UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

CRISTIANE MARIA ROQUE VAZQUEZ

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE ATIVIDADES ORIENTADORAS EM UMA ESCOLA ESTADUAL DO INTERIOR PAULISTA

SÃO CARLOS
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

CRISTIANE MARIA ROQUE VAZQUEZ

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DE ATIVIDADES ORIENTADORAS EM UMA ESCOLA ESTADUAL DO INTERIOR PAULISTA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre, sob orientação do Professor Doutor Pedro Luiz Aparecido Malagutti.

SÃO CARLOS
2011

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

V393ea

Vazquez, Cristiane Maria Roque.
O ensino de análise combinatória no ensino médio por meio de atividades orientadoras em uma escola estadual do interior paulista / Cristiane Maria Roque Vazquez. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
88 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Análise combinatória. 2. Ensino médio. 3. Educação - métodos de investigação. I. Título.

CDD: 511.6 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti
DM - UFSCar

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
IGCE - DM - UNESP

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
DM - UFSCar

Ao meu marido, Ricardo, e ao meu filho Julio, com muito amor.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Pedro Malagutti por toda dedicação e confiança em mim depositada para a elaboração desse trabalho.

A minha família, pelo incentivo e apoio indispensáveis nessa jornada.

Aos meus colegas do curso, Angela, Mariangela, Maristela, Marcos, Pedro, Anderson, Maiko, Anderson Aguiar, Luciano e Fabio, pela amizade, pela troca de experiência e todo o tempo de boa convivência que tivemos.

A meus professores, que tanto me ensinaram e contribuíram não só para a conclusão desse trabalho, mas também para a árdua tarefa de ser educador.

Às amigas Ceres e Emery, pelas preciosas sugestões e todo auxílio prestado para a formatação desse trabalho.

À equipe gestora da Escola Estadual José Ferreira da Silva por ter permitido a realização desse trabalho, em especial, à amiga Dora, pela paciência e dedicação em realizar todas as filmagens.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo descrever a elaboração, o desenvolvimento e a aplicação de atividades orientadoras de ensino numa área que usualmente é pouco explorada, a Análise Combinatória. A pesquisa foi desenvolvida através de uma intervenção que contou com três atividades orientadoras aplicadas a estudantes de quatro turmas da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública estadual no interior paulista. As atividades foram elaboradas com o objetivo de colocar os alunos numa posição de ação e tomadas de decisões para facilitar o entendimento e o processo de construção do conhecimento e foram desenvolvidas em grupos de quatro ou cinco alunos. A pesquisa que classificamos como naturalista, pelo fato de que a coleta de dados foi realizada diretamente no local em que o problema acontece, tem como questão central verificar se o ensino de Análise Combinatória, sem o uso abusivo de fórmulas, através de atividades orientadoras e da utilização do princípio multiplicativo, pode melhorar o ensino e a compreensão desse conteúdo. Os resultados foram obtidos através da análise das atividades resolvidas pelos estudantes que foram filmadas, pela observação e pelas anotações feitas pelos pesquisadores e também pela avaliação realizada ao final da pesquisa. Pôde-se constatar que as atividades orientadoras foram essenciais para um melhor desempenho dos estudantes que se sentiram mais seguros e confiantes para a realização de novas atividades. Essas atividades representam o produto final desse trabalho e espera-se que se constituam em material de consulta para professores que buscam, incansavelmente, novas metodologias.

Palavras-chave: Combinatória. Atividades Orientadoras. Princípio Multiplicativo.

ABSTRACT

This paper has the aim to describe the design, development and application of guiding teaching activities in an area that is usually little explored, the Combinatorics. The study was developed through an intervention that consisted of three activities applied to guiding students in four classes of second grade high school of a state school in São Paulo. The activities were designed with the goal of putting students in a position of action and decision making to facilitate the understanding and the process of knowledge construction and were developed in groups of four or five students. The research classified as naturalist, by the fact that data collection was carried out directly on the site where the problem, is the central issue is to verify whether the teaching of Combinatorics, without the excessive use of formulas, through tutoring activities and use of multiplicative principle, can improve the teaching and understanding of that content. The results were obtained by analyzing the activities addressed by the students who were recorded, by observation, by notes taken by the researchers and also by the evaluation at the end of the research. It was found that the activities were essential for guiding a better performance of students who felt more secure and confident to carry out new activities. These activities represent the final product of this work and it is expected that constitute reference material for teachers who tirelessly seek for new methodologies.

Key-words: Combinatorics. Guiding Activities. Multiplicative Principle.

SUMÁRIO

1 Introdução

Meu trabalho como professora começou em 1993, quando ainda cursava a graduação em Matemática na Universidade Federal de São Carlos. Comecei a lecionar para turmas de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, trabalhando com classes do ensino regular e do ensino supletivo. No ano de 1995, último ano da graduação, passei também a trabalhar com o Ensino Médio.

A preocupação e inquietação com a dificuldade dos alunos na aprendizagem da Matemática levaram-me a ingressar no ano de 1999 no curso de pós-graduação *lato sensu* em Educação Matemática, na Universidade de Franca (UNIFRAN), na busca de trocar experiências com outros colegas e de obter respostas a algumas perguntas para as quais não encontrava solução. Esse curso foi desenvolvido com o objetivo de promover mudanças na prática do professor com vistas à sala de aula, uma vez que a formação inicial e a formação continuada, como apontam *Shulman*, *Tardiff*, *Llianres*, entre outros, alimentam crenças, concepções e saberes do professor no que diz respeito ao currículo, ensino, aprendizagem, aula, atividades, educação, sociedade e tudo isso influencia sua prática pedagógica, que, realizada de forma reflexiva, participativa e investigativa, podem reconstituir todo esse ideário pedagógico.

Apesar de não obter respostas a várias perguntas, afinal, já tinha consciência de que não seria possível, tive certeza de que um importante caminho a ser traçado é o constante aperfeiçoamento do professor. A consciência desta necessidade reforçou-se, quando passei também a ministrar aulas no Ensino Superior, no mesmo ano em que iniciei os trabalhos em Franca, para turmas do curso de Administração da Universidade Camilo Castelo Branco, lecionando as disciplinas de Matemática e Matemática Financeira. Novamente, deparei-me com a dificuldade dos alunos, principalmente com importantes conceitos trabalhados no Ensino Médio.

Como parte integrante do curso de Pós-Graduação, elaborei a monografia intitulada “O ensino de frações numa 3ª série do Ensino Fundamental: um estudo de caso”, sob a orientação da Professora Adair Mendes Nacarato, na qual procurei, através de atividades iniciais, apresentar uma significativa noção do conceito de fração, utilizando para isso quantidades contínuas e discretas, e explorando simultaneamente a fração como relação parte-todo, como razão, como medida e como quociente.

Encerrados os trabalhos na UNIFRAN procurei participar de cursos de capacitação e de aperfeiçoamento oferecidos pelas Diretorias de Ensino da região, bem como Encontros e Seminários de Educação Matemática, buscando inteirar-me das pesquisas e dos resultados obtidos pelos pesquisadores da área.

No ano de 2009 ingressei no mestrado profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos. A experiência em sala de aula trouxe em pauta o conteúdo referente à Análise Combinatória (AC), considerado “polêmico", devido às dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem.

A aprendizagem da Análise Combinatória consiste em resolver problemas do cotidiano, nos quais é necessário determinar de quantas maneiras certo evento pode ocorrer. Em alguns problemas, basta escrever uma lista explícita de todos os elementos do conjunto apresentado e depois contá-los. Entretanto, em muitos casos, o conjunto será demasiadamente grande para se fazer essa contagem direta dos seus elementos e, por isso, são necessários outros processos de contagem. A Combinatória, que inclui o estudo dos arranjos, das permutações e das combinações, permite determinar o número de possibilidades lógicas de certo evento, sem necessariamente enumerar cada caso.

O início do trabalho com a combinatória mostra-se particularmente problemático para muitos alunos, que mecanicamente tentam descobrir a que tipo de agrupamento – arranjo, permutação ou combinação – o problema pertence, para depois resolvê-lo utilizando a fórmula adequada.

Diante disso, surgiu o interesse em desenvolver e em aplicar atividades diferenciadas buscando despertar a curiosidade e a investigação matemática numa área que usualmente é pouco explorada, a Análise Combinatória (AC).

Segundo pesquisadores, por tempo considerável, a AC foi apenas uma ferramenta para efetuar alguns cálculos, sendo que em civilizações antigas suas aplicações eram dadas por regras básicas de contar, de construção de quadrados mágicos, de mistura de ingredientes, entre outras. A combinatória era identificada como uma simples “contagem”, ou seja, sua função era encontrar o número de caminhos existentes com algumas operações pré-definidas. Tal afirmação é confirmada por Berge (1971) que diz que a preocupação mais antiga da combinatória eram os problemas de contagem.

Berge (1971, p.1) diz que uma definição de combinatória depende de muitos conceitos precisos de “configurações”. Para ele, uma configuração surge sempre que um determinado número de objetos é distribuído de acordo com leis pré-fixadas. Pode-se pensar como um exemplo de configuração o simples fato de “colocar vários pacotes misturados dentro de uma gaveta”.

O interesse por esse conteúdo foi crescendo e, a partir do século XVII, a AC passa a ser tratada como um ramo da ciência, uma teoria que começa a se desenvolver, a se organizar e a se sistematizar em vários trabalhos, assim como suas aplicações na estatística, no cálculo de probabilidades e em vários outros campos das ciências.

Hoje, a Análise Combinatória é definida como um ramo da Matemática que permite resolver problemas em que, é necessário “escolher”, “arrumar” e, principalmente, “contar” os objetos de um conjunto. Tal conteúdo, quando explorado em forma de problemas traz certa dificuldade em relação à formulação e à interpretação de seus enunciados, pois exige flexibilidade de pensamento, ou seja, para resolvê-los é necessário parar, concentrar, discutir e pensar.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2000, p.44), a importância dos problemas de contagem e, consequentemente, da AC é retratada no seguinte trecho:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, por sua vez, trazem uma preocupação no sentido de acrescentar ao estudo dos números, operações, espaço, formas, grandezas e medidas, conteúdos que permitam tratar as informações que os alunos recebem todos os dias, levando-os a aprender a lidar com dados estatísticos, tabelas, gráficos e a utilizar idéias relativas à probabilidade e à combinatória.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997, p.40) conteúdos como Estatística, Probabilidade e Combinatória estão incorporados ao item "Tratamento da Informação" com a finalidade de evidenciá-los devido à importância de seus usos atuais, o que pode ser evidenciado nos seguintes parágrafos:

> Integrarão este bloco estudos relativos a noções de estatística, de probabilidade e de combinatória. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos.
>
> Relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.

Assim, constatou-se, nos documentos oficiais sobre o ensino a importância do domínio combinatório por parte do aluno, desde o início de sua escolarização, explorando-o em diferentes momentos da aprendizagem e aprofundando-o adequadamente a cada nível de ensino. E, comungando com tal consideração acredito que o contato do aluno com a Combinatória desde os primeiros anos da escola básica deve ocorrer de modo a permitir a sua familiarização com os problemas, levando-o a descrever os casos possíveis e contá-los através de uma representação por ele escolhida, sem regras a princípio, de modo a adquirir uma forma sistemática e gradativa para sua resolução, possibilitando uma posterior formalização no Ensino Médio.

A verificação, após algum tempo trabalhando com alunos do Ensino Médio, das dificuldades de entendimento e de compreensão relativas à Análise Combinatória, levou a considerar que a introdução dos conceitos relativos a esse tema, mesmo que de forma básica, utilizando o princípio fundamental da contagem, pode ser o início da desmistificação de um conteúdo interessante e que pode ser entendido através de raciocínios primeiramente simples para depois começar a se explorar problemas mais complexos.

Assim, diante das dificuldades encontradas pelos alunos no entendimento desse conteúdo e também a "preocupação" e até o "medo" de alguns professores ao tratar esse assunto incentivaram a busca por atividades e por métodos diferenciados para trabalhar em sala de aula visando despertar a curiosidade e a investigação matemática para melhorar sua compreensão.

Tão importante quanto conhecer um conteúdo matemático, é conhecer sua história. Porém, a história do conteúdo matemático não pode simplesmente ser pensada como um elemento motivador para seu ensino. Ela é um campo de investigação científica que vem ganhando cada vez mais destaque no âmbito educacional. Segundo os PCN (1997, p. 34),

> [...] ao mostrar as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno frente ao conhecimento matemático.

> [...] conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se em veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo.

Considerando a importância da AC e de sua história no desenvolvimento e na aprendizagem de nossos alunos, o segundo capítulo desse trabalho aborda desde suas origens até o século XVIII, elementos sobre a história da Análise Combinatória.

O terceiro capítulo traz, de forma sucinta, a teoria da Análise Combinatória. Busca mostrar como obter resultados gerais a fim de resolver várias classes de problemas: permutações, arranjos, permutações com repetição, combinações, permutações circulares e combinações completas. Acredita-se que essa teoria deva ser conhecida pelos alunos mesmo que muitos problemas possam ser resolvidos pela enumeração dos casos ou simplesmente através da utilização do Princípio Fundamental de Contagem.

O quarto capítulo apresenta as “atividades orientadoras de ensino” definidas por Moura (1996) como aquelas que se estruturam de modo a permitir que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma solução-problema. Tais atividades foram planejadas e desenvolvidas com quatro turmas do período matutino da 2ª série do Ensino Médio da “Escola Estadual José Ferreira da Silva” na cidade de Descalvado – SP, que utiliza o material distribuído pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo sendo que a pesquisadora é professora efetiva e atuante nas turmas envolvidas. Elas foram formadas a partir de sete turmas da 1ª série do Ensino Médio devido a um elevado número de retenções. As atividades foram realizadas em grupos de quatro alunos buscando-se colocá-los numa posição de ação e de tomada de decisões visando facilitar o entendimento e o processo de construção do conhecimento. Todo material necessário para o desenvolvimento das atividades – folhas de atividades (Apêndices A, B, C), folhas para respostas, lápis de cor – foi distribuído aos alunos.

A análise das atividades mostrou que alunos que estão na 2ª série do Ensino Médio tiveram pouco contato com o Princípio Multiplicativo durante todo o tempo que estão na escola e mesmo com todas as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais problemas que utilizam o raciocínio combinatório e, consequentemente, o princípio multiplicativo não são vistos e trabalhados durante o Ensino Fundamental.

A introdução da Análise Combinatória através das atividades orientadoras tornou-se essencial para o bom desenvolvimento desse tema ao estimular os alunos a buscar uma maneira própria de resolver os problemas sem a utilização de fórmulas. Outro ponto importante a considerar foi a participação efetiva dos alunos no desenvolvimento das atividades dentro de cada grupo e em colaboração com outros grupos.

A experiência como professora mostrou resultados significativos quanto à melhora do desempenho das turmas em relação ao conteúdo quando comparado com o desenvolvimento deste em anos anteriores.

2 História da Análise Combinatória[1]

Há dois princípios de contagem que são a base da maioria da aritmética e que também podem ser considerados como a "pedra" fundamental da combinatória, o princípio da adição e o princípio da multiplicação. No primeiro, temos que, se se quiser contar um conjunto de objetos, pode-se dividi-lo em duas partes, contá-las separadamente e depois somar os resultados. E no segundo, temos que, se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis de se tomar as duas decisões conjuntamente será a multiplicação entre x e y, ou seja, x.y. A utilização de tais princípios faz parte da experiência diária e exemplos de seu uso têm persistido ao longo do tempo, como o caso de uma Poesia Infantil que data de, aproximadamente, 1730 d.C. e pode ser encontrada em alguns volumes como o Dicionário Oxford de Citações e em contemporâneos livros infantis como o *Ladybird Books*.

Essa poesia parece ter sobrevivido em várias culturas e, segundo Biggs (1979), serve para introduzir o campo de problemas combinatórios:

> "Quando eu estava indo para Santo Ivo,
> Encontrei um homem com sete mulheres,
> Cada mulher tinha sete sacos,
> Cada saco tinha sete gatos,
> Cada gato tinha sete gatinhos,
> Gatinhos, gatos, sacos e mulheres,
> Quantos estavam indo para Santo Ivo?"[2]

Essa adivinhação é usualmente interpretada como uma brincadeira, pois se se considerar que o narrador estava indo para Santo Ivo e os outros estavam em sentido oposto, a

---

[1] Um importante trabalho sobre as origens da Análise Combinatória foi feito por Biggs, intitulado "The roots of Combinatorics" e muitas das informações contidas nesse capítulo tiveram nesse trabalho um dos principais pontos de apoio.

[2] Tradução nossa.

resposta é nenhum. No entanto, se aplicada ao narrador é um. Porém, também se pode considerar que todos estavam no mesmo sentido e em determinado momento eles se encontraram. A especulação sobre a poesia apóia-se na existência de um problema similar encontrado no *Liber abaci*[3], escrito por Fibonacci[4] em 1202, que assim foi traduzido: "Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas tem sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; para cada pão há sete facas; e para cada faca há sete bainhas. Qual é o número total de coisas?".

Cabe observar que os enunciados trazem em comum a adição de diferentes objetos e a repetição do número sete, o que permite estabelecer conexão entre o problema de Fibonacci e a poesia infantil. Mas, o que faz parecer ainda mais interessante é o fato de existir um problema que pode ser 3000 anos mais velho do que o de Fibonacci. Tal problema é encontrado em um dos mais velhos manuscritos matemáticos, o *Papiro Egípcio Rhind*, onde números aparecem ao lado de alguns hieróglifos que podem, aproximadamente, ser traduzidos como segue:

Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Trigo	2401
Hekat[5]	16807
	19607

Cabe observar que o *Papiro Rhind*[6] com 5,5 m de comprimento por 32 cm de largura, escrito por volta de 1650 a.C., segundo Struik (1989, p.49) "continha material ainda mais antigo".

A interpretação desse problema constituiu-se em um enigma por vários anos, até que, em 1881, Leon Rodet, notou sua similaridade com o problema de Fibonacci que aparece em sua obra *Liber abaci* e sugeriu a seguinte interpretação: "Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete medidas de grãos; quantos itens há ao todo?".

---

[3] Líber abaci (Livro do Ábaco ou do Cálculo) que foi escrito por Fibonacci em 1202, baseado na álgebra e na aritmética que ele aprendeu durante suas viagens pelo Mediterrâneo. Publicado em 1228, após revisão, foi fortemente influenciado pelos árabes e apresenta questões úteis aos mercadores como cálculo de juros, conversão monetária e medidas. (EVES, 1997, p.293)

[4] Leonardo de PISA (1175-1250), também conhecido por Fibonacci, nasceu em Pisa, importante centro comercial da Itália. Ele estudou com um professor muçulmano, viajando pelo Egito, Sicília, Síria e Grécia, onde teve contato com os procedimentos matemáticos orientais, métodos algébricos árabes e numerais indo-arábicos. Seu pai era comerciante e tinha negócios no norte da África. (EVES, 1997, p.292)

[5] Hekat é uma unidade de medida de grãos, utilizada no Egito Antigo e que equivale a 4,8 litros.

[6] Nele encontram-se 85 problemas de aritmética e geometria, com as respectivas soluções. O papiro é assim chamado devido a Alexander Henry Rhind (1833-1863), banqueiro e antiquário escocês, que o adquiriu em Luxor, no Nilo, no final do século XIX. Ele é também conhecido como Papiro de Ahmes, devido ao escriba egípcio que o copiou. Está exposto no Museu Britânico, em Londres.

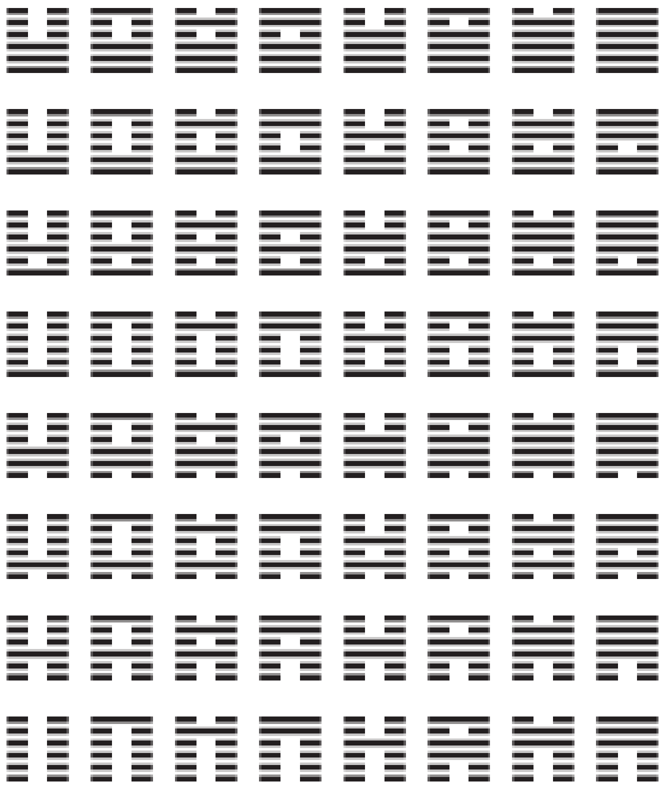
É impossível dizer que essa interpretação seja a correta, mas a existência de problemas tão parecidos, não nos permite descartá-la. Sem contar, também, o fato de que diferentes versões do *Líber abaci* foram extremamente usadas por vários séculos.

Da mesma maneira, pode-se observar que os problemas sugerem a utilização de conteúdos da Análise Combinatória, mas também não há como comprovar.

Biggs (1979) coloca que a primeira ocorrência da combinatória pode estar nos 64 hexagramas do *I Ching*[7] (ou *Livro das Mudanças*). O sistema *I Ching* é baseado em dois símbolos, o Yang (-) e o Yin (- -), que foram combinados da seguinte maneira:

- Trigramas (conjunto de três símbolos):

- Hexagramas (conjunto de seis símbolos):



[7] O I Ching (1182-1135 a.C.) é considerado como um dos trabalhos chineses mais antigos. Conta a lenda que Fu Shi, uma figura mitológica, criou os trigramas e hexagramas ao estudar o mapa do Rio Amarelo encontrado após o grande dilúvio. (EVES, 1997, p.242)

A ordenação desses símbolos consiste em um conjunto de regras para investigar, prever e explicar presságios sobre o tempo e sobre a vida dos homens. Biggs relaciona esses hexagramas com o que hoje é chamado de "combinações com repetição", pois se se quiser enumerar todas as sequências de r símbolos, cada um dos quais pode ser tomado de um conjunto de n símbolos, encontrar-se-á n^r de tais sequências.

Pode-se observar que existem 2^3, ou seja, 8 trigramas e 2^6, ou seja, 64 hexagramas. Os antigos chineses, através da enumeração de seus casos, verificavam as n^r regras para combinação com repetição. No entanto, deve-se considerar que apenas a ordenação desses hexagramas está relacionada com a história da Combinatória e também, que não há registros que evidenciem a Matemática empregada.

Quanto à literatura grega, Biggs cita uma passagem interessante e também misteriosa sobre uma indicação por Plutarco (46-120) sobre o número de proposições compostas de dez proposições simples, que diz:

> Chrysippus diz que o número de proposições compostas que podem ser feitas de somente dez proposições simples excede um milhão. (Hipparchus, estando seguro, refutou esta afirmação mostrando que sobre o lado afirmativo existem 103.049 afirmações compostas e sobre o lado negativo 310.952). Xenocrates afirma que o número de sílabas cujas letras estarão em combinação é 1.002.000.000.000. (MINAR[8], apud BIGGS, 1979, p.113)

Porém, quanto à utilização ou não de conhecimentos sobre princípios combinatórios para a obtenção desses resultados nada se pode afirmar.

Devido a essa ausência de material, este estudo abordará outro povo oriental: os hindus. Parece que, há muito tempo, eles já consideravam questões envolvendo permutações e combinações. Um exemplo disso surge do *tratado médico de Susruta* que data, aproximadamente, do século VI a.C. Nesse tratado foram encontradas discussões sobre as várias espécies de demonstração que podem ser feitas pela combinação básica entre: *doce*, *ácido*, *salino*, *pungente*, *amargo* e *adstringente*. Uma lista sistemática de combinações foi encontrada: 6 tomadas separadamente; 15, de dois em dois; 20, de três em três; 15, de quatro em quatro; 6, de cinco em cinco e 1 tomadas todas juntas. Isso nos leva ao número de combinações sem repetição, simplesmente chamadas de *combinações*.

[8] MINAR, E. L. Plutarch's Moralia. London, 1961.

Varahamihira[9] em seu trabalho *Brihatsamhita* mostra alguns cálculos sobre o número de perfumes que podem ser feitos escolhendo-se 4 ou 5 dados ingredientes e misturando-os em várias proporções. Segundo Biggs, nesse trabalho há uma afirmação clara de que existem 1820 possibilidades de se escolher 4 ingredientes de um total de 16. Tal resultado é apresentado sem a listagem dos casos, no entanto, sem qualquer comentário, o que permite conjecturar que a resposta era obtida pelo uso de um padrão.

Outra contribuição vem da tradução de partes relevantes do livro, entre as quais, uma parte denominada *Lilavati*[10], escrito pelo matemático indiano Bhaskara II em 1150. A seguir, dois exemplos que estão no capítulo IV da obra:

> Em um agradável, espaçoso e elegante palácio, com oito portas, construído por um habilidoso arquiteto para o Príncipe do Reino, contou-me as combinações de aberturas tomadas de uma a uma, duas a duas, três a três etc.
>
> Diga matemático, quantas são as combinações em uma composição, com ingredientes de seis diferentes sabores, doce, amargo, adstringente, ácido, salgado e picante, tomando-os um a um, dois a dois, três a três etc. (COLEBROOKE[11], apud BIGGS, 1979, p.116, tradução nossa)

A resolução de tais problemas aparece da seguinte forma:

1º)	8	28	56	70	56	28	8	1
	1	2	3	4	5	6	7	8

Resposta: As chances de abertura das portas do palácio chegam a 255.

2º)	6	15	20	15	6	1
	1	2	3	4	5	6

Resposta: Aí estão os números das várias preparações com os seis ingredientes.

As respostas desses problemas indicam que Bhaskara II conhecia a fórmula para encontrar o número de combinações. Em outro problema, no capítulo XIII, também se encontra o n! da regra para permutações como em:

> Quantas são as variações da forma do deus Sambu (Siva) obtidas pelas permutações de seus 10 atributos sustentados reciprocamente por suas diversas mãos, a saber: a corda, a tromba do elefante, o tamborim, a serpente, a caveira, o tridente, a armação

[9] VARAHAMIHIRA (505, 587): matemático e astrônomo de Ujjain, apresentou em seus trabalhos a trigonometria hindu antiga e uma tábua de senos, provavelmente oriunda da tábua de cordas de Ptolomeu. (EVES, 1997, p.248)

[10] BHASKARA (1114-1185): escreveu o "Siddhanta Siromani" em 1150. As duas partes mais importantes desse trabalho são "Lilavati" sobre aritmética e "Vijaganita" sobre álgebra, que foram traduzidas para o inglês por H. T. Colebrook em 1817. (EVES, 1997, p. 251)

[11] COLEBROOK, H. T. Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara.London, 1817.

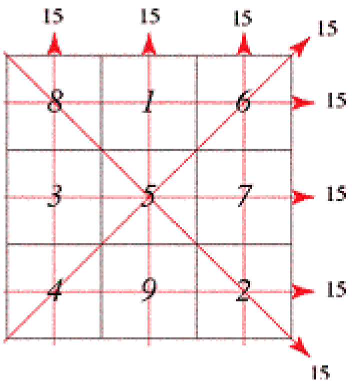
> de cama, a adaga, o arco, a flecha; e as de Hari, pelas permutações do cetro, do disco, da flor de lótus e da trombeta? (EVES, 1997, p.272)

Biggs nos diz que no campo da combinatória, a contribuição da Matemática do oriente foi de suma importância.

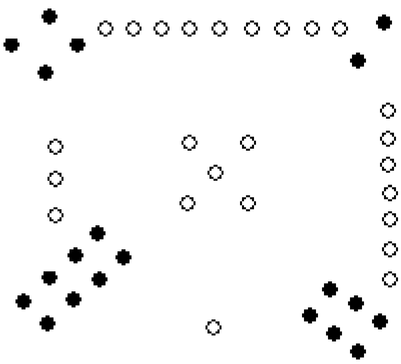
Quadrados mágicos

Para Wieleitner (1932), o problema mais antigo que se relaciona com a teoria dos números e com a Análise Combinatória é o da formação de quadrados mágicos.

O termo *quadrado mágico* (de ordem n), segundo Biggs (1979, p.118), "é um arranjo dos números 1, 2, 3, ... , n² em uma tabela quadrada n x n, de tal modo que cada linha, cada coluna e cada diagonal têm a mesma soma". Um exemplo é o seguinte:



De acordo com os chineses, o 1º exemplo registrado de um quadrado mágico é o diagrama Lo Shu. Esse quadrado está presente no *I Ching* e, posteriormente, foi desenhado como segue:



=

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 1: O quadrado mágico chinês Lo Shu
Fonte: WILSON; LLOYD (1990).

Este diagrama está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang, onde, diz-se, vários ritos eram realizados. A substituição dos símbolos utilizados por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado *Saturno.* Este quadrado causava grande fascinação na maioria das pessoas, pois, nesta época, mesmo a mais simples aritmética era considerada ainda algo espantoso e os quadrados mágicos estavam associados a coisas místicas e misteriosas.

Quanto aos árabes, não se sabe nem como e nem quando a ideia de quadrados mágicos foi transmitida. Segundo Wilson e Lloyd (1990), os árabes tinham grande interesse em quadrados mágicos e suas contribuições foram importantes, tanto que, quadrados maiores que o Lo Shu foram encontrados no 2º livro da Enciclopédia (cerca de 990 d.C.), compilada por estudantes árabes. E também, vários trabalhos sobre quadrados mágicos de ordem 3, 4, 5 e 6 foram escritos, bem como regras para construir quadrados de uma determinada ordem foram desenvolvidas. Ainda, segundo os autores, em um trabalho de Ahmed al-Buni, um matemático árabe que morreu em 1225, há regras para a construção de quadrados de ordem par e ímpar através de uma “simples técnica de fronteira”, porém, acredita-se que ele não descobriu sozinho o método que descreve e, provavelmente, este se originou na Pérsia.

De acordo com Sesiano (2005, p.37) a “ciência dos quadrados mágicos” evoluiu nos séculos IX e X e, atingiu seu apogeu, no Islã, no século XII, por meio de dois textos atribuídos a Abul Wafa Al-Buzjani (940-998) e Ali b.Ahmad al-Antaki (morto em 987). Nesses textos estão apresentados métodos para construção de quadrados de ordem ímpar e par. Tais métodos de construção utilizam-se, principalmente, do quadrado original, ou seja, do quadrado com a mesma ordem que o quadrado a ser construído, contendo os números consecutivos. Porém, mais tarde, seriam deduzidos métodos gerais, nos quais não haveria mais necessidade de utilizar o quadrado natural.

O trabalho chinês mais antigo sobre quadrados mágicos de ordem superior a três para Biggs foi escrito em 1275 por Yang Hui (1238-1298), em seu *Continuação de métodos matemáticos antigos para elucidar propriedades estranhas dos números*. Nesse trabalho Hui apresenta quadrados das ordens de 3 a 10 e um interessante quadrado 9 x 9 construído por 9 quadrados mágicos 3 x 3, uma espécie de “Grande Lo Shu”:

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

Figura 2: O quadrado mágico Grande Lo Shu
Fonte: BIGGS (1979).

Cammann[12] (1960, apud Biggs, 1979) estudou detalhadamente todos esses quadrados e acredita que Hui não os descobriu. Segundo o autor, o próprio Yang Hui em seu trabalho diz que está somente recordando quadrados que tinham sido descobertos anteriormente, além de mostrar certa falta de entendimento dos métodos usados para construí-los. Acredita-se que os chineses já tinham estudos avançados sobre quadrados mágicos em período anterior a 1275, porém, não há nenhuma evidência de que os chineses têm prioridade sobre os árabes na construção de quadrados de ordem superior ao Lo Shu.

Os quadrados mágicos chegaram à Europa no século XIV. Para Biggs, o manuscrito do grego bizantino Manuel Moschopoulos, escrito por volta de 1315, foi o primeiro trabalho conhecido sobre quadrados mágicos em uma linguagem ocidental e é considerado como o elo entre o antigo mundo dos quadrados mágicos e o tardio interesse europeu pelo assunto. Nele, há regras gerais para a construção de quadrados de ordem ímpar e para aqueles cuja ordem é divisível por quatro e também, um quadrado de ordem seis, para o qual não há demonstração do método pelo qual foi obtido. Porém, acredita-se que outras fontes foram responsáveis por tal conhecimento, visto que os europeus parecem ter herdado dos árabes a visão dos quadrados mágicos como objetos de mistério enquanto que Moschopoulos os tratou matematicamente.

Tal consideração é reforçada por Sesiano (2005, p.37), que diz que os quadrados mágicos chegaram à Europa em textos traduzidos do árabe e que tais manuscritos traziam exemplos de quadrados que teriam propriedades nefastas ou benévolas, associadas aos sete planetas então conhecidos. Daí, serem denominados de quadrados mágicos ou

[12] CAMMANN, S. The evolution of magic squares in China. J. Amer. Oriental Soc 80, p. 116-124, 1960.

planetários, sendo que esta última denominação desapareceu mais tarde. Ainda, segundo o autor, sua denominação árabe original – "disposição harmoniosa dos números" – fazia com que tais figuras fossem respeitadas e dignas da atenção dos matemáticos.

O interesse pelo mistério de tais figuras fez com que Henry Cornelius Agrippa (1486–1535), um famoso ocultista, designasse quadrados de ordens 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 para os "planetas" astrológicos: Saturno, Júpiter, Marte, o Sol, Vênus, Mercúrio e a Lua. Para ele, o quadrado de ordem 1 simbolizava a eternidade e o quadrado de ordem 2 não poderia existir, pois simbolizava o mundo material com os quatro elementos – ar, terra, fogo e água – e, devido às imperfeições desses elementos, o quadrado não poderia ter constante certa.

No século XIV um interessante quadrado mágico, de ordem 4, foi utilizado pelo pintor alemão Albrecht Dürer (1471-1528), em sua obra *A Melancolia*, pintada em 1514, que se encontra no canto superior direito da gravura.

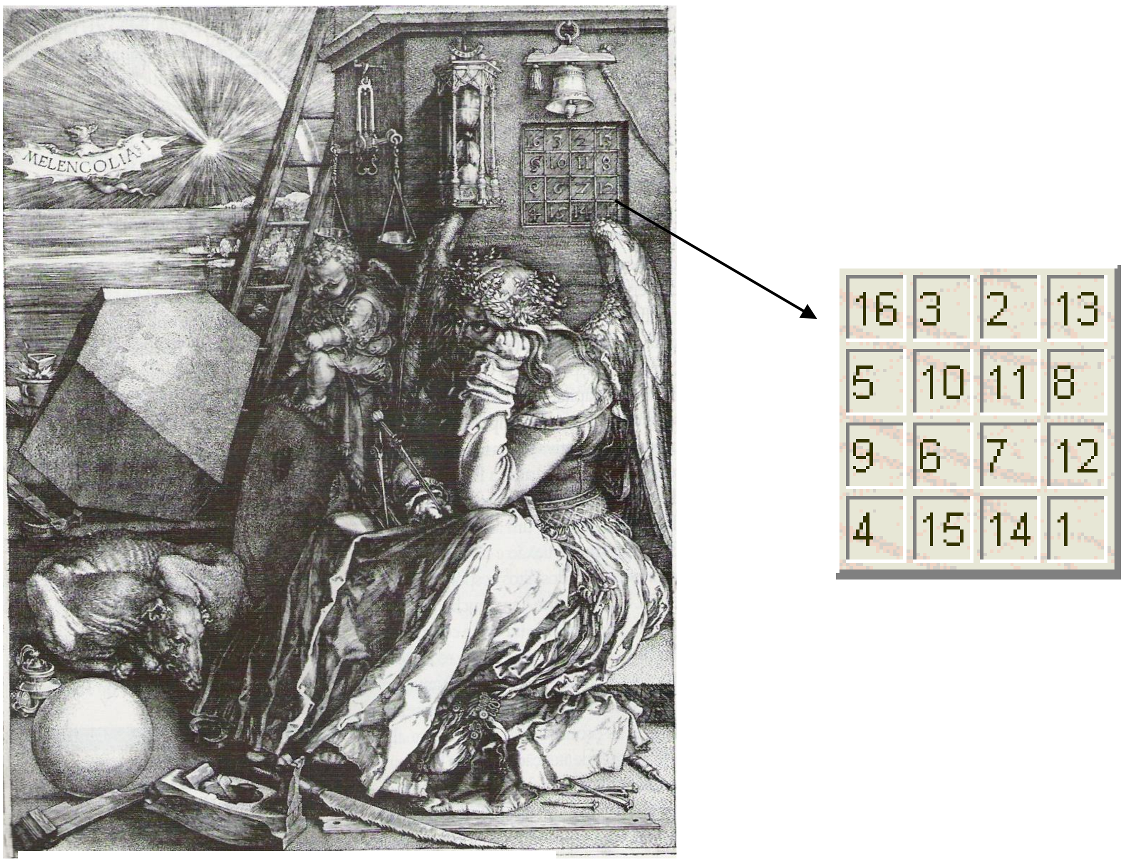


Figura 3: A melancolia
Fonte: O'CONNOR, ROBERTSON (2002)

Dürer parece conhecer bem o sistema de um quadrado mágico. Pode-se perceber a simetria que existe a partir do centro do quadrado; a soma de dois números em vértices diagonalmente opostos é 17 e também 10 + 7, 11 + 6, 2 + 15, 3 + 14, ... sendo que na última fileira, tem-se 1514, ano em que foi pintada a gravura.

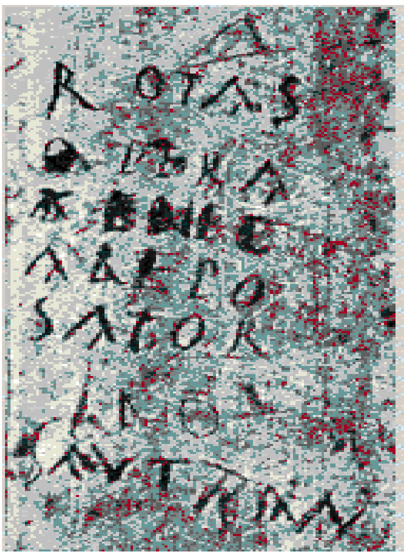
Os quadrados mágicos fornecem exemplos bem antigos de uma importante faceta da Combinatória moderna – fixar condições para o estudo dos arranjos. Neste campo, há outra velha idéia: o quadrado latino.

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

Figura 4: O quadrado latino
Fonte: BIGGS (1979)

Neste quadrado, cada letra surge uma só vez em cada linha e em cada coluna.

Um exemplo interessante de quadrado latino foi encontrado em escavações na cidade de Pompéia, o quadrado mágico *Sator*. Observando-o, percebe-se que o quadrado é absolutamente simétrico – pode ser lido da esquerda para a direita, da direita para a esquerda, de cima para baixo e de baixo para cima.



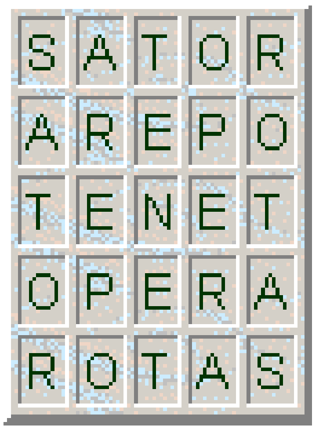


Figura 5: Inscrição em coluna de Pompéia (76 d.C.)
Fonte:TKOTZ (2005).

Quanto ao significado dessas palavras, não há uma tradução clara. É possível que tal frase corresponda à "O semeador (Deus) segura sua obra (criação) em sua mão". Acredita-se que esse quadrado mágico foi adotado por cristãos como um símbolo oculto, pois as letras que o compõem podem ser rearranjadas como uma cruz com as palavras "Pater Noster" (Pai Nosso) escritas nele e alfa e ômega nas bordas significando o começo e o fim de todas as coisas[13].

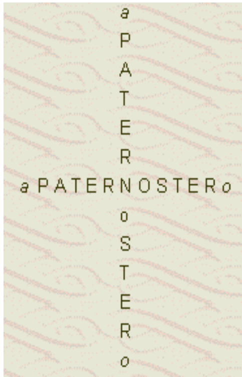
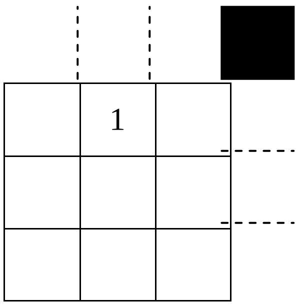


Figura 6: Letras formando a cruz
Fonte: TKOTZ (2005).

Em 1691, De la Loubère, um matemático francês, descreveu um método de construção de quadrados de ordem ímpar, que diz ter aprendido com o povo de Sião (atual Tailândia). A construção de quadrados através desse método é feita da seguinte forma:

- Para construir um quadrado 3 x 3, por exemplo, deve-se desenhar um quadrado e dividi-lo em 9 celas. Depois, contorna-se o quadrado com celas ao longo de suas bordas superior e direita e sombreia-se a do canto direito. O número 1 deve ser colocado na cela central superior do quadrado original.

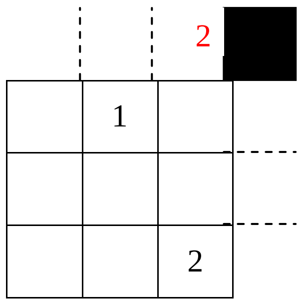


- A regra geral consiste em proceder diagonalmente para cima e para a direita com os inteiros sucessivos. As exceções a essa regra ocorrem quando essa operação nos leva para fora do quadrado original ou a uma cela já ocupada. Na primeira dessas situações, volta-se ao quadrado original deslocando o número que cairia fora do quadrado, ou de cima para baixo ou da direita para a

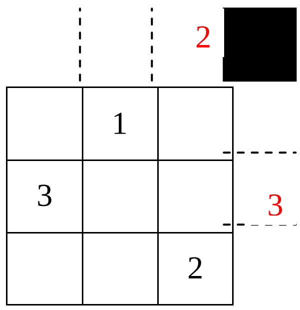
[13] Cf. TKOTZ, 2005.

esquerda, conforme seja o caso, para a última cela em branco da fila correspondente. Na segunda situação, escreve-se o número na cela imediatamente abaixo da última a ter sido preenchida e prossegue-se com a regra geral. Deve-se considerar ocupada a cela sombreada.

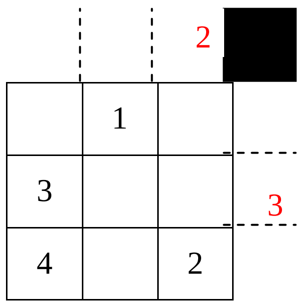
- Na ilustração apresentada, então, a regra geral indica que se deve colocar o 2 diagonalmente acima do 1 na terceira cela do contorno superior do quadrado. Portanto, deve-se deslocar o 2 para a terceira cela da linha de baixo do quadrado original.



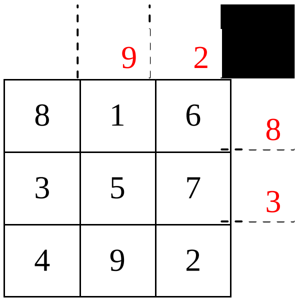
- Prosseguindo com a regra geral quando se chega ao 3 atinge-se a segunda cela do contorno lateral direito do quadrado. Deve-se, então, deslocar o 3 para a segunda cela da primeira coluna do quadrado original.



- A regra geral colocaria o 4 na cela já ocupada pelo 1; portanto, ele deve ser escrito na cela exatamente abaixo da do último número registrado, ou seja, o 3.



- E assim por diante, tem-se então:



Em 1693, seu compatriota, Frenicle, matemático francês, apresentou todos os 880 quadrados de ordem quatro.

Voltando aos quadrados latinos, há um interessante quadrado formado por outros dois justapostos, indicados por letras gregas e romanas, sendo que cada par aparece uma única vez, em cada linha e em cada coluna:

$$\begin{array}{cccc} A\alpha & B\beta & C\gamma & D\delta \\ B\gamma & A\delta & D\alpha & C\beta \\ C\delta & D\gamma & A\beta & B\alpha \\ D\beta & C\alpha & B\delta & A\gamma \end{array}$$

Figura 7: Quadrado latino
Fonte: BIGGS (1979).

Provavelmente a forma mais antiga desse tipo de quadrado apareceu em 1694 no *Ozanam's Récréations Mathématiques* (*Recreações Matemáticas de Ozanam*[14]) sobre a questão de colocar 16 cartões da corte em um quadrado contendo um ás, um rei, uma rainha e um valete sendo cada um deles de copas, de ouro, de paus e de espada.

Há, também, vários tabuleiros antigos que envolvem vagamente pensamentos de Combinatória e alguns problemas como:

- O velho problema do lobo, da cabra e do repolho (cerca de 775 d.C.) que é atribuído a Alcuíno de York[15] e diz:

[14] Jacques OZANAM (1640-1717) foi professor e escritor de textos matemáticos. Ensinou matemática em Paris e escreveu muitos trabalhos sobre geometria, equações e proporções. Seu trabalho mais conhecido "Recreações Matemáticas" foi publicado em 4 volumes com mais de 10 edições publicadas. (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002)

[15] Alcuíno de YORK (735-804): erudito inglês, nasceu em Yorkshire. Escreveu muitos textos matemáticos e uma coleção de problemas em forma de quebra-cabeça que influenciou autores de textos escolares por muitos séculos. (EVES, 1997, p.290)

> "Um certo homem tinha que transportar para o outro lado de um rio, um lobo, uma cabra e um repolho. O único barco que encontrou podia carregar somente duas coisas cada vez. Por essa razão ele procurou um plano que pudesse levar todos para o outro lado totalmente ilesos. Diga a ele, quem é competente, como pode ser possível transportá-los seguramente?"

- O problema de Josephus que está associado ao historiador judeu Josephus Flavius (século I d.C.) que diz:

> "A bordo de um navio estavam 15 turcos e 15 cristãos que se enfrentaram em mares violentos. A metade deles tem que ser sacrificada. Como isso poderia ser arranjado para que todos os cristãos fossem salvos?"

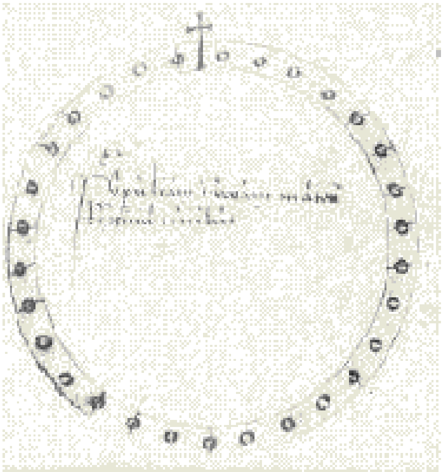


Figura 8: Josephus Flavius e a disposição de cristãos e turcos
Fonte: O'CONNOR, ROBERTSON (2002).

Segundo a lenda havia entre os cristãos um homem experimentado em contas que os dispôs de forma que todos ficassem vivos.

A disposição foi a seguinte: começando por 4 cristãos, depois 5 turcos, mais 2 cristãos, depois 1 turco, mais 3 cristãos, depois 1 turco, mais 1 cristão, depois 2 turcos, mais 2 cristãos, depois 3 turcos, mais 1 cristão, depois 2 turcos, mais 2 cristãos e finalmente mais 1 turco.

Assim, em roda ficaram dispostos todos os 30 e começando a contar primeiro pelos 4 cristãos em diante até chegar ao 9. Este seria lançado ao mar e assim de 9 em 9, todos os outros sucessivamente sem voltar atrás.

O problema é creditado a Josephus Flavius, pois é dito que salvou sua vida por fazer a escolha certa em uma situação similar.

Probabilidades

A combinatória desenvolveu-se, também, como um resultado de poderosas influências da estatística e do cálculo das probabilidades.

Muitos estudos envolvendo o pensamento combinatório e probabilidades aconteceram no reino dos jogos e nos jogos de azar. Segundo Sheynin (1977), não se sabe ao certo a origem desses jogos, mas sim que eles são muito velhos.

No tempo dos antigos egípcios (cerca de 3500 a.C.), o *astragali* (osso que liga a tíbia ao calcanhar) de certos animais era usado para determinar os movimentos nos jogos. Mais tarde, gregos e romanos chegaram ao resultado de que ao arremessar um *astragali*, este pode cair em um dos quatro caminhos e, portanto, com quatro *astragalis*, idênticos supostamente, há 35 diferentes possibilidades. O dado cúbico também era muito utilizado. Eles datam aproximadamente de 1200 a.C., confeccionados a partir de ossos do calcanhar eram utilizados como instrumentos úteis para a casualidade nos jogos.

Na Europa, na Idade Média, algumas ideias elementares de probabilidade ligadas a jogos de dados foram discutidas. Há vários documentos que calculam o número de diferentes modos que dois ou três dados podem cair, mostrando que há 21 modos no caso de dois dados e 56 modos no caso de três dados. Pode-se verificar que esses números serão exatos se não se levar em conta a ordem em que aparecem.

Por exemplo, no caso de 2 dados há:

- 1 modo para tirar um 2 (1 e 1);

- 1 modo para tirar um 3 (1 e 2);

- 2 modos para tirar um 4 (2 e 2 ou 1 e 3);

- 2 modos para tirar um 5 (2 e 3 ou 1 e 4);

- 3 modos para tirar um 6 (1 e 5, 2 e 4 ou 3 e 3);

- 3 modos para tirar um 7 (1 e 6, 2 e 5 ou 3 e 4);

- 3 modos para tirar um 8 (2 e 6, 3 e 5 ou 4 e 4);

- 2 modos para tirar um 9 (3 e 6 ou 4 e 5);

- 2 modos para tirar um 10 (4 e 6 ou 5 e 5);

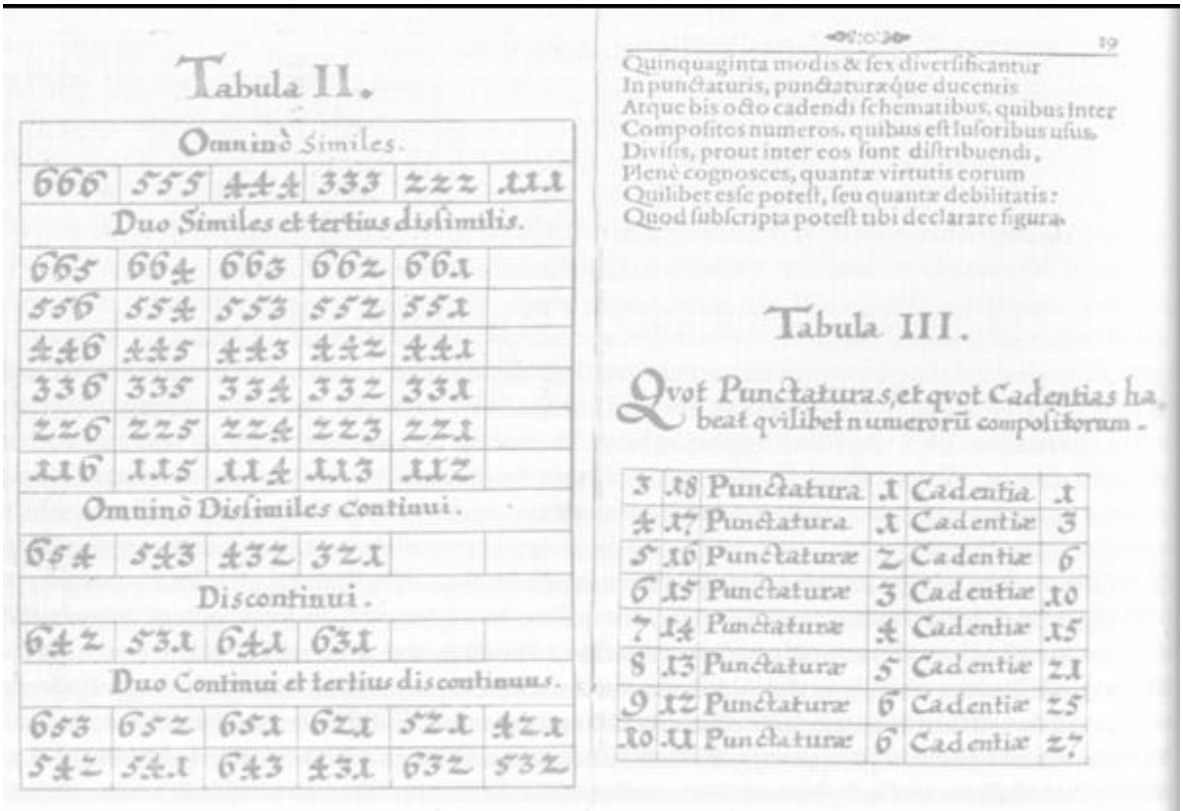
- 1 modo para tirar um 11 (5 e 6);

- 1 modo para tirar um 12 (6 e 6).

Isto totaliza 21 diferentes modos de dois dados caírem. Porém, se for considerada a ordem em que aparecem, tem-se um total de 36 possibilidades.

Outros estudos sistemáticos sobre jogos de dados aparecem com um famoso e anônimo poema latino, “De Vetula”, escrito em algum tempo entre 1200 e 1400 e que lista o número de possibilidades em que três dados podem cair, mostrando um simples cálculo combinatório, que acredita-se ter sido usado pelos hindus há muito tempo.

O poema diz o seguinte: “Se todos os três dados estão iguais há somente um modo para cada número; se dois estão iguais e outro diferente, há três modos; e se todos estão diferentes há seis modos.” (KATZ, 1993, p.409)



Tabula II.

Omninò Similes.					
666	555	444	333	222	111
Duo Similes et tertius dissimilis.					
665	664	663	662	661	
556	554	553	552	551	
446	445	443	442	441	
336	335	334	332	331	
226	225	224	223	221	
116	115	114	113	112	
Omninò Dissimiles continui.					
654	543	432	321		
Discontinui.					
642	531	641	631		
Duo Continui et tertius discontinuus.					
653	652	651	621	521	421
542	541	643	431	632	532

19

Quinquaginta modis & sex diversificantur
In punctaturis, punctaturæque ducentis
Atque bis octo cadendi schematibus, quibus inter
Compositos numeros, quibus est lusoribus usus,
Divisis, prout inter eos sunt distribuendi,
Plenè cognosces, quantæ virtutis eorum
Quilibet esse potest, seu quantæ debilitatis:
Quod subscripta potest tibi declarare figura.

Tabula III.

Quot Punctaturas, et quot Cadentias habeat quilibet numerorũ compositorum.

3	18	Punctatura	1	Cadentia	1
4	17	Punctatura	1	Cadentiæ	3
5	16	Punctaturæ	2	Cadentiæ	6
6	15	Punctaturæ	3	Cadentiæ	10
7	14	Punctaturæ	4	Cadentiæ	15
8	13	Punctaturæ	5	Cadentiæ	21
9	12	Punctaturæ	6	Cadentiæ	25
10	11	Punctaturæ	6	Cadentiæ	27

Figura 9: Manuscrito do poema De Vetula
Fonte: KATZ (1993).

Observando a tabela do lado esquerdo, podemos perceber que no primeiro bloco temos as 6 possibilidades, no lançamento de 3 dados, de todos os números saírem iguais: 6 6 6; 5 5 5; 4 4 4; 3 3 3; 2 2 2 e 1 1 1. Logo abaixo, temos as 30 possibilidades de saírem dois números iguais e um diferente. Porém, não é considerada a ordem em que tais números aparecem. Como o poema diz “se dois estão iguais e outro diferente, há três modos”. Por exemplo, a primeira possibilidade é 6 6 5, que poderia ser também 5 6 6 ou 6 5 6. E então, teríamos 30 x 3, totalizando 90 possibilidades. Finalmente, os três últimos blocos indicam as possibilidades de todos os números saírem diferentes. No primeiro bloco temos três números sequenciais; no segundo bloco, temos três números não sequenciais; e, no terceiro, dois sequenciais e um não. Nesse caso, as 20 possibilidades restantes nos dão um total de 20 x 6 ou 120 possibilidades. No poema vemos “... e se todos estão diferentes há seis modos”, pois, novamente, considerando a ordem dos números, poderíamos escrever, por exemplo, 6 5 4 ou 6 4 5 ou 5 6 4 ou 5 4 6 ou 4 6 5 ou 4 5 6.

Analisando essa situação, tem-se que o número total de modos diferentes de três dados caírem é 1 x 6 + 3 x 30 + 6 x 20, ou seja, 216.

Esses resultados são apresentados, de forma diferente, na tabela do lado direito, traduzida por Biggs da seguinte forma:

Tabela 1: Partições e arremessos possíveis para o lançamento de três dados

Total		Partições	Arremessos
3	18	1	1
4	17	1	3
5	16	2	6
6	15	3	10
7	14	4	15
8	13	5	21
9	12	6	25
10	11	6	27

Fonte: BIGGS (1979).

Percebemos, agora, a utilização do termo *partição*. Consideremos como sendo uma *r-partição* de um número inteiro positivo n, um conjunto de r inteiros positivos cuja soma é n. Por exemplo, há duas 3-partições do número 5: 3 + 1 + 1 e 2 + 2 + 1. Na tabela acima, o termo 3-partições está representado apenas por partições.

Na 1ª coluna, há todas as somas que podem ser obtidas com o lançamento de três dados (3 a 18). Na 2ª, há o número de partições possíveis para cada número da 1ª coluna. E, na última, há o número de arremessos possíveis para cada número.

Fica mais claro no exemplo seguinte: para um total de 7 ou 14, temos 4 partições:

7 → 1 + 1 + 5, 1 + 2 + 4, 1 + 3 + 3 e 2 + 2 + 3;

14 → 4 + 4 + 6, 4 + 5 + 5, 3 + 5 + 6 e 2 + 6 + 6.

O número de arremessos correspondentes é 15. Podemos ver que em 3 das partições de cada número (7 ou 14), há 2 números iguais e um diferente e uma partição em que todos os números são diferentes. Como vimos, quando dois números são iguais e um diferente, existem três modos e quando todos são diferentes, existem seis modos. Logo, tem-se: 3 x 3 + 1 x 6 = 15.

Vemos que a tabela nos dá 56 partições e 108 arremessos dos números de 3 a 18. No caso das partições, em 6 delas os 3 dados estão iguais, em 30 delas têm-se 2 dados iguais e um diferente e nas últimas 20, têm-se os 3 dados diferentes, ou seja, 216 possibilidades distintas. Quanto aos arremessos, basta multiplicarmos 108 por 2, já que tal quantidade diz respeito a dois números de cada vez.

Percebemos que a questão do lançamento simultâneo de vários dados implicou a necessidade de várias técnicas diferentes da matemática, como: os elementos da partição, combinação e probabilidade. Porém, para Biggs, a falta de um conceito claro de probabilidade nesse período, fez com que o estudo dos jogos de azar não fizesse parte da ciência Matemática.

Katz (1993) diz que há estranhas indicações de que os dados utilizados nesses jogos de azar também eram utilizados para prever o futuro. Isso poderia explicar o tardio desenvolvimento da teoria da Probabilidade, que, provavelmente, devido às crenças, de cunho religioso – principalmente do catolicismo, evitavam questionar o incerto, a casualidade, o místico, pois tudo isso era de domínio apenas do Ser Supremo.

No século XVI a ideia de eventos equiprováveis começava a ser entendida permitindo que cálculos de probabilidade fossem feitos. A mais antiga tentativa para se fazer esses cálculos está no *Líber de Ludo Aleae* (*Livro sobre Jogos de Dados*), escrito por volta de 1526 por Girolamo Cardano[16], embora não tenha sido publicado durante sua vida. Segundo Vega-Amaya (2002), as contribuições de Cardano para a teoria da probabilidade foram as seguintes: estabelecer a noção de probabilidade de um evento *A* como sendo a proporção de resultados favoráveis a *A* em relação ao número total de resultados possíveis, relacionar problemas combinatórios e jogos de azar e discutir noções de jogo justo e regularidade estatística.

Entretanto, é sabido que suas ideias sobre probabilidade não foram levadas adiante por outros estudiosos desse tempo e acabaram esquecidas.

O começo da teoria da probabilidade é usualmente marcado pelas correspondências entre Blaise Pascal[17]e Pierre de Fermat[18], por um problema relativo a jogos proposto por um amigo de Pascal, o Chevalier de Méré[19], em 1654. Vega-Amaya (2002) diz que esse problema já havia sido encontrado num manuscrito italiano no ano de 1380 e que provavelmente era de origem árabe. No século XVI, o problema foi estudado por matemáticos italianos, mas as soluções eram pouco satisfatórias e controversas. A solução encontrada por Pascal e Fermat provocou tamanho impacto entre os historiadores que consagraram o ano de 1654 como o ano do nascimento da Teoria da Probabilidade.

O problema proposto por Méré (1997, p.393) dizia o seguinte: "Determine a divisão das apostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecido o marcador no momento da interrupção e o número de pontos necessários para ganhar o jogo". Pascal escreveu a Fermat sobre o problema e eles trocaram várias correspondências para resolvê-lo. O problema foi resolvido corretamente, mas diferentemente por cada um deles[20].

Pascal resolveu o problema utilizando o "triângulo aritmético" que havia obtido em 1653 quando escreveu o *Traité du Triangle Arithmétique*, que só foi publicado em 1665. Nesse triângulo, qualquer elemento é a soma de todos os elementos da linha anterior situados exatamente acima ou à esquerda do elemento desejado.

[16] Girolamo CARDANO (1501-1576): nasceu em Pávia. Começou sua vida profissional como médico e paralelamente, dedicava-se à matemática.Seu livro mais importante foi a "Ars Magna", dedicado exclusivamente à álgebra. Faleceu em Roma. (EVES, 1997, p.306-307)
[17] Blaise PASCAL (1623-1662): nasceu em Auvergne, uma província francesa. Aos 14 anos de idade já participava de reuniões com um grupo de matemáticos franceses; aos 16 anos, escreveu um trabalho sobre secções cônicas; entre 18 e 19 anos, inventou a primeira máquina de calcular. (EVES, 1997, p. 362)
[18] Pierre de FERMAT (1601-1665): matemático francês, nasceu em Beaumont de Lomagne. Foi o fundador da moderna teoria dos números e enunciou a famosa conjectura conhecida como "último teorema de Fermat". (EVES, 1997, p.389-391)
[19] Chevalier de MÉRÉ (1607-1684) foi um jogador apaixonado (viciado), mas, que apesar disso, interessou-se seriamente pela ciência propondo a Pascal o problema de estudar a probabilidade de obter um resultado determinado em diversos jogos. (WUSSING, 1998, p.189)
[20] Cf. EVES, 1997, p.393.

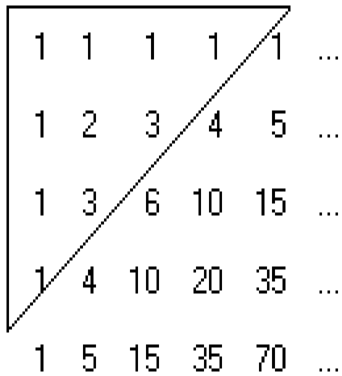


Figura 10: O triângulo aritmético
Fonte: EVES (1997).

O triângulo é obtido desenhando-se a diagonal como na figura acima. Uma das aplicações que Pascal fazia do seu triângulo era a determinação dos coeficientes binomiais. Por exemplo, os números ao longo da quarta diagonal 1,3,3,1 são os coeficientes sucessivos da expansão de $(a + b)^3$.

Segundo Sheynin (1977), a preocupação de Pascal ia além do aspecto puramente matemático dos problemas, ele procurava vincular decisões e eventos incertos. Seu propósito não era definir o conceito matemático de probabilidade, mas sim resolver o problema de dividir as apostas.

Muitas vezes esse triângulo também é chamado de “triângulo de Pascal”, pois por muito tempo Pascal foi considerado seu descobridor no mundo ocidental e também, devido ao desenvolvimento e às aplicações que fez das propriedades do triângulo. Biggs nos diz que a história da descoberta desse triângulo é um tanto quanto obscura. Segundo ele, alguns autores acreditam que o triângulo aritmético era conhecido pelo hindu Pingala por volta de 200 a.C., pois ele discutiu questões sobre métricas poéticas e as possíveis combinações de sílabas longas e curtas, mostrando que com 3 sílabas pode-se obter 8 ritmos diferentes: um com todas as sílabas curtas, três com uma sílaba longa e duas curtas, três com duas sílabas longas e uma curta, e, um com todas as sílabas longas. Mas, não é certo que utilizou o triângulo para a obtenção desses resultados. Outros dizem que o triângulo aritmético é apresentado e sua construção é explicada em um manual de *Aritmética* de 1265, escrito pelo matemático e astrônomo árabe Al-Tusi (1201-1274) que utiliza o triângulo como ferramenta na extração de raízes. A contribuição chinesa para a história do triângulo aritmético é encontrada num trabalho de Chu Shih-Chieh (?1260-?1320) datado de 1303.

Existem também, outras referências sobre o triângulo em textos árabes, escritos em sua maioria por al-Kashi, por volta de 1427, onde os números do triângulo eram usados para encontrar raízes de uma expansão binomial. Posteriormente, o triângulo aritmético é encontrado em trabalhos europeus como no tratado de Apianus (1495-1552) em 1527, na *Arithmetica integra*, de Stifel (1486-1567) em 1544 e no *Curso Matemático*, de Herigonus (1580-1643) em 1634.

Para Biggs, tais relatos mostram que os números do triângulo aritmético eram usados na extração de raízes e sua interpretação combinatória pode ter sido ocultada. Porém, para ele o trabalho de Pascal deixa claro que os números do triângulo aritmético são importantes tanto como coeficientes binomiais ou como números combinatórios.

Em 1657, baseado nas correspondências de Pascal e Fermat, Christian Huygens (1629, 1695) publicou o *De ratiociniis in ludo aleae* (*Sobre o raciocínio em jogos de dados*), o primeiro trabalho impresso sobre probabilidade. A discussão de jogos de azar pelos mais notáveis eruditos fomentava a comunidade científica e direcionava sua atenção. Wussing (1998) diz que assim como Pascal, Huygens não utilizava o termo *probabilidade*, mas sim o valor da *"esperança"*, hoje denominado *esperança matemática*.

Em 1666, Leibniz (1646-1716), matemático alemão, publicou o primeiro tratado sobre combinatória, *De arte combinatoria*. Knoblock (1974) diz que os tópicos relevantes desse trabalho podem ser agrupados assim: as operações básicas da combinatória, funções simétricas em conexão com a teoria das equações, partições, determinantes e teoria das probabilidades. Ainda, segundo o autor, a combinatória de Leibniz não incluía somente a álgebra e a teoria dos números, mas também, probabilidades em jogos de dados, construção de quadrados e cubos mágicos e jogos combinatórios. Segundo Berge (1971), no prefácio desse trabalho, Leibniz definia a combinatória como uma nova disciplina com ramificações na lógica, na história, na metafísica, enfim, em todos os campos da ciência.

Jakob Bernoulli (1654, 1705) escreveu um tratado chamado *Ars conjectandi* (*Arte de conjeturar*) que foi publicado em 1713, oito anos após sua morte. É o mais antigo volume substancial sobre a teoria das probabilidades, pois segundo Eves (1997) o *De ludo aleae* de Huygens foi apenas uma breve introdução, na verdade, ele foi reproduzido como a primeira das quatro partes da *Ars conjectandi*. A segunda parte contém uma teoria geral sobre permutações e combinações e também os "números de Bernoulli", que surgiram como coeficientes numa fórmula de recorrência para as somas das potências dos inteiros. A terceira e a quarta parte dedicavam-se a problemas da teoria das probabilidades.

A partir do século XVII, a Análise Combinatória passa a ser tratada como um ramo da Ciência, uma teoria que começa a se desenvolver, a se organizar e a se sistematizar em vários trabalhos, assim como, suas aplicações na estatística, no cálculo de probabilidades e em vários outros campos das ciências, tanto que, dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665 em Paris) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (Leipzig, 1666) de Leibniz, *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Frénicle de Bessy, Abrége des combinaisons (Paris, 1693) e de J. Bernoulli, *Ars Conjectandi* (Basiléia, 1713) e De Moivre, *Doctrine of chances* (Londres, 1718).

Hoje, a Análise Combinatória é definida como um ramo da Matemática que permite resolver problemas em que, é necessário "escolher", "arrumar" e, principalmente, "contar" os objetos de um conjunto. Tal conteúdo quando explorado em forma de problemas traz certa dificuldade em relação à formulação e à interpretação de seus enunciados, pois exige flexibilidade de pensamento, ou seja, para resolvê-los é necessário parar, concentrar, discutir e pensar.

3 Teoria da Análise Combinatória

Nesse capítulo, pretende-se falar de um modo geral sobre o processo de contagem e consequentemente a teoria da Análise Combinatória. Cabe ressaltar que serão utilizados somente inteiros não negativos já que o intuito deste estudo é tratar de problemas de contagem. As coisas que contamos podem ser “objetos” de qualquer espécie inclusive as várias espécies de números. O objetivo é mostrar como obter resultados gerais a fim de resolver várias classes de problemas, mesmo considerando que muitos problemas podem ser solucionados pela enumeração dos casos ou através da utilização do Princípio Fundamental de Contagem (ou princípio multiplicativo).

O processo de contagem envolve três idéias fundamentais:

- a primeira ideia é a de relação ou correspondência biunívoca. Assim, devemos associar a cada uma das coisas que estão sendo contadas um dos números naturais começando com 1 e tomando-os em ordem;

- a segunda é a que está relacionada com a adição. Dados dois conjuntos finitos que não tem elementos em comum, o número de elementos da sua reunião é a soma de elementos de cada um deles;

- a terceira idéia é relativa à multiplicação. Dados n conjuntos, com n natural, não havendo dois deles com elementos em comum, e cada um dos quais pode ser associado ao conjunto $\{1, 2, ..., m\}$, o número de elementos da reunião dos n conjuntos dados é n x m.

Os problemas de contagem que serão estudados dependem das três idéias fundamentais que foram apresentadas, sendo que, nesse momento, o interesse estará voltado sempre na teoria, nos métodos e nas idéias que eles ilustram.

A Combinatória, que inclui o estudo de permutações, combinações e partições, relaciona-se com a determinação do número de possibilidades lógicas de certo evento ocorrer. Considerando as três idéias fundamentais do processo de contagem segue o Princípio

Fundamental de Contagem ou Princípio Multiplicativo que será utilizado no decorrer desse capítulo.

3.1 Princípio Fundamental de Contagem

Se certo evento pode ocorrer de m maneiras diferentes e se, após este evento, um segundo evento pode ocorrer de n maneiras diferentes e, após este segundo evento, um terceiro pode ocorrer de p maneiras diferentes, ..., então o número de maneiras em que os eventos podem ocorrer na ordem indicada é m x n x p x ...

3.1.1 Permutações e Arranjos

Qualquer agrupamento de um conjunto de n objetos numa dada ordem é denominado uma *permutação* dos objetos tomados todos de uma vez. Todo agrupamento de quaisquer $r \leq n$ destes objetos numa dada ordem é denominado um *r-arranjo* ou um arranjo de n objetos tomados r de cada vez ou tomados r a r.

Considerando o conjunto das letras *a*, *b* e *c*. Então,

(i) *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* e *cba* representam todas as possíveis *permutações simples* do conjunto apresentado. O termo *simples* significa que não há repetição dos objetos em cada ordenamento.

(ii) *ab*, *ac*, *ba*, *bc*, *ca*, *cb* representam os *arranjos simples* de 3 letras tomadas duas a duas.

O número de *permutações simples* de n objetos é indicado por P_n e o número de *arranjos simples* de n objetos tomados r a r pode ser indicado por $A(n, r)$, ${}_{n}A_{r}$, $A_{n,r}$ ou A_{r}^{n}. Será adotado: $A(n, r)$.

Para deduzirmos as fórmulas gerais de $A(n, r)$ e P_n, será analisado um caso particular.

Exemplo: Existem quantos arranjos de 5 objetos, a saber: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, tomados 3 a 3? Em outras palavras, o que se quer é determinar o número de “palavras de três letras” usando as cinco letras dadas sem repetição.

A solução do problema consiste em determinar as possibilidades das posições que as letras podem ocupar. Será feito um diagrama que represente a palavra de três letras, arbitrária, através dos três quadros seguintes:

Escolha da 1ª letra	Escolha da 2ª letra	Escolha da 3ª letra

Pode-se escolher a primeira letra de 5 maneiras diferentes; em seguida, a segunda letra pode ser escolhida de 4 maneiras diferentes e, por último, a terceira letra pode ser escolhida de 3 maneiras diferentes. Cada um dos números será escrito no quadro correspondente, como segue:

5	4	3

Portanto, pelo Princípio Fundamental de Contagem, existem 5 x 4 x 3 = 60 possibilidades de palavras com 3 letras, sem repetição, que podem ser formadas com as 5 letras apresentadas, ou seja, há 60 arranjos de 5 objetos tomados 3 a 3.

Seguindo o procedimento do exemplo apresentado pode-se deduzir a fórmula do número de *arranjos* de n objetos tomados r a r, ou seja, o número de *r-arranjos* de n objetos, $A(n, r)$.

Escolha do 1º elemento	Escolha do 2º elemento	Escolha do 3º elemento	...	Escolha do (r –1)-ésimo elemento	Escolha do r-ésimo elemento
n possibilidades	$n - 1$ possibilidades	$n - 2$ possibilidades	...	$n - (r - 1 - 1)$ possibilidades	$n - (r - 1)$ possibilidades

Assim, o primeiro elemento de um *r-arranjo* de n objetos pode ser escolhido de n maneiras diferentes; depois, o segundo elemento do arranjo pode ser escolhido de $n - 1$ maneiras; depois, o terceiro elemento do arranjo pode ser escolhido de $n - 2$ maneiras.

Continuando essa sequência, o *r-ésimo* (último) elemento do *arranjo* pode ser escolhido de $n - (r - 1) = n - r + 1$ maneiras diferentes. Logo, pelo Princípio Fundamental de Contagem, tem-se:

$$A(n, r) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2) \ldots (n-r+1)$$

Convém observar que há uma notação muito útil para representar esses produtos que ocorrem muito frequentemente em alguns problemas, chamada **fatorial**. Como exemplos de fatorial: o fatorial do número 4 é 4! = 4·3·2·1, o fatorial de 6 é 6! = 6·5·4·3·2·1. No caso geral, o fatorial de um número inteiro e positivo n é definido $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$ e, por convenção 0! = 1.

Usando a notação de fatorial, a fórmula para $A(n, r)$ pode ser expressa condensadamente por:

$$A(n, r) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2) \ldots (n-r+1)$$

$$A(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-r+1)\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

No caso particular de $r = n$, temos:

$$A(n, n) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2) \ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Em outras palavras, existem $n!$ permutações de n objetos tomados n a n.

3.1.2 Permutações com repetição

Muitas vezes ocorre de se querer encontrar o número de permutações de objetos, alguns dos quais são iguais entre si. Será mostrado o caso geral por meio de um exemplo particular.

Exemplo: Supõe-se que se queira formar todas as possíveis palavras de 5 letras, usando as letras da palavra URUTU. Sabe-se que existem 5! = 120 permutações dos objetos U_1, R, U_2, T, U_3, quando os três U são considerados distintos. Deve-se observar que as seis permutações seguintes, $U_1RU_2TU_3$, $U_1RU_3TU_2$, $U_2RU_1TU_3$, $U_2RU_3TU_1$, $U_3RU_1TU_2$, $U_3RU_2TU_1$, produzem a mesma palavra quando os índices são removidos. De fato, existem 3! = 6 modos diferentes de colocar os três U em quaisquer três posições em que podem aparecer. Assim, podemos dizer que existem $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ diferentes palavras de 5 letras que podem ser formadas usando as letras da palavra URUTU.

De modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais n_1 são iguais entre si, n_2 outros são iguais entre si, e assim sucessivamente, até que n_r outros são iguais entre si, é representado e definido por

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}.$$

3.1.3 Combinações

Deve-se considerar uma coleção de n objetos. Uma *combinação simples* desses n objetos, tomados r a r, é uma seleção qualquer de r dos objetos em que a ordem não interessa. Tem-se que uma *r-combinação* de um conjunto de n objetos é qualquer subconjunto com r elementos.

Exemplo: As combinações das letras *a*, *b*, *c*, *d* tomadas três a três, são: *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*. Observa-se que as combinações *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* são iguais, ou seja, cada uma delas representa o mesmo conjunto {*a*, *b*, *c*}.

O número de *combinações simples* de n objetos, tomados r a r, pode ser indicado por $C(n, r)$, ${}_nC_r$, $C_{n,r}$ ou C_r^n. Será adotado $C(n, r)$. Novamente, será considerado um exemplo particular para dar a fórmula geral para $C(n, r)$.

Voltando ao exemplo anterior, quantas *combinações simples* podem ser formadas com quatro objetos, *a*, *b*, *c* e *d*, tomados 3 a 3?

Cada combinação tem três elementos e, portanto, determina 3! = 6 permutações (3-arranjos) dos objetos na combinação. O quadro abaixo apresenta todas as permutações:

Combinações	Permutações (3-arranjos)
abc	*abc,acb,bac,bca,cab,cba*
abd	*abd, adb,bad,bda,dab,dba*
acd	*acd, adc, cad,cda,dac,dca*
bcd	*bcd,bdc,cbd,cdb,dbc,dcb*

Pode-se verificar que o número de *arranjos* é igual ao número de *combinações* multiplicado por 3!, ou seja,

$$A(4,3) = C(4,3) \cdot 3! \text{ ou } C(4,3) = \frac{A(4,3)}{3!}$$

Mas, $A(4, 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ e $3! = 6$, então $C(4, 3) = 4$ como vimos no exemplo anterior.

Como cada combinação de n objetos tomados r a r determina r! permutações (r-arranjos) dos objetos combinados, tem-se que:

$$A(n,r) = C(n,r) \cdot r!$$

Então:

$$C(n,r) = \frac{A(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

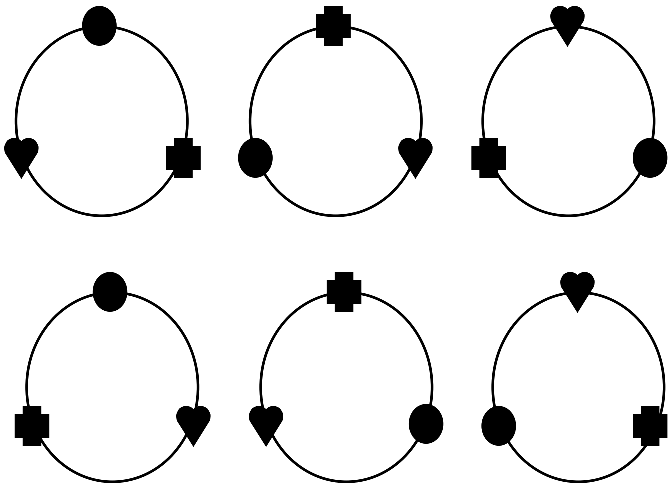
E, assim, fica determinada a fórmula geral do número de combinações de *n* objetos tomados *r* a *r*.

3.1.4 Permutações circulares

Uma *permutação circular* de *n* objetos distintos é toda arrumação desses objetos, em torno de um círculo, de modo que os objetos estejam dispostos em exatamente *n* lugares, igualmente espaçados. O número total de *permutações circulares* de *n* objetos distintos será representado por $(PC)_n$.

Duas *permutações circulares* são ditas idênticas quando a posição relativa de cada objeto em relação aos demais é a mesma em ambas as permutações, ou seja, se uma das permutações sofrer uma rotação de um ângulo convenientemente determinado e seu sentido fizer com que ambas coincidam, diz-se que essas permutações são equivalentes.

Iniciando-se por um caso particular: De quantos modos podem dispor-se 3 objetos distintos { ● , ♥ , ✚ } em 3 lugares de um círculo?



As três primeiras disposições coincidem entre si por rotação e o mesmo ocorre com as três últimas. Logo, $(PC)_3 = 2$.

É fácil perceber que nas *permutações simples* importam os lugares que os objetos ocupam enquanto que nas *permutações circulares* o que importa é a posição relativa dos objetos entre si.

Portanto, se forem dispostos *n* objetos distintos para serem colocados em torno de um círculo em exatamente *n* lugares, igualmente espaçados, tem-se o seguinte quadro:

Posição do 1º objeto	Posição do 2º objeto	Posição do 3º objeto	Posição do 4º objeto	...	Posição do *n*-ésimo objeto
1 modo	1 modo	2 modos	3 modos	...	$n - 1$ modos

Há apenas 1 (um) modo de colocar o 1º objeto no círculo, pois em qualquer em que for colocado, ele será o único objeto no círculo; há 1 modo de colocar o 2º objeto no círculo, imediatamente após o primeiro; há 2 modos de colocar o 3º objeto no círculo, imediatamente após o 1º ou imediatamente após o 2º; há 3 modos de colocar o 4º objeto, imediatamente após o 1º ou imediatamente após o 2º ou imediatamente após o 3º; sucessivamente há $(n - 1)$ modos de colocar o *n-ésimo* objeto. Logo, pelo Princípio Fundamental de Contagem, tem-se que:

$$(PC)_n = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) = (n - 1)!$$

3.1.5 Combinações Completas ou Combinações com Repetição

Uma *combinação completa* é o número de subconjuntos de dimensão k que se podem formar de um conjunto de dimensão n, com possibilidade de existirem elementos repetidos, ou seja, é o número de modos de escolher k objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados. A representação de uma combinação completa será dada por CR_n^k .

Inicialmente será dado um exemplo particular que nos induzirá ao caso geral:

De quantos modos se pode montar uma refeição composta de 4 porções de comida se há 7 opções à disposição?

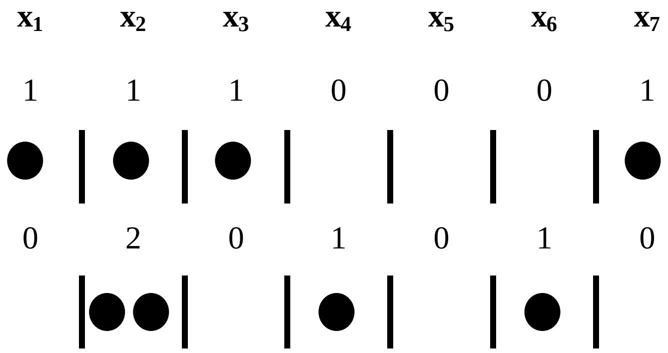
Pode-se pensar que esse problema pode ser resolvido por meio de uma simples combinação de 7 opções tomadas 4 a 4, mas essa resposta estaria correta se se quisesse encontrar o número de maneiras de montar uma refeição composta de 4 diferentes porções de comida dentre 7 que são oferecidas. É preciso refletir sobre isso e questionar: pode-se colocar todas as porções de um só tipo? E colocar 2 porções de um e 2 porções de outro? A resposta a cada uma dessas perguntas é sim. Há uma *combinação completa*, CR_7^4 , pois pode-se escolher a mesma porção mais de uma vez.

Também se pode interpretar esse problema de outro modo. Para montar a refeição, deve-se escolher valores para as variáveis x_1, x_2, x_3, ..., x_7, onde x_1 é a quantidade de porções que vamos escolher da 1ª opção, x_2 é a quantidade de porções que vamos escolher da 2ª opção e, assim por diante, sendo x_7 a quantidade de porções que vamos escolher da 7ª opção. É claro que x_1, x_2, x_3, ..., x_7 devem ser inteiros, não negativos e,

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_7 = 4.$$

Para determinar de quantos modos se pode montar uma refeição composta por 4 porções de comida dentre 7 opções oferecidas deve-se encontrar o número de soluções da equação apresentada, ou seja, calcular CR_7^4 .

Para mostrar algumas soluções da equação, pode-se recorrer a um truque, uma representação no esquema bola-traço. Nesse esquema cada bola representa uma unidade no valor da incógnita e cada traço é usado para separar duas incógnitas. Para formar uma representação, deve-se arrumar em fila 4 bolas, pois em cada solução o total de unidades nas incógnitas é 4, e 6 traços que são necessários para separar 7 incógnitas.



Nota-se que há uma correspondência perfeita entre as possíveis distribuições e as listas formadas por 4 bolas e 6 traços. Mas, o número de modos de fazer isso é escolher 4 das 10 posições para colocar as bolas, o que pode ser feito de $C_{10}^4 = 210$ maneiras.

Logo: $CR_7^4 = C_{10}^4 = 210$.

Assim, pode-se aplicar a solução para o problema geral de contar o número de maneiras de distribuir *k* objetos distintos ou não entre *n* objetos distintos dados, ou seja, de calcular o número de soluções inteiras e não-negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k$. Ou ainda, de calcular o número CR_n^k de combinações completas de *n* elementos tomados *k* a *k*. Há *k* bolas que devem ser separadas por $n – 1$ tracinhos. Então, é preciso escolher *k* das $n + k – 1$ posições para as bolas. Logo: $CR_n^k = \mathrm{C}_{n+k-1}^{k}$.

4 Atividades de ensino

O objetivo desse capítulo é apresentar as atividades de Análise Combinatória que foram desenvolvidas com os alunos do período matutino da 2ª série do Ensino Médio da Escola Estadual José Ferreira da Silva, única escola pública da cidade de Descalvado, interior do Estado de São Paulo. Cada uma das quatro turmas possui cerca de 40 alunos que em sua grande maioria são apenas estudantes. As atividades foram planejadas pela professora das turmas que está realizando essa pesquisa juntamente com seu orientador. Acredita-se que toda atividade educativa deve ser planejada para que o principal objeto que é o ensino possa ser cada vez mais aprimorado. A organização de processos de ensino mais eficientes do que outros depende da ideologia do professor, do conhecimento que tem sobre seus alunos, porém mesmo tomando atitudes próprias em relação a "como fazer", sua prática é regida por normas coletivas. A equipe gestora da escola autorizou a realização da pesquisa sendo que o tema tratado – Análise Combinatória – aconteceu no 3º bimestre e as atividades foram aplicadas no mês de agosto sem prejuízo algum em relação ao plano de ensino dessa instituição. Os alunos autorizaram a realização da pesquisa bem como a filmagem de todo seu desenvolvimento que se constituiu uma forma bastante prática de não se perder detalhes para a realização da análise das atividades.

4.1 Atividades orientadoras de ensino

As atividades foram elaboradas de forma que o conteúdo de Análise Combinatória fosse trabalhado de uma maneira diferenciada do tradicional, buscando despertar o interesse e a curiosidade dos alunos. Consideramos tais atividades como sendo atividades orientadoras de ensino.

O conceito de *atividade orientadora de ensino* proposto por Moura (2001) é assim definido pelo seu caráter intencional, como uma unidade formadora não só do aluno, mas também do educador, pois entende a educação escolar como uma situação-problema cuja solução deve ser partilhada pelos diferentes saberes de ambas as partes. Esse autor considera como “[...] atividade orientadora de ensino aquela que se estrutura de modo a permitir que os sujeitos interajam, mediados por um conteúdo negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação-problema.” (MOURA, 2001, p.155).

Ainda, segundo Moura (2001), uma atividade orientadora de ensino tem como necessidade fundamental “ensinar”. Além disso, há ações que determinam o modo de colocar os conhecimentos no espaço educativo, ou seja, na sala de aula e os recursos metodológicos adequados a cada objetivo e ação. O professor deve ter clareza dos objetivos que pretende alcançar, os conteúdos necessários para isso e uma concepção clara de como se dá a aprendizagem.

As atividades de Análise Combinatória tinham por intenção abordar o assunto sem o abusivo uso de fórmulas como tradicionalmente acontece, para que o conteúdo passasse a ser assumido como algo dinâmico que pudesse ser construído, transformado para atender os objetivos, as concepções. Buscou-se, através dessas atividades, uma prática educativa na qual o professor tem um papel mediador entre o objeto de conhecimento e os sujeitos da aprendizagem, não mais como um simples expositor e os alunos como meros receptores.

A atividade do professor é assim entendida como orientadora, pois diante das dificuldades dos alunos sua intervenção é fundamental para o desenvolvimento das atividades à medida que cria condições para que eles continuem buscando o objeto de conhecimento.

A avaliação acontece em vários momentos, ao longo da atividade, num movimento constante de reflexão tanto para quem ensina como para quem aprende. Uma avaliação formal também foi realizada por fazer parte do processo de ensino-aprendizagem da escola.

4.2 Apresentação das atividades

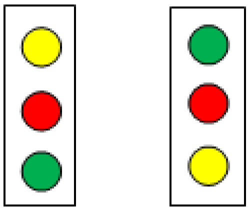
4.2.1 Descrição da atividade 1

A primeira atividade tem como objetivo explorar o semáforo como uma estratégia para ensinar elementos básicos de Análise Combinatória, nesse caso os arranjos simples e os arranjos com repetição.

ATIVIDADE 1: OS SINAIS DE TRÂNSITO E AS CORES

Um **Semáforo** é um aparelho de sinalização urbana, rodoviária ou ferroviária que orienta o tráfego por meio de luzes. A escolha da sequência de cores: vermelho no topo, amarelo no meio e verde embaixo é uma forma de não confundir o motorista e segue convenções internacionais. Sabemos que vermelho significa 'PARE', amarelo 'AGUARDE' e verde 'SIGA'.

Essa atividade tem por objetivo construir outros tipos de semáforos que não se preocupam com as facilidades visuais dos motoristas. Vamos considerar que a ordem em que as cores aparece é importante, ou seja, os sinais abaixo são diferentes:



1) Quantos e quais são os diferentes sinais de trânsito que podemos construir com três cores, respeitando a ordem e sem repeti-las?

2) Agora responda, quantos semáforos poderíamos formar se pudéssemos repetir as cores? Você conseguiria construí-los?

Figura11: Atividade 1 – Itens 1 e 2 – Exploração dos arranjos simples e com repetição
Fonte: Elaborada pelo autor

Desenvolvimento da atividade: A maioria dos alunos apresentou a resolução dos itens 1) e 2) através da representação de todas as possibilidades, montando esquemas gráficos ou simbólicos.

Foram destacadas algumas discussões (falas) dos alunos ao iniciar as atividades.

Item 1)

Aluno A: *" 3 x 3 = 9, são três cores trocando de lugar ..."*

Aluno B: *"A cor verde já ficou em último, no meio e no começo... vou fazer o mesmo com as outras... Ah! Acho que são 3."*

Aluno C: *" 3 + 3 = 6. São 6."*

Aluno D: *" 3 x 3, é 9, não é professora? Três cores e três espaços."*

Item 2)

Aluno E: *"Apaguei tudo... Me perdi, não dá para fazer de qualquer jeito. Tem que montar uma regra..."*

Aluno F: *"Não tem fórmula para resolver isso? Matemática sempre tem fórmula..."*.

Algumas soluções apresentadas pelos grupos de alunos são:

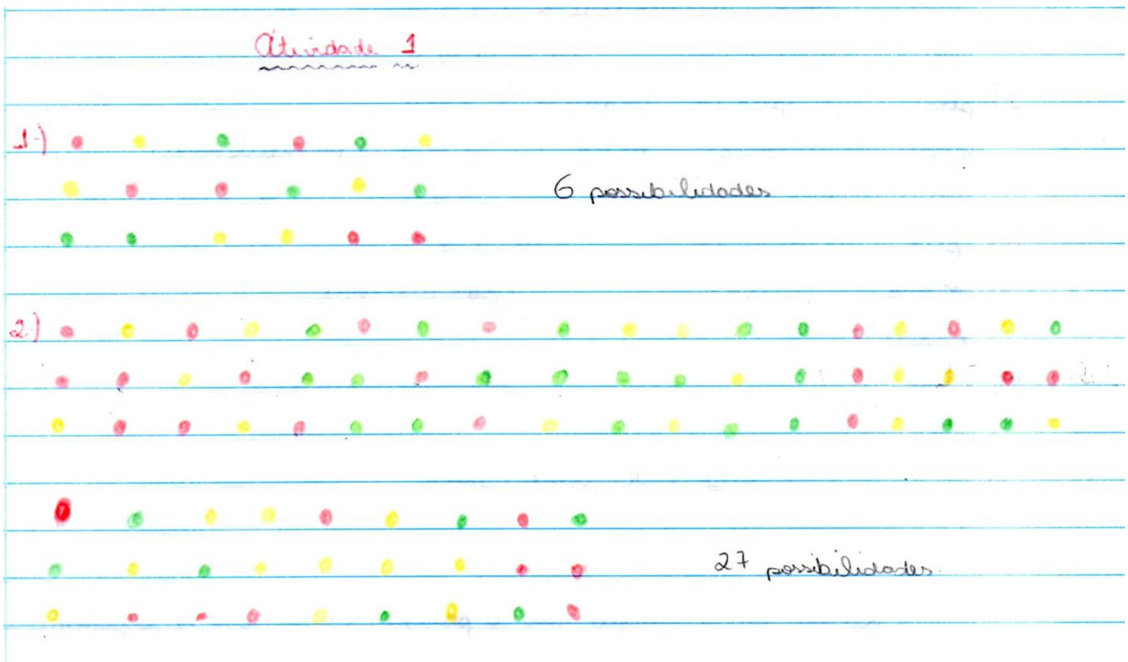


Figura 12: Atividade 1 – Itens 1 e 2 – Resolução apresentada por um grupo de alunos

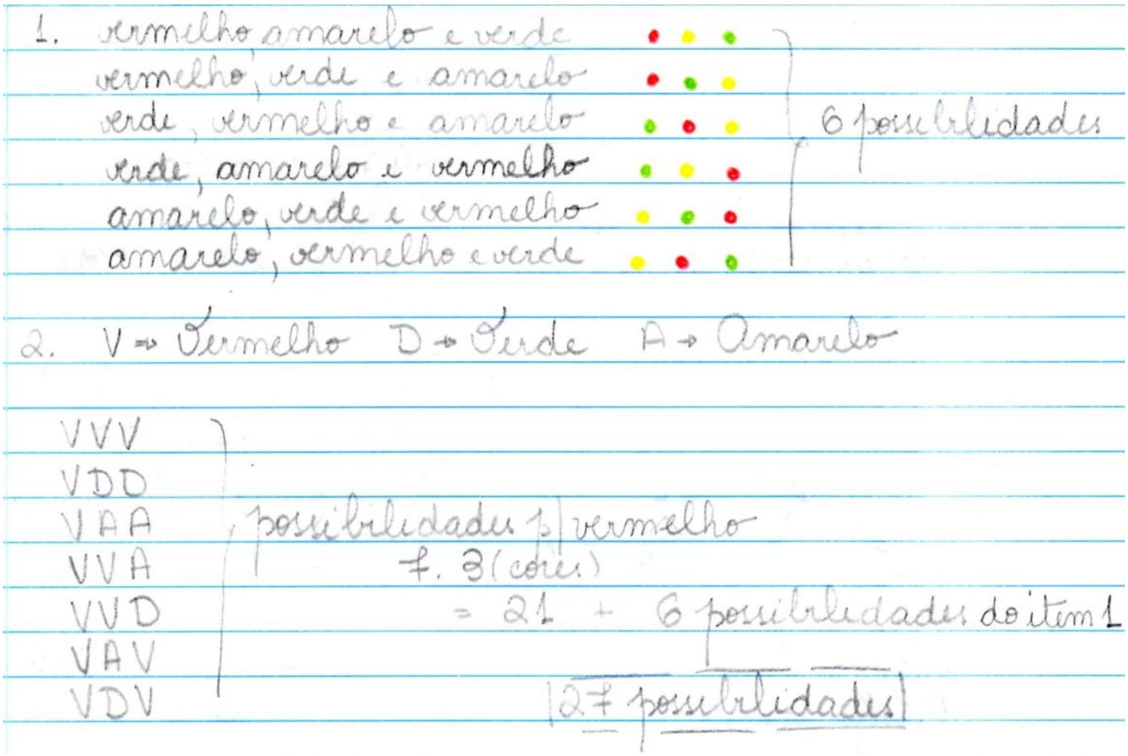


Figura 13: Atividade 1 – Itens 1 e 2 – Resolução apresentada por outro grupo de alunos

À medida que estavam resolvendo as atividades, a professora tentou incentivá-los a encontrar a "quantidade" de diferentes sinais de trânsito que poderiam construir. Percebeu-se que o "princípio multiplicativo" não está presente para a maioria dos alunos e acredita-se que isso aconteça pelo fato de que não tiveram contato com problemas semelhantes durante o Ensino Fundamental.

Percebeu-se, também, que alguns deles fizeram tentativas de apresentar o cálculo já que sabiam o resultado. É interessante mostrarmos como um dos grupos representou seu resultado, porém seus integrantes não conseguiram explicar o raciocínio quando foram questionados:

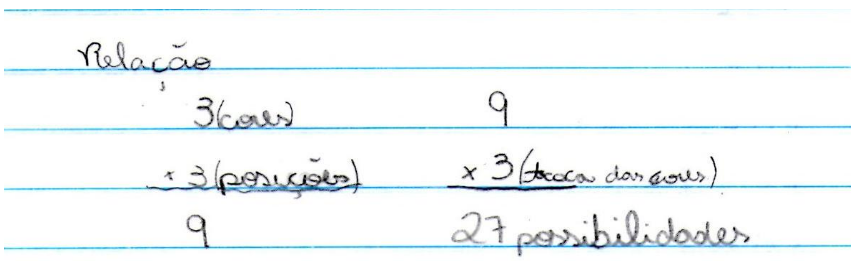


Figura 14: Atividade 1 – Item 2 – Resolução apresentada a partir do resultado final

Alguns resultados de outros grupos que claramente entenderam e utilizaram o princípio multiplicativo estão apresentados a seguir.

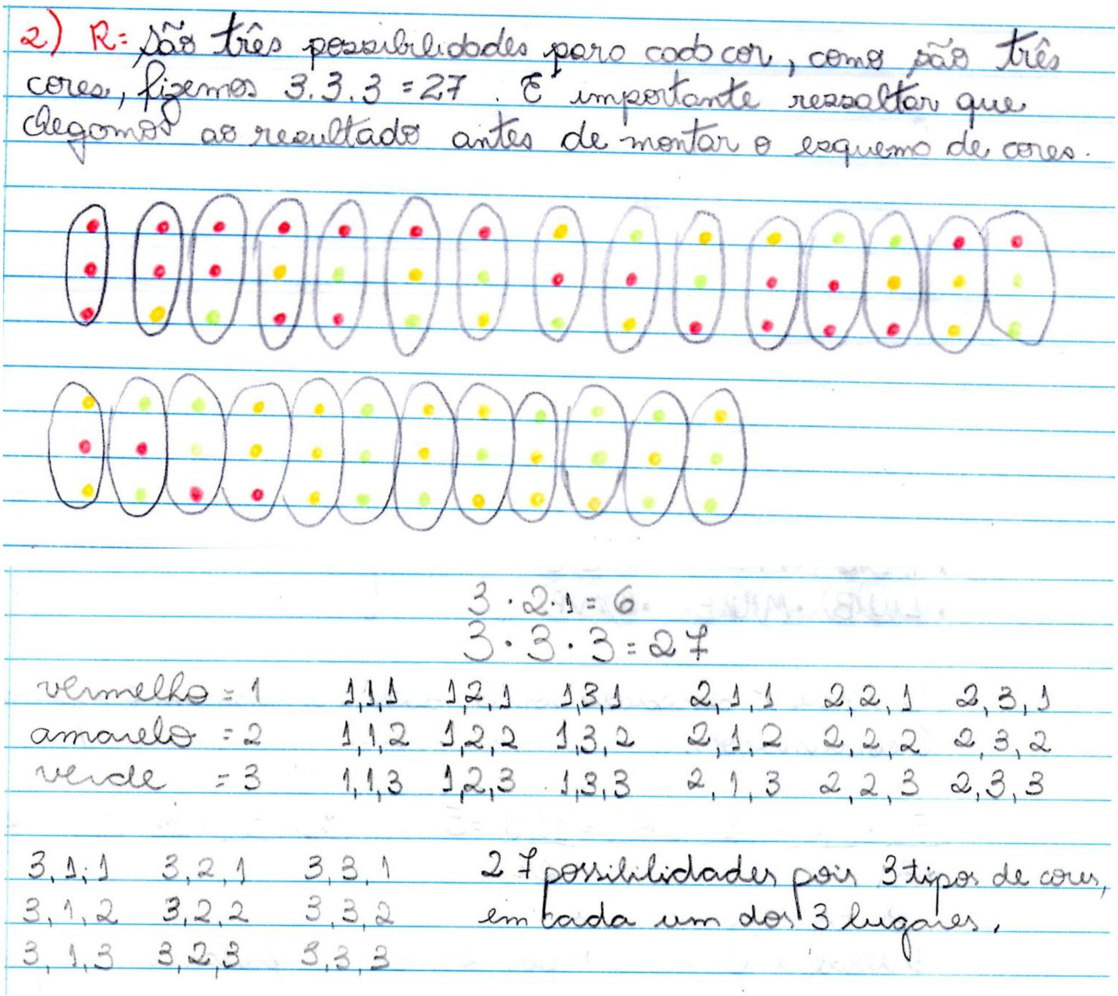


Figura 15: Atividade 1 – Item 2 – Outro exemplo de resolução

Ainda na atividade 1, foi colocada uma 3ª questão com o intuito de fazê-los perceber a necessidade de calcular a quantidade de diferentes placas de carros que podem ser confeccionadas com todas as letras do alfabeto e todos os algarismos do nosso sistema de numeração, pois representá-las, como fizeram nas questões anteriores, seria muito trabalhoso.

3) Vamos então pensar...quantas diferentes placas de carro podem ser confeccionadas (considerando uma seqüência de 3 letras e 4 números)? Se todo brasileiro possuísse um carro, as placas seriam suficientes?

Figura 16: Atividade 1 – Item 3 – Exploração do princípio fundamental de contagem
Fonte: Elaborada pelo autor

Algumas respostas obtidas foram:

- ✓ 3 x 26 + 4 x 10 = 118 placas (é pouco!!!)
- ✓ (3 x 26) x (4 x 10) = 3120 placas
- ✓ (26 + 26 + 26) x 10000 = 780000 placas
- ✓ 78 x 9999 = 779922 placas

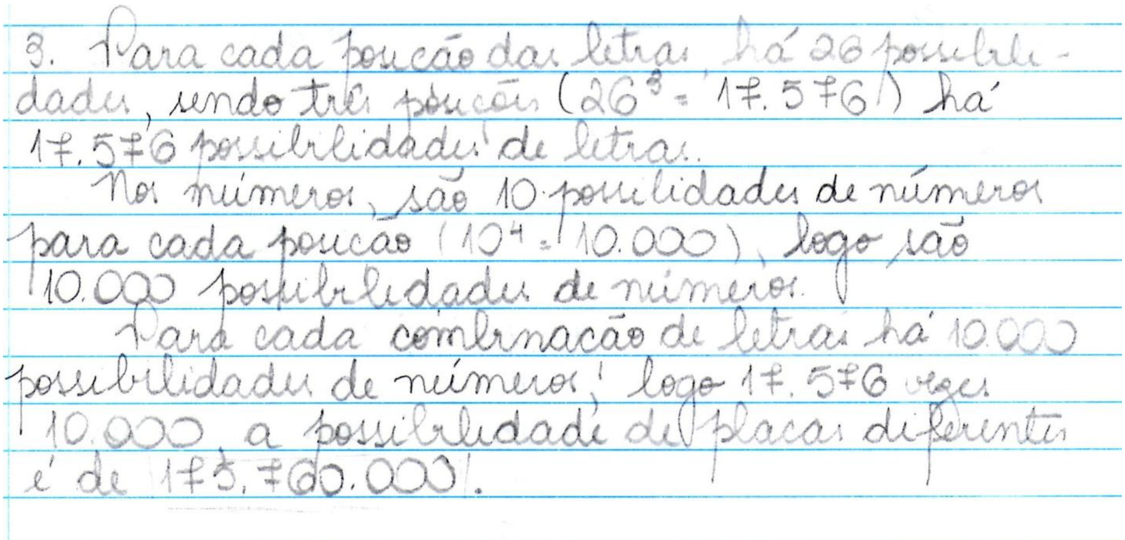

3. Para cada poução das letras, há 26 possibilidades, sendo três pouções (26^3 = 17.576) há 17.576 possibilidades de letras.
Nos números, são 10 possibilidades de números para cada poução (10^4 = 10.000), logo são 10.000 possibilidades de números.
Para cada combinação de letras há 10.000 possibilidades de números, logo 17.576 vezes 10.000 a possibilidade de placas diferentes é de 175.760.000.

Figura 17: Atividade 1 – Item 3 – Exemplo de resolução apresentada por um grupo de alunos

Cabe relatar que a maioria dos alunos não sabia a população atual do Brasil, muitos diziam que “eram milhões”, mas não sabiam precisar.

4.2.2 Descrição da atividade 2

Na atividade 2 exploramos as combinações simples e as combinações com repetições. O objetivo dessa atividade é verificar se os alunos conseguem perceber as diferenças em relação à atividade anterior, ou seja, que a troca dos elementos de um conjunto não gera uma nova configuração e quais os mecanismos de resolução que serão apresentados.

ATIVIDADE 2: SALADA DE FRUTAS

Essa atividade consiste em pensarmos nas diferentes formas de fazermos uma deliciosa salada de frutas utilizando maçãs, peras e laranjas.

1) De quantas maneiras diferentes você pode fazer uma salada de frutas utilizando duas dessas frutas? Mostre as possibilidades!

2) E se fossem três? Ou seja, se você utilizasse todas as frutas disponíveis! De quantas maneiras diferentes você poderia montar essa salada?

Figura18: Atividade 2 – Itens 1 e 2 – Exploração das combinações simples
Fonte: Elaborada pelo autor

Desenvolvimento da atividade: Muitos alunos chegaram à resposta correta e sua representação, porém perguntas como: “são 6 possibilidades?”, “misturar maçã e pera é o mesmo que pera e maçã?”, também foram freqüentes. Em momentos como esses, em que tais perguntas eram feitas, muitas vezes a professora não precisou intervir, pois acontecia um diálogo entre os próprios grupos:

Grupo A: *“Não importa a ordem que as frutas são adicionadas, é a mesma salada!”*

Grupo B: *“Se cada fruta junta com as outras duas dá 6, aí divide por 2, então é 3.”*

Grupo C: *“Mesmo trocando a ordem (das frutas) todas são iguais!”*

Algumas respostas:

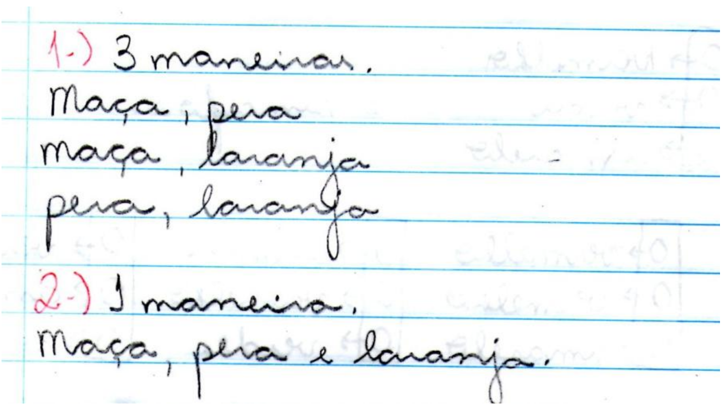


Figura 19: Atividade 2 – Itens 1 e 2 – Exemplo de resolução

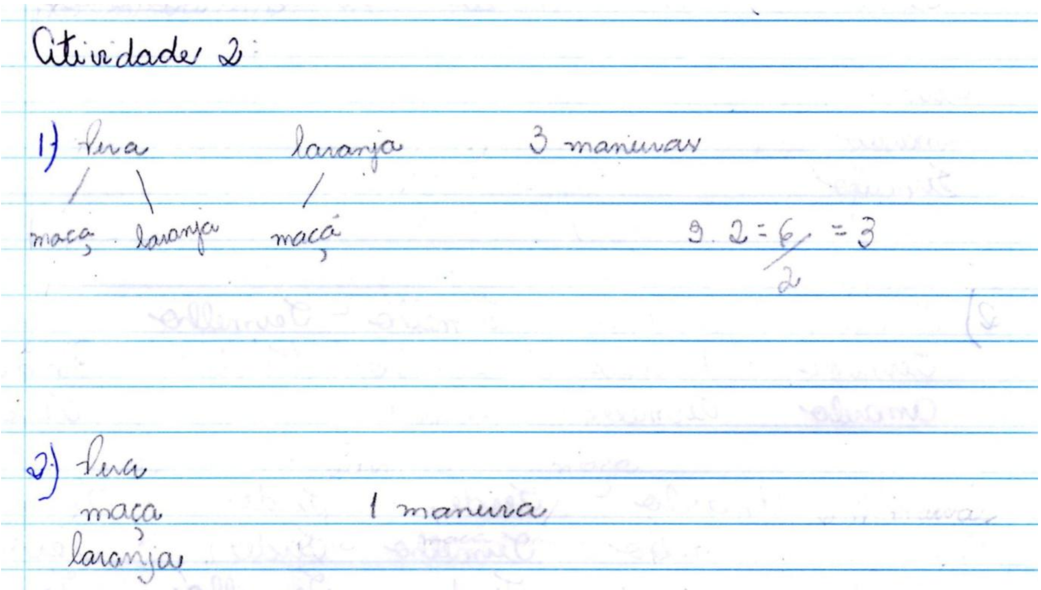


Figura 20: Atividade 2 – Itens 1 e 2 – Outro exemplo de resolução

Observou-se que alguns alunos perceberam a necessidade de dividir por 2 e, quando questionados sobre o motivo dessa divisão responderam que o total de maneiras diferentes é a metade das possibilidades já que ao trocar a ordem de duas das frutas teriam a mesma salada.

Em continuidade à atividade 2, foi proposta a seguinte questão:

3) E se tivéssemos 5 frutas? De quantas maneiras poderíamos montar uma salada com 3 delas? E com 4? E com todas?

Figura 21: Atividade 2 – Item 3 – Exploração das combinações simples
Fonte: Elaborada pelo autor

Algumas respostas dadas foram:

- Alguns grupos continuaram fazendo esquemas de resolução e montando todas as possibilidades:

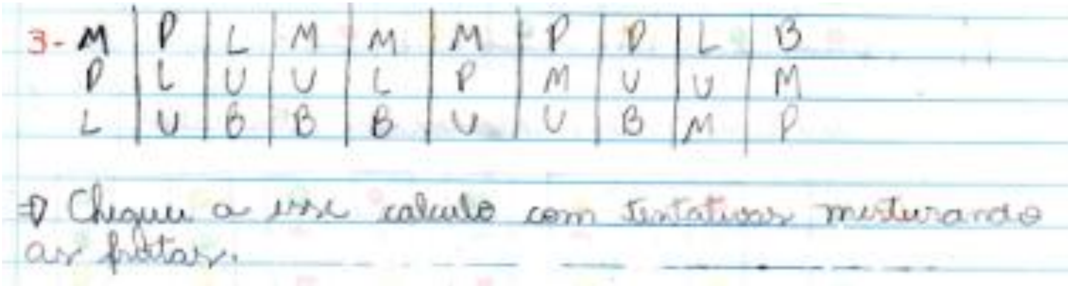


Figura 22: Atividade 2 – Item 3 – Resolução apresentada por tentativas

Uma das justificativas desse tipo de resolução é que eles não sabiam por qual número dividir já que agora tinham 3 frutas. Com duas frutas ficou claro para todos que a divisão por 2 eliminava todas as configurações iguais. Mas, e com 3 frutas? Muitos responderam que deveriam dividir por “três”. Nesse momento, a professora teve que interferir em vários grupos na tentativa de levá-los a calcular todas as permutações possíveis com 3 elementos.

- Resolução de um grupo após o entendimento de que são 6 possíveis permutações de 3 frutas diferentes:

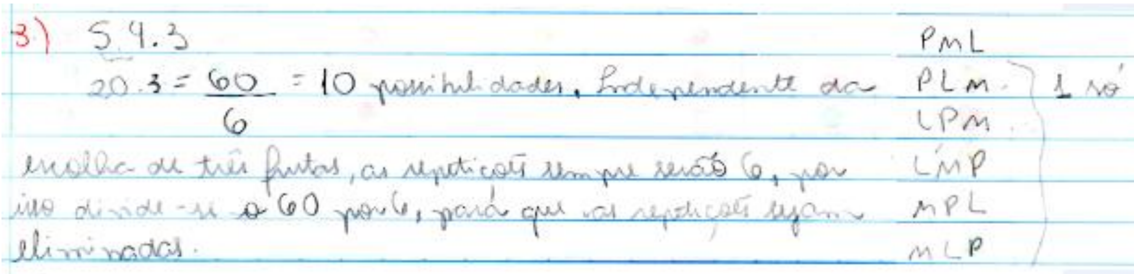
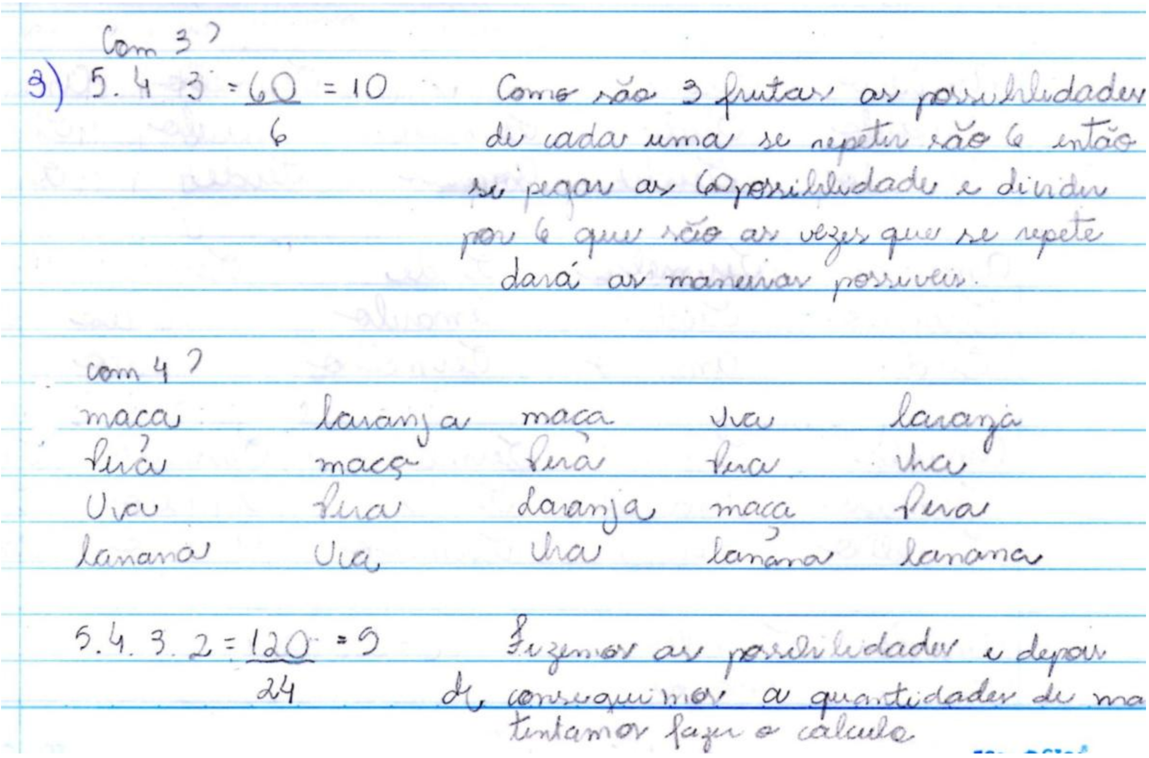


Figura 23: Atividade 2 – Item 3 – Resolução apresentada por um grupo de alunos

- Outras resoluções de grupos que conseguiram chegar ao resultado da atividade através de suas próprias conclusões:



Com 3?

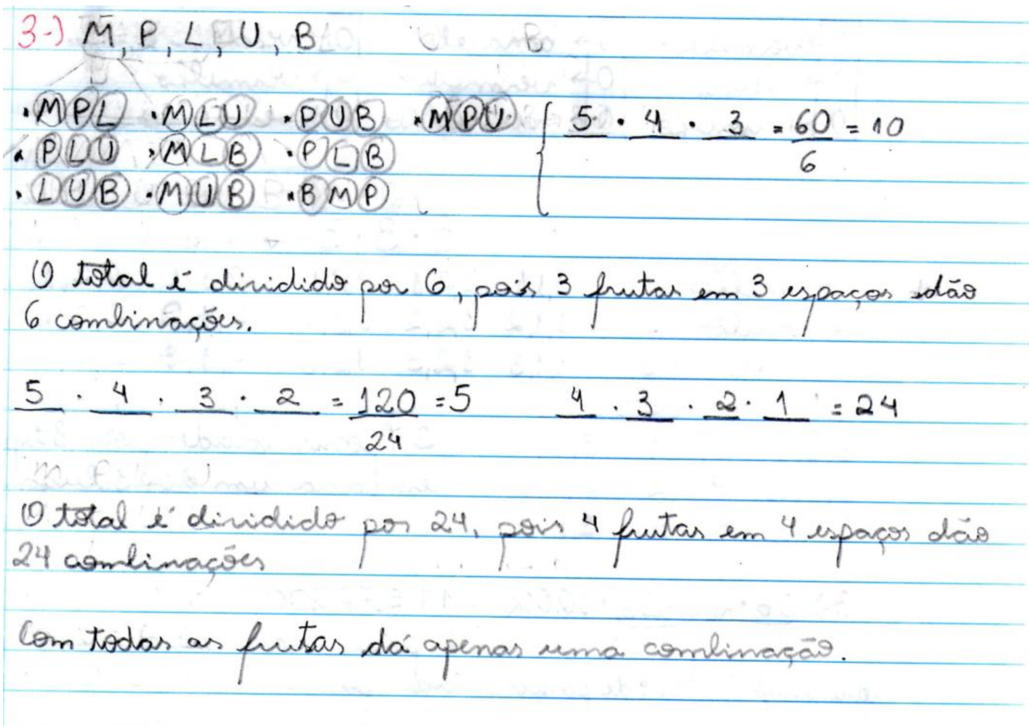
3) 5 . 4 . 3 = $\frac{60}{6}$ = 10 Como são 3 frutas as possibilidades de cada uma se repetir são 6 então se pegar as 60 possibilidades e dividir por 6 que são as vezes que se repete dará as maneiras possíveis.

Com 4?

maca	laranja	maca	uva	laranja
pera	maça	pera	pera	uva
Uva	pera	laranja	maca	pera
banana	Uva	uva	banana	banana

5 . 4 . 3 . 2 = $\frac{120}{24}$ = 5 Fizemos as possibilidades e depois de conseguirmos a quantidades de ma tentamos fazer o calculo

Figura 24: Atividade 2 – Item 3 – Outro exemplo de resolução



3-) M, P, L, U, B

· MPL · MLU · PUB · MPU
· PLU · MLB · PLB
· LUB · MUB · BMP

5 · 4 · 3 = $\frac{60}{6}$ = 10

O total é dividido por 6, pois 3 frutas em 3 espaços dão 6 combinações.

5 · 4 · 3 · 2 = $\frac{120}{24}$ = 5 4 · 3 · 2 · 1 = 24

O total é dividido por 24, pois 4 frutas em 4 espaços dão 24 combinações

Com todas as frutas dá apenas uma combinação.

Figura 25: Atividade 2 – Item 3 – Mais um exemplo de resolução

A última questão dessa atividade 2 tinha como objetivo mostrar que alguns problemas de Análise Combinatória, nesse caso, uma combinação com repetição precisam de muita atenção para serem resolvidos. Mesmo que os participantes utilizassem os conhecimentos adquiridos nas questões anteriores, não seria possível com um só cálculo determinar a resposta desse problema.

4) Agora, imagine a seguinte situação:

Um feirante possui, em sua banca, maçãs, peras e laranjas em grande quantidade. Desejando atender melhor a sua clientela, o feirante resolveu empacotar todas as suas frutas, de modo que cada pacote contivesse exatamente 5 frutas. Quantos diferentes tipos de pacotes poderá o feirante oferecer à sua clientela?

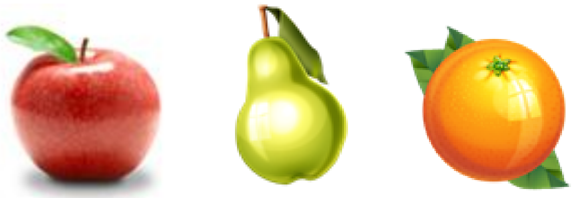


Figura 26: Atividade 2 – Item 4– Exploração das combinações com repetição
Fonte: Elaborada pelo autor

De forma geral, os alunos perceberam que esse problema era diferente dos outros que eles haviam resolvido. Após algum tempo, muitos alunos conseguiram encontrar a solução e muitos ficaram desanimados, principalmente pelo fato de nem sequer imaginarem a resposta. Discutimos a necessidade de explorar os problemas de combinatória levando em conta alguns aspectos que podem ajudar na sua resolução:

- ler o problema a ser resolvido com bastante atenção;

- detalhes como “os elementos são distintos” ou “os elementos podem repetir-se” fazem a diferença;

- verificar se o problema fica mais simples se dividi-lo em casos;

- isolar as possibilidades mais “problemáticas” ou que oferecem mais dificuldades, resolvendo-as por ordem de dificuldade;

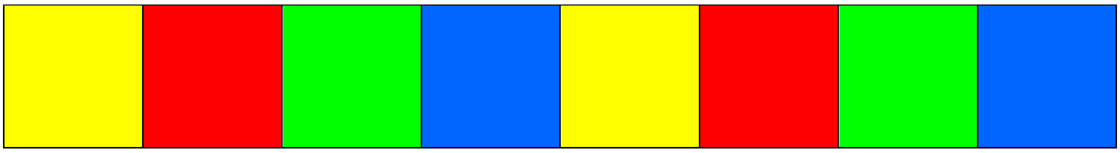
- para resolver o problema, fazer uso de diagramas, setas, esquemas, casos particulares;

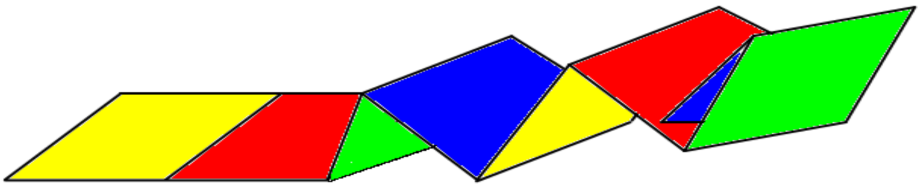
- criar sua própria maneira de solucionar os problemas de contagem;

- utilizar o Princípio Multiplicativo com bastante atenção.

4.2.3 Descrição da atividade 3

Na atividade 3, foi apresentado um quebra-cabeça construído com o objetivo de explorar diferentes estratégias de contagem para o trabalho em sala de aula. É um simples quebra-cabeça feito com uma fita de papel colorida com 8 quadrados, 4 pares de cores e o verso da fita com as mesmas cores da frente. Assim:





ATIVIDADE 3: QUEBRA-CABEÇAS COM CORES

Recorte e pinte a faixa formada por quadradinhos entregue por seu professor, de acordo com as cores sugeridas na figura abaixo.

AM	VM	VD	AZ	AM	VM	VD	AZ

Legenda:

AM = amarelo; **VM** = vermelho; **VD** = verde; **AZ** = azul.

Dobre nas linhas entre os quadradinhos e pinte o verso da mesma cor que a da frente.

A atividade consiste em dobrar a fita nas linhas marcadas, sobrepondo um quadrado sobre o outro com um efeito sanfona e através de dobras e de sobreposições formar padrões ordenados pré-definidos com algumas das quatro cores.

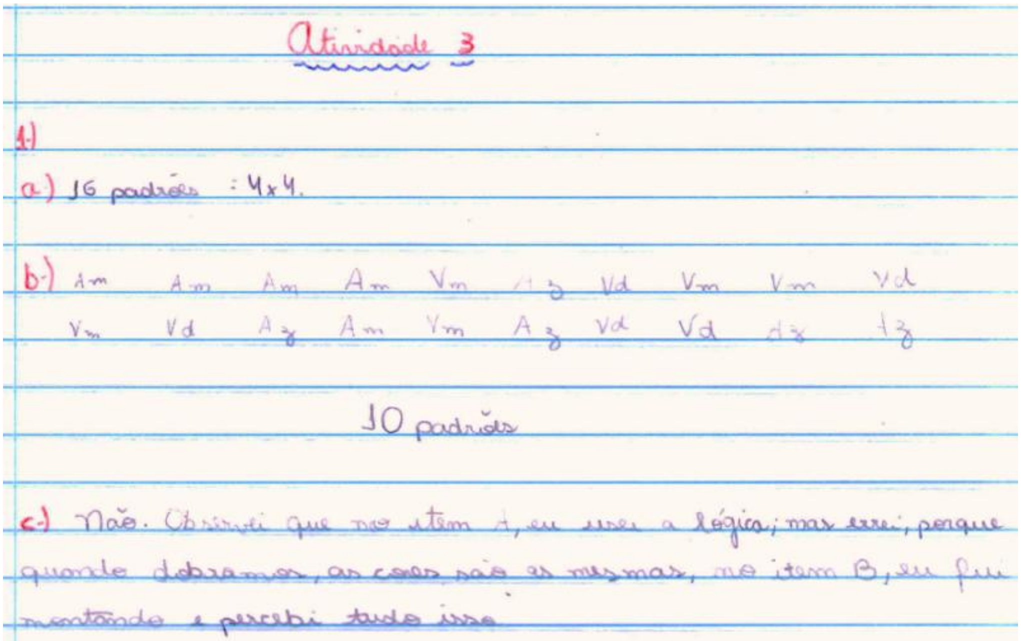
Figura 27: Atividade 3 – Confecção do quebra-cabeças com cores
Fonte: Elaborada pelo autor

Desenvolvimento da atividade: Após a construção da fita, deixou-se muito claro, que configurações que tivessem as mesmas cores quando lidas da esquerda para a direita e da direita para a esquerda não deveriam ser contadas como essencialmente diferentes no quebra-cabeça apresentado. As questões apresentadas foram:

1) Vamos obter todos os padrões possíveis com 2 quadrados. a) Você sabe dizer de antemão quantos padrões conseguiremos formar? b) Agora, manipule a fita e tente montá-los. Represente-os a seguir: c) Os resultados obtidos nos itens a) e b) são os mesmos? O que você observou?

Figura 28: Atividade 3 – Item 1 – Exploração de padrões utilizando dois quadrados
Fonte: Elaborada pelo autor

Na questão 1 da atividade 3, os alunos deveriam determinar todos os possíveis padrões com 2 quadrados. Primeiramente, tentou-se fazer com que eles pensassem quantas diferentes configurações poderiam ser feitas sem manipular a fita. Posteriormente, eles deveriam utilizá-la para verificar se o resultado alcançado estava correto e as possíveis observações quanto a tais resultados. Algumas resoluções encontradas foram:


Atividade 3

1)

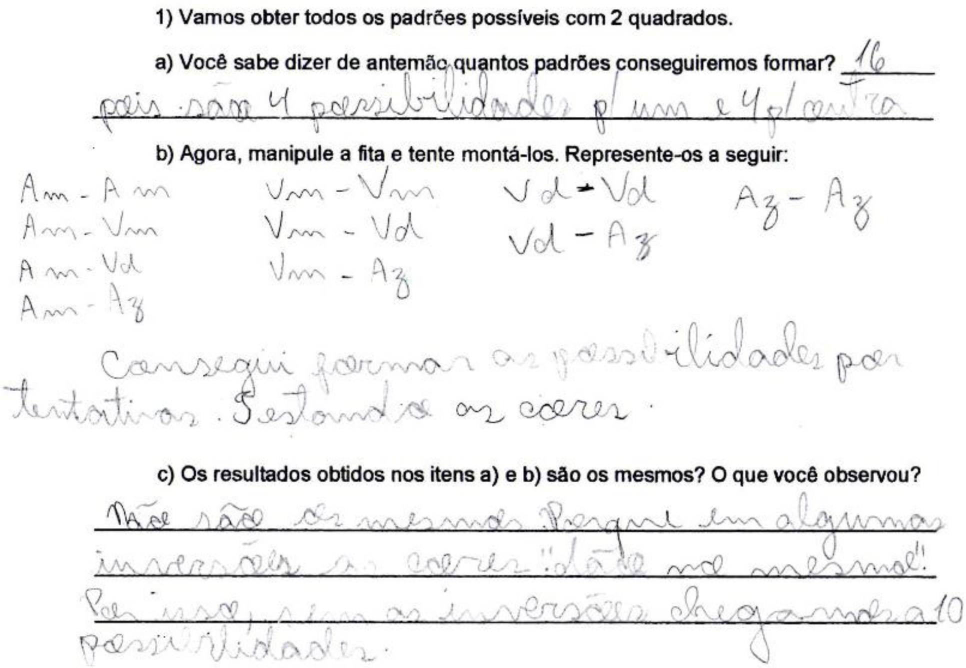
a) 16 padrões : 4x4.

b) Am Am Am Am Vm Az Vd Vm Vm Vd
Vm Vd Az Am Vm Az Vd Vd Az Az

10 padrões

c) Não. Observei que no item A, eu usei a lógica; mas errei, porque quando dobramos, as cores são as mesmas, no item B, eu fui montando e percebi tudo isso

Figura 29: Atividade 3 – Item 1 – Resolução apresentada por um grupo de alunos



1) Vamos obter todos os padrões possíveis com 2 quadrados.

a) Você sabe dizer de antemão quantos padrões conseguiremos formar? 16

pois são 4 possibilidades p/ um e 4 p/ outra

b) Agora, manipule a fita e tente montá-los. Represente-os a seguir:

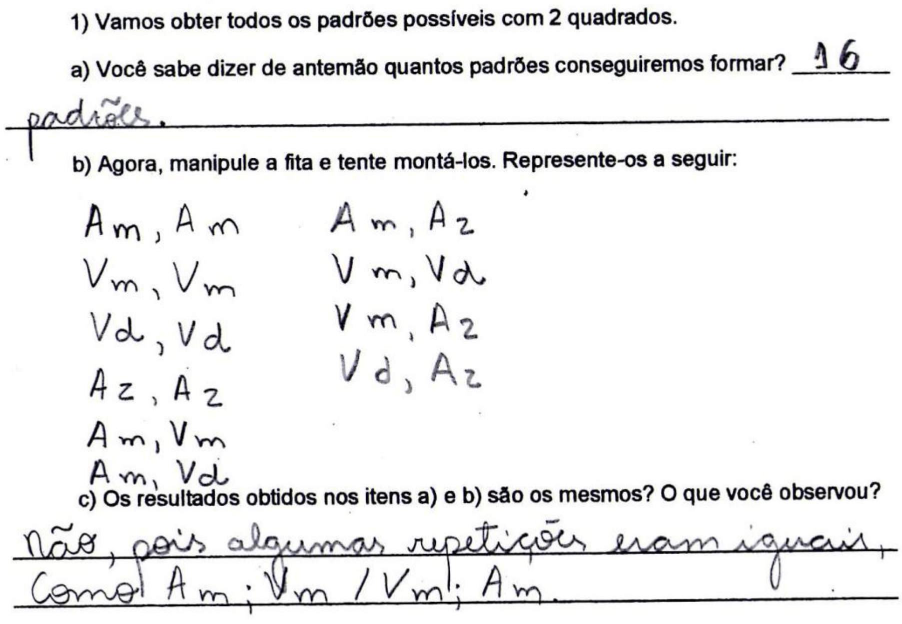
Am - Am
Am - Vm
Am - Vd
Am - Az
Vm - Vm
Vm - Vd
Vm - Az
Vd - Vd
Vd - Az
Az - Az

Consegui formar as possibilidades por tentativas. Testando as cores.

c) Os resultados obtidos nos itens a) e b) são os mesmos? O que você observou?

Não são os mesmos Porque em algumas inversões as cores "dão no mesmo". Por isso, sem as inversões chegamos a 10 possibilidades.

Figura 30: Atividade 3 – Item 1 – Resolução apresentada por outro grupo de alunos



1) Vamos obter todos os padrões possíveis com 2 quadrados.

a) Você sabe dizer de antemão quantos padrões conseguiremos formar? 16

padrões.

b) Agora, manipule a fita e tente montá-los. Represente-os a seguir:

Am, Am
Vm, Vm
Vd, Vd
Az, Az
Am, Vm
Am, Vd
Am, Az
Vm, Vd
Vm, Az
Vd, Az

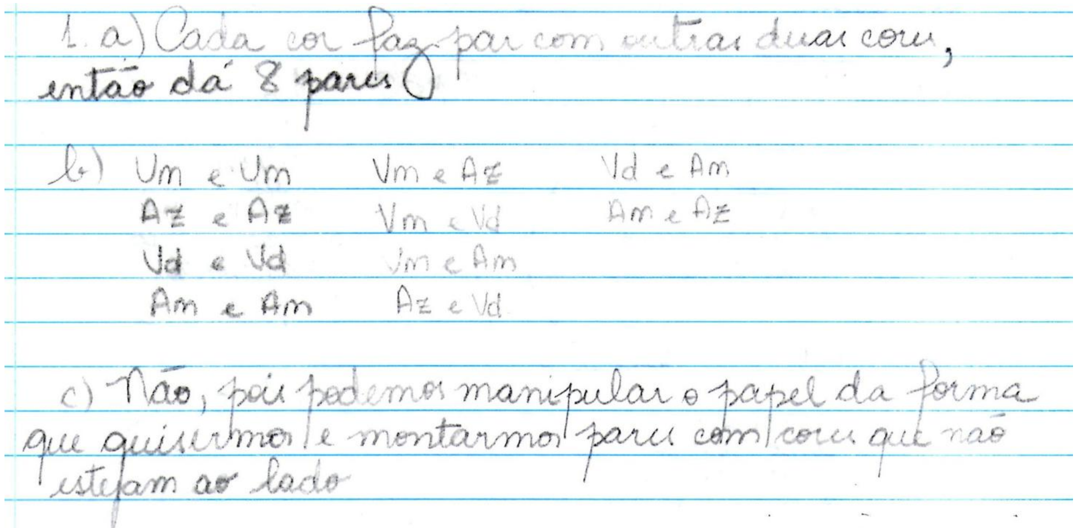
c) Os resultados obtidos nos itens a) e b) são os mesmos? O que você observou?

Não, pois algumas repetições eram iguais, Como Am; Vm / Vm; Am.

Figura 31: Atividade 3 – Item 1 – Mais um exemplo de resolução

O grupo de alunos cuja resolução aparece imediatamente acima colocou que, ao utilizar o princípio multiplicativo para o cálculo dos diferentes padrões que seriam obtidos, já imaginavam que o resultado correto seria menor, já que configurações que apresentassem as mesmas cores, ao serem lidas da direita para a esquerda e vice-versa, não formariam um novo padrão.

Porém, alguns erros, como a resposta do grupo abaixo em relação ao item a), também foram diagnosticados, ou seja, alguns grupos ainda não utilizaram o princípio multiplicativo corretamente.



1. a) Cada cor faz par com outras duas cores, então dá 8 pares

b) Vm e Vm	Vm e Az	Vd e Am
Az e Az	Vm e Vd	Am e Az
Vd e Vd	Vm e Am	
Am e Am	Az e Vd	

c) Não, pois podemos manipular o papel da forma que quisermos e montarmos pares com cores que não estejam ao lado

Figura 32: Atividade 3 – Item 1 – Falha na utilização do princípio multiplicativo

Em continuidade à atividade 3, foi proposto, então que eles continuassem investigando o quebra-cabeça na montagem de diferentes padrões utilizando três quadrados e as quatro cores disponíveis.

2) Vamos, agora, montar padrões com 3 quadrados.

a) Quantos padrões diferentes podemos formar com 3 quadrados e 4 cores?

b) Você consegue identificar alguma(s) impossibilidade(s) nesses padrões? Qual(is)? Por que acontecem?

c) Represente todos os padrões que podem ser formados:

d) Verifique quais deles realmente podem ser obtidos com a utilização da fita.

e) Explique como você chegou aos resultados.

Figura 33: Atividade 3 – Item 2 – Exploração de padrões utilizando três quadrados
Fonte: Elaborada pelo autor

Diante do primeiro item dessa questão muitos grupos questionaram de que forma poderiam fazer o cálculo dos diferentes padrões. Inicialmente, muitos colocaram que teriam um número próximo de 64 configurações (4 x 4 x 4) e que daria muito trabalho encontrá-las. Com isso, a professora achou necessário fazer algumas considerações ajudandoos a prosseguir. Assim, foi solicitado a eles que pensassem nas impossibilidades que a fita poderia causar e rapidamente nos colocaram que os três quadrados não poderiam ter a mesma cor já que cada cor repetia apenas duas vezes. Depois disso, ao lembrá-los que a rotação de 180º não geraria nova configuração quando tivesse o mesmo padrão, eles perceberam que novos cálculos deveriam ser feitos. A pesquisadora aproveitou esse momento para dizer aos participantes que as configurações que podem ser lidas como as apresentadas da esquerda para a direita e vice-versa são chamadas “palíndromas”; por exemplo: VmVdVm e que também deveriam ser observadas.

Após muitas tentativas, erros e acertos, e ainda considerando algumas intervenções da professora, muitos grupos apresentaram os cálculos corretamente:

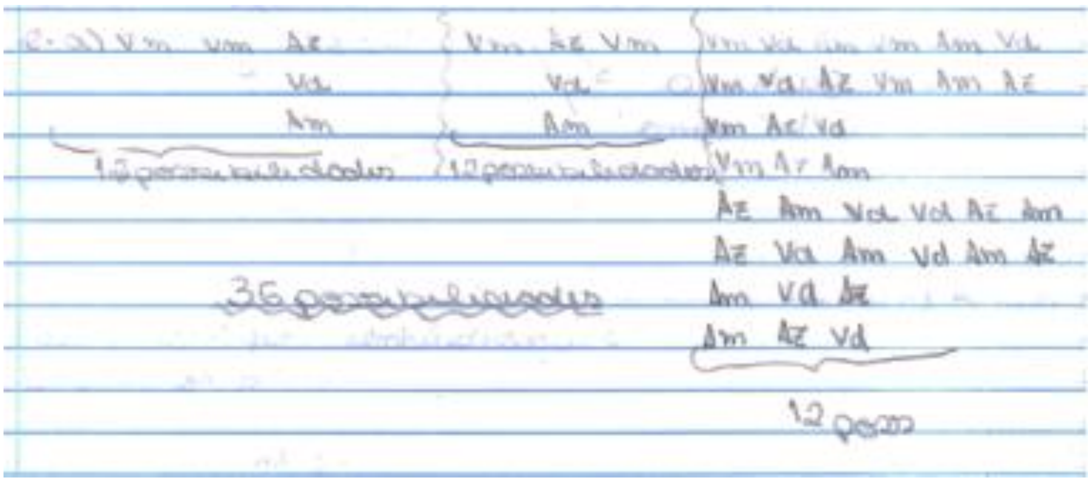


Figura 34: Atividade 3 – Item 2 – Exemplo de resolução apresentada por um grupo de alunos

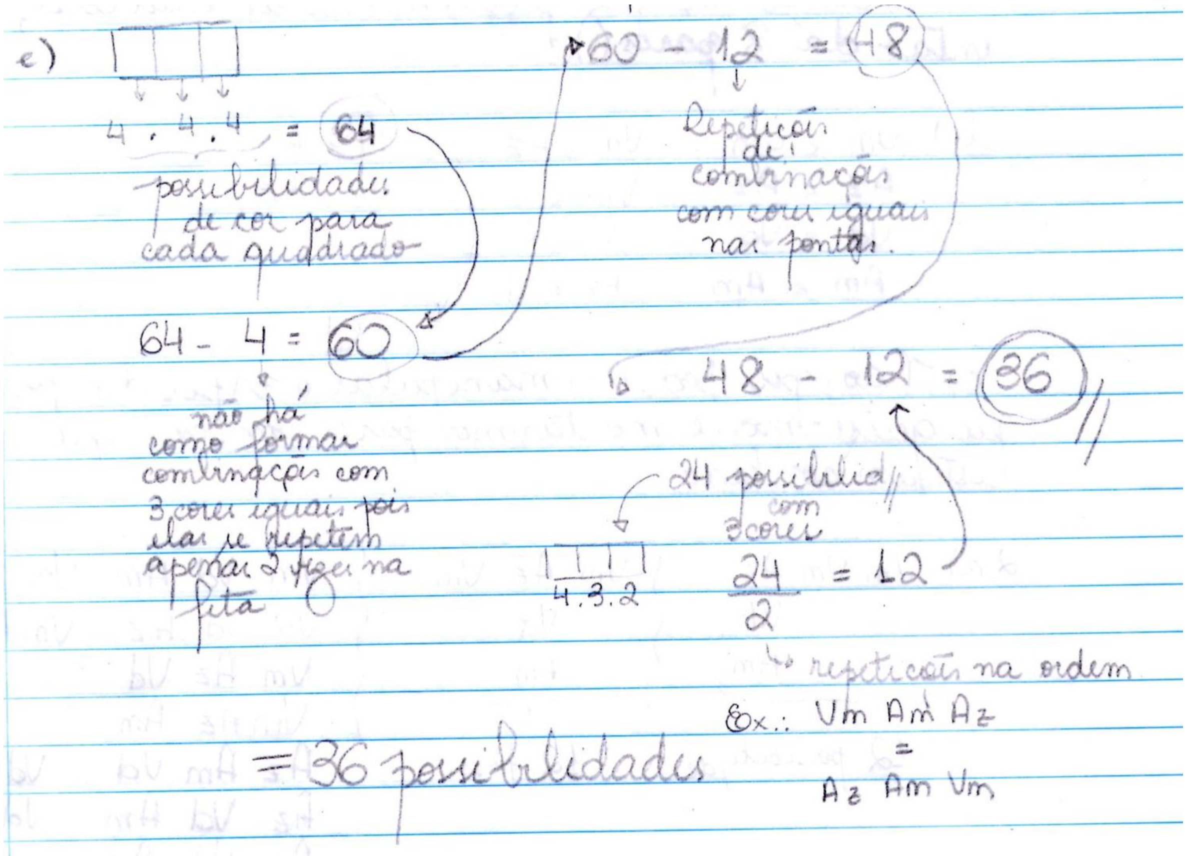


Figura 35: Atividade 3 – Item 2 – Outro exemplo de resolução

Percebeu-se que os alunos ficaram muito satisfeitos por conseguirem determinar a quantidade de diferentes padrões que teriam que montar. Após a representação de todas as possibilidades, eles verificaram que todas as configurações poderiam ser feitas com a utilização da fita.

Na última questão da atividade 3, os alunos deveriam investigar quantas configurações diferentes poderiam ser formadas com quatro quadrados.

3) Para continuar nossa investigação vamos estudar as configurações com 4 quadrados.

a) Quantos padrões existem? Pensem nas possibilidades e nas impossibilidades que a fita provoca!!!

Figura 36: Atividade 3 – Item 3a – Exploração de padrões utilizando quatro quadrados
Fonte: Elaborada pelo autor

A resolução dessa questão aconteceu de forma mais natural já que o procedimento era o mesmo da questão anterior. Os alunos verificaram as impossibilidades e algumas resoluções estão a seguir.

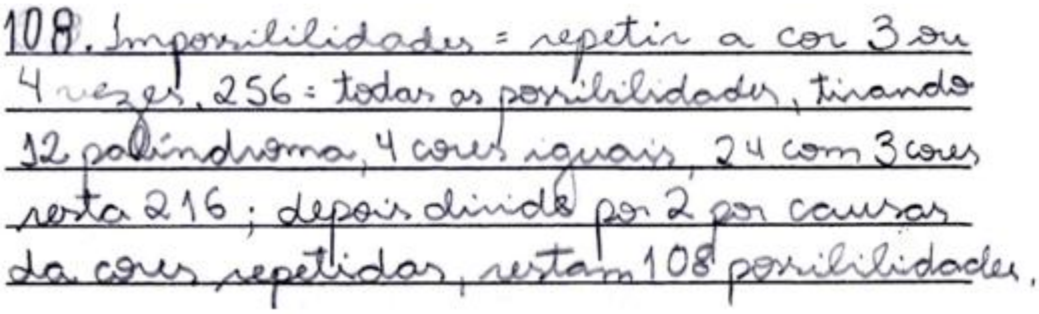


Figura 37: Atividade 3 – Item 3a – Resolução apresentada por um grupo de alunos

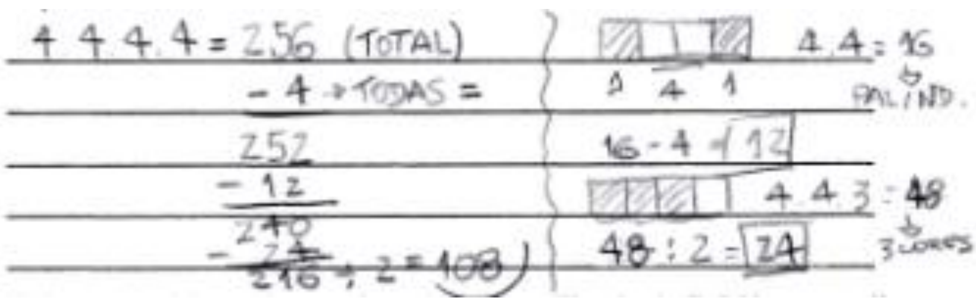


Figura 38: Atividade 3 – Item 3a – Resolução apresentada por outro grupo de alunos

Foi feita também uma segunda questão como segue:

b) Quantos padrões podem ser formados com a utilização da fita? Marque um X nas configurações que conseguir fazer:

Figura 39: Atividade 3 – Item 3b – Exploração de padrões utilizando quatro quadrados
Fonte: Elaborada pelo autor

No item b) da questão 3, as 108 possibilidades (APÊNDICE C) foram apresentadas aos alunos para que eles verificassem que algumas não poderiam ser obtidas através de dobras ou de sobreposições da fita. Isso acontece porque certas cores são vizinhas e outras não.

Com a manipulação da fita foi fácil verificar que apenas 58 possibilidades poderiam ser obtidas das 108 apresentadas.

A seguir, foi apresentada uma nova proposta, a saber:

c) Escreva seus comentários sobre as tarefas realizadas.

Figura 40: Atividade 3 – Item 3c – Comentários sobre a realização das atividades
Fonte: Elaborada pelo autor

Finalmente, no item c) da mesma questão, foi solicitado os alunos que se posicionassem em relação às atividades desenvolvidas.

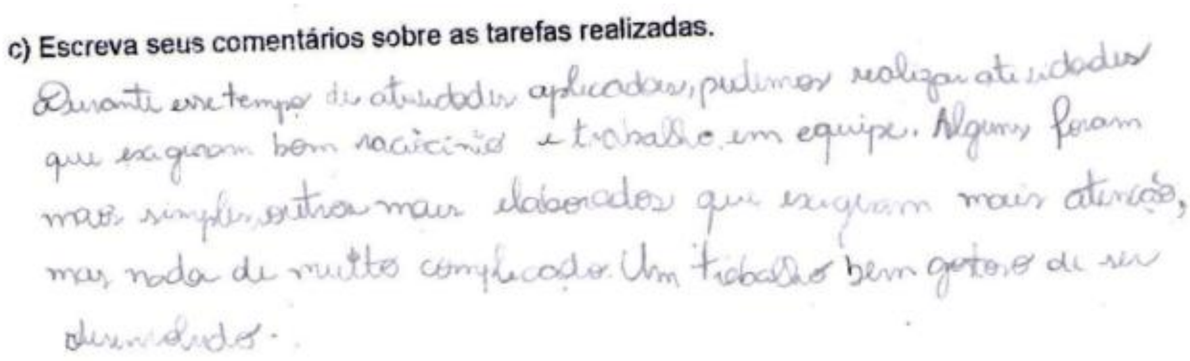

c) Escreva seus comentários sobre as tarefas realizadas.
Durante esse tempo de atividades aplicadas, pudemos realizar atividades que exigiram bom raciocínio e trabalho em equipe. Algumas foram mais simples, outras mais elaboradas que exigiram mais atenção, mas nada de muito complicado. Um trabalho bem gostoso de ser desenvolvido.

Figura 41: Atividade 3 – Item 3c – Comentários de um grupo sobre a realização das atividades

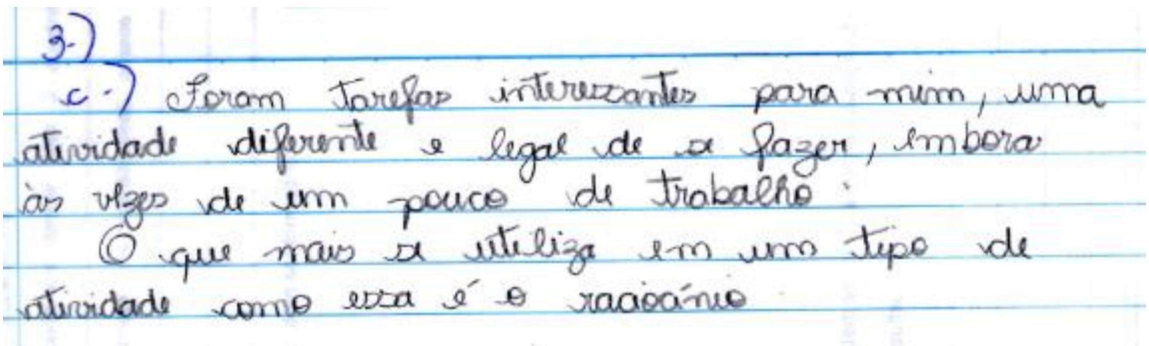

3-)
c-) Foram tarefas interessantes para mim, uma atividade diferente e legal de se fazer, embora às vezes de um pouco de trabalho.
O que mais se utiliza em um tipo de atividade como essa é o raciocínio

Figura 42: Atividade 3 – Item 3c – Comentários de uma aluna sobre a realização das atividades

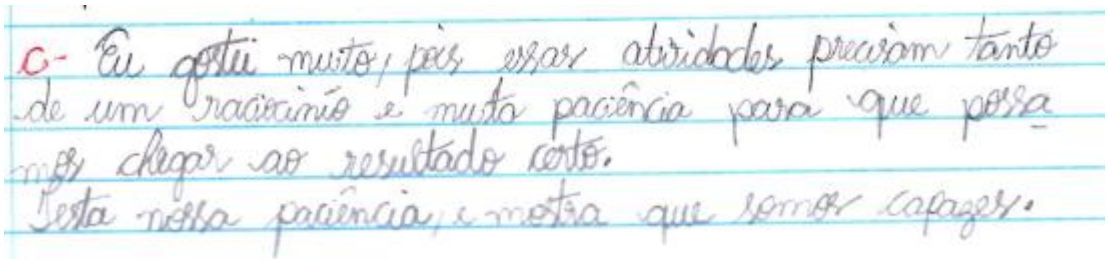

c- Eu gostei muito, pois essas atividades precisam tanto de um raciocínio e muita paciência para que possamos chegar ao resultado certo.
Testa nossa paciência, e mostra que somos capazes.

Figura 43: Atividade 3 – Item 3c – Comentários de outra aluna sobre a realização das atividades

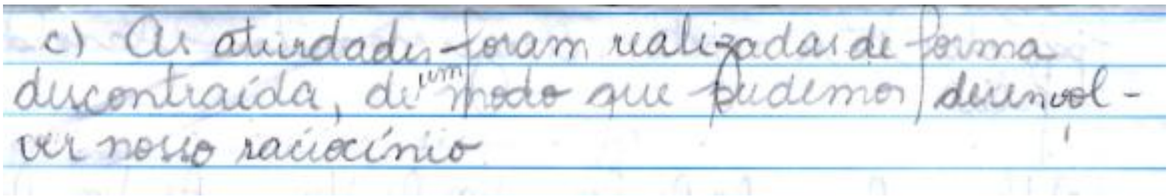

c) As atividades foram realizadas de forma descontraída, de um modo que pudemos desenvol-
ver nosso raciocínio

Figura 44: Atividade 3 – Item 3c – Comentários de outro grupo sobre a realização das atividades

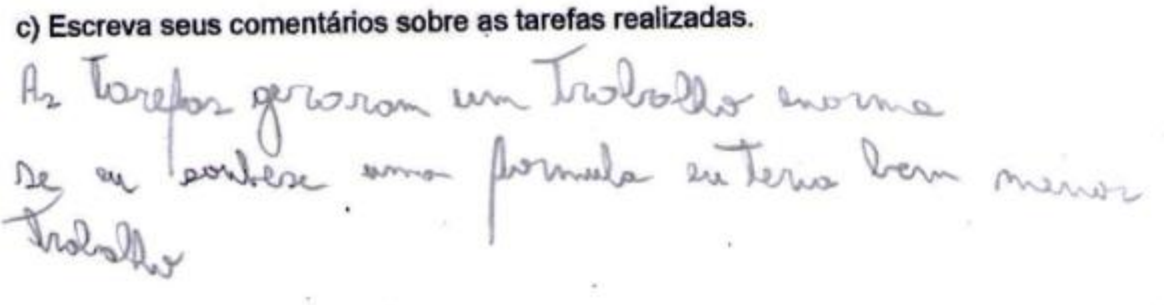

c) Escreva seus comentários sobre as tarefas realizadas.
As tarefas geraram um trabalho enorme
se eu soubesse uma formula eu teria bem menor
trabalho

Figura 45: Atividade 3 – Item 3c – Comentário de um aluno interessado na utilização de fórmulas

Em alguns momentos das atividades e no último comentário apresentado, como se pode notar, muitos alunos perguntaram se existiam fórmulas para a resolução dos problemas. Foi dito a eles que as fórmulas existiam e brevemente seriam vistas, porém que muitos problemas não se encaixavam na aplicação de nenhuma delas. Perceberam, também, o uso de raciocínio para a realização das situações propostas e a participação ativa de cada um deles.

4.3 Análise das atividades

Para o desenvolvimento das atividades consideramos que alguns aspectos devem receber especial atenção:

- a preparação do ambiente, pois é importante que os alunos queiram participar das atividades, assim o professor deve deixar claro o valor do trabalho que será desenvolvido bem como a necessidade de todos exporem suas idéias, discutirem com seus pares, garantindo a possibilidade de ouvir e de ser ouvido;
- atividades diferenciadas não são comuns na Escola e sua realização depende do apoio da comunidade escolar, logo a escola deve ser informada dos objetivos e da importância do trabalho;

- a escolha das questões é muito importante e deve contemplar todo o conteúdo em questão buscando uma graduação crescente no sentido de motivá-los para promover sua continuidade até a conclusão;
- o professor é responsável, durante a realização das atividades, por incentivar os alunos a interpretar, criar estratégias, trabalhar em equipe e justificar suas idéias.

Em anos anteriores, a pesquisadora (orientanda deste estudo) e também professora, ao trabalhar com os conteúdos de Análise Combinatória, pôde constatar a deficiência dos estudantes em resolver os problemas de contagem. Esse conteúdo era explorado a partir dos conceitos de Permutação, Arranjo e Combinação e da utilização das fórmulas correspondentes, ou seja, a cada tópico eram apresentados alguns exemplos, a fórmula necessária para a resolução e inúmeros exercícios para fixação. À medida que cada conceito era visto, os alunos conseguiam resolver os problemas apresentados, pois tinham simplesmente que utilizar a fórmula dada, porém, diante da necessidade de identificar a qual agrupamento o problema pertencia para a utilização da fórmula adequada não obtinham o mesmo êxito.

Acredita-se que o papel ativo do estudante no desenvolvimento das atividades é fundamental para a construção do seu conhecimento. Percebe-se que os alunos estão acostumados a seguir modelos e seqüências de procedimentos determinados pelo professor de forma passiva. Assim, no início das atividades, os alunos se mostraram um pouco inseguros mesmo trabalhando em grupos.

Constatou-se, na primeira atividade orientadora, que eles faziam muitas perguntas e tinham muitas dúvidas. Aos poucos, foram percebendo que a proposta exigia certa autonomia e as discussões acerca dos resultados encontrados eram essenciais para o bom desenvolvimento das atividades.

Ao iniciar a atividade “Os sinais de trânsito e as cores” (APÊNDICE A), percebeu-se que poucos alunos utilizaram o princípio multiplicativo para chegar ao resultado, alguns utilizaram siglas, outros desenharam. Os alunos deveriam responder “quantos” e “quais” eram os diferentes sinais de trânsito que poderíamos construir com as três cores e observou-se que todos começaram por “quais” montando as possibilidades. Acredita-se que esse fato acontece porque os alunos não têm contato com problemas desse tipo no Ensino Fundamental. Nem mesmo a árvore das possibilidades era conhecida por eles. Porém, a enumeração sistemática das possibilidades auxiliou alguns grupos a observarem os padrões e assim, a decidirem sobre qual operação deveriam realizar.

O trabalho em grupo permitiu que os alunos discutissem as idéias e aprendessem com os colegas de forma colaborativa, mobilizando os conhecimentos. Um dos objetivos de uma atividade orientadora de ensino é o trabalho coletivo como contexto de produção e de legitimação do conhecimento, respeitando os diferentes níveis dos indivíduos (MOURA; MORAES, 2009, p.101). Percebeu-se, durante o desenvolvimento das atividades, que até mesmo os alunos que nem sempre se envolviam nas discussões, ou seja, aqueles que eram 'levados' pelo grupo, passaram a perguntar aos colegas como estavam organizando suas resoluções e pediam explicações do que não entendiam. As discussões aconteciam dentro dos grupos e também entre grupos diferentes.

A professora (orientanda deste trabalho) aproveitou esses momentos de discussões para apresentarem a "árvore das possibilidades" como uma estratégia de resolução na tentativa de estabelecer um padrão que pudesse levá-los a responder "quantos" sinais diferentes poderiam construir. Assim, com a ajuda dos alunos, não foi necessário terminar a construção da árvore já que perceberam que um padrão poderia ser estabelecido e, por comparação, parece que entenderam a idéia do princípio multiplicativo.

Esse fato é evidenciado pelas resoluções apresentadas no item 3) dessa primeira atividade na qual os alunos deveriam calcular o número de diferentes placas de carro que poderiam ser confeccionadas com uma sequência de 3 letras e 4 números. Nesse momento, perceberam que montar as possibilidades através da árvore, ou por outro meio qualquer, seria muito trabalhoso. Mesmo ainda não utilizando corretamente o princípio multiplicativo, a maioria dos alunos chegou ao resultado correto com entendimento sobre a possibilidade de repetição tanto das letras como dos números.

O objetivo da atividade 2 "Salada de Frutas" (APÊNDICE B) era fazer com que percebessem as diferenças entre agrupamentos ordenados (atividade1) e os agrupamentos não ordenados. As respostas do item 1), no qual deveriam apresentar as possibilidades de fazer uma salada com duas frutas de três disponíveis, aconteceu de forma natural para a maioria dos alunos. Mesmo diante de algumas perguntas como 'misturar maçã e pera é o mesmo que misturar pera e maçã?' ou 'trocar a ordem das frutas dá no mesmo?' que, na realidade, acreditamos tratar apenas de uma confirmação do que já sabiam, os alunos apresentaram resoluções utilizando corretamente o princípio multiplicativo e a divisão pelo número de permutações. Porém, nesse caso, a divisão por dois foi imediata por se tratar da escolha de duas frutas e não pelo fato de compreenderem o significado do conceito de 'permutação'.

Pretendia-se que, no item 2) os alunos tivessem que se preocupar com tal conceito, mas ao se perguntar de quantas maneiras poderiam montar uma salada com todas as frutas disponíveis, as respostas foram imediatas e todos concluíram, sem necessidade de cálculo algum, que só haveria uma maneira possível. Esperava-se que os alunos tentassem resolver tal questão da mesma forma que fizeram no item 1), através da utilização do princípio multiplicativo e, que sentissem a necessidade de calcular todas as possíveis permutações das três frutas a fim de descartar configurações iguais. Nesse momento, decidiu-se seguir com a resolução do item seguinte não fazendo nenhuma intervenção, pois logo os alunos estariam diante de uma nova situação em que tudo isso teria que ser discutido e analisado.

O item 3), como era esperado, gerou muitas discussões e reflexões entre os componentes dos grupos e também entre grupos diferentes. Nessa questão, os alunos deveriam determinar de quantas maneiras poderiam montar uma salada de frutas tendo cinco frutas à disposição utilizando inicialmente três dessas frutas; depois, quatro e, finalmente, com todas. A dúvida de grande parte dos alunos se reportava a descobrir por qual número deveriam dividir todas as possibilidades a fim de eliminar as configurações iguais. Cabe ressaltar que o envolvimento dos alunos em encontrar as respostas era muito grande, tanto que alguns deles voltaram a utilizar esquemas gráficos e a estabelecer regras para apresentar todas as possibilidades quando perceberam que não conseguiam fazer de outra forma. Alguns grupos, quando questionados, responderam que deveriam dividir por três, já que quando fizeram com duas frutas, dividiram por dois. Isso evidenciou o fato citado anteriormente de que ainda não tinham entendido como chegar ao número pelo qual deveriam fazer a divisão a fim de eliminar as configurações iguais. Diante desta situação, foi necessária a intervenção da professora. Foi pedido a eles que mostrassem quantas seriam as possíveis trocas de três frutas. Depois de algum tempo, vários grupos responderam que a divisão deveria ser feita por seis e não por três como haviam pensado. Um desses grupos, espontaneamente, pediu para mostrar aos demais o resultado obtido através da árvore das possibilidades. Este momento serviu para mostrar a eles que novamente poderiam usar o princípio multiplicativo para chegar a tais resultados, ou seja, com 2 frutas, maçã e pera, por exemplo, temos $2 \times 1 = 2$ configurações iguais; com três frutas, têm-se $3 \times 2 \times 1 = 6$ configurações iguais e assim por diante. A comparação com a árvore das possibilidades facilitou o entendimento dos alunos quanto à forma que poderiam usar para determinar o número de configurações iguais e, desta forma, descartá-las do total de possibilidades encontradas.

Em continuidade a esse item, os alunos não apresentaram dificuldade em determinar o número de saladas que poderiam montar utilizando quatro frutas; ficou muito claro que a escolha de quatro frutas dentre cinco disponíveis acontece de 5 x 4 x 3 x 2 = 120 maneiras diferentes; porém com quatro frutas teremos 4 x 3 x 2 x 1 = 24 configurações iguais. Logo, pode-se ter: 120 : 24 = 5 possibilidades diferentes de montar essa salada. Novamente, os alunos responderam prontamente que com cinco frutas, haveria apenas uma maneira de montar a salada utilizando todas elas. Diante disso, pedimos que eles tentassem utilizar o princípio multiplicativo para resolver não só essa questão, mas também que voltassem ao item 2), no qual deveriam calcular de quantas maneiras poderiam montar uma salada utilizando três frutas das três disponíveis. Os alunos acharam interessante o fato de não pensarem na utilização do mesmo processo de resolução para essas duas situações e colocaram que a resposta era simples, óbvia. Os grupos resolveram as duas propostas sem nenhuma dificuldade.

No último item da atividade 2, pretendia-se explorar as combinações com repetição. Sabemos que esse conceito é bem pouco trabalhado no Ensino Médio; a maioria dos livros didáticos e também o material fornecido pelo Estado (Caderno do Aluno) só usa a repetição no caso dos arranjos e das permutações. Porém, no dia a dia, o professor se vê diante de problemas desse tipo para serem resolvidos. A proposta era determinar quantos diferentes tipos de pacotes contendo 5 frutas poderiam ser oferecidos por um comerciante a sua clientela sendo que ele dispunha de grande quantidade de maçãs, peras e laranjas. Os alunos logo perceberam que os métodos utilizados até então já não mais seriam suficientes para a resolução dessa questão. Muitos deles se mostraram insatisfeitos por não conseguirem chegar à resposta e outros montaram esquemas de resolução, ou seja, começaram com todas as cinco frutas iguais; depois com quatro iguais e uma diferente, e assim sucessivamente, eliminando as configurações iguais.

A terceira e última atividade proposta aos alunos visava explorar diferentes formas de contagem através da utilização de um quebra-cabeças composto por uma faixa com 8 quadrados e 4 diferentes cores. No início da atividade (APÊNDICE C), deixamos claro que as configurações que tivessem as mesmas cores quando lidas da esquerda para a direita e da direita para esquerda, seriam iguais.

No item 1) os alunos deveriam obter todos os possíveis padrões com 2 quadrados. É interessante destacar que primeiramente deveriam tentar descobrir ‘quantos’ padrões conseguiriam formar. Muitos alunos, mesmo utilizando o princípio multiplicativo, pois havia 4 possibilidades de cor para o primeiro quadrado e a partir do primeiro, outras quatro possibilidades para o segundo totalizando 4 x 4 = 16 padrões, já sabiam que a quantidade seria menor do que 16. Ao manipular a fita, não encontraram dificuldades para perceber que seriam apenas 10 padrões devido às configurações que deveriam ser consideradas iguais.

Dando sequência a essa atividade, no item 2) a montagem dos diferentes padrões deveria ser feita com 3 quadrados. Foram apresentados cálculos diferenciados para responder a questão. Alguns grupos montaram a seguinte estratégia: os dois primeiros quadrados com a mesma cor totalizando 12 possibilidades; o primeiro e o terceiro de mesma cor totalizando outras 12 possibilidades; e, finalmente, os três quadrados de cores diferentes totalizando mais 12 possibilidades. Assim chegaram a 36 possibilidades no total já descartando as configurações consideradas iguais. Outras estratégias utilizadas foram apresentadas no capítulo 3.2 e mostram como os alunos estavam interessados e motivados em resolver as questões.

O último item da atividade 3 buscou analisar as configurações possíveis com 4 quadrados. Muitos alunos conseguiram, através de cálculos, apresentar as 108 possibilidades de configurações diferentes e através da verificação de algumas impossibilidades da fita, mostrar que apenas 58 padrões poderiam ser montados. Comentários interessantes foram feitos pelos alunos que, de forma geral, realizaram as atividades com interesse e satisfação.

Após a realização de todas as atividades, as fórmulas foram apresentadas e o seguinte quadro síntese foi montado com a ajuda dos alunos:

Tabela 2: Quadro síntese das fórmulas de Análise Combinatória

AGRUPAMENTOS		SIMPLES	COM REPETIÇÃO
A ordem **é** importante	Arranjos	**Exemplo:** De quantas maneiras podemos escolher 3 bolas dentre 4 de cores diferentes ? **Resposta:** 4.3.2 = 24 **Fórmula:** O nº de arranjos simples de n elementos tomados p a p é $An,p = n!/(n-p)!$	**Exemplo:** De quantas maneiras podemos pintar 3 círculos dispondo de 4 cores diferentes? **Resposta:** 4.4.4 = 64 **Fórmula:** O nº de arranjos com repetição de n elementos tomados p a p é dado por n^p.
	Permutações	**Exemplo:** De quantas maneiras diferentes podemos alternar a posição das letras M, L e P? **Resposta:** 3.2.1= 3! = 6 **Fórmula:** O nº de permutações de n elementos é $Pn = n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$	**Exemplo:** Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra CASA? **Resposta:** (4.3.2.1)/(2.1) = 12 **Fórmula:** O nº de permutações de n elementos com a, b, c ... repetições é dado por $n!/(a!b!c!\ ...)$
A ordem **não é** importante	Combinações	**Exemplo:** Quantas saladas de frutas podemos montar com 3 diferentes frutas se dispomos de 5 frutas ? **Resposta:** (5.4.3)/(3.2.1) = 10 **Fórmula:** O nº de combinações simples de n elementos tomados p a p é $Cn,p = n!/[p!.(n-p)!]$	**Exemplo:** Quantos pacotes contendo 5 frutas podemos montar se dispomos de 3 frutas diferentes? **Resposta:** 21 pacotes **Fórmula:** O nº de combinações com repetição de n elementos tomados p a p é dado por $(n+p-1)!/[p!.(n-1)!]$

Fonte: Elaborada pelo autor

A professora procurou construir as fórmulas juntamente com os alunos, pois acredita que devem conhecê-las. Porém, deixou claro que durante todo o trabalho, elas não foram utilizadas e que as ferramentas necessárias para a resolução de problemas de combinatória foram vistas e utilizadas por eles.

4.4 Avaliação

Como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem da escola em que foi realizada a pesquisa, os alunos deveriam passar por uma avaliação formal.

De forma geral, a avaliação da aprendizagem escolar se mostra como um meio de se obter informações sobre os avanços e sobre as dificuldades dos alunos e também de orientação para o professor planejar ou replanejar suas ações futuras.

A avaliação contou com seis questões dissertativas e 141 alunos foram avaliados. A seguir serão apresentadas as questões que foram respondidas, os índices de acertos e/ou erros obtidos e algumas considerações sobre as resoluções apresentadas.

Questão 1: Quantas saladas de frutas diferentes podemos fazer, usando-se três das quatro frutas: banana, framboesa, morango e abacaxi?

Figura 46: Avaliação formal – 1ª questão
Fonte: Elaborada pelo autor

O índice de acertos dessa questão foi de 85,1%, ou seja, 120 alunos responderam corretamente. Oito alunos chegaram a resposta de 24 saladas diferentes já que não consideraram que a cada troca de 3 frutas escolhidas temos 6 saladas iguais. Dos 13 alunos restantes, 9 não responderam a questão e outros 4 apresentaram respostas erradas.

Questão 2: De quantas maneiras podemos escolher 3 refrigerantes, se temos a nossa disposição 4 marcas diferentes?

Figura 47: Avaliação formal – 2ª questão
Fonte: Elaborada pelo autor

Nessa questão o índice de acertos foi menor, 55,3%. Todos os alunos que responderam corretamente (78 alunos) montaram todas as possibilidades através da seguinte estratégia: 4 possibilidades onde todos são iguais, outras 12 possibilidades em que dois são iguais e um diferente e mais 4 possibilidades com todos diferentes.

Questão 3: Carlos está em um parque de diversões e resolve comprar dois bilhetes. No parque há 5 tipos de brinquedos:

C – chapéu mexicano

F – trem fantasma

M – montanha russa

R – roda gigante

T – teleférico

Sabendo que ele pode comprar dois bilhetes do mesmo tipo, caso queira ir duas vezes ao mesmo brinquedo, determine o número total de possibilidades de compra dos bilhetes.

Figura 48: Avaliação formal – 3ª questão
Fonte: Elaborada pelo autor

A questão 3 apresentou o menor índice de acertos da avaliação. Somente 40 alunos acertaram a resposta, o que representa aproximadamente 28,4% do total. Muitos alunos responderam que a compra dos bilhetes poderia ser feita de 10 maneiras diferentes, pois não consideraram a possibilidade de ir ao mesmo brinquedo duas vezes. Quarenta e dois alunos deixaram a questão sem resposta.

Questão 4: Um restaurante serve 7 tipos de salada e 4 tipos de carne. Determine o número de pratos distintos que você pode se servir contendo 3 tipos de saladas e 2 tipos de carne.

Figura 49: Avaliação formal – 4ª questão
Fonte: Elaborada pelo autor

O cálculo das possíveis combinações de saladas e das possíveis combinações de carnes, separadamente, foi realizado de maneira correta por cerca de 68% dos alunos, porém a multiplicação desses resultados para a obtenção do número de pratos distintos que poderiam ser servidos foi feita corretamente por 42,5% deles. Muitos alunos somaram as possibilidades e outros não realizaram qualquer outra operação.

Questão 5: Quantos anagramas podemos formar: a) com as letras da palavra PENSADOR que começam pelas letras P, E, N, juntas, e nessa ordem? b) com as letras da palavra COLOSSO?

Figura 50: Avaliação formal – 5ª questão
Fonte: Elaborada pelo autor

O índice de acertos dessa questão foi de aproximadamente 68,8%, ou seja, 97 alunos responderam corretamente os itens a) e b). Além disso, outros 20 alunos chegaram à resposta correta do item a) e 8 chegaram à resposta do item b).

Questão 6: Clara vai participar de um sorteio, onde as cartelas são formadas por todos os números de três algarismos, dentre os números de 100 a 999. Ela diz ter muita sorte com os números pares terminados em 2, em 4, ou em 8. Quantas das cartelas do sorteio dão sorte a Clara?

Figura 51: Avaliação formal – 6ª questão
Fonte: Elaborada pelo autor

Essa questão foi resolvida corretamente por 84,4% dos alunos (119). A resolução foi feita através da utilização do princípio multiplicativo. Dez alunos chegaram à resposta: 243 cartelas, pois consideraram 9 possibilidades tanto para a escolha do 1º algarismo como também para a escolha do 2º.

A avaliação foi realizada individualmente em uma aula de 50 minutos. Mesmo já conhecendo as fórmulas, os alunos não fizeram uso delas. Considera-se que o resultado obtido foi muito bom quando comparado a resultados anteriores em que os alunos apenas utilizavam as fórmulas para resolver os problemas após identificar a qual agrupamento pertenciam.

A tabela, a seguir, sintetiza os resultados obtidos com a avaliação.

Tabela 3: Resultados obtidos na avaliação formal de Análise Combinatória

	respostas corretas		respostas erradas		outras situações*	
Questões	nº de alunos	%	nº de alunos	%	nº de alunos	%
1ª	120	85,1	12	8,5	9	7,4
2ª	78	55,3	53	37,6	10	7,1
3ª	40	28,4	59	41,8	42	29,8
4ª	60	42,5	41	29,1	40	28,4
5ª	97	68,8	16	11,3	28	19,9
6ª	119	84,4	15	10,6	7	5,0

*Respostas incompletas ou ausência de respostas.
Fonte: Elaborada pelo autor

Pode-se observar pela tabela acima que o percentual médio de questões respondidas corretamente é de, aproximadamente, 61%. Resultado significativo, como já dito, quando comparado a resultados de anos anteriores. Deve-se ainda ressaltar que nesse percentual não foi considerado os acertos parciais das questões.

5 Considerações Finais

A busca por uma forma diferenciada de trabalhar a Análise Combinatória no Ensino Médio nos levou a preparar atividades orientadoras que tinham por objetivo desmistificar um conteúdo importante, despertando a curiosidade e a investigação matemática numa área pouco explorada.

A escola na qual foi realizada a pesquisa utiliza o material oferecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, os "caderninhos". Os professores são orientados a utilizar esse material podendo, é claro, complementar suas aulas com outros materiais disponíveis, livros didáticos, vídeos, jogos, entre outros. Ao longo do ano são recebidos 4 Cadernos do Aluno e 4 Cadernos do Professor para serem trabalhados por bimestre. Cada caderno está dividido em "situações de aprendizagem".

A Análise Combinatória é o tema tratado no 3º bimestre da 2ª série do Ensino Médio na situação de aprendizagem 2: "Análise Combinatória: raciocínios aditivo e multiplicativo." As orientações contidas no Caderno do Professor julgam equivocadas a condução desse tema a partir da classificação dos problemas em permutações, arranjos ou combinações e sua resolução a partir da aplicação de fórmulas matemáticas. Citam a necessidade de representação dos problemas por intermédio de diagramas e/ou tabelas e da constante mobilização de estratégias de raciocínio para que, a seu tempo, os alunos possam escolher as que consideram eficientes e apropriadas a cada situação.

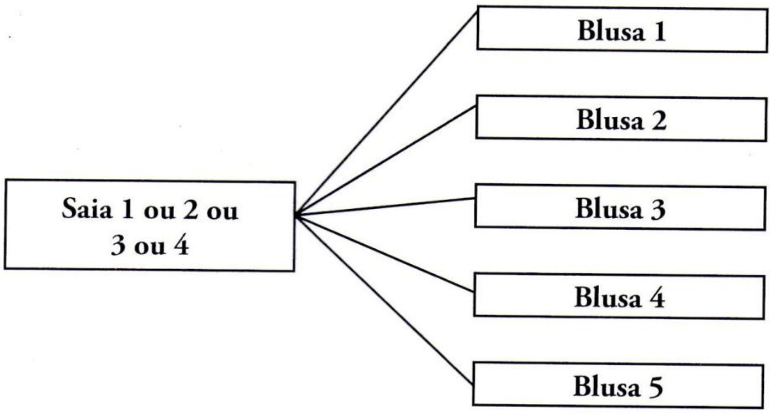
Serão apresentadas, a seguir, algumas atividades do Caderno do Aluno para ilustrar como o conteúdo é desenvolvido a partir dele. Serão feitas algumas considerações sobre as atividades orientadoras que foram desenvolvidas.

A 1ª atividade do Caderno do Aluno traz seis problemas sendo que os dois primeiros buscam incentivá-los a utilizar o princípio multiplicativo através da árvore das possibilidades, da seguinte maneira:

Atividade 1 – Construindo árvores de possibilidades

Problema 1

Considere a seguinte situação: uma menina deseja vestir-se com uma saia e uma blusa e dispõe de 4 saias diferentes e 5 blusas diferentes. O esquema a seguir representa as possibilidades de escolha da menina.



Escreva uma multiplicação para indicar o total das diferentes possibilidades de escolha da menina.

Figura 52: Situação de aprendizagem 2 – Atividade 1(problema 1) – Raciocínio aditivo e multiplicativo
Fonte: Caderno do aluno – SEE/SP, 2009.

Problema 2

Um roteiro turístico prevê a visita a duas cidades do conjunto conhecido por “Cidades Históricas de Minas Gerais”, formado pelas cidades de Ouro Preto, Mariana, Tiradentes e São João Del Rey. Quantos roteiros diferentes poderão ser traçados se:

a) Ouro Preto sempre fizer parte do roteiro?

b) Não houver restrição à escolha das duas cidades?

Figura 53: Situação de aprendizagem 2 – Atividade 1(problema 2) – Raciocínio aditivo e multiplicativo
Fonte: Caderno do aluno – SEE/SP, 2009.

A experiência da professora no Ensino Médio, orientanda que desenvolveu este estudo, mostra que os alunos estão acostumados, a partir de um exemplo apresentado pelo professor, a repetir os mesmos procedimentos para a realização de novos exercícios, o que poderia ser chamado de “siga o modelo”. Portanto, o problema 1 pretende fazer com que os alunos verifiquem o número de possibilidades de escolher uma saia e, a partir desse, verifiquem o número de possibilidades de escolher uma blusa chegando à conclusão de que o número de maneiras possíveis da menina se vestir é obtido através da multiplicação dos resultados. O problema 2, como esperado, tem o objetivo de desenvolver o mesmo raciocínio a partir de algumas condições pré-estabelecidas.

Os problemas de 3 a 6 tem por objetivo determinar o número de arranjos possíveis (não utilizando essa nomenclatura) na formação de números de 3 ou 4 algarismos, considerando as possibilidades de repetição ou não e também da formação de números pares ou ímpares.

Como já dito, após a realização das atividades orientadoras os alunos realizaram as atividades do Caderno do Aluno. Diferentemente dos anos anteriores, percebeu-se que tais atividades foram desenvolvidas com mais segurança, clareza e participação efetiva da maioria dos alunos. Acredita-se que o desenvolvimento de estratégias de raciocínio utilizado nas atividades orientadoras facilitou a resolução de novas atividades.

A atividade 2 do Caderno do Aluno considera o clássico exemplo de contagem do número de anagramas de uma palavra e da formação de filas sem e com elementos repetidos. São apresentados 13 problemas que, em sua maioria, foram resolvidos corretamente pelos alunos. Percebe-se que algumas dificuldades apresentadas se deram por falta de entendimento do enunciado da questão, como o problema 9, por exemplo:

Problema 9

Quando três meninas, Ana, Bia e Carla, e um menino, Dan, formam uma fila, temos 24 filas diferentes, como já vimos em problemas anteriores. Se, no entanto, o critério para a formação da fila não for a individualidade das pessoas, mas apenas o gênero, serão apenas 4 filas diferentes formadas por 3 mulheres (M) e 1 homem (H), da seguinte forma

MMMH, MMHM, MHMM, HMMM

Com 5 pessoas, sendo 2 meninas e 3 meninos, quantas filas diferentes poderão ser formadas no caso de:

a) Ser considerada a individualidade das pessoas?

b) Ser considerado apenas o gênero das pessoas?

Figura 54: Situação de aprendizagem 2 – Atividade 2(problema 9)- Formação de filas sem e com repetição
Fonte: Caderno do aluno – SEE/SP, 2009.

A dificuldade de interpretação do enunciado de um problema é também um dos fatores que faz com que muitos alunos desistam de resolvê-lo. Nesse momento, a interferência do professor se faz necessária para que os alunos não desanimem em relação às próximas atividades.

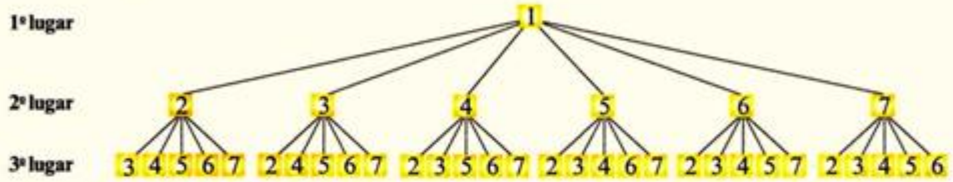
A atividade 3 intitulada “Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias”, última atividade dessa situação de Aprendizagem, tem por objetivo fazer com que o aluno perceba que em alguns grupos a troca da ordem de seus elementos não conduz a formação de um agrupamento diferente. Em outras palavras, refere-se a uma *combinação* de n elementos, tomados p a cada vez. Busca-se, através dos problemas apresentados, distinguir os dois grupos básicos de agrupamentos, arranjos e combinações, a partir do critério de serem ou não ordenáveis.

A atividade 3 é apresentada como segue:

Atividade 3 – Formação de grupos com elementos de uma ou mais categorias

Leitura e Análise de Texto

Observe a representação de uma parte da *árvore de possibilidades* para o seguinte problema: Quantos grupos ordenáveis (filas) de 3 elementos podemos formar com 7 pessoas?



Ao observar a *árvore* percebemos que, para determinada pessoa em 1º lugar, há 6 opções para o 2º colocado, e, para cada um destes, há 5 possibilidades de escolha para o 3º colocado. Assim, a quantidade de grupos ordenáveis é, nesse caso, igual ao produto $7.6.5 = 210$.

Agora, vamos mudar a questão, e perguntar: a quanto ficaria reduzido o número de agrupamentos se eles não fossem ordenáveis? Isto é, se o agrupamento "João, José, Maria" fosse o mesmo de "João, Maria, José", e o mesmo de "Maria, José, João", e igual a todos os demais em que só é trocada a ordem dos participantes? Em outras palavras, se em vez de serem feitas filas fossem feitos grupos de pessoas?

Os 210 grupos ordenáveis ficariam reduzidos a 35 grupos não ordenáveis (resultado de $210 \div 6$), uma vez que cada grupo de 3 elementos permite 6 permutações entre seus elementos.

Figura 55: Situação de aprendizagem 2 – Atividade 3 – Árvore das possibilidades
Fonte: Caderno do aluno – SEE/SP, 2009.

Após a leitura e discussão desse texto, os alunos são convidados a responder 15 problemas do mesmo tipo, sendo que nos dois primeiros são considerados agrupamentos ordenáveis e não ordenáveis e no restante, somente agrupamentos não ordenáveis. A orientação do Caderno do Professor segue no sentido de abordar os problemas segundo a lógica de primeiro calcular o número de arranjos – conjuntos ordenados – para, em seguida, "descontar" do valor obtido a troca de ordem entre os elementos de cada agrupamento. Na verdade, é a mesma forma que foram encaminhadas as atividades orientadoras aplicadas nessa pesquisa. Porém notou-se que os problemas são muito repetitivos e tornaram a atividade cansativa. Ainda são apresentados outros 5 problemas envolvendo os conceitos de permutação e de probabilidade.

Dentre esses problemas também estavam aqueles em que mais de uma categoria está presente no grupo (homem/mulher, bola preta/bola branca, entre outros) mostrando a necessidade de se calcular a quantidade de agrupamentos de cada categoria para, depois, chegar ao resultado total através do produto das quantidades parciais.

Pode-se dizer que o Caderno do Aluno traz uma quantidade significativa de problemas que explora os conceitos de arranjos simples, permutação com e sem repetição e combinações simples e que as atividades orientadoras de ensino foram essenciais para um bom entendimento e para a resolução de maneira significativa desses problemas.

A avaliação desse mesmo conteúdo em anos anteriores mostrou resultados desastrosos. Percebemos que após a realização das atividades orientadoras, os alunos se sentiram mais confiantes para apresentar estratégias, expor seu raciocínio, explorar o problema na busca da solução correta. A avaliação foi satisfatória e a compreensão dos alunos em relação ao conteúdo desenvolvido foi estruturando-se durante o decorrer de todo o processo. Mostraram-se alunos participativos, colaborativos e envolvidos no processo de ensino-aprendizagem.

Pretendemos que tais atividades orientadoras, que representam o produto final desse trabalho, possam constituir-se como fonte de informações e de reflexões para professores, pesquisadores, enfim, àqueles interessados e preocupados com o ensino da Matemática.

Referências Bibliográficas

BERGE, C. Principles of combinatorics. Tradução de John Sheehan. In: BELLMAN, Richard. **Mathematics in science and engineering.** New York: Academic Press, 1971. p.1-11.

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista Historia Mathematica**, v. 6, 1979. p.109-136.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Matemática. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental - SEF, 1997.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** 2. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. UNICAMP, 1997.

KATZ, V.J. **A history of mathematics:** an introduction. New York : Harper Collins, 1993.

KNOBLOCH, E. The mathematical studies of G. W. Leibniz on combinatorics. **Revista Historia Mathematica**, v. 1, 1974. p. 409-430.

MALAGUTTI, P. L. A. Combinatória com cores. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, nº 75, 2001. p. 3-8.

MOURA, M.O. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. (Org.). **Ensinar a ensinar.** São Paulo: Pioneira; Thomson Learning, 2001. p. 143-162.

MOURA, M.O.; MORAES, S.P.G. **Avaliação do processo de ensino e aprendizagem: contribuições da teoria histórico-cultural.** BOLEMA (Rio Claro), v. 22, nº 33, 2009. p. 97 - 116.

O’CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Jacques Ozanam.** 2002. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Ozanam.html>. Acesso em: 15 fev.2005.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno**: matemática, ensino médio – 2ª série, 3º bimestre. São Paulo: SEE, 2009.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Professor**: matemática, ensino médio – 2ª série, 3º bimestre. São Paulo: SEE, 2009.

SESIANO, J. Etnomatemática: quadrados mágicos do Islã. **Revista Scientific American Brasil**, São Paulo, n.11, 2005. p. 36-39.

SHEYNIN, O.B. Early History of the theory of Probability. **Archive for History of Exact Scence**, n.17, 1977. p.201-259.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Tradução de João Cosme S. Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1987.

TKOTZ, V. **A fórmula Sator**. 2002. Disponível em: <http://www.numaboa.com.br/criptologia/cifras/transposicao/latino.php>. Acesso em: 15 fev.2005.

WIELEITNER, H. **Historia de la Matematica.** Barcelona: Labor, 1932.

WILSON, R. J.; LLOYD, E. K. Combinatorics. **Geometries and Topology**, 1990. p.952-965.

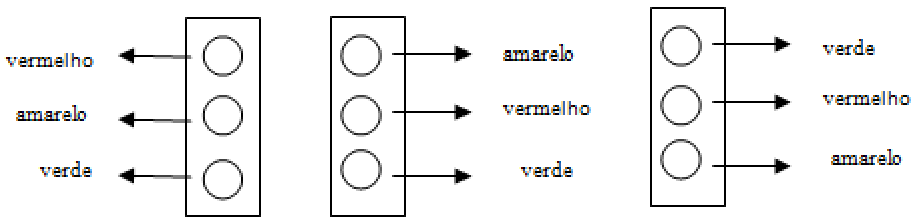
WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas.** Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1998.

APÊNDICE A

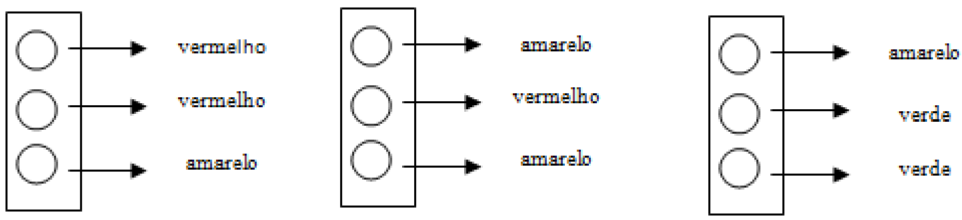
ATIVIDADE 1: OS SINAIS DE TRÂNSITO E AS CORES

Um **Semáforo** é um aparelho de sinalização urbana, rodoviária ou ferroviária que orienta o tráfego por meio de luzes. A escolha da sequência de cores: vermelho no topo, amarelo no meio e verde embaixo é uma forma de não confundir o motorista e segue convenções internacionais. Sabemos que vermelho significa ‘PARE’, amarelo ‘AGUARDE’ e verde ‘SIGA’.

Essa atividade tem por objetivo construir outros tipos de semáforos que não se preocupam com as facilidades visuais dos motoristas. Inicialmente, vamos considerar que a ordem em que as cores aparece é importante, ou seja, os sinais abaixo são diferentes:



E também, que as cores não podem se repetir, ou seja, os sinais abaixo não são permitidos:



1) Quantos e quais são os diferentes sinais de trânsito que podemos construir com três cores, respeitando a ordem e sem repeti-las?

2) Agora responda, quantos semáforos poderíamos formar se pudéssemos repetir as cores? Você conseguiria construí-los?

3) Vamos então pensar...quantas diferentes placas de carro podem ser confeccionadas (considerando uma seqüência de 3 letras e 4 números)? Se todo brasileiro possuísse um carro, as placas seriam suficientes?

APÊNDICE B

ATIVIDADE 2: SALADA DE FRUTAS

Essa atividade consiste em pensarmos nas diferentes formas de fazermos uma deliciosa salada de frutas utilizando maçãs, peras e laranjas.

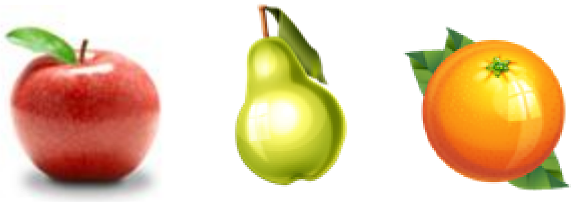
1) De quantas maneiras diferentes você pode fazer uma salada de frutas utilizando duas dessas frutas? Mostre as possibilidades!

2) E se fossem três? Ou seja, se você utilizasse todas as frutas disponíveis! De quantas maneiras diferentes você poderia montar essa salada?

3) E se tivéssemos 5 frutas? De quantas maneiras poderíamos montar uma salada com 3 delas? E com 4? E com todas?

4) Agora, imagine a seguinte situação:

Um feirante possui, em sua banca, maçãs, peras e laranjas em grande quantidade. Desejando atender melhor a sua clientela, o feirante resolveu empacotar todas as suas frutas, de modo que cada pacote contivesse exatamente 5 frutas. Quantos diferentes tipos de pacotes poderá o feirante oferecer à sua clientela?



APÊNDICE C

ATIVIDADE 3: QUEBRA-CABEÇAS COM CORES

Recorte e pinte a faixa formada por quadradinhos entregue por seu professor, de acordo com as cores sugeridas na figura abaixo.

AM	VM	VD	AZ	AM	VM	VD	AZ

Legenda:

AM = amarelo; **VM** = vermelho; **VD** = verde; **AZ** = azul.

Dobre nas linhas entre os quadradinhos e pinte o verso da mesma cor que a frente.

A atividade consiste em dobrar a fita nas linhas marcadas, sobrepondo um quadrado sobre o outro com um efeito sanfona e através de dobras e sobreposições formar padrões ordenados pré-definidos com algumas das quatro cores.

1) Vamos obter todos os padrões possíveis com 2 quadrados.

a) Você sabe dizer de antemão quantos padrões conseguiremos formar? ____________

____

b) Agora, manipule a fita e tente montá-los. Represente-os a seguir:

c) Os resultados obtidos nos itens a) e b) são os mesmos? O que você observou?

____

____

____

2) Vamos, agora, montar padrões com 3 quadrados.

a) Quantos padrões diferentes podemos formar com 3 quadrados e 4 cores?____

b) Você consegue identificar alguma(s) impossibilidade(s) nesses padrões? Qual(is)? Por que elas acontecem? ____

____

____

c) Represente todos os padrões que podem ser formados:

d) Verifique quais deles realmente podem ser obtidos com a utilização da fita.

e) Explique como você chegou aos resultados.

____

____

____

____

____

____

3) Para continuar nossa investigação vamos estudar as configurações com 4 quadrados.

a) Quantos padrões existem? Pensem nas possibilidades e nas impossibilidades que a fita provoca!!!

____

____

____

____

____

b) Quantos padrões podem ser formados com a utilização da fita? Marque um X nas configurações que conseguir fazer:

Am	Vm	Vm	Am	Am	Am	Vm	Vd	Am	Am	Vm	Az	Am	Am	Vd	Vm
Am	Am	Vd	Vd	Am	Am	Vd	Az	Am	Am	Az	Vm	Am	Am	Az	Vd
Am	Am	Az	Az	Am	Am	Vm	Vm	Am	Vm	Am	Vm	Am	Vm	Am	Vd
Am	Vm	Vd	Am	Am	Vm	Vd	Vm	Am	Vm	Vm	Vd	Am	Vm	Az	Am
Am	Vm	Az	Vm	Am	Vm	Vd	Vd	Am	Vm	Az	Vd	Am	Vm	Vd	Az
Am	Vm	Am	Az	Am	Vm	Az	Az	Am	Vm	Vm	Az	Am	Vd	Vd	Am
Am	Vd	Am	Vd	Am	Vd	Vd	Az	Am	Vd	Az	Vd	Am	Vd	Vd	Vm
Am	Vd	Vm	Vd	Am	Vd	Az	Am	Am	Vd	Am	Az	Am	Vd	Az	Vm
Am	Vd	Vm	Az	Am	Vd	Am	Vm	Am	Vd	Vm	Vm	Am	Vd	Az	Az
Am	Az	Az	Am	Am	Az	Am	Az	Am	Az	Az	Vd	Am	Az	Vd	Az
Am	Az	Az	Vm	Am	Az	Vm	Az	Am	Az	Am	Vd	Am	Az	Vd	Am

Am	Az	Am	Vm	Am	Az	Vm	Vd	Am	Az	Vd	Vd	Am	Az	Vm	Vm
Vm	Am	Am	Vm	Vm	Am	Am	Vd	Vm	Am	Vd	Vm	Vm	Am	Vm	Vd
Vm	Am	Az	Vm	Vm	Am	Vd	Vd	Vm	Am	Az	Vd	Vm	Am	Vd	Az
Vm	Am	Am	Az	Vm	Am	Az	Az	Vm	Am	Vm	Az	Vm	Vm	Vd	Vd
Vm	Vm	Az	Az	Vm	Vm	Vd	Az	Vm	Vm	Az	Vd	Vm	Vm	Am	Az
Vm	Vm	Am	Vd	Vm	Vd	Vd	Vm	Vm	Vd	Vm	Vd	Vm	Vd	Vm	Az
Vm	Vd	Az	Vm	Vm	Vd	Am	Vd	Vm	Vd	Am	Az	Vm	Vd	Az	Vd
Vm	Vd	Vd	Az	Vm	Vd	Az	Az	Vm	Az	Az	Vm	Vm	Az	Am	Vd
Vm	Az	Vm	Vd	Vm	Az	Vd	Vd	Vm	Az	Az	Vd	Vm	Az	Am	Az
Vm	Az	Vm	Az	Vm	Az	Vd	Az	Vd	Am	Am	Vd	Vd	Am	Vm	Vd
Vd	Am	Az	Vd	Vd	Am	Am	Az	Vd	Am	Vm	Az	Vd	Am	Vd	Az
Vd	Am	Az	Az	Vd	Vm	Vm	Vd	Vd	Vm	Az	Vd	Vd	Vm	Am	Az
Vd	Vm	Vm	Az	Vd	Vm	Vd	Az	Vd	Vm	Az	Az	Vd	Vd	Am	Az
Vd	Vd	Vm	Az	Vd	Vd	Az	Az	Vd	Az	Az	Vd	Vd	Az	Am	Az
Vd	Az	Vm	Az	Vd	Az	Vd	Az	Az	Am	Am	Az	Az	Am	Vm	Az
Az	Am	Vd	Az	Az	Vm	Vm	Az	Az	Vm	Vd	Az	Az	Vd	Vd	Az

c) Escreva seus comentários sobre as tarefas realizadas.