UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS UFSCar

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

RODRIGO DANTAS DE LUCAS

GEOGEBRA E MOODLE NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

São Carlos

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

RODRIGO DANTAS DE LUCAS

GEOGEBRA E MOODLE NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do titulo de ***Mestre Profissional em Ensino de Ciências Exatas*** *sob a orientação do* ***Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano****.*

São Carlos

2009

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

L933gm	Lucas, Rodrigo Dantas de. GeoGebra e moodle no ensino de geometria analítica / Rodrigo Dantas de Lucas. -- São Carlos : UFSCar, 2010. 82 f. Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010. 1. Matemática - estudo e ensino. 2. Plataforma MOODLE. 3. GeoGebra (Software de computador). 4. Geometria analítica. I. Título. CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
DM - UFSCar

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo
IM - UFRJ

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
DM - UFSCar

À minha família, em especial a minha esposa Poliana e às minhas filhas Maria Rita e Sofia, que se privou de minha presença por diversas vezes para que eu concluísse este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me permitido realizar este trabalho, capacitando-me e dando-me todas as condições para a realização deste Mestrado.

Ao meu orientador, professor Doutor Paulo Caetano, que sempre me motivou e serviu de exemplo de educador, orientador e pessoa, desde a época da graduação. Dedico este trabalho inteiramente a ele.

A todos os professores do programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas pela iniciativa deste mestrado. Em especial aos professores doutores João Sampaio, que com seu jeito brincalhão sempre nos ensina muito, Roberto Paterlini, Yurico Baldin e Pedro Mallagutti.

A todos os colegas deste mestrado que foram sempre prestativos, em especial à Patricia, Rita, Toninho, Thais, Jayme e Renato pelas boas risadas nos poucos churrascos que realizamos.

Ao Mário por sua sempre disponibilidade a ajudar e pelas ótimas dicas que contribuíram muito para o enriquecimento deste trabalho.

Aos meus alunos que se prontificaram a participar desta pesquisa e a todos meus alunos que sempre contribuíram para meu aprendizado e crescimento profissional.

RESUMO

Este trabalho consiste na construção de um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) sobre conceitos fundamentais de Geometria Analítica (G.A.), utilizando recursos do Geogebra, para ser aplicado em uma sala do 1º ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade privada. Ao longo de sua trajetória o professor desenvolve formas de apresentar as idéias que deseja transmitir e essa é a essência do raciocínio pedagógico. Como professor desta disciplina, constato em minha trajetória e na troca de experiências com outros profissionais da área, um senso comum a respeito da mecanização de técnicas e da falta de conexão entre a Álgebra e a Geometria, tão presente nesta disciplina. Refletindo, experimentando e me informando sobre essa questão, penso que grande parte dessa problemática está na forma limitada com que apresentamos essas idéias em nossas aulas. O advento da informática, em especial de softwares de geometria dinâmica, pode proporcionar uma maior facilidade para visualização desta conexão. Motivado pela possibilidade do uso de softwares de geometria dinâmica no ensino de G.A., do uso do Moodle para criação de um AVA e inspirado pela disciplina de Tecnologias da Informação para o Ensino de Ciências e Matemática, componente curricular do programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, idealizei este trabalho a partir da construção de visualizadores em 3D no Geogebra e da criação de um AVA no Moodle. O AVA foi dividido em quatro módulos com os seguintes fundamentos básicos de G.A.: pontos, vetores, retas e planos. Estes fundamentos foram apresentados através dos recursos do Moodle na forma de teoria, lição e avaliação. As atividades foram desenvolvidas na forma semipresencial (no laboratório de informática da escola) e totalmente à distância (na casa dos alunos). Esperamos com esse trabalho estar ampliando a dimensão que a maioria dos estudantes tem de G.A e a conexão fundamental entre a Álgebra e a Geometria existente nesta disciplina, além de estimular o uso de recursos tecnológicos como ferramentas de ensino.

Palavras chave: Geometria Analítica. Geometria Dinâmica. Geogebra. Ambiente Virtual de Aprendizagem. Moodle.

ABSTRACT

This work involves the construction of a virtual learning environment (AVA) on fundamental concepts of Analytical Geometry (GA) using GeoGebra resources to be applied in a room of the 1st year of a Bachelor's Degree in Mathematics from a private college. Throughout its history the teacher develops ways of presenting the ideas you want to convey and that is the essence of pedagogical reasoning. As a teacher of this subject, I note in my career and the exchange of experiences with other professionals, a common sense about the mechanization of techniques and lack of connection between algebra and geometry, as in this discipline. Reflecting, experiencing and telling me about this issue, I think much of this problem in a limited way that we present these ideas in our classes. The advent of information technology, especially software for dynamic geometry, can provide greater ease in viewing this connection. Motivated by the possibility of using dynamic geometry software in the teaching of GA, the use of Moodle to create an AVA and inspired by the discipline of Information Technology for Teaching Science and Mathematics, the curriculum component of the Masters in Teaching Professional Exact Sciences, idealized this work from the construction of the 3D viewer in GeoGebra and the creation of an AVA in Moodle. The AVA has been divided into four modules with the following basics of GA: points, vectors, lines and planes. These grounds were presented through Moodle resources in the form of theory, lesson and evaluation. The activities were conducted as semi-distance (in the computer lab school) and totally distance (in their students). We hope with this work is expanding the size that most students have to GA and the fundamental connection between algebra and geometry existing in this discipline, and encourage the use of technological resources as teaching tools.

Keywords: Analytic Geometry. Dynamic Geometry. Geogebra. Virtual Learning Environment. Moodle.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELA

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA

Este trabalho surgiu do interesse por ambientes virtuais de aprendizagem (AVA) e da possibilidade de se utilizar o Geogebra nestes ambientes no início do segundo semestre de 2008, ao cursar a disciplina Tecnologias da Informação para o Ensino de Ciências e Matemática, componente curricular do programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas ministrada na ocasião pelos professores Dr. Paulo Caetano e Dra.Ducinei Garcia. Esta disciplina trazia consigo a idéia de inovar as práticas pedagógicas dos alunos-professores e apresentar o ambiente virtual de aprendizagem (Moodle) em sintonia com "aplicativos" desenvolvidos no Geogebra.

Ao tomar contato com estes recursos, percebi o imenso potencial para "atingirmos" os alunos de maneira mais próxima de suas realidades atuais e de como o professor da escola básica está "distante" da existência destes recursos.

Por lecionar para futuros professores (licenciandos em Matemática), me senti na obrigação de mostrar aos alunos esta nova modalidade de ensino virtual, incluindo o uso do Geogebra, software de geometria dinâmica que possibilita "visualizar" o espaço sob vários pontos de vista e manipular seus objetos geométricos (pontos, retas e planos) "dinamicamente", visualizando as mudanças algébricas ocorridas em suas equações ou coordenadas.

De acordo com Moran et al. (2000, p.66):

> [...] a aprendizagem em informática, por ser algo novo, que não faz parte usualmente dos conhecimentos profissionais docentes adquiridos na formação inicial e que não é algo com o qual todos os professores se identifiquem aparentemente num primeiro contato, parece requerer um esforço maior de sua parte.

O autor destaca ainda:

> [...] O computador parece ser um recurso mecânico, técnico, com os *hardwares* e *softwares* todos prontos em que basta observar os procedimentos para aprender a manuseá-lo. Porém, a aprendizagem de como "gerenciá-lo" não é apenas um ato mecânico, requer pensamento e

> ação para que os procedimentos saiam corretos. Por estarem no estágio inicial de aprendizagem, alguns professores demonstram não internalizar com facilidade os conhecimentos necessários para operá-lo, recorrendo a muitas tentativas e ajuda de outras pessoas. (MORAN et al., 2000, p.66)

Nesta mesma linha de pensamento, destaca Kenski (2007, p.57):

> [...] A análise de vários casos já relatados em pesquisas e publicações na área da educação mostra alguns problemas recorrentes, que estão na base de muitos fracassos no uso das tecnologias mais atuais na educação. O primeiro deles é a falta de conhecimento dos professores para o melhor uso das tecnologias, seja ela nova ou velha. Na verdade, os professores não são formados para o uso pedagógico das tecnologias, sobretudo as TIC.[...] na maioria das vezes esses profissionais de ensino estão preocupados em usar as tecnologias que têm a sua disposição para "passar o conteúdo", sem se preocupar com o aluno, aquele que precisa aprender.

Concordando com os autores acima, nos sentimos impulsionados a "tentar" fazer uma diferença na formação inicial destes futuros professores utilizando o AVA e o Geogebra para que eles se sentissem mais motivados e confiantes num futuro próximo de suas práticas pedagógicas.

Na mesma linha de pensamento, cita Bittar (2001, p.77):

> [...] é fundamental que os cursos de licenciatura preparem o professor para o uso das novas tecnologias. De fato, uma vez que a informática parece estar chegando realmente às salas de aulas, é preciso formar um profissional consciente e apto a fazer uso deste novo instrumento didático. Porém isto não tem sido sistematicamente objeto de estudo dos licenciados, o que implica novos professores sendo colocados no mercado de trabalho sem formação no uso das novas tecnologias educacionais. Para esses professores, assim como para tantos outros que estão trabalhando há muitos anos e que não tiveram acesso a esse tipo de formação, é necessário oferecer cursos de formação continuada para que eles se atualizem.

Acreditamos que os cursos de formação continuada sejam cruciais para termos professores mais preparados e engajados nessa difícil tarefa de ensinar, porém sentimos que esta formação deve iniciar-se já na graduação.

Outra questão que motivou bastante a escolha deste tema foi a possibilidade de tornar a Álgebra e a Geometria mais próximas através de visualizadores 3D construídos no GeoGebra. Na experiência do autor em lecionar a disciplina Geometria Analítica para as turmas de 1º ano da Licenciatura, sempre ficou um “vazio” na hora de associar as equações obtidas às “figuras geométricas” correspondentes. Tratava-se muito mais da álgebra do que da geometria, principalmente pela dificuldade de se “desenhar” na lousa e no caderno as situações obtidas com as equações. Esta dificuldade pôde ser bastante minimizada com a criação dos visualizadores.

No entanto, pode aparecer outra dificuldade, mas agora com o uso do AVA, relacionada ao uso da Internet. Podem surgir neste tipo de proposta mau funcionamento das máquinas, queda da internet em alguns momentos, falta de “plugins” (JAVA) e conseqüentemente não funcionamento dos softwares, invasão de hackers, vírus, entre outros. Portanto, assim como existem inúmeros benefícios com o uso de tecnologias na educação, também existem “contratempos”, que devem ser minimizados tomando-se alguns cuidados prévios. O que temos que lembrar é que o incentivo ao uso das tecnologias na escola aumenta a cada dia e o professor (ou futuro professor) precisa estar preparado para esta nova realidade.

Segundo Borba e Penteado (2003), o interesse pela Informática Educativa está ganhando cada vez mais força nas escolas, e pensando nas potencialidades que a informática pode proporcionar é que devemos nos capacitar sempre, em busca de uma melhora no processo ensino aprendizagem em Matemática.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho foi a construção de um AVA para o ensino significativo de Geometria Analítica, com a utilização de visualizadores 3D idealizados no GeoGebra, permitindo ao aluno visualizar e manipular o espaço tridimensional e seus objetos sob vários “ pontos de vista”.

O AVA foi desenvolvido no Moodle a partir de suas ferramentas em quatro módulos, versando sobre pontos, vetores, retas e planos. Em cada módulo do ambiente foram inseridas: páginas web com a teoria básica sobre o tema em questão; lições sobre as teorias apresentadas; simulados com exercícios auto avaliativos sobre os assuntos estudados; avaliações automatizadas com exercícios escolhidos aleatoriamente do banco de questões dos simulados. Tanto na teoria apresentada quanto nas lições foram disponibilizados vários “visualizadores” para que os alunos pudessem fazer a conexão entre a Álgebra e a Geometria em questão, uma vez que era permitido aos mesmos “manipular” sobre as situações apresentadas e visualizar os cálculos envolvidos. Os visualizadores também foram muito utilizados nos exercícios do banco de questões dos simulados.

Ao fim de cada módulo existiam ainda avaliações com exercícios sobre os assuntos estudados que eram disponibilizados aos alunos aos finais de semana para que os mesmos pudessem fazer em duas tentativas. Como forma de “incentivo” era considerada a maior nota das tentativas na composição da nota final do ambiente.

Todo o ambiente foi idealizado com a proposta de “fazer diferente”, no sentido de que as atividades fizessem com que os alunos pensassem e refletissem sobre o conhecimento adquirido a luz da visualização geométrica conectada à álgebra.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A relação existente entre o ensino da matemática e a informática não é evidente e clara. Ela necessita de uma reflexão para ser entendida. Apesar de muitos acharem que o uso da informática já é algo integrado à sala de aula de Matemática, minha experiência mostra que o ensino de Matemática tem seguido os métodos tradicionais centrados no professor, na transmissão do conhecimento e na memorização, sendo reservado ao aluno um papel passivo. (famoso GLS – giz, lousa e saliva)

Conciliar a metodologia de ensino tradicional com o uso de novas tecnologias é o que se acredita ser melhor e mais desejável nos dias de hoje. Essa conciliação, porém, deve ser feita de forma cautelosa, uma vez que são enormes os problemas e obstáculos a serem enfrentados. Problemas que vão desde a falta de computadores em quantidade suficiente para as salas (na maioria das vezes numerosas), passando pela inércia de muitos professores já acostumados ao ensino tradicional e indo até a formação dos novos professores como já foi discutido neste texto anteriormente.

Assim, parece mais sensato aproveitar a introdução gradativa do computador na escola e, no bojo dessa nova tecnologia, introduzir modificações na orientação pedagógica do ensino da matemática, com o apoio de softwares adequados e eficientes para se alcançar o objetivo da melhoria do aprendizado em Matemática.

De acordo com as colocações de Cotta Júnior (2002, p.43)

> [...] em ambientes informatizados não têm importância e nem interessam os métodos pedagógicos tradicionais, instrucionistas, que privilegiam a transmissão do conhecimento e a memorização de conteúdos. No ambiente informatizado, ganham importância os recursos usados na aprendizagem numa perspectiva construtivista, os quais partem da concepção de que o conhecimento é construído a partir de percepções e ações do sujeito, constantemente mediadas por estruturas mentais já construídas ou em construção, em consonância com o próprio processo de aprendizagem.

Nesta mesma linha de pensamento, Gravina e Santarosa (1998) afirmam que, na perspectiva construtivista, a aprendizagem da Matemática depende de ações que caracterizam o fazer Matemática: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de fatos, geralmente na forma de definições e propriedades. Numa tal apresentação formal e discursiva, os alunos não se engajam em ações que desafiem suas capacidades cognitivas, sendo-lhes exigido no máximo memorização e repetição, e não são autores das construções que dão sentido ao conhecimento matemático.

A maioria dos professores e pesquisadores na área de educação concorda que a introdução pura e simples do computador na escola não tem a virtude de mudar a qualidade da educação. Em concordância com Cotta Júnior (2002, p.44)

> [...] a introdução do computador deve vir acompanhada de mudanças adequadas na orientação pedagógica da educação, sem o que o computador torna-se apenas mais uma sofisticação tecnológica, que faz parecer que a escola tornou-se mais moderna, mas que não traz nenhum benefício prático para a educação.

Assim, quando usado adequadamente, o computador é uma poderosa ferramenta para melhorar a qualidade do processo ensino aprendizagem. A introdução pura e simples dessa ferramenta na escola em nada modifica o ensino. É necessário planejar o seu uso dentro de uma nova metodologia que potencialize as suas utilidades. Sempre pensando desta forma é que idealizamos o AVA e os “visualizadores” que foram utilizados neste trabalho. Portanto, percebemos que nesta abordagem não se busca uma melhor transmissão de conteúdos, nem a informatização do processo ensino-aprendizagem, mas sim uma transformação educacional. Esta transformação deve significar uma mudança de paradigma e favorecer a formação de cidadãos mais críticos com autonomia para construir o próprio conhecimento. Mais ainda, que possam participar da construção de uma sociedade mais justa e com qualidade de vida mais igualitária. O uso de computadores na educação pode potencializar tais mudanças.

A abordagem sobre o uso de tecnologias na educação descrita anteriormente é chamada de construcionista, uma vez que visa a construção do conhecimento pelo aluno com a ajuda de ferramentas tecnológicas.

Como afirma Cotta Junior (2002, p.40)

> O construcionismo é, assim, uma síntese da teoria construtivista da psicologia do desenvolvimento e das oportunidades oferecidas pelas tecnologias para embasar a educação, incluindo a ciência e a Matemática, em atividades nas quais os estudantes trabalham em direção à construção de uma entidade inteligível em lugar da aquisição de conhecimentos e fatos sem um contexto no qual possam ser imediatamente usados e entendidos.

Papert (1994, p.124) opõe o construcionismo ao instrucionismo e afirma que:

> [...] a palavra instrucionismo significa algo muito diferente de pedagogia ou a arte de ensinar. Ela deve ser lida num nível mais ideológico ou programático como expressando a crença de que a via para uma melhor aprendizagem deve ser o aperfeiçoamento da instrução — se a Escola é menos que perfeita, então sabemos o que fazer; ensinar melhor. O construcionismo é uma filosofia de uma família de filosofias educacionais que nega esta verdade óbvia.

Além de se tomar o devido cuidado com a forma de abordagem das novas tecnologias, temos o problema da resistência e da deficiência na formação dos futuros professores de Matemática, que muitas vezes passam todo o curso de graduação sem tomar contato com tais concepções.

Dewey (1979) diz:

> [...] assim, é fundamental que alunos e professores se engajem em atividades de investigação que desencadeiem uma reflexão sobre as experiências significativas; que sejam constantemente repensadas ou reconstruídas; e que permitam estabelecer conexões entre os conhecimentos adquiridos anteriormente para a construção ou reelaboração de novos conhecimentos.

No entanto os alunos, por crescerem em uma sociedade permeada de recursos tecnológicos, são hábeis manipuladores da tecnologia e a dominam com maior rapidez e desenvoltura do que seus professores, mesmo aqueles pertencentes às classes menos favorecidas. A percepção desses alunos sobre tais recursos é diferente da percepção do professor, que cresceu em uma época em que o convívio com a tecnologia era menos intenso. Os professores apenas treinados para uso de certos recursos computacionais são rapidamente ultrapassados por seus alunos, que têm condições de explorar o computador de forma mais criativa e isso provoca diversos questionamentos quanto ao papel do professor e da educação. O professor, preparado para usar o computador como uma máquina de transmissão de informações através de softwares, questiona sobre qual será o seu papel e o futuro de sua profissão, uma vez que afloram na sociedade outros espaços de conhecimento e de aprendizagem fora do ambiente escolar.

Mesmo o professor preparado para utilizar o computador para a construção do conhecimento é obrigado a se questionar constantemente, pois geralmente se vê diante de um equipamento cujos recursos não consegue dominar em sua totalidade. Além disso, precisa compreender e investigar os temas ou questões que surgem no contexto e que se transformam em desafios para sua prática – uma vez que nem sempre são de seu pleno domínio, tanto no que diz respeito ao conteúdo quanto à sua estrutura.

Isto explica a grande resistência de muitos professores em utilizar e incorporar em sua prática pedagógica as novas tecnologias, e em especial, os computadores.

Para diminuirmos estes obstáculos é necessário favorecer aos professores em formação a tomada de consciência sobre como se aprende e como se ensina, levando-os a compreender a própria prática e a transformá-la em prol de seu desenvolvimento pessoal e profissional, bem como em benefício do desenvolvimento de seus alunos.

Como diz Almeida (2000a, p.46):

> [...] assim, a preparação do professor que vai usar o computador com seus alunos deve ser um processo que o mobilize e o prepare para incitar seus educandos a:aprender a aprender*;* ter autonomia para selecionar as informações pertinentes à sua ação; refletir sobre uma situação-problema; escolher a alternativa adequada de atuação para resolver o problema; refletir sobre os resultados obtidos; depurar seus procedimentos, reformulando suas ações; buscar compreender os conceitos envolvidos; ou levantar e testar outras hipóteses.

Valente (1993) considera que o conhecimento necessário para que o professor assuma esta postura “não é adquirido através de treinamento. É necessário um processo de formação permanente, dinâmico e integrador, que se fará através da prática e da reflexão sobre esta prática” – do qual se extrai o substrato para a busca da teoria que revela a razão de ser da prática.

Não se trata de uma formação apenas na dimensão pedagógica nem de uma acumulação de teorias e técnicas. Mas de uma formação que articula a prática, a reflexão, a investigação e os conhecimentos teóricos requeridos para promover uma transformação na ação pedagógica.

Em outro texto, Valente (1994, p.9) pergunta:

> Mas o que se espera desse sonhado processo educacional? Dentre as inúmeras qualificações, espera-se que os seus beneficiários sejam capazes de usar o conhecimento existente e se tornem pensadores ativos e críticos. Além disso, espera-se também que eles sejam capazes de conhecer o seu potencial intelectual, e utilizá-lo no desenvolvimento de suas habilidades e aquisição de novos conhecimentos.

O professor para alcançar o objetivo proposto precisa aprender a fazer seu planejamento pautado nas possíveis dificuldades dos alunos com relação ao tema da aula. Esse planejamento precisa contemplar também a mediação do professor durante a aula, no sentido de favorecer aos alunos momentos em que possam apresentar suas soluções para eventuais discussões.

Como diz Valente (1994, p.19):

> [...] na abordagem construcionista cabe a o professor promover a aprendizagem do aluno para que este possa construir o conhecimento dentro de um ambiente que o desafie e o motive para a exploração, a reflexão, a depuração de idéias e a descoberta. Antes de propor um plano, que deverá ser resultado de um trabalho cooperativo dos que estão envolvidos na aprendizagem, o professor precisa conhecer as potencialidades de seus alunos e suas experiências anteriores. Além disso, o professor cria situações para usar o computador como instrumento de cultura, para propiciar o pensar-com e o pensar-sobre-o-pensar e identificar o nível de desenvolvimento do aluno e seu estilo de pensar. Ao mesmo tempo, o educador é um eterno aprendiz, que realiza uma “leitura” e uma reflexão sobre sua própria prática. O professor procura constantemente, depurar a sua prática, o seu conhecimento. Sua atitude transforma-se em um modelo para o educando, uma vez que vivencia e compartilha com os alunos a metodologia que está preconizando.

CAPÍTULO 2: VISUALIZADORES DO ESPAÇO NO GEOGEBRA

Para a realização deste trabalho foram desenvolvidos vários visualizadores 3D no GeoGebra, (software de geometria dinâmica 2D) idealizados a partir da construção de um comando que possibilita a visualização de pontos 3D.

2.1 GeoGebra

Conforme descrito em seu sítio oficial, o GeoGebra é um software de matemática dinâmica, idealizado pelo austríaco Markus Hohenwarter, para ser utilizado em educação nas escolas secundárias que reúne geometria, álgebra e cálculo. O software pode ser baixado gratuitamente do próprio site do GeoGebra. (GEOGEBRA, 2010)

Por um lado, GeoGebra é um sistema dinâmico de geometria. Você pode fazer construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas bem como funções e mudá-los dinamicamente depois.

Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem o recurso de tratar das variáveis para números, vetores e pontos, permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos como *Raízes* ou *Extremos*.

Essas duas perspectivas são características do GeoGebra: uma expressão na janela algébrica corresponde a um objeto na janela geométrica e vice-versa.

Abaixo, vemos um octaedro na janela do GeoGebra construído durante a disciplina de Tecnologias da Informação para o Ensino de Ciências e Matemática. Observe a janela de álgebra à esquerda e a janela de geometria à direita, onde é feita a visualização do objeto geométrico.

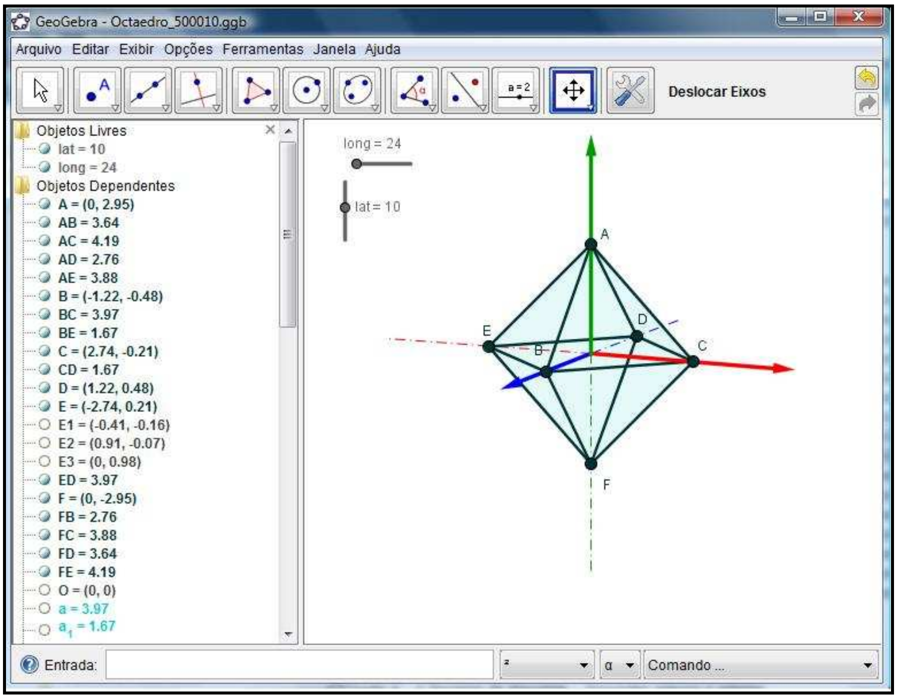


Figura 1: Visualização de um octaedro no GeoGebra

A principal dificuldade de se construir objetos 3D no GeoGebra decorre do fato de que este software foi idealizado para a geometria dinâmica em duas dimensões, não possuindo ferramentas para dimensões maiores.

Esta dificuldade foi vencida com a construção de um comando específico, denominado proj3D2D, que possibilita a visualização 3D no GeoGebra. Este comando, idealizado pelo professor Paulo Caetano e, apresentado aos alunos da disciplina Tecnologias da Informação para o Ensino de Ciências e Matemática, permite visualizar o espaço 3D a partir do ponto de vista dinâmico de uma latitude “lat” e longitude “long” que podem ser facilmente modificadas movendo-se uma “bolinha” nos seletores criados para tal finalidade.

Abaixo, vemos o visualizador de ponto criado na disciplina, a partir do comando proj3D2D.

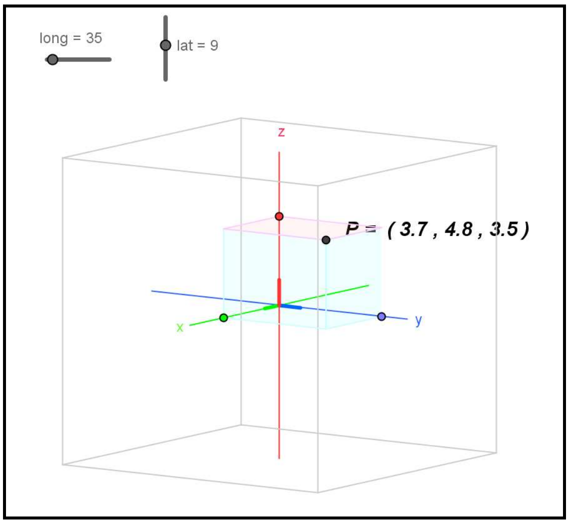


Figura 2: Visualizador de ponto no espaço

A construção detalhada no GeoGebra de um visualizador de pontos no espaço com a utilização do comando proj3D2D é apresentada em anexo.

2.2 Um Visualizador de ponto no espaço

Este visualizador permite ao aluno observar um ponto no espaço sob vários pontos de vista a partir da variação de latitudes “lat” e longitudes “long” em relação aos planos xy e xz respectivamente.

A posição do ponto no espaço pode ser variada mudando-se os valores de suas coordenadas diretamente nos eixos coordenados. Ao mudar os valores das coordenadas nos eixos, o aluno pode perceber a mudança das coordenadas num sistema de ternas ordenadas que acompanha o ponto conforme a figura abaixo.

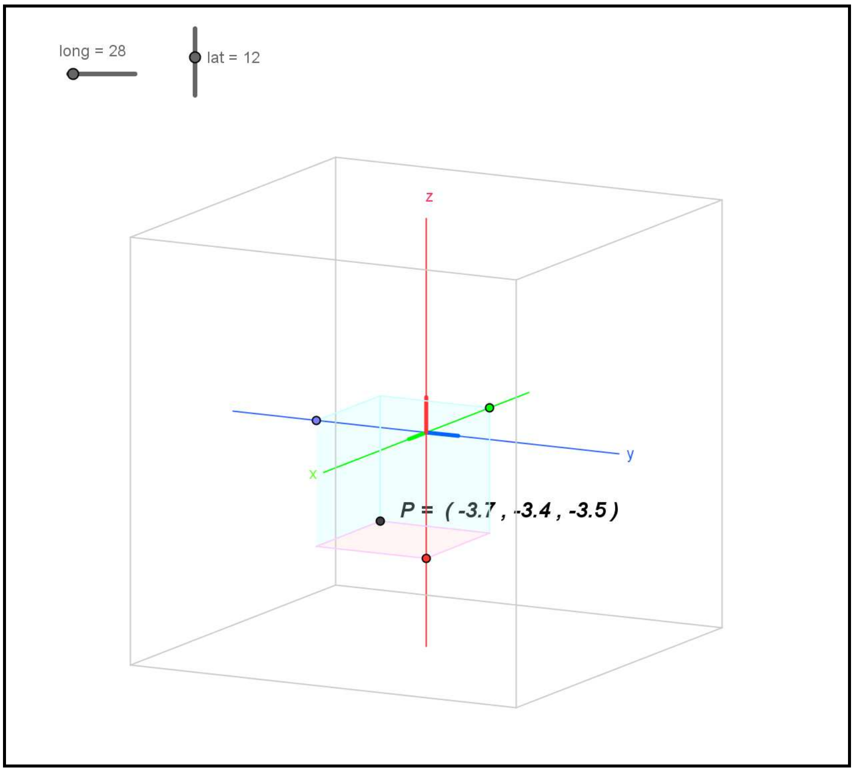


Figura 3: Visualizador do ponto no espaço

2.3 Visualizadores do vetor no espaço

Assim como no visualizador de ponto, este visualizador permite ao aluno observar os vetores no espaço sob vários pontos de vista.

Foram criados dois visualizadores de vetores.

O primeiro foi idealizado para permitir aos alunos observar vetores a partir da origem do sistema de coordenadas cartesianas, como mostra a Figura 4. A dinâmica do visualizador permite aos alunos mover as coordenadas do ponto P(x, y, z) da extremidade do vetor, nos eixos cartesianos, e visualizar as mudanças na terna, além de visualizar as mudanças no módulo (tamanho) do vetor e seu respectivo valor aproximado em uma casa decimal.

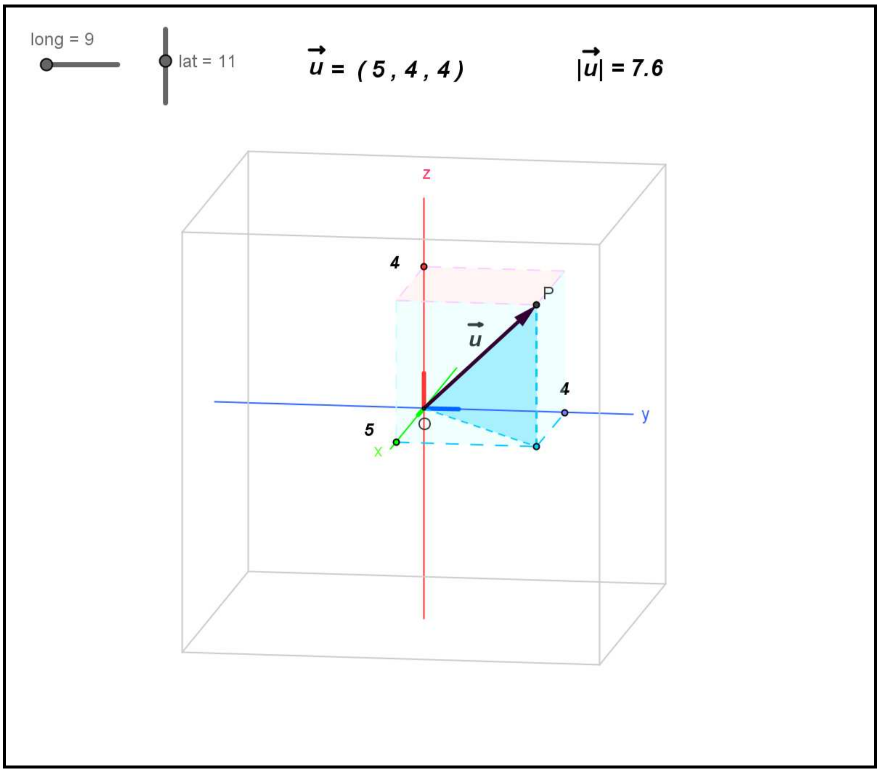


Figura 4: Primeiro visualizador de vetor no espaço

O segundo visualizador de vetores foi idealizado para mostrar aos alunos os vetores como diferença de coordenadas de dois pontos, e ver o mesmo vetor a partir da origem do sistema de coordenadas. A dinâmica do visualizador permite que o aluno "mude" as coordenadas dos pontos extremidades do vetor. Para tal, o mesmo deve habilitar a função "movimentar o ponto" e em seguida mover as "bolinhas" que aparecem sobre os eixos cartesianos. O aluno poderá visualizar a mudança da posição do ponto no espaço e todas as mudanças de coordenadas envolvidas.

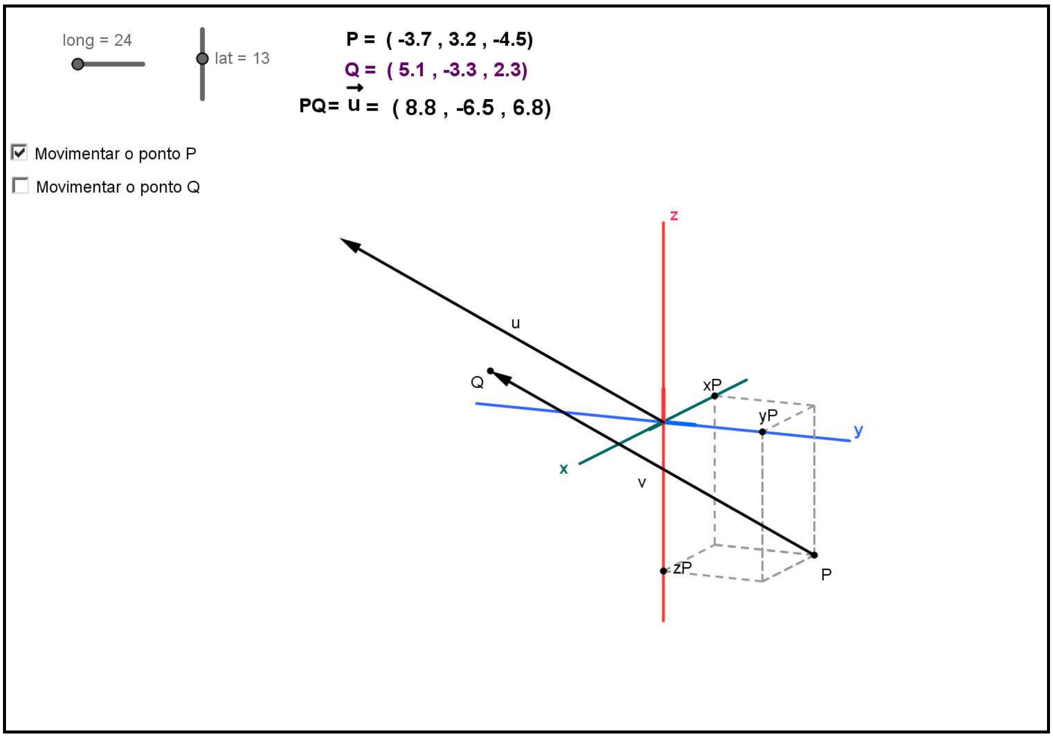


Figura 5: Segundo visualizador de vetor no espaço

Para a visualização vetor resultante do produto de um escalar por um vetor, foi criada uma variação dos visualizadores mostrados acima. Esta variação permite aos alunos mudar o escalar que multiplica o vetor e observar o vetor resultante deste produto. O objetivo deste visualizador é mostrar ao aluno o que ocorre quando o escalar é negativo (inversão do sentido do vetor) ou positivo (manutenção do sentido do vetor), bem como mostrar aos alunos o efeito geométrico de um escalar maior do que um (aumento do módulo do vetor) e de um escalar menor do que um (diminuição do módulo do vetor). O aluno poderá notar ainda que quando o escalar é igual a um tem-se exatamente o mesmo vetor e quando o escalar for igual a -1 tem-se apenas a inversão do sentido, mantendo-se o módulo e a direção do mesmo.

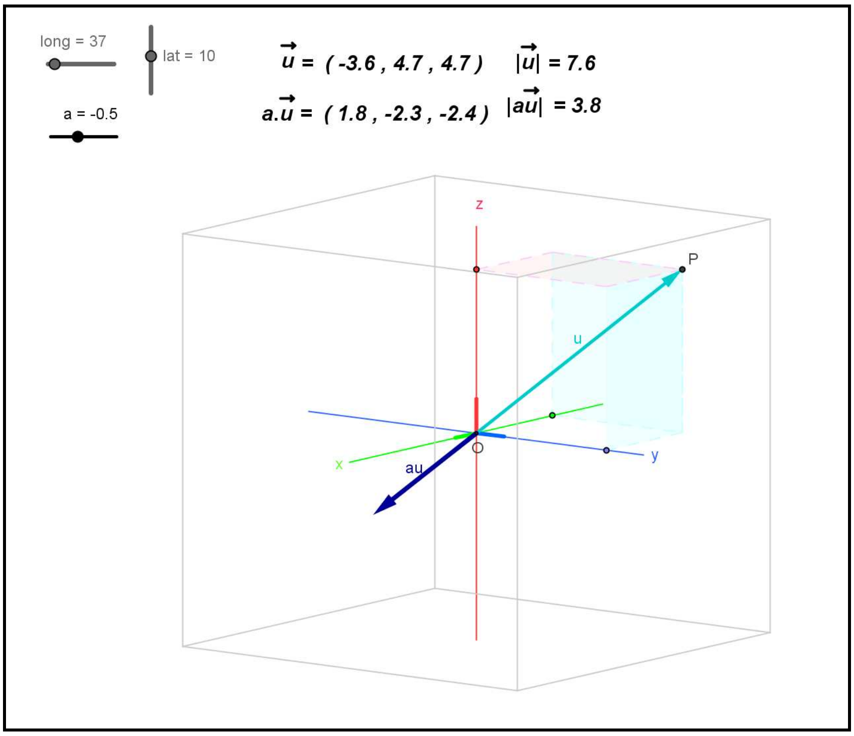


Figura 6: Visualizador do produto de um escalar por um vetor

2.4 Visualizadores de reta no espaço

Assim como no caso de vetores, criamos dois visualizadores para retas.

O primeiro visualizador permite aos alunos observar no espaço uma reta definida por dois pontos. É permitido ao aluno manipular a posição, através de suas coordenadas, dos dois pontos que definem a reta. É mostrada a equação simétrica da reta, bem como as coordenadas dos dois pontos que a definem. Para movimentar os pontos, o aluno deve “habilitar” a função “movimentar o ponto”. (idêntica aos anteriores). Um fato bastante interessante deste visualizador é que para acentuar a posição da reta no espaço em relação ao sistema de eixos cartesianos, é mostrado em destaque (através de um pontinho verde e da “pintura” da face do cubo) os locais onde a reta “fura” as faces do cubo, o que permite escolher um ponto de vista adequado para melhor enxergar e entender a posição da reta no espaço.

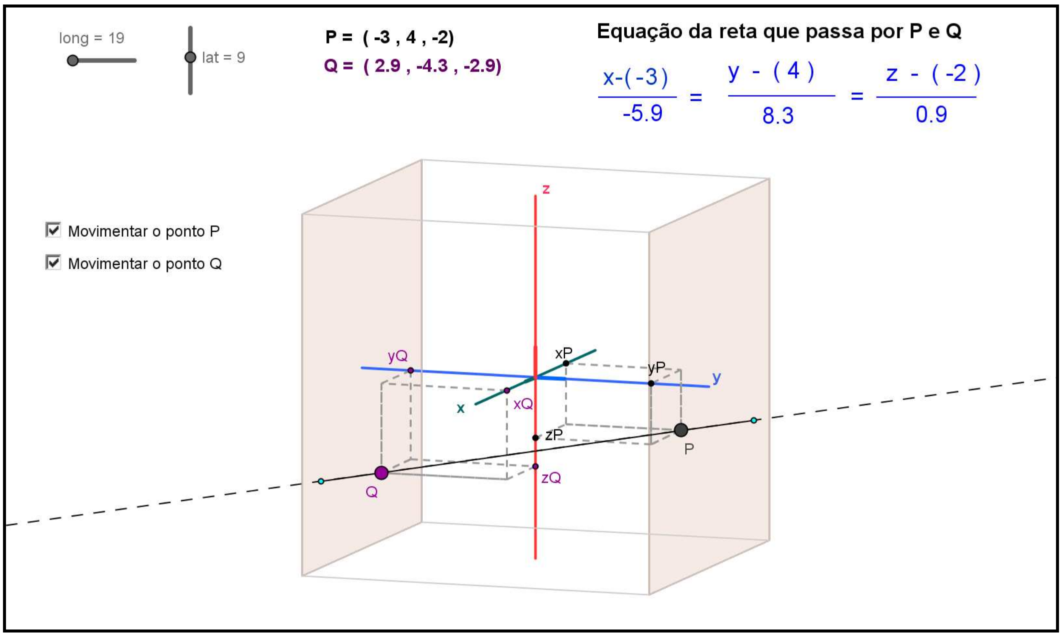


Figura 7: Visualizador de reta definida por dois pontos

O segundo visualizador permite aos alunos manipular as coordenadas de um vetor diretor da reta e de um ponto P da reta. São exibidas ainda as equações paramétricas da reta, além das coordenadas do ponto P e do vetor diretor da reta. Assim como no visualizador anterior, são mostradas em destaque as faces do cubo que são intersectadas pela reta, bem como os pontos onde ocorrem estas intersecções.

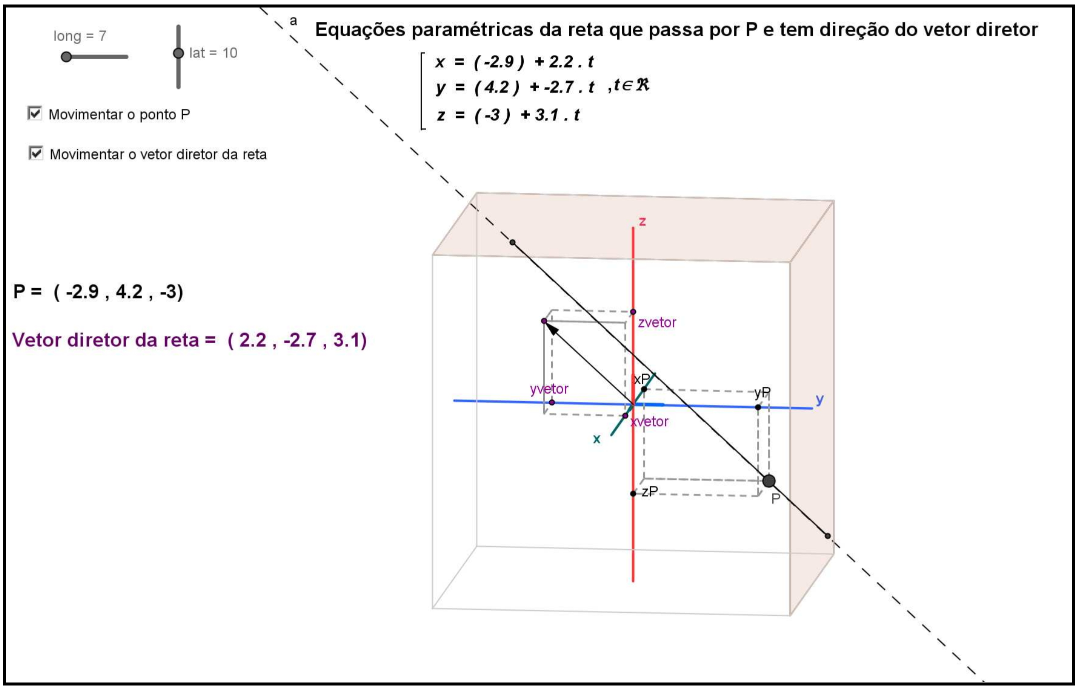


Figura 8: Visualizador da reta definida por um ponto P e um vetor diretor

2.5 Visualizadores de plano no espaço

Neste visualizador é permitido aos alunos modificar os parâmetros *a, b, c* e *d* da equação geral do plano $a.x + b.y + c.z + d = 0$ e visualizá-lo do ponto de vista de um cubo centrado na origem com faces paralelas aos planos coordenados. São exibidas as interseções do plano em questão com as faces do cubo e com os planos coordenados, desde que restritas ao interior do cubo.

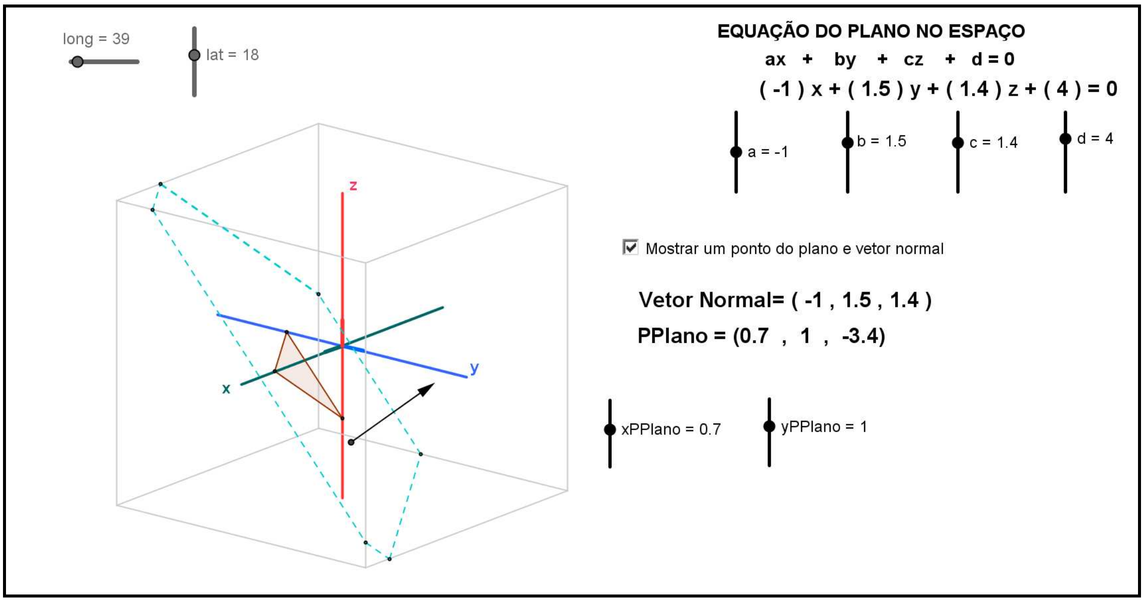


Figura 9: Visualizador de plano no espaço

Ao habilitar a caixa “Mostrar um ponto do plano e vetor normal” é exibido um ponto do plano e o vetor normal ao plano com origem nesse ponto, juntamente com suas coordenadas. Seletores permitem ao aluno movimentar o ponto no plano em duas direções perpendiculares.

CAPÍTULO 3: O AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM IDEALIZADO

Os visualizadores descritos no capitulo anterior foram apresentados aos alunos em um ambiente virtual de aprendizagem idealizado no Moodle. Estes visualizadores foram utilizados em diversas ferramentas do ambiente, incluindo páginas web com a teoria dos assuntos estudados no curso, lições que consistiam em exercícios “auto corrigíveis” para melhor compreensão da teoria e avaliações que eram disponibilizadas somente aos finais de semana para “medição” do grau de entendimento e aproveitamento do estudo feito na semana.

Este estudo foi realizado no laboratório de informática de uma faculdade privada no horário regular da disciplina Geometria Analítica II, com o acompanhamento do professor. Aos finais de semana (sexta a segunda) era disponibilizada, aos alunos, uma avaliação que consistia de exercícios sobre o assunto estudado em aula. Era permitida a execução dos mesmos em três tentativas, sendo considerada como nota da avaliação a maior nota obtida nas três tentativas. Nesta avaliação havia um misto de exercícios “tradicionais” com exercícios mais “criativos”, tornando-a bastante versátil.

A seguir ilustramos a página inicial do AVA idealizado.

Figura 10: Apresentação do curso

Pode-se notar logo no início do ambiente uma preocupação em relação aos receios que o discente poderia apresentar. Para minimizar tais receios, disponibilizamos algumas orientações gerais sobre o funcionamento do curso e dois fóruns onde alunos e professor poderiam interagir trocando informações e tirando dúvidas. Além disso, disponibilizamos questões sobre a utilização do AVA na disciplina, para serem respondidas após o término do curso, bem como links para acesso ao portal do professor do MEC e à plataforma Freire.

O AVA foi idealizado em cinco módulos, a saber:

- Módulo 1: Coordenadas do ponto no espaço
- Módulo 2: Vetores no espaço
- Módulo 3: Operações com vetores
- Módulo 4: Combinação linear de vetores
- Módulo 5: Retas no espaço

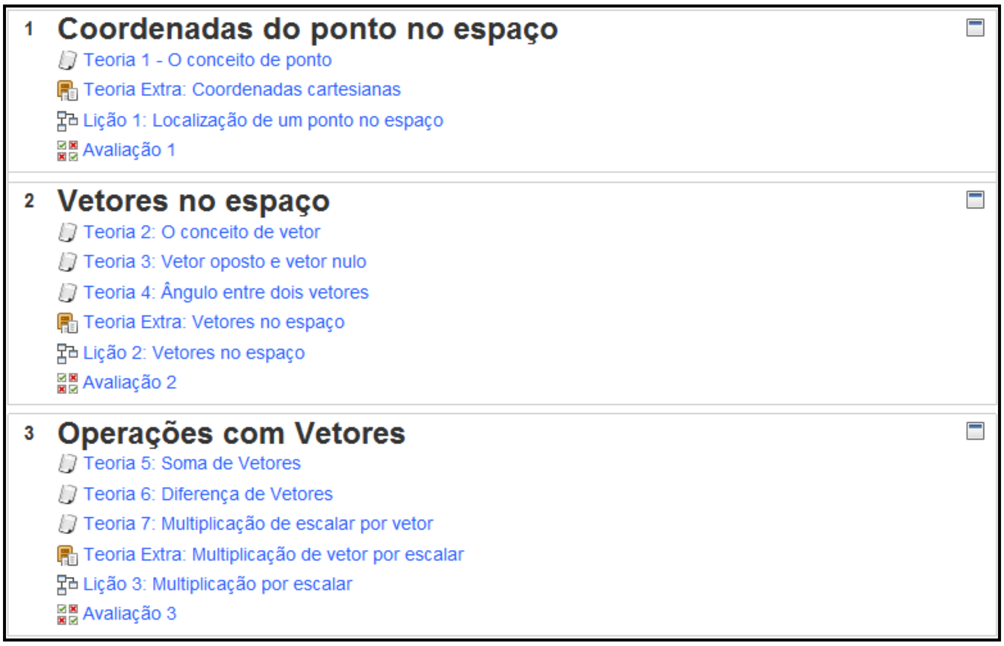


Figura 11: Apresentação dos módulos 1, 2 e 3 no AVA

Os módulos 1, 2 e 3 apresentam tanto uma teoria formal quanto uma teoria extra sobre os tópicos de GA abordados no AVA. A teoria extra, mais enxuta, foi idealizada para dar suporte à teoria formal, como se fosse um bloco de anotações ou um mapa conceitual. Após o estudo da teoria, os alunos realizavam lições na forma de questões encadeadas relativas aos assuntos estudados com direcionamento de estudo. Aos finais de semana (sexta a segunda) eram disponibilizadas avaliações que consistiam de um certo número de questões relativas aos assuntos estudados retiradas de um banco de questões previamente criado para tal propósito. A diferença entre as lições e as avaliações é que as questões das avaliações poderiam mudar de uma tentativa para outra enquanto as questões das lições eram as mesmas em todas as tentativas, podendo mudar somente a ordem que apareciam as alternativas. (quando existiam!)

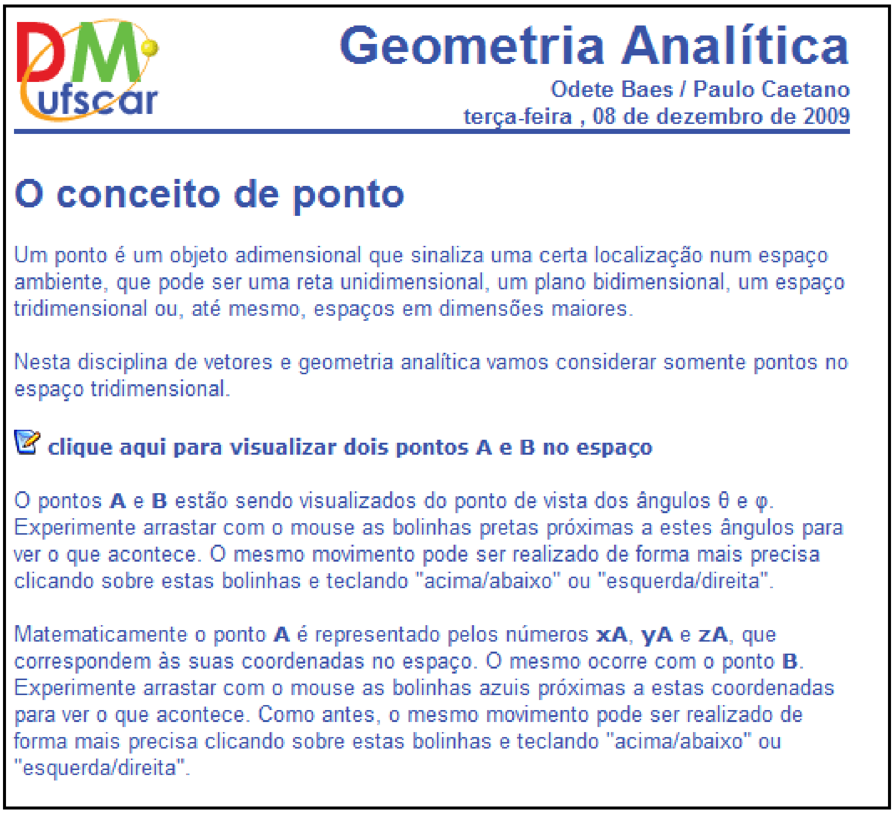
Figura 12: Apresentação dos módulos 4 e 5 no AVA

Nos módulos 4 e 5 não existiam teorias extras, na intenção de que os próprios alunos construíssem essa teoria a partir do aprendizado nos módulos anteriores em suas anotações. Uma observação importante a fazer é que as lições poderiam ser realizadas quantas vezes os alunos achassem necessário; a cada tentativa realizada era atribuída uma nota, sendo considerada para efeito do cálculo da nota final a mais alta nota obtida nas tentativas. Já nas avaliações eram permitidas três tentativas e também era considerada a mais alta nota das tentativas. Vale lembrar ainda que este AVA foi utilizado em uma disciplina regular do curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade privada e que todas as notas obtidas foram consideradas no critério de avaliação dessa disciplina.

Apresentaremos a seguir uma breve descrição dos módulos, uma vez que todo o AVA é apresentado na íntegra em anexo.

3.1 Módulo 1: Coordenadas do ponto no espaço

O objetivo deste módulo foi apresentar a idéia de coordenadas de um ponto em relação a um sistema de eixos ortogonais. Inicialmente foi proposta uma atividade teórica onde o aluno era direcionado a uma web página idealizada por professores do DM-UFSCar tratando do assunto em questão.



Geometria Analítica

Odete Baes / Paulo Caetano

terça-feira , 08 de dezembro de 2009

O conceito de ponto

Um ponto é um objeto adimensional que sinaliza uma certa localização num espaço ambiente, que pode ser uma reta unidimensional, um plano bidimensional, um espaço tridimensional ou, até mesmo, espaços em dimensões maiores.

Nesta disciplina de vetores e geometria analítica vamos considerar somente pontos no espaço tridimensional.

clique aqui para visualizar dois pontos A e B no espaço

O pontos **A** e **B** estão sendo visualizados do ponto de vista dos ângulos θ e φ. Experimente arrastar com o mouse as bolinhas pretas próximas a estes ângulos para ver o que acontece. O mesmo movimento pode ser realizado de forma mais precisa clicando sobre estas bolinhas e teclando "acima/abaixo" ou "esquerda/direita".

Matematicamente o ponto **A** é representado pelos números **xA**, **yA** e **zA**, que correspondem às suas coordenadas no espaço. O mesmo ocorre com o ponto **B**. Experimente arrastar com o mouse as bolinhas azuis próximas a estas coordenadas para ver o que acontece. Como antes, o mesmo movimento pode ser realizado de forma mais precisa clicando sobre estas bolinhas e teclando "acima/abaixo" ou "esquerda/direita".

Figura 13: Teoria 1 – O conceito de ponto

Fonte: http://www.dm.ufscar.br/profs/caetano/ead/vga/ponto_conceito.php

Nesta página existiam applets desenvolvidos no Geogebra que permitiam o movimento do ponto através de suas coordenadas e a respectiva visualização do mesmo, na reta, no plano e no espaço (ver figura a seguir). No texto é incentivado que o aluno movimente o ponto através de suas coordenadas e visualize o mesmo sob diferentes pontos de vista, variando-se os valores de □ e Φ. Isto permite que o aluno construa o conceito de coordenadas de ponto em relação a um sistema de eixos ortogonais e entenda como cada coordenada modifica sua posição no espaço.

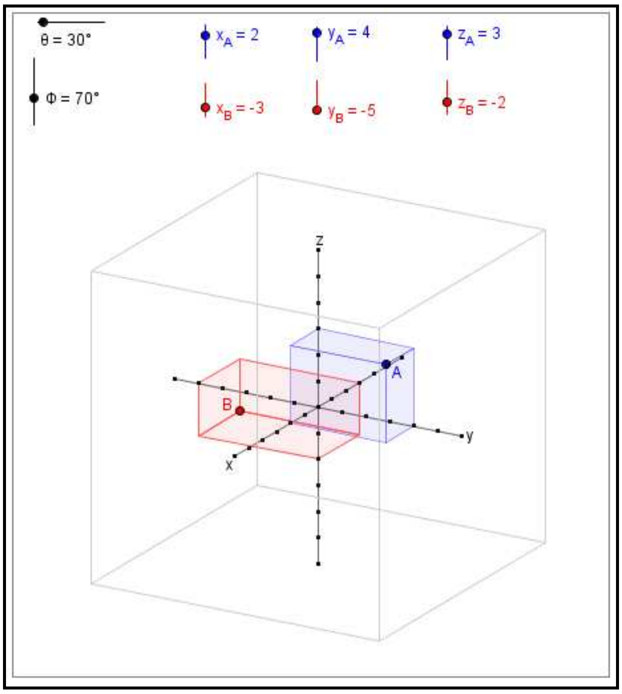


Figura 14: Visualizador da Teoria 1

Continuando na teoria notamos uma constante preocupação com o ambiente construtivista, onde o aluno reflete sobre determinadas questões e constrói o conhecimento a cerca do assunto estudado.

O ponto no espaço tridimensional

No espaço tridimensional a localização de um ponto **P** é determinada por três coordenadas **xP**, **yP** e **zP** que medem, respectivamente, a distância com sinal de **P** a um plano frontal **yz** perpendicular a um eixo **x**, a distância com sinal de **P** a um plano lateral **xz** perpendicular a um eixo **y** e a distância com sinal de **P** a um plano base **xy** perpendicular a um eixo **z**, os quais são mutuamente perpendiculares entre si.

Visualize os pontos **A** e **B** do ponto de vista θ=20° e φ=70° e movimente as coordenadas **xA** , **xB** , **yA** , **yB** , **zA** , **zB** para entender do que estamos falando.

Neste caso escrevemos **P = (xP , yP , zP)** onde **xP** é a primeira coordenada de **P**, **yP** é a segunda coordenada de **P** e **zP** é a terceira coordenada de **P**.

PERGUNTAS DINÂMICAS: Antes de responder as perguntas abaixo, reposicione os pontos **A** e **B** de tal forma que **A = (2 , -1 , 4)** e **B = (-1 , 2 , - 3)**. Responda as perguntas mentalmente e, depois de responder, posicione o cursor sobre a pergunta para ver a resposta do professor.

*Pergunta 1: Qual a distância do ponto **A** ao plano frontal **yz** ?*
*Pergunta 2: Qual a distância do ponto **A** ao plano lateral **xz** ?*
*Pergunta 3: Qual a distância do ponto **A** ao plano base **xy** ?*
*Pergunta 4: Qual dos pontos **A** e **B** está mais próximo do plano frontal **yz** ?*
*Pergunta 5: Qual dos pontos **A** e **B** está mais próximo do plano lateral **xz** ?*
*Pergunta 6: Qual dos pontos **A** e **B** está mais próximo do plano base **xy** ?*
*Pergunta 7: Qual o significado geométrico da diagonal do cubo vermelo com um dos vértices no ponto **B** ?*
*Pergunta 8: Qual a distância aproximada (uma casa decimal) do ponto **B** à origem ?*
*Pergunta 9: Qual o significado geométrico da raiz quadrada de **(xB.xB+yB.yB+zB.zB)** ?*

Figura 15: Continuação da Teoria 1

Fonte: http://www.dm.ufscar.br/profs/caetano/ead/vga/ponto_conceito.php

Na teoria extra criou-se uma “página resumo” do assunto estudado, com enfoque um pouco mais simples e ajuda de outros visualizadores mais específicos, para melhor compreensão da ligação entre a Álgebra e a Geometria.

Rodrigo Dantas; Paulo Caetano - D.M. - UFSCar

SISTEMA DE EIXOS CARTESIANOS ORTOGONAIS NO ESPAÇO

Para localizar um ponto no espaço:

- escolhemos um ponto O como origem
- como eixos coordenados, três retas orientadas, passando pela origem, perpendiculares entre si
- estes serão os eixos x, y e z
- usualmente o eixo z é um eixo vertical e os eixos x e y formam um plano horizontal
- cada par de eixos determina um plano chamado de plano coordenado
- os três planos coordenados são: xy, yz e xz

Veja a representação de um ponto P no sistema de coordenadas cartesianas abaixo. Experimente movimentar as bolinhas sobre os eixos x,y e z para ver o que acontece. Experimente também movimentar as bolinhas sobre os seletores lat **e long** do visualizador.

Figura 16: Teoria extra do módulo 1

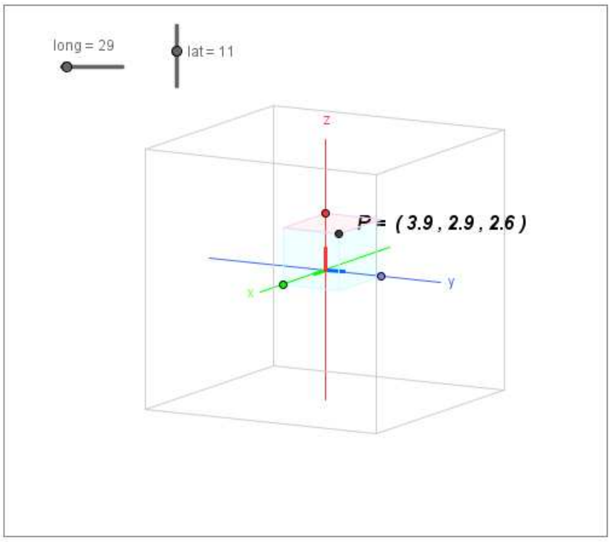


Figura 17: Visualizador de ponto

Em todo o ambiente foi incentivado aos alunos explorar os recursos dos visualizadores através da mudança de valores em seletores específicos. Ao “movimentar” as bolinhas nos seletores e “ver” o que acontece com o ponto P, o aluno pode ter uma sensação mais concreta das mudanças ocorridas com as coordenadas do ponto e seu posicionamento no espaço. Os seletores *long* e *lat* permitem ao aluno visualizar o ponto P de diferentes “pontos de vista”. A medida que movimenta-se os pontos coloridos sobre os eixos *x, y* e *z* tem-se a mudança da posição do ponto P no espaço. Este dinamismo é impossível de ser atingido na aula tradicional com giz e lousa.

Após o estudo teórico o aluno realizava a lição, que consistia em exercícios sobre o assunto estudado. Uma preocupação latente na elaboração destes exercícios foi o de criar um ambiente que motivasse o aluno a explorar a teoria estudada e colocasse o mesmo diante de situações difíceis de serem conseguidas com os recursos tradicionais. (ambiente construcionista).

A seguir ilustramos um exemplo de questão de uma lição. Vemos, nesse exemplo, nossa preocupação em estar sempre motivando aluno, uma vez que em ambientes virtuais o mesmo encontra-se só em seus estudos. Aproveitamos também para fazer com que o mesmo reflita sobre determinadas situações como, por exemplo, o que acontece com a posição de um ponto no espaço quando uma de suas coordenadas é nula.

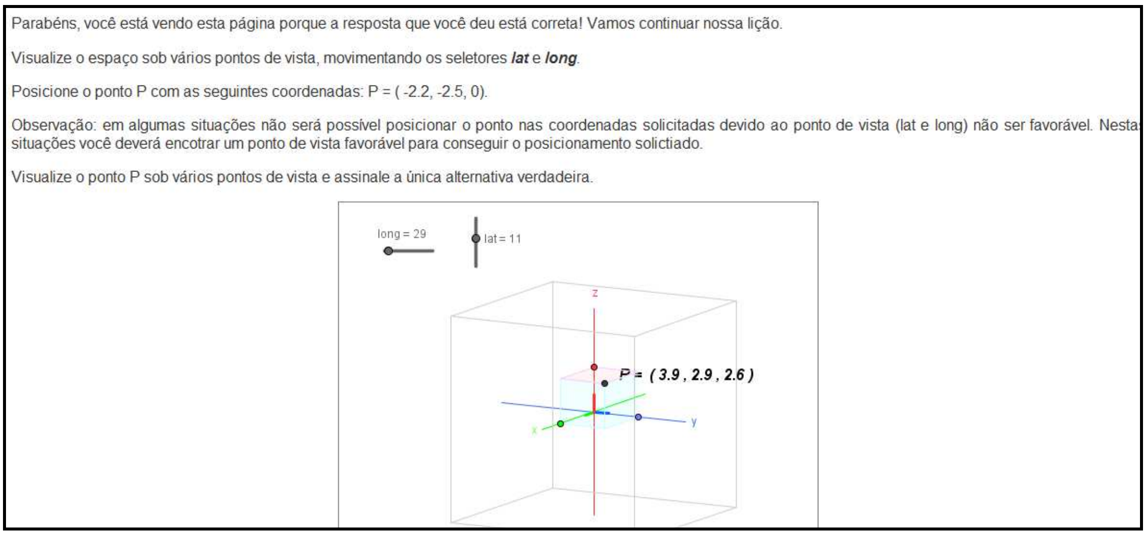


Figura 18: Questão da lição 1

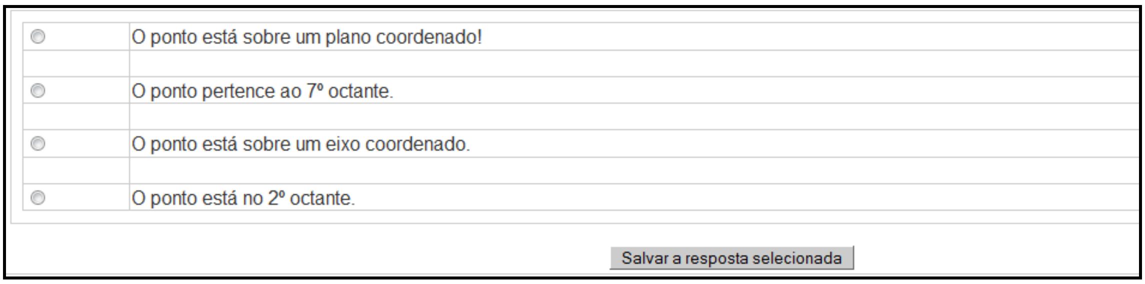


Figura 19: Alternativas da questão da lição 1

Quando o aluno acerta a questão de uma lição, ele vai para a próxima questão e quando erra, retorna à mesma questão. Por exemplo, se o aluno acertasse a questão da figura 19 ele iria para a seguinte questão:

Parabéns, você está indo bem.

Você percebeu que quando uma coordenada é nula, temos o ponto sob um plano coordenado, certo ?

É exatamente isto que acontece. Quando a coordenada x (abcissa) for igual a zero, temos o ponto sob o plano yz. Quando a coordenada y (ordenada) for nula, o ponto está sob o plano xz. Finalmente quando a coordenada z (cota) for nula, teremos o ponto sob o plano xy.

Você notou as nomenclaturas abscissa, ordenada e cota utilizada no parágrafo anterior?

Para prosseguir na lição, posicione o ponto P = (0, -4.5, 0) e assinale a única alternativa FALSA.

Figura 20: Continuação de questão da lição 1

Procurou-se fazer, sempre que possível, um gancho entre as questões, colocando no início a conclusão esperada da questão anterior.

Após a lição (que era realizada as terças) o aluno tinha até a sexta para consolidar o estudo e realizar assim a avaliação. Ilustramos a seguir algumas questões da avaliação 1.

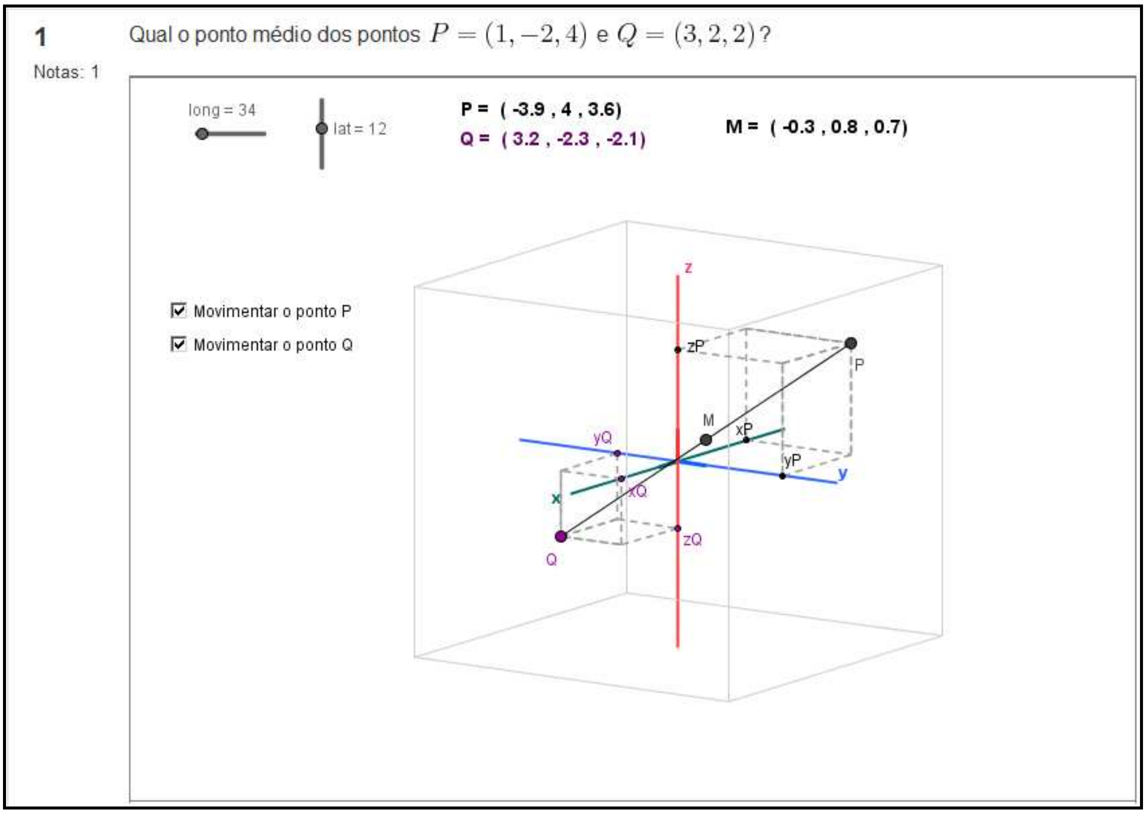


Figura 21: Questão da avaliação 1

Escolher uma resposta.

- a. $M = (2, 0, -3)$
- b. $M = (-2, 0, -3)$
- c. $M = (2, -2, 3)$
- d. $M = (2, 0, 3)$

Enviar página | Enviar tudo e terminar

Figura 22: Alternativas da questão da avaliação 1

3.2 Módulo 2: Vetores no espaço

Neste módulo, existem três atividades teóricas denominadas o conceito de vetor, vetor oposto e vetor nulo e ângulo entre dois vetores. Nestas teorias são apresentados cada um dos conceitos de uma maneira um pouco diferente dos livros didáticos, pois é incentivado sempre ao aluno visualizar o que está sendo estudado. Da mesma maneira que no módulo anterior, há uma teoria extra um pouco mais enxuta e sem uma preocupação com maiores detalhes dos assuntos, haja visto que isto ocorreu nas teorias abordadas anteriormente. As figuras a seguir apresentam uma parte da teoria extra apresentada neste módulo.

Na prática, se a origem do vetor não é a origem $(0,0,0)$ do sistema R^3, realizamos a diferença entre a extremidade e a origem do vetor.

Por exemplo, se um vetor $\vec{u}$ tem origem em $(1,2,3)$ e extremidade em $(5,5,5)$, seu representante natural é dado por $\vec{v} = (4,3,2)$, isto é: $\vec{v} = (5,5,5) - (1,2,3) = (5-1, 5-2, 5-3) = (4,3,2)$.

Experimente posicionar os pontos P e Q com as coordenadas acima e ver o vetor $\overrightarrow{PQ}$ e o vetor $\vec{v}$ com mesmo módulo, direção e sentido de $\overrightarrow{PQ}$ mas com origem na origem do sistema de coordenadas.

Figura 23: Teoria extra – vetores no espaço

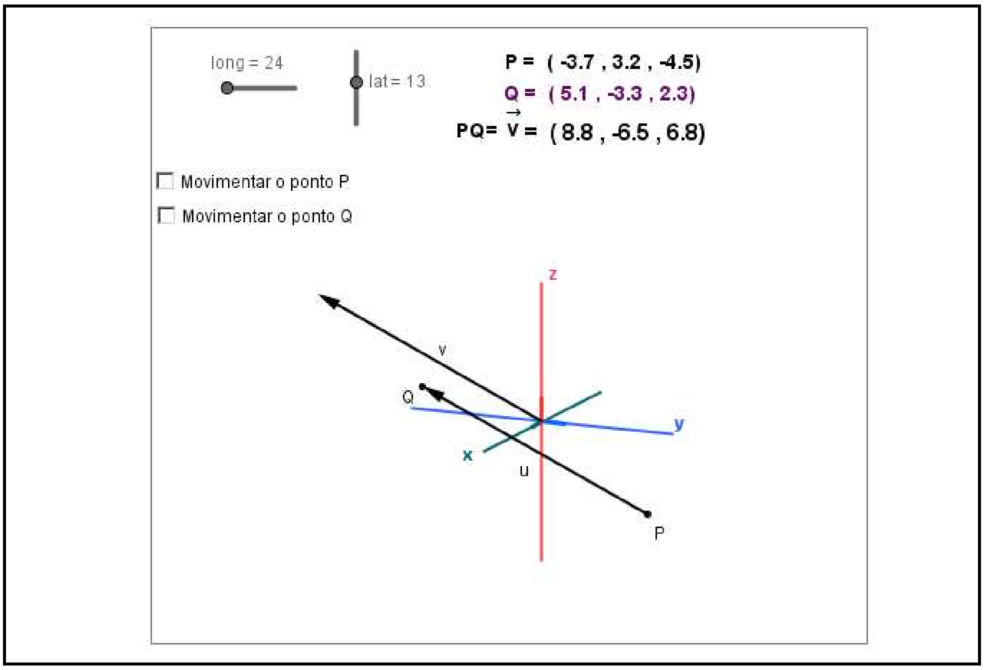


Figura 24: Visualizador de vetor no espaço

A lição deste módulo consistia de 8 exercícios e a seguir é apresentada uma questão onde é pedido que o aluno visualize o triângulo retângulo utilizado para se chegar a expressão do módulo de um vetor no espaço aplicando-se o Teorema de Pitágoras aos lados deste retângulo.

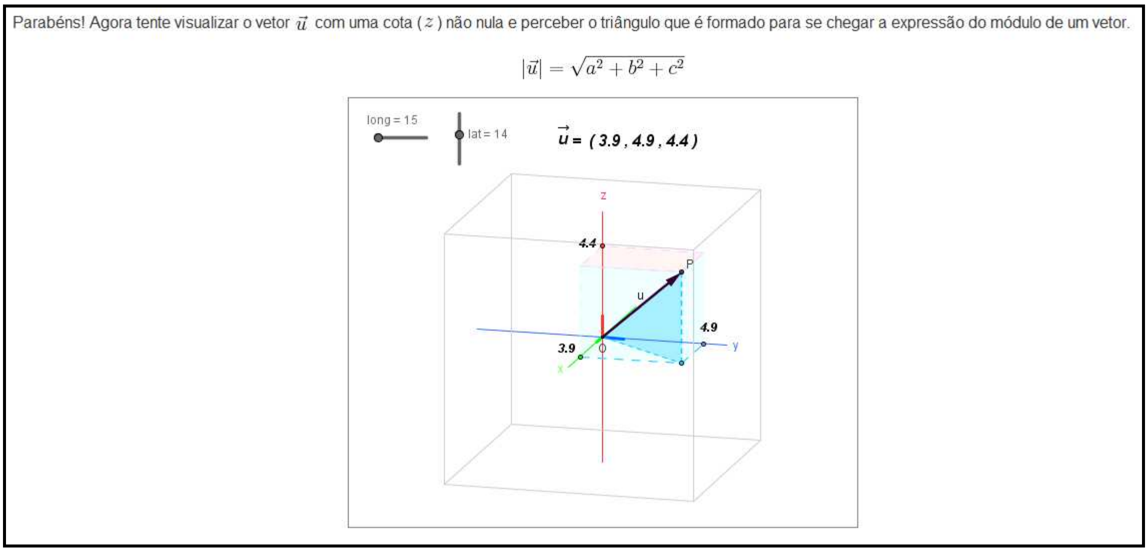


Figura 25: Questão da lição 2

Assinale a alternativa verdadeira.

- Para o vetor $\vec{u} = (4,3,4)$, o módulo de $\vec{u}$ será 5.
- Para o vetor $\vec{u} = (4,3,4)$, o módulo de $\vec{u}$ será $\sqrt{40}$.
- Para o vetor $\vec{u} = (4,0,0)$, o módulo de $\vec{u}$ será $\sqrt{4}$.
- Para o vetor $\vec{u} = (3,4,5)$, o módulo de $\vec{u}$ será $5 \cdot \sqrt{2}$.

Salvar a resposta selecionada

Figura 26: Alternativas da questão da lição 2

Embora este tipo de exercício possa ser realizado na lousa, temos com a ajuda do visualizador uma ferramenta que permite ao aluno visualizar o triângulo sob outros pontos de vista e se "convencer" mais facilmente da expressão do módulo de um vetor.

Na avaliação deste módulo existem também 8 exercícios, porém em nenhum deles foi apresentado um visualizador de vetores para auxiliar a resolução dos mesmos. Nosso intuito foi mostrar ao aluno que embora os visualizadores ajudem muito na resolução dos problemas, é totalmente viável a execução sem este tipo de recurso. Sabemos, também, que embora não apresentássemos os visualizadores, nada impediria que os alunos abrissem em outra página estas ferramentas e resolvessem os exercícios com seu auxílio. Neste caso, acreditamos, ainda, estar influenciando os alunos de maneira positiva em relação a utilização de novas tecnologias, sendo que a iniciativa,neste caso, não teria partido do professor. A figura a seguir apresenta uma questão da lição 2.

1

Notas: --/1

Determine a origem P do segmento que representa o vetor $\vec{u} = (4,1,8)$,sendo sua extremidade o ponto $Q = (4,3,4)$. Lembre-se que se P é a origem do vetor e Q sua extremidade, temos o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$.

Escolher uma resposta.

- a. $P = (0,2,-4)$
- b. $P = (4,4,4)$
- c. $P = (0,4,-4)$
- d. $P = (4,3,4)$

Enviar

Enviar página | Enviar tudo e terminar

Figura 27: Questão da avaliação 2

3.3 Módulo 3: Operações com vetores

Apresentamos neste módulo três atividades teóricas denominadas soma de vetores, diferença de vetores e multiplicação de vetor por escalar. Nestas teorias são apresentados cada um dos conceitos dessas operações, incentivando sempre o aluno a visualizar o que está ocorrendo.

Soma de vetores

clique aqui para visualizar no espaço o vetor soma w = u + v.

A soma de um vetor **u** (azul) e outro vetor **v** (vermelho) é um terceiro vetor **w=u+v** (verde) obtido no paralelogramo gerado pelos vetores **u** e **v**. Tal paralelogramo é construído a partir da aplicação do vetor **v** na extremidade de **u** e da aplicação do vetor **u** na extremidade de **v**.

No paralelogramo gerado por **u** e **v**, o vetor soma **w=u+v** é o vetor diagonal que possui origem na origem de **u** e extremidade na extremidade de **v**.

Exemplo 1. Observe os vetores **u=(3,1,0)** e **v=(1,2,0)** do ponto de vista do plano **xy** fazendo $\theta=270°$ e $\varphi=0°$, com coordenadas $x_u=3$, $y_u=1$, $z_u=0$ $x_v=1$, $y_v=2$ e $z_v=0$. Note que cada coodenada do vetor soma **w=u+v** corresponde a soma das respectivas coordenadas das parcelas **u** e **v**, isto é

$$w = u + v = (3,1,0) + (1,2,0) = (3+1, 1+2, 0+0) = (4,3,0)$$

Como visto no exemplo anterior, em coordenadas a soma de vetores se dá somando as coordenadas correspondentes. Se

$$u = (x_u , y_u , z_u)$$

e

$$v = (x_v , y_v , z_v)$$

então

$$u + v = (x_u+x_v , y_u+y_v , z_u+z_v) .$$

Exemplo 2. Observe os vetores **u=(0,1,0)** e **v=(0,2,0)** do ponto de vista do plano **xy** fazendo $\theta=270°$ e $\varphi=0°$, com coordenadas $x_u=0$, $y_u=1$, $z_u=0$ $x_v=0$, $y_v=2$ e $z_v=0$. Para estes vetores temos

$$w = u + v = (0,1,0) + (0,2,0) = (0+0, 1+2, 0+0) = (0,3,0)$$

Figura 28: Teoria 5 – Soma de Vetores

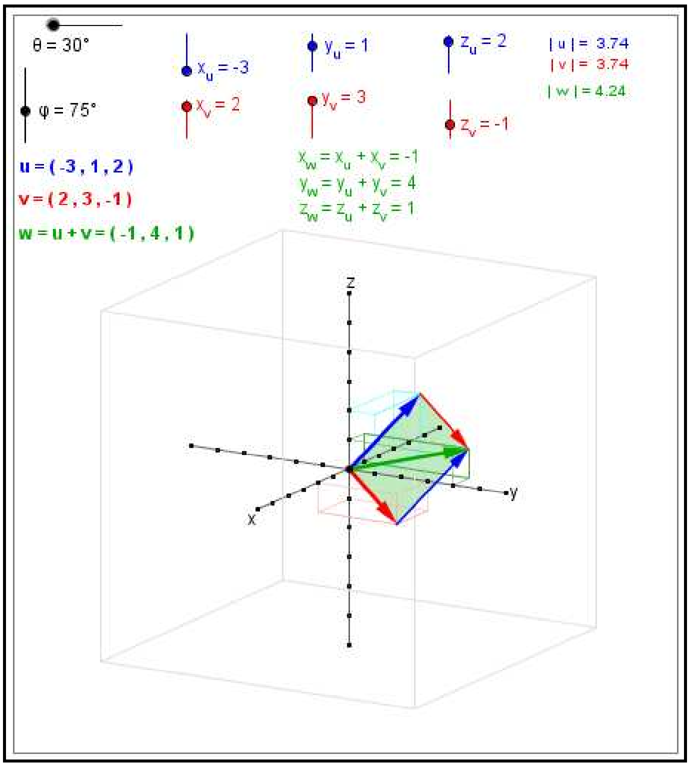
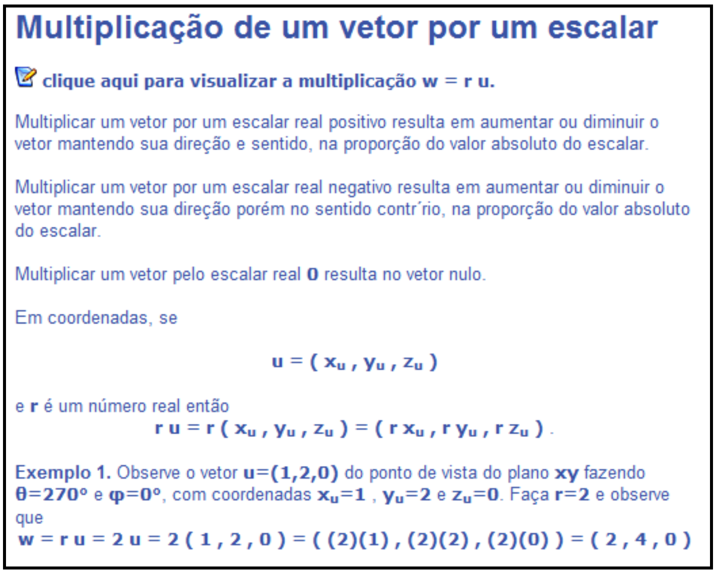


Figura 29: Visualizador da Teoria 5

Apresentamos a seguir parte da teoria sobre multiplicação de um vetor por um escalar e o visualizador utilizado nesta teoria.



Multiplicação de um vetor por um escalar

clique aqui para visualizar a multiplicação w = r u.

Multiplicar um vetor por um escalar real positivo resulta em aumentar ou diminuir o vetor mantendo sua direção e sentido, na proporção do valor absoluto do escalar.

Multiplicar um vetor por um escalar real negativo resulta em aumentar ou diminuir o vetor mantendo sua direção porém no sentido contr´rio, na proporção do valor absoluto do escalar.

Multiplicar um vetor pelo escalar real **0** resulta no vetor nulo.

Em coordenadas, se

$$\mathbf{u} = (x_u , y_u , z_u)$$

e **r** é um número real então

$$\mathbf{r\,u} = r (x_u , y_u , z_u) = (r\,x_u , r\,y_u , r\,z_u) .$$

Exemplo 1. Observe o vetor **u=(1,2,0)** do ponto de vista do plano **xy** fazendo **θ=270°** e **φ=0°**, com coordenadas x_u**=1** , y_u**=2** e z_u**=0**. Faça **r=2** e observe que

$$\mathbf{w} = r\,\mathbf{u} = 2\,\mathbf{u} = 2 (1 , 2 , 0) = ((2)(1) , (2)(2) , (2)(0)) = (2 , 4 , 0)$$

Figura 30: Teoria 7 – Multiplicação de vetor por escalar

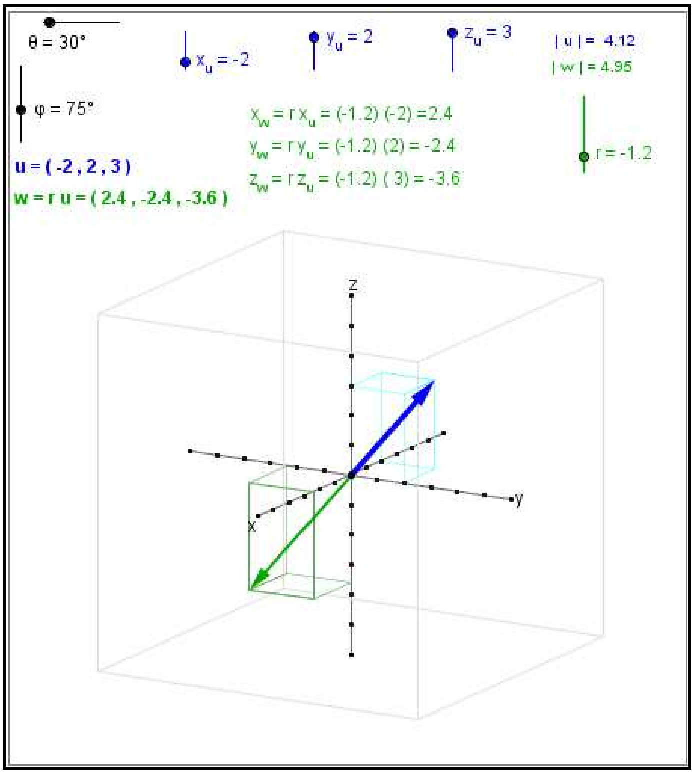


Figura 31: Visualizador de multiplicação de vetor por escalar

A teoria extra deste módulo consistiu de uma síntese da operação de multiplicação de um vetor por um escalar, conforme pode ser visto a seguir.

Lucas, Rodrigo D.; Caetano, P.A.S. - D.M. - UFSCar

A multiplicação de um escalar por um vetor gera um novo vetor.

Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ é um vetor qualquer e se $a \neq 0$ é um escalar (número real) qualquer então a multiplicação de a por $\vec{u}$, denotada por $a.\vec{u}$, será um novo vetor que possui as seguintes características:

- comprimento igual a a vezes o comprimento de $\vec{u}$;
- mesma direção de $\vec{u}$; (neste caso, dizemos que eles são paralelos)
- mesmo sentido de $\vec{u}$ se $a > 0$ e sentido contrário de $\vec{u}$ se $a < 0$;

Observação: se $\vec{u} = \vec{0}$ ou se $a = 0$ então $a \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Movimente o seletor com o valor do escalar "a" e observe o vetor $a.\vec{u}$

Figura 32: Teoria extra - módulo 3

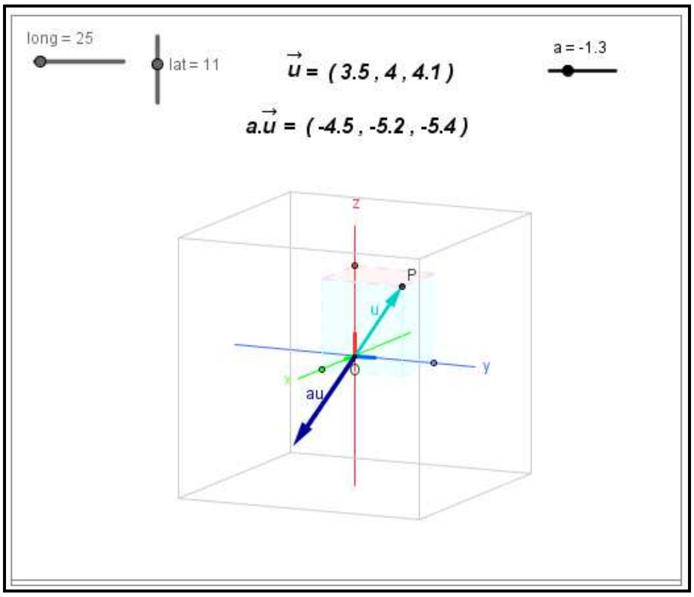


Figura 33: Visualizador de multiplicação por escalar da teoria extra

Como em todos os módulos, após a realização das teorias foi realizada a lição. A lição deste módulo consistiu de 10 exercícios, sempre incentivando que o aluno tire suas próprias conclusões a partir do dinamismo possibilitado pelo uso do Geogebra.

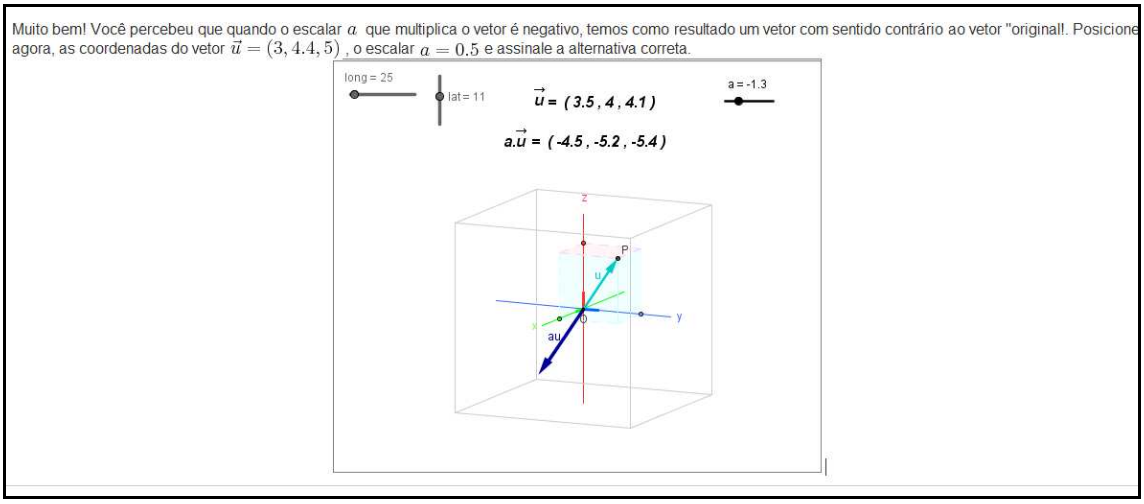
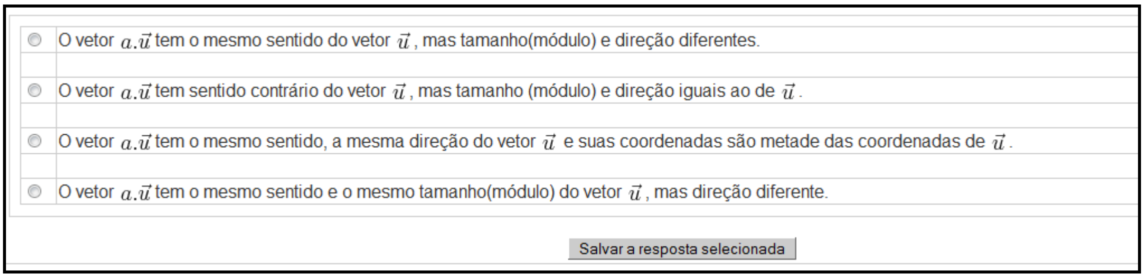


Figura 34: Questão da lição 3



O vetor $a.\vec{u}$ tem o mesmo sentido do vetor $\vec{u}$, mas tamanho(módulo) e direção diferentes.

O vetor $a.\vec{u}$ tem sentido contrário do vetor $\vec{u}$, mas tamanho (módulo) e direção iguais ao de $\vec{u}$.

O vetor $a.\vec{u}$ tem o mesmo sentido, a mesma direção do vetor $\vec{u}$ e suas coordenadas são metade das coordenadas de $\vec{u}$.

O vetor $a.\vec{u}$ tem o mesmo sentido e o mesmo tamanho(módulo) do vetor $\vec{u}$, mas direção diferente.

Salvar a resposta selecionada

Figura 35: Alternativas da questão da lição 3

A idéia do exercício anterior foi mostrar ao aluno, através do visualizador, que escalares negativos invertem o sentido do vetor, não alterando sua direção, e que escalares positivos preservam o sentido e a direção do vetor. Na minha visão, uma das principais dificuldades dos alunos é diferenciar direção de sentido. Pode-se notar ainda que a multiplicação por 0,5 é equivalente a dividir o módulo do vetor por 2, ou seja, metade do tamanho do vetor.

Todas estas conjecturas podem ser feitas pelos alunos e observadas através do visualizador proposto na questão.

Na avaliação 3 existem 8 questões a serem respondidas, sendo a ilustrada a seguir uma questão elaborada com a ajuda do Geogebra. Embora a questão não utilize os visualizadores desenvolvidos neste trabalho, foi utilizado o comando proj3D2D para a construção do octaedro desta questão. Nesta questão o aluno deveria optar por um ponto, dentre quatro possíveis, no item 1 e no item 4 deste exercício. Já nos itens 2 e 3 o aluno deveria escolher entre verdadeiro e falso a afirmação dada.

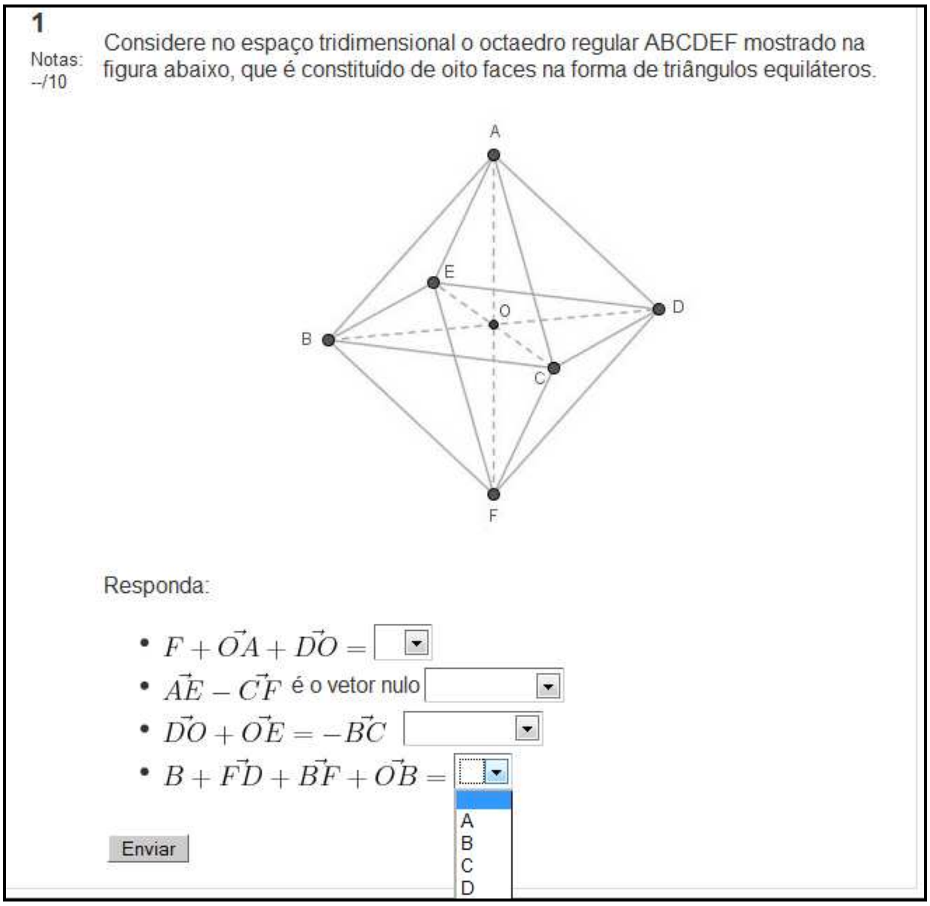


Figura 36: Questão da avaliação 3

3.4 Módulo 4: Combinação linear de vetores

Apresentamos neste módulo, duas atividades teóricas denominadas Teoria 8: Combinação linear de vetores no plano e Teoria 9: Combinação linear de vetores no espaço. São apresentados os conceitos de combinação linear de vetores em duas e três dimensões, respectivamente, incentivando a conexão entre a álgebra e a geometria através dos visualizadores.

Combinação linear de vetores no espaço

Uma combinação linear no espaço é um vetor resultante de uma combinação de somas e multiplicações por escalar envolvendo dois ou mais vetores no espaço. Por exemplo,

Uma combinação linear envolvendo três vetores **u** , **v** e **w** é um novo vetor σ do tipo

$$\sigma = r_u u + r_v v + r_w w$$

onde r_u, r_v e r_w são escalares (números reais).

clique aqui para visualizar uma combinação linear de três vetores.

Exemplo 1. Observe os vetores $u=i=(1,0,0)$, $v=j=(0,1,0)$ e $w=k=(0,0,1)$ visualizados no espaço do ponto de vista dos ângulos $\theta=30°$ e $\varphi=75°$. Se $r_u=-2$, $r_v=3$ e $r_w=4$ então temos a combinação linear

$$\sigma = r_u i + r_v j + r_w k = (-2)\,(1,0,0) + (3)\,(0,1,0) + (4)\,(0,0,1) = (-2, 3, 4)$$

Na verdade, qualquer vetor $\sigma=(x_\sigma,y_\sigma,z_\sigma)$ se escreve como combinação linear dos vetores $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ e $k=(0,0,1)$, posto que

$$\sigma = (x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma) = x_\sigma i + y_\sigma j + z_\sigma k$$

Figura 37: Teoria 9

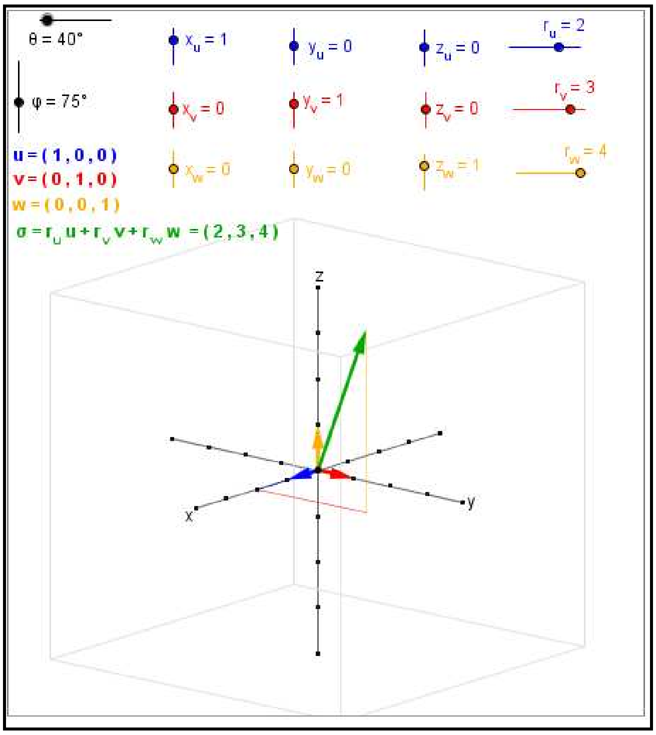


Figura 38: Visualizador de combinação linear de vetores no espaço

Neste módulo existem 8 exercícios, sem a utilização dos visualizadores. Nas figuras a seguir apresentamos um exercício onde podemos usar combinação linear de vetores para resolver o mesmo. Como já foi dito anteriormente, nada impedia o aluno de utilizar os visualizadores criados para responder as questões.

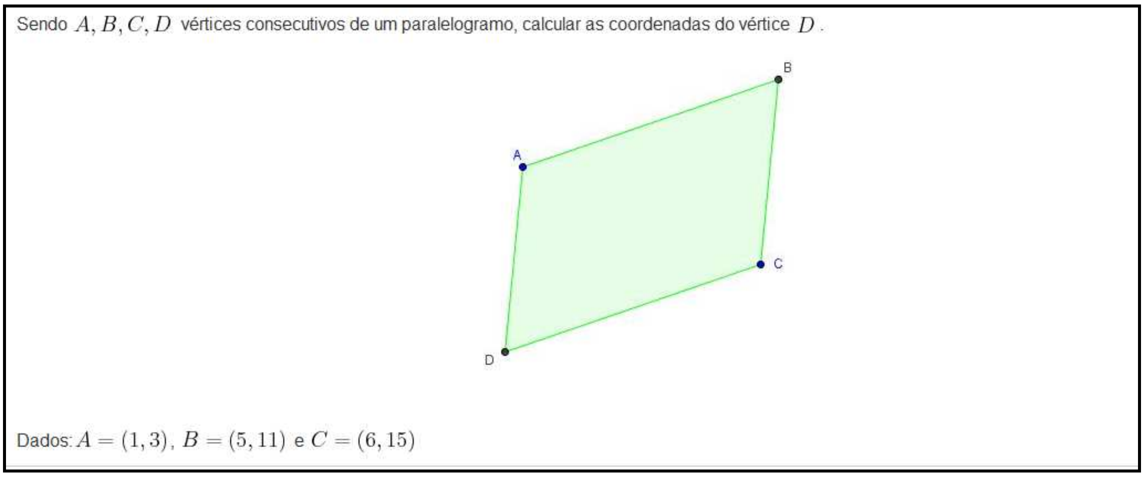


Figura 39: Questão da lição 4

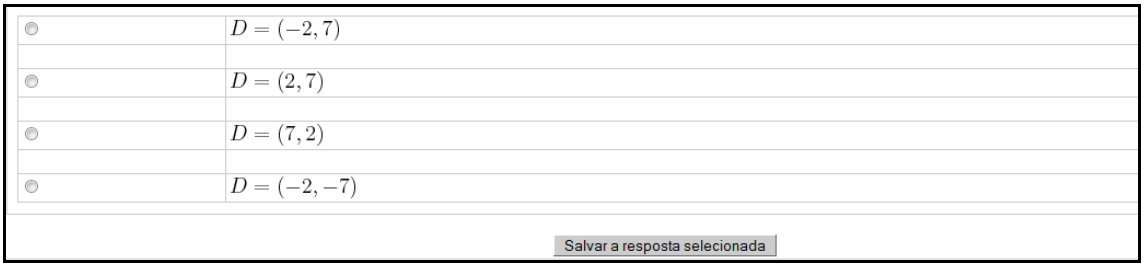


Figura 40: Alternativas da questão da lição 4

Este módulo não teve avaliação, sendo considerado somente a lição com 8 exercícios.

Os dois módulos seguintes não chegaram a ser apresentados aos alunos em sala, porém ficaram disponíveis para que pudessem acessar caso se interessassem.

3.5 Módulo 5: Retas no espaço

Neste módulo não houve teoria mais formal, sendo apresentada somente uma breve teoria sobre equação de retas e um visualizador que auxiliasse o entendimento desta teoria.

Uma reta r pode ser descrita como sendo o conjunto dos pontos $P = (x; y; z)$ tais que

$$\begin{cases} x &= x_0 + a \cdot t \\ y &= y_0 + b \cdot t \\ z &= z_0 + c \cdot t \end{cases}$$

onde t é um número real.

As equações descritas acima são de uma reta r que passa por um ponto $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (a; b; c)$. Estas equações são chamadas **equações paramétricas da reta** r. O vetor $\vec{v} = (a; b; c)$ é chamado **vetor diretor da reta** r.

O parâmetro t nas equações pode ser interpretado como o instante de tempo, se o ponto $P = (x; y; z)$ descreve o movimento de uma partícula em movimento retilíneo uniforme com vetor velocidade $\vec{v} = (a; b; c)$.

As mesmas equações podem ser reescritas como $(x; y; z) = (x_0 + a.t; y_0 + b.t; z_0 + c.t)$ que é chamada **equação vetorial da reta** r.

Figura 41: Teoria sobre equações de retas

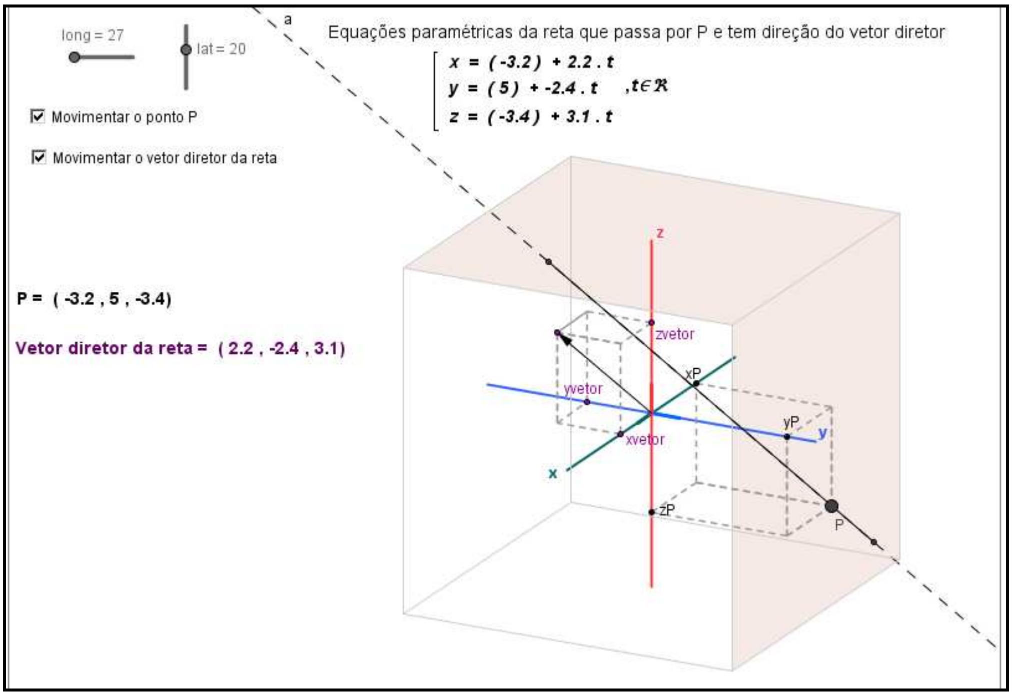


Figura 42: Visualizador de retas no espaço

Na lição deste módulo apresentamos somente dois exercícios sem maiores preocupações.

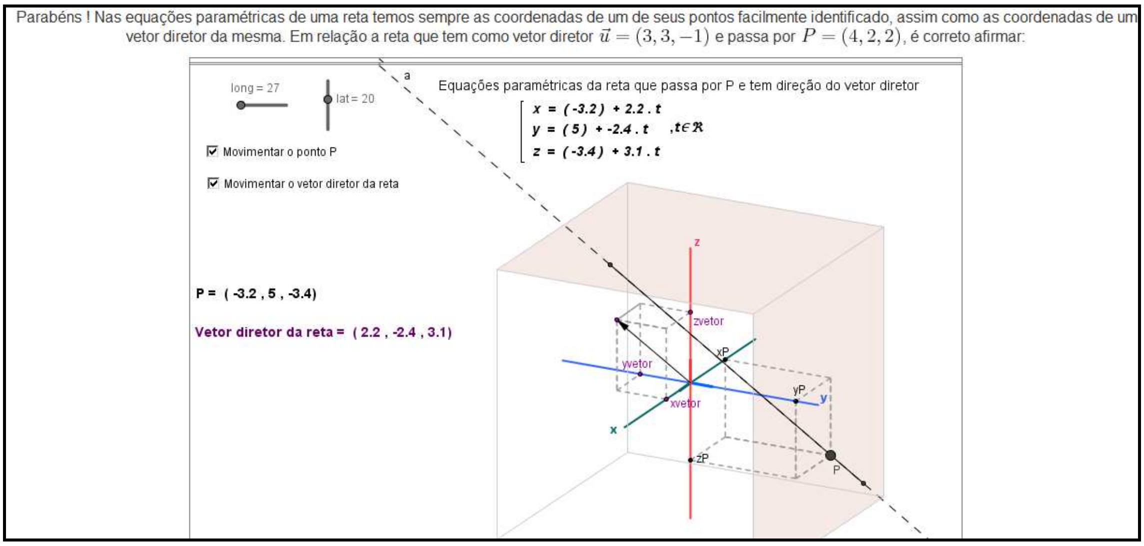


Figura 43: Exercício da lição 5

- A reta corta as faces do cubo que encontram os eixos x e y em sua "porções" negativas.
- A reta corta as faces do cubo que encontram os eixos x e z em sua "porções" positiva e negativa, respectivamente.
- A reta corta as faces do cubo que encontram os eixos x e y em sua "porções" positiva e negativa, respectivamente.
- A reta corta as faces do cubo que encontram os eixos y e z em sua "porções" positiva e negativa, respectivamente.

Salvar a resposta selecionada

Figura 44: Alternativas da questão da lição 5

O exercício na Figura 42 destaca uma ferramenta muito interessante do visualizador, que é o fato de podermos saber quais faces do cubo são interceptadas pela reta através de um "destaque" da face e dos respectivos pontos de intersecção da reta com as faces.

CAPÍTULO 4: ANÁLISE DA EXPERIÊNCIA COM O MOODLE

O AVA foi aplicado em uma turma da disciplina Geometria Analítica II do primeiro ano (segundo semestre) do curso de Licenciatura em Matemática noturno de uma faculdade privada do interior de São Paulo, na qual fui professor de 1999 até 2009. A carga horária desta disciplina é de 4 aulas semanais de 50 minutos. A aplicação foi realizada no mês de agosto em um laboratório de informática da referida faculdade e a partir do mês de setembro em sala de aula tradicional. Devido a imprevistos trabalhistas que ocorreram durante a aplicação do ambiente, não foi possível concluir o curso da maneira inicialmente prevista.

O conteúdo de Geometria Analítica é normalmente apresentado de forma tradicional. A relação entre a Geometria e a Álgebra é exemplificada via lousa e giz, dificultando o entendimento do aluno, principalmente na visualização geométrica de objetos em 3D. Da mesma forma, no ensino tradicional espera-se que o aluno consiga, a partir da figura de vetores, retas e planos no espaço, equacionar algebricamente tais elementos e entender o significado destas equações na figura geométrica desenhada. Com a abordagem de ensino via tecnologias da informação proposta neste trabalho acredita-se que a construção do conhecimento tenha ocorrido de forma mais significativa, com maior dinamismo no ensino e aprendizagem, saindo da mesmice da sala de aula.

4.1 RESULTADOS E ESTATÍSTICAS DE ACESSO

As notas obtidas pelos alunos nas lições e nas avaliações, bem como as médias obtidas durante o curso, estão na tabela a seguir. Ressaltamos que a nota das lições era obtida pela maior nota das tentativas realizadas, e como não havia limite no número de tentativas, todos os alunos tentaram até atingir a nota máxima. Por sua vez, a nota das avaliações era obtida pela maior nota dentre um número limitado de tentativas, servindo assim como parâmetro de aprendizado. É importante observar que a média dos alunos foi alta (9,12) com desvio padrão baixo (0,84) que nos induz acreditar que a maioria dos alunos atingiu o grau de entendimento desejado. Vale ainda lembrar que pela minha experiência, este nível de entendimento nunca foi alcançado em turmas anteriores.

Tabela 1 - Notas dos alunos no curso Geometria Analítica

Aluno	Lição 1	Avaliação 1	Avaliação 2	Lição 2	Lição 3	Avaliação 3	Média do curso
1	10	10	8	10	10	9,3	9,5
2	10	10	10	10	10	9,8	9,9
3	10	10	10	10	10	8,8	9,8
4	10	10	10	10	10	10	10,0
5	10	8,8	10	10	10	8,8	9,6
6	10	3,8	8,2	10	10	8,1	8,4
7	10	7,5	8,8	10	10	7	8,9
8	10	0	9,6	10	10	8,3	8,0
9	10	10	10	10	10	6,5	9,4
10	10	10	10	10	10	8,4	9,7
11	-	0	7,8	10	10	-	7,0
12	10	7,5	8,9	-	10	8,6	9,0
13	10	5	10	10	10	8,1	8,9
14	10	8,8	10	10	10	9	9,6

Apresentaremos a seguir comentários, resultados e registros de acesso dos alunos nas atividades específicas do ambiente.

Observamos, inicialmente, que a resposta correta nas questões de múltipla escolha se apresenta em destaque, hachurada em verde, e que nem sempre a soma dos percentuais resulta 100%, pois algumas questões não foram respondidas em todas as tentativas dos alunos.

4.1.1 Lição 1: Localização de um ponto no espaço

As distribuições de respostas em todas as tentativas realizadas pelos alunos na lição 1 foram as seguintes:

Questão 1: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de pontos para visualizar o espaço segundo um certo ponto de vista para, então, assinalar a única afirmação verdadeira com respeito a um ponto P do espaço com todas as coordenadas não nulas.

Resposta:	
Do ponto de vista em questão, se existisse uma parede no plano yz eu não veria o ponto P.	9.09% selecionado este.
Do ponto de vista em questão, se existisse uma parede no plano yz eu veria o ponto P.	78.79% selecionado este.
Do ponto de vista em questão, se existisse uma parede no plano xz eu não veria o ponto P.	Ninguém controlou isto.
Do ponto de vista em questão, se existisse uma parede no plano xy eu não veria o ponto P.	12.12% selecionado este.

Figura 45: Estatísticas de respostas à questão 1 da lição 1

Questão 2: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de pontos para visualizar o espaço segundo vários pontos de vista para, então, assinalar a única afirmação verdadeira com respeito a um ponto P do espaço com uma das coordenadas nula.

Resposta:	
O ponto está sobre um plano coordenado!	86.67% selecionado este.
O ponto pertence ao 7º octante.	3.33% selecionado este.
O ponto está no 2º octante.	6.67% selecionado este.
O ponto está sobre um eixo coordenado.	3.33% selecionado este.

Figura 46: Estatísticas de respostas à questão 2 da lição 1

Questão 3: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de pontos para visualizar o espaço segundo vários pontos de vista para, então, assinalar a única afirmação verdadeira com respeito a um ponto P do espaço com duas das coordenadas nulas.

Resposta:	
O ponto P está em cima do eixo y.	3.45% selecionado este.
A abcissa e a cota do ponto P são nulas.	3.45% selecionado este.
A ordenada do ponto P é negativa.	Ninguém controlou isto.
Do ponto de vista do primeiro octante, o ponto P seria visto mesmo se existisse uma cortina no plano coordenado xz.	89.66% selecionado este.

Figura 47: Estatísticas de respostas à questão 3 da lição 1

Questão 4: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de pontos para posicionar três pontos do espaço, todos com duas coordenadas nulas, e assinalar os respectivos eixos coordenados a que estes pontos pertenciam.

Resposta:	
eixo x, eixo z e eixo y	Ninguém controlou isto.
eixo y, eixo x e eixo z	Ninguém controlou isto.
eixo z, eixo x e eixo y	92.86% selecionado este.
eixo z, eixo y e eixo x	Ninguém controlou isto.

Figura 48: Estatísticas de respostas à questão 4 da lição 1

Questão 5: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de pontos para realizar associações entre um ponto e sua posição no espaço.

Resposta:	
P(2.9, 2.8, -3) No 5º octante.	77.78% respondidas corretamente.
P(4.7, 4, 0) No plano coordenado xy	
P(0, -3.8, -3) No plano coordenado yz	
P(3.7, -2.2, 3) No 4º octante	

Figura 49: Estatísticas de respostas à questão 5 da lição 1

Questão 6: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de pontos para posicionar dois pontos do plano e calcular a distância entre eles.

Resposta:	
A distácia é igual a 5.	100% selecionado este.
A distácia é igual a 3.	Ninguém controlou isto.
A distácia é igual a 2.	Ninguém controlou isto.
A distácia é igual a $\sqrt{5}$.	Ninguém controlou isto.

Figura 50: Estatísticas de respostas à questão 6 da lição 1

Observamos que esta foi a única questão com 100% de acertos. Uma explicação para tal fato, é que esta questão envolvia um ponto no plano, que já foi estudado (pelo menos deveria) no ensino médio (E.M.). Além disso, todos os exercícios anteriores trabalhavam com pontos no espaço e isto facilitou o entendimento e a visualização do ponto no plano (caso mais simples), gerando 100% de acertos.

4.1.2 Avaliação 1

Esta avaliação foi configurada para 4 tentativas permitidas durante um final de semana, com tempo máximo de 60 minutos em cada tentativa. Observa-se na tabela a seguir que as notas aumentam com as tentativas realizadas pelos alunos, com alguns conseguindo a nota máxima antes da quarta tentativa. (a média foi de 6,71 por tentativa com desvio padrão de 2,86) Uma observação interessante é notar que o aluno 14 fez quatro tentativas e em todas o "problema" a ser resolvido era a questão 7.

Tabela 2: Resultados obtidos pelos alunos na avaliação 1

Aluno	Tempo utilizado	Avaliação	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8
1	40 minutos 8 segundos	2,5	0	1,3	1,3	0	0	0	0	0
1	1 hora	6,3	1,3	1,3	1,3	0	1,3	0	0	1,3
1	43 minutos 49 segundos	6,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0	0	0
1	31 minutos 51 segundos	7,5	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0	0
2	47 minutos 8 segundos	5,6	1,3	0,6	1,3	1,3	1,3	0	0	0
2	29 minutos 13 segundos	10	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
3	45 minutos 21 segundos	8,8	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0	1,3
3	23 minutos 17 segundos	10	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
4	50 minutos 2 segundos	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	46 minutos 35 segundos	3,8	1,3	1,3	1,3	0	0	0	0	0
4	29 minutos 51 segundos	10	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
5	24 minutos 15 segundos	3,8	1,3	1,3	1,3	0	0	0	0	0
5	32 minutos 21 segundos	7,5	0	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0	1,3
5	21 minutos 17 segundos	8,8	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0
5	15 minutos 3 segundos	7,5	1,3	1,3	1,3	0	1,3	1,3	1,3	0
6	1 hora 4 minutos	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	51 minutos 55 segundos	3,8	1,3	1,3	0	1,3	0	0	0	0
7	35 minutos 44 segundos	6,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0	1,3	0	0
7	18 minutos 51 segundos	7,5	1,3	1,3	1,3	1,3	0	1,3	0	1,3
7	12 minutos 17 segundos	10	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
8	30 minutos 34 segundos	8,8	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0	1,3
8	20 minutos 24 segundos	10	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
9	47 minutos 31 segundos	7,5	1,3	1,3	0	1,3	1,3	1,3	0	1,3
9	32 minutos 24 segundos	7,5	1,3	1,3	0	1,3	1,3	1,3	0	1,3
10	50 minutos 4 segundos	3,8	0	1,3	0	0	0	1,3	0	1,3
11	24 minutos 46 segundos	2,2	0	0,9	1,3	0	0	0	0	0
12	13 minutos 52 segundos	4,7	1,3	0,9	1,3	0	0	0	0	1,3
12	29 minutos 30 segundos	7,5	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0	0
12	16 minutos 12 segundos	8,8	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0
13	59 minutos 9 segundos	5	0	1,3	0	0	1,3	1,3	1,3	0
14	39 minutos 13 segundos	8,8	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0	1,3
14	26 minutos 57 segundos	8,8	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0	1,3
14	33 minutos 24 segundos	8,8	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	0	1,3
14	19 minutos 7 segundos	10	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3

É importante observar que cada aluno dedicou, em média, uma hora e meia do final de semana para realizar a avaliação, e que este tipo de dedicação é mais difícil de ser alcançada na forma tradicional de ensino. Avaliações nos finais de semana são de extrema importância em cursos noturnos, uma vez que a maioria trabalha durante a semana e não tem muito tempo para estudar. Com o curso tradicional, fica difícil conseguir "cobrar" este estudo. Como esta foi a primeira experiência dos alunos com a avaliação a distância, permitimos um número maior de tentativas, o que já não ocorreu na avaliação 2, onde permitimos somente duas tentativas.

4.1.3 Lição 2: Vetores no espaço

As distribuições de respostas em todas as tentativas realizadas pelos alunos na lição 2 foram as seguintes:

Questão 1: Nesta questão foi solicitado ao aluno assinalar a única afirmação verdadeira com respeito a um ponto P do espaço, que é origem de um vetor, sendo dadas as coordenadas do vetor e da extremidade Q do vetor, **sem** a ajuda do visualizador.

Múltipla Escolha: Coordenadas do vetor	Estatísticas da classe
Questão: Determine a origem P do segmento que representa o vetor $\vec{u} = (8.5, -1, 8)$,sendo sua extremidade o ponto $Q = (4.5, 3, 4)$. Lembre-se que se P é a origem do vetor e Q sua extremidade, temos o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$.	
Resposta:	
☑ $P = (-4, 4, -4)$	90% selecionado este.
☐ $P = (3.5, -4, 4)$	5% selecionado este.
☐ $P = (4, -4, 4)$	Ninguém controlou isto.
☐ $P = (4.5, 8, -1)$	5% selecionado este.

Figura 51: Estatísticas de respostas à questão 1 da lição 2

Questão 2: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de vetores para posicionar os pontos P e Q de forma que as coordenadas do vetor coincidam com as coordenadas dadas (exercício 1) e então, assinalar a única afirmação verdadeira com respeito a um ponto P do espaço.

Resposta:	
☑ $P = (-4, 4, -4)$	94.74% selecionado este.
☐ $P = (-4, -4, -4)$	Ninguém controlou isto.
☐ $P = (4, 4, 4)$	5.26% selecionado este.
☐ $P = (-4, 4, 4)$	Ninguém controlou isto.

Figura 52: Estatísticas de respostas à questão 2 da lição 2

Observamos um aumento da porcentagem de acertos (de 90% para 94,74%) em relação à questão 1 onde o aluno não teve o apoio do visualizador.

Questão 3: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de vetores para movimentar um vetor no espaço e assinalar a questão correta a respeito de ponto e vetor.

☑ As coordenadas do vetor não mudam quando eu movimento o mesmo no espaço.	95% selecionado este.
☐ Ponto e vetor são a mesma coisa.	5% selecionado este.
Retorno: Esta é a resposta correta	

Figura 53: Estatísticas de respostas à questão 3 da lição 2

Questão 4: Nesta questão foi solicitado ao aluno, sem a ajuda de visualizadores, decidir se uma afirmação a respeito de vetores é verdadeira ou falsa.

Verdadeiro/Falso: Módulo vetor	**Estatísticas da classe**
Questão: Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $\lvert\vec{u}\rvert = \lvert\vec{v}\rvert$	
Resposta:	
☑ Verdadeiro	100% selecionado este.
☐ Falso	Ninguém controlou isto.

Figura 54: Estatísticas de respostas à questão 4 da lição 2

Questão 5: Nesta questão foi solicitado ao aluno, sem a ajuda de visualizadores, decidir se uma afirmação a respeito de vetores é verdadeira ou falsa.

Múltipla Escolha: Módulo de vetor1	**Estatísticas da classe**
Questão: Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se $\lvert\vec{u}\rvert = \lvert\vec{v}\rvert$, então $\vec{u} = \vec{v}$	
Resposta:	
☑ Falso	94.44% selecionado este.
☐ Verdadeiro	5.56% selecionado este.

Figura 55: Estatísticas de respostas à questão 5 da lição 2

Embora as questões 4 e 5 pareçam a mesma coisa, elas trazem consigo um conceito bastante importante de vetores, que é a diferença entre módulo, direção e sentido. Quando dois vetores possuem o mesmo tamanho (módulo), estes não necessariamente são os mesmos, pois eles podem ter sentidos opostos ou ainda podem ter direções diferentes. Este conceito gera bastante confusão entre os alunos e por isso foi abordado nestas duas questões.

Questão 6: Nesta questão foi solicitado ao aluno, sem a ajuda de visualizadores, decidir se uma afirmação a respeito de vetores é verdadeira ou falsa.

Verdadeiro/Falso: Paralelo	**Estatísticas da classe**
Questão: Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se $\vec{u}//\vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$	
Resposta:	
☑ Falso	94.44% selecionado este.
☐ Verdadeiro	5.56% selecionado este.

Figura 56: Estatísticas de respostas à questão 6 da lição 2

Questão 7: Nesta questão foi solicitado ao aluno, sem a ajuda de visualizadores, calcular o módulo de um vetor com uma coordenada nula.

Múltipla Escolha: Módulo do vetor	Estatísticas da classe
Questão: O vetor $\vec{u} = (1, 2, 0)$ tem módulo igual a:	
Resposta:	
☐ $\lvert\vec{u}\rvert = 5$	Ninguém controlou isto.
☑ $\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{5}$	100% selecionado este.
☐ $\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{3}$	Ninguém controlou isto.
☐ $\lvert\vec{u}\rvert = 2$	Ninguém controlou isto.

Figura 57: Estatísticas de respostas à questão 7 da lição 2

Questão 8: Nesta questão foi solicitado ao aluno, sem a ajuda de visualizadores, decidir qual afirmação é verdadeira a respeito do módulo de um vetor.

Resposta:	
☑ Para o vetor $\vec{u} = (3, 4, 5)$, o módulo de $\vec{u}$ será $5 \cdot \sqrt{2}$.	83.33% selecionado este.
☐ Para o vetor $\vec{u} = (4, 3, 4)$, o módulo de $\vec{u}$ será $\sqrt{40}$.	Ninguém controlou isto.
☐ Para o vetor $\vec{u} = (4, 3, 4)$, o módulo de $\vec{u}$ será 5.	Ninguém controlou isto.
☐ Para o vetor $\vec{u} = (4, 0, 0)$, o módulo de $\vec{u}$ será $\sqrt{4}$.	16.67% selecionado este.

Figura 58: Estatísticas de respostas à questão 8 da lição 2

Nesta questão, muitos alunos se confundiram com o módulo do vetor quando este possui duas coordenadas nulas. Esta alternativa foi colocada de forma proposital, pois este é um erro comum entre os alunos. Como era possível refazer a lição, esperamos que os mesmos atentem-se para este tipo de erro.

4.1.4 Avaliação 2

Esta avaliação foi configurada para 2 tentativas permitidas durante um final de semana, com tempo máximo de 60 minutos em cada tentativa. Observa-se na tabela a seguir que a grande maioria dos alunos não usou suas duas tentativas, pois atingiu uma nota que consideraram satisfatória na primeira tentativa (a média das tentativas foi 8,96 com desvio padrão 1,38). Uma observação interessante é notar que o aluno 14 conseguiu nota máxima na primeira tentativa e mesmo assim realizou sua segunda tentativa. Conversando com o aluno, o mesmo alegou que queria refazer os exercícios, pois sabia que haveria mudanças e queria "testar" seus conhecimentos e seu aprendizado. Isto mostra a motivação que este tipo de ensino pode alcançar com alguns alunos que nem sempre são considerados "bons". Este aluno em questão é um aluno de dependência e foi um dos que mais se interessou pelas aulas. Apresenta-se na tabela a seguir a tentativa obtida por cada aluno, bem como sua nota e o tempo utilizado na avaliação.

Tabela 3: Resultados obtidos pelos alunos na avaliação 2

Aluno	**Tempo utilizado**	**Avaliação**	**#1**	**#2**	**#3**	**#4**	**#5**	**#6**	**#7**	**#8**
1	18 minutos 15 segundos	8,8	1,25	0,42	1,25	1,25	0,94	1,25	1,25	1,25
2	15 minutos 2 segundos	10	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
3	10 minutos 4 segundos	10	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
4	10 minutos 38 segundos	10	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
5	9 minutos 26 segundos	10	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
6	17 minutos 33 segundos	7,8	1,25	1,25	1,25	1,25	0,31	1,25	1,25	0
7	14 minutos 43 segundos	6,0	1,25	0,42	1,25	1,25	0,63	1,25	0	0
7	17 minutos 33 segundos	8,02	0	0,83	1,25	1,25	0,94	1,25	1,25	1,25
8	12 minutos 45 segundos	10	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
9	20 minutos 6 segundos	8,7	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	0
10	25 minutos 44 segundos	5,7	1,25	0,42	1,25	1,25	0,31	1,25	0	0
10	10 minutos 17 segundos	9,5	1,25	0,83	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
11	15 minutos 18 segundos	8,2	1,25	0,42	1,25	1,25	0,31	1,25	1,25	1,25
12	11 minutos 5 segundos	8,7	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	0	1,25	1,25
12	9 minutos 4 segundos	10	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
13	16 minutos 43 segundos	10	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
14	22 minutos 57 segundos	10	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
14	11 minutos 33 segundos	10	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25

Esta avaliação ocupou em média 15 minutos dos alunos no final de semana. Vale lembrar que embora o tempo nesta avaliação tenha sido menor, os mesmos passaram um tempo estudando novamente as lições e as teorias (entenderam a proposta), que acarretou passar menos tempo efetivo na avaliação.

4.1.5 Lição 3: Localização de um ponto no espaço

As distribuições de respostas em todas as tentativas realizadas pelos alunos na lição 3 foram as seguintes:

Questão 1: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de vetores para posicionar um vetor *u* segunda suas coordenadas dadas, um escalar a = -1 e assinalar a única afirmação verdadeira com respeito ao vetor oposto de u (– a.u)

Resposta:	
☐ O vetor $-\vec{u}$ é igual ao vetor $\vec{u}$.(mesma direção, mesmo tamanho (módulo) e mesmo sentido)	Ninguém controlou isto.
☐ O vetor $-\vec{u}$ tem o mesmo sentido do vetor $\vec{u}$, mas tamanho (módulo) e direção diferentes.	9.52% selecionado este.
☐ O vetor $-\vec{u}$ tem a mesma direção do vetor $\vec{u}$, mas tamanho(módulo) e sentido diferentes.	9.52% selecionado este.
☑ O vetor $-\vec{u}$ tem o mesmo tamanho(módulo) e a mesma direção do vetor $\vec{u}$, mas sentido contrário.	80.95% selecionado este.

Figura 59: Estatísticas de respostas à questão 1 da lição 3

Vemos nesta questão que os alunos ainda apresentavam dúvidas em relação às características de um vetor. (módulo, direção e sentido)

Questão 2: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de vetores para posicionar um vetor *u* segunda suas coordenadas dadas, um escalar a = 0,5 e assinalar a única afirmação verdadeira com respeito ao vetor a.u.

Resposta:	
☐ O vetor $a.\vec{u}$ tem o mesmo sentido do vetor $\vec{u}$, mas tamanho(módulo) e direção diferentes.	Ninguém controlou isto.
☐ O vetor $a.\vec{u}$ tem o mesmo sentido e o mesmo tamanho(módulo) do vetor $\vec{u}$, mas direção diferente.	5% selecionado este.
☑ O vetor $a.\vec{u}$ tem o mesmo sentido, a mesma direção do vetor $\vec{u}$ e suas coordenadas são metade das coordenadas de $\vec{u}$.	90% selecionado este.
☐ O vetor $a.\vec{u}$ tem sentido contrário do vetor $\vec{u}$, mas tamanho (módulo) e direção iguais ao de $\vec{u}$.	5% selecionado este.

Figura 60: Estatísticas de respostas à questão 2 da lição 3

Pode-se perceber que alguns alunos ainda não entenderam que escalar positivo não muda o sentido do vetor e confundem direção com sentido.

Questão 3: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de vetores para posicionar um vetor *u* segunda suas coordenadas dadas, e assinalar qual alternativa apresenta o módulo do vetor dado.

Resposta:	
☐ $\|\vec{u}\| = 2$	Ninguém controlou isto.
☐ $\|\vec{u}\| = 3$	Ninguém controlou isto.
☐ $\|\vec{u}\| = 4$	Ninguém controlou isto.
☑ $\|\vec{u}\| = 5$	100% selecionado este.

Figura 61: Estatísticas de respostas à questão 3 da lição 3

Esta questão já havia sido trabalhada anteriormente (em outra lição) e nota-se que o cálculo do módulo do vetor foi bem entendido. (100% de acertos)

Questão 4: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de vetores para posicionar um vetor *u* segunda suas coordenadas dadas e assinalar a única afirmação verdadeira com respeito ao módulo do vetor u.

Resposta:	
☑ Para o vetor $\vec{u} = (3, 4, 5)$, o módulo de $\vec{u}$ será $5 \cdot \sqrt{2}$.	94.74% selecionado este.
☐ Para o vetor $\vec{u} = (4, 3, 4)$, o módulo de $\vec{u}$ será $\sqrt{40}$.	5.26% selecionado este.
☐ Para o vetor $\vec{u} = (4, 3, 4)$, o módulo de $\vec{u}$ será 5.	Ninguém controlou isto.
☐ Para o vetor $\vec{u} = (4, 0, 0)$, o módulo de $\vec{u}$ será $\sqrt{4}$.	Ninguém controlou isto.

Figura 62: Estatísticas de respostas à questão 4 da lição 3

Este exercício apresenta uma falta de atenção dos alunos, haja vista os resultados observados anteriormente.

Questão 5: Nesta questão foi solicitado ao aluno utilizar o visualizador de vetores para posicionar um vetor *u* segundo sua escolha e o mesmo para um escalar *a*. É sugerido que o aluno varie o escalar *a*, observe o vetor *a.u* e assinale a única afirmação verdadeira com respeito ao produto *a.u*.

Resposta:	
☐ Quando $a = 1$, o vetor $a.\vec{u}$ é maior do que $\vec{u}$.	Ninguém controlou isto.
☐ Quando $a = 1$, o vetor $a.\vec{u}$ é igual ao vetor $\vec{u}$ e quando $a > 1$ o vetor $a.\vec{u}$ é menor do que $\vec{u}$ mas com mesma direção e sentido de $\vec{u}$.	10.53% selecionado este.
☑ Quando $a = 0.2$ e $\vec{u} = (0,3,4)$, o vetor $a.\vec{u}$ será o versor de $\vec{u}$.	84.21% selecionado este.
☐ Quando $a = 1$, o vetor $a.\vec{u}$ é igual ao vetor $\vec{u}$, mas com sentido contrário ao de $\vec{u}$ e quando [tex]a	5.26% selecionado este.

Figura 63: Estatísticas de respostas à questão 5 da lição 3

Percebemos, nesta questão, que os alunos ainda estavam incertos em relação ao efeito de um escalar no produto deste com um vetor.

Questão 6: Nesta questão foi solicitado ao aluno assinalar a alternativa com as coordenadas do vetor normalizado de um vetor dado, sem o recurso do visualizador de vetores.

Múltipla Escolha: Normalização	**Estatísticas da classe**
Questão: Legal! Normalizando o vetor $\vec{u} = (-1,3,4)$, obtemos um vetor **(versor** $\vec{n}$ **)** com a mesma direção e sentido de $\vec{u}$ cujas coordenadas são:	
Resposta:	
☑ $\vec{n} = (-1/\sqrt{26}, 3/\sqrt{26}, 4/\sqrt{26})$	78.95% selecionado este.
☐ $\vec{n} = (-1/\sqrt{25}, 3/\sqrt{25}, 4/\sqrt{25})$	10.53% selecionado este.
☐ $\vec{n} = (1/\sqrt{26}, 3/\sqrt{26}, 4/\sqrt{26})$	5.26% selecionado este.
☐ $\vec{n} = (-1,3,4)$	5.26% selecionado este.

Figura 64: Estatísticas de respostas à questão 6 da lição 3

Nota-se uma maior dispersão em relação às alternativas, indicando uma incerteza sobre o entendimento de normalização de vetores. Como foi ressaltado anteriormente, estas aulas aconteceram com o acompanhamento do professor que neste caso expos um pouco mais (de forma tradicional) sobre este assunto, devido a dúvidas que surgiram durante a execução do exercício. Este é outro fator favorável em nossa opinião, pois se pode perceber a maior dificuldade dos alunos durante a aprendizagem e tentar resolver as dúvidas de forma mais eficaz.

Questão 7: Nesta questão foi solicitado ao aluno assinalar a alternativa com as coordenadas de um vetor que é combinação linear de três outros vetores, dadas suas coordenadas, sem o recurso do visualizador de vetores.

Múltipla Escolha: Soma	**Estatísticas da classe**
Questão: Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (2,-3,1)$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1,-1,-1)$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2,1,3)$, assinale a alternativa com as coordenadas corretas de $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$:	
Resposta:	
☑ $(1,-4,6)$	78.95% selecionado este.
☐ $(1,4,6)$	Ninguém controlou isto.
☐ $(-1,-4,6)$	5.26% selecionado este.
☐ $(1,-4,-6)$	15.79% selecionado este.

Figura 65: Estatísticas de respostas à questão 7 da lição 3

Apesar da dispersão em relação às respostas assinaladas, acreditamos que neste caso o erro tenha sido ocasionado por falta de atenção e erro de regra de sinais e não por falta de compreensão do assunto. Isto porque durante a aula não foram levantadas dúvidas sobre esta questão.

Questão 8: Nesta questão foi solicitado ao aluno associar corretamente o vetor a sua coordenadas, sem o recurso do visualizador de vetores.

Associação: Soma e diferença	Estatísticas da classe
Questão: Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (2,-3,1)$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (1,-1,-1)$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (-2,1,3)$, associe corretamente os vetores com suas respectivas coordenadas:	
Resposta:	
[tex]2\vec u-\vec v+\vec w[/tex] (1,-4,6)	100% respondidas corretamente.
[tex]2\vec v-\vec u+2\vec w[/tex] (-4,3,3)	
[tex]\frac{1}{2}\vec u- 2 \vec v - \vec w[/tex] (1,-1/2,-1/2)	

Figura 66: Estatísticas de respostas à questão 8 da lição 3

Como foi observado na questão anterior, acreditamos que tenha sido bem entendido como fazer as operações com vetores.

Questão 9: Nesta questão foi solicitado ao aluno assinalar a alternativa com as coordenadas do ponto D, dada a soma de dois vetores definidos por seus pontos de origem e extremidade, sem o auxílio do visualizador de vetores.

Múltipla Escolha: Soma de vetor dados os pontos	Estatísticas da classe
Questão: Parabéns !! Vamos a mais uma questão ! Dados os pontos $A(1,-2,3)$, $B(2,1,-4)$ e $C(-1,-3,1)$, determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.	
Resposta:	
☑ $D(-2,-6,8)$	61.11% selecionado este.
☐ $D(-2,6,8)$	11.11% selecionado este.
☐ $D(2,-6,8)$	16.67% selecionado este.
☐ $D(2,6,8)$	11.11% selecionado este.

Figura 67: Estatísticas de respostas à questão 9 da lição 3

Nota-se uma dispersão grande em relação as alternativas selecionadas. Neste caso houve dúvidas em relação ao vetor nulo e como representá-lo segundo suas coordenadas. Além disso, esta questão envolve uma quantidade maior de cálculos e a possibilidade de erros aumenta neste caso.

Questão 10: Nesta questão foi solicitado ao aluno assinalar a alternativa com as coordenadas de um vetor unitário, sem o recurso do visualizador de vetores.

Verdadeiro/Falso: Vetor unitário	Estatísticas da classe
Questão: Legal, estamos perto do fim de mais uma lição!! Clique na opção que contém um vetor unitário.	
Resposta:	
☐ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1,1,1)$	Ninguém controlou isto.
☑ $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$	100% selecionado este.

Figura 68: Estatísticas de respostas à questão 10 da lição 3

Este exercício não apresentou maiores dificuldades aos estudantes.

4.1.6 Avaliação 3

Esta avaliação foi configurada para 5 tentativas permitidas durante dois finais de semana, com tempo máximo de 60 minutos em cada tentativa. Os alunos tiveram dúvidas e houve problemas com a internet de vários alunos e por isso, após um pedido dos mesmos, permitiu-se um número maior de tentativas em mais um final de semana. Nota-se aqui um interesse por parte dos alunos em participar e alcançar melhores resultados o que comprova uma maior motivação dos alunos em relação esta forma de ensino. Observa-se na tabela a seguir que a grande maioria dos alunos usou pelo menos três tentativas para atingir uma nota que consideraram satisfatórias. (a média das tentativas foi 7,63 com desvio padrão 1,82). O tempo médio dedicado por cada aluno para realização desta avaliação foi de 1h15min que comprova mais uma vez a dedicação aos estudos aos finais de semana destes alunos. Apresenta-se na tabela a seguir a tentativa obtida por cada aluno, bem como sua nota e o tempo utilizado na avaliação.

Tabela 4: Resultados obtidos pelos alunos na avaliação 3

Nome	Tempo utilizado	Avaliação	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8
1	12 minutos 13 segundos	7,8	1,1	1,1	0,8	1,3	0,5	0,9	0,9	1,3
1	48 minutos	7,5	1	0	1	0,9	1,3	1,1	1	1,3
1	29 minutos 26 segundos	8,1	1,1	0	1,3	1,1	1,3	1,1	1	1,3
1	20 minutos 39 segundos	8,6	1	1,1	1	1,3	1,3	1	0,8	1,3
2	34 minutos 27 segundos	6,5	0,4	0	0,9	0,9	1,1	1,1	0,9	1,3
3	30 minutos 32 segundos	8,4	1	1,1	0,9	1	1,3	1,3	0,6	1,3
4	56 minutos 36 segundos	5,5	1	0	1,3	0,9	0,6	1,1	0,6	0
4	18 minutos 14 segundos	6,8	1,3	0,8	1,1	1,3	0,6	0,9	0,9	0
4	33 minutos 57 segundos	9,8	1,3	1,1	1,1	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
4	21 minutos 35 segundos	8,4	1	1,3	1,3	1,3	1,1	1,3	1,3	0
5	21 minutos 34 segundos	6,4	0,8	0,5	0,9	1,3	1,3	1	0,8	0
5	16 minutos 43 segundos	8,8	1,3	1,1	0,9	1,3	1,3	1	0,8	1,3
5	5 minutos 23 segundos	8,1	1	0,6	0,9	1,3	0,8	1,1	1,3	1,3
6	42 minutos 21 segundos	8,6	1,1	1,1	1	1	1,3	1,3	0,6	1,3
6	16 minutos 41 segundos	8,3	0,5	0,8	0,9	1,3	1,3	1,3	1,1	1,3
6	12 minutos 11 segundos	9,3	0,6	1,1	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
6	20 horas 22 minutos	2,5	0	0	0	0	0	0	1,3	1,3
6	26 minutos 13 segundos	9,1	0,6	1,1	1,1	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
7	1 hora 2 minutos	8,8	1	0,8	1,1	1,3	1,3	1,3	0,9	1,3
8	27 minutos 7 segundos	7	0,5	0,9	0	1,3	1,3	1,3	0,6	1,3
9	21 minutos 41 segundos	3,9	0,5	0	0	0	0,9	1,3	0	1,3
9	34 minutos 42 segundos	5,3	0,3	0	0	0	1,3	1,3	1,3	1,3
9	15 minutos 56 segundos	4,7	0	0	0	1,3	0,9	0	1,3	1,3
9	17 minutos 35 segundos	4,5	0,4	0,4	0	0	1,3	1,3	0	1,3
9	11 minutos 52 segundos	8,3	0,6	0,8	0,9	1,3	1,3	1,1	1,1	1,3
10	25 minutos 30 segundos	8,1	1,1	1,1	0,9	1,3	1,3	0,9	0,4	1,3
11	36 minutos 10 segundos	8	1	0	1	1,1	1,3	1,3	1,1	1,3
11	13 minutos 30 segundos	8,9	0,8	0,6	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
11	5 minutos 26	9	0,6	0,9	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3

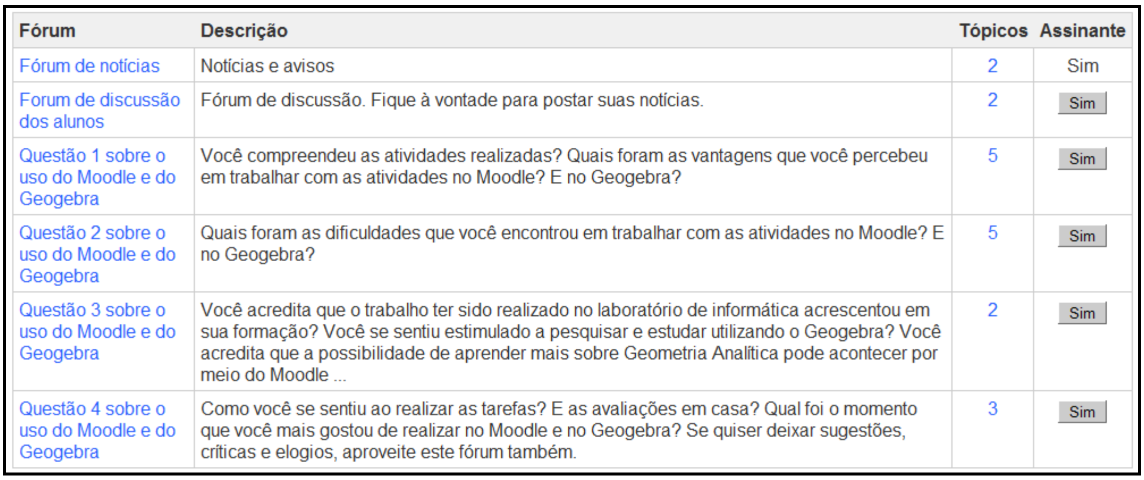
	segundos									
12	25 minutos 40 segundos	4,9	0,6	0	0,9	1,3	0,9	1	0,3	0
12	29 minutos 6 segundos	7	1	0,8	1,3	1,3	1,1	1	0,6	0
12	5 minutos 50 segundos	8,1	0,9	1	1,3	1,3	1,3	1	0,3	1,3
13	56 minutos 13 segundos	9,4	1,3	1	1,3	1,3	1,3	1,3	0,9	1,3
13	26 minutos 25 segundos	9,3	0,6	1,3	1,1	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
13	16 minutos 27 segundos	9,4	1,3	0,8	1,1	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
13	40 minutos 41 segundos	9,3	1,1	0,8	1,3	1,3	1,1	1,3	1,3	1,3
13	14 minutos 22 segundos	10	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3

Esta avaliação foi a última que os alunos realizaram pois devido a problemas trabalhistas, como foi dito anteriormente, não pudemos terminar o curso. Havia a proposta de mais uma lição que não chegou a ser realizada pelos alunos.

4.2 FÓRUNS DE DISCUSSÃO

Após a aplicação do ambiente e a saída do professor da instituição, postamos quatro questões em quatro fóruns e pedimos que os alunos respondessem para que pudéssemos tentar entender como o ambiente ajudou/atrapalhou o andamento e entendimento da disciplina.

Na figura abaixo, temos os fóruns que foram abertos para os alunos.



Fórum	Descrição	Tópicos	Assinante
Fórum de notícias	Notícias e avisos	2	Sim
Forum de discussão dos alunos	Fórum de discussão. Fique à vontade para postar suas notícias.	2	Sim
Questão 1 sobre o uso do Moodle e do Geogebra	Você compreendeu as atividades realizadas? Quais foram as vantagens que você percebeu em trabalhar com as atividades no Moodle? E no Geogebra?	5	Sim
Questão 2 sobre o uso do Moodle e do Geogebra	Quais foram as dificuldades que você encontrou em trabalhar com as atividades no Moodle? E no Geogebra?	5	Sim
Questão 3 sobre o uso do Moodle e do Geogebra	Você acredita que o trabalho ter sido realizado no laboratório de informática acrescentou em sua formação? Você se sentiu estimulado a pesquisar e estudar utilizando o Geogebra? Você acredita que a possibilidade de aprender mais sobre Geometria Analítica pode acontecer por meio do Moodle ...	2	Sim
Questão 4 sobre o uso do Moodle e do Geogebra	Como você se sentiu ao realizar as tarefas? E as avaliações em casa? Qual foi o momento que você mais gostou de realizar no Moodle e no Geogebra? Se quiser deixar sugestões, críticas e elogios, aproveite este fórum também.	3	Sim

Figura 69: Fóruns do AVA

As figuras a seguir são algumas respostas dadas pelos alunos a questão 1 sobre o Moodle e o GeoGebra.

Eu achei que além de ter ficado bem mais fácil a compreensão da matéria o Moodle e o Geogebra ajudaram tanto na disponibilidade da materia e exercícios para consulta em casa.
Seria meio que impossível desenhas todos aqueles desenhos tridimensionais na lousa (apesar qe estamos falando do Rodriguinho.. derepente né?! '-') mas pra nós que nunca vimos ou tbm mesmo que tenhamos visto poco, com o Geogebra fico BEM mais facil e visualizar e enteder os conceitos teóricos =D

ps: Rodrigo, não se ache pela observação que eu fiz no meio =b

Figura 70: Resposta 1 do fórum

NO POSSIVEL SIM,É MAIS COMPRIENSIVEL QUANDO PODE SE RELACIONAR TEORIA E PRATICA. PORTANTO APROVEI , GOSTEI E ACHO QUE DEVE-SE APLICAR SEMPRE, PORQUE AJUDA A EXPLORAR O CONHECIMENTO DO ALUNO.

Figura 71: Resposta 2 do fórum

Compreendi sim, as atividades realizadas. Eu acho que a maior vantagem em se trabalhar com as atividades do Moodle é que você realiza as lições ao seu ritmo. Qdo surge alguma dúvida, você tem a possibilidade de voltar e refazê-la. Já, o Geogebra, é fantástico pq vc consegue visualizar gráficos que em sala de aula é impossível demonstrar.

Figura 72: Resposta 3 do fórum

Nota-se nas respostas que os alunos vêem como grande motivador o fato do aprendizado ocorrer em ritmos diferentes e a vantagem da visualização dos objetos geométricos via GeoGebra.

Algumas respostas a questão 2 seguem na próximas figura.

Eu acho que as maiores dificuldade foram as questões do programa mesmo. Como eu disse na sala, na primeira vez muitos tiveram dificuldade devido os problemas na internet ou até configurações do computador que não abriam o Geogebra.
Quanto ao Moodle, aparentemente, eu não vi nenhuma dificuldade não; achei bem pratico ^^

A MAIOR DIFICULDADE É QUANDO HA A AUSENCIA DE PROFESSOR, VÃO SURGINDO DUVIDAS QUE PODEM VIRAR "UMA BOLA DE NEVE",PORTANTO SERIA NESSESSARIO COMO OCORRE, NO CASO, UM COTATO PERMANENTE ENTRE PROFESSOR E ALUNO.

A maior dificuldade é a ausência do professor quando as dúvidas vão surgindo. Ainda que em nosso caso, o Rodrigo estava em sala de aula dando suporte qdo as dúvidas iam surgindo. Mas se fosse inteiramente a distância, acredito que seria bem complicado nesse ponto.

Figura 73: Respostas a questão 2 do fórum

Podemos observar pela resposta dos alunos, certa dependência do professor. Um fato interessante foi que, diferentemente de muitos professores, os alunos não sentiram dificuldade em relação ao uso das tecnologias.

Na próxima figura, temos algumas respostas a questão 3 do fórum.

O acréscimo que foi dado pelas aulas terem sido no laboratório de informático foi que para o nosso curso que é Matemática com enfase em informática, mostrou-nos varias formas de poder passar a matéria e utilizar a informatca a nosso favor para facilitar ao invés de dificultar como a maioria dos professores e pessoas tem em mente.
Confesso qe me senti mais istimulado em utilizar o Maple rsrs mas eu gostei do Geogebra sim a ponto de instalalo no meu computador e deixa-lo como ferramente de uso mesmo ^^
Eu acredito que o aprendizado de Geo Anal é um junção dos dois.. como foi dito na sala o programa ajudou muito na visualização dos grafico s e no entendimentos dos conceitos teóricos mas nas horas das dúvidas comunitárias o lousa e o Rodriguinho estavam la para dar aquela "help".. então acho que juntar o útil (aulas tradicionais) ao agradável (Moodle e Geogebra) é que fizeram maior o aprendizado da matéria

CLARO QUE SIM, CONHECIMENTO NUNCA É DEMAIS,E O GEOGEBRA NOS DA VISÃO E CLARESA FACILITANTO A COMPRIENSÃO.NA MINHA OINIÃO CAIRIA MELHOR UMA FUSÃO ENTRE AS DUAS, ACREDITO QUE AULA EM LOUSA TAMBEM TRAZ UM ENTENDIMENTO, E COM O AUXILIO DA TECNOLOGIA ISSO TRAZ UM MAIOR APROVEITAMENTO.ACHO TAMBEM QUE, UM SERVE DE ESTIMULO AO OUTRO, PARA AS COISAS NAO FICAREM METODICAS E CANSATIVAS.

Figura 74: Respostas a questão 3 do fórum

Percebemos nas respostas destes dois alunos a necessidade do professor próximo ao aluno. Vemos também uma motivação em relação ao uso das tecnologias e um consenso sobre a importância do uso de tecnologias no ensino.

A figura abaixo apresenta três respostas dos alunos a questão 4 do fórum.

Eu achei que as tarefas foram ótimas mas concordo com o fato de ter sido exposto que mais exercicios ajudariam...
Foi como a andréia disse, faziamos os exercicios, viamos a nota; iamos la e refaziamos os mesmo exercicios qe na maioria das vezes só mudava os valores mas o conceito de comof azer era o mesmo...
então talvez fosse preciso um pouco mais pra ver se a matéria ficou bem fixada mesmo. Do mesmo jeito a prova ^^

Quanto aos elogios eu quero elogiar a inicitiva de "teste" conosco porque querendo ou não, aprendemos bastante coisa e não só sobre Geo Anal (pelo menos eu acho \o)
E quanto as criticas, queria deixar claro que o programa pode indiretamente deixar uma pessoas depressiva pela não resposta as FORUNS ! shueusheus brincadeira
Sei que hoje tudu esta sujeito a falhas e as que tiveram (se tiveram) foram irrelevantes =D

ME SENTI MAIS CURIOSO E EMPOLGADO EM APRENDER,CONFESSO QUE SENTI DIFICULDADE PELO FATO DO QUE DISSE ANTES, AS DUVIDAS SURGEM DE REPENTE,"E AI",MAS APROVO COM CERTEZA.A REPRESENTAÇÃO GRAFICA EM 3D É A MAIS INTERESSANTE DE VISUALIZAR, POIS FACILITA BASTANTE.PARABENS E GOSTEI BASTANTE DE PARTICIPAR.

foi muito bom fazer as avaliaçoes em casa,o bom é q cada materia tinha uma prova e nao se juntava muita materia pra estudar..
sugestões:colocar mais atividades nas licões

Figura 75: Respostas a questão 4 do fórum

Um fato que não pode deixar de ser exposto foi a pequena participação dos alunos nos fóruns. Um fator que talvez tenha incentivado este problema foi o professor não estar mais presente na instituição com os alunos. Segundo uma aluna, a não resposta ao fórum por parte dos alunos foi um fator negativo ao aprendizado, pois, segundo ela, isto pode deixar o aluno "deprê", como se pode ver na "fala" apresentada na figura a seguir.

Eu acho que essa falta de retorno daria outro ótimo fórum para discussão mas se eles não respondem nem esse que dirá outro '-'
isso literalmente deixa qualquer uma depressivo e eu te entendo perfeitamente rsrs

Eu que agradeço as aulas e tudu o que ensinou pra mim \o
e se pá, eu te vejo la na Ufscar ou em algum congresso, reunião, encontro ou escola (AMÈM)

Figura 76: Não participação por parte dos alunos

Vale lembrar ainda que dos 14 alunos matriculados, tivemos a participação de apenas quatro alunos nos fóruns.

CAPÍTULO 5: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo desenvolver visualizadores do espaço criados no GeoGebra e disponibilizá-los em um AVA para que facilitassem o entendimento da conexão entre a Álgebra e a Geometria na disciplina Geometria Analítica.

Para que nosso estudo não fosse somente teórico e nunca aplicado em sala de aula, levamos uma turma de primeiro ano de uma faculdade privada a um laboratório de informática e utilizamos o AVA desenvolvido juntamente com os visualizadores.

Acreditamos ter alcançado vários objetivos pensados no início deste trabalho, sendo alguns deles:

- Apresentar uma nova forma de ensino aos alunos de licenciatura, pois estes serão os futuros professores de Matemática;
- Apresentar aos futuros professores de Matemática, o software GeoGebra e algumas idéias de como utilizá-lo a favor do processo ensino aprendizagem;
- Fazer com que os alunos “enxergassem” a Geometria por trás da álgebra e vice versa, utilizando para tal os visualizadores do espaço;
- Motivar os alunos a utilizar as tecnologias de informação bem como softwares de Matemática que auxiliem o ensino;
- Sair da sala de aula tradicional e mudar o ensino centralizado no professor visando a construção do conhecimento pelo aluno;

Como já relatado, não foi possível finalizar a aplicação do AVA; logo não há como inferir como teria sido a conclusão do trabalho para esta população. No entanto, podemos afirmar com certeza que houve uma melhora na participação em sala e uma maior dedicação aos estudos que ocasionou numa melhora de conceitos (notas) e de motivação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M. E. **Proinfo**: Informática e formação de professores. Brasília: Ministério da Educação, SEED, 2000. v. 1. (Série de Estudos; Educação à Distância)

ALMEIDA, M. E. **Proinfo**: Informática e formação de professores. Brasília: Ministério da Educação, SEED, 2000. v. 2. (Série de Estudos; Educação à Distância)

BITTAR, M. O uso de softwares educacionais no contexto da aprendizagem virtual. In: CAPISANI, Dulcimira. **Educação e arte no mundo digital.** Universidade Federal do Mato Grosso Sul, Campo Grande, 2001. p.77.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

DEWEY, J., **Experiência e Educação**. 3ed., São Paulo, Cia. Ed. Nacional, 1979.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L.M. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO RIBIE'98, 4., Brasília, 1998. **Anais...** Brasília, 1998.

COTTA JÚNIOR, A. **Novas Tecnologias Educacionais no ensino de Matemática**: estudo de caso – Logo e do Cabri-Géométre. 2002. 256 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Gradução em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

KENSKI, V.M. **Educação e tecnologias**: O novo ritmo da informação. 3ed. Campinas: Papirus, 2007.

MORAN, J.M. et al. **Novas Tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas, Papirus, 2000.

PAPERT, Seymour. ***Logo*****:** computadores e educação. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

VALENTE, J. A. (Org.) Formação de profissionais na Área de Informática em Educação. In: ______. **Computadores e Conhecimento**: repensando a Educação. Campinas: Gráfica Central da Unicamp, 1993.

http://www.geogebra.org/cms/pt_BR

ANEXO A

Criação do comando proj3D2D

Passo 0 – Configurações iniciais

Nesta seção vamos construir um visualizador de pontos no espaço, em coordenadas esféricas, usando o GeoGebra.
Verifique se o aplicativo GeoGebra está instalado em seu computador, com acesso via área de trabalho no ícone de atalho.

Para iniciar a atividade, abra um arquivo novo no GeoGebra e realize os seguintes procedimentos:

- Na opção ***Exibir*** (barra de menu principal), habilite somente a exibição dos seguintes itens: ***Janela de álgebra***, ***Divisão horizontal***, ***Campo de entrada*** e ***Lista de comandos*** .

- Na opção ***Opções*** (barra de menu principal) escolha:

    - Pontos sobre a malha – automático
    - Unidades de ângulo – grau
    - Casas decimais – 2
    - Continuidade – habilitar
    - Estilo de ponto - "bola cheia"
    - Estilo de ângulo reto – desabilitar
    - Coordenadas - A=(x,y)
    - Rotular – automático
    - Tamanho da fonte – 12
    - Idioma - Protuguês (Brasil)
    - Janela de visualização - Eixo - EixoX - min=-8 , max=8 , EixoX:EixoY=1:1

Passo 1 – Introdução dos seletores

Os seletores são objetos do GeoGebra que permitem selecionar valores para ângulos ou números através de uma barra de rolagem.

A introdução de um seletor é feita habilitando a opção deste objeto na barra de ferramentas e clicando sobre qualquer local na área de trabalho geométrica.

A configuração de um seletor é feita clicando sobre o objeto (na janela de álgebra ou na janela geométrica) com o botão direito do mouse.

Para o visualizador de coordenadas esféricas vamos precisar dos seguintes seletores:

Número R : mín: 0.1 , max: 6 , Incremento: 0.01 , vertical , Largura: 80

  - Configuração: cor preta [0,0,0], espessura 7, exibir objeto, exibir rótulo com nome e valor.
  - Após configurar movimente o seletor para o valor 6.

- Número θ : mín: 0 , max: 359 , Incremento: 1 , vertical , Largura: 80

  - Configuração: cor laranja [255,102,0] , espessura 7, exibir objeto, exibir rótulo com nome e valor.
  - Após configurar movimente o seletor para o valor 50.

- Número φ : mín: -90 , max: 90 , Incremento: 1 , vertical , Largura: 80

  - Configuração: cor bronze [102,102,0] , espessura 7, exibir objeto, exibir rótulo com nome e valor.
  - Após configurar movimente o seletor para o valor 45.

- Número lat : mín: -90 , max: 90 , Incremento: 1 , vertical , Largura: 50

  - Configuração: cor cinza [102,102,102] , espessura 7, exibir objeto, exibir rótulo com nome e valor.
  - Após configurar movimente o seletor para o valor 20.

- Número long : mín: 0 , max: 359 , Incremento: 1 , horizontal , Largura: 50

  - Configuração: valor inicial 20, cor cinza [102,102,102] , espessura 7, exibir objeto, exibir rótulo com nome e valor.
  - Após configurar movimente o seletor para o valor 20.

Para finalizar este passo, selecione a opção ***Mover*** (primeiro botão) e posicione os seletores **R**, **θ** e **φ** na parte esquerda da janela de trabalho geométrica, e os seletores **lat** e **long** no canto superior direito da janela de trabalho geométrica.

<u>Passo 2 – Introdução dos ângulos, coordenadas e ponto em perspectiva</u>

Neste passo vamos introduzir as coordenadas e os ângulos envolvidos na visualização via digitação no campo entrada do GeoGebra, localizado na parte inferior do aplicativo.

Digitar, no campo entrada, os seguintes objetos dependentes referentes aos valores em graus dos ângulos dos seletores:

- θGraus = θ°

- φGraus = φ°

- latGraus = lat°

- longGraus = long°

OBS: A unidade de medida ° (graus) é introduzida no GeoGebra via campo de escolha ao lado do campo entrada.

Digitar, no campo entrada, os seguintes objetos dependentes referentes às coordenadas cartesianas do ponto P:

- xP = R cos(φGraus) cos(θGraus)
- yP = R cos(φGraus) sin(θGraus)
- zP = R sin(φGraus)

Digitar, no campo entrada, o seguinte ponto dependente:

- P = (-xP sin(longGraus) + yP cos(longGraus), -xP cos(longGraus) sin(latGraus) - yP sin(longGraus) sin(latGraus) + zP cos(latGraus))

<u>Passo 3 – Introdução da ferramenta de projeção de pontos em perspectiva</u>

Neste passo vamos criar a ferramenta **proj3D2D** para projetar pontos espaciais em perspectiva na janela gráfica do GeoGebra sob a ótica de uma latitude e de uma longitude.

Para criar uma ferramenta devemos habilitar a caixa de diálogo *Criar uma nova Ferramenta* na opção ***Ferramenta*** da barra de menu principal.

Na caixa de diálogo *Criar uma nova Ferramenta*, pasta *Saída de Objetos*, escolha somente o ponto P como objeto de saída da ferramenta.

Na caixa de diálogo *Criar uma nova Ferramenta*, pasta *Entrada de Objetos*, escolha os números xP, yP, zP, lat e $long$ (nesta ordem) como objetos de entrada da ferramenta.

Na caixa de diálogo *Criar uma nova Ferramenta*, pasta *Nome & Ícone*, digite:

- "Projeção de ponto em perspectiva" no campo *Nome da ferramenta*
- "proj3D2D" no campo *Nome do comando*

finalizando a construção da ferramenta no botão *Concluído.*

<u>Passo 4 – Introdução (em perspectiva) dos eixos coordenados</u>

Neste passo vamos desenhar em perspectiva, via digitação no campo de entrada e formatação de objetos, o sistema cartesiano de coordenadas espaciais (O,x,y,z).

Digitar, no campo entrada, os seguintes pontos dependentes:

- O = proj3D2D[0,0,0,lat,long]

- E1 = proj3D2D[1,0,0,lat,long]
- E2 = proj3D2D[0,1,0,lat,long]
- E3 = proj3D2D[0,0,1,lat,long]

Desabilitar a visualização destes pontos via janela de configuração de objetos. Para visualizar a janela de configuração de um objeto basta clicar com o botão esquerdo do mouse sobre o objeto.

Digitar, no campo entrada, os seguintes vetores e segmentos pendentes:

- u = vetor[O, 6 E1]
    - Configuração: cor azul [0,0,255], espessura 7, estilo contínuo, não exibir rótulo
- uu = segmento[O, -6 E1]
    - Configuração: cor azul [0,0,255], espessura 2, estilo traço-ponto, não exibir rótulo
- v = vetor[O, 6 E2]
    - Configuração: cor vermelha [255,0,0], espessura 7, estilo contínuo, não exibir rótulo
- vv = segmento[O, -6 E2]
    - Configuração: cor vermelha [255,0,0], espessura 2, estilo traço-ponto, não exibir rótulo
- w = vetor[O, 6 E3]
    - Configuração: cor verde [0,153,0], espessura 7, estilo contínuo, não exibir rótulo
- ww = segmento[O, -6 E3]
    - Configuração: cor verde [0,153,0], espessura 2, estilo traço-ponto, não exibir rótulo

<u>Passo 5 – Introdução (em perspectiva) do ponto P e de suas projeções</u>

Neste passo vamos desenhar em perspectiva, via digitação no campo de entrada e formatação de objetos, o ponto P bem como suas projeções.

Digitar, no campo entrada, os seguintes pontos dependentes:

- P = proj3D2D[xP,yP,zP,lat,long]

- Configuração: cor preta [0,0,0], tamanho 4, exibir objeto e nome

- Px = proj3D2D[xP,0,0,lat,long]
  - Configuração: cor azul [0,0,255], tamanho 3, exibir objeto, não exibir rótulo
- Py = proj3D2D[0,yP,0,lat,long]
  - Configuração: cor vermelha [255,0,0], tamanho 3, exibir objeto, não exibir rótulo
- Pz = proj3D2D[0,0,zP,lat,long]
  - Configuração: cor verde [0,153,0], tamanho 3, exibir objeto, não exibir rótulo
- Pxy = proj3D2D[xP,yP,0,lat,long]
  - Configuração: não exibir objeto
- Pxz = proj3D2D[xP,0,zP,lat,long]
  - Configuração: não exibir objeto
- Pyz = proj3D2D[0,yP,zP,lat,long]
  - Configuração: não exibir objeto
- Peq = proj3D2D[R cos(θGraus), R sin(θGraus),0,lat,long]
  - Configuração: não exibir objeto

<u>Passo 6 – Introdução (em perspectiva) das faces do paralelogramo</u>

Neste passo vamos desenhar em perspectiva, via digitação no campo de entrada e formatação de objetos, as faces do paralelogramo de diagonal OP.

Digitar, no campo entrada, os seguintes polígonos dependentes:

- faceX = polígono[P, Pxz, Px, Pxy]
  - Configuração: cor azul [0,0,255], espessura 2, estilo contínuo, preenchimento 10, não exibir rótulo

OBS. Nas arestas introduzidas, desabilitar a exibição dos rótulos

- faceY = polígono[P, Pxy, Py, Pyz]
  - Configuração: cor vermelha [255,0,0], espessura 2, estilo contínuo, preenchimento 10, não exibir rótulo

OBS. Nas arestas introduzidas, desabilitar a exibição dos rótulos

- faceZ = polígono[P, Pxz, Pz, Pyz]
    - Configuração: cor verde [0,153,0], espessura 2, estilo contínuo, preenchimento 10, não exibir rótulo

OBS. Nas arestas introduzidas, desabilitar a exibição dos rótulos

Passo 7 – Introdução (em perspectiva) do raio R e de sua projeção

Neste passo vamos desenhar em perspectiva, via digitação no campo de entrada e formatação de objetos, o raio R e sua projeção no plano xy.

Digitar, no campo entrada, os seguintes segmentos dependentes:

- raio = segmento[O, P]
    - Configuração: cor preta [0,0,0], espessura 7, estilo contínuo, não exibir rótulo
- projRaio = segmento[O, Peq]
    - cor preta [0,0,0], espessura 7, estilo tracejado, não exibir rótulo

Passo 8 – Introdução (em perspectiva) do equador e do ângulo θ

Neste passo vamos desenhar em perspectiva, via digitação no campo de entrada e formatação de objetos, o equador e o traço do ângulo θ.

Digitar, no campo entrada, os seguintes objetos dependentes:

- ell_θ = cônica[R E1, sqrt(2) / 2 R (E1 + E2), R E2, -R E1, -R E2]
    - Configuração: cor laranja [255,102,0], espessura 2, estilo pontilhado, preenchimento 0, não exibir rótulo
- traçoθ_1 = arco[ell_θ, R E1, Peq]
    - Configuração: não exibir objeto
- traçoθ_2 = arco[ell_θ, Peq, R E1]
    - Configuração: não exibir objeto
- traçoθ = se[lat > 0, traçoθ_1, traçoθ_2]
    - Configuração: cor laranja [255,102,0], espessura 9, estilo contínuo, preenchimento 0, não exibir rótulo

Passo 9 – Introdução (em perspectiva) do meridiano e do ângulo φ

Neste passo vamos desenhar em perspectiva, via digitação no campo de entrada e formatação de objetos, o equador e o traço do ângulo θ.

Digitar, no campo entrada, os seguintes objetos dependentes:

- ell_φ = cônica[R E3, sqrt(2) / 2 (R E3 + Peq), Peq, -R E3, -Peq]
    - Configuração: cor bronze [102,102,0], espessura 2, estilo pontilhado, preenchimento 0, não exibir rótulo
- traçoφ _1 = arco[ell_φ, P, Peq]
    - Configuração:não exibir objeto
- traçoφ _2 = arco[ell_φ, Peq, P]
    - Configuração: não exibir objeto
- traçoφ = se[traçoφ_1 < arco[ell_φ, R E3, -R E3], traçoφ_1, traçoφ_2]
    - Configuração: cor bronze [102,102,0], espessura 9, estilo contínuo, preenchimento 0, não exibir rótulo

Passo 10 – Introdução dos textos

Neste passo vamos introduzir textos.

A introdução de um texto é feita habilitando a opção deste objeto na barra de ferramentas e clicando sobre qualquer local na área de trabalho geométrica.

Vamos inserir os seguintes textos:

- x_P
    - Configuração: cor azul [0,0,255], tamanho 12, negrito, fórmula latex, posição Px
- y_P
    - Configuração: cor vermelha [255,0,0], tamanho 12, negrito, fórmula latex, posição Py
- z_P
    - Configuração: cor verde [0,153,0], tamanho 12, negrito, fórmula latex, posição Pz
- "x_P = R\cdot cos(φ)\cdot cos(θ)=" + xP

  - Configuração: cor azul [0,0,255], tamanho 12, negrito, fórmula latex
- "y_P = R\cdot cos(φ)\cdot sen(θ)=" + yP
  - Configuração: cor vermelha [255,0,0], tamanho 12, negrito, fórmula latex
- "z_P = R\cdot sen(φ)=" + zP
  - Configuração: cor verde [0,153,0], tamanho 12, negrito, fórmula latex

Posicione os textos 4, 5 e 6 de forma a não obstruir a visualização.