UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**ANTÔNIO DO NASCIMENTO GOMES**

# Uma proposta de ensino envolvendo *Geometria Fractal* para o estudo de *Semelhança de Figuras Planas*

**SÃO CARLOS**
**2010**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**ANTÔNIO DO NASCIMENTO GOMES**

# Uma proposta de ensino envolvendo *Geometria Fractal* para o estudo de *Semelhança de Figuras Planas*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. José Antonio Salvador

**SÃO CARLOS**
**2010**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar**

G633pe

Gomes, Antônio do Nascimento.
Uma proposta de ensino envolvendo geometria fractal para o estudo de semelhança de figuras planas / Antônio do Nascimento Gomes. -- São Carlos : UFSCar, 2010.
228 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Geometria fractal. 3. Motivação na educação. 4. Educação - proposta curricular. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. José Antonio Salvador
DM - UFSCar

Prof. Dr. José Marcos Lopès
FEIS - UNESP

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
DM - UFSCar

*"– Há sempre um admirável mundo novo – disse Poirot –,*
*mas, sabe, só para algumas categorias especiais de pessoas. As felizes.*
*Aquelas que trazem dentro de si mesmas a criação deste mundo."*

(do diálogo entre o detetive Hercule Poirot e a menina Miranda, em *A Noite das Bruxas*, de *Agatha Christie* – p. 108)

*À Mariinha, Marta, Zelinda e vó Maria.*
*(na memória)*

*TEOREMA**

*Eu acredito*
*Que Deus existe e fez o mundo e tem amor.*
*Eu acredito*
*Que o céu existe e lá no céu se canta e dança.*
*Eu acredito*
*Que Deus faz versos e canções,*
*Que os anjos cantam lá no céu.*

***Se Deus existe, ele é amor,***
***Se Deus existe, ele é cantor.***

*Eu acredito*
*Em fazer versos e poemas e canções.*
*Eu acredito*
*Em quem se senta a uma varanda e canta e canta.*
*Eu acredito*
*Que Deus faz versos e canções*
*Que anjos cantam lá no céu.*

*Por isso quando é nuvem negra eu canto paz,*
*Por isso quando é céu azul eu canto mais,*
*E quando escuto o mar cantar e me chamar*
*Eu canto com o mar.*
*O universo é uma canção*
*Por isso eu sei que Deus existe e é cantor.*

** título original: Canção ao Deus Cantor*
*(disponível em: <http://letras.terra.com.br/padre-zezinho/1284227/>)*

# AGRADECIMENTOS

*Ao meu SENHOR e DEUS, fonte constante de misericórdia, paz, força e bênção.*

*Aos meus PAIS, Humberto e Walderez, com os quais aprendi tudo o que é de fato essencial.*

*A todos e cada um dos meus FAMILIARES que, como sempre, estiveram presentes e ajudaram com aquela força e oração sem os quais a jornada seria realmente dura: vó, tios, tias e primos.*

*Aos grandes AMIGOS de BUENO: os de sempre, os novos, da escola, da vida, das noitadas, da Igreja. É a presença – às vezes surreal – de cada um que ameniza os tropeços e celebra as festas: Joaquim, Jessé, Adilson, Flávio, Fabiano, Zé Cláudio, Tião, Cleide, Flávia, Fernanda, Simone e muitos mais.*

*Aos AMIGOS que fiz pelas bandas de SÃO CARLOS e PESSOAS ESPECIAIS que conheci, desde a graduação, os quais me fizeram conhecer novos horizontes e aprender, aprender muito: Ricardo, Sílvia Maria, Sílvia Daniela, Régis, Rafael, Thaís, Marcela e tantos outros.*

*Aos meus PROFESSORES de tanto tempo atrás: Marta – do pré; Zezinha – da 4ª série; Nilvanda, Regina, Tidinho, Beth, Lourdes e outros – da 5ª a 8ª série; Cecília, Terezinha, Marçal e outros – do Ensino Médio, que me fizeram respeitar e almejar a profissão de Educador. Em particular aos que cultivaram em mim a paixão pela Matemática: Maria Júlia, Ana Lúcia e Guilherme.*

*Aos PROFESSORES da graduação, fundamentais para minha chegada à vida profissional e ao mestrado: Paterlini, Tomazella, Carmem, Pedro Pergher, Selma Arenales, Margarete e alguns mais que mesmo que a memória aqui falhe, estão no pensamento.*

*Aos BROWS (isso mesmo, não há outra definição melhor!): Fabrício, Juninho, Alessandro, Vinícius e Elisa.*

*Aos sempre presentes AMIGOS da turma de MESTRADO. Aprendo com a Rita, o Rodrigo, a Patrícia, a Thaís e os outros mais do que Matemática ou Docência.*

*À orientação do PROF. DR. JOSÉ ANTONIO SALVADOR, que primou pela presença amiga, discussões instigantes e paixões e objetivos compartilhados.*

*Ao PPGECE, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da UFSCar, na pessoa de seu FUNCIONÁRIO Júnior e PROFESSORES, cuja dedicação e competência merecem todo o respeito: Marcos, Yuriko, Paulo, Ducinei, João Sampaio e outros fortes que lutaram para a concretização do sonho deste Mestrado Profissional na UFSCar.*

*Aos professores DR. PEDRO MALAGUTTI e DRA. MARIA DO CARMO DE SOUSA, pela oportunidade de participação no projeto Observatório da Educação, financiado pela CAPES e essencial nos meus primeiros tropeços e vitórias de pesquisador. Aos PARCEIROS de projeto, pelas contribuições, convivência e paciência: Gisele, Ângela e demais.*

*Aos PROFESSORES e ESTUDANTES membros do GEM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (UFSCar), pela acolhida e valorosas contribuições: Renata, Monique, Uaiana, Denise, Priscila e outros.*

*A SEE-SP, Secretaria de Estado da Educação do Estado de São Paulo, pelo apoio financeiro.*

*A EQUIPE GESTORA da E. E. Professor Adail Malmegrim Gonçalves (São Carlos-SP) que, atenta ao meu pedido, propiciou condições para que eu desenvolvesse minha pesquisa junto à escola: Marisa, Sandra, Cássia, Isabel, Kelma e Gisele.*

*Aos queridos e inesquecíveis ESTUDANTES da mesma escola, pelo grande aprendizado nestes últimos anos, em particular os estudantes da oitava série B de 2009, pela colaboração na pesquisa.*

*Aos grandes amigos PROFESSORES desta escola e outros que por ela já passaram, pelos ouvidos e braços sempre abertos: Cida, Teresa, Carol, Rafael, Camila, Cido, Márcio, Cléber, Aldo, Rosângela, Regina e muitos outros.*

*Aos FUNCIONÁRIOS nos quais sempre encontrei abrigo e palavras amigas, além das muitas piadas: Tatiane, Patrícia, Clemair, Cida, Vera, Regina, Cido e outros.*

*A toda a EQUIPE da E. E. Profa. Maria Odete S. L. Frattini da cidade de Socorro-SP, que me acolhe em 2010 para um novo trabalho.*

# RESUMO

O objetivo principal desta pesquisa é desenvolver um material didático explorando a Geometria Fractal que auxilie estudantes e professores no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos de Semelhança de Figuras, entre outros, presentes no currículo da 8ª série do Ensino Fundamental. Neste sentido, trabalhamos com Folhas de Atividades que interligam conteúdos que fazem parte do currículo com a Geometria Fractal, dado o seu aspecto lúdico e investigativo. A partir das atividades realizadas e dos depoimentos dos estudantes pesquisados podemos notar o grande empenho e interesse por parte destes. Pretendemos também mostrar como se deu o processo de elaboração deste material e sua aceitação pelos estudantes na perspectiva de uma Pesquisa sobre a própria Prática Profissional (PONTE, 2002). Estudamos ainda a Geometria Euclidiana, de onde provém boa parte da geometria escolar e a Geometria Fractal sistematizada por Mandelbrot nas últimas décadas do século XX, considerando a possibilidade de sua presença nos currículos da Educação Básica, em particular na Proposta Curricular do Estado de São Paulo.

**Palavras-chave:** Ensino de Matemática. Geometria Fractal. Motivação. Proposta Curricular.

# ABSTRACT

The main objective of this research is develop a teaching material by exploring the Fractal Geometry helps students and teachers in teaching-learning process the concepts of Similarity of Figures, among others, present in the curriculum of 8th grade of Elementary School. In this sense, we work with Activities Sheets that connect content that are part of the curriculum with the Fractal Geometry, because it looks playful and investigative. From activities undertaken and the testimony of interviewees we note the great commitment and interest from them. We also intend to show how was the process of developing this material by students and their acceptability in terms of a Research on Their Own Professional Practice (PONTE, 2002). We still investigated the Euclidean Geometry, from which much of the school geometry comes and the Fractal Geometry systematized by Mandelbrot in the last decades of the twentieth century, considering the possibility of its presence in the curriculum of Basic Education, particularly in São Paulo’s Curriculum Proposal.

**Keywords:** Teaching of Mathematics. Fractal Geometry. Motivation. Curriculum Proposal.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Euclides de Alexandria .................................................................... 31
Figura 2 – O Quinto Postulado de Euclides ..................................................... 33
Figura 3 – Um modelo para a Geometria Hiperbólica: o Disco de Poincaré....... 35
Figura 4 – Na Geometria Esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° ....................................................................... 36
Figura 5 – Os primeiros passos da construção do Conjunto de Cantor ............. 39
Figura 6 – Interpretação atraente do Conjunto de Cantor ................................. 40
Figura 7 – Os primeiros passos da construção da Curva e do Floco de Neve de Koch ............................................................................................... 42
Figura 8 – Os primeiros passos da construção do Triângulo de Sierpinski ........ 42
Figura 9 – Os primeiros passos da construção do Tapete de Sierpinski ........... 44
Figura 10 – Exemplo do Conjunto de Fatou-Julia ............................................. 45
Figura 11 – Benoit Mandelbrot ......................................................................... 45
Figura 12 – O conjunto de Mandelbrot em várias escalas ................................ 46
Figura 13 – Exemplo curioso de auto-semelhança .......................................... 47
Figura 14 – Auto-semelhança aproximada na natureza ................................... 48
Figura 15 – Quadrado decomposto em 4 quadrados menores congruentes ...... 51
Figura 16 – Um dos oito cubos menores contido num cubo maior .................... 52
Figura 17 – Soluções dos estudantes ............................................................... 82
Figura 18 – Solução desejável de um estudante .............................................. 83
Figura 19 – Solução incorreta de um estudante ............................................... 83
Figura 20 – solução incompleta de um estudante .......................................... 84
Figura 21 – Primeiro modelo de avaliação ....................................................... 85
Figura 22 – Segundo modelo de avaliação ...................................................... 85
Figura 23 – Exemplos de avaliações feitas pelos estudantes ............................ 91
Figura 24 – Estudante trabalhando na construção ........................................... 101
Figura 25 – Quebra-cabeça fractal confeccionado pelo professor ..................... 101
Figura 26 – Exemplos de construções até a 3ª etapa ...................................... 102
Figura 27 – Exemplos de construções até a 4ª etapa ...................................... 103
Figura 28 – Exemplos de construções até a 5ª etapa ...................................... 103
Figura 29 – Solução de um estudante .............................................................. 106
Figura 30 – Algumas respostas dos estudantes .............................................. 109

Figura 31 – Solução de um estudante .............................................................. 110
Figura 32 – Questão a respeito das condições de semelhança ......................... 113
Figura 33 – Mapas conceituais elaborados por estudantes ............................... 115
Figura 34 – O Triângulo de Pascal proposto ..................................................... 117
Figura 35 – Solução da questão ......................................................................... 119
Figura 36 – Alguns trabalhos dos estudantes ................................................... 120
Figura 37 – O Triângulo com Pares e Ímpares .................................................. 122
Figura 38 – Trabalho incorreto dos estudantes .................................................. 122
Figura 39 – Trabalhos corretos dos estudantes ................................................. 123
Figura 40 – Exemplo de planificação do cartão ................................................. 141
Figura 41 – Cartões confeccionados pelos estudantes ...................................... 141
Figura 42 – As primeiras dobras ........................................................................ 142
Figura 43 – O retângulo que será dobrado internamente .................................. 143
Figura 44 – A primeira iteração .......................................................................... 143
Figura 45 – Os segmentos cortados e dobrados nas 3 primeiras iterações ....... 144
Figura 46 – Cartão construído com três iterações .............................................. 144
Figura 47 – Trabalho de uma estudante ............................................................. 145
Figura 48 – Trabalho de dois estudantes ........................................................... 146
Figura 49 – O Balão Fractal montado ................................................................ 147
Figura 50 – O Cartão Fractal Triangular ............................................................. 148
Figura 51 – Primeiras divisões ........................................................................... 148
Figura 52 – A primeira iteração .......................................................................... 149
Figura 53 – O primeiro retângulo dobrado internamente ................................... 149
Figura 54 – A segunda iteração ......................................................................... 150
Figura 55 – A terceira iteração ........................................................................... 150
Figura 56 – Os segmentos recortados e dobrados nas três primeiras iterações. 151
Figura 57 – O primeiro retângulo dobrado internamente ................................... 152
Figura 58 – O primeiro passo da construção ..................................................... 152
Figura 59 – Os segmentos recortados e retângulos dobrados internamente: $s_3$, $s_4$, $s_5$ e $s_6$. .......................................................................................... 152
Figura 60 – A etapa 3 da construção ................................................................. 153
Figura 61 – A próxima etapa da construção e uma face do Balão Fractal ......... 153
Figura 62 – Slides 1 a 8 – Geometria Fractal e Semelhança ............................. 202

Figura 63 – Slides 9 a 16 – Geometria Fractal e Semelhança ............................ 203
Figura 64 – Slides 17 a 24 – Geometria Fractal e Semelhança .......................... 204
Figura 65 – Slides 25 a 32 – Geometria Fractal e Semelhança .......................... 205
Figura 66 – Slides 33 a 35 – Geometria Fractal e Semelhança .......................... 206
Figura 67 – Slides 1 a 8 – Semelhança ............................................................... 208
Figura 68 – Slides 9 a 16 – Semelhança ............................................................. 209
Figura 69 – Slides 17 a 24 – Semelhança ........................................................... 210
Figura 70 – Slides 25 a 30 – Semelhança ........................................................... 211

# LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – A turma pesquisada distribuída em faixa etária ............................... 27
Gráfico 2 – Rendimento dos estudantes ........................................................... 27
Gráfico 3 – Resultado do questionário fechado ................................................. 96
Gráfico 4 – Questões avaliadas negativamente pelos estudantes .................... 97

# LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Cálculos de dimensão .................................................................... 52
Quadro 2 – Cálculo da dimensão fractal de alguns conjuntos ............................ 52
Quadro 3 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 5ª série EF .................. 60
Quadro 4 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 6ª série EF .................. 61
Quadro 5 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 7ª série EF .................. 61
Quadro 6 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 8ª série EF .................. 62
Quadro 7 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 1ª série EM ................. 63
Quadro 8 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 2ª série EM ................. 63
Quadro 9 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 3ª série EM ................. 64
Quadro 10 – Apresentação da Folha de Atividades I ......................................... 66
Quadro 11 – Apresentação da Folha de Atividades II ........................................ 66
Quadro 12 – Apresentação da Folha de Atividades III ....................................... 67
Quadro 13 – Apresentação da Folha de Atividades IV ...................................... 67
Quadro 14 – Apresentação da Folha de Atividades V ....................................... 68
Quadro 15 – Apresentação da Folha de Atividades VI ...................................... 68
Quadro 16 – Apresentação da Folha de Atividades VII ..................................... 69
Quadro 17 – Classificação das atividades ......................................................... 69
Quadro 18 – Atividades analisadas .................................................................... 99

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação entre perímetros, Apêndice B, Folha II ................................ 81
Tabela 2 – Generalizações a partir do Triângulo de Sierpinski, Apêndice B, Folha IV ........................................................................................................ 82
Tabela 3 – Resultado do questionário fechado e alguns destaques ................... 96
Tabela 4 – Questões avaliadas negativamente pelos estudantes ...................... 97
Tabela 5 – Conceitos considerados claros pelos estudantes .............................. 125
Tabela 6 – Dúvidas levantadas pelos estudantes .............................................. 125
Tabela 7 – Cálculos com o Cartão Fractal Triangular ........................................ 154
Tabela 8 – Cálculos com a Face do Balão Fractal ............................................. 155

## SUMÁRIO

Introdução ........................................................................................ 17

1 O Olhar sobre a Prática do Professor e a sua Transformação .... 20

1.1 A Trajetória Profissional como Mobilizador da Pesquisa........................... 20
1.2 A Pesquisa como Processo de Reflexão e Transformação....................... 23
1.3 Os Estudantes Pesquisados...................................................................... 26

2 As Geometrias de Euclides e Mandelbrot .................................. 29

2.1 Da Geometria na Antiguidade às Releituras do Quinto Postulado ............ 29
2.2 Conceitos presentes nas Folhas de Atividades ........................................ 36
2.3 *"Quanto mede a costa brasileira?"* – A Geometria Fractal responde ......... 38
2.4 A Geometria Fractal presente na Sala de Aula .......................................... 53

3 Folhas de Atividades Elaboradas ............................................. 65

4 Resultados e Discussão: a Transformação na Prática ............... 71

4.1 O Processo de Elaboração do Material – a Visão do Professor .............. 71

4.1.1 Atividades de Reflexão ......................................................................... 76
4.1.2 Atividades de Revisão .......................................................................... 77

4.1.3 Atividades de Construção/Observação .................................................. 79
4.1.4 Atividades de Preenchimento de Tabelas ............................................. 79
4.1.5 Atividades de Questionamentos ........................................................... 84
4.1.6 Avaliação da aula ................................................................................ 84
4.1.7 Avaliação Final .................................................................................... 86

4.2 A Recepção das Atividades pelos Estudantes ......................................... 87

4.3 A Produção dos Estudantes e os Indícios de Aprendizagem ................... 99

4.3.1 Construção do Triângulo de Sierpinski .................................................. 100
4.3.2 Preenchimento das Tabelas da Folha II e Questões ............................. 105
4.3.3 Semelhanças e Diferenças entre o Triângulo e o Tapete de Sierpinski . 107
4.3.4 Preenchimento de Tabelas e Questões – Tapete de Sierpinski ............. 109
4.3.5 Questões sobre Semelhança e Mapa Conceitual ................................... 111
4.3.6 Triângulo de Sierpinski e Pascal ........................................................... 117

Considerações Finais ....................................................................... 127

Referências ...................................................................................... 133

Bibliografia ....................................................................................... 137

APÊNDICE A – Algumas Perspectivas para o Uso de Fractais na 5ª e 8ª Séries do Ensino Fundamental .......................................................................... 139
APÊNDICE B – Folhas de Atividades Aplicadas ............................................... 156
APÊNDICE C – Sugestão de Resolução das Folhas de Atividades .................. 169
APÊNDICE D – Folhas de Atividades Reformuladas ........................................ 180
APÊNDICE E – Slides: Apresentação do Tema aos Estudantes ....................... 201
APÊNDICE F – Slides: Semelhança de Figuras Planas .................................... 207

ANEXO A – Atividades do Caderno do Aluno .................................................... 212
ANEXO B – Matriz Curricular de Matemática de SP ......................................... 220

## Introdução

Este texto apresenta a pesquisa de Mestrado Profissional desenvolvida pelo professor e estudante de Pós-Graduação no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos (PPGECE/UFSCar) em parceria com a Escola Estadual em que leciona.

Várias questões culminaram para a sua realização, a saber:

a) o interesse do professor por atividades diferenciadas em sala de aula que possam tornar a classe mais produtiva e interessada;

b) o problema da falta de motivação dos estudantes encontrado por professores hoje em dia; e

c) a preocupação com o aprendizado defasado de muitos estudantes da 8ª série do Ensino Fundamental.

Assim, consideramos como objetivo principal deste trabalho o desenvolvimento de um material didático explorando a Geometria Fractal que auxilie estudantes e professores no processo de ensino-aprendizagem do conceito de Semelhança de Figuras, entre outros, presentes no currículo da 8ª série do Ensino Fundamental das escolas estaduais paulistas.

O interesse em trabalhar com a Geometria Fractal vem do seu aspecto atraente que pode trazer muitas questões para investigação, além da mobilidade de se trabalhar com uma variedade de conteúdos matemáticos.

Procuraremos, ao final do trabalho, responder à seguinte questão de pesquisa: *Como se dá o processo de elaboração, aplicação, análise e recepção pelos estudantes de um Material Didático envolvendo Geometria Fractal para o aprendizado do conceito de Semelhança de Figuras na 8ª série do Ensino Fundamental?*

Neste sentido, trabalhamos com Folhas de Atividades que interligam conteúdos que fazem parte do currículo com a Geometria Fractal.

A partir das atividades realizadas podemos notar o grande empenho e interesse por parte dos estudantes. Na nossa experiência mapeamos uma série de facilidades encontradas por estes e também dificuldades que devem ser superadas pelo professor e sua turma.

A seguir uma breve descrição do que será abordado em cada capítulo do trabalho.

No Capítulo 1, abordamos a pesquisa desenvolvida, desde a trajetória profissional do professor até o desenvolvimento da pesquisa em si, como o contexto na qual ela se insere, os estudantes pesquisados e a metodologia de pesquisa. Baseamo-nos numa investigação sobre a própria prática, adotando as idéias de Ponte (2002).

No Capítulo 2, abordamos o conteúdo matemático que é o foco do trabalho: a Geometria. Consideramos alguns episódios da História da Matemática e, em particular, da Geometria, desde a Antiguidade e suas origens incertas até a chegada das geometrias não-euclidianas no século XIX.

Dedicamos uma especial atenção a Euclides de Alexandria, organizador de *Os Elementos*, que norteiam boa parte do ensino de Geometria Escolar até os dias de hoje, e como seu Quinto Postulado – ou *Axioma das Retas Paralelas* – desencadeou discussões durante muitos séculos até a criação destas novas geometrias.

A seguir, estudamos os principais conceitos da Geometria Fractal, através dos conjuntos clássicos que impulsionaram a sua criação pelo matemático Mandelbrot há poucas décadas atrás. Focamos nos conceitos que utilizaremos nas Folhas de Atividades para o desenvolvimento do conteúdo Semelhança de Figuras Planas, que integra o currículo da 8ª série do Ensino Fundamental.

Abordamos também a questão sob o ponto de vista dos documentos oficiais que subsidiam o trabalho do professor e de como a Geometria é vista por eles.

No Capítulo 3, abordamos a estrutura geral das Folhas de Atividades aplicadas junto aos estudantes, de forma a esclarecer seus objetivos, características, tempo de aplicação e tipo de atividades propostas, para no capítulo seguinte procedermos à sua análise.

No Capítulo 4, fazemos a análise das atividades desenvolvidas com os estudantes sob três pontos de vista: a elaboração do material, a recepção do material pelos estudantes e a sua aprendizagem.

Apresentamos, a seguir, as considerações finais a respeito da análise dos dados e finalização do trabalho.

Além das Referências utilizadas no trabalho, julgamos relevante adicionar uma Bibliografia com autores e obras que foram consultados ou utilizados indiretamente durante o desenvolvimento do mesmo.

Finalmente expomos os Apêndices e Anexos ao texto, organizados da seguinte forma:

- Apêndice A: trata de algumas atividades desenvolvidas com estudantes de outras turmas que podem oferecer perspectivas sobre o uso de fractais no Ensino Fundamental;

- Apêndice B: as Folhas de Atividades elaboradas;

- Apêndice C: uma sugestão de solução das Folhas de Atividades;

- Apêndice D: uma reformulação das Folhas de Atividades;

- Apêndice E: os slides utilizados pelo professor para a apresentação do tema *Geometria Fractal e Semelhança* aos estudantes; e

- Apêndice F: os slides utilizados pelo professor na aula sobre *Semelhança de Figuras Planas*.

- Anexo A: trata-se de um fragmento do Caderno do Aluno, que faz parte da Proposta Curricular do Estado de São Paulo e foi utilizado em uma das Folhas de Atividades; e

- Anexo B: expõe um fragmento da Proposta Curricular que traz os tópicos curriculares de Matemática abordados por série escolar.

# 1 A Prática do Professor e a sua Transformação

Este capítulo aborda todo o cenário da pesquisa realizada, que a nosso ver, compreende desde o início da trajetória profissional do professor passando pelas particularidades da turma pesquisada até o detalhamento da pesquisa em si, com suas questões, objetivos a atingir, sua metodologia e os referenciais empregados. Ele está dividido em três seções que tratam respectivamente da trajetória do professor até o advento da pesquisa, da pesquisa propriamente dita e dos estudantes pesquisados.

## 1.1 A Trajetória Profissional como Mobilizador da Pesquisa

A minha trajetória profissional inicia-se com a graduação em Licenciatura em Matemática na UFSCar (2000 a 2003).

Em agosto de 2004 assumi o cargo PEB-II[1] numa escola pública estadual na cidade de São Carlos, através de concurso público, na qual trabalhei até o ano de 2009 e desenvolvi a presente pesquisa.

Mais do que estar nesta escola para ministrar aulas de Matemática e Física, desde o início do trabalho confirmei alguns interesses que já imaginava possuir e entrei em contato com questões que convergem de alguma forma para a realização desta pós-graduação.

Deparamos constantemente nas escolas com a questão do interesse e da motivação dos estudantes: é de senso comum entre educadores que o desinteresse dos estudantes pela escola de uma forma geral vem aumentando e está cada vez mais difícil motivá-los de algum modo.

Esta é uma questão de difícil compreensão. Porém, mesmo que sem o respaldo necessário, precisamos, à medida que estamos a frente de uma sala de aula, intervir e solucionar tais problemas rápida e eficientemente.

Em meio a este desinteresse geral encontramos um fato pior: aqueles estudantes que se encontram aquém do desejado para a série em que estão, em

[1] Trata-se do ciclo II do Ensino Fundamental (5ª a 8ª séries) e do Ensino Médio (1ª a 3ª série), que são as atribuições do PEB-II (Professor de Educação Básica II), conforme legislação paulista.

termos de aprendizado. Como atuar junto a estes que não tem condições de acompanhar o ritmo de aprendizado de seus pares e necessitam de um apoio individualizado e especializado?

Estes estudantes, naturalmente, se desmotivam e podem chegar à próxima série mais desinteressados e sem os pré-requisitos necessários que, no caso da Matemática, sabemos serem fundamentais para que um conteúdo mais elaborado seja desenvolvido.

Frente ao desinteresse dos estudantes vem aquele sentimento de impotência e desânimo de muitos professores. Aliado a outros fatores mais políticos e sociais que certamente não convém mencionar aqui, não encontram formas de produzir ou ministrar aulas que conduzam efetivamente a algum aprendizado. Esta certamente é uma reflexão que perpassa por qualquer grupo de professores engajados que questionam sua prática.

Sempre considerei dois ingredientes fundamentais para uma boa aula de Matemática. Os aspectos lúdicos, visuais, atraentes de alguma forma, conectados ao mundo do estudante ou que despertem seu interesse são fundamentais para uma aula prazerosa. Por outro lado, uma abordagem procedimental do assunto é imprescindível para o domínio dos conceitos e algoritmos matemáticos.

Com relação a este lado mais lúdico e atraente presente na Matemática, procuro explorá-lo de forma que os estudantes a compreendam a ponto de aqueles que não conseguem interagir com o conteúdo e o grupo possam acreditar em si mesmos. Quando estes estudantes se animam a desenvolver algo, pensando consigo mesmos: “olha, não é tão difícil assim...” ou “acho que eu também consigo fazer isto!”, elevamos sua auto-estima.

Todas estas idéias que já possuía ou construí neste período me fizeram pensar numa pesquisa para desenvolver durante o curso de Mestrado Profissional no qual ingressei em 2008, também pela UFSCar, considerando que seu objetivo é

> o de formar um profissional que possa atuar imediatamente no mercado e leve para este, fruto de sua pesquisa, material e/ou tecnologia que possa ser utilizada por seus pares para o melhor desenvolvimento de sua função, a saber, a Educação. (BRASIL, 2009)

Portanto, coloca-se o estudo e a elaboração de um Material Didático que auxilie professores na sua prática profissional. Isto responde a duas questões anteriormente colocadas: elaborar um material que possa auxiliar professores abrirá novas possibilidades para trabalhar determinado conteúdo; por outro lado, este material deverá ser capaz de interessar os estudantes e melhorar o aprendizado.

Nas primeiras conversas com o Professor Orientador, já estabelecemos um ponto em comum: trabalhar com aspectos atraentes aos estudantes. Chegamos também à conclusão de que compartilhávamos preocupações a respeito deste desinteresse dos estudantes e professores e, consequentemente, a busca por propostas de minimizar o problema.

O próximo passo foi estabelecer o contexto da pesquisa. Que aspecto ou conteúdo do currículo estudar? O que conectar a este para que seu estudo possa ser mais prazeroso? Assim chegamos à Geometria Fractal e o conteúdo de Semelhança de Figuras Planas presente no currículo da 8ª série do Ensino Fundamental[2].

Claramente tínhamos um espaço natural para a pesquisa: as salas em que eu lecionava. Poderíamos desta forma, entender a minha prática neste contexto de pesquisar meus próprios estudantes e elaborar este material.

Durante o segundo ano do curso de Mestrado, os envolvidos passaram a integrar a equipe de um projeto da Universidade que busca a formação de uma rede colaborativa entre estudantes de Graduação, Professores da Rede Pública, Estudantes do Mestrado Profissional e Docentes da Universidade[3]. Acreditamos este ser um fato importantíssimo que veio corroborar nossos interesses, além da possibilidade de trabalhar com outras pessoas com objetivos comuns.

Este projeto está organizado da seguinte maneira: sob a orientação de quatro professores da Universidade, revezam-se quatro grupos de bolsistas nos quatro anos de vigência do mesmo, fomentando a criação desta rede de pesquisa.

O objetivo principal do projeto é a criação do NIPEM (Núcleo Interativo de Pesquisa em Ensino de Matemática), que visa auxiliar professores da rede pública e estudantes da universidade em suas práticas de ensino em Matemática. O

---

[2] 8ª série ou 9º ano do Ensino Fundamental, de acordo com nova denominação; referiremos sempre como 8ª série por ter se dado neste contexto o desenvolvimento integral do trabalho.

[3] Projeto intitulado *"Produtos Educacionais no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática: Itinerários de Desenvolvimento e Implementação, a partir da Rede de Pesquisa Participante Escola-Universidade"*, sob financiamento da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), através do Edital Observatório da Educação com vigência de 2009 a 2012.

desenvolvimento e avaliação de produtos educacionais, o diálogo e o compartilhamento de experiências vem contribuir para este enriquecimento da prática pedagógica dos participantes e instituir um processo longo de formação continuada.

O envolvimento com este projeto também implicou a participação no *GEM - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da UFSCar*, formado por professores da Universidade, estudantes de graduação e pós-graduação de várias áreas e professores da Educação Básica.

A participação neste Grupo de Estudos me trouxe novas perspectivas a partir de um contato mais próximo com outros pesquisadores da universidade e também o grupo de estudantes de pós-graduação de outros programas. Além do contato com outros trabalhos de pesquisa em desenvolvimento e seus autores, pude receber contribuições ao meu trabalho através de apresentações, discussões e orientações dos participantes.

Na próxima seção descrevemos a questão de pesquisa que nos imbuiu neste processo, bem como nossos objetivos e a metodologia utilizada.

## 1.2 A Pesquisa como Processo de Reflexão e Transformação

Esta pesquisa apóia-se nos pressupostos defendidos por Ponte (2002) no que diz respeito a investigações em sala de aula e pesquisas sobre a própria prática profissional do professor.

Este referencial ajuda a compreender como se dá este processo de propor o uso de um determinado material pelos estudantes, a elaboração deste material e o que o professor pesquisador, que também é o professor da sala de aula, encontra ao trafegar por este caminho, por vezes tortuoso e inusitado.

Adotamos as idéias de Ponte (2002) que estabelece quatro momentos principais de uma investigação, sintetizados a seguir:

a) a formulação do problema ou das questões do estudo;

b) a coleta de elementos que permitam responder a esse problema;

c) a interpretação da informação recolhida com vista a tirar conclusões; e

d) a divulgação dos resultados e conclusões obtidas.

Destacamos que Ponte não coloca os momentos da pesquisa fielmente seqüenciais. Desta forma, no decorrer do trabalho, podemos nos deparar com uma nova questão que assuma tal importância que deve ser pensada e colocada em pauta.

De modo semelhante, algum objetivo inicialmente traçado pode se mostrar inatingível ou outro que tenha passado despercebido possa fazer parte do projeto e nos mostrar novos horizontes.

Propomos então a seguinte questão de pesquisa, citada anteriormente: *Como se dá o processo de elaboração, aplicação, análise e recepção pelos estudantes de um material didático envolvendo Geometria Fractal para o aprendizado do conceito de Semelhança de Figuras na 8ª série do Ensino Fundamental?*

A partir da questão de pesquisa definimos o seu objetivo principal: desenvolver um material didático explorando a Geometria Fractal que auxilie estudantes e professores no processo de ensino-aprendizagem do conceito de Semelhança de Figuras, entre outros, presentes no currículo da 8ª série do Ensino Fundamental.

Em torno deste objetivo principal elencamos outros correlatos: analisar o processo de elaboração deste material (o referencial teórico, a atividade do professor, os tropeços, a confecção, a aplicação e avaliação pelo próprio professor e pelos estudantes); analisar a recepção do material pelos estudantes e o desenvolvimento das aulas; e principalmente, analisar os indícios de aprendizagem destes estudantes.

Numa primeira parte da pesquisa, realizamos um estudo teórico que abarcou da origem da Geometria Euclidiana até a criação das geometrias não-euclidianas do século XIX. Dedicamo-nos também ao estudo da Geometria Fractal, pensando na sua gênese a partir das construções clássicas até a sistematização feita por Benoit Mandelbrot.

A seguir buscamos os documentos oficiais que orientam de alguma forma o ensino nos âmbitos federal (Parâmetros Curriculares Nacionais) e estadual (Proposta Curricular do Estado de São Paulo). É imprescindível que o produto final do projeto seja de fácil aplicabilidade por professores, e portanto, não esteja na contramão das regulamentações nacionais e estaduais, e tampouco fora do contexto profissional do docente.

Paralelo a este estudo fomos buscar o que nos amparasse em termos de teorias educacionais e de aprendizagem para a realização da pesquisa. Encontramos a pesquisa sobre a própria prática, que nos faz, além de construir uma metodologia, olhar sobre o papel do professor a cada momento e de como transformá-lo, para seu melhor desenvolvimento profissional e claro, para o melhor aprendizado do estudante.

Desta forma, tendo em mãos os conteúdos com os quais trabalharíamos e as opções metodológicas de pesquisa já feitas, cuidamos da elaboração do material que aplicaríamos na sala de aula com os estudantes. Este material constitui-se de um conjunto de Folhas de Atividades a serem desenvolvidas com a classe e auxílio do professor.

Mais que a elaboração, consideramos aqui também a aplicação e avaliação do material junto aos estudantes pesquisados. Assim, finalmente poderemos fazer algumas considerações no tocante a este processo de elaboração, sua recepção pelos estudantes e possibilidades de uso por outros professores.

A coleta de dados foi feita de forma qualitativa e quantitativa, de forma que pudéssemos ter contato com vários instrumentos que potencializassem nossas futuras análises. Por outro lado, reconhecemos também as limitações de cada técnica, o que nos traz mais uma razão para que façamos uso de ambas, pensando a cada momento o que será melhor analisar e o porquê.

Usando técnicas de observação, análise de documentos e diários de bordo, estabelecemos a parte qualitativa da coleta; mas através de trechos dos questionários respondidos pelos estudantes, encontramos uma diversidade de dados quantitativos que podem auxiliar no processo de análise dos documentos, daí a necessidade de não descartá-los.

Vale destacar neste momento que durante os anos de 2008 e 2009 trabalhamos com estes e outros estudantes atividades-piloto, também envolvendo Geometria Fractal e exploração de conteúdos presentes no currículo específico de cada série.

Estas atividades, bem como sua elaboração, execução e avaliação por professor e estudantes, exerceram um papel fundamental na construção e finalização desta pesquisa como um todo, pois nortearam novas atitudes e intervenções na elaboração do material final, que seria usado especificamente na 8ª série. Voltaremos a tratar deste aspecto no Apêndice A do presente texto.

A partir da aplicação das atividades em sala de aula com a 8ª série e registros do professor em um Diário de Bordo simultaneamente à aplicação e reflexões posteriores, juntamos um farto material com o qual trabalharemos em capítulo posterior, onde algumas atividades feitas serão analisadas no intuito de responder à nossa questão inicial bem como na busca pelos objetivos traçados.

A interpretação dos dados recolhidos foi realizada, então, a partir da escolha de alguns aspectos em particular observados na sala de aula, visto que em virtude do grande número de dados, uma análise específica de cada um deles não seria possível nem oportuna. Assim elencamos aspectos de maior relevância ao tema e à questão inicial.

A etapa final do processo investigativo proposta por Ponte é a escrita e divulgação dos resultados.

### 1.3 Os Estudantes Pesquisados

A turma de estudantes pesquisados integra a 8ª série de uma Escola Estadual da zona rural de uma cidade do interior de São Paulo[4]. Os 32 estudantes desta turma (21 meninos e 11 meninas) tem faixa etária entre 14 e 15 anos (90% da turma), além de um estudante com 18 anos e dois estudantes com 16 anos, como ilustra o gráfico a seguir.

[4] Não faremos aqui maiores descrições da escola, bem como citação de nomes. Contudo, indicaremos o grupo pesquisado como 8ª B, o nome original da turma, já que esta é a descrição oficial da escola para nomear as salas: 8ª A, 8ª B, 8ª C, etc.

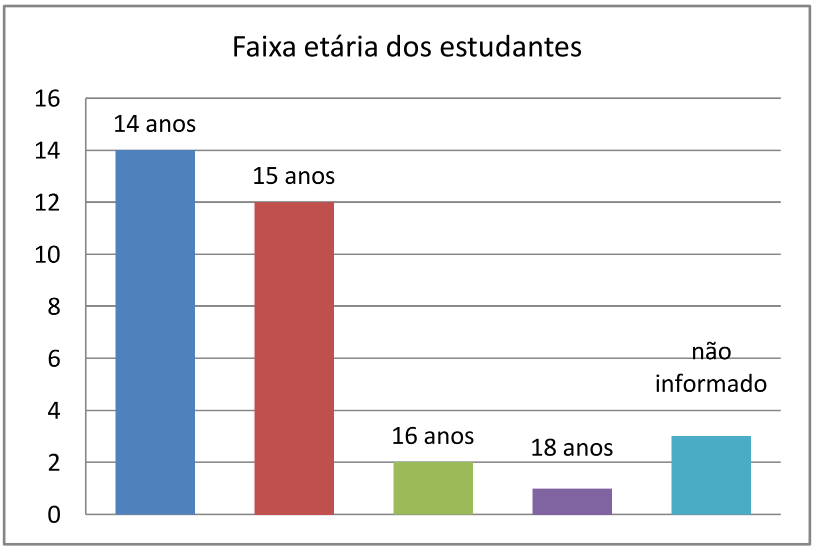



Gráfico 1 – A turma pesquisada distribuída em faixa etária[5].

Com relação ao rendimento em Matemática, a avaliação final do ano de 2009 feita pelo professor constatou 8 estudantes com um rendimento muito abaixo do esperado e 2 estudantes com rendimento excelente. Os demais são estudantes que estão na média ou pouco acima da média[6].

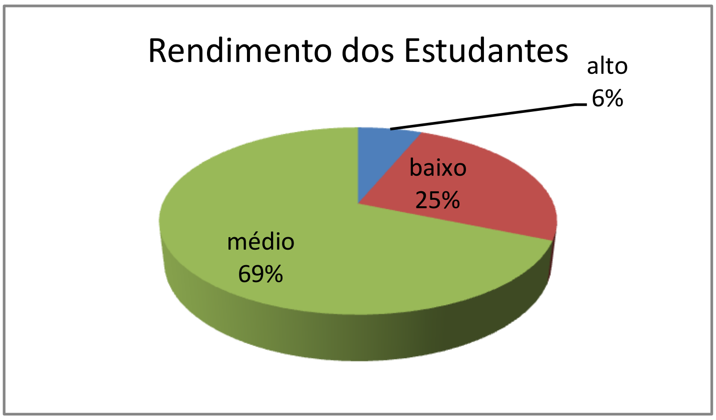



Gráfico 2 – Rendimento dos estudantes.

É importante destacar que, apesar da assiduidade dos estudantes à escola, trata-se de uma turma que sempre obteve rendimento inferior comparada com as outras turmas da escola e também manifestou maiores problemas com

[5] Este e os outros gráficos foram gerados com o software Microsoft Excel ©.

[6] As notas são computadas de 0 a 10, sendo considerada a nota média 5 como o rendimento mínimo satisfatório. Os estudantes considerados com rendimento muito baixo estão abaixo da média no conceito final da disciplina e possuem duas ou mais notas abaixo da média no decorrer dos bimestres de 2009. Os estudantes com rendimento excelente estão com média 9 no conceito final de 2009.

disciplina. São estudantes que dificilmente se sentem motivados e comprometidos na escola, com a auto-estima em geral prejudicada.

Constato isso porque acompanho a turma já há alguns anos. Deste acompanhamento já constato algumas melhoras e mesmo um amadurecimento natural por parte deles. O interesse pela escola também aumenta com o tempo, mas a turma sente falta de uma preparação anterior melhor para acompanhar os conteúdos da série em questão (a falta de pré-requisitos).

No decorrer do texto, no momento da análise dos resultados das atividades propostas, de depoimentos dos próprios estudantes e também da escolha das atividades trataremos melhor destas questões particulares da turma.

# 2 As Geometrias de Euclides e Mandelbrot

Trataremos neste capítulo da Teoria Matemática presente em nosso trabalho, que consideramos de fundamental importância no contexto da elaboração do projeto de mestrado, das leituras decorrentes e também da elaboração do material de ensino utilizado com os estudantes pesquisados.

Portanto, situando o leitor neste domínio específico do conhecimento, discorreremos um pouco nas próximas páginas sobre a História da Geometria até a chegada das geometrias não-euclidianas no século XIX. Em seguida, colocamos o que acreditamos ser a gênese ou os conceitos fundamentais de Geometria Fractal que são úteis para um primeiro contato com a Teoria.

Finalmente, consideramos a relevância de tratar dos conteúdos de Geometria específicos para a série trabalhada, a 8ª série do Ensino Fundamental, sob duas perspectivas: a axiomática da Geometria Euclidiana e documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais[7] e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo[8].

## 2.1 Da Geometria na Antiguidade às Releituras do Quinto Postulado

As origens de qualquer ciência estão repletas de incertezas ou da impossibilidade de datações precisas, devido à própria história da humanidade e do longo período em que os registros escritos não existiam – até seis milênios atrás.

O historiador grego Heródoto, considerado o Pai da História, juntamente com o filósofo Aristóteles, propuseram a origem da Geometria na civilização egípcia. Para um, vinha da necessidade prática de medições; para outro, a existência de uma classe sacerdotal com tempo disponível levou ao estudo da Geometria.

[7] Os Parâmetros Curriculares Nacionais são diretrizes nacionais a respeito das diversas áreas do conhecimento e sua abordagem escolar, criados pelo Ministério da Educação em 1996.

[8] A nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo foi implantada em 2009 na rede estadual, após estudos e simulações no ano de 2008, e traz, em linhas gerais, o currículo mínimo que deve ser abordado bimestralmente em cada série e material de apoio ao professor, gestor e estudantes.

Certamente estes pontos de vista opostos levam ao que até hoje configura a Matemática sob duas perspectivas: a de ciência prática, ferramenta; e a de manifestação sublime do conhecimento, ciência pura que não necessite de aplicações imediatas.

Boyer no seu livro sobre História da Matemática, conclui a respeito:

> O fato dos geômetras egípcios serem às vezes chamados "estiradores de corda" (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras. (BOYER, 1981, p. 4)

A seguir Boyer traz exemplos do aparecimento da Geometria na pré-história, ao citar o homem do neolítico e suas congruências e simetrias presentes em artefatos como potes, tecidos e cestas.

No Egito é importante citar os papiros com sua grande quantidade de problemas, em geral propondo construções, cálculos com áreas e volumes, todos eles de natureza prática e muitas vezes relacionados às pirâmides. Em menor número encontramos também desafios e enigmas.

Os relatos acerca da origem da matemática na Grécia são fragmentados, como coloca Boyer (1981, p. 47):

> os relatos sobre as origens da matemática grega se concentram nas chamadas escolas jônia e pitagórica e nos representantes principais de cada uma – Tales e Pitágoras – embora as reconstruções de seu pensamento se baseiem em narrações fragmentárias e tradições elaboradas nos séculos posteriores.

São notáveis os trabalhos destes dois matemáticos gregos no século VI a. C.: as proporções de Tales, a famosa história do cálculo da altura da pirâmide, o Teorema de Pitágoras e os outros trabalhos com números irracionais.

Apenas mencionando a Escola de Platão e seus diálogos, Eudoxo e as proporções, o Método da Exaustão e as secções cônicas de Menaecmus, chegamos a Euclides de Alexandria e seus Elementos, de onde praticamente toda a geometria clássica presente na Educação Básica até hoje é extraída.

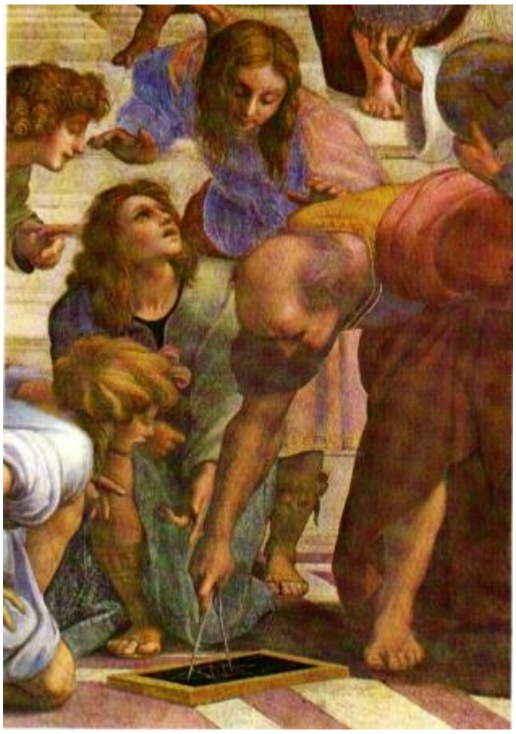


Figura 1 – Euclides de Alexandria[9].

Fonte: http://www.dm.ufscar.br/hp/hp902/hp902001/hp902001.html

Euclides de Alexandria (360-295 a.C.) é assim chamado devido ao Museu ali construído e ao qual foi convidado a ensinar Matemática. Muitos fatos acerca de sua vida são misteriosos, inclusive o local de seu nascimento. Cinco obras de Euclides sobreviveram até hoje: Os elementos, Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos e Óptica.

A chave do sucesso dessa obra, Os Elementos, segundo Boyer (1981, p. 76) era justamente o fato de ser um livro-texto no qual Euclides expunha – e o fazia muito bem – conteúdos para serem ensinados no Museu de Alexandria, que não diferia em muito das instituições de ensino superior de hoje.

Ainda sobre os Elementos,

> trata-se de um texto introduzido cobrindo toda a matemática elementar – isto é aritmética (no sentido de "teoria dos números"), geometria sintética (de pontos, retas, círculos e esferas), e álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica) (...); se limitam austeramente ao seu campo – a exposição em ordem lógica dos

[9] Neste recorte retirado da famosa pintura renascentista *A Escola de Atenas*, de Rafael encontramos Euclides desenhando com um compasso e sendo observado por outras personalidades da Matemática.

> assuntos básicos de matemática elementar. (BOYER, 1981, p. 76)

Os Elementos de Euclides, além de ser a mais antiga e importante obra matemática grega a chegar até os dias de hoje, é o texto mais influente de todos os tempos. Esta obra está dividida em treze livros ou capítulos, sendo os seis primeiros sobre Geometria Plana Elementar, o que mais nos interessa neste trabalho.

O primeiro deles traz aquelas 23 definições conhecidas pela falta de eficiência de algumas: *"ponto é aquilo de que nada é parte"* ou *"e linha é comprimento sem largura"* (Euclides trad. Bicudo, 2009, p. 97), por exemplo. A questão é como propor uma definição em termos de coisas precedentes mais conhecidas de forma clara, o que certamente não foi atingido. A seguir, Euclides passa aos postulados (Euclides trad. Bicudo, 2009, p. 98):

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.

2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

3. E com todo centro e distância, descrever um círculo.

4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores que dois retos[10].

[10] Hoje em dia, a versão mais utilizada do 5º postulado é a que se tornou conhecida com o matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819), apesar de ter sido anteriormente utilizada por outros e já enunciada por Proclo no século V: *"Por um ponto fora de uma reta dada não há mais que uma paralela a essa reta"*.

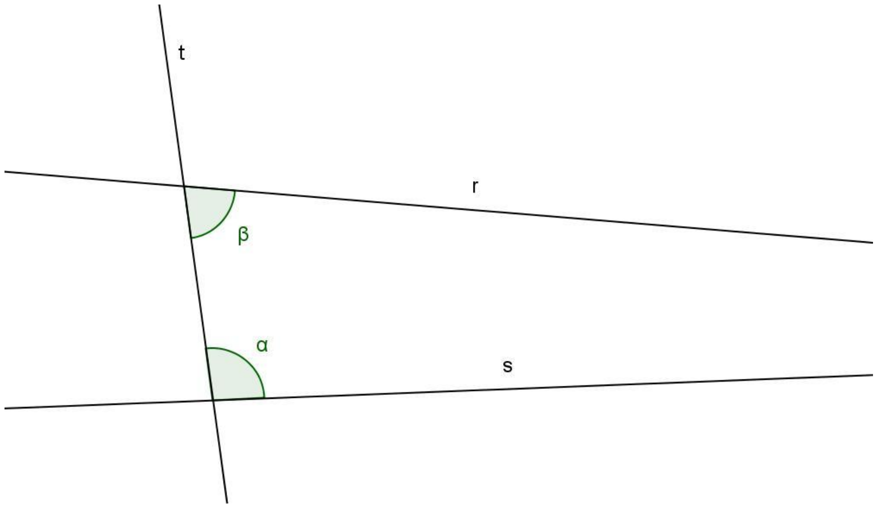



Figura 2 – O Quinto Postulado de Euclides[11].

Considera-se postulado uma suposição particular de uma ciência ou área de estudo que não seja necessariamente óbvia ou aceitável, porém verdadeira. A partir dos postulados, axiomas e definições Euclides constrói toda a sua teoria na forma de demonstrações.

A grande questão que pautou matemáticos durante muito tempo é que o quinto postulado de Euclides não era tão evidente quanto os demais e sua própria estrutura diferia deles. Assim acreditava-se que não fosse um postulado e sim um teorema, que necessitaria de estudos e de uma demonstração em termos dos demais ou então que pudesse ser omitido da teoria sem prejudicar sua consistência, ou seja, o que a torna verdadeira logicamente falando.

Durante os próximos 22 séculos a partir de Euclides, em diversos momentos da História da Matemática houveram tentativas frustradas de se provar o seu quinto postulado, também conhecido como Axioma das Paralelas.

Somente no século XIX alguns matemáticos chegaram à conclusão de que não havia como prová-lo e a partir de sua negação, surgiram o que chamamos de Geometrias não-euclidianas. Estes matemáticos descobriram que a negação deste postulado junto aos demais gera outras geometrias tão consistentes como a proposta por Euclides.

Diz Boyer (1981, p. 387) sobre os percalços atravessados pela Geometria e seu status na Matemática neste período:

[11] As figuras do trabalho, onde não consta a fonte, foram construídas com o software livre *Geogebra*

> Dentre todos os ramos da Matemática, a Geometria tem sido o mais sujeito a mudanças de gosto, de uma época para a outra. Na Grécia clássica subiu ao zênite, para cair ao nadir ao tempo da queda de Roma. Tinha recuperado parte do terreno perdido na Arábia e na Europa da Renascença; no século XVII esteve no limiar de uma nova era mas novamente foi esquecida, ao menos pelos pesquisadores em Matemática, por quase mais dois séculos, permanecendo à sombra dos ramos prolíficos da nova análise.

Temos aqui o estranho exemplo de descobertas independentes mas simultâneas, feitas pelos matemáticos Saccheri[12], Lambert[13] e Legendre[14], que tentaram em vão a prova do quinto postulado.

Gauss[15], na segunda década do século XIX chegou à conclusão da impossibilidade da prova e da possibilidade de existência de geometrias diferentes da organizada por Euclides.

Lobachevsky[16], no entanto, continuava no esforço da prova, visto que Gauss não participou sua conclusão a comunidade. Após estudos e inclusive a declaração de que não excluía a possibilidade de uma prova para o postulado, Lobachevsky finalmente apresentou teoremas caracterizando o novo assunto e a partir daí passou anos escrevendo exposições.

---

[12] A primeira investigação realmente científica do postulado das paralelas foi publicada em 1773 e é da autoria do jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) . Outra publicação famosa sua foi o *Logica Demonstrativa*, na qual a novidade era a aplicação do método de redução ao absurdo no tratamento da lógica formal.

[13] O suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) publica uma investigação semelhante a de Saccheri trinta e três anos após a publicação deste, onde discute hipóteses acerca dos ângulos de um quadrilátero contendo três ângulos retos.

[14] Adrien-Marie Legendre (1752-1833) popularizou o problema do postulado das paralelas nas sucessivas edições de *Éléments de Géométrie*, texto largamente adotado que aborda os esforços do analista francês neste estudo.

[15] O alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado o maior matemático da época e também deu contribuições importantes à Álgebra e Teoria dos Números. Foi o primeiro a obter conclusões relevantes acerca do problema que o quinto postulado apresentava, juntamente com Bolyai e Lobachevsky.

[16] O russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856), da mesma forma que Bolyai e Gauss, abordou o problema do postulado como Playfair. Seus trabalhos foram pouco reconhecidos.

De forma semelhante, Janos Bolyai[17], filho do também matemático Farkas Bolyai, empreendeu busca na prova do quinto postulado, isso poucos anos depois de Lobachevsky. Gauss também teve contato com a obra, mas não chegou a elogiá-la.

Na Geometria Hiperbólica, de Lobachevsky e Bolyai, existem infinitas retas paralelas que passam por um ponto fora de uma reta dada.

Uma representação desta Geometria é o Disco de Poincaré. Neste modelo, os pontos são usualmente definidos. O plano é o interior de um círculo euclidiano e as retas são cordas abertas que passam pelo centro do círculo ou arcos de circunferência abertos ortogonais ao horizonte.

Assim pensando, se retas paralelas são definidas como retas que não possuem nenhum ponto em comum, deparamo-nos novamente com a negação do quinto postulado de Euclides e a criação de uma nova teoria nela baseada.

Na figura a seguir observamos três retas que passam por P e são paralelas a reta AB. Como podemos perceber, outras tantas retas poderiam ser assim construídas.

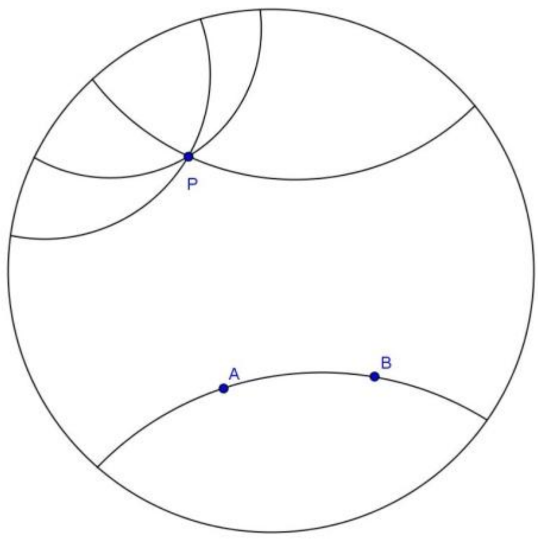



Figura 3 – Um modelo para a Geometria Hiperbólica: o Disco de Poincaré.

[17] Janos Bolyai (1802-1860) publicou trabalho semelhante ao de Lobachevsky como apêndice de um trabalho de seu pai. Como sua publicação foi posterior a de Lobachevsky, surgiu a hipótese de plágio.

Já na Geometria Esférica, que é um modelo de Geometria Elíptica, criada por Riemann[18], por exemplo, tratamos da geometria tri-dimensional de uma esfera.

Nela os pontos são definidos como anteriormente, mas as linhas retas estão definidas no sentido de “a trajetória mais curta entre dois pontos”, a qual é chamada *geodésica*. Da mesma forma que na geometria plana, teremos outras definições, todas aplicadas na esfera e suas geodésicas ou grandes círculos.

Nesta Geometria, uma linha não tem nenhuma linha paralela através de um ponto dado, o que a diferencia da geometria plana em termos do Quinto Postulado de Euclides.

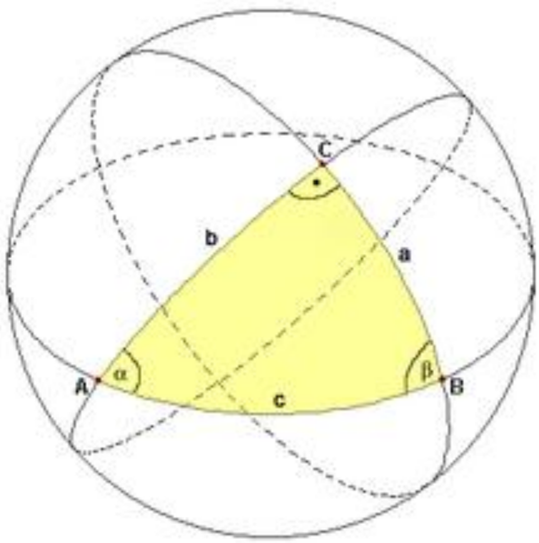



Figura 4 – Na Geometria Esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180°.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_esf%C3%A9rica

## 2.2 Conceitos presentes nas Folhas de Atividades

Trabalhamos no decorrer do projeto com vários conceitos oriundos da Geometria Euclidiana Plana e outros que julgávamos conveniente revisar com os

[18] Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) mostrou que, descartando-se a infinitude da reta, e admitindo-se simplesmente que a reta seja ilimitada, então, com alguns outros ajustamentos pequenos nos demais postulados, pode-se desenvolver uma outra geometria não-euclidiana consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso.

estudantes. Assim, expomos os conceitos de forma breve e concisa como pensados na Geometria Euclidiana, antes de tratar da Geometria Fractal.

Os primeiros conceitos com os quais os estudantes entram em contato no trabalho são Segmento de Reta, Ponto Médio de um Segmento, Triângulo e Perímetro de uma Figura Plana, presentes na Folha de Atividades I (Apêndice B, p. 157). Todos eles são compreendidos em maior ou menor grau pelos estudantes, mas em geral eles não elaboram definições precisas sobre qualquer um deles.

Definimos *Segmento de Reta* como sendo o conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento.

Por sua vez, chamamos de *Ponto Médio do Segmento AB* a um ponto C deste segmento tal que a medida de AC é igual a medida de CB. Dizemos que AC e CB são *Segmentos Congruentes*.

Na Folha de Atividades I, restringimos a definição de Triângulo ao *Triângulo Equilátero* utilizado: um polígono convexo que possui 3 lados de mesma medida (a questão dos três ângulos congruentes não é trabalhada com os estudantes neste momento).

A partir da definição do triângulo, trabalhamos o *Perímetro de uma Figura Plana* como sendo a soma das medidas dos comprimentos de todos os lados da figura; no caso do triângulo eqüilátero, é igual a multiplicação da medida do comprimento do lado do triângulo por 3.

Outra definição trabalhada com os estudantes foi a de *Buraco*, como proposta por Mandelbrot, que numa figura fractal é cada parte ou região interior da figura eliminada durante a sua construção.

A partir da Folha de Atividades II (Apêndice B, p. 158) surge o conceito de *Fórmula*, importante para a abordagem algébrica das construções e escrita posterior de suas regularidades. Trabalhamos a noção de Fórmula com os estudantes como sendo uma expressão algébrica que resume cálculos a serem feitos para obter algum resultado a partir de valores conhecidos.

Ainda na Folha de Atividades II iniciamos o trabalho com a *Área de uma Figura Plana*, introduzido com os cálculos no Tapete de Sierpinski. Para que não surgissem cálculos complicados com o Triângulo, não trabalhamos inicialmente a sua área.

Segundo o Axioma VI.1 (MARQUES BARBOSA, p. 76) *"a toda região poligonal fechada corresponde um número maior que zero"*, que é chamado área da região; é uma medida de superfície.

Posteriormente surgem noções fundamentais com relação a Semelhança de Figuras Planas, objetivo fundamental das Atividades. Trabalhamos os conceitos de *Razão, Proporção* e a *Condição de Semelhança entre duas ou mais Figuras Planas.*

Uma *Razão* é uma divisão entre dois números e uma *Proporção* é a igualdade entre duas razões: estas são as definições usuais de razão e proporção de acordo com livros didáticos.

No caso particular da *Razão de Semelhança*, tratamos da razão entre os lados correspondentes das figuras semelhantes, que são proporcionais.

A *Condição de Semelhança* abordada na Folha de Atividades V (Apêndice B, p. 164) diz que *Figuras Semelhantes* tem a mesma forma, seus ângulos correspondentes são congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

## 2.3 "Quanto mede a costa brasileira?[19]" – A Geometria Fractal responde

A Geometria Fractal, entendida como um ramo particular da Matemática, tem sua formalização muito recente, datada da segunda metade do século XX, por Benoit Mandelbrot, seu fundador. Relata MANDELBROT (1983, p. 1) na introdução do seu famoso livro A Geometria Fractal da Natureza:

> Respondendo a este desafio, eu pesquisei uma nova geometria da natureza e implementei-a num número diverso de situações. Ela descreve muito do que é irregular e fragmentado a nossa volta (...), através da

[19] Parodiando a indagação de Mandelbrot: *"How long is the coast of Britain?"*, que traduzimos em: "Quanto mede a costa da Inglaterra?"

> identificação de uma família de formas que eu chamei Fractais. (...) Muitos conjuntos fractais são curvas ou superfícies, outros não são mais que “poeiras” desconexas e outros ainda são formas tão estranhas que não há bons termos para eles em qualquer ciência ou arte.

Muito antes disso, porém, alguns trabalhos de matemáticos famosos já tratavam de objetos, figuras ou construções que apresentavam características que posteriormente Mandelbrot classificaria como conjuntos fractais.

O primeiro trabalho neste sentido é de autoria de George Cantor[20], que publicou em 1883 a construção do conjunto que hoje leva o seu nome: *Conjunto de Cantor* ou *Poeira de Cantor*, que trata da fragmentação do intervalo fechado [0,1] e que foi posteriormente reconhecido como uma figura fractal.

O Conjunto de Cantor, como os demais fractais aqui explorados, pode ser obtido através de um simples processo iterativo. Um processo iterativo é realizado através da repetição indefinida de uma ou mais etapas, gerando assim uma forma de repetição nos resultados gerados: *“A iteração é a repetição de um procedimento consecutivamente”* (Nunes, 2006, p. 30).

Observe o processo iterativo que gera o Conjunto de Cantor:

1. Considerar um segmento de reta unitário;
2. Dividi-lo em três partes congruentes e eliminar a central;
3. Repetir o passo 2 nas partes restantes sucessivamente.

Figura 5 – Os primeiros passos da construção do Conjunto de Cantor.

[20] George Cantor (1845-1918) é responsável por grande avanço na Matemática do século XIX a partir do seu trabalho sobre Teoria dos Conjuntos.

Figura 6 – Interpretação atraente do Conjunto de Cantor.

Fonte: http://www.larrydavidson.com/images/CantorSet.jpg

O Conjunto de Cantor é um subconjunto da reta real definido a partir de uma seqüência de aproximações. Partindo do intervalo fechado $C_0 = [0,1]$, obtemos o conjunto $C_1$ pela remoção da terça parte central de $C_0$, tornando-se $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. O próximo conjunto $C_2$ é definido pela remoção da terça parte central de cada um dos dois intervalos de $C_1$, e assim sucessivamente. As partes que são removidas são os chamados *"buracos"*, termo definido por Mandelbrot e visto anteriormente.

O Conjunto de Cantor é o limite $C$ da seqüência de todos os conjuntos $C_n$ , quando $n \to \infty$. Já que os conjuntos gerados em determinado momento estão contidos nos anteriores, $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq$, definimos o limite pela interseção dos conjuntos: $C = \bigcap C_k, k \in \mathbb{N}$.

Como a seqüência de conjuntos é definida recursivamente, vários fatos podem ser demonstrados utilizando do Princípio da Indução Finita. Como exemplo, citamos as afirmações: "o conjunto $C_k$ consiste de $2^k$ intervalos fechados disjuntos, cada um de comprimento $(1/3)^k$. Assim o comprimento total de $C_k$, ou a soma de seus comprimentos, é $(2/3)^k$ e o limite é $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$."

Consideremos com mais cuidado quais pontos constituem o conjunto de Cantor. Se $[a, b]$ é um dos intervalos fechados que faz parte das aproximações de $C_k$, então seus pontos extremos pertencem a todos os futuros conjuntos $C_m, m \geq k$ e portanto pertencem a interseção $C$.

Tomando todos os pontos extremos de todos os intervalos de todas as aproximações $C_k$, nós obtemos um conjunto de infinitos pontos, todos pertencentes a $C$. É importante destacar que há pontos em $C$ diferentes destes pontos extremos.

Por outro lado, seja $0 < r < 1$ e $a \in \mathbb{R}$. Uma *contração* em $\mathbb{R}$ com raio $r$ e centro $a$ é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = rx + (1 - r)a$. Considere as duas contrações reais definidas por: $f_1(x) = \frac{x}{3}$ e $f_2(x) = \frac{x+2}{3}$. O Conjunto de Cantor satisfaz a equação $C = f_1[C] \cup f_2[C]$ (Edgar, 2008, p. 7).

Peano[21] e Hilbert[22] também criaram em trabalhos semelhantes figuras hoje classificadas como fractais. A proposta de ambos, mas de formas diferentes, era a partir de um segmento de reta e iterações neste segmento, produzir uma figura que recobrisse um quadrado.

Koch[23] também influenciou Mandelbrot com a *Curva de Koch* e o *Floco de Neve* ou *Ilha de Koch*, que, da mesma forma que os anteriores, partiam da iteração sobre um segmento ou vários segmentos iniciais.

O processo iterativo que gera a Curva de Koch é o seguinte:

1. Considerar um segmento de reta;
2. Dividi-lo em três segmentos congruentes, substituindo o intermediário por dois segmentos também congruentes de forma a completar, com o retirado, um triângulo eqüilátero;
3. Repetir o passo 2 nos segmentos que resultaram, indefinidamente.

Se partirmos de um triângulo eqüilátero, obteremos, com o processo anterior, o chamado Floco de Neve ou Ilha de Koch, como mostra a figura a seguir.

[21] Giuseppe Peano (1858-1932) contribuiu de forma decisiva para a moderna lógica matemática e a teoria dos conjuntos. Na obra *"Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita"* de 1889, desenvolveu os *Axiomas de Peano*, considerados até hoje como a axiomatização padrão dos Números Naturais. (disponível em: http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Peano.html)

[22] David Hilbert (1862-1943), além de contribuições em Teoria dos Conjuntos, sua publicação *Grundlagen der Geometrie (1889)* foi um estudo aprofundado da Geometria euclidiana organizada de forma axiomática. (http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hilbert.html).

[23] Niels Fabian Helge Von Koch (1870-1924) escreveu trabalhos sobre Teoria dos Números e, a partir da Curva de Koch, descrita em *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane (1906)* dá a primeira construção geométrica de uma função que é contínua mas em parte alguma diferenciável. (http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Koch.html)

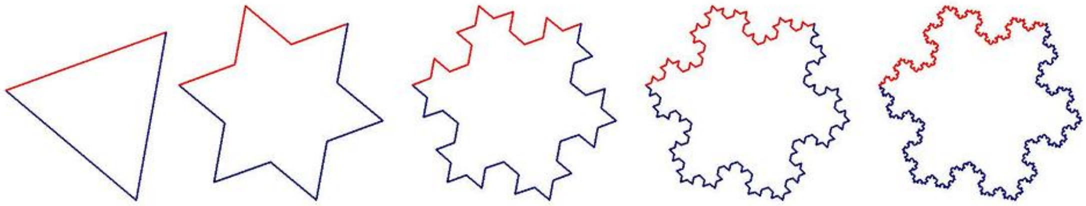


Figura 7 – Os primeiros passos da construção da Curva e do Floco de Neve de Koch.

Fonte: Nunes [24]

Após a exposição destas primeiras figuras fractais construídas, chegamos às criações do polonês Sierpinski[24]. São os fractais definidos por Sierpinski talvez os mais utilizados em abordagens do assunto com estudantes da Educação Básica, dada a sua fácil construção e aspecto visual atraente.

Os fractais de Sierpinski mais triviais são construídos a partir de um triângulo e um quadrado. Variações espaciais a partir de um tetraedro (o Tetraedro de Sierpinski) e de um cubo (a Esponja de Menger[25]) não serão aqui abordadas.

O processo iterativo que gera o Triângulo de Sierpinski é simples:

1. Considerar um triângulo eqüilátero[26];
2. Construir internamente a este, a partir de seus pontos médios, um novo triângulo eqüilátero e o eliminar da construção;
3. Repetir o passo 2 com os triângulos restantes, indefinidamente.

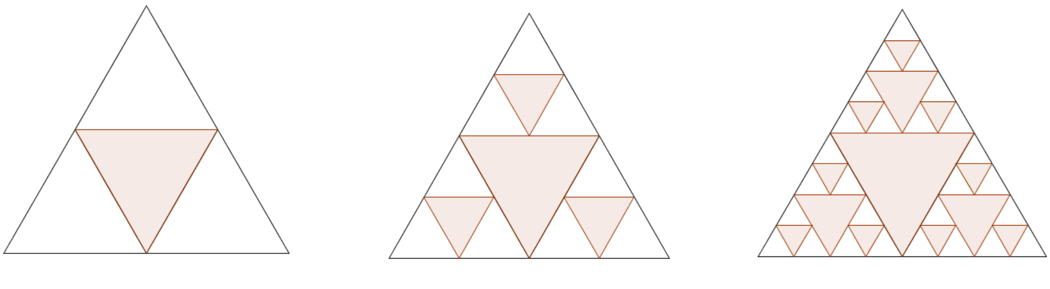


Figura 8 – Os primeiros passos da construção do Triângulo de Sierpinski.

[24] Waclaw Sierpinski (1882-1969), além dos fractais possui uma das crateras da lua com o seu nome, dada a sua influência no início do século XX.

[25] Carl Menger (1902-1985), a partir do Tapete de Sierpinski, retira indefinidamente cubos do interior de um cubo maior produzindo assim a Esponja de Menger.

[26] A construção pode ser feita a partir de qualquer tipo de triângulo. O triângulo eqüilátero facilita o processo pelo cálculo do ponto médio e pela imediata visualização das propriedades; outros tipos de triângulos, o retângulo, por exemplo, facilitaria posteriores cálculos com área.

Edgar (2008) trata da construção do Triângulo de Sierpinski da seguinte forma: começamos com um triângulo eqüilátero de lado medindo 1 unidade (o triângulo e sua região interior), chamado $S_0$.

Este será subdividido em 4 triângulos menores de lados medindo $\frac{1}{2}$ unidade, a partir dos pontos médios dos lados. A região a ser removida é o interior do triângulo central (sua fronteira, vértices e borda permanecem). Após esta remoção, o conjunto remanescente é chamado $S_1$, que é um subconjunto de $S_0$.

Agora, cada um dos três triângulos restantes são divididos em triângulos ainda menores com lado medindo $\frac{1}{4}$, e os três triângulos centrais removidos. O resultado é $S_2$, um subconjunto de $S_1$. Nós continuamos desta forma obtendo uma seqüência $S_k$ de conjuntos.

O Triângulo de Sierpinski é o limite $S$ desta seqüência de conjuntos. Da mesma forma que no Conjunto de Cantor, obtemos uma seqüência de conjuntos decrescente e o limite é dado pela interseção de todos os conjuntos da seqüência.

O conjunto $S_k$ consiste de $3^k$ triângulos, com lado de medida $2^{-k}$. Assim, a área total de $S_k$ é $3^k.(2^{-k})^2.\sqrt{3}/4$, que converge para 0 com $k \to \infty$. Podemos dizer então que a área total do Triângulo de Sierpinski é 0.

Os segmentos de reta que compõem a fronteira de um dos triângulos de $S_n$ permanecem em todas as aproximações $S_k, k \geq n$. Então o conjunto S contém pelo menos todos estes segmentos de reta.O *perímetro total* de S é, assim, no mínimo $3^k.3.2^{-k} = 3.\left(\frac{3}{2}\right)^k$, que tende a infinito com $k \to \infty$. Entendemos por perímetro total a soma dos perímetros do triângulo inicial e de cada triângulo interno.

Analogamente ao Conjunto de Cantor, podemos encontrar contrações $f_1, f_2$ *e* $f_3$ três com raio $\frac{1}{2}$ e centro nos três vértices do triângulo $S_0$ tais que: $S_{k+1} = f_1[S_k] \cup f_2[S_k] \cup f_3[S_k]$.

A construção do Tapete de Sierpinski também mantém este princípio, a retirada de quadrados menores construídos internamente a um quadrado inicial, como se segue:

1. Considerar um quadrado;

2. Dividir cada lado do quadrado em três segmentos congruentes, de forma que o quadrado inicial se divida em nove quadrados menores;

3. Eliminar da construção o quadrado central;

4. Repetir indefinidamente o processo (passos 2 e 3) nos quadrados restantes na figura.

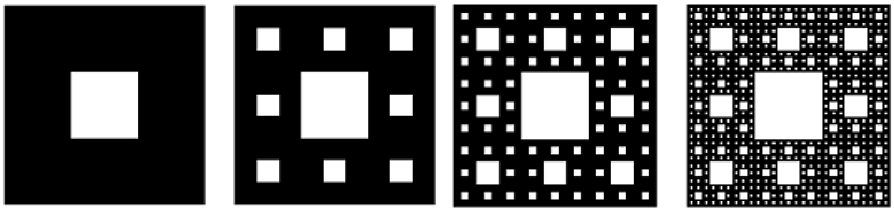


Figura 9 – Os primeiros passos da construção do Tapete de Sierpinski.

Fonte: Salvador (2009)

Com o advento da computação, Mandelbrot pôde resgatar trabalhos de dois franceses de décadas atrás, dando impulso a sua teoria. Trata-se de Fatou e Julia[27], que trabalharam com iterações a partir de funções complexas.

Os conjuntos propostos por estes franceses, de difícil abordagem que não computacional, daí a importância para a época, são de uma originalidade, pelo tratamento funcional, e de uma beleza incríveis.

Considere o conjunto dos números complexos, geometricamente pensado como um plano euclidiano. O Conjunto de Julia é construído a partir da função $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi(z) = z^2 + c$, em que $c$ é um número complexo fixo. Como todo número complexo (exceto 0) tem duas raízes quadradas, $\varphi$ tem duas funções inversas $f_0(z) = \sqrt{z-c}$ e $f_1(z) = -\sqrt{z-c}$.

O Conjunto de Júlia neste caso é um conjunto fechado e limitado não-vazio $J \subseteq \mathbb{C}$ que satisfaz a equação: $J = f_0[J] \cup f_1[J]$ e recursivamente definimos: $J_{n+1} = f_0[J_n] \cup f_1[J_n]$. O limite da sequência $J_n$ é $J$.

[27] Pierre Fatou (1878-1929) e Gaston Maurice Julia (1893-1978) trabalharam de forma semelhante porém separados. Mais tarde Mandelbrot desenvolveria computacionalmente os resultados obtidos por eles e outros análogos.

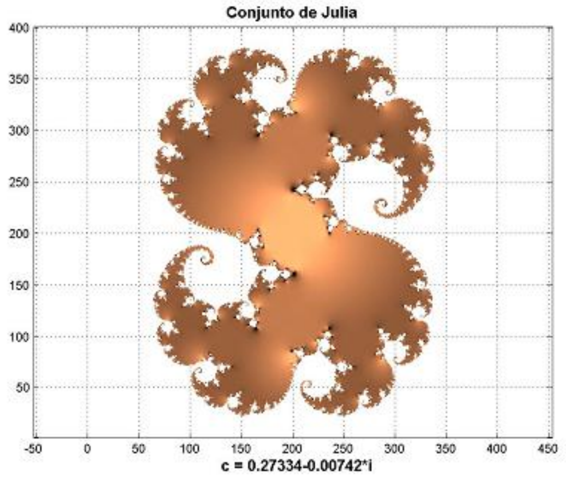



Figura 10 – Exemplo do Conjunto de Fatou-Julia[28].

Fonte: http://marte.dpi.inpe.br/col/dpi.inpe.br/sbsr@80/2006/11.16.01.25.51/doc/6243-6246.pdf

Benoit Mandelbrot, nascido em Varsóvia (1924), começa sua carreira como estudante na Escola Normal de Paris, passando depois a Politécnica. Devido a limitações impostas pelo grupo Bourbaki, corrente predominante na época que buscava uma matemática mais pura, axiomática e sem muito apelo geométrico, Mandelbrot deixa a França para estudar Ciência Aeroespacial nos Estados Unidos, trabalhando posteriormente na IBM norte-americana com problemas de economia.

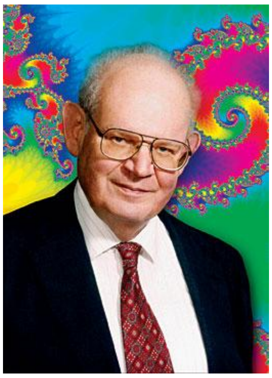


Figura 11 – Benoit Mandelbrot.

Fonte: www.pnl.gov/.../images/mandelbrot_fractals.jpg

Em BARBOSA (2005, p. 11) encontramos a descrição do problema com o qual Mandelbrot se deparou na IBM e alavancou sua nova teoria:

[28] Pela semelhança dos trabalhos, às vezes as figuras geradas a partir da proposta de Fatou e Julia são conhecidas como Conjunto de Fatou-Julia.

> Na IBM (Mandelbrot) deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em rede entre os computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que algum ruído não podia ser eliminado e interferia nos sinais; a aleatoriedade e a irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Resolveu o problema (...) pensando nos erros de transmissão como um desses conjuntos de Cantor.

Mandelbrot se preocupa, de forma geral, em caracterizar objetos da Natureza que a Geometria Euclidiana não dá conta de fazer, tais como uma nuvem, uma montanha ou a costa de um país: "*nuvens não são esferas, montanhas não são cones, a linha costeira não é um círculo, a casca das árvores não é suave e nem o relâmpago viaja em linha reta*" (Mandelbrot, 1983, p. 1).

Mandelbrot também criou, à forma de Julia, um conjunto baseado nas iterações a partir de uma função complexa, obtendo no plano Argand-Gauss formas de uma beleza instigante como as seguintes.

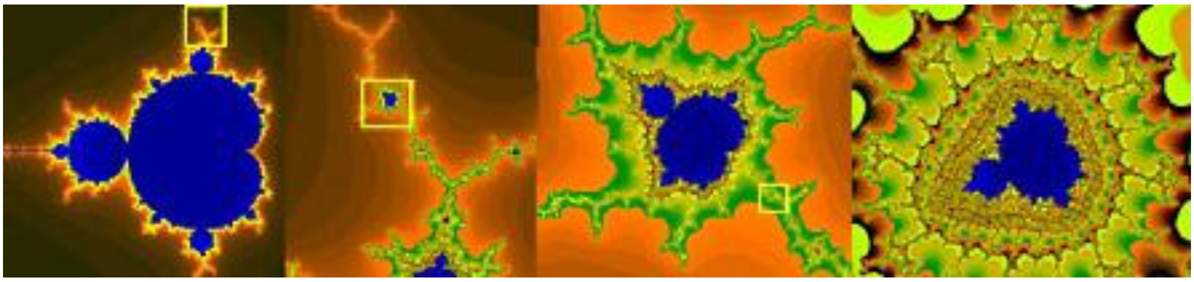


Figura 12 – O conjunto de Mandelbrot em várias escalas.

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot

Os trabalhos publicados por Mandelbrot, *Les Objects Fractals, Forme, Hassard et Dimension* (1975); *Fractals: Form, Chance and Dimension* (1977) e *The Fractal Geometry of Nature* (1977) trazem os fundamentos de sua nova teoria, a Geometria Fractal, baseada na propriedade particular de alguns tipos de objetos: a auto-semelhança.

Figura 13 – Exemplo curioso de auto-semelhança.

Fonte: http://alinguagemdocaos.cygnusnet.org/2008/01/qual-o-som-de-uma-s-mo-bater-palmas.html

Uma análise dos conjuntos propostos por Cantor, Koch e Sierpinski nos trazem a conclusão de que todos eles compartilham de uma mesma característica: partes de cada um dos conjuntos, se ampliada, é uma cópia fiel do conjunto como um todo. Isto ocorre graças ao processo iterativo que os gera e é a esta característica que chamamos auto-semelhança. A auto-semelhança está presente, em maior ou menor grau, em todas as figuras fractais.

BARBOSA (2005, p. 18) traz algumas definições de Fractal, desde a inicialmente proposta por Mandelbrot, alvo de críticas, até as caracterizações propostas por Falconer em 1985 e 1990, respectivamente:

> - um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.
>
> - um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.
>
> - um conjunto F é fractal se, por exemplo: F possui alguma forma de “auto-similaridade” ainda que aproximada ou estatística; A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica; o conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.

Percebemos com estas definições três conceitos chave: o de dimensão, que na visão de Mandelbrot na Geometria Fractal extrapola o conceito usual que conhecemos, a auto-similaridade ou auto-semelhança e o processo iterativo.

Nunes (2006, p. 29) traz a seguinte definição para a *auto-semelhança* e a classifica em dois tipos: *exata* e *aproximada ou estatística*: *"Uma figura é auto-semelhante se apresenta sempre o mesmo aspecto visual a qualquer escala que seja ampliada ou reduzida, ou seja, se parte da figura se assemelha à figura vista como um todo."*

Uma figura apresenta auto-semelhança exata se é gerada por um processo matemático, sendo o conjunto total formado por pequenas partes idênticas; a auto-semelhança aproximada, por sua vez, é encontrada em objetos da natureza, que possuem em suas partes a mesma estrutura do todo, mas não em cópias exatas. As escalas de ampliação nestas formas, que não são muitas, podem ser discutidas sob o ponto de vista da Geometria Fractal.

Figura 14 – Auto-semelhança aproximada na natureza.
Fonte: http://lqes.iqm.unicamp.br/canal_cientifico/pontos_vista/pontos_vista_divulgacao29-1.html e http://guilhermepianezzer.blogspot.com/2009_10_01_archive.html

Resta-nos compreender o conceito de dimensão proposto por Mandelbrot em seus trabalhos. Diz Nunes (2006, p. 35): *"durante várias gerações após Euclides, o comprimento, a largura e a altura determinaram o conceito de dimensão cujo valor é um número inteiro positivo"*. Assim a dimensão pode ser encarada como o número de parâmetros ou coordenadas para que um objeto no espaço seja definido ou localizado.

Para construir os conceitos mais elaborados de Dimensão Fractal bem como o estudo de uma forma geral destas figuras ou conjuntos, utilizamos uma série de definições e teoremas oriundos de Topologia, Espaços Métricos e Teoria da Medida, que não serão tratados aqui. O ponto de partida é a definição de *Métrica*, que é uma generalização da Distância a que estamos habituados na reta real, e, de *Espaço Métrico*.

Dado um conjunto $M \neq \emptyset$, seja $d: M \times M \to \mathbb{R}_+$ e indiquemos por $d(x,y)$ a imagem de um par genérico $(x,y) \in M \times M$, através da função $d$. Dizemos que $d$ é uma *Métrica* sobre $M$ se as seguintes condições se verificam para qualquer $x, y, z \in M$:

$$(M_1)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M_2)\ d(x,y) = d(y,x)$$

$$(M_3)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Nessas condições cada imagem $d(x,y)$ recebe o nome de *Distância de $x$ a $y$* e um par $(M,d)$, em que $d$ é uma métrica sobre $M$, é o que chamamos de *Espaço Métrico*.

Cada elemento de um espaço métrico será sempre referido como *Ponto* desse espaço, seja ele um ponto mesmo, ou um número, ou ainda uma função ou um vetor, situações essas que se verificam comumente.

A partir desta definição, temos o conhecido exemplo de distância: "*O conjunto dos números reais com a função $d(x,y) = |x - y|$ é um espaço métrico. (a métrica d é chamada distância ou métrica euclidiana e pode ser estendida para $\mathbb{R}^n$ ou outros espaços)"* (EDGAR, 2008, p.42). $|x - y|$ é o módulo ou valor absoluto da diferença entre *x* e *y*.

Euclides, após suas primeiras definições em Os Elementos, propõe que todas as formas da natureza podem ser reduzidas a formas geométricas simples como pontos, retas, quadrados, círculos, esferas, etc.

Assim um ponto não tem dimensão ou tem dimensão igual a zero, uma reta tem dimensão 1, um plano tem dimensão 2 e um sólido, ou o espaço, tem dimensão 3. Estas são as dimensões euclidianas que, com Riemann, no século XIX, foram estendidas a outros espaços conceituais, as Variedades, que tem dimensão variando de 0 ao infinito.

Estamos acostumados, assim, a observar os conjuntos da Geometria Elementar que possuem dimensões associadas a eles. Quando deixamos a geometria elementar, há a possibilidade de considerar conjuntos de pontos que não recaiam em nenhum destes grupos.

As definições de *Dimensão* geralmente se situam em duas classes: *Dimensão Topológica* e *Dimensão Fractal* [10].

A respeito do conceito de *Dimensão Topológica*, temos em NUNES (2006, p. 37):

> O conceito de dimensão topológica está relacionado com a forma que um conjunto tem de ocupar o espaço. Em topologia, linhas retas podem ser manipuladas em curvas, círculos em triângulos ou quadrados e uma folha de papel plana é equivalente a outra infinitamente amassada. Quando estes objetos são devidamente transformados, através de um homeomorfismo[29], as suas dimensões topológicas são preservadas. Ora, uma linha reta, de dimensão 1, e a Curva de Koch são topologicamente o mesmo.

Outros trabalhos no intuito de estabelecer uma definição de dimensão que permitisse classificar estes objetos[30] não surtiram muitos frutos até que Mandelbrot incorpora idéias de Hausdorff e Besicovitch[31] para os quais a dimensão não necessitaria ser inteira. Assim surge o conceito de dimensão fractal anteriormente citado e proposto por Mandelbrot.

A característica surpreendente para estas dimensões é que elas não precisam ser inteiras: podem ser frações. A *Dimensão de Hausdorff* foi a única destacada por Mandelbrot quando ele definiu “fractal”.

A Dimensão de Hausdorff de um conjunto *F* é assim construída (EDGAR, 2008): consideramos uma cobertura de *F* e a partir dela, a Medida de Hausdorff de *F* como sendo uma relação entre os diâmetros dos conjuntos que fazem parte da cobertura. Afirma-se então que existe um valor crítico $s_0$ (que será o valor da dimensão) tal que esta medida seja infinita ou nula para quaisquer valores maiores ou menores do que $s_0$.

[29] Um *homeomorfismo* é uma função bijetora, contínua e com inversa contínua.

[30] Ver por exemplo, a *Dimensão Topológica de Cobertura*, atribuída a Lebesgue, em Nunes (2006).

[31] Felix Hausdorff (1868-1942) e Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970), matemáticos cujos trabalhos em Topologia e conjuntos de dimensão não-inteira, contribuíram para os estudos de Mandelbrot.

Esta idéia de dimensão é uma abstração do que já sabemos da geometria elementar. Por exemplo, se A é uma curva suave retificável, então seu comprimento é uma forma útil de medir seu tamanho, mas sua “área” e “volume” são 0. As dimensões 2 e 3 são grandes demais para ajudar na medida do tamanho de A.

Nunes (2006), Salvador (2009) e outros autores exploram de forma acessível o conceito de dimensão assim desenvolvido através de exemplos com as dimensões 1, 2 e 3, como vemos a seguir[32].

Considere um segmento de reta e divida-o em 2 segmentos congruentes. Cada um desses segmentos, multiplicado por 2, resgata o segmento original; de outra forma, cada segmento assim obtido é igual ao segmento original multiplicado por $\frac{1}{2}$.

Ao realizar procedimento semelhante em um quadrado, ou seja, se dividirmos seus lados em 2 segmentos congruentes, obteremos 4 quadrados menores. Precisaremos destes 4 quadrados menores para resgatar o quadrado original ou ainda, cada quadrado menor assim obtido é igual ao quadrado original multiplicado pela razão $\frac{1}{4}$.

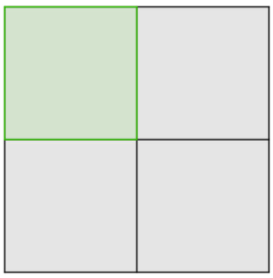


Figura 15 – Quadrado decomposto em 4 quadrados menores congruentes.

Analogamente, considerando um cubo precisaremos de 8 cubos menores para recuperar o cubo original cujas faces foram divididas em 4 quadrados congruentes.

[32] As construções propostas podem ser trabalhadas também de forma concreta, através de material dourado ou construído com papelão ou EVA e são apropriadas para uma abordagem no Ensino Fundamental.

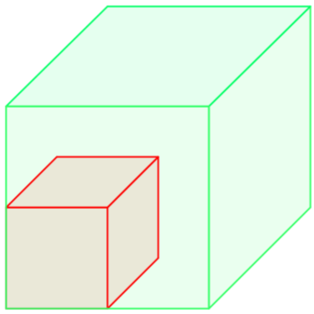


Figura 16 – Um dos oito cubos menores contido num cubo maior.

Chamemos então de N o número de partes em que dividimos o objeto e, no caso, consideramos como fator de redução R = 1/2. Assim encontramos as igualdades expostas no quadro a seguir.

| | | | |
|---|---|---|---|
| N = 2 | R = ½ | $N = 1/R^1$ | dimensão 1 (segmento) |
| N = 4 | R = ½ | $N = 1/R^2$ | dimensão 2 (quadrado) |
| N = 8 | R = ½ | $N = 1/R^3$ | dimensão 3 (cubo) |

Quadro 1 – Cálculos de dimensão.

O fator de redução R foi arbitrariamente escolhido acima, mas poderíamos tomar outro. A partir destes exemplos inferimos a respeito da dimensão D de um objeto: $N = \frac{1}{R^D}$, que é equivalente a $D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{R}}$. Definimos então, de forma simples, a dimensão Hausdorff-Besicovitch de um objeto.

Analisemos finalmente a dimensão de alguns dos conjuntos anteriormente vistos, a partir desta relação:

| *CONJUNTO* | *N* | *R* | *D* |
|---|---|---|---|
| Conjunto de Cantor | 2 | 1/3 | $\frac{\log 2}{\log 3} \approx 0{,}63$ |
| Curva de Koch | 4 | 1/3 | $\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}26$ |
| Triângulo de Sierpinski | 3 | 1/2 | $\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}59$ |

Quadro 2 – Cálculo da dimensão fractal de alguns conjuntos.

Temos então figuras que possuem dimensão claramente não inteira, se estudadas desta forma: as figuras fractais. No caso do Conjunto de Cantor, um conjunto de pontos de dimensão topológica zero, sua dimensão Hausdorff-Besicovitch é $0{,}63$, logo, estritamente maior.

No caso da Curva de Koch, muitos segmentos unidimensionais geram uma figura com dimensão maior que um. Já no Triângulo de Sierpinski, por outro lado, a partir de uma figura bidimensional o fractal construído possui dimensão menor que 2.

## 2.4 A Geometria Fractal presente na Sala de Aula

BARBOSA (2005, p. 19) justifica propostas que utilizem Geometria Fractal no contexto da Educação Básica baseando-se no seguinte:

> - conexões com várias ciências;
>
> - deficiências da Geometria Euclidiana para o estudo de formas da natureza, desde que é, em geral, apenas apropriada para formas do mundo oriundas do humano;
>
> - difusão e acesso aos computadores e a tecnologias da informática nos vários níveis de escolarização;
>
> - existência do belo nos fractais e possibilidade do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo e a arte aplicada à construção de fractais, entendendo-se arte como toda ação que envolve simultaneamente emoção, habilidade e criatividade;
>
> - sensação de surpresa diante da ordem na desordem.

Entendemos aqui a relevância de todas as justificativas expostas e concordamos com elas, ressaltando a questão da sensação de surpresa, da estética, e da conexão com outros temas. Apesar disso consideramos que a abordagem computacional, no nosso caso, torna-se inapropriada, devido às precárias condições de acesso dos estudantes pesquisados a computadores tanto na escola como fora dela.

Ainda de acordo com Barbosa, três formas de exploração dos fractais na sala de aula são naturais:

a) estudar as relações numéricas de seus elementos, como contagem, perímetros, áreas e volumes;

b) despertar ou desenvolver o senso estético, captando o educando para o belo e a harmonia no fractal;

c) aproveitar a emergência de uma relação notável da Matemática em algum fractal.

A partir do exposto por Barbosa, pensamos também no uso de fractais para estimular a aprendizagem de outros conteúdos específicos da grade curricular, como a Semelhança de Figuras, levando em conta o fascínio que eles podem provocar.

Ainda é importante destacar uma crescente presença de atividades envolvendo Geometria Fractal em Livros Didáticos como Diniz e Smole.

Abordamos a seguir comentários julgados essenciais com relação aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e também à Proposta Curricular do Estado de São Paulo, documentos que subsidiam o trabalho dos professores no contexto da pesquisa realizada.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais colocam, entre outros, os seguintes objetivos para as quatro últimas séries do Ensino Fundamental, no tocante às capacidades a serem desenvolvidas pelos estudantes:

> - utilizar as diferentes linguagens — verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal — como meio para produzir, expressar e comunicar suas idéias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
>
> - questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação (BRASIL, 1997, p. 6).

Entendemos assim como pode ser vasta a gama de atividades a serem propostas ao estudante para atingir estes objetivos, destacando o questionamento da realidade, a análise crítica e a comunicação de idéias.

E com relação à importância da Matemática, o documento deixa claro que:

> a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno (BRASIL, 1997, p. 12).

Pensando então nas atividades propostas, considerando, de acordo com o documento, os objetivos a serem atingidos no Ensino Fundamental e concordando com a questão da importância da Ciência, reafirmamos o objetivo da elaboração de um material diversificado que possa atender a um melhor aprendizado dos estudantes.

Tendo em mente os aspectos a serem abordados nas Folhas de Atividades, encontramos outra diretriz nos PCN, a respeito da relação entre observação do mundo, representação matemática e seus conceitos:

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados (BRASIL, 1997, p. 15).

Para finalizar, julgamos relevante colocar alguns objetivos da Matemática como componente curricular para o Ensino Fundamental, de acordo com os PCN, destacando primeiramente o seguinte:

> - identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL, 1997, p. 33).

Este destaque é devido à proximidade com os nossos ideais e também a presente proposta: a importância da Matemática como forma de interpretar e interagir com o mundo a nossa volta. Neste jogo entra o interesse e a curiosidade do estudante, aspectos intimamente ligados à sua motivação e seu rendimento em sala de aula e que vai, a nosso ver, contribuir substancialmente para o seu desenvolvimento pleno.

Os Parâmetros ainda colocam como objetivos para a Matemática:

a) a observação dos aspectos qualitativos e quantitativos de processos para o estabelecimento de relações entre eles através do uso de conhecimentos matemáticos específicos;

b) a resolução de situações-problema no seu sentido mais amplo;

c) a segurança na própria capacidade do estudante de construir tais conhecimentos matemáticos, desenvolvendo assim a auto-estima e perseverança; e

d) a interação com os pares de forma cooperativa.

A respeito da Geometria Fractal, o documento a aborda como uma das teorias matemáticas mais recentemente desenvolvidas:

> O advento posterior de uma multiplicidade de sistemas matemáticos – teorias matemáticas - evidenciou, por outro lado, que não há uma via única ligando a Matemática e o mundo físico. Os sistemas axiomáticos euclidiano e hiperbólico na Geometria, equivalentes sob o ponto de vista da consistência lógica, são dois possíveis modelos da realidade física. Além disso, essa multiplicidade amplia-se, nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o acaso - a Estatística e a probabilidade - e daqueles relacionados com as noções matemáticas de caos e de conjuntos fractais. (BRASIL, 1997, p. 25)

Entendemos assim a intenção das diretrizes em considerar os avanços mais contemporâneos da Matemática como Ciência e sua relação com o anteriormente construído e formalizado. É importante abrir espaço a estas noções diferenciadas que podem ajudar o estudante na construção de uma visão de mundo mais aberta e atual.

Com relação à Proposta Curricular do Estado de São Paulo, seu objetivo principal é:

> mapear as informações relevantes e organizá-las em narrativas significativas, em cada território disciplinar. Por meio das diversas disciplinas, os alunos adentram de maneira ordenada – disciplinarmente – o fecundo e complexo universo do conhecimento, em busca do desenvolvimento das competências básicas para sua formação pessoal (SÃO PAULO, 2008, p. 41).

Assim pensando, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008, p. 11) tem como princípios centrais:

> - a escola que aprende;
> - o currículo como espaço de cultura;
> - as competências como eixo de aprendizagem;
> - a prioridade da competência de leitura e de escrita;
> - a articulação das competências para aprender e
> - a contextualização no mundo do trabalho.

Entendemos assim a busca por uma escola que também está no processo de aprendizagem, dada a quantidade de informação e conhecimento disponíveis no dia de hoje e que este aprendizado inclui o estudo, a reflexão, a escolha do que e como ensinar aos estudantes. Pretende-se também colocar que toda atividade escolar é curricular e deve estar ligada com a cultura de uma forma geral ou específica, procurando articular conhecimento e cultura.

Um destaque é dado, segundo o documento, ao problema encontrado com muitos estudantes em leitura e escrita, e da dificuldade dos agentes da educação em sanar tal questão: é importante que se coloque como prioridade a competência de leitura e escrita, e em particular, no caso da Matemática, ela se torna imediatamente urgente.

> As linguagens são sistemas simbólicos, com os quais recortamos e representamos o que está em nosso exterior, em nosso interior e na relação entre esses âmbitos; é com eles também que nos comunicamos com os nossos iguais e expressamos nossa articulação com o mundo. (SÃO PAULO, 2008, p. 16)

A respeito da matemática a ser desenvolvida no Ensino Fundamental, a proposta ressalta a importância do estudante reconhecer e operar no campo numérico real ao final deste ciclo de Ensino. Isto torna-se fundamental para o desenvolvimento de assuntos do Ensino Médio que culminarão na extensão dos campos numéricos vistos para os Números Complexos.

No caso da Geometria, a proposta destaca dois grandes objetivos: reconhecimento, representação e classificação de formas geométricas e articulação do raciocínio lógico-dedutivo:

> Em geometria, o Ensino Fundamental deve ocupar-se inicialmente do reconhecimento e da representação e classificação das formas planas e espaciais, preferencialmente trabalhando em contextos concretos com as crianças de 5ª a 6ª série, e com ênfase na articulação do raciocínio lógico-dedutivo nas 7ª e 8ª séries. (SÃO PAULO, 2008, p. 45)

Desta forma estabelecemos os eixos norteadores principais para o ensino de Matemática no Estado de São Paulo, em acordo com a presente.

Segundo o volume 3 do Caderno do Professor da 8ª série[33],

> os temas escolhidos para compor o conteúdo disciplinar de cada bimestre não se afastam, de maneira geral, do que é usualmente ensinado nas

[33] Fazem parte da Proposta Curricular o seguinte material de apoio ao professor: Caderno do Professor, em volumes bimestrais para cada série, entregue aos professores e gestores, e o Caderno do Aluno, da mesma forma, entregue a estudantes, professores e gestores.

> escolas, ou do que é apresentado nos livros didáticos (SÃO PAULO, 2009, p. 8).

Assim, não podemos questionar muito a oferta destes conteúdos e do próprio material. Por outro lado, os autores ressaltam que *“as inovações pretendidas referem-se à sua forma de abordagem”* (dos conteúdos) (SÃO PAULO, 2009, p. 8) e que estas inovações procuram se basear:

a) na contextualização dos conteúdos;

b) nas competências pessoais envolvidas, especialmente aquelas relacionadas com a leitura e a escrita matemática; e

c) nos elementos culturais internos e externos à Matemática.

Não só concordamos com tal abordagem como também nos baseamos nela para promover o presente estudo. Oportunamente discutiremos melhor cada aspecto, mas basta mencionar a contextualização do conteúdo, seus elementos culturais e também a questão da leitura e escrita que estarão presentes nas atividades propostas.

No caso particular do conteúdo trabalhado, procuramos abordá-lo seguindo a proposta da primeira Situação de Aprendizagem contida no volume 3 do Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2009) (ver Anexo A). Ela explora a idéia de Semelhança de Figuras Planas através de ampliações e reduções e também relações de proporcionalidade. Através das Folhas de Atividades envolvendo Geometria Fractal fazemos as relações com o material do estudante.

Acreditamos assim num material que possa auxiliar também outros professores e estudantes na busca por um melhor aprendizado que não se contraponha às orientações oficiais. Não desconsideramos, todavia, o papel protagonista do professor que consulta materiais diversificados e propõe novas estratégias.

Encerramos este capítulo com a exposição dos conteúdos matemáticos programados para o ciclo II do Ensino Fundamental e Ensino Médio de acordo com a Proposta Curricular trazendo relações com temas ou conteúdos que podem ser trabalhados sob o ponto de vista da Geometria Fractal.

Acreditamos assim despertar o interesse do leitor para outros momentos de ensino e orientar professores que ministram aulas em outras séries que não a 8ª série do Ensino Fundamental, foco deste trabalho.

| 5ª série EF | | |
|---|---|---|
| *Bimestre* | *Tópicos Curriculares* | *Geometria Fractal Abordada* |
| 1º bim | - Números Naturais<br>- Frações | - atividades de construção observando múltiplos e divisores nas figuras semelhantes;<br>- introdução às potências. |
| 2º bim | - Números Decimais<br>- Sistemas de Medida | - medições: comprimento e perímetro;<br>- cálculos com valores não-inteiros. |
| 3º bim | - Formas Geométricas<br>- Perímetro e Área | - formas planas e espaciais: visualização e construção;<br>- perímetro e área: unidades de medida, cálculo de áreas por decomposição. |
| 4º bim | - Estatística | - leitura e construção de gráficos e tabelas a partir de construções fractais e suas regularidades. |

Quadro 3 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 5ª série EF.

Na 5ª série do Ensino Fundamental percebemos, de acordo com o quadro anterior, o grande trabalho que pode ser realizado a partir de construções e motivação visual com os conteúdos de medidas, números e interpretação de dados.

Já o quadro abaixo traz os tópicos curriculares da 6ª série, onde, além do trabalho com números e diferentes representações (no caso dos racionais), uma abordagem algébrica de regularidades presentes nas construções já pode estar presente.

| 6ª série EF | | |
|---|---|---|
| *Bimestre* | *Tópicos Curriculares* | *Geometria Fractal Abordada* |
| 1º bim | - Sistemas de Numeração<br>- Números Negativos<br>- Números Racionais | - representação de números racionais, frações e decimais nas construções. |
| 2º bim | - Geometria | - ângulos das figuras fractais;<br>- polígonos presentes;<br>- simetrias. |
| 3º bim | - Proporcionalidade | - razões, proporções, porcentagens nas construções;<br>- variação e relação entre grandezas. |
| 4º bim | - Álgebra | - uso de letras e fórmulas na construção das figuras e tabelas;<br>- equações. |

Quadro 4 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 6ª série EF.

| 7ª série EF | | |
|---|---|---|
| *Bimestre* | *Tópicos Curriculares* | *Geometria Fractal Abordada* |
| 1º bim | - Números Racionais<br>- Potenciação | - razões e representação de racionais nas construções;<br>- potências nas regularidades. |
| 2º bim | - Expressões Algébricas | - fórmulas para as regularidades presentes nas construções. |
| 3º bim | - Equações<br>- Gráficos | - uso de equações e sistemas de equações. |
| 4º bim | - Geometria | - Tales e Pitágoras nas construções, medidas;<br>- áreas e volumes. |

Quadro 5 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 7ª série EF.

Na 7ª série podemos realizar um trabalho com a Álgebra mais aprofundado, além de motivações geométricas no conteúdo específico de Geometria do 4º bimestre.

Já na 8ª série, como ilustra o quadro abaixo, temos o conteúdo escolhido para o presente trabalho, Semelhança de Figuras. Além do trabalho desenvolvido neste tópico específico, outras atividades podem ser elaboradas explorando valores numéricos e algébricos nas construções e regularidades. Pode-se também introduzir um estudo de funções, de acordo com o programado para o 2º bimestre.

| 8ª série EF | | |
|---|---|---|
| *Bimestre* | *Tópicos Curriculares* | *Geometria Fractal Abordada* |
| 1º bim | - Números Reais | - conjuntos numéricos, números irracionais;<br>- potenciação. |
| 2º bim | - Álgebra<br>- Funções | - equação do 2º grau;<br>- introdução a funções discretas como variação entre grandezas nas construções e regularidades presentes. |
| 3º bim | - Proporcionalidade na Geometria | - semelhança de figuras, auto-semelhança, proporção;<br>- razões trigonométricas. |
| 4º bim | - Corpos Redondos<br>- Probabilidade | - áreas e volumes das construções;<br>- probabilidades com cálculos das construções. |

Quadro 6 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 8ª série EF.

No Ensino Médio se encontram os conteúdos geralmente trabalhados através da Geometria Fractal: progressões e cálculos com limites. Além destes podemos observar outros momentos nos quais esta geometria pode se inserir, de acordo com os quadros a seguir. Merecem destaque o estudo de Função Exponencial na 1ª série, a Análise Combinatória e Geometria Espacial na 2ª série e certamente os Números Complexos na 3ª série.

| 1ª série EM | | |
|---|---|---|
| *Bimestre* | *Tópicos Curriculares* | *Geometria Fractal Abordada* |
| 1º bim | - Números e Seqüências | - presença de progressões (aritmética e geométrica) nas construções. |
| 2º bim | - Funções | - modelagem de problemas a partir das construções. |
| 3º bim | - Funções Exponencial e Logarítmica | - estudo das regularidades através das funções.<br>- dimensão fracionária |
| 4º bim | - Geometria - Trigonometria | - polígonos presentes, características particulares;<br>- razões trigonométricas. |

Quadro 7 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 1ª série EM.

| 2ª série EM | | |
|---|---|---|
| *Bimestre* | *Tópicos Curriculares* | *Geometria Fractal Abordada* |
| 1º bim | - Trigonometria | - uso de funções. |
| 2º bim | - Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares | - resolução de problemas a partir das construções. |
| 3º bim | - Análise Combinatória e Probabilidade | - problemas de contagem;<br>- Triângulo de Pascal, Binômio de Newton e regularidades. |
| 4º bim | - Geometria Métrica Espacial | - áreas e volumes de poliedros, prismas e pirâmides a partir das construções. |

Quadro 8 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 2ª série EM.

| 3ª série EM | | |
|---|---|---|
| *Bimestre* | *Tópicos Curriculares* | *Geometria Fractal Abordada* |
| 1º bim | - Geometria Analítica | - figuras e construções através de equações. |
| 2º bim | - Equações Algébricas e Números Complexos | - Conjuntos de Julia, Mandelbrot e estudo de equações e funções complexas – introdução. |
| 3º bim | - Estudo das Funções | - estudo qualitativo de funções presentes. |
| 4º bim | - Estatística | - gráficos, tabelas, medidas de tendência;<br>- pesquisas de opinião. |

Quadro 9 – Proposta Curricular e Geometria Fractal na 3ª série EM.

Abordaremos nos próximos capítulos o modo de organização das Folhas de Atividades, bem como os resultados obtidos durante e após sua aplicação junto aos estudantes.

# 3 Folhas de Atividades Elaboradas

Neste capítulo descrevemos de forma sistemática as atividades aplicadas, os objetivos principais de cada uma delas, sua elaboração, o tempo de aplicação previsto e o gasto. Estes últimos dados refletem um fato importante para nós: as mudanças de planos no decorrer do percurso devido a interferências externas ou da própria turma.

O material produzido está organizado no formato de Folhas de Atividades que se constituem de atividades a serem realizadas pelos estudantes com o apoio e orientação do professor.

Há uma construção semelhante, a *Sequência Didática*, parte integrante da Teoria da Engenharia Didática, proveniente da corrente didática francesa, alvo de muitos estudos, mas que não detalharemos aqui. PAIS (2001, p. 101) faz um estudo a respeito:

> Uma seqüência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas de sessões, tendo em vista o seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas comuns no sentido da rotina de sala de aula.

Neste capítulo não discutiremos os aspectos observados durante a aplicação das atividades e sua análise, perante a recepção dos estudantes, sua produção e avaliação, o que será feito em detalhes no capítulo seguinte. As Folhas de Atividades conforme apresentadas aos estudantes, reelaboradas após a aplicação e também com sugestões de solução, por sua vez, estarão disponíveis ao final deste texto, nos Apêndices B, C e D.

Todas elas, contudo, apresentam aspectos em comum, relatados a seguir e que também discutiremos com afinco oportunamente:

a) avaliação das atividades da aula/Folha pelos estudantes;

b) nível crescente na dificuldade das atividades apresentadas; e

c) variedade de tipos de atividades.

Nos quadros a seguir trazemos algumas especificações a respeito de cada uma das Folhas de Atividades elaboradas e aplicadas junto aos estudantes.

| **Folha de Atividades I – Construção do Triângulo de Sierpinski** | |
|---|---|
| OBJETIVOS:<br>- apresentar o tema Geometria Fractal através de exposição com slides pelo professor e participação da classe;<br>- construção no papel com régua e lápis da figura título;<br>- descoberta de propriedades e regularidades presentes na figura e nas imagens vistas na apresentação;<br>- refletir estas regularidades na pintura da figura;<br>- trabalhar os conceitos: segmento, ponto médio, múltiplos e divisores de 2. | |
| TEMPO PREVISTO: 3 aulas | TEMPO GASTO: 5 aulas |

Quadro 10 – Apresentação da Folha de Atividades I.

| **Folha de Atividades II – Questões para investigação – Triângulo de Sierpinski** | |
|---|---|
| OBJETIVOS:<br>- recordar ou apresentar os conceitos de Perímetro de uma Figura Plana e Fórmula;<br>- definir um “buraco” no Triângulo de Sierpinski;<br>- apresentar o criador da figura estudada através de pequena nota histórica;<br>- sistematizar os cálculos feitos com a construção através do preenchimento de tabelas;<br>- encontrar uma regularidade a partir da razão dos perímetros, que levará a posterior definição de Razão de Semelhança;<br>- recordar o uso apropriado de algumas unidades de medida (cm e $cm^2$);<br>- definir o Perímetro de uma figura fractal;<br>- apresentar e compreender noções de limite com relação ao perímetro da figura estudada. | |
| TEMPO PREVISTO: 2 aulas | TEMPO GASTO: 1 aula |

Quadro 11 – Apresentação da Folha de Atividades II.

| Folha de Atividades III – Questões para investigação – Tapete de Sierpinski | |
|---|---|
| OBJETIVOS:<br>- recordar algumas definições pertinentes como: buraco, perímetro, área, segmento de reta, segmentos congruentes;<br>- apresentar o Tapete de Sierpinski recorrendo ao seu processo iterativo e imagens;<br>- rever as fórmulas para o perímetro e a área de um quadrado de lado igual a *x* cm;<br>- confrontar as duas construções vistas: Triângulo e Tapete de Sierpinski e estabelecer semelhanças entre elas;<br>- sistematizar os cálculos feitos com uma construção hipotética através do preenchimento de tabelas;<br>- encontrar uma regularidade a partir da razão dos perímetros e das áreas, conforme anteriormente, confrontando aqui o resultado presente nos perímetros e áreas;<br>- definir a Área do fractal estudado;<br>- como anteriormente, compreender a noção de limite com relação ao perímetro e a área da figura estudada;<br>- refletir sobre as figuras fractais já vistas e elaborar um desenho que traga características fractais (auto-semelhança). | |
| TEMPO PREVISTO: 2 aulas | TEMPO GASTO: 5 aulas |

Quadro 12 – Apresentação da Folha de Atividades III.

| Folha de Atividades IV – Área, Álgebra e o valor do x | |
|---|---|
| OBJETIVOS:<br>- recordar a resolução de uma equação do 2º grau;<br>- a partir disso, apresentar uma definição de Álgebra e seus usos;<br>- rever algumas definições com relação ao Triângulo de Sierpinski usando notação algébrica (fórmulas);<br>- diferenciar situações em que isso é facilmente possível, já conhecido ou não;<br>- apresentar a definição de Área do Triângulo de Sierpinski e pensar seu limite;<br>- preencher tabelas semelhantes às anteriores para o Triângulo e o Tapete de Sierpinski pensando agora na questão da generalização e a partir daí discutir regularidades. | |
| TEMPO PREVISTO: 2 aulas | TEMPO GASTO: 4 aulas |

Quadro 13 – Apresentação da Folha de Atividades IV.

| Folha de Atividades V – Semelhança | |
|---|---|
| OBJETIVOS:<br>- apresentar, através de exposição do professor com slides, algumas questões referentes a Semelhança de Figuras, através das figuras vistas e outros exemplos;<br>- resolver exercícios do material da Proposta Curricular, referentes a semelhança de figuras planas;<br>- rever as características principais de duas ou mais figuras semelhantes com relação a forma, ângulos e lados após a resolução dos exercícios;<br>- definir Razão de Semelhança, a partir dos exemplos e tabelas com fractais anteriormente vistas;<br>- rever a característica principal dos fractais, com relação a semelhança;<br>- elaborar, a partir do que foi visto, um Mapa Conceitual sobre o conceito de Semelhança. | |
| TEMPO PREVISTO: 4 aulas | TEMPO GASTO: 6 aulas |

Quadro 14 – Apresentação da Folha de Atividades V.

| Folha de Atividades VI – O que é, o que é? | |
|---|---|
| OBJETIVOS:<br>- construir figuras fractais ou quase-fractais de forma mais lúdica, a partir do Triângulo de Pascal;<br>- rever os múltiplos de 3 e 2;<br>- apresentar e discutir a própria construção do Triângulo de Pascal, a partir de seus primeiros números preenchidos; encontrar a regularidade ou lei de formação;<br>- apresentar o Triângulo de Pascal e seus criadores através de notas históricas;<br>- encontrar, a partir da soma dos números de cada linha do Triângulo outra regularidade: a presença das potências de 2;<br>- construir um Triângulo de Pascal a partir das propriedades de soma de pares e pares, pares e ímpares, etc. | |
| TEMPO PREVISTO: 2 aulas | TEMPO GASTO: 4 aulas |

Quadro 15 – Apresentação da Folha de Atividades VI.

| **Folha de Atividades VII – Fractais: Dimensão Oculta** | |
|---|---|
| OBJETIVOS:<br>- a partir de um filme (Fractais: Dimensão Oculta), elaborar um Mapa Conceitual a respeito do assunto abordado em todas as folhas: Fractais e Semelhança;<br>- avaliar as aulas, de acordo com uma série de aspectos propostos pelo professor. | |
| TEMPO PREVISTO: 3 aulas | TEMPO GASTO: 2 aulas |

Quadro 16 – Apresentação da Folha de Atividades VII.

Pudemos observar uma variação nos tempos previsto e gasto em cada Folha de Atividades: ora o tempo gasto foi maior, ora menor que o previsto. Destacamos também, que atividades como a exibição do filme (Folha VII) não foram realizadas, podendo assim interferir no tempo citado.

Além dos objetivos de cada Folha de Atividades, colocamos no quadro a seguir a classificação das atividades com suas características principais e também exemplos de cada uma delas.

| TIPO DE ATIVIDADE | CARACTERÍSTICAS |
|---|---|
| Reflexão | - são atividades não muito simples, mas que trazem algum conceito ou idéia fundamental presente na aula;<br>- o estudante deve pensar a respeito, lembrar do estudado na aula, perguntar, procurar outras fontes de informação para responder a pergunta;<br>- Exemplo: O que é um processo iterativo? (Folha III) |
| Revisão | - atividades simples que visam a recordar conceitos já vistos em algum momento da trajetória escolar do estudante e que serão utilizados nestas aulas;<br>- são utilizadas de forma repetitiva: a mesma atividade ou trechos dela podem estar presentes em várias folhas;<br>- Exemplo: resolução da equação do 2º grau $x^2 - 100 = 0$ (Folha IV) |
| Construção/ Observação | - trazem as figuras fractais estudadas;<br>- podem tratar da construção de uma figura ou observação da figura já pronta a partir do processo iterativo que a gera; |

| | |
|---|---|
| | - trazem questionamentos a seguir;<br>- Exemplo: Triângulo e Tapete de Sierpinski (Folha I e III, respectivamente) |
| Preenchimento de Tabelas | - visam a expressar numericamente as questões de semelhança presentes nas figuras;<br>- a partir de seu preenchimento, o estudante deve identificar sequências numéricas e regularidades;<br>- também trazem a questão da generalização, da qual a álgebra cuida e tornamos presente em alguns momentos;<br>- Exemplo: Tabelas das Folhas II, III e IV (Folhas II, III e IV) |
| Questões | - em geral tratam das tabelas ou das figuras estudadas;<br>- visam estabelecer conceitos ou definições, além de aspectos principais referentes ao tema;<br>- trazem questões do Caderno do Aluno;<br>- Exemplo: Questões da Folha II e III; Mapa Conceitual (Folhas II, III e V) |
| Avaliação da Aula | - momento final da Folha de Atividades que visa ouvir a opinião pessoal de cada estudante, que avalia o que foi bom, regular e ruim de cada aula e escreve comentários;<br>- serve como indicador (no final do processo) da aceitação das atividades pelos estudantes;<br>- pode servir para confrontar a produção de cada estudante em cada aula com a sua opinião sobre ela; |
| Avaliação Final | Visa:<br>- recolhimento das opiniões dos estudantes sobre os variados aspectos das atividades desenvolvidas através de questões abertas e fechadas;<br>- avaliar a participação do próprio estudante e da turma;<br>- avaliar a explicação/postura do professor. |

Quadro 17 – Classificação das atividades.

No próximo capítulo discutiremos cada tipo de atividade conforme esta classificação. Prosseguiremos também à análise e discussão de alguns aspectos selecionados a respeito da elaboração e aplicação das atividades.

# 4 Resultados e Discussão: a Transformação na Prática

Este capítulo sistematiza a análise da aplicação das atividades evidenciando três aspectos ou pontos de vista:

a) O processo de elaboração do material;

b) A recepção do material pelos estudantes; e

c) Os indícios de aprendizagem dos estudantes.

Em cada um destes momentos entendemos a importância de considerar, de acordo com Ponte (2002), o papel do professor pesquisador na sua sala de aula e as suas reflexões.

## 4.1 O Processo de Elaboração do Material – a Visão do Professor

Trabalhamos aqui com as idéias colocadas por Ponte (2002) a respeito da prática profissional do professor e de suas responsabilidades ou compromissos, a saber:

a) Condução do processo de ensino-aprendizagem dos estudantes;

b) Avaliação de seus estudantes;

c) Contribuições para a construção do projeto educativo da escola como um todo; e

d) Desenvolvimento da (boa) relação da escola com a comunidade.

Partimos destes pressupostos para a análise que faremos a respeito da elaboração do material de ensino e a sua aplicação, observando aspectos exitosos e passíveis de melhorias.

Claramente um professor deve ter em mente os dois primeiros itens da lista acima proposta por Ponte. Tanto a condução do processo de ensino-aprendizagem dos estudantes, quanto a avaliação dos mesmos, que inclusive estão fortemente interligados, dependem explicitamente do professor que está a frente de sua sala. Embora isso seja inquestionável, podemos discutir formas de se proceder numa ou noutra instância.

Por outro lado, também concordamos com Ponte a respeito de que o cumprimento destes compromissos não se dá de forma tranquila. Os problemas mais variados que surgem não dependem somente da experiência profissional para que sejam sanados de forma satisfatória pois, de acordo com PONTE (2002, p. 1), *“o ensino é mais do que uma atividade rotineira onde se aplicam simplesmente metodologias pré-determinadas”.*

Sendo assim, enquanto educadores devemos pensar, explorar, avaliar e reformular nossa prática profissional, tendo como meta um melhor aprendizado dos estudantes. Para tanto, estar em constante estudo e aperfeiçoamento da nossa prática profissional, de novas formas de trabalho, de uma melhor compreensão de cada estudante e de tudo o que o cerca, são atitudes desejáveis e acreditamos, imprescindíveis ao bom profissional nos dias de hoje.

Estes compromissos do docente são, a nosso ver, responsáveis sobremaneira pelo bom êxito da turma e da escola como um todo. Mas não faremos, no entanto, uma discussão longa a respeito de qualquer um deles, bem como dos dois últimos.

Pretendemos, isto sim, entender o contexto da sala de aula pesquisada e o que a elaboração e aplicação do presente material didático contribuiu para o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes envolvidos, ou seja, no decorrer deste espaço de tempo, entender mudanças necessárias e delinear ações futuras.

Estamos falando, portanto, de um estudo e reflexão sobre a nossa prática que, segundo Ponte, constitui um elemento decisivo da identidade profissional dos professores. Atividade concreta e digna pois, de status de pesquisa ou investigação formal, trataremos de identificar formas de conduta neste processo. De acordo com PONTE (2002, p. 2):

> Uma actividade reflexiva e inquiridora, é geralmente realizada pelos professores de um modo intuitivo e não do modo formal próprio da investigação académica. Na verdade, a investigação dos professores sobre a sua prática, servindo propósitos específicos, não tem que assumir características idênticas à investigação realizada noutros contextos institucionais. Mas tem bastante a ganhar se os professores cultivarem uma abordagem mais cuidada na formulação das suas questões de investigação e na condução dos seus projectos de intervenção nas escolas.

A colocação geral de que os professores atuando junto a escolas básicas não preservam o rigor e a metodologia formal de investigações acadêmicas quando praticam atividades investigativas, não consiste propriamente numa crítica.

Ele identifica a questão e defende que estas pesquisas não precisam apresentar os mesmos moldes das outras já realizadas na universidade. Sabiamente, contudo, orienta na formulação e condução de projetos pautados no cuidado e atenção.

Ponte demarca a importância de investigações sobre a prática para o próprio fortalecimento e aprimoramento desta pelo professor, para o desenvolvimento profissional do mesmo e também para as instituições a que pertencem. E ainda enumera quatro razões para que tal atitude investigativa do professor se realize:

a) para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional;

b) como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional;

c) para contribuírem para a construção de um patrimônio de cultura e conhecimento dos professores como grupo profissional; e

d) como contribuição para o conhecimento mais geral sobre os problemas educativos.

Acreditamos no protagonismo do professor sob vários aspectos, talvez indo além do que Ponte propõe inicialmente. Ao nosso ver este papel de protagonista deve indicar de forma clara e firme todas as posições sociais, políticas e filosóficas do professor para que, defendendo-as, assuma uma postura de coerência frente as suas atitudes profissionais. O professor deve estar capacitado e confiante de que possa interferir em questões curriculares e outras mais pertinentes a sua função.

O desenvolvimento profissional do professor, atualmente, olhando sob o prisma de alguns mecanismos governamentais ou mesmo da sociedade em geral, não se faz visível à comunidade. Assim, um momento de trabalho mais estruturado e elaborado, como uma investigação sobre a sua prática profissional é tratada por Ponte, acarreta este desenvolvimento profissional, organizacional e porque não dizer pessoal, do professor.

Ainda com relação às razões apontadas por Ponte, uma proposta de investigação sobre sua prática traz consigo a colaboração para a construção do patrimônio cultural e científico da classe profissional, tanto com relação a um tema científico específico como com relação a aspectos didáticos ou de problemas educativos.

Estabelecemos, a partir disso, a nossa investigação pautada em seus dois objetivos principais: alteração de um aspecto da prática e compreensão dos problemas que afetam esta mesma prática. Esta prática traz consigo algum aspecto que descontenta o professor, os estudantes ou ambos, quer no aspecto curricular ou do conteúdo, quer no aspecto de dificuldades de ensino-aprendizagem.

Assim direcionamos nossa pesquisa baseados nos seguintes itens:

a) o descontentamento com o processo de ensino-aprendizagem de alguns conteúdos da 8ª série frente a questões como: ausência de pré-requisitos e desmotivação;

b) a proposta de uso de um novo material e avaliação de sua recepção, potencialidades e limitações;

c) a compreensão do processo de elaboração do material como atribuição de sentido a experiência, aprendendo com a prática, refletindo e projetando o futuro; e

d) o questionamento do currículo, a importância dos conteúdos e sua forma de abordagem atual.

Falando assim o leitor poderia pressupor um processo que conduzisse, frente às angústias e inquietações colocadas no decorrer do texto, a algo concreto e a margem de dúvidas: a resposta de sucesso e correta ao problema. Não é isso o que acontece: deparamos ao final do estudo com novos olhares sobre o problema, algumas propostas exitosas em determinados contextos e mais questões para estudo e pesquisa.

Isto não prejudica ou anula a aceitação do processo investigativo. As razões para se pesquisar desta forma, colocadas anteriormente, não perdem seu efeito ou validade, ao contrário, são revigoradas.

Ainda a respeito da validação da pesquisa, Ponte aponta três grupos de críticas a esta pesquisa realizada por professores, que dizem respeito aos conhecimentos gerados, métodos e fins da investigação.

Com relação ao primeiro grupo, trata-se do quão válido é o conhecimento gerado por uma pesquisa deste tipo, ou se os conhecimentos específicos tratados podem ser considerados relevantes.

A discussão sobre este tema já geraria outro trabalho, mas basta mencionar autores como Schön que define a *racionalidade técnica*, ou a questão do quanto um conhecimento é científico e a partir de quando ele passa a não ser. Há ainda autores que sugerem que a sociedade atual deve encontrar uma nova forma de se relacionar com o conhecimento científico e o senso comum.

Ponte (2002, p. 10) rebate a estas críticas com o argumento que *“diversas formas de conhecimento podem assumir legitimidade”* dependendo da comunidade em que nos encontramos e do fim deste conhecimento.

Esta mesma comunidade de referência vem sanar a questão da possível falta de rigor nos métodos empregados pelo professor em sua pesquisa. Assim, deve-se então defini-los, explicitá-los à comunidade e respeitá-los.

Com relação às finalidades de uma investigação deste tipo, reafirmamos o colocado anteriormente, quanto à possível proposta de soluções e ao desenvolvimento profissional.

A partir destas colocações, podemos entender a elaboração do presente material didático nos seguintes momentos:

a) o estudo do tema, do conteúdo, dos currículos e de atividades já existentes;

b) a elaboração das atividades em si, sua escrita, testes e confecção do material; e

c) a reelaboração a partir dos testes e aplicação.

O estudo teórico do tema Geometria Fractal pode ser feito através dos trabalhos de Mandelbrot e outros autores que apresentam uma abordagem ampla do assunto. Certamente não são referências para um trabalho com estudantes da Educação Básica.

O conteúdo abordado na 8ª série do Ensino Fundamental é facilmente encontrado em livros didáticos, disponíveis em grande quantidade e qualidade nos dias de hoje. Os documentos oficiais, abordados no Capítulo 2, também deixam claro o que se espera dos estudantes e professor com relação aos conteúdos a trabalhar. Entendemos este estudo como requisito para o conhecimento do conteúdo que deve ser trabalhado e as formas que ele se apresenta.

Com relação a materiais específicos que tragam a Geometria Fractal em atividades para estudantes da Educação Básica, podemos citar a obra de Ruy Madsen Barbosa. Apesar de não ser considerado um livro didático, traz considerações relevantes a respeito da teoria, que interessariam a princípio somente o docente, e atividades que podem ser realizadas com estudantes.

Estas atividades estão divididas em dois grupos: atividades de desenho, construção e observação, para tratar de questões de semelhança, seqüências numéricas e limites, com as quais trabalhamos; e atividades computacionais.

Retomamos ainda trabalhos anteriores do professor orientador, a respeito de atividades envolvendo Geometria Fractal que possam ser trabalhadas na Educação Básica. Estes trabalhos fazem parte de Anais de Congressos e materiais de disciplinas lecionadas na Universidade pelo mesmo.

Após este estudo levantamos os aspectos fundamentais da Geometria Fractal a abordar:

a) o conceito de fractal geométrico como uma figura que possua certas características como a auto-semelhança;

b) o aspecto visual apresentado nas figuras que possa motivar os estudantes; e

b) o uso de construções, desenhos e sequências numéricas que levem ao conceito de Semelhança como é proposto nos currículos.

O segundo e terceiro momentos citados, a elaboração e reelaboração das Folhas de Atividades, são mais complexos e se confundem.

Estas Folhas de Atividades constituem-se de listas de exercícios, problemas e desafios a serem desenvolvidas com os estudantes ou exclusivamente por eles, para posterior avaliação pelo professor.

Analisaremos a seguir cada um dos tipos de atividade presentes no material, conforme a classificação proposta no Capítulo 3.

### 4.1.1 Atividades de Reflexão

As atividades de reflexão não foram simples de trabalhar devido ao fato de que os estudantes em geral não estão acostumados com este tipo de questionamento. Nestas questões de reflexão propostas não há uma resposta pronta. Precisamos nos afastar um pouco do contexto em que nos encontramos resgatando conceitos ou conteúdos vistos em outros momentos e fazendo relações entre eles.

Assim, mesmo com todas as intervenções do professor, as respostas apresentadas pelos estudantes foram tímidas. Contudo, o objetivo delas era ambicioso, ou seja, o de promover espaços de discussão, sistematização e escrita de um conceito ou idéia no decorrer das aulas.

Acreditamos que o professor deva propor este tipo de atividade regularmente, para que os estudantes se habituem a desenvolver esta forma de pensamento mais reflexivo, crítico e independente dos formatos usuais das atividades apresentadas.

Destacamos que mudanças de concepção por parte dos estudantes, e mesmo do professor, demandam um longo período de tempo. Não podemos esperar resultados imediatos numa proposta curta como esta.

### 4.1.2 Atividades de Revisão

A importância das atividades de revisão está no fato de que queríamos que os estudantes conectassem os conceitos estudados no momento com outros já vistos e que entendessem estas conexões como um facilitador da aprendizagem do novo conteúdo.

Assim, a partir da revisão e também de uma melhor compreensão de conceitos como medida, comprimento, perímetro, área, forma das figuras, etc, ele pode entender melhor as condições de semelhança de duas ou mais figuras, a razão de semelhança, etc. Em outras palavras, destacamos assim a presença e importância dos pré-requisitos.

Consideramos ainda, de fundamental importância no momento em que os estudantes pesquisados estão, ou seja, o final da 8ª série, a retomada de conceitos que provavelmente não ficaram claros para eles antes. Não podemos simplesmente ignorar que muitos estudantes chegam à 8ª série sem os pré-requisitos necessários ao domínio ou pelo menos uma desejável compreensão dos conteúdos que são usualmente trabalhados.

Queremos que o estudante conviva mais de perto com estes conceitos durante toda a aplicação das atividades e compreenda que na Matemática dependemos muitas vezes de noções primitivas para construir ou trabalhar com uma noção mais elaborada.

A participação dos estudantes nestas atividades foi bem interessante: como a proposta era que a classe interagisse a partir dos questionamentos do professor, esperávamos que todos respondessem as questões de revisão prontamente.

Não foi isso que aconteceu; sempre havia alguns poucos estudantes que respondiam, nem sempre os mesmos, mas os demais ficavam em silêncio esperando estes responderem e claro, a confirmação do professor, para daí passarem à anotação das respostas.

Isto pode nos dizer duas coisas, considerando-se o cenário da pesquisa como um todo:

a) o estudante realmente não se lembra da resposta e, mais que isso, do conceito, mesmo com algumas indicações ou discussões anteriormente presididas pelo professor com o auxílio daqueles poucos que responderam;

b) o estudante geralmente não confia na sua concepção, já que não escreveu a sua conclusão, nem na resposta do colega, já que espera a conclusão do assunto pelo professor.

Percebemos então o papel centralizador que o professor assume frente a classe. Neste caso em particular, entendemos a discussão promovida pelo professor como uma forma de instigar os estudantes a começarem a resolução das atividades, uma vez que muitos não se animam a fazer a lição do dia simplesmente ao vê-la na sua frente.

Aqui fica claro como é difícil para o professor pesquisador da própria prática levar tudo isso a cabo: a elaboração do material (com os seus objetivos e cronograma já definidos), sua aplicação e principalmente, esta retomada das atividades e avaliação, onde deve, de forma imparcial, falar de seus tropeços e propor soluções. Afinal, segundo PONTE (2002, p. 19):

> Dito de outro modo, na investigação não nos ocupamos só de obter certezas, mas perseguimos diversos fins – a compreensão de uma situação ou a resolução de um problema concreto, associados ou não à nossa prática. Os critérios de qualidade da investigação devem estar alinhados com essa diversidade de finalidades e não apenas centrados na questão da validade e certeza.

### 4.1.3 Atividades de Construção/Observação

De acordo com a proposta inicial estas atividades de construção/observação são o foco central de todo o trabalho desenvolvido. Nestas atividades trabalhamos mais de perto com os conceitos de interesse.

Nestes momentos já imaginávamos que as discussões seriam mais produtivas, integrando professor, estudantes e o material. A partir de questionamentos propostos pelo professor ou suscitados pelos próprios estudantes, as respostas e soluções surgiriam através da construção das figuras pelos estudantes, que pretendíamos dinâmica, animada e produtiva.

Consideramos neste aspecto da classificação três momentos distintos:

a) observação e visualização das figuras fractais apresentadas nos slides e no quebra-cabeça;

b) construção do Triângulo de Sierpinski no papel; e

c) observação do Tapete de Sierpinski na Folha de Atividades através de uma sequência de figuras e de seu processo iterativo.

Entendemos a separação em três momentos porque foram, de fato, experiências diferentes. Nos slides, apresentamos muitas figuras fractais atraentes pela beleza e algumas com complexidade de construção.

No caso do Triângulo de Sierpinski, optamos por sua construção no papel, passo a passo e sem a apresentação do processo iterativo que o gera. Já o Tapete de Sierpinski foi apresentado através de figuras e seu processo iterativo.

Embora estas atividades já estejam descritas em outros trabalhos[34] e admitindo vários contextos de apresentação, destacamos nosso objetivo nesta adaptação: os estudantes devem assimilar a construção com todas as suas características como processos de medição, uso da régua, pintura, processo iterativo e a partir disso, observar os aspectos de semelhança.

### 4.1.4 Atividades de Preenchimento de Tabelas

Esta foi a parte mais complexa na elaboração das atividades, porque, a partir de atividades já existentes que abordavam um conteúdo mais avançado do

[34] Barbosa (2005), Fernandes (2006), Salvador (2009) e Gomes (2009), entre outros.

que o pretendido, tivemos a tarefa das adaptações para a realidade com a qual trabalharíamos.

Esta adaptação necessitava cumprir duas funções: limitar-se aos conceitos desejados e ser o mais didática possível. Por este motivo algumas tabelas foram repetidas durante as atividades ou separadas em partes, para uma melhor compreensão de cada tópico de interesse no momento.

No entanto, mesmo com testes e reelaborações, algumas incorreções ainda persistiram, sendo percebidos somente com os estudantes no momento da aplicação. Isto nos alerta para o fato de que uma atividade, para obter êxito, precisa de várias revisões e testes; de ser pensada sob vários pontos de vista para ser escolhido o melhor ou mais adequado a se trabalhar.

Outra dificuldade na elaboração destas tabelas é que queríamos que se limitassem a poucos cálculos, então não poderiam ser muito longas. Em contrapartida, era necessário que os estudantes a experimentassem, compreendessem e visualizassem as regularidades presentes nas sequências numéricas obtidas nos poucos passos feitos no processo de construção e observação.

Finalmente, após as correções ou maiores esclarecimentos no decorrer da aplicação, podemos levantar alguns pontos para discussão:

a) os estudantes de forma geral apresentaram dificuldades no seu preenchimento;

b) parte dos cálculos foram suprimidos pelo professor no decorrer da aplicação para que a atividade não se tornasse exaustiva e desinteressasse à classe;

c) a etapa que consistia em obter generalizações, através de fórmulas algébricas, de forma geral, não trouxe bons resultados, o que induz que a formação anterior dos estudantes não os preparou para o assunto.

A seguir apresentamos alguns recortes destes momentos problemáticos. Começamos com a tabela que pedia para que os estudantes relacionassem os perímetros dos triângulos obtidos em cada passo da construção do Triângulo de Sierpinski a partir da relação $\frac{P_{i+1}}{P_i}$.

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| PERÍMETRO | - | 24 | 12 | 6 |
| RELAÇÃO $P_{i+1}/P_i$ | - | 12/24 = 1/2 | 6/12 = 1/2 | - |

Tabela 1 – Relação entre perímetros, Apêndice B, Folha II.

Nesta tabela, os estudantes deveriam encontrar a razão $\frac{1}{2}$ presente na divisão dos perímetros do Triângulo de Sierpinski entre um passo e o anterior. Além da dificuldade na compreensão e leitura da tabela, que apresenta problemas, houve uma confusão dos estudantes com a divisão dos números, a respeito do próprio conceito de divisão.

Houve alguns aspectos melhorados nas Folhas seguintes, a saber:

a) o passo 0 não precisaria constar da tabela, já que não seria usado e poderia confundir os estudantes;

b) no passo 3, a célula da relação que deveria ser encontrada também poderia estar destacada de modo que não gerasse dúvidas a respeito de seu não-preenchimento, já que não temos dados disponíveis para isso;

c) deve haver uma explicação extra a respeito da notação $\frac{P_{i+1}}{P_i}$.

Podemos observar estas alterações na reelaboração das folhas presente no Apêndice D.

A seguir apresentamos algumas soluções dos estudantes. A digitalização (a) traz a solução ideal, ao passo que a digitalização (b) traz uma solução incompleta: o estudante não conclui os cálculos.

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| PERÍMETRO | 48 | 24 | 12 | 6 |
| RELAÇÃO $P_{i+1}/P_i$ | $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$ | $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ | $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ | — |

(a)

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| PERÍMETRO | 48 | 24 | 12 | 6 |
| RELAÇÃO $P_{i+1}/P_i$ | 1/2 | 12/24 | 6/12 | — |

(b)

Figura 17 – Soluções dos estudantes.

A tabela a seguir, que trata das generalizações a respeito dos cálculos com o Triângulo de Sierpinski e consta da Folha IV, também apresentou alguns problemas de elaboração, apesar de testados.

Aqui a dificuldade dos estudantes com as questões de generalização nos fez suprimir da atividade as linhas que envolviam o Perímetro e a Área Total da figura. Os estudantes também apresentaram dificuldades nos outros cálculos.

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | 0 | 1 | 3 | $9 = 3^2$ | $3^{n-1}$ |
| LADO | $x$ | $x/2$ | $x/4$ | $x/8$ | $x/2^n$ |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | 0 | $3x/2$ | $3x/4$ | $3x/8$ | $3x/2^n$ |
| PERÍMETRO TOTAL | $3x$ | - | - | - | - |
| ÁREA DE CADA BURACO | 0 | $A/4$ | $A/16$ | $A/64$ | $A/4^n$ |
| ÁREA TOTAL | $A$ | - | - | - | - |

Tabela 2 – Generalizações a partir do Triângulo de Sierpinski, Apêndice B, Folha IV.

Nas digitalizações a seguir podemos observar alguns trabalhos dos estudantes. A figura 18 mostra uma solução desejável, a partir das restrições sugeridas pelo professor frente às dificuldades da turma.

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | 0 | 1 | 3 | 9 | |
| LADO | $x$ | $\frac{x}{2}$ | $\frac{x}{4}$ | $\frac{x}{8}$ | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | $3x$ | $\frac{3.x}{2}$ | $\frac{3x}{4}$ | $\frac{3x}{8}$ | $\frac{3.x}{2^n}$ |
| PERÍMETRO TOTAL | | | | | |
| ÁREA DE CADA BURACO | $A$ | $\frac{A}{4}$ | $\frac{A}{16}$ | $\frac{A}{64}$ | |
| ÁREA TOTAL | | | | | |

Figura 18 – Solução desejável de um estudante.

A digitalização a seguir mostra uma possível confusão feita pelo estudante entre os dados do Triângulo e do Tapete de Sierpinski, como podemos observar na linha Lado, onde o estudante fez os cálculos para o Triângulo de Sierpinski (divisão por 2) a partir do valor do lado proposto para o Tapete (24 cm). Além disso estão presentes outros cálculos confusos nas linhas Perímetro de cada buraco e Perímetro total.

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | 0 | 1 | 3 | 9 | |
| LADO | 24 | 12 | 6 | 3 | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | 0 $x$ | $12.3 = 36$ $\frac{x}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{x}{8}$ | |
| PERÍMETRO TOTAL | $3x$ $3.24=72$ | $4+36$ $\frac{3.x}{2}$ | $\frac{3.x}{4}$ | $\frac{3.x}{8}$ | |
| ÁREA DE CADA BURACO | 0 $A$ | $\frac{A}{4}$ | $\frac{A}{16}$ | $A$ | |
| ÁREA TOTAL | | | | | |

Figura 19 – Solução incorreta de um estudante.

Já esta digitalização mostra um estudante que certamente desanimou-se no início do trabalho, não chegando a concluí-lo.

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | 0 | 4 | | | |
| LADO | 24 | 12 | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | 0 | 6 | | | |
| PERÍMETRO TOTAL | 3 - 24:12 | 3 | | | |
| ÁREA DE CADA BURACO | 0 | | | | |
| ÁREA TOTAL | | | | | |

Figura 20 – solução incompleta de um estudante.

### 4.1.5 Atividades de Questionamentos

As questões incluídas nesta categoria fazem parte das conclusões a que a classe deveria chegar após a construção e/ou observação das figuras fractais e o preenchimento das tabelas. Tratam das regularidades presentes que levarão à definição de razão de semelhança e da idéia de área e perímetro das figuras fractais e seu comportamento numa situação limite.

Também nesta classificação das atividades incluímos alguns exercícios contidos no Caderno do Aluno (ver Anexo A) a respeito de figuras semelhantes, basicamente lidando com ampliação e redução, condições para a semelhança e cálculos a partir da proporcionalidade ou razão de semelhança.

Estas atividades foram escolhidas por integrarem o material de estudo que os estudantes da rede estadual recebem bimestralmente e também porque expressam o que há de comum em exercícios sobre o tema Semelhança, tratados usualmente na 8ª série.

### 4.1.6 Avaliação da aula

A avaliação de cada aula feita pelos estudantes foi para nós um momento de fundamental importância. Ela nos traria subsídios para compreender um pouco a questão da motivação dos estudantes, suas opiniões, comentários, pontos positivos e negativos sobre a aula.

O formato escolhido para a avaliação da aula, como podemos perceber no Apêndice B e nas digitalizações a seguir, passou por várias etapas até a escolha do que julgamos melhor, que caminhou até o final das atividades.

Queríamos desde o início um espaço pequeno para avaliação da aula, para não dar aos estudantes a sensação de um trabalho longo no momento de colocarem suas opiniões.

Elaboramos assim duas versões de avaliação: na primeira, os itens da aula constavam por escrito; na segunda os estudantes comentariam sobre o que a aula apresentou de bom, regular e ruim[35] através de *smiles*. Esta segunda versão foi a que melhor expressou nossos objetivos com relação à avaliação da aula pelos estudantes, e a que permaneceu até o final das atividades (ver Apêndice B).

AVALIAÇÃO: O que achou da aula?

1- apresentação:______________________________

2- construção: ______________________________

3- nível de dificuldade:______________________________

Figura 21 – Primeiro modelo de avaliação.

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |
| | | |

Figura 22 – Segundo modelo de avaliação.

Destacamos aqui que a elaboração de partes das últimas Folhas de Atividades ocorreu após o início da aplicação das atividades. Este fato trouxe como ponto positivo a melhoria de alguns aspectos, como a avaliação da aula. Mas

[35] ☺ Bom: aspectos positivos da aula, relevantes, atraentes, em que o estudante teve êxito ou gostou bastante.

😐 Regular: aspectos que não apresentaram atratividade ou relevância para o estudante sem que seja considerado ruim ou desgastante.

☹ Ruim: aspectos negativos da aula, considerados pelo estudante sem atrativo, relevância e também desmotivantes ou em que ele não obteve êxito.

certamente entendemos o cuidado que deve pautar a preparação do material a ser levado para a sala de aula, com relação à correção e cronograma, por exemplo.

Ainda com relação à segunda versão da avaliação da aula observamos uma desatenção dos estudantes no preenchimento. Apesar da orientação sistemática do professor, alguns estudantes simplesmente assinalaram a opção que mais lhes conviesse, não escrevendo comentários.

Não conseguimos identificar o que houve, visto que foi explicado aos estudantes a forma correta do preenchimento, depois que verificamos a primeira folha entregue de forma incompleta.

### 4.1.7 Avaliação Final

A avaliação final foi pensada com vista a complementar a avaliação de cada Folha de Atividades pelos estudantes. Esta avaliação está dividida em duas partes.

A primeira parte trata de classificar com os conceitos ótimo, bom, regular ou ruim[36] vários aspectos do conjunto de aulas e escrever comentários, críticas ou sugestões sobre cada um deles. A segunda parte da avaliação traz questões abertas a serem respondidas pelos estudantes.

Assim, na primeira parte pedimos que os estudantes avaliassem e comentassem os seguintes aspectos:

a) slides e sons
b) filmes: Fractais: Dimensão Oculta e outros[37]
c) material concreto (quebra-cabeças fractais)
d) construção gigante[38]
e) atividades com régua
f) outras Folhas de Atividades
g) atividades do Caderno do Aluno e Livro Didático

---

[36] Houve aqui uma mudança com relação aos conceitos apresentados na avaliação de cada aula. A novidade é que o conceito Ótimo vem representar algo plenamente satisfatório ao estudante, que ele gostou bastante e desenvolveu plenamente, ou seja, é um conceito superior ao Bom apresentado anteriormente.

[37] Esta atividade não ocorreu devido ao tempo escasso ao final da aplicação das atividades em sala de aula.

[38] Esta atividade foi parcialmente desenvolvida e julgamos conveniente não incluí-la aqui. Trata-se de construções que podem ser feitas com latas de refrigerante, garrafas pet, etc. Uma imagem pode ser vista em: < http://matematicas-maravillosas.blogspot.com/2009_03_01_archive.html>

h) mapas conceituais
i) nível de dificuldade das aulas
j) explicação do professor
l) presença e ajuda dos convidados[39]
m) participação da turma (disciplina, atenção, etc.)
n) sua participação (disciplina, atenção, etc.)

A segunda parte da avaliação, por sua vez, trouxe aos estudantes as seguintes questões abertas:

a) que conceito ou conceitos ficaram claros para você?
b) você ainda tem dúvidas? No que?
c) escreva aqui seus comentários gerais sobre as aulas, críticas e sugestões:

Nas próximas seções, discutiremos a aceitação do material pelos estudantes e os momentos da avaliação das atividades e dos registros do professor. Também trataremos de aspectos específicos colocados pelos estudantes em suas produções sob o ponto de vista de algumas atividades buscando indícios da aprendizagem dos conteúdos vistos.

## 4.2 A Recepção das Atividades pelos Estudantes

Nesta sessão abordamos o que talvez seja o ponto de partida para a realização do trabalho, porém o mais delicado de ser tratado. Tratamos aqui da motivação dos estudantes, do seu interesse pelas atividades propostas, do seu ânimo e desafio em resolvê-las, na busca pelo sucesso. Poderíamos também pensar nas razões que levam o estudante ao extremo oposto, o fracasso escolar[40].

Todas as atividades propostas, além de explorar determinados conceitos matemáticos, traziam um aspecto de fundamental importância na sala de aula, e com o qual o professor trava uma batalha diária: a motivação dos estudantes. Queremos que o estudante se interesse pelos assuntos das aulas, mas nem sempre sabemos como fazê-lo.

[39] Trata-se da presença do estagiário de um curso de licenciatura da UFSCar que realizava suas atividades de observação e regência na escola. Durante a aplicação das atividades ele não esteve presente.

[40] Charlot, em *Da Relação com o Saber*, discorre sobre o fracasso escolar e suas causas, bem como do Sujeito e, como o título sugere, da sua relação com o saber. Lieury e Fenouillet, por sua vez, no livro *Motivação e Aproveitamento Escolar* definem o termo e apresentam algumas pesquisas envolvendo atividades com estudantes.

Alguns fatores levavam os estudantes a realizarem com o maior êxito possível as tarefas escolares: a boa nota, o sucesso perante a classe e a família, a futura ascensão profissional. Na nossa própria experiência e contato com outros profissionais constatamos que tais fatores perderam quase ou totalmente a relevância nos dias de hoje.

Os estudantes não se preocupam, em geral, com as boas notas, porque sabem que elas não serão fundamentais para sua aprovação ou retenção, de acordo com as regulamentações em vigor.

A noção de sucesso perante a classe perpassa por muitos outros pontos ou atitudes do estudante que não as boas notas ou o aprendizado.

A própria noção de família e presença desta junto aos nossos estudantes de escola pública sofre modificações atualmente.

Observamos ainda certa dificuldade dos estudantes no período escolar analisado em relacionar bom rendimento na escola com possibilidades profissionais de sucesso no futuro.

Além disso, mesmo o papel do professor vem sofrendo mudanças: antes o professor poderia simplesmente exigir a execução da tarefa que a classe, obediente e silenciosamente, entregaria a solução no prazo estipulado. Hoje os estudantes (com certa razão) não aceitam tal postura: querem entender a relevância do que estão fazendo, querem discutir o assunto, e muitas vezes também, não se interessar e executar o proposto.

Entendemos que neste cenário complexo e longe de uma análise definitiva, o professor deva buscar todas as alternativas possíveis, o que requer bastante reflexão e estudo, para que os estudantes sintam-se animados a resolver as atividades propostas.

Estas podem se basear na sua relevância frente ao cotidiano dos estudantes, no seu lado lúdico ou interessante de alguma forma e nas suas conexões com a tecnologia, entre outros.

Assim elaboramos as atividades aqui relatadas e discutidas, pensando na sua importância como parte do conteúdo da 8ª série, como pré-requisitos para níveis de ensino posteriores e, como um fator motivador e interessante de alguma forma aos estudantes. A apresentação de figuras visualmente elaboradas ou complexas, as construções e descoberta de regularidades auxiliam neste último aspecto colocado.

Apresentamos a seguir algumas falas dos estudantes durante a aplicação das atividades e também na avaliação final realizada por eles. Elas confirmam o alcance do nosso objetivo, mostrando o quanto as atividades renderam frutos, mas também indicam que os estudantes não se empenharam ou ficaram motivados em alguns momentos.

Consideremos a Folha de Atividades I, que tratava da construção do Triângulo de Sierpinski. Foi nítida a participação dos estudantes tanto durante a apresentação de slides com figuras fractais como no decorrer da construção.

Quando alguém cometia um erro solicitava uma outra folha em branco para que pudesse recomeçar o trabalho e fazê-lo melhor, demonstrando assim grande interesse.

Mas em contrapartida, no momento em que avaliaram a aula e puderam escrever a respeito de cada aspecto, limitaram-se a pequenos comentários sem riqueza de detalhes ou muita objetividade, como podemos ver nos textos selecionados:

*- Foi muito legal e interessante*[41]
*- Muito legal*
*- Foi boa*
*- Bonito*
*- Foi interessante, importante*
*- Foi bom e bem clara*[42]
*- A apresentação dos vídeos foi muito legal*
*- Foi muito legal e muito interessante*

Também encontramos comentários que não ficaram claros, como os estes:

*- Muita repetição*
*- Foi muito legal porque das coisas que repetem*

---

[41] Os comentários feitos pelos estudantes não serão identificados. Cada linha representa o comentário de um estudante diferente.

[42] Optamos por preservar os comentários dos estudantes como colocado por eles, inclusive com erros gramaticais.

*- Muito legal e reprodutiva*

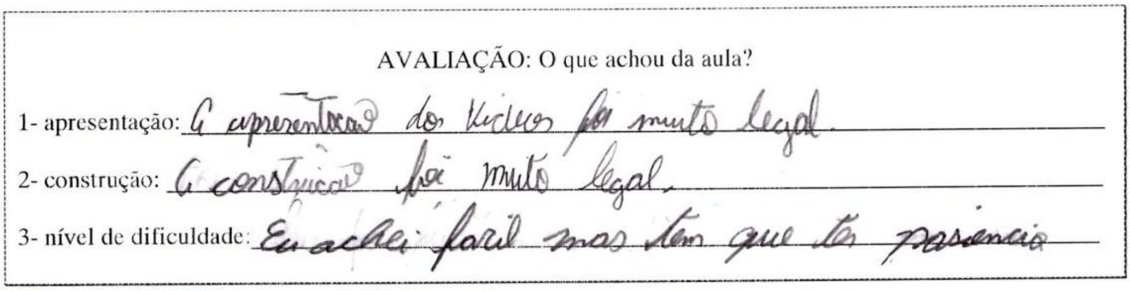
Com relação ao primeiro comentário, não sabemos dizer se o estudante se referia à repetição presente nas figuras, o que caracteriza a auto-semelhança, ou a uma aula cansativa e repetitiva da qual não estava gostando.

O terceiro comentário também abre espaço para mais de uma interpretação: o estudante quis dizer “produtiva”, se referindo a uma aula que trouxe momentos de trabalho e estudo por parte dele e da classe; ou mesmo “reprodutiva” no sentido da reprodução da figura estudada.

Outro fato interessante é que, mesmo após a explicação do professor pedindo que os estudantes escrevessem comentários, 12 deles (mais de 30% da turma) não escreveram comentários neste item da avaliação da aula, que se referia especificamente à apresentação no projetor feita pelo professor.

Mesmo através de comentários curtos, constatamos a positividade presente neles, com todos os estudantes que escreveram destacando que a aula foi boa, interessante, legal, produtiva, bonita, etc. Analisaremos na seção seguinte outros aspectos desta Folha de Atividades, mais relacionados a construção em si e também ao nível de dificuldade encontrado pelos estudantes, que também nos fez concluir que a aula atingiu seus objetivos.

Mostramos a seguir duas digitalizações da avaliação desta aula feita pelos estudantes. Percebemos na Figura 23 (a) comentários positivos e com uma escrita razoável, apesar de incorreções gramaticais. Já a Figura 23 (b) traz comentários mais curtos e imprecisos, como no item Nível de Dificuldade.



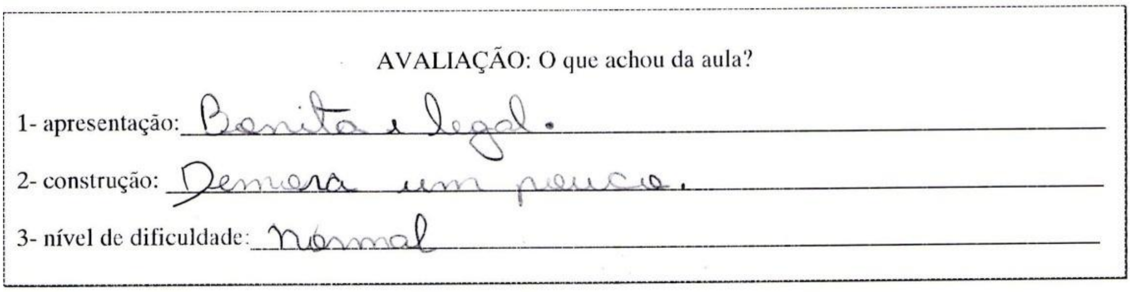
AVALIAÇÃO: O que achou da aula?

1- apresentação: A apresentação dos videos foi muito legal.

2- construção: A construção foi muito legal.

3- nível de dificuldade: Eu achei facil mas tem que ter pasiencia

(a)



AVALIAÇÃO: O que achou da aula?

1- apresentação: Bonita e legal.

2- construção: Demora um pouco.

3- nível de dificuldade: normal

(b)

Figura 23 – Exemplos de avaliações feitas pelos estudantes.

Passemos a um aspecto da análise da Folha de Atividades II, no qual pedimos aos estudantes que, após a sua realização, elencassem os aspectos negativos (ruins) da aula. Os comentários foram os seguintes:

*- Nada (5)* [43]

*- Não teve nada de ruim (4)*

*- Mais ou menos (2)*

*- O que foi ruim foi fazer as contas*

*- Não gostei das somas*

*- Não tinha nada de ruim, eu só achei complicado a parte de fazer os triângulos pequenos*

*- Eu estava um pouco com sono*

*- Eu cansei*

*- E não foi bom falar de buracos*

[43] Entre parênteses indicamos o número de estudantes que escreveu o comentário; quando não há menção, somente um estudante comentou desta forma.

Aqui encontramos 8 estudantes que não escreveram comentários mas o fato relevante é que, ao pedir que escrevessem sobre os aspectos negativos da aula, muitos escreveram que não houve nada de negativo.

Mesmo os aspectos ditos negativos por eles fazem referência mais a algum conteúdo (“contas”, “somas”, “triângulos pequenos”) do que a algo propriamente negativo na elaboração ou execução da aula. Entendemos que são conteúdos que, de alguma forma, os estudantes encontraram dificuldades.

Um outro aspecto relevante na discussão da recepção das atividades pelos estudantes e no empenho deles em realizá-las está na resposta dada por eles a questão: “c) escreva aqui seus comentários gerais sobre as aulas, críticas e sugestões:”, presente na última Folha de Atividades. Seguem os comentários:

*- as aulas foi boa e eu não tenho nada para criticar ou fazer sugestões.*
*- as aulas foram boas para os estudantes que não querem nada com nada.*
*- foi boa, aprendi e guardei algumas coisas na cabeça.*
*- ta bom tivemos bastante atividades legais.*
*- eu gostei muito, o professor foi muito legal ele ensinou muita coisa para gente. Muito obrigado.*
*- as aulas foram muito boas e produtivas mas poderia haver mais a participação dos estudantes, mas a explicação do prof foi muito boa.*
*- foi bom maioria da sala participou professor explica muito bem continue assim.*
*- ótimo, porque aprendi me diverti comentei com amigos e enfim!*
*- as aulas foram produtivas.*

Percebemos aqui, ao contrário dos comentários exibidos anteriormente, respostas maiores e melhor elaboradas. Percebemos também comentários muito positivos com relação à participação da sala, até para os estudantes que “não querem nada com nada”. Ainda incentivam o professor, elogiando sua explicação e também o lado mais atraente e visual: “diverti”, “legal”.

Não obstante, também foram citados alguns aspectos negativos:

*- a falta de atenção de alguns estudantes.*
*- as aulas foi muito regular viu.*
*- algumas aulas foram legais mas em algumas eu não entendi a matéria.*

*- eu gostei de algumas aulas, porque eu aprendi o que foi explicado e nas outras que eu não aprendi foi chato.*
*- eu não tenho comentários bom e nem ruim continue assim.*
*- as aulas são boas mas os alunos precisam de lazer e não só escrever e de contas brincar é uma boa idéia.*

Há que se destacar nestes comentários: o estudante diz que as aulas em que ele aprendeu, ele gostou; por outro lado, nas que ele não aprendeu nada, a aula foi chata. Isto nos leva a crer que a disposição do estudante em falar bem da aula, gostar ou manifestar mais interesse tem a ver com o aprendizado que ele sentiu com a referida aula.

Outros comentários podem acenar a indiferença do estudante com relação ao assunto: “as aulas foi muito regular viu” e “eu não tenho comentários bom e nem ruim continue assim”.

O último comentário, no entanto, é o que desperta maior interesse e se torna bastante controverso com relação à proposta das atividades e a percepção das mesmas pelos estudantes: “as aulas são boas mas os alunos precisam de lazer e não só escrever e de contas brincar é uma boa idéia”.

O estudante diz que eles precisam de lazer, de brincar; ora, justamente é esta a idéia por trás de muitas das atividades. Estas levam em conta este lado mais lúdico, da brincadeira, da construção a colorir, das imagens instigantes, enfim, atividades que fariam o estudante pensar justamente no contrário do que este citou: as atividades podem ser divertidas.

Outra ocorrência que merece destaque no decorrer da aplicação das atividades, no que se refere à recepção destas pelos estudantes é a questão do cansaço dos estudantes em determinados momentos, que se dispersavam ora devido ao nível de dificuldade da atividade, ora devido ao contexto em geral das aulas. O seguinte fragmento do Diário de Bordo do professor[44] exemplifica este fato:

*Continuamos então, após a entrega da folha para eles, com a tabela 2 na lousa, para fazermos juntos; eles participam pouco no início. Os exercícios das Folhas ficam mais difíceis e eles estão sentindo isso, desanimando um pouco na participação. Mas fazem.*

---

[44] Estes fragmentos foram retirados do Diário de Bordo que foi elaborado pelo professor durante a aplicação das Atividades e após, com a digitação e inclusão de mais reflexões.

Este trecho nos mostra que em determinados momentos os estudantes se cansam, ou porque a atividade é mais complexa ou porque perderam o interesse.

Cabe ao professor interromper a aula que chega a este ponto de forma que ela não seja mais prejudicada, ou seja, mudar o ritmo de explicação ou a metodologia. Enfim, esta flexibilidade já deve estar presente na rotina do professor.

Por outro lado, encontramos trechos representativos de como as aulas podem se tornar prazerosas para professor e estudantes:

*Começamos com as lembranças da aula anterior (apresentação, imagens, construção, que eles se lembram bastante). Eles mesmos já perguntam da continuação do desenho, mostrando-se animados a continuar. (...)*

Este trecho foi escrito na segunda aula de aplicação das atividades, quando os estudantes continuariam a construção do Triângulo de Sierpinski. A aula se iniciou com a retomada dos pontos importantes da aula anterior, momento em que os estudantes se mostram empolgados a participar com comentários daquela aula e também continuar com a construção.

O trecho a seguir relata o momento da Folha de Atividades VI onde os estudantes estavam construindo e colorindo o Triângulo de Pascal com números pares e ímpares. Esta atividade foi bem recebida por eles e realizada com agilidade e sucesso.

*Explico a idéia na lousa e a regra da soma de números pares e ímpares, a qual é bem recebida por eles, que inclusive ajudam nas conclusões. Eles iniciam o trabalho animados, que agora é mais rápido que o exercício anterior. Alguns se sentam em duplas, e eu não me oponho, já que podem se ajudar e agilizar o trabalho. (...)*

*Alguém perguntou: Pintou?*
*O estudante respondeu: Pintei.*
*Eu: E o que aconteceu?*
*O estudante: Um triângulo.*
*Eu: Já viu isso antes?*
*O estudante: Sim, é o triângulo de Sierpinski!*

O último comentário, em particular, traz um trecho transcrito pelo professor de um diálogo entre este e um estudante, quando este relacionou a figura obtida com o Triângulo de Sierpinski anteriormente estudado.

Destacamos nestes fragmentos duas atitudes julgadas importantes tomadas pelo professor:

a) o professor sempre revisa fatos das aulas anteriores, situando melhor os estudantes e conversando de forma amigável com eles; além disso, propõe momentos de discussão e explicação das atividades na lousa e também individualmente, oferecendo respaldo para que consigam concluí-las;

b) o professor flexibiliza alguns momentos da aula, como por exemplo, a atitude de permitir que os estudantes sentem-se em duplas, pensando que o trabalho em conjunto será mais produtivo.

Outro aspecto que nos traz alguma luz a respeito destas questões está presente na avaliação final dos estudantes com relação ao item Explicação do Professor, que recebeu os seguintes comentários:

*- porque explica bem (4)*
*- foi boa a explicação do professor (2)*
*- você foi um pouco bom com a explicação*
*- ótima: bem explicada*
*- se prestar atenção dá para aprender*
*- teve aulas (matérias) que é difícil entender... mas o professor ensina de uma maneira fácil e divertida de entender*
*- ele explica bem e eu aprendi mais*
*- de 0 a 10, 10*

Acreditamos que a maneira encontrada pelo professor para conduzir determinados momentos da aplicação das atividades gerou esta reação positiva dos estudantes nos comentários, e isso pode se relacionar com uma melhor aprendizagem destes.

Exibimos a seguir a tabela e o gráfico que contém a avaliação final feita pelos estudantes nos diversos aspectos da aula, complementando os comentários dos mesmos. As questões da tabela foram anteriormente listadas neste capítulo.

| QUESTÃO | ÓTIMO | BOM | REGULAR | RUIM | NDA |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 5 | 12 | 4 | 1 | 2 |
| b | - | - | - | - | - |
| c | 9 | 11 | 1 | 2 | 1 |
| d | 12 | 7 | 3 | 2 | 0 |
| e | 5 | 9 | 7 | 1 | 2 |
| f | 2 | 13 | 9 | 0 | 0 |
| g | 2 | 12 | 8 | 2 | 0 |
| h | 4 | 8 | **12** | 0 | 0 |
| i | 0 | 14 | 9 | 0 | 1 |
| j | 19 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| l | - | - | - | - | - |
| m | 0 | 3 | **16** | 4 | 1 |
| n | 0 | 10 | **12** | 2 | 0 |

Tabela 3 – Resultado do questionário fechado e alguns destaques.

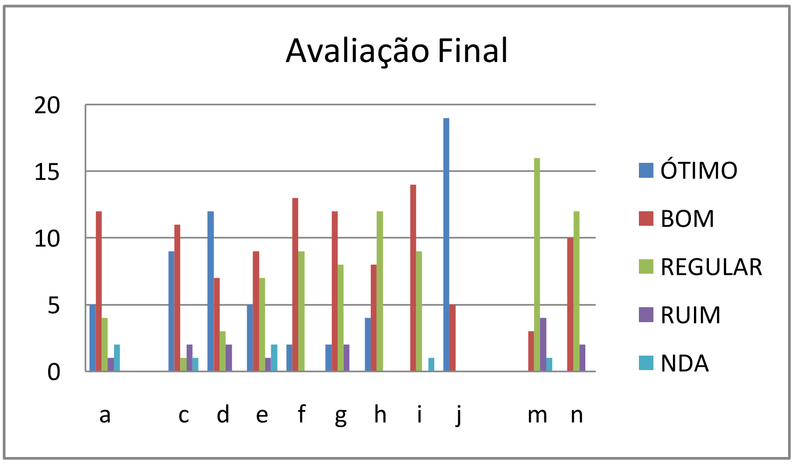



Gráfico 3 – Resultado do questionário fechado.

Podemos visualizar nestas representações que os maiores índices pertencem as classificações Ótimo ou Bom. Assim, os estudantes avaliaram positivamente a maioria dos aspectos das aulas, o que nos traz a conclusão de que a proposta foi bem aceita.

Ao falar das atitudes do professor e da classe não podemos deixar de olhar para a avaliação dos estudantes no que diz respeito a sua participação e a participação da turma como um todo no decorrer das atividades.

Por um lado, os estudantes avaliam muito bem a explicação do professor e muitos dos aspectos das aulas, o que percebemos pela tabela e gráfico anteriores, mas no momento da sua auto-avaliação e avaliação dos colegas, as respostas são predominantemente negativas.

Os três itens em que predominou a classificação Regular são h, m e n (em destaque na tabela 3 e a seguir na tabela 4):

h) mapas conceituais;

m) participação da turma (disciplina, atenção, etc.); e

n) sua participação (disciplina, atenção, etc.)

O recorte da tabela anterior com os destaques dados às questões citadas ilustra bem este fato, juntamente com o gráfico a seguir.

| *QUESTÃO* | *Ótimo* | *Bom* | *Regular* | *Ruim* | *nda* |
|---|---|---|---|---|---|
| h | 4 | 8 | 12 | 0 | 0 |
| m | 0 | 3 | 16 | 4 | 1 |
| n | 0 | 10 | 12 | 2 | 0 |

Tabela 4 – Questões avaliadas negativamente pelos estudantes.

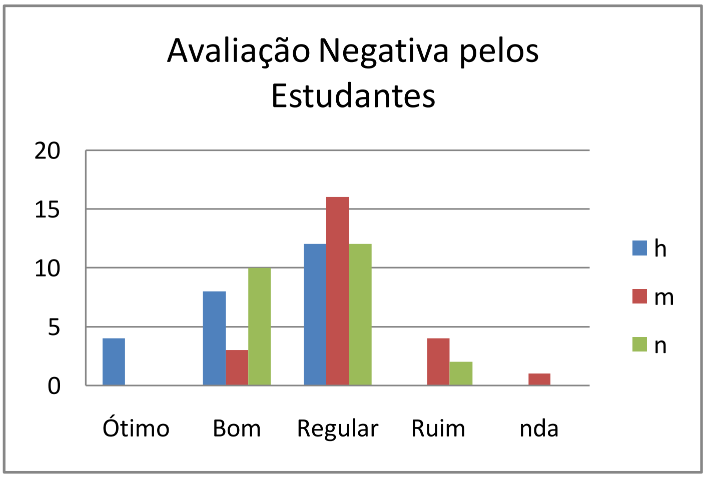



Gráfico 4 – Questões avaliadas negativamente pelos estudantes.

Encontramos nos comentários coletados com relação à participação da turma (questão m) uma ênfase na falta de participação dos estudantes:

*- não prestei muito a atenção na aula*

*- algumas participou, outros bagunçou*

*- porque nem todos participaram*

*- por causa de uns e outros enchendo o saco*

*- alguns atrapalhou*

*- bom*

*- ruim, pois tinha gente que só queria brincar*

*- ruim, porque em vez deles calarem a boca e fazer a lição, ficam conversando*

*- alguns ficaram com gracinha*

*- não muito*

Esta ênfase não creditou fracasso à proposta. Evidentemente, como já destacado, houve momentos em que as atividades se tornaram cansativas para a turma, não despertando seu interesse. Mas isto pode corroborar nossas constatações a respeito da baixa auto-estima da turma, evidenciada na sua trajetória escolar e agora nestes comentários citando "bagunça", "brincadeira" e "gracinha".

Nos comentários com relação à participação do próprio estudante (questão n), observamos uma crítica pessoal de cada um à sua postura na sala de aula. Este fato traz a perspectiva de que os estudantes entendem muito bem o que lhes é pedido no tocante à disciplina e percebem quando falham. A seguir os comentários dos estudantes:

*- as vezes não prestava atenção em algumas coisas*

*- participei, mas não em todas, porque faltei*

*- porque não vim em algumas aulas*

*- regular, as vezes sim, as vezes não*

*- gosto muito de matemática, mas quando estou com preguiça...*

*- porque em alguns momentos eu me distraí*

*- prestei atenção nas explicações*

*- boa, mas conversei um pouco*

Mesmo após estas últimas discussões e revendo o material coletado (Folhas de Atividades dos estudantes e Diário de Bordo do professor) podemos creditar sucesso a esta proposta, pensando sob dois pontos de vista: a interação e os momentos julgados negativos.

Houve muita interação entre os estudantes e entre estudantes e professor, quer discutindo conceitos ou se ajudando nas atividades, quer de forma amistosa para fortalecer os laços entre os participantes do processo. Isto fortalece nossas concepções iniciais, que dizem respeito ao relacionamento entre os envolvidos.

Os momentos julgados como negativos no decorrer do processo trazem consigo sugestões de como melhorar tanto a prática profissional do professor no dia a dia como também pontos específicos das atividades consideradas.

Na próxima seção passamos finalmente a uma discussão acerca dos indícios de aprendizagem da turma pesquisada. Devido ao grande número de atividades presentes nas Folhas de Atividades, selecionamos algumas que julgamos mais convenientes.

## 4.3 A Produção dos Estudantes e os Indícios de Aprendizagem

Passaremos aqui à discussão de algumas atividades feitas pelos estudantes, pensando na proposta inicial e nos objetivos de cada atividade e no que os estudantes atingiram, bem como – e isso assume um papel de fundamental importância – a avaliação da atividade feita pelos estudantes.

O quadro a seguir traz as atividades que analisaremos:

| FOLHA | ATIVIDADES |
|---|---|
| I | Construção do Triângulo de Sierpinski |
| II | Preenchimento das Tabelas com dados da construção do Triângulo de Sierpinski (ex. 3 e 4) e Questões ( ex. 5 a 7) |
| III | Semelhanças e Diferenças entre o Triângulo e o Tapete de Sierpinski |
| III | Preenchimento de Tabelas e Questões |
| V | Questões sobre Semelhança (ex. 1 a 3) e Mapa Conceitual |
| VI | Triângulo de Sierpinski e Triângulo de Pascal |

Quadro 18 – Atividades analisadas.

### 4.3.1 Construção do Triângulo de Sierpinski

A aula em que é proposta a construção do Triângulo de Sierpinski é a primeira aula da aplicação das atividades. Ela é iniciada com uma apresentação do Tema: Geometria Fractal e Semelhança.

Esta apresentação de slides (Apêndice D) tem por objetivo apresentar o tema aos estudantes de forma a motivá-los através de construções elaboradas e objetos do cotidiano que apresentam características fractais, como por exemplo imagens geradas por computador, construções tridimensionais com material concreto e objetos da natureza.

O seguinte fragmento do Diário de Bordo do professor vem ilustrar este início de trabalho com os estudantes:

*Faço uma explanação sobre o que faremos nas próximas aulas: explico que sou estudante na universidade e trago atividades que preciso da colaboração de todos, que fazem parte de um projeto maior do qual participo. Falo também que tais atividades não contarão nota para quem errou ou acertou, mas que considerarei apenas a participação de todos. Reforço que é fundamental que todos participem e me ajudem.*

Outro trecho do Diário vem relatar a apresentação inicial:

*Inicio então a apresentação de slides. Ela é uma introdução ao tema Geometria Fractal e Semelhança. No início, apesar da forte motivação visual, a participação não é muito boa, não se concentram; depois, melhora bastante. As imagens projetadas chamam a atenção da maioria dos estudantes.*

A seguir é proposta aos estudantes a construção do Triângulo de Sierpinski (ver Apêndice B, Folha I), que traz os seguintes resultados: dos 32 estudantes que fizeram a atividade, 7 estudantes fizeram até a 3ª etapa (ou passo)[45], 19 estudantes até a 4ª etapa e 6 estudantes fizeram até a 5ª etapa.

[45] Cada passo ou etapa da construção do Triângulo de Sierpinski se refere a construção de triângulos interiores ao inicial, respeitando o processo iterativo que o gera, conforme visto no Capítulo 2.

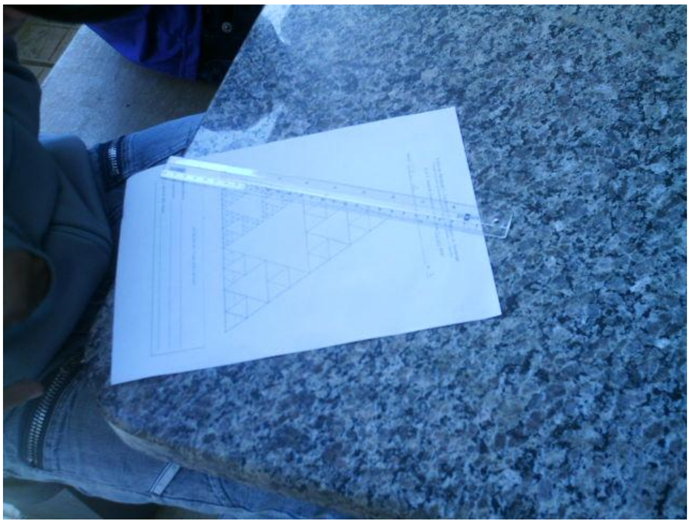


Figura 24 – Estudante trabalhando na construção.

Durante a construção, que era supervisionada pelo professor na lousa através de uma espécie de quebra-cabeça fractal[46], eram feitos questionamentos acerca de conceitos envolvidos: medição, unidades de medida, múltiplos e divisores de 2, segmento, ponto médio, etc. Os estudantes respondiam às questões formuladas sem muita dificuldade e continuavam a construção.

Figura 25 – Quebra-cabeça fractal confeccionado pelo professor.

Destacamos aqui os comentários dos estudantes a respeito do quebra-cabeça fractal, retirados da Avaliação Final, todos positivos:

*- foi muito legal também*

[46] O quebra-cabeça fractal, elaborado pelo professor, é um material concreto confeccionado em papelão e EVA no qual visualizamos a construção do Triângulo de Sierpinski em várias etapas, conforme as peças que são retiradas da figura e podem ser recolocadas.

*- Porque a gente foi fazendo muitas mudanças no triângulo*

*- Bom pois foi bem explicado*

*- Porque é divertido*

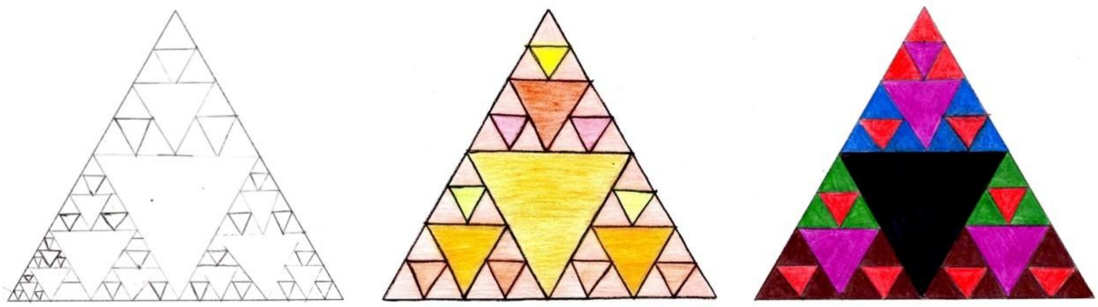
*- Muito bom aulas diferentes*

*- Mexe com a atenção*

Houve contudo, o comentário de um estudante que escreveu na avaliação final não haver gostado do quebra-cabeça, além de 13 estudantes que não comentaram a atividade.

No primeiro grupo de estudantes, que construiu a figura até a 3ª etapa, observamos as seguintes particularidades: destes, 2 somente fizeram os traços, sem pintura, sendo que um deles começou os traços da 4ª e 5ª etapa, mas terminou somente os da 3ª etapa, como observamos na Figura 26 (a). Este estudante apresentou vários erros na medição e traçados, em particular na última etapa.

Dos 5 restantes, um apresentou pequenos problemas com as medições e traços. A pintura destes foram bem feitas, mas sem se preocupar muito com algum padrão, fato observado na Figura 26 (b) e (c).



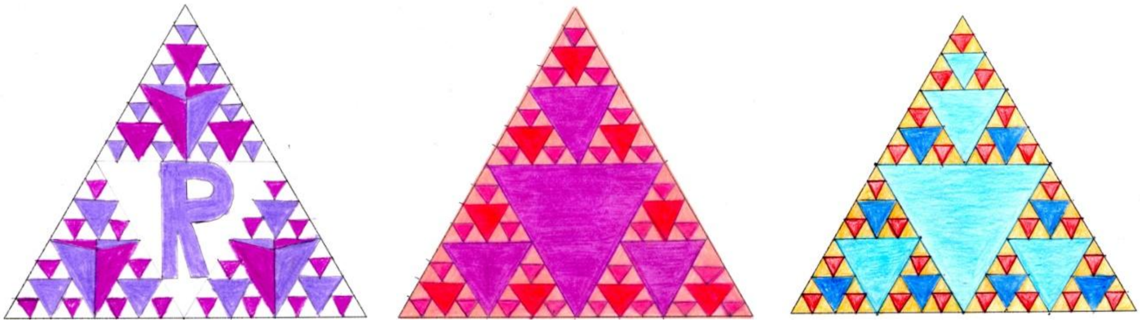
(a) (b) (c)

Figura 26 – Exemplos de construções até a 3ª etapa.

No grupo de 19 estudantes que fizeram até a 4ª etapa, 5 apresentaram problemas com as medições e traços e somente 1 deles não se preocupou com padrões na pintura.

Dois estudantes fizeram outros desenhos na hora da pintura, descaracterizando um pouco a construção, como observamos no exemplo da Figura 27 (a).

Os demais (12) fizeram desenhos preocupados com a pintura, a estética, cores e padrões, etc, gerando construções bonitas, como podemos observar na Figura 27 (b) e (c).



(a) (b) (c)

Figura 27 – Exemplos de construções até a 4ª etapa.

No terceiro grupo de estudantes (que fizeram até a 5ª etapa), nenhum apresentou erro grave de medição, apesar da dificuldade dos traçados e medidas. Estes estudantes se preocuparam em estabelecer algum padrão na figura, como constatamos nas figuras a seguir.

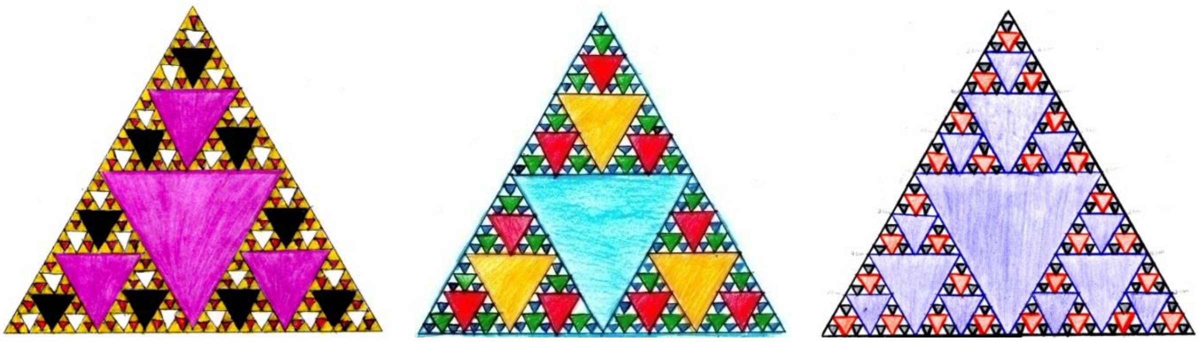


Figura 28 – Exemplos de construções até a 5ª etapa.

Julgamos esta atividade muito produtiva, alcançando bons resultados e grande empenho e participação por parte dos estudantes. Um fator negativo foi o tempo gasto maior que o previsto. Os estudantes apresentaram menos traquejo com o uso da régua que o esperado, fazendo com que a construção demorasse a ser concluída.

Mesmo assim, com um grande tempo despendido para sua construção, a atividade não foi cansativa para os estudantes, como podemos inferir a partir dos comentários escritos por eles:

*- Legal (8)*

*- Muito legal de construir os triângulos (3)*

*- Muito criativa e bonita (2)*

*- Legal e fácil (2)*

*- Aprendi a ter mais interesse e atenção pela construção*

*- Um pouco difícil*

*- Demora um pouco*

*- Eu achei fácil a construção do triângulo*

*- Fácil de compreender*

*- Muito interessante*

*- Foi interessante mas um pouco difícil*

*- Legal, muita atenção é importante*

A respeito do nível de dificuldade da atividade, encontramos os comentários específicos dos estudantes:

*- Fácil (7)*

*- Média (2)*

*- Nenhum (2)*

*- Tive alguns erros, mas foi fácil e divertido*

*- Muito fácil e legal*

*- Muito fácil e interessante de se fazer*

*- Normal*

*- Não foi tão difícil*

*- Eu achei fácil, mas tem que ter paciência*

*- É muito difícil fazer estes triângulos*

Os comentários aqui são bem diversificados, ou seja, há estudantes que consideram a construção fácil, outros nem tanto e outros difícil, mas vários também citam a questão da diversão, dos erros cometidos e da paciência necessária.

Do momento da avaliação final das atividades, recolhemos ainda estes comentários acerca da atividade feita com régua, caso do Triângulo de Sierpinski:

*- um pouco chata*

*- muito bom, diferente*

*- atenção é importante*

*- atividade boa*

*- foi legal*

*- regular, porque eu não gosto muito de usar régua, apesar de ser necessária*

*- ótima para ter atenção*

*- Gostei muito, passa mais!*

Este fato confirma que há estudantes de diversos níveis na sala de aula. Uma mesma atividade pode se mostrar de várias formas a eles e sua realização expressar os mais variados sentimentos e resultados.

Analisando a participação dos estudantes através das construções de cada um, de sua participação e comentários escritos, além da observação como professor, podemos dizer que os objetivos foram atingidos de forma satisfatória.

### 4.3.2 Preenchimento das Tabelas da Folha II e Questões

Na seção sobre a elaboração das atividades, já comentamos sobre a dificuldade no trabalho tanto de elaboração como de aplicação das atividades que envolviam o preenchimento de tabelas.

O preenchimento de partes das tabelas foi feito com o auxílio do professor, instigando e questionando os estudantes a respeito dos valores que apareceriam. No cálculo do Perímetro Total, alguns apresentaram dificuldades, mas todos fizeram.

Na tabela que trazia a relação entre os perímetros houve uma grande dificuldade em entender a relação entre os perímetros de um passo e outro. Surgiam dúvidas na operação de divisão, como por exemplo, a (des)igualdade $\frac{12}{24} = \frac{24}{12}$.

Este exercício vem alertar um fato muito importante: a noção de divisão ou sua escrita não está clara para alguns estudantes.

Conteúdo que não é diretamente trabalhado na 8ª série, esta constatação confirma nossa hipótese de que é necessário propor momentos de revisão de conteúdo com os estudantes. Estes momentos podem fazer diferença no aprendizado dos estudantes ou de alguns deles em particular.

Após o esclarecimento desta dúvida vem os questionamentos sobre as regularidades presentes. Todos mencionaram o esperado: que a razão (divisão) é sempre igual e isso decorre do fato de um perímetro ser sempre metade do outro. A Figura 29 traz um exemplo de solução de um estudante.

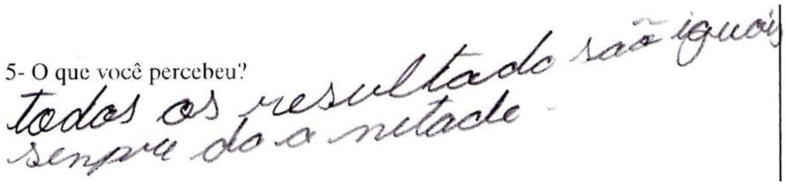

5- O que você percebeu?
todos os resultado são iguais
sempre do a metade

Figura 29 – Solução de um estudante.

Com relação a veracidade desta relação, ninguém achou problemas em colocar que permanece verdadeira a partir da observação dos passos presentes na tabela e na construção de cada um.

Este fato é mais complexo que a constatação dos estudantes pois trata-se do cálculo de um limite, que ultrapassa o nível de conhecimentos dos estudantes pesquisados. Mas entendemos que, apesar da fragilidade das afirmações dos estudantes, elas são suficientes para o momento, não sendo necessárias maiores explicações.

Com relação à recepção da aula pelos estudantes e sua avaliação, temos os seguintes comentários da parte deles, ressaltando antes que 6 não comentaram[47]:

*- Nada ruim (8)*

*- Boa (6)*

*- Eu achei muito legal e aprendi as coisas (4)*

*- Mais ou menos (2)*

*- Foi bom na hora de fazer a metade do número*

*- Muito bom, deu para aprender muito*

*- Produtiva*

[47] Conforme já tratado, a avaliação da aula pelo estudante a partir da Folha III consistia em comentar os aspectos bons, regulares e ruins da aula. Assim, quando mencionamos o número de estudantes que não comentou determinado aspecto, isso quer dizer que ele somente assinalou o *smile* correspondente, ou seja, neste caso, o estudante considerou a aula boa, mas não fez comentários.

*- Fazer o triângulo e ver coisas que se repetem*

*- Esta avaliação foi bom*

*- Foi bom a aprendizagem que obtivemos*

*- Legal e interessante*

*- Legal e aprendi bastante coisa que não sabia*

*- Foi muito interessante porque a matemática não está só nas contas e sim nos desenhos*

*- Foi legal que eu aprendi*

Concluímos, apesar da aparente ingenuidade de alguns dos comentários, que obtivemos êxito na aplicação da atividade e nos trabalhos e participação dos estudantes, tendo muitas assertivas positivas e também nas menções do interesse, do aprendizado e da relação da matemática com outras coisas que não "contas".

Todo este trabalho com as tabelas e as questões tem por objetivo a definição posterior de Razão de Semelhança. Queremos que, a partir de cada passo dado pelo estudante, esta definição e seu uso se dê de forma mais natural.

### 4.3.3 Semelhanças e Diferenças entre o Triângulo e o Tapete de Sierpinski

A Folha de Atividades III tem por objetivo a apresentação do Tapete de Sierpinski e de discussões acerca de regularidades presentes em sua construção a partir do processo iterativo que a gera e da visualização de suas primeiras etapas.

Propomos aqui uma abordagem diferente em relação à Construção do Triângulo de Sierpinski: os estudantes analisam o processo iterativo de construção do Tapete de Sierpinski e algumas imagens, compreendendo cada passo do processo e identificando-o com a figura mostrada.

A partir daí é proposto a comparação das duas construções para o resgate das características de ambas e uma listagem de semelhanças e diferenças entre elas.

Observamos um pequeno número de respostas dos estudantes para semelhanças e diferenças, como veremos a seguir, mas em contrapartida, aparecem respostas sem muito sentido e alguns estudantes (5) que não responderam a questão, mesmo após a discussão conjunta entre professor e a classe.

As semelhanças citadas pelos estudantes foram:

*- repetição (13)*
*- usa quase as mesmas contas (2)*
*- tem que fazer medidas*

As diferenças citadas por eles foram mais variadas:

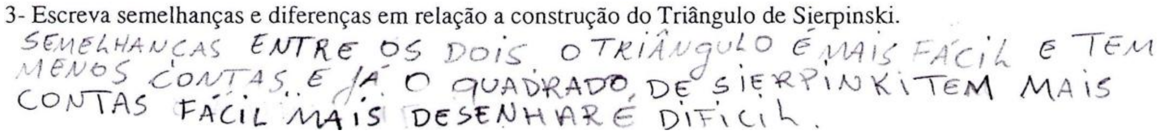
*- é um quadrado (9)*
*- um é triângulo o outro é quadrado (2)*
*- o triângulo tem três partes e o quadrado tem quatro partes (2)*
*- o quadrado demoraria mais tempo porque é mais difícil*
*- os triângulos foram mais fáceis do que o quadrado pois há menos coisas para medir*
*- o quadrado tem mais contas fáceis, mas desenhar é difícil*
*- o quadrado tem 4 lados e o triângulo tem 3*
*- o triângulo é mais fácil e tem menos contas, já o quadrado tem mais contas fáceis mas desenhar é difícil*

Observamos respostas parecidas ou que dizem respeito a observações elementares. Porém constatamos o esforço dos estudantes em escrever suas conclusões, fato importante para o alcance de nossos objetivos.

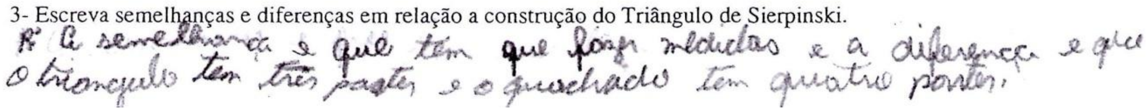
Finalmente, classificamos algumas respostas como sem sentido ou confusas por não expressar claramente algo dentro do esperado por nós. Nas respostas abaixo o estudante não transpõe claramente suas idéias no papel, mas concluimos, ao ler as frases, que ele entendeu alguma coisa:

*- o triângulo de Sierpinski é com forma de área os lados (2)*
*- ele repete o mesmo processo o quadrado do meio também repete, etc e diferença: este quadrado é mais complicado de desenhar, e muda o desenho, um é retângulo o outro é quadrado*

As digitalizações a seguir exibem exemplos de respostas dos estudantes.


3- Escreva semelhanças e diferenças em relação a construção do Triângulo de Sierpinski.
SEMELHANÇAS ENTRE OS DOIS O TRIÂNGULO É MAIS FÁCIL E TEM MENOS CONTAS, E JÁ O QUADRADO DE SIERPINKI TEM MAIS CONTAS FÁCIL MAIS DESENHAR É DIFICIL.

(a)


3- Escreva semelhanças e diferenças em relação a construção do Triângulo de Sierpinski.
R: a semelhança e que tem que fazer medidas e a diferença e que o triangulo tem tres partes e o quadrado tem quatro partes.

(b)

Figura 30 – Algumas respostas dos estudantes.

Já nas duas respostas a seguir, aparecem opiniões equivocadas ou que se contradizem, ao afirmar idéias aparentemente contrárias: fácil e demorado; ou no equívoco de descartar as diferenças entre as construções:

*- fácil mais demoraria mais*

*- é igual ao triângulo*

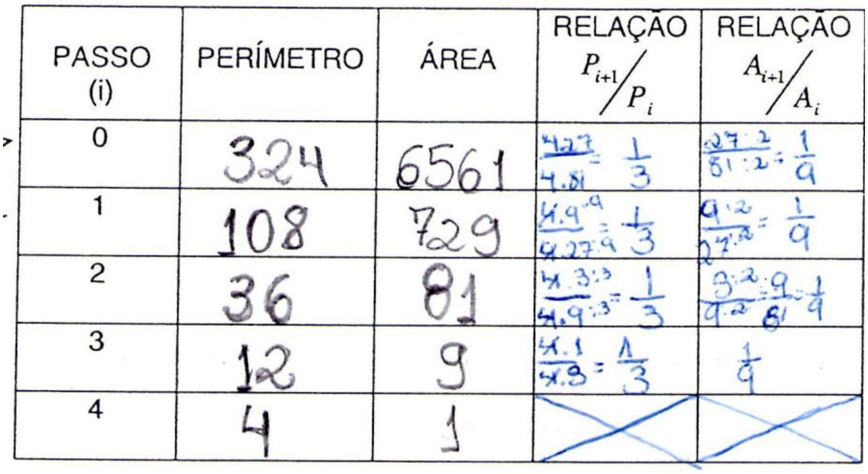
### 4.3.4 Preenchimento de Tabelas e Questões – Tapete de Sierpinski

A exploração das tabelas com cálculos a partir do Tapete de Sierpinski é mais complexa, visto que nas tabelas anteriores não envolvemos a área do triângulo, o que atrapalharia as conclusões de interesse naquele momento. Desta forma trabalhamos com mais informações e cálculos do que anteriormente.

Esta pode ser uma das razões para que 16 estudantes não completassem o preenchimento da primeira tabela, ora nas linhas (perímetro total e área) ora nas colunas (passos 3 e 4).

A segunda tabela, que está mais organizada que a análoga da folha anterior, mostrou-se mais acessível aos estudantes. Somente 3 estudantes não terminaram o seu preenchimento, realizado da seguinte forma: o professor sugere que copiem os dados das colunas do perímetro e área da tabela anterior, que já estavam prontos e foram corrigidos.

A Figura 31 mostra um exemplo de solução satisfatória de um estudante, que inclusive considerou as dicas do professor em expressar os números envolvidos como multiplicações envolvendo potências de 3, o que facilitaria os cálculos.



| PASSO (i) | PERÍMETRO | ÁREA | RELAÇÃO $P_{i+1}/P_i$ | RELAÇÃO $A_{i+1}/A_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 324 | 6561 | $\frac{4.27}{4.81} = \frac{1}{3}$ | $\frac{27:2}{81:2} = \frac{1}{9}$ |
| 1 | 108 | 729 | $\frac{4.9:9}{9.27:9} = \frac{1}{3}$ | $\frac{9:2}{27:2} = \frac{1}{9}$ |
| 2 | 36 | 81 | $\frac{4.3:3}{4.9:3} = \frac{1}{3}$ | $\frac{3:2}{9:2} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$ |
| 3 | 12 | 9 | $\frac{4.1}{4.3} = \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ |
| 4 | 4 | 1 | | |

Figura 31 – Solução de um estudante.

A partir do preenchimento das tabelas passamos a questões acerca das regularidades presentes. Os estudantes responderam de forma satisfatória a todas elas, chegando às conclusões esperadas.

Percebemos assim que, apesar das dificuldades no preenchimento das tabelas, elas facilitam as conclusões almejadas a respeito das sequências numéricas presentes e também da definição de perímetro e área de uma figura fractal.

Com relação à primeira questão, que os interrogava sobre o que haviam percebido com o preenchimento das tabelas, obtemos as seguintes respostas:

*- os números repetem, são múltiplos (11)*

*- tudo é múltiplo e os números repetem (4)*

*- que repete os números (3)*

*- que os números repetem e em alguns casos aparecem os seus múltiplos (2)*

*- os resultados são os mesmos e todos os números são múltiplos*

*- muitas frações iguais das contas diferentes*

Destacamos ainda que, na avaliação dos estudantes a respeito das aulas, notamos que apesar da dificuldade encontrada por eles para o preenchimento das tabelas, este fato não foi citado especificamente.

### 4.3.5 Questões sobre Semelhança e Mapa Conceitual

A aula que trouxe estas questões iniciou-se com uma apresentação pelo professor. Os fragmentos do Diário de Bordo a seguir ilustram a dinâmica deste início de aula a respeito de um vídeo passado aos estudantes:

*Após as boas-vindas explico como será a dinâmica da aula: veremos duas apresentações de slides e faremos alguns exercícios do caderno do aluno. A primeira é um filme e tratará de distâncias e potências de 10. A segunda fala sobre semelhança e continua nossas idéias de geometria fractal.*

*Eles acompanham curiosos e não perguntam muitas dúvidas. Ao final afirmam ter gostado e perguntam se não tem outra daquele tipo, ao que digo que não, que agora conversaremos mais sobre semelhança de figuras.*

Continuamos a apresentação com um resgate das figuras fractais estudadas, a exposição de outras, além de exemplos com cálculos envolvendo proporção em figuras semelhantes e não semelhantes. Esta parte da aula também é bem produtiva, como descrevemos através do Diário de Bordo:

*Algumas figuras já vistas servem para que recordem as idéias, as quais eles compreendem bem e participam bastante ajudando nas respostas e questões feitas por mim. Não há dúvidas quando se colocam figuras que claramente não são semelhantes. Após estas surgem situações de verificar semelhança, utilizando proporção. Eles ajudam a resolver na lousa e concordam com a idéia.*

A Folha de Atividades V está dividida em 3 partes. Na primeira delas, os estudantes devem resolver exercícios que constam do Caderno do Aluno. Na segunda parte, relacioná-los com o que já foi visto nas Folhas anteriores e responder algumas questões sobre Semelhança de Figuras. Na terceira e última parte, são instruídos a elaborar um Mapa Conceitual[48] sobre o conceito de Semelhança.

Tivemos alguns contratempos com relação à primeira parte: a resolução dos exercícios do Caderno do Aluno. Na primeira aula desta Folha, a maioria dos estudantes esqueceu de levar para a classe o referido material, o que atrasou a atividade.

Este imprevisto foi impossível de ser solucionado visto que não havia material reserva para todos na escola nem a possibilidade de sentarem-se em duplas para revezar o material entre eles.

Em seguida, os estudantes necessitaram de uma explicação detalhada de cada exercício, o que consumiu um tempo razoável nas aulas.

Apesar disso tudo, a conclusão dos exercícios foi satisfatória. Observemos o que os estudantes colocaram na avaliação final a respeito das atividades do Caderno do Aluno:

*- não gosto muito (2)*
*- a gente quase não usou*
*- regular porque não sabia algumas*
*- odiei*
*- gostei muito*
*- bom, porque a gente fez a atividade e escreveu ela*
*- eram difícil*
*- ótimo porque fizemos e todos participaram*

A respeito das questões sobre Semelhança, na segunda parte desta Folha de Atividades, encontramos fatos interessantes.

Na questão que indagava se “tudo que é parecido é semelhante?” três estudantes assinalaram Sim, além de outros três que não responderam. Depois de tudo o discutido e produzido por eles, tal resposta não era esperada.

A questão em que era pedido que escrevessem sobre figuras semelhantes a respeito de sua forma, ângulos e lados, surpreendeu com relação aos resultados obtidos.

[48] O mapa conceitual, originalmente baseado na teoria da *aprendizagem significativa* de David Ausubel, é um esquema gráfico utilizado para explorar algum conceito através da ancoragem deste com outros já conhecidos. Ver Moreira e Salvador et al.

Alguns estudantes não se lembraram da questão da proporcionalidade dos lados em figuras semelhantes, que era o item c. Com relação à forma lembraram das ampliações e reduções e com relação aos ângulos escreveram *iguais*. Além disso tudo, 7 estudantes não responderam à questão.

1- O que é necessário para que duas ou mais figuras planas sejam semelhantes?

a) com relação à forma:
b) com relação aos ângulos:
c) com relação aos lados:

Figura 32 – Questão a respeito das condições de semelhança.

O que surpreende aqui é o fato de alguns não lembrarem da proporcionalidade, conceito trabalhado tanto em séries anteriores como nas atividades de construção e preenchimento de tabelas que precederam esta.

Na questão que perguntava o que é razão de semelhança, onde somente um estudante não respondeu, as respostas obtidas foram as seguintes:

*- Número que representa a proporção. (5)*
*- É os números sempre iguais; divide os lados, soma as proporções e acha a razão de semelhança. (3)*
*- A relação de uma figura com a outra. (2)*
*- É tudo que é igual e vai aumentando os esticando tem que um desenho e esticar ou aumentar. (2)*
*- A semelhança de uma figura com a outra. (2)*
*- É um número que você usa para sair daquela figura para saber a outra.*

Novamente nos deparamos com a dificuldade em formalizar no papel um conceito que está sendo estudado, visto que houve um bom desempenho dos estudantes nas atividades até agora trabalhadas, inclusive nas do Caderno do Aluno.

Com relação à ultima questão desta parte, que se referia à semelhança presente nas figuras fractais – a auto-semelhança, obtivemos as seguintes respostas dos estudantes:

*- a repetição e a semelhança de uma figura (6)*

*- usando a mesma imagem podemos ver que o desenho possui a mesma figura só que de tamanhos diferentes (3)*

*- ela sempre se repete (2)*

*- eles sempre se parecem*

*- são as figuras que a gente construiu*

*- as figuras se repetem e ficam semelhantes e só muda o tamanho*

*- utilizando a mesma figura fractal, tem partes iguais e só muda o tamanho*

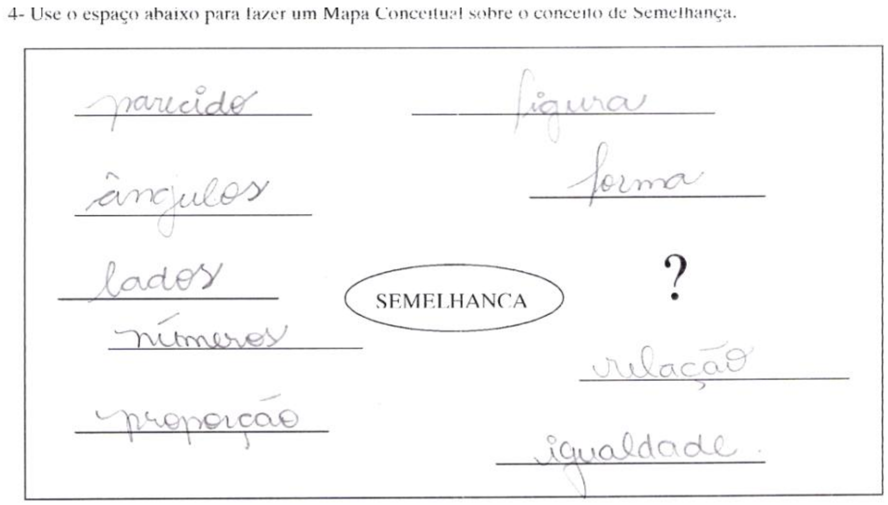
*- elas se repetem fazendo uma figura*

Não encontramos nesta questão a resposta desejável, que mencionaria a auto-semelhança, mas mesmo assim, percebemos uma melhor organização das idéias por parte dos estudantes.

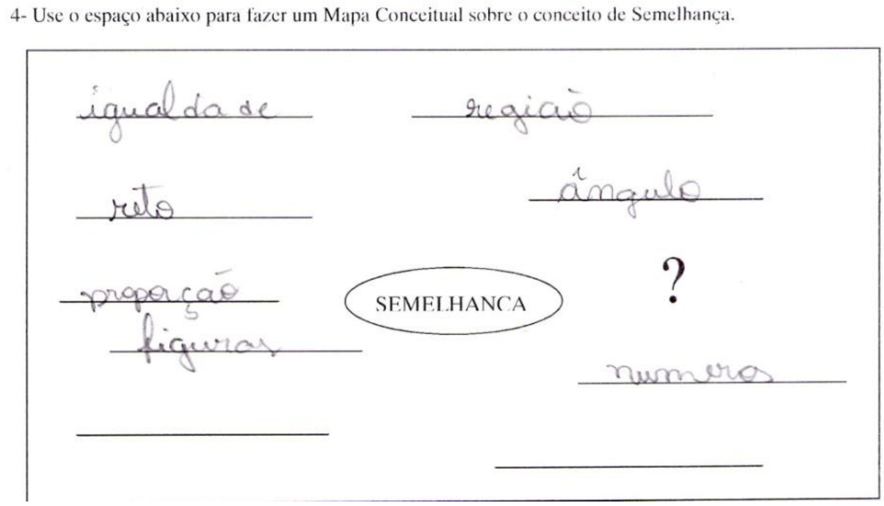
A terceira parte desta Folha de Atividades trazia a proposta de elaboração de um Mapa Conceitual. Os estudantes tiveram contato com tal diagrama em momentos anteriores e também na apresentação inicial da aula de Semelhança.

A seguir as palavras citadas nos mapas conceituais que eles elaboraram a respeito do conceito de Semelhança: Parecer, Razão, Calcular, Figuras, Conceito, Forma, Raciocínio, Ângulo, Lados , Retas, Área, Perímetros, Proporções, Números, Problemas, Cálculos, Fractal, Atividade, Parecidos, Igualdade, Região, Matemática, Análise, Inteligência, Contas, Esforço, Equação, Álgebra, Avaliação, Estudar, Jogo, Racionais.

Vale destacar que o mapa possuía uma estrutura simples com linhas a serem preenchidas, assim todas estas palavras ou conceitos apareciam diretamente ligados ao conceito central e eles não se propuseram a mudar a elaboração sugerida, como observamos nas figuras a seguir.




(a)




(b)

Figura 33 – Mapas conceituais elaborados por estudantes.

Na avaliação desta Folha, que foi mais extensa, os comentários feitos pelos estudantes foram mais curtos que o habitual e em menor número.

Na avaliação positiva, constaram 10 estudantes que não comentaram, 4 estudantes que somente assinalaram e os demais comentando:

*- Boa (2)*

*- Tdb – tudo de bom*

*- Foi muito boa*

*- Ótima, tudo foi legal*

*- Nada*

*- tudo*

Na avaliação regular, além de 13 estudantes que não comentaram, um somente assinalou, e os comentários obtidos foram:

*- Nada (2)*
*- Mais ou menos*
*- Mais ou menos bom*
*- Boa*

Na avaliação dos que consideraram a aula ruim, 15 estudantes não comentaram, um somente assinalou e os demais se limitaram a:

*- Eu não entendi nada*
*- Nada*
*- Tudo*

No caso particular do Mapa Conceitual, obtemos as seguintes opiniões dos estudantes, retiradas da avaliação final das atividades:

*- os mapas foi muito legal (4)*
*- bom, porque foi diferente*
*- bom, porque nunca tinha visto*
*- é estranho*
*- a semelhança é importante*
*- nada de mais*
*- pois estava meio complicado*
*- regular, porque a gente teve que escrever tudo o que aprendemos*

Acreditamos, mesmo em face dos depoimentos dos estudantes, que esta Folha de Atividades representa um momento importante do material. A sistematização através de exercícios mais focados em cálculos e técnicas é imprescindível para o aprofundamento ou aprendizado de um conceito matemático.

Também apoiamos propostas de elaboração de mapas conceituais para a fixação de um conceito ou mesmo a introdução a algum tema. Destacamos ainda que os estudantes já tiveram contatos anteriores com a elaboração de mapas conceituais.

### 4.3.6 Triângulo de Sierpinski e Triângulo de Pascal

As atividades apresentadas na Folha de Atividades VI giram em torno da construção e compreensão do Triângulo de Pascal e, a partir de algumas pinturas ou destaques neste, na obtenção de estruturas parecidas com o Triângulo de Sierpinski[49].

A primeira atividade envolvendo o Triângulo de Pascal pedia que, a partir dos primeiros números na figura preenchidos, o estudante resgatasse a sua regra de preenchimento e completasse a figura.

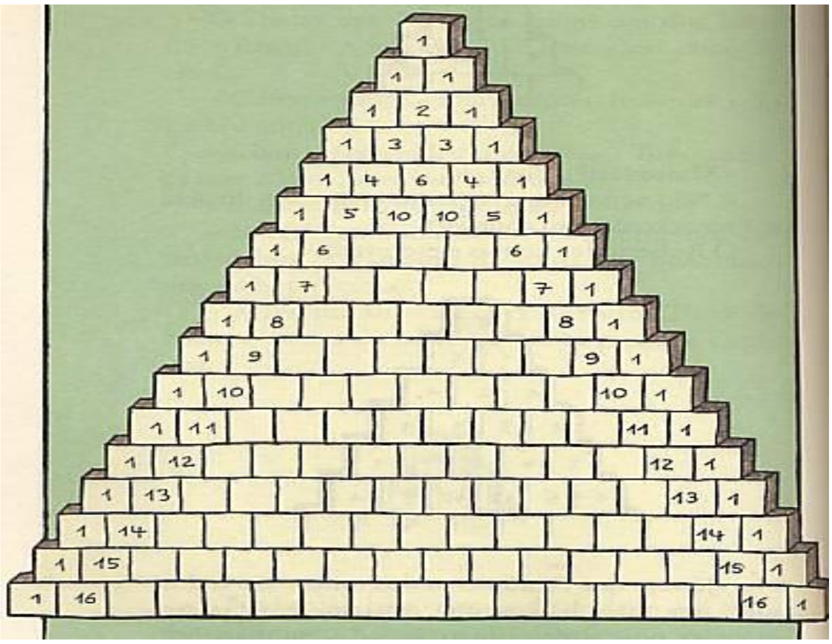



Figura 34 – O Triângulo de Pascal proposto.

Indagados, com o auxílio do professor, sobre esta regra de preenchimento, obtemos algumas respostas dos estudantes:

*- somar dois números de cima para dar o resultado de baixo (4)*

*- somando (3)*

[49] Há vários trabalhos que tratam de atividades envolvendo padrões a partir de pinturas no Triângulo de Pascal. Em particular, citamos Barbosa e Salvador.

*- a soma de três que em três em três (2)*

*- soma os números de cima e coloca o número embaixo (2)*

*- os números de baixo é sempre a soma dos números de cima (2)*

*- soma dos múltiplos de três*

*- tem que ser múltiplo de 2*

*- os números de cima é somado para dar o resultado na de baixo*

Podemos observar respostas incorretas como “soma dos múltiplos de três”, na qual o estudante deve ter se confundido com um exercício anterior que questionava a respeito dos múltiplos de 3 ou, “a soma de três que em três em três”, em que o estudante não deixa claro o que quer dizer.

Após discutir a questão com os estudantes, o professor explicita a regra na lousa e propõe a continuação do preenchimento, começando junto com eles.

Desde o início imaginamos que seria uma atividade tranquila, visto que se tratava da soma de números naturais. Mas ela se mostrou demorada para todos os estudantes. Muitos não conseguiram concluir ou o fizeram de forma incorreta.

Os fragmentos a seguir retirados do Diário de Bordo ajudam a compreender melhor este momento da aula, inclusive com as intervenções consideradas pelo próprio professor como inadequadas:

*O exercício 1 fala do preenchimento do triângulo de Pascal. As primeiras linhas já vem preenchidas e o objetivo é que descubram a regra para preencherem as restantes. Eles não tem dúvidas com relação a atividade e começam a sugerir algumas regras. Dou então algumas pistas, até falar a regra toda.*

*Faço alguns na lousa para que percebam a validade da regra estabelecida e os estimulo a continuar. Alguns pedem permissão para o uso do celular ou calculadora, o que acato. Mas eles avançam numa velocidade lenta.*

*Após um bom tempo, e observando que alguns começam a se complicar, sugiro que corrijamos algumas linhas na lousa. Faço isso até a linha 14, o que não necessariamente os ajuda. Percebo que este é o tipo de atividade que eles devem pegar a prática e terminar sozinhos; qualquer intervenção minha pode ser prejudicial.*

Após o preenchimento o próximo passo é destacar na figura os múltiplos de 3, ao que os estudantes ficam muito assustados: “teremos que dividir todo mundo por 3?”.

A partir desta questão previsível o professor coloca para todos a regra[50] usual utilizada para se encontrar qualquer múltiplo de 3. Os estudantes não perguntam o porquê e nem lhes é dada uma explicação detalhada, que de qualquer forma não era o objetivo da aula.

Contudo, apenas 5 estudantes chegam a um resultado próximo do ideal. Os demais apresentam vários erros ou partes incompletas, como podemos constatar nas figuras a seguir, que trazem alguns trabalhos feitos por eles.

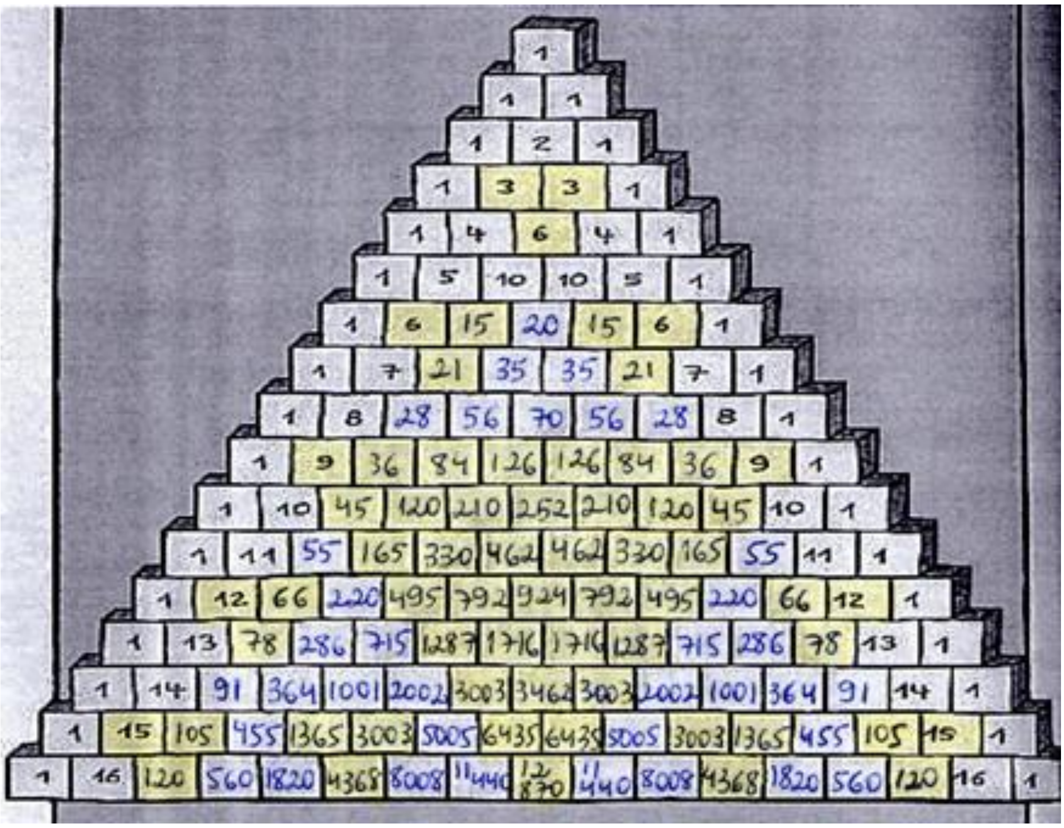



Figura 35 – Solução da questão.

[50] A regra diz: um número é múltiplo de 3 se a soma dos seus algarismos for múltiplo de 3. Uma demonstração pode ser vista em Hellmeister. Exemplo: 117 é múltiplo de 3 porque 1 + 1 + 7 = 9 e 9 é múltiplo de 3.

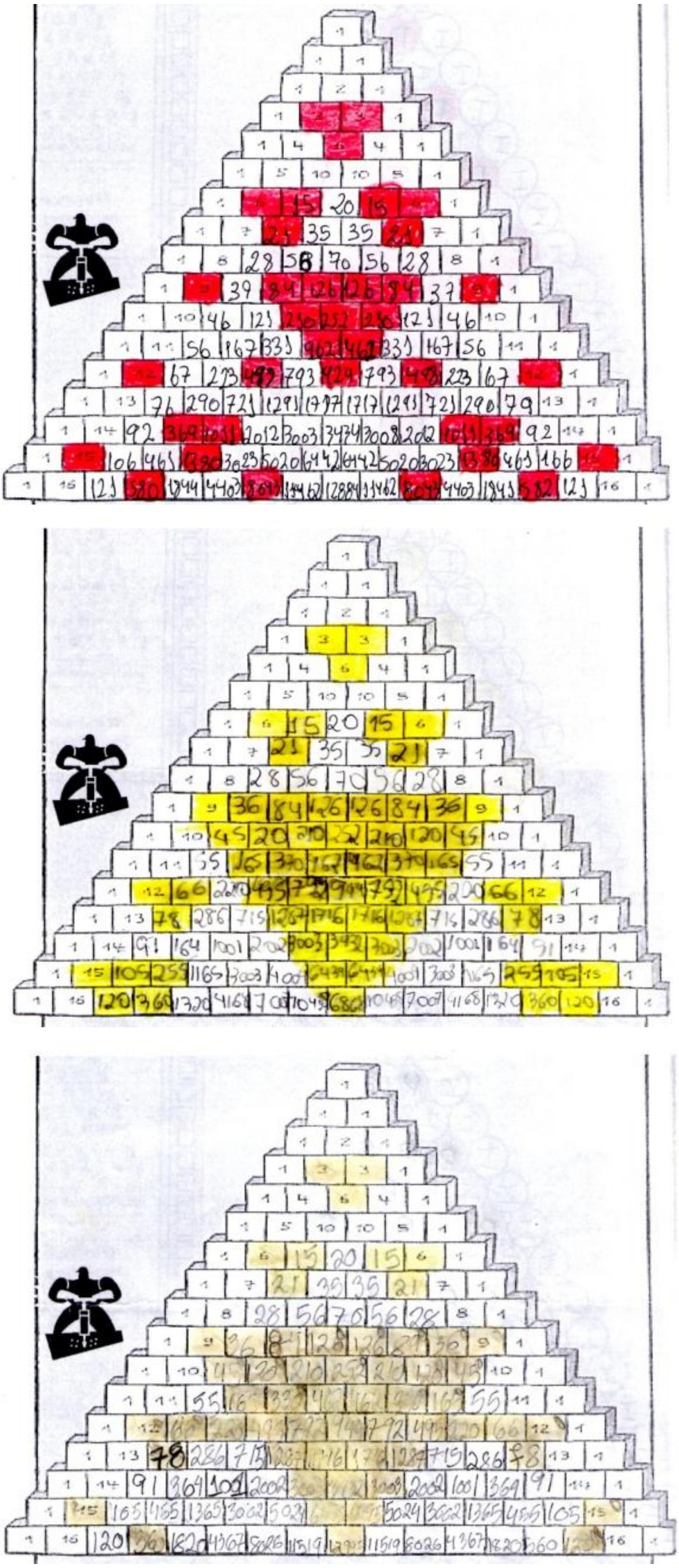


Figura 36 – Alguns trabalhos dos estudantes.

Após a pintura dos tijolos que representavam os múltiplos de 3 vem o questionamento: queremos saber o que é possível identificar. Seguem as respostas dos estudantes:

*- aparece os triângulos (8)*
*- começaram a aparecer desenhos iguais (4)*
*- deu para achar o triângulo de Sierpinski (2)*
*- aparece o triângulo de Sierpinski*

As respostas, como pudemos ver, são aqui bem satisfatórias, e os estudantes se mostraram muito empolgados, já questionando o professor a respeito do próximo exercício, se iria acontecer a mesma coisa.

No próximo exercício, era pedido que os estudantes substituíssem os números do Triângulo de Pascal feito anteriormente pelas letras P (se o número fosse par) e I (se o número fosse ímpar).

Além da opção da simples substituição, foi passado aos estudantes a regra da soma de números a partir da sua paridade[51], a qual todos receberam com empolgação inclusive chegando às conclusões esperadas. Assim este exercício ficou fácil e agradável para toda a classe.

[51] Trata-se soma de dois números baseada em sua paridade: P + P = P; P + I = I; I + I = P. Ver uma demonstração em Números Pares e Ímpares.

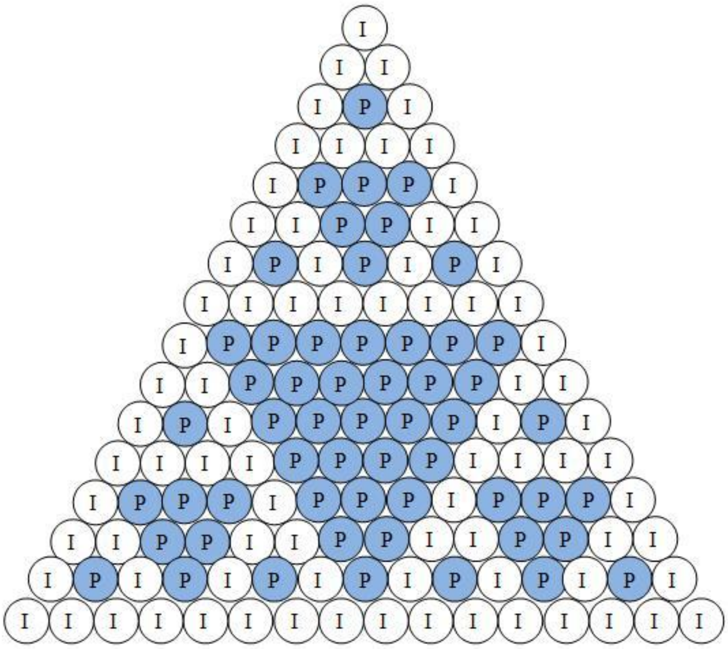


Figura 37 – O Triângulo com Pares e Ímpares.

Durante a resolução alguns estudantes mostram ao professor os resultados, incluindo poucos erros que são corrigidos. Ao final, somente um estudante cometeu erros pintando círculos incorretos e um estudante não pintou, mas também cometeu erros no preenchimento com P e I. Observamos na figura a seguir o trabalho incorreto do primeiro estudante.

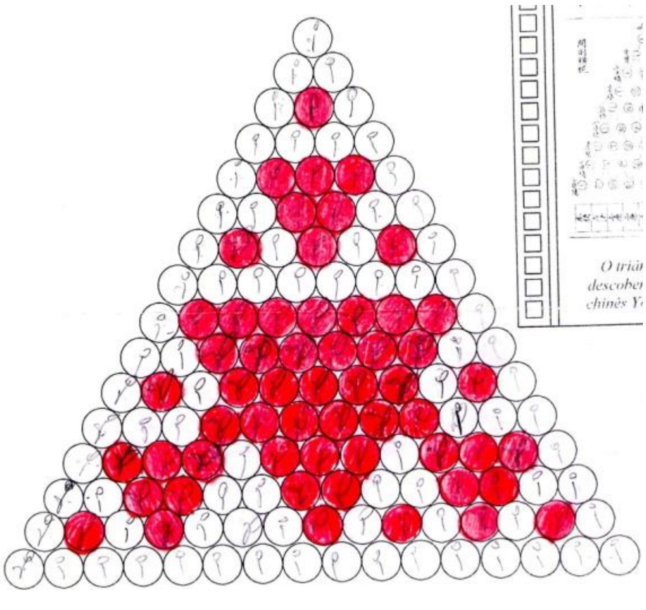


Figura 38 – Trabalho incorreto dos estudantes.

Os demais estudantes obtiveram êxito, como observamos nos dois exemplos a seguir.

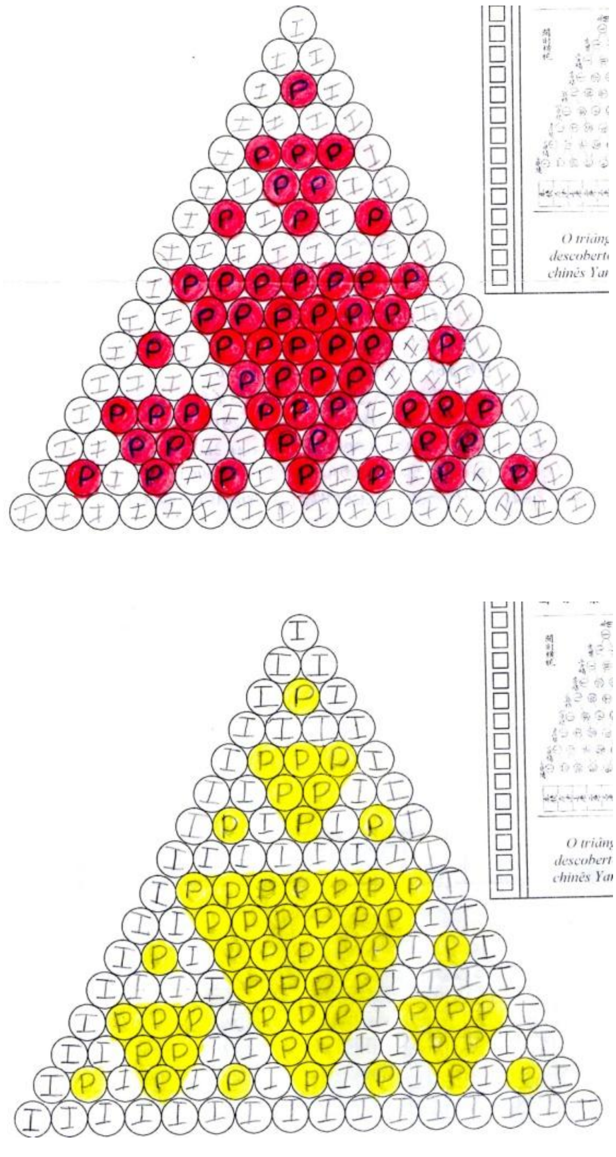


Figura 39 – Trabalhos corretos dos estudantes.

A avaliação desta aula, como esperávamos, foi muito positiva. Uma das únicas críticas presentes na avaliação foi com relação à atividade com os múltiplos de 3, que realmente foi muito exaustiva para todos. Seguem os demais comentários dos estudantes:

*- Bom (2)*

*- legal (2)*

*- Preenchimento de P e I (2)*

*- Ótima*

*- Legal: pinturas*

*- Esta folha foi muito bom fazer*

*- Tudo*

Após a apresentação e análise de alguns momentos da aplicação das atividades que se relacionam de forma mais direta ao tema principal do trabalho, a Semelhança de Figuras Planas, expomos alguns aspectos sobre a avaliação final das atividades pelos estudantes, procurando relacionar a produtividade deles com o que citaram na avaliação.

O primeiro aspecto a considerar, diz respeito ao nível de dificuldade das aulas, ao qual os estudantes responderam:

*- nenhum*

*- o nível de dificuldade foi razoável*

*- Tive algumas dificuldades*

*- bom, porque tive dificuldades em algumas*

*- as contas da tabela*

*- as vezes fica um pouco difícil*

*- teve aulas (matérias) que é difícil entender... mas o professor ensina de uma maneira fácil e divertida de entender*

*- mais ou menos*

*- bom, pois não foi nem fácil nem difícil*

*- regular, no uso da régua*

*- de 0 a 10, 9*

*- porque tem gente que não participou*

Este resultado nos faz refletir sobre outras possibilidades de uso do material elaborado. Podemos questionar a aplicação destas atividades em outras turmas a partir de uma prévia avaliação da sala, por exemplo, ou observar aspectos semelhantes entre duas ou mais turmas através do resgate dos depoimentos dos estudantes ou mesmo de suas respostas às questões.

Também é importante abordar, a partir do que os estudantes citaram na avaliação final, os conceitos que ficaram claros para eles e as dúvidas que permaneciam.

| *CONCEITO* | *NÚMERO DE RESPOSTAS* |
|---|---|
| Triângulo | 2 |
| Todos | 8 |
| Atividades e contas | 2 |
| Construção gigante | 1 |
| Mapas conceituais | 1 |
| Multiplicação | 1 |
| Matemática cheia de surpresas | 1 |
| Repetição | 1 |
| Semelhança | 1 |
| Imagens | 1 |
| Lição é importante | 1 |

Tabela 5 – Conceitos considerados claros pelos estudantes.

Com relação aos conceitos que, segundo eles, ficaram claros ou houve aprendizado, percebemos a diversidade de respostas, mas nenhuma tendência. Algumas respostas vagas como “todos” ou “lição é importante” não nos permitem concluir algo concreto acerca do aprendizado dos conceitos pretendidos. Outras respostas já são mais claras: semelhança, repetição, imagens. Destacamos também que 5 dos 25 estudantes presentes não responderam a esta questão.

| *DÚVIDA* | *NÚMERO DE RESPOSTAS* |
|---|---|
| Área e perímetro | 3 |
| Aulas anteriores | 1 |
| Geometria fractal | 1 |
| Geometria | 2 |
| Contas | 1 |
| Tudo | 1 |

Tabela 6 – Dúvidas levantadas pelos estudantes.

Quando perguntamos a respeito das dúvidas que eles ainda guardam, acreditamos que o resultado seja positivo, afinal, dos 25 estudantes, 14 disseram não ter dúvidas, ao passo que somente 9 responderam ter dúvidas e 2 estudantes não responderam a questão. As dúvidas citadas por eles parecem girar em torno da Geometria, como vemos na Tabela 6, o que é amplo para um estudo detalhado.

Após esta exploração e análise das atividades desenvolvidas e também das avaliações dos estudantes com relação ao trabalho realizado, passamos no capítulo a seguir às Considerações Finais.

## Considerações Finais

Tecemos aqui considerações a partir do explorado no capítulo anterior, com relação à análise da aplicação das Folhas de Atividade e seus resultados. É um momento de chegada e finalização de um trabalho, mas ao mesmo tempo momento de partida para novas investigações.

É preciso aperfeiçoar as atividades aplicadas; divulgá-las para que outros professores façam uso do material ou pelo menos de partes dele, de forma a também melhorar suas práticas e o aprendizado de seus estudantes; refletir sobre o nosso papel de professor pesquisador junto a classe e o que esta pesquisa nos proporcionou.

Retomemos algumas idéias de PONTE (2002, p. 2) olhando agora sobre todo o trabalho desenvolvido.

> Uma actividade reflexiva e inquiridora é geralmente realizada pelos professores de um modo intuitivo (...) mas tem bastante a ganhar se os professores cultivarem uma abordagem mais cuidada na formulação das suas questões de investigação e na condução dos seus projectos de intervenção nas escolas.

Assim podemos tratar de um aspecto fundamental da pesquisa: sua cuidadosa elaboração. Percebemos a veracidade da afirmação de Ponte, uma vez que a cada momento da pesquisa que não tínhamos clareza de algum aspecto, sentíamos falta desse cuidado.

Isso corrobora a questão do "modo intuitivo" com o qual os professores em geral tratam de seus problemas na escola, sejam de aprendizagem ou não e como a sistematização que uma pesquisa requer pode contribuir para o desenvolvimento profissional.

Consideremos alguns momentos específicos dessa caminhada, para reafirmar esta questão da cuidadosa elaboração do trabalho.

Já no primeiro ano do curso de Mestrado, reservado às disciplinas obrigatórias e à definição do projeto, tínhamos adiantadamente os requisitos necessários ao início da pesquisa. Este foi um ponto fundamental para o bom encaminhamento do projeto.

Decidido o que seria trabalhado realizamos as primeiras leituras e aplicamos algumas atividades-piloto com as turmas em que o professor lecionava em 2008. Pudemos então ter um primeiro panorama de como as coisas poderiam se dar.

Enquanto buscávamos algum referencial que amparasse nossas aspirações e objetivos, prosseguimos um estudo mais detalhado da Geometria Fractal e a procura de materiais existentes que tratassem do tema no Ensino Fundamental.

Paralelo a estes estudos e aplicações-piloto tivemos contato com outro fator que julgamos importante na concepção e desenvolvimento de um projeto: sua apresentação à comunidade científica. Com a ida a Encontros e Congressos pudemos ver de perto o trabalho de outros pesquisadores e também mostrar o nosso, recebendo críticas construtivas que ajudaram em sua formatação final.

Acreditamos assim que esta comunidade de pesquisadores e profissionais com a qual tivemos contato nestes encontros, os próprios colegas de turma, o grupo de estudos e o projeto do qual participamos, exerceu o papel do “amigo crítico” proposto por Ponte (2002, p. 15): *“uma espécie de consultor do projecto, que coloque questões – por vezes incômodas –, ajudando desse modo o investigador a reflectir sobre os pontos fortes e fracos do trabalho em curso.”*

Muitas reflexões presentes neste trabalho e, mais importante que isso, que constarão de estudos futuros e de uma prática profissional mais comprometida emergiram de discussões e sugestões dos membros do projeto Observatório da Educação e do GEM/UFSCar.

Entendemos assim a importância da criação do NIPEM, objetivo principal do projeto Observatório na UFSCar, da seguinte forma:

- constitui um espaço permanente de formação continuada de professores da rede pública que estejam comprometidos com sua prática em sala de aula;

- a troca de experiências entre estes professores, os estudantes da universidade e os docentes da mesma, considerando que todos podem contribuir uns com os outros no tocante as experiências de cada grupo;

- os trabalhos que podem ser desenvolvidos por estudantes de pós-graduação da universidade com o apoio das escolas da rede pública e seus professores, em pesquisas que visem a compreensão e a mudança de práticas problemáticas de sala de aula, pensando nas idéias de Ponte.

Ainda de acordo com os pressupostos do Observatório da Educação UFSCar, acreditamos na importância deste trabalho no fortalecimento das relações e aproximação da universidade com a escola pública pesquisada. Uma pesquisa realizada pelo professor da escola juntamente com a universidade é vista pela escola e sua comunidade como um auxílio que a universidade oferece e uma preocupação desta com uma educação de qualidade.

Com relação aos objetivos de pesquisa a serem alcançados, consideramos o resultado exitoso. O desenvolvimento do material didático ou produto educacional foi concretizado de forma a disponibilizar o mesmo à comunidade. Este produto é requerido tanto pelo curso de Mestrado Profissional como também pelo projeto Observatório da Educação, que visa também a divulgação deste junto a comunidade através do NIPEM.

Em particular, a análise do processo de elaboração deste material e também a recepção dele pelos estudantes e sua aprendizagem, momentos que exigiram maior reflexão e igual cuidado, também foram realizados como podemos perceber pelos capítulos anteriores.

De posse da concretização destes objetivos, podemos olhar mais de perto para a nossa questão inicial da pesquisa: *Como se dá o processo de elaboração, aplicação, análise e recepção pelos estudantes de um Material Didático envolvendo Geometria Fractal para o aprendizado do conceito de Semelhança de Figuras na 8ª série do Ensino Fundamental?*

Diz PONTE (2002, p. 13):

> A formulação de boas questões para investigação é um ponto de grande importância no trabalho investigativo. As questões devem referir-se a problemas que preocupem o professor e devem ser claras e susceptíveis de resposta com os recursos existentes. Na verdade, se as questões não são de real interesse para o professor, não será de esperar que ele tenha o investimento afectivo necessário para levar a investigação a bom termo.

Não há a necessidade de expor novamente os motivos que nos levaram a realizar esta pesquisa para entendemos o peso da afirmação de Ponte: o projeto só conseguiu ser levado a cabo graças ao grande envolvimento dos participantes, além do real interesse na questão de pesquisa formulada.

Pensando na elaboração do material, entendemos como pertinentes as afirmações de PONTE (2002, p. 2):

a) a investigação sobre a prática profissional, a par da sua participação no desenvolvimento curricular, constitui um elemento decisivo da identidade profissional dos professores;

b) as instituições educativas a que eles pertencem podem se beneficiar fortemente pelo fato dos seus membros se envolverem neste tipo de atividade.

Assim, na medida em que estudamos os documentos oficiais e não desvinculamos a proposta das diretrizes estabelecidas para o trabalho do professor, acreditamos colaborar para a disseminação de idéias do tipo e também, conforme Ponte, constituir a nossa identidade profissional. Identidade esta fortemente vinculada com nossas pequenas atitudes diárias perante a sala de aula e a comunidade escolar e também construída pelos projetos dos quais participamos.

O benefício trazido por uma investigação como esta para a instituição educativa pode ser menos percebido que o ideal, a curto prazo, por todos da comunidade, mas não deve ser descartado a partir dos fatos que o comprovam: a melhor integração do professor com a turma; a motivação dos estudantes despertada e a aprendizagem. Enfim, uma série de fatores que foram estabelecidos como importantes no contexto inicial da pesquisa.

Não obstante, tivemos percalços na elaboração do material, desde um cronograma que não conseguimos cumprir totalmente até erros que passaram despercebidos na confecção das Folhas de Atividades. Constatamos a importância de uma reflexão a todo momento do processo, pois estas paradas para reflexões é que faziam o trabalho se nortear novamente.

Mas, segundo as razões apontadas por Ponte para a condução de um processo investigativo, entendemos estes percalços como parte integrante do mesmo processo e auxiliares para o seu êxito. São elas:

a) assumir-se como protagonista no campo curricular e profissional;

b) desenvolver-se profissionalmente;

c) contribuir para a construção de um patrimônio de cultura e conhecimento;

d) contribuir para o conhecimento mais geral do grupo de professores.

Ponte (2002, p. 7) afirma que ao início de um processo de investigação sobre a própria prática nunca sabemos onde iremos chegar, e continua: *“a investigação continua a ser orientada por valores, mas não está ao serviço de quaisquer valores – a não ser os valores do questionamento e da reflexão.”*

Enfim, ao analisar o que seria o momento mais cuidadoso de todo o processo: a recepção do material pelos estudantes e sua produção, deparamos com um bom resultado.

Por um lado obtivemos no decorrer das aulas, seja pela percepção do professor em seus diários, pelos comentários positivos e animados dos estudantes, ou pelo empenho deles em realizarem de forma satisfatória as atividades, sinais de que o material foi bem recebido. E ainda pode ser usado por outros professores em suas aulas, desde que respeitando seus contextos e objetivos particulares.

No entanto, constatamos também momentos da aplicação das atividades em que os estudantes manifestaram cansaço e desinteresse, seja frente a uma atividade mais difícil ou mesmo independente de sua dificuldade, como foi o caso das atividades envolvendo o Triângulo de Pascal.

Estes momentos trazem, contudo, material a ser estudado para tais dificuldades ou desinteresse da turma serem minimizados futuramente, não sendo considerados, desta forma, aspectos de insucesso da proposta.

Com relação ao aprendizado dos estudantes, organizamos nossa análise a partir de dois instrumentos de natureza diferente: os comentários dos estudantes e a observação do professor; e os questionários objetivos respondidos por eles.

Observamos indícios de um melhor aprendizado dos estudantes e de mudanças de comportamento da turma no decorrer da aplicação das atividades. Entendemos ainda, a partir dos comentários dos estudantes e das dúvidas lançadas por eles, que houve momentos de grande interesse.

Destacamos também o êxito dos estudantes na avaliação externa promovida pelo Governo Estadual (SARESP 2009) que fez com que a classe e a escola atingisse e superasse as metas de aprendizagem estipuladas pelo mesmo.

Mostramos que a Geometria Fractal, mesmo sendo considerada um ramo recente da Matemática e alvo de discussões, além do estudo ainda incipiente sob alguns aspectos, pode ser amplamente utilizada em salas de aula da Educação Básica. Ela pode se manifestar na forma de muitas atividades a serem desenvolvidas pelos estudantes, além de despertar o interesse destes pelo assunto.

Destacamos também, após nossas análises e reflexões, os pontos considerados frágeis da proposta que podem ser alvo de futuros estudos e avanços:

a) A elaboração de um Material Didático que será utilizado por estudantes deve ser cercada de cuidados. A escolha do tema, do material já disponível, o formato do material proposto, sua escrita, revisões e testes devem ser pautados pela atenção, pelo rigor e pelo respeito com o público-alvo.

b) O cronograma de trabalho a ser seguido pelo professor em sua sala de aula deve ser cuidadosamente elaborado e respeitado, pois sabemos das muitas interferências que uma aula pode sofrer por condições externas à vontade do professor e mesmo dos estudantes. Este cronograma vem minimizar os efeitos de tais imprevistos.

c) As atividades envolvendo o preenchimento de tabelas, a constatação das regularidades e a generalização que a Álgebra permite devem ser elaboradas de forma que não fiquem cansativas para os estudantes e que sejam de fácil leitura e interpretação. A compreensão de alguns pré-requisitos podem ajudar este trabalho.

A relevância de explicitar as fragilidades ocorridas com vistas a melhora tem em mente o que deve ser a todo momento o alvo do nosso trabalho: o melhor aprendizado dos nossos estudantes. E um dos passos para a concretização deste projeto maior é esse olhar critico e reflexivo do professor sobre a sua prática.

Nestas condições, conclui Ponte (2002, p. 19): *“essa investigação ganha um valor que ultrapassa os limites de uma investigação local, (...) para se tornar em algo com um valor acrescentado para toda a comunidade educativa.”*

## Referências

ALMEIDA, Arlete Aparecida Oliveira. *Os fractais na formação docente e sua prática em sala de aula*. 2006. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/>. Acesso em: mar. 2009.

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana plana.* 8. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (*Coleção do Professor de Matemática).*

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.* 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. *(Coleção Tendências em Educação Matemática).*

BARROSO, Juliane Matsubara (Ed.). *Projeto Araribá:* Matemática. São Paulo: Moderna, 2006. 4 v. Obra coletiva organizada pela Editora Moderna.

BOYER, Carl Benjamim. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1981.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília, 1997. Disponível em: < *portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf* >. Acesso em: jan. 2009.

__________. Portaria Mestrado Profissional. *Diário Oficial da União,* 23 jun. 2009, seção 1. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13772:portaria-mestrado-profissional&catid=191:sesu>. Acesso em: jul. 2009.

CHARLOT, Bernard. *Da relação com o saber.* Porto Alegre: Artmed, 2000.

DINIZ, Maria Ignez; SMOLE, Kátia Stocco. *Matemática Ensino Médio.* São Paulo: Saraiva, 2007. 3 v.

EDGAR, Gerald. *Measure, topology, and fractal geometry*. 2nd ed. New York: Springer, 2008.

EUCLIDES. *Os elementos.* Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FRACTAIS: dimensão oculta (vídeo). Disponível em: <*www.youtube.com/watch?v=zRQIOIYVEwg*>. Acesso em: abr. 2010.

GHEDIN, Evandro Luiz. *Professor-reflexivo: da alienação da técnica à autonomia da crítica.* Disponível em: <www.anped.org.br/reunioes/24/P0807764775255.doc>. Acesso em: jan. 2010.

GOMES, Antônio do Nascimento; SALVADOR, José Antonio. *Fractais no ensino de Geometria da Educação Básica.* In: Encontro Brasileiro de Pós-Graduandos em Educação Matemática – EBRAPEM, 13, 2009, Goiânia. Goiânia: UFG, 2009, GT 11- sessão A1, p. 178. Disponível em: < http://www.ebrapem.mat.br/anais.html>. Acesso em: fev. 2010.

__________. *Incluindo fractais no Ensino de Geometria da Educação Básica*. In: Congresso Estadual Paulista de Formação de Educadores - CEPFE, 10, 2009, Águas de Lindóia-SP. Águas de Lindóia: UNESP, 2009. CD-Room.

GUERRINI, Fábio Müller; ESCRIVÃO FILHO, Edmundo. BELHOT, Renato Vairo. *ABC do texto científico*. São Carlos: SEP/EESC/USP, 2009.

HELLMEISTER, Ana Carolina P. Lógica através de exemplos: vamos usar a RPM? *Revista do Professor de Matemática*, n. 47. Disponível em: <*www.sbm.org.br/periodicos/rpm/47/Logica.doc*>. Acesso em: jan. 2010.

LIEURY, Alain; FENOUILLET, Fabien. *Motivação e aproveitamento escolar*. Tradução: Yvone Maria de C. T. da Silva. São Paulo: Loyola, 2000.

LOVIS, Karla Aparecida. *Geometria Euclidiana e geometria hiperbólica em um ambiente de geometria dinâmica:* o que pensam e o que sabem os professores. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

MANDELBROT, Benoit B. *The fractal geometry of nature.* New York: W. H. Freeman and Company, 1977.

MOREIRA, Marco Antonio. *Mapas conceituais e aprendizagem significativa*. In: XV SNEF. Curitiba: 2003. Disponível em: <http://omnis.if.ufrj.br/~marta/aprendizagememfisica/mapasconceituais.pdf>. Acesso em: fev. 2009.

NÚMEROS pares e ímpares. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmeros_pares_e_%C3%ADmpares>. Acesso em: mar. 2010.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. *Geometria fractal e aplicações*. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Cidade do Porto, 2006.

PAIS, Luiz Carlos. Questões metodológicas e a engenharia didática. In: _____. *Didática da Matemática*: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

PONTE, João Pedro. Investigar a nossa própria prática. In: Grupo de Trabalho I (Org.). *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM, 2002. p. 5-28.

__________. *Investigar, ensinar e aprender*. In: Actas do ProfMat 2003. Lisboa: APM, 2003. p. 25-39. CD-Room.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana. OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SALVADOR, José Antonio. *Dobras, Cortes, Padrões e Fractais.* In: Encontro de Medalhistas da OBMEP, 3, Nova Friburgo – RJ. Nova Friburgo: 2009.

SALVADOR, José Antonio et al. *Mapas Conceituais / Software Numérico:* Experiência no Estudo de Cálculo Numérico*.* In: Tendências em Matemática Aplicada - TEMA, SBMAC, 2003, v. 1, p. 129-138. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/tema/index.php?seletas/4_1.php>. Acesso em: abr. 2010.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo:* Matemática. São Paulo, 2008. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/contents/SIGS-CURSO/sigscFront/default.aspx?SITE_ID=25&SECAO_ID=595 >. Acesso em: 15 ago. 2008.

__________. *Caderno do Professor 8ª série:* Matemática. São Paulo, 2009. v. 3.

__________. *Caderno do Aluno 8ª série:* Matemática. São Paulo, 2009. v. 3.

__________. *Deliberação CEE Nº 09/97:* Progressão Continuada – SP. Disponível em: <http://www.conteudoescola.com.br/site/content/view/8/57/>. Acesso em: jan. 2010.

SOFTWARE Geogebra. Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/>. Acesso em: ago. 2008.

## Bibliografia


ARTIGUE, Michèle. Engenharia didática. In: BRUN, Jean. *Didáctica das Matemáticas*. Original em: Recherches en didactique dês mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, 1988. p. 281-308.

BACKES, André Ricardo; BRUNO, Odemir Martinez. *Técnicas de estimativa da dimensão fractal:* um estudo comparativo. Disponível em: < www.dcc.ufla.br/infocomp/artigos/v4.3/art07.pdf>. Acesso em: jun. 2009.

CAMP, Dane R. Benoit Mandelbrot. The Euclid of Fractal Geometry*. Mathematics Teacher*, v. 93, n. 8, p. 708-712, nov. 2000.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. *ZETETIKÉ* (Cempem – FE – Unicamp), Campinas, v.13, n. 23, p. 87-119, jan./jun. 2005.

CHEVALLARD, Yves. *La transposición didáctica:* del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 1998.

DOMINGUES, Higino Hugueros. *Espaços métricos e introdução a topologia*. São Paulo: Atual, 1982.

FERNANDES, Fernando Luís Pereira. *Fractais e "Porcariazinhas": Professor, acaba ou não acaba?* In: MATESCO, Eliane; FIORENTINI, Dario (Org.). Histórias de Investigações de/em aulas de matemática. Campinas: Alínea, 2006. p. 207-226.

GONÇALVES, Andrea Gomes Nazuto. *Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais*. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/>. Acesso em: mar. 2009.

GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. 2. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2006.

KEMMIS, Stephen; WILKINSON, Mervyn. A pesquisa-ação participativa e o estudo da prática. In: DINIZ-PEREIRA, Júlio Emílio. *A pesquisa na formação e no trabalho docente.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002. p. 43-66.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *ZETETIKÉ* (Cempem – FE – Unicamp), Campinas, v.11, n. 19, p. 57-80, jan./jun. 2003.

NASSER, Lílian; TINOCO, Lúcia (Coord.). *Curso básico de geometria:* enfoque didático. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, Projeto Fundão, 2004**. 3** Módulos.

# APÊNDICE A – Algumas Perspectivas para o Uso de Fractais na 5ª e 8ª Séries do Ensino Fundamental

Este apêndice apresenta algumas atividades piloto desenvolvidas com os estudantes da turma pesquisada e também com outras duas turmas de 5ª série da mesma escola no intuito de observar o uso que pode ser feito de atividades produtivas no Ensino Fundamental que se relacionem com a Geometria Fractal.

As duas atividades aqui relatadas tratam da construção e exploração, respectivamente, do Cartão Fractal de Páscoa e do Balão Fractal. Estas duas atividades se baseiam em dobraduras e cortes, além de estudos de regularidades que levam a questão da auto-semelhança presente nos fractais.

Estas duas atividades também tiveram um forte cunho motivador e integrador com o professor, as salas e a comunidade, visto que o Cartão confeccionado tinha o objetivo de ser ofertado a alguém da família ou amigo e o Balão Fractal construído serviu de decoração para a Festa Junina promovida pela escola.

Assim voltamos à questão inicial de pensar em estudantes mais interessados e como este interesse pode acarretar uma aula mais dinâmica e motivadora para todos e um melhor aprendizado.

## A.1 O Cartão Fractal de Páscoa

A construção do Cartão Fractal é conhecida e está presente em muitas atividades com diversos nomes[52]. Aqui fazemos uma adaptação do modelo trivial, incluindo a data comemorativa que usamos de fator motivador para os estudantes e também os conteúdos matemáticos que julgamos conveniente abordar.

A figura 40 mostra uma planificação do cartão, e a figura 41 mostra exemplos de cartões confeccionados pelos estudantes da 5ª e 8ª série da escola pesquisada.

[52] Ver Salvador (2009) e Almeida(2006), por exemplo.

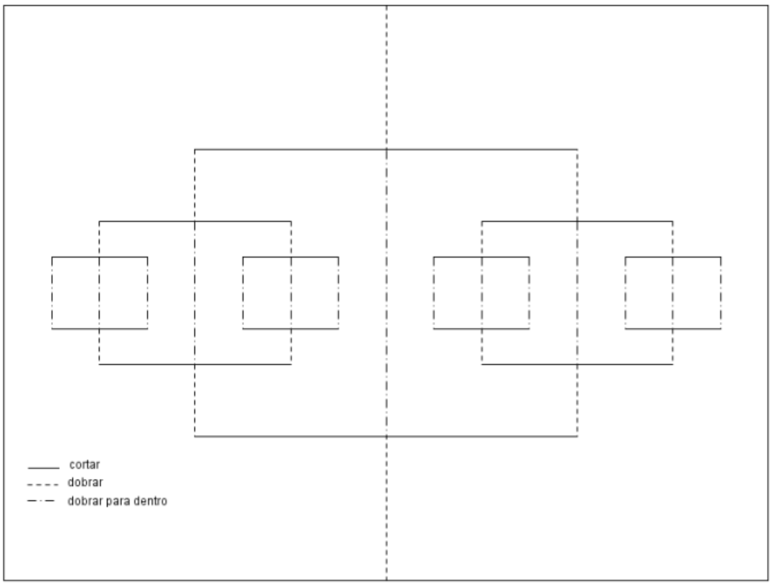



Figura 40 – Exemplo de planificação do cartão.

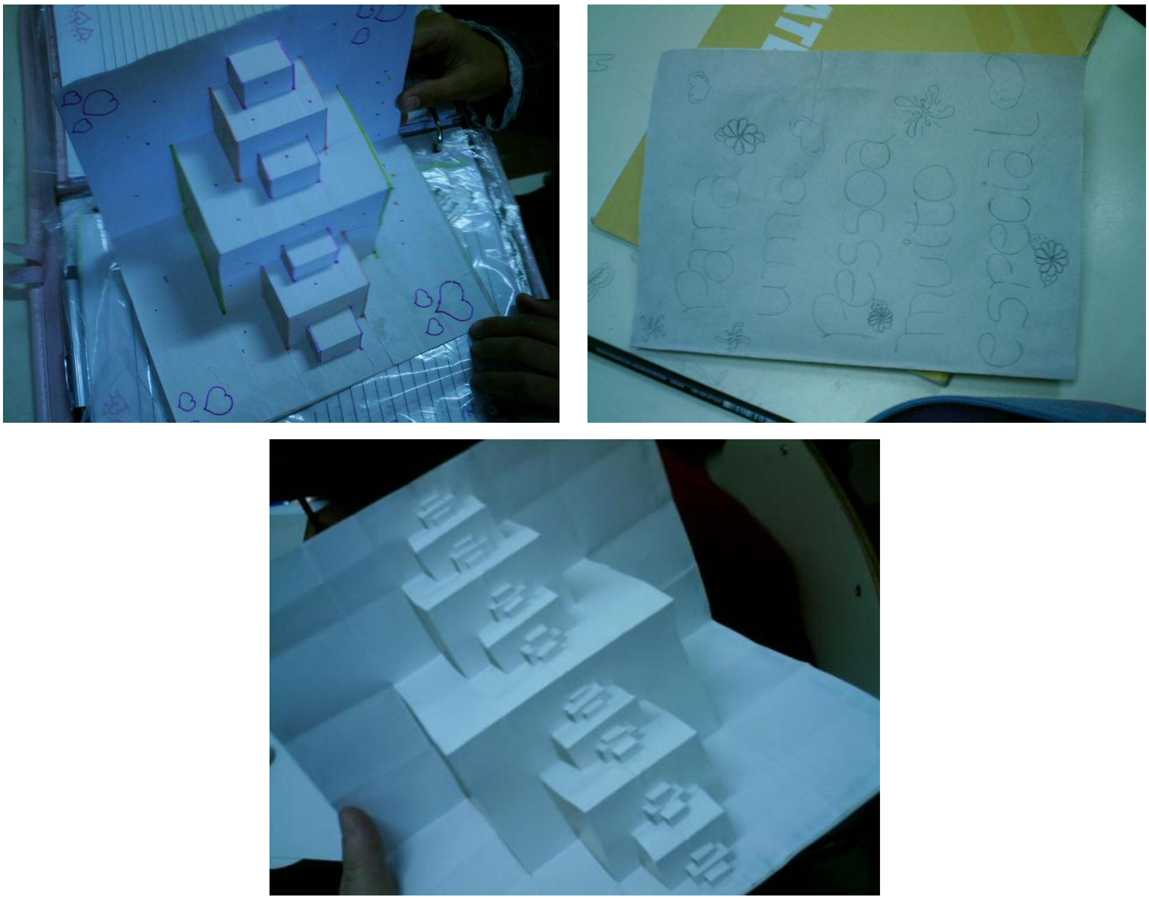



Figura 41 – Cartões confeccionados pelos estudantes.

Consideramos como objetivos para esta atividade a exploração do lado lúdico e criativo dos estudantes através da construção de um Cartão de Páscoa, que pretende incentivar o fortalecimento de relações (com a doação dos cartões feitos) e propagar o espírito de ética, amor e união simbolizado pela data comemorativa[53].

Em termos de conteúdos matemáticos explorados, destacamos a compreensão do processo iterativo que gerou a construção, a compreensão de unidades e processos de medida, o uso da álgebra para os cálculos e também a investigação de padrões e auto-similaridade existentes na construção.

Outro aspecto que julgamos relevante nesta e em todas as atividades apresentadas é propô-las aos estudantes de forma que todos possam realizá-las com materiais de fácil acesso. Neste caso, usaremos 2 folhas de papel retangular (A4 ou outra com dimensões convenientes) de cores diferentes e uma tesoura, além de lápis de cor e outros materiais para a decoração do cartão.

A seguir listamos os procedimentos da construção do Cartão:

1- Dobre uma folha de papel retangular de largura inicial igual a $L$ e comprimento inicial igual a $C$ ao meio obtendo um retângulo de dimensões $L$ e $\frac{C}{2}$.

2- Dobre de forma marcando a metade da largura e a partir daí, dobre novamente para marcar $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ da largura. Dobre também na metade no sentido do comprimento.

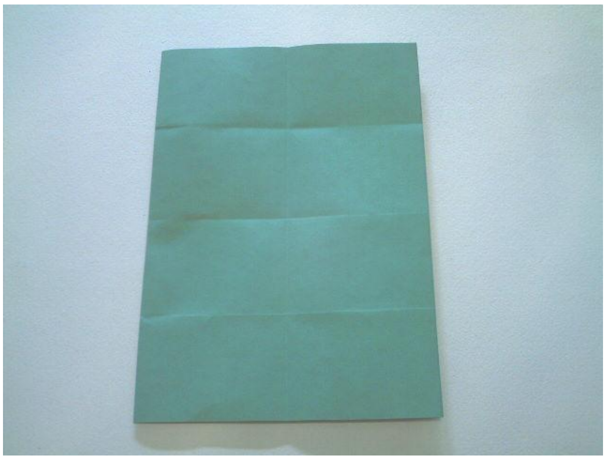


Figura 42 – As primeiras dobras.

3- Corte, a partir da primeira dobra, o primeiro e o terceiro segmentos obtidos pelas dobras anteriores ($s_1$ e $s_2$).

[53] Esta é uma abordagem particular, que claramente pode ser transferida para outra festividade, como Dia das Mães, Dia dos Pais, etc.

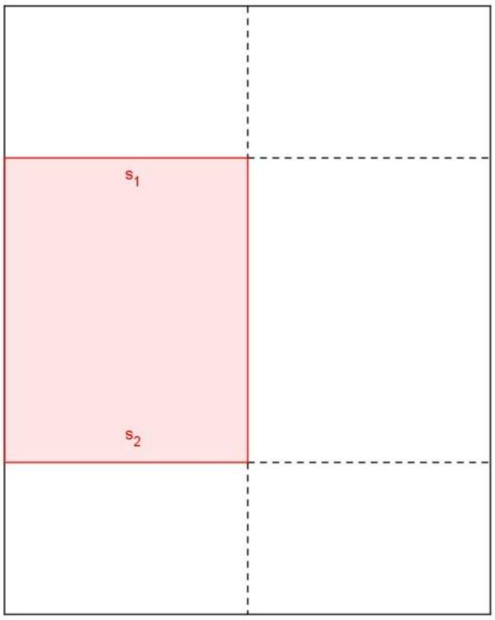



Figura 43 – O retângulo que será dobrado internamente.

4- Dobre internamente este retângulo recortado, como mostram as figuras 43 e 44.

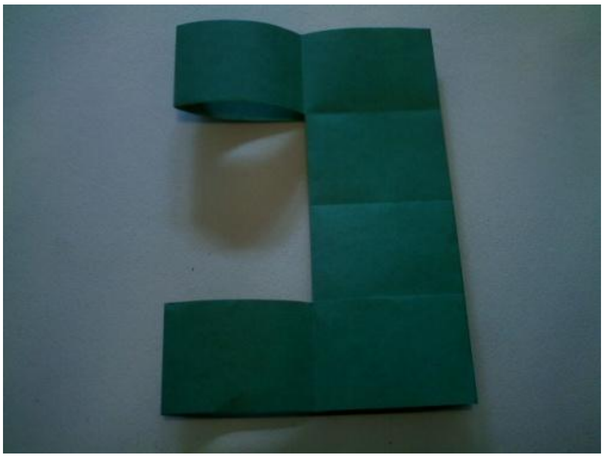


Figura 44 – A primeira iteração.

5- Repita os passos 2 e 3 com o retângulo dobrado internamente no passo 4, enquanto a largura do papel permitir.

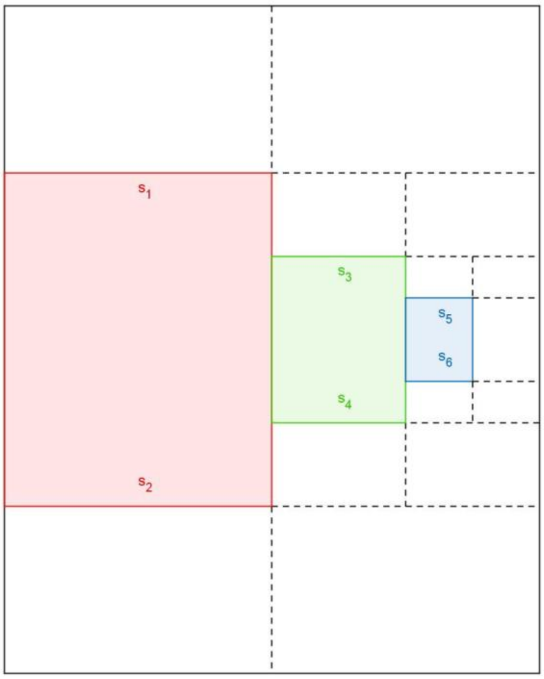



Figura 45 – Os segmentos cortados e dobrados nas 3 primeiras iterações.

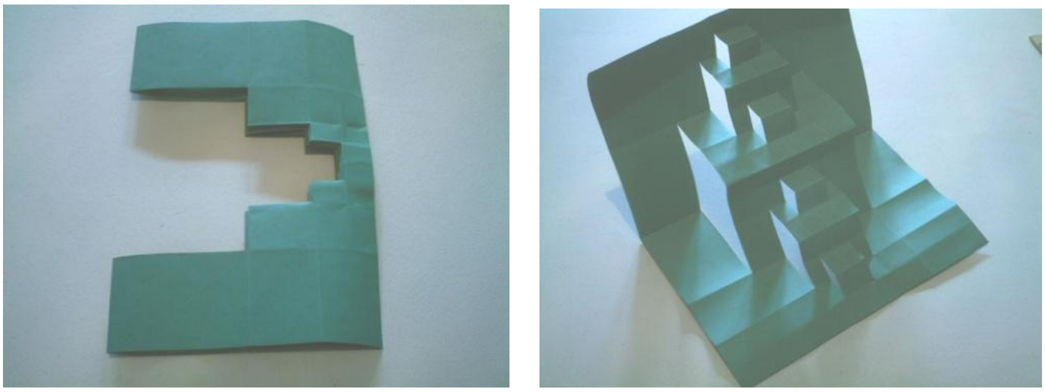


Figura 46 – Cartão construído com três iterações.

6- Cole a folha recortada em outra deixando as partes recortadas livres para fora, para que o cartão fique mais resistente e a capa possa ser trabalhada com alguma mensagem.

A partir da construção do cartão, ou mesmo durante ela, algumas questões podem ser formuladas pelo professor, tais como:

a) identificar as figuras obtidas com as dobras e cortes e relações de semelhança entre elas;

b) estimar as medidas possíveis das partes do cartão após cada dobra e corte;

c) construir planificações do cartão;

d) construir desenhos do cartão de diferentes perspectivas; e

e) preencher tabelas com os cálculos realizados (comprimento, largura, perímetro, área, relação entre os perímetros e áreas).

No decorrer da construção, feita com as orientações do professor, percebemos que os estudantes não tem muitas dificuldades, a não ser uma ou outra dobra ou corte incorretos.

Para estes casos, o estudante recebe outra folha para que possa voltar e fazer sua construção corretamente. O objetivo é que todos os estudantes tenham o seu cartão, e não avaliar negativamente o estudante que errou ou não conseguiu terminar. Assim, todos terminam com um sentimento de êxito.

Durante a construção, os estudantes que apresentam uma dificuldade maior são orientados individualmente pelo professor e também por outros estudantes próximos que não estão com problemas. Isto dá uma dimensão maior de afetividade entre professor e estudantes e também entre eles, que se sentem mais próximos uns dos outros trabalhando colaborativamente e promovendo sua auto-estima.

Figura 47 – Trabalho de uma estudante.

Mesmo sem muita intervenção do professor no momento da finalização do cartão, ou seja, a decoração da sua capa, aparecem idéias criativas, como observamos nas Figuras 47 e 48.

O cartão da Figura 48 (a) foi produzido por uma estudante após a aula e trazido para a classe ver no dia seguinte.

(a) (b)

Figura 48 – Trabalho de dois estudantes.

Com relação a discussão das medições realizadas com as dobras, constatamos os seguintes fatos:

a) os estudantes de 5ª série não tem familiaridade com álgebra;

b) os estudantes de 8ª série apresentaram dificuldade em manipular frações com cálculos genéricos;

c) a calculadora não foi utilizada e as medidas não eram dadas por números naturais[54]; e

d) alguns estudantes mostraram-se cansados ao fazer os cálculos.

Desejamos que estas propostas de atividades simples possam suscitar em colegas professores o interesse em também aplicá-las com seus estudantes, explorando-as inclusive de outras formas, com outros objetivos, outros conteúdos trabalhados, enfim, que possam servir de base para outras criações.

Afirmamos e acreditamos neste potencial criador do professor, para que, a partir de sua realidade e prática profissional possa intervir junto a seus estudantes para um melhor aprendizado e assim, maior satisfação de todos.

## A.2 O Balão Fractal

O objetivo da atividade é a construção denominada Balão Fractal. Esta sugestão é uma variação do conhecido Cartão Fractal Triangular, de fácil construção e que guarda semelhanças com o Triângulo de Sierpinski.

[54] Uma sugestão de medidas que gera cálculos mais simples é uma folha de 20 x 32 cm.

O Balão, por sua vez, é composto a partir de quatro partes onde cada uma destas é a junção de dois cartões triangulares conforme ilustra a figura 49, que traz o balão montado confeccionado em papel cartão pelos estudantes.

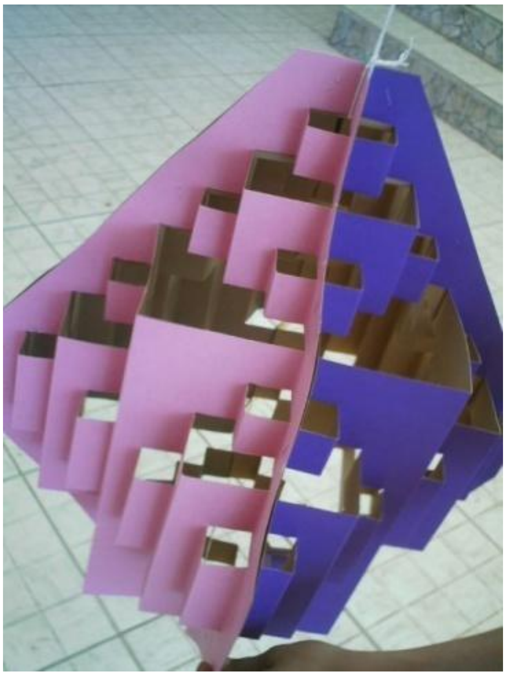


Figura 49 – O Balão Fractal montado.

Pretendemos com esta atividade a integração dos estudantes e professor na confecção dos balões que serviram como parte da decoração da Festa Junina da escola.

Esta festa se aproximava e devido a sua dimensão, reúne toda a comunidade escolar e todos trabalham para a sua organização e sucesso. Esta integração da comunidade escolar vem ao encontro das questões de motivação que objetivamos trabalhar no projeto.

O Balão pode ser construído com materiais de fácil acesso e baixo custo:

a) folhas de papel (revista ou sulfite[55]) com medidas 16 x 20 cm (para o cartão);

b) folhas de papel cartão colorido com medidas 32 x 48 cm (para a face do balão);

[55] O papel reaproveitado, como as folhas de revista, por exemplo, são úteis quando a atividade é feita somente com dobras; para a atividade feita com medições usando a régua, é aconselhável utilizar um papel em que as marcações sejam visíveis.

c) tesoura, régua, lápis, grampeador.

A atividade foi realizada com estudantes de 5ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e exploramos os seguintes conteúdos: Múltiplos e Divisores; Frações; Medidas; Perímetro e Área.

A seguir detalharemos a construção do Cartão Fractal Triangular, que será considerado um pré-requisito para a construção do Balão.

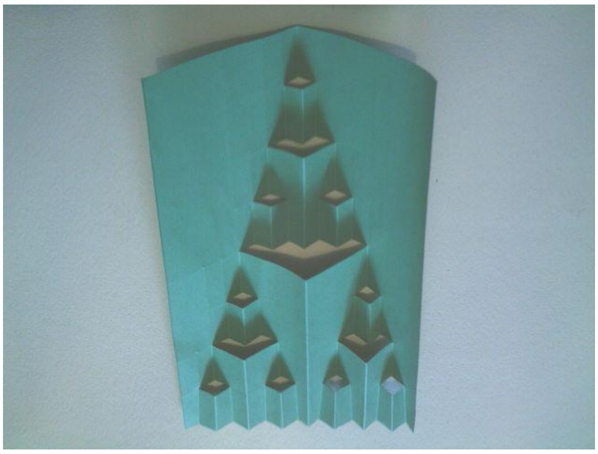


Figura 50 – O Cartão Fractal Triangular.

1- Dobre uma folha de papel retangular de largura inicial igual a $L$ e comprimento inicial $C$ ao meio obtendo um retângulo de dimensões $L$ e $\frac{C}{2}$.

2- Divida esta nova folha dobrada em 4 partes congruentes, conforme a figura. Isto pode ser feito facilmente com dobras ou com a régua e o lápis.

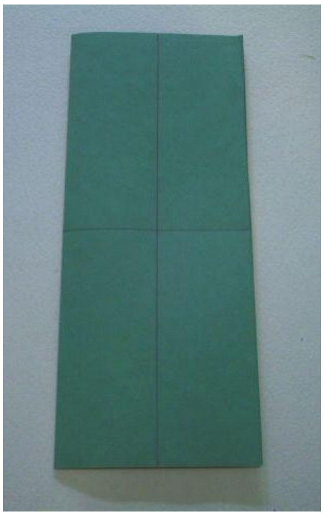


Figura 51 – Primeiras divisões.

3- Recorte a largura do retângulo inferior esquerdo a partir do lado dobrado (segmento $s_1$) e dobre-o para dentro.

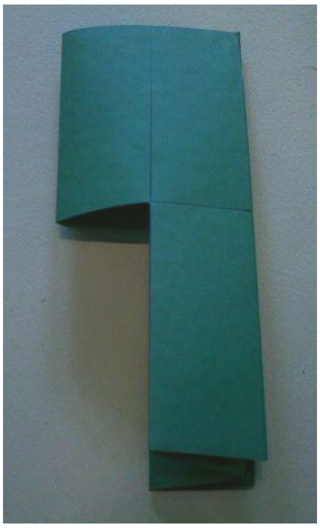


Figura 52 – A primeira iteração.

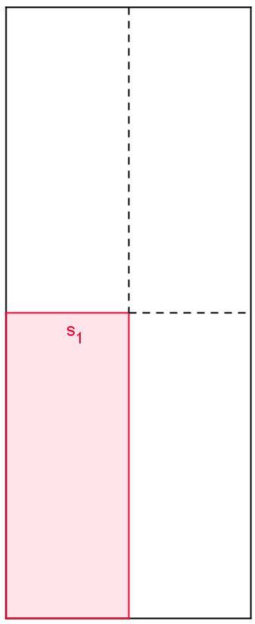



Figura 53 – O primeiro retângulo dobrado internamente.

4- Repita o procedimento com os retângulos restantes na parte esquerda da folha enquanto possível.

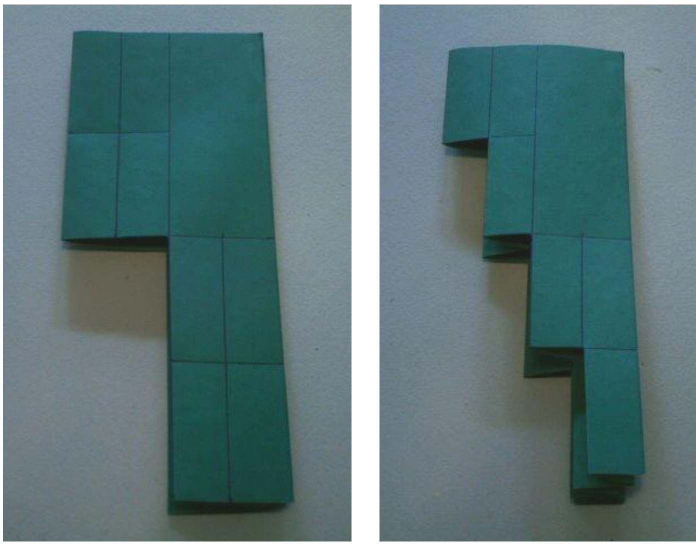


Figura 54 – A segunda iteração.

As figuras a seguir mostram a situação final da folha dobrada: os retângulos em destaque são sucessivamente dobrados internamente, do maior para os menores: $s_1$; $s_2$ e $s_3$; $s_4$, $s_5$, $s_6$ e $s_7$.

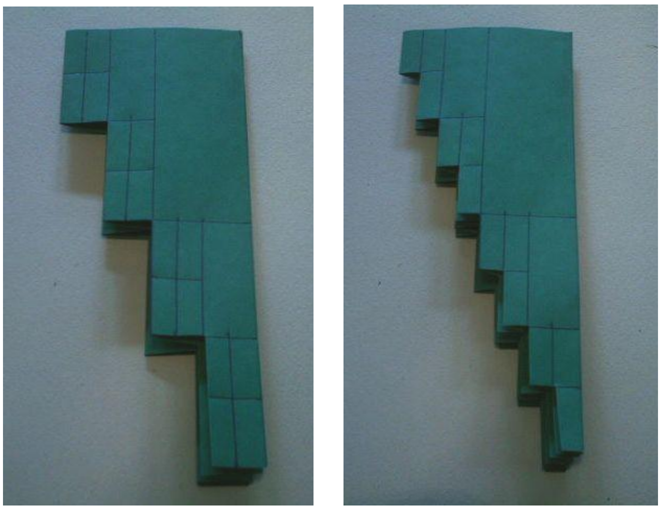


Figura 55 – A terceira iteração.

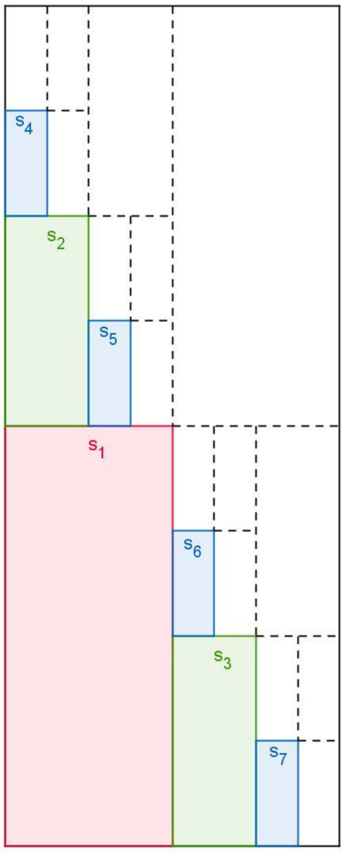



Figura 56 – Os segmentos recortados e dobrados nas três primeiras iterações.

Após a construção do Cartão Triangular e de um modelo do Balão Fractal pronto, o estudante percebe que são necessários dois cartões triangulares para cada “face” do balão, e que estes devem ser construídos a partir de dobras e cortes em uma mesma folha.

Desta forma, a construção anterior torna-se apenas uma preparação para a construção final, cujos procedimentos detalhamos a seguir.

1- Dobre um pedaço de papel cartão de medidas 32 x 48 cm (as medidas sugeridas anteriormente) de forma a obter um retângulo de medidas 16 x 48 cm.

2- Construa os segmentos medindo $\frac{1}{4}$ do comprimento total (no caso, 12 cm) a partir de cada lateral. Construa também o segmento medindo metade da largura da folha dobrada (no caso, 8 cm). Os segmentos $s_1$ e $s_2$ (a partir do lado da primeira dobra) serão cortados e dobrados internamente.

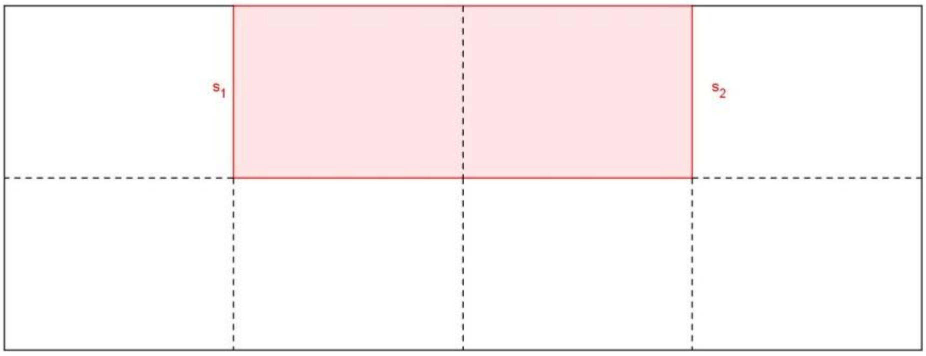



Figura 57 – O primeiro retângulo dobrado internamente.

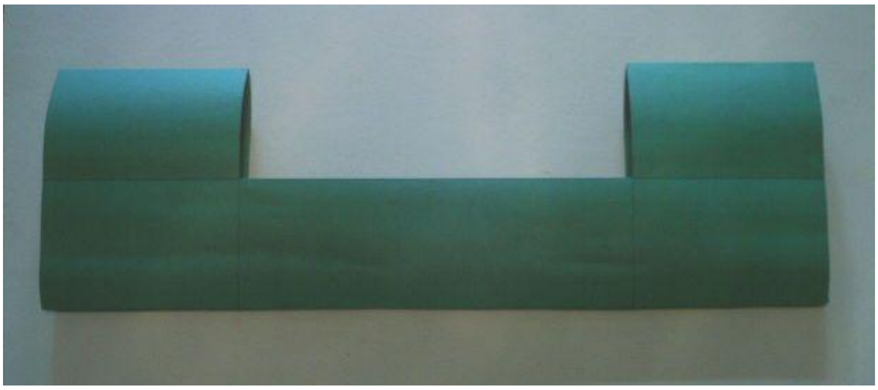


Figura 58 – O primeiro passo da construção.

3.1- Repita o processo para o retângulo central.

3.2- Nos retângulos laterais restantes do passo anterior, divida-os em 4 retângulos congruentes (suas medidas serão a metade de cada lado) e recorte os centrais.

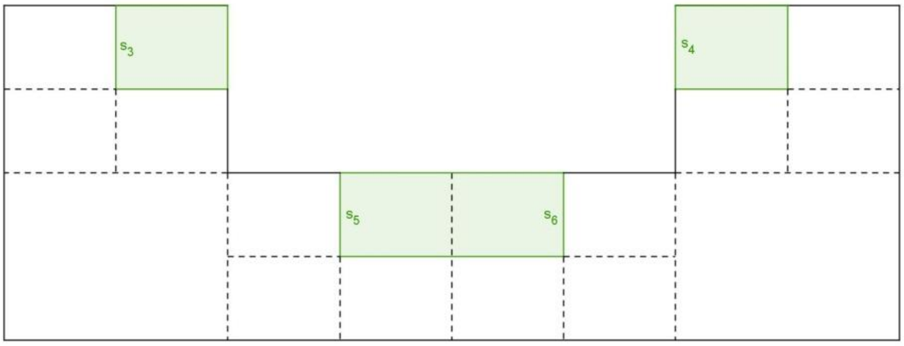



Figura 59 – Os segmentos recortados e retângulos a serem dobrados internamente: $s_3$, $s_4$, $s_5$ e $s_6$.

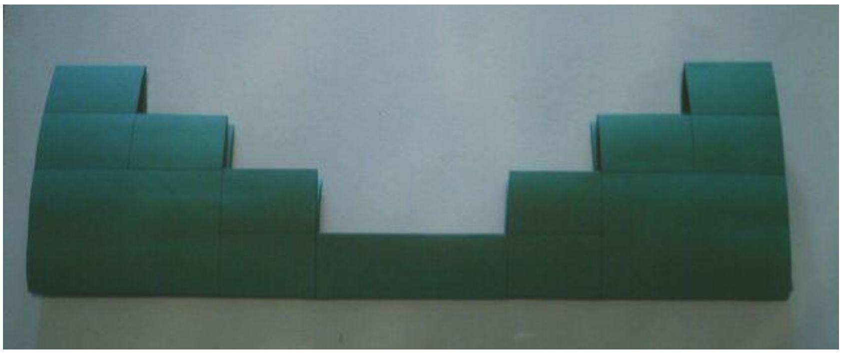
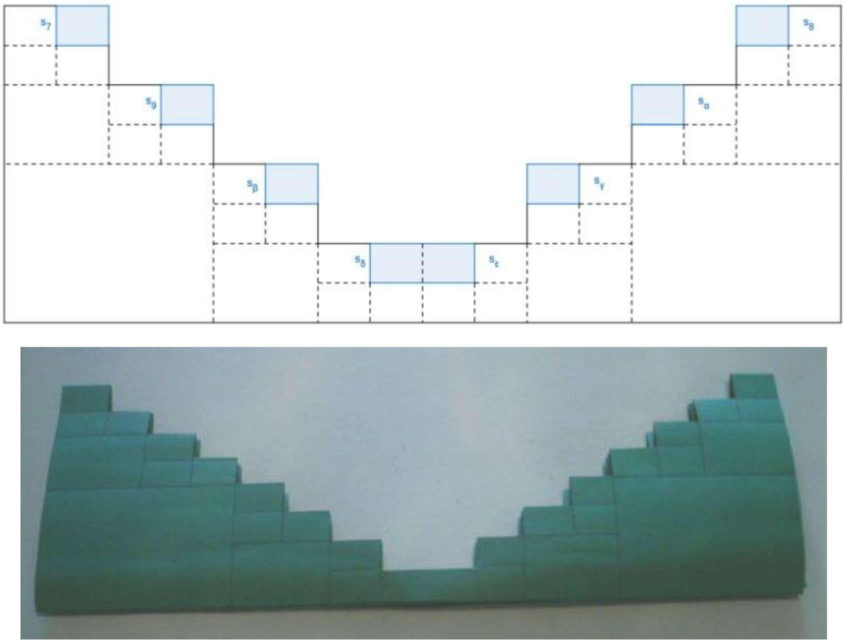
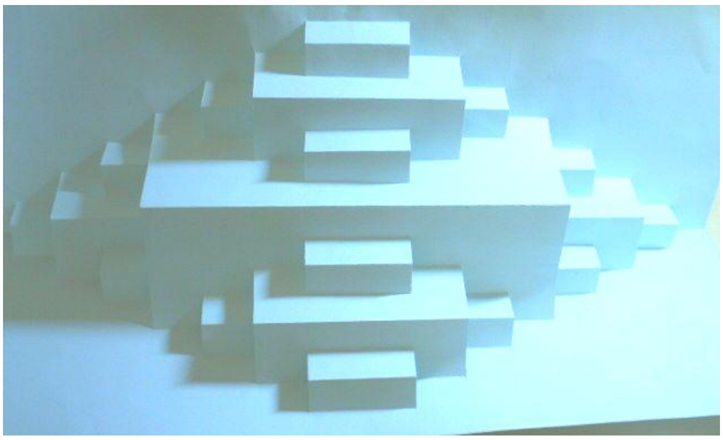


Figura 60 – A etapa 3 da construção.

4 – Repita o processo 3.1 e 3.2 no retângulo central e nos laterais restantes, enquanto for possível.



(a)



(b)

Figura 61 – a próxima etapa da construção e uma face do Balão Fractal.

A Figura 61 (a) exibe os segmentos que são recortados e os retângulos dobrados internamente neste último passo. A Figura 61 (b) mostra uma face do Balão Fractal pronta.

Uma exploração matemática pode ser realizada a partir dos cálculos feitos pelos estudantes no decorrer da construção. Os segmentos que são dobrados ou cortados geram valores que podem ser organizados em tabelas que os estudantes preenchem. O professor organiza questionamentos durante este preenchimento. Aqui, ao tratar das medidas nos sucessivos passos da construção, os conteúdos relacionados anteriormente são explorados.

Seguem-se modelos de tabelas preenchidos com os dados referentes às sugestões de medidas anteriores.

| **DADOS INICIAIS DA FOLHA** | |
|---|---|
| COMPRIMENTO (cm) | 20 |
| LARGURA (cm) | 16 |
| PERÍMETRO (cm) | 72 |
| ÁREA ($cm^2$) | 320 |

| PASSO | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| COMPRIMENTO DO BURACO (cm) | 10 | 5 | 2,5 |
| LARGURA DO BURACO (cm) | 8 | 4 | 2 |
| PERÍMETRO DO BURACO (cm) | 36 | 18 | 9 |
| ÁREA DO BURACO ($cm^2$) | 80 | 20 | 5 |
| PERÍMETRO RESTANTE (cm) | 92 | 102 | 107 |
| ÁREA RESTANTE ($cm^2$) | 240 | 200 | 180 |

Tabela 7 – Cálculos com o Cartão Fractal Triangular.

| DADOS INICIAIS DA FOLHA | |
|---|---|
| COMPRIMENTO (cm) | 48 |
| LARGURA (cm) | 32 |
| PERÍMETRO (cm) | 160 |
| ÁREA (cm$^2$) | 1536 |

| PASSO | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| BURACO CENTRAL | COMPRIMENTO (cm) | 24 | 12 | 6 |
| | LARGURA (cm) | 16 | 8 | 4 |
| | PERÍMETRO (cm) | 80 | 40 | 20 |
| | ÁREA (cm²) | 384 | 96 | 24 |
| BURACOS LATERAIS | COMPRIMENTO (cm) | - | 6 | 3 |
| | LARGURA (cm) | - | 4 | 2 |
| | PERÍMETRO (cm) | - | 20 | 10 |
| | ÁREA (cm²) | - | 24 | 6 |
| PERÍMETRO RESTANTE (cm) | | 240 | 280 | 300 |
| ÁREA RESTANTE (cm²) | | 1152 | 960 | 768 |

Tabela 8 – Cálculos com a Face do Balão Fractal.

As investigações presentes no preenchimento das tabelas consistem em colocar no papel os dados referentes as dobras e as medidas dos cortes feitos, além do cálculo de áreas e perímetros.

Também pode ser trabalhado por indução o comportamento da figura nos próximos passos da construção que não foram feitos concretamente devido a dificuldade com as dobras e cortes cada vez menores. Afinal espera-se que o estudante perceba as regularidades presentes, como as sucessivas divisões por 2 e 4, com relação às medidas de comprimento e área, respectivamente.

A construção do Cartão Fractal Triangular foi feita para suscitar a curiosidade dos estudantes em descobrir como aquela figura se transformaria num balão e também como teste para que treinassem medições e cortes na folha menor antes de passarem ao processo de construção do balão, que exige mais atenção.

Em todo o processo da construção do Balão os estudantes mostram-se muito interessados na atividade, inclusive nos momentos de reflexão, medição e conclusões. Isto nos dá indícios de como uma atividade aparentemente sem muito conteúdo matemático, porém visual e artística pode transformar a aula num momento de aprendizado mais produtivo e divertido.

Na 5ª série, alguns estudantes apresentaram dificuldades com o uso da régua, a saber:

a) posicionamento da régua para medir determinado segmento;

b) desconhecimento do fato que a medida de um segmento, em centímetros, é dada pelo número de espaços de 1 centímetro que a régua acusa de uma extremidade a outra do mesmo; e o

c) posicionamento correto da régua para a construção de segmentos dados dois pontos.

Podemos intuir que atividades de medição com régua não estão presentes, em geral, no cotidiano dos estudantes até então, e requerem um treinamento que talvez não tenha sido sistematizado nas séries iniciais.

Trabalhando com o ciclo II do Ensino Fundamental e Ensino Médio, em geral pensamos que tais competências são triviais e que todos os estudantes a dominam quando chegam a 5ª série.

Além disso, observamos que alguns estudantes não identificam o processo iterativo e, desatentos, recortam outra parte do papel, inutilizando-o. Apesar do momentâneo desânimo dos estudantes quando isto acontece, verificamos que é possível reverter a situação, orientando-os a recomeçar.

Poucos estudantes apresentam problemas mais sérios com as construções. Quando as construções são usadas de forma diagnóstica, levam o professor a conhecer e talvez classificar ou entender as dificuldades apresentadas pelos estudantes e propor outros trabalhos para saná-las.

Outro ponto relevante a considerar é que a construção é sempre concluída com êxito pela imensa maioria dos estudantes, inclusive pelos que geralmente não participam das atividades propostas no dia a dia das aulas mais tradicionais.

Apesar da aparente distância entre os níveis de conhecimento dos estudantes de 5ª e 8ª séries, as dificuldades observadas e também o êxito na execução da atividade foram muito semelhantes.

## APÊNDICE B – Folhas de Atividades Aplicadas

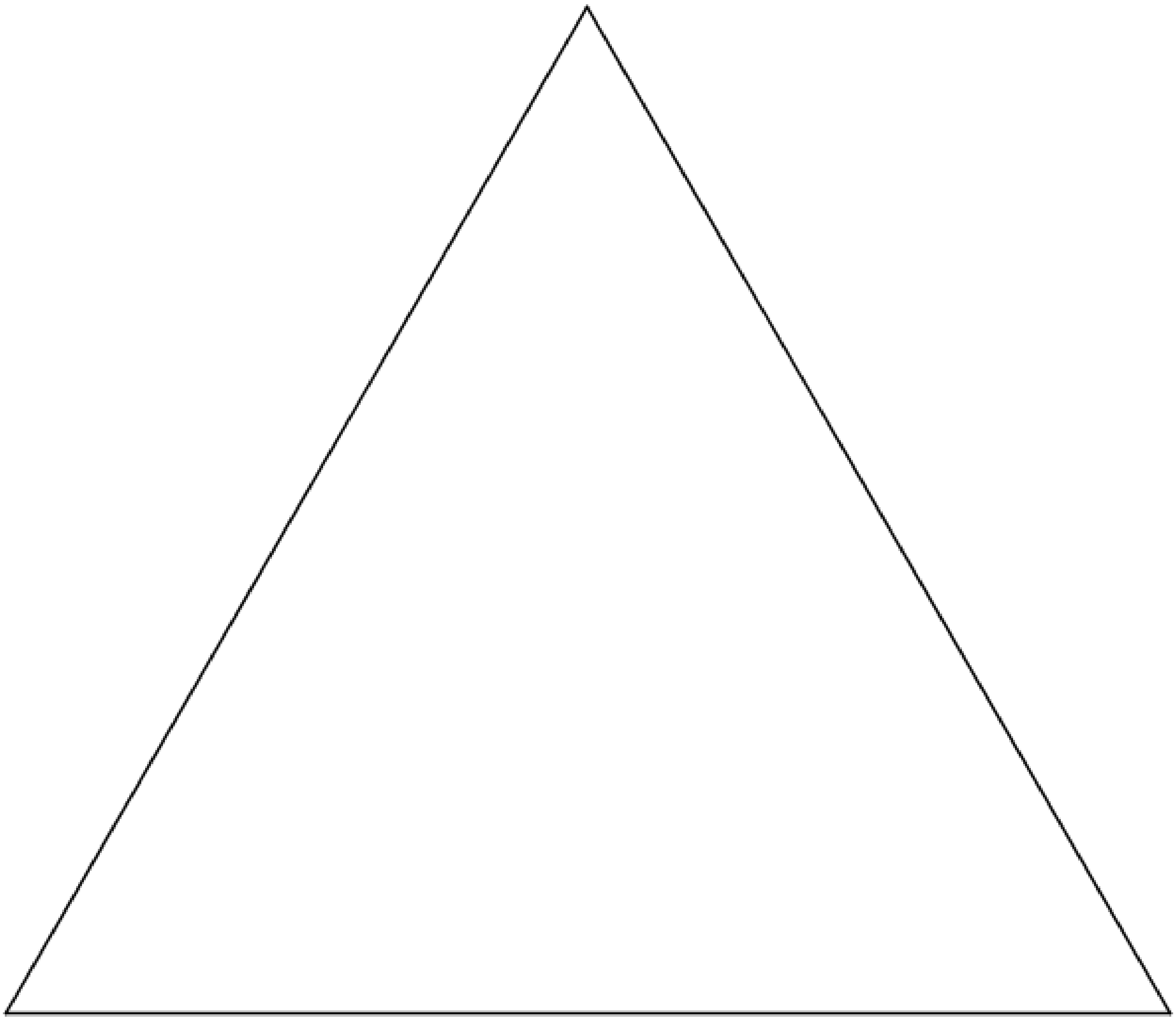
Neste apêndice exibimos as Folhas de Atividades aplicadas com os estudantes, inclusive com algumas incorreções que estiveram presentes. Nossa sugestão de uso do material é que o professor o estude com antecedência, observe suas potencialidades e limitações e o explore com seus estudantes. Ele também pode ser abordado na íntegra ou em partes, como melhor julgar o professor.

Folha de Atividade I – Construção do Triângulo de Sierpinski

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: ________________________________________________ N. ____



AVALIAÇÃO: O que achou da aula?

1- apresentação:____________________________________________________________

2- construção: ______________________________________________________________

3- nível de dificuldade:_______________________________________________________

# Folha de Atividade II – Questões para investigação – Triângulo de Sierpinski

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: __________________________________________________ N. ____

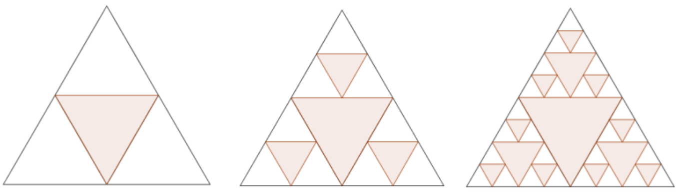
1- RECORDANDO...

| a) O que é o <u>perímetro</u> de uma figura plana? | b) O que é o <u>perímetro</u> de um triângulo? | c) E no caso do <u>triângulo eqüilátero</u> que trabalhamos? |
|---|---|---|
| | | |

*PARA REFLETIR...*

*O que é uma fórmula? Como obter uma fórmula ou uma expressão para a área e o perímetro do triângulo? Em função de que quantidades?*

2- No triângulo de Sierpinski, o que é um "buraco"?



*O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) criou este e outros fractais, que mais tarde impulsionaram a criação da Teoria da Geometria Fractal.*

3- A partir da sua construção do Triângulo de Sierpinski, preencha a tabela.

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | | | | |
| LADO | | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | | | | |
| PERÍMETRO TOTAL | | | | |

4- Agora na tabela a seguir, encontre a relação entre o perímetro e a área de um passo para o passo seguinte...

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| PERÍMETRO | | | | |
| RELAÇÃO $P_{i+1}/P_i$ | | | | |

*RECORDANDO...*
*<u>Qual é a UNIDADE DE MEDIDA mais adequada para...</u>*
Lado (segmento): ______
Perímetro: ______
Área: ______

5- O que você percebeu?

6- O que acontece com o perímetro do triângulo inicial e o perímetro de cada triângulo no primeiro passo? Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?

7- Defina assim: o perímetro do Triângulo de Sierpinski é a soma dos perímetros de cada triângulo interno (soma dos lados dos buracos) junto com o perímetro do triângulo inicial. A partir disso, o que podemos dizer sobre o perímetro da figura resultante a cada passo feito? Ele aumenta, diminui ou permanece constante?

DICA: Faça mais alguns passos na tabela ao lado para confirmar...

| PASSO | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | | | | |
| LADO | | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | | | | |
| PERÍMETRO TOTAL | | | | |

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |
| ______________________ ______________________ ____________ | ______________________ ______________________ ____________ | ______________________ ______________________ ____________ |

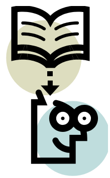
Folha de Atividade III – Questões para investigação – Tapete de Sierpinski

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: ________________________________________________ N. ____

1- Para uma figura fractal como o Triângulo de Sierpinski, definimos o que é um *buraco*. Relembre esta e outras definições que usaremos a seguir:



a) buraco:
b) perímetro:
c) área:
d) segmento de reta:
e) segmentos congruentes:

2- Estudaremos aqui uma outra figura fractal, também construída por Waclaw Sierpinski e conhecida como **Tapete de Sierpinski**. Veja o processo iterativo que a determina e os primeiros passos de sua construção:

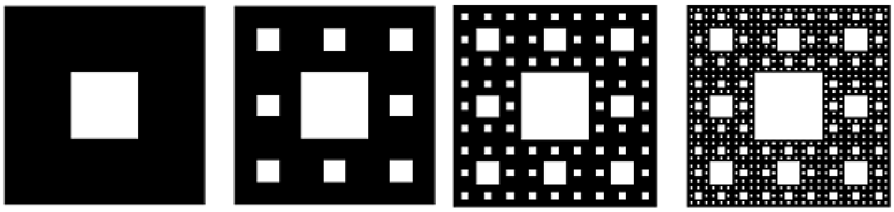
I- Divida os lados de um quadrado em três segmentos congruentes;

II- Ligue-os de forma a obter 9 quadrados menores contidos no quadrado inicial. Remova o quadrado central;

III- Repita o processo nos quadrados restantes.

*PARA REFLETIR:*
*O que é um processo iterativo?*

________________________________________
________________________________________
________________________________________



FÓRMULAS:
(para um quadrado de lado x)

*Perímetro:* ________
*Área:* ________

3- Escreva semelhanças e diferenças em relação a construção do Triângulo de Sierpinski.

4- Vamos estudar o Tapete de Sierpinski como fizemos com o Triângulo. Considere um quadrado inicial de lado 81 cm e preencha a tabela a seguir:

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | | | | | |
| LADO | | | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | | | | | |
| PERÍMETRO TOTAL | | | | | |
| ÁREA DE CADA BURACO | | | | | |
| ÁREA TOTAL | | | | | |

5- Agora na tabela a seguir, encontre a relação entre o perímetro e a área de um passo para o passo seguinte...

*Aqui no **Passo 0** consideramos o perímetro e a área do **quadrado inicial**...*

*A partir do **Passo 1**, consideramos o perímetro e a área de um **quadrado retirado**...*

| PASSO (i) | PERÍMETRO | ÁREA | RELAÇÃO $P_{i+1}/P_i$ | RELAÇÃO $A_{i+1}/A_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

6- O que você percebeu?

7- O que acontece com o perímetro do quadrado inicial e o perímetro do quadrado retirado no primeiro passo? Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?

8- O que acontece com a área do quadrado inicial e a área do quadrado retirado no primeiro passo? Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?

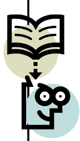
9- Defina assim: o perímetro do Tapete de Sierpinski é a soma dos perímetros de cada quadrado interno (soma dos lados dos buracos) junto com o perímetro do quadrado inicial. A partir disso, o que podemos dizer sobre o perímetro da figura resultante a cada passo feito? Ele aumenta, diminui ou permanece constante?

10- Defina assim: a área do Tapete de Sierpinski é a soma das áreas dos buracos retirada da área inicial do quadrado inteiro. A partir disso, o que podemos dizer sobre a área da figura resultante a cada passo feito? Ela aumenta, diminui ou permanece constante?

11- Pensando nas <u>figuras fractais</u> estudadas nas últimas aulas, desenhe no espaço abaixo uma outra figura fractal, da sua imaginação ou baseada nas figuras já vistas.

*Para ajudar, escreva abaixo exemplos de fractais:*

_______________________
_______________________
_______________________
_______________________
_______________________
_______________________
_______________________



| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |
| | | |

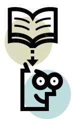
Folha de Atividade IV – Área, Álgebra e o valor do x

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: __________________________________________________ N. ____

1- Resolva a equação $x^2 - 100 = 0$ e descubra o valor do x! Faça de duas maneiras diferentes!!!

| | | |
|---|---|---|
| | R E C O R D A N D O  | |

2- Você já deve ter ouvido falar em <u>Álgebra</u>... Você acabou de usar a Álgebra para resolver a equação anterior... A Álgebra é um ramo da Matemática que ajuda a resolver muitos problemas. Assinale a alternativa que explica melhor do que a Álgebra trata.

*a) ramo da Matemática que estuda as formas planas e espaciais, com as suas propriedades.*

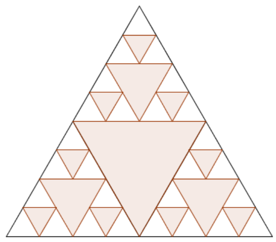
*b) ramo da Matemática que estuda as generalizações dos conceitos e operações de aritmética; utiliza letras em latim para representar números desconhecidos, incógnitas, ou para representar um número qualquer de um conjunto.*

*c) ramo (ou o antecessor) da Matemática que lida com as propriedades elementares de certas operações sobre numerais. As operações aritméticas tradicionais são a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.*

3- Vamos voltar ao **Triângulo de Sierpinski** e usar a notação algébrica para expressar melhor cálculos para a área do Triângulo... antes, porém, vamos recordar...

| a) O que é <u>área</u> de uma figura plana? | b) Qual é a <u>área</u> de um quadrado de lado x? | c) Qual é a <u>área</u> de um retângulo de lados medindo x e y? | d) E no caso de um triângulo? |
|---|---|---|---|
| | | | |

4- No Triângulo de Sierpinski, o que acontece com a área do triângulo inicial e a área de cada triângulo no primeiro passo?
Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?

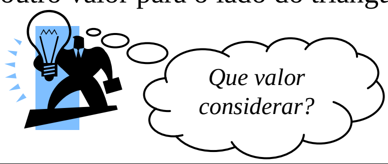


5- Defina assim:

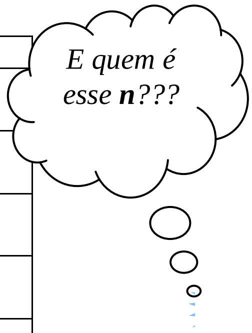
| ÁREA DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI | = | ÁREA DO TRIÂNGULO INICIAL | — | SOMA DAS ÁREAS DOS BURACOS |
|---|---|---|---|---|

A partir desta definição, o que podemos dizer sobre a área da figura resultante a cada passo feito? Ela aumenta, diminui ou permanece constante?

6- Preencha novamente a tabela a respeito da construção do Triângulo de Sierpinski, mas agora considere um outro valor para o lado do triângulo inicial.




| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | | | | | |
| LADO | | | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | | | | | |
| PERÍMETRO TOTAL | | | | | |
| ÁREA DE CADA BURACO | | | | | |
| ÁREA TOTAL | | | | | |




7- Agora que você já sabe uma das funções da Álgebra: a generalização de uma operação ou conceito, faça o mesmo para o Tapete de Sierpinski.

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | | | | | |
| LADO | | | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | | | | | |
| PERÍMETRO TOTAL | | | | | |
| ÁREA DE CADA BURACO | | | | | |
| ÁREA TOTAL | | | | | |

E não se esqueça da ...

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |

Folha de Atividade V – Semelhança

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: ______________________________________________ N. ____

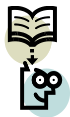
Resolva algumas atividades do Caderno do Aluno – vol. 3 e responda as perguntas a seguir:

| PÁGINA | 3 | 4 | 7 | 11-12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|
| ATIVIDADE | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 |
| PROBLEMAS | 1 | 2,3 | 1 | 1 | 2,3 |

*PARA REFLETIR:*
*tudo que é parecido é semelhante?*
*___ sim ___ não*

1- O que é necessário para que duas ou mais figuras planas sejam semelhantes?

a) com relação a forma:
b) com relação aos ângulos:
c) com relação aos lados:



2- O que é **razão de semelhança**? O que fazer para encontrar a razão de semelhança?

3- Em uma figura fractal, o que há de especial, em relação a semelhança?

4- Use o espaço abaixo para fazer um Mapa Conceitual sobre o conceito de Semelhança.

SEMELHANÇA

?

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |

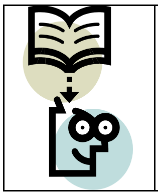
# Folha de Atividade VI – O que é, o que é?

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: ______________________________________________________ N. ____

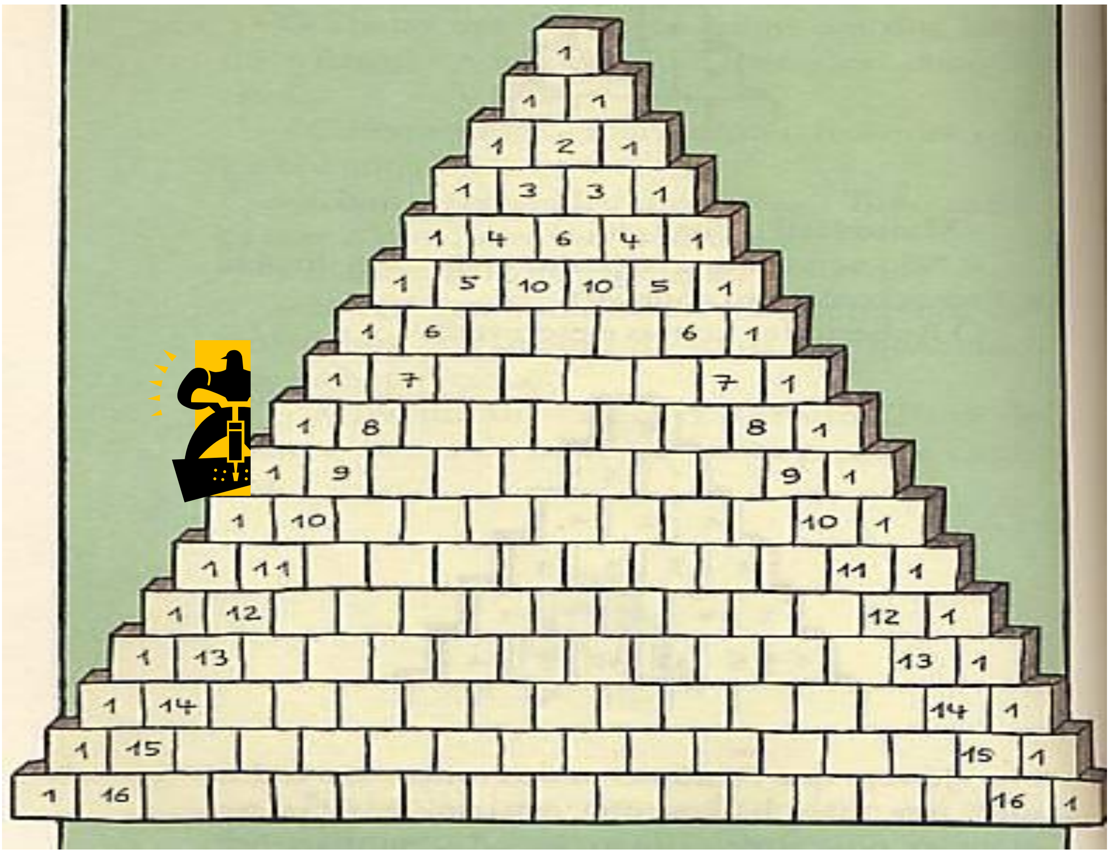
1- Ajude o construtor... Observe a construção abaixo e descubra a regra que irá preencher com números os outros tijolos. Preencha a construção. Pinte os tijolos que possuam um múltiplo de 3.



*O que é um múltiplo de 3? Onde eles estão presentes?*

______________________________________________

______________________________________________




a) Qual é a regra para o preenchimento?

b) O que aconteceu após a pintura dos múltiplos de 3?

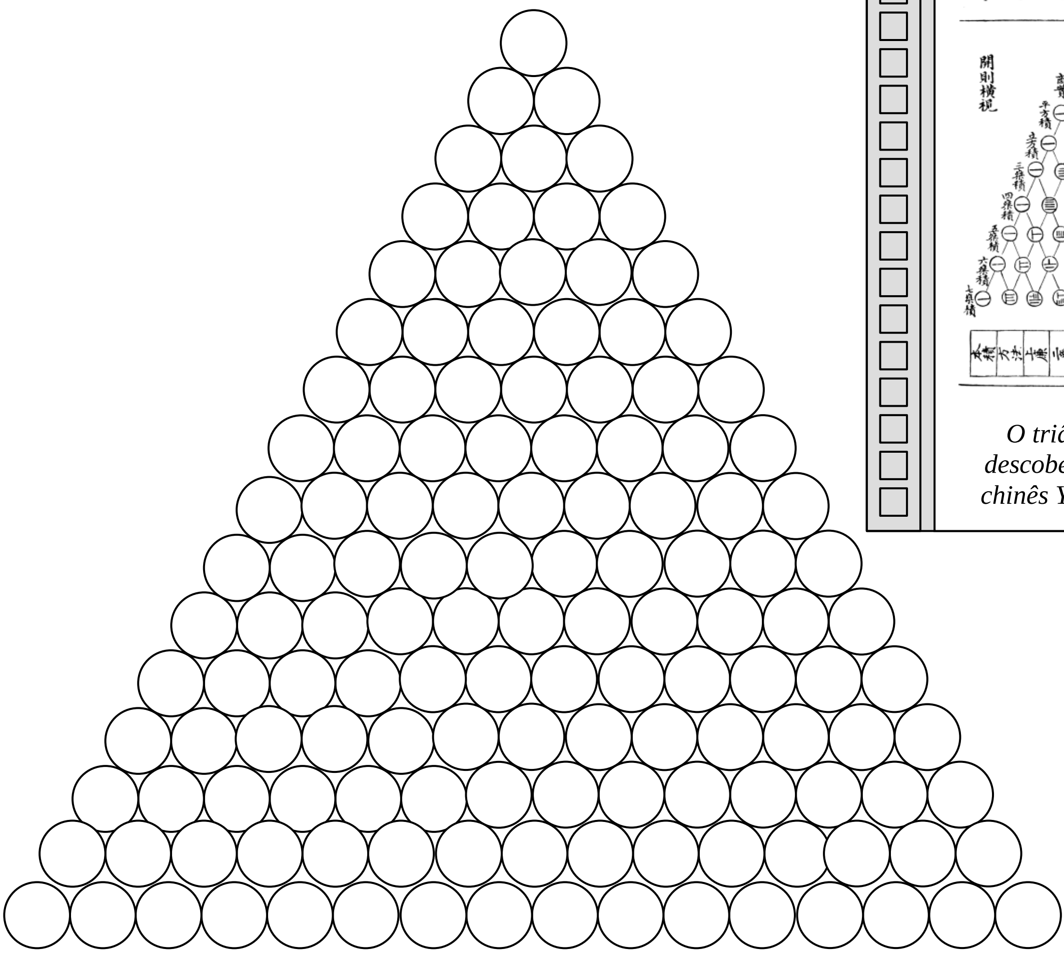
c) E as questões de Semelhança?

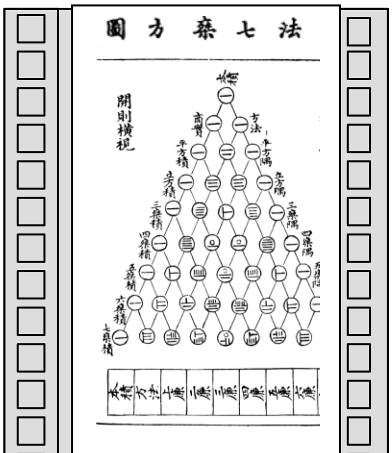
*O Triângulo de Pascal foi descoberto pelo chinês Yang Hui e 500 anos depois estudado por Blaise Pascal no séc. XVII. Ele facilita vários cálculos na Matemática.*

d) Some os números obtidos em cada linha e coloque o resultado na tabela abaixo. O que você observa? Vale sempre?

| LINHA | SOMA |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| n | |

2- Agora que já sabe como preencher a construção, faça o mesmo para o desenho abaixo, mas preenchendo somente com P para os números pares e I para os números ímpares, se achar melhor. Depois pinte os círculos com a letra P e veja o que vai acontecer...





*O triângulo descoberto pelo chinês Yang Hui*

3- Onde mais temos visto o Triângulo de Sierpinski?

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |
| | | |

Folha de Atividade VII – Fractais: Dimensão Oculta

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: ______________________________________________________ N. ____

1- Você assistiu ao filme **Fractais: Dimensão Oculta**. Lembre-se do filme, das últimas aulas sobre Geometria Fractal e Figuras Semelhantes. Lembre-se também do Mapa Conceitual que fizemos... A partir disso tudo, elabore um **Mapa Conceitual** no espaço abaixo que relacione tudo o que aprendemos nestas últimas aulas.

2- **Avaliação:** preencha o questionário a respeito das aulas sobre **Geometria Fractal e Semelhança.** Estas aulas e atividades fazem parte de uma pesquisa maior sobre o Ensino de Geometria e a Geometria Fractal. A sua opinião é importante para a melhoria destas atividades. Desde já agradecemos muito seu empenho e dedicação nestas últimas aulas. *Prof. Toninho*

IMPORTANTE: essa avaliação não contará pontos para a nota bimestral, mas sua contribuição e sinceridade serão muito importantes.

A- Classifique cada item abaixo em ***ótimo***, ***bom***, ***regular*** ou ***ruim***, conforme a sua opinião e escreva comentários.

| | | |
|---|---|---|
| a) slides e sons<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | b) filmes: *Fractais: Dimensão Oculta* e outros<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | c) material concreto (quebra-cabeças fractais)<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim |
| d) construção gigante<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | e) atividades com régua<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | f) outras folhas de atividades<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim |
| g) atividades do Caderno do Aluno e Livro Didático<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | h) mapas conceituais<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | i) nível de dificuldade das aulas<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim |
| j) explicação do professor<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | l) presença e ajuda dos convidados<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | m) participação da turma (disciplina, atenção, etc.)<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim |
| n) sua participação (disciplina, atenção, etc.)<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | | |

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens. *(Descartes)*

B- Responda as perguntas a seguir:

a) qual conceito ou conceitos ficaram claros para você?

b) você ainda tem dúvidas? No que?

c) escreva aqui seus comentários gerais sobre as aulas, críticas e sugestões:

# APÊNDICE C – Sugestão de Resolução das Folhas de Atividades

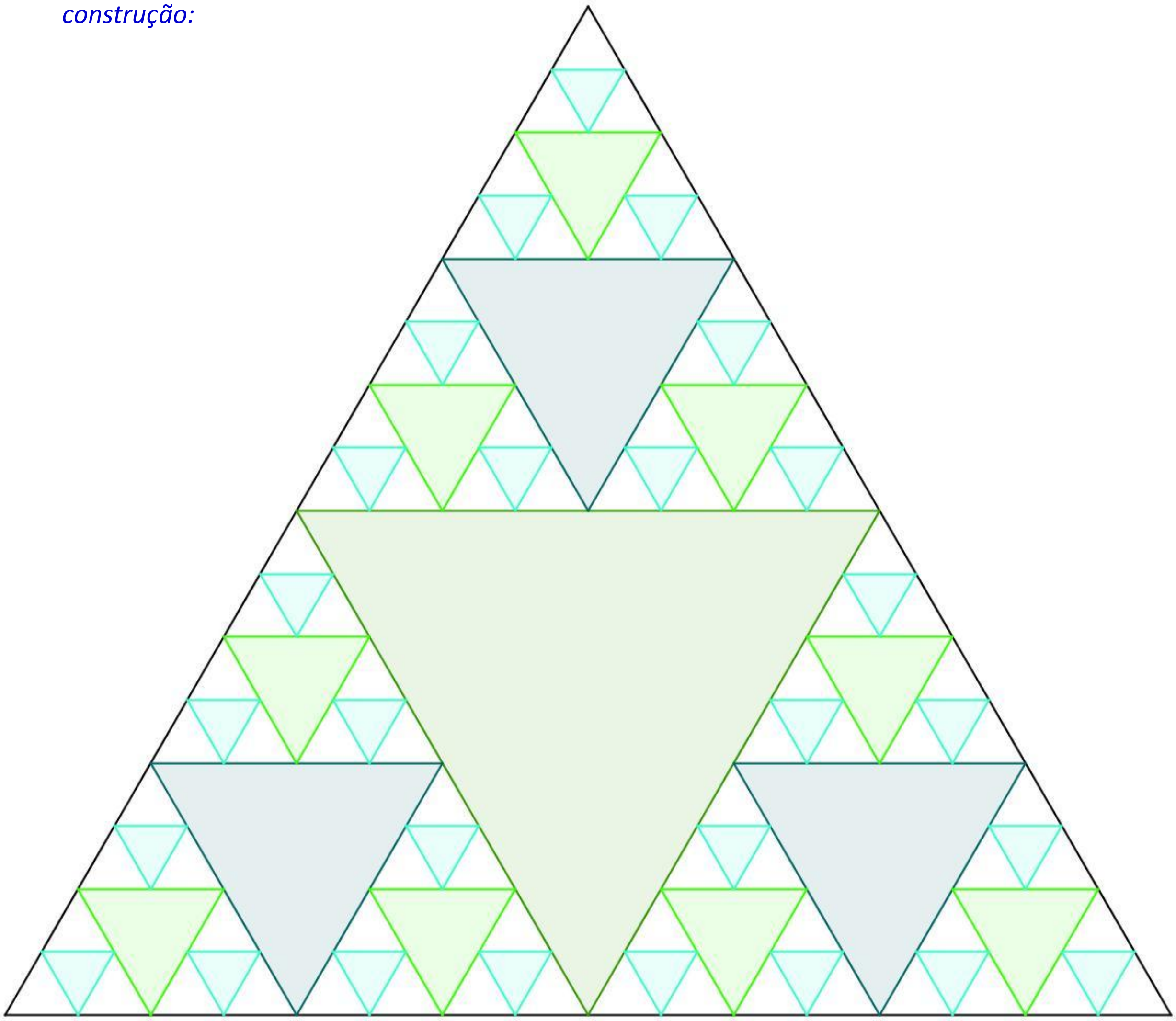
Aqui colocamos uma sugestão de resolução das atividades propostas, Algumas delas foram reformuladas, como abordaremos no próximo apêndice, mas aqui constam suas resoluções anteriores a reformulação. Cabe ao professor julgá-las e estudar a melhor forma de sua abordagem em sua sala de aula.

Folha de Atividade I – Construção do Triângulo de Sierpinski
Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: ______________________________________________________ N. ____

*Uma sugestão para a construção:*



AVALIAÇÃO: O que achou da aula?

1- apresentação:______________________________________________________________________

2- construção: _______________________________________________________________________

3- nível de dificuldade:_________________________________________________________________

# Folha de Atividade II – Questões para investigação – Triângulo de Sierpinski

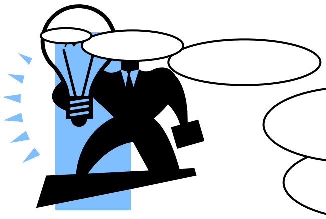
Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: ______________________________________________________ N. ____

1- RECORDANDO...

| a) O que é o <u>perímetro</u> de uma figura plana? | b) O que é o <u>perímetro</u> de um triângulo? | c) E no caso do <u>triângulo eqüilátero</u> que trabalhamos? |
|---|---|---|
| *O perímetro de uma figura plana é a soma dos comprimentos dos lados da figura* | *O perímetro de um triângulo é a soma dos comprimentos de seus três lados* | *No caso do triângulo eqüilátero, basta multiplicar a medida do comprimento do lado do triângulo por 3, já que seus lados tem o mesmo comprimento, para achar o seu perímetro* |



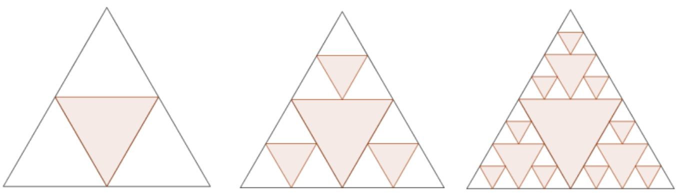
*PARA REFLETIR...*

*O que é uma fórmula? Como obter uma fórmula ou uma expressão para a área e o perímetro do triângulo? Em função de que quantidades?*

*- Fórmula: expressão que resume cálculos a serem feitos para obter algum resultado; contém símbolos e letras que representam quantidades.*
*- O perímetro do triângulo eqüilátero: P = 3x (cm), onde P representa o perímetro e x o comprimento do lado.*
*- O perímetro está em função do comprimento do lado, depende dele*

*O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) criou este e outros fractais, que mais tarde impulsionaram a criação da Teoria da Geometria Fractal.*

2- No triângulo de Sierpinski, o que é um "buraco"?



*São as regiões da figura retiradas na construção, ou na figura acima, as regiões triangulares em destaque.*

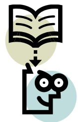
3- A partir da sua construção do Triângulo de Sierpinski, preencha a tabela.

*(as unidades de medida estão omitidas, mas neste caso, tanto lado e perímetros estão expressos em cm, conforme a construção feita pelos estudantes)*

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | *0* | *1* | *3* | *9* |
| LADO | *16* | *8* | *4* | *2* |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | *0* | *24* | *12* | *6* |
| PERÍMETRO TOTAL | *48* | *72* | *108* | *162* |

4- Agora na tabela a seguir, encontre a relação entre o perímetro e a área de um passo para o passo seguinte...

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| PERÍMETRO | *-* | *24* | *12* | *6* |
| RELAÇÃO $P_{i+1}/P_i$ | *-* | *12/24 = 1/2* | *6/12 = 1/2* | *-* |



*RECORDANDO...*
*Qual é a UNIDADE DE MEDIDA mais adequada para...*
Lado (segmento): *cm*
Perímetro: *cm*
Área: *cm²*

5- O que você percebeu?

*O resultado dá sempre igual a 1/2.*

6- O que acontece com o perímetro do triângulo inicial e o perímetro de cada triângulo no primeiro passo? Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?

*O perímetro se reduz à metade. Esta relação permanece verdadeira.*

7- Defina assim: o perímetro do Triângulo de Sierpinski é a soma dos perímetros de cada triângulo interno (soma dos lados dos buracos) junto com o perímetro do triângulo inicial. A partir disso, o que podemos dizer sobre o perímetro da figura resultante a cada passo feito? Ele aumenta, diminui ou permanece constante?

*O perímetro aumenta, já que os triângulos construídos a cada passo também tem seu perímetro somado ao perímetro inicial.*

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ ______________________________ ______________________________ __________ | 😐 ______________________________ ______________________________ __________ | ☹ ______________________________ ______________________________ __________ |

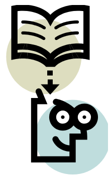
Folha de Atividade III – Questões para investigação – Tapete de Sierpinski

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: ____________________________________________ N. ____

1- Para uma figura fractal como o Triângulo de Sierpinski, definimos o que é um *buraco*. Relembre esta e outras definições que usaremos a seguir:



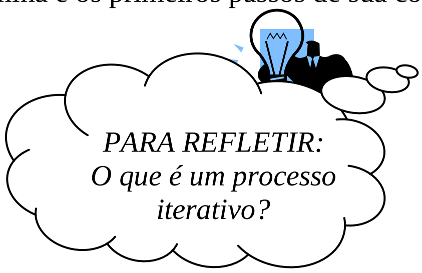
a) buraco: *parte ou região retirada ou destacada na figura*
b) perímetro: *soma dos comprimentos dos lados, contorno*
c) área: *medida de superfície, espaço ocupado*
d) segmento de reta: *pedaço de uma reta com começo e fim, com comprimento determinado*
e) segmentos congruentes: *segmentos iguais, com a mesma medida*

2- Estudaremos aqui uma outra figura fractal, também construída por Waclaw Sierpinski e conhecida como **Tapete de Sierpinski**. Veja o processo iterativo que a determina e os primeiros passos de sua construção:

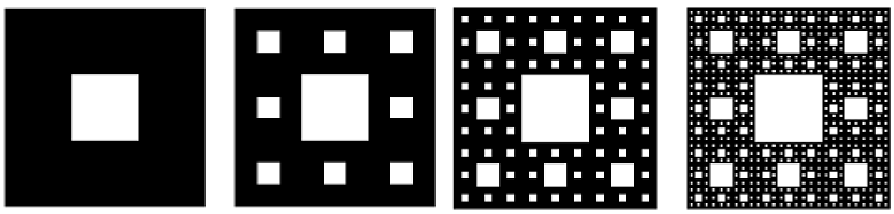
I- Divida os lados de um quadrado em três segmentos congruentes;

II- Ligue-os de forma a obter 9 quadrados menores contidos no quadrado inicial. Remova o quadrado central;

III- Repita o processo nos quadrados restantes.




*- uma receita*
*- processo onde ocorre repetição de algum passo indefinidamente*



FÓRMULAS:
(para um quadrado de lado x)

*Perímetro: 4.x (cm)*
*Área: $x^2$ (cm²)*

3- Escreva semelhanças e diferenças em relação a construção do Triângulo de Sierpinski.
*Algumas semelhanças: são gerados através de um processo iterativo ou receita, retiramos pedaços das figuras iniciais, a área dos dois diminui, o perímetro dos dois aumenta, o cálculo dos perímetros é fácil, etc.*
*Algumas diferenças: o cálculo da área dos quadrados é mais fácil que no triângulo, as divisões por 3 tornam o processo no quadrado mais difícil, etc.*

4- Vamos estudar o Tapete de Sierpinski como fizemos com o Triângulo. Considere um quadrado inicial de lado 81 cm e preencha a tabela a seguir:

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | *0* | *1* | *8* | *64* | *512* |
| LADO | *81* | *27* | *9* | *3* | *1* |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | *0* | *108* | *36* | *12* | *4* |
| PERÍMETRO TOTAL | *324* | *432* | *720* | *1584* | *4176* |
| ÁREA DE CADA BURACO | *0* | *729* | *81* | *9* | *1* |
| ÁREA TOTAL | *6561* | *5832* | *5184* | *4536* | *3888* |

5- Agora na tabela a seguir, encontre a relação entre o perímetro e a área de um passo para o passo seguinte...

*Aqui no **Passo 0** consideramos o perímetro e a área do **quadrado inicial**...*

*A partir do **Passo 1**, consideramos o perímetro e a área de um **quadrado retirado**...*

| PASSO (i) | PERÍMETRO | ÁREA | RELAÇÃO $P_{i+1}/P_i$ | RELAÇÃO $A_{i+1}/A_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | *4.81 = 324* | *$81^2$ = 6561* | *81/27 = 1/3* | *$27^2/81^2$ = 1/9* |
| 1 | *4.27= 108* | *$27^2$ = 729* | *9/27 = 1/3* | *$9^2/27^2$ = 1/9* |
| 2 | *4.9 = 36* | *$9^2$ = 81* | *3/9= 1/3* | *9/81 = 1/9* |
| 3 | *4.3 = 12* | *$3^2$ = 9* | *1/3* | *1/9* |
| 4 | *4.1 = 4* | *$1^2$ = 1* | *-* | *-* |

6- O que você percebeu?
*Nas duas últimas colunas os resultados são sempre iguais; há presença de potências de 3 e 9.*

7- O que acontece com o perímetro do quadrado inicial e o perímetro do quadrado retirado no primeiro passo? Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?
*O perímetro diminui, dividindo-se por 4; essa relação permanece verdadeira.*

8- O que acontece com a área do quadrado inicial e a área do quadrado retirado no primeiro passo? Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?
*A área diminui, dividindo-se por 9; essa relação permanece verdadeira.*

9- Defina assim: o perímetro do Tapete de Sierpinski é a soma dos perímetros de cada quadrado interno (soma dos lados dos buracos) junto com o perímetro do quadrado inicial. A partir disso, o que podemos dizer sobre o perímetro da figura resultante a cada passo feito? Ele aumenta, diminui ou permanece constante?
*O perímetro aumenta, pois há soma de novos valores.*

10- Defina assim: a área do Tapete de Sierpinski é a soma das áreas dos buracos retirada da área inicial do quadrado inteiro. A partir disso, o que podemos dizer sobre a área da figura resultante a cada passo feito? Ela aumenta, diminui ou permanece constante?
*A área diminui, pois retiramos mais regiões da figura.*

11- Pensando nas figuras fractais estudadas nas últimas aulas, desenhe no espaço abaixo uma outra figura fractal, da sua imaginação ou baseada nas figuras já vistas.

*Para ajudar, escreva abaixo exemplos de fractais:*
*- Natureza: flores, samambaia, couve-flor, árvore, pulmão, etc.*
*- Computador*
*- Construções feitas ou observadas no papel*

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |

Folha de Atividade IV – Área, Álgebra e o valor do x

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

Aluno: ______________________________________________ N. ____

1- Resolva a equação $x^2 - 100 = 0$ e descubra o valor do x! Faça de duas maneiras diferentes!!!

| | | |
|---|---|---|
| $x^2 = 100$<br>$x = \sqrt{100}$<br>$x = \pm 10$<br>$S = \{-10, 10\}$ | R E C O R D A N D O  | $a = 1; b = 0; c = -100$<br>$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4.1.(-100) = 400$<br>$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{400}}{2.1} = \pm \frac{20}{2}$<br>$= \pm 10$<br>$S = \{-10, 10\}$ |

2- Você já deve ter ouvido falar em Álgebra... Você acabou de usar a Álgebra para resolver a equação anterior... A Álgebra é um ramo poderoso da Matemática que ajuda a resolver muitos problemas. Assinale a alternativa que explica melhor do que a Álgebra trata.

*a) ramo da Matemática que estuda as formas planas e espaciais, com as suas propriedades.*

*b) ramo da Matemática que estuda as generalizações dos conceitos e operações de aritmética; utiliza letras em latim para representar números desconhecidos, incógnitas, ou para representar um número qualquer de um conjunto.*

*c) ramo (ou o antecessor) da Matemática que lida com as propriedades elementares de certas operações sobre numerais. As operações aritméticas tradicionais são a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.*

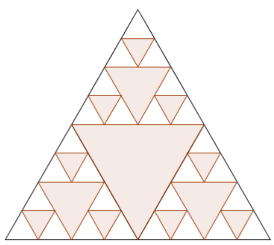
3- Vamos voltar ao **Triângulo de Sierpinski** e usar a notação algébrica para expressar melhor cálculos para a área do Triângulo... antes, porém, vamos recordar...

| a) O que é área de uma figura plana? | b) Qual é a área de um quadrado de lado x? | c) Qual é a área de um retângulo de lados medindo x e y? | d) E no caso de um triângulo? |
|---|---|---|---|
| *A área de uma figura plana é uma medida de superfície, o espaço que a figura ocupa (medida em $cm^2$, $m^2$, etc)* | *$A = x^2$* | *$A = x.y$* | *$A = x.y/2$ (no caso do triângulo retângulo)* |

4- No Triângulo de Sierpinski, o que acontece com a área do triângulo inicial e a área de cada triângulo no primeiro passo?

Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?

*A área diminui; essa relação permanece verdadeira.*

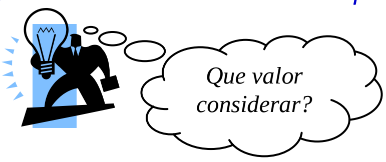


5- Defina assim:

| ÁREA DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI | = | ÁREA DO TRIÂNGULO INICIAL | — | SOMA DAS ÁREAS DOS BURACOS |
|---|---|---|---|---|

A partir desta definição, o que podemos dizer sobre a área da figura resultante a cada passo feito? Ela aumenta, diminui ou permanece constante?
*A área sempre diminui por causa da subtração presente nos cálculos*

6- Preencha novamente a tabela a respeito da construção do Triângulo de Sierpinski, mas agora considere um outro valor para o lado do triângulo inicial. *(consideramos uma Área inicial A; algumas linhas não foram preenchidas devido a sua complexidade)*




| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | *0* | *1* | *3* | *9 = 3²* | $3^{n-1}$ |
| LADO | *x* | *x/2* | *x/4* | *x/8* | $x/2^n$ |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | *0* | *3x/2* | *3x/4* | *3x/8* | $3x/2^n$ |
| PERÍMETRO TOTAL | *3x* | -- | -- | -- | -- |
| ÁREA DE CADA BURACO | *0* | *A/4* | *A/16* | *A/64* | $A/4^n$ |
| ÁREA TOTAL | *A* | -- | -- | -- | -- |


7- Agora que você já sabe uma das funções da Álgebra: a <u>generalização de uma operação ou conceito</u>, faça o mesmo para o Tapete de Sierpinski.

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | *0* | *1* | *8* | *64 = 8²* | $8^{n-1}$ |
| LADO | *x* | *x/3* | *x/9* | *x/27* | $x/3^n$ |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | *0* | *4x/3* | *4x/9* | *4x/27* | $4x/3^n$ |
| PERÍMETRO TOTAL | -- | -- | -- | -- | -- |
| ÁREA DE CADA BURACO | *0* | $(x/3)^2$ | $(x/9)^2$ | $(x/27)^2$ | $(x/3^n)^2$ |
| ÁREA TOTAL | -- | -- | -- | -- | -- |

E não se esqueça da ...

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |
| | | |

# Folha de Atividade V – Semelhança

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

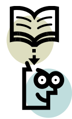
Aluno: _______________________________________________ N. _____

Resolva algumas atividades do Caderno do Aluno – vol. 3 e responda as perguntas a seguir:

| PÁGINA | 3 | 4 | 7 | 11-12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|
| ATIVIDADE | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 |
| PROBLEMAS | 1 | 2,3 | 1 | 1 | 2,3 |


1- O que é necessário para que duas ou mais figuras planas sejam semelhantes?

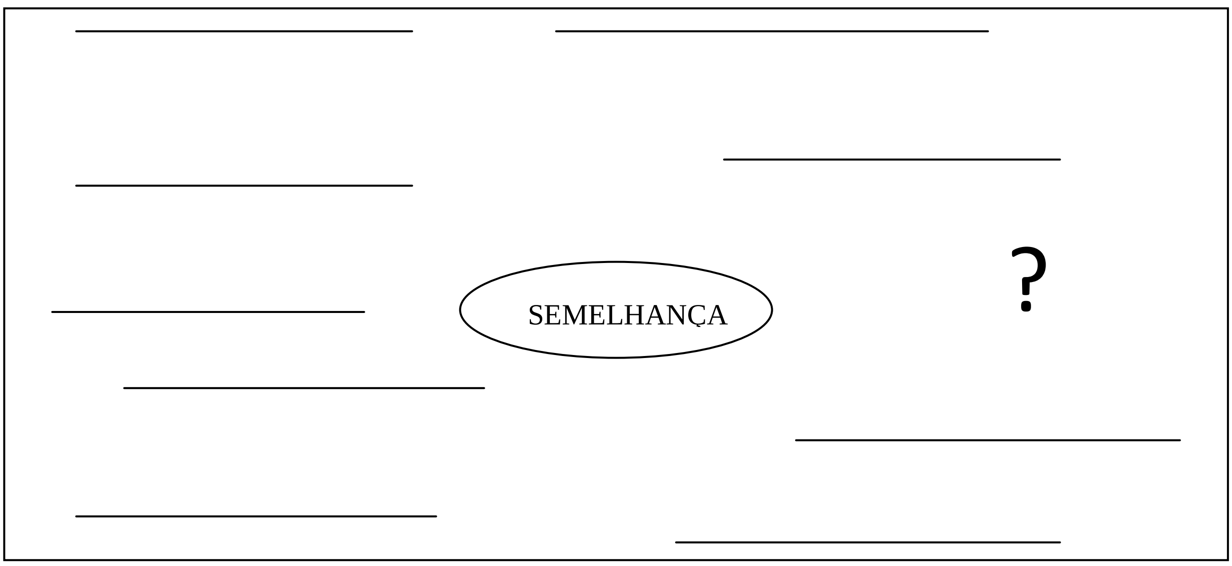
a) com relação à forma: *mesma forma*
b) com relação aos ângulos: *ângulos correspondentes congruentes (mesma medida)*
c) com relação aos lados: *proporcionais*



2- O que é **razão de semelhança**? O que fazer para encontrar a razão de semelhança?
*A Razão de Semelhança é a proporção encontrada entre os lados correspondentes em figuras semelhantes; ela é encontrada fazendo a divisão dos lados correspondentes.*

3- Em uma figura fractal, o que há de especial, em relação a semelhança?
*A auto-semelhança: partes de figura são semelhantes a outras partes da figura e à figura total.*

4- Use o espaço abaixo para fazer um Mapa Conceitual sobre o conceito de Semelhança.
*Sugestões de palavras ou conceitos: geometria, cálculo, matemática, figuras, desenhos, parecido, ângulos congruentes, proporção, fractais, etc.*




| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |

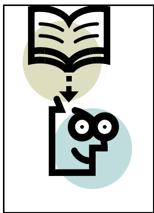
# Folha de Atividade VI – O que é, o que é?

Fractais no Ensino de Geometria da Ed. Básica – A N Gomes – J A Salvador

E. E. P. Adail M. Gonçalves – 8 B – Data: ___/___/ 2009

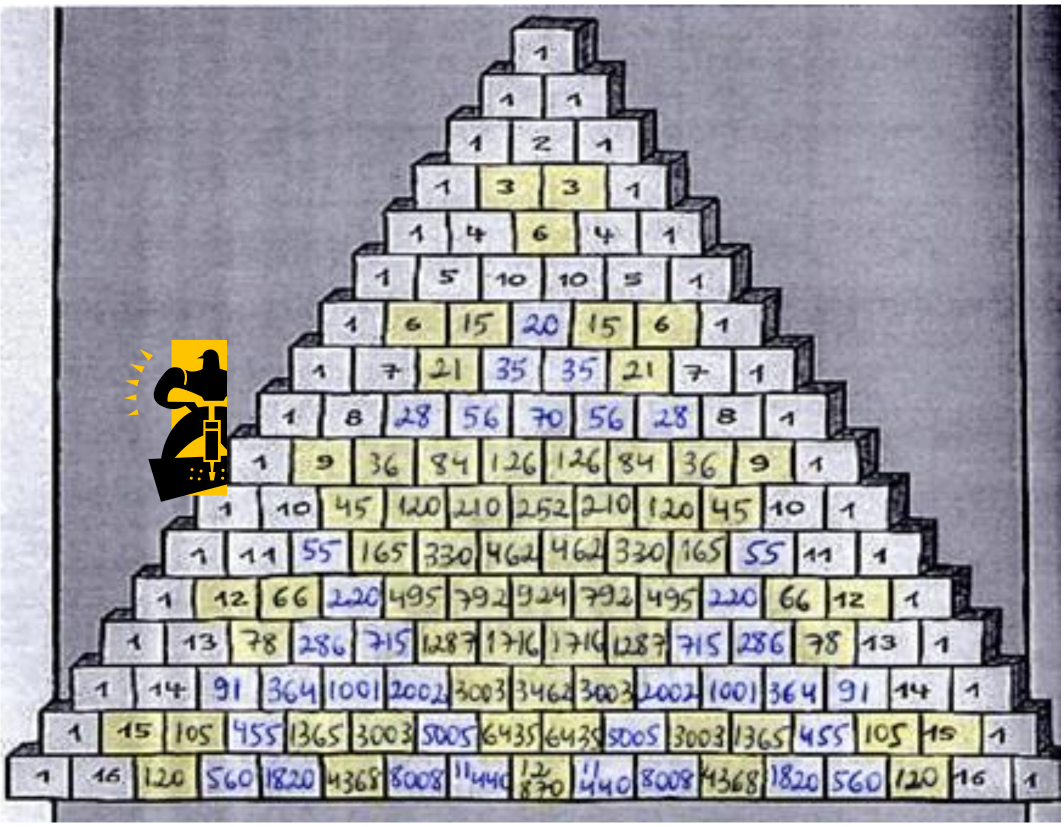
Aluno: ________________________________________________ N. ____

1- Ajude o construtor... Observe a construção abaixo e descubra a regra que irá preencher com números os outros tijolos. Preencha a construção. Pinte os tijolos que possuam um múltiplo de 3.



*O que é um múltiplo de 3? Onde eles estão presentes?*

*Qualquer número multiplicado por 3 gera um múltiplo de 3; os números que divididos por 3 apresentam divisão exata; estão presentes na tabuada do 3.*




a) Qual é a regra para o preenchimento?

*O número de um tijolo é a soma dos números dos dois tijolos exatamente acima.*

b) O que aconteceu após a pintura dos múltiplos de 3?

*A figura resultante é semelhante ao Triângulo de Sierpinski.*

c) E as questões de Semelhança?

*Lembramos do Triângulo de Sierpinski e sua semelhança com partes dele mesmo (auto-semelhança).*

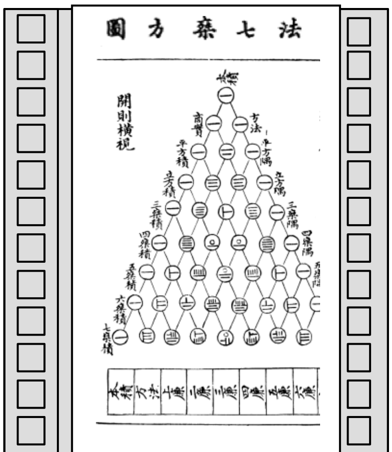
*O Triângulo de Pascal foi descoberto pelo chinês Yang Hui e 500 anos depois estudado por Blaise Pascal no séc. XVII. Ele facilita vários cálculos na Matemática.*

d) Some os números obtidos em cada linha e coloque o resultado na tabela abaixo. O que você observa? Vale sempre?

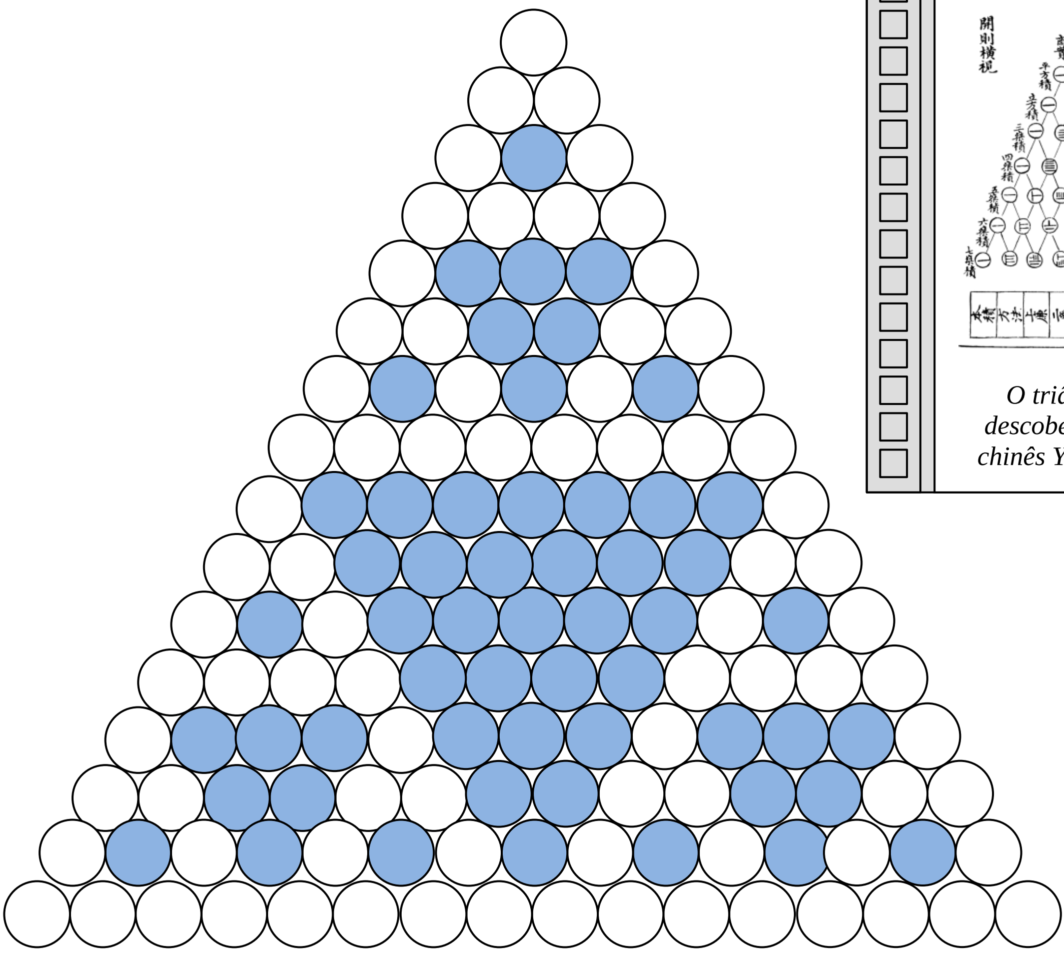
*Aparecem as potências de 2. Conclusão esperada: como há uma regra para o preenchimento do Triângulo, esta regularidade deve valer sempre...*

| LINHA | SOMA |
|---|---|
| 0 | $1 = 2^0$ |
| 1 | $1 + 1 = 2^1$ |
| 2 | $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$ |
| 3 | $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$ |
| 4 | $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$ |
| n | $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$ |

2- Agora que já sabe como preencher a construção, faça o mesmo para o desenho abaixo, mas preenchendo somente com P para os números pares e I para os números ímpares, se achar melhor. Depois pinte os círculos com a letra P e veja o que vai acontecer...



*O triângulo descoberto pelo chinês Yang Hui.*



*Importante: I + I = P; I + P = I; P + P = P. Os círculos em azul são os que contém a letra P.*

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |

# APÊNDICE D – Folhas de Atividades Reformuladas

Neste apêndice incluímos as Folhas de Atividades depois de aplicadas com os estudantes e reformuladas, contendo correções feitas no intuito de melhor explorar suas potencialidades.

Anteriormente sugerimos sua impressão em forma de livreto, por isso o leitor observará uma melhor distribuição das atividades em um número maior de páginas, inclusive com espaços para rascunho. Esta sugestão veio da necessidade de uma melhor organização do material pelo estudante, que assim ficará com todo o material ao seu dispor durante o tempo de estudo deste. Também sugerimos a realização de parte das atividades em casa, para que o tempo seja melhor aproveitado em sala de aula e o roteiro não fique muito extenso.

# Geometria Fractal e Semelhança

Investigador: ________________________________

Professor: __________________________________

Escola: ____________________________________

*“As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são circunferências, e a casca das árvores não é suave, nem o relâmpago viaja em linha reta.” (Benoit Mandelbrot)*

---

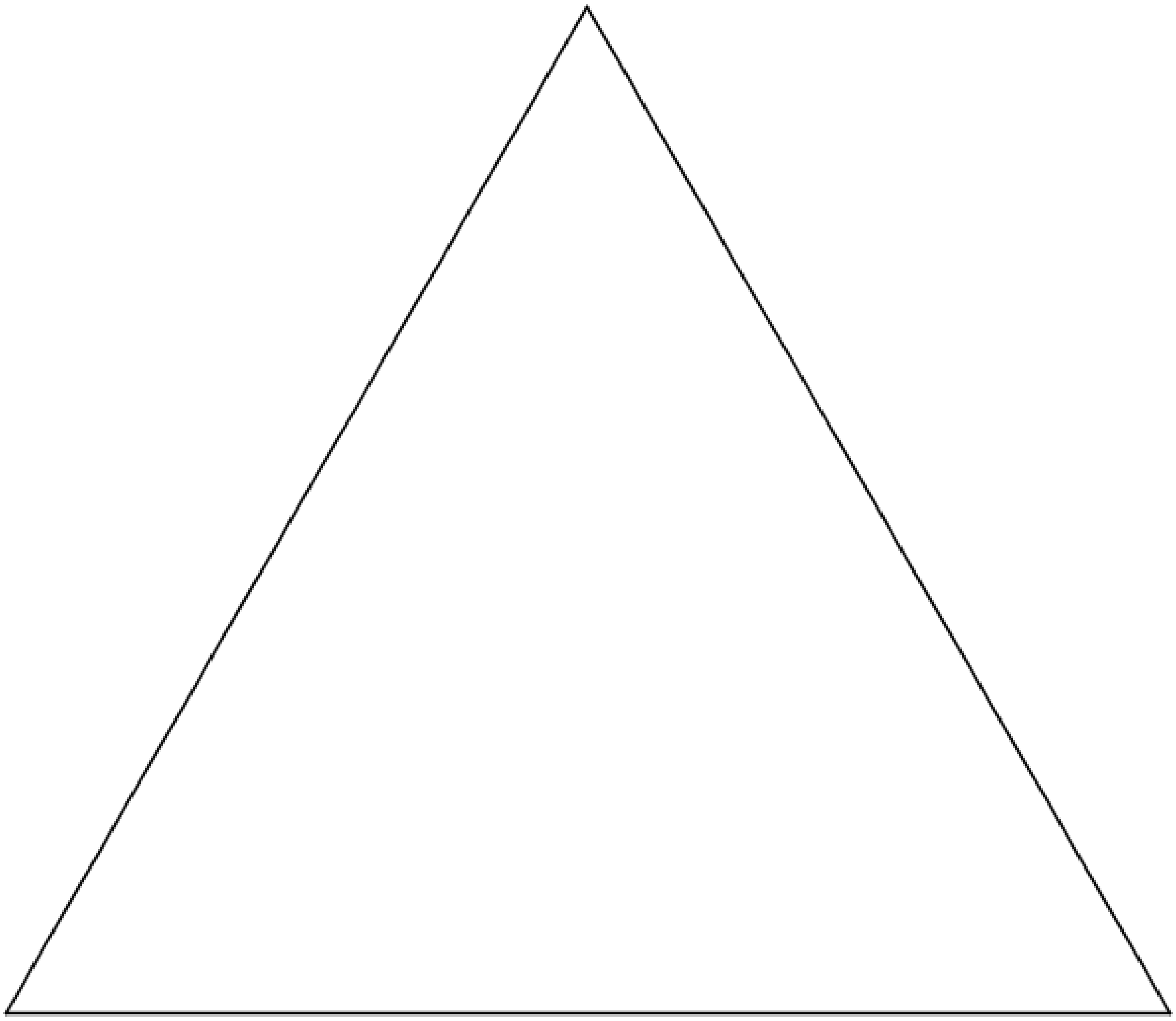
*Seja bem-vindo a este caderno de investigações!*

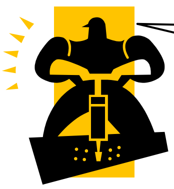
*Estudaremos aqui Figuras Fractais, Construções, Semelhança de figuras e também recordaremos conceitos importantes de Geometria e Álgebra. Seu empenho é fundamental para o êxito das atividades. É importante também que você cuide bem do material.*
*Este caderno é dividido em Folhas de Atividade (ou aulas). Cada uma delas será trabalhada de uma forma, com maior ou menor orientação do professor. Após cada aula e ao final do caderno, há avaliações sobre a aula e o material como um todo, que pedimos que sejam preenchidas com bastante cuidado e sinceridade, para que o mesmo possa ser melhorado. As atividades serão corrigidas pelo professor, devolvidas e discutidas com a classe.*

*Boa diversão! Bom Trabalho!*

*Prof. ____________*

Folha de Atividades I – Construção do Triângulo de Sierpinski – Data: ___/___/ ___





*IMPORTANTE: esta atividade deverá ser feita preferencialmente na folha entregue pelo professor a parte, por causa das medidas do triângulo; mas você pode posteriormente brincar com a construção no triângulo acima. Professor: imprima esta página em tamanho A4.*

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |
| | | |

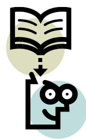
*Preencha citando os aspectos positivos, regulares e negativos das atividades, conforme os smiles. É importante que preencha todos os campos com suas impressões.*

| *POSITIVO* | *REGULAR* | *NEGATIVO* |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |

Folha de Atividades II –Triângulo de Sierpinski – Dia ___/___/___

1- RECORDANDO...

| a) O que é o <u>perímetro</u> de uma figura plana? | b) O que é o <u>perímetro</u> de um triângulo? | c) E no caso do <u>triângulo eqüilátero</u> que trabalhamos? |
|---|---|---|
| | | |



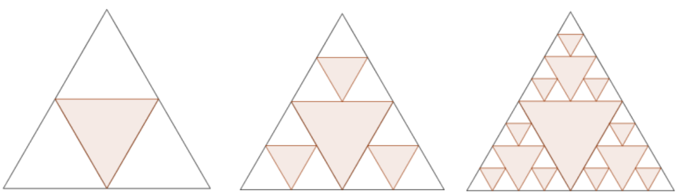
*PARA REFLETIR...*

*O que é uma fórmula? Como obter uma fórmula ou uma expressão para a área e o perímetro do triângulo? Em função de que quantidades?*

________________________________________________
________________________________________________
________________________________________________
________________________________________________
________________________________________________
________________________________________________

*O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) criou este e outros fractais, que mais tarde impulsionaram a criação da Teoria da Geometria Fractal.*

2- No triângulo de Sierpinski, o que é um "buraco"?

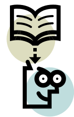


3- A partir da sua construção do Triângulo de Sierpinski, preencha a tabela com o *número de buracos* e as *medidas*.

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | | | | |
| LADO | | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | | | | |
| PERÍMETRO TOTAL | | | | |

4- Agora na tabela a seguir, encontre a relação entre o perímetro de um buraco de um passo para o passo seguinte...

| PASSO (i) | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| PERÍMETRO DE UM TRIÂNGULO | | | | |
| RELAÇÃO $P_{i+1}/P_i$ | | | | |



*RECORDANDO...*
*Qual é a UNIDADE DE MEDIDA mais adequada para...*
Lado: _______
Perímetro: _______
Área: _______

5- O que você percebeu?

6- O que acontece com o perímetro do triângulo inicial e o perímetro de cada triângulo no primeiro passo? Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?

7- Defina assim: o perímetro do Triângulo de Sierpinski é a soma dos perímetros de cada triângulo interno (soma dos lados dos buracos) junto com o perímetro do triângulo inicial. A partir disso, o que podemos dizer sobre o perímetro da figura resultante a cada passo feito? Ele aumenta, diminui ou permanece constante?

DICA: Faça mais alguns passos na tabela ao lado para confirmar...

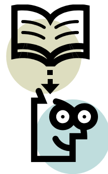
| PASSO | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | | | | |
| LADO | | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | | | | |
| PERÍMETRO TOTAL | | | | |

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |
| | | |

ESPAÇO PARA RASCUNHO

Folha de Atividades III –Tapete de Sierpinski – Dia ___/___/___

1- Para uma figura fractal como o Triângulo de Sierpinski, definimos o que é um *buraco*. Relembre esta e outras definições que usaremos a seguir:



a) buraco:

b) perímetro:

c) área:

d) segmento de reta:

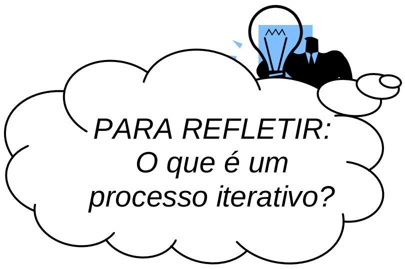
e) segmentos congruentes:

2- Estudaremos aqui uma outra figura fractal, também construída por Waclaw Sierpinski e conhecida como **Tapete de Sierpinski**. Veja o processo iterativo que a determina e os primeiros passos de sua construção:

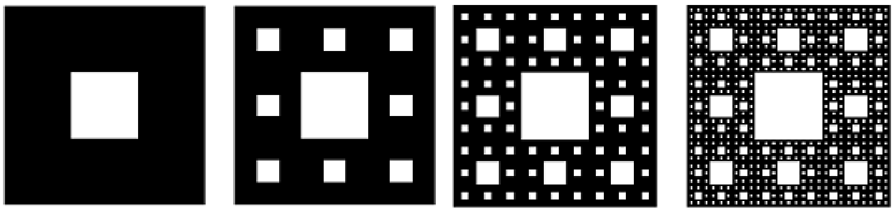
I- Divida os lados de um quadrado em três segmentos congruentes;

II- Ligue-os de forma a obter 9 quadrados menores contidos no quadrado inicial. Remova o quadrado central;

III- Repita o processo nos quadrados restantes.




_______________________________________
_______________________________________
_______________________________________



3- Escreva semelhanças e diferenças em relação a construção do Triângulo de Sierpinski.

4- Vamos estudar o Tapete de Sierpinski como fizemos com o Triângulo. Considere um quadrado inicial de lado 81 cm e preencha a tabela a seguir:

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | | | | | |
| LADO DE CADA BURACO | | | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | | | | | |
| PERÍMETRO TOTAL | | | | | |
| ÁREA DE CADA BURACO | | | | | |
| ÁREA TOTAL | | | | | |

5- Agora na tabela a seguir, encontre a relação entre o perímetro de um passo para o passo seguinte. Faça o mesmo com as áreas...

| PASSO (i) | PERÍMETRO | ÁREA | RELAÇÃO $P_{i+1}/P_i$ | RELAÇÃO $A_{i+1}/A_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

6- O que você percebeu?

7- O que acontece com o perímetro do quadrado inicial e o perímetro do quadrado retirado no primeiro passo? Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?

8- O que acontece com a área do quadrado inicial e a área do quadrado retirado no primeiro passo? Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?

9- Defina assim: o perímetro do Tapete de Sierpinski é a soma dos perímetros de cada quadrado interno (soma dos lados dos buracos) junto com o perímetro do quadrado inicial. A partir disso, o que podemos dizer sobre o perímetro da figura resultante a cada passo feito? Ele aumenta, diminui ou permanece constante?

10- Defina assim: a área do Tapete de Sierpinski é a soma das áreas dos buracos retirada da área inicial do quadrado inteiro. A partir disso, o que podemos dizer sobre a área da figura resultante a cada passo feito? Ela aumenta, diminui ou permanece constante?

11- Pensando nas figuras fractais estudadas nas últimas aulas, desenhe uma outra figura fractal, da sua imaginação ou baseada nas figuras já vistas.

*Para ajudar, escreva abaixo exemplos de fractais vistos:*

__________________________

__________________________

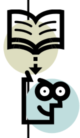
__________________________

__________________________

__________________________

__________________________

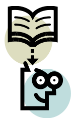
__________________________



| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |

Folha de Atividades IV – Área, Álgebra e o "valor do x" – Dia ___/___/___

1- Você já sabe resolver a equação $x^2 - 100 = 0$ (e descobrir o valor do x!). Mãos a obra: faça isso de duas maneiras diferentes!!!

| | | |
|---|---|---|
| | R<br>E<br>C<br>O<br>R<br>D<br>A<br>N<br>D<br>O  | |

2- Você já deve ter ouvido falar em <u>Álgebra</u>... Você acabou de usar a Álgebra para resolver uma equação... A Álgebra é um ramo poderoso da Matemática que ajuda a resolver muitos problemas. Pense um pouco e assinale a alternativa que explica melhor do que a Álgebra trata.

*a) ramo da Matemática que estuda as formas planas e espaciais, com as suas propriedades.*

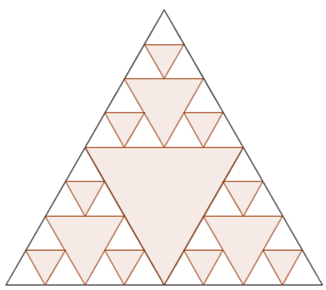
*b) ramo da Matemática que estuda as generalizações dos conceitos e operações de aritmética; utiliza letras em latim para representar números desconhecidos, incógnitas, ou para representar um número qualquer de um conjunto.*

*c) ramo (ou o antecessor) da Matemática que lida com as propriedades elementares de certas operações sobre numerais. As operações aritméticas tradicionais são a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.*

3- Vamos voltar ao **Triângulo de Sierpinski** e usar a notação algébrica para expressar melhor cálculos para a área do Triângulo... antes, porém, vamos recordar...

| a) O que é <u>área</u> de uma figura plana? | b) Qual é a <u>área</u> de um quadrado de lado x? | c) Qual é a <u>área</u> de um retângulo de lados medindo x e y? | d) E no caso de um triângulo? |
|---|---|---|---|
| | | | |

4- No Triângulo de Sierpinski, o que acontece com a área do triângulo inicial e a área de cada triângulo no primeiro passo?
Essa relação permanece verdadeira nos passos seguintes?

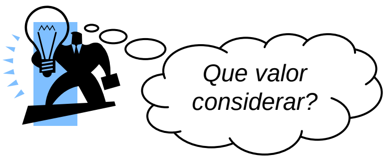


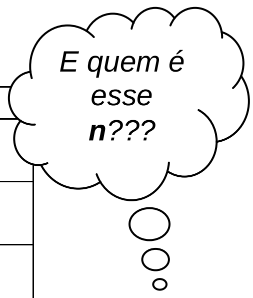
5- Defina assim:

ÁREA DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI = ÁREA DO TRIÂNGULO INICIAL — SOMA DAS ÁREAS DOS BURACOS

A partir desta definição, o que podemos dizer sobre a área da figura resultante a cada passo feito? Ela aumenta, diminui ou permanece constante?

6- Preencha novamente a tabela a respeito da construção do Triângulo de Sierpinski, mas agora considere um outro valor para o lado do triângulo inicial.




| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | | | | | |
| LADO DE CADA BURACO | | | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | | | | | |
| ÁREA DE CADA BURACO | | | | | |

7- Agora que você já sabe uma das funções da Álgebra: a generalização de uma operação ou conceito, faça o mesmo para o Tapete de Sierpinski (considerando o lado do quadrado inicial de medida **k** cm).

| PASSO | 0 | 1 | 2 | 3 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| NÚMERO DE BURACOS | | | | | |
| LADO | | | | | |
| PERÍMETRO DE CADA BURACO | | | | | |
| ÁREA DE CADA BURACO | | | | | |

E não se esqueça da ...

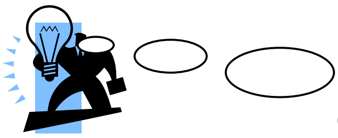
| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |
| | | |

ESPAÇO PARA RASCUNHO

Folha de Atividades V – Semelhança – Dia: ___/___/ ___

Resolva algumas atividades do Caderno do Aluno – vol. 3 e responda as perguntas a seguir:

| PÁGINA | 3 | 4 | 7 | 11-12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|
| ATIVIDADE | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 |
| PROBLEMAS | 1 | 2,3 | 1 | 1 | 2,3 |



*PARA REFLETIR: tudo que é <u>parecido</u> é <u>semelhante</u>?*

*___ sim ___ não*

1- O que é necessário para que duas ou mais figuras planas sejam semelhantes?

a) com relação a forma:

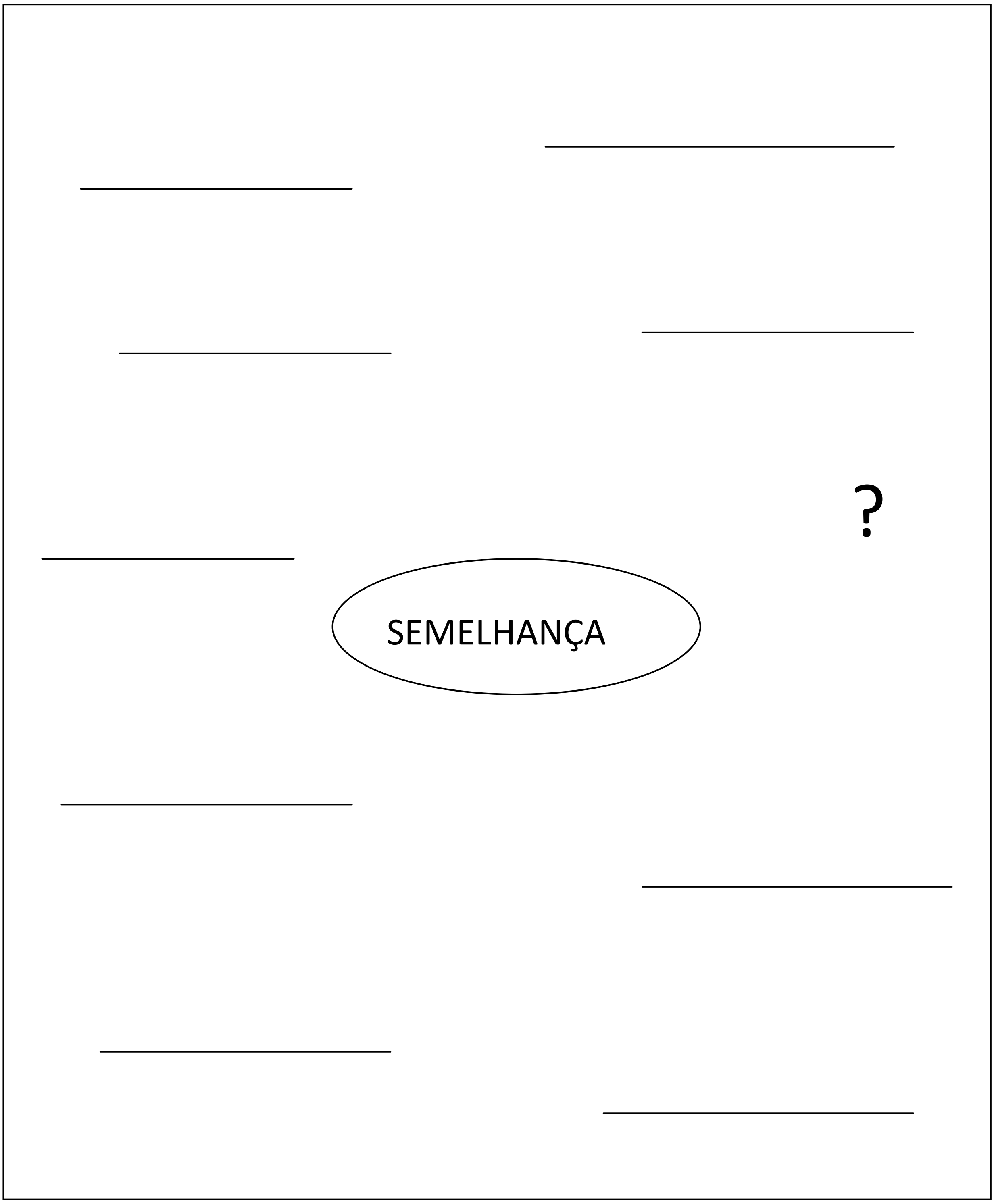
b) com relação aos ângulos:

c) com relação aos lados:

2- O que é **razão de semelhança**? O que fazer para encontrar a razão de semelhança?

3- Em uma figura fractal, o que há de especial, em relação a semelhança?

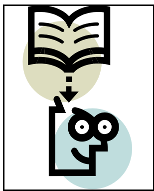
4- Use o espaço abaixo para fazer um **Mapa Conceitual** sobre o conceito de Semelhança.




| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |

Folha de Atividades VI – O que é, o que é? – Dia: ___/___/ ___

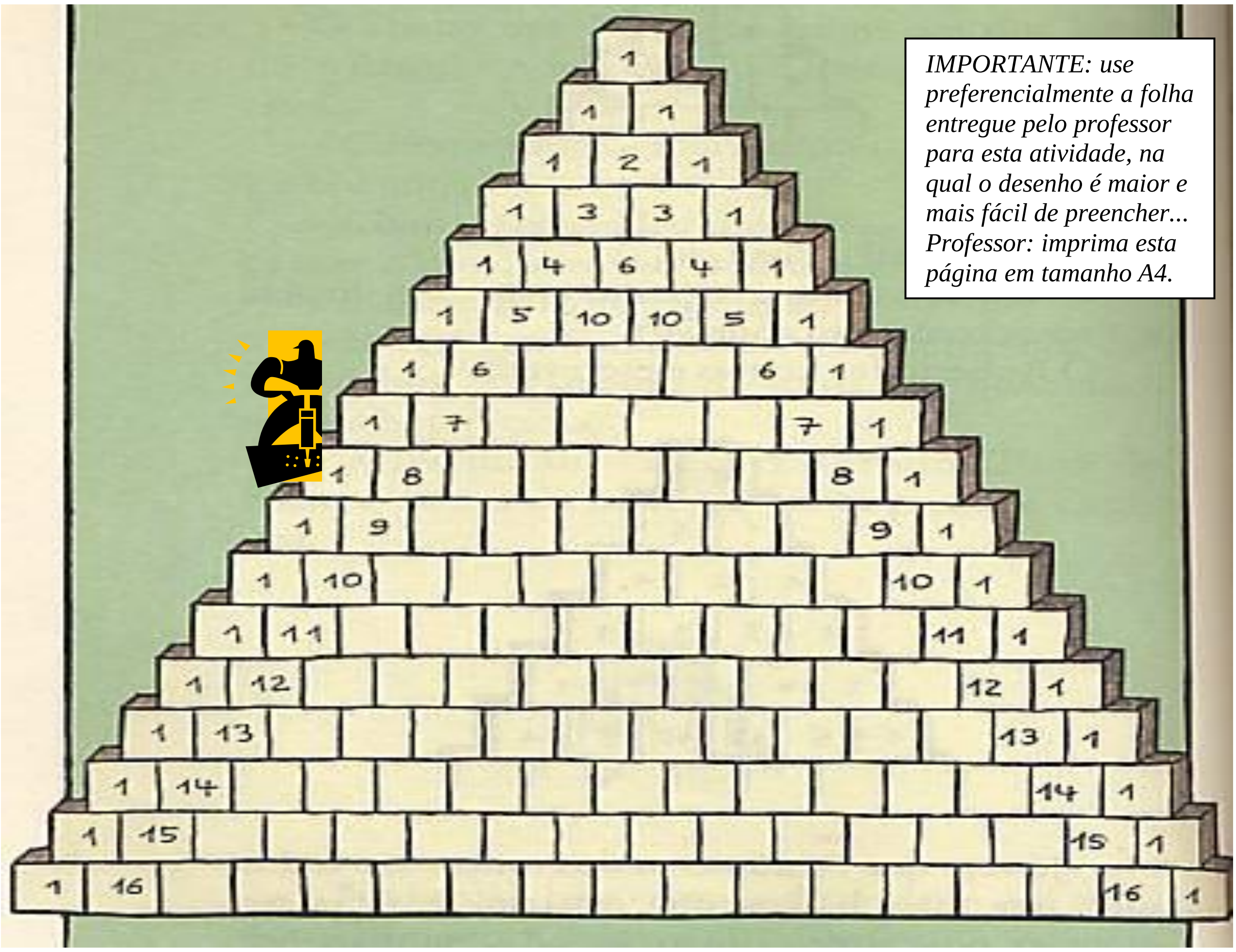
1- Ajude o construtor... Observe a construção abaixo e descubra a regra que irá preencher com números os outros tijolos. Preencha a construção. Pinte os tijolos que possuam um <u>múltiplo de 3.</u>



*O que é um múltiplo de 3? Onde eles estão presentes?*

___________________________________________

___________________________________________




*IMPORTANTE: use preferencialmente a folha entregue pelo professor para esta atividade, na qual o desenho é maior e mais fácil de preencher... Professor: imprima esta página em tamanho A4.*

a) Qual é a regra para o preenchimento?

b) O que aconteceu após a pintura dos múltiplos de 3?

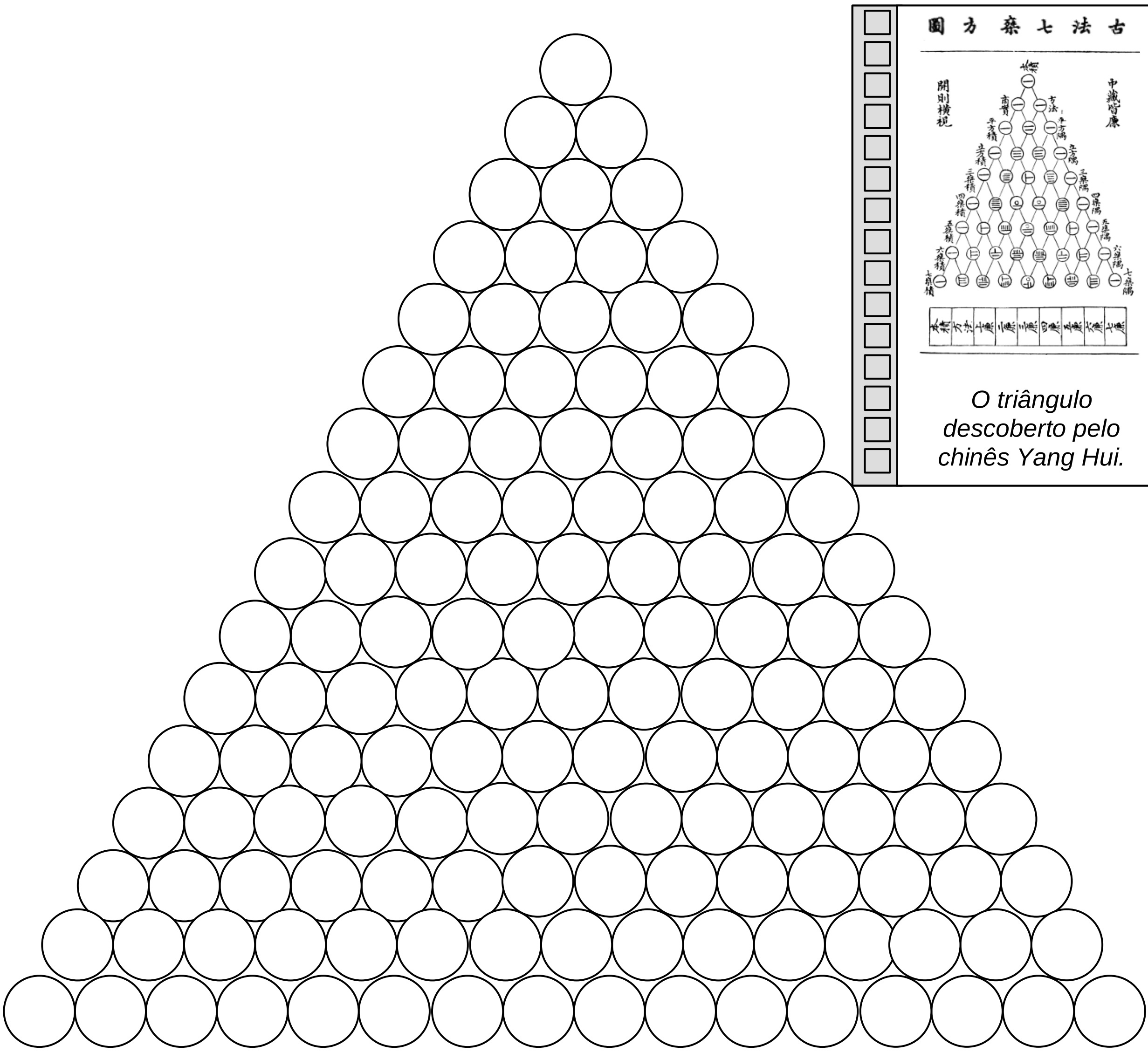
c) E as questões de <u>Semelhança</u>?

*O Triângulo de Pascal foi descoberto pelo chinês Yang Hui e 500 anos depois estudado por Blaise Pascal no séc. XVII. Ele facilita vários cálculos na Matemática.*

d) Some os números obtidos em cada linha e coloque o resultado na tabela abaixo. O que você observa? Será que vale sempre?

| LINHA | SOMA |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| n | |

2- Agora que já sabe como preencher a construção, faça o mesmo para o desenho abaixo, mas preenchendo somente com P para os números pares e I para os números ímpares, se achar melhor. Depois pinte os círculos com a letra P e veja o que vai acontecer...



*O triângulo descoberto pelo chinês Yang Hui.*

| AVALIAÇÃO: o que achou da aula? | | |
|---|---|---|
| ☺ | 😐 | ☹ |

ESPAÇO PARA RASCUNHO

Folha de Atividade VII – Fractais: Dimensão Oculta – Dia: ___/___/ ___

1- Você assistiu ao filme **Fractais: Dimensão Oculta**. Lembre-se do filme, das últimas aulas sobre Geometria Fractal e Figuras Semelhantes. Lembre-se também do Mapa Conceitual que fizemos... A partir disso tudo, elabore um **Mapa Conceitual** no espaço abaixo que relacione tudo o que aprendemos nestas últimas aulas.

2- **Avaliação:** preencha o questionário a respeito das aulas sobre **Geometria Fractal e Semelhança.** A sua opinião é importante para o seu aprendizado e a melhoria destas atividades. Desde já agradecemos muito seu empenho e dedicação nestas últimas aulas. *Prof.* ___________

A- Classifique cada item abaixo em ***ótimo***, ***bom***, ***regular*** ou ***ruim***, conforme a sua opinião e escreva comentários.

| | | |
|---|---|---|
| a) slides e sons<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | b) filmes: *Fractais: Dimensão Oculta* e outros<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | c) material concreto (quebra-cabeça fractal)<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim |
| d) construção de um fractal gigante<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | e) atividades com régua<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | f) outras folhas de atividades<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim |
| g) atividades do Caderno do Aluno e Livro Didático<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | h) mapas conceituais<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | i) nível de dificuldade das aulas<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim |
| j) explicação do professor<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | l) participação da turma (disciplina, atenção, etc.)<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim | m) sua participação (disciplina, atenção, etc.)<br>( ) ótimo ( ) bom ( ) regular ( ) ruim |

Hora de avaliar o trabalho desenvolvido!!!

B- Responda as perguntas a seguir:

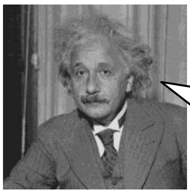
a) qual conceito ou conceitos ficaram claros para você?

b) você ainda tem dúvidas? No que?

c) escreva aqui seus comentários gerais sobre as aulas, críticas e sugestões:

IMPORTANTE: essa avaliação não contará pontos para a nota bimestral,
mas sua contribuição e sinceridade serão muito importantes
para a avaliação das atividades e
para entendermos melhor seu aprendizado.

*Pra finalizar, pense no que Einstein disse:*



*Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.*

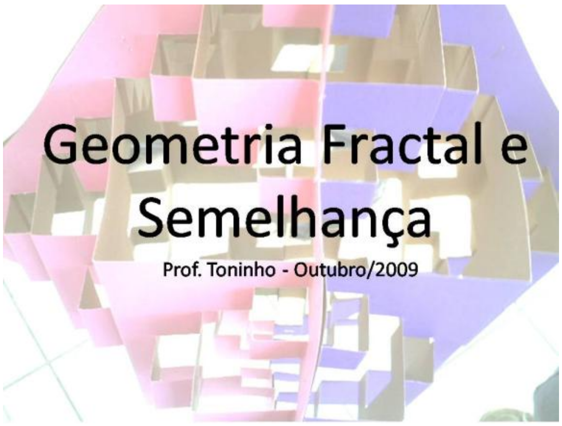
Fonte: http://www.ced.ufsc.br/men5185/trabalhos/22_relatividade/Relatividade%20-%20HTML/quem%20foi.htm

*Afinal, segundo o próprio Einstein, "a coisa mais bela que o homem pode experimentar é o mistério. É essa emoção fundamental que está na raiz de toda ciência e toda arte" e, portanto, da* Matemática*!*

## APÊNDICE E – Slides: Apresentação do Tema aos Estudantes

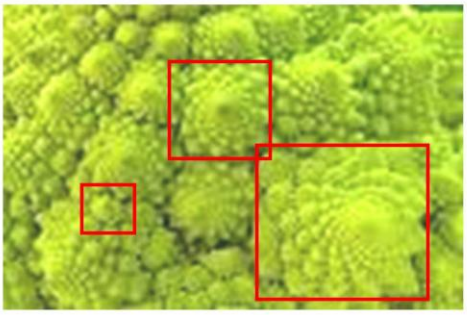
Estes slides confeccionados pelo professor podem servir de apoio ao professor interessado para uma aula introdutória ao assunto. Este poderá reproduzir parcial ou totalmente o material, ou utilizá-lo de inspiração para uma outra produção particular deste professor.

O que uma samambaia, uma couve-flor, um ovo frito, brônquios dos pulmões, árvores e matemática têm em comum?


## Próximas cenas

- A Natureza e a aula de Matemática: o que o nosso quintal tem a ver com isso?
- Matemática no computador: é bonito resolver equações!
- Aula de Arte
- Aula de História
- Figuras e construções *mais que* semelhantes
- Semelhança, o que é isso?

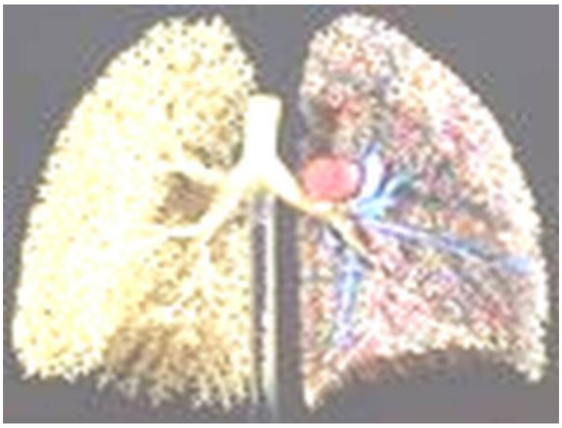


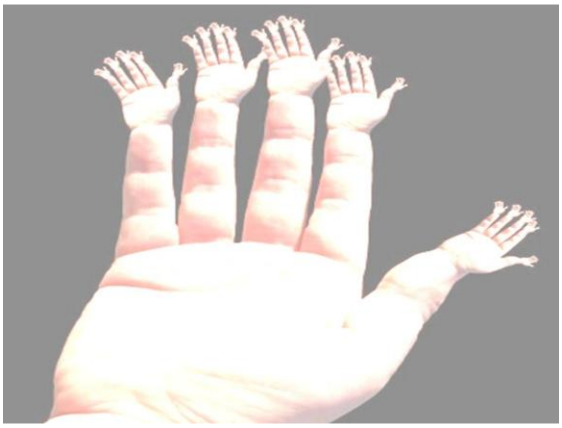

Semelhante → Parecido

Maior → Menor

*- Mas de qualquer jeito???*

Figura 62 – Slides 1 a 8 – Geometria Fractal e Semelhança.





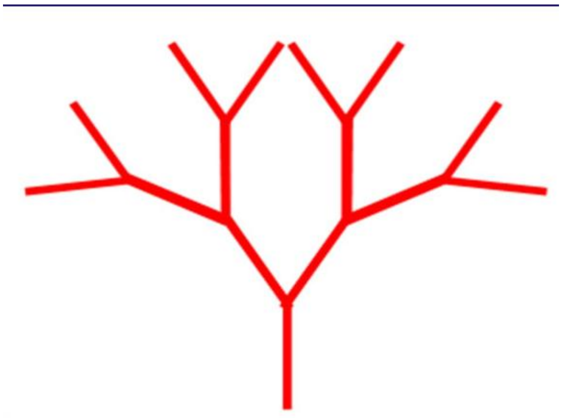
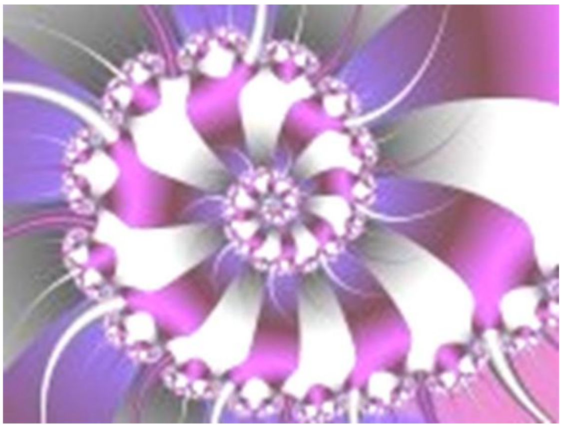
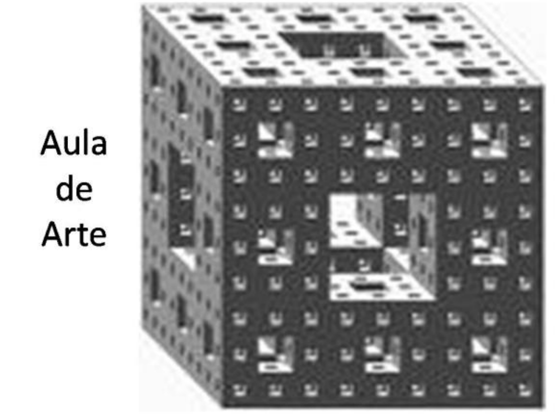



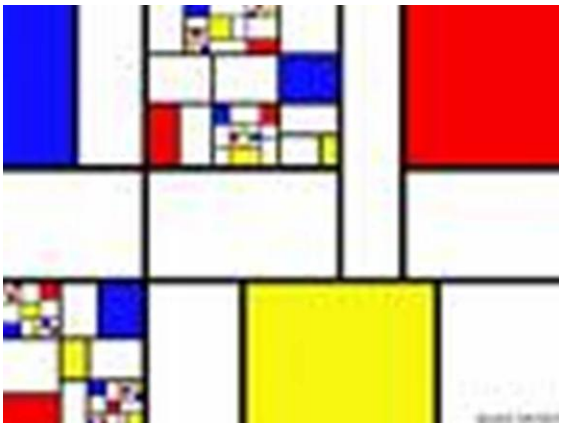
Figura 63 – Slides 9 a 16 – Geometria Fractal e Semelhança.






## Aula de História

- Geometria antes dessas figuras – euclidiana
- Nova geometria, novo jeito de observar os objetos e o mundo
- Novos conceitos



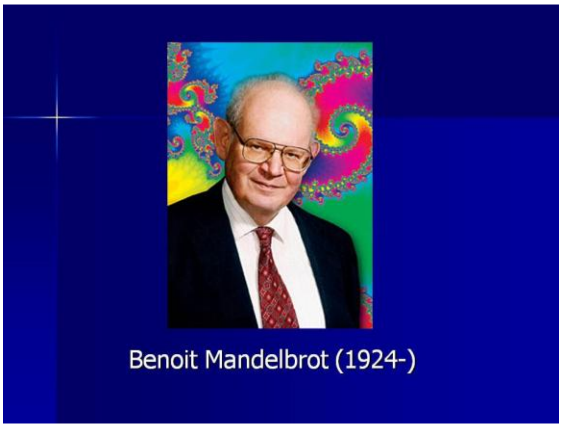
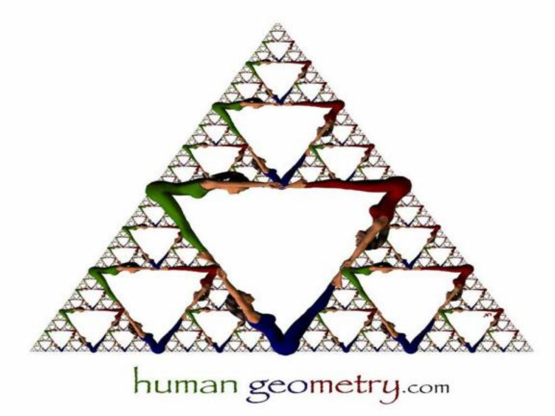


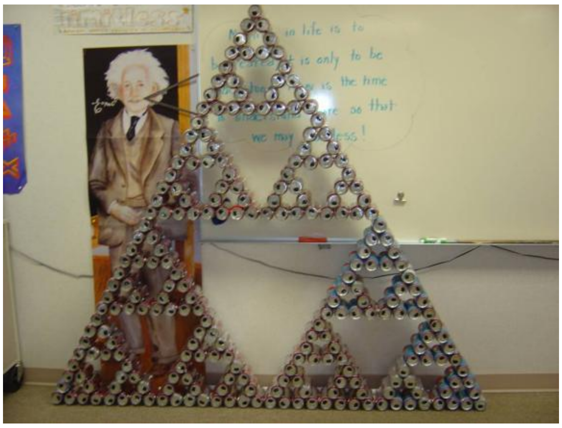


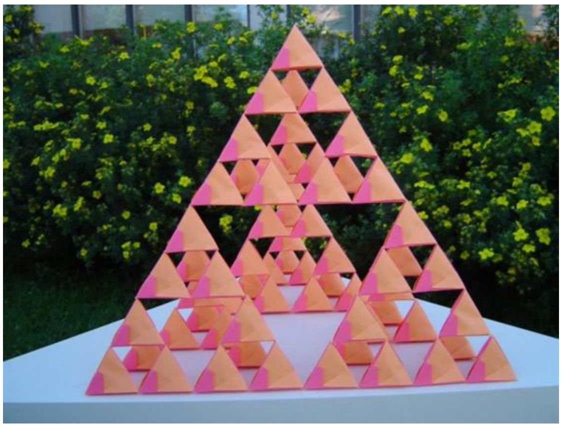
Figura 64 – Slides 17 a 24 – Geometria Fractal e Semelhança.

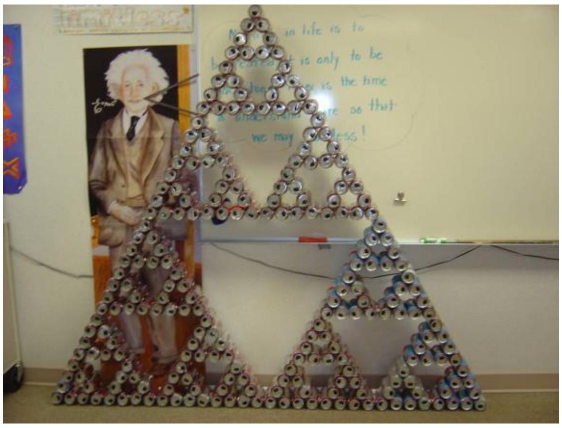

## Definição

- Fractal é uma figura que possui auto-semelhança, ou seja, suas partes são semelhantes à figura total







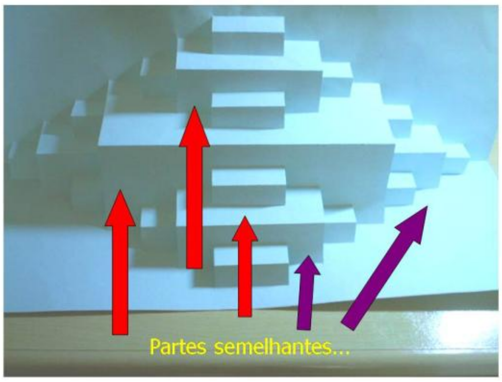



Figura 65 – Slides 25 a 32 – Geometria Fractal e Semelhança.

## Agora

- Construções
- Muita medição
- Muita semelhança

*Grato pela atenção!*

## Nas próximas aulas...

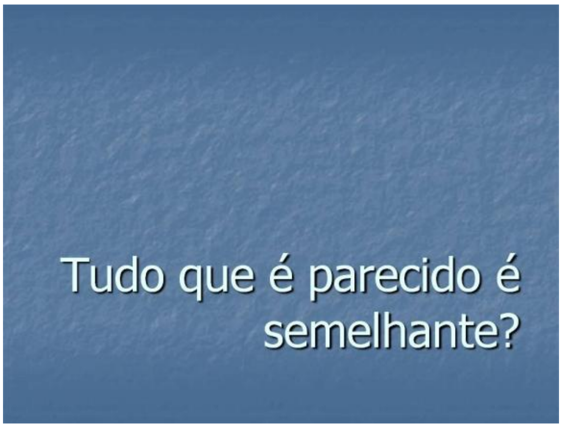
- Semelhança: o que é isso?
- Tudo que é parecido é semelhante?
- Ferramenta: razão, proporção...

Figura 66 – Slides 33 a 35 – Geometria Fractal e Semelhança.

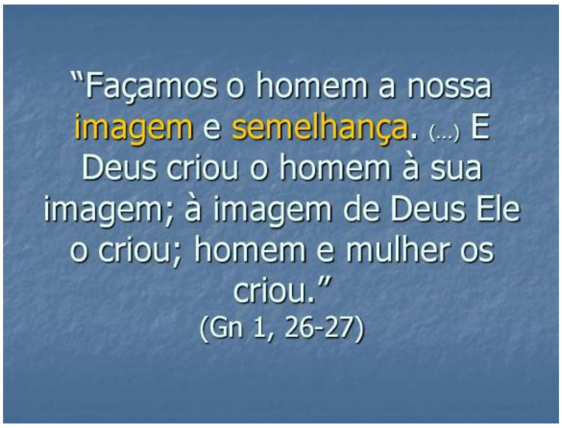
## APÊNDICE F – Slides: Semelhança de Figuras Planas

Estes slides visam uma sistematização das idéias discutidas a respeito de semelhança de figuras planas. Da mesma forma que no apêndice anterior, podem ser reproduzidos ou adaptados pelo professor.

Destacamos ainda uma presença de imagens do acervo pessoal do professor pesquisador que certamente servirá de inspiração aos interessados em elaborar algo semelhante.





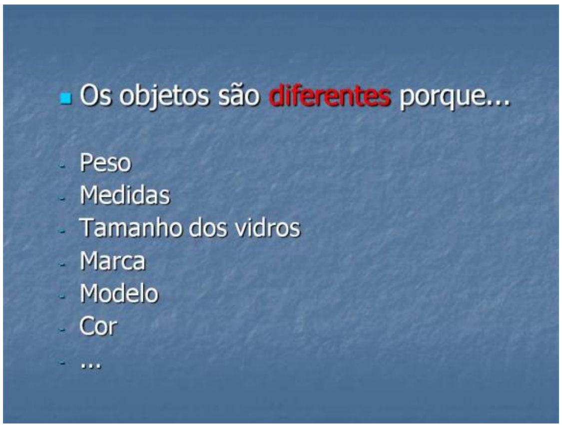




Figura 67 – Slides 1 a 8 – Semelhança.

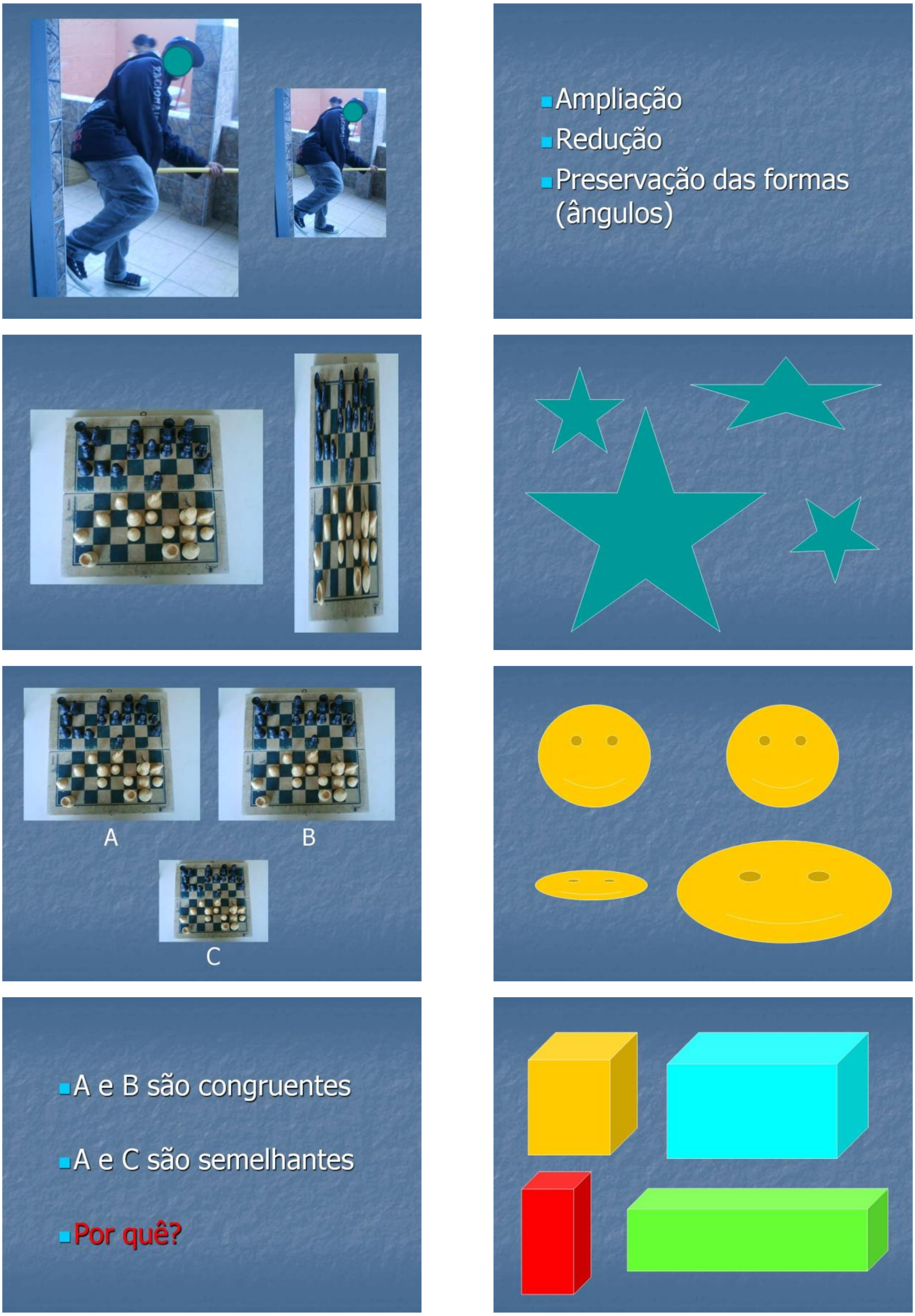
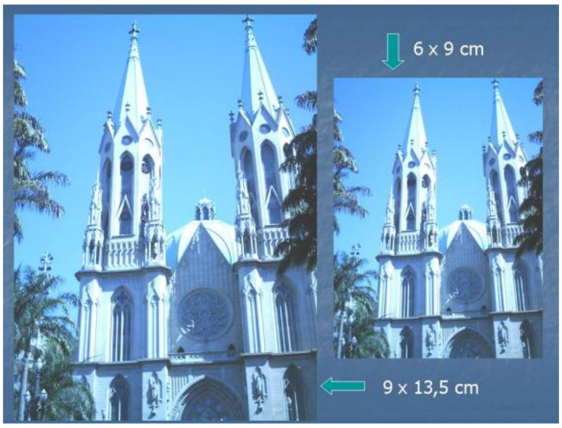
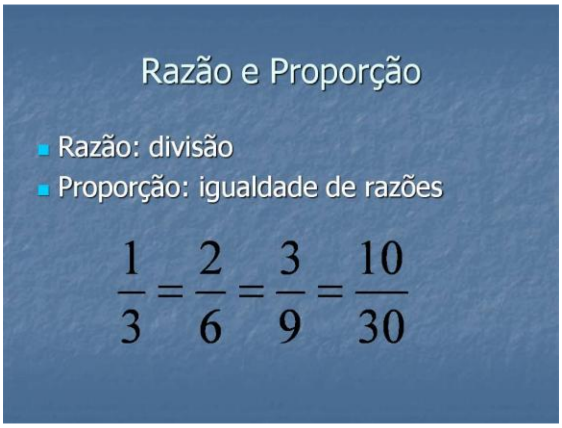
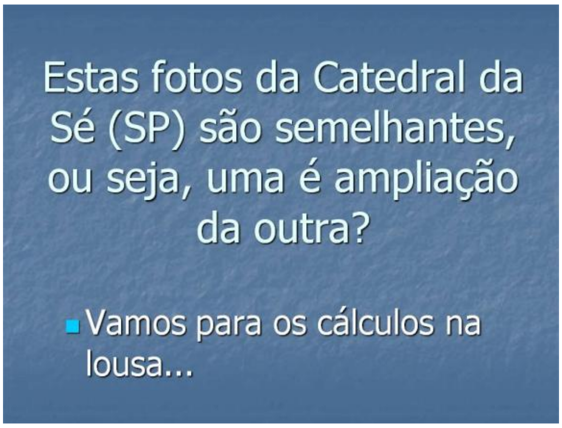
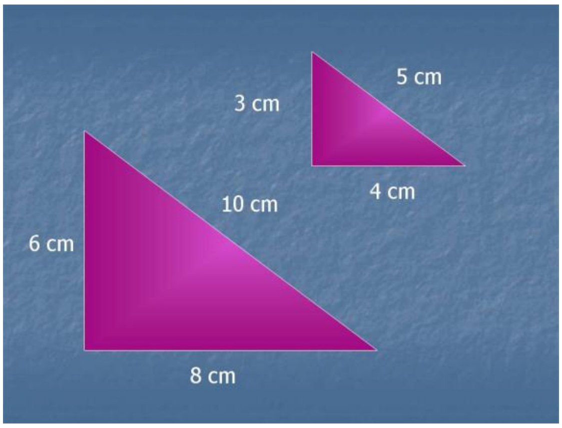


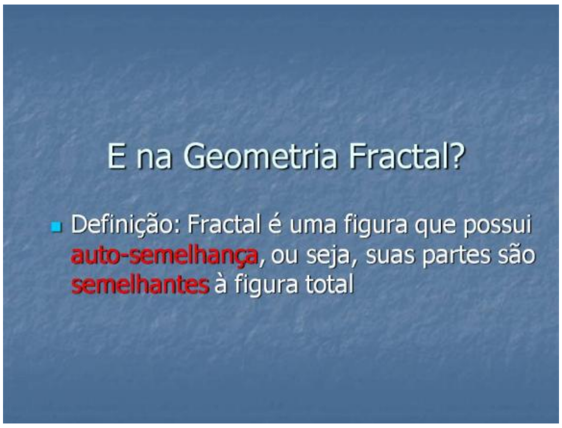

Figura 68 – Slides 9 a 16 – Semelhança.

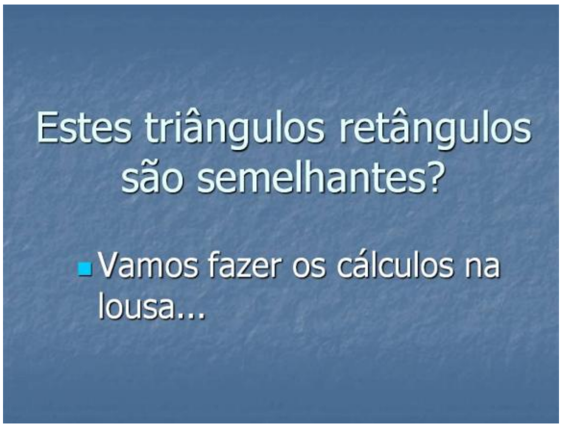



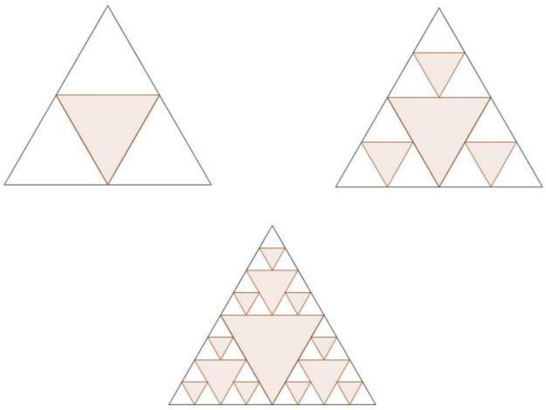
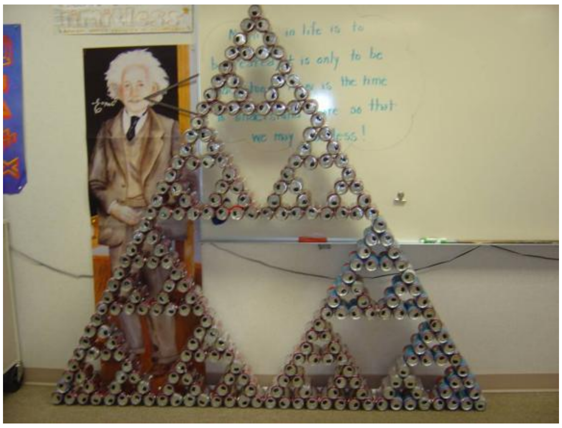
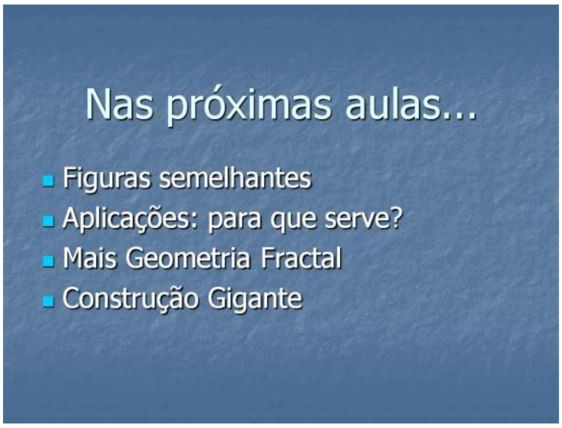
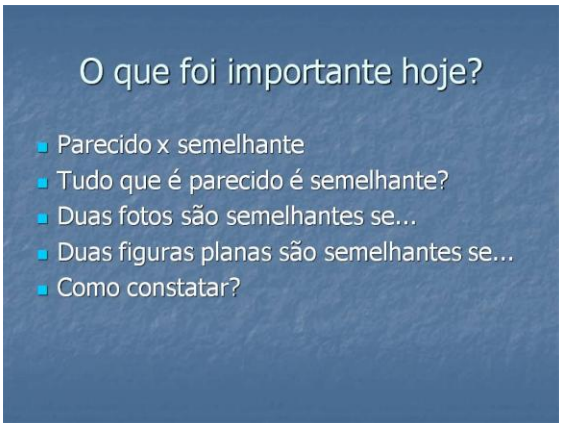



Figura 69 – Slides 17 a 24 – Semelhança.









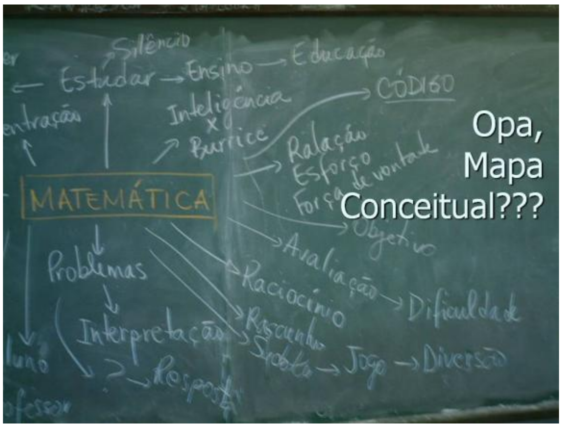




Figura 70 – Slides 25 a 30 – Semelhança.

## ANEXO A – Atividades do Caderno do Aluno

Estas atividades retiradas do Caderno do Aluno pertencente aos estudantes não trazem uma sugestão de solução, como nas Folhas de Atividade, mas o leitor não terá dificuldades em perceber alguns de seus objetivos e características.

Optamos por utilizá-las no próprio material do estudante, ao invés de reproduzi-las em algum momento das Folhas de Atividades, por entender a importância de utilizar o material que os estudantes já dispunham e integrá-lo a proposta da pesquisa.

Destacamos ainda que estes cadernos podem ser consultados por intermédio de um professor ou gestor da rede estadual na internet, mas não citamos esta referência já que não é aberta ao público em geral.

# SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 1
# SEMELHANÇA ENTRE FIGURAS PLANAS

VOCÊ APRENDEU?

## Atividade 1 – Ampliação e redução: o que se altera e o que não se altera?

### Problema 1

A Figura 2 foi obtida pela ampliação da Figura 1:

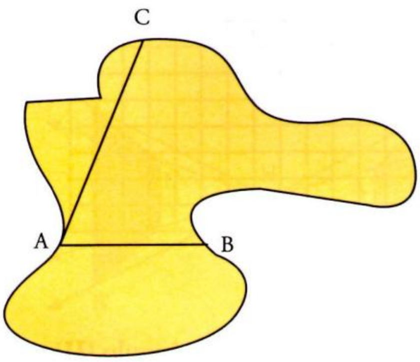



Figura 1

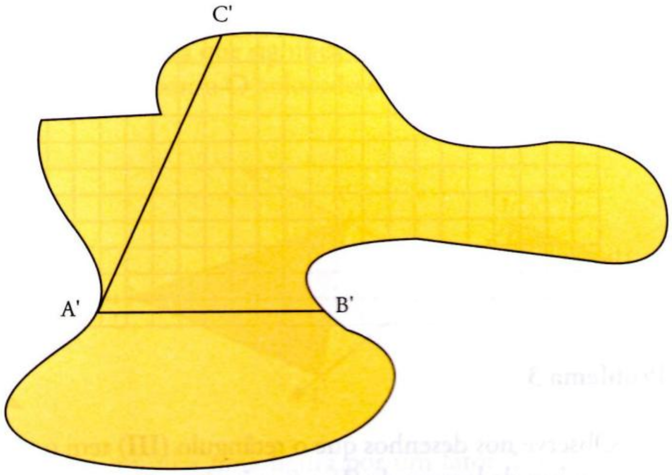



Figura 2

Assinale **X** ao lado do conjunto de medidas iguais nas duas figuras:

( ) Segmento AB e segmento A'B'.

( ) Segmento BC e segmento B'C'.

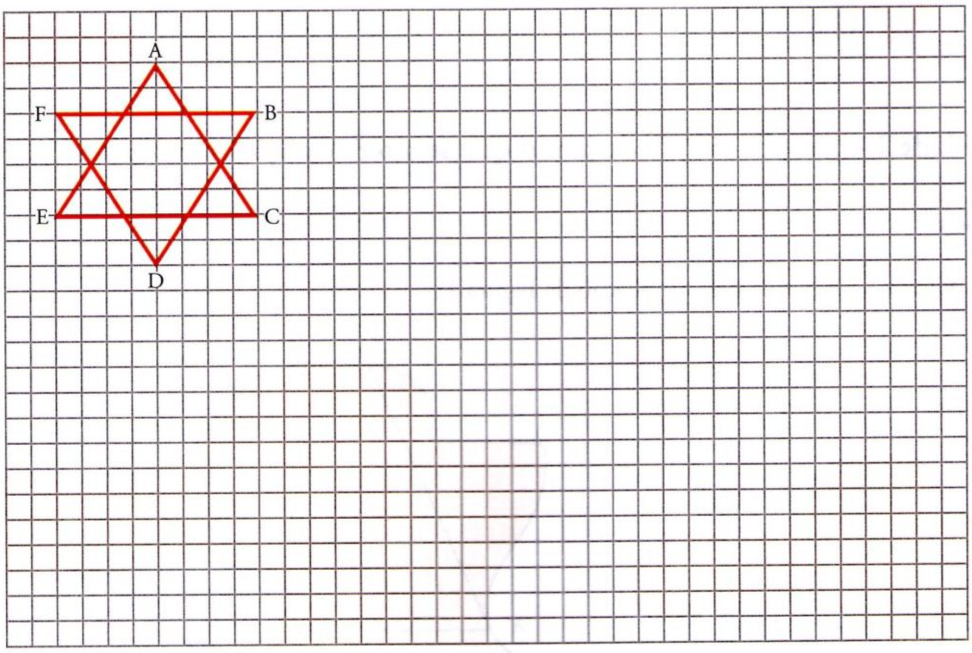
( ) Perímetro da Figura 1 e perímetro da Figura 2.

( ) Área da Figura 1 e área da Figura 2.

( ) Medida do ângulo CAB e medida do ângulo C'A'B'.

**Problema 2**

Observe a estrela de seis pontas desenhada na malha quadriculada. Desenhe, ao lado, duas outras estrelas de seis pontas, de modo que uma delas seja uma redução e a outra seja uma ampliação da estrela inicial, ambas de um fator 2.




**Problema 3**

Observe nos desenhos que o retângulo (**III**) tem o triplo da largura de (**I**), o retângulo (**II**) tem o dobro da largura de (**I**) e os três têm a mesma medida de altura.


a) É correto afirmar que os ângulos nos três retângulos são correspondentemente congruentes? Por quê?

________________________________________

b) Podemos dizer que uma dessas figuras é redução ou ampliação da outra? Por quê?

________________________________________

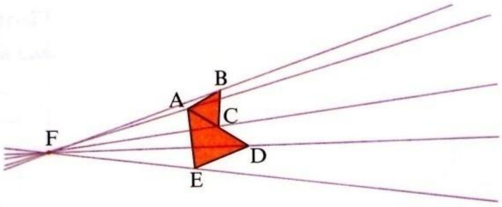
________________________________________

b) calcule a área de A'B'C'.

c) quantas vezes a área de A'B'C' é maior do que a área de ABC ?

**Problema 3**

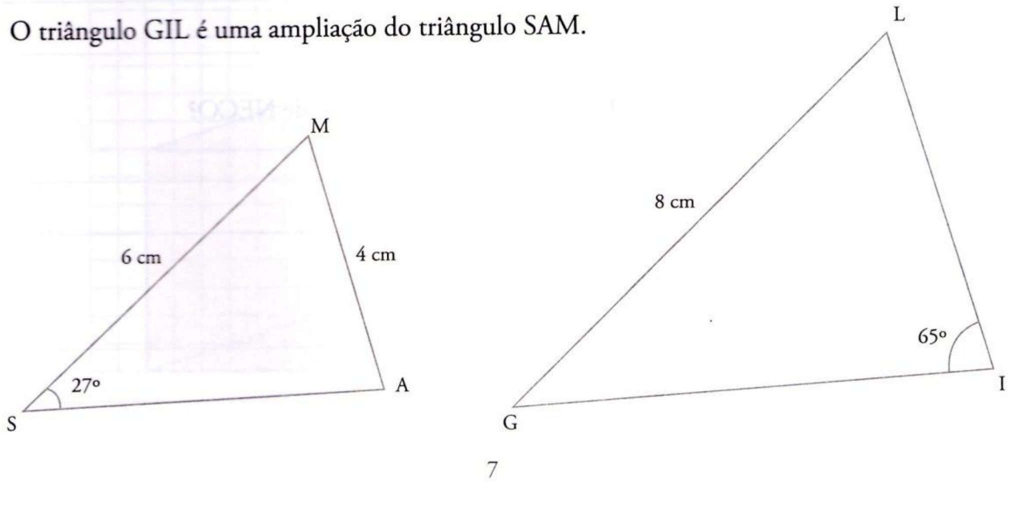
Desenhe na figura um polígono A"B"C"D"E" que seja semelhante a ABCDE, com razão de semelhança 2,0.




## Atividade 3 – Ampliações e reduções: perímetros e áreas

**Problema 1**

O triângulo GIL é uma ampliação do triângulo SAM.



Sendo assim, escreva a medida de:

a) $\overline{LI}$? ______

b) $S\hat{A}M$? ______

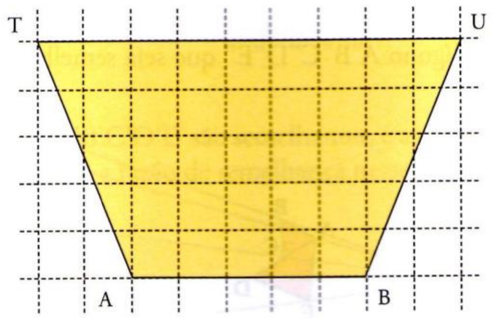
c) $S\hat{M}A$? ______

d) $L\hat{G}I$? ______

e) $G\hat{L}I$? ______

**Problema 2**

Reduzindo proporcionalmente o trapézio isósceles TUBA de um fator 2,5, obtemos o quadrilátero NECO. Suponha que cada quadrícula da malha tenha lados de 1 cm e faça o que se pede.




a) Desenhe o quadrilátero NECO sobre o quadrilátero TUBA.

b) Qual tipo de quadrilátero é NECO?

______

______

c) Quanto mede a altura de TUBA? E quanto mede a altura de NECO?

______

______

d) Quais são as medidas das bases de NECO?

______

______

**Problema 4**

Represente dois cubos de volumes diferentes na malha quadriculada e responda: os cubos desenhados são ou não semelhantes? Por quê?

Resposta: ______________________________________________

**Problema 5**

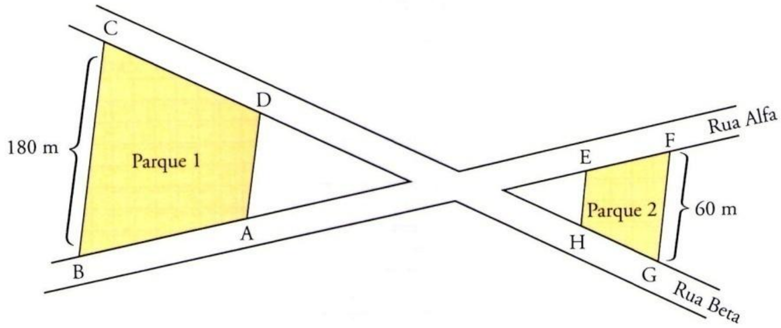
Considere dois paralelepípedos retos semelhantes, na razão 1 : 4. Complete a tabela com as medidas da aresta, da área da base, da área total e do volume do maior sólido, em função de **x**, **y**, **z** e **w**.

| Medida | Aresta | Área da base | Área total | Volume |
|---|---|---|---|---|
| **Menor sólido** | x | y | z | w |
| **Maior sólido** | | | | |

LIÇÃO DE CASA

## Atividade 5 – Semelhança entre figuras planas: contexto e aplicações

A prefeitura de uma cidade pretende construir dois parques próximos ao cruzamento entre as ruas Alfa e Beta. Observando a planta do lugar, pode-se perceber que os dois parques terão formato de trapézios semelhantes (ABCD e EFGH), isto é, os ângulos internos de um serão, correspondentemente, de mesma medida que os ângulos internos do outro. Além disso, há uma proporcionalidade entre as medidas correspondentes dos lados das figuras. Acontece, entretanto, que apenas a medida da base maior de cada trapézio foi definida, sendo 180 m em um deles e 60 m no outro. As demais medidas dependerão de desapropriações a serem realizadas no local.




**Problema 1**

As medidas de $\overline{CB}$ e de $\overline{FG}$ são fixas, respectivamente, 180 m e 60 m, enquanto as demais medidas podem variar, mantendo-se, todavia, a semelhança entre as duas figuras. Com base nisso, resolva:

a) Se a medida de $\overline{EH}$ for igual a 25 m, qual será a medida de $\overline{DA}$?

b) Se DA = 18 m, quanto medirá $\overline{EH}$?

c) Se EH = k, quanto medirá $\overline{DA}$ em função de **k**?

**Problema 2**

No final das negociações e desapropriações, chegou-se à conclusão de que as medidas de $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$ serão, respectivamente, 15 m e 18 m. Qual será a medida de:

a) $\overline{CD}$?

b) $\overline{AB}$?

**Problema 3**

O construtor dos parques sabe que precisará de 309 m de cerca para fechar todo o parque maior. Nessas condições, adotando os resultados calculados no problema anterior, quanto mede $\overline{DA}$?

**Problema 4**

Complete a tabela abaixo com as medidas dos lados de cada trapézio:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trapézio ABCD** | $\overline{BC}$ | | $\overline{DA}$ | | $\overline{AB}$ | | $\overline{CD}$ | |
| **Trapézio EFGH** | $\overline{FG}$ | | $\overline{EH}$ | | $\overline{EF}$ | | $\overline{GH}$ | |

## ANEXO B – Matriz Curricular de Matemática de SP

A Matriz Curricular constante deste anexo também está exposta no capítulo 2, onde abordamos a Geometria Fractal na Sala de Aula. Inserimos novamente aqui para uma observação do leitor pela fonte original.

Trata-se simplesmente da distribuição dos tópicos curriculares a serem ensinados em Matemática da 5ª série do Ensino Fundamental à 3ª série do Ensino Médio.

# Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Fundamental – Ciclo II

| | 5ª Série | 6ª Série | 7ª Série | 8ª Série |
|---|---|---|---|---|
| 1º Bimestre | **Números naturais**<br>• Múltiplos e divisores.<br>• Números primos.<br>• Operações básicas (+, −, x, ÷ ).<br>• Introdução às potências.<br>**Frações**<br>• Representação.<br>• Comparação e ordenação.<br>• Operações. | **Sistemas de numeração**<br>• Sistemas de numeração na Antigüidade.<br>• O sistema posicional decimal.<br>**Números negativos**<br>• Representação.<br>• Operações.<br>**Números racionais**<br>• Representação fracionária e decimal.<br>• Operações com decimais e frações (complementos). | **Números racionais**<br>• Transformação de decimais finitos em frações.<br>• Dízimas periódicas e fração geratriz.<br>**Potenciação**<br>• Propriedades para expoentes inteiros.<br>• Problemas de contagem. | **Números reais**<br>• Conjuntos numéricos.<br>• Números irracionais.<br>• Potenciação e radiciação em R.<br>• Notação científica. |

# Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Fundamental – Ciclo II

| | 5ª Série | 6ª Série | 7ª Série | 8ª Série |
|---|---|---|---|---|
| 2º Bimestre | **Números decimais**<br>• Representação.<br>• Transformação em fração decimal.<br>• Operações.<br><br>**Sistemas de medida**<br>• Medidas de comprimento, massa e capacidade.<br>• Sistema métrico decimal: múltiplos e submúltiplos da unidade. | **Geometria**<br>• Ângulos.<br>• Polígonos.<br>• Circunferência.<br>• Simetrias.<br>• Construções geométricas.<br>• Poliedros. | **Expressões algébricas**<br>• Equivalências e transformações.<br>• Produtos notáveis.<br>• Fatoração algébrica. | **Álgebra**<br>• Equações do 2º grau: resolução e problemas.<br><br>**Funções**<br>• Noções básicas sobre função.<br>• A idéia de variação.<br>• Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus. |

# Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Fundamental – Ciclo II

| | 5ª Série | 6ª Série | 7ª Série | 8ª Série |
|---|---|---|---|---|
| 3º Bimestre | **Formas geométricas**<br>• Formas planas.<br>• Formas espaciais.<br>**Perímetro e área**<br>• Unidades de medida.<br>• Perímetro de uma figura plana.<br>• Cálculo de área por composição e decomposição.<br>• Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas. | **Proporcionalidade**<br>• Variação de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.<br>• Conceito de razão.<br>• Porcentagem.<br>• Razões constantes na geometria: Pi.<br>• Construção de gráficos de setores.<br>• Problemas envolvendo probabilidade. | **Equações**<br>• Resolução de equações de 1º grau.<br>• Sistemas de equações e resolução de problemas.<br>• Inequações do 1º grau.<br>**Gráficos**<br>• Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano. | **Proporcionalidade na geometria**<br>• O conceito de semelhança.<br>• Semelhança de triângulos.<br>• Razões trigonométricas. |

# Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Fundamental – Ciclo II

| | 5ª Série | 6ª Série | 7ª Série | 8ª Série |
|---|---|---|---|---|
| 4º Bimestre | **Estatística**<br>• Leitura e construção de gráficos e tabelas.<br>• Média aritmética.<br>• Problemas de contagem. | **Álgebra**<br>• Uso de letras para representar um valor desconhecido.<br>• Conceito de equação.<br>• Resolução de equações.<br>• Equações e problemas. | **Geometria**<br>• Teorema de Tales.<br>• Teorema de Pitágoras.<br>• Área de polígonos.<br>• Volume do prisma. | **Corpos redondos**<br>• O número $\pi$; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo.<br>• Volume e área do cilindro.<br>**Probabilidade**<br>• Problemas de contagem e introdução à probabilidade. |

# Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Médio

| | 1ª Série | 2ª Série | 3ª Série |
|---|---|---|---|
| 1º Bimestre | **Números e seqüências**<br>• Conjuntos numéricos.<br>• Regularidades numéricas: seqüências.<br>• Progressões aritméticas e progressões geométricas. | **Trigonometria**<br>• Fenômenos periódicos.<br>• Funções trigonométricas.<br>• Equações e inequações.<br>• Adição de arcos. | **Geometria analítica**<br>• Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos.<br>• Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares.<br>• Ponto e reta: distância.<br>• Circunferência: equação.<br>• Reta e circunferência: posições relativas.<br>• Cônicas: noções e aplicações. |

# Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Médio

| | 1ª Série | 2ª Série | 3ª Série |
|---|---|---|---|
| 2º Bimestre | **Funções**<br>• Relação entre duas grandezas.<br>• Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado.<br>• Função de 1º grau.<br>• Função de 2º grau. | **Matrizes, determinantes e sistemas lineares**<br>• Matrizes: significado como tabelas, características e operações.<br>• A noção de determinante de uma matriz quadrada.<br>• Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento. | **Equações algébricas e números complexos**<br>• Equações polinomiais.<br>• Números complexos: operações e representação geométrica.<br>• Propriedades das raízes de uma equação polinomial.<br>• Relações de Girard. |

# Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Médio

| | 1ª Série | 2ª Série | 3ª Série |
|---|---|---|---|
| 3º Bimestre | **Funções exponencial e logarítmica**<br>• Crescimento exponencial.<br>• Função exponencial: equações e inequações.<br>• Logaritmos: definição e propriedades.<br>• Função logarítmica: equações e inequações. | **Análise combinatória e probabilidade**<br>• Raciocínio combinatório: princípios multiplicativo e aditivo.<br>• Probabilidade simples.<br>• Casos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações.<br>• Probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos.<br>• Probabilidade condicional.<br>• Distribuição binomial de probabilidades: o triângulo de Pascal e o Binômio de Newton. | **Estudo das funções**<br>• Qualidades das funções.<br>• Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais.<br>• Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação.<br>• Composição: translações e reflexões.<br>• Inversão. |

# Conteúdos de Matemática por série e bimestre do Ensino Médio

| | 1ª Série | 2ª Série | 3ª Série |
|---|---|---|---|
| 4º Bimestre | **Geometria-Trigonometria**<br>• Razões trigonométricas nos triângulos retângulos.<br>• Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies.<br>• Resolução de triângulos não retângulos: lei dos senos e lei dos co-senos. | **Geometria métrica espacial**<br>• Elementos de geometria de posição.<br>• Poliedros, prismas e pirâmides.<br>• Cilindros, cones e esferas. | **Estatística**<br>• Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos.<br>• Medidas de tendência central: média, mediana e moda.<br>• Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão.<br>• Elementos de amostragem. |