UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCAR
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DM

FELIPE MASCAGNA BITTENCOURT LIMA

O Ensino de Probabilidade com o uso do Problema do Jogo dos Discos

SÃO CARLOS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCAR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DM

FELIPE MASCAGNA BITTENCOURT LIMA

O Ensino de Probabilidade com o uso do Problema do Jogo dos Discos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob orientação do Professor Doutor Roberto Ribeiro Paterlini.

SÃO CARLOS

2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

L732ep

Lima, Felipe Mascagna Bittencourt.
O ensino de probabilidade com o uso do problema do jogo dos discos / Felipe Mascagna Bittencourt Lima. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
119 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Jogos em educação matemática. 3. Probabilidades - estudo e ensino. 4. Experimentação. 5. Modelagem. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Paterlini (orientador)
DM - UFSCar

Prof. Dr. José Marcos Lopes
(FEIS – UNESP)

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
DM – UFSCar

A todos os meus alunos, que são os principais motivadores de meu trabalho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, por tudo o que já fez por mim e por todas as oportunidades que me coloca à frente.

A meus pais, pelo amor e educação que sempre me deram, os quais permitiram que eu chegasse onde estou.

Ao meu orientador, Roberto Ribeiro Paterlini, pela grande paciência, motivação, competência e liberdade oferecida. Sua contribuição foi essencial para a elaboração deste trabalho.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da UFSCar, especialmente àqueles com quem tive o grande prazer de assistir às aulas e tanto aprender: João Sampaio, Pedro Malagutti, Paulo Caetano, Ducinei, Antonio Salvador, Yuriko, Maria do Carmo, Marcos Leodoro e novamente Roberto Paterlini.

A todos os colegas do curso, pela amizade, companheirismo e bons momentos que proporcionaram. Cada um contribuiu de forma muito significativa tanto para minha vida pessoal quanto profissional.

Ao secretário do PPGECE, Júnior, que sempre esteve pronto para ajudar.

Aos alunos, professores e funcionários da ETEC Dr. Francisco Nogueira de Lima, pela grande experiência que me proporcionaram durante a aplicação deste trabalho.

Ao meu ex-aluno Lucas Lepri, que desenvolveu um excelente programa que simula o Jogo dos Discos.

A Gabriela, pelo grande apoio que me deu ao longo da escrita desta dissertação.

Muito obrigado a todos.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma proposta didática destinada a introduzir a Probabilidade a alunos do Ensino Básico. Tal proposta consta de uma sequência de aulas que toma por base o Problema do Jogo dos Discos, no qual tem-se como objetivo determinar o diâmetro que um disco deve ter para que, quando lançado aleatoriamente sobre pisos quadrados, tenha determinada probabilidade de interceptar suas linhas de separação. Este problema foi colocado a alunos de três turmas de terceiro ano do ensino médio de uma escola estadual de maneira contextualizada e antes que o assunto Probabilidade tivesse sido abordado pelo docente. A ideia era que os estudantes tentassem resolver o problema em grupos e com o mínimo de ajuda do professor. Mesmo com os alunos apresentando dificuldades, isso se mostrou possível, tendo os mesmos resolvido o problema utilizando a experimentação concreta do jogo. Para isso, eles aproximaram a probabilidade de ganho com certo disco com o percentual de vitórias na experimentação e, através de modelagem gráfica, conseguiram a resposta desejada. Tal proposta de ensino teve como motivação a constatação do autor de que o ensino de Probabilidade feito da maneira tradicional tem se mostrado pouco eficaz. Além disso, pôde-se perceber que vários documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, bem como outros pesquisadores da área, sugerem que a experimentação concreta seja realizada para um efetivo ensino da Probabilidade. Com os resultados obtidos e apresentados nesta dissertação, concluímos que nossa proposta didática se mostrou eficiente, tornando as aulas motivadoras e propiciando um ambiente no qual os alunos, além de aprender Probabilidade, pudessem exercitar sua capacidade criativa.

Palavras-chave: Jogo dos Discos. Ensino de Probabilidade. Experimentação. Modelagem.

ABSTRACT

In this work, we present a didactic proposal which aim is to introduce Probability to students of Basic Education. This proposal consists in a sequence of classes that is based on the Game of Discs Problem, which goal is to determine the diameter that a disk must have so that when launched randomly on square tiles, has a certain probability of intercept their separating lines. This problem was put to students from three classes of third year of a state high school in a contextualized form and before introduction of Probability by the teacher. The idea was that the students should try to solve the problem in groups and with a minimal help from the teacher. Even with students having difficulties, it proved possible, and they solved the problem using a concrete experimentation of the game. For this, they approximated the probability of winning with a certain disc to the win percentage in the experimentation and, through graphical modeling, they achieved the desired answer. The motivation to this teaching propose was the observation by the author that the way that Probability has been traditionally teached has proven ineffective. Moreover, it can be saw that several Brazilian official documents, such as the National Curriculum Parameters (PCN) and Curricular Proposal of the State of São Paulo, as well as other researchers, suggest that concrete experimentation should be performed for a effective teaching of Probability. With the results obtained, presented in this dissertation, we conclude that our didactic proposal is efficient, bringing motivating classes and providing an environment in which students, besides learning Probability, could exercise their creative capacity.

Keywords: Game of Discs. Teaching of Probability. Experimentation. Modeling.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Observe a seguinte questão de múltipla escolha aplicada nas provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB – da 3ª série do Ensino Médio, que envolve cálculo de probabilidade:

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter um número par maior ou igual a 4?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) 1

Qualquer pessoa que tenha de fato aprendido a lidar com problemas que envolvem Probabilidade pode resolver esta questão com facilidade. De fato, basta verificar que, no lançamento de um dado, dos 6 resultados possíveis de se obter (1, 2, 3, 4, 5 e 6), apenas 2 são pares e maiores ou iguais a 4 (4 e 6), de onde se conclui que, considerando que o dado é honesto, a probabilidade desejada é $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, sendo a alternativa (B) a que contém a resposta correta.

Porém, segundo o Caderno do SAEB 2011, os estudantes do 3º ano do Ensino Médio no Brasil que realizaram tal questão tiveram a seguinte distribuição de respostas (BRASIL, 2011, p. 124):

Tabela 1 – Distribuição das respostas para uma questão das Provas do SAEB

Percentual de respostas às alternativas				
A	B	C	D	E
22%	24%	23%	16%	12%

Fonte: BRASIL, 2011

Esta tabela mostra que o ensino de Probabilidade tem sido abordado de forma pouco compreensível para os alunos do ensino regular. O percentual de acerto em 24%, próximo à porcentagem que seria obtida se todos tivessem escolhido alguma alternativa ao acaso, mostra que há algo de errado com o ensino desta competência. Segundo o próprio Caderno do SAEB 2011 (BRASIL, 2011, p. 124):

> Pelo resultado, percebe-se que ainda é muito baixo o percentual de alunos que conseguem dominar a habilidade medida, apenas 24% deles. Isso indica a necessidade de os professores trabalharem mais fortemente essa habilidade com seus alunos.

De fato, pela nossa experiência como professor, temos percebido que o aprendizado da competência que envolve Probabilidade, apesar de parecer simples, não é assim visto pelos estudantes. Podemos achar que a interpretação dos problemas é o principal causador da dificuldade deles com relação a essa competência, mas pode-se perceber que mesmo questões com enunciados simples, como a mostrada anteriormente, são poucas vezes resolvidas da maneira correta. O que se pode perceber é que, na verdade, para um efetivo aprendizado de Probabilidade, falta a realização de experimentos em sala de aula e a contextualização dos problemas propostos, de modo que os alunos possam factualmente entender o porquê do estudo desta teoria. Se atividades destes tipos forem realizadas, com certeza haverá um estímulo em aprender por parte dos estudantes, o que infelizmente percebe-se que está em baixa atualmente quando se fala em Matemática.

Esta dissertação trata de um trabalho que caminha na direção dessa ideia. Vamos apresentar uma proposta de aulas diferente da tradicional para dar início às aulas de Probabilidade: o uso de uma atividade denominada “Jogo dos Discos”, que envolve, dentre outras coisas, experimentação, modelagem, gráficos e função quadrática. Esta atividade, que é facilmente aplicável pelo professor em sala de aula, poderá motivar e contribuir para o processo de ensino-aprendizagem do tema Probabilidade, assim como aconteceu nas turmas nas quais aplicamos este esquema de aulas (3 turmas de 3º ano de uma escola estadual). Esta motivação, como dito anteriormente, faz-se muito necessária, já que atualmente é percebido que muitos estudantes olham para a Matemática como sendo algo sem razão e sem significado para aprendê-la.

Na proposta de aulas, que é o objetivo deste trabalho, está contida também uma estratégia diferente das presentes nas típicas aulas expositivas de Matemática, em que o professor passa para a lousa aquilo que ele julga importante e o aluno, por sua vez, copia em seu caderno e tenta resolver alguns exercícios, em sua grande maioria, parecidos com aqueles que o professor já resolveu como exemplo. Neste tipo de ensino tradicional, os alunos passam a crer que aprender Matemática é o mesmo que decorar fórmulas e esquemas prontos de resoluções de exercícios, além de acharem que a Matemática é algo do qual não se duvida nem se questiona, mas deve ser acreditada sem se preocupar, ao menos, com o porquê é que tais fórmulas funcionam. Com isso, segundo D'Ambrosio (1989, p. 15):

> O aluno, acreditando e supervalorizando o poder da matemática formal perde qualquer autoconfiança em sua intuição matemática, perdendo, dia a dia, seu "bom-senso" matemático. Além de acreditarem que a solução de um problema encontrada matematicamente não estará, necessariamente, relacionada com a solução do mesmo problema numa situação real. [...] Falta aos alunos uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas, diferentes das propostas pelos professores.

Assim, na tentativa de fugir deste método tradicional e tentar estimular ainda mais os estudantes, utilizamos o "Jogo dos Discos" de um modo diferenciado: sem nunca ter falado diretamente do assunto Probabilidade, entregamos uma folha contendo todo o enunciado contextualizado sobre a atividade e, diferentemente do que acontece normalmente, deixamos que os próprios alunos pensassem em como resolvê-la. Isto serviria de estímulo à capacidade criadora do aluno, tornando o aprendizado mais prazeroso. É claro que os alunos, a princípio, ficaram sem saber o que fazer, já que não estavam acostumados com este tipo de ensino. Ficavam a todo tempo questionando como resolveriam tal atividade, mas tivemos que ser os mais motivadores possíveis ao dizer que eles teriam que pensar sozinhos em como resolver aquele problema.

De maneira resumida, a atividade trata-se de um jogo que tem as seguintes regras: em um plano quadriculado, um jogador lança aleatoriamente um disco de diâmetro *d*. Se o disco, depois de parar, não estiver interceptando nem tangenciando as linhas que delimitam o quadriculado, o jogador vence. Caso contrário, ele perde. Nosso intuito foi basicamente o de instigar os alunos a descobrirem por si sós qual a chance percentual (não utilizamos a palavra probabilidade) de o jogador vencer, conhecendo-se a medida do lado dos quadrados do quadriculado e o diâmetro do disco. Claro que, para a transmissão desta atividade, houve toda uma contextualização, envolvendo o grêmio estudantil e uma feira de ciências, que acontece todo ano na escola, mas isso será abordado melhor nos próximos capítulos.

Ao fornecer a folha com o problema e deixar com que os alunos pensem por si sós como resolvê-lo, estamos indo de acordo com a crítica que D'Ambrosio (1989, p. 16) faz ao sistema tradicional de ensino:

> Em nenhum momento no processo escolar, numa aula de matemática geram-se situações em que o aluno deva ser criativo, ou onde o aluno esteja motivado a

> solucionar um problema pela curiosidade criada pela situação em si ou pelo próprio desafio do problema. Na matemática escolar o aluno não vivencia situações de investigação, exploração e descobrimento. [...] Essas concepções terão que ser modificadas para que se possa ter uma renovação no ensino da matemática.

E de fato, com o tipo de aula que realizamos e que propomos que seja realizado por outros professores que também acreditam no ensino com uma perspectiva investigativa, estamos tentando criar esta renovação no ensino de Matemática.

Agora, com relação à esta dissertação, note que ela foi dividida em cinco capítulos. No primeiro deles, basicamente mostramos a importância da Probabilidade na Matemática e na sociedade, evidenciando que ela está presente, por exemplo, até nos valores das mensalidades dos planos de saúde, um pouco de sua história e, por fim, uma breve revisão dos conteúdos que ela envolve e que são normalmente transmitidos no Ensino Básico.

No segundo capítulo, apresentamos sucintamente como o ensino de Probabilidade tem sido tratado nas escolas atualmente, o que justifica a nossa proposta. Mostramos, inicialmente, que este assunto é tido como de grande importância nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e em outros documentos oficiais. Em seguida, exploramos a maneira como os livros didáticos tratam a Probabilidade e, por fim, como outros pesquisadores também tratam este ensino, analisando dissertações e artigos publicados em revista. É possível observar que já existem propostas que reafirmam que o uso de experimentos para o ensino de probabilidade é um bom caminho.

No terceiro capítulo, tratamos do problema do Jogo dos Discos em si, destacando como ele pode ser trabalhado em aula. Mostramos todo o planejamento feito para a aplicação dessa atividade nas três turmas do 3º ano, mencionando, por exemplo, como havíamos imaginado que seria essa aplicação e quais eram as nossas expectativas com relação à reação das classes e ao comprometimento e habilidades das turmas para solucionar o problema.

O quarto capítulo descreve como foi feita a aplicação da atividade e como as turmas reagiram perante ela. Mostramos quais foram as principais ideias que os grupos tiveram para resolver o problema e mencionamos alguns métodos surpreendentes pensados para chegar à solução. Houve até quem pensasse em resolver o problema usando programação, o que de fato ocorreu e é apresentado no quinto capítulo, juntamente com uma análise dos trabalhos que pedimos que fossem entregues com relação a esta atividade e dos resultados obtidos. Apresentamos também algumas fotos e digitalizações de parte dos trabalhos dos estudantes, como gráficos, tabelas e cálculos, fazendo uma análise do que foi produzido e incluindo algumas estatísticas.

Por fim, apresentamos a conclusão, observando que conseguimos alcançar nossos objetivos com a nossa proposta e mostrando o que este desafio trouxe de positivo para professor e alunos, além de fazer algumas sugestões que poderiam melhorar ainda mais a sequência de aulas programada.

Esperamos que esse trabalho possa servir como uma boa contribuição para nossos colegas professores, podendo acrescentar à vida profissional uma estratégia diferenciada de como iniciar suas aulas de Probabilidade. A elaboração desta pesquisa, com certeza, colaborou para o nosso amadurecimento como profissionais da educação Matemática.

CAPÍTULO 1

A PROBABILIDADE NA MATEMÁTICA CONTEMPORÂNEA

1.1 INTRODUÇÃO

O capítulo inicial desta dissertação apresenta a importância do tema Probabilidade na Matemática e na sociedade, uma breve descrição de sua gênese histórica e um resumo de seus fundamentos teóricos. Nosso principal objetivo é justificar o porquê de tratarmos do tema Probabilidade em nosso trabalho e apresentar, sucintamente, alguns tópicos relacionados a esta área da Matemática.

Na primeira seção, apresentamos algumas justificativas do porquê de a Probabilidade se mostrar relevante em nossa sociedade, citando várias áreas do conhecimento onde o seu uso se faz necessário, como a biologia, economia, dentre outros. Esperamos, assim, convencer o leitor de que este tema merece bastante atenção e que o seu ensino deve se dar de maneira eficaz.

Logo em seguida, a gênese histórica da Probabilidade é apresentada brevemente, a fim de mostrar como se deu a evolução deste conceito em nossa sociedade. Será possível observar os principais momentos de estudo do tema e os principais problemas que motivaram a construção desta área da Matemática.

Por fim, na última seção, tratamos dos conteúdos matemáticos de Probabilidade, destacando as definições e propriedades que mais interessam ao Ensino Básico. Esta seção tem como objetivo lembrar o leitor dos tópicos que são tratados no ensino e como isso é feito normalmente.

1.2 A IMPORTÂNCIA DA PROBABILIDADE NA MATEMÁTICA E NA SOCIEDADE

Segundo a Nova Enciclopédia Barsa (1998), o estudo da Probabilidade iniciou-se, principalmente, visando compreender quais eram as chances de vitória de certo jogador em jogos de azar. Contudo, com os progressos científicos dos séculos XIX e XX, surgiram analogias entre certos fenômenos biológicos, físicos e sociais e jogos de azar. A determinação do sexo de recém-nascidos, por exemplo, poderia ser vista seguindo o mesmo padrão do jogo de cara ou coroa. Assim, a Teoria da Probabilidade tornou-se fundamental para o estudo de diversas áreas.

Na Biologia, a Probabilidade se faz extremamente necessária para o estudo da genética, dando significado para as leis da hereditariedade. Ela nos permite calcular, por exemplo, quais são as chances de um casal com sangue tipo AB ter um filho com sangue tipo A, ou ainda quais são as chances de um casal ter três filhos homens em seguida.

O preço do petróleo pode ser alterado em função da probabilidade da ocorrência de algum conflito no Oriente Médio. Assim, quando se nota que uma guerra nestes países é mais ou menos provável, o preço do petróleo pode ficar maior ou menor, contagiando toda a economia do mundo.

Mas, além da Biologia e da Economia, a Probabilidade também é fundamental para o estudo de Física Quântica, Termodinâmica, Sociologia de populações e muitas outras áreas do conhecimento, sendo aplicada também, por exemplo, no cálculo de mensalidades de seguros em geral. Uma empresa seguradora pode ser comparada a um jogador que faz uma série de apostas na saúde e segurança de indivíduos ou propriedades. Assim, conhecendo o perfil de seus clientes, com base em registros passados, o segurador emprega a Teoria da Probabilidade para calcular quanto deve cobrar de mensalidade para que consiga arcar com as suas despesas e tenha chance de se manter no negócio com boas perspectivas de lucro.

Pode-se perceber, então, que a Probabilidade não está apenas envolvida com jogos de cartas e dados. Há, sim, uma grande possibilidade de aplicação desta teoria em diversas áreas, muitas das quais nem foram citadas aqui. Em suma, é razoável pensar que o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade tem causado bastante impacto na sociedade moderna. Assim, é de extrema importância que os cidadãos possam entender como estimativas e cálculos de probabilidade são feitos. Deste modo, podemos enxergar que existem boas justificativas para que a Probabilidade faça parte do ensino, dada a importância nas diversas áreas já mencionadas.

1.3 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA PROBABILIDADE NA MATEMÁTICA

Segundo Gadelha (2004), pode-se caracterizar 5 períodos no desenvolvimento da Teoria da Probabilidade: pré-história, origens, maturação da probabilidade clássica, escola de São Petersburgo e período moderno. Abordamos cada um desses períodos de maneira sucinta, de modo que o leitor possa ter uma noção de como a Teoria da Probabilidade evoluiu com o passar do tempo.

Considera-se pré-história o período que vai desde os tempos mais remotos até os trabalhos de Tartaglia, Galileu e principalmente Cardano. Há milhares de anos, jogos de azar que envolvem dados e moedas, por exemplo, já faziam parte de nossa sociedade e, mesmo que ainda sem muito estudo sobre a Teoria da Probabilidade, o conceito de aleatoriedade já vinha sendo construído. Apólices de seguros navais baseados em conceito de riscos também já eram feitas no século XIV na Itália e Holanda.

O principal documento que diz respeito à Probabilidade neste período é o tratado de Cardano (1501–1576) chamado *Liber de Ludo Aleae* (Livro de Jogos de Azar), no qual são tratadas questões interessantes da Probabilidade, principalmente as que envolvem dados e outros jogos de azar. Este parece ser o primeiro trabalho a desenvolver princípios estatísticos da Probabilidade. Nele, a ideia de probabilidade como sendo a razão entre o número de resultados favoráveis e o número total de resultados possíveis já está presente.

Tartaglia (1499–1557) também teve participação neste período, realizando alguns cálculos de probabilidade e combinatória em seu trabalho *Tratado geral sobre números e medidas*, publicado em 1556. Além disso, Galileu Galilei (1564–1652) havia percebido que erros eram inevitáveis em observações astronômicas e, assim, fez propostas de como levá-los em consideração nos resultados observados, tomando por base algum uso de probabilidade.

No entanto, a aplicação sistemática da análise matemática para solução de problemas de probabilidade, teve início somente em 1654 com os resultados obtidos pelos franceses Blaise Pascal e Pierre de Fermat, em resposta ao chamado problema dos pontos. Eles trocavam correspondências na tentativa de resolver esse problema e foram estas cartas as responsáveis pela fundação da ciência da Probabilidade. Este é o período que chamamos de “origens”.

Segundo Eves (2004), o problema dos pontos foi introduzido por Pacioli e foi também discutido por Cardano e Tartaglia. Porém, só se verificou avanço na sua solução quando Chevalier de Méré, um experiente jogador, o propôs a Pascal, que interessou-se pelo problema e o levou ao conhecimento de Fermat. O problema consistia do seguinte: “Determine a divisão do valor das apostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecido quantos pontos cada jogador possui e quantos pontos são necessários para que alguém vença o jogo.” Para este tipo de jogo, no qual existe uma meta de quantos pontos devem ser alcançados por um jogador para que ele vença, é mais razoável que as apostas sejam divididas em função das chances de cada um vencê-lo considerando quantos pontos faltam pra o final do jogo, e não em função dos pontos que já foram obtidos.

Fermat discutiu inicialmente um caso particular, em que o jogador A precisava de 2 pontos para ganhar e o jogador B de 3. Para resolver esse caso, primeiramente constatou que mais $(2+3)-1=4$ partidas, no máximo, já decidiriam o jogo. Assim, chamando de *a* uma partida ganha por A e de *b* uma partida ganha por B, anotou as $2^4=16$ possíveis sequências de vitórias de partidas:

aaaa	baaa	baab	babb
aaab	aabb	baba	bbab
aaba	abab	bbaa	bbba
abaa	abba	abbb	bbbb

Destes arranjos, os 11 casos em que *a* aparece duas ou mais vezes são favoráveis ao jogador A e os 5 casos em que *b* aparece três ou mais vezes são favoráveis ao jogador B. Assim, concluiu que as apostas deveriam ser divididas na razão 11:5, já que a probabilidade de o jogador A vencer é 11/16 e a de o jogador B vencer é 5/16. Para o caso geral em que A precisaria de x pontos para vencer e B precisaria de *y*, anotar-se-ia os 2^{x+y-1} arranjos possíveis e contar-se-ia em quantos deles aparecem *x* ou mais letras *a* e em quantos deles aparecem y ou mais letras *b*, chamando esses números de α e β respectivamente. Assim, as apostas deveriam ser divididas na razão $\alpha:\beta$.

Pascal resolveu de outra maneira, utilizando-se de seu triângulo aritmético (o famoso triângulo de Pascal), onde a linha *n*, coluna *r*, fornece a combinação, $C_{n,r}$, de *n* objetos tomados *r* a *r*. Ele também constatou que mais 4 jogos definiam a partida, só que seguiu o raciocínio usando que $C_{n,r}$ significaria a quantidade de maneiras que *r* letras *a* poderiam ocupar as *n* posições na sequência de vitórias de partidas. Assim, concluiu que havia

$C_{4,4}+C_{4,3}+C_{4,2}=11$ maneiras de A vencer e $C_{4,1}+C_{4,0}=5$ maneiras de B vencer. Assim, as apostas deveriam ser repartidas na razão 11:5, a mesma encontrada por Fermat. Generalizando, se A precisasse de x pontos para vencer e B de y, dever-se-ia tomar a $(x+y)$-ésima linha do triângulo, calcular a soma α dos x primeiros números, a soma β dos demais números, e realizar a divisão das apostas na razão $\alpha{:}\beta$.

Note que as respostas de Fermat e Pascal para este problema são as mesmas. Eles também refletiram sobre outros problemas relacionados ao problema dos pontos ao longo de suas históricas correspondências. Foi este trabalho de Pascal e Fermat que lançou as bases da teoria matemática da Probabilidade. Em 1657, embasado nas correspondências de Pascal e Fermat, Christiaan Huygens escreveu o primeiro tratado formal sobre o assunto, que serviu como livro de introdução à Teoria da Probabilidade até o século XVIII.

Este livro continha a melhor exposição sobre Probabilidade até o aparecimento, em 1713, da obra *Ars Conjectandi*, de Jacob Bernoulli, que continha uma reimpressão da obra de Huygens complementada com vários comentários e técnicas de análise combinatória, além de proposições de aplicações em problemas cívicos, morais e econômicos. Esta publicação faz parte do terceiro período que mencionamos no início (maturação da probabilidade clássica) e já continha o enunciado da Lei dos Grandes Números, o que marcou o início de uma nova era na Teoria da Probabilidade.

Neste período, outros grandes nomes também estiveram presentes. Euler (1707–1783) contribuiu na aplicação de probabilidade na análise de loterias, demografia e seguros e Conde de Buffon (1707–1788) aplicou a probabilidade às ciências naturais. O famoso problema da agulha é de sua autoria e possui uma solução muito bonita, abordada por Tunala (1992) na RPM nº 20. Tal problema consiste em determinar a probabilidade de uma agulha de comprimento L cortar um feixe de retas paralelas distantes entre si de $a > L$, quando lançada aleatoriamente. Também é de sua autoria o problema do Jogo dos Discos, que é o problema central desta dissertação.

Ainda neste período, estão presentes também as contribuições de Laplace (1749–1827), que escreveu, em 1812, o seu grande tratado chamado *Théorie Analytique des Probabilités*. Este foi o livro de maior importância sobre o tema publicado até então. Os fundamentos da Teoria de Probabilidade foram colocados por Laplace de maneira (hoje conhecida como clássica) que se manteve praticamente inalterada até o início do século 20. Neste trabalho, Laplace fez novas contribuições a esta teoria além de reunir, sistematizar e ampliar os resultados desenvolvidos por seus predecessores (GADELHA, 2004, p. 9).

No quarto período considerado, o russo Pafnuty L'vovich Chebyshev (1821–1884) funda a Escola de São Petersburgo, que produziu grandes matemáticos russos que contribuíram fundamentalmente para a Teoria da Probabilidade. Além disso, neste período iniciam-se algumas aplicações de Probabilidade em Física, com trabalhos de Boltzmann, no estudo da Termodinâmica, e de Gibbs, no desenvolvimento da Física Estatística.

Por fim, no último período considerado, com o uso da Probabilidade na Física no final do século XIX, ficaram evidentes algumas limitações dos fundamentos matemáticos na Teoria da Probabilidade. Percebeu-se a necessidade de estabelecer uma fundamentação mais consistente e um significado mais preciso dos conceitos usados. Isso foi enfatizado através de paradoxos, sendo o mais famoso o chamado "Paradoxo de Bertrand", que mostra que a probabilidade de se escolher aleatoriamente uma corda com comprimento maior que $\sqrt{3}$ em um círculo de raio unitário pode ter várias respostas, uma situação um tanto quanto estranha na Matemática que denota falta de consistência nos conceitos usados ou deficiência na especificação do problema. Tal problema é tratado por Wagner (1997) na RPM n° 34.

Assim, após David Hilbert, em 1918, ter dado a ideia aos matemáticos da época de construir toda a Matemática sobre sistemas axiomáticos, Kolmogorov (1903–1968), enfim, realizou este feito para a Teoria da Probabilidade, marcando o início do desenvolvimento da Teoria Moderna de Probabilidade.

1.4 O CAMPO CONCEITUAL DA TEORIA DA PROBABILIDADE UTILIZADA NO ENSINO BÁSICO

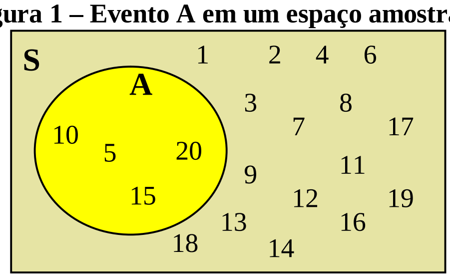
Apresentamos nesta seção algumas definições e propriedades da Teoria da Probabilidade, particularmente aquelas relacionadas com o ensino básico. Esta seção tem como objetivo, portanto, rever alguns conceitos essenciais que se fazem necessários para a compreensão do tema Probabilidade. A maneira como transpomos os conteúdos nesta seção não é a melhor de ser feita no ensino básico, onde atividades e problemas são essenciais. Apresentamos apenas um resumo para o leitor relembrar, se necessário, alguns tópicos relacionados. Estes assuntos estão presentes em diversos livros didáticos, como, por exemplo, em Morgado et al. (1991).

Primeiramente, devemos compreender que na natureza e na vida cotidiana, existem dois tipos de experimentos: os determinísticos e os aleatórios. Um experimento determinístico é aquele que invariavelmente fornece o mesmo resultado, se repetido sob as mesmas condições. O tempo de queda de um objeto quando solto de uma altura de 2 metros no vácuo em um mesmo local sempre será o mesmo e, portanto, lançar este objeto nestas condições é um experimento determinístico. Um experimento aleatório, por outro lado, é aquele que, mesmo realizado sob as mesmas condições, apresentam variações nos resultados de diferentes observações. Se lançarmos um dado e observarmos a face voltada para cima, os resultados não serão sempre os mesmos, sendo, portanto, um experimento aleatório. A Probabilidade trata desse último tipo de experimento. Já que não sabemos que resultado pode ocorrer em experimentos aleatórios, podemos ao menos saber com que frequência certo resultado acontece.

Para entendermos melhor a Teoria da Probabilidade, precisamos antes conhecer alguns termos e suas definições:

- Espaço Amostral (S ou Ω): é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Por exemplo, ao lançarmos uma moeda e observarmos a face voltada para cima, podemos ter cara ou coroa. Logo, para este experimento aleatório, temos $S = \Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$;
- Evento (A, B, C, ...): é qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Se uma caixa contém 20 bolas, de mesmo "peso" e tamanho, numeradas de 1 a 20 e uma pessoa, com os olhos vendados, retira uma bola dessa caixa, temos $S = \{1, 2, 3, ..., 20\}$. Um evento deste experimento (chamemos de A) pode ser, por exemplo, a retirada de um número múltiplo de 5 desta urna, ou seja, $A = \{5, 10, 15, 20\}$. Note que A é um subconjunto de S;

Figura 1 – Evento A em um espaço amostral S

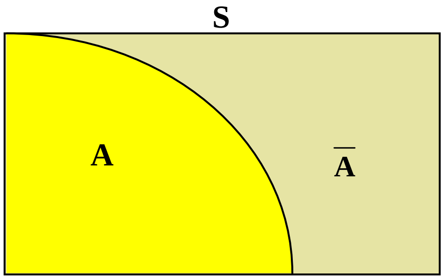


Fonte: Elaborada pelo autor.

- Um evento A pode ainda ser chamado de evento certo, quando $A = S$, de evento impossível, quando $A = \varnothing$, e de evento unitário, quando possui um único elemento;

- Chamamos de evento complementar de A em relação ao espaço amostral S (indica-se por A^c ou $\overline{A}$) o evento que ocorre sempre que A não ocorre. Note, com auxílio da Figura 2, que $A \cup \overline{A} = S$ e que $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Figura 2 – Eventos complementares em um espaço amostral S



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos agora à definição de probabilidade que julgamos mais completa: Seja $S = \Omega = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$ o espaço amostral finito de um experimento aleatório. Para cada $i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$, consideremos o evento elementar $E_i = \{a_i\}$. Associamos a cada um destes eventos um número real, P_i, chamado de probabilidade de ocorrência do evento E_i, tal que:

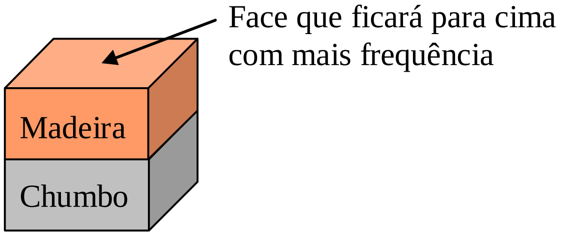
$$\begin{cases} 0 \leq P_i \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, ..., k\} \\ P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_k = 1 \end{cases}$$

Essa associação é feita de modo que P_i seja suficientemente próximo da frequência relativa do evento E_i quando o experimento é repetido um grande número de vezes (IEZZI et al., 2010).

A definição acima é o que podemos chamar de definição frequentista da probabilidade, onde a frequência de ocorrência de um evento é o que define a probabilidade de ele ocorrer, se o número de realizações do experimento for grande o suficiente.

Em alguns casos, o experimento possui um espaço amostral chamado equiprovável, que é quando todos os seus eventos unitários têm a mesma chance de ocorrência. É importante notar que isso nem sempre ocorre. Imagine um dado, de formato cúbico, formado por dois paralelepípedos colados, um de madeira e outro de chumbo. Neste caso, como o chumbo é mais pesado, é mais provável que a face formada somente por madeira fique para cima com mais frequência nos lançamentos desse dado, o que torna o espaço amostral desse experimento não equiprovável.

Figura 3 – Dado com espaço amostral não equiprovável



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando o espaço amostral for equiprovável, temos então que $P_1 = P_2 = P_3 = ... = P_k$ e, do fato de termos, pela definição, $P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_k = 1$, podemos concluir que $P_i = \frac{1}{k}$, $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., k\}$.

Consideremos agora o evento $E = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ do espaço amostral equiprovável, formado por *r* elementos ($r \leq k$). Temos que a probabilidade deste evento é:

$$P(E) = P_1 + P_2 + ... + P_r = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + ... + \frac{1}{k}}_{\text{r parcelas}} = \frac{r}{k}$$

Assim, chamando de $n(E)$ o número de elementos do Evento E e de $n(S)$ o número de elementos do espaço amostral, tem-se que:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Desse modo, é comum dizermos que a probabilidade de ocorrer um determinado evento em um experimento com espaço amostral equiprovável é dada pelo quociente entre o número de resultados favoráveis e o número total de resultados possíveis. Alguns livros definem a probabilidade partindo diretamente para esta equação. É o que chamamos de definição clássica, ou laplaciana, da probabilidade. Consideramos que o ideal seja seguir o caminho que percorremos para chegar a esta última equação, começando da noção frequentista e depois partindo para esta última definição. É importante que um aluno possa entender que nem todos os experimentos têm espaço amostral equiprovável e que, nestes casos, não se pode calcular probabilidades através desta equação.

Mas é fácil verificar, pela equação anterior, que a probabilidade de um evento certo é igual a 1, a de um evento impossível é igual a 0 e a de qualquer evento de um espaço amostral é sempre um número compreendido entre 0 e 1.

Além disso, note que, como $A \cup \overline{A} = S$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$, então para todo evento A de S temos:

$$n(A) + n(\overline{A}) = n(S) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(\overline{A})}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow \boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, é fácil verificar que se tivermos vários eventos, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, mutuamente exclusivos (a ocorrência de um implica necessariamente na não ocorrência dos outros), então:

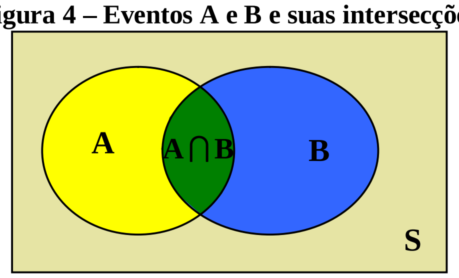
$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n) = 1$$

No Ensino Básico, normalmente após a transmissão destes conceitos, passa-se a abordagem de outros tópicos, como a probabilidade da união de dois eventos, a probabilidade condicional, a probabilidade de eventos independentes e a lei binomial de probabilidade. Analisaremos, sucintamente, cada um desses tópicos, citando também alguns conceitos da probabilidade geométrica.

1.4.1 Probabilidade da União de Dois Eventos

Se A e B são dois eventos de um espaço amostral S, finito e não vazio, pela teoria dos conjuntos temos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Assim:

Figura 4 – Eventos A e B e suas intersecções



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

A relação deduzida acima nos permite calcular, por exemplo, qual a probabilidade de se retirar ao acaso, de uma urna contendo 20 bolas numeradas de 1 a 20, uma bola com número múltiplo de 2 ou de 3. Chamando de evento A a retirada de uma bola com número múltiplo de 2 e de B a retirada de uma bola com número múltiplo de 3, estamos querendo calcular a probabilidade de $A \cup B$. Assim:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\} \rightarrow n(A) = 10 \\ B = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\} \rightarrow n(B) = 6 \\ A \cap B = \{6,\ 12,\ 18\} \rightarrow n(A \cap B) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

Note que este tipo de problema poderia também ser resolvido sem a utilização da relação deduzida. Bastaria contar, dentre os números de 1 a 20 quantos são múltiplos de 2 ou de 3, sem repetir a contagem dos que são múltiplos de 2 e de 3 simultaneamente e realizar o cálculo da probabilidade normalmente. Porém, há casos em que a utilização desta relação ajuda bastante (espaços amostrais com número de elementos muito grande, por exemplo) e, por isso, ela é abordada no ensino.

1.4.2 Probabilidade Condicional

Imagine que 500 estudantes de um colégio responderam a uma pergunta sobre qual a sua área de conhecimento preferida, entre Exatas, Humanidades e Biológicas e que as respostas foram as seguintes:

Tabela 2 – Áreas de conhecimento preferidas pelos alunos pesquisados

ÁREA	SEXO		
	Masculino (M)	Feminino (F)	Total
Exatas (E)	120	80	200
Humanidades (H)	45	80	125
Biológicas (B)	100	75	175
Total	265	235	500

Fonte: Elaborada pelo autor.

Seleciona-se um estudante ao acaso, verifica-se que ele é do sexo masculino, e deseja-se saber qual a probabilidade de ele ter preferência pela área de exatas. Para resolver este problema, temos que realizar o quociente entre o total de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis. Todavia, pelo fato de já se saber de antemão que o estudante é do sexo masculino, reduz-se os casos possíveis e também os favoráveis. Ao invés de se ter os 500 estudantes no espaço amostral, tem-se agora apenas 265, e ao invés de se considerar 200 estudantes com preferência em Exatas, considera-se apenas 120. Assim, o cálculo desta probabilidade pode ser feito como $P = 120/265 = 24/53$.

Esta situação sugere a seguinte definição: se A e B são dois eventos de um espaço amostral S, finito e não vazio, então a probabilidade condicional do evento A, sabendo que já ocorreu B (indicada por $P(A \mid B)$) é dada por:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

ou

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \Rightarrow \boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

1.4.3 Probabilidade de Eventos Independentes

Note que, da última equação, podemos concluir que

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

Dizemos que dois eventos A e B são independentes quando a ocorrência de um deles não influi na ocorrência do outro. Neste caso temos que $P(A \mid B) = P(A)$ e $P(B \mid A) = P(B)$. Assim, se dois eventos são independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Portanto, para se calcular a probabilidade de, jogando uma moeda e um dado honestos, obter-se face com número 3 no dado e cara na moeda, basta multiplicar a probabilidade de cada um destes eventos, já que são independentes, obtendo $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

1.4.4 Lei Binomial de Probabilidade

Considere um experimento que é realizado várias vezes, sempre nas mesmas condições e de modo que o resultado de cada um seja independente dos demais. Suponha que o resultado do experimento pode ser somente o evento A, com probabilidade p, ou o seu complementar $\overline{A}$, com probabilidade $1-p$. Realizando-se a experiência descrita exatamente *n* vezes, pode-se calcular qual é a probabilidade de ocorrência do evento A exatamente *k* vezes, com $k \leq n$. Para isso, basta seguir o seguinte raciocínio:

a) Como o evento A ocorre exatamente *k* vezes, então o evento $\overline{A}$ ocorre exatamente $n-k$ vezes;

b) Como o experimento é realizado de tal forma que cada resultado seja independente de outro, então a probabilidade de ocorrer *k* vezes o evento A e, depois, $n-k$ vezes o evento $\overline{A}$, nessa ordem, é $\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{\text{k fatores}} \cdot \underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p)}_{(n-k)\text{ fatores}} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

c) O que se quer saber não é a probabilidade desta ocorrência na ordem considerada no item anterior. A ocorrência das *k* vezes do evento A pode ter qualquer ordem dentre as *n* possíveis e a quantidade de ordenações possíveis é a combinação de *n* tomados *k* a *k*, $C_{n,k}$ (escolha de *k* posições na sequência de resultados para ocorrer o evento A dentre as *n* posições possíveis).

d) Existem, assim, $C_{n,k}$ sequências de resultados diferentes, todos com a mesma probabilidade $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Assim, a probabilidade procurada é

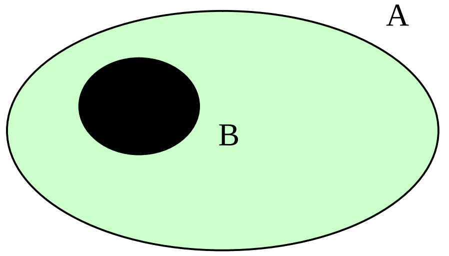
$$\boxed{P = C_{n,k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

A partir deste conceito, pode-se, por exemplo, calcular a probabilidade de observar-se exatamente duas faces 3 voltadas para cima quando se lança um dado honesto por 10 vezes. A probabilidade seria $P = C_{10,2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-2} = \frac{45 \cdot 5^8}{6^{10}} \cong 0,29$

1.4.5 Probabilidade Geométrica

Segundo o artigo Probabilidade Geométrica, de Wagner (1997), se uma região B do plano está contida em uma região A, a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença também a B será:

Figura 5 – Região B contida em uma região A

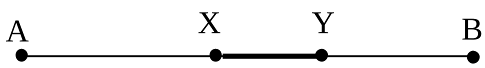


$$\boxed{P = \frac{\text{área de B}}{\text{área de A}}}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

De maneira análoga, se um segmento AB contém um segmento XY, então a probabilidade de selecionar um ponto de AB e este também pertencer a XY é:

Figura 6 – Segmento XY contido em um segmento AB



$$\boxed{P = \frac{\text{comprimento de XY}}{\text{comprimento de AB}}}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste mesmo artigo, há um exemplo muito interessante no qual o uso da probabilidade geométrica se faz necessário. Tal problema é conhecido como o Problema do Macarrão e tem como objetivo encontrar a probabilidade de ser possível formar um triângulo com três partes de um espaguete quando ele é dividido ao acaso.

A Probabilidade Geométrica é poucas vezes vista no Ensino Básico. No entanto, entendemos que ela pode ser utilizada, muitas vezes, para introduzir o conceito de probabilidade, já que ela possibilita a realização de experimentos diferentes dos tradicionais com baralhos, moedas e urnas. Tais experimentos podem ser realizados um grande número de vezes e o percentual de ocorrência de determinado evento pode ser aproximado como a probabilidade de ele ocorrer, da maneira como definimos probabilidade de um evento no início desta seção. Esta dissertação trata de um trabalho como este, envolvendo o chamado Jogo dos Discos.

Neste capítulo inicial, procuramos fundamentar a escolha do tema, apresentando aspectos de sua importância atual, sua trajetória histórica e também parte do conteúdo formal. No próximo capítulo, faremos uma breve reflexão sobre a situação do ensino de Probabilidade no ensino médio no Brasil, analisando documentos oficiais, livros didáticos e pesquisas especializadas da área da educação.

CAPÍTULO 2

O ENSINO DA PROBABILIDADE

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, tratamos brevemente de como se encontra o ensino da Probabilidade nas escolas do Brasil nos dias atuais. Para isso, analisamos, primeiramente, alguns documentos oficiais que servem de base para a concepção dos currículos escolares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), de 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), de 2000, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+), de 2007, e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, de 2008.

Em seguida, fazemos a análise de alguns livros didáticos recentes, utilizados no Ensino Médio, para verificar as variações nas abordagens adotadas por cada autor para o ensino da Probabilidade. Esta análise é feita segundo alguns critérios para diversos tópicos que julgamos fundamentais ao ensino de Probabilidade. Pudemos observar, por exemplo, que nenhum dos livros analisados sugere explicitamente a realização de um experimento concreto por parte dos alunos, diferentemente de nossa proposta e do que sugere alguns documentos oficiais.

Por fim, na última seção, apresentamos a análise de alguns trabalhos atuais, como artigos e dissertações, desenvolvidos por outros pesquisadores para o ensino de Probabilidade. Através disso, pudemos verificar que as observações feitas por eles vão de acordo com o nosso trabalho, no que diz respeito a apresentar uma atividade de realização concreta pelos alunos.

Com isso, pretendemos mostrar sucintamente como o ensino de Probabilidade tem sido tratado e justificar a utilização de nossa proposta.

2.2 A PROBABILIDADE NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Apesar de nosso trabalho ter sido aplicado no Ensino Médio, analisamos primeiramente os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, de 1998, para o terceiro e quarto ciclos (de 5ª a 8ª série, ou 6º ao 9º ano), a fim de conhecer os possíveis conhecimentos prévios que os alunos alvo deste trabalho poderiam ter. Neste documento, é sugerido que o tema Probabilidade, juntamente com Estatística, faça parte do Ensino Fundamental. Menciona, por exemplo, referindo-se ao terceiro ciclo, que (BRASIL, 1998, p. 70):

> Neste ciclo, também amplia-se a exploração das possibilidades de quantificar o incerto. Com as noções elementares de probabilidade os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (moedas, dados, cartas). Assim, poderão ir se familiarizando com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana.

O ensino da Probabilidade fica situado no bloco de conteúdos denominado "Tratamento da Informação", onde se propõe que os alunos aprendam, durante este ciclo, a coletar e organizar dados, apresentar estes dados em tabelas e gráficos, a fazer contagens combinatórias e, por fim, a construir o espaço amostral de um experimento e indicar a possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão. Todavia, os experimentos mencionados restringem-se ainda a situações bastante simples, como lançamento de dados e moedas.

Para o quarto ciclo, também é proposto o estudo de Probabilidade de maneira parecida com a do terceiro ciclo, adicionando algumas noções. Sugere, por exemplo, a elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades. Todo esse tratamento do tema é sugerido ser realizado de maneira ainda informal para estes ciclos.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), de 2000, é também dado um enfoque para o ensino de Probabilidade (e Estatística), indicando-o como uma competência na qual deve ser desenvolvida a compreensão do caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e a utilização de instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades. Contudo, não há um grande detalhamento sobre que tópicos deste tema devem ser tratados. Segundo esta publicação (BRASIL, 2000, p. 44):

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações

> da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

Evidenciando que as técnicas e raciocínios probabilísticos são instrumentos para outras ciências, o PCNEM também estabelece que o aprendizado de Probabilidade se faz necessário para o ensino de Biologia, por exemplo. Segundo o documento (BRASIL, 2000, p. 19), "são necessárias noções de probabilidade, análise combinatória e bioquímica para dar significado às leis da hereditariedade, o que demanda o estabelecimento de relações de conceitos aprendidos em outras disciplinas."

Há também um documento complementar ao PCNEM, chamado PCN+ (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) que também nos serviu como material de análise. No que se refere à Probabilidade, diz que (BRASIL, 2007, p. 126):

> A Estatística e a Probabilidade devem ser vistas, então, como um conjunto de idéias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. Devem ser vistas também como formas de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente.

Além disso, esse documento sugere que o ensino de Probabilidade seja feito no 3º ano do Ensino Médio, como um dos últimos temas, enquanto a estatística e a contagem seriam oferecidos no 2º ano.

Por fim, fazemos uma breve análise sobre um último documento oficial. Em 2008, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo criou a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, sob justificativa de que a autonomia que a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) deu às escolas para que definissem seus próprios projetos pedagógicos, apesar de importante, mostrou-se ineficiente. Neste documento, a Matemática é tida como uma área específica, diferentemente dos PCN, onde a Matemática encontra-se inserida na grande área Ciências Naturais e Matemática. Nessa proposta, são montados quadros contendo os conteúdos da Matemática que devem ser ensinados, organizados por bimestre e por série. Pode-se ver que o ensino da Probabilidade é colocado na 6ª série, com alguns problemas, na 8ª série, de maneira apenas introdutória, e no 2º ano do Ensino Médio, de modo mais completo. Neste documento, diferentemente dos citados anteriormente, são mencionados tópicos que especificam mais o que se pede no ensino desta teoria, que pode ser muito amplo. Para o 2º ano, estão previstos além do cálculo simples de probabilidade de um evento, a probabilidade da reunião e/ou da intersecção de eventos, a probabilidade condicional e a distribuição binomial de probabilidades.

Pode-se notar, então, que os documentos analisados evidenciam a importância do ensino de Probabilidade, desde o ensino fundamental, mostrando que outras áreas do conhecimento podem utilizar esta teoria. Além disso, pode-se notar que apenas a Proposta Curricular do Estado de São Paulo especifica melhor que tópicos do ensino de Probabilidade devem ser abordados.

Na próxima seção, fazemos a análise de alguns livros didáticos, a fim de verificar as diferentes abordagens que os autores tiveram com relação ao tema Probabilidade.

2.3 A PROBABILIDADE NOS LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção, realizamos uma análise de 5 livros didáticos, com o intuito de verificar como é tratado o desenvolvimento do conceito de probabilidade neste meio e fazer uma comparação das abordagens. Na tabela seguinte, apresentamos as informações bibliográficas dos livros selecionados para esta análise, cada um identificado com um número romano diferente, que serão utilizados no decorrer desta seção. Note que escolhemos livros recentes, a fim de obter um panorama melhor sobre o ensino na atualidade.

Tabela 3 – Lista dos livros didáticos analisados

Nº do livro	Autor(es)	Obra	Editora – Ano
I	Walter FACCHINI	Matemática para a escola de hoje, vol. único	FTD – 2006 – SP
II	Gelson IEZZI et al.	Matemática: ciência e aplicações, vol. 2	Saraiva – 2010 – SP
III	Luiz Roberto DANTE	Matemática: contexto e aplicações, vol. 2	Ática – 2010 – SP
IV	José Ruy GIOVANNI, José Roberto BONJORNO	Matemática completa, vol. 2	FTD – 2005 – SP
V	Joamir Roberto de SOUZA	Novo olhar matemática, vol. 2	FTD – 2010 – SP

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando por base o campo conceitual da Probabilidade, resumidamente expresso na seção 1.4, estabelecemos um conjunto de noções e conteúdos, apresentados na tabela a seguir, que servirão de guia para nossa análise dos livros didáticos mencionados. Muitos outros conteúdos ou noções poderiam ser analisados, porém optamos pelos 12 seguintes:

Tabela 4 – Noções e conteúdos analisados nos livros didáticos

Noção ou Conteúdo	Descrição
1	Conceito de Experimentos Determinísticos
2	Conceito de Experimentos Aleatórios, Espaço Amostral e Eventos
3	Tipos de Eventos: certo, impossível, unitário, complementar
4	Definição ou noção frequentista da probabilidade
5	Definição clássica da probabilidade
6	Tipos de espaço amostral: equiprováveis e não equiprováveis
7	Probabilidade do evento complementar
8	Probabilidade da união de dois eventos
9	Probabilidade Condicional e de Eventos Independentes
10	Lei Binomial da Probabilidade
11	Probabilidade Geométrica
12	Noções da História da Teoria da Probabilidade.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para cada livro didático, fazemos uma análise de como as noções ou conteúdos expressos na Tabela 4 são tratados. Estabelecemos alguns conceitos (A, B, C, D, E e F) para classificar cada noção ou conteúdo em nossa análise de cada livro. Na tabela a seguir, mostramos o significado de cada conceito. Os conceitos A, B e C mostram o tipo de abordagem que é dada no livro para que se tenha a definição ou noção do conteúdo a que se refere, e sempre virão acompanhados por D ou E, indicando se o livro possui ou não atividades, problemas ou exercícios que complementam o que foi tratado:

Tabela 5 – Conceitos para as noções ou conteúdos abordados nos livros didáticos

Conceito	Descrição
A	Inicia a abordagem da noção ou do conteúdo a partir de problemas para depois formalizar ou definir.
B	Inicia a abordagem da noção ou do conteúdo com sua definição para depois exemplificar como utilizá-la.
C	Apresenta apenas a noção ou conteúdo sem um exemplo sequer.
D	Sugere exercícios, problemas ou atividades para complementar a noção ou conteúdo estudado.
E	Não fornece atividades, exercícios ou problemas para complementar a noção ou conteúdo estudado.
F	Não aborda a noção ou conteúdo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, segue uma tabela contendo todas as análises das noções ou conteúdos mencionados na Tabela 4, segundo os conceitos da Tabela 5, para os livros da Tabela 3. Cada linha da Tabela 6 refere-se a informações de um livro diferente e cada coluna se refere a um conteúdo ou noção diferente, tudo em conformidade com a numeração adotada nas tabelas anteriores. Cada célula a partir da segunda linha e segunda coluna conterá o conceito que observamos do livro mencionado na primeira célula da linha, em relação ao conteúdo ou noção expresso na primeira célula da coluna.

Tabela 6 – Conceitos dados aos livros didáticos analisados para cada noção ou conteúdo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
I	F	A, D	A, D	F	A, D	C*, E	B, D	B, D	B, D	F	F**	C, E
II	F	A, D	A, D	B, E	B, D	A*, E	B, D	B, D	A, D	A, D	F**	C, E
III	F	B, D	A, D	F***	B, D	B*, E	A, D	B, D	A, D	A, D	F**	C, E
IV	A, E	B, D	A, D	F	A, D	A, D	A, D	A, D	A, D	F	F**	F
V	F	A, D	A, D	A, D	A, D	A*, E	A, D	A, D	A, D	A, D	F**	C, E

Fonte: Elaborada pelo autor.

* O livro define espaço amostral equiprovável, porém não sugere atividade que envolva espaços amostrais não equiprováveis.

** Há exercício em que o uso desta noção é necessário. Todavia, ela não é tratada no livro.

*** Apesar de não realizar a noção frequentista da probabilidade, o autor deixa claro, por exemplo, que apesar de a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda ser 50%, isso não significa que se jogarmos duas vezes a mesma moeda sairá cara em uma jogada e coroa na outra. Isso significaria que após um grande número de jogadas, em aproximadamente 50% delas sairia cara. O autor sugere a realização deste experimento para comprovação.

A Tabela 6 possui muitas informações e, através delas, podemos tirar diversas conclusões e generalizar ou não algum tipo de abordagem dos conteúdos. Podemos destacar o seguinte:

a) Em apenas um dos livros é abordado o conceito de experimentos determinísticos. Nos demais livros, parte-se diretamente para a definição de experimento aleatório. É muito importante que essa definição seja feita, porém achamos que é também necessário lembrar que há fenômenos não aleatórios na natureza, como a velocidade com que uma bola chega ao chão quando é lançada de uma determinada altura em um mesmo local e iguais condições;
b) Todos abordam o espaço amostral, eventos e tipos de eventos de um experimento aleatório, sendo a maioria a partir de exemplos para depois definir. Além disso, possuem exercícios e problemas de fixação destes conceitos logo em seguida;
c) A visão frequentista da Probabilidade não é muito mencionada. No livro II isso é feito bem rapidamente, sem exercícios para aplicação do que foi dito e no livro III, conforme expresso sob a tabela, o autor toca no assunto, mas apenas como uma observação, com sugestão de realização de um experimento. O único livro onde essa visão é trabalhada de fato é o V, que apresenta uma seção própria onde tenta vincular a Probabilidade a alguns dados estatísticos tirados da mídia;
d) A visão clássica da Probabilidade é abordada em todos os livros como era de se esperar, normalmente tomando-se primeiro um exemplo de fácil resolução para depois dar a definição de probabilidade. Porém, isto não foi regra e houve livros em que primeiro dava-se a definição para depois dar exemplos;
e) Em apenas um dos livros o espaço amostral não equiprovável foi abordado de maneira explícita, sendo destinado uma seção a este conceito. Nos demais, apenas define-se o que é um espaço amostral equiprovável e coloca exercícios apenas com este tipo de experimento;
f) A probabilidade de evento complementar, da união de dois eventos, condicional e de eventos independentes foi tratada em todos os livros sendo, na maioria das vezes, com fórmulas definidas depois de um exercício resolvido, o que facilita a compreensão das demonstrações;

g) Em apenas dois livros a Lei Binomial da Probabilidade não foi tratada. Em um deles, isso provavelmente aconteceu por se tratar de um livro de volume único para todo o conteúdo do Ensino Médio, onde normalmente muitos assuntos são resumidos para economia de custo;
h) A probabilidade geométrica não foi tratada em nenhum deles, apesar de conterem exercícios onde esta técnica é necessária. Em nosso trabalho, usamos o conceito de probabilidade geométrica na conclusão do experimento proposto. Julgamos que isso pode ser muito útil para o aprendizado;
i) Em quatro dos cinco livros é mencionado um pouco sobre a história da teoria da Probabilidade;
j) Além disso, pode-se notar também que há duas principais técnicas de ensino adotadas: definição – exemplo – exercícios ou exemplo – definição – exercícios. As duas estão presentes quase em iguais proporções nos conteúdos ou noções analisados.

Analisando a Tabela 6, muitas conclusões podem ser tiradas, mas ainda há informações que são perdidas se apenas ela for tomada por base. Por exemplo, é interessante notar que em todos os livros analisados o ensino de Probabilidade está presente em capítulo imediatamente posterior ao de Análise Combinatória (ou, em alguns casos, ao de Binômio de Newton que vem logo após Análise Combinatória). É importante observar que é possível que haja o estudo de Probabilidade sem a utilização de cálculos combinatórios, apesar da limitação quanto aos problemas sugeridos. Também é possível observar que nos livros I, III e V, o estudo de Estatística também é trabalhado, sendo que apenas no V isto é feito antes do ensino de Probabilidade.

Além disso, algumas aplicações interessantes são apresentadas em alguns casos. O livro III, por exemplo, apresenta aplicações da Probabilidade à genética, dedicando uma seção inteira para isso e apresentando exemplos e exercícios de como utilizar esse conceito na Biologia. Contudo, com relação a ter um olhar diferenciado da Probabilidade, merece destaque o livro V. Ele parece um pouco desorganizado com relação aos outros livros, porém apresenta uma infinidade de exercícios contextualizados, resolvidos ou propostos, com aplicações diversas da Probabilidade. Neste livro, exercícios envolvendo jogos de dados, moedas e retiradas de bolas de uma urna estão menos presentes. Na maioria dos livros, há exercícios muito interessantes de serem resolvidos, mas neste há alguns que consideramos diferenciados.

No entanto, uma coisa se destaca em todos os livros. Com exceção de uma pequena observação presente no livro III (mencionada sob a Tabela 6), nenhum dos livros apresenta uma proposta de fazer com que o aluno realize concretamente um experimento e colete dados para posterior análise da probabilidade. Julgamos que essa realização é muito útil para um aprendizado eficaz do tema em questão e, por isso, nosso trabalho é baseado nisso.

2.4 A PROBABILIDADE EM ARTIGOS E DISSERTAÇÕES

Já mostramos uma breve análise de como o ensino de Probabilidade é tratado em documentos oficiais e em diferentes livros didáticos. Para completar esta análise, mostramos como esse ensino é visto por alguns outros pesquisadores, observando seus artigos ou dissertações. Muitos materiais foram analisados, porém apresentamos aqui apenas uma rápida abordagem de três deles (duas dissertações e um artigo de revista), que nos chamaram mais atenção.

Em sua dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Lopes (1998) faz uma investigação de como se dá o ensino de Probabilidade e Estatística dentro do currículo de Matemática na Escola Fundamental, não só no Brasil como em outros países do mundo, onde foi percebido que o ensino da estocástica é de grande importância neste nível de ensino. Além disso, a autora também faz algumas reflexões a respeito desse ensino. Seguimos o mesmo pensamento dela quando diz que (LOPES, 1998, p. 28):

> Acreditamos que seja necessário desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os estudantes realizem atividades, observando e construindo os eventos possíveis, através de experimentação concreta. A aprendizagem da Estocástica só complementará a formação dos alunos se for significativa, se considerar situações familiares a eles, situações que sejam contextualizadas, investigadas e analisadas.

A autora conclui sua dissertação focando, dentre outras coisas, que a postura do professor de Matemática, no processo de ensino-aprendizagem, deve ser de orientador, provocando reflexões. Assim, a efetivação do ensino da Probabilidade e da Estatística se daria quando o professor se assumisse como professor reflexivo.

Já na dissertação de mestrado de Silva (2002), apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, intitulada Probabilidades: A Visão Laplaciana e a Visão Frequentista na Introdução do Conceito, o autor estuda e aplica uma sequência didática na qual os conceitos ou noções que conduzem à definição de probabilidades são abordados a partir de atividades ou situações-problema. Ele visou, neste trabalho, que as concepções frequentista e clássica de Probabilidade pudessem ser integradas no ensino. Desse modo, podemos dizer que a linha de raciocínio do autor é parecida com a que seguimos neste trabalho, no qual a observação dos resultados de um experimento permite com que tenhamos uma visão frequentista da Probabilidade, com posterior comparação com a visão clássica. Contudo, as atividades presentes em seu trabalho para o ensino do tema não sugerem a realização concreta de um experimento, ao contrário de nossa proposta. Mesmo assim, o autor conclui, dentre outras coisas, que apesar de a aplicação de sua atividade mostrar que é possível que os alunos compreendam a definição frequentista da probabilidade sem a realização concreta de um experimento, o uso desta técnica de ensino poderia ter encaminhando um número maior de alunos a incorporar esta noção.

Por fim, o último material de análise que enfatizamos neste capítulo, o artigo Uma Proposta para o Ensino de Probabilidade no Ensino Médio (LOPES; TEODORO; REZENDE, 2011), é muito interessante e destaca diversas justificativas para que os conceitos básicos de probabilidade sejam ensinados com o uso de jogos associados à resolução de problemas, já que, segundo os autores, torna as aulas mais prazerosas e participativas para os alunos. No texto, são citados diversos outros pesquisadores do ensino de Probabilidade que também destacam a importância do ensino de tal tema usando esta metodologia. Os autores mencionam que o uso dos jogos propostos por eles foi efetuado em uma escola com quatro turmas e que os resultados foram muito positivos. Segundo eles:

> Pelos depoimentos dos alunos, percebemos que houve nesses indivíduos um despertar para questões relacionadas à Probabilidade, conteúdo hoje indispensável para a formação plena do cidadão [...]. Os alunos tornam-se ativos na construção de seus próprios conhecimentos; o jogo e os problemas podem tornar esse objetivo mais acessível. A metodologia de resolução de problemas dá mais trabalho ao professor, mas, se adequadamente utilizada, pode contribuir significativamente para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem. (LOPES; TEODORO; REZENDE, 2011, p. 89)

A partir destes e de outros trabalhos consultados, verificamos que para muitos pesquisadores o ensino de Probabilidade é de grande importância e deve conter uma metodologia que o torne eficaz. As abordagens de como conseguir esta metodologia possuem pequenas diferenças, mas a maioria converge para o uso de experimentos e jogos, bem como a nossa atual proposta do ensino, que utiliza-se do problema do Jogo dos Discos, tratado nos próximos capítulos.

Por fim, após todas as análises dos documentos oficiais, livros didáticos e pesquisas sobre o tema, podemos concluir que o uso do problema do Jogo dos Discos tal como apresentamos neste trabalho pode atuar como um fator muito positivo para o aprendizado da Probabilidade. Esta abordagem complementa o que os livros didáticos apresentam, trazendo uma possibilidade de inserção de experimentos no ensino bem como da visão frequentista da Probabilidade, e vai de acordo com as pesquisas analisadas e sugestões presentes nos documentos oficiais.

No capítulo a seguir, mostramos do que se trata nossa atividade e apresentamos nosso planejamento da sequência de aulas destinadas a sua aplicação, além de descrever sucintamente as turmas e a escola que foram o público alvo deste trabalho.

CAPÍTULO 3

PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE E DE SUA APLICAÇÃO

3.1 INTRODUÇÃO

Em uma das conversas que tive com meu orientador, o professor doutor Roberto Ribeiro Paterlini, comentei sobre o fato de ter lido um artigo de sua autoria na RPM nº 48, de 2002, denominado “O Problema do Jogo dos Discos”. Eu havia achado aquele artigo muito interessante, pois tratava de um problema bastante completo, abordando probabilidade geométrica, experimentação, tabelas, gráficos e função quadrática, além de mostrar uma solução, que julgo muito bonita, utilizando recursos algébricos.

Ao comentar isso, ele me disse que esse problema já havia sido aplicado em algumas escolas e que havia feito muito sucesso, mostrando-me algumas fotos e materiais que possuía das aplicações que havia mencionado. Porém, contou-me que em nenhuma das vezes o problema havia sido passado com um tom investigativo. Os professores, em todas as aplicações, explicavam aos alunos o que eles deveriam fazer e eles faziam. Foi então que, aproveitando que eu estava lecionando para o terceiro ano do Ensino Médio de uma escola onde o tema Probabilidade fazia parte da grade curricular para esta série, ele me sugeriu que utilizasse este problema de um modo diferente. Ao invés de explicar aos alunos o que fazer e pedir para fazerem, eu proporia o problema aos alunos, antes mesmo de ter ensinado Probabilidade, e deixaria que eles tentassem criar um meio de resolver sem ajuda alguma.

De início, estranhei a sugestão. Eu nunca havia proposto aos alunos algum problema sobre um tema ainda não abordado em aula. Até já havia proposto problemas desafiadores, mas nunca sobre algo ainda não ensinado. Quando muito, iniciava uma aula com um problema, mas já ia explicando o assunto em cima do problema transmitido, sem dar muito tempo para pensarem e criarem. Este seria, com certeza, um grande desafio, tanto para mim quanto para os meus alunos.

Depois de pensar um pouco, criei coragem e resolvi acatar a proposta. O público alvo da aplicação deste trabalho seriam três turmas de terceiro ano do Ensino Médio (turmas B, C e D) da Escola Técnica Estadual Doutor Francisco Nogueira de Lima (conhecida como Escola Industrial), administrada pelo Centro Paula Souza e situada em Casa Branca/SP. Resolveu-se aplicar a atividade nas três turmas para efeito de comparação de resultados. Era meu primeiro ano dando aula nesta escola e, portanto, conheci as turmas apenas quando as aulas do ano haviam começado de fato.

Esta escola oferece tanto Ensino Médio (na período matutino), quanto Ensino Técnico (nos períodos vespertino e noturno), com cursos como informática, enfermagem, nutrição, alimentos, administração, dentre outros. Todavia, estes dois tipos de ensino não são integrados, de modo que quem faz o Ensino Médio não cursa, necessariamente, o Ensino Técnico. Além disso, o Ensino Técnico só é oferecido para quem já tiver sido aprovado no 1º ano do Ensino Médio. O ingresso em qualquer uma dessas modalidades de ensino é feito através de um vestibulinho, anual para o médio e semestral para o técnico. A escola é conhecida na cidade por oferecer um Ensino Médio público com qualidade. Porém, com relação à Matemática, pude perceber que muitos alunos ainda não tinham muita base, mesmo no terceiro ano, onde comecei a dar aulas. É bom destacar também que, nas turmas para as quais apliquei a atividade, poucos estavam cursando ou já haviam cursado algum curso técnico na própria escola. Além disso, alguns alunos das classes já estavam trabalhando, o que podia dificultar um pouco o estudo em casa. Mais informações sobre a escola podem ser encontradas em http://www.industrialcb.com.br/. Segue uma vista aérea da instituição:

Figura 7 – Vista aérea da escola

Fonte: Google Maps

Na Figura 7, perceba que a escola possui duas quadras poliesportivas, uma situada muito próxima das salas de aulas, e outra um pouco mais afastada. Como esta vista aérea é um pouco antiga, não se pode perceber que a quadra mais afastada, onde ocorrem as aulas de educação física, foi reformada e possui uma estrutura muito boa, inclusive com cobertura e uma pequena arquibancada (Figura 8). Note que a escola também possui um grande campo de futebol e alguns blocos de laboratórios para os cursos técnicos (próximos às árvores). A seguir, colocamos também uma foto da fachada da escola.

Figura 8 – Quadra poliesportiva, com cobertura e pequena arquibancada

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 9 – Fachada da escola. Foto tirada com alunos aprovados nos vestibulares de 2012

Fonte: Facebook.

Agora, com relação às três turmas nas quais a atividade seria aplicada, pode-se dizer que eram muito diferentes umas das outras, apesar de todas terem praticamente a mesma história de formação, pelo menos desde o primeiro ano do Ensino Médio, já que o ingresso na escola é feito no primeiro ano através de um vestibulinho e poucos são os alunos que ingressam no segundo ou terceiro ano.

A turma B era a mais atenta às aulas e os alunos apresentavam um conhecimento maior do que as outras turmas com relação à Matemática. Eram bastante unidos e as dificuldades em Matemática básica ou pré-requisitos para os assuntos do terceiro ano eram pequenas se comparadas às outras duas turmas.

A turma C era um pouco mais desunida, com vários “grupinhos” formados, contendo alguns alunos com certa dificuldade e outros um pouco mais desenvolvidos em Matemática. Possuía também alguns alunos repetentes de terceiro ano.

Por fim, a turma D era a turma com a maior defasagem em Matemática. Alguns alunos desta turma se destacavam, mas a maioria apresentava sérias dificuldades nesta disciplina. Por muitas vezes, enquanto eu resolvia um exercício na lousa e chegava na parte final da conta em algo do tipo $x = -3 - 4$, diziam-me que a resposta era $x = +7$, já que “menos com menos dá mais”. Este tipo de erro, que deveria ter sido corrigido há muito tempo, vinha com eles até o terceiro ano, o que tornava o ensino nesta turma um pouco complicado. Além disso, talvez pelo pouco conhecimento prévio que tinham de Matemática, percebia-se que a viam com uma espécie de medo. E, ainda somado a isso, apresentavam muita dificuldade em prestar atenção às aulas. Seguem algumas fotos das turmas, sem identificação de qual é qual.

Figura 10 – Foto de uma das turmas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 11 – Foto de uma das turmas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Foto de uma das turmas

Fonte: Facebook.

Enfim, apesar de achar que poderia não dar certo, resolvi aplicar o problema do Jogo dos Discos em momento oportuno, como já mencionado anteriormente. Eu sabia que eles nunca haviam tido experiência com um ensino investigativo em Matemática e que poderiam apresentar sérias dificuldades com o problema proposto, mas meu orientador já havia me alertado que, por muitas vezes, os alunos pensam em coisas que nós nem imaginamos e este tipo de abordagem pode sim valer muito a pena.

Neste capítulo, primeiramente explicamos como funciona esse tal Jogo dos Discos e falamos a respeito de suas possibilidades no ensino, tratando dos temas que esse jogo aborda e mencionando as vantagens que pode oferecer ao ensino de Probabilidade. Depois, tratamos do planejamento que havíamos feito para aplicar o problema do Jogo dos Discos nas turmas citadas, descrevendo com detalhes como pensamos que seria o desenrolar desta aplicação e como agiríamos em cada situação cujo acontecimento podíamos prever.

3.2 O JOGO DOS DISCOS

A origem do Jogo dos Discos se deu no século XVIII, na França (PATERLINI; CAETANO, 2010). Naquela época, era comum ladrilhar pisos de castelos e jardins, o que tornava esse chão um verdadeiro tabuleiro. E foi utilizando-se deste tabuleiro que as crianças da época inventaram o chamado Jogo dos Discos, no qual se lançavam moedas aleatoriamente no piso e apostavam se elas parariam inteiramente dentro de um ladrilho ou se sobreporiam as suas bordas.

Figura 13 – Moedas arremessadas em ladrilhos

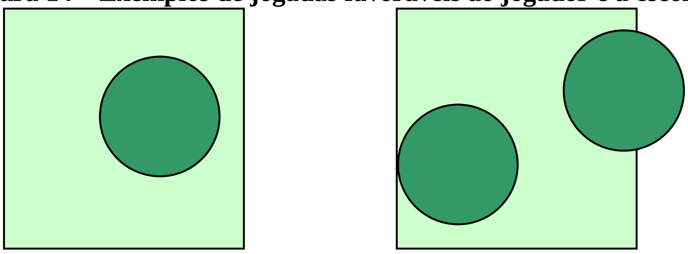
Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo o artigo já citado da RPM nº 48, Georges Louis Leclerc, o Conde de Buffon, foi o primeiro a escrever sobre a probabilidade envolvida neste jogo, em seu 4º volume do livro *Suplemento à História Natural*, seção *Sobre o jogo do ladrilho*, publicado em 1777.

Se pararmos para pensar, vemos que os fatores que contribuem para a probabilidade de a moeda tocar ou não as bordas do ladrilhamento são apenas o diâmetro da moeda (ou de qualquer outro disco) e o tamanho dos ladrilhos. Em nosso caso, trabalharemos com ladrilhos quadrados idênticos, o que faz com que o único fator que influencie no seu tamanho seja a medida do seu lado. Nosso objetivo será descobrir um modo de, dado o lado dos ladrilhos quadrados e o diâmetro do disco, fornecer a probabilidade de o disco interceptar as bordas do ladrilhamento.

Para o problema ficar mais interessante, vamos supor que este jogo de aposta fosse realizado por uma turma de alunos visando arrecadar dinheiro para o grêmio estudantil da escola. Essa turma venderia discos a, por exemplo, R$ 1,00 cada um, para os jogadores poderem arremessá-los no piso. Se o disco, depois de ser arremessado, parasse totalmente dentro de um ladrilho, o jogador receberia R$ 2,00 (R$ 1,00 como devolução e mais R$ 1,00 como prêmio). Caso contrário, a turma ficaria com o dinheiro pago no disco.

Figura 14 – Exemplos de jogadas favoráveis ao jogador e à escola



Posição favorável ao jogador

Posições favoráveis à escola

Fonte: Elaborada pelo autor.

Devemos estudar a probabilidade envolvida neste problema para podermos decidir com inteligência qual o melhor diâmetro dos discos para que a escola não saia perdendo. É fácil observar que quanto maior for o diâmetro, melhor para a escola, e quanto menor o diâmetro, melhor para o jogador. Porém, é evidente que se os discos forem muito grandes, com diâmetros quase iguais à medida do lado do ladrilho, praticamente ninguém tentará arriscar a sorte e pagar para jogar. Assim, o ideal é encontrar uma medida exata que forneça a chance desejada de ganho para a escola. O problema que passamos para as turmas de terceiro ano envolvia esta ideia. Vejamos como podemos resolver isso e, em função da probabilidade desejada e de quantos discos fossem vendidos, quanto a escola arrecadaria para o grêmio.

Podemos resolver este problema de pelo menos dois modos: um, de maneira aproximada, utilizando experimentação e modelagem de funções e outro, de maneira mais precisa, utilizando um pouco de álgebra.

3.2.1 Resolução do Problema Utilizando Experimentação

Usando-se da experimentação, dado certo ladrilhamento, formado de pisos quadrados idênticos, basta confeccionarmos alguns discos de diferentes diâmetros e lançar, aleatoriamente, cada um deles várias vezes ao chão, observando e anotando em quantos desses lançamentos o jogador teria vencido e em quantos a escola é que venceria. Feito isso, com cada diâmetro obteremos um percentual de ganho para escola e um percentual de ganho para o jogador. Montamos então uma tabela contendo essas porcentagens e fazemos um gráfico com os seus pontos, a partir do qual podemos ajustar uma curva. Feito o ajuste, podemos, por fim, obter o valor do diâmetro do disco para conseguirmos qualquer porcentagem de ganho desejada.

Como exemplo, estudamos a probabilidade de ganho do jogo em pisos quadrados com 31 cm de lado e, para isso, confeccionamos discos com diâmetros de 5, 10, 15 e 20 centímetros. É claro que quanto mais lançamentos fizéssemos, mais próximo da probabilidade real ficaria o percentual de ganho sobre o total de lançamentos, mas pode-se dizer que 200 arremessos aleatórios para cada diâmetro é uma quantidade razoável para nossa experimentação. Fazendo estes lançamentos, o autor desta dissertação obteve os dados apresentados na tabela a seguir:

Tabela 7 – Resultados de uma experiência pessoal

Diâmetro do disco (cm)	Quantidade de lançamentos	Lançamentos a favor da escola	Lançamentos a favor do jogador
5	200	60	140
10	200	103	97
15	200	146	54
20	200	178	22

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir da tabela acima podemos montar outra, contendo agora os diâmetros de cada disco e os respectivos percentuais de jogadas que deram vitória para a escola.

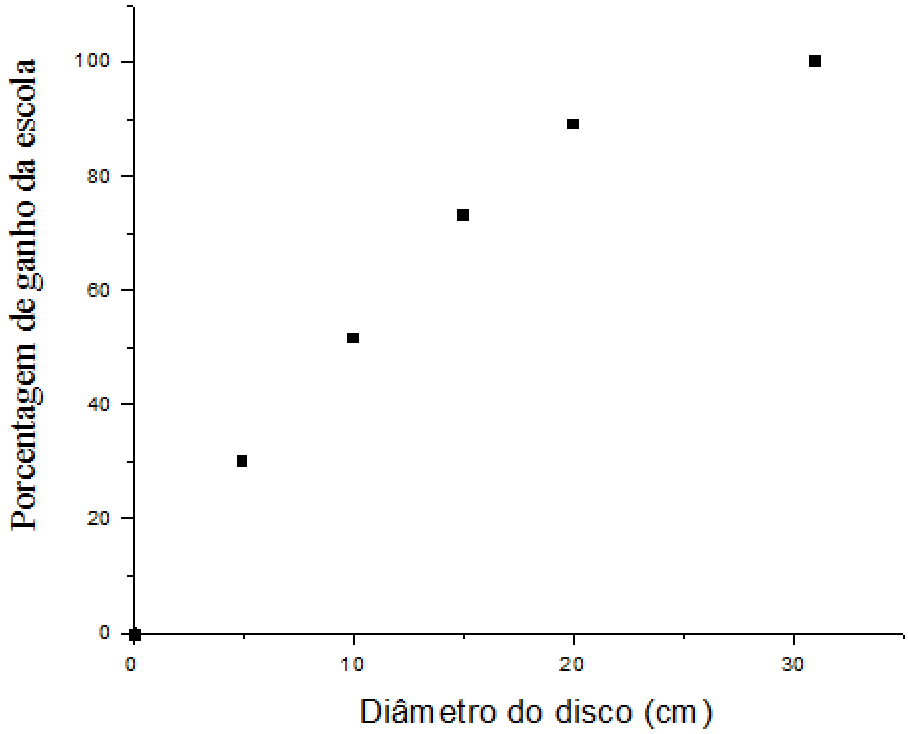
Tabela 8 – Percentuais de ganho para a escola

Diâmetro do disco (cm)	Porcentagem de ganho para a escola
5	30
10	51,5
15	73
20	89

Fonte: Elaborada pelo autor.

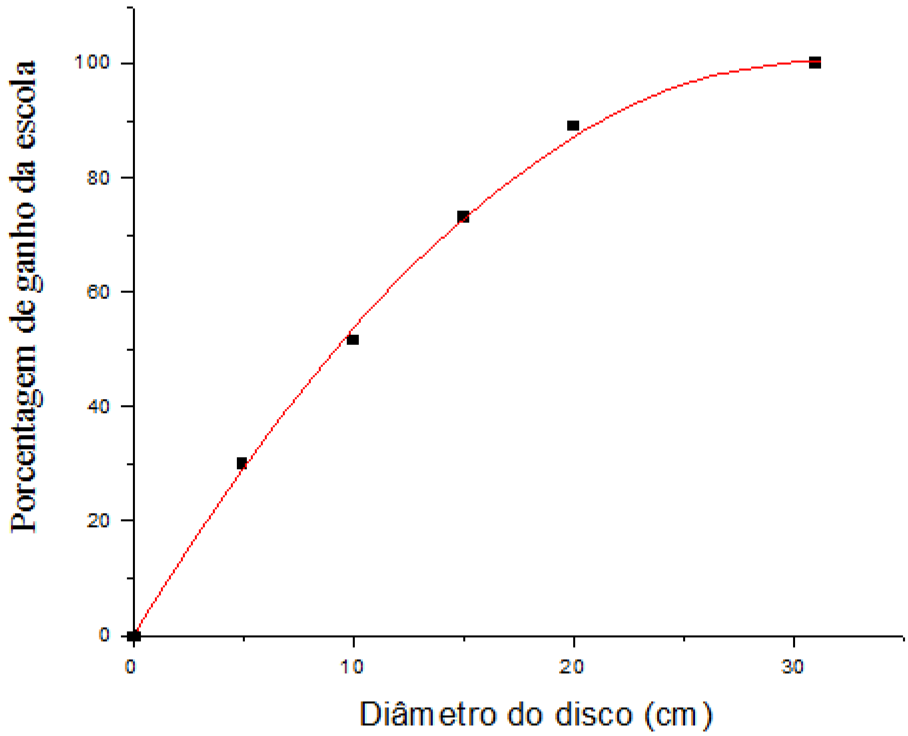
Sabendo-se que se o disco tivesse diâmetro com medida igual à medida do lado dos ladrilhos (31 cm) a porcentagem de ganho para a escola seria 100% e que se o disco tivesse diâmetro igual a zero, a porcentagem seria de 0%, podemos, a partir da tabela e dessas informações, construir o gráfico mostrado na Figura 15. Depois, traçando uma curva que melhor se ajusta aos pontos plotados, obtemos o gráfico mostrado na Figura 16.

Figura 15 – Gráfico obtido com a tabela e as informações anteriores



Fonte: Elaborada pelo autor.

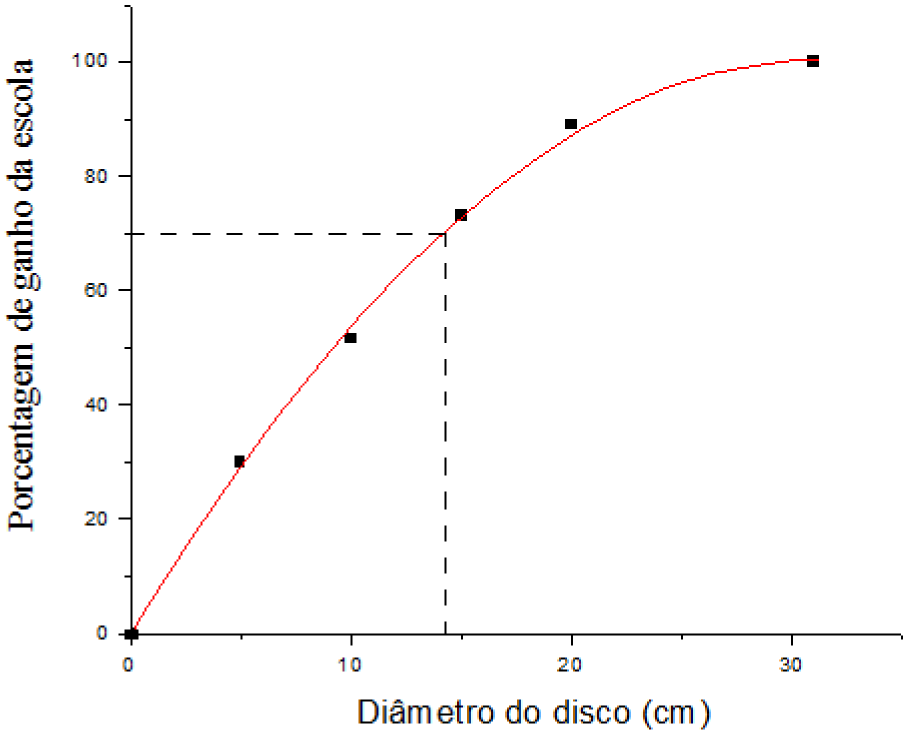
Figura 16 – Gráfico com ajuste de curva



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a curva desenhada, podemos, por fim, obter o diâmetro experimental para o disco para que a sua jogada, em pisos quadrados de lado 31 cm, forneça o percentual desejado de ganho para a escola. Se, por exemplo, quiséssemos que a escola tivesse 70% de chances de ganhar, poderíamos traçar uma linha horizontal com ordenada 70 e marcar o ponto onde ela toca o gráfico. Deste ponto, traçaríamos uma linha vertical, que interceptaria o eixo das abscissas no diâmetro que queríamos encontrar. Apresentamos esta construção na Figura 17, a seguir:

Figura 17 – Gráfico indicando o diâmetro do disco que fornece a probabilidade de ganho em 70% para a escola, se lançado em pisos quadrados com 31 cm de lado



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos observar o gráfico acima e concluir que, para que a escola tenha 70% de ganho, é necessário que os discos tenham um diâmetro aproximadamente igual a 14 cm. Note que nenhum recurso computacional é extremamente necessário. Apesar de termos usado um programa para ajustar a curva mostrada nas figuras anteriores, poderíamos tê-la traçado manualmente de maneira aproximada e obtido um resultado próximo deste.

Por curiosidade, podemos dizer que ajustamos a curva utilizando o programa Origin 6.0 para obter a função quadrática que mais se adequava aos pontos. Obtivemos a seguinte função para a curva:

$$p(d) = -0,29885 + 6,42573 \cdot d - 0,10239 \cdot d^2$$

Resolvendo $p(d)=70$, para $0<d<31$, pois são os únicos valores que podemos utilizar na prática, obtemos $d \cong 14{,}1$ cm, muito parecido com o que observamos no gráfico.

Pode-se dizer então que o problema do Jogo dos Discos, quanto à obtenção do diâmetro para que a escola tivesse certa porcentagem de ganho, foi resolvido, ainda que de maneira aproximada, a partir do método experimental. Tal solução é o próprio gráfico, exemplificado na Figura 16, o qual nos permite encontrar o diâmetro do disco que fornece o percentual de ganho desejado de maneira aproximada.

3.2.2 Resolução do Problema Utilizando Álgebra

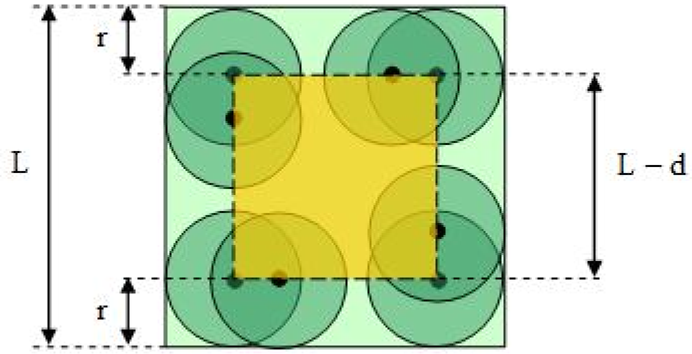
Vamos agora resolver o problema do Jogo dos Discos utilizando um pouco mais de álgebra. A resolução utilizando este recurso exige, além de um pouco de conhecimento da Teoria da Probabilidade, uma "sacada" que pode ser difícil de os alunos pensarem. Por meio da álgebra, poderemos generalizar a solução e também obter resultados mais precisos.

Considere que temos um piso quadriculado de lado *L*. Queremos obter a probabilidade *P* de o disco de diâmetro *d*, ao ser lançado aleatoriamente sobre este piso, interceptar a borda do ladrilhamento, ou seja, de a escola ser favorecida.

Primeiramente, vale a pena lembrar que se o disco tiver um diâmetro maior do que ou igual ao lado dos quadrados, então a probabilidade de a escola ganhar é sempre 100%. Vamos então tentar deduzir uma fórmula P(d), com parâmetro *L*, apenas para $0 \le d \le L$ (*d* não pode ser negativo por razões óbvias).

Agora imagine que um disco foi lançado e está parando sobre um ladrilho. Pense em todas as situações limites onde este disco, se estivesse um pouco mais deslocado para dentro do piso, faria com que a escola perdesse (ou que o jogador ganhasse). A Figura 18 ilustra algumas dessas situações.

Figura 18 – Discos em situações limites



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note, pela figura, que se os centros dos círculos caíssem dentro do quadrado central, o jogador é quem venceria, e não a escola, já que o disco estaria a uma distância maior do que o raio até a borda do quadrado. Perceba que o quadrado central tem lado medindo $L - r - r = L - d$.

A "sacada" mencionada no início desta seção para a resolução do problema do Jogo dos Discos diz respeito ao seguinte pensamento: lançar um disco no quadriculado do chão é o mesmo que lançar um único ponto (o centro do disco) em qualquer quadrado do piso. Isso está correto porque se sabe que, dada certa medida de raio, a posição que um círculo ocupa fica determinada apenas pelo seu centro. Deste modo, utilizando o conceito de probabilidade geométrica mencionado no Capítulo 1 e a Figura 18, temos que a probabilidade $p(d)$ de o *jogador* ganhar no Jogo dos Discos é:

$$p(d) = \frac{\text{área do quadrado central}}{\text{área do ladrilho}} = \frac{(L-d)^2}{L^2} = \left(\frac{L-d}{L}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{p(d) = \left(1 - \frac{d}{L}\right)^2}$$

Como nesse jogo, se o jogador não ganha a escola é que ganha, temos:

$$P(d) = 1 - p(d) = 1 - \left(1 - \frac{d}{L}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{P(d) = -\left(\frac{1}{L^2}\right)\cdot d^2 + \left(\frac{2}{L}\right)\cdot d}$$

Lembre-se que só podemos utilizar esta equação para $0 \le d \le L$, já que *d* negativo não faz sentido e para $d > L$ temos $P(d) = 1$. Note que a função que obtivemos para P(d) é polinomial de segundo grau.

Por fim, usando esta última equação, podemos determinar o inverso, ou seja, dada uma probabilidade de ganho desejada para a escola, obter qual seria o diâmetro do disco que deveria ser jogado:

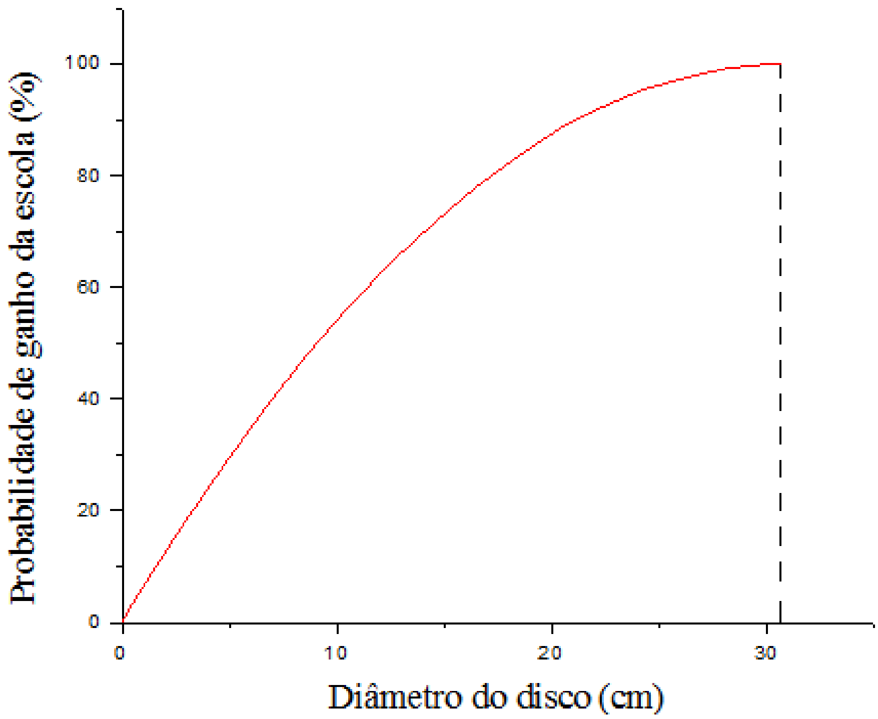
$$P = 1-\left(1-\frac{d}{L}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1-\frac{d}{L}\right)^2 = 1-P \quad \Leftrightarrow \quad 1-\frac{d}{L} = \pm\sqrt{1-P} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{d = L\cdot\left(1\pm\sqrt{1-P}\right)}$$

Como só estamos utilizando $0 \le d \le L$, então

$$\boxed{d = L\cdot\left(1-\sqrt{1-P}\right)}$$

Note que, com essa última equação, podemos construir o Jogo dos Discos da maneira que quisermos. Voltando ao nosso exemplo da seção anterior, se tivermos pisos com 31 cm de lado e desejarmos uma probabilidade de ganho para a escola em 70%, então o diâmetro que devemos usar é $d = 31\cdot\left(1-\sqrt{1-0,7}\right) \cong 14,02\,\text{cm}$, próximo do valor que obtivemos na experimentação. Para efeito de comparação, observe como o gráfico da função $P(d)$ se comporta para $L = 31$ cm:

Figura 19 – Probabilidade de ganho da escola em função do diâmetro do disco lançado para L = 31 cm



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, o problema do Jogo dos Discos também foi resolvido usando recurso algébrico, podendo fornecer resultados até mais precisos.

Agora, para finalizar esta seção, vamos calcular, em função da probabilidade de ganho desejada pela escola (*P*), da quantidade de discos que foram vendidos no evento (*n*) e do valor de venda de cada disco (*v*), quanto a escola arrecadaria em média para o grêmio estudantil da escola.

Suponhamos inicialmente que a turma tenha conseguido vender 400 discos que dão a eles 70% de probabilidade de ganhar a R$ 1,00 cada um (lembre-se que o prêmio do jogador, se vencer, é sempre o dobro do valor pago, no caso R$ 2,00). Com estes dados, podemos dizer que a escola provavelmente, das 400 jogadas, ganharia em 70% delas, ou seja, 280 jogadas e perderia em 30% delas, ou seja, 120 jogadas. Isto significa que, com os 400 discos, a escola arrecadaria R$ 400,00 e teria que devolver como prêmio R$ 240,00, obtendo um lucro de R$ 160,00.

Para generalizar, se *n* discos que dão probabilidade *P* de ganho para a escola forem vendidos a um valor *v*, então é provável que a escola perca em $(1-P)\cdot n$ jogadas, tendo que pagar aos jogadores, como prêmio, a importância de $2v\cdot(1-P)\cdot n$. Como, com a venda dos discos, a escola receberia $n\cdot v$ reais, o lucro que o grupo de alunos obteria para a escola é:

$$\text{lucro} = n\cdot v - 2\cdot n\cdot v\cdot(1-P) = n\cdot v\cdot\left[1-2(1-P)\right]$$

$$\boxed{\text{lucro} = nv(2P-1)}$$

No Apêndice A desta dissertação, apresentamos a folha que utilizamos para aplicação da atividade nas turmas B, C e D do terceiro ano do Ensino Médio da Escola Industrial de Casa Branca. Note que nela está presente, de maneira contextualizada, o enunciado que utilizamos para o Problema do Jogo dos Discos. Na próxima seção, apresentamos como havíamos planejado aplicar esta atividade e como esperávamos que se daria o andamento das aulas destinadas a essa atividade.

3.3 PLANEJAMENTO PARA APLICAÇÃO DO PROBLEMA DO JOGO DOS DISCOS E EXPECTATIVAS SOBRE AS REAÇÕES DAS CLASSES

Nesta seção, descrevemos com o máximo de detalhes como planejamos a aplicação do problema do Jogo dos Discos. A maneira como preparamos e aplicamos essa atividade são os tópicos principais deste trabalho e, portanto, merecem destaque. É importante lembrar que este planejamento foi feito especialmente para as turmas do 3º ano do Ensino Médio da ETEC Dr. Francisco Nogueira de Lima, cujos perfis foram brevemente comentados na introdução deste capítulo. Todavia, acreditamos que aplicações semelhantes possam ser feitas para qualquer tipo de turma, dado o resultado que obtivemos.

É importante mencionar que no terceiro ano desta escola, há apenas uma frente de Matemática, com somente três aulas semanais. O cronograma de aulas para eles consiste, aproximadamente, de Geometria Analítica no primeiro bimestre, Polinômios e Equações Algébricas no segundo, Números Complexos no terceiro e Probabilidade no quarto. Planejamos, então, a aplicação desta atividade em 7 aulas *não sequenciais*, a serem iniciadas no terceiro bimestre juntamente com Números Complexos. Seriam duas aulas para apresentação do problema, depois de duas semanas, mais duas aulas para discussão de como realizar a experimentação em casa e, por fim, depois de mais duas semanas, mais duas aulas para análise dos dados coletados e entrega de um trabalho final, além de uma última aula para o fechamento da atividade. A ideia era que, quando entrasse no quarto bimestre, o problema do Jogo dos Discos já tivesse sido resolvido, servindo como uma boa introdução para o tema Probabilidade. Este tipo de estratégia, com certeza facilitaria o entendimento dos alunos sobre essa teoria, que seria o assunto do bimestre. Além disso, como esperávamos que o caminho percorrido para resolução do problema contivesse experimentação, os alunos poderiam compreender que a Probabilidade está relacionada com a frequência relativa do acontecimento de determinado evento. Segue uma tabela com o cronograma da sequência de aulas que seriam destinadas à atividade, juntamente com um resumo da abordagem que seria dada a cada aula. Nela, a semana 1 significa a primeira semana de aplicação, a semana 2 significa a segunda semana de aplicação, e assim por diante:

Tabela 9 – Cronograma de aplicação da atividade

Semana	Quantidade de aulas	Resumo da abordagem
1	2 (de preferência, uma aula dupla)	Apresentação do problema e tempo para os alunos pensarem sozinhos na solução. Se alguma turma pensar em usar experimentação, o professor deve incentivar e pedir para que o grupo compartilhe a ideia ao final da segunda aula.
2 e 3	Todas	Aulas "normais", com continuação do assunto que já está sendo visto. Os alunos devem pensar, em casa, como devem realizar a experimentação e o professor deve cobrá-los disso em praticamente todas as aulas para que não se esqueçam da atividade.
4	2 (de preferência, uma aula dupla)	Momento para os alunos pensarem melhor em como devem prosseguir para fazer a experimentação em casa. O professor deve ajudá-los nesta parte ao final da última aula, direcionando-os para uma boa experimentação.
5 e 6	Todas	Aulas "normais", com continuação do assunto que já está sendo visto. Os alunos devem efetuar a experimentação em casa e o professor deve cobrá-los disso, para que coletem os dados necessários.
7	2 (de preferência, uma aula dupla)	Os alunos devem fazer uma análise dos dados coletados em casa e tentar responder ao problema. O professor deve deixar a primeira aula para que tentem sozinhos e pode ajudá-los na segunda aula, se for necessário. Os alunos devem entregar um trabalho escrito a respeito do que fizeram ao final da última aula.
7	1	Na última aula da semana, o professor deve concluir a atividade, mostrando, inclusive, a sua resolução utilizando recurso algébrico.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Descrevemos a seguir como planejamos proceder em cada uma das sete aulas destinadas à realização da atividade, focando nos detalhes que julgamos mais relevantes para uma boa aplicação.

3.3.1 Primeira e Segunda Aulas de Aplicação

As duas primeiras aulas de aplicação são destinadas, basicamente, a apresentar o problema do Jogo dos Discos e dar um bom tempo para que eles pensem em como podem resolvê-lo. O ideal é que isso seja feito em uma aula dupla, mas pode ser feito em duas aulas simples também, sem muita perda para os alunos.

Devemos iniciar a primeira aula fazendo a divisão da classe em 6 grupos de 6 ou 7 alunos cada, já que as classes nas quais aplicamos o jogo possuem entre 36 e 39 alunos. Deve ser permitido que eles mesmos façam as divisões e se organizem, com cada grupo sentado em roda em um lugar da classe, para facilitar a posterior discussão do problema.

Feita a divisão em grupos, devemos entregar aos alunos uma folha da atividade, presente no Apêndice A desta dissertação, que contém uma contextualização agradável do Jogo dos Discos. Como nosso objetivo é tentar fazer com que os alunos sintam interesse em resolver a atividade proposta, resolvemos usar o jogo como sendo um meio de arrecadar dinheiro para o grêmio estudantil, já que percebemos que o mesmo é muito presente na escola e é bastante cobrado pelos alunos para que cumpra o que foi prometido, como a instalação de som durante o intervalo. Resolver este problema, portanto, poderia ser pensado como ajudar o grêmio e, assim, ajudar eles mesmos. Além disso, a proposta é que o jogo seja realizado durante a Feira de Ciências, que é um evento anual da escola. O problema presente na folha, após toda a contextualização, levanta o questionamento sobre qual seria o percentual ideal de ganho para a escola na opinião deles e como este poderia ser atingido, ou seja, qual o diâmetro que o disco deveria ter para se obter este percentual de ganho nas jogadas. Devemos nos lembrar de não citar o nome do jogo (“Jogo dos Discos”) nesta folha (e nem nas aulas), para evitar ao máximo que eles encontrem a solução esperada na *Internet* quando chegarem em casa.

Dada a folha aos grupos, devemos lê-la juntamente com eles e tentar explicar melhor, se for necessário, do que se trata o problema. Feito isso, devemos deixar o restante da aula para que eles tentem pensar, por si sós, em como resolver a atividade. Porém, como já dito, faremos esta aplicação inicial em um momento no qual eles ainda não viram a Teoria da Probabilidade. Tudo o que devem saber sobre isso, provavelmente deve vir apenas de estatísticas de jornais ou de algum raciocínio que já podem ter tido com relação às chances de acontecer algo. É possível também que já tenham visto superficialmente um pouco sobre este tema no Ensino Fundamental. Sabemos que eles tentarão nos questionar de qualquer maneira para darmos dicas a eles, mas devemos fazer todo o possível para não soltar nada de ajuda por enquanto. Queremos realmente visualizar a atitude que tomarão para resolver sozinhos.

Nossa expectativa é que os alunos pensem principalmente no uso de simulações, ou seja, pensem em realizar de fato a experimentação e posterior modelagem para resolver o problema. Isso é o que consideramos que seria o ideal para este estágio do ensino de Probabilidade, mas devemos tentar ao máximo deixar com que eles mesmos surjam com esta ideia. Sabemos que isso pode ser difícil, devido ao método de ensino que devem ter tido desde o início do aprendizado matemático: usar apenas papel e lápis para resolver qualquer problema. Porém, como o tema Probabilidade ainda não foi ensinado na turma, pelo menos durante os últimos anos, achamos pouco provável que consigam resolver este problema algebricamente. Enfim, pelo fato de darmos toda uma liberdade a eles, sabemos que a nossa aplicação do jogo pode tomar vários caminhos e devemos estar preparados para cada situação possível. Portanto, apresentamos a seguir planos para estas duas primeiras aulas.

3.3.1.1 Plano A: o ideal

Este é o caso no qual os alunos conseguem pensar por si mesmos que a realização de experimentações do jogo pode ser utilizada para obter a solução do problema. Consideramos o ideal porque queremos mesmo que os alunos tenham este contato com experimentação no aprendizado de Probabilidade. Porém, devemos estar cientes de que, se houver algum aluno pensando em resolver o problema usando apenas recurso algébrico (o que muito provavelmente haverá), devemos incentivá-lo também, mostrando onde pode estar o erro, se houver, mas tomando cuidado para não fornecer a solução ao aluno. É importante que eles constatem que a resolução algébrica pode ser difícil. Neste momento, o professor deve estar muito familiarizado com as soluções do problema, apresentadas na seção 3.2, para saber o que fazer com as eventuais dúvidas que forem surgindo.

Enfim, se a ideia do uso de experimentação surgir, é provável que não tenha sido pensada por muitos alunos. Assim, percebido que algum grupo manifestou interesse por este tipo de solução, deve-se incentivá-lo a continuar pensando que esse é um bom caminho. Feito isso, nos 20 a 30 minutos finais da segunda aula, aproximadamente, devemos pedir a este grupo para que compartilhe seu pensamento com o restante da classe, para que possam discutir se este método seria realmente um bom modo de resolver o problema proposto.

Após esta discussão, espera-se que todos concordem que a utilização de simulação pode funcionar. Neste momento, agiremos de modo a realmente motivá-los. Diante da aceitação de todos, combinaremos então que pensem em casa, começando na própria classe, como proceder para a realização das simulações. A próxima aula a respeito desta atividade serviria, assim, para retirada de dúvidas a respeito disso.

Se a ideia de usar a simulação não tiver surgido até o final da segunda aula, deve-se ficar cobrando, durante as próximas duas semanas (que não serão semanas para essa atividade) maneiras que pensaram para resolver o problema, na expectativa de terem pensado em simulações. Mesmo que essas duas semanas sejam de assuntos “normais”, no caso, Números Complexos, devemos, pelo menos, lembrá-los de que eles têm um problema a resolver. Se felizmente tiverem pensado em usar experimentação, agiremos como mencionado no parágrafo anterior. Se este pensamento não tiver surgido até a última aula da segunda semana sem atividade, entraremos no Plano B.

3.3.1.2 Plano B: se a ideia do uso de simulações não tiver surgido

No caso de o pensamento do uso de simulações não surgir nem nas duas primeiras aulas de aplicação, nem durante as aulas posteriores em que estaremos cobrando a resolução do problema, teremos que tomar uma atitude diferente no final da última aula da segunda semana sem atividade. Devemos tentar instigá-los a pensar na utilização de experimentação. Podemos dizer à classe algo do tipo: “E se eu construir um disco de certo tamanho e ficar arremessando-o em pisos de 40 cm de lado? Será que assim, depois de muitas jogadas eu não poderia estimar o percentual de ganho da escola com o uso deste disco? Se eu fizer estes lançamentos com vários tamanhos de discos, pode ser que eu consiga estimar qual deve ser o tamanho ideal para que eu obtenha exatamente o percentual que queremos, certo? O que acham?”. Esperamos que os alunos, assim, compreendam a nossa expectativa e pensem, para a próxima aula, como poderiam realizar a experimentação.

Por fim, se, por acaso, algum grupo tiver conseguido resolver o problema algebricamente de maneira correta (o que julgamos pouco provável já que eles ainda não teriam tido contato com a Teoria da Probabilidade), devemos perguntar a seus membros como poderiam provar que aquela solução está certa. Esperamos assim, que eles também adiram à ideia do uso de simulações a fim de comprovar a solução que construíram. Enfim, independentemente de qual plano tenhamos aplicado, A ou B, a sequência de aulas seria a mesma, com alunos pensando sobre o uso de experimentação como um meio para resolução do problema. Segue, então, o planejamento para as demais aulas.

3.3.2 Terceira e Quarta Aulas de Aplicação

Estas duas aulas são destinadas para a reflexão de como os alunos devem prosseguir para realizar a experimentação em casa. O professor deve, logo no início das aulas, levantar alguns questionamentos, a fim de guiar a maneira como devem proceder para a realização das simulações. Isso deve ser feito a fim de que os resultados atingidos por qualquer grupo estejam o mais próximo possível do valor teórico. Na verdade, o professor deve tentar dizer o mínimo possível, deixando para a própria classe discutir a melhor maneira de realizar a experimentação. Dizemos tentar porque sabemos que, para um professor, é difícil se segurar na hora de responder às perguntas feitas pelos alunos. De qualquer modo, inicialmente deve-se apenas levantar as seguintes questões para que sejam discutidas entre eles:

a) Certo, vamos fazer lançamentos de discos em um ladrilhamento. Mas quantos lançamentos são necessários realizar para que possamos concluir, com uma boa precisão, qual a chance de acertar o disco dentro ou fora de um quadrado? Muitos ou poucos?
b) Como proceder para que os lançamentos sejam aleatórios?
c) O que acontece se o diâmetro do disco for maior que o lado do piso?
d) Será que não é mais prático e rápido realizar vários lançamentos com 10 discos de mesmo diâmetro de uma vez? Isso seria a mesma coisa que realizar o experimento 10 vezes de uma só vez, certo? Será que isso é válido ou não?
e) Se for válido o lançamento de vários discos de uma vez, o que fazer caso dois discos fiquem sobrepostos?
f) Será que se o rejunte dos pisos for muito largo, alguma coisa vai mudar?
g) Quantos discos de diâmetros diferentes precisamos para conseguir responder à atividade. Um só é o suficiente? Vai fazer até encontrar o que te fornece a porcentagem desejada? Isso pode demorar muito.

Vamos responder a estas questões. Primeiramente, vale a pena lembrar que quanto mais lançamentos fizermos com certo disco, mais próximo o percentual de ganho da escola ficará da probabilidade teórica. Porém, com base na literatura, podemos dizer que 200 lançamentos são suficientes para que consigamos uma boa precisão. Agora, para que o lançamento seja considerado aleatório, basta que ele seja lançado horizontalmente a certa distância do tabuleiro. A distância não precisa ser muito grande, mas deve ser o suficiente para que o jogador não consiga mirar e deixar o disco cair verticalmente.

Observe que, se o disco tiver diâmetro maior do que o lado dos quadrados, como já mencionado antes, a escola sempre vencerá, já que será impossível o disco não tocar alguma borda. E para acelerar a experimentação, pode-se sim realizar o lançamento de 10 discos de uma vez, desde que haja certo espalhamento. Se dois discos ficarem sobrepostos, basta pegar o de cima e realizar um novo lançamento apenas com ele.

Quanto à espessura do rejunte, podemos dizer que algo mudaria sim. Na verdade, a chance de a escola ganhar aumentaria, já que a chance de cair na borda aumentaria também. Deve-se tentar utilizar um piso em que o rejunte seja bem fino para que a porcentagem calculada pelos grupos sejam todas parecidas.

Por fim, respondendo à última questão, lembramos que o gráfico poderá, em geral, ser completado à mão livre, e não se sabe de antemão que se trata de uma função quadrática. Assim, um só diâmetro de disco não é o suficiente para podermos realizar um estudo do Jogo dos Discos. Ao menos 4 diâmetros são necessários para que este estudo possa ser realizado e ter maior precisão.

Estas informações não devem ser dadas aos alunos de início. Eles devem pensar sozinhos sobre as respostas destas questões e terão o tempo de uma aula para tentarem concluir alguma coisa. Ao final da terceira aula, o professor deverá socializar as respostas dos grupos, visando uma discussão entre eles. Feita a discussão, o professor pode, de maneira sutil, ir soltando as respostas corretas e explicando o porquê de algumas eventuais respostas serem incorretas.

Por fim, deve ficar acordado ao final da quarta aula de aplicação que cada grupo deverá realizar a experimentação em casa seguindo ao máximo o modo como foi pensado em conjunto com o restante da classe, usando discos de pelo menos quatro diâmetros diferentes. Esta experimentação deverá ser feita durante as próximas duas semanas, antes das três últimas aulas, e os resultados obtidos deverão ser colocados em uma tabela seguindo o seguinte modelo, sendo uma para cada diâmetro:

Tabela 10 – Modelo de tabela para anotar os dados do experimento

	Diâmetro do círculo lançado: ___		
	Nº jogadas	Favoráveis à Escola	Favoráveis ao Jogador
	10	X_1	Y_1
	10	X_2	Y_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	10	X_{20}	Y_{20}
Total	200	$\sum X_i$	$\sum Y_i$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A colocação dos dados na tabela facilitará a organização por parte dos grupos, além de criar um material que facilitará o andamento das aulas seguintes. Note que para facilitar a contagem das jogadas favoráveis à escola e ao jogador, cada linha do modelo de tabela anterior diz respeito à 10 lançamentos, que poderiam ser realizados de uma só vez conforme comentado anteriormente. Mas além destas tabelas (serão no mínimo 4), os alunos devem também fazer uma tabela resumo parecida com seguinte:

Tabela 11 – Modelo de tabela resumo dos dados obtidos

Diâmetro	Nº jogadas	Vitória jogador	Vitória Escola	% de ganho Escola
x	200	x	x	x
x	200	x	x	x
x	200	x	x	x
x	200	x	x	x

Fonte: Elaborada pelo autor.

Durante as próximas duas semanas, o professor deve ficar lembrando os alunos do combinado, evitando que eles se esqueçam da atividade.

3.3.3 Quinta e Sexta Aulas de Aplicação

A quinta e sexta aulas serão destinadas a fazer uma análise dos dados coletados em casa e tentar responder ao problema. Durante a quinta aula de aplicação, o professor deixará os alunos pensarem sozinhos em como resolver o problema utilizando os dados que obtiveram, isto é, descobrir qual deveria ser o diâmetro do círculo lançado para que a escola tivesse o percentual de ganho que eles desejavam.

Se, por acaso, algum grupo já tiver feito, por sorte, um disco com o tamanho que fornece exatamente o percentual que eles queriam, então eles não precisariam fazer a modelagem de função que exibimos em seção anterior. Porém, esta modelagem é algo que queremos que os alunos tenham contato, aproveitando o momento. Neste caso, para dar a oportunidade a eles para tentarem também pensar na modelagem, poderíamos falar da seguinte maneira: “Aquele grupo pensou em um percentual diferente de ganho para a escola. Será que você conseguiria estimar o tamanho de disco para ele? Será que você consegue, a partir destas simulações, estimar o tamanho ideal de disco para cada percentual desejado?”.

Pelo conhecimento que possuímos da turma, é pouco provável que eles pensem na modelagem do problema, com a construção de um gráfico para posterior ajuste de curva. Isso de fato é muito pouco visto no ensino regular e creio que eles nunca tiveram contato com este tipo de manipulação. Se esta ideia surgir por algum aluno, podemos pedir para que socialize a informação, para posterior discussão.

Caso ninguém saiba um modo de resolver o problema mesmo com os dados que coletaram em casa a partir da experimentação, o professor pode entrar na sexta aula transmitindo esta ideia a eles, mostrando como um gráfico pode ajudar e como poderiam utilizá-lo para resolver o problema deles.

Assim, nesta sexta aula os alunos deverão montar esse tal gráfico a partir da tabela resumo que montaram, acrescentando ainda os pontos (0,0) e (L, 100), onde L é a medida do piso que utilizaram (as justificativas destes pontos encontra-se em seção anterior). Feita a plotagem dos pontos, poderão ajustar uma curva a eles e, por fim, responder à atividade. Deverão, depois disso, fazer um relatório contendo as tabelas feitas em casa, o gráfico e, por fim, a resposta final da atividade, entregando-o ao professor ao final da sexta aula de aplicação.

3.3.4 Última Aula de Aplicação

Na sétima, e última, aula de aplicação da atividade, o professor deve apenas fazer um fechamento, lembrando de todos os conteúdos trabalhados e observando o ganho que este tipo de abordagem pode ter proporcionado. Além disso, deve apresentar um modo alternativo de resolver o problema proposto, ou seja, mostrar o modo algébrico de resolução já mencionado. O professor pode comentar sobre a importância da resolução utilizando experimentação e da importância da manipulação algébrica, que em muitas vezes pode economizar tempo e dinheiro. Após a sétima aula, a atividade estará encerrada e este será um momento oportuno de iniciar o estudo teórico da Probabilidade.

3.4 CONCLUSÃO

Esperamos que esta sequência de aulas seja proveitosa para nossos alunos, proporcionando um contato com a experimentação concreta e com a modelagem de problemas. Além disso, com o uso do problema do Jogo dos Discos, eles poderão observar que a probabilidade teórica de um evento tem valor próximo ao da frequência relativa do mesmo.

A metodologia investigativa utilizada, dando tempos razoáveis para os estudantes pensarem em como resolver um problema cujo tema ainda não foi apresentado, pode trazer aos alunos um olhar diferenciado sobre a Matemática, mostrando que ela não é um conhecimento pronto e acabado. E como o problema se mostra contextualizado para a realidade deles, poderão enxergar também que a Matemática não é apenas algo abstrato, mas que possui bastante utilidade para resolução de problemas que podem fazer parte da vida cotidiana.

No próximo capítulo, mostramos como se deu, de fato, a aplicação da atividade nas três turmas do terceiro ano, aula a aula. Será possível observar os principais raciocínios apresentados pelos grupos e como o professor agiu perante eles.

CAPÍTULO 4

A APLICAÇÃO DA ATIVIDADE

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, descrevemos como se deu a aplicação da atividade nas turmas de 3º ano da ETEC Dr. Francisco Nogueira de Lima, contando como cada turma reagiu durante as aulas. Mostramos quais foram as principais tentativas de cada grupo para resolver o problema proposto na atividade e como o professor reagiu diante das ideias expostas. Dentre elas, uma nos deixou muito surpresos: a de um aluno que pensou em resolver o problema do Jogo dos Discos usando programação para simular o método experimental. Porém, muitas outras boas ideias surgiram também e suas descrições seguem nas próximas seções.

4.2 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE PLANEJADA

A aplicação do problema do Jogo dos Discos, cujo planejamento encontra-se no capítulo anterior, deu-se de maneira próxima do que havíamos preparado, tendo sido iniciada depois de algumas semanas após o início do tema Números Complexos, no terceiro bimestre. Deste modo, poderíamos terminar as aulas deste tema praticamente junto com o término da atividade, causando um início propício para o ensino de Probabilidade. Infelizmente, não foi possível realizar o jogo na Feira de Ciências da escola, por conta do tempo para preparo.

Além disso, por conta de alguns feriados, tivemos que fazer algumas alterações no número de aulas destinadas à atividade. Ao invés de 7 aulas, foram necessárias 9. Isso porque na semana que iniciamos a aplicação, havia um feriado e, por isso, poucos alunos compareceram (em média, 50% das classes). O feriado havia acontecido na terça-feira e, por isso, não foi possível prever que na quarta e quinta-feira (dias em que as aulas de Matemática eram ministradas nestas turmas) haveria tantas faltas, já que não é comum este tipo de "emendas". Deste modo, achamos melhor reaplicar o início da atividade na semana seguinte, dando um tempo para quem estava vendo o problema pela primeira vez pensar um pouco, e dando um tempo adicional para quem já havia comparecido às duas aulas de aplicação anteriores. Esse aumento de aulas para aplicação não é necessário em situações normais e isso pôde ser observado pelo que foi produzido nessas duas aulas extras. Na primeira semana de aplicação, muitas ideias haviam sido produzidas, mesmo com a classe com apenas pouco mais da metade da turma. Na semana seguinte, percebeu-se que as ideias que surgiram foram praticamente as mesmas e não houve avanço. Isso quer dizer que, apesar de a classe estar cheia, com mais pessoas pensando sobre o problema, as conclusões que chegaram foram as mesmas, o que mostra que duas aulas para a aplicação inicial e apresentação do problema é realmente o suficiente em situações normais.

Descrevemos a seguir como foi o desenrolar da aplicação da atividade. Para as duas primeiras aulas, mostramos o que cada grupo de cada classe pensou, com o máximo de detalhes possíveis. Essas duas primeiras aulas constituem a principal dificuldade na aplicação desta atividade, já que o professor perde um pouco o controle sobre o que vai acontecer e sobre como vai explicar se está certo ou não cada raciocínio diferente que surgir. Por conta disso é que fazemos questão de mostrar cada pensamento surgido por cada grupo e as atitudes tomadas pelo professor. As duas aulas que foram adicionadas por conta do feriado, como já mencionado, não acrescentaram muito e será brevemente descrita de um modo mais geral. Por fim, faremos as descrições das demais aulas de modo mais generalizado também, sem descrever turma por turma, já que os encaminhamentos foram bem parecidos.

4.2.1 Aplicação da Atividade: Primeira e Segunda Aulas

Primeiramente, explicamos à classe o objetivo do trabalho, que é colocá-los não apenas como receptores de conceitos, mas também como formadores de ideias. Feito isso, pedimos para que formassem grupos de 6 alunos, entregamos a folhinha da atividade para cada um (presente no Apêndice A), lemos junto com eles e refizemos uma breve explicação do jogo através de figuras no quadro, para ter certeza de que entenderam o problema. Deixamos bastante claro que palpitaríamos o mínimo possível nas ideias deles e que esta atividade seria uma das avaliações do bimestre, dizendo também, para alívio de alguns, que a nota seria dada em função do esforço que cada um tivesse e não apenas em função do grupo conseguir resolver ou não. Pôde-se perceber que eles ficam um pouco desesperados quando são colocados em situações diferentes das normais. A partir daí, os grupos começaram a tentar resolver o problema.

Este início foi exatamente igual em todas as classes de aplicação. Seguem agora as descrições do que os estudantes começaram a pensar, organizadas por turma e por grupo formado.

4.2.1.1 Turma B

Nestas aulas, compareceram 20 alunos, de um total de 36, que formaram três grupos. As principais ideias que surgiram foram:

- **GRUPO 1**

Pensaram em resolver usando apenas recursos algébricos. Chegaram a pensar que o percentual de ganho poderia ser calculado como o percentual da área do círculo dentro do quadrado. Inicialmente, mesmo pensando assim, realizaram este cálculo de maneira equivocada, mas, depois de um tempo, conseguiram realizá-lo de maneira correta. Fizemos eles se questionarem se este raciocínio estava correto, o que os fez ficar um pouco em dúvida. Apesar do esforço, não conseguiram pensar em outra hipótese de resolução até o final das duas aulas.

- **GRUPO 2**

Inicialmente, ficaram pensando mais no jogo em si do que em resolvê-lo como foi proposto. Pensaram, por exemplo, que se o jogo fosse feito com argolas, os jogadores poderiam achar que têm mais chance de ganhar porque a argola dá a impressão de que é menor do que um círculo com mesmo raio. Enfim, após esta fase de entendimento do jogo, começaram a pensar em uma maneira algébrica de resolver o problema.

No final da primeira aula, percebemos que uma aluna deste grupo pensou em usar simulações. Ela começou a nos falar o que tinha pensado, mas parou no meio, dizendo que era algo que ela julgava bobo. Percebendo que ela estava querendo dizer exatamente o que queríamos escutar, pedimos para que ela continuasse a falar o que tinha começado. Neste momento, ela começou a tentar inventar outra coisa, ainda acreditando que havia pensado de maneira equivocada. Foi possível perceber que a ideia de Matemática que ela possuía era a de que tudo somente pode ser resolvido usando lápis e papel.

Incentivando-a novamente, ela finalmente nos contou que uma das maneiras que ela pensava que resolveria o problema era lançar discos e ir calculando as frequências de ganho até encontrar um disco que fornecesse o percentual desejado. Dissemos ao grupo que essa ideia nos parecia ser uma boa maneira para resolver o problema e que eles precisavam pensar um pouco melhor em como fariam este tipo de experimentação, se é que eles também achavam esta uma boa ideia. Queríamos que eles realmente concluíssem sozinhos, com convicção, que poderiam resolver o problema deste modo.

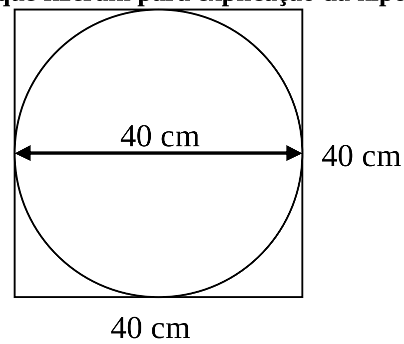
Na segunda aula de aplicação, talvez por ser a última do dia deles, em que inclusive havia relativamente poucos alunos na sala, o grupo deu uma “desandada” e pouco pensaram a mais do que isso, apesar de nossos incentivos. Percebemos que alguns deles estavam tentando ainda resolver de maneira algébrica. Inclusive escutamos um aluno dizer: “Mas não é possível, tem que ter jeito de fazer com contas. Não pode ser só testando”. Nós não os motivamos demasiadamente a continuar pensando nas simulações, pois queríamos fazer isso quando a classe toda estivesse lá e tivessem pensado um pouco também. Por conta disso, preferimos ainda não pedir para que socializassem o raciocínio.

- **GRUPO 3**

Ficaram pensando em várias maneiras de se resolver o problema, todas usando apenas a álgebra. Primeiramente, pensaram que a porcentagem de ganho para o jogador seria igual à porcentagem da área do disco sobre a área do quadrado. Usando este raciocínio, tentaram encontrar um valor de diâmetro para o disco que fizesse com que sua área fosse 70% da área do quadrado. Questionamo-los se eles podiam afirmar com certeza que este modo de resolver estava correto, o que os fez ficar mais pensativos.

Em seguida, pensaram em outra hipótese: “tomando por base um piso formado por quadrados de 40 cm de lado, o círculo com 40 cm de diâmetro é o que dá 100% de ganho para a escola. Então, com uma regra de três simples, podemos calcular aquele que daria 70% de ganho para escola.”

Figura 20 – Figura que fizeram para explicação da hipótese pensada



Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste momento, depois de pensar um pouco, explicamos a eles que só podemos aplicar regra de três a grandezas que são diretamente proporcionais, ou seja, a grandezas que quando dobramos o valor de uma, dobra-se o valor da outra também, ou quando triplicamos a primeira, triplica-se a segunda também, e assim por diante. “Será que a porcentagem de ganho e o diâmetro do disco são diretamente proporcionais?”.

Mostramos a eles um exemplo de grandezas que não são diretamente proporcionais e, assim, a regra de três não funciona. Este exemplo consistia em aplicar este raciocínio para calcular a área de um quadrado. Pensamos: 20 cm de lado me fornecem área de 400 cm^2, então 30 cm de lado fornecerá, com regra de três, 600 cm^2 de área. Mas sabemos que, na verdade, a área de um quadrado de 30 cm de lado é $30^2 = 900\,cm^2$. Pôde-se perceber então que a regra de 3 não poderia ser aplicada neste caso. Neste momento, deixamos que eles pensassem mais no assunto, para descobrirem se a hipótese deles estava correta ou não.

Ao final da segunda aula de aplicação, comentamos com a classe toda qual tinha sido o pensamento mais comum entre as pessoas (porcentagem da área do círculo na área do quadrado) e mostramos o porquê de isso não estar certo: se isso fosse correto, o círculo com diâmetro igual ao lado do quadrado, que fornece 100% de ganho para a escola, deveria ocupar 100% da área do quadrado, o que não ocorre. Neste momento a aula acabou.

4.2.1.2 Turma C

Nestas aulas, compareceram 23 alunos, de um total de 37, que formaram quatro grupos. As ideias que surgiram foram:

- **GRUPO 1**

Pensaram em resolver na base do "chute", usando um meio visual. Fizeram uma figura de um quadrado com 20 cm de lado e desenharam dentro um círculo de 16 cm de diâmetro. Julgavam que este devia ser o disco que dava 70% de chance de vitória para a escola, mas não sabiam se o pensamento estava correto. Perguntaram-nos como se mostrava isso e respondemos que era exatamente o que eles teriam que pensar. Pensaram mais um pouco depois, mas não tiveram grandes evoluções quanto à resolução deste problema até o final da segunda aula.

- **GRUPO 2**

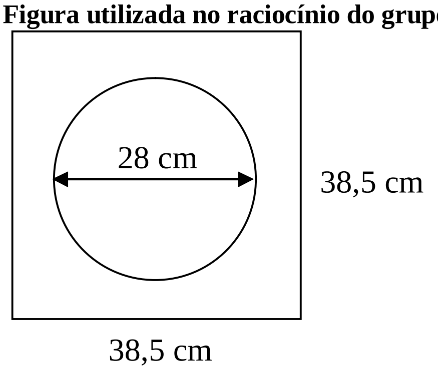
Inicialmente, também pensaram em resolver o problema no "chute". Disseram que "em um quadrado de 40 cm de lado, o círculo deve ter uns 25 cm de diâmetro para dar os 70% de chance para a escola". Dissemos a eles que pensassem melhor, para que se colocassem realmente no lugar da pessoa que aplicaria o jogo valendo dinheiro: "se esse diâmetro não for bem calculado, a pessoa pode até mesmo ter prejuízo. Pensem se é realmente este o valor do diâmetro que querem". Na primeira aula avançaram somente até este ponto.

Na segunda aula, disseram-nos o seguinte: "Num quadrado de 38,5 cm de lado, se pegarmos um círculo com 28 cm de diâmetro, teremos aproximadamente 72% de chance de vitória para a escola. Isso pode ser mostrado pela seguinte regra de três:

$$\begin{array}{lcl} 38{,}5\text{cm} & ------- & 100\% \\ 28\text{cm} & ------- & x \end{array}$$

$$38{,}5x = 28 \cdot 100$$
$$\boxed{x \approx 72\%}$$

Figura 21 – Figura utilizada no raciocínio do grupo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Notamos que eles pensaram como se o percentual de ganho fosse proporcional ao tamanho do diâmetro, que poderia variar até 38,5 cm. Este raciocínio foi parecido com o empregado pelo grupo 3 da Turma B. Assim, apliquei o mesmo tipo de explicação para eles, deixando que eles pensassem mais no assunto, para descobrirem se esta hipótese estava correta ou não.

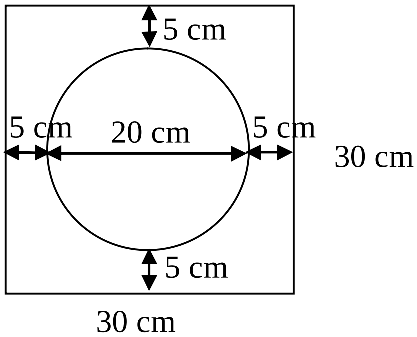
- **GRUPO 3**

Não tiveram grandes conclusões. Percebemos em certo momento que estavam pensando no jogo com algumas regras alteradas, que poderiam dificultar muito a sua resolução. Dissemos para que considerassem apenas as regras expressas na folhinha, para facilitar um pouco e motivamo-los a tentar responder o problema.

- **GRUPO 4**

Foram os primeiros a se exaltar. Inclusive foi um aluno que normalmente não participa muito das aulas (parece estar sempre com sono) que deu a primeira ideia. Este grupo pareceu-me bastante entusiasmado em descobrir a resposta e eles se empenharam bastante para resolver o problema. No início, fizeram o seguinte desenho, ilustrando o tamanho de piso que adotaram e a dimensão de um disco:

Figura 22 – Desenho utilizado no raciocínio do grupo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo após isso, pensaram de maneira parecida com outros grupos já mencionados, aplicando uma regra de três simples:

$$\begin{array}{lcl} 30\text{cm} & ------- & 100\% \\ 5\text{cm} & ------- & x \end{array}$$

$$30x = 5 \cdot 100$$

$$\boxed{x \approx 17\%}$$

Deste modo, concluíram que o jogador teria 17% de chance de vencer, já que tinha apenas 5 cm livre de cada lado para o disco cair. Pedimos para pensarem se achavam realmente que essa era a chance do jogador vencer com esse tamanho de círculo. Eles fizeram um desenho em tamanho real para ajudar, mas desistiram da ideia.

Resolveram, então, trocar de método. Começaram a pensar que a probabilidade do jogador perder era igual à porcentagem da área "livre" (fora do círculo e dentro do quadrado) em relação ao quadrado todo. Assim, tomando o mesmo caso de antes, com as mesmas medidas do desenho:

$$\text{Área do círculo} = \pi \cdot 10^2 \approx 314\text{cm}^2$$
$$\text{Área livre} \approx 900 - 314 = 586\text{cm}^2$$

Calculando a porcentagem, viram, por regra de três, que a área livre representava aproximadamente 65% da área do quadrado, de onde concluíram que a probabilidade de a escola ganhar era 65%.

No final da aula, comentamos com eles o porquê de isso não estar certo, assim como fizemos para a outra classe: se isso fosse correto, o círculo com diâmetro igual ao lado do quadrado, que fornece 100% de ganho para a escola, deveria ocupar 100% da área do quadrado, o que não ocorre.

Eles concordaram com a justificativa e, pouco antes de acabar a segunda aula um dos alunos do grupo comentou que uma maneira que daria certo, mas daria muito trabalho, era fazer o lançamento de círculos e fazer a contagem de casos em que a escola ganha. Incentivamos o grupo neste sentido e pedimos para pensarem mais um pouco, até que a aula acabou.

4.2.1.3 Turma D

Nestas aulas, compareceram 13 alunos, de um total de 39. Esta foi a turma que menos alunos compareceu e, por isso, apenas dois grupos foram formados. As principais ideias que surgiram foram:

- **GRUPO 1**

Mostraram interesse em resolver o problema de maneira algébrica. Pediram-nos a fórmula para o cálculo da área de um círculo, a qual fornecemos, e logo após isso começaram a calcular a porcentagem que o círculo de 6 cm de raio ocupava em relação a um quadrado de 20 cm de lado. Estavam com dificuldades para este tipo de conta, mas, depois de algumas explicações, conseguiram efetuar o cálculo. Mesmo assim, fizemos eles se questionarem se essa era a maneira correta de se calcular essa probabilidade. Mostramos que quando colocamos um círculo dentro de um quadrado, nem toda a área que sobra fora dele e dentro do quadrado é favorável ao jogador. Pararam o pensamento por ai, mas se mostraram bastante motivados em buscar a solução do problema. Uma observação importante é que este grupo continha alunos que normalmente não mostravam muito interesse pela Matemática. Desse modo, acreditamos que a abordagem de um problema contextualizado trouxe grande benefício para o grupo.

- **GRUPO 2**

Pensaram, antes de tudo, sobre o próprio jogo. Queriam que ele causasse uma ilusão ao jogador de que ele tinha grande chance de ganhar, assim como ocorre em parques, que foram objetos de reportagem do programa Fantástico (a reportagem do Fantástico sobre estes jogos que iludem os jogadores se chama Parque das Enganações e pode ser facilmente encontrado na *internet*). Incentivamos a ideia e dissemos que era exatamente o tamanho do círculo que causaria essa ilusão. Portanto, a escolha da porcentagem pedida era muito importante. Depois, ainda antes de calcular o diâmetro do disco que queriam, mostraram interesse em descobrir quanto a escola ganharia se 100 pessoas jogassem a R$ 5,00 cada disco. Fizeram o cálculo com base em 70% de chance para a escola ganhar e concluíram corretamente que ela provavelmente ganharia R$ 200,00.

Houve também tentativas de resolver o problema algebricamente, mas não obtiveram sucesso. No final da aula, uma aluna do grupo pensou em fazer o uso de simulações: “E se eu pegar um disco e jogar 10 vezes num piso para ver minha probabilidade?” Motivamo-los, mas fizemos com que se questionassem se 10 jogadas seriam realmente suficientes.

4.2.2 Aplicação da Atividade: Aulas Adicionais

Estas aulas adicionais, originadas devido ao feriado, não apresentaram grandes avanços para as turmas. O número de grupos por classe aumentou, mas as ideias em geral foram as mesmas. Vale a pena destacar apenas que mais um aluno da Turma C, chamado Lucas, pensou em usar simulações, só que usando recurso computacional. A ideia dele era programar algo que pudesse simular os lançamentos de discos para fazer a contagem dos casos favoráveis à escola. Pedimos para que pensasse bem e que, se ele estivesse realmente disposto a fazer isso, poderíamos tentar ajudá-lo apenas com um pouco de lógica de programação, já que não conhecíamos a linguagem que ele queria usar. Enfim, esta foi a única proposta de solução diferente que ocorreu nestas aulas.

Agora perceba, pelas descrições da seção anterior, que em todas as turmas houve alguém que teve a ideia de usar a experimentação para resolver o problema. Por conta disso, o Plano A, descrito na seção 3.3.1.1, foi utilizado em todas elas. Deste modo, ao final dessas aulas adicionais, pedimos para que cada grupo que havia pensado em usar simulações socializasse a proposta com a classe para podermos discutir, já que nenhum outro grupo havia conseguido ainda pensar em um método diferente e correto para resolver o problema, apesar das tentativas.

Feita a socialização e a discussão, todos concordaram que a utilização de simulação poderia funcionar. Combinamos então que pensassem em casa como proceder para a realização da simulação, sendo que a próxima aula a respeito desta atividade serviria, assim, para retirada de dúvidas sobre como realizá-la. Durante as semanas que antecederam as terceira e quarta aulas do cronograma de aplicação, ficamos constantemente lembrando os alunos de pensarem sobre isso, para não correr o risco de afirmarem que tinham se esquecido.

4.2.3 Aplicação da Atividade: Terceira e Quarta Aulas

Na terceira e quarta aulas de aplicação do problema do Jogo dos Discos, procedemos da mesma maneira descrita na seção 3.3.2. No início da aula, foram feitos os questionamentos previstos a respeito de como fazer a experimentação e deixamos que os alunos pensassem em como respondê-los visando obter resultados os mais precisos possíveis.

Pedimos para que anotassem as suas respostas e levantassem outros questionamentos, se julgassem necessário.

Dado o tempo de aproximadamente uma aula para isso, iniciamos uma fase de discussão sobre o que tinham pensado e o professor ajudou a classe a chegar a um consenso, explicando o porquê de algumas respostas serem melhores do que outras no que diz respeito a obter precisão. Na verdade, as respostas não se diferenciaram muito umas das outras, de modo que todas tendiam para o que julgamos correto. Estas aulas foram relativamente tranquilas e não houve algo muito fora do esperado.

Ao final da aula, fizemos anotações na lousa sobre o que tínhamos combinado. Cada grupo ficaria responsável por:

- Fazer a experimentação em casa, utilizando pisos quadrados, com a menor largura de rejunte possível. Além disso, dever-se-ia tentar realizar o experimento em um local onde o assentamento dos pisos estivesse o mais plano possível, sem ladrilhos ressaltados;

- Confeccionar discos de pelo menos 4 diâmetros diferentes para lançar sobre o piso quadriculado. Recomendou-se que fizessem cerca de 10 discos de cada diâmetro para que o tempo de realização do experimento se minimizasse, porém isto era opcional. Além disso, os diâmetros deveriam ser escolhidos por eles mesmos e não deveriam ter valores tão próximos uns dos outros. Podiam fazer os discos, por exemplo, com papelão;

- Realizar 200 lançamentos aleatórios de cada tipo de disco, no mínimo. Para quem havia feito 10 discos de certo diâmetro, por exemplo, eram necessários apenas 20 lançamentos com os 10 discos de uma só vez, lembrando que, se dois discos ficassem sobrepostos, bastaria pegar o de cima e realizar um novo lançamento apenas com ele;

- Colocar os resultados obtidos em tabelas e trazer para a próxima aula, lembrando também de anotar o tamanho do lado dos pisos utilizados na experimentação. Os modelos de tabela que eles deveriam utilizar seriam os expostos na Tabela 10 e na Tabela 11.

Pedimos para que tirassem fotos do processo de experimentação e, novamente, nas semanas que antecediam as últimas aulas de aplicação, ficamos repetidamente lembrando-os de realizarem o experimento em casa.

Para o caso do Lucas, que queria fazer simulações no computador, discutimos um pouco a sós e ajudamo-lo com um pouco da lógica, mostrando que, na verdade, quando lançamos um disco no piso, podemos pensar que estamos lançando um ponto e que, se esse ponto estiver a uma distância menor do que o raio do disco até alguma borda, a escola vence. Assim, ele poderia escolher coordenadas aleatórias para um ponto, como se estivesse sendo jogado, e calculando se este ponto daria vitória para a escola ou para o jogador. Apesar de nossa ajuda, ele já parecia ter pensado nessa lógica também. Por fim, só pedimos a ele para que, se conseguisse fazer o programa, não contasse ao restante da turma, senão não iriam querer fazer a experimentação manual e sim utilizar o programa pronto dele. No próximo capítulo, falamos melhor sobre este aluno e como ele resolveu o problema usando um método completamente diferente dos outros. Para sermos sinceros, não tínhamos 100% de convicção que ele conseguiria resolver desta maneira, já que a programação não seria tão simples e teria que usar outros conceitos, como o de coordenadas no plano e de multiplicidade, mas fomos surpreendidos.

4.2.4 Aplicação da Atividade: Quinta e Sexta Aulas

Nestas aulas, por algum motivo percebemos que alguns grupos não tinham de fato realizado o experimento em casa, apesar de possuírem tabelas preenchidas. Para poder confirmar isso, como conhecíamos o método algébrico da solução, pedimos para que os grupos nos mostrassem as tabelas resumo para vermos os resultados obtidos e, com uma calculadora na mão, calculávamos a probabilidade de ganho teórica e comparávamos com os resultados deles. Percebemos que a maioria dos grupos havia realmente feito o experimento em casa, pois os valores percentuais de ganho para a escola eram próximos das probabilidades teóricas, mas vimos também que alguns estavam inventando dados aleatórios. Esse método de “correção” permitiu mostrar para os que não haviam realizado o experimento em casa que eles não poderiam nos enganar tão facilmente, de modo que eles teriam realmente que realizar as simulações.

Feita essa “correção”, demos um tempo para que os grupos, de posse dos dados que obtiveram, tentassem responder à atividade, ou seja, descobrissem o diâmetro do círculo que deveria ser lançado para que a escola tivesse o percentual de ganho que eles queriam. Em alguns casos, o grupo já havia feito, por sorte, um disco com o tamanho que fornecia exatamente o percentual que eles desejavam. Nesses casos, pedimos para que tentassem calcular, então, um diâmetro para um percentual que outro grupo queria.

Ninguém conseguiu pensar em modelagem gráfica. Todos tentaram responder com base em uma espécie de média entre dois valores que conheciam. Se, por exemplo, queriam um ganho de 60% e sabiam que um disco com diâmetro x dava 50% de ganho para a escola e outro com diâmetro y dava 65%, escolhiam um valor quase aleatório entre estes dois diâmetros, um pouco mais próximo de y.

No final da sexta aula, explicamos então o método de modelagem que poderia ajudá-los nesta atividade. No próprio quadro, simulamos pontos aleatórios em um gráfico, como se fossem resultados de uma experimentação, acrescentamos os pontos $(0,0)$ e $(40,100)$, como se o piso tivesse 40 cm de lado, justificamos o porquê desse acréscimo de pontos e modelamos uma curva que se ajustava a eles. Assim, a partir da curva traçada, concluímos, juntamente com os alunos, que poderíamos obter o diâmetro que o disco deveria ter a partir da porcentagem de ganho desejada. Acreditamos que todos haviam entendido, mas como estava no final da aula, não houve tempo para que eles pudessem elaborar o próprio gráfico e entregar o trabalho, como estava planejado. Essa falta de tempo ocorreu por conta da "correção" das tabelas no início, que estava fora do planejamento.

Ficou combinado então, que cada grupo montaria esse gráfico em casa e elaboraria um trabalho para posterior avaliação. A data para entrega seria a próxima aula, que também seria a última relativa ao Jogo dos Discos. Este trabalho deveria conter todas as tabelas produzidas, o gráfico com os pontos e uma curva de ajuste, e, por fim, a conclusão da atividade, onde apontariam, a partir do gráfico, qual deveria ser o diâmetro do disco para obter o percentual de ganho para a escola que eles queriam. Além disso, pedimos para que acrescentassem fotos da realização do experimento e também o método que haviam pensado em resolver o problema inicialmente, ainda que de maneira incorreta, para poderem fazer uma comparação de resultados e para que tivéssemos mais material para análise.

Nestas aulas, percebemos que um aluno da turma D, chamado Thiago, estava conseguindo resolver o problema algebricamente. Ajudamo-lo a confirmar a sua ideia, mas pedimos para que também realizasse o problema utilizando o método experimental. O aluno Lucas, que estava realizando as simulações computacionais, estava na fase final da programação. Estávamos ansiosos para ver esse programa funcionar.

4.2.5 Aplicação da Atividade: Última Aula

Na última aula da aplicação da atividade, recolhemos os trabalhos de cada turma e fizemos a resolução da atividade no quadro utilizando recurso algébrico. Percebemos que muitos ficaram encantados com a solução e outros relativamente bravos por terem tido tanto trabalho para resolver algo que podia ser resolvido tão rapidamente. Comentamos então sobre a importância da resolução utilizando experimentação e da importância da manipulação algébrica, que em muitas vezes pode economizar tempo e dinheiro. Por fim, pedimos para que cada aluno fizesse uma auto-avaliação e uma avaliação de cada membro do grupo, descrevendo também o que achou da atividade como um todo. Na aula seguinte, iniciamos o ensino de Probabilidade, como havíamos previsto. O programa do aluno Lucas estava pronto e seu trabalho muito interessante. Como já dito, vamos falar melhor a respeito disso no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DOS TRABALHOS ENTREGUES E DOS RESULTADOS OBTIDOS

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos uma breve análise dos trabalhos entregues e mostramos nossas principais impressões turma a turma, a fim de tirar algumas conclusões no final. Apresentamos também algumas fotos e digitalizações de parte dos trabalhos dos estudantes, como gráficos, tabelas e cálculos e incluímos algumas estatísticas.

5.2 TRABALHOS DA TURMA B

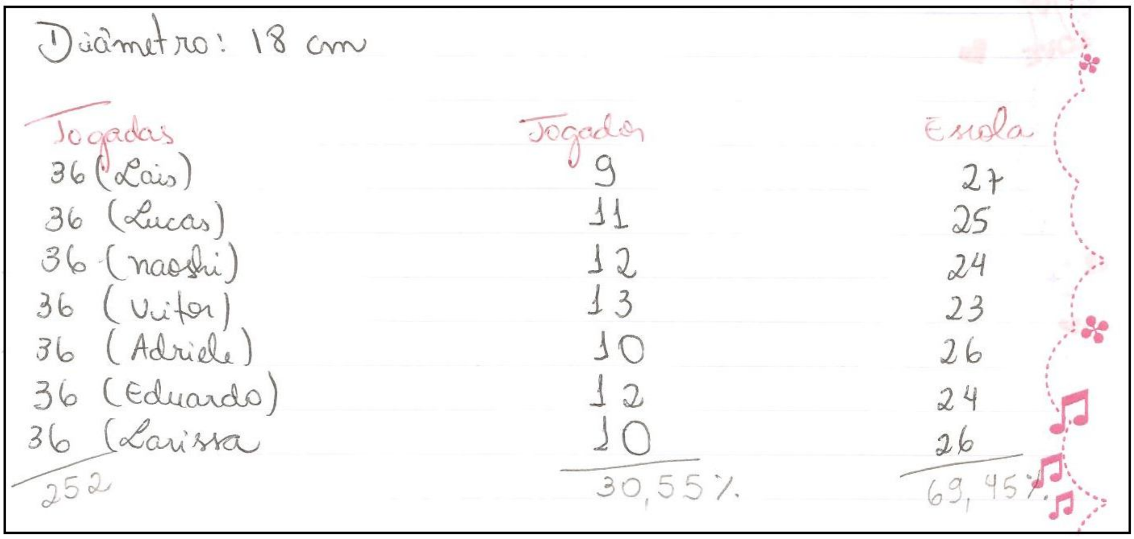
Nesta turma, haviam-se formado 5 grupos, sendo alguns deles com mais do que os 6 alunos que havíamos permitido de início. Admitimos grupos maiores para podermos observar como eles trabalhariam, se mais ou se menos do que outros. Pelas auto-avaliações e avaliações dos membros do grupo, as quais pedimos na última aula de aplicação do problema, podemos perceber que grupos com mais de 6 alunos apontaram que houve muitos membros que não participaram efetivamente da realização do trabalho e da atividade. Pelas análises de todas as auto-avaliações, podemos perceber que 5 alunos por grupo seria o ideal.

Dos 5 grupos formados na classe, apenas 4 entregaram o trabalho final. Com uma análise destes trabalhos, vimos que poucos realizaram a confecção de 10 discos de cada diâmetro para ficar jogando. Em geral, preferiram fazer menos discos e jogar mais vezes. Além disso, devido à discussão que tivemos em classe sobre a precisão na experimentação, alguns grupos realizaram mais de 200 lançamentos com cada tipo de disco e também mais de 4 tipos de discos, a fim de obter resultados mais precisos.

Figura 23 – Fotos do trabalho de um grupo, que mostra estudantes jogando o Jogo dos Discos

Fonte: Trabalhos da Turma B.

Figura 24 – Tabela de lançamentos de discos de 18 cm de diâmetro em pisos de 40 cm de lado. A porcentagem teórica de ganho para a escola é 69,75% e obtiveram um valor muito próximo, 69,45%.



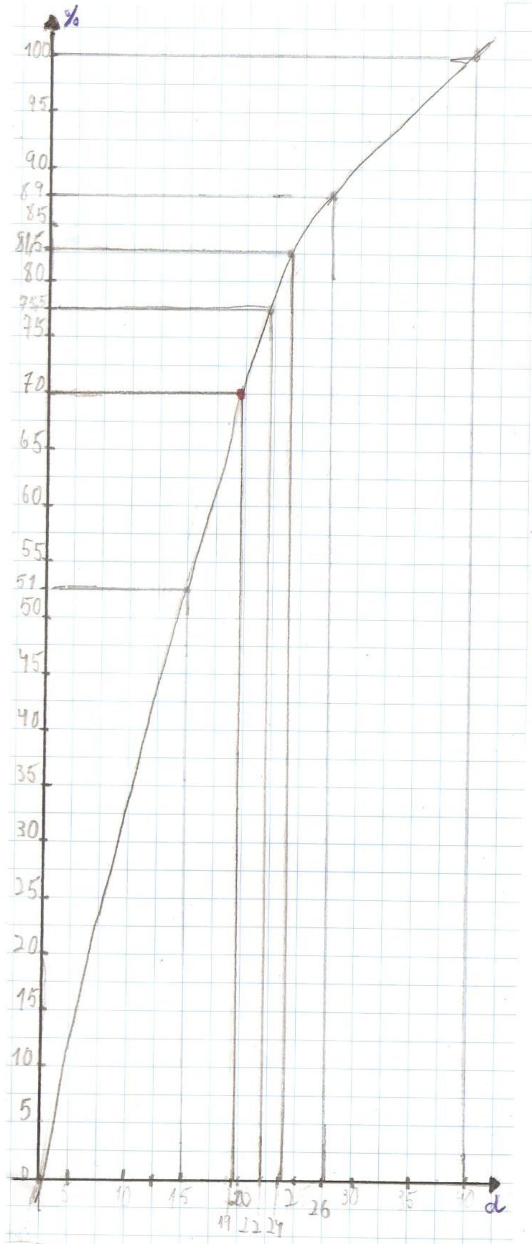
Diâmetro: 18 cm

Jogadas	Jogador	Escola
36 (Laís)	9	27
36 (Lucas)	11	25
36 (naoshi)	12	24
36 (Vitor)	13	23
36 (Adriele)	10	26
36 (Eduardo)	12	24
36 (Larissa	10	26
252	30,55%	69,45%

Fonte: Trabalhos da Turma B.

Para aplicar a modelagem do gráfico com mais precisão, dois dos quatro grupos desta sala utilizaram papel quadriculado com grandes dimensões, tornando a visualização mais clara. Alguns gráficos ocupavam a área de dois papéis A4, aproximadamente, e isso permitia que os eixos possuíssem os valores bem espaçados, aumentando a precisão na visualização, posterior à modelagem da curva, do diâmetro desejado. Estes gráficos ficaram muito bons, porém, devido às suas dimensões, as digitalizações dos mesmos ficaram ruins e achamos melhor não apresentar nesta dissertação. Um terceiro grupo, apesar de fazer um gráfico em escala muito pequena e traçar uma curva passando por todos os pontos, quase linearmente de um ponto para outro, obteve dados relativamente precisos. Segue sua digitalização na Figura 25:

Figura 25 – Gráfico produzido por um grupo da turma B. Concluíram que o disco de 19 cm de diâmetro é que daria os 70% de ganho que desejavam. Como o piso era de 40 cm de lado, o valor teórico é 18,1 cm. Apesar de o gráfico não estar tão bem feito quanto os outros, chegaram a um valor próximo.



Fonte: Trabalhos da Turma B.

Em apenas um dos trabalhos entregues é que podemos perceber que é possível que o grupo não tenha realizado a experimentação em casa. Apesar de nossa “correção”, os dados mostrados nas tabelas deste grupo estão muito diferentes dos valores teóricos (cerca de 15% para mais ou para menos). Além disso, o gráfico produzido fica praticamente linear, de onde podemos ver que é provável uma forja de dados.

Todavia, de modo geral, percebemos que aproximadamente 70% dos estudantes desta turma “pegaram o espírito do problema” e se empenharam muito para resolvê-lo, estando a maior parte dos trabalhos entregues muito bem feitos. Isso mostra um resultado positivo para a turma, que pôde se aproveitar de um problema contextualizado e “por a mão na massa” para resolvê-lo.

5.3 TRABALHOS DA TURMA C

Nesta turma, haviam-se formado 6 grupos e todos eles entregaram um trabalho. Porém, apenas dois destes trabalhos estavam bem feitos, sendo um deles o do aluno Lucas, que usou recurso computacional. Os outros 4 estavam, provavelmente, com dados falsos. Isso evidencia que, em alguns casos, é preferível pedir para que os grupos façam os discos em casa e, na aula, usem um espaço do próprio colégio para fazer os arremessos e a contagem. Se não houver pisos quadrados no colégio, pode-se usar alguma fita para quadricular o chão da própria classe e simular pisos. Isso, de algum modo, forçaria os alunos a terem contato com a experimentação. Nós não usamos este tipo de recurso para economizar tempo para os demais assuntos do ano e também porque acreditávamos que não haveria este problema nas classes que estávamos dando aula. Um dos possíveis motivos de isto ter acontecido, é o fato de ter havido muitas faltas dos alunos durante as principais aulas de aplicação. Devido a outro feriado (além do já mencionado), também na terça-feira, muitos alunos perderam outras aulas de aplicação (que eram na quarta e quinta-feira). Apesar da explicação que fizemos aos alunos que faltaram em aulas posteriores, pôde-se perceber que eles não ficaram muito engajados com o problema, infelizmente.

Seguem algumas digitalizações do trabalho do grupo que realizou toda a experimentação em casa conforme o combinado e, em seguida, a descrição do trabalho do aluno Lucas, que usou um recurso computacional para simular o jogo.

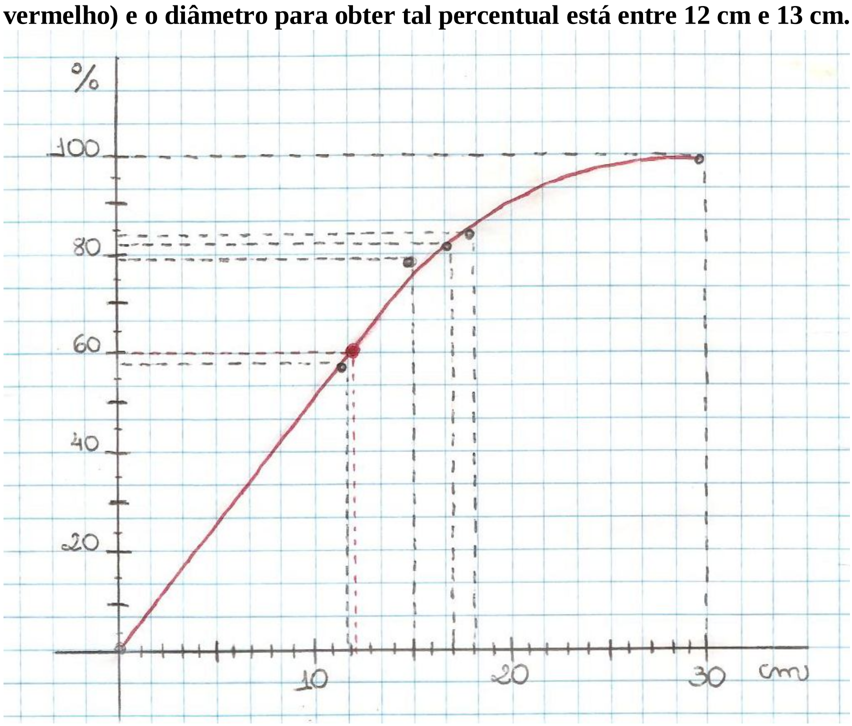
Figura 26 – Tabela resumo dos lançamentos dos discos em pisos quadrados com 30 cm de lado. Os percentuais de ganho estão relativamente próximos dos valores teóricos.

Tabela Final:

Diâmetro	Nº Jogadas	Escola	Jogador	% Ganho
12 cm	200	118	82	59%
15 cm	200	159	41	79,5%
17 cm	200	167	33	83,5%
18 cm	200	168	32	84%

Fonte: Trabalhos da Turma C.

Figura 27 – Gráfico produzido pelo grupo. Note que o percentual de ganho que desejavam era 60% (ponto vermelho) e o diâmetro para obter tal percentual está entre 12 cm e 13 cm.



Fonte: Trabalhos da Turma C.

Figura 28 – Foto de um dos lançamentos de discos do grupo.

Fonte: Trabalhos da Turma C.

Figura 29 – Conclusão apresentada pelo grupo a respeito do problema do Jogo dos Discos.

- **Conclusão:**

Antes da experimentação foi proposto um percentual de ganho da escola de 60% e diâmetro de 18 cm ou 15 cm. Através dos testes foi possível concluir que o diâmetro ideal deve ser de aproximadamente 12,2 cm para que a escola possa obter 60% de ganho, pois os outros possíveis valores de diâmetro testados mostraram uma chance muito grande de erro por parte dos jogadores, principalmente com diâmetro de 18 cm, o qual apresenta uma probabilidade mínima de o jogador vencer: apenas 16% de chance.

Obs: No entanto, concluiu-se também que a forma de elaboração da trajetória de pensamento estava errada, pois o valor achado: 18 cm , corresponde a 60% dos 30 cm do piso, e não ao valor que seria do diâmetro para se obter 60% de ganho para a escola.

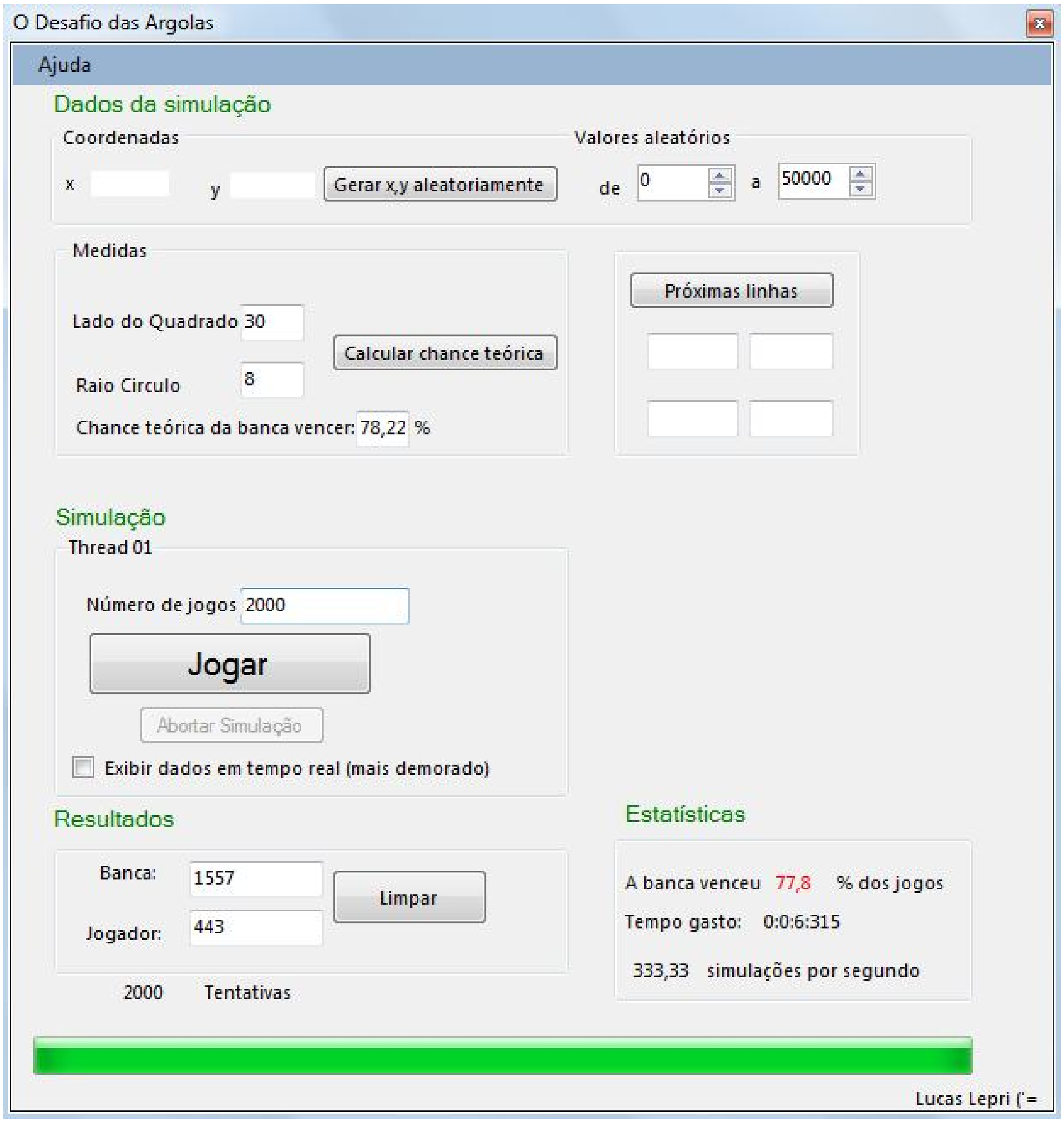
Fonte: Trabalhos da Turma C.

5.3.1 O Trabalho de Lucas

Esta subseção será destinada a mostrar um pouco sobre o trabalho do Lucas, da turma C. Ele, de fato, conseguiu implementar um programa que simulava o Jogo dos Discos e, além disso, também descobriu a fórmula teórica de ganho para o jogador e para a escola.

O programa que ele desenvolveu tem praticamente o mesmo efeito da simulação manual que foi realizado pelos outros alunos, porém tem a vantagem de realizar tudo em segundos e de obter maior precisão, tendo em vista que é possível realizar muitas jogadas de discos de uma só vez, ao invés de apenas 200. É claro que a implementação demorou bastante, mas para este aluno isso seria mais divertido do que fazer o procedimento comum. Segue, na Figura 30, a tela do programa criado:

Figura 30 – Tela do programa do Lucas



Fonte: Trabalhos da Turma C.

Descreveremos sucintamente abaixo o que o programa faz:

- Em “Dados da simulação”, quadro “Medidas”, preenchendo os campos “Lado do Quadrado” e “Raio do Círculo”, a chance teórica de a escola (que ele chamou de banca) ganhar é calculada quando se pressiona o botão “Calcular chance teórica”. Na figura, está representada uma simulação que fizemos. Colocando o lado do quadrado igual a 30 cm e o raio igual a 8 cm, a chance fornecida foi de 78,22%, que confere com a teoria.

- Em “Simulação”, podemos colocar o número de jogadas que queremos realizar com o disco cujo raio já definimos em um chão ladrilhado com quadrados cujo lado também já teve a medida definida. Ao pressionarmos o botão “Jogar”, o programa faz as simulações e, em “Resultados”, é mostrado em quantas vezes a banca ganhou e em quantas o jogador ganhou. A figura mostra uma simulação feita, em que mandamos o programa realizar 2000 jogadas, e obtivemos 1557 vitórias para a banca e 443 para o jogador.

- Em “Estatísticas” o programa fornece o percentual de vezes em que a escola ganhou com a simulação realizada, o tempo gasto para computar todas as jogadas pedidas e a média de simulações por segundo que o computador realizou.

- Como curiosidade, se marcarmos a caixa “Exibir dados em tempo real (mais demorado)” antes de clicar em “Jogar”, é mostrado, em “Dados da simulação”, quadro “Coordenadas”, cada ponto gerado aleatoriamente nas simulações, que representam os centros dos círculos lançados. Estes pontos terão coordenadas x e y variando entre os valores preenchidos (de 0 a 50000 na figura anterior). Além disso, pode-se gerar pontos aleatórios no intervalo dado, apenas como curiosidade, clicando-se em “Gerar x,y aleatoriamente”.

- Por fim, clicando-se no botão “Próximas linhas”, são exibidos os valores das coordenadas x e y das linhas de piso que se situam antes e depois da coordenada do ponto gerado aleatoriamente. Isso serve para termos noção de qual piso contém o disco lançado. Para obter maior precisão, as contas do programa multiplicam os valores do lado do quadrado e do raio do círculo por 10. Assim, os valores mostrados quando clicamos em “Próximas linhas” já levam em conta essa multiplicação. No nosso exemplo, os valores para x e y teriam espaçamento de 300, já que os lados dos quadrados eram 30.

Vamos entender melhor como o programa funciona. Para cada jogada, o programa faz as simulações da seguinte maneira:

- Primeiramente, gera um ponto (x, y) aleatório para o centro do disco com coordenadas entre valores definidos;

- Dada uma coordenada do centro, ele calcula quais são os valores que são múltiplos do tamanho do piso e que se situam antes e depois do x do centro gerado. Faz o mesmo com o y do centro, calculando os múltiplos do tamanho do piso que se situam abaixo e acima dele;

- Soma o valor do raio do disco à coordenada x do centro e verifica se obtém um valor maior do que o múltiplo do tamanho do piso que se situava depois do x do centro. Se for maior, então a escola vence;

- Subtrai o valor do raio do disco da coordenada x do centro e verifica se obtém um valor menor do que o múltiplo do tamanho do piso que se situava antes do x do centro. Se for menor, então a escola vence;

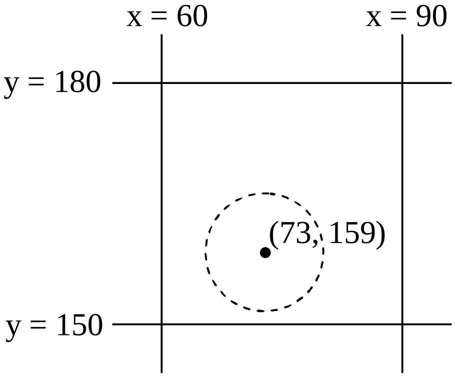
- Aplica o mesmo raciocínio para as coordenadas y;

- Se nenhum dos casos anteriores aconteceu, o jogador vence. Caso contrário, a escola vence;

- Repete esse procedimento a quantidade de vezes que pedimos no campo "Número de jogos".

Para melhor entendimento, imagine que foi definido que o lado do quadrado é 30 e que o raio do círculo é 8. Então o programa primeiro gerará um ponto aleatório, por exemplo, (73, 159). Depois, verificará onde há linhas de piso ao redor deste ponto (as primeiras linhas de piso têm equações $x = 0$ e $y = 0$). Para isso, calcula os múltiplos de 30, que é o lado do piso, e verifica quais estão antes e depois de 73 e 159. Encontrará retas de equações $x = 60$, $x = 90$, $y = 150$ e $y = 180$. Isso delimita o piso onde o ponto está.

Figura 31 – Ilustração para entendimento do procedimento do programa



Fonte: Elaborada pelo autor.

Depois, soma o valor do raio, que em nosso caso é 8, com 73 e verifica se é maior ou igual a 90, subtrai o valor do raio de 73 e verifica se é menor ou igual a 60, soma o valor do raio com 159 e verifica se é maior ou igual a 180, subtrai o valor do raio de 159 e verifica se é menor ou igual a 150. Se nenhuma dessas condições aconteceu, marca-se uma vitória para o jogador. Caso contrário, marca-se uma vitória para a banca (a única diferença para o que descrevemos acima, é que o programa multiplica todos os valores por 10, para obter maior precisão).

Pode-se perceber, pelo programa que o Lucas implementou, que ele entendeu perfeitamente o funcionamento do jogo e, seguindo a própria lógica do programa que criou, descobriu a maneira teórica de fazer o cálculo da probabilidade.

Com este programa, ele poderia simular quantas jogadas quisesse de quantos diâmetros diferentes quisesse. Poderia ficar testando valores de raio até encontrar o que queria. Todavia, pedi para que ele também fizesse uma tabela e um gráfico, como o restante da turma, para poder ter contato com a modelagem de problemas. Segue a tabela que ele construiu:

Figura 32 – Tabela que o Lucas construiu. Note que foram realizadas 50000 jogadas com cada disco

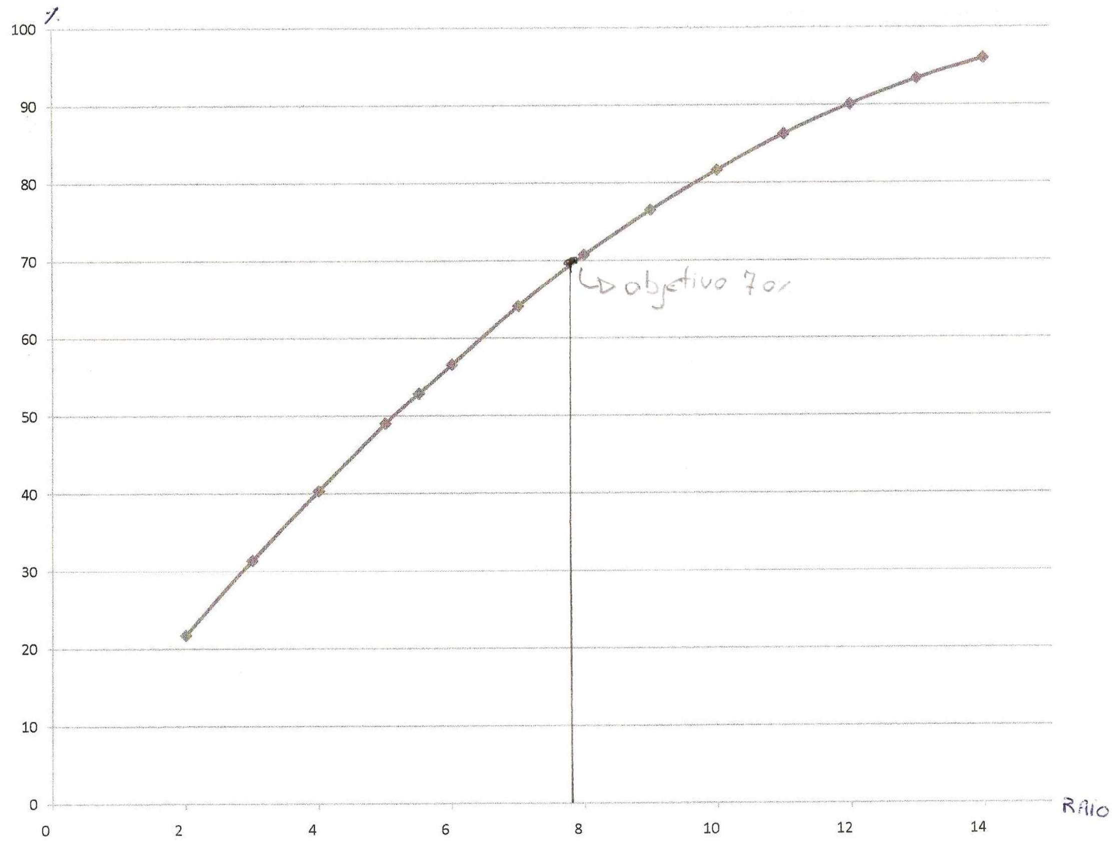
Teste	Quadrado	Argola (raio)	Jogadas	Banca	Jogador	% prático	% teórico
	35x35	2	50.000	10.889	39.111	21,77	21,55
	35x35	3	50.000	15.724	34.276	31,44	31,34
	35x35	4	50.000	20.193	29.807	40,38	40,48
	35x35	5	50.000	24.530	25.470	49,06	48,97
	35x35	5,5	50.000	26.448	23.552	52,89	52,97
	35x35	6	50.000	28.306	21.694	56,61	56,81
	35x35	7	50.000	32.076	17.924	64,15	64,00
	35x35	8	50.000	35.393	14.607	70,78	70,53
	35x35	9	50.000	38.264	11.736	76,52	76,40
	35x35	10	50.000	40.846	9.154	81,69	81,63
	35x35	11	50.000	43.168	6.832	86,33	86,20
	35x35	12	50.000	45.043	4.957	90,08	90,12
	35x35	13	50.000	46.701	3.299	93,40	93,38
	35x35	14	50.000	48.006	1.994	96,01	96,00

Fonte: Trabalhos da Turma C.

Perceba, pelas duas últimas colunas da tabela mostrada na Figura 32, que a probabilidade teórica e o percentual prático são muito próximos. Isso nos permite observar que, apesar das possíveis limitações que a função randômica utilizada no programa possa conter, a probabilidade teórica de ganho fica muito próxima da frequência relativa de vitórias observadas quando o número de simulações realizadas é grande.

A partir da tabela, ele construiu então um gráfico, de onde concluiu que o raio que o disco deveria ter para que a escola ganhasse em 70% das vezes é, aproximadamente, 7,8.

Figura 33 – Gráfico que o Lucas produziu, concluindo que 7,8 de raio daria 70% de ganho para a escola se fossem utilizados pisos com lado de medida 35



Fonte: Trabalhos da Turma C.

Podemos dizer que ficamos bastante surpresos com o excelente trabalho apresentado pelo Lucas. Ele era um aluno que não se dava muito bem nas avaliações, apesar de percebermos, pelas ideias que expunha em outras aulas, que ele possuía grande potencial. O motivo de ir mal nas avaliações era, provavelmente, falta de motivação para estudar, pois percebíamos que ele tinha algumas ideias de destaque. Além disso, ele já havia sido reprovado no segundo ano do ensino médio provavelmente pelo mesmo motivo.

Depois de algum tempo após ter acabado o ano letivo, perguntando a ele sobre o que achava a respeito de aulas em geral e o que achou do problema do Jogo dos Discos, obtivemos a seguinte resposta:

"As aulas, no geral, sempre me pareciam monótonas. Principalmente exatas: professores mostrando fórmulas e métodos apenas com o objetivo principal de nos ensinarem a resolver as questões das provas. Gosto muito da área, mas nunca fui bom aluno por esse e outros motivos. Poucas vezes tive motivação pra algo relacionado às aulas. Confesso que nos quatro anos que passei no ensino médio devo ter feito menos de dez trabalhos e nenhum deles foi tão motivador e divertido como o do Jogo dos Discos. Foi desafiador e eficiente para ensinar Probabilidade. Por este e outros motivos sou muito a favor de aulas como essas, utilizando a Matemática de forma aplicada e interessante. Foi uma pena ter tido aulas como essa apenas no último ano de ensino médio."

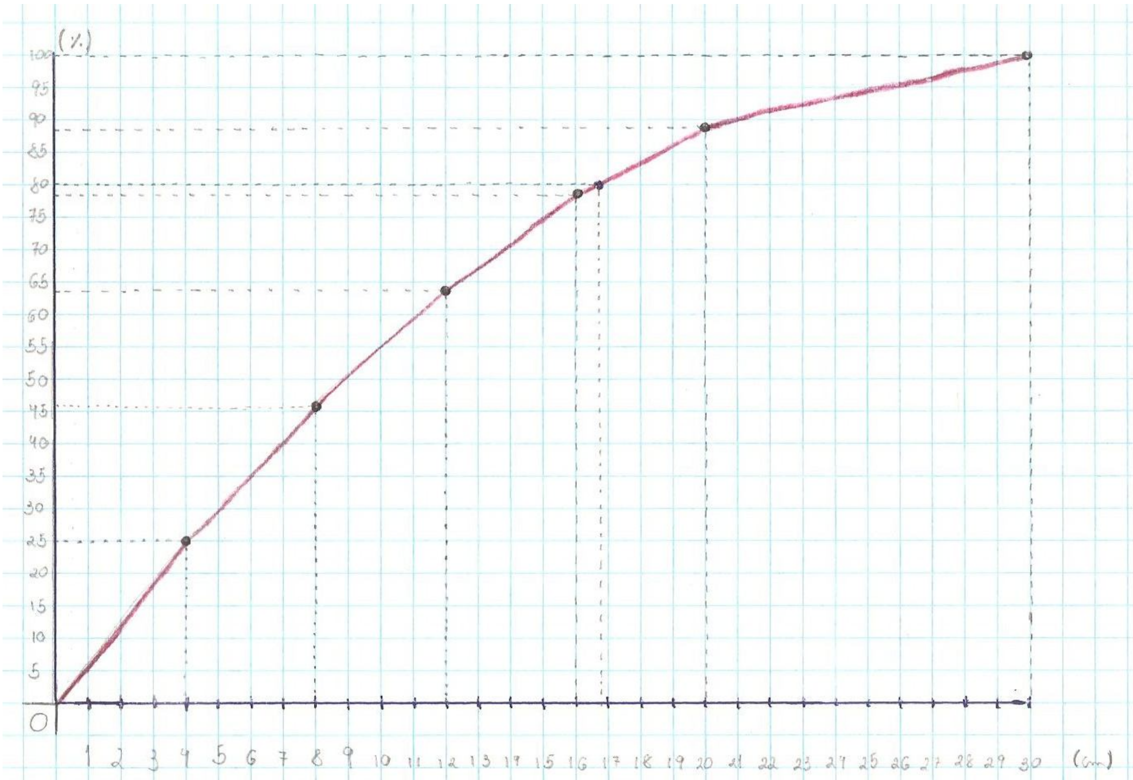
A partir dessa resposta, vemos o quão importante pode ser uma atividade que foge um pouco da normalidade, já que pode agir como um fator motivador para alguns alunos além de ajudar no entendimento de assuntos relacionados a ela.

5.4 TRABALHOS DA TURMA D

Nesta turma, haviam-se formado 6 grupos e todos eles entregaram bons trabalhos. Pôde-se perceber, pela proximidade dos dados coletados com os dados esperados na teoria, que todos realizaram a experimentação em casa. Além disso, um dos grupos conseguiu desenvolver a fórmula teórica para resolução do problema e a usou para comparar com o resultado atingido na prática.

Fomos surpreendidos por esta turma. Dentre as três turmas nas quais aplicamos essa atividade, essa era a que tinha menor rendimento de notas nos bimestres anteriores, mas foi a que mais engajada ficou com a atividade, desde os primeiros dias de aplicação. Todos entregaram o trabalho com tabelas que pareciam confiáveis e gráficos muito bem feitos, além de concluírem corretamente a resposta do problema para o percentual que queriam. Além disso, muitos grupos fizeram mais do que os 4 tipos de discos combinados e mais do que os 200 lançamentos com cada tipo, o que os levou a obter maior precisão. Seguem digitalizações de parte dos trabalhos de alguns grupos da sala.

Figura 34 – Gráfico do grupo que conseguiu desenvolver a fórmula teórica.



Fonte: Trabalhos da Turma D.

Figura 35 – Cálculos teórico do grupo que conseguiu desenvolver a fórmula. O objetivo deles era conseguir diâmetro que fornecesse 80% de ganho para a escola. Concluiu o problema de maneira algébrica e com o gráfico anterior.

$$0{,}20 = \frac{(30-D)^2}{30^2}$$

$$0{,}2 = \frac{(30-D)^2}{900}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{(30-D)^2}$$

$$13{,}41 = 30 - D$$

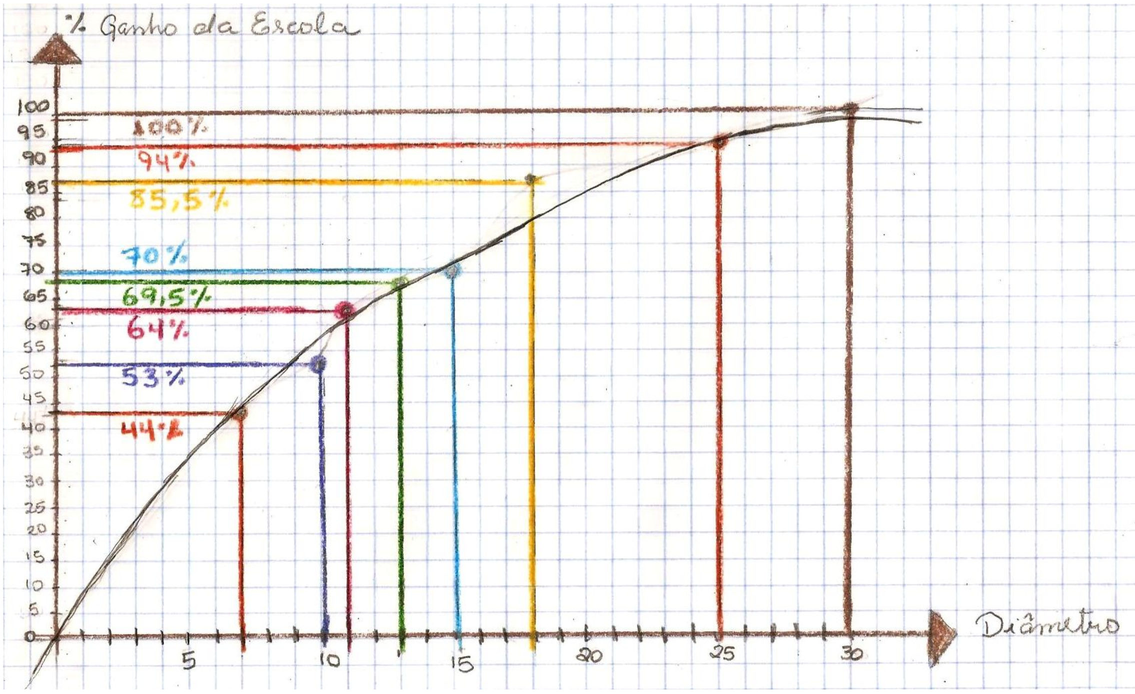
$$D = 30 - 13{,}42$$

$D = 16{,}59$ cm de Diâmetro

16,59 cm de Diâmetro no teórico e 16,9 cm no pratico

Fonte: Trabalhos da Turma D.

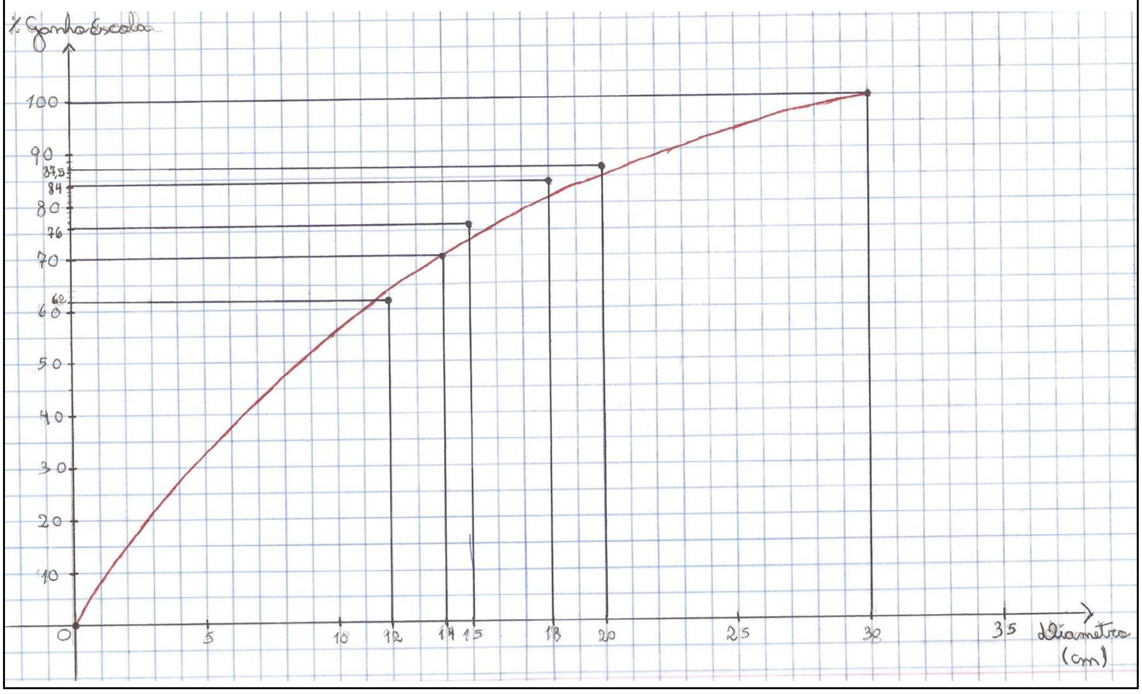
Figura 36 – Gráfico de um dos grupos, que queria alcançar 70% de ganho em pisos de 30 cm de lado.



Fonte: Trabalhos da Turma D.

Figura 37 – Tabela e gráfico de outro grupo, que queria alcançar 70% de ganho também em pisos de 30 cm de lado.

Diâmetro	n° Jogadores	Escola	Jogador	% de Ganho
12 cm	200	124	76	**62%**
15 cm	200	152	48	**76%**
18 cm	200	168	32	**84%**
20 cm	200	175	25	**87,5%**



Fonte: Trabalhos da Turma D.

5.5 ANÁLISE GERAL DOS RESULTADOS OBTIDOS

Depois de realizada toda a atividade da maneira como descrevemos, iniciamos as aulas de Probabilidade. Percebemos que a aplicação do Jogo dos Discos trouxe resultados muito positivos no andamento dessas aulas em todas as salas. Porém, na turma C, que não levou a atividade tão a sério, os resultados positivos aconteceram em menor escala.

De modo geral, os alunos compreenderam com facilidade que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que o grau de possibilidade acerca de possíveis resultados pode ser estimado, nem que seja tomando por base apenas as observações realizadas. Conseguiram compreender que o cálculo teórico da probabilidade de um evento acontecer é um resultado que se aproxima muito da frequência relativa com que este evento ocorre na natureza. Percebemos também facilidade em solucionar diversos problemas como o descrito no início da Introdução desta dissertação, que foi questão da prova do SAEB.

Além disso, devido ao contato com um problema contextualizado, o qual eles mesmos tiveram que pensar em uma solução com o mínimo de ajuda do professor, acreditamos que os estudantes aprenderam a gostar um pouco mais da Matemática como um todo.

CONCLUSÃO

Ao longo desta dissertação, mostramos que o assunto Probabilidade se mostra muito importante atualmente em nossa sociedade, com diversas áreas de atuação, como planos de saúde e seguros de vida, e com aplicações em diversas ciências, como Biologia, Economia e Física. Por conta disso, vemos que vários documentos oficiais que regulamentam o que deve ser trabalhado no Ensino Básico, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, recomendam que o tema Probabilidade faça parte da educação para todos os níveis escolares. Destacam a importância de fazer com que o aluno observe que o mundo ao seu redor está repleto de situações cujos resultados não podem ser previstos mas que, com algum estudo, pode ser possível quantificar o incerto, através de cálculos da chance de ocorrência de algum resultado específico. E para que o estudo de Probabilidade se faça com eficiência, muitos destes documentos sugerem que haja a realização de experimentos de maneira concreta durante o ensino, o que vai de acordo com o que muitos pesquisadores da área também recomendam.

Assim, nosso trabalho com os alunos do terceiro ano da Escola Industrial de Casa Branca seguiu nesta direção. Propusemos um problema contextualizado para o ambiente deles em que, para resolvê-lo, eles precisariam, entre outras coisas, realizar várias experimentações concretas. Além disso, em nossa sequência didática, criamos uma situação na qual os alunos precisariam fazer uso da criatividade para conseguir resolver a atividade, já que o que fizemos foi apenas apresentá-la a eles e deixar com que resolvessem sozinhos, com o professor palpitando o mínimo possível. Pôde-se perceber que o fato de o problema ser contextualizado e permitir com que os alunos usassem sua capacidade criadora motivou-os a solucionar a atividade, seja pela curiosidade criada pela situação em si, seja pelo próprio desafio da atividade.

Além disso, pudemos perceber que nos livros didáticos a abordagem da Probabilidade dificilmente ocorre com sugestões de experimentações concretas ou com um ponto de vista frequentista. Deste modo, o uso do problema do Jogo dos Discos da maneira como trabalhamos, serviu também como um complemento excelente aos livros didáticos, trazendo uma possibilidade de inserção de experimentos no ensino bem como da visão frequentista da Probabilidade.

É claro que para aplicar o Jogo dos Discos da maneira como planejamos, foi necessário utilizar um tempo que em muitas situações pode ser difícil de o professor conseguir. Esta dificuldade pode se dar devido à necessidade de cumprimento do cronograma da escola ou do próprio programa da disciplina. Todavia, observamos que o ganho que esta aplicação trouxe para os alunos foi muito grande. A metodologia investigativa utilizada, dando intervalos de tempo razoáveis para os estudantes pensarem em como resolver um problema cujo tema ainda não havia sido apresentado, resultou em um olhar diferenciado sobre a Matemática por parte deles, mostrando que ela não é um conhecimento pronto e acabado. E como o problema se mostrou contextualizado para a realidade dos alunos, eles também puderam enxergar que a Matemática não é apenas algo abstrato, mas que possui bastante utilidade para resolução de problemas que podem fazer parte da vida cotidiana.

Além disso, acreditamos que o ensino de Probabilidade feito posteriormente a esta aplicação, ocorreu de maneira muito mais proveitosa do que as aulas tradicionais do mesmo tema. A compreensão do caráter aleatório de acontecimentos diversos e a observação da proximidade da probabilidade teórica de algum evento com a sua frequência relativa é algo que merece destaque. Acreditamos também que apesar de utilizarmos um razoável número de aulas para aplicação do problema, elas tiveram um bom retorno e acabamos economizando tempo em diversas outras explicações do tema envolvido, o que fez com que o tempo gasto com a aplicação fosse devolvido em parte.

Podemos dizer também que, por observação dos estudantes, percebemos que a maioria criou facilidade em solucionar diversos problemas, principalmente aqueles parecidos com questões de provas como o SAEB. Deste modo, vemos que nosso objetivo foi alcançado, com um ensino eficaz da Probabilidade e com alunos muito engajados em resolver um problema da Matemática.

Para professores que quiserem utilizar a mesma metodologia e sequência de aulas que usamos, temos algumas sugestões que podem tornar as aulas ainda melhores. Primeiramente, observamos que o tempo de duas aulas para que os alunos pensem em como devem realizar a experimentação foi grande demais e que a realização do experimento em casa por eles pode não ser feita, como aconteceu na turma C de nossa aplicação da atividade. Assim, sugerimos que ao invés de duas aulas para os alunos pensarem na experimentação, deve-se dar apenas uma para isso e mais duas (uma aula dupla, de preferência) para que os alunos realizem o experimento dentro da própria sala de aula. Se ela já tiver pisos quadrados, melhor ainda, mas se não tiver, estes pisos podem ser simulados com a colagem de uma fita colorida fina no chão da classe ou em algum outro local da escola. Apenas seria necessário pedir para que os estudantes já construíssem os discos em casa ou que, ao menos, levassem papelão, compasso, régua e tesoura à classe para que pudessem construí-los lá mesmo. A realização do experimento durante as aulas forçaria o aluno, de algum modo, a ter contato com a experimentação, o que julgamos muito importante.

Outra sugestão, é que na aula de fechamento da aplicação da atividade, o professor, além de transmitir o método algébrico de solução do problema, também utilize a nova versão do programa desenvolvido pelo aluno Lucas, que pode ser encontrado em http://sourceforge.net/projects/jogodosdiscos/. Com o uso deste programa, será possível mostrar aos alunos que aumentando o número de simulações realizadas de 200 para 2000, por exemplo, o percentual de ganho da escola tende a ficar ainda mais próximo da probabilidade teórica. E aumentando ainda mais o número de jogadas realizadas para 10000, por exemplo, essa tendência fica ainda mais evidente. Isto pode sugerir aos alunos que quanto mais simulações forem realizadas, mais próxima a frequência relativa de ganho fica da probabilidade teórica. Ter esta visão da probabilidade é muito importante, apesar de pouco explorada nos livros didáticos.

Esta nova versão do programa foi pedida para o aluno algum tempo depois de terminado o ano em que aplicamos a atividade nas turmas desta escola. O objetivo era exatamente conseguir uma material que tivesse a função descrita no parágrafo anterior. O aluno topou fazer esta reformulação e nós mostramos então como gostaríamos que o programa ficasse. A tela inicial do novo programa segue no Apêndice B.

Os cálculos mostrados do programa ficaram praticamente os mesmos, acrescentando o cálculo de ganho da banca e alguns comentários, porém a disposição dos itens foi um pouco alterada. Agora, logo no topo do programa o usuário entra com os dados do jogo (lado do quadrado, diâmetro do disco, preço por jogada e valor do prêmio caso o jogador vença) e, preenchendo também o campo “Número de jogos” em “Resultados teóricos”, ao clicar em “Efetuar cálculos”, o programa fornece os resultados teóricos do jogo, como probabilidade de ganho da banca, probabilidade de ganho do jogador e lucro esperado para a banca. Preenchendo o campo “Número de jogos” em “Dados da simulação” e clicando-se em “Jogar”, o programa simula as jogadas da maneira descrita em capítulo anterior e fornece em quantas delas a banca venceu e em quantas o jogador venceu, com o respectivos percentuais, além de fornecer qual seria o lucro da banca nesta simulação. Os dados teóricos e simulados ficam lado a lado, para facilitar a comparação dos resultados, e o programa apresenta comentários explicando alguns cálculos.

Além disso, na parte de baixo da tela do programa, é possível observar algumas curiosidades, como tempo gasto para fazer as simulações e a média de simulações por segundo, e gerar um par de coordenadas aleatório, com as coordenadas das linhas de piso que se situam antes e depois do ponto gerado e com um comentário do programa dizendo quem venceu esta jogada única, o jogador ou a banca.

Com a utilização deste programa, o professor poderá incluir no fechamento da atividade essa comparação de resultados teóricos e práticos. Poderá acompanhar com os alunos, por exemplo, que quanto maior o número de jogadas realizadas, mais próximo o percentual de ganho nas simulações fica da probabilidade teórica.

Por fim, uma última sugestão que pode ser incorporada à aplicação de nossa sequência didática, é a de que o professor proponha aos alunos, na aula de fechamento, a resolução do problema do Jogo dos Discos com jogadas em pavimentações feitas com outros tipos de pisos. Eles poderiam ter formato de triângulos equiláteros ou de hexágonos regulares, por exemplo. Poder-se-ia pedir para que os estudantes resolvessem estes problemas sem o uso de simulações, servindo como uma conexão interessante para outras áreas da Matemática, como a Geometria. As soluções teóricas destes casos podem ser encontradas no artigo de Paterlini (2002).

Podemos dizer que a realização deste trabalho resultou em grandes contribuições para a vida profissional do autor, que pôde observar um aprendizado efetivo da Probabilidade através do uso de um jogo bem elaborado. Esperamos que nossa contribuição também seja eficiente para outros colegas professores.

Terminamos esta dissertação com um pequeno trecho presente no documento Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, p. 113):

> Tanto isso é verdade que sabemos do fracasso dos alunos quando propomos a análise de situações onde devem ser relacionados dados ou fatos diversos ou quando é necessária a tomada de decisão entre diferentes e possíveis caminhos de resolução. Nesse caso, percebemos que, mesmo quando possuem informações e conceitos, os alunos não os mobilizam, não os combinam eficientemente, desanimam, esperam a explicação do professor, não se permitem tentar, errar, não confiam em suas próprias formas de pensar. Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Básica. **Matrizes de referência, tópicos e descritores para o SAEB (Caderno do SAEB)**. Brasília: MEC, 2011. 131 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf>. Acesso em: 10/02/2013.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais do ensino médio (PCN+).** Brasília: MEC, 2007. 144p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 10/02/2013.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio**: parte III: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 10/02/2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC, 1998. 148 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 10/02/2013.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Brasília. Ano II. n.2. p. 15-19, 1989. Disponível em: <http://educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf>. Acesso em: 10/02/2013.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010. v. 2.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004. 844 p.

FACCHINI, W. **Matemática para a escola de hoje**. São Paulo: FTD, 2006. 736 p.

GADELHA, A. **Uma pequena história da probabilidade**. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist_prob_Gadelha.pdf>. Acesso em: 10/02/2013.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática completa**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. p. 384. (Coleção matemática completa, 2).

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 2.

LOPES, C. A. E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental:** uma análise curricular. 1998. 125 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

LOPES, J. M.; TEODORO, J. V.; REZENDE, J. C. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. **Zetetiké**, Campinas, v. 19, n. 36, p. 75 – 93, jul./dez. 2011.

NOVA Enciclopédia Barsa. São Paulo: Encyclopaedia Britannica do Brasil Publicações, 1998. v.12.

MORGADO, A. C. O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. 171 p.

PATERLINI, R. R., O problema do jogo dos discos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 48, p. 13-19, 2002.

PATERLINI, R. R.; CAETANO, P. A. S. **Matemática na prática**: jogo dos discos. Cuiabá: UFMT, 2010. 66 p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Proposta curricular do estado de São Paulo**: matemática. São Paulo, 2008. 59 p. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/18/arquivos/Prop_MAT_COMP_red_md_20_03.pdf>. Acesso em: 10/02/2013.

SILVA, I. A. **Probabilidades:** a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito. 2002. 174 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

SOUZA, J. R. **Novo olhar matemática**. São Paulo: FTD, 2010. 176 p. (Coleção novo olhar, 2).

TUNALA, N. Determinação de Probabilidades por Métodos Geométricos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 20, p. 16-22, 1992.

WAGNER, E. Probabilidade Geométrica. **Revista do Professor de Matemática**, v. 34, p. 28-35, 1997.

APÊNDICES

APÊNDICE A – FOLHA ENTREGUE AOS ALUNOS COM O PROBLEMA DO JOGO DOS DISCOS

Um jogo com círculos

Na Feira de Ciências, promovida todo ano pela Escola Industrial, os estudantes do terceiro ano do Ensino Médio resolveram montar uma barraca para arrecadar fundos para o grêmio estudantil. Alguns estudantes queriam montar uma barraca de doces, outros queriam vender refrigerantes e salgados, mas a maior parte da turma pensou em bolar um jogo de apostas. Só faltava saber qual seria o jogo, que deveria ser simples e interessante.

Depois de pensar um pouco, ao olhar para o chão do local, feito com ladrilhos quadrados, o professor lembrou-se de um jogo bastante simples e propôs o seguinte: "Podemos construir círculos com certo diâmetro e vendê-los para os convidados jogarem "aleatoriamente" no piso. Caso este círculo, depois de parar, fique inteiramente dentro de um ladrilho, sem tocar ou interceptar as linhas de separação do ladrilhamento, o convidado receberá de volta o dobro do valor pago. Caso contrário, a escola ganha o valor pago no círculo."

Os alunos adoraram a ideia e, na mesma hora, começaram a pensar em qual seria o melhor diâmetro para os círculos que iriam construir. Claro que quanto maior, mais chances de a escola ganhar, pensaram...

O professor completou: "Vocês só precisam tomar cuidado na hora de determinar o diâmetro desses círculos, pois os convidados da festa somente irão se interessar pelo jogo se acharem que têm chance de ganhar o prêmio."

Sendo assim, pergunto: Na opinião de vocês, qual seria o percentual de ganho ideal para a escola? E para que a escola atinja este percentual de ganho, qual deve ser o diâmetro dos discos vendidos?

APÊNDICE B – TELAS DO PROGRAMA REFORMULADO


O problema do Jogo dos Discos
Dados do jogo
Lado do quadrado 30
Diâmetro do disco 15
Preço por jogada 1.00
Valor do prêmio 2.00
Dados da simulação
Número de jogos: 2000
Jogar
Abortar simulação
Exibir dados em tempo real (mais demorado)
Resultados teóricos
Banca: a calcular
Jogadores: a calcular
Lucro esperado para a banca: a calcular
Número de jogos 2000
Efetuar cálculos
Comentários
Resultados da simulação
Banca: a calcular
Jogadores: a calcular
Lucro da banca: a calcular
0
Comentários
Curiosidades
Estatísticas
Tempo gasto: 0
0
Nota: só há precisão com valores altos
Variáveis em tempo real (opcional):
x anterior: a calcular
x posterior: a calcular
y anterior: a calcular
y posterior: a calcular
Par gerado: x y
Jogo único
gerar par (x,y)
Par gerado: (x,y)
Linhas próximas: x x'
y y'
a calcular
Esta simulação é feita utilizando as medidas inseridas em "Dados do jogo". O intervalo considerado para gerar este par vai de zero a cem vezes o lado do quadrado fornecido.
?


O problema do Jogo dos Discos
Dados do jogo
Lado do quadrado 30
Diâmetro do disco 15
Preço por jogada 1.00
Valor do prêmio 2.00
Dados da simulação
Número de jogos: 2000
Jogar
Abortar simulação
Exibir dados em tempo real (mais demorado)
Resultados teóricos
Banca: 1500 (75% por jogada)
Jogadores: 500 (25% por jogada)
Lucro esperado para a banca: $1000
Número de jogos 2000
Efetuar cálculos
Comentários
O resultado teórico é favorável para a banca: a chance da banca vencer, por jogada, é de 75%. De de um total de 2000 jogos, a banca vencerá, em média, 1500 vezes e perderá, em média, 500 vezes, ficando com $1000 dos $2000 apostados.
Resultados da simulação
Banca: 1519 75.95% das jogadas
Jogadores: 481 24.05% das jogadas
Lucro da banca: $1038
2000 tentativas
Comentários
Os jogadores apostaram $2000 e ganharam $962. Sendo assim, a banca obteve um lucro de $1038.
Curiosidades
Estatísticas
Tempo gasto: 0:0:0:183
0
Nota: só há precisão com valores altos
Variáveis em tempo real (opcional):
x anterior: a calcular x posterior: a calcular
y anterior: a calcular y posterior: a calcular
Par gerado: x y
Jogo único
gerar par (x,y)
Par gerado: (x,y)
Linhas próximas: x x'
y y'
a calcular
Esta simulação é feita utilizando as medidas inseridas em "Dados do jogo". O intervalo considerado para gerar este par vai de zero a cem vezes o lado do quadrado fornecido.
?