UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

FELIPE AUGUSTO MARTINAZZO FONTES

APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA*: *UM ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE UM COMPOSTO QUÍMICO

Sorocaba

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA*: *UM ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE UM COMPOSTO QUÍMICO

Felipe Augusto Martinazzo Fontes

Orientadora: Profª. Drª. Magda da Silva Peixoto

Sorocaba

2014

APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA**: **UM ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE UM COMPOSTO QUÍMICO

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação no Ensino de Ciências Exatas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para obtenção do título de mestre. Sob a orientação da Professora Doutora Magda da Silva Peixoto.

Sorocaba

2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

F683af

Fontes, Felipe Augusto Martinazzo.
Aprendizagem de funções por meio da modelagem matemática : um estudo do comportamento de um composto químico / Felipe Augusto Martinazzo Fontes. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
79 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Modelagem matemática. 2. Química. 3. Função (Matemática). I. Título.

CDD: 511.8 (20ª)

Banca Examinadora:

Magda Peixoto

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
DFQM – UFSCar Sorocaba – orientadora

Prof. Dr. José Arnaldo Frutuoso Roveda
UNESP - Sorocaba

Prof. Dr. Paulo César Oliveira
DFQM – UFSCar Sorocaba

Dedico este trabalho a minha esposa e filhos, a meus pais, que em nenhum instante me negaram ajuda e auxílio e a meus alunos que me fizeram um professor melhor para conseguir desenvolver esta dissertação.

Agradecimentos

Destarte, agradeço a Deus pela força e paz que precisei encontrar para este trabalho ser concretizado. Agradeço também a todos os colegas que fizeram parte nesta caminhada que por mim foi feita. Também não posso deixar de agradecer aos professores do programa de Pós-Graduação, que foram parte essencial neste meu aprendizado, em especial a Profª. Drª. Magda da Silva Peixoto que acreditou e me apoiou muito nesta etapa. Aos professores da banca Prof. Dr. José Arnaldo Frutuoso Roveda e Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira pelas intervenções necessárias ao nosso trabalho.

Agradeço e muito a minha família, esposa Alessandra, que sempre me incentivou e se dedicou para que eu conseguisse alcançar este objetivo, não deixando que nada obstruísse nosso caminho. A meus filhos, Júlia, Matheus e Levi, que também, do jeito deles, apoiaram-me e me acompanharam diversas vezes até Sorocaba, São Carlos. A meus pais, Carlos Henrique (*in memória*) e Márcia, que, desde o começo da minha existência, apoiaram-me e acreditaram que eu conseguiria vencer. Aminha sogra e meu sogro, Edenir e Edson, que sempre estavam me perguntando se estava tudo certo e caminhando.

Aos meus amigos, que estiveram ao meu lado escutando, mesmo sem entender direito as minhas falas, o meu muito obrigado. A meu primo Fernando, que, em uma parte do curso, ajudou-me com o transporte até Sorocaba, pois fiquei com problemas referentes à renovação da carteira; ele foi um bom amigo e motorista.

Ao meu “guru” Maria Helena (Lena), que é uma pessoa muito especial, sempre disposta a ajudar e ouvir. Foi o meu primeiro contato com ideia de ser professor; foi ela quem fez reluzir este lado em mim e por causa dele que desenvolvi esta persistência em alcançar novos horizontes, muito obrigado.

A Faculdade Pitágoras - Unidade Jundiaí, que cedeu espaço da sala de aula e do laboratório para que pudéssemos realizar esta pesquisa.

Aos professores Julia e Edson pelo apoio que me foi dado para a realização da experiência no laboratório de química, meus agradecimentos. As professoras Nathália e Viviane que me ajudaram neste final de trabalho. Aos alunos que participaram deste trabalho, o meu muito obrigado, vocês foram incríveis.

Enfim, sou grato a todos que participaram desta minha trajetória direta ou indiretamente. Muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo propor o uso da Modelagem Matemática na resolução de problemas, em especial para estudar o processamento de compostos químicos de algum medicamento pelo organismo humano. Nosso estudo pretende responder a questões como "*por quanto tempo esse medicamento ficará em nosso organismo?*". Para responder essa questão foi proposta e realizada uma atividade com alunos do Ensino Médio de uma escola particular.

Palavras chaves: modelagem matemática, química, função.

ABSTRACT

The aim of this work is to propose the mathematical modeling use in the problems resolution, specially the study of the process of the chemical compounds in some drugs in the human body. Our study intends to answer questions as “How long the drugs could be in our body?” For answering these questions we proposed and made an activity with high school students from a private school.

Keywords: Mathematics, Chemistry, function.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Quando ingerimos um medicamento, um questionamento natural a se fazer é como se dá o processamento dos compostos químicos presentes no mesmo pelo nosso organismo, no sentido de: "*por quanto tempo esse medicamento ficará em nosso organismo? O medicamento será eliminado totalmente?*" Responder perguntas como essa foi a motivação inicial para a realização deste trabalho. A proposta, portanto, é despertar nos alunos a curiosidade e o interesse pela pesquisa e solução de problemas reais, além de lhes ensinar sobre a importância da Matemática em situações do cotidiano.

No contexto acima descrito, destacamos a Modelagem Matemática, que vem agregando novas visões ao aprendizado dos alunos, visto que estes passam a reconhecer a necessidade do conhecimento matemático através de situações cotidianas. Dessa forma, propomos o uso da Modelagem Matemática por meio do estudo de funções no ensino da Matemática (ou seja, a Modelação Matemática).

Para atingir nosso objetivo, realizamos duas atividades teóricas, isto é, emsala de aula; e uma atividade prática, no laboratório de Química, ou seja, um trabalho interdisciplinar.

Esse texto está assim organizado:

No capítulo 1, comentamos de forma sucinta sobre a Modelagem Matemática e Modelação Matemática, como estão envolvidas nas práticas docentes, nos PCNEM, no Currículo do Estado de São Paulo e em Congressos na área de Ensino de Matemática.

O capítulo 2 traz um breve relato histórico e conceitos básicos de funções.

No capítulo 3,relatamos duas atividades realizadas em sala de aula utilizando Modelagem Matemática no estudo dos temas: ação do medicamento Dipirona Sódica e o comportamento gestacional.

No capítulo 4, propusemos e relatamos uma atividade para responder as perguntas feitas no início deste texto. Os dados foram coletados por meio de uma experiência realizada no Laboratório de Química da Faculdade Pitágoras, com alunos do Ensino Médio e mais dois professores de Química. A partir desses dados, foi feito um ajuste de curva utilizando o *software Microsoft Excel.*

Finalmente, apresentamos algumas observações sobre esse trabalho de pesquisa nas Considerações Finais.

Capítulo 1

A Modelagem Matemática

O saber–fazer, inato ao ser humano, é o ponto inicial de que precisamos para incitar os conceitos matemáticos nos alunos, para que o presente trabalho alcance um bom desempenho e consiga trazer propostas. Mais que isso, podem surgir novas e mais ideias para que possamos aprimorar também o nosso, enquanto professores, saber–fazer. Com isso, é preciso, e necessário, inserir modelos para que alunos e professores saibam trabalhar e se envolver com a matemática da “realidade” e outra disciplina que venha a surgir durante o processo de modelagem (Biembengut, 2003).Então, um dos caminhos para compreender a Matemática é a compreensão do enunciado do problema proposto.Para isso é muito importante a interpretação correta da situação sugerida pela pesquisa, isto é, sermos capazes de converter a linguagem escrita na linguagem matemática adequada, ou seja, em uma simbologia matemática para aquela situação. Quando procuramos agir/refletir sobre algo da realidade, na tentativa de explicar, compreender ou modificar, o processo usual é selecionar, no sistema em estudo, argumentos ou parâmetros considerados essenciais, formalizando–os por meio de um processo artificial denominado modelo.(Bassanezi, 2010).

Focando nesse contexto, podemos trabalhar junto aos alunos estas condutas, isto é, a compreensão, a argumentação, a ação e reflexão, tendo como objetivo o ensino-aprendizado dos alunos. Notamos,assim, o quão importante é saber interpretar, e, ao mesmo tempo, transpor esta interpretação para a linguagem matemática. A Matemática em si é singular em vários aspectos, pois é uma ciência que, podemos dizer, é “acumuladora” de conteúdos, isto é, tudo nela é acrescentado e não eliminado; por isso, acreditamos que é isso que causa paixão e ódio pela Matemática.

Segundo Polya (1978), estes são os fatos para que possamos compreender melhor e estruturar um plano de ação para a resolução e aperfeiçoamento de um modelo matemático: *"Familiarização, aperfeiçoamento da compreensão, procura da ideia e execução do plano".*

Em vista disto, a Modelagem Matemática se torna uma ferramenta importante e necessária para despertar a curiosidade nos alunos e, assim, alcançar o objetivo que é o de aprender Matemática de uma maneira prazerosa. Podemos salientar essa nossa escolha pelo fato de a Matemática estar ligada com todas as áreas científicas. Segundo Biembengut (2003), a Matemática, alicerce de quase todas as áreas do conhecimento e dotada de uma arquitetura que permite desenvolver os níveis: cognitivo e criativo tem sua utilização defendida, nos mais diversos graus de escolaridade, como meio para fazer emergir essa habilidade em criar, resolver problemas, modelar. Devemos encontrar meios para desenvolver, nos alunos, a capacidade de ler e interpretar o domínio da Matemática.

Desde quando começamos a refletir sobre um processo de ensino-aprendizagem, vimos que a Modelagem Matemática seria de grande valia para ser utilizada como ferramenta, já que ela nos proporcionou vertentes para abordagem do tema tratado, no caso as funções, pois garantiu a eficácia e a segurança da qual precisamos para aproveitar, ao máximo, a sua utilização junto aos alunos.

Na prática, o modelo que aparecerá nem sempre é o esperado, pois estamos tratando com uma situação real que merecerá ajustes para que se torne algo promissor e aceitável do ponto de vista do mundo real. Com isso podemos criar um mapa que caracterizará bem o começo do trabalho.

Veja a representação abaixo:

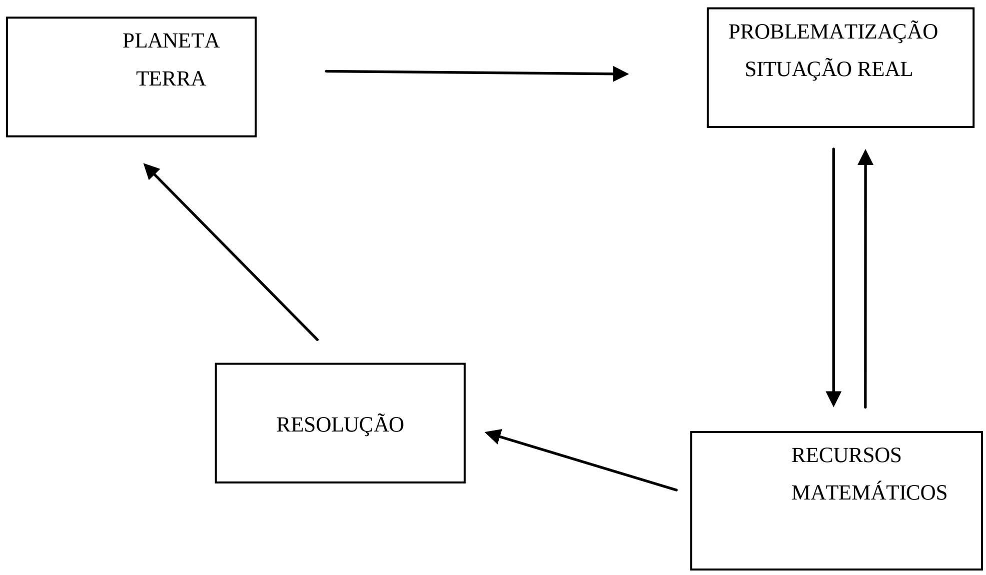


Figura 1- Esquema do processo de Modelagem

Vemos que, com o modelo pronto, basta nos dedicarmos ao estudo do caso e aprimorarmos a resolução da situação. Esta não é uma tarefa simples, pois requer estudo e conhecimento prévio do professor sobre os conteúdos que aparecerão para, assim,auxiliar os alunos da maneira mais adequada possível.

A Modelagem Matemática baseia-se não apenas na forma de introduzir um conceito matemático, como também na contextualização e pesquisa, fazendo com que discentes se tornem parte fundamental do conteúdo a ser descoberto pelo que está sendo pesquisado, e assim, gostem ou, pelo menos, mostrem mais interesse pela Matemática como um todo. Acreditamos que esse gosto se desenvolve com mais facilidade quando é movido por interesses e estímulos externos à Matemática, vindos do “mundo real” (Bassanezi, 2010).

E acreditamos que o caminho necessário para o reconhecimento da Matemática como algo prazeroso e interessante para todos os estudantes é mesmo o da Modelagem Matemática, pois, nesse sentido, nos interessamos pela ciência. Já existe muita literatura escrita sobre o assunto, muitas ideias colocadas em prática, mas, mesmo assim, seu uso continua um grande desafio para o professor, pois este se sente intimado diante de como, e o que, irá aparecer diante de uma prática, como a junção de duas ou mais disciplinas. Isto se deve ao fato de que estamos muito engessados diante da nossa rotina, com os materiais didáticos que são impostos a nós professores, assim, ao final, não temos coragem ou até mesmo habilidade para tal desafio. Isso de fato desestabiliza o professor, visto que, com base no tema escolhido, vai começar a ser produzido um planejamento e, com as aulas em andamento,o que vai ser produzido na sala de aula vai depender exclusivamente, a participação dos alunos (Meyer, 2010).

Neste contexto, podemos dizer que a Modelagem Matemática não é tão nova assim, pois, os povos antigos já faziam esta *"matemática prática"*.Podemos chamá-la assim, pelo fato de que estes povos precisavam resolver situações problemas colocados pela necessidade social e, em consequência disto, foram construídos e definidos os conceitos matemáticos que são utilizados até hoje (Meyer, 2010). Segundo R. Descartes apud Lionnais, 1962:351:*"As matemáticas têm invenções muito sutis e que podem servir bastante, tanto para contentar os curiosos como para facilitar todos os ofícios e diminuir o trabalho dos homens."*

Podemos, então, dizer que a Matemática é mais prática do que teórica? As duas situações se completam, pois, sem a teoria, em determinado contexto, a prática ficaria inutilizada e, ao contrário,notamos que a teoria nem sempre é utilizada prevendo uma utilização prática.Segundo Biembengut (2003), "a *Modelagem Matemática não é uma ideia nova. Sua essência sempre esteve presente na criação das teorias científicas e, em especial, na criação das teorias matemáticas. A história da ciência testemunha importantes momentos em que a Modelagem Matemática se fez presente".*

Dessa maneira, como não podemos mostrar ou descrever vários fatos matemáticos na história, tomamos como exemplo o pensar do povo egípcio, que, sem muita teoria formal, conseguiu grandes feitos, tanto na engenharia (construção das pirâmides), quanto nas medições de terras – isto devido ao problema das constantes enchentes do rio Nilo. Então, faziam com que estes soubessem medir uma porção de terra necessária para poderem plantar, construir moradias, etc. Para que assim não fossem surpreendidos pelas enchentes do rio. Segundo Eves (2004):

> *"Os Egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide pela razão entre o 'percurso' e a ' elevação' – isto é, dando o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura. Tomava – se como unidade vertical o cúbito e como unidade horizontal a mão; havia sete mãos num cúbito. Utilizando estas unidades de medida, chamava–se seqt da pirâmide a medida da inclinação."*

Nesta citação, vemos que a prática antecedeu a teoria, pois os egípcios precisavam de uma inclinação para a construção da pirâmide e foram buscar a solução através da Matemática de outras ciências associadas. Isto ocorreu diante de algum questionamento "como faremos para construir esta pirâmide? Ou como tiramos do papel esta construção?".

Nesse ponto, o povo egípcio utilizou a Modelagem Matemática, pois não havia ainda nenhum modelo pronto.

Questionamentos e exclamações como: Para que serve isso? Para que serve aquilo? Onde vamos usar? Não irei usar isto nunca na minha vida! Poderiam, é claro, ser respondidas se tivéssemos um tempo suficiente para trabalharmos uma dinâmica diferente na sala de aula. Se não fossemos tão engessados poderíamos começar a aula com uma pergunta do tipo: Quanto resta de uma dose de remédio ingerida pelo organismo humano após algum tempo? Qual a concentração restará de um composto químico após uma quantidade de diluições feitas?A proposta é aplicar este método em várias situações de ensino-aprendizagem, com a intenção de estimular alunos e professores de matemática a desenvolverem suas próprias habilidades como modeladores (Bassanezi, 2010).

Por todas estas colocações, percebemos a importância da Modelagem Matemática para o processo ensino-aprendizagem. Segundo Biembengut (2003), espera-se da modelagem:

- Incentivar a pesquisa;
- Promover a habilidade em formular e resolver problemas;
- Lidar com tema de interesse;
- Aplicar o conteúdo matemático; e
- Desenvolver a criatividade.

Foi neste ponto que percebemos a importância ou a relevância de onde queríamos chegar com esta proposta e, assim, atingir nosso objetivo.

1.1. Modelagem e Modelação

O que significa a palavra Modelagem? Segundo o dicionário Michaelis,

> ***“Modelagem:***
> ***sf*** (***modelar***+***agem***) **1** Operação de modelar; modelação. **2** ***Bel-art*** Operação pela qual o escultor, o estatuário executa em gesso, barro ou qualquer substância maleável a sua obra, para depois ser fundida. **3** ***Metal*** Conjunto de processos e meios usados na feitura de modelos. ***M. de sólido, Inform:*** em computação gráfica, função que cria objetos tridimensionais com a aparência de sólidos, através de sombreamento.”

Podemos perceber que Modelagem tem tudo a ver com a criatividade, pois se busca primeiro um modelo, para depois ver o que este modelo nos diz. Segundo Bassanezi (2010):

> *“Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.”*

Segundo Biembengut (1997), a Modelação Matemática como método de ensino tem sua essência na Modelagem Matemática, que, por sua vez, é a arte de transformar situações do meio circundante em modelos matemáticos.

De acordo com o dicionário Michaelis:

> ***“Modelação: sf*** (***modelar***+***ção***) **1** Ato ou arte de modelar. **2** Obra de modelador.”

Podemos, então, verificar que a Modelação é uma maneira de aprendermos a trabalhar com a Modelagem que já deu certo. É um processo mais seguro e, de certa maneira, menos trabalhoso. A Modelação Matemática norteia–se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo e pode ser utilizado como método de ensino-aprendizagem de Matemática em qualquer nível escolar (Biembengut, 2003).

De acordo com Pires (2009)*, “a Modelação pode ser de grande valia para os cursos em que se tem um conteúdo programático a ser cumprido, não podendo o professor fugir dos temas apontados nesse programa. Logo, a Modelação apresenta* *uma perfeita adequação nesses cursos, uma vez que os conteúdos matemáticos que serão explorados estão previstos no programa”*. É neste contexto que podemos inserir algo novo em nossas aulas, visto que não fugiríamos do programa pré-estabelecido. Portanto seríamos aguçados a procurar mais exemplos de situações reais para serem exploradas e assim, notaríamos um empenho maior na sala de aula.

Devemos, então, buscar adequações que tornem viável o uso da Modelagem, como metodologia de ensino, visando à pesquisa e criação de modelos pelos alunos, sem deixar de cumprir o currículo estabelecido pelo sistema educacional, ou seja, a Modelação Matemática – Modelagem em Educação (Pires, 2009).

No nosso contexto, podemos ainda salientar a interdisciplinaridade, pois esta pesquisa proporcionará também um aprendizado na área de Química.

Neste ponto, apesar de este texto não pretender se aprofundar nesta questão, podemos também verificar o que nos é dito sobre interdisciplinaridade, pois este é um novo conceito de abordagem refinada e de grande complexidade.Vejamos, de acordo com o PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio):*A utilização da interdisciplinaridade como forma de desenvolver um trabalho de integração dos conteúdos de uma disciplina com outras áreas de conhecimento é uma das propostas apresentadas pelos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) que contribui para o aprendizado do aluno.*

Foi nesta direção que pensamos este trabalho: na integração entre disciplinas, na importância dos conteúdos serem trabalhados juntos e não isolados, buscando uma boa compreensão do que estará sendo trabalhado.As vantagens do emprego da modelagem em termos de pesquisa podem ser constatadas nos avanços obtidos em vários campos como a Física, a Química, a Biologia e a Astrofísica entre outros. A modelagem pressupõe multidisciplinaridade. E, nesse sentido, vai ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa (Bassanezi, 2010).

Acreditamos ser este o maior desafio a ser vencido, fazer com que professores se permitam trabalhar com a Modelagem Matemática como um meio de aprimorar conhecimento a partir de uma situação da realidade. De acordo com

Biembengut (2003), “a *condição necessária para o professor implementar modelagem no ensino – Modelação – é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas significativas. Um embasamento na literatura disponível sobre modelagem matemática, alguns modelos clássicos e sobre pesquisas e/ou experiências no ensino são essenciais”.*

1.2. A Modelagem nos PCNEM e nas propostas curriculares

No geral, a Matemática necessita de certas aptidões que precisam ser trabalhadas durante o processo de ensino-aprendizagem. Isto se caracteriza por algumas competências e habilidades que os alunos, e não menos os professores, devem possuir ante a uma situação problema, isto é, um problema que poderá ser trazido pelos alunos ou colocado pelo professor.

Algumas dessas aptidões que estão relacionadas no PCNEM:

- *compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas;*
- *aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas;*
- *analisar e valorizar informações, problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;*
- *desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação,*
- *utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;*
- *expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;*
- *estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;*
- *reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito;*

- *promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.*

Neste contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) discutem a questão da Modelagem Matemática na sala de aula, porém sem citá-la explicitamente:

> *"Sem dúvida, os elementos essenciais de um núcleo comum devem compor uma série de temas ou tópicos em Matemática escolhidos a partir de critérios que visam ao desenvolvimento das atitudes e habilidades descritas anteriormente. O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência."*

Ainda nos PCNEM:

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

• Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

• Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.

• Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Desta forma, a Modelagem permeia as novas ideias e a criatividade dos alunos que são a peça chave para que esta ferramenta conceda um desempenho da Matemática enquanto ciência.

Segundo Bassanezi (2006), a Modelagem Matemática pode estimular novas ideias e técnicas experimentais. Neste ponto, paramos e pensamos em uma maneira de focar nestas ideias e técnicas, pois, só tendo uma análise prévia e uma boa questão, é que conseguiremos estimular a criatividade, tanto do professor, quanto do aluno. A Modelagem pode servir, portanto, de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento.

Retomando os PCNEM:

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

• Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

Observamos que os PCNEM sugerem uma forma de ensinar ou mesmo de instigar o aprendizado da Matemática. Nesse sentido, e com o objetivo de trabalhar com Modelagem, verificamos quando é abordado o tema Funções no Ensino Médio, ou seja, em que momento o aluno passa a ter contato com tal conteúdo, pois queremos fazer Modelagem utilizando Funções. Para isso analisamos outro documento, o Currículo do Estado de São Paulo.

O Currículo do Estado de São Paulo de Matemática e suas Tecnologias enxergam a Matemática como interconexões, sendo elas:**Números**, **Geometria e Relações,** sendo que, neste último tópico, é abordado o estudo de Funções. Vejamos o que este trecho do documento nos diz: "*No Ensino Médio, a ampliação de ideias associadas ao bloco temático* ***Relações*** *ocorre de forma muito significativa. Além da continuidade do estudo de medidas de figuras planas e espaciais, iniciado no Ensino Fundamental, deve ser incorporada nesse eixo a investigação das relações entre grandezas que dependem umas das outras, ou seja, as* ***relações de interdependência****, o que abre portas para o estudo mais sistematizado de um tipo particular de interdependência, que são as funções."*

A critério informativo,o currículo utilizado no Estado de São Paulo no qual é tratadoo assunto funções está nos anexos

1.3 – Descrição quantitativa de alguns Congressos

Nesta seção, apresentamos uma análise quantitativa de alguns congressos de Matemática Aplicada e Educação Matemática, visto que queríamos saber se havia algum trabalho na mesma linha da nossa proposta, isto é, Modelagem Matemática na área de Química. Optamos por uma busca nos últimos cinco anos pelo fato de serem mais recentes.

Começamos então uma busca nos últimos cinco congressos na área de Matemática Aplicada, o "***Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC)"***, ou seja, de 2008 a 2012. De acordo com a Tabela 1 podemos verificar a quantidade de trabalhos na seção de Ensino envolvendo diretamente Modelagem e o estudo sobre funções.

Tabela 1 - Trabalhos apresentados no CNMAC (2008 a 2012)

CNMAC (2008 a 2012)	Trabalhos apresentados
Modelagem e modelação matemática	6
Jogos, Análise Combinatória e Probabilidade	22
Tecnologia	31
Geometria	8
Funções	5
Formação Continuada	6

Analisamos também no ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática - dois grupos de trabalhos: Modelagem Matemática e Educação Matemática no Ensino Médio. Os trabalhos coletados fazem parte da comunicação científica. Foram analisados quantitativamente 279 trabalhos, como podemos verificar na Tabela 2.

Tabela 2 – Trabalhos apresentados no ENEM

ENEM (VIII ao XI encontro)	Trabalhos apresentados
Resolução de Problemas	50
Jogos, Análise Combinatória e Probabilidade	30
Tecnologia	45
Geometria	39
Funções	25
Formação Continuada	40
Modelagem Matemática	50

Com todos estes trabalhos realizados, há uma quantidade significativa ao longo dos anos dos trabalhos envolvendo Modelagem.

Podemos assim verificar que o conceito de função é trabalhado ao longo de todo o Ensino Médio, sendo apresentado nas três séries. O próximo capítulo trata brevemente de funções de uma maneira geral.

Capítulo 2

Funções

2.1. Um breve relato histórico

Desde o tempo dos Gregos até a Idade Média, a teoria dominante era a Geometria Euclidiana, que tinha como elementos base o ponto, a reta e o plano.

Foi a partir do século XVII que uma nova teoria, o Cálculo Infinitesimal, surgiu e que acabou por se revelar capital no desenvolvimento da Matemática contemporânea. A noção de função se tornou um dos fundamentos do Cálculo Infinitesimal.

Portanto, a noção de função não é muito antiga. No entanto, aspectos muito simples deste conceito podem ser encontrados em épocas anteriores (por exemplo, na mais elementar operação de contagem). Mas o seu surgimento como conceito claramente individualizado e como objeto de estudo corrente em Matemática remonta apenas ao final do século XVII.

A origem da noção de função confunde-se, assim, com os primórdios do Cálculo Infinitesimal. Ela surgiu de forma um tanto confusa nos "fluentes" e "fluxões" de Newton (1642 - 1727). Newton aproxima-se bastante do sentido atual de função com a utilização dos termos "relativa quantias" para designar variável dependente, e "genita" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais (Boyer, 2003).

Foi Leibniz (1646 - 1716) quem primeiro usou o termo "função", em 1673, no manuscrito Latino "Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus". Leibniz usou o termo apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência de uma curva de quantidades geométricas como as tangentes e as normais. “Introduziu igualmente a terminologia de *constante*, *variável* e *parâmetro*” (Boyer, 2003).

Com o desenvolvimento do estudo de curvas por meios algébricos, tornou-se indispensável um termo que representasse quantidades dependentes de alguma variável por meio de uma expressão analítica. Com esse propósito, a palavra "função" foi adaptada na correspondência trocada entre 1694 e 1698 por Leibniz e Johann Bernoulli (1667 - 1748).

O termo "função" não aparecia ainda num léxico matemático surgido em 1716. Mas, dois anos mais tarde, Johann Bernoulli publicou um artigo, que viria a ter grande divulgação, contendo a sua definição de função de certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constante (Boyer, 2003).

Um retoque final nesta definição viria a ser dado em 1748 por Euler (1707 - 1783) - um antigo aluno de Bernoulli - substituindo o termo "quantidade" por "expressão analítica". Foi também Euler quem introduziu a notação f(x).

A noção de função era assim identificada na prática com a de expressão analítica, situação que haveria de vigorar pelo século XVIII e século XIX, apesar conduzirem a diversas incoerências e limitações (de fato, uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes).Esta noção, associada às noções de continuidade e de desenvolvimento em série, conheceu sucessivas ampliações e clarificações, que alteraram profundamente a sua natureza e significado.

Como consequência da evolução do estudo das funções surge numerosas aplicações da Matemática para outras ciências, pois, os cientistas, partindo de observações, procuravam uma regularidade, ou até mesmo uma função, para explicar os sucessivos resultados obtidos. A função era, então, o modelo matemático que explicava a relação entre as variáveis.

Assim, o conceito de função que hoje nos parece simples é resultado de uma evolução histórica conduzindo sempre cada vez mais à abstração, e que só no século XIX teve o seu final.

Na atualidade, as funções estudadas na Análise Infinitesimal, e nas aplicações, retêm no fundamental a ideia de dependência entre variáveis.

A noção de função é de importância central na concepção e no estudo de modelos (dinâmicos, probabilísticos, de distribuição espacial,...), qualquer que seja a sua natureza, continuando por isso a ser uma noção-chave na Matemática atual.

Para dar uma ideia deste tema, passamos a dizer que é um método muito antigo, visto que desde sempre o homem construía a partir de uma situação real, ou seja, a matemática é aprimorada com situações do cotidiano primeiramente, pois assim eram solucionadas as questões. Por exemplo, para se contar o seu rebanho, o pastor fazia uma relação biunívoca entre seus animais e pedrinhas ou algum outro mecanismo de contagem. Daí então, feita a relação, era só aprimorá-la para ficar cada vez mais suave o trabalho, neste caso, o de contagem do rebanho (Eves 2004).

2.2 – Definição de função e alguns conceitos básicos

Uma **função** é uma relação, que é definida da seguinte maneira: sejam dois conjuntos *A* e *B*, tais que para todo elemento *x* pertencente a *A*, haja uma **correspondência** de um único elemento *y* pertencente a *B*. Essa correspondência é a função: a associação, definida de algum modo, entre todos os elementos de um conjunto e os elementos de outro conjunto.

A função que associa um elemento *x* a outro valor pode ser indicada por *f(x)*. O aparecimento de *x* na simbologia da função não ocorre por acaso, uma vez que o valor *f(x)* depende de *x*. Por isso mesmo, *x* é chamada variável independente e *f(x)*(ou *y*) é chamada de variável dependente. Matematicamente, a notação de função é dada por:

$f : A \to B : x \mapsto f(x)$, ou mais simplificado, $f : A \to B$

Um exemplo de função: dado o conjunto dos números naturais, uma função pode associar cada número ao seu quadrado. Assim, essa função assumiria os valores: {1,4,9,16,... }.

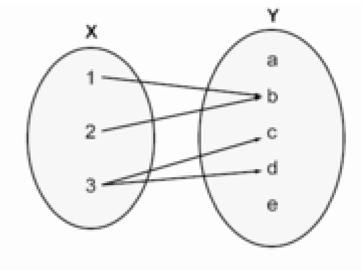
Uma função pode, na verdade, associar mais de um conjunto a outro; pode haver diversas variáveis independentes. Por exemplo: uma função pode tomar dois valores inteiros e expressar sua soma:

$$f(x, y) = x + y$$

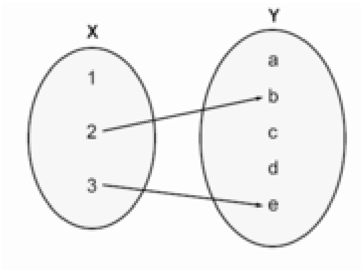
São duas características da função enquanto relação:

- há correspondência unívoca entre um elemento e o valor associado a ele pela função: isso significa que para cada valor assumido pela variável independente (*x*), há um único valor da variável dependente (*y*) associado pela função. Se *t = f(x)* e *w = f(x)*, então *t = w*.
- a correspondência é total, ou seja, um valor assumido pela variável dependente estará associado para todo valor possível de ser assumido pela variável independente.

Os diagramas a seguir mostram dois exemplos de relações que **não** são funções:

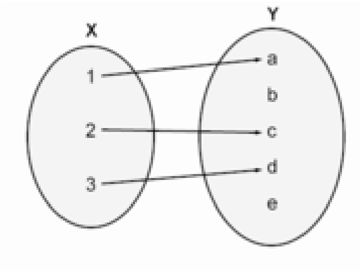


Nesse caso, um mesmo elemento (3) do domínio *X* aparece associado a dois elementos do contradomínio (c,d).



Aqui a correspondência não é total: falta um valor associado a 1.

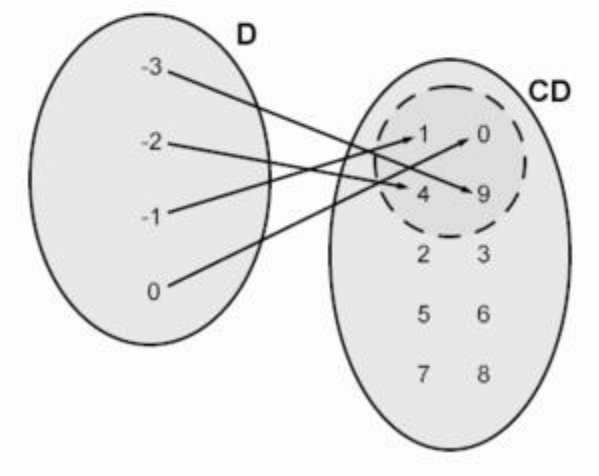
Já o diagrama a seguir representa uma função:



Duas funções *f(x)* e *g(x)* são ditas **iguais** (*f* = *g*) se e somente se para cada valor de *x* no domínio *D*, *f(x)* e *g(x)* assumam o mesmo valor:

$$\forall x \in D, f(x) = g(x) \rightarrow g = f$$

Domínio, contradomínio e imagem



Função x^2, definida para { -3,-2,-1,0 }. Observar o conjunto domínio (D), contra-domínio (CD) e imagem (delineado pela linha tracejada).

São três conjuntos especiais associados à função. O **domínio** é o conjunto *A* do exemplo dado no início deste capítulo: contém todos os elementos *x* para os quais a função deve ser definida. Já o conjunto *B* do exemplo é o **contradomínio**: o conjunto que contém os elementos que podem ser relacionados a elementos do domínio.

Também se define o conjunto **imagem** como o conjunto de valores que efetivamente *f(x)* assume. O conjunto imagem é, pois, sempre um subconjunto do contradomínio.

Por exemplo, suponha a função que associa um elemento do domínio *D* = { 1,2,3,4,5 } a uma vogal ordenada no alfabeto.

O domínio, já especificado, é $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. O contradomínio é:

$CD = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$

A imagem é $Im = \{a, e, i, o, u\}$

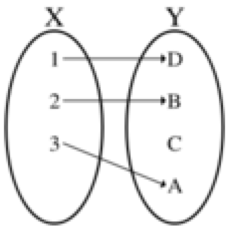
Funções: sobrejetora, injetora e bijetora.

Tomemos dois conjuntos X e Y. Digamos que o primeiro seja um conjunto de crianças e o segundo é de mulheres adultas. Seja *f* a função que leva cada criança *x* do conjunto *X* na sua mãe *y = f(x)* do conjunto *Y*.

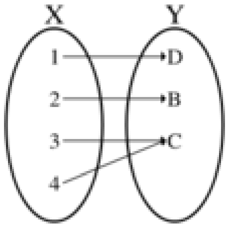
- Se houver ao menos uma criança no conjunto X que não seja filha de uma mulher do conjunto Y, então esta relação não consiste em uma função.

- Se houver ao menos uma criança no conjunto X que seja filha de mais de uma mulher do conjunto Y, então esta relação também não consiste em uma função.

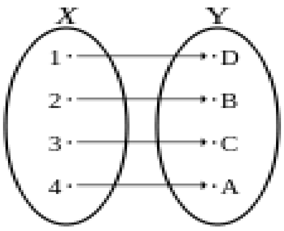
- Se no conjunto *X* não houver nenhum par de irmãos, ou seja, as mulheres do conjunto *Y* têm apenas um filho ou nenhum filho, então temos que para *a* e *b* crianças diferentes do conjunto *X*, as suas mães *f(a)* e *f(b)* são diferentes. Neste caso, a função é **injetora**. Exemplo:



- Se o conjunto *Y* for formado apenas de mães, ou seja, não há mulheres sem filho em *Y*, então qualquer que seja a mãe*m* do conjunto *Y* existe alguma criança *c* tal que *f(c) = m* (ou seja, *m* é a mãe de *c*). Neste caso, a função é **sobrejetora**.



- Se não houver irmãos em *X*, e o conjunto *Y* for formado de mães, então existe uma correspondência perfeita entre crianças e suas mães, ou seja, toda criança tem só uma mãe e toda mulher tem só um filho. A função *f* é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora, ou seja, é **bijetora**.



Capítulo 3

Modelagem Matemática na sala de aula

A motivação desta pesquisa foi o surgimento da questão: o que acontece com um composto químico quando diminuímos sua concentração? Como poderíamos mostrar esse efeito matematicamente?Nesse instante, a ideia da Modelagem foi pensada como método de ensino, mais especificamente Modelação Matemática. Com a ideia pronta, vimos então a necessidade de prepararmos um material um pouco diferente do que normalmente é colocado nos materiais didáticos voltados para o Ensino Médio. Pensamos, então, em um conteúdo específico, em que os alunos apresentavam bastante dificuldade e, assim, começar a aplicar a metodologia com tal conteúdo. Bem, o conteúdo escolhido foi funções. Segundo Meyer (2010), "*a Modelagem, na aprendizagem, recusa, porém, a preferência por esta postura: apoia–se antes, numa necessidade.Esse "precisar" da Matemática pode ser fruto de motivação lúdica, sim, como quando alunos modelam a construção da cobertura da quadra da escola, mas também pode ser resultado do anseio da comunidade da escola e dos alunos".*

No modelo matemático que usaríamos com os alunos, apareceria uma função conhecida: função exponencial do tipo $f(x) = c.a^x$, onde a e c são constantes. E, juntamente com a função exponencial, apareceria outro conteúdo: os logaritmos.

Com isso, ficou claro que deveríamos nos preocupar com estes conteúdos matemáticos, pois trabalharíamos a priori com funções consideradas "difíceis", segundo os alunos e alguns professores, e "sem muita aplicabilidade".

Neste momento, foi colocada uma pergunta inicial para os alunos: "Qual é o tempo necessário para que certo medicamento saia do nosso organismo? Isto é, será que o medicamento ou algum medicamento é totalmente absorvido pelo nosso organismo?". Assim, começamos a indagar os alunos e deixá-los pensar um pouco a respeito. Apesar de este tipo de pesquisa ser muito complexa para o Ensino Médio, encontramos um meio adequado e mais propício para que os alunos tivessem acesso a esse tema ou a essas perguntas. Foi então que introduzimos um processo real e que faz parte do cotidiano do aluno: a bula de remédio.

Antes das atividades, fizemos uma revisão sobre potenciação, propriedades da função exponencial, um pouco da história dos logaritmos e da definição e propriedades dos logaritmos.

3.1 – Um pouco sobre funções exponenciais

Neste instante, foi feito uma revisão sobre a definição e propriedades da potenciação, que os alunos deveriam saber, vejamos.

Sabemos que $a^n = \underbrace{a.a.a.a.a.a.a.a \dots a}_{n\ vezes}$, onde a é base, n é o expoente e o resultado é a potência.

A partir disto, podemos citar as propriedades demonstradas em aula(considerando $a, m, n \epsilon \mathbb{R}$):

i. $a^1 = a$
ii. $a^0 = 1$
iii. $a^m . a^n = a^{m+n}$
iv. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$
v. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0$
vi. $(a^m)^n = a^{m.n}$
vii. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, n \neq 0$

Feita a revisão, poderíamos agora definir a função exponencial, ou seja, mostrar as características desta função e suas características:

- As funções do tipo $f(x) = b^x$, passam pelo ponto (0,1).

- Funções exponenciais são sempre positivas: $b > 0, \forall x$.

- $f(x) = b^x$ é *crescente* se b > 1 e *decrescente* se 0 < b < 1.

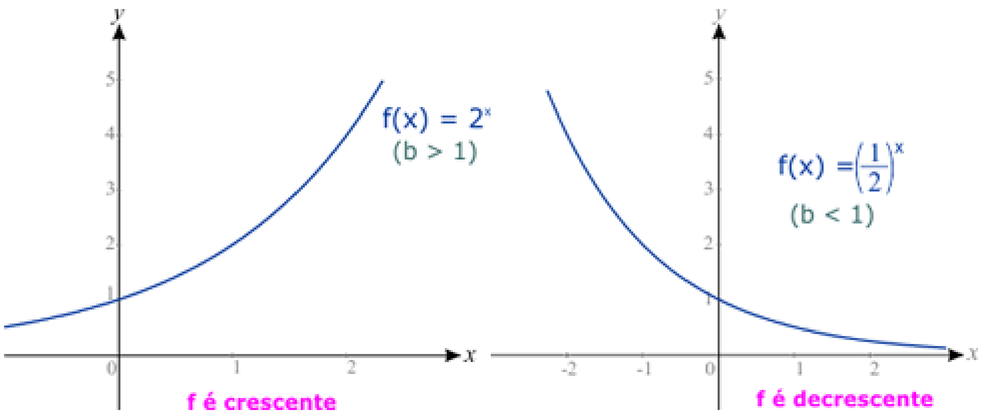


Figura 2 – Gráficos representando a função exponencial

- O *domínio* de $f(x) = b^x$ é o conjunto de todos os números reais.

- A *imagem* de $f(x) = b^x$ é o conjunto de todos os números reais positivos - $]0,+\infty[$.

Assim, depois da aula expositiva, entregamos uma lista de exercícios (ver Apêndice A).

Com a resolução dos exercícios e algumas colocações e indagações dos alunos, surgiua necessidade do estudo dos logaritmos.

3.2 – Um pouco da história dos logaritmos

Já antes dos logaritmos, a simplificação das operações era realizada através das conhecidas relações trigonométricas, que relacionam produtos com somas ou subtrações. Esse processo de simplificação das operações envolvidas passou a ser conhecido como prostaférese, isto é, as identidades trigonométricas abaixo eram utilizadas para transformar produtos em somas ou diferenças, utilizando as tabelas de funções trigonométricas:

$$2sen\ A\ cos\ B=sen(A+B)+sen(A-B)$$
$$2cos\ A\ sen\ B=sen(A+B)-sen(A-B)$$
$$2cos\ A\ cos\ B=cos(A+B)+cos(A-B)$$
$$2sen\ A\ sen\ B=cos(A-B)-cos(A+B)$$

que já eram conhecidas desde os tempos de Ptolomeu. Sendo largamente utilizado numa época em que as questões relativas à navegação e à astronomia estavam no centro das atenções. De fato, efetuar multiplicações ou divisões entre números muito grandes era um processo bastante dispendioso em termos de tempo. A simplificação, provocada pela prostaférese, era relativa e, sendo assim, o problema ainda permanecia.

Os logaritmos, como instrumento de cálculo, surgiram para realizar simplificações, uma vez que transformam multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração. Napier foi um dos que impulsionaram fortemente seu desenvolvimento,perto do início do século XVII. Ele é considerado o inventor dos logaritmos, muito embora outros matemáticos da época também tenham trabalhado com ele. Já antes dos logaritmos, a simplificação das operações era realizada através das conhecidas relações trigonométricas, que relacionam produtos com somas ou subtrações. O método de Napier baseou-se no fato de que associando aos termos de uma progressão geométricab_1, b_2, b_3, b_4, b_5, … , b_n, …os termos da progressão aritmética1, 2, 3, 4, 5, ... , n, ...Então ao produto de dois termos da primeira progressão, $\mathbf{b_m.b_p}$, está associada a soma **m+p** dos termos correspondentes na segunda progressão.

Considerando, por exemplo,

PA 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

PG 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048 4096 8192 16394 32784

Para efetuar, por exemplo, 512 x 64, basta observar que:

• *512 na segunda linha corresponde a 9 na primeira;*

• *64 na segunda linha corresponde a 6 na primeira;*

• *como 9+6=15,*

• *15 na primeira linha corresponde a 32784 na segunda.*

Assim, *512 x 64 = 32784*, resultado esse que foi encontrado através de umasimples operação de adição. A fim de que os números da progressão geométrica estivessem bem próximos, para ser possível usar interpolação e preencher as lacunas entre os termos na correspondência estabelecida, evitando erros muito grosseiros, Napier escolheu para razão o número $b = 1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$, que é bem próximo de 1. Segundo *Eves*, para evitar

decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7. Então, se $N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$, ele

chamava L de "logaritmo" do número N. Assim, o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de$10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$é 1.

Enquanto Napier trabalhava com uma progressão geométrica onde o primeiro termo era **10^7.b** e a razão **b**, ao que parece de forma independente, Bürgi também lidava com o problema dos logaritmos.

Bürgi empregou uma razão um pouco maior do que 1,qual seja $1{,}0001=1+10^{-4}$. O primeiro termo de sua PG era 10^8 e ele desenvolveu uma tabela com 23027 termos. Como Napier, Bürgi considerou uma PG cuja razão era muito próxima de 1, a fim de que os termos da sequência fossem muito próximos e os cálculos pudessem ser realizados com boas aproximações. Posteriormente, Napier, juntamente com Briggs, elaboraram tábuas de logaritmos mais úteis de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo, assim, os logaritmos *briggsianos* ou comuns, ou seja, os logaritmos dos dias de hoje.

Ainda segundo Eves, durante anos ensinou-se a calcular com logaritmos na escola média ou no início dos cursos superiores de matemática; também por muitos anos a régua de cálculo logarítmica foi o símbolo do estudante de engenharia do campus universitário. Hoje, porém, com o advento das espantosas e cada vez mais baratas e rápidas calculadoras, ninguém mais usa uma tábua de logaritmos ou uma régua de cálculo para fins computacionais.

O ensino dos logaritmos, como um instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas, os famosos construtores de réguas de cálculo de precisão estão desativando sua produção e célebres manuais de tábuas matemáticas estudam a possibilidade de abandonar as tábuas de logaritmos. Os produtos da grande invenção de Napier tornaram-se peças de museu.

A função logarítmica, porém, nunca morrerá. A principal dessas razões é de natureza teórica. Embora eles tenham sido inventados como acessório para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos naturais e mesmo sociais são estreitamente relacionados com os logaritmos. Assim sendo, os logaritmos, que no princípio eram importantes apenas por causa das tábuas, mostraram ter apreciável valor intrínseco.

3.3 - Definição e alguns conceitos básicos dos logaritmos

Definimos aqui o logaritmo como o inverso da exponencial, no seguinte sentido:

$a^x = b \leftrightarrow \log_a b = x$

Na equação $\log_a b = x$, temos a seguinte nomenclatura:

- *a* é a base do logaritmo;

- *b* é o logaritmando;

- *x* é o logaritmo.

Como na exponencial $a^x = b$ a base satisfaz $a > 0\ e\ a \neq 1$, temos que $b > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Assim, para $\log_a b$ também devemos ter:

- $\mathrm{a} > 0\ e\ a \neq 1$
- $\mathrm{b} > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

<u>Consequências da Definição</u>

Como consequência da Definição de logaritmos, temos os seguintes resultados ($a, b\ e\ c\ \in \mathbb{R}^*;\ a \neq 1\ e\ n \in \mathbb{R}$):

- $\log_a 1 = 0, pois\ a^0 = 1$
- $\log_a a = 1, pois\ a^1 = a$
- $\log_a a^n = n, pois\ a^n = a^n$
- $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$
- $\mathrm{se\ a} > 1, \log_a b > \log_a c \Rightarrow b > c$

- $\text{se a} > 1, \log_a b < \log_a c \Rightarrow b < c$
- $\text{se } 0 < a < 1, \log_a b > \log_a c \Rightarrow b < c$
- $\text{se } 0 < a < 1, \log_a b < \log_a c \Rightarrow b > c$

Propriedades dos Logaritmos

Pela definição de logaritmos têm-se as seguintes propriedades ($a, b\ e\ c\ \in \mathbb{R}^*;\ a \neq 1\ e\ n \in \mathbb{R}$):

- logaritmo do produto (é a soma dos logaritmos):

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

- logaritmo do quociente (é a diferença dos logaritmos):

$$\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$$

- logaritmo da potência (é a potência vezes o logaritmo):

$$\log_a b^n = n.\log_a b$$

- exponencial do logaritmo de mesma base:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Mudança de base:

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$$

Com a teoria discutida, foram feitos alguns exercícios para serem treinadas estas operações acima (ver Apêndice 2).

Concluída a etapa dos exercícios, vimos a necessidade de outra atividade prática, ou seja, desenvolver o nosso objetivo e, então, introduzimos uma bula de um remédio para tal aprendizado.

3.4 - Atividade 1

Esta atividade foi muito motivadora para os alunos que, em nenhum momento, pensaram que a bula do remédio poderia “conter Matemática”. É neste contexto de descobertas que a Modelagem Matemática nos surpreende. Com isso e tendo a curiosidade dos alunos, preparamos a atividade. Mostramos aos alunos a bula da Dipirona Sódica como um todo e analisamos em qual parte estaria ligada com o motivo do estudo, ou seja, apresentamos para os alunos as características farmacológicas, conforme Figura 3 abaixo:

Características farmacológicas

Propriedades farmacodinâmicas

A dipirona é um derivado pirazolôniconão-narcótico com efeitos analgésico, antipirético e espasmolítico. A dipirona é uma pró-droga cuja metabolização gera a formação de vários metabólitos entre os quais há 2 com propriedades analgésicas: 4-metil-aminoantipirna (4-MAA) e o 4-amino-antipirina (4-AA). Como a inibição da ciclooxigenase (COX-1, COX-2 ou ambas) não é suficiente para explicar este efeito antinociceptivo, outros mecanismos alternativos foram propostos, tais como: inibição de síntese de prostaglandinas preferencialmente no sistema nervoso central, dessensibilizacão dos nociceptores periféricos envolvendo atividade via óxido nítrico-GMPc no nociceptor, uma possível variante de COX-1 do sistema nervoso central seria o alvo específico e, mais recentemente, a proposta de que a dipirona inibiria uma outra isoforma da ciclooxigenase, a COX-3. Os efeitos analgésico e antitérmico podem ser esperados em 30 a 60 minutos após a administração e geralmente duram cerca de 4 horas.

Propriedades farmacocinéticas

Após administração oral, a dipirona é completamente hidrolisada em sua porção ativa, 4-N-metilaminoantipirina (MAA). A biodisponibilidade absoluta da MAA é de aproximadamente 90%, sendo um pouco maior após administração oral quando comparada à administração intravenosa. A farmacocinética da MAA não se altera em qualquer extensão quando a dipirona é administrada concomitantemente a alimentos. Principalmente a MAA, mas também a 4-aminoantipirina (AA), contribuem para o efeito clínico. Os valores de AUC para AA constituem aproximadamente 25% do valor de AUC para MAA. Os metabólitos 4-N-acetilaminoantipirina (AAA) e 4-N-formilaminoantipirina (FAA) parecem não apresentar efeito clínico. São observadas farmacocinéticas não-lineares para todos os metabólitos. São necessários estudos adicionais antes que se chegue a uma conclusão sobre o significado clínico destes resultados. O acúmulo de metabólitos apresenta pequena relevância clínica em tratamentos de curto prazo. O grau de ligação às proteínas plasmáticas é de 58% para MAA, 48% para AA, 18% para FAA e 14% para AAA. Após administração intravenosa, a meia-vida plasmática é de aproximadamente 14 minutos para a dipirona. Aproximadamente 96% e 6% da dose radiomarcada administrada por via intravenosa foram excretadas na urina e fezes, respectivamente. Foram identificados 85% dos metabólitos que são excretados na urina, quando da administração oral de dose única, obtendo-se 3% ± 1% para MAA, 6% ± 3% para AA, 26% ± 8% para AAA e 23% ± 4% para FAA. Após administração oral de dose única de 1 g de dipirona, o clearance renal foi de 5mL ± 2 mL/min para MAA, 38 mL ± 13 mL/min para AA, 61 mL ± 8 mL/min para AAA, e 49 mL ± 5 mL/min para FAA. As meias-vidas plasmáticas correspondentes foram de 2,7 ± 0,5 horas para MAA, 3,7 ± 1,3 horas para AA, 9,5 ± 1,5 horas para AAA, e 11,2 ± 1,5 horas para FAA. Em pacientes idosos, a exposição (AUC) aumenta 2 a 3 vezes. Em pacientes com cirrose hepática, após administração oral de dose única, a meia-vida de MAA e FAA aumentou 3 vezes (10 horas), enquanto para AA e AAA este aumento não foi tão marcante. Os pacientes com insuficiência renal não foram extensivamente estudados até o momento. Os dados disponíveis indicam que a eliminação de alguns metabólitos (AAA e FAA) é reduzida.

Figura 3: Bula da Dipirona sódica. *Fonte: (acesso em 16/12/2013 em* http://www.medicinanet.com.br/bula/3783/novalgina_dipirona.htm)

Começamos a atividade com o conceito de vida média ou tempo médio ou meia vida, isto é, o tempo para que o medicamento seja absorvido pelo organismo. A parte da bula que seria utilizada seria esta abaixo:

> ***"Após administração intravenosa, a meia-vida plasmática é de aproximadamente 14 minutos para a dipirona."***

Neste momento, apresentamos a fórmula $Q = Q_0 . e^{-\alpha . t}$, onde *Q* é a quantidade final do medicamento depois de um determinado tempo *t*, Q_0 é a quantidade inicial ou a dose do medicamento, que neste caso utilizaremos 500 mg, ***α*** é constante do medicamento e *t* o tempo, este pode ser medido em horas, minutos e segundos, neste caso. A letra ***e*** representa o número irracional 2,718281828459... que faz com logaritmo de ***e na base e seja um***, isto é, *lne = 1*. Neste momento paramos um pouco e foi inserido o conceito de logaritmo de base natural, de como chegou ao valor de ***e*** então escrevemos definição de ***e***, que se dá por:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (1)$$

e calculamos com o uso de uma calculadora um valor aproximado, já que o conceito de limite não era tema principal deste estudo. Pedimos aos alunos que em casa escolhessem uma bula de remédio qualquer e fizessem os cálculos feitos em sala de aula.

Os resultados em sala de aula foi o seguinte, tendo como base a bula da Figura 3. Vejamos:

Q_0; quantidade inicial (500mg)

Q: quantidade final

α: constante do medicamento

t: tempo em minutos

Utilizando a fórmula $Q = Q_0 . e^{-\alpha . t}$ e os dados da bula, isto é, que a meia-vida da Dipirona Sódica é de aproximadamente 14 minutos, conseguimos então calcular α. Vejamos:

$$\frac{1}{2} Q_0 = Q_0 . e^{-\propto .14}$$

$$0{,}5 = e^{-\propto .14}$$

$$ln 0{,}5 = ln e^{-\propto .14}$$

$$\alpha = -\frac{ln 0{,}5}{14}$$

$$\alpha = 0{,}049510513$$

Com a constante calculada, conseguimos, então, para a Dipirona Sódica, construir uma função exponencial$Q = 500. e^{-0{,}049510513 . t}$, que nos fornecerá, a partir deste modelo, o tempo e a quantidade final que quisermos. Tendo isto, fizemos a construção de um gráfico, considerando os trinta primeiros minutos, para que os alunos analisassem o resultado obtido. Vejamos o gráfico abaixo (Figura 4):

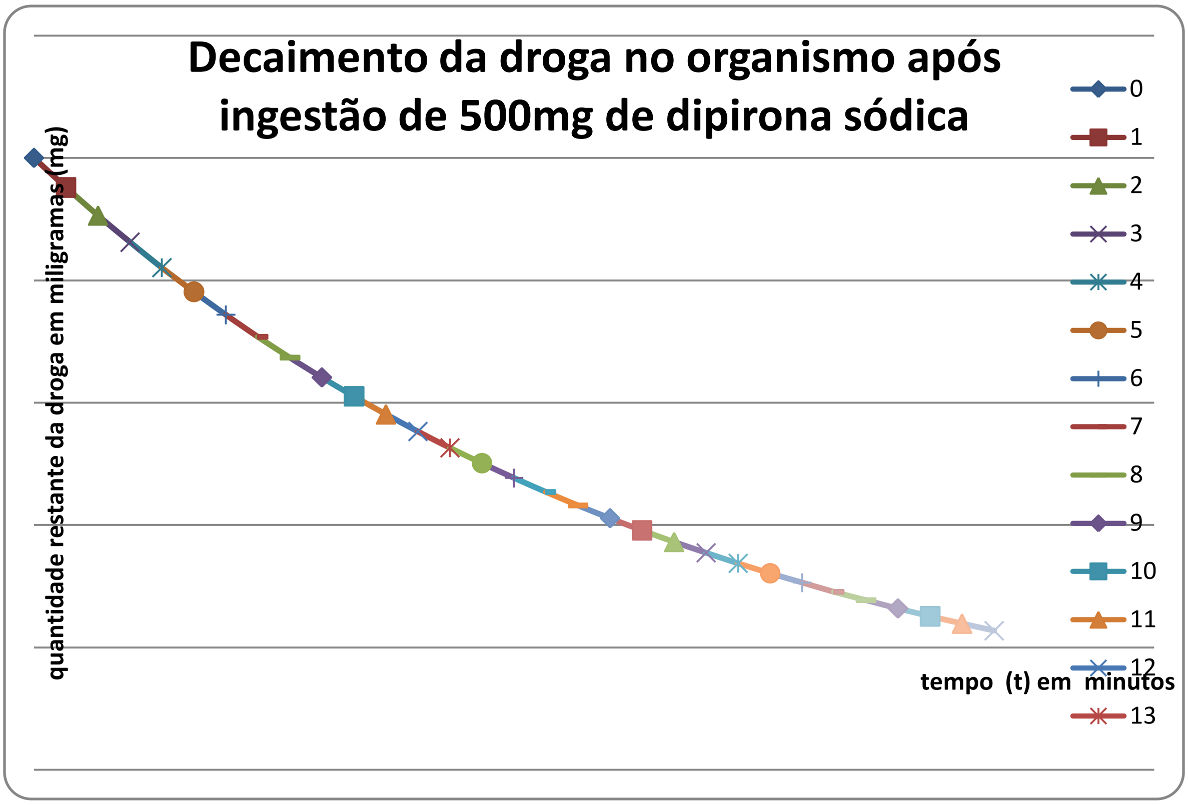


Figura 4 – Decaimento da droga no organismo após ingestão de 500 mg de Dipirona Sódica

Analisando o gráfico, foi percebido que, com o passar do tempo, o remédio iria sendo eliminado do organismo. Então, surgiu uma pergunta: quanto do remédio sairá se passarem 200 minutos? Utilizando uma calculadora científica, outro mecanismo que não é de utilização no cotidiano dos alunos, eles fizeram o cálculo e chegaram, aproximadamente, a *Q = 0,026mg* de Dipirona Sódica no organismo. Perceberam após mais algumas contas que a quantidade final chega muito perto do zero mais não a zero. Isto é um cálculo matemático e não realmente o que acontece no organismo humano, mas a intenção desta pesquisa é só trabalhar com estas situações e provocar curiosidade.

3.5 - Atividade 2

Outra atividade que propusemos e que foi realizada pelos alunos foi a seguinte:

De acordo com Tabela 3, que indica a idade gestacional, em semanas, e o peso ao nascer, em quilogramas, de recém-nascidos. Responda:

Tabela3: Idade Gestacional x Peso ao nascer

Idade Gestacional	Peso ao nascer
28	1,25
32	1,25
35	1,75
38	2,25
39	3,25
41	3,25
42	4,25

a) Qual seria, aproximadamente, o peso de um recém-nascido no sexto mês de gestação?

b) Qual seria, aproximadamente, a idade gestacional de um recém – nascido se o peso ao nascer foi de 2,0 quilogramas?

c) Construir uma lei de formação para estes dados?

Esta atividade acima foi proposta para os alunos realizarem extra-classe. Muitos alunos apresentaram dificuldade, pois chegaram ao impasse de como calcular o item c, visto que não existia nenhuma lei de formação ou função que pudessem auxiliá-los. Foi interessante o resultado de alguns alunos, porque pensaram em uma reta, ou seja, um cálculo utilizando uma regra de três e perceberam que não ficaria muito apropriado o resultado. Notaram também que construindo o gráfico os pontos não formavam uma reta como ilustrado abaixo:

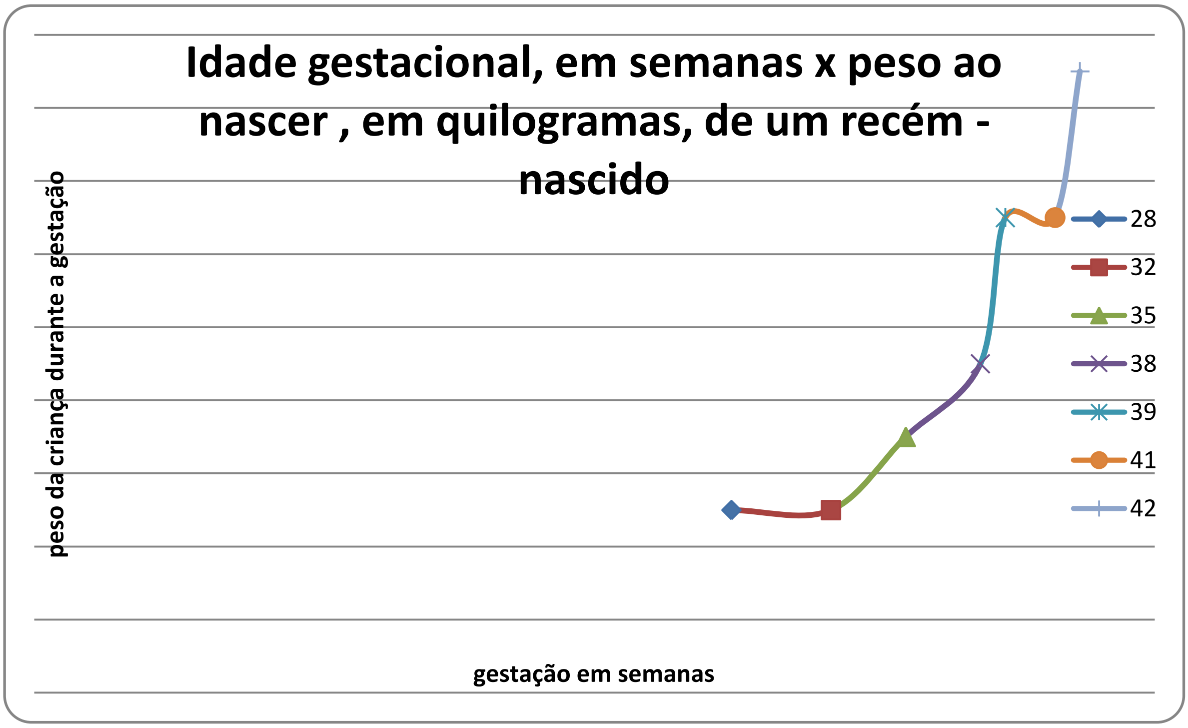


Figura 5 – Idade gestacional (semanas) x Peso ao nascer (kg)

Neste ponto, percebemos o quão importante seria uma atividade prática para, assim, perceberem e analisarem o que realmente acontece em uma pesquisa.

Capítulo 4

Uma aplicação

É neste momento que esta pesquisa vai para a sala de aula estabelecendo a relação do conteúdo com a realidade da pesquisa envolvida. A metodologia utilizada foia Modelagem Matemática e o *software Microsoft Excel* para auxiliar nas construções de gráficos e no levantamento dos dados coletados com a pesquisa.

Junto aos alunos foi feito um estudo, com as definições, as construções dos gráficos, a utilização do *software* e a compreensão do modelo da nossa pesquisa que foi a utilização da concentração do composto químico sulfato de cobre.

As aulas teóricas e práticas ocorreram na Faculdade Pitágoras de Jundiaí, com a presença e colaboração dos professores de química - a Profª. Julia e o Prof. Edson - os quais nos deram o suporte necessário para a realização da atividade. Os alunos foram previamente instruídos para a pesquisa no laboratório. O objetivo inicial era ajustar os dados a uma função exponencial, como estudado em sala de aula. Tomamos por base um texto publicado no 5º Congresso Norte-Nordeste de Química, que nos serviu de instrumento e suporte base para atividade no laboratório antes da ida ao laboratório.

Foi mostrado aos alunos o efeito esperado pela coleta dos dados junto ao texto de referência e a importância da preparação com a coleta dos dados e a interação com o Laboratório de Química. O texto apresentava claramente o que estava sendo coletado e, com a base teórica, foi tranquilo o processo prático, visto que nenhum aluno havia tido contato anterior com um Laboratório de Química. A parte teórica foi dada em quatro aulas, isto é, foi trabalhado o conteúdo necessário com os alunos antes da prática em um período de tempo mais que suficiente para tal. O material que eles usaram: o elemento químico (sulfato de cobre), a água destilada, o reagente que seria misturado com o elemento químico (sulfato de cobre). Foi também utilizado para análise instrumental Espectofotômetro SP – 220 cubeta de quartzo de 10 mm de caminho óptico, e em todo processo foram utilizadas balanças e vidrarias analíticas para a validação dos parâmetros.

A espectrofotometria é o método de análises óptico mais usado nas investigações biológicas e físico-químicas. O espectrofotômetro é um instrumento que permite a comparação entre a radiação absorvida ou transmitida por uma solução que contém uma quantidade desconhecida de soluto e uma quantidade conhecida da mesma substância. Este aparelho trabalha com diferentes comprimentos de ondas que é utilizado na hora da medição da concentração do composto químico. Nesta experiência trabalhamos com dois comprimentos de onda: 420nm e 720nm.

No dia da atividade prática no laboratório, foi feita uma abordagem de como utilizar os materiais e de toda a preparação adequada para iniciarmos a coleta dos dados. Os alunos, então, dividiram-se em grupos, um com dois alunos e dois com três alunos. Feita a divisão dos grupos, os alunos, então, começaram a fazer a pesagem do cobre, que foi feita em uma balança de precisão, como mostra a Figura 6.

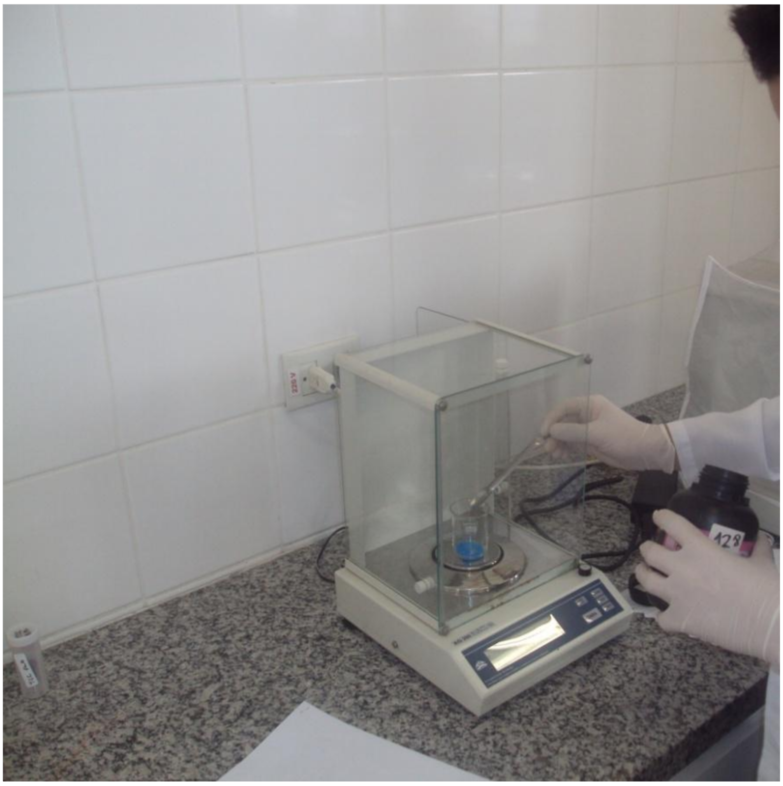


Figura 6 - Pesagem do sulfato de cobre em uma balança de precisão

Feita a pesagem, o procedimento seguinte seria a diluição do cobre em água destilada para poderem passar para o próximo passo que seria a diluição do sulfato de cobre em água destilada como na Figura 7.

Figura 7 - As duas alunas e Prof. Felipe realizando a diluição do composto.

Feita a diluição, os alunos passaram para o espectrofotômetro para realizarem, por meio de luz, a medida da concentração de acordo com a quantidade especificada. Ao fazerem isso, os alunos estavam realizando a coleta das informações para a próxima etapa (Figura 8).

Figura 8 - Alunos realizando a medição da concentração do composto sulfato de cobre.

Feita as medições, os alunos passaram para a coleta dos dados, como mostra a figura 9 a seguir:

Figura 9 - Duas alunas realizando a coleta dos dados.

Com os dados prontos e os cálculos realizados, faltava apenas a inserção destes dados em uma tabela e depois verificar como se apresentavam esses dados num gráfico. Foi utilizado o gráfico de dispersão. A tabela 4 registra as concentrações utilizando comprimento de onda de 420nm. Temos, então, o resultado na Figura 10.

Tabela 4 - Concentração de sulfato de cobre Cu^{+2} com comprimento de onda de 420nm

	Tabela - 420nm	
Solução	Concentração de sulfato de cobre Cu^{+2}	Absorbância
1	0,80	0,016
2	0,60	0,007
3	0,40	0,005
4	0,20	0,01

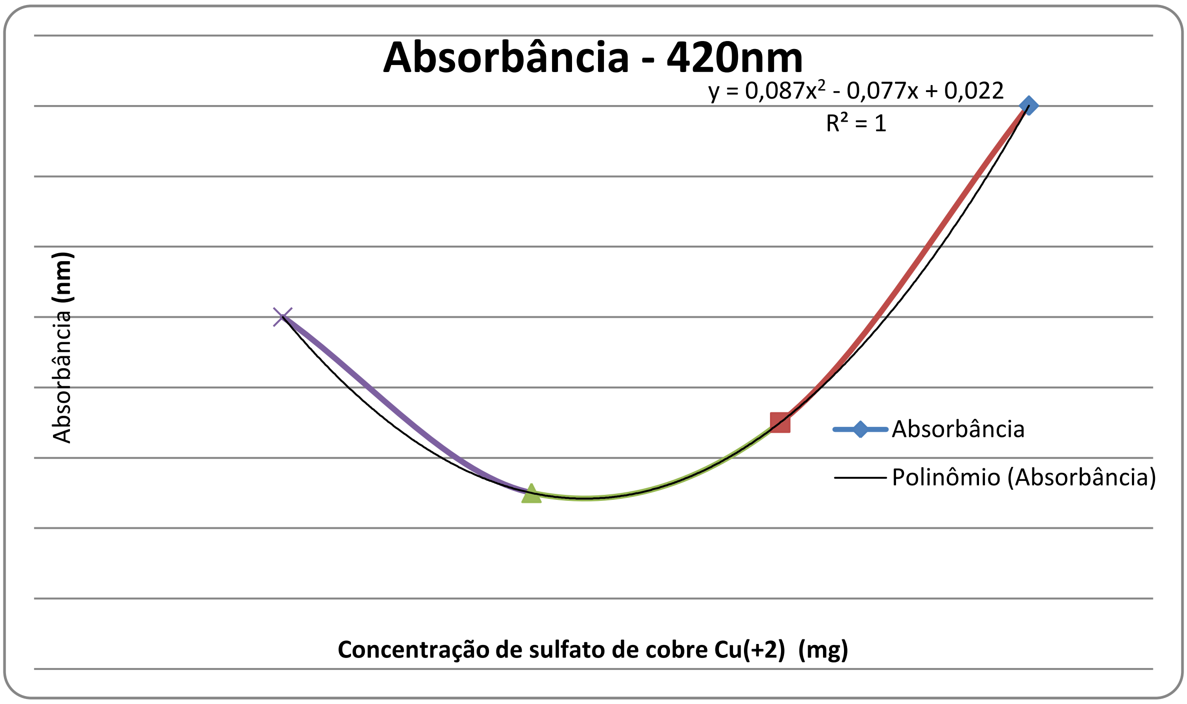


Figura 10 – Absorbância 420nm x Concentração de sulfato de cobre Cu(+2)

A tabela 5 registra as concentrações utilizando comprimento de onda de 750nm. Temos, então, o resultado na Figura 11. Como podemos ver abaixo:

Tabela 5 - Concentração de sulfato de cobre Cu^{+2} com comprimento de onda de 750nm

	Tabela - 750nm	
Solução	Concentração de sulfato de cobre Cu^{+2}	Absorbância
1	0,60	0,497
2	0,40	0,499
3	0,20	0,444

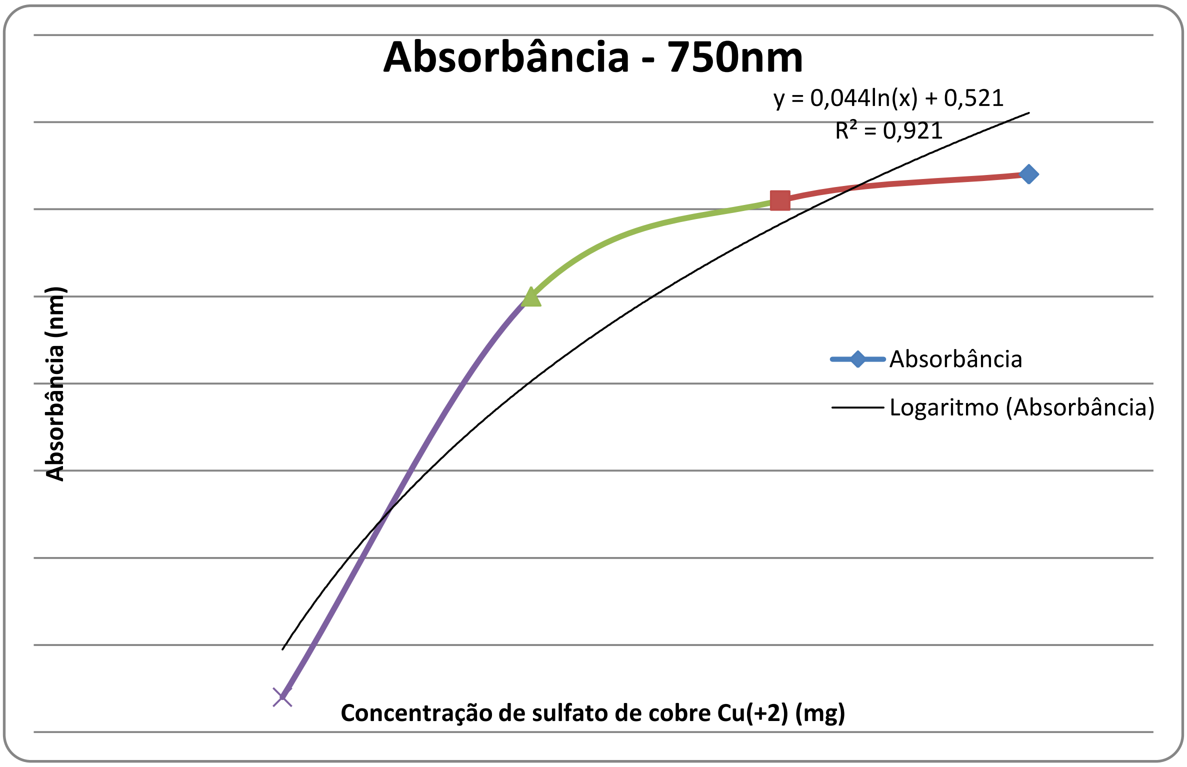


Figura 11 - Absorbância 750nm x Concentração de sulfato de cobre Cu(+2)

As tabelas e os gráficos foram feitos utilizando o *software Microsoft Excel* e a atividade no Laboratório de Química na Faculdade Pitágoras – Unidade Jundiaí. Esta Faculdade foi escolhida pelo fato de possuir todos os instrumentos necessários para a experiência com os alunos. Outro fator importante foi a questão de estas aulas acontecerem no contra–período, isto é, no momento em que as aulas já haviam sido encerradas. A quantidade de alunos (do Prof. Felipe)foi de oito alunos, visto que as aulas não seriam na própria escola. Estes alunos são de uma escola particular da cidade de Jundiaí. Os alunos que assistiram e participaram desta atividade são de séries diferentes, alguns estão na 2ª série e outros estão na 3ª série do Ensino Médio. Não nos preocupamos a princípio com a série escolar, visto que o conteúdo seria explicado para todos. Não fizemos na própria escola devido ao Laboratório de Química da escola não possuir o material necessário na sua totalidade. Por estes motivos, tanto as aulas teóricas como práticas foram feitas na Faculdade Pitágoras. Mesmo assim a experiência foi realizada com sucesso.

Como pudemos verificar, com os resultados obtidos, conseguimos atingir o objetivo desta pesquisa, ou seja,realizar uma dinâmica entre duas áreas do conhecimento – Matemática e Química – por meio da Modelagem Matemática para os alunos do Ensino Médio.

A experiência foi válida, pois os alunos perceberam a relação direta entre a Matemática e a Química, isto é, viram que, tendo a Matemática como “companheira”, pode-se analisar e fazer predições a partir de dados experimentais, visto que, como falamos para nossos alunos em aulas, a Matemática é como uma caixa de ferramentas, na hora em que você precisar basta abrir a caixa e utilizar a ferramenta necessária. É nesta hora, por exemplo, que a Modelagem Matemática nos ajuda. Basta termos uma pergunta, de que não sabemos a resposta – e pode haver mais que uma - que começamos o trabalho. E foi neste sentido que foi proposto o trabalho, colocamos a pergunta e deixamos a experiência do laboratório/prática fazer o restante, ou seja, mostrar aos alunos que a Matemática não é só o que está na apostila diária deles, é muito mais e a resposta destes alunos foi uma experiência muito gratificante, cujo desencadeamento foi além, visto que os alunos que não participaram nos procuraram depois dizendo que se soubessem que teria aula prática gostariam de ter participado. Então, explicamos que não foi premeditado, apenas aconteceu de acordo com o andamento das aulas (que foram extras).

A intenção da atividade proposta era que mostrássemos as curvas estudadas em aula, mas, conforme os resultados foram encontrados,notamos que, com a quantidade pequena de dados (acreditamos que um dos fatores foi esse), não foi possível constatar uma boa aproximação pela curva logarítmica como esperado. Então, fizemos a aproximação por uma linha de tendência voltada para uma curva de segundo grau na Figura 9.

Já na Figura 10, atingimos com uma curva logarítmica, mas acreditamos que, também pela pequena quantidade de dados esta curva não foi tão precisa.

Verificamos, então, que nesse tipo de atividade não podemos seguir apenas um conteúdo pré-definido, pois poderá sair do plano traçado, o que é esperado quando se trabalha com Modelagem Matemática.

Estes resultados foram discutidos com os alunos e foi mostrada a eficácia da Modelagem Matemática para o ensino de duas ciências que, no dia a dia escolar, podem parecer distantes.

A experiência nos valeu um momento muito próximo aos alunos sem nos preocuparmos com a cobrança de notas, deveres ou outras burocracias que são colocadas no cotidiano escolar. Nestes encontros foram seguradas belas experiências e trocas entre professor/aluno.

Aqui alguns relatos dos alunos:

> *"O trabalho foi uma maneira de unir a prática juntamente com a teoria. Desde o simples detalhe de medir a quantidade da substancia até o resultado final desenvolvemos uma nova dinâmica (de atuar em todas as etapas do processo) que resultou na ruptura do simples conhecimento prático, tão difundido em todo o ambiente escolar. A minha atuação, que envolveu o desenvolvimento da solução final, por todos os*

> *processos de manuseio de instrumentos (também estudados teoricamente na escola), com a dinâmica, com o grupo envolvido e com todas as etapas, que exigem seguir orientações específicas com zelo, acrescentaram em meu leque cultural. Logo, descobri de uma maneira sem igual como as diversas disciplinas escolares estão entrelaçadas sem igual, além de aprender de maneira bem prática e divertida que sem dúvida levarei para a vida toda.” (Matheus – 3ª série EM)*

> *“No laboratório analisamos a absorbância de substâncias em diversas concentrações. Realizamos este experimento com o intuito de ponderar o tempo de vida média de certos medicamentos no corpo do paciente. Colocamos os resultados em gráficos, utilizando a Microsoft Excel e instruções do Prof. Felipe. Em nosso grupo nunca havíamos tido aulas práticas de laboratório, utilizamos conceitos de matemática e química. Foi um ótimo aprendizado para ambas as matérias.” (Júlia – 2ª série EM)*

Estes depoimentos, no nosso entendimento, reforçam como é importante fazer um esforço para que, em determinados momentos, tenhamos uma pausa no engessado conteúdo e trabalhar algo que diferencie o ensino-aprendizagem dos alunos.

Segundo Matheus(3ª série EM),

> "*O trabalho mostrou o quão importante é a junção das disciplinas, no nosso caso foi Matemática e Química, mas poderia ser com qualquer outra disciplina. Basta, sem dúvida um pouco de dinamismo e perdemos o medo de enfrentar o novo, pois só assim aprenderemos com, às vezes, o erro para depois acertarmos. É trabalhoso, mas é muito mais gratificante, pois os alunos que são a parte primordial do processo saem bem satisfeitos com vontade de fazer de novo, isto é, a prática e teoria postas em ação e isto na grande maioria dos casos dá certo.*"

Considerações finais

Nesse trabalho de pesquisa, propomos o uso da Modelagem Matemática no ensino de Funções. Percebemos várias tendências sobre como ensinar funções. No nosso dia a dia, a função é ensinada de uma maneira engessada, isto é, não se pode sair muito do que deve ser ensinado, ou seja, do conteúdo programático e material didático da escola, já que esta realidade na qual estamos inseridos, visto que se trata de um colégio particular.

Foram analisadas situações com modelos previamente prontos para que os alunos tivessem o primeiro contato, por isso a Modelagem Matemática foi a metodologia utilizada nesta pesquisa - conceito, prática e interdisciplinaridade: Matemática e Química.

Nós como professores, devemos fazer com que os alunos tragam situações de fora para dentro da escola, que encontrem um significado para o que estão aprendendo.

Vale ressaltar, que acreditamos ser possível aprimorar esta atividade tendo um número maior de dados e também ao aplicá-la a mais alunos. Além disso, a união e colaboração entre os professores de áreas diferentes foiimportante para todos, haja vista que foi uma atividade prática realizada com todos. A interdisciplinaridade não é uma tarefa fácil, mas, com certeza, quando finalizamos os experimentos, vivenciamos valiosa experiência.

Como bem observado por Meyer et al (2011),

> *"Nesse sentido o que queremos com a Modelagem é ensinar Matemática de uma maneira que os alunos, a partir das ações para o ensino, também criem mecanismos de reflexão e de ação. Portanto, nessa perspectiva não existe mais um currículo neutro, descontextualizado e sem significado nem para o professor nem para o aluno."*

Fica a cargo agora do leitor se interessar pela atividade e tentar aplicar para sua turma.

Apêndice A

<u>Lista de exercícios – Função exponencial</u>

1) Resolva as equações:

a) $x = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3^{-1} - \left[(-3)^{-1}\right]^{-2}$

b) $x = \left(27^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

c) $x = (-2)^3 - 3^2 + \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} .2^{-1}\right] \div \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

2) Calcule as raízes:

a) $\sqrt{196}$

b) $\sqrt[3]{512}$

c) $\sqrt{200}$

d) $\sqrt[4]{1250}$

3) Descubra o valor de x e y .

$$\begin{cases} 4^x.8^y = \frac{1}{4} \\ 9^x.27^{2y} = 3 \end{cases}$$

4) Resolva as equações exponenciais:

a) $2^{x+3} = \frac{1}{8}$

b) $5^{3x+1} = 25$

c) $81^{x-2} = \sqrt[4]{27}$

d) $\sqrt{4^{x+1}} = \sqrt[3]{16}$

e) $\sqrt{5^{x}} \cdot 25^{x+1} = (0,2)^{1-x}$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x-1} \cdot (0,4)^{2x-3}$

g) $\sqrt[5]{2^{x}} \cdot \sqrt[3]{4^{x}} = \sqrt{8^{-x}}$

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

i) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x} \cdot 2^{-x+4}$

j) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-x} \cdot (3^{3x})^{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

5) Certa substância radioativa desintegra-se de modo que, decorrido o tempo t, em anos, a quantidade ainda não desintegrada da substância é **S = 200. $2^{-0,25t}$**. Qual é o valor de S após 10 anos?

6) Suponha que o crescimento de uma cultura de bactérias obedece à lei **N(t) = m. 2 $^{t/2}$**, na qual N representa o número de bactérias no momento t, medido em horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, determine o número de bactérias depois de 8 horas.

7) Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas. Assim, o número n de bactérias após t horas é dado pela função **N(t) = m. 2 $^{t/3}$**. Nessas condições, determine o tempo necessário para a população ser de 51.200 bactérias.

8) As funções $y = a^x$ e $y = b^x$ com $a > 0$ e $b > 0$ e têm gráficos que se interceptam em:

a) nenhum ponto;
b) 2 pontos;
c) 4 pontos;
d) 1 ponto;
e) infinitos pontos.

Apêndice B

Lista de exercícios – Função logarítmica

1. (UFMG-03) Seja $n = 8^{2\log_2 15 - \log_2 45}$. Então, o valor de n é:

( ) 5^2

( ) 8^3

( ) 2^5

( ) 5^3

2. (UFJF-03) O conjunto de todos os números reais x para os quais (log x)/(1-x^2) <0 é:

( ) {x Є IR| x > 0 e x ³ 1}

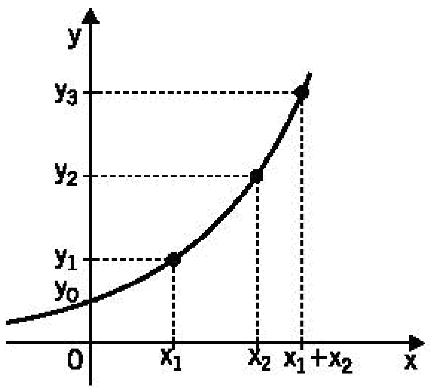
( ) {x Є IR| 0 < x < 1}

( ) {x Є IR| x > 1}

( ) {x Є IR| x > 0}

( ) {x Є IR| x < -1 ou x > 1}

3. (UFJF-03) A figura abaixo é um esboço do gráfico da função $y = 2^x$ no plano cartesiano. Com base nesse gráfico, é correto afirmar que:



( ) $y_0 = y_2 - y_1$

( ) $y_1 = y_3 - y_2$

( ) $y_1 = y_3 + y_0$

( ) $y_2 = y_1 . y_0$

( ) $y_3 = y_1 . y_2$

4. (UNESP-03) Num período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada pela função $q(t) = q_0 .2^{(-0,1)t}$ sendo q_0 a quantidade inicial de água no reservatório e q(t) a quantidade de água no reservatório após t meses. Em quantos meses a quantidade de água do reservatório se reduzirá à metade do que era no início?

( ) 5

( ) 7

( ) 8

( ) 9

( ) 10

5. (PUCRJ-03) Os valores de x, tais que o logaritmo de $(2x^2+1)$ na base 10 é igual a 1, são:

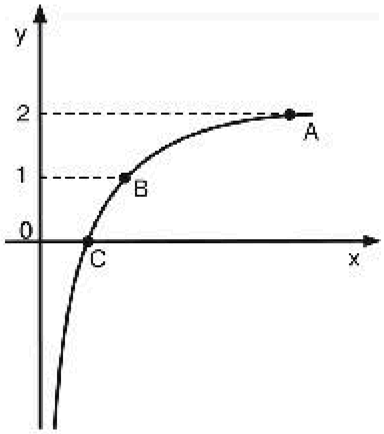
( ) 1 e –1

( ) 1/Ö2 e -1/Ö2

( ) 3 e –3

( ) 3/Ö2 e -3/Ö2

6. (UFJF-02) A figura abaixo é um esboço, no plano cartesiano, do gráfico da função $f(x) = \log_3 x$ com alguns pontos destacados. Supondo que a abscissa do ponto A é igual a 9, é incorreto afirmar que:



( ) a base b é igual a 3

( ) a abscissa de C é igual a 1

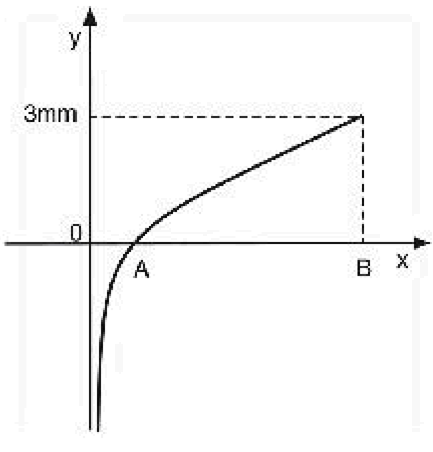
( ) $f(x) < 0$ para todo $x \in (0,1)$

( ) a abscissa de B é igual a 2

( ) $f(x)$ é crescente

7. (PUCMG-02) O gráfico representa a função $y = \log_3 x$.

Tomando-se o milímetro por unidade de medida, o comprimento do segmento de extremos A e B é:



( ) 24 mm

( ) 25 mm

( ) 26 mm

( ) 27 mm

8. (ULBRA) Segundo a lei de resfriamento de Newton, a taxa de resfriamento de um corpo é diretamente proporcional à diferença de temperatura entre este objeto

e o meio ambiente. Sendo assim, a temperatura de um objeto pré-aquecido, após colocado por t minutos em um ambiente a 20ºC, é dada por $T(t)=20+Ke^{ct}$. Considerando que o objeto foi aquecido a uma temperatura de 200ºC e em 10 minutos estava a 110ºC, as constantes K e c devem ser:

( ) k = 180 e c = (-ln 2)/10

( ) k = 180 e c = 90 ln 2

( ) k = 10 e c = (-ln 2)/10

( ) k = 10 e c = (ln 9)/10

( ) k = 180 e c = (ln 2)/10

Apêndice C

Conteúdos e habilidades do 1º e 2º bimestres referente à 1ª série do ensino médio

1ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Números** Números e sequências • Conjuntos numéricos • Regularidades numéricas: sequências • Progressões aritméticas e progressões geométricas	• Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível • Conhecer as características principais das progressões aritméticas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos • Conhecer as características principais das progressões geométricas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos • Compreender o significado da soma dos termos de uma PG infinita (razão de valor absoluto menor do que 1) e saber calcular tal soma em alguns contextos, físicos ou geométricos
2º Bimestre	**Relações** Funções • Relação entre duas grandezas • Proporcionalidades: direta, inversa, direta com o quadrado • Função de 1º grau • Função de 2º grau	• Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando-as por meio de funções • Compreender a construção do gráfico de funções de 1º grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação • Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decrescimento, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo) • Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos

Apêndice D

Conteúdos e habilidades do 1º e 2º bimestres referente à 2ª série do ensino médio

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Relações** Trigonometria • Fenômenos periódicos • Funções trigonométricas • Equações e inequações • Adição de arcos	• Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais, associando-a às funções trigonométricas básicas • Conhecer as principais características das funções trigonométricas básicas (especialmente o seno, o cosseno e a tangente), sabendo construir seus gráficos e aplicá-las em diversos contextos • Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como $f(x) = a\operatorname{sen}(bx) + c$ a partir do gráfico de $y = \operatorname{sen} x$, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c • Saber resolver equações e inequações trigonométricas simples, compreendendo o significado das soluções obtidas, em diferentes contextos
2º Bimestre	**Números/Relações** Matrizes, determinantes e sistemas lineares • Matrizes: significado como tabelas, características e operações • A noção de determinante de uma matriz quadrada • Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento	• Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano • Saber expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, *pixels* etc.) • Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo método de escalonamento de matrizes • Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até a 4ª ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los

Apêndice E

Conteúdos e habilidades do 3º e 4º bimestres referente à 3ª série do ensino médio

3ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Relações** Estudo das funções • Qualidades das funções • Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais • Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação • Composição: translações e reflexões • Inversão	• Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1º e de 2º graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características • Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias, inversões) • Compreender o significado da taxa de variação unitária (variação de f(x) por unidade a mais de x), utilizando-a para caracterizar o crescimento, o decrescimento e a concavidade de gráficos • Conhecer o significado, em diferentes contextos, do crescimento e do decrescimento exponencial, incluindo-se os que se expressam por meio de funções de base e
4º Bimestre	**Números/Relações** Estatística • Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos • Medidas de tendência central: média, mediana e moda • Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão • Elementos de amostragem	• Saber construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências a partir de dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas • Saber calcular e interpretar medidas de tendência central de uma distribuição de dados: média, mediana e moda • Saber calcular e interpretar medidas de dispersão de uma distribuição de dados: desvio padrão • Saber analisar e interpretar índices estatísticos de diferentes tipos • Reconhecer as características de conjuntos de dados distribuídos normalmente; utilizar a curva normal em estimativas pontuais e intervalares

REFERÊNCIAS

Ball, W. W. Rouse, A short account of the history of mathematics.New York: Dover, 1893,1960.

Bassanezi, Rodney Carlos. Ensino – aprendizagem com modelagem matemática.Editora Contexto 3ªedição, 2010.

Biembengut, Maria Salett; Hein Nelson – Ed. Context, 3ª edição, 2003.

Boyer, C.B. História da matemática: São Paulo: Editora Edgard BlücherLtda, 1996.

Burian, Reinaldo. Cálculo Numérico. Reinaldo Burian, Antonio Carlos Lima, AnnibalHetem Junior. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

Burton, D.M.. The History of mathematics . Boston : WCB MacGraw-Hill, 1999.

Eves, H., Introdução à história da matemática. Campinas: Editora da Unicamp1997

Fauvel, John Gray, J.The history of mathematics. A reader. Milton Keynes: The Open University , 1987.

Grattan-Guinness, Ivor. Rainbow of mathematics: a history of the mathematical sciences . Wholesalers, 1995.

Katz, Victor J. A History of mathematics an introduction. New York: Harper-Collins College Publishers, 1993.

Lapa, Nilton; Cavallante, Sidney Luiz. Matemática, Ed. Moderna, 1983.

Lima, Elon Lages. Logaritmos. Coleção do professor de matemática, 2ª edição1996.

Meyer, João Frederico da Costa de Azevedo; Caldeira, Ademir Donizeti e Malheiros, Ana Paula dos Santos. Modelagem em Educação Matemática. Autêntica Editora, 2011.

Michaelis Moderno Dicionário da Língua Portuguesa. Disponível em: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?OJSSID=cd131873ea50b1582cc685c11841f8d5.Acesso em 10 de janeiro de 2014.

Pires, R. F., O uso da Modelação Matemática na construção do Conceito de Função. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 2009.

Stewart, James. Cálculo. Volumes 1 e 2. Ed. Cengage Larning, 6ª edição, 2010.

Struik, Dirk Jan. História concisa das matemáticas. Lisboa: Gradiva. 1948,1987.

Thomas, George B.. Cáculo. Ed. Pearson Education do Brasil Ltda, 11ª edição, 2009.