UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

LUIZ ALFREDO DEALIS BILHÉO

O ENSINO DE FUNÇÕES EM ESCOLA TÉCNICA DE NÍVEL MÉDIO POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E USO DA CALCULADORA GRÁFICA

SÃO CARLOS
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

Luiz Alfredo Dealis Bilhéo

Orientadora: Prof[a]. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin

O ENSINO DE FUNÇÕES EM ESCOLA TÉCNICA DE NÍVEL MÉDIO POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA E USO DA CALCULADORA GRÁFICA

Dissertação de Mestrado profissional apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação:
Prof[a]. Doutora Yuriko Yamamoto Baldin.

SÃO CARLOS
2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

B595ef

Bilhéo, Luiz Alfredo Dealis.
O ensino de funções em escola técnica de nível médio por meio da modelagem matemática e uso da calculadora gráfica / Luiz Alfredo Dealis Bilhéo. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
158 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Modelagem matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Funções (Matemática). I. Título.

CDD: 511.8 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Yuriko Yamamoto Baldin (Orientadora)
DM – UFSCar

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
CMCC – UFABC

Prof. Dr. José Antonio Salvador
DM – UFSCar

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela saúde e disposição para as incansáveis e longas viagens do Rio de Janeiro até São Carlos. Um agradecimento especial ao técnico Thiago que cedeu sua casa para fazer os créditos em Janeiro e Julho. Agradeço a toda equipe que trabalha, os discentes e principalmente aqueles que criaram o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas Ênfase em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, que realmente é um programa de pesquisa voltado para o Ensino Básico de Matemática e Física.

Em especial tenho que agradecer muito a Professora Doutora Yuriko que é um exemplo de determinação ao Ensino Brasileiro que mesmo com a dor da perda recente de seu marido Nélio, continua sua luta incansável pela melhoria do aprendizado de matemática e orientando milhares de professores do Ensino Básico. Muito obrigado Yuriko, pois no primeiro dia que viajei para conversar com ela sobre a dissertação do mestrado, não tinha ideia do que iria fazer e estava disposto a desistir, mas com a energia contagiante desta brilhante Doutora, me contaminou e saiu este trabalho aqui apresentado.

Na minha família agradeço aos meus pais que sempre deram o maior apoio possível para eu estudar, meu pai por várias noites sem dormir, trabalhando a noite toda, ou às vezes saindo de madrugada para trabalhar, arriscando a sua vida para dar condições que eu estudasse. A minha mãe que acordou inúmeras vezes de madrugada preparando a minha alimentação e me orientando todos os dias. Sem vocês não conseguiria apresentar este trabalho, muito obrigado.

RESUMO

A dificuldade de aprender conceitos matemáticos principalmente no ensino médio é um problema presente nas escolas brasileiras. Esta dificuldade se apresenta como um desafio maior quando se consideram as diferentes categorias de ensino em nível médio, por exemplo, uma escola técnica profissionalizante. A proposta deste trabalho foi motivada por este desafio para duas turmas do primeiro ano do curso técnico de meio ambiente. A pesquisa deste trabalho consistiu na exploração de uma metodologia de ensino do conceito de função que mostre ao aluno a importância deste conteúdo num curso técnico, oferecendo uma oportunidade de adquirir conhecimento sobre a modelagem matemática de problemas por meio de funções, em especial das funções constantes no currículo escolar. O trabalho apresenta como resultado final as atividades propostas e testadas nas duas turmas, em formato que possam ser utilizadas e aproveitadas por professores que tenham o mesmo desafio e interesse na pesquisa da melhoria de ensino/aprendizagem em nível de ensino médio. As atividades elaboradas se baseiam na metodologia de modelagem matemática aplicada dentro da resolução de problemas contextualizados e no uso auxiliar da calculadora gráfica para construir tabelas, gráficos e expressões por métodos de regressão. O trabalho apresenta um embasamento teórico para a pesquisa realizada, primeiro por meio de documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC) que determinam os parâmetros para os conteúdos do currículo escolar, além de bibliografia que permitiu tecer reflexões sobre as diferenças entre o ensino tradicional e tendências modernas, o potencial da tecnologia como auxiliar para melhorar o aprendizado. O trabalho apresenta também um estudo teórico do conteúdo de funções, necessário para fundamentar as atividades de sala de aula realizadas.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Resolução de Problemas. Calculadora Gráfica. Caracterização de Função Afim e Quadrática.

ABSTRACT

The difficulty of students in learning concepts of mathematics especially at high schools is current problem in Brazilian schools. This difficulty is a challenge even bigger as the different high school systems are considered, for example, the technical professional high schools. Such challenge for two classrooms of first grade (10th grade in K-12) of a technical course in environmental studies motivated the proposal of this dissertation. The research work explored a teaching methodology of the concept of function that would show to the student the importance of this concept in a technical course, while offering an opportunity to know about the mathematics modeling that uses functions, especially those from school curriculum. The final results of this dissertation consisted of working sheets that were planned, executed and evaluated in two classrooms. The worksheets are formatted so that they can be used by teachers who share the same challenge and interest in developing research to improve the teaching/learning mathematics at high - school level. The proposed activities are based on mathematics modeling of problems in the context of the students' course, and on the educational use of a graphic calculator to construct tables, graphs and regression curves. The official documents from Ministry of Education (MEC) about curriculum standards and some theoretical references have been used for our reflections about the differences between traditional teaching style and new educational trends, and about the potential of technology to improve the learning. The work presents also a study of the concept of function that supported the planning of the proposed classroom activities.

Key words: Mathematics Modeling. Problem Solving. Graphic Calculator. Characterization of Affine and Quadratic Functions.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática sempre foi vista pelos alunos e público em geral como muito difícil. No ensino médio é mais difícil identificar a utilidade da matemática no dia-a-dia do que no ensino fundamental. Um desafio importante nessa discussão é oferecer o ensino de matemática com qualidade para todos os cidadãos, sem que para isso tenha que introduzir muitos conteúdos sem objetividade em suas vidas. Segundo (DRUCK, 2005) as questões importantes que devem ser discutidas para o trabalho do professor de matemática são:

> -Quais as necessidades da sociedade? E as necessidades de nossos alunos?
>
> -Que conteúdos ensinar e por quê? Quem decide que conteúdos devem ser ensinados?
>
> -Como aprimorar a formação de nossos professores?
>
> -Como o ensino da matemática deve responder à evolução da tecnologia?
>
> -Como essa tecnologia pode auxiliar no ensino de matemática?

Fui professor da rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro de 2003 até 2009, e incomodava muito a situação do aprendizado dos alunos em minhas aulas, pois ensinava o conteúdo e passava os exercícios do livro que os mesmos usavam, mas o interesse e motivação dos alunos eram muito poucos. Como professor, estava desestimulado sem perspectiva de futuro e com isso precisava fazer alguma coisa para mudar as minhas aulas. Em 2010 surgiu um novo desafio como professor de matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro Campus Pinheiral (antiga escola técnica agropecuária), portanto busquei recuperar a minha autoestima na pesquisa cursando o mestrado de ensino de ciências na UFSCar. Regente de turmas do ensino técnico de meio ambiente e agropecuária do primeiro ano, embora exista uma pré-seleção para os novos alunos, a maioria chega de colégios municipais de cidades vizinhas a Pinheiral apresentando grandes dificuldades em matemática.

No currículo do primeiro ano do ensino médio, encontra-se o primeiro obstáculo para o professor que é ensinar o conceito de função. A primeira pergunta que provavelmente vem na cabeça dos alunos é “por que estudamos funções?”. Uma proposta didática para o ensino de função pode ser a utilização de uma situação problema que leve os alunos a discutirem e elaborarem o conhecimento na resolução da mesma.

Ferramentas auxiliares como a calculadora, se usadas de forma correta, contribuem na construção de novas possibilidades de ensino, condicionando os alunos a perceber a importância dos recursos tecnológicos presentes no meio social. As calculadoras permitem aos alunos a exploração de ideias numéricas e de regularidades, a realização de experiências importantes para o desenvolvimento de conceitos, e a investigação de aplicações realistas como modelos matemáticos associados a situações reais, ao mesmo tempo em que colocam a ênfase nos processos de resolução de problemas.

Infelizmente a metodologia adotada pelas escolas brasileiras no ensino de matemática vem mostrando resultado insatisfatório por diversas razões. As definições e resultados de fórmulas são apresentados aos alunos, na maioria das vezes sem justificativa alguma, consequentemente os alunos memorizam as fórmulas através de exercícios repetitivos. As aplicações geralmente são apresentadas aos alunos fora da sua realidade, mascarando dessa forma a importância da matemática nas aplicações, e isto estava ocorrendo comigo. Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar o estudo, por vezes árido, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe.

Diante desses desafios que nós professores temos que enfrentar, a proposta da pesquisa realizada com as duas turmas do curso técnico de meio ambiente, uma com 35 alunos e outra com 28 alunos, foi tentar explorar o ensino de funções através da modelagem matemática de problemas contextualizados na área de meio ambiente, dando ênfase a etapas de resolução de problemas com o recurso da calculadora gráfica. Foram elaboradas e realizadas atividades trabalhadas em grupos durante o ano de 2010, e repetidas no primeiro semestre de 2011, com o objetivo de explorar o conceito e as caracterizações de funções afim e quadrática com suas respectivas propriedades, que fazem parte do currículo do primeiro ano do curso técnico, além de mostrar outros tipos de funções como a polinomial e a racional, ampliando assim a visão do aluno para outros tipos de gráficos. A avaliação do aproveitamento do aluno sobre a aprendizagem de conceitos baseou-se nas turmas de 2011.

A escolha de modelagem matemática na etapa de resolução de problemas, já com os dados coletados, foi motivada por ser um professor iniciante nesta metodologia de ensino, consequentemente um pouco inseguro e também pela preocupação em cumprir o programa de matemática, já que a modelagem em todo o seu processo requer um tempo maior para ser realizada. Além disso, quando as atividades foram iniciadas, as turmas não eram de responsabilidade direta, e não poderia dispor do tempo necessário para implementar todo o processo de modelagem. No entanto, a ideia de utilizar a modelagem como ferramenta fundamental para trabalhar conceitos abstratos sempre foi a motivação deste trabalho.

Portanto, a problemática a ser desafiada é se realmente essa estratégia de ensino estimula os alunos a aprenderem o conceito de função e suas propriedades, assim como mostrar aos alunos a importância da matemática no curso técnico de meio ambiente.

Relatando a distribuição do trabalho, o primeiro capítulo apresenta a fundamentação da pesquisa, constituindo a base teórica do trabalho desenvolvido. Ele está dividido em cinco seções como descreveremos a seguir.

Na seção 1.1 procuramos algumas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), assim como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) que ajudou a colocar em prática na sala de aula uma nova metodologia de ensino. Outra orientação que procuramos nesta seção foi o estudo da área seis da Matriz de Referência para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) desenvolvido pelo Inep, que é fundamental para o futuro dos alunos do ensino técnico e orienta para o estudo de função que foi o assunto desenvolvido em nosso trabalho. A proposta do Ministério da Educação (MEC) do programa de ensino médio inovador cujo objetivo é a melhoria da qualidade do ensino médio, foi outra fonte de embasamento do nosso trabalho.

Na seção 1.2 comentamos as estratégias usadas no ensino tradicional e as estratégias que se espera do ensino moderno, ou seja, dando ênfase na importância de mudar a maneira como o professor apresenta o conteúdo em sala de aula. Para mostrar na prática esta mudança, demos um exemplo sobre o estudo de função, diferenciando o enfoque mais moderno do enfoque mais tradicional, ou seja, tentando passar de uma postura estática para uma mais dinâmica. A ideia pretendida não é abandonar completamente uma metodologia pela outra, mas usar outras estratégias com o objetivo de melhorar o aprendizado do aluno e consequentemente um melhor resultado na avaliação do Saeb.

Na seção 1.3 falamos da utilização da calculadora gráfica como potencial para auxiliar as atividades de ensino, explorando além do que pode ser feito com lápis e papel e exemplificando com pesquisas de sucesso e fracasso do uso da mesma. Discutimos também a calculadora gráfica na educação como uma tecnologia inteligente e descrevemos as vantagens do uso da mesma em sala de aula, transformando-a em sala/laboratório.

Na seção 1.4 demos ênfase à resolução de problemas como destaque no ensino de matemática e sua integração com a modelagem através dos argumentos de Blum (1989). Destacamos também a parceria com a calculadora gráfica que pode tornar os problemas mais interessantes sob ponto de vista da aprendizagem.

Finalizando este capítulo na seção 1.5, apresentamos uma breve definição de modelo matemático e as etapas do processo de modelagem matemática, assim como pesquisas que apontam a importância da modelagem matemática quando utilizada como uma metodologia do ensino básico, e alertando sobre os obstáculos que podem ocorrer quando aplicada em sala de aula, levantados por Bassanezi (2010). Em seguida, abordamos algumas perspectivas da modelagem matemática que podem ser usadas tanto como um método científico de pesquisa como uma metodologia de ensino aprendizagem, e a classificação por casos que justifica a introdução das atividades de modelagem matemática no contexto escolar, reforçando a orientação para o nosso trabalho. Encerramos a seção com discussão do uso da calculadora como recurso auxiliar para implementar a modelagem matemática nas escolas.

No Capítulo 2, estudamos o conceito de função e suas propriedades, assim como de função afim, destacando o teorema de caracterização da mesma, ocorrendo o mesmo para a função quadrática. Discutimos também um pouco uma função polinomial e função racional.

No Capítulo 3 descrevemos as cinco atividades desenvolvidas para as quatro turmas do primeiro ano do ensino médio técnico de meio ambiente durante o ano de 2010 e uma avaliação das mesmas.

No Capítulo 4 descrevemos como as atividades foram desenvolvidas em sala de aula e o Capítulo 5 apresenta uma análise da avaliação das turmas de 2011 quanto ao aproveitamento da aprendizagem de funções e análise do questionário das atividades inovadoras.

O Capítulo 6 finaliza com as conclusões deste trabalho.

As Atividades que constituem o produto do Mestrado Profissional estão nos Apêndices A, B, C, D e E, no formato que os interessados poderão utilizar na sala de aula. Suas análises e viabilidades estão discutidas no corpo da dissertação. Os Apêndices F e G apresentam quadros de avaliação das reações dos alunos diante do uso da tecnologia na aprendizagem de matemática, baseados num questionário adaptado pela orientadora.

Pretendemos que este trabalho seja o início de uma longa jornada que nós professores devemos assumir para tentar tornar as aulas mais dinâmicas, em que o aluno construa seus conhecimentos em parceria com o professor.

CAPÍTULO 1: FUNDAMENTAÇÃO DA PESQUISA

Neste capítulo destacamos alguns itens da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) relacionado à proposta deste trabalho que estimulam o professor a pesquisar novas metodologias para o ensino, em busca de um aprendizado geral para o aluno. Também nos referimos a um Projeto do Ministério da Educação e Cultura (MEC) sobre o Ensino Médio Inovador, assim como aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Médio. Segundo este documento, temos:

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio são o resultado de meses de trabalho e de discussão realizados por especialistas e educadores de todo o país. Foram feitos para auxiliar as equipes escolares na execução de seus trabalhos. Servirão de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática diária, ao planejamento de aulas e sobretudo ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional. (BRASIL, 2009).

Buscamos outro embasamento para o trabalho nas competências e habilidades da Matriz de Referência divulgada pelo MEC, por meio do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Texeira (Inep) para a prova de matemática e suas tecnologias exigidas para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). São recomendações de diretrizes curriculares que constituem marcos iniciais do nosso trabalho de dissertação, cujo objetivo primordial é contribuir para a prática das formas inovadoras do ensino/aprendizagem de funções, em nível de Ensino Médio.

Discutimos neste capítulo a diferença entre ensino tradicional e moderno com a intenção de provocar uma reflexão dos professores do ensino básico sobre o planejamento em sala de aula, o potencial didático da calculadora gráfica na aprendizagem de funções, a resolução de problemas com uso da tecnologia como estratégia de ensino aprendizagem, e o papel da modelagem matemática como metodologia que torna eficaz a contextualização no ensino aprendizagem de matemática.

1.1 **Pressupostos para o ensino de matemática segundo Documentos Oficiais para o Ensino Médio**

No contexto histórico da educação brasileira, cabe destacar que o Ensino Fundamental e a Educação Superior sempre tiveram seus objetivos e finalidades claramente delineadas nas legislações educacionais, mas somente a partir da aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, em 1996, o Ensino Médio passou a ser visto como etapa da educação básica, com diretrizes e finalidades expressas nos Artigos 35 e 36.

Na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei n^0 9394/96) o artigo 35 diz:

> O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
>
> - A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
>
> - A preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
>
> - O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
>
> - A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Dentre os itens acima, destacamos o quarto item que apresenta o relacionamento da teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. O conteúdo curricular do Ensino Médio apresenta o conceito de funções e suas propriedades com muito destaque, devido à importância em fazer parte da linguagem matemática que possibilita as aplicações. Ao considerar o desafio de ensinar o conceito de função e suas propriedades no Ensino Médio, devemos então pesquisar as metodologias adequadas, como a resolução de problemas integrada à modelagem matemática, como uma tentativa de motivar a aprendizagem dos alunos, aliando a teoria com a prática.

Segundo o artigo 36, o currículo do Ensino Médio observará o disposto e as seguintes diretrizes:

> I - destacará a educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura; a língua portuguesa como instrumento de comunicação, acesso ao conhecimento e exercício da cidadania;
>
> II - adotará metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes;
>
> III - será incluída uma língua estrangeira moderna, como disciplina obrigatória, escolhida pela comunidade escolar, e uma segunda, em caráter optativo, dentro das disponibilidades da instituição.
>
> IV – serão incluídas a Filosofia e a Sociologia como disciplinas obrigatórias em todas as séries do ensino médio. (Incluído pela lei nº 11.684, de 2008).

Chamou-nos atenção neste artigo a importância de estimular os estudantes por meio da metodologia e avaliação pelo professor, que também nos motivou na proposta do nosso trabalho.

Em particular, o parágrafo 1º deste artigo, diz:

> § 1º. – Os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação serão organizados de tal forma que, ao final do ensino médio o educando demonstre: Domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;

Esta recomendação embasa nossa adoção de incluir o uso de tecnologias na pesquisa das atividades didáticas e as metodologias para introdução das mesmas em sala de aula.

Observamos também que o Ministério da Educação (MEC) desenvolveu programas e projetos em parceria com municípios, estados e o Distrito Federal para a implantação de um Ensino Médio Inovador que tem como objetivo a melhoria da qualidade do Ensino Médio nas escolas.

Segundo a Diretoria de Concepções e Orientações Curriculares para Educação Básica da Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação (BRASIL, 2009), temos:

> O Programa Ensino Médio Inovador surgiu como uma forma de incentivar as redes estaduais de educação a criar iniciativas inovadoras para o ensino médio. A intenção é estimular as redes estaduais de educação a pensar novas soluções que diversifiquem os currículos com atividades integradoras, a partir dos eixos trabalho, ciência, tecnologia e cultura, para melhorar a qualidade da educação oferecida nessa fase de ensino e torná-la mais atraente.
> A proposta do MEC tem cinco questões centrais a serem discutidas no currículo do ensino médio. A primeira é estudar a mudança da carga horária mínima do ensino médio para 3 mil horas – um aumento de 200 horas a cada ano. Outra mudança é oferecer ao aluno a possibilidade de escolher 20% de sua carga horária e grade curricular, dentro das atividades oferecidas pela escola. Faz parte ainda da proposta associar teoria e prática, com grande ênfase a atividades práticas e experimentais, como aulas práticas, laboratórios e oficinas, em todos os campos do saber; valorizar a leitura em todas as áreas do conhecimento; e garantir formação cultural ao aluno.

O Ensino Médio Inovador estabelece dentro do seu referencial para proposições curriculares e condições básicas para os projetos das escolas (BRASIL, 2009), o seguinte item:

> Estímulo a atividades teórico práticas apoiadas em laboratórios de Ciências, Matemática e outros que auxiliem os processos de aprendizagem nas diferentes áreas do conhecimento. (2009, p.18)

A rede estadual de educação do Rio de Janeiro está adotando estas orientações, mas a rede municipal e a federal não adotaram. O estímulo a atividades teórico práticas em laboratório de matemática apresentado acima como referencial para projetos na escola reforçou nossa ideia de trabalhar a calculadora gráfica em sala de aula em nossas atividades, pois o uso da mesma, no nosso entendimento, torna a sala de aula em um laboratório de matemática.

Aprofundando ainda a nossa reflexão sobre a fundamentação da nossa pesquisa, podemos dizer que a tecnologia e a matemática estão caminhando de forma a transformar a relação escola e matemática, além do fato que as informações chegam cada vez mais rápidas exigindo novas competências para o aluno e também para o professor.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2000, p.41.) sobre o conhecimento de matemática:

> Para isso, habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidas ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações.
> Assim, as funções da Matemática descritas anteriormente e a presença da tecnologia nos permitem afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.

De fato, os objetivos do ensino de Matemática para o Ensino Médio de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2000, p.42), seguem, com destaque em negrito nosso:

> **-compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam [ao aluno] desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;**
>
> **-aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;**
>
> -analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
>
> -desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
>
> **-utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;**
>
> **-expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;**
>
> -reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
>
> **-promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.**

Os destaques acima apontam para a metodologia de resolução de problemas como estratégia fundamental no processo de ensino aprendizagem da matemática.

Sobre esta metodologia, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio PCN+(2002,p.112-3), dizem:

> - A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.
>
> - Na resolução de problema o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, preservar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.

Ainda o (PCN, 2000, p. 52) considera a resolução de problemas como um aspecto importante a ser valorizado nas aulas de matemática, e nesse processo:

> - os alunos, confrontados com situações problemas, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

Portanto, as atividades propostas e pesquisadas no nosso trabalho foram elaboradas segundo a perspectiva de resolução de problemas que busca motivar o aluno e esclarecer o processo de modelagem matemática em situações contextualizadas no seu curso profissionalizante.

As questões do novo ENEM (2009) são elaboradas com base na Matriz de Referência divulgada pelo MEC. Nessa matriz estão descritas as competências e habilidades que se esperam do aluno do ensino médio. Dentre as sete áreas de competências da Matriz de Referência para a prova de Matemática e suas Tecnologias destacamos a competência da área 6, que diz:

> Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
>
> H24-Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
>
> H25-Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
>
> H26-Analisar informações expressas em gráficos e tabelas com recurso para a construção de argumentos. (BRASIL, 2009).

A competência acima citada se aplica de maneira clara à situação de alunos de ensino médio técnico e norteou o planejamento de atividades propostas.

Enfim, é importante que o aluno quando terminar o ensino médio domine as tecnologias atuais. Os artigos destacados acima apontam para uma necessidade de inclusão dos aspectos tecnológicos na educação e serviram de base fundamental para o trabalho desta dissertação que desenvolveu a metodologia de modelagem e resolução de problemas com recurso de uma calculadora gráfica.

1.2 **A educação tradicional e a educação moderna**

Nesta seção, colocamos algumas reflexões sobre a necessidade sentida neste trabalho ao propor forma inovadora de ensino, comparando criticamente a educação tradicional e a que se espera de uma educação moderna, partindo da própria experiência e depois aprendida nas pesquisas educacionais.

O modelo tradicional de ensino trata o conhecimento como um conteúdo, como informações, coisas e fatos a serem transmitidos ao aluno. O aluno, segundo esta visão, vai para a escola para receber uma educação baseada no que foi transmitido pelo professor. Segundo este modelo, o ensino é a transmissão de informações. A aprendizagem é a recepção de informações e seu armazenamento na memória. O professor apresenta as informações contidas nos livros de forma mais acessível e consequentemente o aluno recebe o conhecimento já pronto e organizado. Os livros didáticos tradicionais tendem a adaptar-se a práticas de ensino com estilos predominantemente expositivos e informativos. Visto que a meta principal da educação tradicional é transmitir informações, os livros estão cheios de informações para serem transmitidas.

O último resultado do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) de 2009, que avalia uma amostra de alunos matriculados no 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio de escolas públicas e particulares, rurais e urbanas a nível nacional, mostrou o estado de Rio de Janeiro em penúltimo lugar, na frente apenas do Piauí. Este quadro não corresponde a uma aprendizagem que deveria ocorrer. Entre diversos fatores a ponderar a respeito, nós professores, diretores, pais e todos outros segmentos da sociedade envolvida no contexto escolar precisam mudar a estratégia atual de ensino e consequentemente de aprendizagem.

A responsabilidade do professor não é apenas transmitir informações ou apresentar explicações do texto contido nos livros didáticos, e sim em ajudar o aluno a descobrir e aprender. Podemos considerar o ensino moderno como qualquer tentativa de metodologia de ensino que diferencie da tradicional, ou seja, o professor pode mudar o enfoque do conteúdo que será ensinado em sala de aula. Segundo Lellis e Imenes (2001), “O enfoque engloba a forma de abordagem e tratamento de cada assunto, bem como as ênfases que serão estabelecidas em seu estudo”.

Para exemplificar esta ideia, vamos considerar o enfoque dado ao estudo de função. Um enfoque tradicional deste conteúdo consiste em apresentar as funções como uma relação particular entre elementos de dois conjuntos, e também exercícios pedindo que se encontre, por exemplo, a imagem de funções abstratas, que usualmente não estão ligadas a nenhuma aplicação. Neste tratamento, enfatizam-se problemas cujo contexto é exclusivamente matemático, estabelecendo procedimentos de resolução mais ou menos algorítmicos. Por outro lado, um enfoque mais moderno do mesmo conteúdo aborda as funções experimentando uma relação entre grandezas variáveis. As funções estudadas são as mesmas que ocorrem no primeiro enfoque, dentro do conteúdo curricular, mas a ênfase é posta na compreensão dos conceitos ao oportunizar o encontro de modelos matemáticos para problemas contextualizados na realidade do aluno, podendo utilizar a tecnologia para a resolução do mesmo.

A transição da educação tradicional para um enfoque mais moderno é objeto de pesquisa da educação matemática, como em Carraher (2008).

Segundo esta referência, algumas características da educação tradicional são:

> -o papel dominante do professor, que dirige a aprendizagem do aluno;
>
> -a ênfase em respostas certas – apenas uma resposta certa para cada problema;
>
> -a noção de que o conhecimento consiste do acúmulo de fatos e informações isoladas;
>
> -a utilização de problemas que não incentivam o aluno a pensar, a raciocinar.

Algumas das principais ideias que implicam formas de ensino moderno são apresentadas em Carraher (2008) da seguinte forma:

> -Nosso ensino é bom na medida em que incentiva o aluno a pensar e raciocinar ao invés de imitar.
>
> -A aprendizagem ocorre através de descobertas realizadas pelo aluno.
>
> -A educação precisa começar onde o aluno se encontra. Como o aluno pensa sobre o problema? A constatação disso é mais importante que a resposta do problema.
>
> -O educador moderno trata os erros do aluno como hipótese, tem prazer em discuti-los.
>
> -Ele seleciona problemas que estimulam o raciocínio ao invés de sobrecarregar a memória.

A grande dificuldade para a maioria dos professores se encontra na seleção de problemas que estimulem os alunos, problemas contextualizados na realidade do aluno, pois o professor segue os exemplos oferecidos nos textos dos livros didáticos, e esses textos geralmente seguem o modelo tradicional de ensino. Geralmente, o problema matemático é trabalhado pelo aluno de forma mecânica, isto é, o aluno utiliza precisamente a fórmula que acabou de estudar, sem que, muitas vezes, o aluno compreenda o que está fazendo. Em geral os professores estão acostumados em relatar os fatos e informações consideradas importantes nas aulas de matemática, e esquecem a importância de estimular o raciocínio, o pensamento ativo, a reflexão e a descoberta pelo aluno, que tornariam a aula mais dinâmica.

Segundo Carraher (2008):

> Como podemos incentivar a descoberta por parte dos alunos se estamos sempre lhe dizendo as coisas que deve aprender? Como vai o aluno ativamente procurar soluções para problemas se não levantarmos questões reais? Se quisermos que alguém procure soluções, temos que apresentar-lhe problemas.

Cabe ao professor moderno relacionar e adaptar os problemas de forma a estimular o raciocínio do aluno.

1.3 **O potencial educativo da calculadora gráfica e seus efeitos na aprendizagem da matemática**

O mundo globalizado de hoje necessita de pessoas para lidar com problemas que são mal definidos, problemas que muitas vezes têm mais de uma solução e aqueles que muitas vezes requerem múltiplas abordagens. As pessoas são obrigadas a trabalhar em cooperação em várias situações, e a capacidade de usar a tecnologia é essencial.

Com o propósito de apoiar os sistemas públicos de ensino na busca por soluções que promovam a qualidade da educação, o Ministério da Educação apresentou o Guia de Tecnologias Educacionais (BRASIL, 2009), composto pela descrição de cada tecnologia e por informações que auxiliem os gestores a conhecer e a identificar aquelas que possam contribuir para a melhoria da educação em suas redes de ensino.

Segundo o (BRASIL, 2009) este trabalho teve como objetivos específicos:

> • pré-qualificar tecnologias educacionais como referencial de qualidade, para utilização por escolas e sistemas de ensino;
>
> • disseminar padrões de qualidade de tecnologias educacionais que orientem a organização do trabalho dos profissionais da educação básica;
>
> • estimular especialistas, pesquisadores, instituições de ensino e pesquisa e organizações sociais para a criação de tecnologias educacionais que contribuam para elevar a qualidade da educação básica;
>
> • fortalecer uma cultura de produção teórica voltada à qualidade na área da educação básica e seus referenciais concretos.

Com o advento das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), a ação docente precisa assumir novos espaços na escola. Isto traz muita preocupação para os professores, pois ela influencia as disciplinas escolares pela possibilidade de exploração de alguns conteúdos do ensino médio que não estão nos livros didáticos e também na forma tradicional de ensinar.

Segundo Ponte (2000),

> Os novos professores precisam ser capazes de integrar as TIC no ensino-aprendizagem das diversas áreas curriculares, articulando o seu uso com o de outros meios didáticos. Para isso, precisam saber usar e promover o uso de software educativo e software utilitário pelos alunos, bem como de serem capazes de avaliar as respectivas potencialidades e limitações. Precisam, finalmente, de conhecer os recursos e equipamentos disponíveis na sua escola ou instituição.

Esta realidade ainda está longe de muitas escolas brasileiras, especialmente as públicas, apesar do enorme potencial didático do uso das tecnologias para a melhoria da qualidade das aulas de matemática.

Outro aspecto a considerar é levantado por Griffith (1998) em (Laughbaum, E.D., 2000), que afirma que os impactos da tecnologia no ensino de matemática e de ciências podem acarretar três questionamentos:

> • algum conteúdo torna-se obsoleto?
>
> • aumenta a importância de alguns conteúdos?
>
> • alguns novos conteúdos se tornam possíveis?

As tabelas trigonométricas e as logarítmicas que geralmente vêm nos livros didáticos são exemplos de conteúdo que se tornam obsoletos diante da tecnologia das calculadoras. Já alguns conteúdos que têm sua importância aumentada com o uso da tecnologia são o estudo e a análise de gráfico de funções, por exemplo, o efeito da translação em um gráfico, do efeito nas restrições no domínio de uma função, análise de pontos de máximos e mínimos, crescimento/decrescimento. Por exemplo, mesmos os alunos com dificuldade em matemática serão capazes de encontrar um ponto de máximo de uma função, com uma calculadora gráfica.

Muitas pesquisas no Brasil têm sido feitas sobre o uso de tecnologia portátil, como a calculadora gráfica para provar que essa tecnologia melhora o aprendizado do aluno. Dentre essas pesquisas, consultamos Souza (1996) e Borba (1995) que propõe o uso de calculadoras gráficas como instrumento pedagógico para o estudo de funções quadráticas, justificando assim a nossa opção de trabalhar esse conteúdo com recurso tecnológico no trabalho de dissertação. Os autores citados afirmam que o uso da calculadora gráfica como proposta didático-pedagógica pode ser desenvolvido por uma sequencia de atividades abordando o estudo de função quadrática, além de explorar as potencialidades da calculadora gráfica.

As pesquisas com tecnologia portátil em outros países também forneceu embasamento para o desenvolvimento deste trabalho, destacando aqui o trabalho de Waits em seu texto “The Power of Visualization in Calculus(1992)”, que sugere dez tipos de atividade matemática em que a calculadora gráfica desempenha um papel importante:

·Abordagem numérica de problemas;

·Uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;

·Uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;

·Modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;

·Uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;

> ·Uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
>
> ·Condução de experiências matemáticas, concepção e testagem de conjecturas;
>
> **·Estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;**
>
> ·Antevisão de conceitos do cálculo diferencial;
>
> ·Investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.

Os destaques em negrito acima embasaram a nossa proposta de trabalhar problemas de modelagem mediados por calculadoras gráficas.

O surgimento das modernas calculadoras gráficas com capacidades configuradas para utilização como auxiliar didático abre novas perspectivas para transformar o ensino tradicional com postura passiva do aluno para um ambiente sala/laboratório com maior participação dos alunos nas atividades elaboradas. Dentre estas modernas calculadoras gráficas citamos a ClassPad 330 da Casio, adotada neste trabalho, conforme figura a seguir.

Figura 1 - Calculadora gráfica

Fonte – Elaborado pelo autor

Algumas das características desta calculadora que pode ser usada como auxiliadora de um ambiente sala/laboratório são:

- Interface intuitiva com o toque da caneta para entrada de valores e expressões, seleção de comandos de menu, cópia de valores e expressões com uso do recurso ‘arrastar e soltar’ e muito mais.

- Aplicativo de planilhas melhorado; os dados coletados podem ser organizados e tabulados para análise após a conclusão dos gráficos estatísticos. Cálculos estatísticos de regressão, plotagem estatística e gráficos estatísticos de regressão estão disponíveis.
- Outras: Gráficos de funções, entrada simultânea de expressões de funções de forma simples, resoluções gráficas das funções (raiz, máximo e mínimo, restrição do domínio e imagem).

A tecnologia inteligente é definida por Salomon, Perkins e Globerson (1991) em (Laughbaum, E.D., 2000) como a tecnologia que é capaz de "realizar o processamento cognitivo significativo a favor do usuário". A calculadora gráfica, juntamente com a maioria das tecnologias baseadas em computador usado na aula de matemática, recai nesta categoria.

Ao considerar como uma tecnologia inteligente, a calculadora gráfica pode afetar o desempenho matemático do aluno e distinguem-se duas maneiras muito diferentes em que as tecnologias inteligentes, podem ter este efeito. Uma delas diz respeito a mudanças no modo de desempenho que ocorre quando o aluno está trabalhando com uma calculadora gráfica, e a outra é a capacidade do aluno em resolver problema de um assunto já explorado, sem a calculadora gráfica.

Estes são denominados efeitos da tecnologia: (i) as preocupações com os efeitos que podem ocorrer como resultado de um aluno que participa de uma atividade matemática que faz uso de uma calculadora gráfica; (ii) outros efeitos que permanecem quando o aluno está envolvido em atividades matemáticas que não envolvam a calculadora. Por exemplo, no desenvolvimento do conceito de sistemas de equações do 1º grau com o uso da calculadora gráfica, os alunos podem entender mais sobre o processo de resolução dos sistemas de equações lineares. Eles podem, por exemplo, aprender a reconhecer graficamente as situações em que os pares de equações não têm solução e compreender como isso se relaciona com os coeficientes das equações. Quando um aluno mostra a evidência desse entendimento quando solicitado a resolver sistemas de equações lineares sem uma calculadora, então este constitui um efeito da tecnologia.

Outro potencial educacional que pode ser desenvolvido na aprendizagem da matemática com uso de uma calculadora gráfica, ou de outra tecnologia inteligente, é explorar a formação de uma parceria inteligente. Parcerias inteligentes são caracterizadas por uma divisão complementar de trabalho entre o usuário e a tecnologia, que seria outro efeito da tecnologia inteligente. Tal divisão ocorre quando o usuário planeja e implementa a solução, mas passa a responsabilidade para a calculadora no momento adequado. Por exemplo, quando na necessidade de desenhar um gráfico, o mesmo pode ser redesenhado em uma janela diferente e ter investigado os pontos de interseção com os eixos que são explorados e determinados com recursos da tecnologia.

Outro exemplo: uma calculadora gráfica pode ser usada por um aluno para traçar com rapidez e precisão o gráfico de $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$, uma tarefa que a maioria dos alunos sem a tecnologia de gráficos teria dificuldade em realizar, e que requer uma quantidade considerável de conhecimentos para conseguir um esboço.

No caso de calculadoras gráficas, o pressuposto de que haverá um resíduo cognitivo da aprendizagem com as mesmas é baseada na crença de que a apresentação do mesmo material matemático nas formas algébrica e gráfica ajuda os alunos a investir no significado e, assim, ajuda a promover uma maior profundidade de aprendizagem desse material. Implícito no desenvolvimento de tais atividades com a calculadora gráfica é o pressuposto de que as mudanças nas imagens de gráficos gerados sejam: (a) corretamente interpretada pelos alunos e (b) ligados adequadamente para as mudanças na forma simbólica (algébrica). Estas parecem ser suposições razoáveis.

No entanto, o trabalho “Crer para ver: Como preconceitos influenciam a percepção dos gráficos” Goldenberg (1987) em (Laughbaum, E.D., 2000) mostrou que os alunos não são tão hábeis em interpretar graficamente a informação apresentada como seria de esperar, e “Investigando o uso de calculadoras gráficas em condições de exame. Revista Internacional de Educação Matemática em Ciência e Tecnologia” Boers e Jones (1994) em (Laughbaum, E.D., 2000) demonstrou a dificuldade que muitos alunos têm na integração simbólica e de informações gráficas. Isso indica que devemos proceder com cautela, e o papel do professor em planejar atividades apropriadas e trabalhadas com dinâmica adequada se torna importante.

Focamos o nosso trabalho sobre o aspecto inovador de introduzir atividades práticas laboratoriais na sala de aula, com uso de uma calculadora gráfica, por suas características facilitadoras, como: Fácil manuseio, pode ser usada em sala de aula comum sem o recurso do cabeamento de rede, internet; não precisa de energia elétrica e também pelo espaço físico, pois apenas a metade da turma caberia nos laboratórios de informática na escola em que foi realizada a pesquisa. A pesquisa para elaborar atividades adequadas ao uso de tecnologia também constituiu foco do nosso trabalho, acompanhada de expectativas para mudar o ambiente de aprendizagem dos alunos e avaliar o aproveitamento escolar.

1.4 **Resolução de problemas com uso da tecnologia**

Para a construção do conhecimento matemático em que o aluno exercite e pense, a resolução de problemas é fundamental para que haja a compreensão dos significados de conceitos e de procedimentos. Os principais objetivos da resolução de problemas segundo Dante (2011) são: fazer com que o aluno pense, estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, levar o aluno a enfrentar situações novas, mostrar aos alunos as aplicações da matemática e tentar tornar as aulas mais dinâmicas e motivadoras.

Este ponto de vista está presente no nosso trabalho, quando comentamos em 1.1 o papel da resolução de problema como atividade central do ensino de matemática, como indicam os PCN+.

De fato, os problemas ocupam um lugar de destaque no ensino e nos currículos de matemática. Atualmente, algumas reflexões se voltam para a forma como a resolução de problemas está associada a outros recursos e elementos considerados na educação matemática: aos jogos, à modelagem, aos projetos, às TIC, entre outros. Nesta dissertação focamos esta associação com a modelagem e a TIC, em particular a calculadora gráfica.

A integração de resolução de problemas e modelagem tem sido defendida por vários pesquisadores envolvidos com o ensino de matemática.

Alguns dos principais argumentos para tal integração, defendida por Blum (1989), são:

> 1-Argumento formativo – enfatiza aplicações matemáticas e a performace da modelagem matemática e resolução de problemas como processos para desenvolver capacidade em geral a atitudes dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.
>
> 2-Argumento de competência crítica – focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.
>
> 3-Argumento de utilidade – enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.
>
> 4-Argumento intrínseco – considera que a integração de modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas.
>
> 5-Argumento de aprendizagem – garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática.

Dentre os argumentos de Blum, nos identificamos com mais ênfase com os argumentos formativo e intrínseco, tendo em vista os objetivos do nosso trabalho diante do contexto escolar trabalhado.

Cabe ao professor a, nem sempre fácil, tarefa de escolher e/ou elaborar problemas adequados ao trabalho dos alunos, para que esses aproveitem as possibilidades que as TIC oferecem. O cuidado para a escolha do problema adequado ficou reforçado quando durante o desenvolvimento das atividades, elaborei uma atividade descrita da seguinte forma:

Seja um veículo com velocidade constante em uma estrada reta de 600 km de extensão e sentido único. Na tabela é dada a posição S em km, em relação ao km 0 da estrada, para vários instantes t em horas.

Tabela 1 - Posição (km) x Tempo (h)

t(h)	**0,0**	**2,0**	**4,0**	**6,0**	**8,0**	**10,0**
S(km)	**50**	**100**	**150**	**200**	**250**	**300**

Fonte – Elaborado pelo autor

Podemos notar que é um problema contextualizado com a física, mas não reflete o mundo real, pois como podemos notar a velocidade média do veículo é de 25 km/h, e o aluno questionará esta velocidade para longas distâncias.

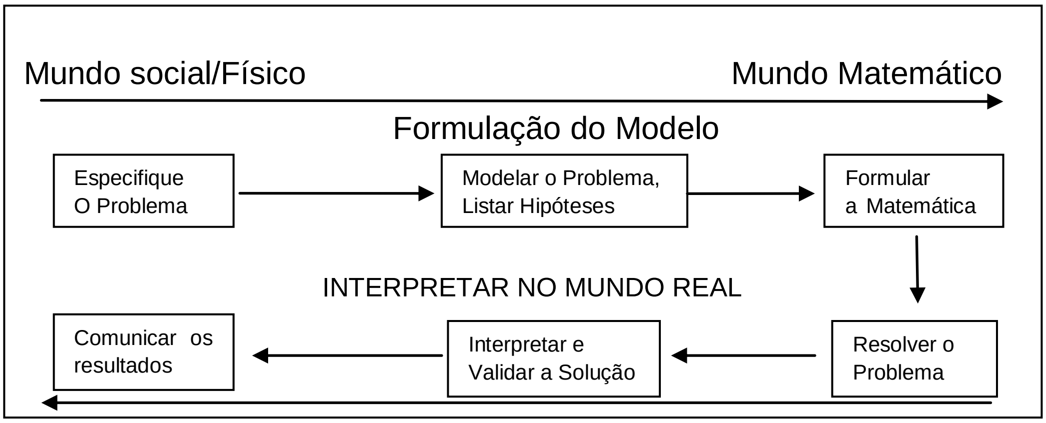
O grande potencial das ferramentas computacionais (calculadoras, planilhas eletrônicas, sistemas de geometria dinâmica ou computacionais algébricos) disponibilizadas em sala de aula pode confrontar os alunos com problemas mais complexos, mais interessantes e ricos sob ponto de vista da aprendizagem significativa. No capítulo 3 deste trabalho apresentamos as atividades que foram planejadas tendo base na reflexão acima.

1.5 **Modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem, e a parceria com a tecnologia**

Estamos interessados nos modelos matemáticos que utilizam como base os conceitos e linguagem da própria ciência matemática. Bassanezi (2010) chama de modelo matemático, “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado.” O autor considera a modelagem matemática da seguinte forma: “uma arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.”

Burghes (1980) em (Galbraith,P.; et al.,1998) mostra um esquema geral com as características principais para o processo de modelagem matemática, ilustrada na figura a seguir.

Figura 2 - Processo de Modelagem Matemática



Fonte - Galbraith et al (1998)

Na modelagem matemática dentro do contexto escolar, são apresentados basicamente dois tipos de exercícios aos alunos:

1. Desenvolver um novo modelo;
2. Utilização de modelos previamente conhecidos para resolver problemas.

Para quaisquer dos dois tipos de exercícios acima, com pequenas alterações, os alunos são treinados a usarem as seis etapas de modelagem apresentadas por Burghes (1980) em (Galbraith,P.; et al.,1998).

Estas etapas são detalhadas a seguir, e podem ser vistos como uma generalização do conjunto de estratégias consistentes com o processo de resolução de problemas do Polya (1957) em (Galbraith,P.; et al.,1998), que é compreender o problema, efetuar um plano, e avaliar os resultados e procedimentos.

TIPO 1

1. Definir o problema;
2. Lista de todos os dados necessários e as hipóteses;
3. Coletar dados, apresentá-lo na tabela, no gráfico ou na forma de equação;
4. Mostrar que os dados se enquadram no modelo;
5. Usar o modelo para previsão;
6. Relatório dos resultados.

TIPO 2

1. Definir o problema;
2. Lista de dados a ser utilizada e as hipóteses;
3. Escolher o modelo a ser utilizado;
4. Substituir os dados dentro do modelo e resolver;
5. Verificar se a solução é razoável;
6. Relatório dos resultados.

As atividades desenvolvidas neste trabalho explorou algumas etapas do processo de modelagem do Tipo 1, classificados por Burghes.

Segundo Dunne (1995) em (Galbraith,P.; et al.,1998), Modelagem Matemática pode e deve ser usado durante todo o ensino médio para: “Integrar todas as áreas da matemática, posicionar o aluno em contextos reais, diminuir a dificuldade da álgebra, implementar a tecnologia e ajudar os alunos a construir seu próprio conhecimento.”

Na pesquisa realizada por Dunne (1995) em (Galbraith,P.; et al.,1998) investigou-se em que medida o ensino de uma metodologia baseada em Modelagem Matemática pode melhorar o aprendizado em matemática para os alunos do ensino médio. Os resultados da pesquisa sugerem que:

> • O processo de modelagem gera novos pensamentos e idéias sobre os problemas e permite aos alunos ver a matemática envolvida no problema de forma mais clara;
>
> • A estrutura das etapas de modelagem e os problemas levantados fornecem experiências em formulação de hipótese, investigações e tomada de decisão. A partir destes, os alunos desenvolvem habilidades de explicação, interpretação, previsão e análise;
>
> • Conceitos de Matemática podem ser bem desenvolvidos através de atividades de modelagem, e através de relatório escrito pelos alunos para desenvolver uma compreensão mais aguda de conceitos, com o aumento da probabilidade do conhecimento ficar na memória;
>
> • Através da modelagem, os alunos são treinados a fazer suposições e compreender a limitações de seu modelo. Eles são introduzidos a riscos e incertezas que são uma parte integrante da solução de problemas;

Desta forma, aplicamos a modelagem matemática para os estudantes do primeiro ano do ensino médio do curso técnico de meio ambiente com o objetivo de que eles não tenham muita dificuldade de transferir suas habilidades quando aplicarem a matemática em situações desconhecidas dentro da sua profissão.

Alguns educadores como Bassanezi que trabalham com modelagem matemática alertam para alguns cuidados com a mesma quando aplicados em cursos regulares. Segundo (Bassanezi, 2010) estes obstáculos podem ser de três tipos:

> a)Obstáculos instrucionais – Os cursos regulares possuem um programa que deve ser desenvolvido completamente. A modelagem pode ser um processo muito demorado não dando tempo para cumprir o programa todo. Por outro lado, alguns professores têm dúvida se as aplicações e conexões com outras áreas fazem parte do ensino de matemática, salientando que tais componentes tendem a distorcer a estética, a beleza e a universalidade da matemática.
>
> b)Obstáculos para os estudantes – O uso de modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. Os alunos estão acostumados a ver o professor como transmissor de conhecimentos e quando são colocados no centro do processo de ensino-aprendizagem, sendo responsáveis pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, a aula passa a caminhar em rítmo mais lento.
>
> c)Obstáculos para os professores – Muitos professores não se sentem habilitados a desenvolver modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações de matemática em áreas que desconhecem. Acreditam que perderão muito tempo para preparar as aulas e também não terão tempo para cumprir todo o programa do curso.

Como iniciante na pesquisa do processo de modelagem matemática, descobrimos que estes obstáculos ocorreram durante todo o trabalho, ou seja, desde o desenvolvimento das atividades até sua aplicação em sala de aula.

Kaiser e Sriraman (2006) classificaram a modelagem matemática tanto para o interesse do contexto escolar quanto em abordagens ligadas à pesquisa em cinco perspectivas: Realística ou Aplicada, Contextual, Educacional, Sócio-Crítica e Epistemológica ou Teórica.

Segundo estes autores, as características principais das **perspectivas realista e contextual** de modelagem são as seguintes:

> -**A perspectiva realista**
>
> • Modelagem matemática aplicada como resolução de problema;
>
> • Uso de tecnologia como um recurso para a modelagem;
>
> • Escolher a área de aplicação como assunto importante e ver a modelagem como uma atividade interdisciplinar;
>
> -**A perspectiva contextual**
>
> • A importância educacional de resolver problema matemático em contextos da vida real;
>
> • Atividades que solicitam modelagem a partir de situações-problema significativas;

Adotamos estas perspectivas na nossa pesquisa por estarem mais próximas da realidade do trabalho proposto.

Diante das reflexões realizadas, adquirimos mais tranquilidade no desenvolvimento da pesquisa em sala de aula que abrangeu perspectivas de modelagem matemática.

Na tentativa de ratificar o caminho da nossa pesquisa, que se fundamenta na integração da metodologia de resolução de problemas e da modelagem matemática, buscamos referência na pesquisa da comunidade de educação matemática, e encontramos em Barbosa (2001) uma análise do estudo nacional e internacional sobre modelagem, principalmente o processo de modelagem pesquisado por Galbraith (1995).

Barbosa classificou os casos de modelagem de três formas diferentes com o objetivo de introduzir as atividades de modelagem matemática na sala de aula:

> Caso 1. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.
>
> Caso 2. O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.
>
> Caso 3. A partir de temas não matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

As atividades aplicadas nesta dissertação seguem uma tendência semelhante ao caso 1 da classificação de Barbosa.

Tanto professores como os alunos precisam de competências em modelagem, principalmente nos tempos atuais em que um ambiente de tecnologias de comunicação e informação na educação (TICs) são considerados no contexto escolar.

Segundo (NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007):

> Competência em modelagem matemática significa a capacidade de identificar questões relevantes, relações variáveis ou hipóteses em uma situação dada no mundo real, para traduzir em matemática e interpretar e validar a solução do problema resultante na matemática

> em relação a uma dada situação, bem como a capacidade de analisar ou comparar modelos de dados, investigando os pressupostos sendo feito, verificando as propriedades e escopo de um determinado modelo.

O uso da tecnologia no ensino e aprendizagem de matemática auxilia na aplicação da modelagem de forma a identificar o pensamento matemático que está sendo promovido pela tarefa e as competências necessárias para uma experiência bem sucedida. A tecnologia da calculadora gráfica pode ser incorporada à modelagem matemática na sala de aula do ensino técnico médio. Calculadoras gráficas, como a Casio ClassPad 330 utilizada nas atividades desta dissertação, têm capacidade de proporcionar aos alunos a manipulação de dados significativos e o armazenamento de dados que foram coletados, e a análise desses dados para determinar os relacionamentos entre os mesmos. A maioria das calculadoras gráficas tem potencial para fornecer acesso a este processo dinâmico e interativo de trabalhar dados de problemas reais.

Um exemplo desse potencial é a utilização de análise de regressão. Embora a análise de regressão não esteja na maioria dos currículos do ensino médio no Brasil, na Austrália é uma poderosa ferramenta para o desenvolvimento das conexões entre os dados reais e os modelos matemáticos usados para representar um determinado tipo de função no ensino secundário.

Uma parte importante da fase de instrução do conteúdo de funções, portanto, é utilizar eficientemente a capacidade da calculadora em representar o quadro de dispersão de dados coletados de um problema ou fenômeno para prever possíveis funções pela forma da curva que se ajuste da melhor forma ao quadro pela seleção da expressão de regressão. Portanto, a calculadora pode tornar viável a modelagem por uma função afim, quadrática ou outra qualquer que esteja no currículo do ensino médio através do estudo de regressão e do aspecto visual gráfico, não constituindo um estudo detalhado deste método numérico que é conteúdo do ensino superior.

Diante de todas as ferramentas teóricas que buscamos para a fundamentação da pesquisa, destacamos nos documentos educacionais a LDB no artigo 36 que orienta a usar metodologias de ensino e avaliação inovadoras e o PCNEM (2000) que destaca a resolução de problema como estratégia de ensinar conceito matemático.

Já na educação matemática o destaque fica para a ideia de ensino moderno por Carrraher (2008) que prioriza a aprendizagem pela descoberta do aluno, e o potencial educativo da calculadora gráfica através do efeito e parceria tecnológica como em Salomon, Perkins e Globerson (1991) em (Laughbaum, E.D., 2000).

Na metodologia de modelagem destacamos os argumentos formativo e intrínseco de Blum (1989) que enfatiza a integração de aplicação, modelagem e resolução de problema. Também demos ênfase aos obstáculos defendidos por Bassanezi (2010) quando se aplica modelagem matemática na sala de aula. Outros destaques foram as perspectivas realista e contextual de Kaiser e Sriraman (2006) que defende a ideia da aplicação da modelagem matemática por resolução de problema contextualizado com uso de tecnologia e a classificação (caso 1) de Barbosa (2001).

Os destaques condensados acima foram fundamentais para o desenvolvimento do trabalho cujo objetivo foi ensinar o conceito de função pelo processo de modelagem partindo de um problema contextualizado já formulado com os seus dados, e o aluno resolvendo uma sequencia de itens de forma a construir seu aprendizado com ajuda da calculadora gráfica.

CAPÍTULO 2: O CONTEÚDO DE FUNÇÕES DO CURRÍCULO DE ENSINO MÉDIO

Neste capítulo fazemos um estudo das funções reais de uma variável real, importantes no currículo do Ensino Médio. O conhecimento conceitual do conteúdo pelo professor é essencial para planejar adequadamente as atividades didáticas, qualquer que seja a abordagem metodológica.

2.1 **Introdução ao conceito de Função e suas propriedades**

Os autores Lima et al (2006) definem uma função da seguinte maneira:

> Dados os conjuntos X, Y, uma função $f: X \longrightarrow Y$ (lê-se uma função de X em Y) é uma regra (ou conjunto de instrução) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contra domínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. A natureza da regra que ensina como obter f(x) quando é dado x é inteiramente arbitrária, sendo sujeita a duas condições:
>
> a)Não deve haver exceções: a fim de que a função f tenha o conjunto X como domínio, a regra deve fornecer f(x), seja qual for $x \in X$ dado.
>
> b)Não deve haver ambiguidades: a cada $x \in X$, a regra deve fazer corresponder um único f(x) em Y.

No currículo do ensino médio é dada ênfase a funções reais de uma variável real, isto é, nossa atenção estará voltada para funções cujo domínio e contradomínio são subconjuntos de números reais.

Podemos então dizer que uma função transforma, sem ambiguidades, uma variável independente, que percorre todo o domínio, numa variável dependente que toma valores no conjunto contra domínio.

Em toda escola brasileira de ensino médio, técnico ou não, os alunos do primeiro ano se deparam no seu currículo escolar com o conceito de função. E atualmente os livros didáticos do nono ano do ensino fundamental já incluem este conceito. Os alunos provavelmente perguntam por que estudamos as funções, Segundo Silva, Pinto e Machado (2010), para qualquer situação concreta que envolva duas quantidades expressas em números reais vamos normalmente querer responder a vários tipos de questionamento:

> 1.Que tipo de relação existe entre as duas quantidades?
>
> 2.Como posso exprimir essa relação? Consigo encontrar uma expressão, para tal relação?
>
> 3.Se não consigo encontrar facilmente uma expressão, consigo pelo menos obter uma tabela de valores ou um gráfico que ilustre o relacionamento entre as quantidades?
>
> 4.Se conseguir obter uma tabela de valores ou gráfico, consigo depois obter uma expressão que reproduza valores ou gráficos próximos da configuração original?
>
> 5.Se conseguir obter uma expressão, que propriedades posso eu determinar a partir dessa expressão?

Em outras palavras, o estudo das funções nos ajuda a entender melhor a relação entre duas quantidades (grandezas, variáveis, valores) dadas.

Uma função a valores reais f: X→R caracterizada no ensino médio é representada de três formas principais: tabelas, gráfico num sistema cartesiano ou expressão de y = f(x) a partir de x ϵ X.

Dada a expressão y = f(x) de uma função é sempre possível obter uma tabela com alguns valores de x ϵ X e seu correspondente y = f(x), assim como o gráfico dessa tabela no sistema ortogonal xy, como ocorre no ensino tradicional. Porém, no ensino tradicional é frequente encontrarmos o uso de livros didáticos em que a representação gráfica de alguns pontos no sistema é muitas vezes estendida sem explicações para uma representação contínua.

Alguns pesquisadores consideram estática a aprendizagem da função com esse modo. Por outro lado, nem sempre é possível encontrar a expressão da função a partir de um conjunto de dados ou de um gráfico. Dessa forma estamos problematizando e chamando a atenção do aluno para a possibilidade de investigação, dinamizando o estudo de função e convencendo o aluno da importância do uso da tecnologia para a resolução desses problemas. Em outras palavras, fazer isso significa procurar um modelo matemático que auxilie resolver diversos problemas que podem ser levantados a partir dos dados. Os modelos podem também ser obtidos a partir da análise de algum fenômeno, devendo a expressão da função obtida corresponder aos dados experimentais. A partir da formulação de um modelo matemático há uma melhor compreensão da relação entre as variáveis, podendo-se fazer predições acerca do fenômeno. Por exemplo, a escala termométrica que se baseia na altura de uma coluna de mercúrio, é modelada por uma função afim f(x) = 1,8x + 32 que é a fórmula que permite passar da temperatura x na escala Celsius para a temperatura f(x) em graus Fahrenheit. Com isso podemos responder várias perguntas, por exemplo, em que temperatura as escalas Celsius e Fahrenheit assinalam o mesmo valor? Fazendo f(x) = x, encontraremos x = – 40, ou seja, - 40 graus Celsius são o mesmo que - 40 graus Fahrenheit.

Em diversos momentos de nosso cotidiano, usamos a noção de função que é um dos mais importantes conceitos da matemática. Existem muitas aplicações em áreas como: Física, biologia, engenharia, informática, ciências sociais e humanas, economia e até na língua portuguesa, em que fenômenos são modelados por funções matemáticas com significados contextualizados nas suas áreas.

Para o estudo de funções matemáticas reais, é bom saber os tipos de variáveis que são trabalhadas: discretas e contínuas. A variável discreta assume valores num subconjunto dos números inteiros. E a variável contínua assume valores num intervalo (ou união de intervalos) dos números reais. Um referencial ortogonal num plano (plano cartesiano) é constituído de um ponto privilegiado chamado Origem (O) e de um par de retas perpendiculares em O que forma os eixos cartesianos Ox e Oy, de modo que um ponto do plano possa ser representado por suas coordenadas (x,y) nesse referencial.

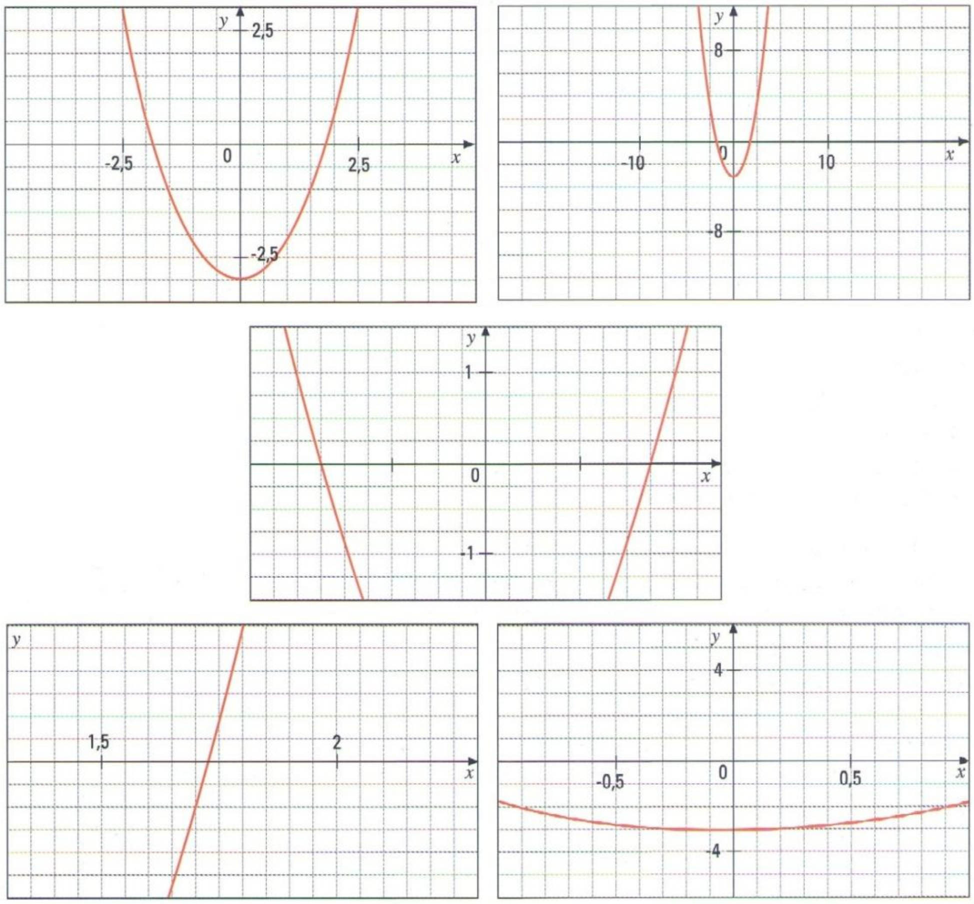
A partir das noções iniciais de função, e fixado um referencial ortogonal no (plano cartesiano), podemos fazer a seguinte pergunta: O que é um gráfico de uma função e como representá-lo no plano cartesiano?

O plano cartesiano é formado por um conjunto de pares ordenados (x,y) de números reais, e um ponto qualquer do plano pertencerá ao gráfico de f se x for um ponto do domínio X, representado no eixo Ox, e se y estiver relacionado com x por meio de y = f(x), representado no eixo Oy. Ou seja, o gráfico de f é constituído pelo conjunto dos pontos do plano de coordenadas (x,f(x)) quando x varia no conjunto domínio X. Os valores de x estão no eixo das abscissas (horizontal Ox) e os valores de y estão no eixo das ordenadas (vertical Oy).

O gráfico de uma função $f:X \subset R \rightarrow R$ representa geometricamente a relação entre a variável independente $x \in X$ e a variável dependente $y = f(x)$ no plano cartesiano.

O gráfico é importante para conhecer o comportamento de uma determinada função. O desenho do gráfico que os alunos fazem em sala de aula à mão, ou usando qualquer tecnologia, geralmente se restringe a cálculo de alguns valores da função para $x \in X$ e os respectivos pontos $(x, f(x))$ ligados por meio de linhas. Logo não é o verdadeiro gráfico de uma função; o gráfico de uma função f de domínio X é o conjunto de todos os pontos $(x,y = f(x))$ do plano cartesiano tais que x percorre todo o domínio X de f , e consequentemente é constituído de infinitos pontos. Portanto, os desenhos dos alunos e até mesmo do professor é mais bem descrito como uma representação gráfica, pois estamos representando uma parte do gráfico e não rigorosamente o gráfico que é uma ideia mais abstrata. Queremos então dizer que a representação gráfica pode ser muito boa, regular ou até mesmo de forma enganadora conforme o exemplo da figura 3 com uma série de representações gráficas de função real de variável real f definida por $f(x) = x^2 – 3$. Conforme pode ser visto, o aspecto de visualização e consequentemente as conclusões tomadas podem ser completamente diferentes, no entanto o gráfico da função que se pretende representar é exatamente o mesmo.

Figura 3 - Representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 3$



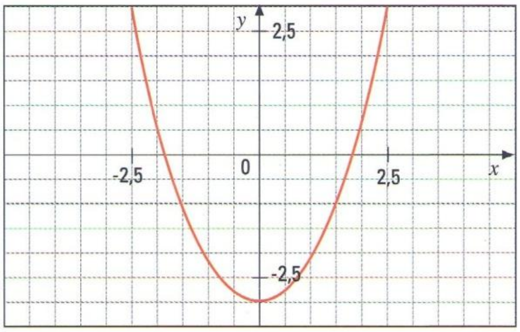
Fonte - Silva, Pinto e Machado (2010, p.13)

Quando é apresentado para compreender esta diferenciação entre o gráfico e sua melhor representação, como na Figura 3, o aluno certamente estará confuso para saber a resposta. O professor poderá polemizar essa discussão em sala de aula e estará claramente mostrando ao aluno a importância de escolher uma porção limitada do plano onde podemos traçar o gráfico, e o seu aspecto é usualmente de um retângulo de visualização, que em princípio não é compreendido pelo aluno quando desenhado a mão, mas é bem mais claro quando se utiliza uma calculadora gráfica.

Por exemplo, quando se diz que o retângulo de visualização é [-10,10] X [-12,15], significa dizer que os valores x do domínio variam no intervalo [-10,10] e os respectivos valores da imagem y deverão estar no intervalo [-12,15]. Logo, a escolha do retângulo de visualização mais adequado só será conseguida dominando os conceitos básicos associados à definição de uma função. Isso deixará bem claro ao aluno a organização e os conceitos básicos de função que precisam ser aprendidos pelo próprio. Depois que o aluno compreender bem a importância de estudar os ingredientes básicos de uma função como seu domínio (onde se toma a variável independente), o conjunto imagem (constituída de variável dependente), e saber escolher o melhor retângulo de visualização, pode, a partir desse ponto, abusar da linguagem e falar somente do gráfico da função, ao invés de representação gráfica.

Não esgotamos o assunto em relação aos conceitos de função, mas falamos ainda um pouco de forma resumida o estudo intuitivo de algumas propriedades das funções e seus gráficos, para saber escolher a melhor representação gráfica. Para isso vamos aproveitar o retângulo mais adequado de representação gráfica da função $f(x) = x^2 - 3$ da figura 3 que vamos chamar de figura 4.

Figura 4 - Boa representação gráfica da função $f(x) = x^2 – 3$



Fonte - Silva, Pinto e Machado (2010, p.13)

A primeira ideia que podemos estudar é a monotonicidade de uma função que procura saber as regiões em que uma função é crescente ou decrescente. Podemos *intuir* pelo gráfico da figura 4 que de um valor negativo de x até x = 0 a função é decrescente, pois à medida que a variável independente x cresce a variável dependente y decresce nesse intervalo. Já quando verificamos o comportamento do gráfico de x = 0 até um valor positivo de x, a função é crescente, ou seja, quando a variável independente aumenta a variável dependente também aumenta nesse intervalo. Na linguagem técnica da matemática escrevemos que uma função f é dita crescente (respectivamente decrescente) num intervalo **I** se $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) > f(x_2)$) para quaisquer x_1, $x_2 \in$ **I** com $x_1 < x_2$. Também dizemos que uma função f é não decrescente (respectivamente não crescente) no intervalo **I** se para quaisquer x_1, $x_2 \in$ **I** com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) \geq f(x_2)$).

O sinal da função f também é definido, ou seja, uma função f é:

-Positiva em $I \subset$ domínio da função f quando se tem $f(x) > 0$, para todo $x \in I$.

-Negativa em $I \subset$ domínio da função f quando se tem $f(x) < 0$, para todo $x \in I$.

Quando analisamos o gráfico da figura 4, verifica-se que para responder sobre o sinal da função descrita anteriormente, temos que antes analisar outra característica importante do gráfico, por exemplo, que em intervalos como $-2,5 < x < 2,5$ encontram-se pontos onde o gráfico intersecta o eixo x, isto é, há valores da variável independente para os quais a imagem assume o valor zero. Neste intervalo temos valores positivos e também negativos da função e exatamente dois pontos em que a função se anula. Chama-se zero de uma função f a todo valor do domínio cuja imagem é zero, ou seja, $x \in D_f$ (domínio da função f) é zero de f se $f(x) = 0$. O estudo do sinal da função força o aluno a investigar sobre o zero da função.

Outra característica importante para o gráfico de uma função é quanto ao comportamento da imagem da função quando o domínio contém valores muito grandes ou muito pequenos, estudo que leva ao conceito do infinito e do limite de funções. O aluno no nível secundário não precisa estudar o conceito de limite, mas é importante abstrair e intuir quanto ao comportamento da variável ou da função no infinito, pois assim ele pode se preparar para a matemática avançada de um curso superior.

Ainda analisando o gráfico da figura 4, existe um ponto cuja ordenada é menor do que de todos os outros na área de visualização, cuja abscissa é chamada de ponto de mínimo local da função e a ordenada de valor de mínimo local. Em alguns intervalos de definição nos outros gráficos poderemos ter outros valores de máximo e mínimo no intervalo determinado, mas não em todo o gráfico, ou seja, no domínio da função. Para esclarecer todas as possibilidades, temos que uma função f(x) possui:

-Máximo relativo em um ponto **c** se existe um intervalo aberto **I** contendo **c** tal que **f** esteja definida em **I** e f(c) ≥ f(x) para todo x ϵ **I**.
-Mínimo relativo em um ponto **c** se existe um intervalo aberto **I** contendo **c** tal que **f** esteja definida em **I** e f(c) ≤ f(x) para todo x ϵ **I**.
-Máximo absoluto no ponto **c**, se f(c) ≥ f(x) para todo **x** no domínio de **f**.
-Mínimo absoluto no ponto **c**, se f(c) ≤ f(x) para todo **x** no domínio de **f**.
A caracterização de x=0 como o ponto de mínimo absoluto da função no exemplo constitui atividade teórica matemática necessária, que os alunos deverão compreender, pois a visualização mostra indícios deste fato, mas não dá sua prova matemática.

2.2 **Caracterização da Função Afim e Suas Propriedades**

Uma função f: R → R chama-se afim quando existem constantes a, b ϵ R tais que f(x) = a.x + b para todo x ϵ R. Quando b = 0 a função afim é denominada de função linear que é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade, quando a ≠ 0.

Nas aulas de matemática falamos aos nossos alunos que o gráfico de uma função afim é uma linha reta e ponto final. Mas não devemos ter essa atitude, pois devemos provocar o aluno e questionar se o gráfico de uma função afim deve ser sempre uma reta. Para isso, devemos levar a discussão para provar que bastam três pontos aleatórios do gráfico ser colineares para caracterizar uma reta.

Vamos ver a prova desse fato. Sejam três pontos quaisquer do gráfico de uma função afim f(x) = a.x + b, a ≠ 0:

$P_1 = (x_1, ax_1 + b)$;

$P_2 = (x_2, ax_2 + b)$;

$P_3 = (x_3, ax_3 + b)$.

Podemos sempre supor que as abscissas x_1, x_2, x_3 foram numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. Temos que se os pontos forem colineares a soma das distâncias P_1P_2 e P_2P_3 é igual à distância P_1P_3., pelo axioma da geometria plana. Reciprocamente, um teorema da geometria plana garante que se a distância entre os pontos P_1P_3 for igual à soma das distâncias de P_1P_2 e P_2P_3 os pontos estarão na mesma reta.

$$d(P_1P_3) = \sqrt{(ax_3 + b - ax_1 - b)^2 + (x_3 - x_1)^2};$$

$$d(P_1P_3) = \sqrt{(ax_3 - ax_1)^2 + (x_3 - x_1)^2};$$

$$d(P_1P_3) = \sqrt{a^2(x_3 - x_1)^2 + (x_3 - x_1)^2};$$

$$d(P_1P_3) = \sqrt{(a^2 + 1)(x_3 - x_1)^2};$$

$$d(P_1P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)}.$$

Repetindo o procedimento algébrico desenvolvido acima para as distâncias P_1P_2 e P_2P_3 teremos:

$$d(P_1P_2) = (x_2 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)};$$

$$d(P_2P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{(a^2 + 1)};$$

$$d(P_1P_2) + d(P_2P_3) = (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{(a^2 + 1)};$$

$d(P_1P_2) + d(P_2P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{(a^2 + 1)}$, confirmando a igualdade.

No caso particular de $a = 0$, os três pontos da função constante $f(x) = b$ estão na reta horizontal $y = b$.

Já provamos que o gráfico de uma função afim é uma reta e logo, como uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos (pelo axioma da geometria plana), basta conhecer os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$, para que a função afim $f: R \rightarrow R$ fique inteiramente determinada.

Então, podemos provar que toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim. Sejam dois pontos distintos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$ pertencentes a reta r, com $x_1 \neq x_2$, e $y_1 \neq y_2$. Se o gráfico de f é uma reta s que passa pelos pontos P_1 e P_2, logo essa reta s coincide com r (pelo teorema da geometria plana). Portanto, devemos verificar que existem números reais a e b tais que r = s, onde $f: R \rightarrow R$ é uma função afim dada por $f(x) = ax + b$. Para isso, tome

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e seja $b = y_1 - ax_1$. Já provamos que o gráfico da função f: R→R, $f(x) = ax + b$, é uma reta não vertical. Como $f(x_1) = ax_1 + b$, substituindo o valor de b, temos: $f(x_1) = ax_1 + y_1 - ax_1$, onde $\mathbf{f(x_1) = y_1}$.

Agora, resolvendo o sistema abaixo por subtração,

$$\begin{cases} f(x_1) = ax_1 + b \\ f(x_2) = ax_2 + b \end{cases}$$

temos: $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$, e substituindo o valor de a, teremos

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x_2 - x_1)$$

E como $f(x_1) = y_1$, substituindo acima, temos: $f(x_2) - y_1 = y_2 - y_1$, onde concluímos que $\mathbf{f(x_2) = y_2}$. Obtemos que $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$ pertencem a reta s, logo r = s, pois temos duas retas que contêm dois pontos em comum.

Esclarecido que o gráfico de uma função afim é uma reta , quando mostramos a sua expressão algébrica $f(x) = a.x + b$, do ponto de vista geométrico o valor de **b**, conhecido como coeficiente linear, é a ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo y, e do ponto de vista algébrico é o valor da variável dependente (y) quando a variável independente (x) for zero. O mais interessante é o valor de **a** conhecido como coeficiente angular que mede a inclinação da reta conforme $a > 0$ ou $a < 0$ (crescimento ou decrescimento). Podemos interpretar ainda como taxa de variação de f.

Do ponto de vista algébrico, dados dois pontos quaisquer distintos $x_1 \neq x_2$, $a \neq 0$ temos que:

$f(x_1) = ax_1 + b;$

$f(x_2) = ax_2 + b;$

$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 - b;$

$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1);$

$a = \frac{f(x2) - f(x1)}{x2 - x1}$.

Então, tomando $x_1 < x_2$, $a > 0$ significa $f(x_2) > f(x_1)$ logo a função é crescente. Analogamente $x_1 < x_2$ com $a < 0$ significa $f(x_2) < f(x_1)$ logo decrescente.

Já sabemos que o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical (pois, caso contrário não seria função) e analisamos seus importantes coeficientes, mas como estabelecer que num determinado problema do dia a dia o modelo matemático que mais se aproxima para resolver o problema é uma função afim? Essa pergunta vem ao encontro de facilitar o trabalho com o processo de modelagem que faz a ponte entre a matemática e a realidade, além do suporte de usar alguma tecnologia de informação para trabalhar o conceito de função e suas propriedades de forma dinâmica. Portanto, para responder a pergunta feita vamos caracterizar a função afim de uma maneira um pouco mais sofisticada.

Apresento aqui o teorema de caracterização da função afim segundo Lima et al (2006): “Seja f: R→ R uma função monótona injetiva (diz-se que uma função é monótona injetiva quando ela é crescente, ou decrescente). Se o acréscimo f(x + h) – f(x) = φ(h) depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.”

O que o teorema quer dizer é que numa função afim, para acréscimos iguais dados a variável independente x correspondem a acréscimos também iguais na variável dependente f(x), e reciprocamente esta propriedade determina o caráter afim da função. Outra maneira também correta de interpretar este teorema é dizer que acréscimos sofridos por f(x) são proporcionais aos acréscimos dados a x, numa função afim.

A demonstração deste teorema é uma aplicação do teorema fundamental da proporcionalidade, que segundo Lima et al (2006) diz:

> Seja f: R→R uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:
>
> (1)f(n.x) = n.f(x) para todo n ϵ Z e todo x ϵ R.
>
> (2)Pondo a = f(1), tem-se f(x) = a.x para todo x ϵ R.
>
> (3)f(x + y) = f(x) + f(y) para quaisquer x,y ϵ R.

Provaremos a implicação (1) → (2): Considerando r = m/n um número racional qualquer, a hipótese (1) acarreta que f(rx) = r.f(x), seja qual for x ϵ R.
Com efeito, tem-se m.f(x) = f(mx) = f(nrx) = n.f(rx), logo f(rx) = $\frac{m}{n}$. f(x) e f(x) = r.f(x).

Seja a = f(1). Como f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0, a monotonicidade de f nos dá **a** = f(1) > f(0) = 0. Assim, **a** é positivo. Além disso, temos f(r) = f(r.1) = r.f(1) = r.a = ar para todo r ϵ Q.

Para provar que f(x) = ax para todo x ϵ R, precisamos utilizar o teorema que diz: Todo intervalo não degenerado (intervalo fechado em que os extremos são diferentes, ou seja, [a,b] em que a ≠ b) contém números racionas, cuja demonstração pode ser encontrada em livros de análise real, ou provando da seguinte forma: Sejam a e b dois números reais distintos. Se a < 0 < b então nada temos para provar, pois 0 é racional. Se 0 < a < b, temos b – a > 0. Aplicando o princípio de Arquimedes encontramos um número natural n tal que n(b – a) > 1.

Seja c ϵ N tal que

$$\frac{c}{n} \leq a < \frac{c+1}{n}$$

Sabemos que

$$\frac{c+1}{n} = \frac{c}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

Logo basta tomarmos $\frac{c+1}{n}$.

Se a < b < 0 então 0 < -b < -a e pelo caso anterior encontramos um racional entre –b e –a. O simétrico deste racional será o racional procurado.

Mostraremos agora que se tem f(x) = ax para todo x ϵ R. Suponha, por absurdo, que exista algum número real x (necessariamente irracional) tal que f(x) ≠ ax. Admitamos f(x) < ax. (O caso f(x) > ax é tratado de modo análogo). Temos f(x)/a < x. Então tomemos um número racional r tal que f(x)/a < r < x. Então f(x) < ar < ax, ou seja, f(x) < f(r) < ax. Mas isto é absurdo, pois f é crescente logo, como r < x, deveríamos ter f(r) < f(x).

Prova da implicação (2) → (3): Seja f(x + y) = a(x + y) pela hipótese (2) para quaisquer x,y ϵ R. Aplicando a propriedade distributiva temos: f(x + y) = ax + ay, logo f(x + y) = f(x) + f(y).

Prova da implicação (3) → (1): Seja f(x + x + ... + x) para n vezes x; Pela hipótese (3), temos: f(x + x + ... + x) = f(x) + f(x) + ... + f(x);

$f(nx) = n.f(x)$.

Isto prova as equivalências.

Após ter demonstrado o teorema da proporcionalidade, temos a aplicação do mesmo para a prova do teorema da caracterização da função afim. Sem perda de generalidade, suporemos que f seja crescente. Então φ: $R \to R$ também é crescente, considerando $\varphi(0) = 0$. Para quaisquer h,k ϵ R temos:

$\varphi(h + k) = f(x + h + k) - f(x)$;

$\varphi(h + k) = f((x + k) + h) - f(x + k) + f(x + k) - f(x)$;

$\varphi(h + k) = \varphi(h) + \varphi(k)$.

Vale o item (3) do teorema fundamental da proporcionalidade e consequentemente é equivalente aos itens (1) e (2) do mesmo teorema. Usando o item (2), temos:

Pondo $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a.h$ para todo h ϵ R;

Usando o fato de que $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$, ou seja, $f(x+h) - f(x) = a.h$;

Chamando $f(0) = b$, temos: $f(0 + h) - f(0) = a.h$;

$f(h) - b = a.h$, que resulta em $f(h) = a.h + b$, ou seja, $f(x) = a.x + b$ para todo x ϵ R. Portanto f é uma função afim.

2.3 **Caracterização da Função Quadrática, Parábola e Suas Propriedades**

Uma função f: $R \to R$ definida por expressão da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com **a**, **b** e **c** números reais e com **a** diferente de zero chama-se função quadrática. Podemos observar inicialmente que o gráfico da função quadrática é uma parábola.

Definição: Dados um ponto **F** e uma reta **d**, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto de pontos do plano (lugar geométrico) que distam igualmente de **F** e de **d**, ver Figura 5.

Os autores Lima et al (2006) apresentam o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ que é a parábola em R^2 cujo foco é $F = (0,1/4)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -1/4$. Os autores verificam esta informação, calculando a distância de um ponto qualquer (x,x^2) do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $F = (0,1/4)$ que é igual a :

$$d_1 = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1/4)^2};$$

$$d_1 = \sqrt{x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2};$$

$$d_1 = \sqrt{x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2};$$

$$d_1 = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2};$$

$$d_1 = x^2 + \frac{1}{4}.$$

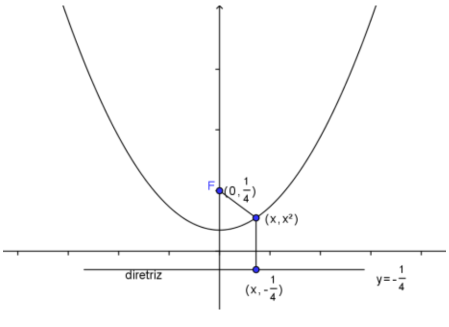
A distância do mesmo ponto (x,x^2) à reta y = -1/4 é :

$$d_2 = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2};$$

$$d_2 = x^2 + \frac{1}{4}.$$

Portanto, $d_1 = d_2$ como queríamos mostrar, ver figura 5.

Figura 5 - Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$



Fonte – Elaborado pelo autor

Mas podemos levantar a questão: será que toda função quadrática é representável, por uma parábola?

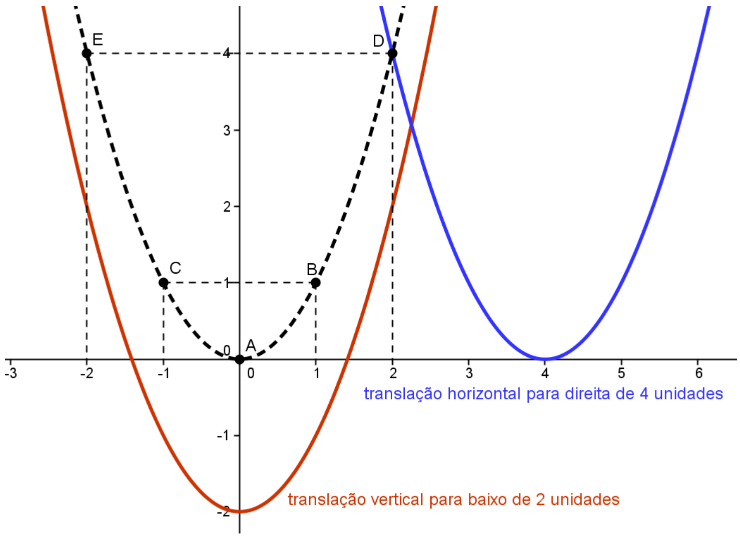
Os autores acima ratificam que o gráfico de toda função quadrática é uma parábola através de exemplos de translação do gráfico $f(x) = x^2$ com movimentos horizontais e verticais do mesmo. Eles definem translação de gráficos da seguinte forma:

> 1-Translação vertical $(x,y) \to (x,y+k)$ transforma o gráfico da função $f:R \to R$ no gráfico da função $h:R \to R$, tal que $h(x) = f(x) + k$ para todo x ϵ R.
>
> 2-Translação horizontal $(x,y) \to (x+m,y)$ transforma o gráfico da função $f:R \to R$ no gráfico da função $g:R \to R$, tal que $g(x) = f(x - m)$ para todo x ϵ R. (LIMA et al, 2006).

Podemos modificar a definição da parábola no primeiro momento para os alunos do primeiro ano do ensino médio, com o objetivo de facilitar o aprendizado do aluno. Segundo Silva, Pinto e Machado (2010) “parábola é o gráfico da função quadrado (obs: para nós, quadrática) ou quaisquer de sua transformação geométrica”, onde os autores definem transformação geométrica como os movimentos de translação do gráfico, ou seja, translação vertical para baixo ou para cima, e translação horizontal para direita ou esquerda. Em outras palavras, esta definição posterga a análise da questão levantada, simplesmente definindo a parábola como sendo o gráfico de uma função quadrática.

Tal definição facilita o entendimento do aluno sobre as características geométricas do gráfico de uma função quadrática, como uma parábola: o aluno pode completar uma tabela da função quadrática $f(x) = x^2$ com três valores de x, seus simétricos -x e x = 0. Em seguida, pode-se representar o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$, como uma parábola que contém esses pontos, e depois trabalhar com translações desse gráfico. Exemplo, Ver figura 6.

Figura 6 – Gráficos das funções $y = x^2$; $y = (x – 4)^2$; $y = x^2 – 2$



Fonte – Elaborado pelo autor

Pode-se verificar que o domínio da função f são todos os números reais, pois existe sempre o quadrado de qualquer número real. A imagem é o intervalo [0,+∞) já que o quadrado de qualquer número real são números reais não negativos. A representação gráfica de f é simétrica em relação ao eixo y, pois $(-x)^2 = x^2$, para todo número real x e tem um mínimo absoluto no ponto (0,0) que chama-se vértice da parábola, sendo decrescente no intervalo (-∞,0] e crescente em [0,+∞).

Após ter familiaridade com exemplos dos gráficos transladados, o aluno pode agora questionar se qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é representável por uma função $f(x) = (x - h)^2 + k$ para algum h, k $\in$ R.

Para isso basta completar o quadrado na função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e encontrar os valores h e k que satisfaçam a relação.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c;$$

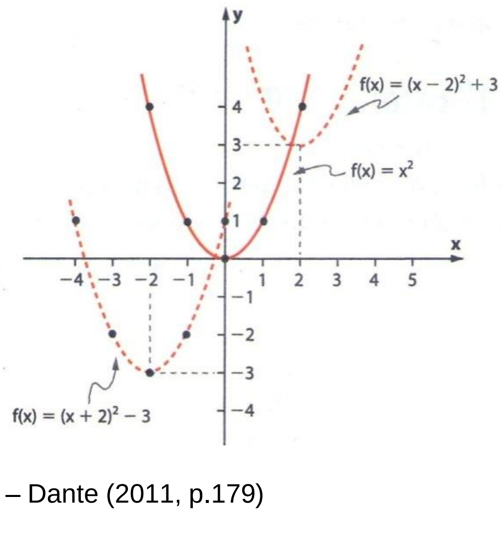
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c;$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c;$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Portanto, a aluno ficará convencido do fato, e descobrirá também a fórmula do vértice da parábola que seja gráfico de uma função quadrática qualquer. Por exemplo, $f(x) = x^2 - 4x + 7$ que completando quadrado, é escrito como $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ e $f(x) = x^2 + 4x + 1$ que completando quadrado fica $f(x) = (x + 2)^2 - 3$, ver figura 7.

Figura 7 - Gráfico $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ vértice (2,3); $f(x) = (x + 2)^2 - 3$ vértice (-2,-3)



Fonte – Dante (2011, p.179)

O estudo das translações de gráfico é possível com o recurso da calculadora gráfica ou qualquer outra tecnologia; também pode ser usado para estudar quando uma função quadrática possui um, dois ou nenhum zero da função.

Contudo, utilizando a expressão anterior $ax^2 + bx + c = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, podemos verificar que as raízes da equação podem ser determinadas por $a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$, donde $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Como o denominador $4a^2$ é sempre positivo, os alunos podem tentar descobrir a importância do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ para a existência de raízes, ou seja, não haverá raiz se $\Delta < 0$, pois não existe raiz quadrada de número real negativo, haverá uma única raiz quando $\Delta = 0$, pois zero é elemento neutro da subtração ou adição, e duas raízes distintas quando $\Delta > 0$. Desta forma, o professor leva o aluno a descobrir o papel do discriminante de forma dinâmica, e não formal como uma mera informação do professor quando o aluno apenas decora fatos sem descobrir ele próprio esta conclusão.

Agora, estudaremos uma caracterização analítica de uma função quadrática que utilizamos com proveito na elaboração de uma das propostas de aula nesse trabalho.

De acordo com os autores Lima et al (2006) o teorema de caracterização da função quadrática é:

> A fim de que a função contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante $x_1, x_2, ..., x_n$,... seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ... $y_n = f(x_n)$, ...

Para tentar facilitar o entendimento do teorema, pode-se dizer que a função quadrática é um modelo matemático caracterizado da seguinte forma: Para todo espaçamento constante de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, no domínio da função, ocorre uma transformação por f(x) com valor constante da segunda variação $\Delta\,(\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)})/\,\Delta x$.

Dados, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ e espaçamento constante $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

$\Delta y_n = f(x_{n+1}) - f(x_n) = f(\Delta x + x_n) - f(x_n)$;

$\Delta y_n = a.(\Delta x + x_n)^2 + b.(\Delta x + x_n) + c - a.(x_n)^2 - b.x_n - c$;

$\Delta y_n = 2.a.\Delta x.x_n + a.(\Delta x)^2 + b.\Delta x$. Considere: $p = 2.a.\Delta x$ e $q = a.(\Delta x)^2 + b.\Delta x$;

$\Delta y_n = p.x_n + q$;

Segunda variação: $\Delta y_{n+1} - \Delta y_n = p.x_{n+1} + q - p.x_n - q = p.(x_{n+1} - x_n)$;

$\Delta y_{n+1} - \Delta y_n = 2.a.\Delta x.\Delta x$;

Conclusão: $\frac{(\Delta y_{n+1} - \Delta y_n)}{(\Delta x)^2} = 2.a$.

Para a recíproca desta caracterização, mostra-se inicialmente que se $y_1, y_2, ..., y_n$ é uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada para qualquer espaçamento constante $x_1, x_2, ... , x_n$, existem números reais a, b, c tais que $y_n = an^2 + bn + c$ para todo $n \in N$.

Com efeito, $y_2 - y_1, y_3 - y_2, ... , y_{n+1} - y_n$, formam uma progressão aritmética não degenerada, cujo primeiro termo é $d = y_2 - y_1$ e cuja razão chamaremos de r. Portanto seu n-ésimo termo é $y_{n+1} - y_n = d + (n-1).r$, para n = 1, 2, 3, ... ,n.

Podemos escrever o termo y_{n+1} da seguinte forma:

$y_{n+1} = (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + ... + (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) + y_1$;

$y_{n+1} = [d + (n-1).r] + [d + (n-2).r] + ... + (d + r) + (d) + y_1$.

Sabendo que (r) + ... + (n-2).r + (n-1).r é soma de uma progressão aritmética de n-1 termos, ou seja, $S_{(n-1)} = \frac{[r+(n-1).r](n-1)}{2} = \frac{nr.(n-1)}{2}$ e que d + d + ... + d = nd, temos:

$y_{n+1} = nd + \frac{n(n-1)r}{2} + y_1$, para todo $n \in N$.

Aplicando este resultado para y_n, temos: $y_n = (n-1)d + \frac{(n-1).(n-2)r}{2} + y_1$; $y_n = nd - d + \frac{(n^2-3n+2).r}{2} + y_1$;

$y_n = \frac{rn^2}{2} + \left(d - \frac{3r}{2}\right)n + y_1 + r - d$.

Fazendo $a = \frac{r}{2}$; $b = \left(d - \frac{3r}{2}\right)$ e $c = y_1 + r - d$, temos: $y_n = an^2 + bn + c$, para todo $n \in N$.

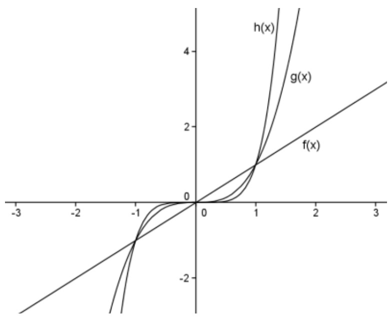
Usando o fato de que todo número real x é limite de uma sequencia de números racionais r_n, e que toda função quadrática com domínio real é contínua (resumindo, dizemos que a função f é contínua em determinado ponto **a** do domínio, se o seu limite coincide com f(a). Portanto a função f é contínua se for contínua em todos os pontos de seu domínio), a continuidade de f nos dá $f(x) = \lim f(r_n) = \lim ar_n = ax$. Acabamos de demonstrar que $y_n = an^2 + bn + c$, para todo $n \in N$; Da mesma forma usando a ideia de limite, poderíamos provar que $y_x = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in R$.

A caracterização da função quadrática foi explorada numa atividade deste trabalho que relaciona a temperatura com o índice de germinação da semente de girassol, com o recurso da calculadora gráfica e a metodologia de modelagem, pois foi necessário usar a função estatística de regressão quadrática na calculadora, para encontrar a expressão da função quadrática que mais se aproximava dos pontos da tabela fornecida; Também foram explorados os conceitos de domínio, imagem, máximo e mínimo de uma função de forma contextualizada.

2.4 **Função Polinomial**

Uma função polinomial de grau n é uma função real dada pela expressão da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ são números reais conhecidos e $a_n \neq 0$. A função afim $f(x) = ax + b$, cujo gráfico é uma reta e a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é uma parábola, são exemplos de função polinomial de primeiro e de segundo grau, respectivamente. É importante para os alunos conhecerem outros gráficos associados a funções polinomiais de grau maior que dois. Os exemplos mais simples de polinômios são as funções potências da forma 1, x^2, x^3, ..., x^n. Abaixo estão traçados os gráficos das funções potências de grau ímpar $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = x^5$.

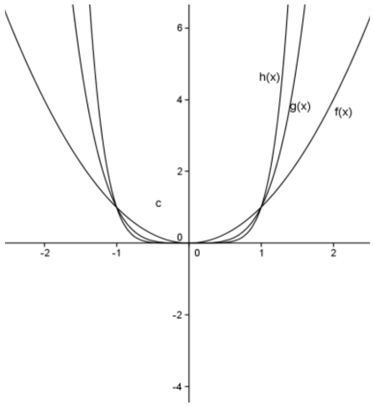
Figura 8 - Gráficos de função $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = x^5$



Fonte - Santos et al (1998, p.77)

Abaixo estão traçados em conjunto os gráficos das seguintes potências de grau par $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ e $h(x) = x^6$.

Figura 9 - Gráficos de função $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ e $h(x) = x^6$



Fonte - Santos et al (1998, p.78)

Quando caracterizamos a função afim, a variação na imagem é proporcional a variação no domínio, e a caracterização de uma função quadrática estabeleceu que a segunda variação dos valores na imagem é constante para uma variação de espaço constante no domínio.

Seguindo essa linha de raciocínio pode-se caracterizar a função cúbica ou polinomial de grau 3. Segundo Sviercoski (2008):

> a função cúbica tem equação geral dada por $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ em que $a \neq 0$ e b, c e d são números constante reais. Os dados de uma tabela constituem uma função cúbica se os valores da terceira variação, $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$, forem uma constante não nula. Neste caso, $a = \frac{\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}}{6}$, bastando derivar a função cúbica três vezes.

Na atividade 1 deste trabalho utilizou-se gráfico de uma função polinomial de grau três que relacionava a densidade volumétrica do solo (mg/m^3) com as diferentes alturas (profundidade) no perfil do solo (m).

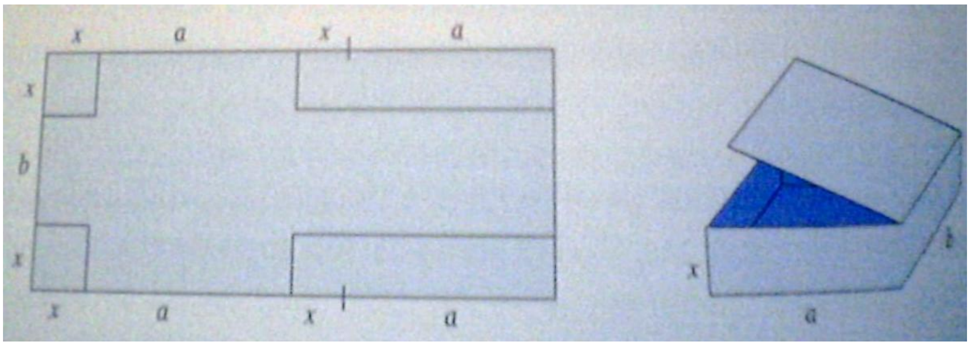
O objetivo da atividade foi apresentar um gráfico novo para os alunos, e através do mesmo estudar de forma contextualizada, seguindo a metodologia de resolução de problemas, as principais características de uma função como: domínio, imagem, tabela, gráfico, expressão, grandezas dependentes e independentes, máximo e mínimo, crescimento e decrescimento e outras.

Já na atividade 2 deste trabalho, cujo objetivo era estudar a translação de gráfico, trabalhamos com gráficos de polinômios de grau dois, tendo a oportunidade de visualizar outros gráficos da função polinomial de grau três. Os alunos aplicaram seus conhecimentos de translação de gráfico em polinômios de grau três, por meio da resolução de problemas e uso da calculadora gráfica.

Como outro exemplo da importância de estudar função polinomial com grau maior que dois, e que utilize a metodologia de modelagem, poderíamos ter incluído em nosso trabalho, o problema a seguir:

Com uma cartolina de forma retangular com 50 cm por 20 cm deseja-se construir uma caixa com tampa, como na figura a seguir.

Figura 10 - Caixa e cartolina 50 X 20 cm



Fonte - Silva, Pinto e Machado (2010, p.82)

Podem ser pedidas as possíveis dimensões de a, b e x de forma que a caixa possa ser feita e determinar seu volume. Propondo a atividade para ser explorada em grupo, provavelmente os grupos irão construir as caixas usando tamanhos diferentes. Uma pergunta importante será “como exprimir o volume da caixa em função apenas de x e qual a representação gráfica da função original”.

Uma vez que a cartolina tem 50 cm de comprimento, conclui-se pela figura que $2x + 2a = 50$ e consequentemente $a = 25 – x$.

Por outro lado, com 20 cm de largura, conclui-se que $2x + b = 20$, portanto $b = 20 – 2x$.

Sabe-se que o volume da caixa é dado pela fórmula $V = a.b.x$, então substituindo a e b, temos:

$V = (25 - x).(20 - 2x).x;$

$V = 2x^3 - 70x^2 + 500x.$

Obtemos uma fórmula V(x) em função de x.

É importante sempre incentivar o aluno, que provavelmente chegará à fórmula do volume, mas terá dificuldade de construir o gráfico da função cúbica. Conclui-se que é muito útil o uso da calculadora gráfica nessa situação. Outras propriedades que devem ser exploradas é o domínio da função no contexto da atividade proposta e ainda quais dimensões deve ter a caixa para que o volume seja máximo. Pode-se usar a calculadora gráfica para encontrar o volume máximo e as dimensões que o produzem. Portanto, temos um campo enorme para explorar usando a tecnologia moldados na resolução de problemas e com enfoque na modelagem matemática.

2.5 **Função Racional**

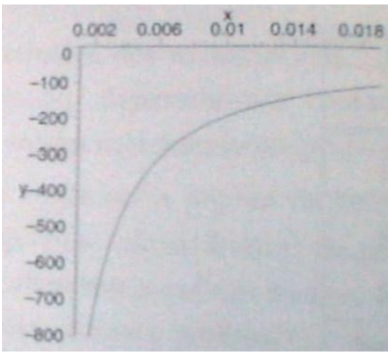
Os polinômios podem ser, multiplicados por constantes reais, somados e subtraídos entre si, e os resultados serão novamente polinômios. No entanto, se dividirmos polinômios nem sempre obteremos outro polinômio. O estudo desse novo tipo de função chamado racional são funções que são representados na forma de quociente de dois polinômios, ou também de forma mais simples e limitada é uma função em que cuja expressão apresenta a variável x no denominador em um polinômio. É claro que para o aluno do ensino médio, não vamos trabalhar com assíntotas e limites laterais que são bem explorados neste assunto, mas é importante para o aluno verificar com o recurso da tecnologia alguns comportamentos de f(x) para valores muito grandes ou muito pequenos de x, ou em algumas situações especiais, podendo assim explorar alguma ideia de infinito.

Pode-se mostrar ao aluno a importância de representar bem o gráfico, pois esse tipo de função causa algumas surpresas, como no exemplo a seguir:

Seja $f(x) = \frac{1-2000x}{1000x^2}$. Usando a calculadora gráfica podemos obter alguns pontos pertencentes ao gráfico através de uma tabela e esboçar o gráfico. Poderia perguntar ao aluno qual a conclusão que ele teria quando os valores de x vão ficando mais próximos de zero e o que ocorre com f(x)? Veja a tabela e o gráfico a seguir.

Figura 11 - Tabela e gráfico da função f(x) = $\frac{1-2000x}{1000x^2}$

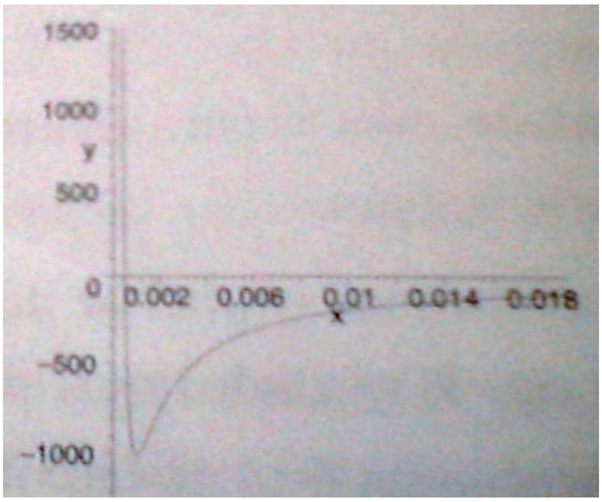
x	$g(x)$
0.1	−19.9
0.01	−190.
0.009	−209.8765432
0.004	−437.5
0.002	−750
0.001	−1 000



Fonte – Olivero e Cardim (2009, p.68)

A impressão é que os valores de f(x) se afastam de zero, na direção negativa. Com essas informações, provavelmente os alunos responderiam que para valores cada vez mais próximos de zero os valores de f(x) tende para um valor muito grande no sentido negativo, representado matematicamente por - ∞. Mas se algum aluno mais desconfiado usar, por exemplo, um valor de x menor ainda como 0,0002, ele terá uma surpresa com o valor de f(x) = 15000. Veja o gráfico a seguir melhor representado.

Figura 12 - Melhor representação do gráfico f(x) = $\frac{1-2000x}{1000x^2}$



Fonte – Olivero e Cardim (2009, p.68)

Na atividade 5 desta dissertação trabalhamos com a função racional, explorando a importância da melhor visualização do gráfico na tela da calculadora gráfica de forma contextualizada, reforçando a importância do domínio e imagem de uma função, além de explorar a ideia de infinito em nível secundário.

Mais uma vez reforçamos a ideia de que uma melhor representação gráfica da função é muito importante para o estudo do comportamento de um determinado fenômeno natural modelado por funções, além de aumentar o grau de percepção do aluno para comportamentos estranhos, quando interpretam outros tipos de curvas além da quadrática e exponencial ou logarítmica que estão no currículo do ensino médio.

Outra contribuição da nossa pesquisa é mostrar que existem problemas interessantes que podem ser modelados por funções polinomiais e racionais aumentando o interesse dos alunos em estudá-las dentro do currículo escolar.

CAPÍTULO 3: ATIVIDADES PARA ENSINO DE FUNÇÕES

Neste capítulo iremos descrever as atividades planejadas e realizadas para a pesquisa deste trabalho. Como foi citado na Introdução, o trabalho baseou-se na problemática do ensino de Funções no Ensino Médio.

3.1 **Considerações iniciais**

Função é um dos conceitos mais importantes da matemática e constitui uma ferramenta básica em várias áreas de conhecimento, como física, biologia, química e outras. A dificuldade encontrada pelos alunos do ensino médio na compreensão deste conceito pode estar muitas vezes relacionada à forma com que o conceito de função é introduzido pelo professor de matemática, e pela capacidade de abstração exigida para sua compreensão. Uma abordagem abstrata pode provocar no aluno uma sensação de fracasso, criando um obstáculo que o impede de avançar em sua aprendizagem.

As atividades do trabalho de pesquisa foram planejadas e executadas no segundo semestre de 2010, aplicados a alunos do primeiro ano do ensino técnico de agropecuária e meio ambiente em regime seriado, IFRJ Campus Pinheiral, RJ.

Apresentamos cinco atividades sobre funções, dentro da perspectiva de conteúdo obrigatório do currículo do primeiro ano do ensino médio. Os alunos já tinham estudado a função afim e a quadrática, de forma tradicional, teórica.

As atividades foram aplicadas com o recurso da calculadora gráfica da Casio, modelo Classpad, trabalhando a resolução de problemas contextualizados e modelagem matemática, com a finalidade de que o aluno conseguisse compreender as definições da matemática.

As atividades focaram respectivamente: 1) função polinomial, 2) o efeito dos movimentos de translação horizontal e vertical no gráfico, 3) a função afim, 4) a função quadrática, e 5) uma função racional. A fundamentação matemática dessas funções se encontra no Capítulo 2.

A avaliação da aprendizagem foi realizada em seguida às atividades com quatro questões do ENEM para o conteúdo curricular, e com um questionário de 14 perguntas para avaliar o impacto do ensino/aprendizagem com recurso tecnológico segundo a ótica dos alunos. A análise das respostas dos alunos às atividades e das avaliações estão no Capítulo 4.

Com as novas propostas do PCN em usar novas tecnologias em sala de aula, a calculadora gráfica foi um dos fatores de motivação para planejar atividades de ensino de funções de forma mais dinâmica, principalmente para enfrentar o desafio de motivar os estudantes num curso técnico profissionalizante.

A questão a que nos propusemos foi:

“Será que a calculadora gráfica realmente motivará os alunos para o aprendizado de função, facilitará a compreensão dos conceitos estudados anteriormente de forma tradicional, não limitará o aluno quanto à habilidade de cálculos algébricos, pela rapidez com que a calculadora dispõe os resultados?”

A expectativa era que esses questionamentos fossem respondidos de maneira satisfatória, que a calculadora gráfica estimulasse realmente o entendimento melhor dos conceitos matemáticos por parte do aluno.

A escolha do tema central funções afim, quadrática, polinomial e racional se deu devido à grande importância desse assunto dentro do currículo do ensino médio e que possui uma grande variedade de aplicações a outras áreas do conhecimento. Mas, este projeto não fica limitado a essas funções, ele pode ser perfeitamente estendido a outros tipos de funções, pelo enfoque desenvolvido pelo mesmo.

Entender as relações entre as diversas grandezas que nos são apresentadas no dia a dia e relacioná-las com o estudo de funções, em particular a função afim, quadrática, polinomial e racional, proporciona ao educando a construção do seu conhecimento de forma ampla. A tecnologia facilita práticas construtivistas para uma melhor compreensão do seu cotidiano, interpretação de tabelas e gráficos que são amplamente utilizados nos problemas da sua profissão.

A elaboração de atividades incluiu assim o uso da calculadora gráfica que enfatiza a visualização e a experimentação. Por visualização entendemos o processo de formar imagens, seja mentalmente, seja com o auxílio de lápis e papel ou tecnologia. A visualização é empregada com objetivo de estimular o processo de descoberta matemática, obtendo uma maior compreensão matemática. (Zimmermann e Cunninghan, 1991) em (Laughbaum, E.D., 2000). A experimentação por meio de recursos tecnológicos traz a oportunidade de exploração e compreensão dos fenômenos aliados aos conceitos abstratos.

3.2 **As Atividades**

Foram aplicadas cinco atividades para duas turmas de primeiro ano do curso técnico de meio ambiente e duas turmas de primeiro ano do curso técnico de agropecuária. As duas primeiras atividades foram aplicadas em sessões de uma aula de 50 minutos para as turmas inteiras dos dois cursos técnicos. A terceira e quinta atividade foram aplicadas em sessões de duas aulas de 50 minutos para a metade das turmas, pois a outra metade estava no laboratório de informática. A quarta atividade foi aplicada em uma aula de 60 minutos para as turmas inteiras. Quanto à avaliação foram aplicadas em sessões de uma aula de 30 minutos para a metade da turma e o questionário sobre a tecnologia no ensino/aprendizagem foi aplicado após o término da prova de matemática do quarto bimestre do ano de 2010.

Tabelas e gráficos foram utilizados como forma de observação de padrões, mudanças de comportamento das variáveis, tendo em vista que o cotidiano escolar dos alunos está cercado de gráficos e tabelas, que devem ser analisados e interpretados a todo o momento.

As folhas das atividades estão disponibilizadas como APÊNDICE no final da dissertação, podendo ser utilizadas por professores que enfrentem mesmo tipo de desafios no ensino de funções e que tenham interesse pela pesquisa do nosso trabalho.

A modelagem matemática não foi desenvolvida como um processo de modelar fenômenos observados experimentalmente pelos alunos, mas sim como um recurso que conecta um problema do mundo real à linguagem matemática abstrata, dentro do processo de resolução de problemas.

3.3 **Atividade 1: Função polinomial**

A primeira atividade tratou de um problema que relaciona a densidade volumétrica de amostras de solo com diferentes profundidades em metro. A escolha desse modelo por uma expressão de função polinomial de grau três, foi mostrar ao aluno que existem outras funções além da afim e quadrática, que geralmente são as funções estudadas no ensino fundamental e que deveriam ser familiares aos alunos.

A folha atividade foi constituída por uma sequência de itens:

1) Os dados da tabela, descrevem a densidade volumétrica do solo (mg/m^3) em diferentes alturas (profundidade em metro) no perfil do solo , para dado tipo de manejo.

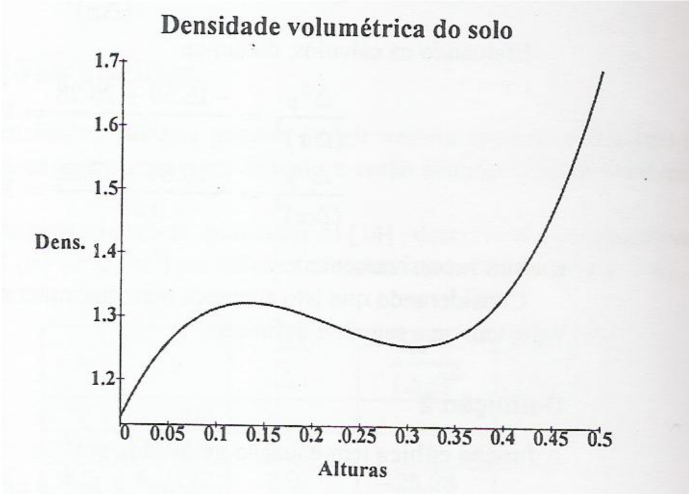
Tabela 2 - Atividade 1: Função Polinomial

Metros(m)	Densidade (mg/m^3)
0	1.1400
0.05	1.2592
0.1	1.3127
0.15	1.3198
0.2	1.2998
0.25	1.272
0.3	1.2557
0.35	1.2702
0.4	1.3348
0.45	1.4688
0.5	1.6913

Fonte – Sviercoski (2008, p. 46)

Uma função que pode modelar esses dados é dada pela expressão:

$y = 25{,}733x^3 - 16{,}997x^2 + 3{,}168x + 1{,}1402$, cujo gráfico está esboçada a seguir:



a)Quais as grandezas envolvidas no problema?

b)Pelo enunciado do problema, quais são as ferramentas matemáticas que modelam uma função?{A formulação deste item se mostrou problemática durante a realização da atividade. A intenção inicial para este item foi que os alunos descobrissem a interpretação de uma tabela de dados, o significado de uma expressão que retratasse os dados do problema e a compreensão do gráfico como ingredientes essenciais que compõem o conceito de função. As dúvidas dos alunos fizeram perceber que o enunciado das tarefas é muito importante}

c)Determine o domínio da função.

d)Determine a imagem da função.

e)Qual é a grandeza independente? {A palavra grandeza foi usada neste item de maneira informal para que os alunos associassem o conceito matemático de variável com os dados do problema contextualizado. Observo que o correto seria chamar a atenção durante a aula para que os alunos compreendessem a natureza de “grandeza” no contexto e o termo correto matemático “variável”, ao analisar que a medição de grandezas produz números reais que pertencem ao domínio ou contradomínio de uma função.}

f)Qual é a grandeza dependente?

g)Observe que na definição de função exigimos que a cada elemento do domínio seja associado um único (um e apenas um) elemento da imagem. Por que essa definição é importante de acordo com problema?

h) Entre que alturas a função é crescente? {observamos novamente que o item deveria ser reformulado com linguagem mais adequada para que possamos aproximar o contexto da linguagem formal necessária na matemática.}

i)Entre que alturas a função é decrescente?

j)Qual é a densidade máxima? Até a altura de 0,2 m qual é aproximadamente a densidade máxima local? Explique.

k)Qual é a densidade mínima? A partir de 0,2 m qual é aproximadamente a densidade mínima local? Explique.

l)Uma função é injetora se para quaisquer elementos do domínio, se $x1 \neq x2$ implica que $f(x1) \neq f(x2)$, ou seja, para elementos diferentes do domínio correspondem elementos diferentes da imagem. Olhando só para a tabela podemos afirmar que é injetora? Explique? E olhando só para o gráfico, a função é injetora? Explique.

m) De acordo com o problema podemos ampliar o domínio da função nas duas direções? Explique?

Inicialmente foram apresentadas as três principais formas de representar uma função: tabela, gráfico e expressão da função. O objetivo inicial foi apresentar a calculadora gráfica para que os alunos aprendessem a manuseá-la, e logo após explorei perguntas básicas que envolvem função como: domínio, imagem, variáveis dependentes e independentes, crescimento e decrescimento, máximo e mínimo local, conceito de função e função injetora.

3.3.1 **Experiência real na sala de aula**

A atividade 1, aplicada numa aula de 50 minutos, começou enfrentando problemas, porque os alunos ficaram assustados com a função polinomial de grau 3 e por isso não entenderam bem a tarefa. Devo também fazer autocrítica, por ter ido direto fazendo perguntas como domínio e imagem sem aproveitar a contextualização do problema como era planejado. Os alunos tiveram bastante dificuldade para resolver essa atividade, pois várias nomenclaturas novas surgiram para eles: grandezas, variável dependente e independente, função crescente e decrescente. Como eles estavam no 3º bimestre e já haviam estudado função afim e quadrática, pensava que já sabiam esses conceitos. Isso mostra ao professor que é necessário levar em consideração não apenas a correção e a intenção didática de uma atividade, mas a estratégia de trabalho na sala de aula. Assim também, para não introduzirmos tão rapidamente novos conceitos, poderíamos elaborar outras atividades de forma a preparar e organizar melhor o aprendizado desses conceitos por parte do aluno. Essa reflexão das atividades foi a coisa mais importante dessa metodologia de ensino, pois ela mostra mais claramente onde o aluno tem mais dificuldade, quando acompanhamos o desenvolvimento da compreensão e das dificuldades do aluno na resolução de uma tarefa-problema.

3.4 **Atividade 2: Estudo Dinâmico do Gráfico de Funções**

O objetivo da Atividade 2 foi abordar a ideia de translação vertical e horizontal do gráfico de uma função quadrática, pois é uma atividade ótima para ser explorada com a calculadora gráfica, já que em sala de aula com quadro e giz é mais difícil de ser realizada.

Esta foi a única atividade que não se baseou em um problema contextualizado. Para finalizar essa atividade, pedi para construir o gráfico partindo da tabela da atividade 1 com objetivo de treinar os alunos para o manuseio da calculadora gráfica.

A folha atividade foi constituída por uma sequência de itens:

1) Trace, na janela gráfica dada por $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 10$, os gráficos das funções expressas por $f(x) = x^2 + k$, para $k = -2$, $k = 0$ e $k = 3$.

a)O que você observa sobre o deslocamento dos gráficos?

b)Seja $f(x) = x^2 + k$, para $k = -2$. Dê exemplo de um valor de k, para que o gráfico tenha um deslocamento vertical para baixo. Construa os gráficos das funções.

2) Trace, na janela gráfica dada por $-10 \le x \le 10$, $-10 \le y \le 10$, os gráficos das funções expressas por $f(x) = (x + k)^2$, para $k = 0$, $k = 2$ e $k = 4$.

a)O que você observa sobre o deslocamento dos gráficos?

b)Seja $f(x) = (x + k)^2$, para $k = 0$. Dê exemplo de um valor de k, para que o gráfico tenha um deslocamento horizontal para a direita. Construa os gráficos das funções.

3)Na matemática, denominamos esses deslocamentos de <u>translação vertical</u> para baixo ou para cima e <u>translação horizontal</u> para direita ou esquerda. Portanto, se temos a função expressa por $f(x) = x^3$ e transladamos seu gráfico horizontalmente 5 unidades para direita, ela será representada por $f(x) = (x - 5)^3$, e em seguida sofrer uma translação vertical para cima de 8 unidades, teremos $f(x) = (x - 5)^3 + 8$.

a)Determine a expressão da função cujo gráfico é dado pelo deslocamento do gráfico da função expressa por $f(x) = x^3$ transladando horizontalmente 1 unidade para esquerda e verticalmente 2 unidades para baixo. Construa o gráfico na calculadora gráfica.

b)Partindo das coordenadas do ponto (-1,-1) no gráfico da função $f(x) = x^3$, deduzir quais são as coordenadas desse ponto depois de ocorridas as translações do item (a), sem usar a expressão da nova função.

4) Use a calculadora para marcar os pontos x e y da tabela da Atividade 1 para um esboço do gráfico.

3.4.1 **Experiência na sala de aula**

Os alunos não mostraram dificuldades na Atividade 2, mas devido ao feriado e duas semana de provas, essa atividade foi aplicada num sábado letivo fora do horário normal e muitos alunos faltaram. Essa atividade foi simples, os alunos perceberam bem os movimentos de translação vertical e horizontal, mas um problema foi que havia apenas uma calculadora gráfica para vários grupos utilizarem, e por isso a aula não ficou dinâmica como queria, embora tenha valido como aprendizado da técnica de ensinar com uso da tecnologia e validar a experiência. Acredito que a facilidade dessa atividade foi devido ao problema não ser contextualizado, e logo não necessitava de maiores interpretações. O problema não apresentou novos termos desconhecido por aluno, e as respostas eram diretamente obtidas pela visualização na calculadora gráfica. Como os alunos estavam usando a calculadora pela primeira vez explorando as janelas de visualização, houve momentos de parada por parte de outros grupos que esperavam pela calculadora. Isto provoca a reflexão de que é importante o uso de tecnologia pelos próprios alunos, não bastando olhar o que o professor possa exibir, e por isso, o número de aparelhos disponibilizados deve fazer parte importante do planejamento didático de uma atividade.

3.5 **Atividade 3: Entendendo a Função Afim**

O objetivo da Atividade 3 é explorar o conceito de função afim de forma diferente, tal que eles entendessem a caracterização da função afim para identificá-la em qualquer problema, contextualizado ou não, já que os livros didáticos não exploram esse aspecto, porém nos últimos 3 anos vem sendo cobrado no ENEM.

O problema contextualizado escolhido explorou a relação do custo total de plantação por hectare plantado, começando por uma tabela incompleta que o aluno precisa completar com dados, e em seguida, analisando o resultado pergunta-se a expressão da função afim.

A sequência da folha atividade segue:

1)O custo de uma plantação de até 50 hectares é decorrente da quantidade de hectares plantados. O custo das máquinas é um **custo fixo**, pois independe do número de hectares plantados. Já o custo com adubação, semente e mão de obra variam com o número de hectares plantados e é chamado de **custo variável**. Supondo que o custo fixo seja de R$800,00 e o custo variável de R$200,00 por hectare plantado e considerando x o número de hectares plantados, realize as seguintes tarefas:

I. Complete a tabela abaixo, registrando os cálculos efetuados para os resultados obtidos.

Tabela 3 – Atividade 3: Função Afim

hectares (ha)	0	1	2	3	5	50
Custo total (R$)	800	1000	1200			

Fonte – Elaborado pelo autor

II. Considerando y o custo total, qual é a melhor expressão para o custo total, explicando a sua escolha.

(a) y = 800x + 200 (b)y = 800x – 200 (c)y = 200x – 800 (d)y = 200x + 800

III. Tome um referencial ortogonal, representando x no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, e trace o gráfico da expressão escolhida no item (b), dentro da janela gráfica determinada por $-5 \leq x \leq 5$ e $400 \leq y \leq 2000$, considerando a unidade no eixo 0x como 2(hectares plantados) e a unidade no eixo 0y como 200 (R$). Em que ponto o gráfico intersecta o eixo y (custo total)? O gráfico representa parte de que figura geométrica?

IV. Considerando a expressão da função encontrada no item (b), trace dois gráficos em que o valor 200 é mantido fixo, mas alterando o valor 800 para 600 em um dos gráficos, e para 1200 no outro. Em que ponto cada uma das retas intersecta o eixo y? Qual é a posição relativa entre as retas nesses gráficos?

V. Construa a tabela para $0 \leq x \leq 5$ na calculadora gráfica e preencha a tabela abaixo.

Tabela 4 – Atividade 3: Caracterização da Função Afim

Área Plantada(hectares)		Acréscimo	Custo Total (R$)		Acréscimo
x1	x2	########	y1	y2	#########
0	1				
1	2				
2	3				
0	2				
1	3				
2	4				
0	3				
1	4				
2	5				

Fonte: Elaborado pelo autor

VI. Qual é o acréscimo do custo total, quando a área plantada de 20 hectares aumentar para 21 hectares?

VII. Qual é o acréscimo do custo total, quando a área plantada de 17 hectares aumentar para 19 hectares?

VIII. Qual é o acréscimo do custo total, quando a área plantada de 37 hectares aumentar para 40 hectares?

IX. Qual é o acréscimo do custo total, quando a área plantada de 7 hectares aumentar para 11 hectares?

X. Qual é o acréscimo do custo total, quando a área plantada de 20 hectares aumentar para 40 hectares?

XI. Podemos afirmar que o acréscimo do custo total é proporcional ao acréscimo da área plantada? Caso sua resposta seja sim, qual é a constante de proporcionalidade?

XII. Dividindo o acréscimo do custo total pelo acréscimo da área plantada nos itens anteriores, nas respectivas correspondências, o resultado é um valor constante? Se disser sim, qual é o valor; e se disser não, quais são os valores?

Como saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim? No caso do custo da plantação não houve problema. Escolhemos f(x) = ax + b, onde x é o número de hectares plantados, f(x) o custo total correspondente, “**a”** é a taxa de variação por hectare plantado e” **b”** o custo inicial das máquinas (fixo). O modelo serviu muito bem para que os alunos entendessem o significado da função afim dentro de uma situação problema. Mas nem todo problema é assim tão explícito. Uma maneira de explorar a propriedade característica de uma função afim é levar os alunos a perceberem que os acréscimos sofridos por f(x) são proporcionais aos acréscimos dados a x. Na álgebra representamos da seguinte forma:

$f(x_2) – f(x_1) = a.(x_2 – x_1)$.

3.5.1 **Experiência na sala de aula:**

Solicitei para construir o gráfico na calculadora gráfica, pedi o ponto de interseção deste com o eixo y, e também que identificasse a figura geométrica formada pelo gráfico construído. Propus em seguida uma atividade alterando os valores do coeficiente linear e a questão a ser trabalhada era investigar o ponto de interseção com o eixo y, com a finalidade de que os alunos descobrissem a relação entre esse ponto de interseção e o coeficiente linear. Para finalizar a atividade, os alunos construíram uma tabela na calculadora gráfica com acréscimos constantes de 1, 2 e 3 hectares para área plantada, e ao calcular os acréscimos no custo total, de acordo com os acréscimos de hectares plantados respectivamente, levamos o aluno a descobrir a relação de proporcionalidade entre os acréscimos das duas grandezas, reconhecendo o caráter afim da função modeladora, de forma empírica.

A atividade 3 foi realizada depois das provas do 3º bimestre, e a partir dela, as atividades ficaram muito difíceis de serem aplicadas. Os alunos reclamaram que já tinham muita disciplina e acrescentar mais aulas estava muito desgastante, então a coordenação mudou o horário das aulas, passando as atividades de matemática a serem de 15 em 15 dias. A atividade 3 foi muito boa, pois mostrou o conceito de proporcionalidade ligada a função afim, os alunos também não apresentaram dificuldade nessa atividade, mas devido ao fato de haver apenas uma calculadora, a aula ficava pouco dinâmica, pois os grupos precisaram esperar pela calculadora. Porém percebi que a grande dificuldade dos alunos estava sempre ligada na determinação do domínio e imagem.

3.6 **Atividade 4: Entendendo a Função Quadrática**

Na atividade 4 utilizamos a modelagem matemática de um problema para estudar a característica de uma função quadrática.

O problema relacionava a temperatura e a velocidade de germinação das sementes de girassol, por meio de dados coletados em uma experiência de laboratório. Como é um problema de modelagem, os resultados do experimento foram apresentados por meio de uma tabela com seis temperaturas diferentes entre 22,5 ^{0}c e 35 ^{0}c, espaçados igualmente, e seus respectivos índices de velocidade, observados experimentalmente.

Foi pedido aos alunos para preencher uma tabela com uma variação de temperatura constante e sua respectiva variação do índice de velocidade, para explorar se poderia ser uma função afim. O critério de caracterização da função afim é suficiente para descartar esta hipótese. Depois, com a utilização da calculadora gráfica pedi para registrar os pontos da tabela num referencial ortogonal, de forma que os alunos desconfiassem que o gráfico da dispersão de dados tendesse a ser de uma função quadrática. Após isso, os alunos completaram outra tabela com a segunda variação do índice de velocidade, o que mostrou indício da caracterização de uma função quadrática. O resultado aproximado dos cálculos mostrou uma tendência para a proporcionalidade da segunda variação em relação à variação de temperatura, e logo uma função quadrática poderia bem ser o modelo adequado para o problema.

Porém, isso é uma observação constatada em uma tabela, não temos ainda meios de convencer que a função quadrática possa ser realmente um modelo matemático aceitável para o problema.

Então, foi realizada a melhor tarefa que justifica a importância da calculadora gráfica que é o uso da regressão quadrática, ferramenta estatística para determinar a expressão de uma função quadrática e seu respectivo gráfico que melhor represente/aproxime os resultados da tabela. Diante do resultado obtido foram questionados sobre domínio, imagem, zeros da função, máximo e mínimo. A pergunta sobre o índice de germinação negativo provocou o aluno a questionar sobre a limitação dos problemas de modelagem, pelo contexto do problema. A atividade foi finalizada com estudo de domínio e imagem de uma função quadrática, $f(x) = 3x^2$ e $f(x) = - 3x^2$ para que o aluno diferencie um problema puramente matemático de um problema contextualizado que necessita de análise e interpretação.

A folha atividade apresentou a seguinte sequência:

1)Dentre as condições ambientais que afetam o processo germinativo, a temperatura é um dos fatores que tem influência significativa. No laboratório as sementes de girassol foram colocadas para germinar em diferentes temperaturas: 22,5; 25; 27,5; 30; 32,5 e 35 ºC com o objetivo de avaliar o índice de germinação (número de semente germinada / tempo). O resultado encontra-se na tabela abaixo.

Tabela 5 – Atividade 4: Função Quadrática

Temperatura (^{o}c)	Índice de Germinação (N^{o} de semente germinada / dia)
22,5	1,81
25	4,43
27,5	5,7
30	5,57
32,5	4,12
35	1,37

Fonte – Adaptado de Santos e Zonetti (2009, p.23)

a)Na atividade anterior, verificamos que a característica de uma função afim é dada por acréscimos sofridos por f(x) sendo proporcionais aos acréscimos dados a x, em intervalos correspondentes. Complete a tabela e responda se este problema pode ser modelado por uma função afim, justificando sua resposta.

Tabela 6 – Atividade 4: Primeira variação do índice de germinação

Temperatura (°c)		$\Delta x = x_2 - x_1$	Índice de Germinação		$\Delta y = y_2 - y_1$	$\Delta y/\Delta x$
x_1	x_2	##########	y_1	y_2	##########	########
22,5	25		1,81	4,43		
25	27,5		4,43	5,7		
27,5	30		5,7	5,57		
30	32,5		5,57	4,12		
32,5	35		4,12	1,37		

Fonte: Elaborado pelo autor

b) Tome um referencial ortogonal, representando x (temperatura) no eixo das abscissas e y (índice de velocidade) no eixo das ordenadas. Use a calculadora gráfica para registrar os pontos da primeira tabela. A distribuição dos pontos no gráfico se aproxima de alguma curva conhecida? Se sim, diga qual?

c)Complete a tabela abaixo, sabendo que os valores de Δx, Δy e $(\Delta y/\Delta x)$ foram copiados da tabela anterior.

Tabela 7 - Atividade 4: Caracterização da Função Quadrática

Δx	Δy	$(\Delta y/\Delta x)$	$(\Delta y/\Delta x)_1$	$(\Delta y/\Delta x)_2$	$\Delta(\Delta y/\Delta x)$: segunda variação $(\Delta y/\Delta x)$	$\Delta(\Delta y/\Delta x)/\Delta x$
2,5	2,62	1,048	#######	#######	$\Delta(\Delta y/\Delta x) = (\Delta y/\Delta x)_2 - (\Delta y/\Delta x)_1$	
2,5	1,27	0,508	1,048	0,508		
2,5	-0,13	-0,052	0,508	-0,052		
2,5	-1,45	-0,58	-0,052	-0,58		
2,5	-2,75	-1,1	-0,58	-1,1		

Fonte – Elaborado pelo autor

O que podemos afirmar sobre os valores de $\Delta(\Delta y/\Delta x)/\Delta x$?

d)Função quadrática é um modelo matemático caracterizado da seguinte forma: Para todo espaçamento constante de x_1, x_2, ..., x_n, no domínio da função, ocorre uma transformação por f(x) em valores proporcionais da segunda variação de $(\Delta y/\Delta x)$. De acordo com os resultados, podemos afirmar que o problema pode ser modelado por uma função quadrática? Se sim, usando a função estatística da calculadora construa o gráfico por regressão quadrática (ferramenta estatística que traça uma parábola mais próxima dos pontos com erro pequeno) e escreva a expressão da função assim obtida.

e)Agora, usando a função gráfica da calculadora construa o gráfico da função determinada pela expressão determinada no item (d). Como podemos determinar o domínio dessa função no problema? Qual é a imagem da função? No contexto do problema, qual o significado da imagem?

f) Qual ou quais são a(s) raiz(es) da equação f(x) = 0? O que significa no problema os zeros dessa função?

g) Podemos ter o índice de velocidade de germinação negativo? Explique sua resposta.
h)O índice de velocidade de germinação possui máximo? Qual? Determine a temperatura ideal para o índice de velocidade de germinação ser máximo.

i) O índice de velocidade de germinação possui mínimo? Qual?

j)A expressão da função $f(x) = 3x^2$, cujo domínio são os números reais, possui máximo e mínimo? Explique.

k) A expressão da função $f(x) = - 3x^2$, com domínio dado por números reais possui máximo e mínimo?Explique.

3.6.1 **Experiência na sala de aula**

Devido á complexidade das tarefas desta atividade, tanto de execução como de natureza conceitual, deixamos para comentar os desdobramentos desta atividade em 2010 e em 2011 nos capítulos 4 e 5, em que analisamos os aspectos de aplicação e de aproveitamento.

3.7 **Atividade 5: Estudo de uma Função Racional**

Na Atividade 5, propus o estudo de uma função racional para mostrar aos alunos que existem outros tipos de função. O problema escolhido para contextualizar foi o problema de determinar o crescimento da planta de acordo com a quantidade de fertilizante adicionado. Nesta atividade, foi dada a expressão da função que já fora determinada por algum processo de modelagem, $f(x) = \frac{20x}{x+5}$.

A sequencia de itens foi:

1)Considerando que, em um experimento de adubação, a resposta do crescimento de uma planta (cm) pode ser dada por $f(x) = \frac{20x}{x+5}$ em que x > 0 é a quantidade de fertilizante adicionada (g/m^2), responda as seguintes questões.

a) Construa uma tabela na calculadora gráfica com a finalidade de completar a tabela abaixo.

Tabela 8 – Atividade 5: Função Racional

Fertilizante (g/m^2)	Crescimento(cm)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Fonte – Elaborado pelo autor

b) Tome o referencial ortogonal, representando x no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, e trace o gráfico da expressão da função $f(x) = \frac{20x}{x+5}$, dentro da janela gráfica determinada por 0 ≤ x ≤ 5 e 11 ≤ y ≤ 15. O gráfico apareceu na tela da calculadora gráfica?Justifique sua resposta utilizando a tabela do item (a).

c)Sabemos que o domínio da função é o conjunto de valores possíveis para a quantidade de fertilizante que é adicionada. Considerando 0 ≤ x ≤ 5 do item anterior, encontre o conjunto imagem da função, ou seja, um intervalo de valores para o crescimento da planta para este domínio, e trace o gráfico na calculadora gráfica, de modo que a janela gráfica corresponda às condições deste item.

d)Construa uma tabela na calculadora gráfica com a finalidade de completar a tabela abaixo.

Tabela 9 – Atividade 5: Noção de limite

Fertilizante (g/m^2)	Crescimento(cm)
0	
10	
20	
30	
40	
50	
60	
70	
80	
90	
100	

Fonte – Elaborado pelo autor

e)Com os dados da tabela acima, podemos afirmar que o crescimento da planta ultrapassará 20 cm quando acrescentarmos uma quantidade superior a 100 g/m^2 de fertilizante? Justifique sua resposta.

f)Determine o crescimento da planta em cm quando adicionarmos 100000 g/m^2 de fertilizante. E 200000 g/m^2. Comente criticamente o contexto dessa questão. É válido fazer tais questionamentos?

g) Tome o referencial ortogonal, representando x no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, e trace o gráfico da expressão da função $f(x) = \frac{20x}{x+5}$, dentro da janela gráfica determinada por $0 \leq x \leq 100$ e $0 \leq y \leq 25$ e trace o gráfico da expressão da função $f(x) = 20$.

h)De acordo com os itens (f) e (g), podemos afirmar que o crescimento da planta ultrapassará 20 cm quando acrescentarmos uma quantidade muito grande de fertilizante? Justifique sua resposta.

i) Funções racionais são funções que podem ser representados sob a forma de um quociente de dois polinômios, portanto a expressão $f(x) = \frac{20x}{x+5}$ é uma função racional. Determine o conjunto domínio e o conjunto imagem da função.

j)Construa uma tabela na calculadora gráfica utilizando a expressão da função $f(x) = \frac{20x}{x+5}$ com $-5{,}1 \leq x \leq -5{,}0$, considerando a unidade no eixo Ox de 0,01. O que acontece com o valor de y quando o valor de x se aproxima de -5? Construa o gráfico na calculadora gráfica dentro da janela gráfica determinada por $-6 \leq x \leq -5$, considerando a unidade no eixo Ox como 0,2 e a unidade no eixo 0y como 10 e ratifique sua resposta anterior. Explique o que acontece quando x= - 5. O que esta função tem a ver com o problema inicial?

3.7.1 **Experiência na sala de aula**

Depois da primeira tarefa de completar a tabela, os alunos foram provocados a construírem o gráfico com a calculadora gráfica, utilizando o mesmo intervalo para quantidades de fertilizante da tabela anterior, mas escolhendo outro intervalo de crescimento, de modo que o gráfico da função não aparecesse na tela da calculadora numa primeira instância. Então, pedi aos alunos para justificarem o fenômeno e que encontrassem uma forma de mostrar a imagem como parte do gráfico. A necessidade de compreender a janela de visualização relacionada com os dados da função foi ressaltada com esta tarefa.

Em seguida, repeti a atividade de completar a tabela, mas com uma variação maior de fertilizante até 100 mg/m^2, dando aproximadamente um crescimento de 19,9 cm. Então provoquei o aluno questionando se adicionasse mais fertilizante a altura da planta ultrapassaria 20 cm. Solicitei que calculassem para 100000 g/m^2 e 200000 g/m^2 e que questionassem o absurdo de calcular o crescimento para uma quantidade tão grande de fertilizante.

Posteriormente, trabalhei com a mesma expressão da função racional $f(x) = \frac{20x}{x+5}$ só que agora sob perspectiva da matemática pura, e pedi o domínio e a imagem da função. Para finalizar, explorei um pouco a ideia de infinito quando o valor de x tendesse a -5 e pedi para explicar por que a calculadora dava erro quando calculava f(x) para x = -5.

3.8 **Avaliação do conteúdo matemático trabalhado nas Atividades**.

Para a avaliação em 2010 do aproveitamento dos alunos sobre o conceito de Funções, selecionei 4 questões do ENEM 2008 e 2009 (ver apêndice F).

A primeira foi uma questão que trabalha um boleto bancário da mensalidade de uma escola em que os alunos teriam que determinar a expressão da função afim.

A segunda questão perguntou sobre o tempo para percorrer 10 km por alguns meio de transporte, no qual teríamos uma única alternativa que não era absurdo.

Já a terceira questão relacionou o custo da diária com os dias de hospedagem, cuja ideia era treinar a manipulação dos cálculos.

E a última questão foi de modelagem, comparando a quantidade de bolas adicionadas em um recipiente e o nível de água representada por uma tabela e pediu-se a expressão da função.

Em 2011, realizamos novamente as atividades com outras turmas, obtendo subsídios para avaliar melhor o aproveitamento dos alunos na aprendizagem do conceito de função.

O resultado do aproveitamento dos alunos na avaliação para as turmas de 2011 consta no Capitulo de conclusão.

CAPÍTULO 4: ANÁLISE DAS REALIZAÇÕES DAS ATIVIDADES

Neste capítulo apresentamos uma análise das realizações das Atividades pelos alunos, que provocaram reflexões e avaliações do professor. As reflexões ampliaram a perspectiva da ação de um professor na sala de aula ao ensinar matemática com uso estratégico de diferentes metodologias.

4.1 **Análise sumaria das atividades**

As atividades 1, 2 e 3 foram menores e exigiram facilidade maior na realização, em comparação às atividades 4 e 5. Como foi mencionado no Capitulo 3, a partir da Atividade 3, as aulas de matemática se tornaram mais escassas, o que dificultou a realização do resto das atividades programadas.

A atividade 4 não foi realizada satisfatoriamente, pois, além de ser num sábado letivo, os alunos haviam ficado praticamente um mês sem atividade de matemática. As tarefas da Atividade eram grandes, com os itens precisando muito do recurso da calculadora como regressão quadrática e muitos cálculos. Foi explorada pela primeira vez a modelagem matemática, com todos os grupos possuindo uma calculadora à disposição. Embora todos os grupos estivessem com uma calculadora, a ideia de explorar o conceito de função quadrática com a proporcionalidade da segunda variação, utilizando valores aproximados e com casas decimais, dificultou bastante o entendimento desse conceito. Os alunos só conseguiram desenvolver 4 itens num total de 12 itens dessa atividade. Esta experiência mostrou que devemos começar devagar quando queremos ensinar conceitos mais difíceis. Ficou clara a dificuldade dos alunos, e também que numa aula tradicional expositiva o professor passa sem perceber a necessidade desse tipo de questionamento.

Na atividade 5, embora fosse uma função desconhecida dos alunos, eles desenvolveram bem, mas como exigia bastante o uso da calculadora gráfica e para esta atividade só havia uma disponível, não foi possível terminar toda a atividade na classe. A grande dificuldade, já conhecida, dos alunos nessa atividade, além dos conceitos de domínio e imagem, é perceber a limitação dos resultados quando trabalhamos com problemas contextualizados. Por exemplo, perceber absurdos de alguns cálculos quando interpretados no contexto, enquanto que os mesmos podem ser calculados e ter sentido dentro da matemática pura que está presente na maioria dos livros didáticos. Isso aconteceu no item (f) dessa atividade.

4.2 **Análise da Reação dos alunos às Atividades**

Quando as atividades foram entregues aos grupos na Atividade 1, como primeira reação disseram que não entenderam o problema. Precisei fazer breve comentário sobre como a função foi modelada, começando com a tabela, mostrando em seguida como descobrir a expressão de função que mais se aproxima dos resultados tabelados, e finalmente a construção gráfica. A função escolhida para o início de uma atividade nova não foi boa, pois poderia ter começado com uma função afim que é mais fácil. Mas depois das atividades de função afim e quadrática, voltando à função polinomial, eles tiveram menos dificuldades. Algo que poderia ser feito no início para melhor interpretação do aluno é um desenho que esquematize a situação do problema. Alguns alunos não entenderam como surgiu a expressão da função polinomial de grau três e olhando para o gráfico eles tiveram dúvidas sobre se os pontos da tabela pertenciam ao gráfico. Assim, na Atividade 2, voltei a trabalhar uma tabela de dados, e usei a calculadora gráfica para localizar os pontos e em seguida esboçar o gráfico correspondente.

Apresentamos a seguir algumas situações de respostas de grupos e alunos que serviram de base para a análise da dificuldade e do aproveitamento das Atividades, assim como serviram de base para as reflexões críticas do professor. Acreditamos que as situações descritas neste capítulo possam ser reconhecidas por colegas professores.

4.2.1 **Atividade 1**

- No item (a), a primeira dificuldade dos alunos surgida foi saber o que é grandeza, portanto é necessário perceber que cabe uma explicação na aula sobre grandezas antes de fazer a pergunta.

a)Quais as grandezas envolvidas no problema?

Altura e densidade.

- No item (b), os alunos só responderam depois da minha explicação. Isto mostra que não é correto ir muito direto na pergunta, talvez pudesse ter feito algumas perguntas intermediárias como: os dados estão organizados de que forma, qual a expressão da função e qual a representação geométrica da função para em seguida fazer a pergunta do item (b).

b)Pelo enunciado do problema quais as ferramentas matemática que modelam uma função?

Equação, gráfico e tabela.

- No item (c), os alunos perguntaram o que era domínio e outros perguntaram quem era o domínio x ou y? Como os alunos já estudaram função, não havia planejado trabalhar esse conceito. Mas o resultado mostra que devemos sempre retomar os conceitos para que os alunos os reconheçam em cada situação, por exemplo, a atividade poderia incluir perguntas iniciais como: “qual a variação da altura no problema”, “vocês avaliariam essa grandeza como dependente (de que?) ou independente”, e em seguida poderia enunciar ou recordar a representação matemática de intervalo e domínio da função. Essas orientações ajudariam preparar o aluno para responder o item (c).

c)Determine o domínio da função?

$x = [0; 0,5]$

Observação: O que desejo construir junto aos alunos é fazer com que o aluno entenda os conceitos matemáticos através de resolução de problemas, principalmente através de problemas contextualizados com uma linguagem próxima de suas áreas técnicas. E, com a ajuda da calculadora gráfica utilizar nova linguagem tecnológica no espaço educacional, para que o aluno construa esses conceitos passo a passo, valorizando e entendendo a aplicação da matemática na sua profissão.

-Nos itens (d), (e) e (f), foi corroborada a observação anterior de que esclarecer previamente os conceitos de grandeza, e de variáveis dependente e independente é muito importante para não trazer dúvidas.

d)Determine a imagem da função?

$Im = [1.1400; 1.6913]$

e)Qual a grandeza independente?

A altura.

f)Qual a grandeza dependente?

A densidade.

-No item (g) foi um festival de perguntas, com dizeres ”não sei fazer, professor”. A experiência mostrou que o tema de definição de uma função precisa ser trabalhado com cuidado e paciência, os conceitos abstratos não podem ser introduzidos diretamente, mesmo em situações contextualizadas. Ocorreu-me que deveria trabalhar questionamentos como: “para uma determinada amostra de terra com sua respectiva profundidade, poderíamos ter resultados de densidade diferentes? Explique”. Depois poderia trabalhar outras situações para o aluno analisar, por exemplo, “a acidez da terra para cada amostra analisada poderia ter resultados de ph diferentes?“ E também exemplos em que falha o conceito de função. Acho que nesse ponto os alunos estariam preparados para entender o conceito de função.

g)Observe que na definição de função exigimos que a cada elemento do domínio, seja associado um único (um e apenas um) elemento da imagem. Por que essa definição é importante de acordo com o problema?

Para a cada amostra de terra só há um valor possível de densidade.

-Nos itens (h) e (i) os alunos em geral responderam corretamente, embora alguns grupos respondessem com apenas um intervalo de crescimento. A pergunta pode ser alterada para que intervalos de altura(s) a função é crescente. Esse foi um questionamento que fiz durante a aula.

h)Entre que altura a função é crescente?

[0; 0,15] ∪ [0,35; 0,5] .

i)Entre que altura a função é decrescente?

[0,15; 0,35] .

Uma explicação sobre a definição matemática de máximo e máximo local é importante para poder pedir aos alunos para identificarem de acordo com suas respostas dadas anteriormente pela análise do gráfico e da tabela, qual delas seria máxima e máxima local.

j)Qual a densidade máxima?Até a altura de 0,2 m qual é aproximadamente a densidade máxima local? Explique.

1,6913 . 1,3198 Até 0,2m a densidade máxima é atingida em torno de 0,15m.

k)Qual a densidade mínima? A partir de 0,2 m qual é aproximadamente a densidade mínica local?Explique.

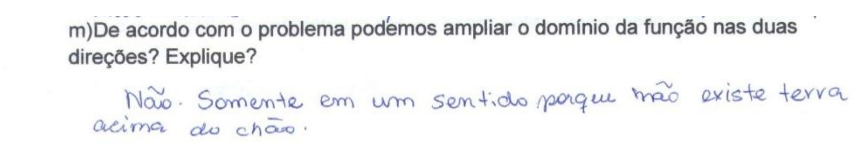
1,1400 . 1,2557 . Até 0,2m a densidade mínima é atingida em torno de 0,3m.

-O item (l) foi a pergunta mais difícil da atividade, e quase nenhum aluno conseguiu responder. Ao me questionar sobre quais os erros cometidos por mim e analisando a minha explicação para os alunos, verifiquei um entendimento melhor da situação. Deveria começar perguntando da seguinte forma: se pegarmos duas amostras com profundidades diferentes, obteremos duas densidades diferentes? Poderia dar outros exemplos com outras situações contextualizadas, e podia pedir para os alunos traçarem uma reta horizontal, intersectando o gráfico em pelo menos dois pontos, pedindo para analisarem suas respostas anteriormente de acordo com a interseção da reta com o gráfico. E após essas etapas poderia entrar com a definição matemática de função injetora e seu método geométrico de identificá-la.

l)Uma função injetora diz que para qualquer elemento do domínio se x1≠x2 implica que f(x1)≠f(x2), ou seja, elementos diferentes do domínio implica em elementos diferentes da imagem. Olhando só para a tabela podemos afirmar que é injetora? Explique? e olhando só para o gráfico do problema é injetora?Explique.

Sim. Porque os valores são todos diferentes. Não. Porque para determinados valores de y há mais de um valor possível para x.

-No item (m) a pergunta foi mal formulada, os alunos responderam bem depois da minha explicação. Poderia perguntar se poderíamos pegar outras amostras da terra em altura (profundidade) maior e analisar sua densidade. E acima da terra poderíamos pegar amostra para análise? Nessa altura poderia entrar com a pergunta do item (m) mostrando ao aluno a importância do domínio em matemática, que mesmo podendo retirar terras em profundidades maiores, existe um limite na profundidade da terra que depende da necessidade do experimento analisado.


m)De acordo com o problema podemos ampliar o domínio da função nas duas direções? Explique?

Não. Somente em um sentido porque não existe terra acima do chão.

4.2.2 **Atividade 2**

A atividade 2 foi mais fácil que a atividade1, ou então, melhor elaborada para o entendimento do aluno, pois os mesmos confirmaram com suas reações. A principal finalidade era conhecer a calculadora gráfica e manuseá-la, sem perder a oportunidade de lançar novos conhecimentos que consistiam em translação horizontal e vertical dos gráficos. Os alunos ficaram maravilhados com a calculadora, e a participação dos alunos foi muito boa.

A atividade 2 foi primeiro aplicado para 10 alunos da turma 103 no dia 09/09/2010 quinta-feira, no horário normal em dois grupos de três alunos e um grupo de quatro alunos. No geral os grupos foram bem na resolução da atividade, mas a aula não foi muito dinâmica, por ter disponibilidade de apenas uma calculadora. No final da atividade pedi aos alunos para opinarem sobre a oficina matemática, e obtive as seguintes respostas:

Turma 103 (quinta-feira)-09/09/2010

-Considero que futuramente os assuntos discutidos e exercitados em sala, serão bem aproveitados tanto em vestibulares quanto em concursos.

-As aulas estão sendo legais, mas poderia ser mais dinâmica. Será produtivo e útil no futuro, agora nem tanto, acho que essas aulas deveriam ser no 3º ano.

-Eu considero as aulas proveitosas, pois vejo que terá uma utilidade no vestibular.

-Na minha opinião, essas aulas extras tem uma boa finalidade que é conhecer uma parte da matemática que no geral não é visto nas escolas.

-Bom, na minha opinião as aulas deveriam ser mais dinâmicas. Eu particularmente não estou vendo utilidade nenhuma por enquanto.

-Na minha opinião, as aulas serão bastante úteis, porém elas deveriam ser mais dinâmicas. Mas, houve uma melhora em relação à última aula.

-Essa segunda atividade, foi mais fácil o entendimento. Deveria estimular mais o raciocínio lógico mais rápido, fazer conta de cabeça... mas houve uma melhora da 1ª para 2ª aula.

-Estão sendo produtivas, poderiam ser + dinâmicas, e de outros assuntos que já estudamos (não os que estamos) estudando. Para mim, o legal seria exercícios de geometria.

-As aulas são muito legais porque este tipo de matemática melhora o raciocínio lógico, sendo mais produtivas que a matemática tradicional.

As críticas foram recebidas de maneira a perceber que não basta uma aula com conteúdo planejado bem fundamentado, mas a estratégia de condução das tarefas e de planejamento do conteúdo são importantes para o aprendizado do aluno.

Para tornar a aula mais dinâmica mesmo com apenas uma calculadora gráfica, resolvi modificar o desenvolvimento da aula, apresentei a calculadora para todos os alunos, e então um aluno operava a calculadora enquanto todos os outros assistiam, e depois separava os grupos para responder as questões. Mesmo usando a tecnologia, é importante o aluno participar do manuseio da mesma para que a aula dinamize e todos aprendam com metodologias inovadoras.

A aula ficou bem mais dinâmica, conforme as opiniões coletadas e apresentadas a seguir:

Turma 103 (sábado)-11/09/2010.

-Eu considero as oficinas de matemática produtivas, pois nos mostra uma outra visão da matemática, desenvolvendo mais a lógica.

-As oficinas de matemática, como a colega acima disse está desenvolvendo um raciocínio lógico mais amplo para todos. Espero que todos estejam gostando.

-As oficinas são muito legais são produtivas, e aprendemos muito com a visão de um outro sentido. Espero que temos mais ao longo do ano.

-As oficinas estão sendo construtivas, e estão nos ajudando a compreender melhor a matemática. Parabéns.

Turma 102 (sábado)-11/09/2010.

-A aula foi boa, teve um bom rendimento, a turma se comportou e aprendemos translação.

-A aula esta sendo boa, está tendo bom rendimento e acredito que ajudará muito a turma e a forma que está sendo a aula está muito boa porque todos trabalham juntos.

-As aulas estão sendo construtivas e interessantes.

-As aulas tem um bom rendimento, estamos aprendendo muito com ela.

-As aulas estão muito dinâmicas.

-As aulas de oficina de matemática tem sido muito boas e interessantes, eu consegui acabar com muitas dúvidas e o professor é muito bom e tem ajudado demais.

-Na minha opinião essas aulas estão sendo boa pois pode nos ajudar no futuro.

-As aulas estão sendo bem dinâmicas e os conteúdos estão ótimos.

-Além disso as aulas estão sendo muito interessantes e dinâmicas.

Turma 101 (sábado)-11/09/2010.

-A oficina de matemática é muito legal, pois faz com que o raciocínio lógico melhore e nós estamos precisando disso, melhora o nosso aprendizado e nos ensina que a matemática não é só cálculo.

-Estamos gostando da nova forma que aprendemos. O problema é a aula no sábado e sair mais tarde segunda. Se for falar apenas da matéria está “supimpa”!

-Acredito que o conhecimento que temos sobre a matemática é bem pouco, então, essas oficinas estão nos ajudando a expandir nossos conhecimento no universo matemático.

Turma 104 (sábado)-11/09/2010.

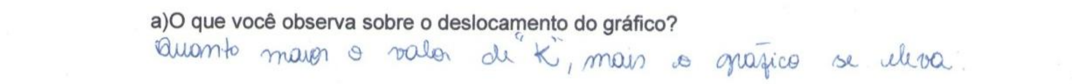
-A oficina, é legal, interessante, e faz com que possamos aprender um pouco mais, porém o nosso tempo é um pouco puxado o que dificulta o nosso maior interesse e dedicação, mas pra isso é legal.

-A oficina está nos ajudando a aprender mexer em várias coisas além de nos dar noções lógicas.

-A oficina esta muito legal, aprender coisas é sempre muito bom.

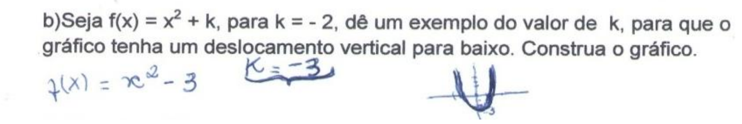
Superada assim a dificuldade do professor em adotar nova metodologia, e os alunos trazidos para aprenderem a matemática de maneira inovadora, seguem, agora,alguns comentários que descrevem as reações e as dificuldades dos alunos nesta Atividade.

Na questão1, chamou a atenção um grupo que respondeu “O vértice equivale ao valor de K”. Isto sugeriu que quando for trabalhar a atividade com função quadrática, deverei mostrar que o valor de k faz com que a parábola se desloque e consequentemente o seu vértice também, mas não necessariamente são eventos equivalentes. Outro fato curioso é que um grupo respondeu que o gráfico vai escalando no lugar de subir e outro relatou a subida do gráfico como a subida da concavidade.


a)O que você observa sobre o deslocamento do gráfico?

Quanto maior o valor de "K", mais o gráfico se eleva.

- No item (b), a maioria dos grupos respondeu corretamente, colocando o valor de k = - 3 ou k < - 2 e esboçaram o gráfico corretamente.


b)Seja $f(x) = x^2 + k$, para $k = - 2$, dê um exemplo do valor de k, para que o gráfico tenha um deslocamento vertical para baixo. Construa o gráfico.

$f(x) = x^2 - 3$ $K = -3$

- Após os alunos já dominarem o manuseio da calculadora gráfica sozinhos, o interessante foi a surpresa dos alunos, ao serem indagados pelo professor, antes de construir e olhar o gráfico, como seria o deslocamento do gráfico quando variasse o parâmetro k na expressão. Responderam inicialmente que o gráfico subiria e a surpresa foi grande. As respostas dos grupos foram corretas, só alertei dois grupos que responderam, um deles como “o gráfico desloca para o lado” e o outro como que disse “observamos que o gráfico vai andando para esquerda conforme k varia”, pois, embora eles entendessem o deslocamento do gráfico, deveriam complementar as suas respostas.

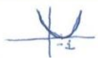
a)O que você observa sobre o deslocamento do gráfico?

Quanto maio é o valor de "k": mais o grafico se desloco horizontalmenti, paro esquerdo

- Também ficaram surpresos com a translação horizontal, pois o movimento é contrário à nossa intuição.

b)Seja $f(x) = (x + k)^2$, para k = 0, dê um exemplo do valor de k, para que o gráfico tenha um deslocamento horizontal para a direita. Construa o gráfico.

$f(x) = (x+(-1))^2$ $k = -1$

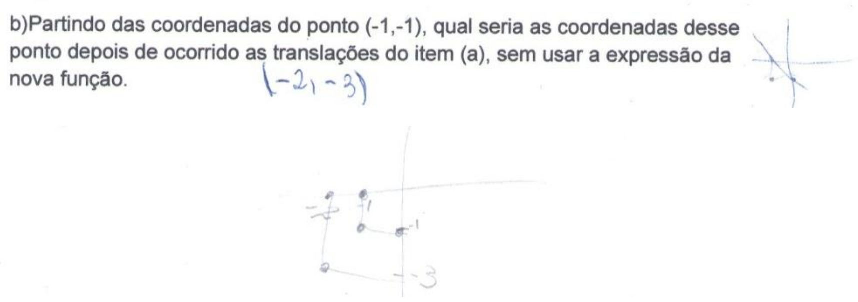


- Os alunos tiveram dificuldade de entender o movimento da translação horizontal com a expressão da função, tive que trabalhar com os grupos para que raciocinassem de acordo com o movimento do item anterior. Em relação ao movimento vertical não tiveram problema. Creio que deveria criar mais itens com as expressões de funções e seus respectivos gráficos antes de fazer o item (a).

a)Determine a expressão da função cujo gráfico é dado pelo deslocamento do gráfico da função expressa por $f(x) = x^3$ transladando horizontalmente 1 unidade para esquerda e verticalmente 2 unidades para baixo. Construa o gráfico na calculadora gráfica.

$f(x) = (x+1)^3 - 2$

-No item (b), a dificuldade também foi grande, principalmente porque eles olhavam para a expressão da função. Então pedi que fizessem um esboço desse ponto no plano cartesiano e pensassem sobre os efeitos sob respectivas translações, e dai conseguiram resolver. Um grupo respondeu (0,1), trocando os movimentos tanto horizontais quanto vertical. Dois grupos não fizeram, e dois grupos responderam (0,-3), invertendo apenas o movimente horizontal. Isto mostra dificuldades dos alunos e demanda cuidados do professor.



b)Partindo das coordenadas do ponto (-1,-1), qual seria as coordenadas desse ponto depois de ocorrido as translações do item (a), sem usar a expressão da nova função. (-2, -3)

4.2.3 **Atividade 3**

Descrevo alguns dos erros dos alunos que ajudaram a refletir melhor sobre o planejamento das atividades e entender as dificuldades de ensino e de aprendizagem.

No item (a), os alunos preencheram a tabela com os valores 3 e 5 facilmente, mas quando chegaram em 50 hectares travaram.

Um grupo fez 200 x 50=10000, mas esqueceu de somar o custo fixo de 800 reais.

Outro fez uma regra de três: 1 está para 1000 assim como 50 vai ser 50000. Mas para explicar o preenchimento da tabela com os valores 3 e 5, disseram: “observamos que o custo total cresce a cada 200 reais, então como a diferença em 3 e 5 é de dois hectares, multiplicamos 200 por 2 e somamos com 1400”. Verificando que sua resposta estava errada para 50 hectares, refizeram corretamente da seguinte forma: de 5 para 50, acréscimo de 45, 45x200=9000 + 1800= 10800.

Em outra turma os três grupos preencheram corretamente o custo total para 3 e 5 hectares, mas para 50 hectares não conseguiram. Um grupo usou a regra de três, considerando o crescimento de hectares igual ao crescimento do custo total, ou seja, 5x10=50 então 1800x10=18000.

Poderíamos trabalhar a função linear que é um caso particular da função afim, para mostrar ao aluno a diferença da função afim e linear. Solicitei que os alunos fizessem o item (b), já que não conseguiram completar a tabela. Com a expressão da função conseguiram calcular, chegando à conclusão que a expressão da função é importante para valores altos.

Problemas semelhantes anteriores ocorreram em outra turma, ou seja, alguns alunos preencheram a tabela para x=3 e x=5, mas tiveram dificuldade para x=50. Destaque para um aluno que fez a regra de três $\frac{50}{x} = \frac{1}{1000}$ encontrando 50000 para o custo total. Depois do item (b) percebeu que errou.

a)Complete a tabela abaixo, registrando os cálculos efetuados para os resultados obtidos.

hectares	0	1	2	3	5	50
Custo total (R$)	800	1000	1200	1.400	1.800	18000

$5 \quad 1800$
$50 \quad x$
$5x = 90000$
$x = 18000$

Em outra turma, um grupo marcou a letra (a), pois trocou o custo fixo pelo custo variável.

b)Considerando y o custo total, qual a melhor expressão para o custo total, explique sua escolha.

(a) y = 800x + 200 (b)y = 800x – 200 (c)y = 200x – 800 (d)y = 200x + 800

Pois o valor variável é de 200, esse vala depende da quantidade de hectares (x) depois soma o valor fixo que é 800.

No item (c), ocorreu algo interessante. Dois grupos responderam triângulo. Após explicar que a reta era o eixo y e o retângulo era o limite da calculadora, responderam corretamente. Foi muito bom acontecer isso, pois nesses momentos é que conseguimos entender a visão e a dificuldade do aluno. Também aproveitei para que eles respondessem sobre domínio e imagem dessa função e generalizei esses conceitos para uma função afim qualquer.

Em outra turma, ocorreu um fato interessantíssimo, os alunos não viram nada quando traçaram o gráfico na calculadora com $0 \le x \le 5$ e $8 \le y \le 10$, percebendo a importância das janelas gráficas.

Um fato interessante observado nesta Atividade foi que a maioria dos alunos não sabia o que era referencial ortogonal. Dois alunos ficaram surpresos, pois já tinham aprendido função afim, mas não sabia que o custo fixo era o valor com que a reta intersecta o eixo y. Observando e analisando o gráfico puderam conjecturar que o coeficiente linear (b) é o valor da ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y, ficaram encantados com a descoberta. A grande dificuldade da maioria era mesmo saber o valor da interseção do gráfico com o eixo y, pois inicialmente temos 400 na janela gráfica e não o valor zero. Os alunos confundiram a parte inferior da janela gráfica com o eixo x, havendo um grupo que considerou o coeficiente linear como 400, pensando que correspondia ao valor inicial zero. A importância de interpretar corretamente a janela de visualização se mostrou evidente nesse ponto.

No item (c) o fato de tantos alunos responderem que a figura geométrica era triângulo incomodou. O fato foi esclarecido por um grupo que o problema estava no conceito de “figura geométrica” que os alunos conhecem. Eles não consideram a reta como figura geométrica, para eles “figura geométrica” é um polígono, evidenciando fraco conhecimento da geometria no ensino básico.

4.2.4 **Atividade 4**

A atividade 4 foi aplicada para 15 alunos (metade da turma) com quatro grupos sendo dois grupos compostos por três alunos, um grupo com quatro e outro com cinco alunos. A dificuldade foi grande, pois é mais longa que as outras atividades e exigia o uso da calculadora gráfica, tendo apenas uma calculadora para trabalhar.

No item (a) preencheram corretamente a tabela, diferenciando um grupo do outro apenas no arredondamento da última coluna usando duas casas decimais e um grupo não respondeu se era uma função afim ou não. Um grupo também questionou se a variação de y poderia dar negativo. Acho que esse momento poderia ser usado para reforçar a ideia de crescimento e decrescimento da função.

a)Na atividade anterior, verificamos que a característica de uma função afim é dada por acréscimos sofridos por f(x) sendo proporcionais aos acréscimos dados a x, em intervalos correspondentes. Complete a tabela e responda se este problema pode ser modelado por uma função afim, justificando sua resposta.

Temperatura (°c)		$\Delta x = x_2 - x_1$	Índice de Velocidade		$\Delta y = y_2 - y_1$	$\Delta y/\Delta x$
x_1	x_2	##########	y_1	y_2	##########	########
22,5	25	2,5	1,81	4,43	2,62	1,048
25	27,5	2,5	4,43	5,7	1,27	0,508
27,5	30	2,5	5,7	5,57	-0,13	-0,052
30	32,5	2,5	5,57	4,12	-1,45	-0,58
32,5	35	2,5	4,12	0,82	-3,3	-1,32

Não pode ser modelado por uma função afim, pois o Y não é constante.

Os alunos reconheceram a parábola com os pontos registrados da tabela do item (b).

b) Tome o referencial ortogonal, representando x (temperatura) no eixo das abscissas e y (índice de velocidade) no eixo das ordenadas. Use a calculadora gráfica para registrar os pontos da primeira tabela. A distribuição dos pontos no gráfico se aproxima de alguma curva conhecida? Se sim, diga qual?

Sim, uma parabola.

Já no item (c) a dificuldade de preencher a tabela foi um pouco maior que o item (a), mas os grupos conseguiram desenvolver bem. O problema ficou na aritmética, por exemplo, -0,052 - 0,508= -0,456;
-1,32 – (-0,58)= -1,9. Portanto não alcançou o resultado esperado.

Nesse item (c), por mais que eu tenha melhorado a tabela, a dificuldade foi grande dos alunos em preencher a tabela, mas percebi que preencheram apenas com as operações aritméticas, não entendendo o significado da constante na segunda variação de y.

c)Complete a tabela abaixo, sabendo que os valores de Δx, Δy e $(\Delta y/\Delta x)$ foram copiados da tabela anterior.

Δx	Δy	$(\Delta y/\Delta x)$	$(\Delta y/\Delta x)_1$	$(\Delta y/\Delta x)_2$	$\Delta(\Delta y/\Delta x)$: segunda variação $(\Delta y/\Delta x)$	$\Delta(\Delta y/\Delta x)/\Delta x$
2,5	2,62	1,048	#######	#######	$\Delta(\Delta y/\Delta x) = (\Delta y/\Delta x)_2 - (\Delta y/\Delta x)_1$	
2,5	1,27	0,508	1,048	0,508	$\Delta(\Delta y/\Delta x) = -0,54$	$-0,216$
2,5	-0,13	-0,052	0,508	-0,052	$\Delta(\Delta y/\Delta x) = -0,56$	$-0,224$
2,5	-1,45	-0,58	-0,052	-0,58	$\Delta(\Delta y/\Delta x) = -0,632$	$-0,232$
2,5	-3,3	-1,32	-0,58	-1,32	$\Delta(\Delta y/\Delta x) = -1,9$	$-0,76$

O que podemos afirmar sobre os valores de $\Delta(\Delta y/\Delta x)/\Delta x$?

Todos são menores que zero, e até o terceiro valor permanece constante.

Mas no item (d) reforcei a explicação descrita que caracteriza uma função quadrática e todos os grupos escreveram a expressão da função quadrática com duas casas decimais. É importante ressaltar que a teoria é que garante a natureza da função, a tabela apenas dá indícios de que seus dados satisfazem a condição necessária. A tecnologia que permite usar o método de regressão e a construção do gráfico que aproxima os dados é uma ferramenta que ajuda os alunos a se convencerem de uma função modeladora do problema. Mas verifiquei que apenas três grupos entenderam a caracterização da função quadrática, a maioria dos outros grupos não compreenderam o objetivo desse item. Logo, apesar da grande vantagem da atividade inovadora para o ensino de funções quadráticas por meio de modelagem, é necessário muito trabalho para superar as dificuldades de abstração e de conceituação.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 43,29 - 38,61$

$\Delta = 4,68$

d)Função quadrática é um modelo matemático caracterizado da seguinte forma: Para todo espaçamento constante de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, no domínio da função, ocorre uma transformação por f(x) em valores proporcionais da segunda variação de $(\Delta y/\Delta x)$. De acordo com os resultados podemos afirmar que o problema pode ser modelado por uma função quadrática? Se sim, usando a função estatística da calculadora construa o gráfico por regressão quadrática (ferramenta estatística que traça uma parábola mais próxima dos pontos com pequeno erro) e escreva a expressão da função assim obtida.

Sim, $f(x) = -0,11x^2 + 6,58x - 87,77$

No item (e) com o conhecimento da expressão da função quadrática, os alunos tentaram calcular as raízes com a fórmula de Báskara. Solicitei que eles respondessem a questão, de acordo com a contextualização do problema, usando os termos, variação da temperatura e índice de velocidade. Constatei que há sempre uma dificuldade muito grande quando falamos em domínio e imagem da função; e quando representaram os intervalos, inverteram a ordem, ou seja, do maior para o menor. Um fato importante nessas atividades é que além de passar os conceitos matemáticos construídos pelos alunos, conseguimos diagnosticar as maiores dificuldades dos alunos, e ficou clara a percepção desse diagnóstico nesta quarta atividade.

e)Agora usando a função gráfica da calculadora construa o gráfico da função determinada pela expressão determinada no item (d). Como podemos determinar o domínio dessa função no problema? Qual a imagem da função? No contexto do problema, qual o significado da imagem?

$D=\{x \in \mathbb{R} / 22,5 \leq x \leq 35\}$ $I=\{y \in \mathbb{R} / 0,822 \leq x \leq 5,7\}$

Os valores que y pode assumir

Nos itens finais (k) e (l), aproveitando o conhecimento prévio que os alunos tinham da concavidade da parábola, reforcei a ideia da interpretação contextualizada de uma função que modela um problema, em contraste com uma função quadrática qualquer, em termos de máximo e mínimo. Poderia ter explorado também a ideia de domínio e imagem, reforçando a diferença entre os dois pontos de vista, e melhorar a compreensão dos alunos em relação ao domínio e imagem de uma função.

k)A expressão da função $f(x) = 3x^2$, cujo domínio são os números reais, possui máximo e mínimo?Explique.

Não, só o mínimo que é 0, o a é positivo.

l) A expressão da função $f(x) = -3x^2$, com domínio dado por números reais possui máximo e mínimo?Explique.

Não, só o máximo que é 0, o a é negativo.

.

Poucos grupos conseguiram chegar ao item (e) tamanha a dificuldade encontrada pelos alunos, e dos três grupos que chegaram, apenas um conseguiu responder corretamente. O tempo foi curto para essa atividade, mas deu para diagnosticar a dificuldade do aluno e acho que isso é fundamental para o professor. A dificuldade de execução de uma atividade planejada faz com que o professor reveja e planeje outras atividades facilitadoras para que o aluno consiga chegar ao objetivo almejado em termos de conteúdo, constituindo uma aprendizagem também para o professor.

Como reflexão, considero que a atividade 4 estava muito difícil para o nível dos alunos e por isso achei insatisfatório o desenvolvimento dessa atividade. Provavelmente, se os alunos tivessem uma maior desenvoltura com a calculadora gráfica poderia atingir melhor o objetivo.

4.2.5 **Atividade 5**

Para encerrar as atividades procurei trabalhar com uma função que eles nunca viram, portanto apresentei uma função racional, e embora essa atividade fosse elaborada para duas aulas, a improvisação de uma aula no sábado letivo deu para a maioria dos grupos quase terminarem a atividade e um conseguiu terminar, até porque foi uma atividade em que os alunos não tiveram muita dificuldade.

Turma 101 (sábado) – 06/11/2010

Foi a primeira turma que apliquei a atividade 5, conseguimos trabalhar com 6 alunos. Uma observação importante é que esses alunos não participaram da atividade 3 e 4.

Na tabela do item (a) com a ajuda do professor para utilizar a calculadora gráfica, completaram corretamente a tabela e no item (b) os alunos não sabiam responder por que o gráfico não apareceu na calculadora gráfica.

a) Construa uma tabela na calculadora gráfica com a finalidade de completar a tabela abaixo.

Fertilizante (g/m^2)	Crescimento(cm)
0	0
1	3.33
2	5.71
3	7.5
4	8.88
5	10

b) Tome o referencial ortogonal, representando x no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, e trace o gráfico da expressão da função $f(x) = \frac{20x}{x+5}$, dentro da janela gráfica determinada por $0 \leq x \leq 5$ e $11 \leq y \leq 15$. O gráfico apareceu na tela da calculadora gráfica?Justifique sua resposta utilizando a tabela do item (a). Não, pois o máximo de y é 10 e não questão informa que o mínimo é 11.

No item (c) foi reforçada mais uma vez a dificuldade dos alunos em trabalhar com ideia de domínio e imagem. Parei para refletir nesse momento e perguntei a mim mesmo, se eu fosse o professor regente dessa turma valeria a pena reforçar com atividades diferentes, explorando os conjuntos domínio e imagem ou continuaria com a matéria e depois cobraria em prova? A importância da atividade reflete justamente no diagnóstico de aprendizado do aluno, ele mostra quando o aluno realmente adquiriu determinado conhecimento, e a calculadora gráfica é um bom instrumento para analisar diversos gráficos fazendo com que os alunos tenham uma visão geométrica de domínio e imagem, ajudando a entender algebricamente esses conjuntos.

c)Sabemos que o domínio da função é o conjunto de valores possíveis para a quantidade de fertilizante que é adicionada. Considerando $0 \leq x \leq 5$ do item anterior, encontre o conjunto imagem da função, ou seja, um intervalo de valores para o crescimento da planta para este domínio, e trace o gráfico na calculadora gráfica, de modo que a janela gráfica corresponda às condições deste ítem. $I = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq 10\}$

d)Construa uma tabela na calculadora gráfica com a finalidade de completar a tabela abaixo.

Fertilizante (g/m^2)	Crescimento(cm)
0	0
10	13,33
20	16
30	17,142
40	17,77
50	18,181
60	18,461
70	18,666
80	18,823
90	18,947
100	19,047

No item (e) provoquei uma situação para que os alunos quando vissem a tabela completa, respondessem por suas intuições “sim” ao questionamento, e que posteriormente nos dois itens seguintes, eles mudassem de opinião, tendo como objetivo a conclusão de que só a tabela não fornece uma visão geral do problema. Como esperado, a maioria dos alunos responderam que ultrapassaria o crescimento de 20 cm, mudando de opinião nos itens (g) e (h).

e)Com os dados da tabela acima, podemos afirmar que o crescimento da planta ultrapassará 20 cm quando acrescentarmos uma quantidade superior a 100 g/m^2 de fertilizante? Justifique sua resposta .

Não, pois há uma variável tanto no numerador quanto no denominador.

g) Tome o referencial ortogonal, representando x no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, e trace o gráfico da expressão da função $f(x) = \frac{20x}{x+5}$, dentro da janela gráfica determinada por $0 \leq x \leq 100$ e $0 \leq y \leq 25$ e trace o gráfico da expressão da função f(x) = 20. Não é possível que o f(x) = 20

h)De acordo com os itens (f) e (g), podemos afirmar que o crescimento da planta ultrapassará 20 cm quando acrescentarmos uma quantidade muito grande de fertilizante? Justifique sua resposta.

Não, ele não ultrapassará

No item (f) os alunos não conseguiram entender o absurdo de colocar uma quantidade enorme de fertilizante, ou seja, os alunos estão pouco preparados para associar os cálculos matemáticos com a realidade da contextualização do problema.

f)Determine o crescimento da planta em cm quando adicionarmos 100000 g/m^2 de fertilizante. E 200000 g/m^2. Comente criticamente o contexto dessa questão. É válido fazer tais questionamentos?

19,999 e 19,999.

Não, porque à medida que a variável do numerador aumenta, a variável do denominador também aumenta

Os últimos itens (i) e (j) não foram finalizados, mas perguntei por que o valor cinco dava erro na calculadora. Dois alunos responderam corretamente que o denominador ficava nulo, mas não associaram esse resultado para interpretar um possível domínio para a função matemática.

i) Funções racionais são funções que podem ser representados sob a forma de um quociente de dois polinômios, portanto a expressão $f(x) = \frac{20x}{x+5}$ é uma função racional. Determine o conjunto domínio e o conjunto imagem da função.

D={x ∈ in/x ≥ 0 }   I={y ∈ in/0≤y<20}

j)Construa uma tabela na calculadora gráfica utilizando a expressão da função $f(x) = \frac{20x}{x+5}$ com - 5,1 ≤ x ≤ - 5,0, considerando a unidade no eixo Ox de 0,01. O que acontece com o valor de y quando o valor de x se aproxima de -5 ? Zera. Construa o gráfico na calculadora gráfica dentro da janela gráfica determinada por - 6 ≤ x ≤ - 5, considerando a unidade no eixo Ox como 0,2 e a unidade no eixo 0y como 10 e ratifique sua resposta anterior. Explique o que acontece quando x= - 5. O que esta função tem a ver com o problema inicial? A função dá erro porque o denominador zera.

Apesar de ser a mesma função na primeira o X>0 e na segunda o número pode ser negativo.

4.3 Conclusão das Atividades

Primeiro, quero declarar que as atividades no segundo semestre foram prejudicadas pelo grande número de feriados na segunda e terça-feira, as duas semanas do terceiro e duas do quarto bimestre para aplicação de prova e uma semana da EXPOCANP (atividade de feira escolar), o que interrompeu a sequencia semanal das atividades. Houve alunos que ficaram três semanas seguidas sem atividade. Outro fator que também prejudicou foi o fato dessas atividades não serem obrigatórias e o currículo do curso técnico de agropecuária composto com mais de 20 disciplinas.

Mas algo mágico aconteceu nessas atividades: primeiro aprendi muito com o rigor matemático da orientadora, e segundo, mesmo com todos os problemas verifiquei que as aulas podem ser mais dinâmicas e atraentes para os alunos, e as dificuldades dos alunos ficaram bastante evidentes conforme eles respondiam as atividades. Abriu-se uma enorme porta para a pesquisa do ensino de matemática, em que podemos fortalecer o aprendizado dos conceitos matemáticos, com o recurso da calculadora gráfica ou mesmo do computador, e todos os outros recursos tecnológicos, através da resolução de problemas, por modelagem matemática ou não, em que o aluno consegue, sem perceber, completar uma atividade de forma a construir o conhecimento.

A maior dificuldade de trabalhar essas atividades foi deixar o aluno construir ordenadamente as ideias, uma vez que, os professores do ensino médio não estão acostumados a trabalhar dessa forma. Nós já colocamos as respostas prontas e o aluno é apenas um imitador. Eu mesmo, ao aplicar as atividades, quando o aluno não conseguia chegar a sua conclusão, não dei respostas imediatas, mas dei todas as sugestões para que o próprio aluno respondesse corretamente.

Finalizando, aprendi muito com essas atividades, foram vários erros, mas a tentativa de continuar o ensino de forma diferente e desafiadora faz com que as aulas não sejam mais rotineiras, além de aprender muito com os próprios alunos, pois a troca entre professor e aluno é intensa. Fiquei mais entusiasmado e espero me aperfeiçoar com o tempo, podendo aplicar atividades mais atraentes e interessantes para que o aluno consiga construir e organizar seus pensamentos com a aprendizagem da matemática de forma mais dinâmica. É um desafio e tanto.

No ano de 2011 as Atividades foram realizadas novamente, com outras turmas, já sob minha responsabilidade desde o início do ano letivo, e as conclusões sobre a avaliação do desempenho constantes nesta dissertação se baseiam nos resultados dessas turmas.

CAPÍTULO 5: AVALIAÇÃO DO APROVEITAMENTO DOS ALUNOS

A avaliação foi feita em 2011.

A avaliação foi individual (prova), aplicada para todos os alunos do primeiro ano do ensino médio técnico de meio ambiente que participaram das atividades desenvolvidas neste trabalho, ou seja, 28 alunos da turma 103 e 35 alunos da turma 104. O tempo utilizado para a realização desta avaliação foi de duas aulas de 50 minutos.

A avaliação teve o objetivo de fechar o trabalho de forma a verificar o resultado da aprendizagem dos alunos usando a metodologia de resolução de problemas e modelagem matemática com o recurso da calculadora aplicada durante as atividades do primeiro semestre.

Após esta avaliação também aplicamos um questionário de 14 perguntas (APÊNDICE G) para analisar a reação dos alunos à aula inovadora com uso de tecnologia em 2011.

As questões da Avaliação são as seguintes:

1)Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

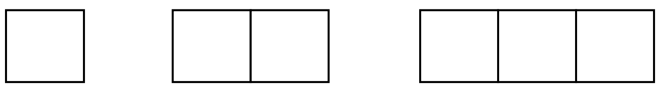


figura1 figura 2 figura 3

a)Complete a tabela abaixo:

Tabela 10 – Avaliação: Caracterização da Função Afim

Quantidade de quadrados (Q)	Quantidade de canudos (C)
1	
2	
3	
4	
5	

Fonte: Elaborado pelo autor

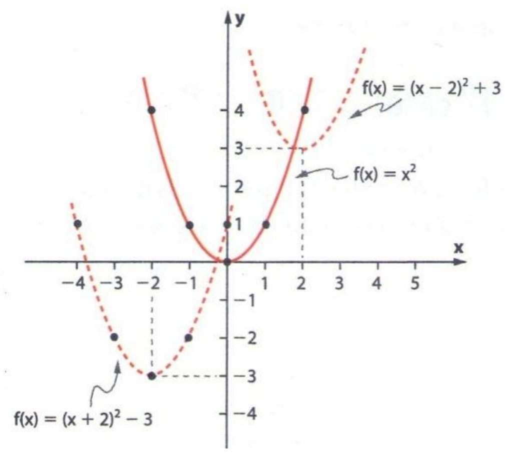
b)De acordo com a tabela acima qual a função poderia modelar esta atividade, justifique sua resposta?

c)Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

d)Com 256 canudos quantos quadrados podemos montar?

e)Qual a quantidade de canudos para montar 60 quadrados?

2)Observe os gráficos das funções quadráticas $f(x) = x^2$, $f(x) = (x – 2)^2 + 3$ e $f(x) = (x + 2)^2 – 3$.



a)Indique as coordenadas dos vértices das parábolas:

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = (x – 2)^2 + 3$
- $f(x) = (x + 2)^2 – 3$

b)Como é o gráfico da função $f(x) = (x – 3)^2 - 4$ em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$? Explique por translação do gráfico.

c)Determine através da expressão da função $f(x) = (x – 3)^2 - 4$ e marque no gráfico os seguintes pontos:

- Interseção com eixo y
- Vértice
- Zero da função ou raiz da equação

3)Enquanto uma planta a fotossíntese ocorre principalmente nas folhas durante o período diurno, a respiração se realiza através de toda planta durante 24 horas do dia. Os dados da tabela mostram a influência da temperatura X (^{o}c) na respiração da alfafa Y (g de CO_2 respirado em 64 minutos).

Tabela 11 – Avaliação: Caracterização da Função Quadrática

X	0	4	8	12	16	20	24	28
Y	0,5	0,564	0,756	1,076	1,524	2,1	2,804	3,636

Fonte – Sviercoski (2008, p.49)

De acordo com a tabela acima qual a função poderia modelar esta atividade, justifique sua resposta? Caso a função seja f(x) = ax + b ou $f(x) = ax^2 + bx + c$, determinar o valor de a.

Faremos a seguir uma análise sumária das três questões da avaliação e uma descrição mais detalhada das respostas dos alunos. Posteriormente apresento o gráfico em pizza dos acertos e erros dos mesmos.

A questão número 1 foi retirada do Enem, pois segue a metodologia da modelagem matemática em que mostra a construção de quadrados com canudos, com três figuras para o aluno entender esta construção, e subsequentemente completar a tabela. Em seguida, o aluno tem que descobrir qual o melhor modelo matemático do fenômeno descrito na tabela e determinar sua expressão. Após isso, eles devem calcular alguns valores para um número grande de canudos ou quadrados, com a finalidade de mostrar a importância da expressão da função. Portanto, o objetivo desta questão foi verificar se os alunos aprenderam a caracterizar um fenômeno com a função afim (atividade 3 deste trabalho) e consequentemente saber manipular a expressão da função.

Já na questão dois, o objetivo é cobrar os movimentos dos gráficos por translação de gráfico horizontal e vertical de uma função quadrática que está de acordo com a atividade 2 desta dissertação. São apresentados três gráficos, um deles é a função $f(x) = x^2$ e os outros dois são gráficos transladados da função anterior; posteriormente, pergunto aos alunos o vértice destas funções, em seguida, peço a construção de um gráfico em que o aluno justifique através do movimento de translação de gráfico e finalizo com a manipulação da expressão, ou seja, achar o zero da função, vértice e a interseção com eixo y.

A questão 3 é um problema contextualizado em que é dada uma tabela que relaciona a influência da temperatura na respiração da alfafa. Foi pedido aos alunos, qual o melhor modelo matemático que caracteriza o fenômeno descrito na tabela e posterior cálculo do valor de **a**. O objetivo desta questão foi verificar se o aluno aprendeu a caracterizar a função quadrática vista pelos mesmos na atividade 4 desta dissertação.

5.1 **Análise das Respostas**

No item (a) da questão 1, apenas dois alunos não entenderam a questão e treze alunos erraram porque consideraram os quadrados separados, fazendo uma visualização gráfica da situação como:

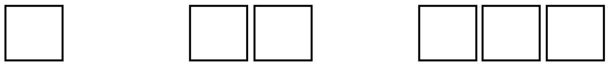
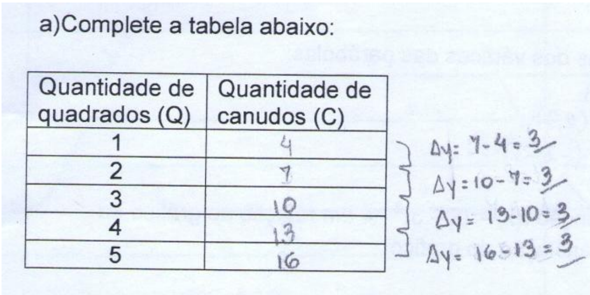


figura 1 figura 2 figura 3

Este item mostrou a importância da interpretação correta que se deve fazer através da visualização de figuras ou gráficos que dependem da questão, ratificando a importância da visualização na calculadora gráfica para o reforço do aprendizado do aluno que foi realizado durante as atividades desenvolvidas neste trabalho. Também mostra a importância da modelagem neste item, pois se os alunos fizessem uma oficina em sala de aula manipulando os canudos para a construção dos quadrados, certamente não errariam ao completar a tabela.

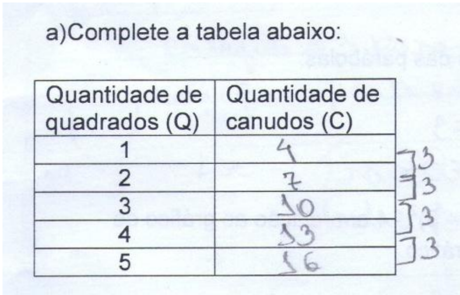
Acertos:



a)Complete a tabela abaixo:

Quantidade de quadrados (Q)	Quantidade de canudos (C)
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16

$\Delta y = 7-4 = 3$
$\Delta y = 10-7 = 3$
$\Delta y = 13-10 = 3$
$\Delta y = 16-13 = 3$

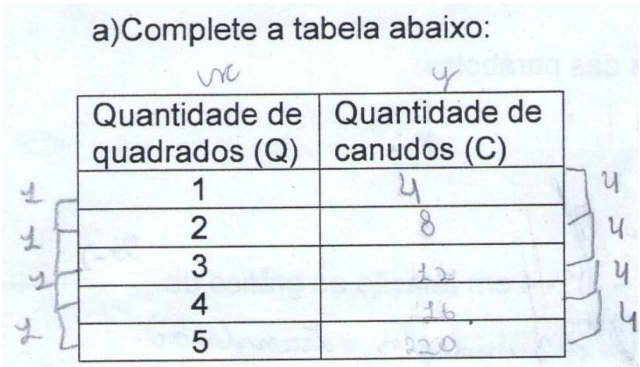


a)Complete a tabela abaixo:

Quantidade de quadrados (Q)	Quantidade de canudos (C)
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16

3
3
3
3

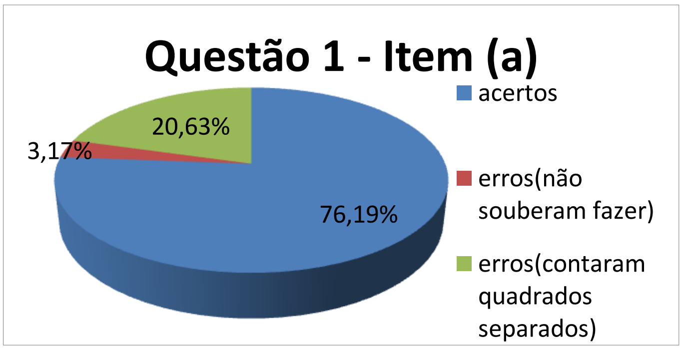
Erros (contaram quadrados separados):



a)Complete a tabela abaixo:

Quantidade de quadrados (Q)	Quantidade de canudos (C)
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

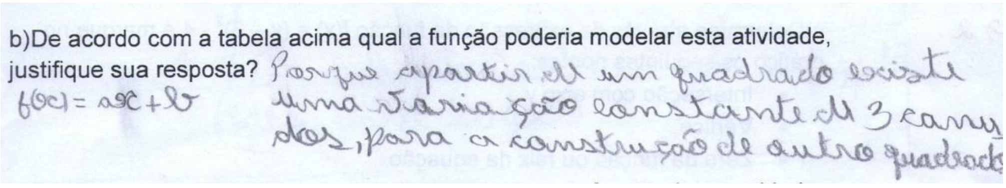
Figura 13 – Gráfico da questão 1 item (a)



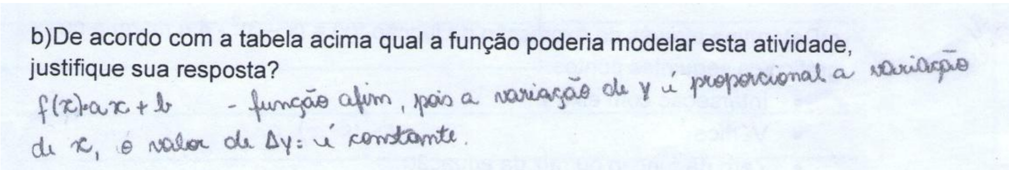
Fonte – Elaborado pelo autor

No item (b), mais da metade acertaram e apenas seis alunos justificaram de forma contextualizada. Dos vinte e um alunos que erraram dez não sabiam a caracterização da função afim e onze afirmaram corretamente que era uma função afim, mas justificaram de forma incompleta ou não muito clara, como: “Função afim, pois a variação é constante”; “função afim, pois cada quadrado constitui de 4 canudos e assim sucessivamente”; “função afim, porque o número de canudos segue uma sequencia”; “f(x) = ax + b porque tem uma variação apenas”; “função afim, pois x é constante”; “f(x) = ax + b, pois a variação da variável independente é constante”. Estes alunos provavelmente sabem a caracterização da função afim, mas não souberam expressar.

Acertos:

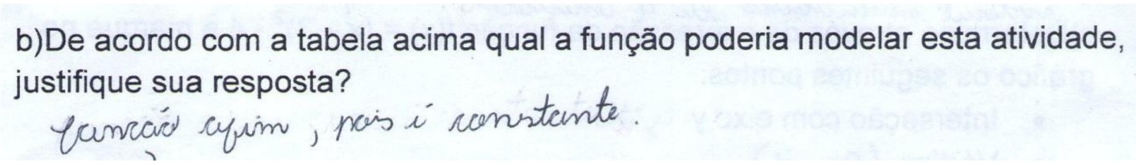

b)De acordo com a tabela acima qual a função poderia modelar esta atividade, justifique sua resposta? Porque apartir de um quadrado existe uma variação constante de 3 canudos, para a construção de outro quadrado

$f(x) = ax + b$

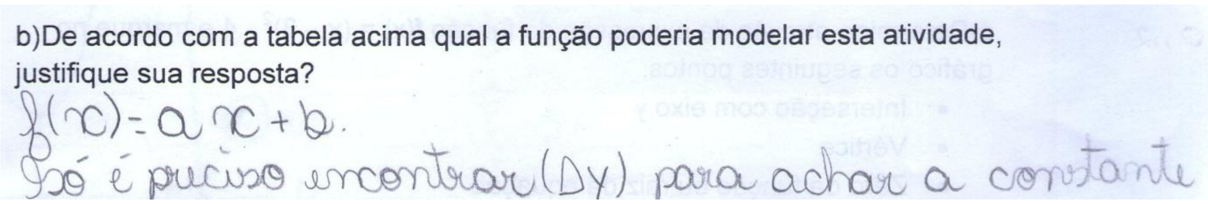

b)De acordo com a tabela acima qual a função poderia modelar esta atividade, justifique sua resposta?

$f(x)=ax+b$ - função afim, pois a variação de y é proporcional a variação de x, o valor de Δy: é constante.

Erros (justificativa incorreta ou incompleta)

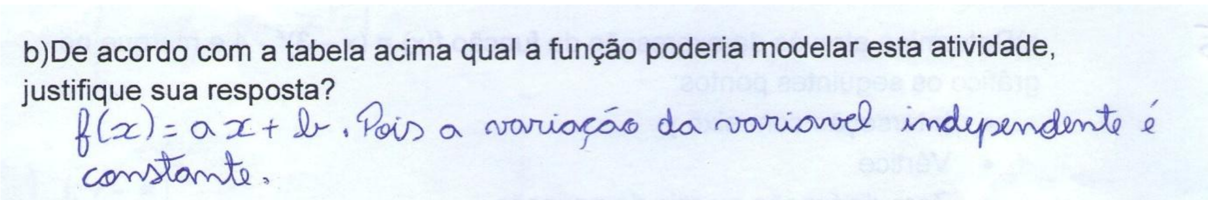

b)De acordo com a tabela acima qual a função poderia modelar esta atividade, justifique sua resposta?

função afim, pois é constante.

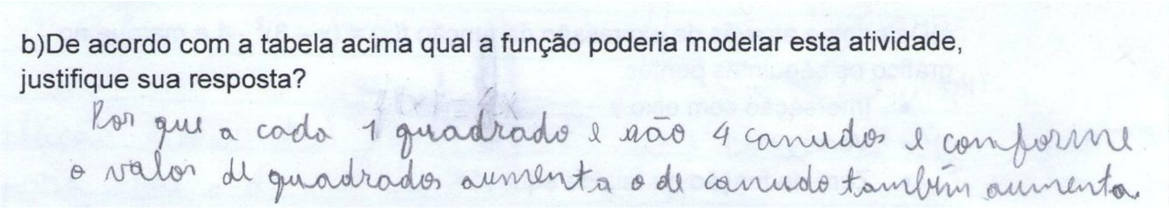

b)De acordo com a tabela acima qual a função poderia modelar esta atividade, justifique sua resposta?

$f(x)=ax+b$.

Só é preciso encontrar (Δy) para achar a constante

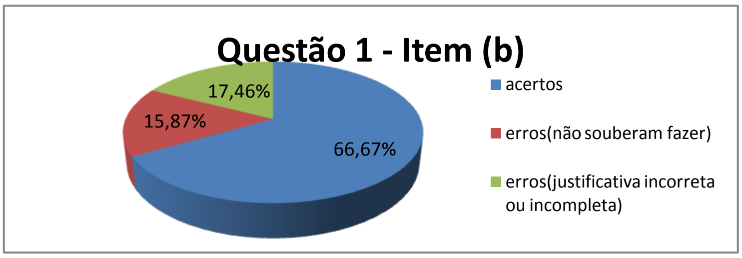

b)De acordo com a tabela acima qual a função poderia modelar esta atividade, justifique sua resposta?

$f(x)=ax+b$. Pois a variação da variável independente é constante.


b)De acordo com a tabela acima qual a função poderia modelar esta atividade, justifique sua resposta?

Por que a cada 1 quadrado e são 4 canudos e conforme o valor de quadrados aumenta o de canudo também aumenta.

Figura 14 – Gráfico da questão 1 item (b)



Fonte - Elaborado pelo autor

O item (c) foi o mais difícil desta questão, uma vez que os alunos têm muita dificuldade de encontrar a expressão de uma função, no qual já carregam uma herança do ensino tradicional de só manipular a fórmula já pronta. Mesmo assim, conseguimos quase 50% de acertos. Dos trinta e seis alunos que erraram, sete acertaram a expressão com a tabela errada do item (a) encontrando y = 4.x, provavelmente, acertariam este item se tivessem completado a tabela corretamente; quatro erraram na manipulação algébrica (falta de atenção), portanto sabem fazer. Os outros realmente não sabiam encontrar a expressão, quando a maioria deixou em branco e poucos colocaram y = x + 3; provavelmente porque a variação de y foi de três em três. Outro dado importante foi que muitos alunos me pediram para escrever a expressão da função com as variáveis X e Y no lugar de C e Q, pois os exercícios do livro, e geralmente o professor, trabalha na maioria das vezes com X e Y.

Acertos:

c)Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \frac{3}{1} = \boxed{a = 3}$

$\boxed{f(x) = 3x + 1}$

$4 - 3 = b$

$4 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1$ //

Erros (y = 4x com a tabela errada):

c) $y = ax + b$ $(2; 8)$ $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12-8}{3-2} = \frac{4}{1} = \boxed{4}$

$8 = 4 \cdot 2 + b$

$8 = 8 + b$

$8 - 8 = b$

$\boxed{b = 0}$

$\boxed{y = 4x}$

Erros (manipulação algébrica):

c)Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$ $a = 3$ $f(x) = 3x + b$

$(1,4)$

$4 = 3 \cdot 1 + b$

$4 = 3 + b$

$b = 3 - 4$

$b = -1$

$\boxed{f(x) = 3x - 1}$

1 c. $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$a = \frac{3}{1}$

$\boxed{a = 1}$

$f(x) = ax + b$ Expressão →

$1 = 1 \cdot 4 + b$

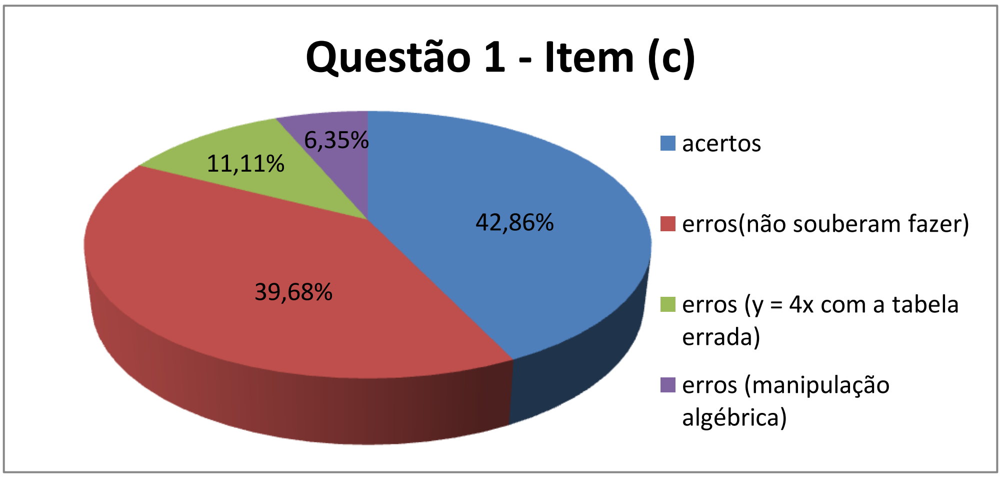
$1 = 4 + b$

$4 + 1 = b$

$3 = b$

$\boxed{f(x) = 1x + 3}$

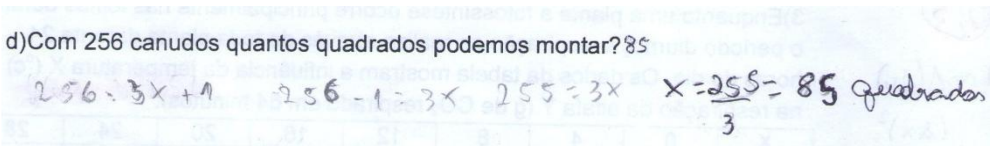
Figura 15 – Gráfico da questão 1 item (c)



Fonte – Elaborado pelo autor

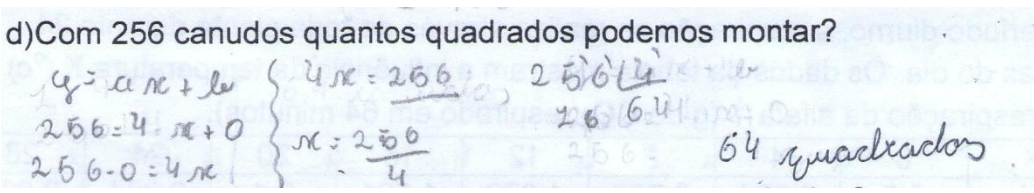
No item (d) alguns alunos que erraram o item anterior acertaram este item fazendo a contagem de um em um até 256 canudos, outros viram que a variação de canudos foi de três em três, dividiram (256-4) por 3 e esqueceram de somar mais um quadrado. Muitos alunos erraram por usar regra de três que é um vício que os alunos do técnico carregam, já que muitas das matérias técnicas que estudam usam regra de três; outros erraram por usar a expressão y = 4.x e alguns que não acharam a expressão anterior dividiram 256 por 4, pois raciocinaram que cada quadrado é formado por quatro canudos.

Acertos:


d)Com 256 canudos quantos quadrados podemos montar? 85

$256 = 3x + 1$ $256 - 1 = 3x$ $255 = 3x$ $x = \frac{255}{3} = 85$ quadrados

Erros (usou a expressão y=4x):


d)Com 256 canudos quantos quadrados podemos montar?

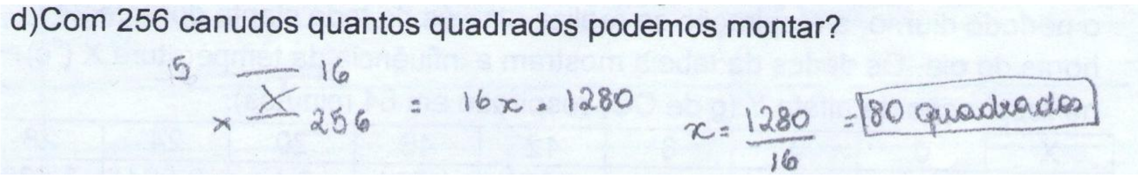
$y = ax + b$
$256 = 4 \cdot x + 0$
$256 - 0 = 4x$

$4x = 256$
$x = \frac{256}{4}$

$256 \div 4 = 64$

64 quadrados

Outros erros :



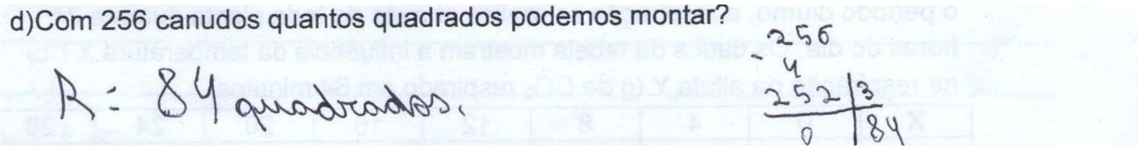
d)Com 256 canudos quantos quadrados podemos montar?

$5 - 16$

$X - 256$

$16x = 1280$

$x = \frac{1280}{16} = \boxed{80 \text{ quadrados}}$



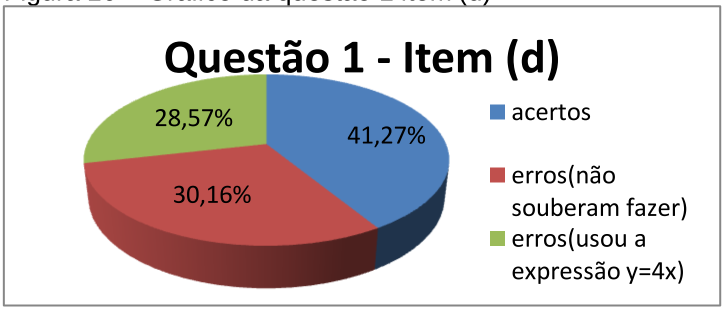
d)Com 256 canudos quantos quadrados podemos montar?

R: 84 quadrados.

$256 - 4 = 252$

$252 \div 3 = 84$

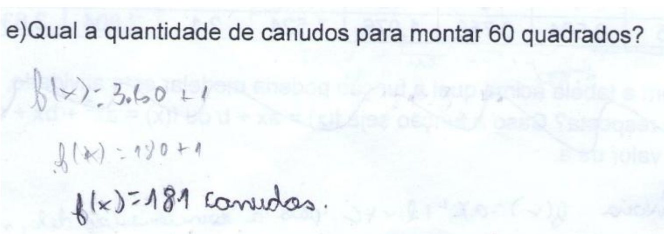
Figura 16 – Gráfico da questão 1 item (d)



Fonte – Elaborado pelo autor

O último item desta questão (e) o resultado foi praticamente o mesmo do item anterior, os erros foram os mesmos comentados anteriormente e quatro erraram por manipulação algébrica.

Acertos:



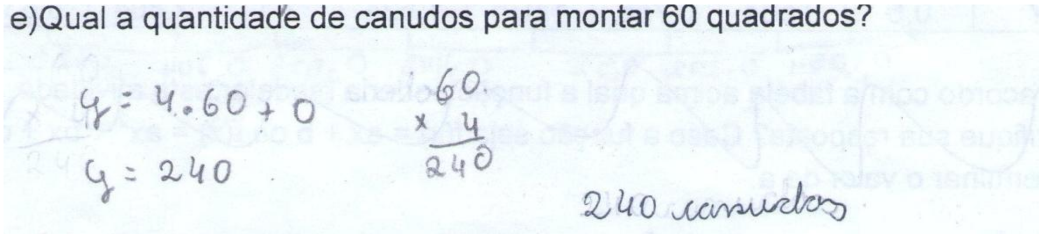
e)Qual a quantidade de canudos para montar 60 quadrados?

$f(x) = 3.60 + 1$

$f(x) = 180 + 1$

$f(x) = 181$ canudos.

Erros (usaram a expressão y = 4x):



e)Qual a quantidade de canudos para montar 60 quadrados?

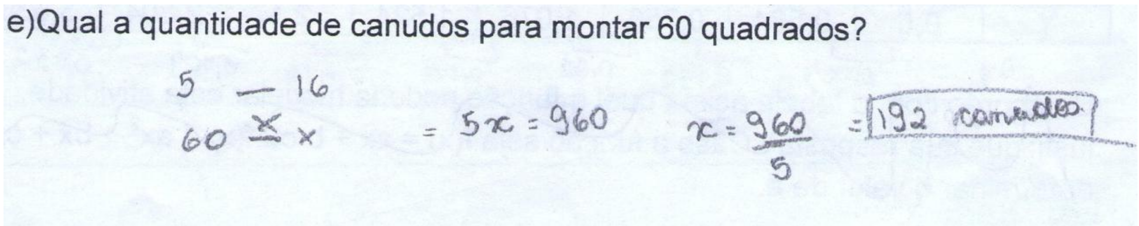
$y = 4.60 + 0$

$y = 240$

$60 \times 4 = 240$

240 canudos

Erros (regra de três):

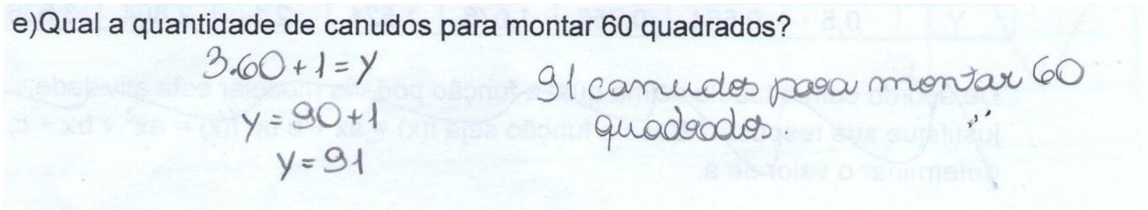


e)Qual a quantidade de canudos para montar 60 quadrados?

$5 — 16$

$60 — x = 5x = 960 \quad x = \frac{960}{5} = \boxed{192 \text{ canudos}}$

Erros (manipulação algébrica):



e)Qual a quantidade de canudos para montar 60 quadrados?

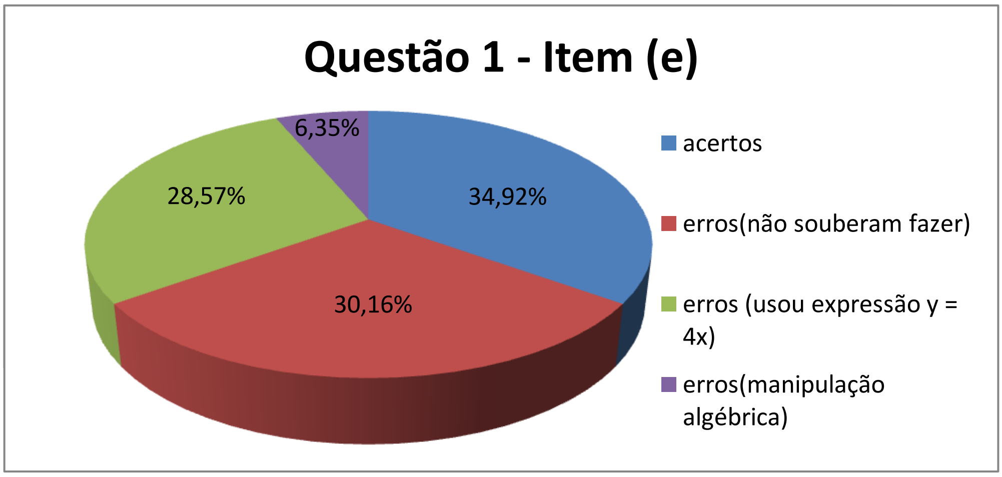
$3.60 + 1 = y$

$y = 90 + 1$

$y = 91$

91 canudos para montar 60 quadrados.

Figura 17 – Gráfico da questão 1 item (e)

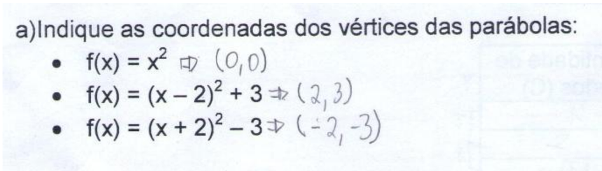


Fonte – Elaborado pelo autor

Na questão 2 item (a) foi cobrado apenas visualização da localização dos vértices de três parábolas no gráfico da função quadrática;

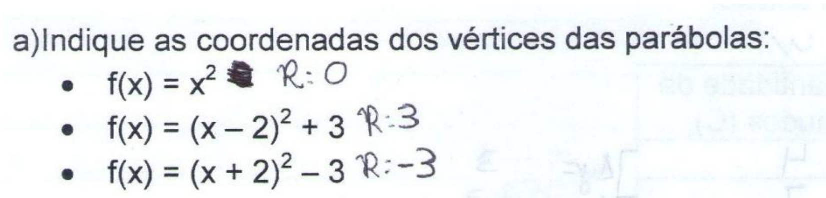
trinta e quatro alunos erraram, sendo que dois alunos colocou o vértice (-2,-4) em vez de (-2,-3), um aluno inverteu as coordenadas (-2,-3) por (-3,-2) e nove alunos com dificuldade no vértice (0,0), colocando (0,1); outros erros encontrados foram respostas só com a coordenada y, provavelmente por ser o menor valor no vértice e alguns confundiram vértice com imagem da função.

Acertos:

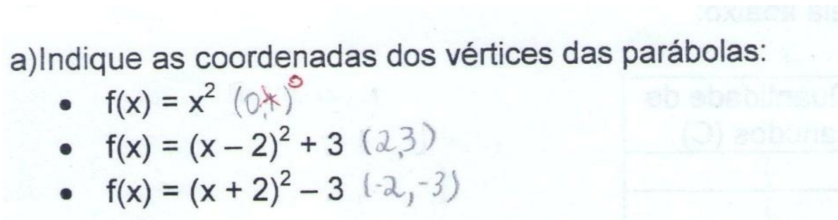

a)Indique as coordenadas dos vértices das parábolas:
- $f(x) = x^2 \Rightarrow (0,0)$
- $f(x) = (x-2)^2 + 3 \Rightarrow (2,3)$
- $f(x) = (x+2)^2 - 3 \Rightarrow (-2,-3)$

Erros apenas um vértice:

-Colocou apenas a coordenada y:


a)Indique as coordenadas dos vértices das parábolas:
- $f(x) = x^2$ R: 0
- $f(x) = (x-2)^2 + 3$ R: 3
- $f(x) = (x+2)^2 - 3$ R: -3

-Errou o primeiro vértice:


a)Indique as coordenadas dos vértices das parábolas:
- $f(x) = x^2$ (0,1)
- $f(x) = (x-2)^2 + 3$ (2,3)
- $f(x) = (x+2)^2 - 3$ (-2,-3)

-Confundiu vértice com imagem da função:

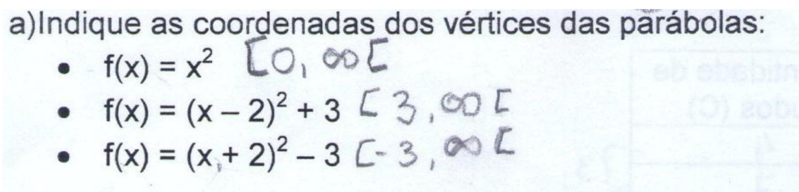
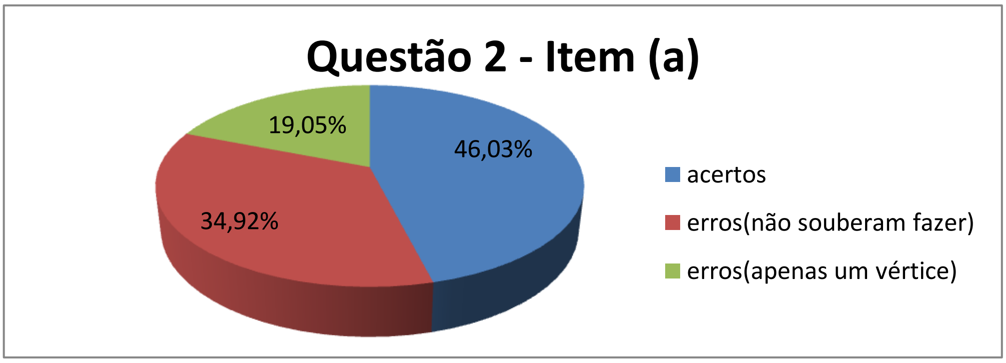

a)Indique as coordenadas dos vértices das parábolas:
- $f(x) = x^2$ $[0, \infty[$
- $f(x) = (x-2)^2 + 3$ $[3, \infty[$
- $f(x) = (x+2)^2 - 3$ $[-3, \infty[$

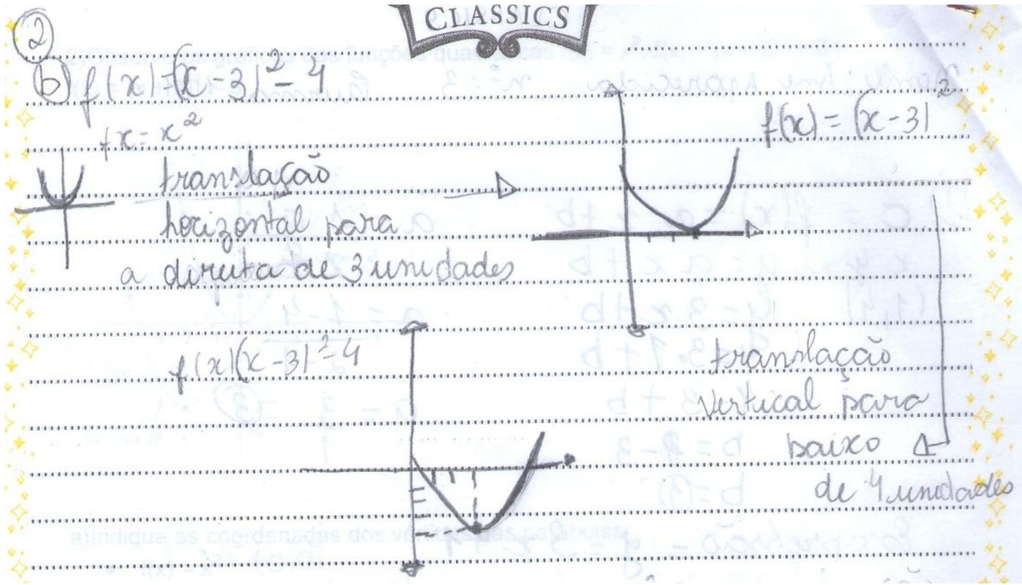
Figura 18 – Gráfico da questão 2 item (a)



Fonte – Elaborado pelo autor

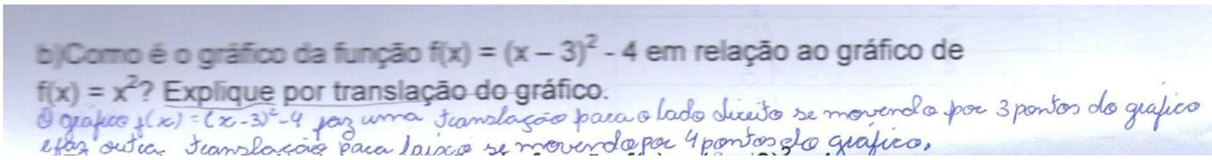
No item (b), dos trinta alunos que erraram, alguns não estudaram translação de gráficos e outros fizeram apenas um deslocamento. Dos que erraram, oito alunos acertaram o gráfico, mas não explicaram as translações envolvidas e quatro acertaram a explicação, mas não conseguiram desenhar o gráfico.

Acertos:



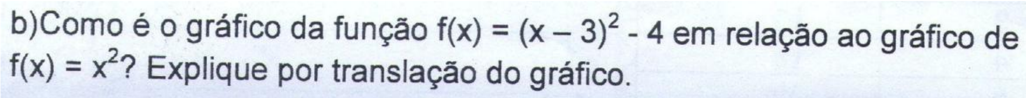
Erros (explicação ou gráfico):

-Não fez o gráfico.


b)Como é o gráfico da função $f(x) = (x-3)^2 - 4$ em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$? Explique por translação do gráfico.

O grafico f(x) = (x-3)²-4 faz uma translação para o lado direito se movendo por 3 pontos do grafico e faz outra translação para baixo se movendo por 4 pontos do grafico.

-Não explicou.


b)Como é o gráfico da função $f(x) = (x-3)^2 - 4$ em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$? Explique por translação do gráfico.

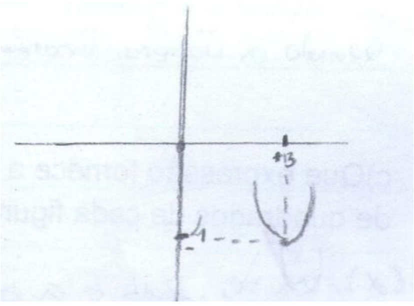
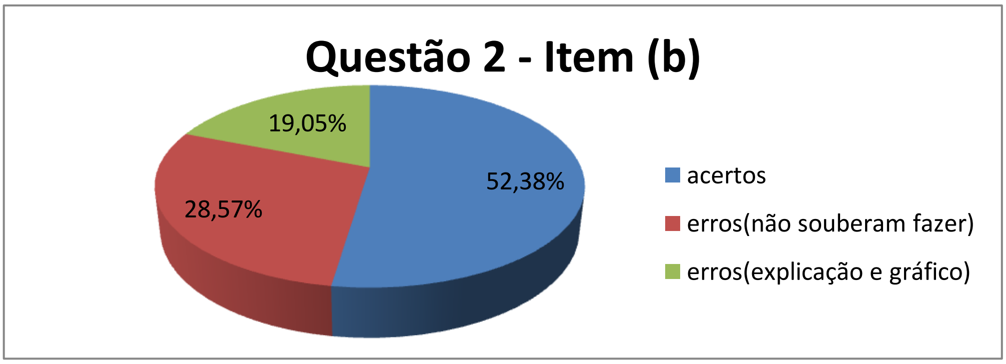


Figura 19 – Gráfico da questão 2 item (b)

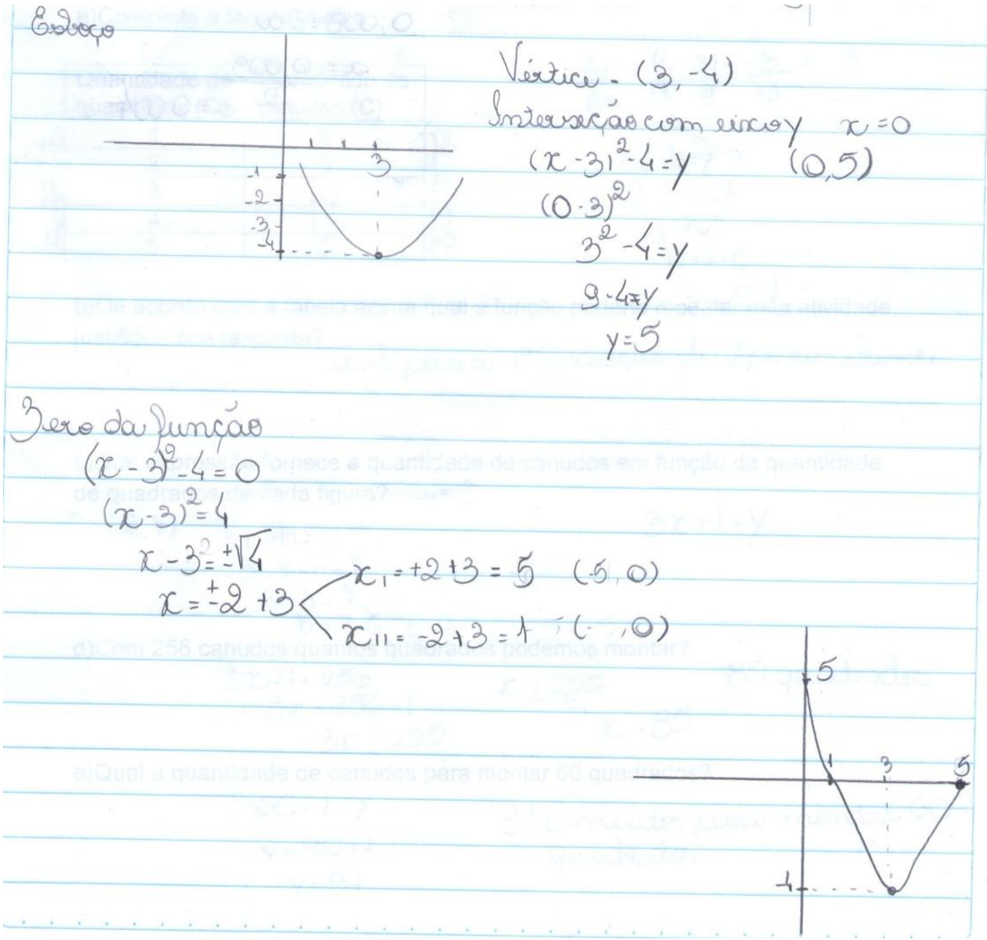


Fonte – Elaborado pelo autor

O percentual de erro do item (c) foi bastante elevado, pois os alunos estão acostumados a resolver a expressão na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ no lugar de $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$. Por exemplo, para achar as raízes da equação, pedi para resolver sem a fórmula, a maioria só sabia resolver com a fórmula que é a herança do ensino tradicional. Outro erro comum foi a interseção com o eixo y, muitos colocaram -4 por causa da expressão dada

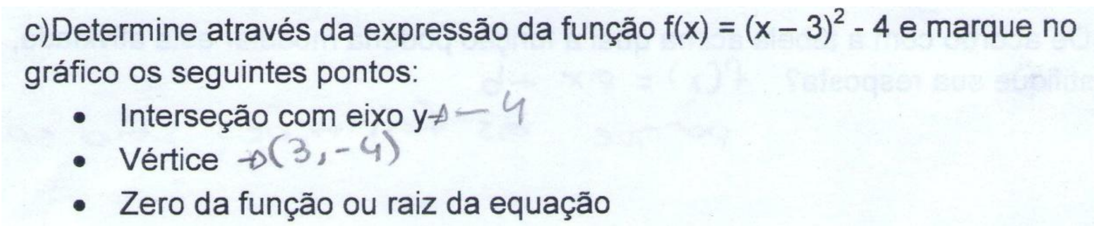
$y = (x - 3)^2 - 4$. Portanto, apenas oito alunos acertaram e cinco só erraram no zero da função.

Acertos:



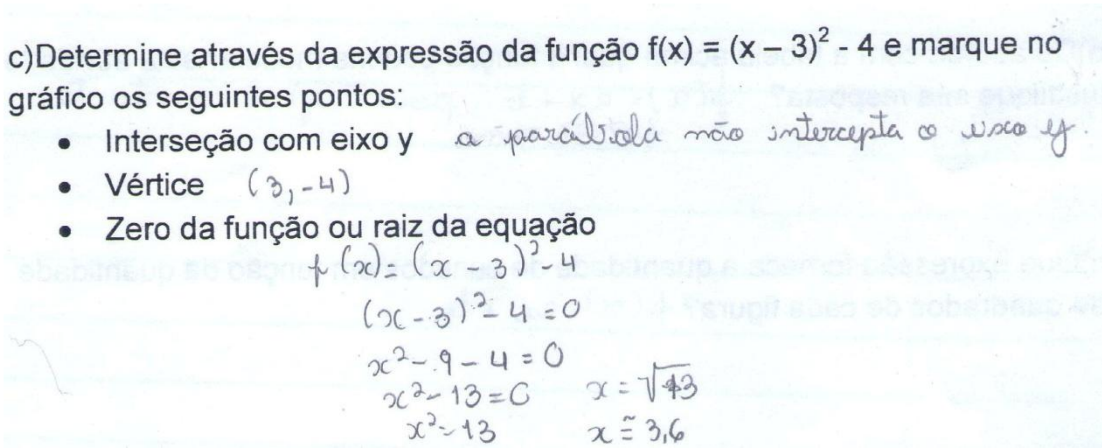
Erros:

-Não sabe diferenciar a interseção da parábola com eixo y da equação canônica em relação à equação geral.


c)Determine através da expressão da função $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ e marque no gráfico os seguintes pontos:

- Interseção com eixo y → −4
- Vértice → (3, −4)
- Zero da função ou raiz da equação

-Não sabe resolver algebricamente a equação sem a fórmula.


c)Determine através da expressão da função $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ e marque no gráfico os seguintes pontos:

- Interseção com eixo y   a parábola não intercepta o eixo y.
- Vértice   (3, -4)
- Zero da função ou raiz da equação

$f(x) = (x-3)^2 - 4$
$(x-3)^2 - 4 = 0$
$x^2 - 9 - 4 = 0$
$x^2 - 13 = 0$ $x = \sqrt{13}$
$x^2 = 13$ $x \cong 3{,}6$

-O interessante é que o mesmo aluno respondeu que não há interseção com eixo y, provavelmente pelo esboço de seu gráfico mostrado abaixo.

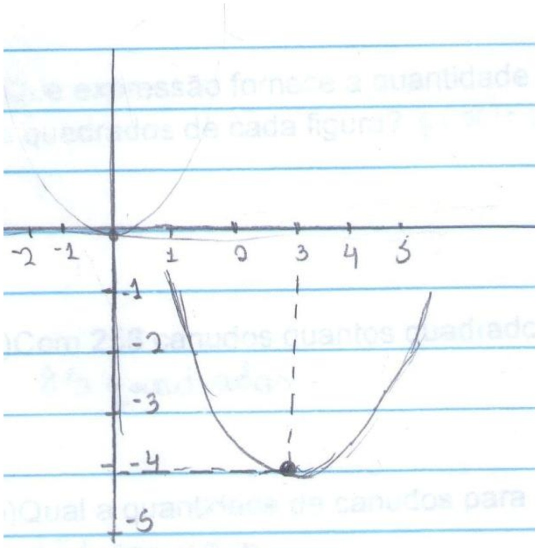
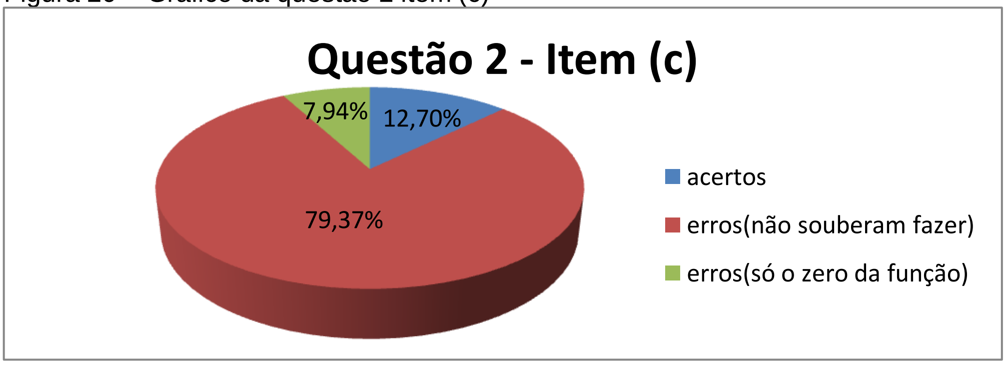


Figura 20 – Gráfico da questão 2 item (c)



Fonte – Elaborado pelo autor

A média de acerto da questão 3 foi boa, considerando que vinte e três alunos erraram, cinco acertaram mas não justificaram com palavras a escolha da função quadrática, e dezessete alunos souberam caracterizar a função quadrática, mas erraram na manipulação algébrica para calcular o valor de a. Por exemplo na fórmula 2.a = $\Delta(\Delta y)/(\Delta x)^2$, os alunos colocaram 2.a = 0,128/4 esquecendo de elevar ao quadrado o denominador, outros usaram 128 no lugar de 0,128 e alguns esqueceram de dividir por 2, dando como resposta a = 0,008.

Acertos:

3)Enquanto numa planta a fotossíntese ocorre principalmente nas folhas durante o período diurno, a respiração se realiza através de toda planta durante 24 horas do dia. Os dados da tabela mostram a influência da temperatura X (^{o}c) na respiração da alfafa Y (g de CO_2 respirado em 64 minutos).

X	0	4	8	12	16	20	24	28
Y	0,5	0,564	0,756	1,076	1,524	2,1	2,804	3,636

Qual das duas funções f(x) = ax + b ou f(x) = ax^2 + bx + c você escolheria para modelar o fenômeno descrito na tabela? Justifique sua escolha e calcule o valor de **a**.

3) (cálculo na folha) $f(x)=ax^2+bx+c$
Escolho a expressão que caracteriza a função quadrática, pois a segunda variação de y é constante. O x varia de 4 em 4 e a segunda variação do y varia de 0,128 em 0,128.
Essa é uma característica da f. quadrática. $\Delta x = 8-4=4$

$2.a=\frac{\Delta(\Delta y)}{(\Delta x)^2} = 2.a=\frac{0,128}{(4)^2} = 2a=\frac{0,128}{16} = 2a = 0,008$

$a = 0,008/2$

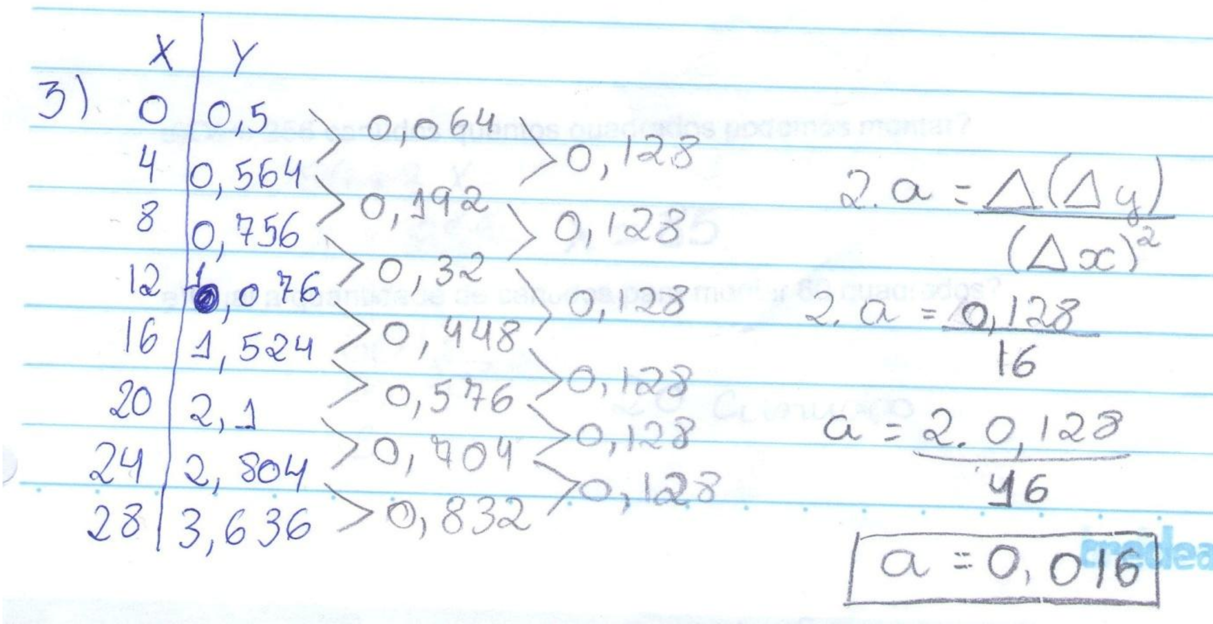
$\boxed{a = 0,004}$

Erros (valor de a):

-Tem dificuldade de resolução de equação do primeiro grau com fração.

$\boxed{2.a=\frac{\Delta(\Delta y)}{(\Delta x)^2}} \rightarrow 2a=\frac{0,128}{4^2} \rightarrow \frac{0,128}{16} \rightarrow 2a=8$

$-8+2=a \rightarrow \boxed{\cancel{6=a}}$



-Erro por falta de atenção.

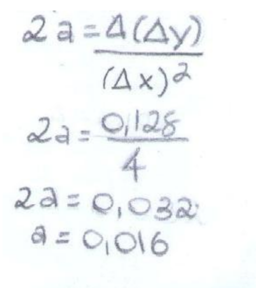
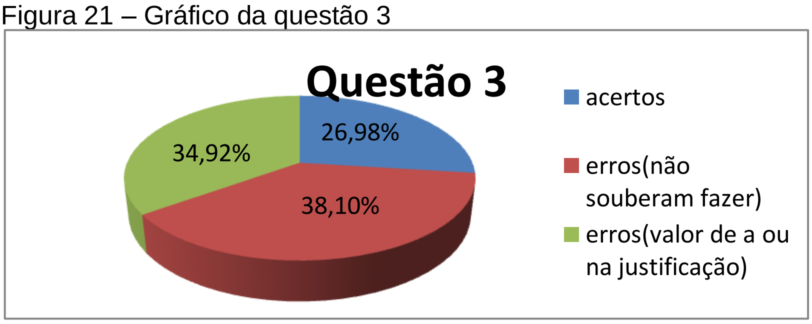


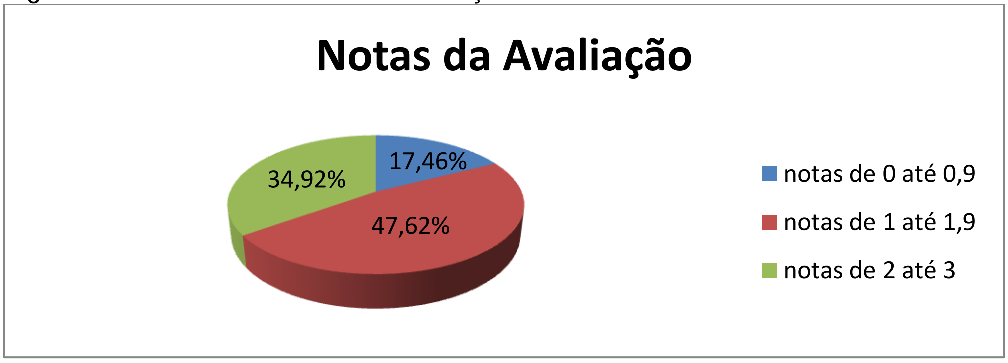
Figura 21 – Gráfico da questão 3



Fonte – Elaborado pelo autor

As três questões da avaliação continha quinze subitens, considerei cada subitem valendo dois décimo, totalizando três pontos. A média aritmética dos 63 alunos foi aproximadamente 1,65 e a seguir apresento o gráfico das notas separadas em três classes.

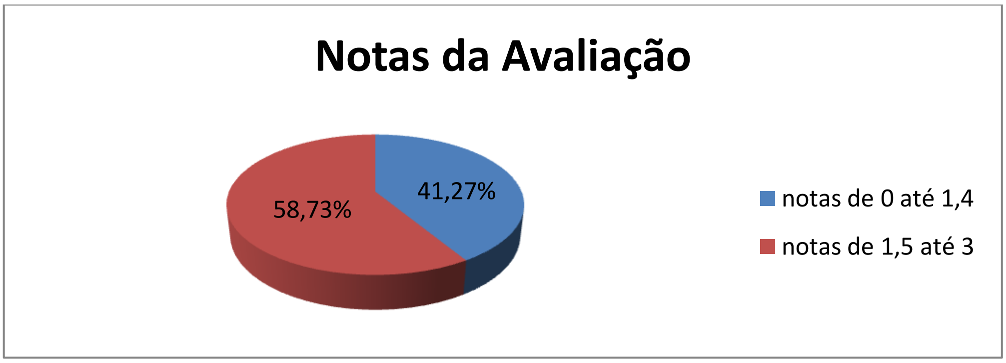
Figura 22 – Gráfico das notas da avaliação em três divisões



Fonte – Elaborado pelo autor

O próximo gráfico apresenta o desempenho dos alunos que conseguiram acertar pelo menos a metade da prova e os que não conseguiram.

Figura 23 – Gráfico das notas da avaliação em duas divisões

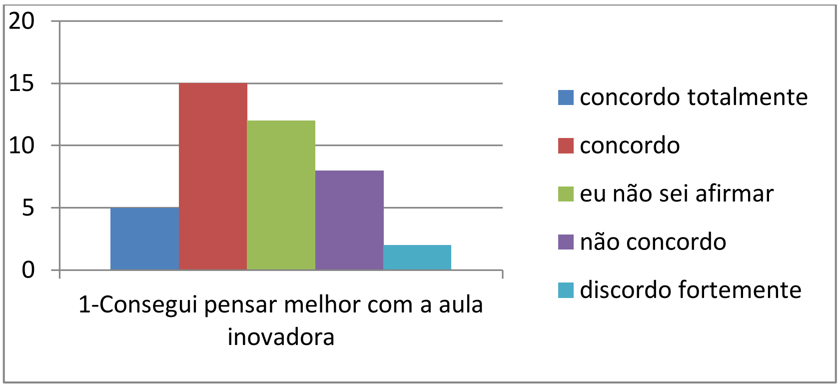


Fonte – Elaborado pelo autor

5.2 **Análise das Respostas do Questionário das Atividades inovadoras**

Segue a análise do Questionário da avaliação da reação dos Alunos à aula inovadora com uso de tecnologia em 2011 com 42 alunos das turmas do ensino médio técnico de meio ambiente.

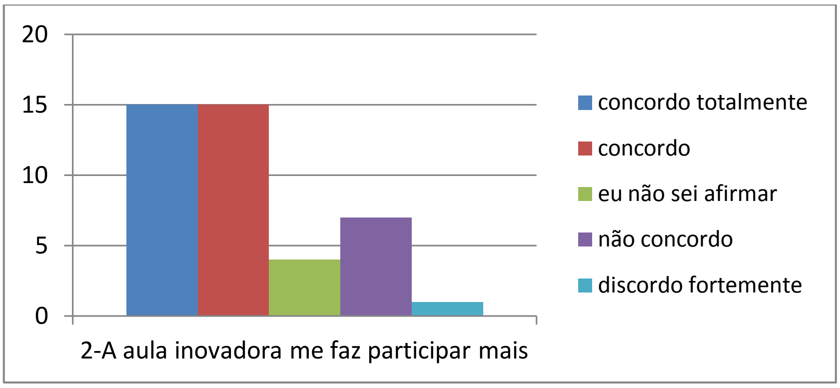
Tabela 12 – Consegui pensar melhor com a aula inovadora



Fonte – Elaborado pelo autor

Podemos verificar que 48% dos alunos concordam que as atividades ajudaram a pensar melhor contra 24% que não concordam. Se apenas 2% dos alunos que não souberam afirmar concordar com esta melhoria, já teremos 50% dos alunos, que já é um resultado razoável.

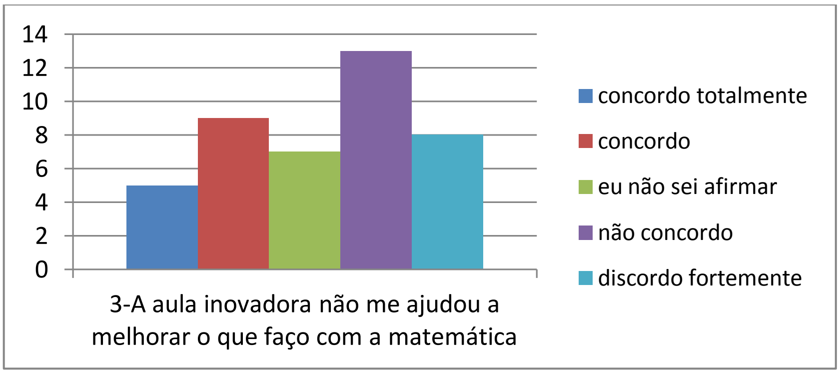
Tabela 13 – A aula inovadora me faz participar mais



Fonte – Elaborado pelo autor

Quanto a participação dos alunos nas atividades, podemos ver um ótimo resultado, pois 72% concordaram que a interação entre os alunos melhorou com as aulas inovadoras.

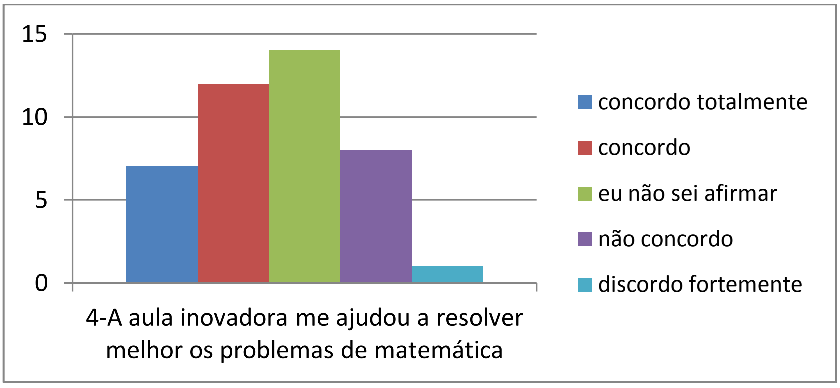
Tabela 14 – A aula inovadora não me ajudou a melhorar o que faço com a matemática



Fonte – Elaborado pelo autor

Verificamos que 50% dos alunos afirmaram que as atividades propostas ajudaram a entender mais a matemática, sem falar dos 17% que não souberam informar, portanto o resultado foi bom.

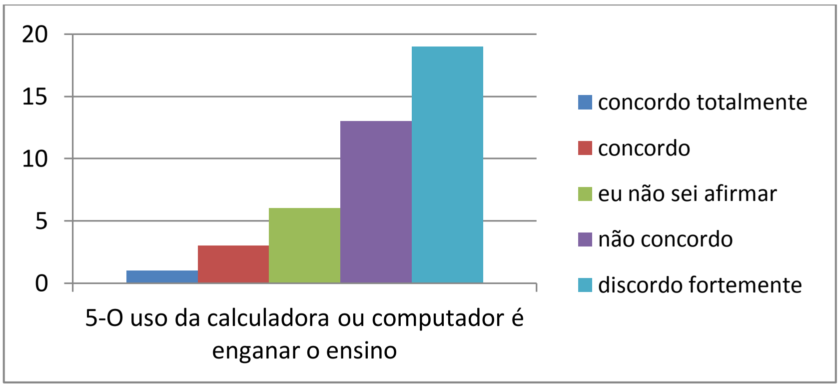
Tabela 15 – A aula inovadora me ajudou a resolver melhor os problemas de matemática



Fonte – Elaborado pelo autor

Se olharmos os alunos para quem as atividades não os ajudaram a resolver problemas, verificamos que apenas 20% não viram melhoria. Embora 34% não souberam afirmar, o resultado é satisfatório.

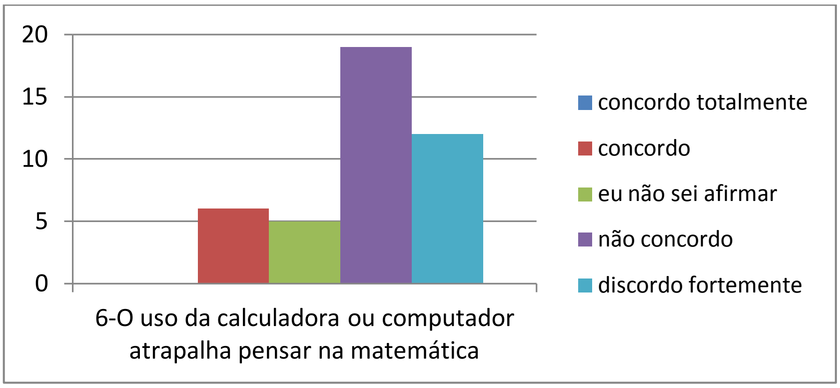
Tabela 16 – O uso da calculadora ou computador é enganar o ensino



Fonte – Elaborado pelo autor

Podemos ver que 76% concordam que o uso da tecnologia ajuda no ensino.

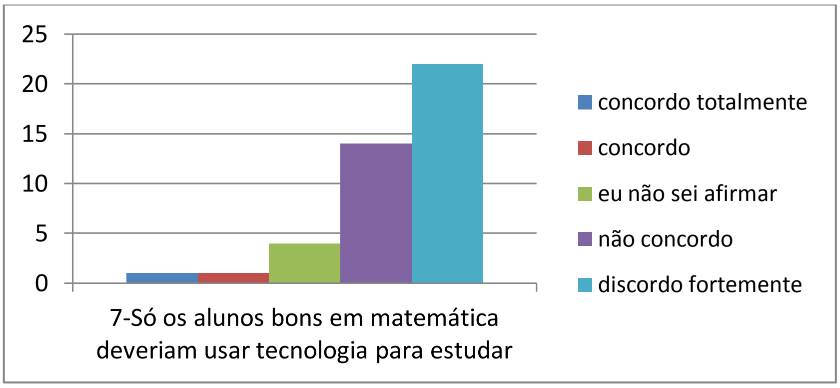
Tabela 17 – O uso da calculadora ou computador atrapalha pensar na matemática



Fonte – Elaborado pelo autor

Apenas 23% dos alunos concordam que a calculadora ou outra tecnologia atrapalha na compreensão da matemática. O resultado também é satisfatório.

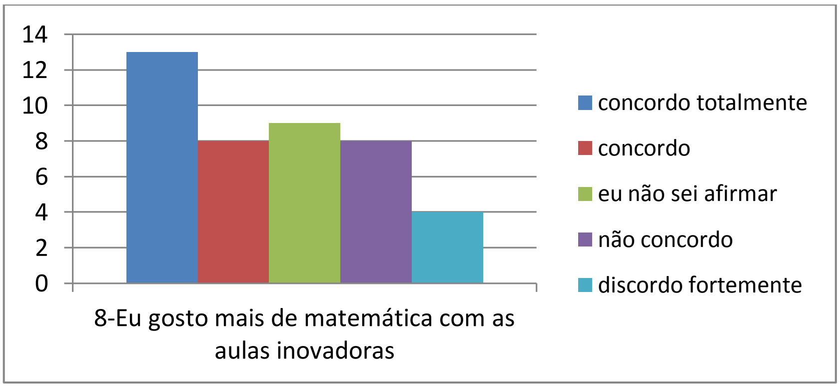
Tabela 18 – Só os alunos bons em matemática deveriam usar tecnologia para estudar



Fonte – Elaborado pelo autor

Apenas 10% concordam em excluir os alunos regulares e ruins para o uso da tecnologia. Logo o resultado é bem satisfatório quanto a este quesito.

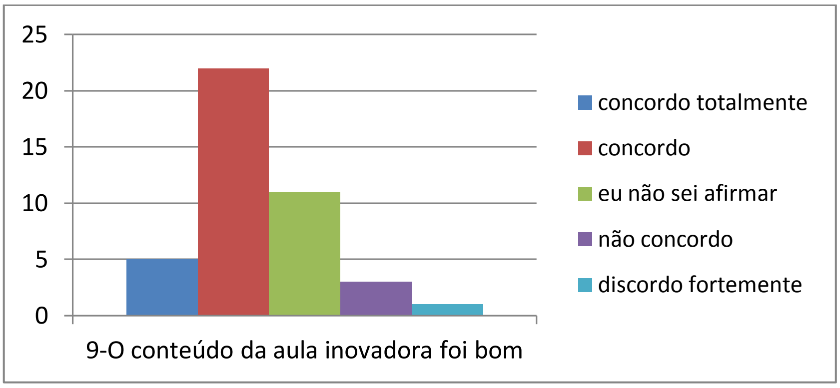
Tabela 19 – Eu gosto mais de matemática com as aulas inovadoras



Fonte – Elaborado pelo autor

Como 50% dos alunos concordam que gostaram de matemática com as atividades propostas, o resultado foi satisfatório.

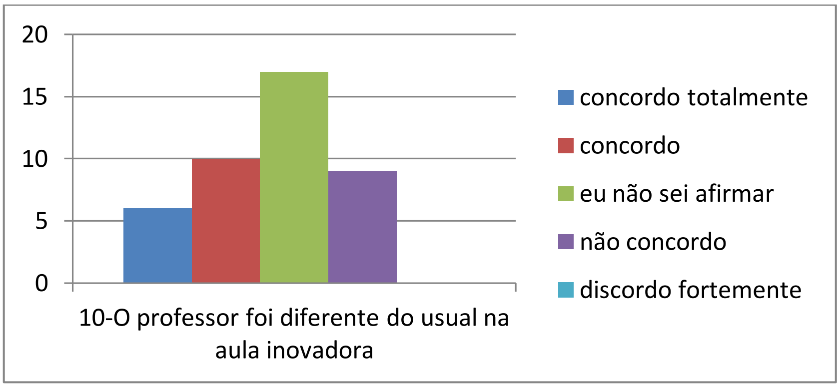
Tabela 20 – O conteúdo da aula inovadora foi bom



Fonte – Elaborado pelo autor

Quanto ao conteúdo apresentado nas atividades, 60% concordaram que foi bom, que é um resultado surpreendente.

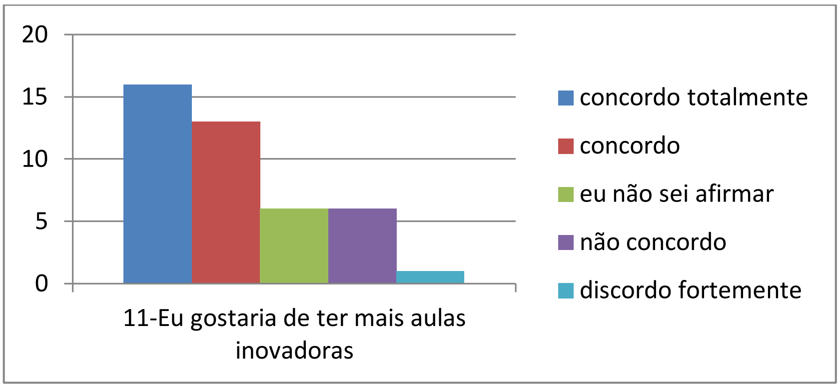
Tabela 21 – O professor foi diferente do usual na aula inovadora



Fonte – Elaborado pelo autor

Embora apenas 21% não concordam que o professor foi diferente, o resultado é razoável, pois um número considerado de alunos (41%) não souberam afirmar que o professor executando as atividades inovadoras em sala de aula era diferente das aulas tradicionais.

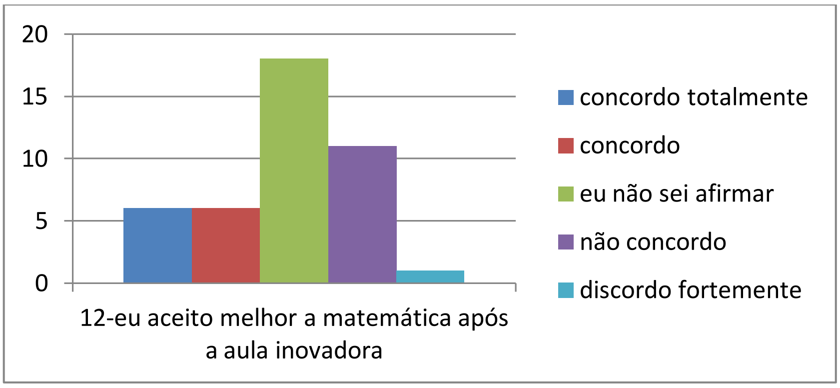
Tabela 22 – Eu gostaria de ter mais aulas inovadoras



Fonte – Elaborado pelo autor

Este resultado é surpreendente, pois quase 70% dos alunos gostariam de ter mais aulas inovadoras.

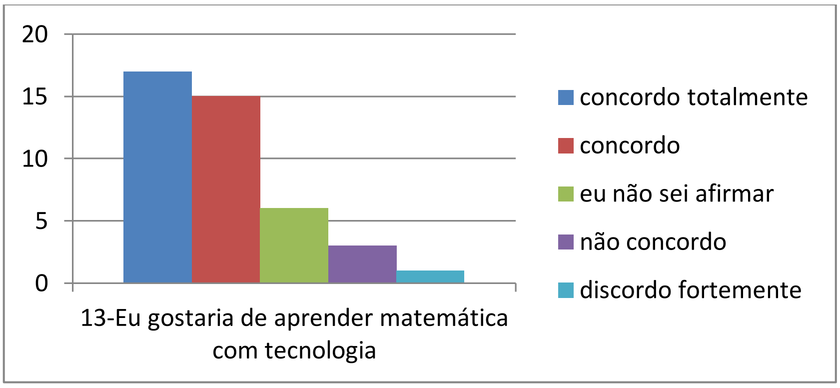
Tabela 23 – Eu aceito melhor a matemática após a aula inovadora



Fonte – Elaborado pelo autor

Este resultado aproximado de 50% mostra o preconceito que há com a disciplina de matemática de ser difícil.

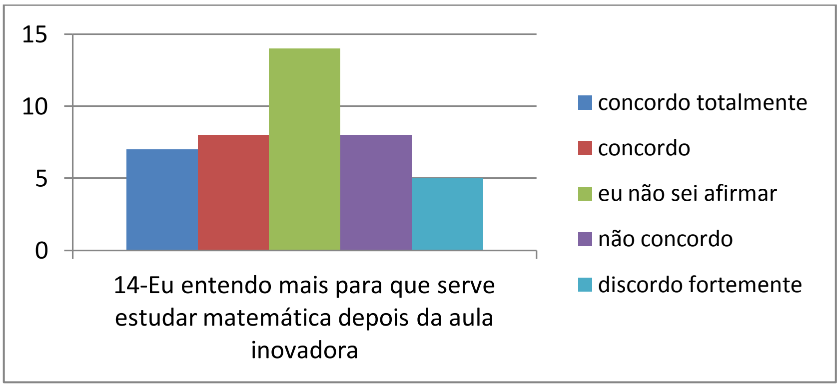
Tabela 24 – Eu gostaria de aprender matemática com tecnologia



Fonte – Elaborado pelo autor

Este resultado mostra a vontade dos alunos em aprender matemática, pois 63% concordam em aprender matemática com tecnologia.

Tabela 25 – Eu entendo mais para que serve estudar matemática depois da aula inovadora



Fonte – Elaborado pelo autor

Muitos alunos ainda não entendem para que serve estudar matemática, o resultado não foi o que pretendíamos, mas podemos melhorar estes números.

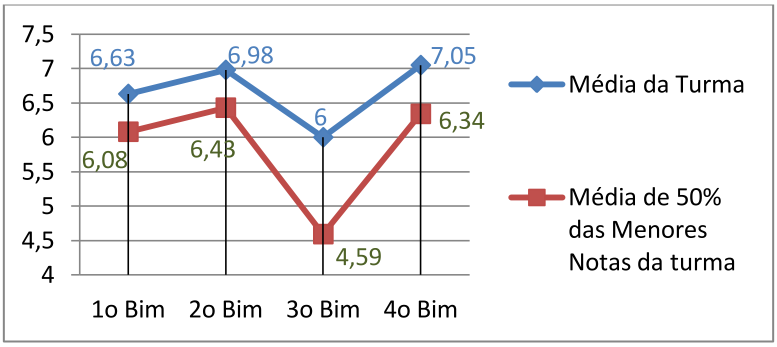
Podemos verificar na resposta da pergunta 13 do questionário uma vontade grande por parte dos alunos de aprender matemática com o uso de tecnologia que no nosso trabalho foi o uso da calculadora gráfica, e reforçado com a análise da avaliação feita neste capítulo, podemos responder positivamente a pergunta proposta na seção 3.1 sobre o aprendizado de função com o uso da calculadora gráfica.

A resistência ainda é muito grande quando elaboramos aulas em que os alunos buscam suas soluções antes da interferência do professor, fugindo um pouco da aula tradicional. Acredito nesta linha de pesquisa, uma vez que, conquistamos aproximadamente 50% dos alunos, mas a cada ano devemos aperfeiçoar as aulas procurando mudar o que foi descoberto como falho e aperfeiçoando o que deu certo.

CAPÍTULO 6: CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

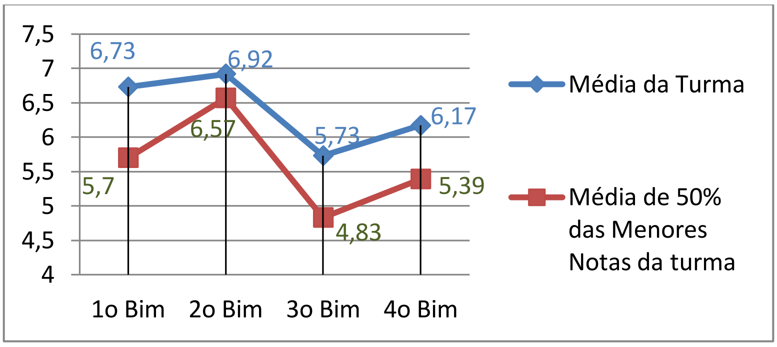
Procuramos nas atividades desenvolvidas neste trabalho seguir as orientações dos principais documentos oficiais do Ministério da Educação como PCN, LDB e outros que dão ênfase na melhoria do ensino tradicional em sala de aula com aulas inovadoras apoiada na tecnologia relacionando o contexto escolar com o mundo real de forma que estimule o aluno a um melhor aprendizado. Assim, descrevemos a seguir os principais resultados desta pesquisa, começando por gráficos de desempenho das turmas nas avaliações escolares.

Figura 24 - Gráficos das Médias da Turma 103



Fonte – Elaborado pelo autor

Figura 25 - Gráficos das Médias da Turma 104



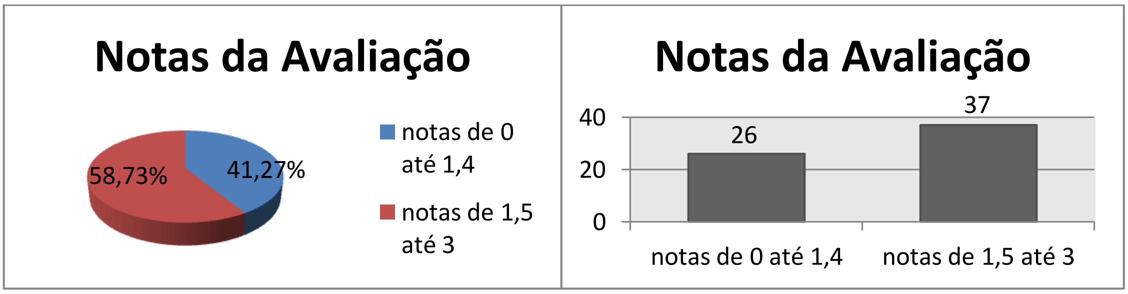
Fonte – Elaborado pelo autor

Os gráficos 1 e 2 apresentam a média geral da turma 103 e 104 e a média da metade dos alunos que obtiveram as menores média final dos quatro bimestres. As maiorias das atividades aplicadas no primeiro semestre de 2011 ocorreram no 2º bimestre e verificamos uma melhora na média da turma 103 e 104 do 1º para o 2º bimestre, confirmando que as atividades ajudaram os alunos a compreender melhor os conceitos matemáticos. No terceiro bimestre houve uma queda nas médias das turmas, pois as aulas foram mais tradicionais focando no ensino de inequações do 1º e 2º grau sem problemas contextualizados; também houve uma greve de um mês e meio e uma semana sem aula por causa da Expocanp, tornando o terceiro bimestre bem curto. Portanto, provavelmente estes fatores tenham contribuído para o baixo rendimento neste bimestre. Já no quarto bimestre, embora não tivéssemos trabalhado nenhuma atividade inovadora, houve uma recuperação da média, pois trabalhei a caracterização da função exponencial com alunos que haviam trabalhado as caracterizações das funções afim e quadrática nas Atividades 3 e 4, respectivamente, e isso facilitou compreensão da metodologia por parte dos alunos.

Concluímos que, embora a metade da turma que tem maior dificuldade em matemática apresente média evidentemente menor que a média da turma como um todo, o crescimento e decrescimento das médias durante os bimestres, com atividade inovadora ou não, as médias são praticamente paralelas, com destaque no terceiro bimestre da turma 103, quando a média dos alunos com mais dificuldade caiu bem no 3º bimestre, conforme gráfico 1, o que confirma a importância de alternativa metodológica em sala de aula. Outro destaque foi a melhora acentuada da turma 104 do 1º para o 2º bimestre conforme gráfico 2, ratificando que as atividades inovadoras ajudaram os alunos com maior dificuldade em matemática.

Quanto à avaliação que foi feita logo após aplicar as cinco atividades, podemos confirmar olhando o gráfico 26, que o resultado foi de razoável para bom, visto que aproximadamente 58% acertaram pelo menos a metade da prova. Porém quando comparamos a média de acerto nas avaliações oficiais estaduais do ensino de matemática nesse nível, que geralmente é baixa, podemos ponderar que o resultado seja satisfatório.

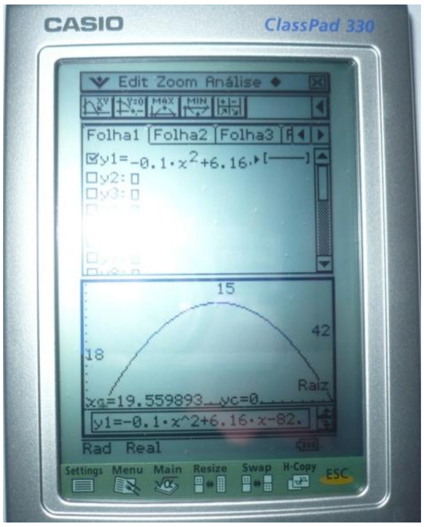
Figura 26 – Gráficos da nota da avaliação das atividades em porcentagem e número absoluto dos alunos



Fonte – Elaborado pelo autor

Diante do que foi dito no capítulo 1 seção 1.3 quando falamos da importância da tecnologia como uma parceria inteligente com uso da calculadora gráfica, este recurso foi explorado em algumas atividades descritas no trabalho, sendo a figura 27, abaixo, uma ilustração.

Figura 27: Explorando as raízes da equação



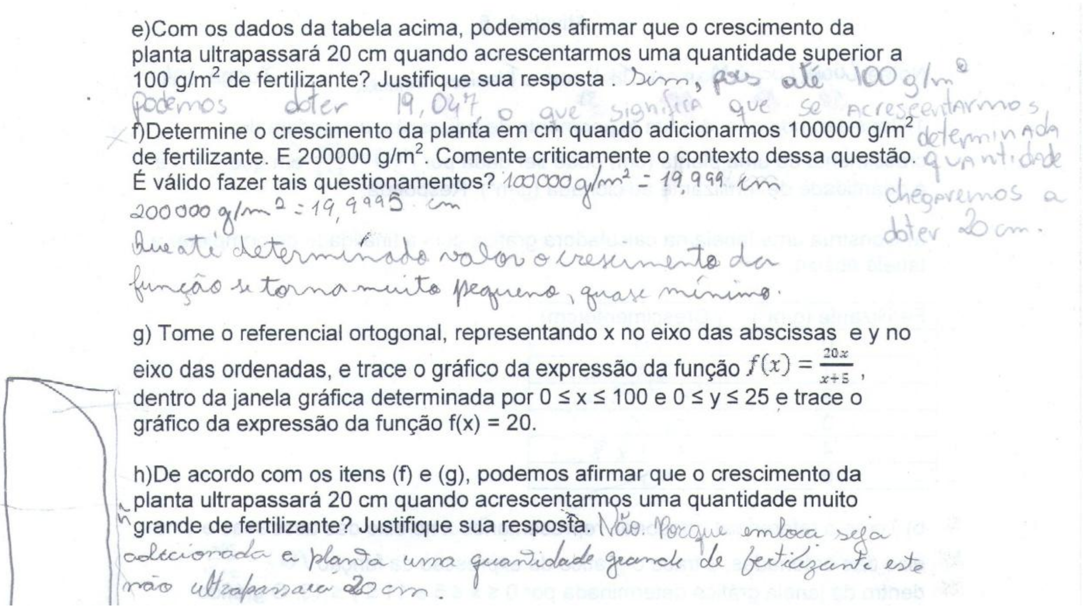
Fonte – Elaborado pelo autor

A resposta de um dos grupos para o item (f) da Atividade 4, mostra que o grupo precisou explorar outro intervalo do domínio da função para achar a segunda raiz da equação, pois a janela da calculadora gráfica apresenta o valor de apenas uma das raízes.

f) Qual ou quais a(s) raiz(es) da equação f(x) = 0? O que significa no problema os zeros dessa função? O. Significa que se a temperatura for zero, não irá germinar nenhuma semente.
Raízes: 19,55 / 42,04

Vale dizer também que um dos grupos que estava esperando a calculadora gráfica para fazer o item (f), para não ficar parados, tentou fazer sem o recurso da mesma, e encontrou bastante dificuldade, reforçando a importância da calculadora gráfica nas atividades de resolução de problemas contextualizados em que os números são geralmente racionais ou irracionais, com representação decimal aproximada.

Outro fato marcante desta parceria inteligente da calculadora gráfica ocorreu na atividade 5 item (e,f,g,h) descrito a seguir.



e)Com os dados da tabela acima, podemos afirmar que o crescimento da planta ultrapassará 20 cm quando acrescentarmos uma quantidade superior a 100 g/m^2 de fertilizante? Justifique sua resposta . Sim, pois até 100 g/m^2 podemos obter 19,047, o que significa que se acrescentarmos determinada quantidade chegaremos a obter 20 cm.

f)Determine o crescimento da planta em cm quando adicionarmos 100000 g/m^2 de fertilizante. E 200000 g/m^2. Comente criticamente o contexto dessa questão. É válido fazer tais questionamentos? 100000 g/m^2 = 19,999 cm

200000 g/m^2 = 19,9995 cm

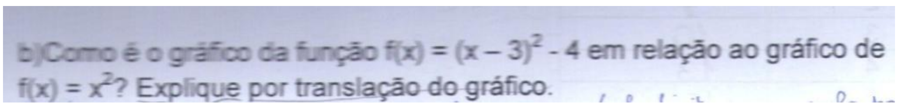
Que até determinado valor o crescimento da função se torna muito pequeno, quase mínimo.

g) Tome o referencial ortogonal, representando x no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, e trace o gráfico da expressão da função $f(x) = \frac{20x}{x+5}$, dentro da janela gráfica determinada por $0 \leq x \leq 100$ e $0 \leq y \leq 25$ e trace o gráfico da expressão da função f(x) = 20.

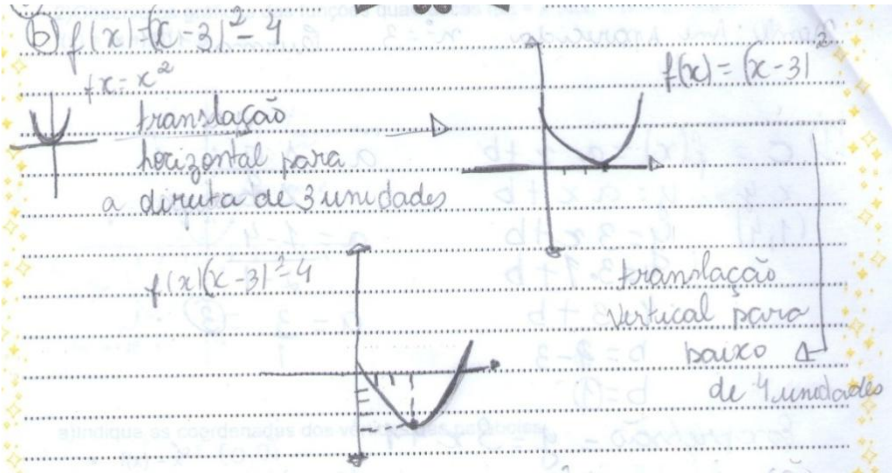
h)De acordo com os itens (f) e (g), podemos afirmar que o crescimento da planta ultrapassará 20 cm quando acrescentarmos uma quantidade muito grande de fertilizante? Justifique sua resposta. Não. Porque embora seja adicionada a planta uma quantidade grande de fertilizante esta não ultrapassara 20 cm.

Verificamos que o grupo respondeu no item (e) que o crescimento da planta ultrapassava 20 cm e no item (h) mudaram de opinião depois do recurso da calculadora gráfica; mesmo assim uma integrante deste grupo não dada por satisfeita usou a calculadora gráfica para calcular o crescimento para 1000000 g/m^2 de fertilizante, reforçando que a parceria com a tecnologia ajudou a convencê-la que a resposta do item(h) do grupo estava correta.

Quanto ao efeito da tecnologia defendida por Salomon, Perkins e Globerson (1991) capítulo 1 seção 3.1, verificamos que a atividade 2 que explora o conceito de translação com o recurso da calculadora gráfica, desenvolveu nos alunos uma habilidade de trabalhar translação sem o uso da calculadora gráfica como pode ser visto a seguir na resposta de um dos alunos na questão 2 item (b) da avaliação em que aproximadamente 52% dos alunos acertaram.

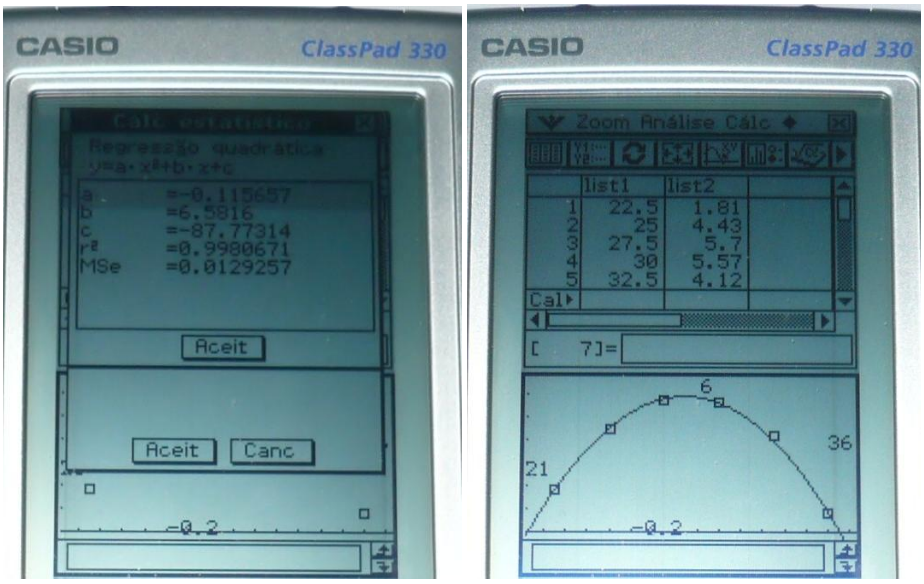


b)Como é o gráfico da função $f(x) = (x-3)^2 - 4$ em relação ao gráfico de $f(x) = x^2$? Explique por translação do gráfico.



As etapas do processo de modelagem do Tipo 1, classificados por Burgues no capítulo 1 seção 1.5 foi explorado na atividade 4, ilustrada na figura a seguir:

Figura 28 - Tabela, gráfico e regressão quadrática



Fonte – Elaborado pelo autor

Verificamos que foram exploradas tabela, gráfico, estatística através de regressão quadrática no modelo de função que mais se aproxima dos resultados da tabela. Isto segue uma perspectiva realista através da modelagem matemática aplicada na resolução de problemas com recurso da calculadora, e também uma perspectiva contextual, segundo a classificação de modelagem matemática por Kaiser e Sriraman (2006), no contexto escolar. Os alunos desenvolveram bem esta atividade cujo objetivo principal era ensinar a caracterização de uma função quadrática com uma nova metodologia de ensino, o que foi alcançado com o resultado da questão 3 da avaliação, em que obtivemos aproximadamente 62% de acertos na caracterização da função quadrática.

Outro fator importante no desenvolvimento das atividades que sinaliza um melhor aprendizado dos alunos foi o resultado da média dessas turmas no 4º bimestre de 2011 em torno de 6,0 tanto para a turma toda como para os que tiveram baixos rendimentos durante o ano de 2011, o que está ilustrado nos gráficos 1 e 2. A atividade 3 (caracterização da função afim) e atividade 4 (caracterização da função quadrática) dadas no 2º bimestre ajudaram os alunos a compreender melhor a caracterização da função exponencial (4º bimestre), ou seja, mais da metade da turma sabe diferenciar numa tabela dada que envolve duas grandezas, qual função (afim, quadrática ou exponencial) que pode modelar melhor aqueles dados da tabela. Como professor, e o resultado dos alunos saberem caracterizar um determinado modelo de função na resolução de problemas contextualizados foi muito importante, pelo fato de que os alunos compreenderam a importância da matemática em seu curso técnico, ou melhor, nenhum aluno fez aquela famosa pergunta: “Para que serve a matemática?” Esclareceu também para os alunos a razão de estudar o conceito de função.

Embora o resultado da avaliação da questão 3, em que aproximadamente 62% dos alunos souberam caracterizar uma função quadrática, tenha sido considerado satisfatório, mais da metade deste percentual (em torno de 35%) teve alguma dificuldade em resolver a equação algébrica $2a = \frac{0,128}{4^2}$ para encontrar o valor de **a**, mostrando a fragilidade dos alunos em álgebra herdado do ensino fundamental.

Também obtivemos um resultado satisfatório na avaliação da questão 1, em que um bom número de alunos soube caracterizar uma função afim, que além de ser uma questão de modelagem, fez parte do ENEM que foi uma referência básica da nossa pesquisa.

Quanto às atividades inovadoras aplicadas no 1º semestre de 2011 verificamos através do questionário de avaliação que pelo menos 50% dos alunos anseia por aulas dinâmicas com uso de tecnologia, de tal forma que os ajude a entender melhor os conceitos matemáticos. Este resultado ficou evidenciado no 2º semestre em que alguns alunos pediram para ter mais atividades inovadoras.

Os resultados apresentados são apenas um indício de que devemos fazer muito mais, pois tivemos muita dificuldade na aplicação das atividades inovadoras. Os alunos queriam respostas certas para prosseguir em outros itens da atividade, alguns alunos ficavam desinteressados sem compromisso em sala de aula, o que atrapalhava outros alunos interessados, apenas uma calculadora gráfica para trabalhar com a turma, além do necessário auto-poiliciamento em não dar as respostas diretamente aos alunos. Na hora da correção das atividades, os alunos que já haviam conseguido chegar às respostas, conversavam atrapalhando outros, e houve muitos erros nos itens que exigiam resolução algébrica, que dependiam de outros preparos dos alunos. Temos muito que aprender, e só com o tempo poderemos melhorar, o que conseguimos comprovar pelo relato da melhoria das aplicações de atividades inovadoras em 2011, comparadas com 2010.

Como professor de matemática preocupado com o resultado da aprendizagem de matemática no Ensino Médio, temos procurado caminhos alternativos de metodologia de ensino para alterar este quadro fragilizado na educação. Portanto busquei neste trabalho, a metodologia de modelagem matemática aplicada como resolução de problemas e auxiliada pela calculadora gráfica como uma alternativa para melhorar este quadro. Pelas pesquisas realizadas em modelagem matemática, encontramos um bom material para aplicar no ensino fundamental e superior, mas no ensino médio ainda há pouco material de pesquisa. Sendo assim, espero que esta pesquisa auxilie outros professores a buscar novos caminhos, ter coragem de fazer diferente e iniciar nesse mundo da modelagem matemática de tal forma que possamos enriquecer a matemática do ensino médio e tentar melhorar o quadro educacional do Brasil.

REFERÊNCIAS

SILVA, J.C.; PINTO, J.; MACHADO, V. **Aleph 10**. Lisboa: ASA, 2010. 240p.

BORBA,M.C.; **Calculadoras Gráficas e Educação matemática**. 2.ed. Rio de Janeiro: Art Bureau, 1999. 136 p.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2010. p. 15 – 42.

BEAN, D. – O que é modelagem matemática?; **Educação Matemática em Revista**, **SBEM**, São Paulo n. 9/10, p. 49-57, abril 2001.

LAUGHBAUM,E.D. **Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers**. The Ohio State University, 2000. 211 p.

DANTE,L.R. **Matemática Contexto & Aplicações**. São Paulo: Ática, 2010. p. 10 – 56.

LIMA,E.L.; et al. **Matemática do Ensino Médio** Vol.1. 9.ed.Rio de Janeiro: SBM, 2006.

CARRAHER,T.N.; et al. **Aprender Pensando Contribuições da psicologia cognitiva para a educação**.19.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008. p. 11 – 30.

GALBRAITH, P.; et al. **Ian.Mathematical Modelling Teaching and Assessment in a Technology-Rich World**. Horwood publishing limited,1998. 207 p.

SVIERCOSKI ,R.F.**Matemática Aplicada às Ciências Agrárias : análise de dados e modelos**.Viçosa,MG: Ed. UFV, 2008. p. 27 – 57.

OLIVERO, M.;Cardim, N.**Cálculo 1**. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

SANTOS, R.; et al. **Introdução Às Funções Reais : Um enfoque Computacional**. Departamento de Métodos Matemáticos – Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro,1998. p. 20 – 80.

BARBOSA, J.C. Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para um debate teórico.In:REUNIÃO ANUAL DA ANPED,24.,Caxambu,2001. Disponível em <sites.uol.com.br/joneicb>. Acesso em: 24 jan. 2011.

HUNTLEY,I.D. & JAMES,D.J.G. **Mathematical Modelling, A Source Book of Case Studies**. Oxford University Press, 1990.

Brasil. Ministério da Educação. PCN+ Ensino Médio. Orientações educacionais complementares aos **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 2002.

Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília, 2000.

Brasil, Ministério da Educação. Disponível em <http://WWW.portal.mec.gov.br/dmdocuments/ensino_inovador.pdf>. Acesso em: 08 dez. 2011.

Portal de Revistas Científicas do Cesumar. Disponível em <http://www.cesumar.br/pesquisa/periodicos/index.php/iccesuma>. Acesso em: 27 ago. 2010.

DRUCK, S. Disponível em <http://tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/150311Matematicaproblema.pdf> Acesso em: 12 out. 2011.

LELIS, M.; IMENES, L.M. **A Matemática e o novo ensino médio**. Educação Matemática Em Revista, São Paulo, Ano8, n. 9/10, p. 40-48, abril 2001.

BLUM, W., NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. International Journal of Teachers of Mathematics, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

PONTE, J.P. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm#Novas tecnologias> Acesso em: 20 out. 2010.

APÊNDICE

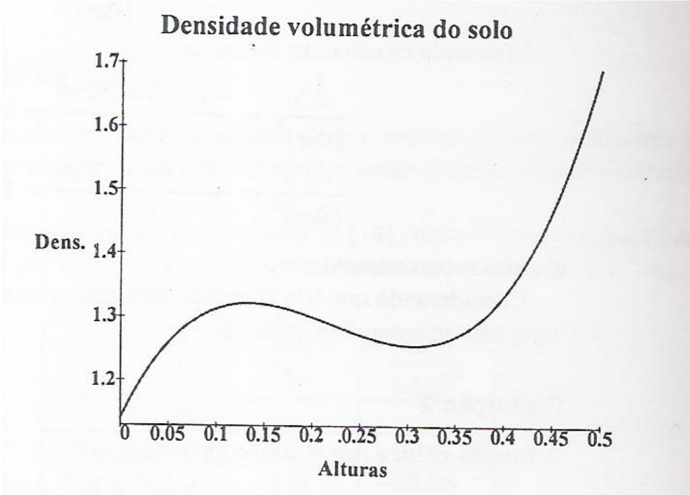
APÊNDICE A – Atividade 1

Nome: Turma:

1)Os dados da tabela, descrevem a densidade volumétrica do solo (mg/m^3) em diferentes alturas (profundidade) no perfil do solo (m), para dado tipo de manejo.

Metros (m)	Densidade (mg/m^3)
0	1.1400
0.05	1.2592
0.1	1.3127
0.15	1.3198
0.2	1.2998
0.25	1.272
0.3	1.2557
0.35	1.2702
0.4	1.3348
0.45	1.4688
0.5	1.6913

A partir desses dados pode-se modelar pela equação $y = 25{,}733x^3 - 16{,}997x^2 + 3{,}168x + 1{,}1402$ e esboçar o gráfico a seguir:



a)Quais as grandezas envolvidas no problema?

b)Pelo enunciado do problema quais as ferramentas matemática que modelam uma função?

c)Determine o domínio da função?

d)Determine a imagem da função?

e)Qual a grandeza independente?

f)Qual a grandeza dependente?

g)Observe que na definição de função exigimos que a cada elemento do domínio, seja associado um único (um e apenas um) elemento da imagem. Por que essa definição é importante de acordo com o problema?

h)Entre que altura a função é crescente?

i)Entre que altura a função é decrescente?

j)Qual a densidade máxima?Até a altura de 0,2 m qual é aproximadamente a densidade máxima local? Explique.

k)Qual a densidade mínima? A partir de 0,2 m qual é aproximadamente a densidade mínima local?Explique.

l)Uma função injetora diz que para qualquer elemento do domínio se $x1 \neq x2$ implica que $f(x1) \neq f(x2)$, ou seja, elementos diferentes do domínio implica em elementos diferentes da imagem. Olhando só para a tabela podemos afirmar que é injetora? Explique? e olhando só para o gráfico do problema é injetora?Explique.

m)De acordo com o problema podemos ampliar o domínio da função nas duas direções? Explique?

APÊNDICE B – Atividade 2

Nome: turma:

1) Trace, na janela gráfica dada por -10 ≤ x ≤ 10, -10 ≤ y ≤ 10, os gráficos das funções expressa por $f(x) = x^2 + k$, para k = - 2, k = 0 e k = 3.

a)O que você observa sobre o deslocamento do gráfico?

b)Seja $f(x) = x^2 + k$, para k = - 2, dê um exemplo do valor de k, para que o gráfico tenha um deslocamento vertical para baixo. Construa o gráfico.

2) Trace, na janela gráfica dada por -10 ≤ x ≤ 10, -10 ≤ y ≤ 10, os gráficos das funções expressa por $f(x) = (x + k)^2$, para k = 0, k = 2 e k = 4.

a)O que você observa sobre o deslocamento do gráfico?

b)Seja $f(x) = (x + k)^2$, para k = 0, dê um exemplo do valor de k, para que o gráfico tenha um deslocamento horizontal para a direita. Construa o gráfico.

3)Na matemática denominamos esses deslocamentos de **translação** vertical para baixo ou para cima e **translação** horizontal para direita ou esquerda. Portanto, se temos a função expressa por $f(x) = x^3$ e transladamos horizontalmente 5 unidades para à direita ela será representada por $f(x) = (x – 5)^3$, e em seguida sofrer uma translação vertical para cima de 8 unidades, teremos $f(x) = (x – 5)^3 + 8$.

a)Determine a expressão da função cujo gráfico é dado pelo deslocamento do gráfico da função expressa por $f(x) = x^3$ transladando horizontalmente 1 unidade para esquerda e verticalmente 2 unidades para baixo. Construa o gráfico na calculadora gráfica.

b)Partindo das coordenadas do ponto (-1,-1), qual seria as coordenadas desse ponto depois de ocorrido as translações do item (a), sem usar a expressão da nova função.

4)Use a calculadora para marcar os pontos x e y da tabela da atividade 1 para um esboço do gráfico.

APÊNDICE C – Atividade 3

Nome: Turma:

1)O custo de uma plantação de até 50 hectares é decorrente da quantidade de hectares plantados. O custo das máquinas é um **custo fixo**, pois independe do número de hectares plantados. Já o custo com adubação, semente e mão-de-obra variam com o número de hectares plantados e é chamado de **custo variável**. Supondo que o custo fixo seja de R$800,00 e o custo variável de R$200,00 por hectare plantado e considerando x o número de hectares plantados, responda:

a)Complete a tabela abaixo, registrando os cálculos efetuados para os resultados obtidos.

hectares	0	1	2	3	5	50
Custo total (R$)	800	1000	1200			

b)Considerando y o custo total, qual a melhor expressão para o custo total, explique sua escolha.

(a) $y = 800x + 200$ (b)$y = 800x - 200$ (c)$y = 200x - 800$ (d)$y = 200x + 800$

c)Tome o referencial ortogonal, representando x no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, e trace o gráfico da expressão escolhida no item (b), dentro da janela gráfica determinada por $-5 \leq x \leq 5$ e $400 \leq y \leq 2000$, considerando a unidade no eixo 0x como 2(hectares plantados) e a unidade no eixo 0y como 200 (R$). Em que ponto o gráfico intersecta o eixo y (custo total)? O gráfico representa parte de que figura geométrica?

d) Considerando a expressão da função encontrada no item (b), trace dois gráficos em que o valor 200 é mantido fixo, mas alterando o valor 800 para 600 em um dos gráficos, e para 1200 no outro. Em que ponto cada uma das retas intersecta o eixo y? Qual é a posição relativa entre as retas nesses gráficos?

e) Construa a tabela para $0 \leq x \leq 5$ na calculadora gráfica e preencha a tabela abaixo.

Área Plantada(hectares)		Acréscimo	Custo Total (R$)		Acréscimo
x1	x2	########	y1	y2	#########
0	1				
1	2				
2	3				
0	2				
1	3				
2	4				
0	3				
1	4				
2	5				

f)Qual o acréscimo do custo total, quando a área plantada de 20 hectares aumentar para 21 hectares?

g) Qual o acréscimo do custo total, quando a área plantada de 17 hectares aumentar para 19 hectares?

h) Qual o acréscimo do custo total, quando a área plantada de 37 hectares aumentar para 40 hectares?

i) Qual o acréscimo do custo total, quando a área plantada de 7 hectares aumentar para 11 hectares?

j) Qual o acréscimo do custo total, quando a área plantada de 20 hectares aumentar para 40 hectares?

k)Podemos afirmar que o acréscimo do custo total é proporcional ao acréscimo da área plantada?Caso sua resposta seja sim, qual a constante de proporcionalidade?

l)Dividindo o acréscimo do custo total pelo acréscimo da área plantada nos itens anteriores o resultado é um valor constante? Se disser sim, qual o valor; se disser não quais os valores.

Como saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim? No caso do custo da plantação não há problema. Tem-se $f(x) = ax + b$ onde x é o número de hectares plantados, f(x) o custo total, “**a”** é a taxa por hectare plantado e” **b”** o custo das máquinas (fixo). Mas nem todo problema é assim tão explícito. Uma maneira de exprimir esta propriedade consiste em dizer que os acréscimos sofridos por f(x) são proporcionais aos acréscimos dados a x. Na álgebra representamos da seguinte forma: $f(x_2) – f(x_1) = a.(x_2 – x_1)$.

APÊNDICE D – Atividade 4

Nome: Turma:

1)Dentre as condições ambientais que afetam o processo germinativo, a temperatura é um dos fatores que tem influência significativa. No laboratório as sementes de girassol foram colocadas para germinar em diferentes temperaturas: 22,5; 25; 27,5; 30; 32,5 e 35 ºC com o objetivo de avaliar o índice de velocidade de germinação (número de semente germinada / tempo). O resultado encontra-se na tabela abaixo.

Temperatura (^{o}c)	Índice de Velocidade (N^o de semente germinada / dia)
22,5	1,81
25	4,43
27,5	5,7
30	5,57
32,5	4,12
35	1,37

a)Na atividade anterior, verificamos que a característica de uma função afim é dada por acréscimos sofridos por f(x) sendo proporcionais aos acréscimos dados a x, em intervalos correspondentes. Complete a tabela e responda se este problema pode ser modelado por uma função afim, justificando sua resposta.

Temperatura (^{o}c)		$\Delta x = x_2 - x_1$	Índice de Velocidade		$\Delta y = y_2 - y_1$	$\Delta y/\Delta x$
x_1	x_2	##########	y_1	y_2	##########	########
22,5	25		1,81	4,43		
25	27,5		4,43	5,7		
27,5	30		5,7	5,57		
30	32,5		5,57	4,12		
32,5	35		4,12	1,37		

b) Tome o referencial ortogonal, representando x (temperatura) no eixo das abscissas e y (índice de velocidade) no eixo das ordenadas. Use a calculadora gráfica para registrar os pontos da primeira tabela. A distribuição dos pontos no gráfico se aproxima de alguma curva conhecida? Se sim, diga qual?

c)Complete a tabela abaixo, sabendo que os valores de Δx, Δy e $(\Delta y/\Delta x)$ foram copiados da tabela anterior.

Δx	Δy	$(\Delta y/\Delta x)$	$(\Delta y/\Delta x)_1$	$(\Delta y/\Delta x)_2$	$\Delta(\Delta y/\Delta x)$: segunda variação $(\Delta y/\Delta x)$	$\Delta(\Delta y/\Delta x)/\Delta x$
2,5	2,62	1,048	#######	#######	$\Delta(\Delta y/\Delta x) = (\Delta y/\Delta x)_2 - (\Delta y/\Delta x)_1$	
2,5	1,27	0,508	1,048	0,508		
2,5	-0,13	-0,052	0,508	-0,052		
2,5	-1,45	-0,58	-0,052	-0,58		
2,5	-2,75	-1,1	-0,58	-1,1		

O que podemos afirmar sobre os valores de $\Delta(\Delta y/\Delta x)/\Delta x$?

d)Função quadrática é um modelo matemático caracterizado da seguinte forma: Para todo espaçamento constante de x_1, x_2, ..., x_n, no domínio da função, ocorre uma transformação por f(x) em valores proporcionais da segunda variação de $(\Delta y/\Delta x)$. De acordo com os resultados podemos afirmar que o problema pode ser modelado por uma função quadrática? Se sim, usando a função estatística da calculadora construa o gráfico por regressão quadrática (ferramenta estatística que traça uma parábola mais próxima dos pontos com pequeno erro) e escreva a expressão da função assim obtida.

e)Agora usando a função gráfica da calculadora construa o gráfico da função determinada pela expressão determinada no item (d). Como podemos determinar o domínio dessa função no problema? Qual a imagem da função? No contexto do problema, qual o significado da imagem?

f) Qual ou quais a(s) raiz(es) da equação f(x) = 0? O que significa no problema os zeros dessa função?

g) Podemos ter o índice de velocidade de germinação negativo? Explique sua resposta.

i)O índice de velocidade de germinação possui máximo? Qual? Determine a temperatura ideal para o índice de velocidade de germinação máximo.

j) O índice de velocidade de germinação possui mínimo? Qual?

k)A expressão da função $f(x) = 3x^2$, cujo domínio são os números reais, possui máximo e mínimo?Explique.

l) A expressão da função $f(x) = - 3x^2$, com domínio dado por números reais possui máximo e mínimo?Explique.

Obs.: Errata 1: Na tabela 1, o índice de velocidade na temperatura de 35º c é 1,37, pois na atividade de 2010 estava 0,82.

Errata 2: Nos itens passei da letra (g) para (i), pulei a letra (h) por distração.

APÊNDICE E – Atividade 5

Nome: Turma:

1)Considerando que, em um experimento de adubação, a resposta do crescimento de uma planta (cm) pode ser dada por $f(x) = \frac{20x}{x+5}$ em que x > 0 é a quantidade de fertilizante adicionada (g/m^2). Responda:

a) Construa uma tabela na calculadora gráfica com a finalidade de completar a tabela abaixo.

Fertilizante (g/m^2)	Crescimento(cm)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

b) Tome o referencial ortogonal, representando x no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, e trace o gráfico da expressão da função $f(x) = \frac{20x}{x+5}$, dentro da janela gráfica determinada por 0 ≤ x ≤ 5 e 11 ≤ y ≤ 15. O gráfico apareceu na tela da calculadora gráfica?Justifique sua resposta utilizando a tabela do item (a).

c)Sabemos que o domínio da função é o conjunto de valores possíveis para a quantidade de fertilizante que é adicionada. Considerando 0 ≤ x ≤ 5 do item anterior, encontre o conjunto imagem da função, ou seja, um intervalo de valores para o crescimento da planta para este domínio, e trace o gráfico na calculadora gráfica, de modo que a janela gráfica corresponda às condições deste ítem.

d)Construa uma tabela na calculadora gráfica com a finalidade de completar a tabela abaixo.

Fertilizante (g/m^2)	Crescimento(cm)
0	
10	
20	
30	
40	
50	
60	
70	
80	
90	
100	

e)Com os dados da tabela acima, podemos afirmar que o crescimento da planta ultrapassará 20 cm quando acrescentarmos uma quantidade superior a 100 g/m^2 de fertilizante? Justifique sua resposta .

f)Determine o crescimento da planta em cm quando adicionarmos 100000 g/m^2 de fertilizante. E 200000 g/m^2. Comente criticamente o contexto dessa questão. É válido fazer tais questionamentos?

g) Tome o referencial ortogonal, representando x no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, e trace o gráfico da expressão da função $f(x) = \frac{20x}{x+5}$, dentro da janela gráfica determinada por $0 \leq x \leq 100$ e $0 \leq y \leq 25$ e trace o gráfico da expressão da função $f(x) = 20$.

h)De acordo com os itens (f) e (g), podemos afirmar que o crescimento da planta ultrapassará 20 cm quando acrescentarmos uma quantidade muito grande de fertilizante? Justifique sua resposta.

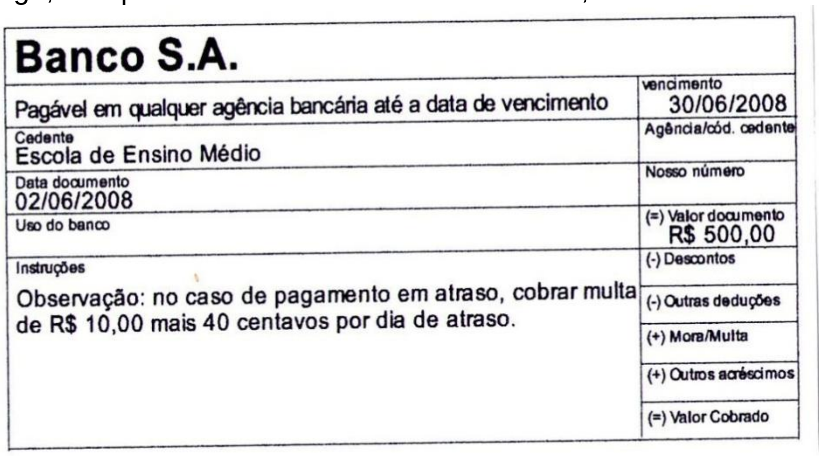
i) Funções racionais são funções que podem ser representados sob a forma de um quociente de dois polinômios, portanto a expressão $f(x) = \frac{20x}{x+5}$ é uma função racional. Determine o conjunto domínio e o conjunto imagem da função.

j)Construa uma tabela na calculadora gráfica utilizando a expressão da função $f(x) = \frac{20x}{x+5}$ com - 5,1 ≤ x ≤ - 5,0, considerando a unidade no eixo Ox de 0,01. O que acontece com o valor de y quando o valor de x se aproxima de -5 ? Construa o gráfico na calculadora gráfica dentro da janela gráfica determinada por - 6 ≤ x ≤ - 5, considerando a unidade no eixo Ox como 0,2 e a unidade no eixo 0y como 10 e ratifique sua resposta anterior. Explique o que acontece quando x= - 5. O que esta função tem a ver com o problema inicial?

APÊNDICE F – Avaliação das Atividades 2010

Nome: Turma:

1)A figura abaixo representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008. Se M(x) é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então

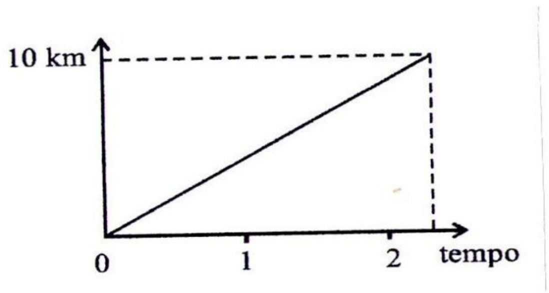


Banco S.A.

Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

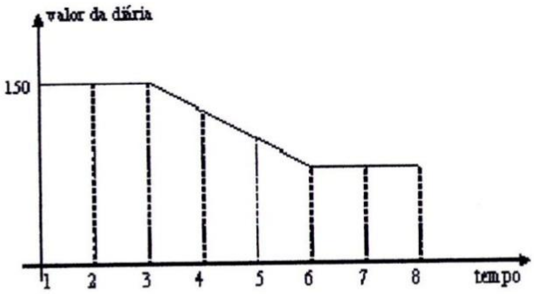
(A) M(x) = 500 + 0,4x.
(B) M(x) = 500 + 10x.
(C) M(x) = 510 + 0,4x.
(D) M(x) = 510 + 40x.
(E) M(x) = 500 + 10,4x.

2)O gráfico abaixo modela a distância percorrida, em km, por uma pessoa em certo período de tempo. A escala de tempo a ser adotada para o eixo das abscissas depende da maneira como essa pessoa se desloca. Qual é a opção que apresenta a melhor associação entre meio ou forma de locomoção e unidade de tempo, quando são percorridos 10 km?



(A) carroça – semana
(B) carro – dia
(C) caminhada – hora
(D) bicicleta – minuto
(E) avião – segundo

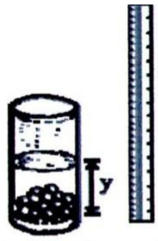
3) Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R$ 20,00. Nos dois dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.



De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de

(A) R$ 90,00.
(B) R$ 110,00.
(C) R$ 130,00.
(D)R$ 150,00.
(E) R$ 170,00.

4) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br.
Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?
(A)y = 30x.
(B) y = 25x + 20,2.
(C) y = 1,27x.

(D) $y = 0{,}7x$.
(E) $y = 0{,}07x + 6$.

APÊNDICE G – Questionário de avaliação da reação dos Alunos à aula inovadora com uso de tecnologia.

Para cada uma das seguintes afirmações, por favor, assinale a alternativa (☐) que melhor expresse o seu pensamento, de acordo com o seguinte critério:

A= concordo totalmente; B= concordo; C= eu não sei afirmar;

D= não concordo; E= discordo fortemente.

	A	B	C	D	E
1. Consegui pensar melhor com a aula inovadora	☐	☐	☐	☐	☐
2. A aula inovadora me fez participar mais	☐	☐	☐	☐	☐
3. A aula inovadora não me ajudou a melhorar o que faço com a matemática	☐	☐	☐	☐	☐
4. A aula inovadora me ajudou a resolver melhor os problemas de matemática	☐	☐	☐	☐	☐
5. O uso da calculadora ou computador é enganar o ensino	☐	☐	☐	☐	☐
6. O uso da calculadora ou computador atrapalha pensar na matemática	☐	☐	☐	☐	☐
7. Só os alunos bons em matemática deveriam usar tecnologia para estudar	☐	☐	☐	☐	☐
8. Eu gosto mais de matemática com aulas inovadoras	☐	☐	☐	☐	☐
9. O conteúdo da aula inovadora foi bom	☐	☐	☐	☐	☐
10. O(A) professor(a) foi diferente do usual na aula inovadora	☐	☐	☐	☐	☐
11. Eu gostaria de ter mais aulas inovadoras	☐	☐	☐	☐	☐
12. Eu aceito melhor a matemática após a aula inovadora	☐	☐	☐	☐	☐
13. Eu gostaria de aprender matemática com tecnologia	☐	☐	☐	☐	☐
14. Eu entendo mais para que serve estudar matemática depois da aula inovadora	☐	☐	☐	☐	☐