunos ao vivenciarem a experiência concreta ficam mais familiarizados com o tema estudado e a teoria passa a ter maior significado.

Vale ressaltar a dificuldade em lidar com os erros neste experimento. A proposta do professor aos alunos deve ser fundamentada em conhecimentos prévios.

Talvez os alunos tivessem se motivado mais se essa aula fosse feita em outro momento que não em seguida à Atividade 1 no Laboratório de Matemática. Por esse motivo, os alunos ficaram muito cansados, porém ainda apresentavam motivação até o final da atividade por considerá-la interessante e fundamental para a sua própria conquista de conhecimento.

5.4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE 4

A atividade 4, *Transição do Ciclo Trigonométrico para a Função Trigonométrica*, nem sempre é de execução trivial aos alunos. Desta maneira a Atividade 4, cuja confecção de materiais está relatada na íntegra no Apêndice, tem o objetivo de fazer essa transposição de forma concreta.

Esta atividade foi aplicada em duas aulas de cinqüenta minutos aos alunos da terceira série do ensino médio do colégio Objetivo de Mogi Mirim.

5.4.1 PROPOSTA E APLICAÇÃO

A professora se responsabilizou em providenciar todo o material necessário (papel quadriculado, barbante, cola, tesoura, transferidor, régua e canetas de tinta permanente) para facilitar a aplicação da atividade.

Foram levadas para a sala de aula as folhas de trabalho (ver apêndice para esclarecer denominação) de papel quadriculado, já recortadas para cada dupla de alunos, e também uma meia folha de trabalho, previamente preparada com o traçado de uma circunferência com raio unitário medindo dez unidades da folha (lados de quadrados), preparadas previamente. Os alunos foram instruídos a considerarem cada lado de um quadrado, no papel quadriculado, como 1/10 de uma unidade de medida. Assim a circunferência teria raio unitário, isto é, medindo uma unidade de comprimento. Esta preparação prévia de material foi feita com a intenção de viabilizar a atividade e “economizar” tempo, evitando elementos que fugiriam ao objetivo principal que era: promover a transição do Ciclo para o Plano Cartesiano das funções trigonométricas.

Depois de divididos em duplas, os alunos usaram o transferidor para graduar a circunferência recebida de quinze em quinze graus.

Figura 39: Alunos divididos em duplas durante aplicação da atividade.

A primeira etapa fundamental foi transpor as medidas dos arcos marcados no comprimento da circunferência, de 15 em 15 graus, para o eixo das abscissas do Plano Cartesiano da outra folha de trabalho: os alunos colaram um pedaço de barbante no comprimento de toda circunferência, demarcaram o começo e o fim desta, e transportaram as medidas graduadas da circunferência para o barbante. Em seguida os alunos descolaram o barbante da circunferência e colaram-no cuidadosamente no eixo x do plano cartesiano da outra folha, de modo que a origem determinada do barbante coincidisse com a origem do sistema cartesiano. Observa-se que o uso de cola bastão minimiza possíveis sujeiras e, por não ser líquida, não estraga o papel.

O processo assemelha-se a desenrolar o comprimento da circunferência no eixo das abscissas de maneira concreta. Portanto, esse procedimento, de fato, concretiza o transporte do arco para o plano.

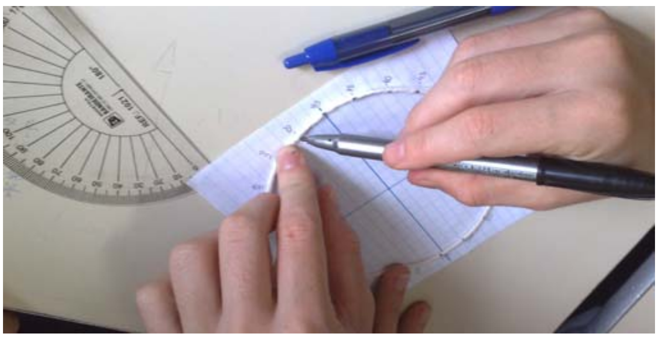


Figura 40: Momento da transposição das medidas da circunferência para o barbante enrolado no ciclo trigonométrico.

Passa-se, então, para outro momento importante: colher o valor do seno de cada um dos ângulos graduados anteriormente no ciclo trigonométrico. Para isso basta medir a distância da extremidade do arco no ciclo ao eixo das abscissas do sistema cartesiano do ciclo trigonométrico (a altura de um triângulo retângulo de hipotenusa igual ao raio da circunferência).

Figura 41: Coletando um segmento com a medida do seno de um ângulo.

Tem-se novamente um momento concreto, pois já foi demonstrado anteriormente, durante as aulas teóricas, que este segmento se refere ao valor do seno do ângulo em questão e, os alunos podem medi-lo agora.

É hora de colar o segmento coletado (canudo) no plano cartesiano Oxy. Para isso, os alunos devem ajustar cada canudo na vertical, perpendicularmente ao eixo x, a partir do ponto de abscissa referente ao ângulo do ciclo de onde foi tomado o canudo.

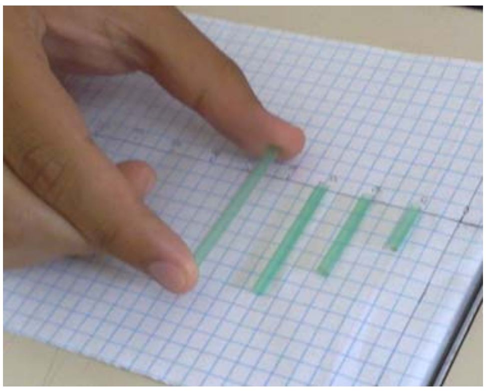


Figura 42: Momento da colagem dos canudos.

Assim, outro conteúdo passa a ser desenvolvido com a atividade: a possibilidade de visualização (observação do tamanho do canudo) de que alguns segmentos correspondentes a ângulos diferentes são congruentes (por exemplo, os segmentos colhidos para 30º, 150º, 210º, 330º). Porém, alguns foram coletados de triângulos acima do eixo x (os correspondentes a ângulos de 30º e 150º) e outros abaixo (ângulos de 210º e 330º), e portanto, como elementos do plano cartesiano, devem seguir a orientação dos eixos: os valores de $\operatorname{sen} 30°$ e $\operatorname{sen} 150°$ são positivos, já os valores de $\operatorname{sen} 210°$ e $\operatorname{sen} 330°$ são negativos.

Procurou-se organizar os canudos seguindo uma regularidade de cores: os alunos deveriam escolher uma cor diferente para a representação dos segmentos de cada um dos quadrantes e uma cor para segmentos que representassem arcos com extremidades nos eixos (90º, 180º, 270º, 360º). Este procedimento organizou as informações observadas e permitiu uma maior facilidade de extrair conclusões da atividade efetuada.

Depois de terminada a colagem, os alunos deveriam responder a um questionário (apresentado no Apêndice) com questões fechadas, a fim de explorar pontos importantes da atividade efetuada e promover reflexão a respeito da teoria.

Como a representação das informações de forma gráfica facilita a visualização do conteúdo explorado os alunos puderam observar: os pontos de máximo e mínimo da função seno; sua monotonicidade; seu período; etc.

Alguns equívocos puderam ser corrigidos, por exemplo, algumas duplas fizeram a colagem dos canudos como representado na figura abaixo.

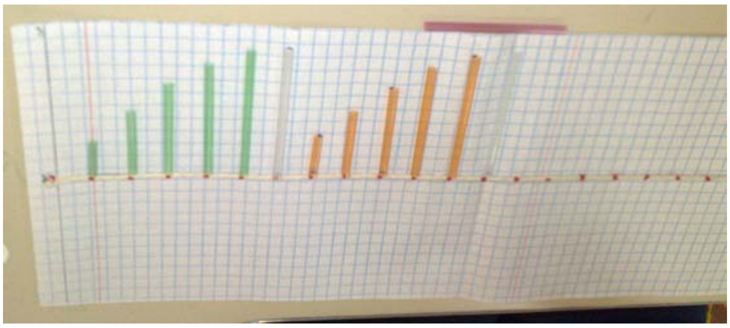


Figura 43: Foto de uma colagem equivocada.

Rapidamente os alunos perceberam a falta de atenção com relação à coleta de dados que tinham efetuado e corrigiram. Como o seno de cento e oitenta graus é zero, houve vários questionamentos neste ponto: *"Professora, o que eu coloco no 180º?"*. Estes questionamentos permitiam a reflexão sobre os elementos estudados, desta forma a professora encaminhou novos questionamentos: "qual a altura do 'triângulo' formado neste ponto?". Os alunos observavam que neste ponto nem havia triângulo e que, se projetada a sua "altura" no eixo y encontrar-se-ia a origem, logo, zero.

5.4.2 CONCLUSÃO DA ATIVIDADE 4

Ao analisar as respostas dadas no questionário, foi observado que os alunos acertaram praticamente a totalidade das questões. De uma maneira geral, os alunos aproveitam a oportunidade da atividade para atingir uma aprendizagem significativa sobre esta etapa da trigonometria, pois amadurecem os elementos teóricos abordados.

Trata-se também de uma dinâmica de aula muito diferente das aulas tradicionais, o que muda o envolvimento e participação dos alunos. A mudança de estratégia do professor segundo o planejamento de suas aulas favorece a aprendizagem e outro ponto positivo é a possível visualização da teoria sob outro referencial.

5.5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DINÂMICAS COM APLICATIVOS, USANDO TECNOLOGIA EM SALA DE AULA

Acompanhar a evolução da tecnologia na sala de aula exige muito estudo e reflexão, pois:

- De que maneira ela pode propiciar uma maior interação entre o ensino e aprendizagem no sistema escolar?
- É possível resgatar as possibilidades didático-cognitivas na exploração pedagógica de conceitos trigonométricos usando o GeoGebra?

Após reflexão das estratégias de ensino, métodos de trabalhos e avanços tecnológicos, conclui-se que a grande contribuição digital que se enquadra na realidade escolar da prática da professora pesquisadora, em conexão com as propostas de desenvolvimento de habilidades e competências, é associar ao ensino da Trigonometria o movimento, o dinamismo, usando para isso o GeoGebra.

5.5.1 OS APLICATIVOS

O material aqui disponibilizado foi criado pela própria professora e usado em suas aulas de maneira expositiva. São aplicativos que usam espaços curtos da aula. Estes aplicativos têm uma proposta didática muito interessante que, aliada ao seu dinamismo, são capazes de ressignificar detalhes e até mesmo, teorias desenvolvidas nas aulas expositivas de trigonometria.

Em nenhum momento tivemos a intenção de pedir para que os alunos fossem ao laboratório de informática para construírem os objetos com suas próprias mãos. A nossa escolha foi baseada na própria questão norteadora deste mestrado: “Podemos construir uma aprendizagem significativa para o aluno, no conteúdo de Trigonometria, por meio de novos conhecimentos do professor?”, ou seja, o professor pode criar aplicativos inovadores, que levem o movimento para a sala de aula contextualizando a trigonometria?

5.5.2 APLICAÇÃO DA PROPOSTA

Para responder a esses questionamentos, a professora autora aproveitou-se de uma oportunidade de substituir um determinado professor e dar três aulas consecutivas no terceiro ano do ensino médio do Colégio Objetivo de Mogi Guaçu em 08 de setembro de 2009. Esta sala tinha 31 alunos dos quais todos estavam presentes para a apresentação.

Nesta sala, o conceito de trigonometria já havia sido estudado por esses alunos na primeira série do ensino médio e revisados no primeiro semestre da própria terceira série do Ensino Médio a partir de aulas tradicionais sem o auxilio de tecnologia. Pressupôs-se que a apresentação dos aplicativos seria novidade aos alunos e, estes alunos já estariam familiarizados com o assunto a ser tratado.

A proposta da apresentação dos objetos foi através do uso de um projetor a partir de uma sequência pré-determinada de oito aplicativos que trouxesse certa coesão ao tema.

Apresentamos, abaixo, os aplicativos segundo a sequência escolhida evidenciando o objetivo de cada objeto, o conteúdo específico explorado, assim como algumas imagens. Como trata-se de um objeto de aprendizagem virtual, apresentamos em anexo a essa dissertação de mestrado, uma mídia de cd com os aplicativos na íntegra.

5.5.2.1 APLICATIVO DOS TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Este aplicativo foi estruturado com o objetivo de significar as razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir da verificação das regularidades obtidas em triângulos retângulos semelhantes.

A interface principal do aplicativo é composta de dois triângulos retângulos semelhantes: ABC, retângulo em $\hat{A}$ e, $A_1B_1C_1$, retângulo em $\hat{A}_1$. Existe um seletor α no canto superior esquerdo da janela do aplicativo, que manipula os ângulos agudos $A\hat{B}C$ e $A_1\hat{B}_1C_1$. Veja abaixo a figura da sua interface:

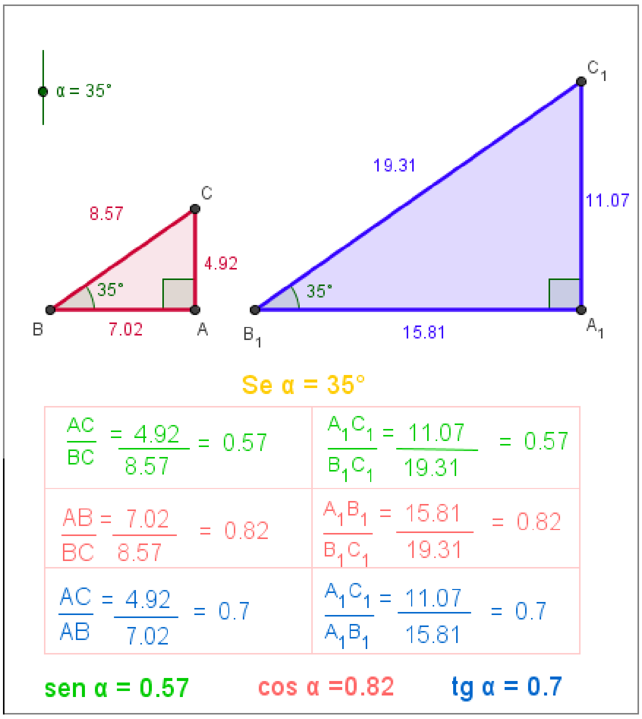


Figura 44: Interface inicial do aplicativo.

Logo abaixo dos triângulos existe a indicação do ângulo agudo α (em amarelo) e, em seguida, uma tabela com o cálculo automático de razões em cada um dos triângulos.

Na primeira coluna há cálculos de algumas razões no triângulo ABC e na segunda, os cálculos correspondentes para o triângulo $A_1\hat{B}_1C_1$.

Na primeira linha, as razões $\dfrac{AC}{BC}$ e $\dfrac{A_1C_1}{B_1C_1}$ indicam a razão do cateto oposto pela hipotenusa, ou seja, o seno do ângulo α, com texto em cor verde. O mesmo acontece com as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ na segunda linha (em rosa) para a representação da razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa, o $\cos\alpha$ e, para as razões $\frac{AC}{AB}$ e $\frac{A_1C_1}{A_1B_1}$ na terceira linha (em azul) para a representação da razão entre o cateto oposto pelo cateto adjacente, a $\text{tg}\,\alpha$. No final do aplicativo, seguindo a coloração das razões calculadas na tabela, temos o valor das funções $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$ com duas casas de aproximação com cores correspondentes às da tabela.

Quando o professor movimenta o seletor – para cima ou para baixo – os ângulos agudos dos triângulos variam de maneira instantânea e pode ser observado um novo par de triângulos semelhantes assim como novos valores para as razões.

A figura abaixo representa dois momentos captados do aplicativo para dois ângulos agudos escolhidos aleatoriamente.

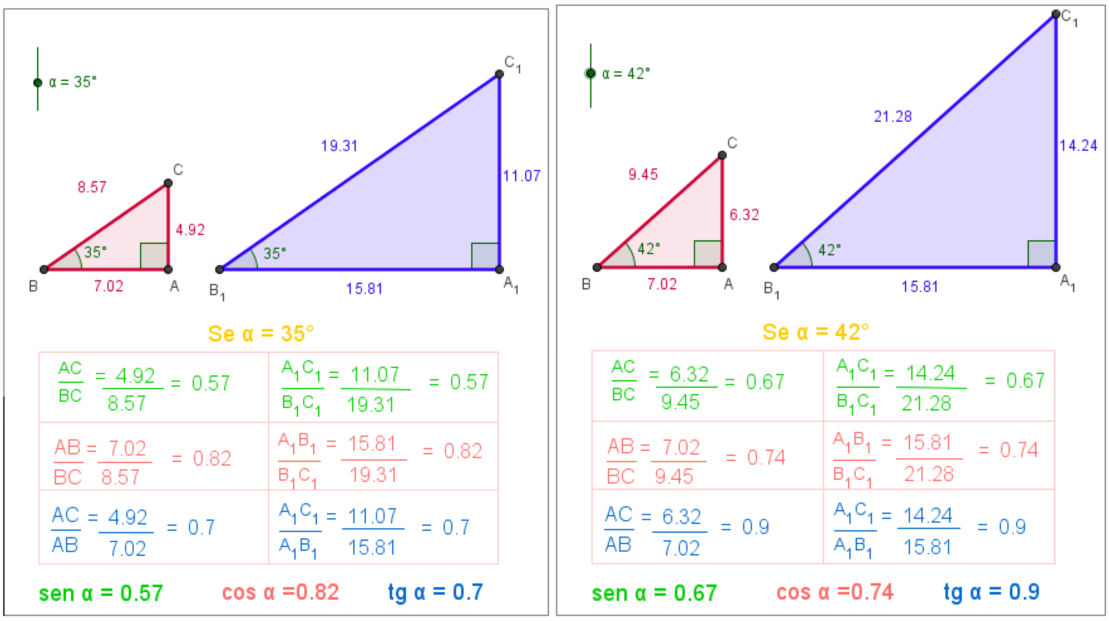


Figura 45: Alterações no aplicativo com o movimento do seletor.

O grande objetivo desta etapa é formalizar que as funções trigonométricas dependem necessariamente dos ângulos e não dos triângulos. Já que, mesmo em triângulos diferentes, porém semelhantes, as razões são constantes, mas, com a mudança do ângulo, as razões mudam.

O aplicativo permite a manipulação dos pontos A e B no triângulo ABC e, dos pontos A_1 e B_1 no triângulo $A_1B_1C_1$. Quando estes pontos são movimentados, temos novos triângulos semelhantes formados e o valor das razões não sofrem alterações.

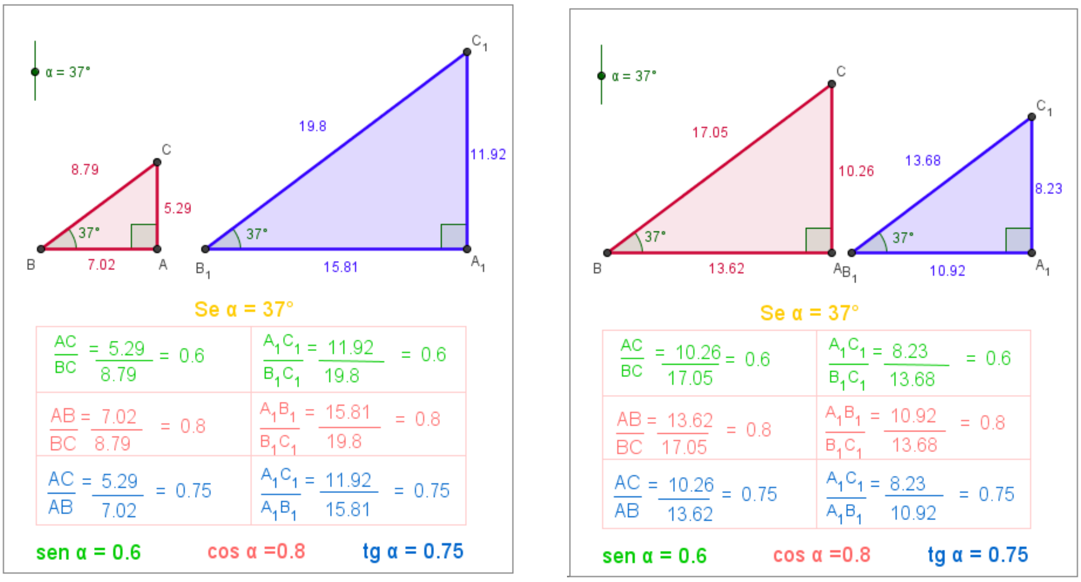


Figura 46: Comparação de figuras sob o enfoque da alteração das medidas dos triângulos semelhantes e os valores das razões constantes.

Este aplicativo é indicado para aulas iniciais sobre trigonometria, ainda no triângulo retângulo. Existe uma correspondência deste aplicativo com a proposta da Atividade 1.

5.5.2.2 APLICATIVO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS EM ÂNGULOS COMPLEMENTARES;

Este aplicativo é uma continuação e tem correspondência com o apresentado anteriormente. Foi estruturado com o objetivo de fazer correspondência aos valores de seno e cosseno de ângulos complementares.

Na interface principal do aplicativo tem-se um triângulo retângulo ABC, retângulo em A, com seus ângulos agudos evidenciados.

No canto superior direito são apresentados dois seletores horizontais:

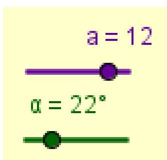


Figura 47: Seletores do aplicativo com movimento direita-esquerda.

O primeiro seletor “a” movimenta o lado $\overline{AB}$ do triângulo, permitindo uma variação de 0 a 15 unidades de comprimento. Já o seletor α movimenta o ângulo $\hat{B}$ com a variação de 5 a 70 graus. Não houve preocupação em delinear outras medidas, pois as definidas já contemplam o objetivo do aplicativo.

Conforme os seletores são movimentados, os ângulos e ou comprimentos são modificados no aplicativo e, aparecem neste as medidas dos ângulos e dos lados do triângulo. Veja na figura abaixo:

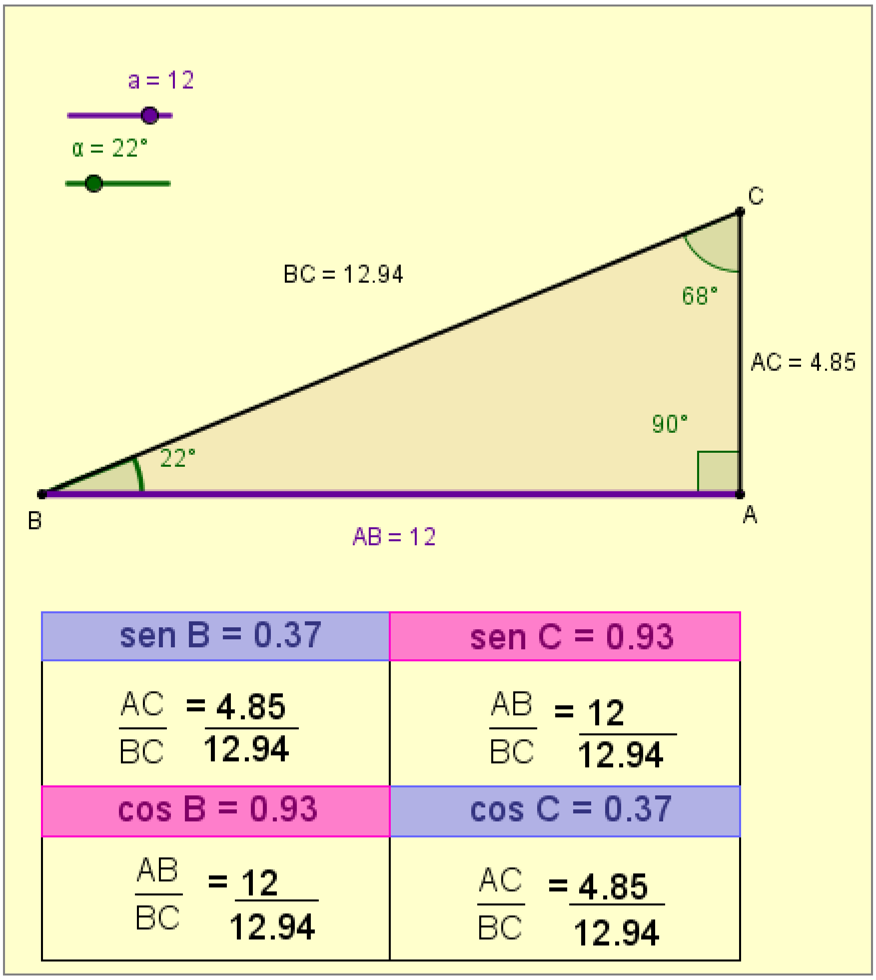


Figura 48: Interface inicial do aplicativo.

Logo abaixo do triângulo temos uma tabela com o cálculo das razões trigonométricas, onde aparece uma correspondência de valores e de cores: sen B = cos C (em azul) e, sen C = cos B (em rosa).

O objetivo principal é do aplicativo é que o aluno visualize que o cateto oposto para o ângulo B é o cateto adjacente para o A e vice versa, justificando o padrão observado.

5.5.2.3 APLICATIVO DO CICLO TRIGONOMÉTRICO

O aplicativo do Ciclo Trigonométrico tem por objetivo evidenciar detalhes de forma parcial sobre este círculo.

A interface inicial do aplicativo tem apenas uma circunferência com a origem de um Plano Cartesiano coincidindo com seu centro. Propõe-se o estudo do Ponto P (um ponto genérico da circunferência) e suas propriedades no sistema de coordenadas.

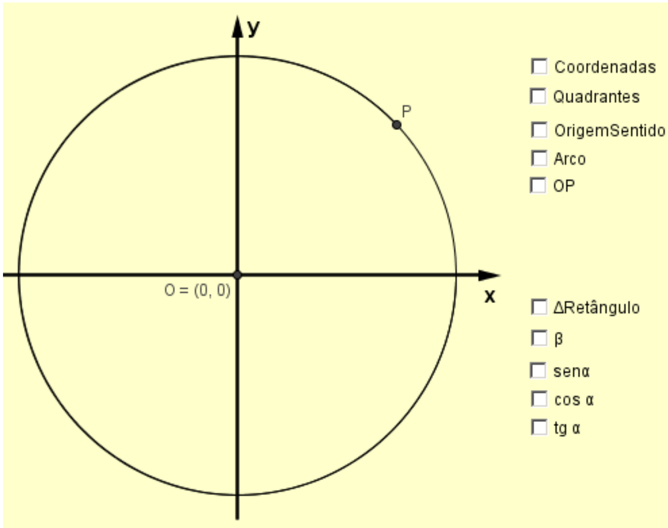


Figura 49: Interface inicial do aplicativo.

O grande "espetáculo" deste aplicativo está no movimento e dinamismo deste objeto. É possível mover o ponto P por toda a circunferência apenas clicando em cima deste e movimentando-o.

Observa-se que existe uma coluna de caixas no canto direito que servem para exibir ou esconder objetos do aplicativo. Para isso, basta clicar nas caixas para ativar ou desativar a exibição.

Espera-se que a cada movimento sejam discutidas as propriedades e relações que intermedeiam o Ciclo Trigonométrico.

O primeiro passo proposto é que se ative a caixa "Coordenadas". Com este procedimento as coordenadas do Ponto P irão aparecer.

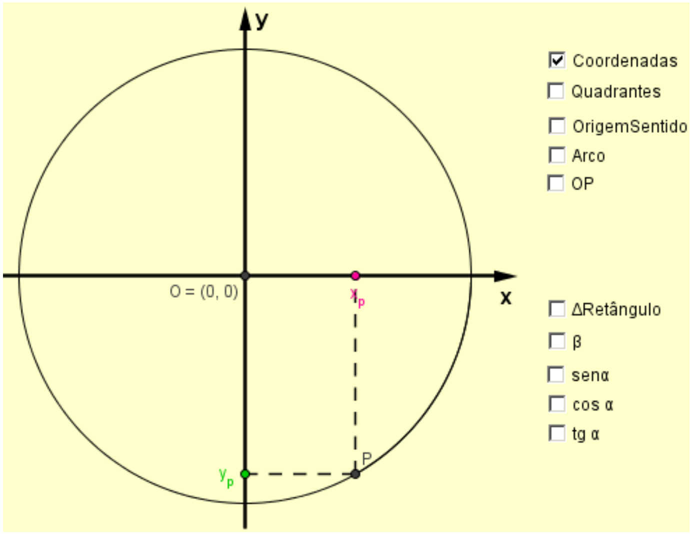


Figura 50: A observação das coordenadas do ponto P estudado.

Este ponto tem coordenadas $P(x_p, y_p)$: x_p é a projeção do ponto no eixo x e y_p é a projeção do ponto no eixo y. Ao movimentar o ponto P o professor pode explorar a mudança das coordenadas. Para isso, torna-se interessante entender as características do Plano Cartesiano com sua organização. Os eixos perpendiculares x e y, eixo das abscissas e das ordenadas, respectivamente, dividem o plano em quatro QUADRANTES. Ao ativar a caixa "Quadrantes", aparecerão no aplicativo os quatro quadrantes. Torna-se, então, necessária a definição de uma origem e um sentido de rotação em torno da origem. Ao ativar a caixa "OrigemSentido" a origem do movimento do ponto P aparece em vermelho A (1,0) e uma flecha indica o sentido anti-horário como o positivo da trajetória.

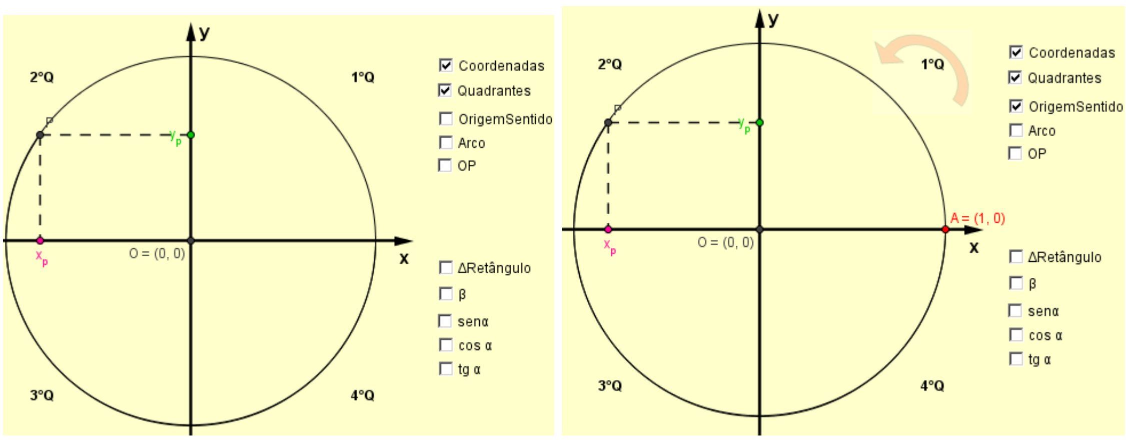


Figura 51: A organização do movimento com sentido e origem definidas, determinando os quatro quadrantes do ciclo.

Os padrões podem ser estabelecidos. Neste momento o professor pode abordar regularidades e movimentar o ponto P enquanto as conclui. Todo ponto do primeiro quadrante tem abscissa e ordenada positivas; já no segundo quadrante, a abscissa fica negativa e a ordenada permanece positiva; no terceiro quadrante ambas tornam-se negativas e, no quarto quadrante, a abscissa é positiva e a ordenada negativa.

A partir da origem A, enquanto P se movimenta, tem-se formado um arco $\overset{\frown}{AP}$ que pode ser visualizado em laranja ao ativar a caixa “Arco”.

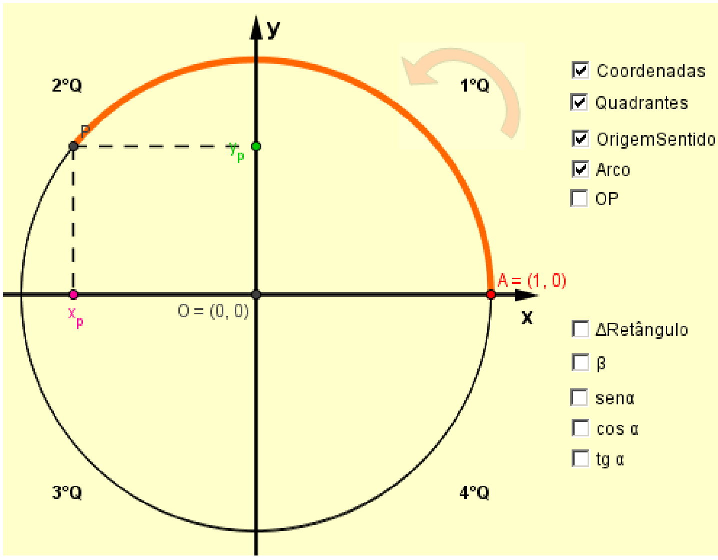


Figura 52: Determinação de um arco.

A periodicidade é facilmente explorada neste momento. É possível movimentar o ponto P continuamente e observar que a cada rotação de 360° o ponto P repete a mesma trajetória.

Ao ativar a caixa “OP” no aplicativo temos o raio $\overline{OP}$ e um ângulo α, tal que $\alpha = A\hat{O}P$, formados. Observe que α acompanha o arco $\overset{\frown}{AP}$.

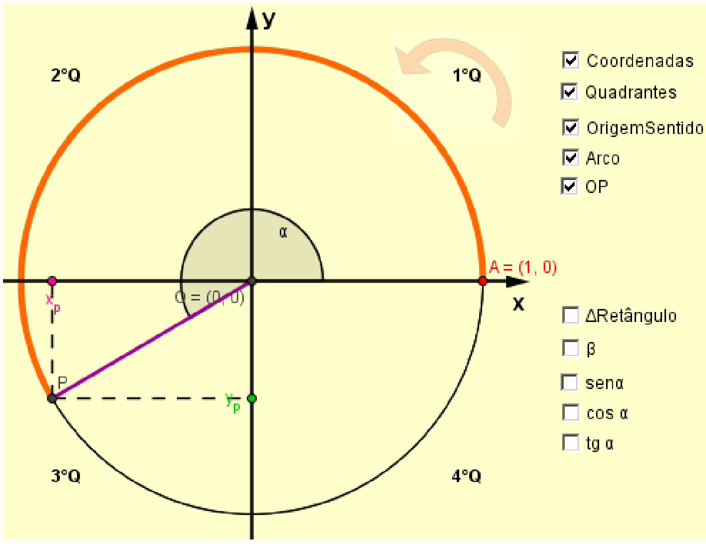


Figura 53: Determinação de um ângulo central que subtende o arco.

Reforça-se a necessidade do professor sempre manipular o aplicativo enquanto detalha os elementos do Ciclo Trigonométrico.

Agora, o objetivo do aplicativo é relacionar a trigonometria no triângulo retângulo para a trigonometria no ciclo. Com isso é proposto o aparecimento de um triângulo retângulo (formado pelos pontos P, O e o ponto que representa a projeção de P no eixo x) ao ativar a caixa “ΔRetângulo”.

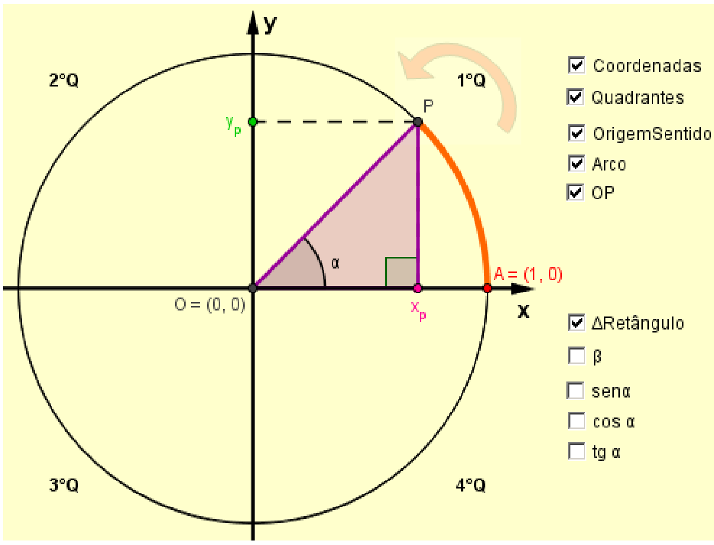
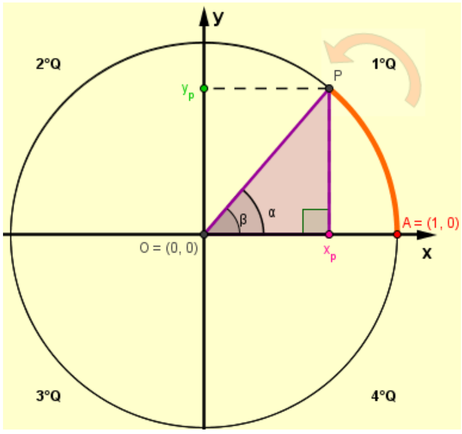
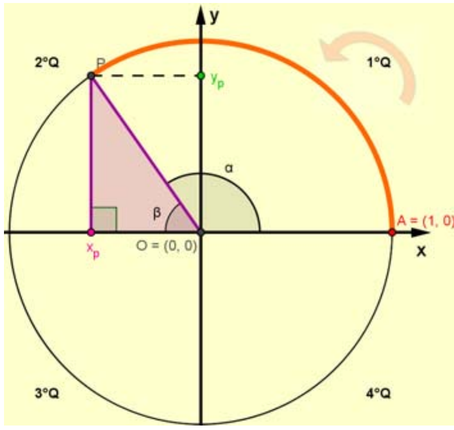
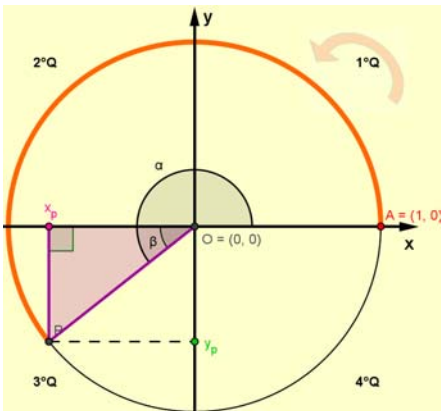


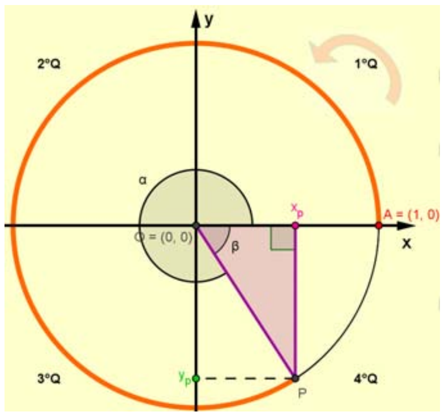
Figura 54: A formação de um triângulo retângulo no Ciclo Trigonométrico.

Com o movimento do ponto P observa-se que no primeiro quadrante, α é um ângulo agudo do triângulo retângulo ($0° < \alpha < 90°$). Já no segundo quadrante, α é um ângulo obtuso ($90° < \alpha < 180°$) e suplementar ao ângulo agudo do triângulo retângulo. Existem comportamentos específicos de comparação destes dois ângulos também nos outros quadrantes, para padronizá-los torna-se necessário o aparecimento de um ângulo β que representa o ângulo agudo do triângulo retângulo. Ao ativarmos a caixa "β" temos:

<table>
<tr>
<td>

No primeiro quadrante $\alpha = \beta$</td>
<td>

No segundo quadrante $\alpha + \beta = 180°$ logo $\alpha = 180° - \beta$</td>
</tr>
<tr>
<td>

No terceiro quadrante $180° < \alpha < 270°$ e $\alpha - \beta = 180°$, logo $\alpha = 180° + \beta$</td>
<td>

No quarto quadrante $270° < \alpha < 360°$ e $\alpha + \beta = 360°$, logo $\alpha = 360° - \beta$</td>
</tr>
</table>

Tabela 7: Relação entre os ângulos $\propto$ e β nos quatro quadrantes.

Estabelecidos todos esses elementos, é possível estabelecer as relações trigonométricas para o triângulo definido. Sugere-se que o professor justifique inicialmente o sentido de $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ e $\text{tg}\,\alpha$. Ao ativar cada uma das caixas, verifique suas regularidades nos eixos:

- "$\text{sen}\,\alpha$" mostra o movimento da projeção de P no eixo y;
- "$\cos\alpha$" mostra o movimento da projeção de P no eixo x;
- "$\text{tg}\,\alpha$" mostra o movimento na reta x = 1, da interseção da reta OP e a reta x = 1;

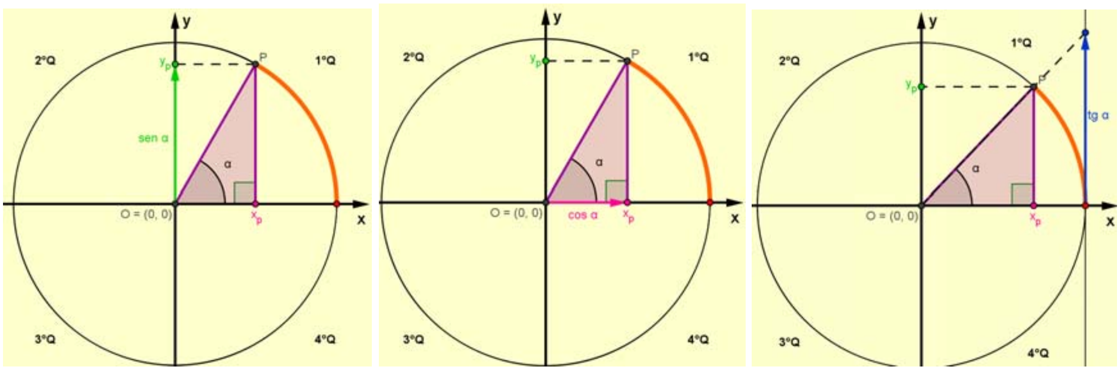


Figura 55: A formação das funções trigonométricas no Ciclo: seno, cosseno e tangente, respectivamente.

Assim, este aplicativo relaciona de maneira direta a transição do estudo da trigonometria no triângulo retângulo para o Ciclo Trigonométrico, de maneira detalhada para explorar cada um de suas partes.

5.5.2.4 APLICATIVO DOS ARCOS NOTÁVEIS NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Este aplicativo tem por objetivo a relação de simetrias entre os quadrantes usando como referência os ângulos notáveis: 30º, 45º e 60º. Esta é uma maneira de justificar as simetrias e familiarizar os alunos com os arcos mais utilizados no Ensino Médio. Observe que ele é exatamente um complemento do aplicativo anterior e segue com exploração teórica seqüencial.

A interface inicial do aplicativo tem apenas o Ciclo Trigonométrico e uma coluna de caixas do tipo "ATIVA/DESATIVA", separadas para os três ângulos, em cada dos quatro quadrantes, em cores diferentes: rosa para 30º, verde para 45º e azul para 60º.

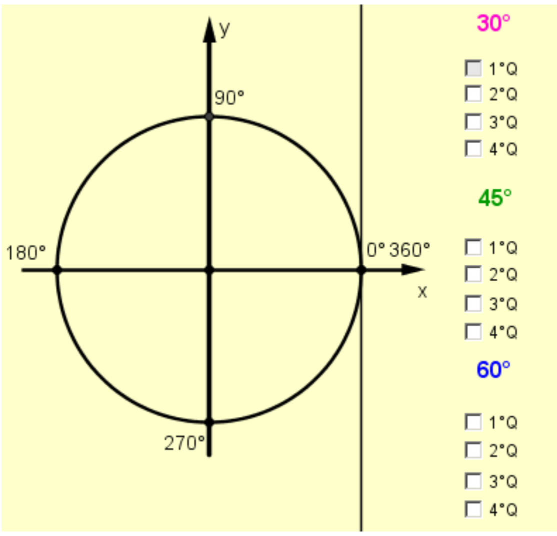


Figura 56: Interface inicial do aplicativo.

A correspondência de cores permanece durante todo o aplicativo. A explicação do aplicativo será detalhada pelo uso das caixas nos quadrantes.

No primeiro quadrante têm-se poucas novidades, desta maneira o objetivo principal é enfatizar que: a projeção do raio $\overline{OP}$ no eixo y é o valor do seno do arco destacado; a projeção do raio $\overline{OP}$ no eixo x é do valor do cosseno do arco, e a tangente é dada por um segmento (orientado a partir do ponto A) na reta x = 1, mais especificamente, o segmento que liga o ponto A(1,0) à interseção T da reta x=1 com a reta suporte do raio da circunferência.

Os valores encontrados no primeiro quadrante serão referências para os quadrantes seguintes, e os valores posteriormente encontrados se diferenciarão dos primeiros apenas pelo sinal.

Trata-se de um momento especial para a exploração de uma parte da tábua trigonométrica que é de conhecimento dos alunos no ensino médio:

	Sen	Cos	Tg
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Tabela 8: Tábua trigonométrica dos arcos notáveis 30º, 45º e 60º.

Ao ativar as caixas relativas ao primeiro quadrante, uma de cada vez, para cada um dos blocos de ângulos, podem-se observar valores da tabela em correspondência com a função trigonométrica em cada eixo:

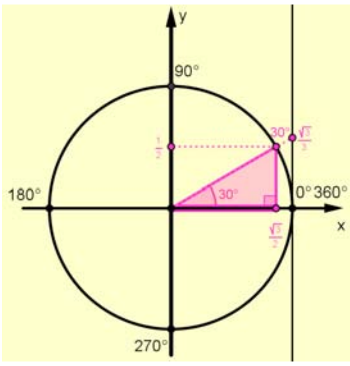
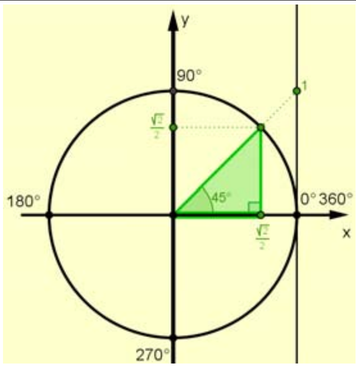
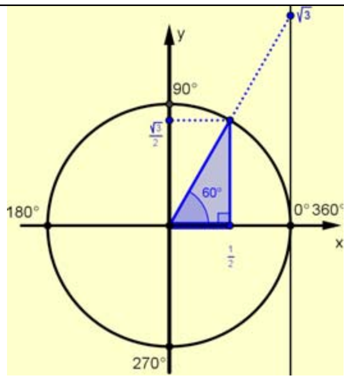
		
$\operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}, \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{tg} 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen} 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{tg} 45^o = 1$	$\operatorname{sen} 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^o = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} 60^o = \sqrt{3}$

Tabela 9: Representação do aplicativo no primeiro quadrante, com seus respectivos valores.

A partir do estudo do primeiro quadrante, temos referência para trabalhar os seguintes.

O triângulo retângulo do segundo quadrante estabelece simetrias com o do primeiro quadrante tendo o eixo y como eixo de simetria. Desta forma, o seno não sofre variação de valores, mas a projeção da hipotenusa do triângulo ocorre na parte de abscissas negativas do eixo x, e o encontro da reta suporte do raio com a reta x = 1 acontece no lado negativo desta reta (pensada como eixo das tangentes). Assim, os valores do cosseno e da tangente neste quadrante são negativos.

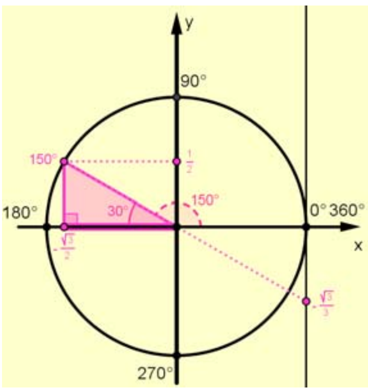
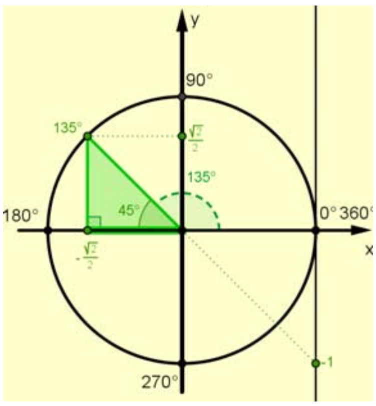
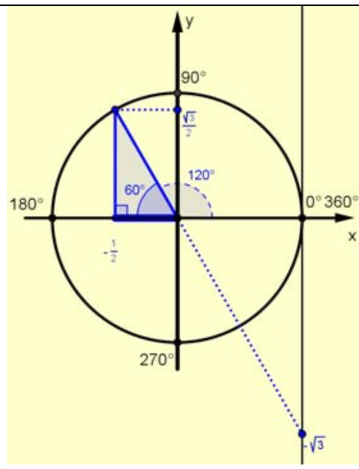
		
$\operatorname{sen} 150° = \frac{1}{2}, \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen} 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{tg} 135° = -1$	$\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 120° = -\frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} 120^o = -\sqrt{3}$

Tabela 10: Representação do aplicativo no segundo quadrante, com seus respectivos valores.

Os ângulos neste quadrante não são mais 30º, 45º e 60º, mas sim de 150º, 135º e 120º. Apesar deste contexto ter sido desenvolvido no aplicativo anterior, podemos observar neste aplicativo o ângulo interno do triângulo retângulo assim como o arco da circunferência.

No terceiro quadrante a simetria acontece a partir da origem, assim tanto o seno quanto o cosseno de arcos com extremidades neste quadrante serão negativos, porém a tangente volta a tocar o lado positivo da reta x = 1 (pensada como eixo das tangentes).

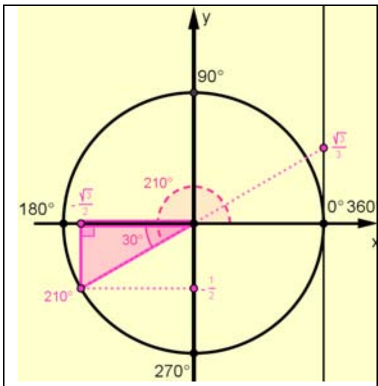
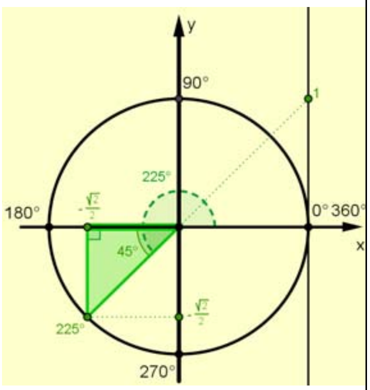
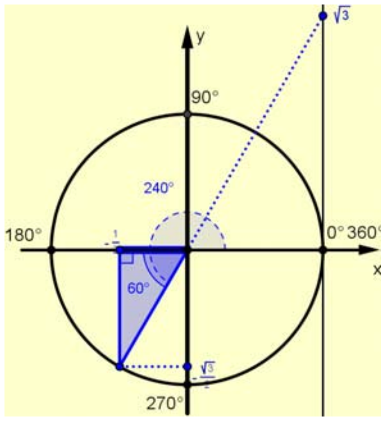
		
$\operatorname{sen} 210° = -\frac{1}{2}$, $\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{tg} 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen} 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{tg} 225° = 1$	$\operatorname{sen} 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 240° = -\frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} 240° = \sqrt{3}$

Tabela 11: Representação do aplicativo no terceiro quadrante com seus respectivos valores.

Novamente há alteração no arco estudado, no terceiro quadrante os ângulos de referência não são mais 30º, 45º e 60º (ângulos do triângulo retângulo), mas sim de 210º, 225º e 240º (ângulos do ciclo trigonométrico).

No quarto quadrante a simetria acontece em relação ao eixo x. A base do triângulo, no eixo x, permanece a mesma, portanto não há alteração nos valores do cosseno dos arcos observados, porém tanto os valores do seno, quanto os da tangente para arcos deste quadrante serão negativos.

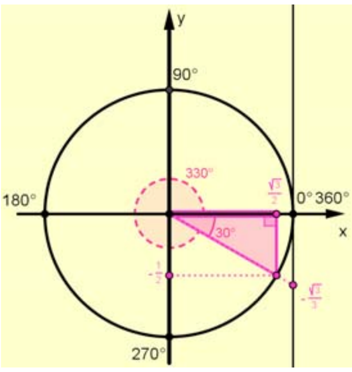
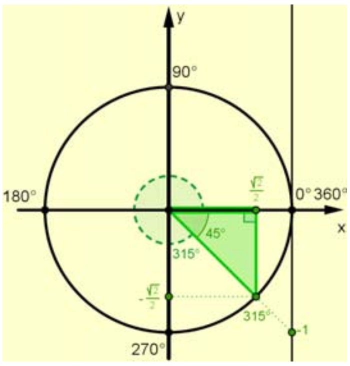
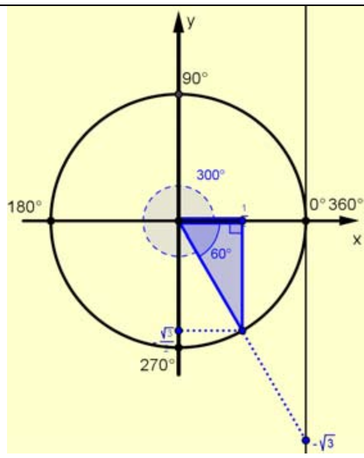
		
$\operatorname{sen} 330° = -\frac{1}{2}, \cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{tg} 330° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen} 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{tg} 315° = 1$	$\operatorname{sen} 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 300° = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg} 300° = \sqrt{3}$

Tabela 12: Representação do aplicativo no quarto quadrante, com seus respectivos valores.

No quarto quadrante, apesar dos ângulos agudos do triângulo retângulo continuar sendo 30º, 45º e 60º, os arcos correspondentes pela simetria serão 330º, 315º e 300º, respectivamente.

Ao manipular este aplicativo e professor deve estar atento à ativação e desativação das caixas para que não tenha figuras sobrepostas.

A estrutura do aplicativo vem para evidenciar os valores mais utilizados no ensino médio assim como complementar seu significado.

5.5.2.5 APLICATIVO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Este aplicativo tem por objetivo relacionar simultaneamente o Ciclo Trigonométrico com os gráficos das funções trigonométricas geradas no Plano Cartesiano. O dinamismo do movimento dos objetos observados é tratado, de maneira especial, para a facilitação da visualização sob outro ponto de vista do conteúdo de trigonometria explorado no ensino médio pelos alunos. Os objetivos deste aplicativo tem relações particulares com a Atividade 4 proposta anteriormente.

A interface inicial do aplicativo tem o Ciclo Trigonométrico e, abaixo, um Plano Cartesiano, em ambos segue-se uma graduação equivalente dos arcos notáveis: imagine o ciclo cortado no ponto (1,0) e desenrolado no eixo x de tal forma que o início – ponto (1,0)

– coincida com a origem do Plano Cartesiano – ponto (0,0). Logo abaixo do Plano, observam-se seis caixas com a função de ativar/desativar os objetos. Estas caixas estão dispostas em duas linhas (a primeira indica movimentos no ciclo e a segunda os movimentos no gráfico) e três colunas – primeira coluna sobre a função seno, segunda sobre a função cosseno e a terceira sobre a função tangente.

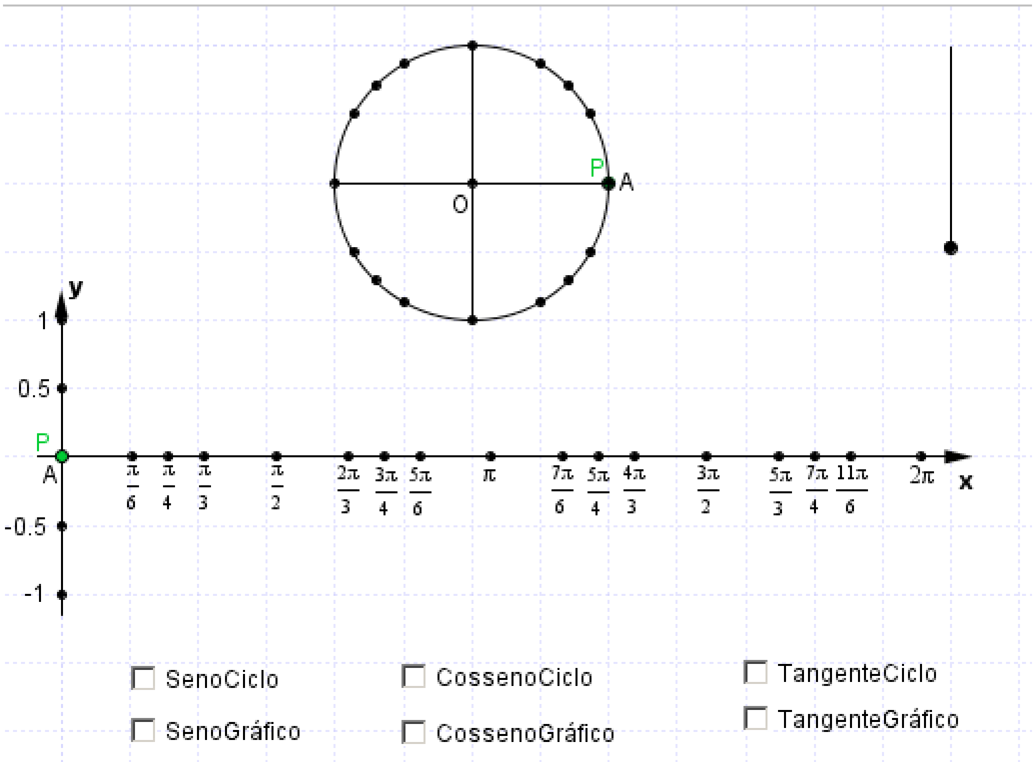


Figura 57: Interface inicial do aplicativo.

Há, também, um seletor no canto direito que se move a partir de direcionar sua bolinha para cima ou para baixo com o mouse clicado. Todo o movimento acontece a partir do seletor, assim, não adianta tentar manipular o ponto P, nem no ciclo, nem no gráfico, pois eles estão vinculados ao movimento do seletor. Esta foi uma alternativa encontrada com os recursos do GeoGebra para permitir o vínculo destes objetos.

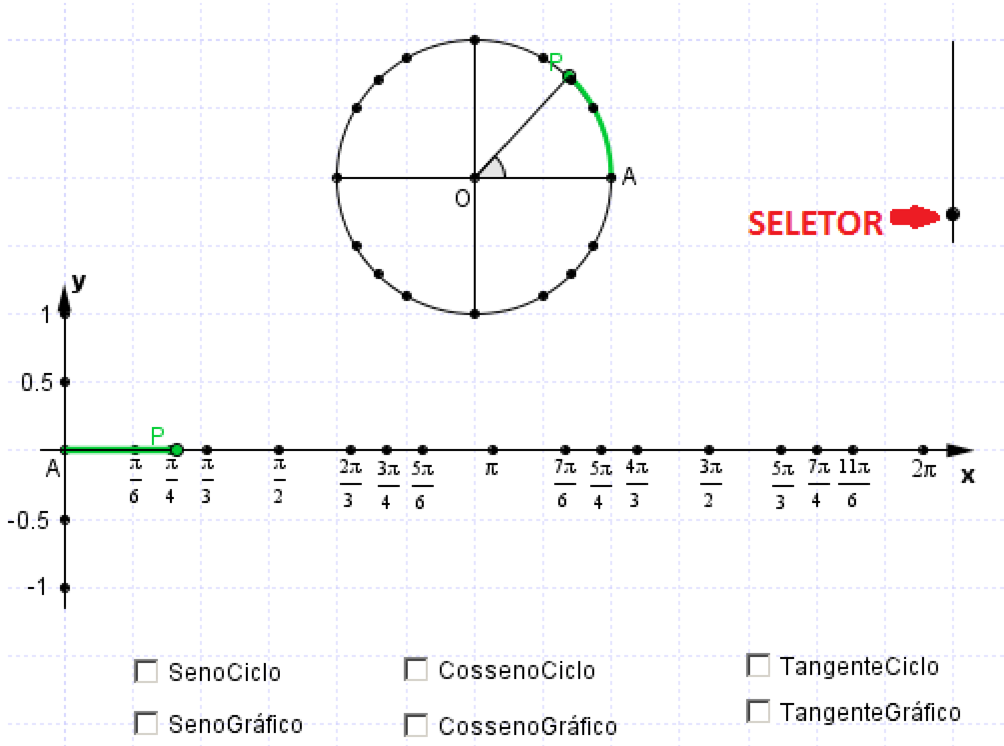


Figura 58: A manipulação do seletor e as mudanças no aplicativo.

Observa-se na figura acima que ao movimentar o seletor tem-se o ponto P se movendo simultaneamente no ciclo e no Plano Cartesiano e, o arco $\overset{\frown}{AP}$ no ciclo tem correspondência de cor e tamanho com o segmento $\overline{AP}$ no Plano. É interessante que o professor movimente várias vezes o seletor para que haja familiarização do aplicativo pelos alunos antes de seguir os próximos passos.

Como o aplicativo usa a mesma lógica para desenvolver os elementos das diferentes funções trigonométricas – seno, cosseno e tangente – a partir deste momento usar-se-á como referência os elementos do seno para a descrição da dinâmica do aplicativo.

Ao ativar a caixa "SenoCiclo" aparece instantaneamente na interface dois segmentos: $\overline{OP_y}$ no ciclo e $\overline{PP_y}$ no gráfico, ambos mantendo mesma cor e mesmo comprimento.

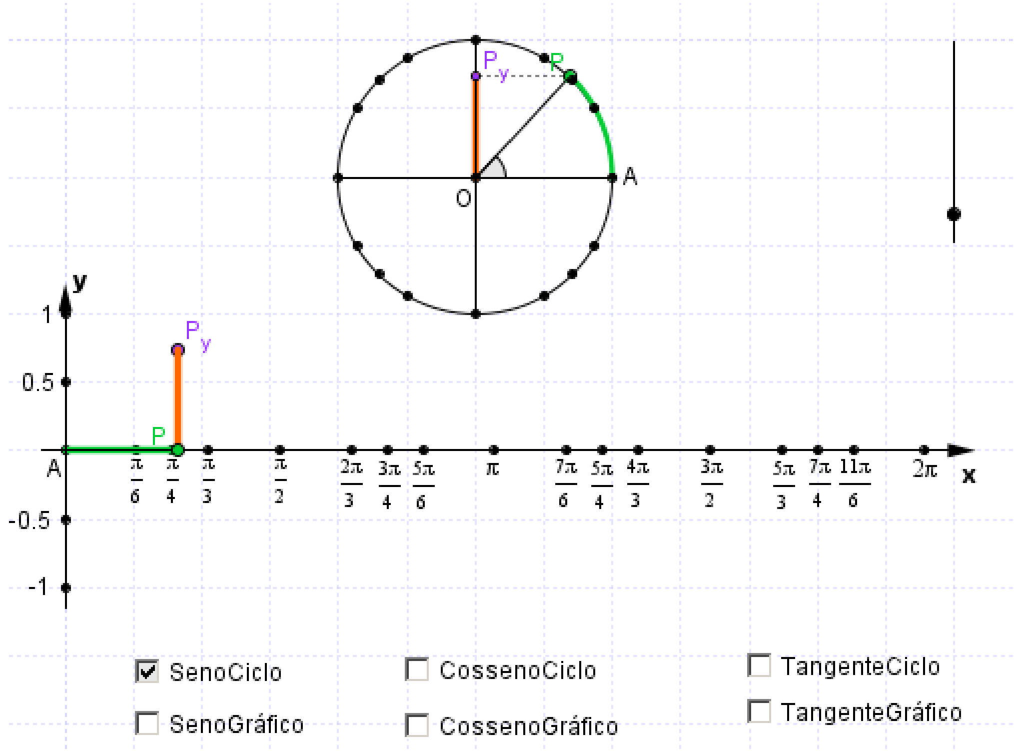


Figura 59: A formação do seno no Ciclo Trigonométrico e, simultaneamente, no gráfico da função seno.

Depois de movimentado o seletor por diversas vezes, o aluno já terá percebido que há alteração no comprimento dos segmentos descritos de forma vinculada. Então, ao ativar a caixa “SenoGráfico” aparecerá o rastro do ponto P_y deixado no gráfico, sinalizando a função seno.

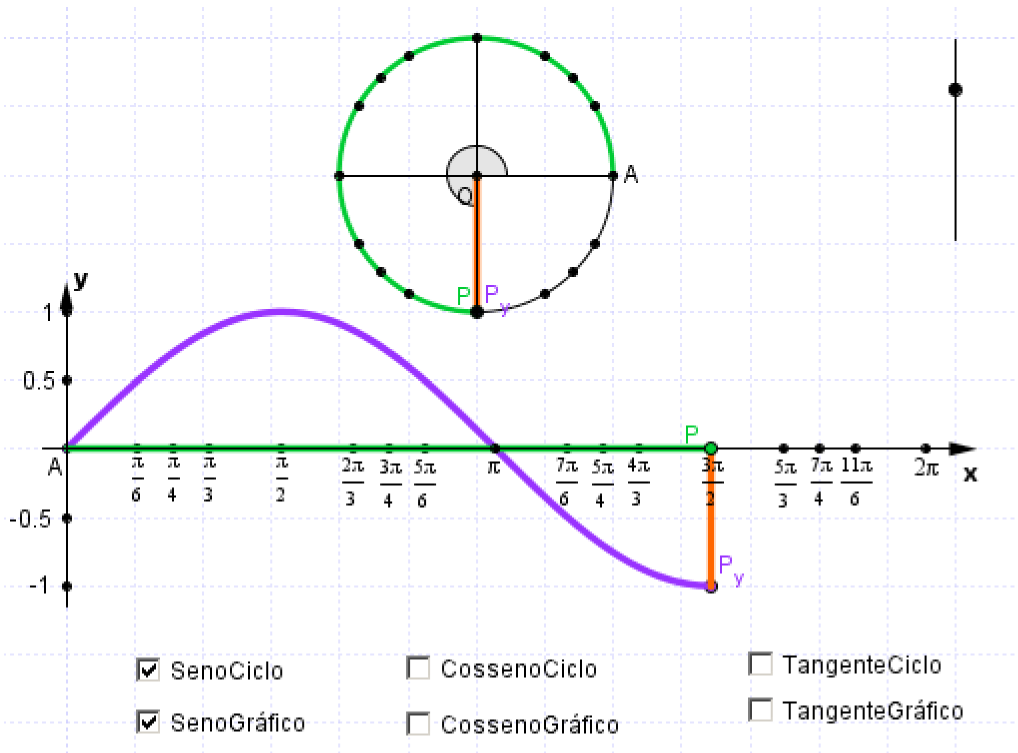


Figura 60: Rastros do ponto P_y no ciclo e no gráfico.

O mesmo procedimento pode ser observado para as outras duas funções, cosseno e tangente. Como o intuito inicial é mostrar os detalhes da transição do ciclo para o gráfico de cada uma das funções, é interessante sempre desativar as caixas de uma função estudada anteriormente para dar início ao estudo da próxima, assim não há sobreposição dos objetos e os alunos podem observar características particulares pausadamente. Veja nas figuras abaixo as opções do aplicativo para as funções cosseno e tangente:

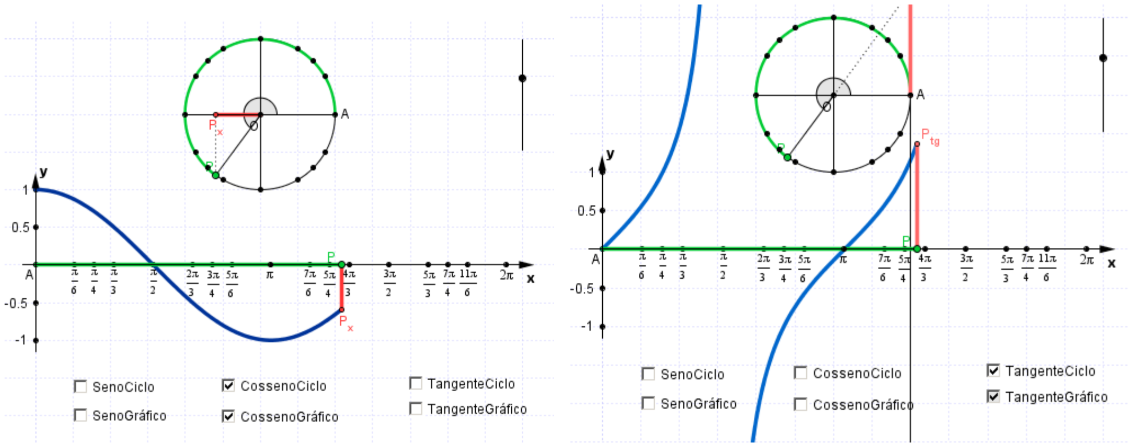


Figura 61: Opções do aplicativo para as funções Cosseno (à esquerda) e Tangente (à direita).

Se movimentado o seletor até o fim, pode-se perceber o gráfico das funções sobre o intervalo de [0º, 360º], ressalvando-se que a função tangente não é definida nos múltiplos ímpares de 90º. Focou-se neste intervalo pelas condições visuais do aplicativo. Pode-se até observar que a escala do gráfico não está em 1:1, com os pontos em graus, mas está nesta escala em radianos. Porém, foram colocados os valores da abscissa em graus simplesmente por uma proposta didática de maior familiarização aos alunos.

Observem nas figuras abaixo os gráficos das três funções no intervalo definido:

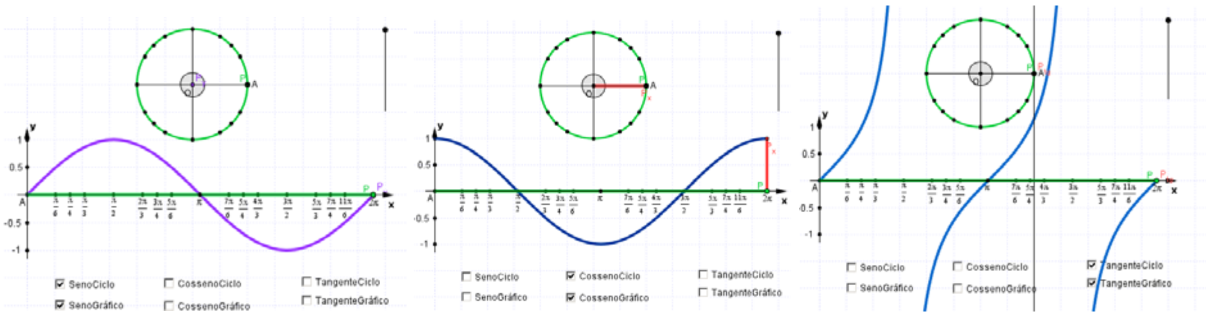


Figura 62: As três funções exploradas pelo aplicativo.

Nesta etapa o professor pode explorar a monotonicidade das funções, assim como a paridade.

O aplicativo também pode explorar detalhes comuns a alguns gráficos, por exemplo, ao analisar simultaneamente as funções seno e cosseno, pode-se verificar que em um período elas se interceptam em dois momentos, no $\frac{\pi}{4}$ (momento em que ambas as funções valem $\frac{\sqrt{2}}{2}$) e no $\frac{5\pi}{4}$ (momento em que ambas as funções valem $-\frac{\sqrt{2}}{2}$).

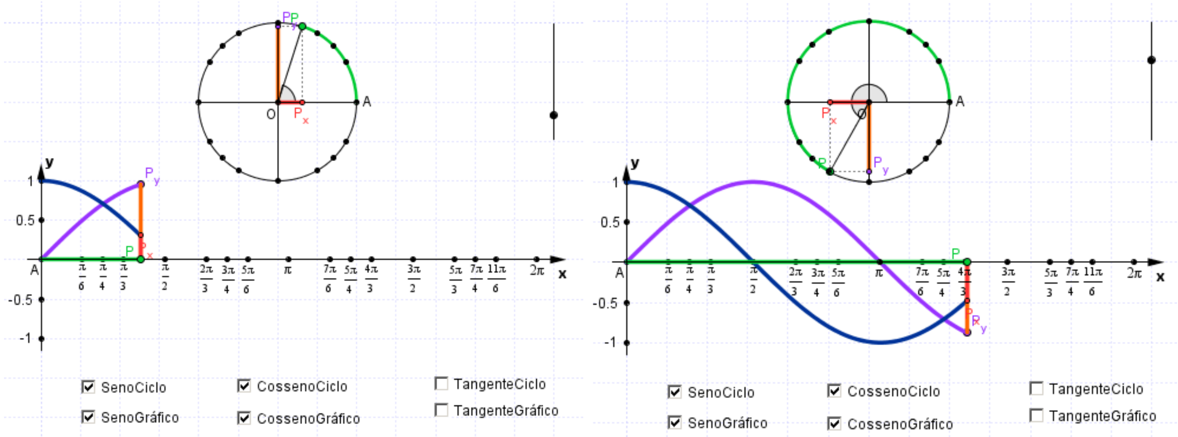


Figura 63: Visualização simultânea da função seno e cosseno para novas comparações.

O aplicativo tem grande potencial para exploração, ao ritmo do professor e dos alunos. Durante sua apresentação, os alunos questionarão os elementos, principalmente porque muitos dos detalhes estudados passam a ser mais bem entendidos.

5.5.2.6 VARIAÇÕES DOS GRÁFICOS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste momento serão agrupados três aplicativos com a mesma proposta, porém para funções diferentes, um para o seno, outro para o cosseno e, ainda, outro para a tangente.

O objetivo aqui explorado é a variação gráfica das funções trigonométricas a partir de quatro parâmetros: a, b, m e n, dispostos nas equações das funções $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(mx + n)$, $g(x) = a + b \cdot \cos(mx + n)$ e $h(x) = a + b \cdot \text{tg}(mx + n)$. Para atingi-lo, cada um dos três aplicativos foi criado para com o mesmo principio: quatro seletores – um para cada parâmetro observado – que ao serem manipulados produzem as devidas alterações nas funções iniciais.

A interface inicial destes aplicativos é composta de um gráfico com a função inicial em pontilhado e, cinco caixas de ativa/esconde objetos para direcionar as mudanças de um parâmetro de cada vez sendo que, uma das caixas é responsável por agrupar todos os parâmetros.

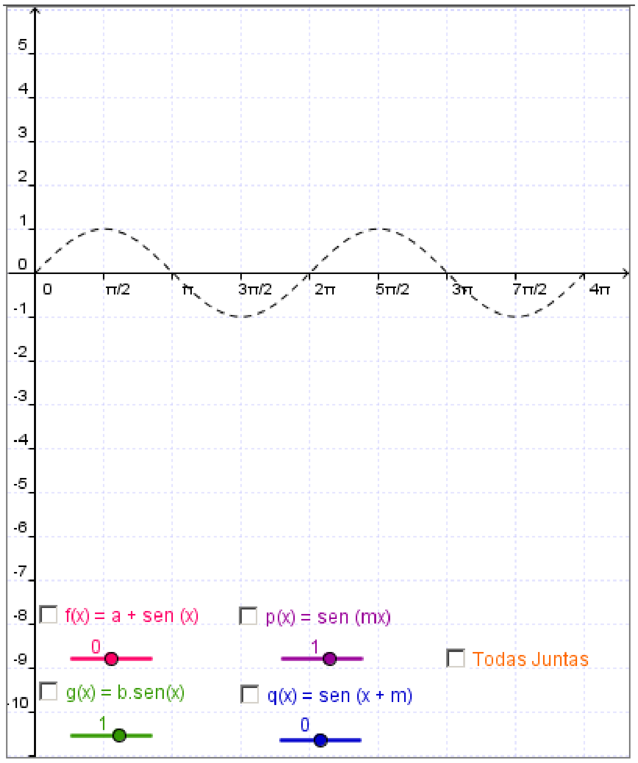


Figura 64: Interface inicial do aplicativo.

Cada uma das caixas e dos seletores tem uma cor especifica que corresponderá à cor da função que aparecerá no aplicativo assim que a caixa for ativada.

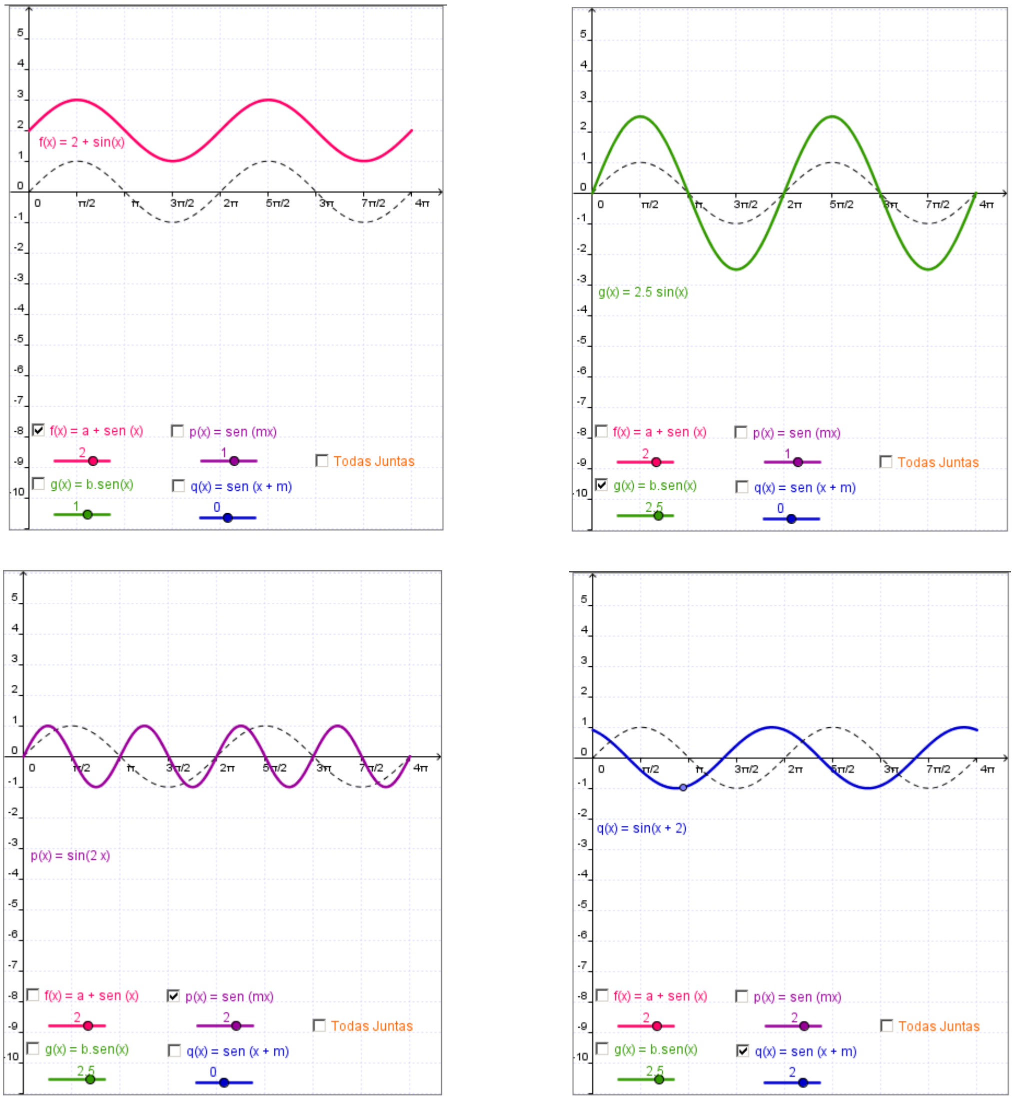


Figura 65: Os quatro diferentes parâmetros explorados no aplicativo.

Na primeira caixa há mudança no parâmetro a, sob a função $f(x) = a + \text{sen}(x)$, que desloca o gráfico para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$). Assim, esta mudança promove alteração na imagem do gráfico. O seletor rosa, que promove estas alterações varia de -5 a 5 de maneira discreta, ou seja, a pode assumir somente valores inteiros. Esta opção foi pensada unicamente para deixar o gráfico com uma equação mais apresentável.

Tem-se a caixa para a mudança no parâmetro b, em verde, sob a função $g(x) = b \cdot \text{sen}(x)$. Este parâmetro altera a amplitude do gráfico: se b é positivo, as concavidades do gráfico são mantidas, caso b seja negativo, há a inversão das concavidades; ou ainda; para $|b| > 1$ tem-se a amplitude ampliada, estica-se o gráfico no sentido do eixo y, caso $0 < |b| < 1$ tem-se a amplitude reduzida, comprime-se o gráfico no sentido do eixo y. Assim, para este parâmetro também tem-se alteração na imagem do gráfico. O seletor verde, que promove estas alterações varia de -5 a 5 com incremento de 0,25.

Na terceira caixa há mudança no parâmetro m, sob a função $f(x) = \text{sen}(mx)$, que promove a alteração no período p do gráfico. Podemos observar que para $|m| > 1$ o gráfico tem seu período diminuído, é como se o gráfico da função se comprimisse na direção do eixo x; já para $0 < |m| < 1$ o período do gráfico é aumentado, como se expandisse no eixo x. O período das funções seno e cosseno pode ser calculado por $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$. Já para a função tangente, que tem período π, o cálculo deve ser feito por $p = \dfrac{\pi}{|m|}$. O seletor lilás, que promove estas alterações varia de -5 a 5 com incremento de uma unidade.

Na quarta caixa há mudança no parâmetro n, para a função $f(x) = \text{sen}(x + n)$. A variação deste parâmetro desloca o gráfico para a direita ($n < 0$) ou para a esquerda ($n > 0$). O seletor azul, que promove estas alterações varia de -5 a 5 com incremento de uma unidade.

A última caixa de ativa/desativa tem o nome “Todas Juntas” e serve para a verificação das variações de todos os parâmetros simultaneamente.

A exploração gráfica é uma habilidade que deve ser trabalhada em abundância na sala de aula. O uso de um software dinâmico facilita o uso e a interpretação dos gráficos.

5.5.3 NOVA PROPOSTA DE APLICATIVOS

Os aplicativos apresentados acima têm uma característica individualista. Pode-se comparar a uma apresentação de PowerPoint: o criador usa da sua própria lógica e sequência para construir o objeto e, se outra pessoa for usá-lo, pode não optar pela mesma ordem ou pela mesma estrutura.

Para que houvesse a publicação dos aplicativos de maneira a universalizá-lo foi usado o software livre iSpring Free. Trata-se de um programa completo e com ótimos recursos para converter apresentações feitas em PowerPoint (.PPS e .PPT) para um formato mais compacto: o Flash (.SWF). Esta sugestão veio de um colega de faculdade, Leonardo Barrichello, gerente de mídias, do projeto M^3 (Projeto de Produção de Material Didático Multimídia de Matemática para o Ensino Médio do Brasil) que auxiliou a autora na discussão de muitas ferramentas do Geogebra.

Como o aplicativo feito em GeoGebra pode ser convertido em linguagem HTML, com o auxilio do iSpring Free tornou-se possível a inserção de uma apresentação em PowerPoint nos aplicativos, permitindo a descrição de passos e de conteúdos explorados.

Esta alternativa possibilitou uma outra perspectiva para os objetos de aprendizagem construídos: o aluno e/ou outros professores poderiam ter acesso ao material e entender seu enredo sem necessariamente ter contato com quem os criou. E o Geogebra quando transformado em HTML não disponibiliza as ferramentas que deixem o usuário perdido construindo coisas indesejadas com um simples clique.

5.5.4 RELATO DOS ALUNOS

Para captar a impressão dos alunos da 3ª série do Ensino Médio do Objetivo de Mogi Guaçu, decidiu-se por captar a impressão deles sobre a trigonometria com uma pergunta inicial e, ao final da aula, uma nova pergunta fecharia a opinião dos alunos sobre a abordagem feita sobre o assunto.

5.5.4.1 PERGUNTA INICIAL

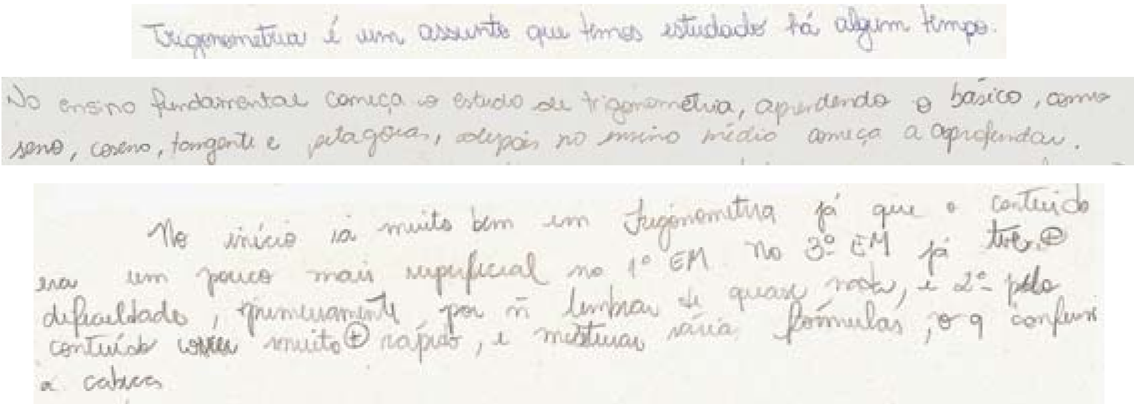
Após a apresentação da professora e da proposta da aula, assim como a referência do projeto de pesquisa de mestrado, foi distribuída uma folha a cada aluno com as seguintes reflexões e questionamentos:

"Relate um pouco sobre a sua experiência com o conteúdo de Trigonometria. Explicite o quanto ele é significativo para você. Quais suas principais dificuldades e habilidades com o tema?"

Estas questões serviram de referência para contextualizar o contato e a familiarização que os alunos tinham com o assunto tratado. Os alunos responderam rapidamente, sem se identificar.

Ao analisar as respostas, pôde-se perceber uma grande variedade de informações. Os alunos apontam a freqüência com que a trigonometria aparece como currículo em sala de aula, principalmente no Ensino médio:

> "Trigonometria é um assunto que temos estudado há algum tempo."
> "No ensino fundamental começa o estudo de trigonometria, aprendendo o básico, como seno, cosseno, tangente e Pitágoras, depois no ensino médio começa a aprofundar."
> "No início ia muito bem em Trigonometria já que o conteúdo era um pouco mais superficial no 1º EM (ensino médio). No 3º EM já tive dificuldade, primeiramente por não lembrar de quase nada, e 2º pelo conteúdo muito rápido, e misturar várias fórmulas, o que confunde a cabeça."


Trigonometria é um assunto que temos estudado há algum tempo.

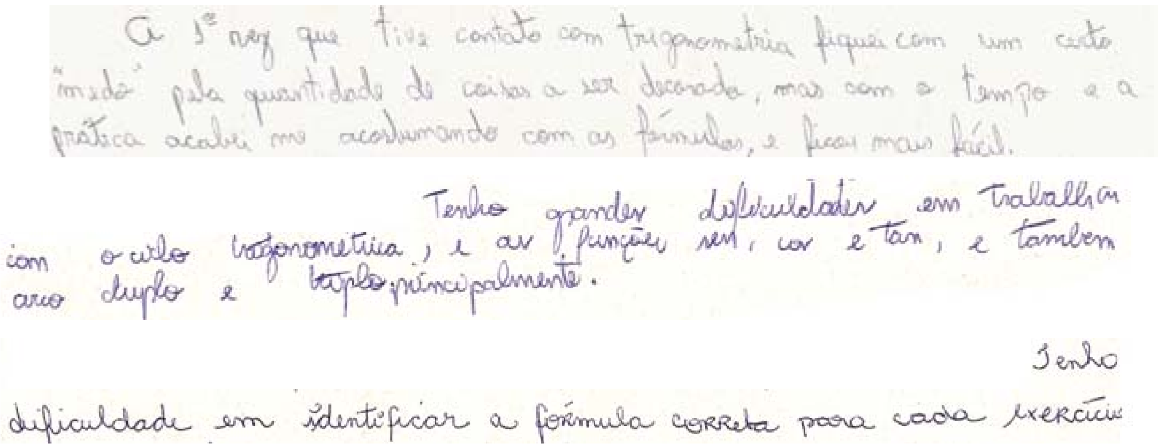
No ensino fundamental começa o estudo de trigonometria, aprendendo o básico, como seno, coseno, tangente e pitagoras, depois no ensino médio começa a aprofundar.

No início ia muito bem em Trigonometria já que o conteúdo era um pouco mais superficial no 1º EM. No 3º EM já tive dificuldade, primeiramente por ñ lembrar de quase nada, e 2º pelo conteúdo muito rápido, e misturar vária fórmulas, o q confunde a cabeça

Figura 66: Respostas dos alunos aos questionamentos iniciais.

Percebemos que o ultimo relato acima aponta para a profundidade do tema quando abordado na última série do Ensino Médio. Esta característica vem de encontro com a mudança de abordagem: uma hora a trigonometria se assemelha mais com a geometria e em outros momentos ela está mais relacionada com a álgebra.

> “A 1ª vez que tive contato com a trigonometria fiquei com um certo ‘medo’ pela quantidade de coisas a ser decorada, mas com o tempo e a prática acabei me acostumando com as fórmulas, e ficou mais fácil.”
> “Tenho grandes dificuldades em trabalhar com o ciclo trigonométrico, e as funções sen, cos e tan, e também arco duplo e triplo principalmente.”
> “Tenho dificuldade em identificar a fórmula correta para cada exercício.”



A 1ª vez que tive contato com trigonometria fiquei com um certo "medo" pela quantidade de coisas a ser decorada, mas com o tempo e a prática acabei me acostumando com as fórmulas, e ficou mais fácil.

Tenho grandes dificuldades em trabalhar com o ciclo trigonométrico, e as funções sen, cos e tan, e também arco duplo e triplo principalmente.

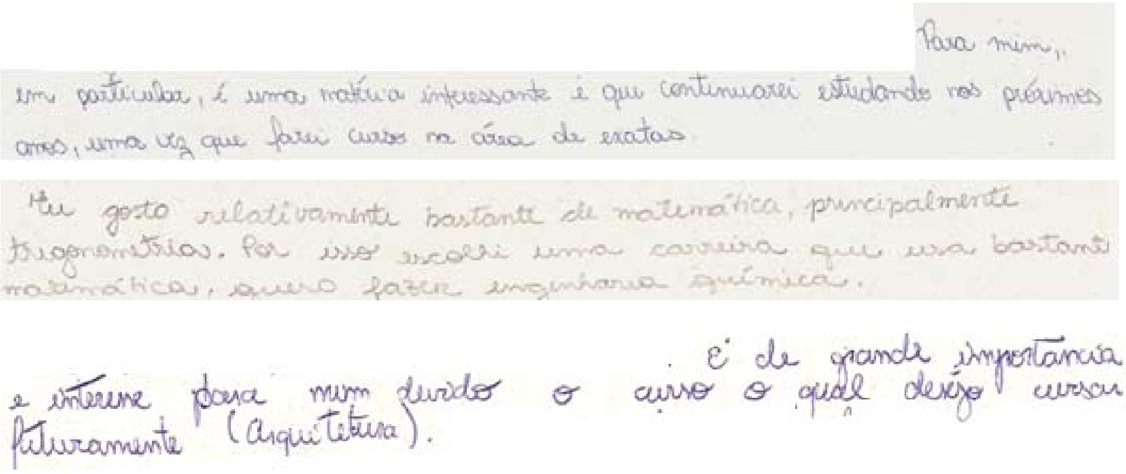
Tenho dificuldade em identificar a fórmula correta para cada exercício

Figura 67: Respostas dos alunos aos questionamentos iniciais.

Observa-se que os alunos apontam dificuldades em se familiarizar com fórmulas. Sob uma visão superficial, pode-se declarar que essa dificuldade pode ser proveniente de falta de aprendizagem sobre o conteúdo.

Muitos alunos justificam a importância do estudo da trigonometria, até mesmo por se relacionar com a profissão escolhida. Este enfoque é muito presente em uma sala de terceira série do ensino médio pois esses alunos estão vivenciando um momento de transição muito importante de suas vidas onde torna-se necessária a reflexão sobre futuros empregos.

> “Para mim, em particular, é uma matéria interessante e que continuarei estudando nos próximos anos, uma vez que farei curso na área de exatas.”
> “Eu gosto relativamente bastante de matemática, principalmente trigonometria. Por isso, escolhi uma carreira que usa bastante matemática, quero fazer engenharia química.”
> “É de grande importância e interesse para mim devido o curso o qual desejo cursar futuramente (arquitetura).”


Para mim, em particular, é uma matéria interessante e que continuarei estudando nos próximos anos, uma vez que farei curso na área de exatas.

Eu gosto relativamente bastante de matemática, principalmente trigonometrias. Por isso escolhi uma carreira que usa bastante matemática, quero fazer engenharia química.

É de grande importância e interesse para mim devido o curso o qual desejo cursar futuramente (Arquitetura).

Figura 68: Reflexões de alunos sobre a importância da matemática para suas carreiras pretendidas.

Por outro lado, alguns alunos não se identificam com a relação trigonometria e profissão:

> "Na área que eu pretendo seguir não pretendo usar, tenho um pouco de dificuldade com a matéria, apesar de gostar um pouco de trigonometria quando entendo e no começo da matéria."

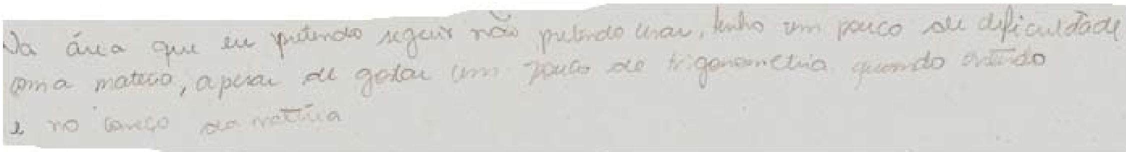

Na área que eu pretendo seguir não pretendo usar, tenho um pouco de dificuldade com a matéria, apesar de gostar um pouco de trigonometria quando entendo e no começo da matéria

Figura 69: Depoimento de aluno que não vê importância da trigonometria para a sua futura profissão.

De maneira geral, os alunos se situaram neste momento de reflexão sobre a trigonometria. Este foi uma abordagem inicial que resgatou as experiências e imagens que os alunos tinham do assunto.

5.5.4.2 PERGUNTA FINAL

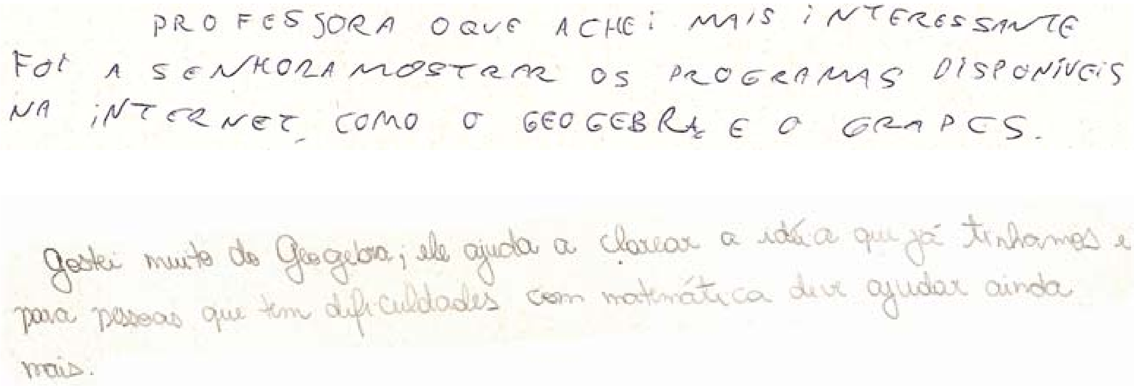
Para o fechamento da proposta, após a apresentação dos aplicativos, foi pedido aos alunos que preenchessem uma nova proposta de reflexão e questionamentos para que explicitassem suas opiniões a respeito dos objetos. A pergunta foi a seguinte:

"Qual a sua opinião sobre os objetos apresentados pela professora Thais? Eles ajudaram você a entender e dar mais significado à Trigonometria? Relate o que mais gostou. Dê críticas e sugestões se achar necessário. Sua contribuição será muito importante!"

Novamente temos uma diversidade de pontos de vista. O projeto de maneira geral foi muito elogiado, por vários motivos:

- O contato dos alunos com novos conhecimentos na área de educação e a informação sobre a disponibilidade de softwares livres na rede;

> "Professora, o que achei mais interessante foi a senhora mostrar os programas disponíveis na internet, como o Geogebra e o Grapes."
> "Gostei muito do Geogebra; ele ajuda a clarear a idéia que já tínhamos e para pessoas que tem dificuldades com matemática deve ajudar ainda mais."

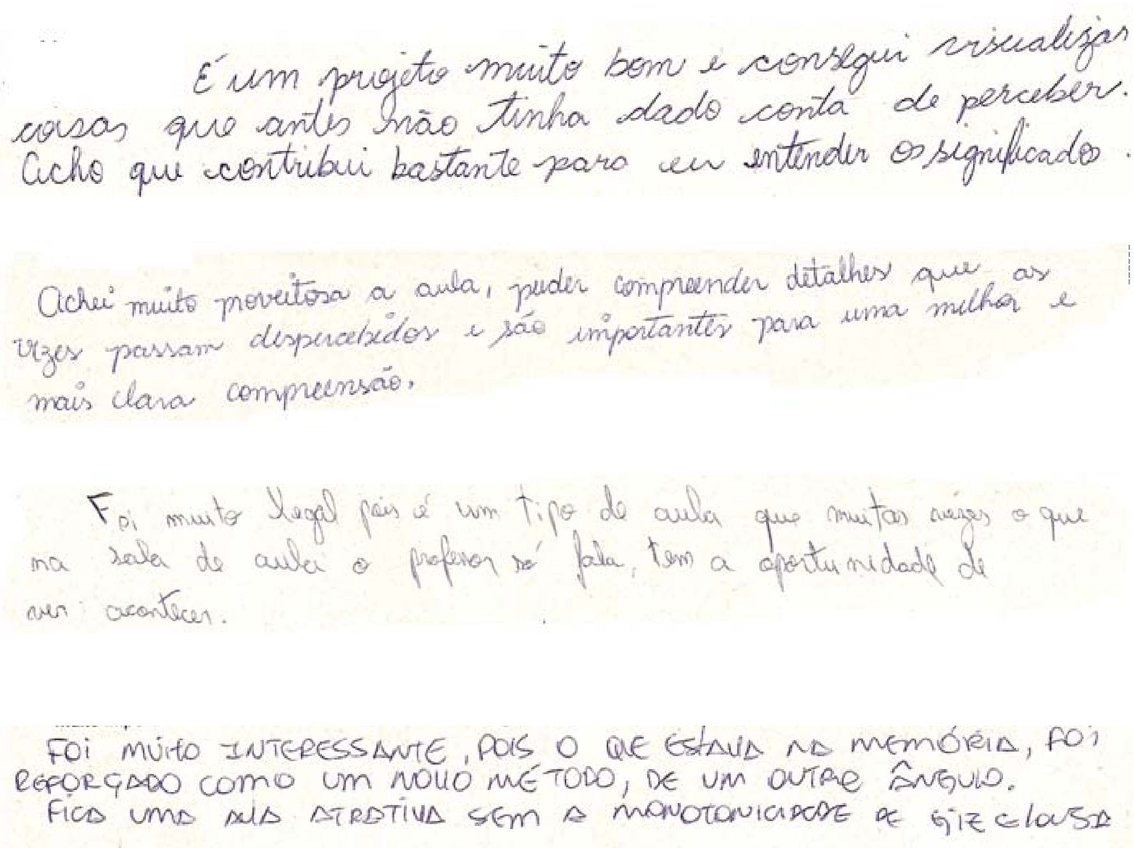

PROFESSORA OQUE ACHEI MAIS INTERESSANTE FOI A SENHORA MOSTRAR OS PROGRAMAS DISPONIVEIS NA INTERNET COMO O GEOGEBRA E O GRAPES.

Gostei muito do Geogebra; ele ajuda a clarear a idéia que já tinhamos e para pessoas que tem dificuldades com matemática deve ajudar ainda mais.

Figura 70: Manifestações positivas de alunos em face dos novos aplicativos.

- A dinâmica diferenciada da sala de aula que permite movimentos e supera o giz e a lousa, além do detalhamento do conteúdo estudado;

> "É um projeto muito bom e consegui visualizar coisas que antes não tinha dado conta de perceber. Acho que contribui bastante para eu entender o significado."
> "Achei muito proveitosa a aula, poder compreender detalhes que às vezes passam despercebidos e são importantes para uma melhor e mais clara compreensão."
> "Foi muito legal pois é um tipo de aula que muitas vezes o que na sala de aula o professor só fala tem a oportunidade de ver acontecer."
> "Foi muito importante, pois o que estava na memória, foi reforçado como um novo método, de um outro ângulo. Fica uma aula atrativa sem a monotonicidade de giz e lousa."


É um projeto muito bom e consegui visualizar coisas que antes não tinha dado conta de perceber. Acho que contribui bastante para eu entender os significados.

Achei muito proveitosa a aula, puder compreender detalhes que as vezes passam despercebidos e são importantes para uma melhor e mais clara compreensão.

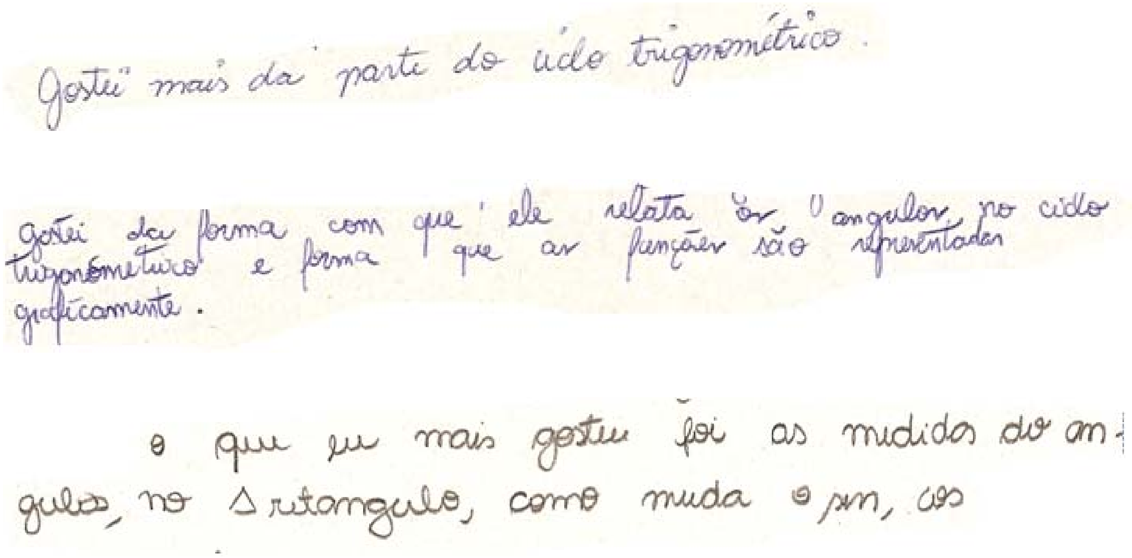
Foi muito legal pois é um tipo de aula que muitas vezes o que na sala de aula o professor só fala, tem a oportunidade de ver acontecer.

FOI MUITO INTERESSANTE, POIS O QUE ESTAVA NA MEMÓRIA, FOI REFORÇADO COMO UM NOVO MÉTODO, DE UM OUTRO ÂNGULO.
FICA UMA AULA ATRATIVA SEM A MONOTONIADADE DE GIZ E LOUSA

Figura 71: Depoimentos de alunos sobre a nova dinâmica de aulas.

É interessante que cada aluno se identificou mais com determinado objeto apresentado. Tivemos muitas diversidade de respostas com relação aos objetos que chamaram mais a atenção:

> "Gostei mais da parte do ciclo trigonométrico."
> "Gostei da forma com que ele relata os ângulos no ciclo trigonométrico e forma que as funções são apresentadas graficamente."
> "O que eu mais gostei foi as medidas do ângulo no triângulo retângulo, como muda o sen, cos.


Gostei mais da parte do ciclo trigonométrico.

gostei da forma com que ele relata os angulos no ciclo trigonometrico e forma que as funções são representadas graficamente.

o que eu mais gostei foi as medidas do angulos, no Δ retangulo, como muda o sen, cos

Figura 72: Diversidade de respostas em relação aos objetos.

A proposta recebeu uma crítica muito relevante com relação à rapidez com que os objetos foram explorados. Vale ressaltar que a professora, em suas aulas, acabava sempre mostrando um ou dois objetos, pausadamente, conforme a matéria fosse construída. Porém, para esse conjunto de três aulas que usamos como referência para este trabalho havia limite de tempo, e foi preciso aproveitar a oportunidade de expor os objetos para uma turma que já tinham familiarização com a matéria, mas não com a geometria dinâmica.

> "Porém como foi dado um assunto grande em uma aula eu achei um pouco corrido. Talvez com mais calma seria mais produtivo."

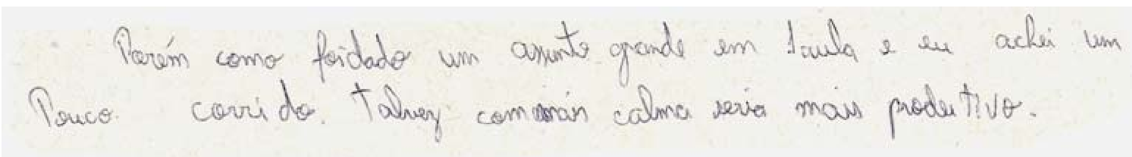
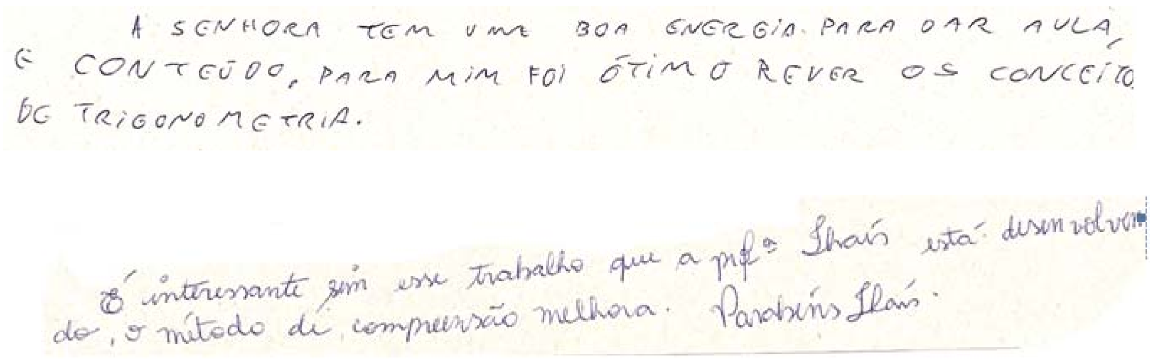

Porém como foi dado um assunto grande em 1 aula e eu achei um Pouco corrido. Talvez com mais calma seria mais produtivo.

Figura 73: Depoimento de aluno com respeito à rapidez da dinâmica de apresentação dos objetos.

Muitos foram os elogios sobre a prática docente e, neste sentido, a prática da professora pesquisadora, que é objeto de estudo desta dissertação, tem apontamentos para um aprimoramento a partir de buscas de novos conhecimentos que se originam de um conteúdo determinado. Apresentam-se abaixo alguns desses elogios:

> "A senhora tem uma boa energia para dar aula, e conteúdo, para mim foi ótimo rever os conceitos de trigonometria."

"É interessante sim esse trabalho que a professora Thaís está desenvolvendo, o método de compreensão melhora. Parabéns Thaís."



A SENHORA TEM UMA BOA ENERGIA PARA DAR AULA E CONTEÚDO, PARA MIM FOI ÓTIMO REVER OS CONCEITO DE TRIGONOMETRIA.

É interessante sim esse trabalho que a profª Thaís está desenvolvendo, o método de compreensão melhora. Parabéns Thaís.

Figura 74: *Elogios à professora.*

5.55 CONCLUSÃO

Pode-se apontar um grande impacto na proposta docente a partir do uso da tecnologia. Os aplicativos completam a teoria estudada. Os alunos mudam efetivamente de postura com a professora a partir dessas aulas, muitos questionam: "Professora, mas como a senhora conseguiu desenvolver esse aplicativo?". Percebe-se uma confiança maior e uma gratidão pela preocupação docente em melhorar o ensino e promover uma aula com dinâmica diferenciada.

Os aplicativos também foram enviados para outros professores para que houvesse colaboração e sugestão na proposta e, muitos elogios apareceram. No site do Portal do Professor houve uma avaliação positiva registrada para uma das aulas postadas que usavam o GeoGebra para significar as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Trata-se de uma contribuição inovadora, que além de mudar o dinamismo das aulas, dá um caráter diferenciado através do movimento. E a tecnologia na educação, quando usada de maneira planejada, é capaz de atingir objetivos esperados na busca de formar um cidadão capaz de raciocinar e habilitado a enfrentar o mercado de trabalho e as oportunidades da vida.

CAPÍTULO 6

Conclusão e Considerações Finais

Ser professor de Matemática requer habilidades excepcionais: habilidade com registros, boa comunicação, conhecimento do conteúdo a ser ensinado, e muita paciência, entre outros valores e habilidades.

No inicio da carreira, vale salientar que quem escolheu ser professor de Matemática o fez por se encantar com essa matéria, o professor se depara com uma situação muito peculiar: nem todos os seus alunos vêem a Matemática como ele, para muitos ela é um problema.

Para superar tais obstáculos, e com o intuito de transformar a Matemática em uma linguagem que seja mais acessível aos alunos e que possa ser realmente comunicada e, ainda, desenvolver as habilidades e competências exigidas pelo Ministério da Educação, o professor deve usar de diversas dinâmicas de aulas e/ou estratégias didáticas que dependem do seu próprio conhecimento, pois ao conhecer muito bem um conteúdo é possível formular idéias e não ser um mero repetidor de livros. Nunca uma aula é igual à outra, pois sempre há um aprimoramento, uma recepção ao conteúdo e ao professor de maneira diferente.

A oportunidade de cursar um mestrado profissional surge com grande eficácia em aprimorar a prática docente do professor. É um momento colaborativo, pois há o contato de diversos profissionais da mesma área que compartilham de experiências diferentes. Ao mesmo tempo, por continuar seu trabalho, o professor/pesquisador tem um laboratório diário do qual pode tirar reflexões e análises do seu próprio trabalho.

Desta maneira, o objetivo desta dissertação foi de avaliar a mudança da prática docente e do ensino de trigonometria a partir da busca de novos conhecimentos. Esses conhecimentos foram adquiridos nas mais diversas áreas, seja na didática da matemática, no estudo do currículo escolar, na observação de inovações em sala de aula, no conhecimento de novos softwares, na aplicação de novas atividades, no contato com a História da Matemática, etc.

Através de todos esses referenciais foi possível alcançar satisfação com uma atividade de sala de aula que motivasse mais os alunos ao estudo da Matemática e, também permitisse que eles se tornassem estudantes mais atentos e criteriosos para com o conhecimento.

Assim, o produto final do mestrado profissional disponibilizado nesta dissertação foi um conjunto de atividades com dinâmicas diferenciadas que promoveram um grande aperfeiçoamento profissional da docente autora, que faz essas afirmações baseadas em depoimentos de alunos e os seus simples desabafos: “entendi!”.

As contribuições para a aplicação da atividade e a obtenção de bons resultados dependem de conhecer profundamente o conteúdo trabalhado e buscar diversas informações para fundamentar as idéias e argumentações. As atividades devem ser sempre experimentadas antes de serem propostas. As tarefas e atividades propostas aos alunos devem garantir que estes possam estender e aprofundar seus conhecimentos conectados com outras teorias para completá-las. Desta forma, a escolha da metodologia e a didática devem ser estruturadas para alcançar o aprendizado matemático e o desenvolvimento de valores e atitudes que permitam ao aluno aprender a aprender. O professor que desejar o produto desenvolvido neste trabalho pode, e deve, adaptá-lo, ajustando os questionários, aplicativos, e a própria dinâmica de aula de acordo com seu público. E certamente o trabalho colaborativo promoverá uma visão mais critica e uma troca de experiências e idéias capaz de promover o aperfeiçoamento profissional.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, P. C. A. de; BIAJONE, J. **A formação inicial dos professores em face dos saberes docentes**. GT-8: Formação de Professores. 28.ª Reunião Anual da ANPEd. Realizada em 16 a 19 out. 2005. Caxambu-MG. Disponível em: <www.anped.org.br/reunioes/28/textos/gt08/gt08278int.doc>. Acesso em: 01/02/2010.

BALDIN, Y. Y.; VILLAGRA, G. A. L.. **Atividades com CABRI-GÉOMÈTRE II para Cursos de Licenciatura em Matemática e Professores do Ensino Fundamental e Médio**. 1ª Reimpressão. São Carlos-SP: Editora EdUFSCar, 2002. 240 p.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 10ª Edição. Rio de Janeiro - RJ: Coleção do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro-RJ, 2006. 222p..

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília: MEC, 2006.v.2.137p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 12/11/2009.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+)**. Brasília: MEC, 2007. 144 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> Acesso em 12/11/2009.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999. 360 p.

CRESSI, V. M. Blog– Ampliando a Colaboração do Grupo de Sábado. In: CARVALHO, Dione Lucchesi et al.. **Histórias de Colaboração e Investigação na Prática Pedagógica em Matemática: ultrapassando os limites da sala de aula.** Campinas: Editora Alínea, 2009. p. 59-68.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino Domingues. Campinas: UNICAMP, 1997, 843 p.

KATZ, V. **A History of Mathematics. An Introduction.** 2nd Ed. Addison-Wesley, Reading, 1998.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 9ª Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 237 p. volume 1. (Coleção do Professor de Matemática).

MAOR, E. **Trigonometric Delights.** Princeton University Press, Princeton, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)**. Brasília: MEC Secretaria da Educação Fundamental, 2003.

MISKULIN, G. S. R. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria**. 1999. 545p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — FE, Unicamp, Campinas (SP).

MISKULIN, R. G. S. As potencialidades didático-pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores. In: LORENZATO, Sérgio (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas – SP: Editora Autores Associados, 2006, p.153-178. (Coleção formação de professores)

PETERSON, B. E.; AVERBECK, P.; BAKER, L. Sine Curves and Spaghetti. **The Mathematics Teacher**, Vol. 91, nº 7, NCTM,. 564-567 p., outubro de 1998.

PONTE, J. P., The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator**, 3(2), 3-8, 1992.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo.** São Paulo, 2008. 59 p.

SILVA, S. A. da. **Trigonometria no Triângulo Retângulo:** Construindo uma Aprendizagem Significativa. 2005. 198 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo – SP, 2005.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, 15(2), 4-14, 1986.

APÊNDICE

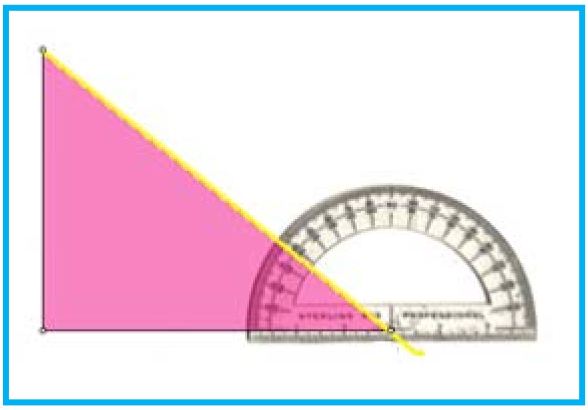
Atividades aplicadas – Materiais instrucionais e procedimentos de aplicação

Atividade 1: A Construção das Tábuas Trigonométricas

AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Tema

Geometria e Medidas



Conteúdos

☐Razões Trigonométricas;

☐Ângulos Complementares;

☐Triângulos Semelhantes;

Duração

Uma aula dupla.

Objetivos

Permitir que o aluno:

- Confronte os elementos estudados com dados previamente obtidos e, a partir disto, construa uma vivência de elementos da História da Matemática;
- Dê mais credibilidade às teorias estudadas em sala de aula e se familiarize com os elementos básicos da Trigonometria no Triângulo.

Introdução

Pensamos este experimento para ser usado durante a introdução dos conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo. É necessário que o aluno tenha alguns conhecimentos prévios de Geometria Plana (soma dos ângulos internos de um triângulo, ângulos complementares, semelhança de triângulos). De forma experimental, os alunos poderão se deparar pela primeira vez com diversos conceitos, muitas vezes vistos apenas de forma abstrata em definições e fórmulas de livros, e se apropriarem dos conceitos estudados a partir de uma dinâmica diferenciada. O objetivo principal da atividade é familiarizá-los com as fórmulas e propor diversas reflexões sobre a teoria da trigonometria e sua construção na História da Matemática.

O Experimento

Material Necessário

☐ Transferidor;

☐ Calculadora;

☐ Régua;

☐ Lápis e borracha;

☐ 8 Fichas com diferentes triângulos;

☐4 tabelas;

☐ Tábua Trigonométrica;

Preparação

O professor deve preparar, para cada grupo de alunos, um kit contendo as 8 fichas, as 4 tabelas, a tábua trigonométrica e a folha de atividades, conforme descrito adiante. Deve avisar antecipadamente os alunos sobre demais materiais necessários, para que cada grupo os providencie. Para o bom andamento da atividade torna-se essencial que todos tenham os materiais à mão. Caso ache necessário, o professor pode levar transferidores, réguas e calculadoras extras: é sempre bom se prevenir! Com relação à calculadora, é interessante que haja diversidade nesta aula (tanto a normal quanto a científica podem ser utilizadas) Isso promove um contato diferenciado com os alunos com relação à tecnologia e suas limitações, porém, se o aluno usar a calculadora do seu telefone celular acabará dispersando seu foco.

Etapa 1. Divisão dos Grupos e Separação das Fichas.

A sala deve ser dividida em grupos de quatro alunos cada. Esta divisão é feita para que os alunos, apesar de trabalharem individualmente, juntem seus resultados para as análises que serão propostas. Dessa forma, com todos trabalhando simultaneamente garante-se boa quantidade de material e qualidade nas informações. Confira se os alunos estão com os materiais necessários.

Depois que os kits forem distribuídos aos grupos, em cada grupo cada integrante deverá trabalhar com duas das oito fichas e se responsabilizar pelo preenchimento dos dados de uma das tabelas.

Etapa 2. Medição e registro dos dados

Oriente bem os alunos de que esta atividade é um experimento, logo quanto maior o cuidado com a manipulação das ferramentas e atenção aos décimos de medidas, mais precisos serão os dados coletados.
Nesta etapa aparecem, por anotações equivocadas dos alunos, triângulos cuja soma dos ângulos internos excede 180°, e assim é preciso que o professor observe se os alunos estão cometendo erros e faça questionamentos que permitam a reflexão e correção dos dados, por exemplo:
– Qual o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo?
– Qual é o maior lado de um triângulo retângulo?
Muitos alunos precisam de instruções sobre como usar o transferidor e às vezes até a régua!

Etapa 3. Os triângulos semelhantes

Observa-se que nas oito fichas temos 4 pares de triângulos semelhantes. Procurou-se explorar a atividade escolhendo-se os triângulos retângulos mais comuns (os dos arcos notáveis – 30°, 45° e 60° –, um triângulo pitagórico de lados proporcionais a 3, 4 e 5) e um triângulo “diferente”, de ângulos 20°, 70° e 90°.
Ulteriormente, os alunos deverão juntar todas as fichas novamente e observar se existem triângulos semelhantes. Esta observação contempla a congruência dos ângulos e a proporcionalidades entre lados correspondentes. Essa idéia torna-se bem explorada pela tabela a ser completada nesta etapa.

Etapa 4. Reconhecendo as razões trigonométricas

Agora é hora de preencher as tabelas! O grupo deve designar um par de triângulos semelhantes, junto com a tabela correspondente, para cada um de seus integrantes. Para compreender este passo, temos que examinar as tabelas, descritas adiante. As primeiras linhas da tabela referem-se ao ângulo $\hat{B}$ do triângulo e, as últimas, ao ângulo $\hat{C}$ do mesmo. Já nas colunas temos as razões trigonométricas. Neste momento, até mesmo para familiarizar os alunos com essa nomenclatura, sugere-se a exposição da confusão histórica que gerou o nome seno e, consequentemente, o cosseno.

Etapa 5. Reflexões

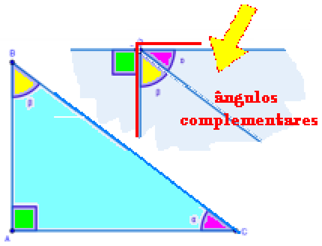
De maneira geral, as questões propostas nas REFLEXÕES servem para levar o aluno à observação de detalhes importantes sobre os elementos de trigonometria dessa atividade.

Etapa 6. Socialização das informações

Depois de terminada a atividade, é interessante que os alunos socializem os dados obtidos. O professor deve fazer um fechamento.

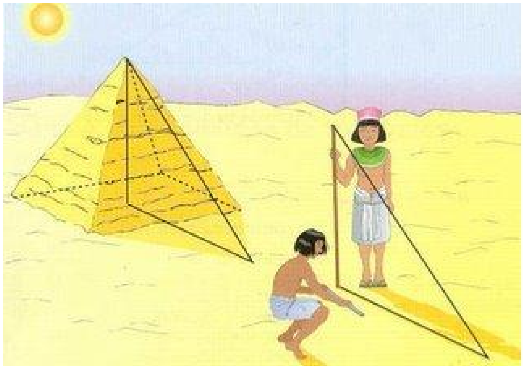
FOLHA DE ATIVIDADES

***1ª ETAPA*:** Façam grupos de quatro integrantes. Cada elemento do grupo deve receber duas fichas de triângulos.



***2ª ETAPA*:** Cada aluno será responsável por registrar em cada um de seus dois triângulos a medida de cada ângulo interno do triângulo (medida com o transferidor) e a medida de cada lado do triângulo (medida com a régua). Logo em seguida, o mesmo deverá registrar na tabela abaixo do seu triângulo os cálculos indicados e efetuá-los. É permitido o uso da calculadora.

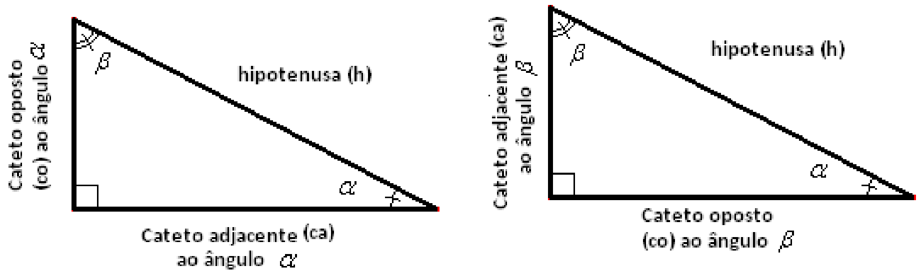
3ª ETAPA: O grupo deve discutir as características de triângulos semelhantes e registrar e agrupar cada par de triângulos semelhantes entre as oito fichas recebidas.



Triângulos semelhantes preservam os ângulos internos e a forma, diferindo apenas pela sua posição e tamanho.

Par de Fichas de triângulos semelhantes: ☐ **e** ☐ **Razão entre seus lados correspondentes:** $\frac{AB}{A'B'} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\frac{AC}{A'C'} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\frac{BC}{B'C'} = \frac{\quad}{\quad} =$	**Par de Fichas de triângulos semelhantes:** ☐ **e** ☐ **Razão entre seus lados correspondentes:** $\frac{AB}{A'B'} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\frac{AC}{A'C'} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\frac{BC}{B'C'} = \frac{\quad}{\quad} =$
Par de Fichas de triângulos semelhantes: ☐ **e** ☐ **Razão entre seus lados correspondentes:** $\frac{AB}{A'B'} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\frac{AC}{A'C'} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\frac{BC}{B'C'} = \frac{\quad}{\quad} =$	**Par de Fichas de triângulos semelhantes:** ☐ **e** ☐ **Razão entre seus lados correspondentes:** $\frac{AB}{A'B'} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\frac{AC}{A'C'} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\frac{BC}{B'C'} = \frac{\quad}{\quad} =$

4ª ETAPA: No material, vocês receberam duas folhas com quatro tabelas: TABELA 1, TABELA 2, TABELA 3, TABELA 4, que deverão ser destacadas umas das outras. Cada uma dessas tabelas faz referência a um par de triângulos semelhantes listados na etapa 3. Cada integrante do grupo deve se responsabilizar com o preenchimento de uma tabela. Lembre-se dos nomes dados às razões trigonométricas calculadas:



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{co}{h} \qquad \cos\theta = \frac{ca}{h} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{co}{ca} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{ca}{co}$$

REFLEXÕES	
Avalie se os valores que o seu grupo encontrou coincidem com os valores consultados nas tabelas. Houve alguma variação? Se sim, justifique por quê?	Na tabela trigonométrica não tínhamos o valor da cotangente. Como o grupo fez para calculá-lo?
Existe alguma relação entre os triângulos retângulos com mesmos ângulos internos, porém lados diferentes?	Do que dependem as razões trigonométricas em um triângulo retângulo? Do triângulo retângulo ou de cada ângulo agudo considerado? Como podemos usar isso a nosso favor?
Como seu grupo imagina que foi construída a tabela trigonométrica? Para que ela foi construída? Ela precisava ir até 89° como a tabela trigonométrica apresentada aqui?	Como o grupo avalia a atividade? De que maneira ela contribui para dar um significado à teoria estudada em sala de aula?

Folha de Tabelas

Tabela 1

		Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente
Ficha 1	Ângulo $\hat{B}$				
Ficha 2	Ângulo $\hat{B}$				
Tábua trigonométrica	Ângulo $\hat{B}$				
Ficha 1	Ângulo $\hat{C}$				
Ficha 2	Ângulo $\hat{C}$				
Tábua trigonométrica	Ângulo $\hat{C}$				

Tabela 2

		Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente
Ficha 3	Ângulo $\hat{B}$				
Ficha 4	Ângulo $\hat{B}$				
Tábua trigonométrica	Ângulo $\hat{B}$				
Ficha 3	Ângulo $\hat{C}$				
Ficha 4	Ângulo $\hat{C}$				
Tábua trigonométrica	Ângulo $\hat{C}$				

Tabela 3

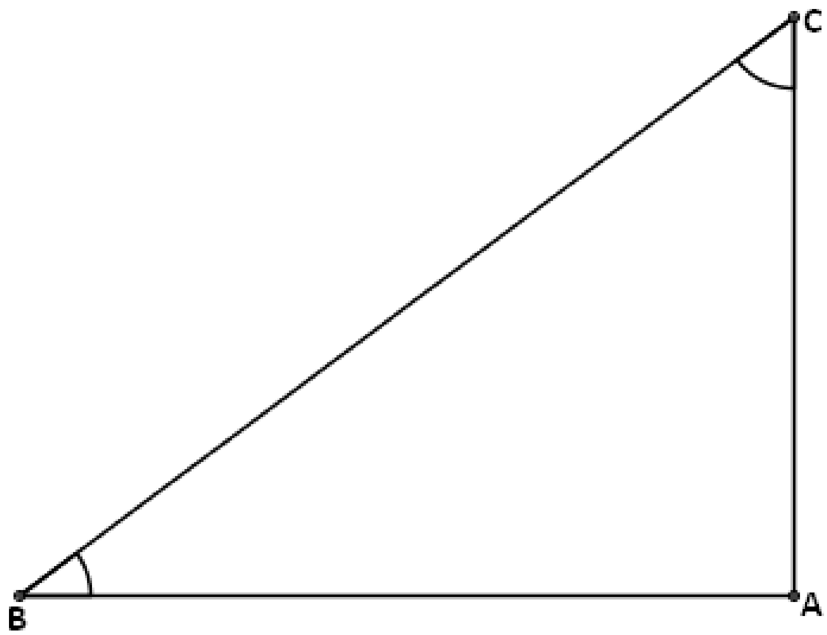
		Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente
Ficha 5	Ângulo $\hat{B}$				
Ficha 6	Ângulo $\hat{B}$				
Tábua trigonométrica	Ângulo $\hat{B}$				
Ficha 5	Ângulo $\hat{C}$				
Ficha 6	Ângulo $\hat{C}$				
Tábua trigonométrica	Ângulo $\hat{C}$				

Tabela 4

		Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente
Ficha 7	Ângulo $\hat{B}$				
Ficha 8	Ângulo $\hat{B}$				
Tábua trigonométrica	Ângulo $\hat{B}$				
Ficha 7	Ângulo $\hat{C}$				
Ficha 8	Ângulo $\hat{C}$				
Tábua trigonométrica	Ângulo $\hat{C}$				

Ficha 1

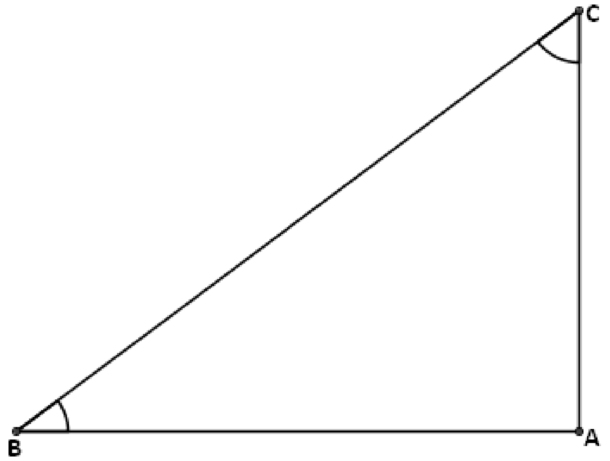
- Registre no próprio triângulo as medidas de seus **<u>três ângulos e de seus três lados</u>** usando, para isso, régua e transferidor;
- Use a calculadora e calcule as razões indicadas na tabela abaixo.



$\frac{AC}{BC} = \_\_\_\_\_\_\_\_ =$	$\frac{AB}{BC} = \_\_\_\_\_\_\_\_ =$
$\frac{AB}{AC} = \_\_\_\_\_\_\_\_ =$	$\frac{AC}{AB} = \_\_\_\_\_\_\_\_ =$

Ficha 2

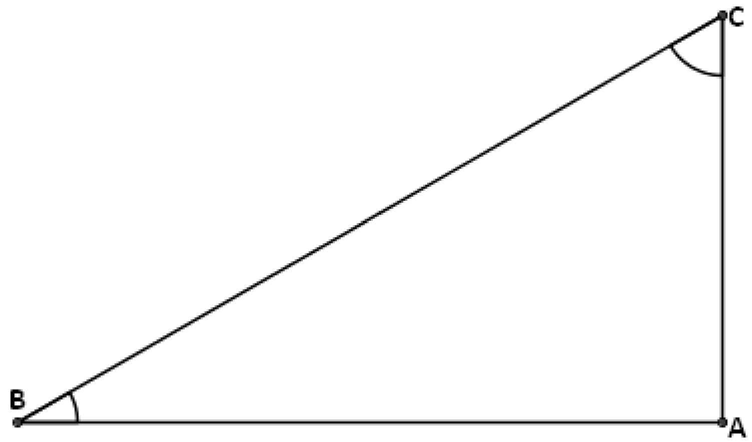
- Registre no próprio triângulo as medidas de seus **<u>três ângulos e de seus três lados</u>** usando, para isso, régua e transferidor;
- Use a calculadora e calcule as razões indicadas na tabela abaixo.



$\frac{AC}{BC} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$	$\frac{AB}{BC} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$
$\frac{AB}{AC} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$	$\frac{AC}{AB} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$

Ficha 3

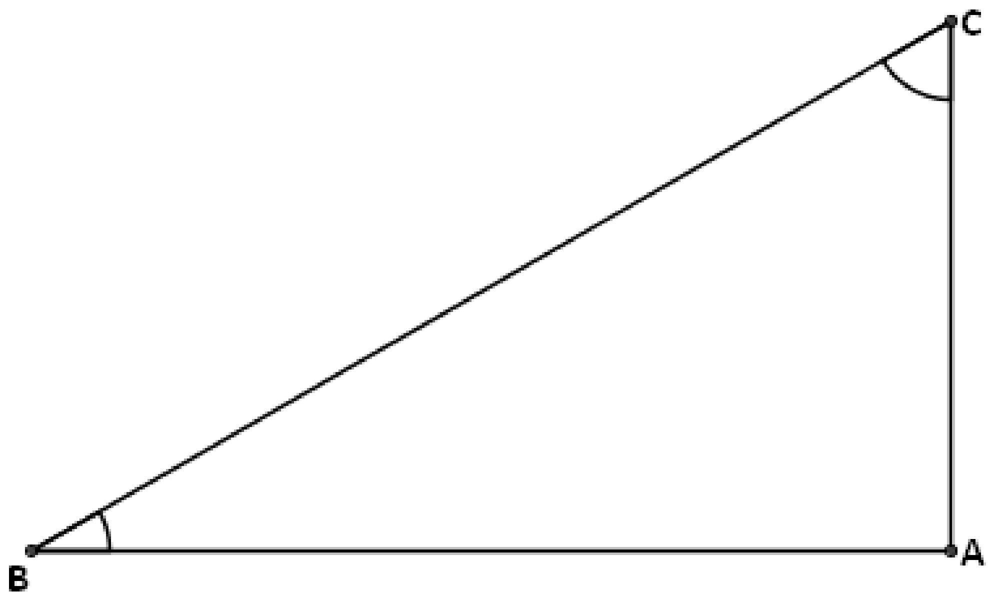
- Registre no próprio triângulo as medidas de seus **três ângulos e de seus três lados** usando, para isso, régua e transferidor;
- Use a calculadora e calcule as razões indicadas na tabela abaixo.



$\frac{AC}{BC} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$	$\frac{AB}{BC} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$
$\frac{AB}{AC} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$	$\frac{AC}{AB} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ =$

Ficha 4

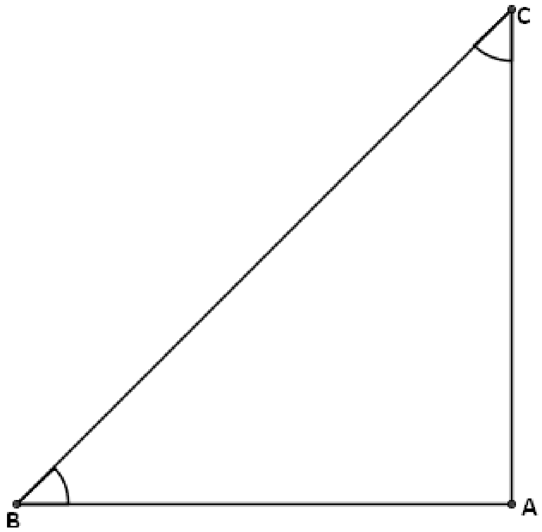
- Registre no próprio triângulo as medidas de seus **<u>três ângulos e de seus três lados</u>** usando, para isso, régua e transferidor;
- Use a calculadora e calcule as razões indicadas na tabela abaixo.



$\frac{AC}{BC} = \rule{4cm}{0.4pt} =$	$\frac{AB}{BC} = \rule{4cm}{0.4pt} =$
$\frac{AB}{AC} = \rule{4cm}{0.4pt} =$	$\frac{AC}{AB} = \rule{4cm}{0.4pt} =$

Ficha 5

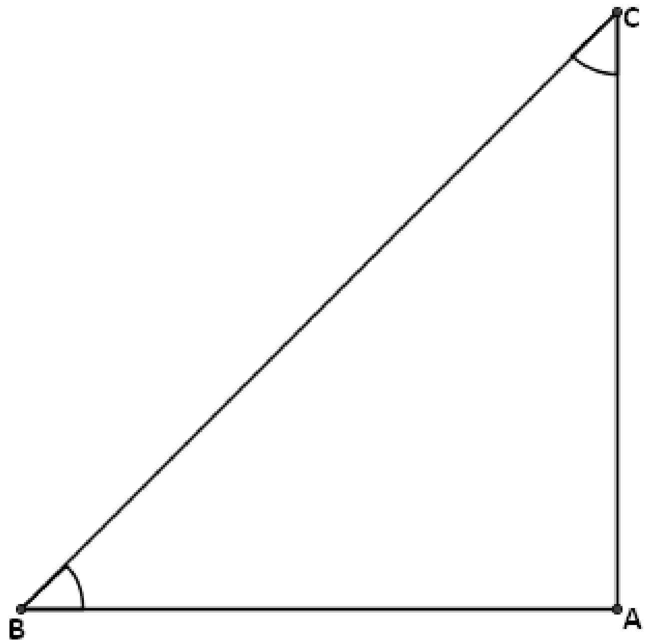
- Registre no próprio triângulo as medidas de seus **<u>três ângulos e de seus três lados</u>** usando, para isso, régua e transferidor;
- Use a calculadora e calcule as razões indicadas na tabela abaixo.



$\frac{AC}{BC} = \underline{\hspace{6cm}} =$	$\frac{AB}{BC} = \underline{\hspace{6cm}} =$
$\frac{AB}{AC} = \underline{\hspace{6cm}} =$	$\frac{AC}{AB} = \underline{\hspace{6cm}} =$

Ficha 6

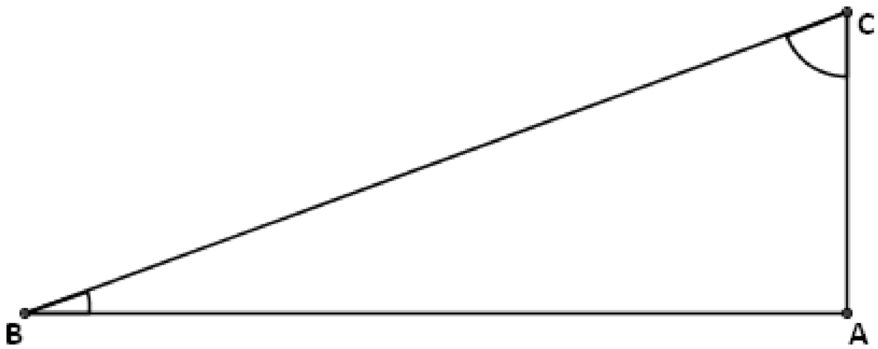
- Registre no próprio triângulo as medidas de seus **<u>três ângulos e de seus três lados</u>** usando, para isso, régua e transferidor;
- Use a calculadora e calcule as razões indicadas na tabela abaixo.



$\frac{AC}{BC} = \_\_\_\_\_\_\_\_ =$	$\frac{AB}{BC} = \_\_\_\_\_\_\_\_ =$
$\frac{AB}{AC} = \_\_\_\_\_\_\_\_ =$	$\frac{AC}{AB} = \_\_\_\_\_\_\_\_ =$

Ficha 7

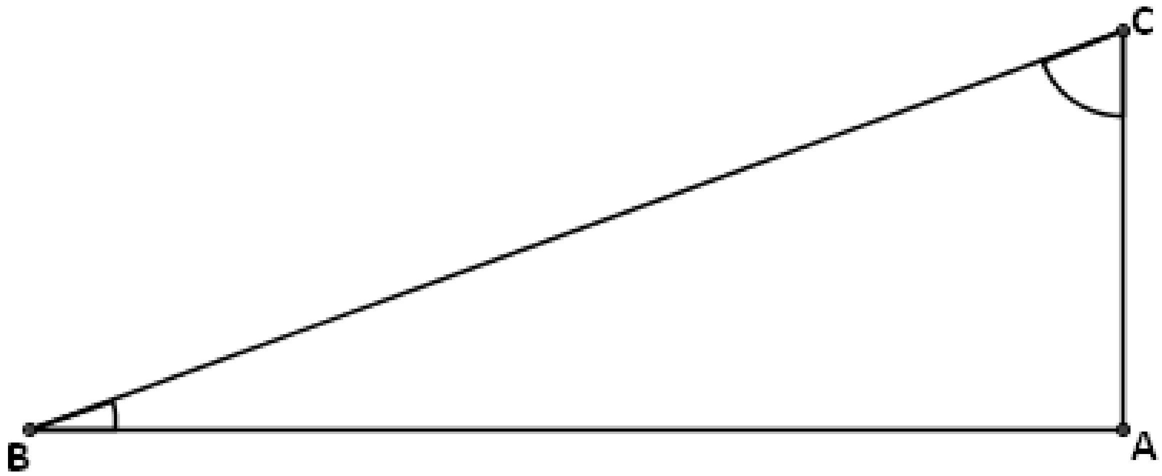
- Registre no próprio triângulo as medidas de seus **<u>três ângulos e de seus três lados</u>** usando, para isso, régua e transferidor;
- Use a calculadora e calcule as razões indicadas na tabela abaixo.



$\frac{AC}{BC} = \rule{4cm}{0.4pt} =$	$\frac{AB}{BC} = \rule{4cm}{0.4pt} =$
$\frac{AB}{AC} = \rule{4cm}{0.4pt} =$	$\frac{AC}{AB} = \rule{4cm}{0.4pt} =$

Ficha 8

- Registre no próprio triângulo as medidas de seus **<u>três ângulos e de seus três lados</u>** usando, para isso, régua e transferidor;
- Use a calculadora e calcule as razões indicadas na tabela abaixo.



$\frac{AC}{BC} = \underline{\hspace{4cm}} =$	$\frac{AB}{BC} = \underline{\hspace{4cm}} =$
$\frac{AB}{AC} = \underline{\hspace{4cm}} =$	$\frac{AC}{AB} = \underline{\hspace{4cm}} =$

TÁBUA TRIGONOMÉTRICA

1°	0,0175	0,9998	0,0175	30°	0,5	0,866	0,5774	60°	0,866	0,5	1,7321
2°	0,0349	0,9994	0,0349	31°	0,515	0,8572	0,6009	61°	0,8746	0,4848	1,804
3°	0,0523	0,9986	0,0524	32°	0,5299	0,848	0,6249	62°	0,8829	0,4695	1,8807
4°	0,0698	0,9976	0,0699	33°	0,5446	0,8387	0,6494	63°	0,891	0,454	1,9626
5°	0,0872	0,9962	0,0875	34°	0,5592	0,829	0,6745	64°	0,8988	0,4384	2,0503
6°	0,1045	0,9945	0,1051	35°	0,5736	0,8192	0,7002	65°	0,9063	0,4226	2,1445
7°	0,1219	0,9925	0,1228	36°	0,5878	0,809	0,7265	66°	0,9135	0,4067	2,246
8°	0,1392	0,9903	0,1405	37°	0,6018	0,7986	0,7536	67°	0,9205	0,3907	2,3559
9°	0,1564	0,9877	0,1584	38°	0,6157	0,788	0,7813	68°	0,9272	0,3746	2,4751
10°	0,1736	0,9848	0,1763	39°	0,6293	0,7771	0,8098	69°	0,9336	0,3584	2,6051
11°	0,1908	0,9816	0,1944	40°	0,6428	0,766	0,8391	70°	0,9397	0,342	2,7475
12°	0,2079	0,9781	0,2126	41°	0,6561	0,7547	0,8693	71°	0,9455	0,3256	2,9042
13°	0,225	0,9744	0,2309	42°	0,6691	0,7431	0,9004	72°	0,9511	0,309	3,0777
14°	0,2419	0,9703	0,2493	43°	0,682	0,7314	0,9325	73°	0,9563	0,2924	3,2709
15°	0,2588	0,9659	0,2679	44°	0,6947	0,7193	0,9657	74°	0,9613	0,2756	3,4874
16°	0,2756	0,9613	0,2867	45°	0,7071	0,7071	1	75°	0,9659	0,2588	3,7321
17°	0,2924	0,9563	0,3057	46°	0,7193	0,6947	1,0355	76°	0,9703	0,2419	4,0108
18°	0,309	0,9511	0,3249	47°	0,7314	0,682	1,0724	77°	0,9744	0,225	4,3315
19°	0,3256	0,9455	0,3443	48°	0,7431	0,6691	1,1106	78°	0,9781	0,2079	4,7046
20°	0,342	0,9397	0,364	49°	0,7547	0,6561	1,1504	79°	0,9816	0,1908	5,1446
21°	0,3584	0,9336	0,3839	50°	0,766	0,6428	1,1918	80°	0,9848	0,1736	5,6713
22°	0,3746	0,9272	0,404	51°	0,7771	0,6293	1,2349	81°	0,9877	0,1564	6,3138
23°	0,3907	0,9205	0,4245	52°	0,788	0,6157	1,2799	82°	0,9903	0,1392	7,1154
24°	0,4067	0,9135	0,4452	53°	0,7986	0,6018	1,327	83°	0,9925	0,1219	8,1443
25°	0,4226	0,9063	0,4663	54°	0,809	0,5878	1,3764	84°	0,9945	0,1045	9,5144
26°	0,4384	0,8988	0,4877	55°	0,8192	0,5736	1,4281	85°	0,9962	0,0872	11,43
27°	0,454	0,891	0,5095	56°	0,829	0,5592	1,4826	86°	0,9976	0,0698	14,301
28°	0,4695	0,8829	0,5317	57°	0,8387	0,5446	1,5399	87°	0,9986	0,0523	19,081
29°	0,4848	0,8746	0,5543	58°	0,848	0,5299	1,6003	88°	0,9994	0,0349	28,636
				59°	0,8572	0,515	1,6643	89°	0,9998	0,0175	57,29

Atividade 2: O Inclinômetro

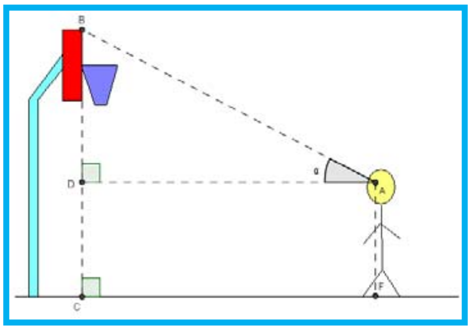
A Altura da Tabela suporte da Cesta de Basquete

Tema

Geometria e Medidas

Conteúdos

☐Razões Trigonométricas: função tangente;



Duração

Uma aula dupla.

Objetivos

Permitir que o aluno:

- Construa um instrumento rústico utilizando materiais de fácil acesso e aprenda como utilizá-lo a fim de atingir o objetivo desejado: medir alturas inacessíveis;
- Aprenda a utilizar ferramentas básicas como trena e transferidor;
- Use o conceito de tangente de um ângulo para o problema proposto;
- Vivencie experimentalmente um problema frequentemente encontrado em livros-texto de trigonometria, sobre o cálculo de uma altura inacessível.

Introdução

Desde os tempos remotos, o homem teve curiosidade sobre a altura de objetos inacessíveis, mas medi-las nem sempre foi uma tarefa simples. Quando se deseja medir distâncias inacessíveis, como a largura de um rio, a altura de um prédio, por exemplo, precisamos de instrumentos específicos. Um desses aparelhos é o teodolito, usado para medir ângulos horizontais e verticais. Nesta atividade os alunos poderão medir a altura de uma tabela que suporta a cesta de basquete em um ginásio utilizando um tipo de teodolito, chamado inclinômetro, que eles mesmo podem construir, analisar seu funcionamento e, através de seu uso, realizar o experimento.

Sugere-se a realização deste experimento após a introdução dos conceitos de Trigonometria no Triângulo Retângulo, principalmente para fundamentar a função tangente.

Para a atividade o professor deverá preparar um material prévio como nas instruções abaixo. Com o material em mãos e divididos em grupos, os alunos irão para a quadra ou ginásio de esportes fazer suas medições para, posteriormente, confrontar e socializar os resultados obtidos.

O Experimento

Material Necessário

☐Transferidor;

☐Barbante;

☐Lápis;

☐Trena de pelo menos 10 metros;

☐Fita adesiva;

☐Canudos;

☐Borracha;

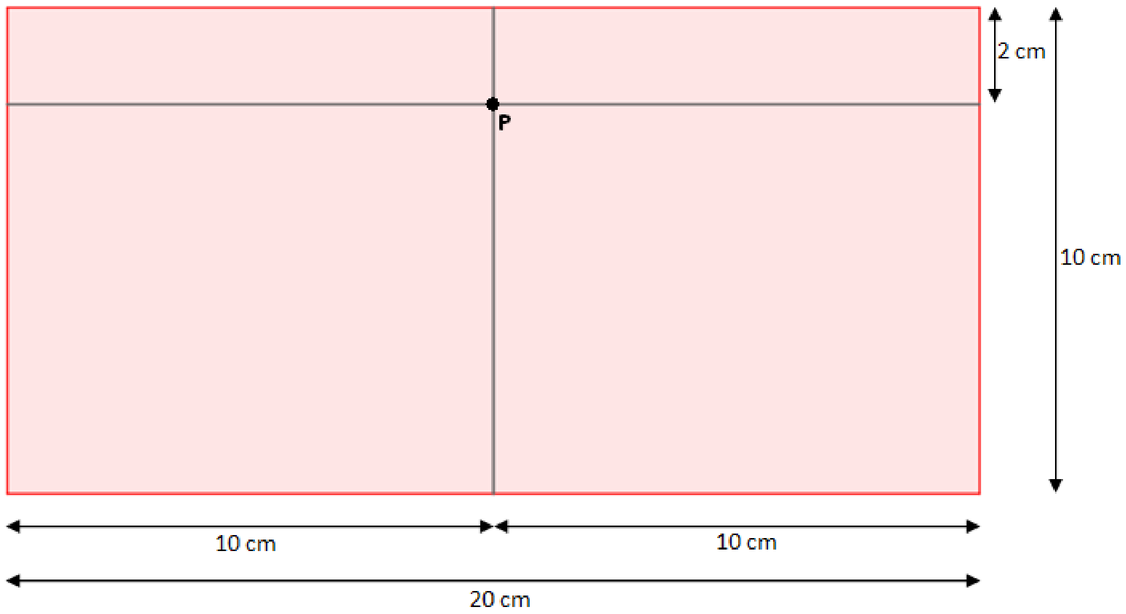
☐Retângulo de Papel Cartão com 10×20 cm;

Preparação

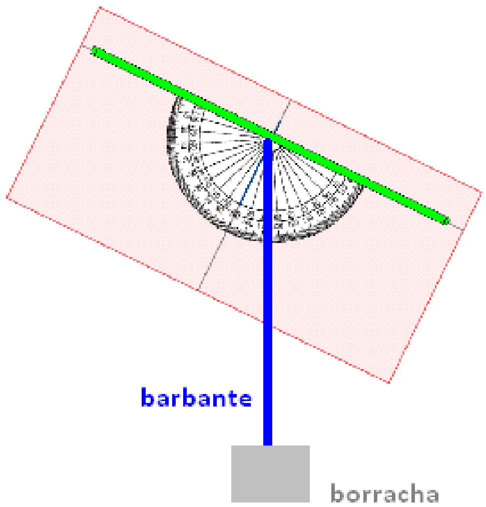
Para a realização deste experimento propomos a divisão da sala em grupos de até três alunos cada. Esta divisão é para que os alunos produzam uma maior quantidade de informações que serão confrontadas no final do experimento. Dividimos este experimento em quatro etapas: Construção do inclinômetro; Estudo de experimento; Coleta de dados; Análise dos dados obtidos. Observe que a coleta de dados deve ser feita na quadra ou ginásio de esportes da escola, pois esse ambiente tem o piso em excelente horizontalidade. As outras etapas podem ser realizadas no próprio ambiente habitual de sala de aula.

O Instrumento

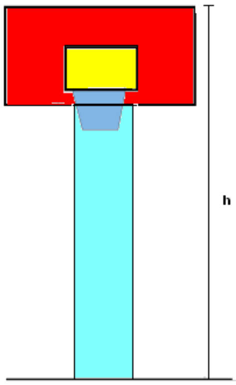
Depois de dividida a sala em grupos, todos com seus materiais, vamos iniciar a construção do inclinômetro.
No retângulo de papel cartão, de dimensões 10 por 20 cm, trace dois segmentos perpendiculares: um paralelo ao maior lado do retângulo, distante 2 cm de um dos lados; e, outro, paralelo ao menor lado do retângulo distante 10 cm destes lados.



O ponto de encontro entre as retas traçadas, ponto P, será nossa referência. Será preciso prender o transferidor ao cartão mantendo-se o eixo central do transferidor (marca de 90°) justaposto ao segmento menor traçado no retângulo e, simultaneamente, o eixo 0–90° do transferidor justaposto ao segmento maior traçado no retângulo. Depois disso, um canudo será colado ao transferidor, sobre linha horizontal (a de 20 cm). Faça um furo em P e prenda ali um pedaço de barbante de 20 cm e pendure uma borracha na outra extremidade, solta para funcionar como peso. Confira no diagrama da figura.



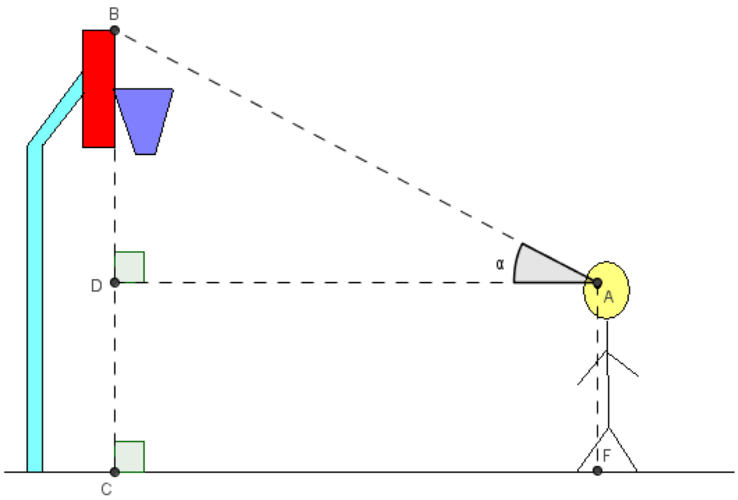
Inclinômetro construído! Vamos estudar o seu funcionamento.
Sugerimos que os alunos tenham um material que oriente as atividades abaixo, inclusive determinando variáveis para serem estudadas.



CADERNO DE ATIVIDADES

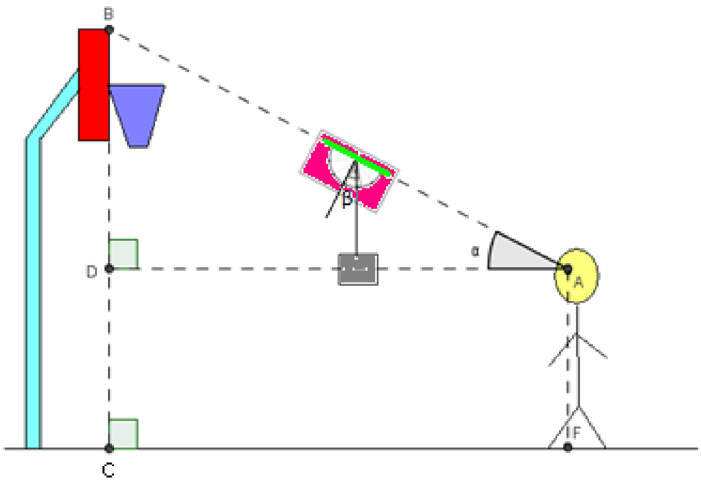
A Altura h da tabela suporte da cesta de basquete

Primeiro Passo: Conhecendo alguns elementos do experimento:



- α é chamado ângulo de visada;
- AF é a altura do observador;
- BC é a altura procurada;
- AD é a distância do observador ao objeto que está sendo medido;

Segundo Passo: Para usar o inclinômetro o aluno deverá se posicionar a uma distância determinada do objeto a ser medido e olhar através do canudinho mirando o ponto B (extremo do objeto a ser medido), como na figura abaixo. Desta forma, ele irá medir um ângulo β com o inclinômetro. Esse ângulo β é o ângulo formado entre a linha do barbante e o segmento menor traçado no cartão do inclinômetro (marca de 90° do transferidor).



Discuta no seu grupo e demonstre qual é a relação que existe entre os ângulos α e β no diagrama da figura.

Terceiro Passo: No ginásio de esportes da escola, o grupo deve medir a altura do topo da tabela que suporta a cesta de basquete. Para isto, deve adotar o seguinte procedimento. Sendo B o ponto médio do topo da tabela, e C um ponto no chão da quadra, com BC perpendicular ao piso, o grupo deve marcar, com a trena, ao longo uma linha reta CF demarcada no chão da quadra (veja figura), afastando-se do ponto C, pontos no piso a quatro distâncias diferentes (2m, 5m, 10m e 15m) de C, e registrar os ângulos de visada encontrados em cada ponto. Antes disso, deve ser tomada a medida da altura AF da observação (distância do piso ao olho do observador) e, utilizando a tangente do ângulo de visada, fazer os cálculos para encontrar a altura h procurada. Registre todos os dados encontrados na tabela abaixo:

Distância da cesta até o observador	Medida do ângulo de visada	Altura da Observação	Altura da cesta de basquete
2 metros			
5 metros			
10 metros			
15 metros			

Quarto Passo: Observe a referência para a altura padrão da cesta de basquete. Verifique a precisão do experimento e discuta com o grupo sua causa.

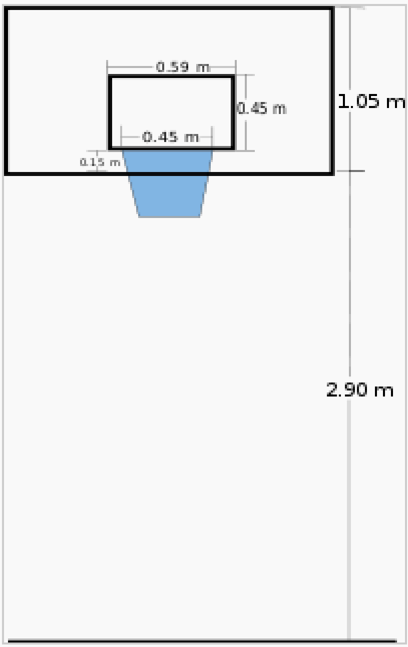


Diagrama das dimensões de uma tabela oficial

Dados obtidos do site:
http://pt.wikipedia.org/wiki/Basquetebol
dia 26/05/2009 às 13h34

Cálculo do erro para 2m	
Cálculo do erro para 5m	
Cálculo do erro para 10m	
Cálculo do erro para 15m	

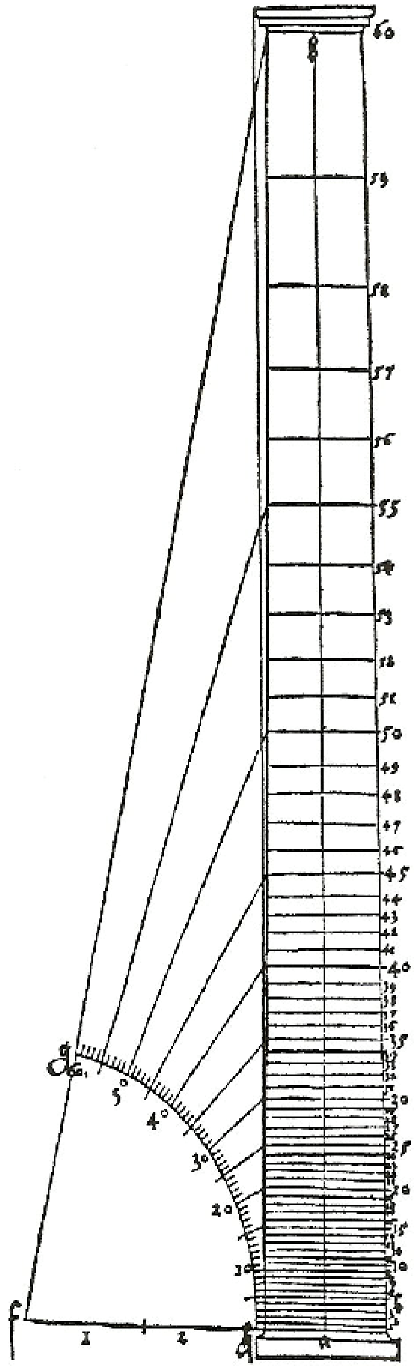
Observe que em todos os casos citados acima utilizamos a tangente. Apresentamos, abaixo, uma figura com os valores da tangente de θ, para valores de θ de 1° a 89°.

TABELA DE TANGENTES

1°	0,0175	11°	0,1944	21°	0,3839	31°	0,6009	41°	0,8693
2°	0,0349	12°	0,2126	22°	0,404	32°	0,6249	42°	0,9004
3°	0,0524	13°	0,2309	23°	0,4245	33°	0,6494	43°	0,9325
4°	0,0699	14°	0,2493	24°	0,4452	34°	0,6745	44°	0,9657
5°	0,0875	15°	0,2679	25°	0,4663	35°	0,7002	45°	1
6°	0,1051	16°	0,2867	26°	0,4877	36°	0,7265	46°	1,0355
7°	0,1228	17°	0,3057	27°	0,5095	37°	0,7536	47°	1,0724
8°	0,1405	18°	0,3249	28°	0,5317	38°	0,7813	48°	1,1106
9°	0,1584	19°	0,3443	29°	0,5543	39°	0,8098	49°	1,1504
10°	0,1763	20°	0,364	30°	0,5774	40°	0,8391	50°	1,1918

51°	1,2349	61°	1,804	71°	2,9042	81°	6,3138
52°	1,2799	62°	1,8807	72°	3,0777	82°	7,1154
53°	1,327	63°	1,9626	73°	3,2709	83°	8,1443
54°	1,3764	64°	2,0503	74°	3,4874	84°	9,5144
55°	1,4281	65°	2,1445	75°	3,7321	85°	11,43
56°	1,4826	66°	2,246	76°	4,0108	86°	14,301
57°	1,5399	67°	2,3559	77°	4,3315	87°	19,081
58°	1,6003	68°	2,4751	78°	4,7046	88°	28,636
59°	1,6643	69°	2,6051	79°	5,1446	89°	57,29
60°	1,7321	70°	2,7475	80°	5,6713	90°	∄

Analisando estes dados, o que se pode dizer sobre a variação (erro) da medida da altura da cesta de basquete, quando o ângulo de visada θ sofre variação de 1º, a partir de ângulos iniciais de visada de 20°, 45° e 60°?



Padrões da variação (vertical) da tangente de um ângulo de visada θ, em função da variação do ângulo θ, para valores de θ de 0 a 60°. Na escala vertical, à direita na figura, são demarcados os valores das alturas correspondentes aos ângulos, de grau em grau, e são mostrados as variações das alturas, correspondentes às variações de grau em grau, dos valores de θ. Na escala vertical ilustram-se as variações das alturas calculadas, correspondentes às variações de grau em grau dos ângulos de visada. Ilustração de Albrecht Dürer. (Fonte da ilustração: Eli Maor, *Trigonometric Delights*. Princeton University Press, Princeton, 2002).

Fechamento

A medida que os alunos forem terminando o experimento, peça que um elemento do grupo registre na lousa os dados encontrados para que as informações obtidas sejam comparadas e socializadas com as dos colegas. Discuta a questão do erro. Em um experimento, o erro pode ser gerado tanto por causa da imprecisão do instrumento construído, que tem uma característica rústica, quanto com relação ao processo de medição e das variações que ocorrem na função tangente a partir de um ângulo agudo maior que 45°.

Atividade 3: O Radiano com o barbante

O Radiano

Tema

Geometria e Medidas

Conteúdos

☐Círculos, arcos e ângulos;

☐Unidade de Medidas

Duração

Uma aula dupla.

Objetivos

Permitir que o aluno:

- Entenda o conceito de radiano e explore diversos ângulos no círculo.
- Transforme a medida de ângulos de grau para radiano e de radiano para grau.
- Vivencie experimentalmente o conceito de radiano.

Introdução

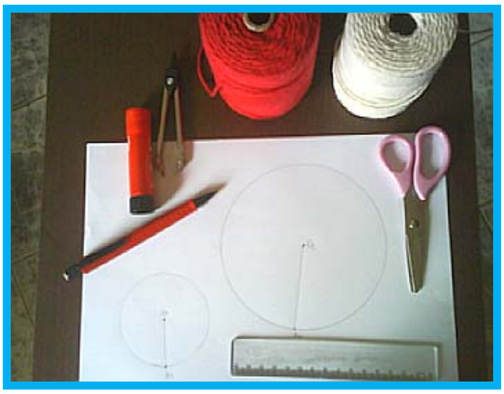
Diversificar a maneira de fazer medições é uma estratégia interessante para favorecer determinados conceitos. Apesar de termos uma cultura, principalmente escolar, de medir arcos e ângulos em graus, uma herança babilônica, quando nos relacionamos com as funções trigonométricas torna-se necessária a medição em radianos, até mesmo para favorecer a construção de gráficos na escala de 1:1.

O radiano surge da medida de arcos usando-se como unidade de medida o próprio raio. Nesta atividade seus alunos irão estabelecer diversas relações sobre o radiano e compará-lo com o grau.

Sugere-se esta atividade antes da introdução dos conceitos sobre o Ciclo Trigonométrico.

O Experimento

Material Necessário



☐ Folha Sulfite;

☐ Barbante de duas cores distintas;

☐ Tesoura;

☐ Régua;

☐ Cola bastão;

☐Compasso;

☐Lápis;

☐Caneta de tinta permanente;

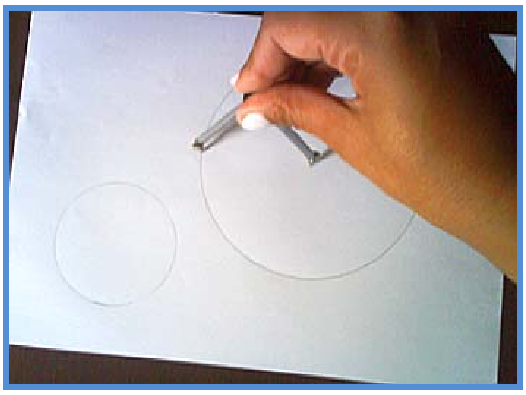
Procedimentos

Para a realização deste experimento propomos a divisão da sala em duplas, para facilitar o procedimento de cada etapa.

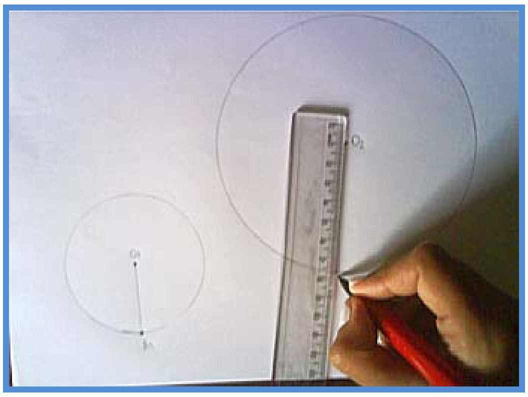
Inicialmente, o professor deve estimular a reflexão e propor questionamentos sobre a quantidade de raios de uma circunferência que cabem ao redor de seu comprimento.

A construção do experimento deve seguir o seguinte roteiro:

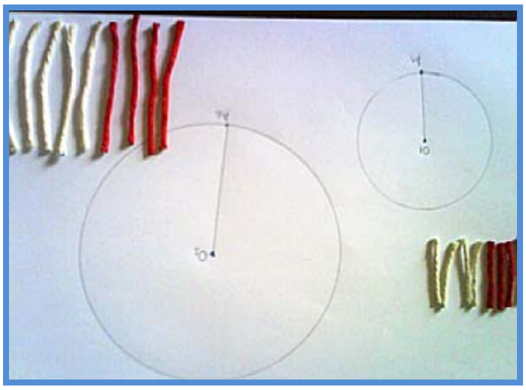
- Desenhe na folha sulfite duas, ou mais, circunferências de raios diferentes. Sugestão: uma circunferência com raio de 7 cm e outra com raio de 4 cm.



- Evidencie os centros das duas circunferências e os raios das mesmas.



- Sobreponha o barbante em cima do raio evidenciado e, com a caneta de tinta permanente, marque alguns raios. Faça isso com as duas cores de barbantes e para as duas circunferências. Tome muito cuidado e faça com capricho as medições. Procure ser fiel ao transportar o comprimento do barbante com o tamanho de cada raio, minimizando erros. Logo em seguida, recorte os pedaços de barbante encontrados, cada um deles tendo o comprimento do raio.



- Passe a cola por todo o comprimento de cada uma das circunferências e cole os raios recortados anteriormente acompanhando a curvatura da circunferência. Alterne as cores dos raios consecutivos em cada circunferência para destacar a quantidade de raios colados.

- Agora é o momento da conclusão: Em uma circunferência, quantos de seus raios cabem no seu comprimento?

Fechamento

O professor pode usar a atividade para a exploração de que, historicamente, descobriu-se que a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é uma constante.

$$\frac{C}{d} = \text{constante}$$

Hoje sabemos que essa constante é π, um número irracional que tem sua aproximação de duas casas decimais para $3{,}14$. Dessa forma:

$$\frac{C}{d} = \pi \;\; \Rightarrow \; C = \pi \cdot d$$

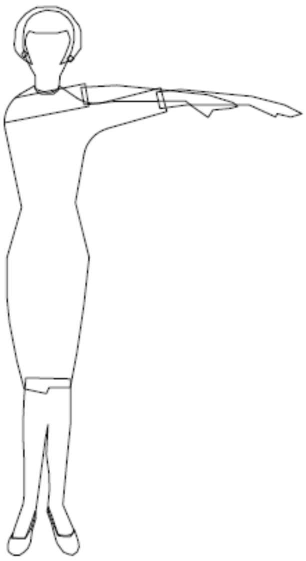
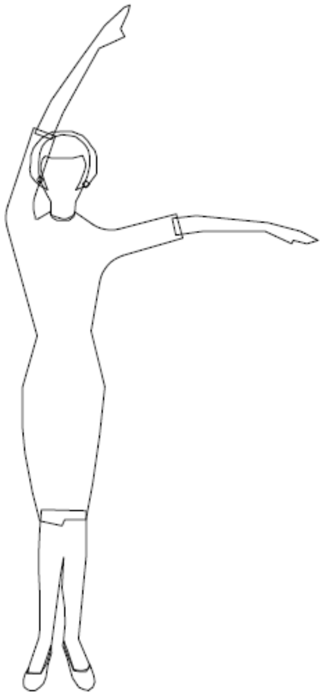
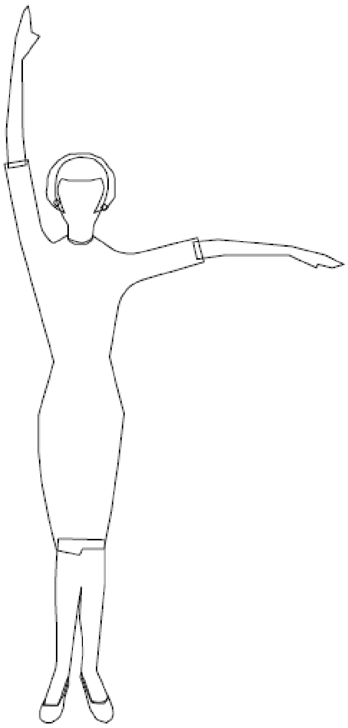
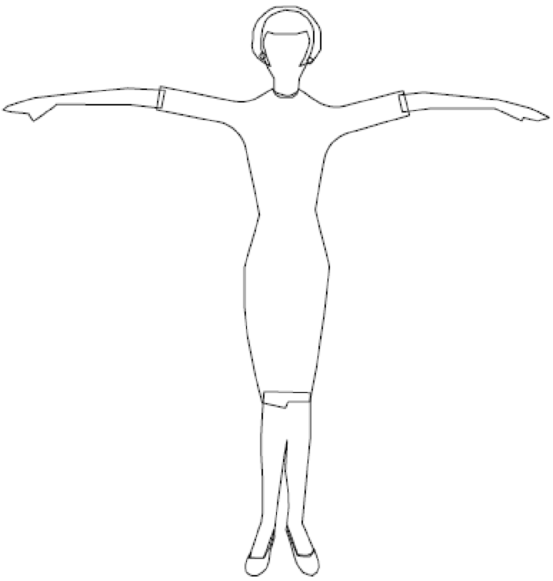
Concluí-se que no comprimento de uma circunferência cabem π diâmetros. Como neste experimento estamos trabalhando com raio e sabemos que um diâmetro equivale a dois raios $d = 2r$, temos:

$$C = \pi \cdot 2r \;\; \Rightarrow \;\; C = 2\pi \cdot r$$

Logo, no comprimento de uma circunferência cabem 2π raios, ou seja, aproximadamente 6,28 raios. Por isso, experimentalmente conseguimos colocar apenas seis raios inteiros ao longo do comprimento da circunferência.

Outras sugestões

Aproveite a atividade para explorar a diversidade de ângulos em graus e em radianos. Uma sugestão é propor aos alunos que utilizem seus braços para simular o tamanho de ângulos pré-determinados. Essa atividade pode promover uma reflexão espacial dos alunos para a abertura de cada um dos ângulos. Veja nas figuras abaixo:

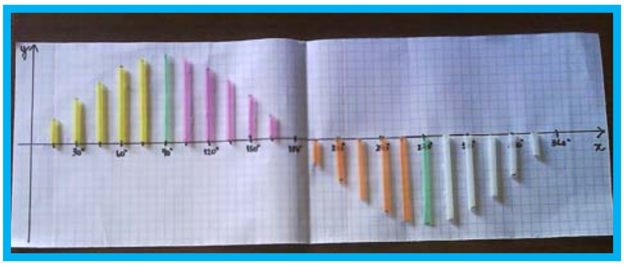
	
Simulação de um ângulo de 0^o graus com o corpo.	*Simulação de um ângulo de 60^o graus com o corpo.*
	
Simulação de um ângulo de 90^o graus com o corpo.	*Simulação de um ângulo de 180^o graus com o corpo.*

Atividade 4: Funções Trigonométricas com canudos

Função Seno: transição do Ciclo trigonométrico para o Gráfico

Tema

Geometria e Medidas



Conteúdos

☐Funções Trigonométricas: função seno e função tangente;

Duração

Uma aula dupla.

Objetivos

Permitir que o aluno transporte medidas do Ciclo Trigonométrico para o Plano Cartesiano a fim de definir as funções seno e cosseno.

Introdução

As funções trigonométricas modelam, em sua maioria, os fenômenos periódicos. Euler (1707-1783) convenceu que o seno poderia ser entendido como uma função do arco em uma circunferência com raio unitário, circunferência esta que é denominada Ciclo (círculo) Trigonométrico.

Nesta atividade propõe-se um estudo que trabalhe a transição do Triângulo Retângulo para o Ciclo Trigonométrico. Trata-se de uma atividade concreta cuja idéia principal foi extraída da revista MATHEMATICS TEACHER, Vol. 91, nº 7, páginas 564-567, de outubro de 1998. Seus autores Blake E. Peterson, Patrick Averbeck e Lunanna Baker propõem trabalhar as curvas do seno com espaguete. Propusemos, portanto, uma variação na estrutura da atividade usando canudos.

Esta atividade é sugerida para ser trabalhada durante a transição do ciclo trigonométrico para as funções.

O Experimento

Material Necessário

☐Folhas A3 quadriculadas;

☐Barbante;

☐Tesoura;

☐Régua e transferidor;

☐Cola bastão;

☐Compasso;

☐Lápis;

☐Caneta de tinta permanente;

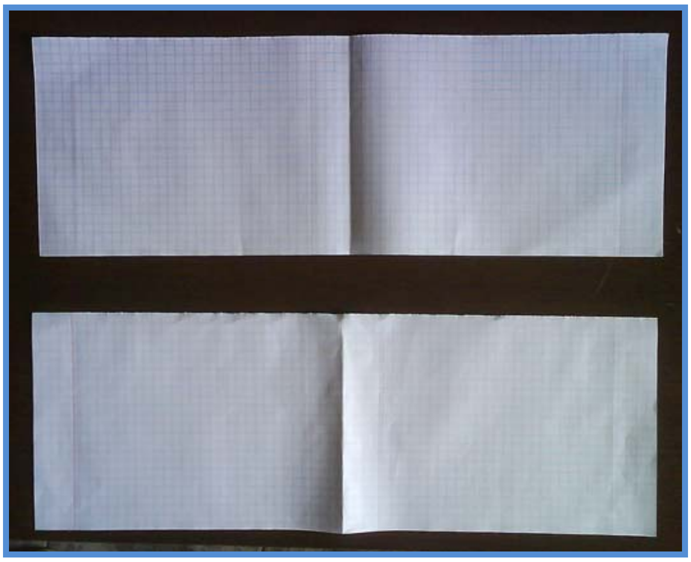
☐Canudos;

Procedimentos

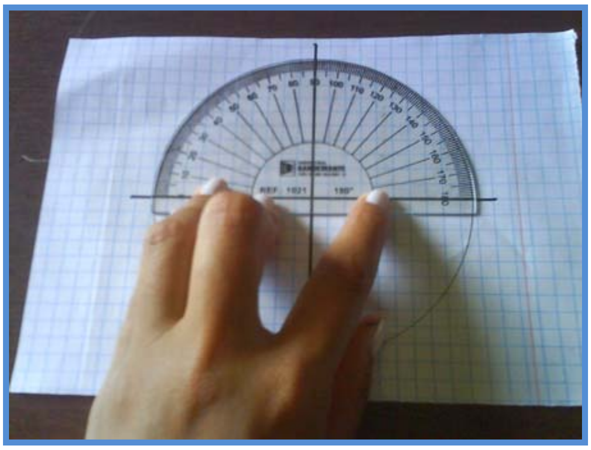
Para a realização deste experimento propomos a divisão da sala em duplas, para facilitar o procedimento de cada etapa.

A construção do experimento deve seguir o seguinte roteiro:

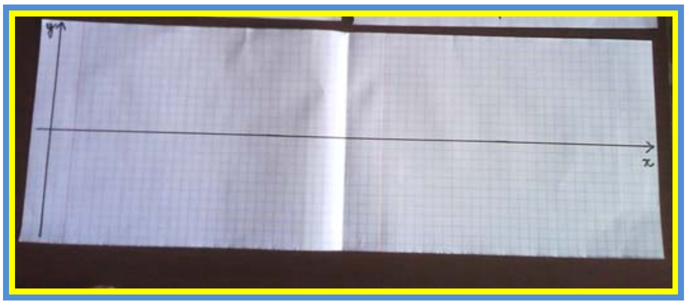
- Dobre a folha de papel quadriculado ao meio, de forma que o vinco formado seja paralelo ao maior lado da folha. Recorte no vinco, dividindo esta folha em dois pedaços. Vamos chamar cada um desses pedaços de folha de trabalho. Serão necessários uma folha e meia de trabalho para cada dupla.



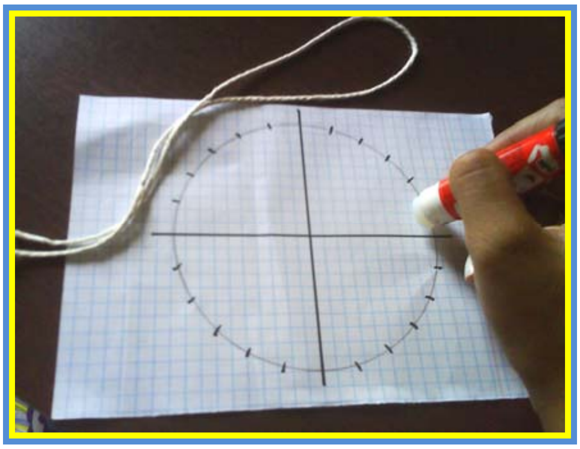
- Em uma metade de uma folha de trabalho, a dupla deve traçar: uma circunferência com raio unitário, tomando-se como unidade 10 lados de quadradinhos da própria folha quadriculada; eixos de um sistema cartesiano, com a origem coincidindo com o centro da circunferência construída. Com um transferidor, a dupla deve graduar a circunferência de 15 em 15 graus. Trace os eixos coordenados sobre linhas do papel quadriculado, tomando o centro da circunferência mais ou menos ao centro da folha.



- No outro pedaço, uma folha de trabalho, a dupla deverá traçar eixos coordenados x e y, de um segundo sistema cartesiano, para a construção de um gráfico. **<u>Importante:</u>** trace o eixo y bem próximo à margem esquerda da folha, logo após duas colunas de quadradinhos da folha quadriculada. Trace o eixo x, perpendicularmente ao eixo y, mais ou menos ao meio da folha de trabalho.

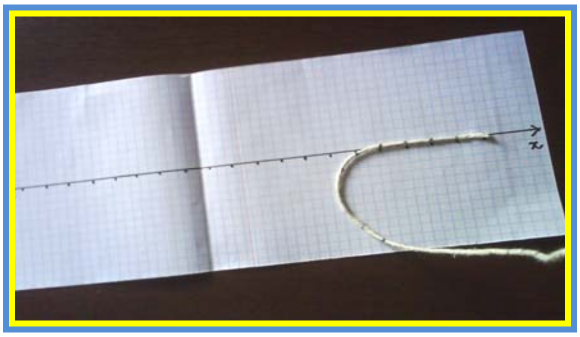


- Agora, vamos colar um pedaço de barbante ao longo da extensão da circunferência. Essa etapa é para fazer a correspondência de pontos da circunferência com pontos do eixo x do gráfico. A cola bastão é mais adequada para esse experimento, pois o barbante deverá ser descolado do círculo após o próximo passo.

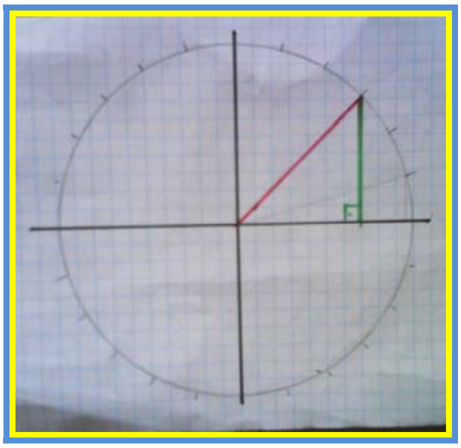


- Com o barbante colado à circunferência, use a caneta de tinta permanente e marque no barbante todos os pontos correspondentes às graduações da circunferência (de 15 em 15 graus). Atenção: deixe bem evidenciado o inicio (marca de 0°) em uma extremidade do barbante e o fim (marca de 360°) na outra.

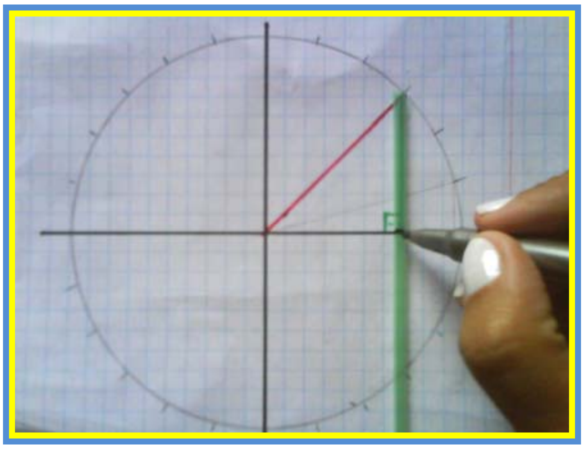
- Agora é preciso descolar o barbante, esticá-lo ao longo do eixo x, fazendo coincidir a primeira marcação do barbante com a origem do plano cartesiano. Use fita adesiva para fixar apenas as extremidades do barbante no gráfico. Transporte cada uma das marcações do barbante para o eixo x e depois retire o barbante.



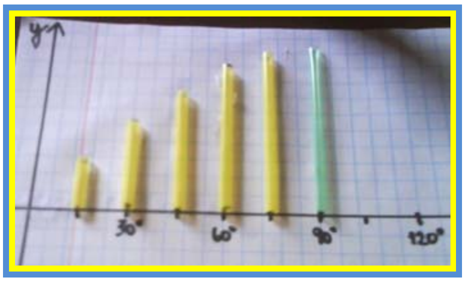
- Agora é o momento de construir o gráfico de uma função trigonométrica (função seno). Para isso, vamos sempre usar triângulos retângulos no plano do ciclo trigonométrico, cada um tendo como hipotenusa um raio da circunferência e como altura a projeção da hipotenusa sobre o eixo vertical, a partir de cada marca da circunferência.



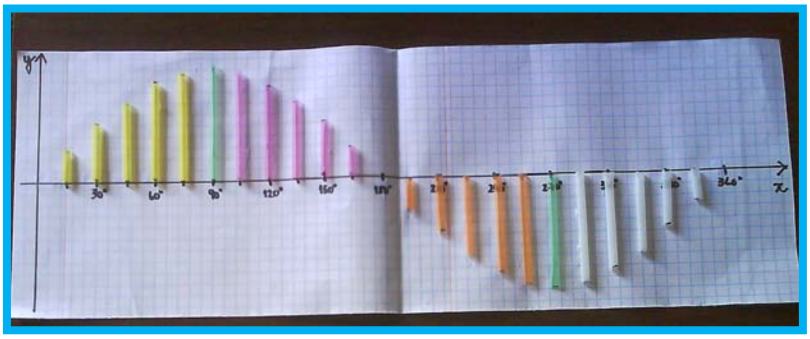
- Para cada um dos pontos previamente demarcados na circunferência, devemos marcar em cada canudo a medida da altura encontrada. Para facilitar use a caneta de tinta permanente.



- Uma vez marcada essa medida, recorte o canudo no tamanho da altura do triângulo (seno do ângulo demarcado na circunferência) e cole-o no gráfico perpendicularmente ao eixo x, sobre o ponto de abscissa correspondente ao ângulo. Tome o cuidado de observar se o triângulo, no plano do ciclo trigonométrico, tem sua altura tomada acima ou abaixo das abscissas. Se a altura for tomada, no plano do ciclo trigonométrico, acima do eixo das abscissas, o canudo recortado será colado, no sistema Oxy, acima do eixo x. Se a altura for tomada abaixo do eixo das abscissas, o canudo será colado abaixo do eixo x.



- Tome o cuidado de construir a função em cada quadrante com uma cor diferente de canudo, identificando melhor suas variações.



Folha de atividade

Alguns questionamentos após a construção dos gráficos:

Dupla: ____ Série: ________

1) Como poderia ser construído o seno e o cosseno para o ângulos de 390°?

2) Qual é o período da curva da função seno? Ou seja, a partir de quantos graus o gráfico começa a se repetir?

3) Calcule a razão entre a altura e a hipotenusa (raio da circunferência) de um triângulo, construído com ângulo de 30° (isto é, com altura a partir da marca de 30° no círculo). Este número é o seno de 30°?

4) Calcule as razões entre a altura e a hipotenusa, dos triângulos construídos com os ângulos de 150°, 330° e 570°.

5) Calcule as razões entre a altura e a hipotenusa, dos triângulos construídos com 45°, 135° e 225°.

6) Escreva um parágrafo para explicar aos seus colegas de classe por que o seno de 30° equivale ao seno de 150°.

7) Classifique a função do gráfico obtido com relação à monotonicidade em cada um dos quadrantes:

Quadrante	Função Seno
1º	
2º	
3º	
4º	

8) Qual o conjunto imagem da função?

9) Descreva os pontos de mínimos e máximos encontrados, e os valores máximo e mínimo correspondentes.

10) Para o intervalo estudado $[0, 360°]$, resolva a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

Fechamento

De maneira geral, as questões propostas na Folha de Atividades servem para levar o aluno à observação de detalhes importantes sobre os elementos de trigonometria dessa atividade.

Depois de terminada a atividade, é interessante que os alunos socializem os dados obtidos. O professor deve fazer um fechamento.