UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

SÍLVIA ANDREA ALEXANDRE MIRANDA

CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS: UMA ANÁLISE POR MEIO DE TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS NO 7°ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

SOROCABA

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

SÍLVIA ANDREA ALEXANDRE MIRANDA

CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS: UMA ANÁLISE POR MEIO DE TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS NO 7°ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Sílvia Andrea Alexandre Miranda

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCAR

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS – PPGECE

SÍLVIA ANDREA ALEXANDRE MIRANDA

ORIENTADOR: PROF. DR. PAULO CÉSAR OLIVEIRA

CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS: UMA ANÁLISE POR MEIO DE TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS NO 7°ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA

2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

M672cm

Miranda, Sílvia Andrea Alexandre.
Construção de mosaicos : uma análise por meio de tarefas exploratório-investigativas no 7°ano do ensino fundamental / Sílvia Andrea Alexandre Miranda. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
257 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Geometria. 2. Mosaico. 3. Ensino fundamental. 4. Tarefa exploratório-investigativa. I. Título.

CDD: 516 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo César Oliveira
DFQM/UFSCar – Orientador

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires
PUC-SP

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
DFQM/UFSCar

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar e antes de todas as coisas, agradeço ao Criador, que me deu o dom da vida e da inteligência para que pudesse chegar a este momento, compartilhando-o com amigos e com toda a família que esteve presente nas alegrias, dificuldades e conquistas que vivenciei.

Ao Nillo, meu marido, que acompanhou e incentivou toda minha trajetória acadêmica desde a graduação, com paciência, companheirismo e compreensão. Essa conquista não é apenas minha, é nossa!

Aos meus pais, que me possibilitaram condições para chegar até aqui. Em especial minha mãe, que me incentivou ao gosto pela leitura desde criança, sendo exemplo de superação, força e coragem.

Aos meus amigos do mestrado, que foram fundamentais em muitos momentos difíceis e de desânimo, especialmente a Thaisa e o Dimitre. Sem vocês tudo teria sido muito mais difícil. Muito obrigada pela ajuda, pelo bom humor e pelas boas risadas que demos juntos!

Ao colega e Professor Dr. Rogério Fernando Pires, com suas palavras de apoio e incentivo, desde o início deste trabalho. A Prof.ª Dra. Andrea Patrícia Nogueira, que me auxiliou na revisão do texto, com tanta boa vontade e eficiência.

A toda equipe da Unidade Escolar onde leciono, que estiveram comigo, vivenciando dos bastidores, os momentos de estudo e concentração em que me afastei do mundo para pesquisar. Especialmente a diretora Vera, a coordenadora Milena e a querida Eunice, que sempre torceram e me deram apoio quando precisei.

Aos meus irmãos, em especial a Raquel, que contribuiu para a realização desta pesquisa, me auxiliando nas traduções e compreendendo meu próprio ritmo e dedicação.

Aos queridos amigos Alan, Adriano, Eliane, Simone, Roseli Macedo e Márcia Vivente, que estiveram ao meu lado incondicionalmente, aceitando meu afastamento temporário com amor e paciência.

E por último, mas não menos importante, ao Professor Dr. Paulo Cesar Oliveira, que acreditou em mim desde o início deste curso, me guiando rumo ao encontro de minha própria identidade como pesquisadora, me apresentando ao universo das investigações matemáticas como estratégia de ensino e aprendizagem. Minha eterna gratidão!

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo, analisar como um ensino que prioriza tarefas de natureza exploratório-investigativas pode contribuir para a geração e/ou mobilização de conceitos geométricos em alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Mais especificamente, as tarefas contidas no trabalho de campo desta dissertação, contemplaram a aprendizagem de conceitos geométricos envolvidos na composição de mosaicos com polígonos regulares. A investigação de natureza qualitativa, na modalidade estudo de caso, ocorreu em uma escola pública estadual do município de Pilar do Sul, interior do Estado de São Paulo, sendo que as informações foram produzidas e coletadas entre o 1º e 2º semestre de 2013. A técnica da triangulação dos dados envolveu registros de áudio, vídeo, fotografias, registros escritos dos alunos e anotações da observação participante da professora-pesquisadora. Para descrever e analisar o processo de aprendizagem dos alunos nos apoiamos em Ponte (2009) e seus diversos estudos sobre tarefas exploratórias e investigativas, em Fischbein (1993) com a teoria dos conceitos figurais e Tall (1995); que estudou as fases da atividade humana e o raciocínio matemático. Os resultados da pesquisa permitiram identificar os avanços e dificuldades dos alunos ao explorarem as tarefas ao longo do tempo em que foram realizadas. Com as experiências vivenciadas, os alunos passaram a elaborar registros escritos mais claros e utilizaram a linguagem matemática com maior domínio de termos matemáticos, em especial, os geométricos. Além disso, demonstraram se apropriar e/ou ampliar conceitos figurais como ângulos, retas, polígonos regulares e mobilizaram tais conhecimentos durante a exploração das propriedades e relações desses objetos.

Palavras-chaves: Mosaico. Ensino Fundamental. Tarefas exploratório-investigativas. Geometria.

ABSTRACT

The present study aimed to analyze how an education that prioritizes tasks of exploratory- investigative nature can contribute to the generation and/or mobilization of geometric concepts in the 7th grade students of elementary school. More specifically, the tasks contained in this dissertation fieldwork, contemplated the learning of geometrical concepts involved in the composition of mosaics with regular polygons. The investigation of a qualitative nature, in the form of case study occurred in a public school in the town of Pilar do Sul, the state of São Paulo, where the information was produced and collected between the first and the second semester of 2013. The technique of triangulation of data involved audio, video and photographs' records, students' written records and observation notes of the participant teacher - researcher. To describe and analyze the process of students' learning we support in Ponte (2009) and his various studies on exploratory and investigative tasks, in Fischbein (1993) with the theory of figural concepts and Tall (1995); who studied the phases of human activity and mathematical reasoning. The survey results allowed to identify the students' progress and difficulties to explore the tasks over time they were performed. With the experiences, the students began to develop clearer written records and used a mathematical language with greater mastery of mathematical terms, in particular the geometry. Furthermore, they demonstrated appropriating and/or expand figural concepts like angles, straight, regular polygons and mobilized such knowledge during the exploration of the properties and relations of these objects.

Keywords: Mosaic. Elementary Education. Exploratory-investigative tasks. Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A origem desta pesquisa se deu por motivos que fazem parte do universo de muitos professores, que assim como eu, são preocupados com a própria prática pedagógica e questões relacionadas ao Ensino-Aprendizagem de Matemática, e mais especificamente, de Geometria.

Essas inquietações tiveram início quando comecei meu trabalho como professora no Ensino Fundamental e hoje percebo que foram movidas por um sentimento intuitivo acerca da importância em se trabalhar com conceitos geométricos de forma contextualizada, e ao mesmo tempo significativa para os alunos. Eu sentia vontade de fazer com que meus alunos se apaixonassem pela Geometria assim como eu. No entanto, minha formação na graduação não me preparou para o que eu iria vivenciar em sala de aula e uma crescente ansiedade nasceu sob a contradição existente no universo escolar entre a exigência por “qualidade de aprendizagem” e “quantidade de ensino”. Além disso, temos que lidar com vários contratempos durante o ano letivo, como reuniões, feriados prolongados, atividades cívicas e projetos que vão diminuindo pouco a pouco as aulas programadas. Sempre me senti no meio de um cabo de força, com tensão dos dois lados e onde a Geometria saía perdendo, por ser o último tópico abordado nos livros didáticos. Esse fato servia de desculpa para que vários professores “abandonassem” o ensino dessa área da Matemática. Vivi essa realidade quando era ainda aluna do Ensino Fundamental e até mesmo do Ensino Médio, que no meu caso foi o curso de Magistério.

Desde a graduação no curso de licenciatura em Ciências e Matemática, concluído em 2001, tenho verdadeiro interesse pelas propriedades das formas geométricas, observando suas relações e importância no desenvolvimento do raciocínio e inteligência espacial. A simetria, as transformações e os padrões das figuras são propriedades que realmente me atraem. Por isso, mesmo em meio a grande pressão por parte da gestão escolar e do próprio currículo, sempre procurei trabalhar em sala de aula com alguns projetos que envolviam de alguma forma conceitos geométricos ligados a Arte, Física e História da Matemática.

Nesse meio tempo, fiz uma especialização em Metodologia do Ensino de Matemática, escrevendo uma monografia sobre a Resolução de Problemas no então chamado 2º ciclo do Ensino Fundamental, hoje 4º e 5º anos. Para minha carreira profissional era um assunto relevante, visto que também trabalhava com alunos desse nível de escolaridade em escolas particulares. Mais uma vez me preocupava com questões ligadas a metodologias e estratégias de ensino que tornassem a aprendizagem dos alunos mais consistente. Conheci a teoria da resolução de problemas de George Polya e comecei a modificar minha prática em sala de aula, deixando de ser a professora que sabia tudo e respondia prontamente as perguntas dos alunos para me tornar mais interrogativa. Entretanto, a busca por estratégias de ensino que motivassem os alunos e os fizessem aprender mais, continuava. Em meio a várias situações de aprendizagem que experienciávamos, a Geometria se mostrava como mais uma forma de visualizar, interpretar e manipular o mundo, sendo uma ótima oportunidade para despertar nos alunos o gosto pela Matemática. Fiz vários cursos, assisti palestras e seminários oferecidos aos professores para a complementação profissional e formação continuada.

O mais estranho é que quanto mais eu estudava e participava de cursos de formação, mais inquietações surgiam, pois percebia nitidamente, a falta de interesse e dificuldade dos meus colegas de profissão em trabalhar os conceitos geométricos com os alunos. Quando o faziam, era sempre algo frio e distante da realidade ou então com um forte apelo aos materiais manipuláveis, mas sem nenhum embasamento teórico. Era um "fazer" Matemática porque se achava interessante ou porque outra pessoa fez, mas sem nenhuma reflexão mais profunda sobre o conteúdo envolvido em tais atividades.

Nesse percurso, dos bancos escolares como aluna, até os dias atuais, como professora e pesquisadora, fui testemunha de algumas mudanças nas formas em que os conteúdos dos livros didáticos foram sendo apresentados. Até o final da década de 1980, os conteúdos de Geometria eram condensados e se localizavam nos últimos capítulos do livro didático. Eram trabalhados separadamente, sem muita ligação com os demais eixos da Matemática. Com o passar dos anos, estes livros foram se adequando aos documentos oficiais em vigor, como os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL,1998) e o Currículo de cada Estado. Em São Paulo, tivemos a reformulação mais recente do Currículo em 2008, dando origem a elaboração de uma nova Proposta Curricular que foi oficializada em 2010, tornando-se o Currículo do Nosso Estado.

No entanto, resultados em avaliações externas como SARESP[1] e Prova Brasil[2] continuaram em um nível pouco satisfatório quando o assunto era Geometria. Muitas ideias foram surgindo durante as reformulações curriculares e sua implementação nas escolas, mas os problemas na aprendizagem dos alunos persistiram. Refletindo sobre essa situação, uma das questões que levantamos enquanto realizávamos esse estudo foi a seguinte: *Os professores de matemática das escolas públicas foram realmente preparados para trabalhar com todo esse material antes dele ser implementado? Foram consultados para a escolha dos materiais, conteúdos e conceitos selecionados como prioritários?* Infelizmente, aqui no estado de São Paulo a resposta é “não”. Primeiro o Caderno do Professor e do Aluno chegaram às escolas e só então o movimento para a formação continuada começou a ocorrer de forma sistemática, encontrando muita resistência por parte de alguns professores.

Mesmo diante desse cenário, e muito antes das últimas mudanças no Currículo, durante as aulas em que trabalhei conceitos geométricos com meus alunos, sempre percebi um maior interesse e até mesmo facilidade na realização das atividades propostas quando comparadas com atividades que envolviam apenas Álgebra ou cálculos. Em todos os anos letivos, principalmente nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, era o momento em que os alunos alcançavam um rendimento maior, mesmo os alunos com mais dificuldade em matemática. Uma das hipóteses para essa situação é a de que os conteúdos e conceitos de Geometria trabalhados nessas séries/anos de escolaridade são em sua maioria, independentes de conceitos numéricos ou algébricos trabalhados anteriormente. As formas geométricas fazem parte do mundo concreto vivenciado pelos alunos e a existência de diversas representações para conceitos figurais (objetos que possuem características conceituais e figurais ao mesmo tempo) pode servir de suporte ao pensamento geométrico que está em construção.

Desse modo, alunos com dificuldades em cálculos numéricos e resolução de problemas rotineiros, podem ter um rendimento melhor em algumas atividades geométricas, principalmente as que envolvem habilidades de classificação,

---

[1]SARESP: Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

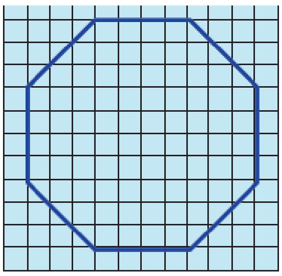
[2]Prova Brasil: **Avaliação Nacional do Rendimento Escolar**, também utilizada para o cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).

construção e visualização. Outra hipótese que pode explicar esse melhor rendimento observado por mim enquanto professora é minha própria motivação em trabalhar os conceitos geométricos com meus alunos.

Mas, até que ponto esse maior envolvimento e disposição reflete na aprendizagem dos alunos? São indagações que merecem ser investigadas. Não obstante, contrapondo-se a essa situação vivenciada e observada por mim enquanto professora, os resultados de avaliações externas em nosso país permanecem insatisfatórios, sobretudo nas provas de Matemática.

No último boletim de resultados gerais divulgado pelo SARESP (2012), podemos observar que referente às escolas públicas, mais de 50% dos alunos ficaram classificados entre os níveis "básico" e "abaixo do básico" nas avaliações de Matemática dos 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio. Vamos retomar estas informações com maior profundidade, no capítulo 4; onde caracterizamos a escola envolvida nessa pesquisa.

Nos Relatórios do SARESP (2010; 2011) uma questão aberta a qual os alunos de 7º ano precisavam resolver problemas envolvendo medidas de ângulos de triângulos e de polígonos regulares, o índice de acerto foi de apenas 2,2%:

> Em uma aula sobre polígonos regulares, a professora Marta explicava para seus alunos como calcular o ângulo interno de polígonos regulares. Gustavo, que é um aluno muito esperto, pensou no octógono com todos os seus lados iguais em uma malha quadrangular, conforme ilustrado abaixo.
>
> **Figura 01:** Questão aberta do SARESP
>
> 
>
> Fonte Relatório do SARESP (SÃO PAULO, 2010, p. 128).
>
> Rapidamente, conseguiu determinar o ângulo interno do octógono regular. Determine a medida desse ângulo.

Já numa outra questão de múltipla escolha, na qual os alunos precisavam identificar uma figura após uma rotação de 180°, o índice de acerto não passou de 23,5% em 2011. Esses resultados podem ser observados na tabela 28 do Relatório do SARESP (2011, p.126) em Desempenho em Itens da Prova (Anexo C).

As questões das provas do SARESP, em geral visam avaliar habilidades relacionadas ao uso de fórmulas, procedimentos e utilização de algoritmos. Além disso, como a maioria das questões são de múltipla escolha, é quase impossível saber como o aluno pensou para resolver as situações propostas. É um tipo de avaliação que se preocupa apenas com o produto final, sem levar em conta o processo vivenciado pelo aluno. Acreditamos que por meio dessas avaliações externas não é possível saber se o aluno tem ou não construído determinado conceito, muito menos saber a dimensão do conceito geométrico que ele tem formado mentalmente sobre o objeto em questão.

Pelos motivos apresentados, temos como objetivo principal para esta pesquisa, analisar como um ensino que prioriza tarefas de natureza exploratório-investigativas pode contribuir para a geração e/ou mobilização de conceitos geométricos em alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Pretendemos analisar o processo, o caminho percorrido pelos alunos nesta construção, seu envolvimento nas atividades enquanto realizam as tarefas e não apenas os resultados apresentados em testes e avaliações.

Nesse contexto, delimitamos a questão norteadora deste estudo: *"Que saberes geométricos são gerados e mobilizados por meio de tarefas exploratório-investigativas pelos alunos do 7° ano do Ensino Fundamental na construção de mosaicos?"*

Utilizamos a expressão "exploratório-investigativas" nesta pesquisa, porque concordamos com Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) que empregam este termo para descrever tarefas mais apropriadas a alunos com pouca experiência em investigações matemáticas. Nas tarefas exploratórias, o que importa é busca por possibilidades e principalmente o desenvolvimento dos processos de argumentação e comunicação. Caso a tarefa avance para uma investigação, terá um ganho cognitivo ainda maior para os alunos, favorecendo os processos de justificação e prova.

Existe ainda uma linha bastante tênue entre uma tarefa exploratória e uma investigativa, sendo difícil em alguns casos delimitar quando a tarefa deixa de ser exploratória e passa a ser investigativa, pois isso depende de vários fatores, como o envolvimento do aluno, seus conhecimentos prévios sobre o tema explorado e o nível de desafio que a tarefa apresenta para cada aluno individualmente.

Pensando na questão norteadora da pesquisa e atrelando as atividades curriculares sugeridas pelo Caderno do Professor e do Aluno (material distribuído na Rede Estadual de ensino do Estado de São Paulo), planejamos e executamos tarefas exploratório-investigativas com o objetivo de avaliar a aprendizagem dos conceitos geométricos envolvidos na construção de mosaicos formados por polígonos regulares, com os alunos de um 7º ano do Ensino Fundamental.

Optamos por organizar o relatório da pesquisa em três partes. Na primeira parte descrevemos e discutimos os pressupostos teóricos que embasaram nossos estudos. Na segunda parte, justificamos a escolha do percurso metodológico, enquanto que na terceira, fizemos a descrição e análise dos dados obtidos na pesquisa de campo.

A primeira parte constou dos capítulos 1, 2 e 3. No capítulo 1 abordamos o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, dando ênfase ao conhecimento geométrico na perspectiva curricular e descrevemos a estrutura dos Cadernos do Aluno (SÃO PAULO, 2009) e do Professor (SÃO PAULO, 2009), utilizados em sala de aula na rede Estadual de Ensino.

No capítulo 2 apresentamos a ideia do que significa investigar na disciplina de Matemática. Descrevemos as possíveis etapas de uma aula exploratório-investigativa e suas implicações didáticas. Além disso, aprofundamos nossos estudos sobre as investigações em Geometria e as potencialidades desse tipo de estratégia para o Ensino e Aprendizagem de conceitos geométricos em sala de aula.

Ainda na primeira parte, no capítulo 3, abordamos aspectos do raciocínio matemático e em especial, do raciocínio geométrico, baseando-nos na teoria dos conceitos figurais de Fischbein (1993), na importância da imagem mental e visualização para o raciocínio geométrico.

Na segunda parte da pesquisa, desenvolvemos os capítulos 4 e 5, nos quais procuramos descrever e justificar a opção de percurso metodológico escolhido, enumerando os procedimentos para recolha de dados e informações. Procuramos caracterizar a turma com a qual desenvolvemos as tarefas exploratório-investigativas desta pesquisa e descrevemos como trabalhamos com algumas atividades do Caderno do Aluno, Vol.2 (SÃO PAULO, 2009) e do Caderno do Professor Vol.2 (SÃO PAULO, 2009). Ainda nesta parte do nosso estudo, descrevemos, no capítulo 5, os enunciados e objetivos das tarefas elaboradas.

Já na terceira parte do estudo, realizamos a descrição e análise dos dados e informações coletados durante a pesquisa de campo. O processo vivenciado pelos alunos foi organizado no capítulo 6 e seus itens.

Descrevemos neste capítulo as três tarefas exploratório-investigativas trabalhadas: a Tarefa Ângulos 1, a tarefa Ângulos 2 e a tarefa Ladrilhando o Plano com Polígonos Congruentes.

Na tarefa Ângulos 1, fizemos o estudo de dois subcasos, analisando dois grupos de alunos com maior profundidade. Na tarefa Ângulos 2 estudamos duas duplas de alunos e procurando dar ênfase à discussão da tarefa em grande grupo. Já a terceira tarefa, Ladrilhando o Plano com Polígonos Regulares Congruentes, foi dividida em três partes. Na primeira procuramos descrever e analisar a composição de mosaicos com polígonos regulares congruentes entre si e as descobertas que os alunos fizeram sobre o assunto. Na segunda parte, comentamos a descoberta sobre a possibilidade de construção do ângulo poliédrico. Já na última parte da tarefa, descrevemos de forma mais geral, a composição de mosaicos formados por polígonos regulares não congruentes entre si, as dificuldades e avanços que os alunos fizeram.

Nas Considerações Finais, descrevemos nossas considerações sobre os aspectos mais sobressalentes das tarefas exploratório-investigativas durante este trabalho, suas potencialidades e limitações, além de discorrer sobre a relação entre tarefas dessa natureza e sua contribuição para a mobilização de conceitos figurais com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Sabemos que existem outros trabalhos, com abordagens e estratégias diversas, envolvendo a construção de mosaicos pelos alunos, mas pesquisando o banco de dissertações e teses da revista Zetetiké, encontramos apenas três trabalhos que pesquisaram a elaboração de mosaicos com polígonos regulares por alunos do Ensino Fundamental II.

A *Revista Zetetiké* publica semestralmente pesquisas e estudos realizados por educadores matemáticos, vinculados a instituições brasileiras ou estrangeiras.

São publicações da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas da Unicamp e que tem como objetivo contribuir para a formação do pesquisador da área de Educação Matemática. A primeira edição foi lançada em 1993, mas delimitamos nossa análise entre os anos de 2000 e 2011 devido ao impacto dos documentos educacionais lançados neste período, como os PCN (BRASIL,1998), a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2009) e sua consolidação como Currículo Oficial em 2010.

O estudo bibliográfico sobre as dissertações e teses catalogadas pela Revista Zetetiké (Revista de Educação Matemática) que realizamos neste trabalho, teve como intenção a identificação e análise das produções acadêmicas que envolveram a utilização e/ou construção de mosaicos geométricos no Ensino Fundamental II, no período de 2000 a 2011, a fim de justificar a pertinência e contribuição desta pesquisa no campo da Educação Matemática.

A seguir podemos observar as informações referentes à quantia de produções acadêmicas ano a ano:

Tabela 1: Quantidade de Teses e Dissertações defendidas no Brasil entre 2000 e 2011

Ano	Número de produções acadêmicas	Número de teses e dissertações envolvendo a utilização de mosaicos no Ensino Fundamental II
2000	82	0
2001	47	0
2002	121	0
2003	113	1
2004	146	0
2005	163	0
2006	171	0
2007*	12	0
2008	352	0
2009	307	2
2010	466	0
2011	533	0
Total	**2513**	**3**

Fonte: arquivos da pesquisadora com base na Revista Zetetiké

Analisando as listas de teses e dissertações defendidas e publicadas em cada edição da Revista Zetetiké, num total de 2 513 trabalhos, apenas **3 dissertações** abordavam o tema Mosaicos no Ensino Fundamental, sendo uma no ano de 2003 e duas no ano de 2009. A seguir apresentamos o objetivo, a questão de investigação, o Referencial teórico, metodológico, os instrumentos de coleta de dados e resultados de cada um dos três trabalhos mencionados.

Martins (2003) teve como objetivo principal de sua pesquisa, elaborar uma proposta alternativa para o ensino e aprendizagem de Geometria com ênfase nas tesselações[3] do plano e do espaço. Para tanto, a autora utilizou caleidoscópios, sólidos geométricos, jogos e *softwares* educacionais nas tarefas desenvolvidas com os alunos de um 8º ano (7ª série) do Ensino Fundamental de uma escola pública. O título de sua pesquisa foi: *Ensino-aprendizagem de Geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais*.

Como questão principal, Martins (2003, p.6) procurou desvendar em seus estudos se era possível "ensinar Geometria fazendo uso conjunto de caleidoscópios, sólidos geométricos e informática de modo a despertar interesse e participação no aluno em relação à aprendizagem do conteúdo matemático".

A pesquisa realizada por Martins (2003) foi de abordagem qualitativa do tipo participante, utilizando a metodologia da Resolução de Problemas. Para coleta de dados, aplicou-se um questionário onde os alunos precisavam responder algumas questões que possibilitassem a verificação de suas perspectivas em relação ao ensino-aprendizagem da Geometria e anotações da pesquisadora sobre a realização de situações problemas e tarefas desenvolvidas pelos alunos.

No referencial teórico, a autora fez o estudo básico sobre caleidoscópios, pavimentações do plano por polígonos regulares, tesselações do espaço por poliedros regulares, simetria, rotação e translação, estudo das bases caleidoscópicas que geram pavimentações do plano por polígonos regulares e de padrões ornamentais dos tipos elaborados por Escher, se apoiando fortemente nos trabalhos de Murari[4] apud Martins (2003).

---

[3] A palavra parece ter origem no latim tessela, uma pequena peça cúbica de barro, ou vidro usada para fazer mosaicos.

[4] MURARI, C. Brincando, Colorindo e Aprendendo com Caleidoscópio Equilátero em Pavimentações de Configuração (3,3,3,3,3,3). **Educação Matemática em Revista**/ SBEM. Nº 4, 1995.

Além disso, Martins (2003) explanou sobre o uso de softwares educacionais que podem ser utilizados para a realização de atividades que envolvem as tesselações planas e espaciais.

As tarefas foram desenvolvidas primeiramente com os professores da escola durante reuniões pedagógicas e depois aplicadas com os alunos do Ensino Fundamental II. Tais tarefas priorizaram a construção de bases caleidoscópicas que gerassem mosaicos geométricos para depois serem trabalhados com o software Cabri-Géomètre II. No entanto, o trabalho com a pavimentação do plano por polígonos regulares foi precedido da exploração de um kit de figuras geométricas planas (polígonos regulares) confeccionadas previamente pelos professores dos alunos envolvidos no projeto.

Segundo a autora, as tarefas trabalhadas possibilitaram com os alunos o desenvolvimento da percepção espacial e da habilidade para visualizar, melhorando a motivação dos alunos e promovendo a exploração de propriedades dos polígonos e poliedros. Martins (2003) concluiu que as atividades deixaram a maior parte dos alunos bastante interessada, despertando a curiosidade e motivando-os a resolverem os problemas matemáticos propostos.

Com o passar do tempo, os alunos foram adquirindo mais autonomia para resolver as situações de aprendizagem. Martins (2003) também destacou que as atividades desenvolveram a criatividade e o senso estético dos alunos. As tarefas que necessitavam operações como girar ou mover os caleidoscópios melhoraram a habilidade de visualização e percepção espacial. Além disso, foram desenvolvidos conceitos geométricos de bissetriz, ponto médio, paralelismo, perpendicularismo, entre outros.

O estudo desenvolvido por Rossi (2009), intitulado *“O ensino e aprendizagem de polígonos e de transformações geométricas no plano: relacionando arte e matemática por meio de frisos e dos ladrilhos”*, teve como objetivo principal analisar que contribuições a utilização de frisos e ladrilhos nas igrejas da Quarta Colônia de Imigração Italiana do Rio Grande do Sul, aliadas ao *software* educacional *Cabri-Géomètre II,* podiam trazer a construção de conceitos geométricos e exploração das propriedades dos polígonos e transformações geométricas no plano. Como referencial teórico, analisou o Ensino da Geometria e os Ambientes Computacionais, o Trabalho Compartilhado (trabalho em grupo) e a Arte dos Frisos e Ladrilhos no Ensino de Geometria.

Em termos de metodologia, Rossi (2009) optou pela Engenharia Didática e o planejamento, aplicação e análise de tarefas deu-se com 18 alunos de uma 6ª série (7º ano) do Ensino Fundamental, em uma escola de aplicação do Centro Universitário Franciscano, em Santa Maria, Rio Grande do Sul e desenvolvidas no laboratório de informática da própria escola.

As análises prévias (da etapa da Engenharia Didática) constaram de estudo do livro didático adotado pela escola para a 6ª série (7º ano), uma análise teórica do conteúdo a ser desenvolvido em sala de aula e uma avaliação com cinco questões para sondagem dos conhecimentos prévios que os alunos possuíam com relação aos conteúdos contemplados na pesquisa.

A partir desta avaliação prévia, foi elaborada por Rossi (2009), uma sequência didática para ser realizada com auxílio do software Cabri-Géomètre II, a fim de que os alunos superassem as dificuldades apresentadas inicialmente. Essas dificuldades estavam relacionadas a conceitos e propriedades dos polígonos e transformações no plano. Para análise das informações obtidas após a aplicação da sequência didática, foram utilizadas as respostas dos alunos e estratégias utilizadas por eles, as observações registradas pela professora da turma e o confronto destas informações com as expectativas *a priori*.

As tarefas exploraram o conceito de mosaico, formas geométricas, ângulos, triângulos, quadriláteros, polígonos e transformações no plano. Quanto à tarefa sobre polígonos, seguiu-se a mesma orientação descrita em nossa pesquisa quanto ao método indutivo de divisão dos polígonos regulares em triângulos por um único vértice. A partir daí os alunos precisavam responder a questões sobre as condições necessárias para cobrir uma superfície plana com polígonos regulares. As questões elaboradas no trabalho de Rossi (2009) foram conduzindo os alunos para que percebessem as propriedades e relações entre os polígonos e as condições para que ladrilhassem o plano.

Segundo Rossi (2009), o desenvolvimento da sequência didática, contribuiu para a aprendizagem de conceitos geométricos pelos alunos. Eles se engajaram nas tarefas com a utilização do software, manipularam virtualmente as figuras, buscando soluções para as questões propostas. Nesse processo, exploraram propriedades geométricas, levantaram conjecturas e realizaram provas. Rossi (2009) ainda destacou que a visualização proporcionada pelas imagens computacionais foram importantes para a evolução da aprendizagem pretendida.

Outro resultado apresentado por Rossi (2009) é que o trabalho com as formas geométricas dos frisos e ladrilhos das Igrejas possibilitou o desenvolvimento de habilidades como criatividade e raciocínio lógico, além de promover valores estéticos e culturais importantes para apreciação de obras artísticas.

Já o trabalho realizado por Campaña (2009): "Estudo sobre noções de geometria e suas relações com atividades diversificadas na escola"; levanta o problema da dificuldade dos alunos em adquirir conceitos operatórios da matemática escolar sem nenhuma compreensão. Com o intuito de compreender este fato, a autora procura responder em sua pesquisa a questão: é possível favorecer a compreensão de conceitos de natureza geométrica em um ambiente escolar? Como?

Deste modo, Campaña (2009) esclarece que o objetivo principal de seu trabalho foi o estudo e identificação das dificuldades e avanços dos alunos na compreensão de conceitos geométricos no ambiente escolar, utilizando uma intervenção pedagógica diversificada, baseada nos princípios do método clínico-crítico piagetiano. Para isso, utilizou a metodologia de pesquisa qualitativa de natureza descritiva, do tipo *ex post facto*, desenvolvendo o estudo com uma amostra de 20 alunos de uma 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior paulista.

Kerlinger[5] apud Campaña (2009), explica que "o tipo de pesquisa *ex post facto* é qualquer pesquisa na qual não é possível manipular variáreis ou designar sujeitos ou condições aleatoriamente, podendo haver falhas nas conclusões. Estas falhas podem ser compensadas por um maior realismo e efeitos mais fortes".

Para a coleta de dados e planejamento das atividades foi proposto aos alunos que realizassem uma prova piloto, para verificar o conceito que tinham de medida, um pré-teste e um pós-teste (etapas do método clínico-crítico de Piaget).

---

[5] KERLINGER, F. N. **Metodologia da pesquisa em ciências sociais**: um tratamento conceitual. São Paulo: Edusp, 1980.

Após a prova piloto, adaptada das pesquisas piagetianas e do pré-teste, foi planejada a intervenção, que teve como objetivo promover a construção ou reconstrução dos conceitos geométricos propostos na pesquisa.

Campaña (2009) conclui com o estudo piloto que mesmo dentro de uma mesma faixa etária é possível ter indivíduos em níveis de desenvolvimento cognitivos diferentes. Foram aplicadas três provas piagetianas aos sujeitos da amostra, uma sobre retângulos, outra relativa a ângulos e a terceira sobre triângulos.

A quarta etapa de intervenção (CAMPAÑA, 2009), se relacionou à composição de um mosaico utilizando polígonos regulares. Os alunos receberam os polígonos regulares recortados em cartolina para compor um mosaico de forma que ficassem justapostos, recobrindo uma determinada superfície. Cada aluno utilizou um tipo de polígono para fazerem as composições e em seguida foram questionados sobre o que observavam, enfatizando semelhanças e diferenças.

Como mencionamos, Campaña (2009) utilizou o método clínico-crítico piagetiano de intervenção pedagógica. Nesse método, a pesquisadora questionava os alunos a cada nova conjectura, afirmação ou observação feita por eles, conduzindo-os a perceberem as propriedades e relações entre os entes geométricos pretendidas com a atividade. Campaña (2009) constatou que os alunos tiveram dificuldades em perceber as relações entre os ângulos dos polígonos que recobriam o plano. Eles se detiveram apenas a observações sobre os lados dos polígonos.

Para análise dos avanços e dificuldades dos alunos, Campaña (2009) utilizou três provas do tipo pós-teste e fez um comparativo com as provas de pré-testes. Ela concluiu que a construção de noções geométricas é de grande complexidade e que situações aparentemente simples para os professores, podem ser totalmente novas para os alunos.

Segundo Campaña (2009), durante o desenvolvimento de sua pesquisa, os alunos apresentaram várias dificuldades, como o reconhecimento de uma representação diferente da imagem mental, a generalização e transferência da representação mental para a representação gráfica, entre outras. No entanto, o estudo permitiu reconhecer muitos avanços durante a aplicação das intervenções e realização das provas piagetianas, já que houve mudanças de níveis nos resultados das provas realizadas no pré-teste e no pós-teste.

Baseando-se nos estudos de Piaget, Campaña (2009) concluiu que sua pesquisa atingiu seu objetivo. Utilizando o estudo piloto sobre medidas, foi possível analisar o pensamento dos alunos com base na compreensão de determinados conceitos geométricos. Além disso, o conflito estabelecido por meio das intervenções com atividades diversificadas provocou a busca por uma reequilibração, levando a assimilação de conceitos simples por parte dos alunos. Campaña (2009, p.79) ainda ressalta que:

> O trabalho em grupo, utilizado nas intervenções, promoveu o desenvolvimento intelectual, uma vez que provocou desequilíbrios e condições favoráveis para o surgimento de conflitos cognitivos, desequilibração e, finalmente, a reequilibração.

A pesquisa desenvolvida por Campaña (2009) promoveu uma auto reflexão sobre a própria prática da professora-pesquisadora e sobre as dificuldades que os alunos apresentavam em atividades que envolviam operações e representações geométricas. Essa reflexão deu início a um processo de mudança na forma de tratamento dos conteúdos em sala de aula. A professora-pesquisadora pode reconstruir e ampliar seus conhecimentos, tendo como referencial teórico Jean Piaget, valorizando mais o processo de aprendizagem dos alunos. Segundo a própria autora, “tão importante quanto compreender os conteúdos a serem ensinados, é conhecer como as noções matemáticas são mentalmente construídas pelo sujeito” (CAMPAÑA, 2009, p.83).

Ao analisar tais pesquisas, não encontramos nenhuma que abordasse a mobilização de conceitos geométricos por meio da construção de mosaicos que fosse de natureza exploratório-investigativa. Desse modo, pretendemos de alguma forma contribuir com uma pesquisa que venha auxiliar a preencher uma das muitas lacunas existentes no Ensino de Geometria para o Ensino Fundamental II, com uma abordagem que vem sido muito discutida e estudada no campo da Educação Matemática atualmente, ou seja, a investigação nas aulas de matemática.

Não queremos com isso trazer nenhuma inovação ou pretensão de solucionar os problemas de aprendizagem relacionados ao ensino-aprendizagem de Geometria no Ensino Fundamental II, mas simplesmente trazer mais contribuição, com uma estratégia de ensino possível e viável observando-se algumas condições específicas na formação das turmas.

PARTE I: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1. ANALISANDO O CURRÍCULO

Na condição de professora titular de cargo desde o ano de 2003, na Rede Estadual de Ensino de São Paulo, consideramos relevante a apresentação de reflexões sobre os documentos curriculares vigentes.

Inicialmente procuramos a definição de currículo e encontramos formas diferentes de interpretação para este conceito, com maior ou menor abrangência.

A palavra currículo vem do latim curriculum de *currere*. *Currere* significa trajetória, jornada, caminho a seguir. De acordo com Pacheco (2006), quando se fala de Currículo, a palavra que mais se aproxima do seu significado comum é a palavra programa. Este programa seleciona e organiza conteúdos, surgindo então o plano que distribui as disciplinas e/ou áreas do conhecimento por anos/séries de escolaridade e ciclos/níveis de ensino, determinando cronogramas letivos. No entanto, para muito além dessa definição, o Currículo é um projeto cuja elaboração, gestão e avaliação abrangem propósitos e metas. É um ato intencional e deliberado, no qual as decisões são partilhadas e as práticas interrelacionadas. Além disso, em seus estudos sobre Teorias Curriculares, Pacheco (2005), explica que, o currículo não está restrito apenas ao universo dos professores e alunos, mas engloba todos os intervenientes que direta ou indiretamente participam da sociedade do conhecimento ou da sociedade de aprendizagem. Ainda segundo o mesmo autor, em outro estudo sobre o assunto, o currículo:

> (...) é um projeto social e cultural, historicamente construído, decidido em função de uma organização, geralmente escolar, que estabelece uma fronteira de competências entre uma autoridade administrativa, a da administração central, e uma autoridade profissional, exercida por professores e outros atores no contexto das escolas. (PACHECO, 2007, p. 67)

Nessa perspectiva, embora se continue a considerar o currículo como um plano, este tem propósitos bastante flexíveis e refere-se também ao conjunto de experiências educativas vividas pelos alunos no contexto escolar.

Analisando a trajetória de elaboração e reformulação do Currículo Nacional em nosso país, constatamos, segundo os PCN (BRASIL,1998), que mesmo após a reorientação curricular nos anos 20, o Ensino no Brasil continuou elitista e as práticas docentes quase inalteradas. Sobre essa situação, D'Ambrósio (1993) afirmou que a defesa por um ideal de educação igualitária, democrática e não discriminatória, no início do século XX, não foi suficiente para mudar a concepção das propostas educacionais vigentes as quais reforçavam a manutenção do *status quo* (situação atual). Defendia-se uma educação baseada na estratificação do ensino por faixas etárias e níveis de desenvolvimento, ignorando-se totalmente a história de vida individual e coletiva dos alunos e indivíduos envolvidos nesse processo.

Já na década de 50, com o pós-guerra mundial, vivemos num cenário de grandes transformações que dividiam o mundo em duas grandes frentes: o capitalismo e o socialismo. Nesse cenário de modificações, a Matemática enquanto disciplina manteve uma concepção de ensino rigoroso, que valorizava, excessivamente, a memorização e reprodução de algoritmos.

O movimento Matemática Moderna também teve influência no Brasil. Por volta dos anos 60/70, esse movimento provocou amplas reformas no currículo de Matemática, que ganhou destaque no ensino devido à modernização econômica, pois consideravam que, juntamente com o ensino de Ciências, essa era uma área que favorecia o desenvolvimento do pensamento científico e tecnológico, tão valorizado na época.

O ensino fundamentou-se em estruturas que estavam fora do alcance dos alunos, notadamente os do Ensino Básico. Foi enfatizado, por exemplo, a Teoria dos Conjuntos e as Estruturas Algébricas. A abordagem sugerida por esse novo currículo não era acessível aos nossos alunos, principalmente aqueles do Ensino Fundamental, pois havia uma preocupação excessiva com formalizações que utilizavam linguagens complexas e se mantinham distantes das atividades práticas ou vivenciadas pelos alunos.

Desde então, propostas foram formuladas na tentativa de corrigir tais enganos e melhorar a qualidade do Ensino no Brasil.

A partir de 1980 houve maior ênfase na resolução de problemas, na exploração de conceitos a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas.

O que observamos atualmente é uma tendência consensual em se caracterizar a Matemática como uma maneira de compreender e modificar o mundo por meio de uma linguagem própria. Além disso, longe da concepção de uma Matemática como um arsenal de conhecimentos prontos e acabados, sabemos que essa ciência está constantemente em processo de construção e reconstrução, por meio do próprio ser humano e suas interações com o mundo em que vive.

De acordo os PCN (BRASIL, 1998, p.24):

> Duas forças indissociáveis estão sempre a impulsionar o trabalho em Matemática. De um lado, o apelo das aplicações nas variadas atividades humanas, das mais simples, às mais complexas elaborações de outras ciências. De outro lado, a especulação pura, a busca de respostas a questões geradas no próprio edifício da Matemática. A indissociabilidade desses dois aspectos fica evidenciada pelos inúmeros exemplos de belas construções abstratas originadas em problemas aplicados e, por outro lado, de surpreendentes aplicações encontradas para as mais puras especulações.

É importante termos atenção para dois equívocos de concepção escolar da matemática: por um lado, acreditar que a matemática é uma ciência para poucos, totalmente longe da realidade do aluno, em que apenas os aspectos formais e complexos são importantes; por outro lado conceber que a matemática é uma ciência que "serve" às demais, como se sua única função fosse essa, tentando "contextualizar" tudo. Há aqui um equívoco muito grande ao se pensar que contexto se refere apenas às questões vinculadas ao cotidiano do aluno. Sabemos que existem contextos referentes às questões internas da própria Matemática.

A esse respeito, concordamos com o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011) que enfatiza que a Matemática, juntamente com a língua materna, deve constituir um recurso imprescindível para uma exploração rica, uma compreensão abrangente, uma argumentação correta, uma contextualização significativa dos temas estudados. Nesse sentido, quando os contextos são ignorados, os conteúdos estudados passam de meios para se tornarem fins de um processo, ocorrendo o fenômeno da mediocrização.

Além disso, segundo o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011) é fundamental que a valorização da contextualização seja equilibrada com o desenvolvimento da competência de abstração. A abstração do contexto, a aprendizagem por meio de relações entre vários conceitos e contextos, o desenvolvimento da imaginação por meio de criações fictícias, são todas habilidades valiosas para a formação pessoal.

Concordamos com o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011, p.33) quando o mesmo estabelece que as abstrações são simplificações que representam um afastamento provisório da realidade para tentar melhor compreendê-la. Elas não devem ser encaradas como obstáculos para o conhecimento, mas sim parte interessante da construção do conhecimento.

Além do eixo norteador contextualização/abstração, há outros dois pares complementares de competências básicas a serem desenvolvidas pelos alunos ao longo da escola básica: o eixo expressão/compreensão e argumentação/decisão. A Matemática desempenha papel fundamental no desenvolvimento desses pares de competências, quer seja como meio de expressar e compreender a realidade em que vive, utilizando-se dos números, das formas e relações entre conceitos, quer seja através do desenvolvimento do raciocínio lógico indutivo e dedutivo na construção do pensamento e dos conceitos e também no que se refere a articulação entre abstração e realidade.

1.1 O Currículo de Matemática do Estado de São Paulo

A Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no Estado de São Paulo (1988), elaborada entre os anos de 1980 e 1988 em suas várias versões, durou até o ano de 2008, sem alterações. Nesse documento existe uma preocupação com a utilização de metodologias que desenvolvem uma aprendizagem Matemática numa espiral de tratamento dos conteúdos, no qual as noções são reapresentadas a cada série escolar de forma mais ampla e aprofundada.

Outro aspecto relevante é que nessa Proposta Curricular (1988) já havia um esforço significativo na busca de uma aproximação entre os conteúdos escolares e o universo da cultura e da instrumentalização para o mundo do trabalho de forma crítica.

A partir destes princípios, a nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo, idealizada em 2008, trouxe novas perspectivas à ação educativa e ao conceito de Currículo. Consolidado em 2010 como Currículo do Estado de São Paulo (SÃO

PAULO, 2011, p.11), este documento contempla a definição de currículo “como espaço de cultura, como expressão do que existe na cultura científica, artística e humanista transposto para uma situação de aprendizagem e ensino”.

A educação, por sua vez, deve construir a autonomia para gerenciar a própria aprendizagem. Deve construir a identidade, a liberdade com responsabilidade, possibilitando a transposição dessas aprendizagens para intervenções solidárias. Ser cidadão, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011), é saber pertencer, situar-se e incorporar a diversidade. Para isso é primordial que haja conhecimento (repertório) incluído nos processos de mudanças que atravessam a humanidade.

1.2 O Conhecimento Geométrico na Perspectiva Curricular

Analisando os PCN (BRASIL, 1998), nos deparamos com um documento que salienta a importância da construção de conceitos geométricos no Ensino Fundamental, ressaltando que por meio desses conceitos, o aluno desenvolve um tipo de pensamento que possibilita a compreensão, descrição e representação do espaço onde vive.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), a Geometria é parte importante do Currículo de Matemática, sendo um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e tarefas que contribuam para aprendizagens relacionadas a números, medidas e regularidades. Além disso, é na Geometria que trabalhamos com elementos e propriedades das formas, noções de posição, localização e deslocamento no plano e transformações geométricas (homotetias e isometrias).

A orientação dos PCN (BRASIL, 1998) para o trabalho de Geometria no Ensino Fundamental II estabelece que nesta fase escolar, o aluno tenha inicialmente um contato com as formas por meio da observação e manipulação de materiais concretos. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 86), nesse ciclo de escolarização, o estudo dos conteúdos geométricos:

> (...) tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades. É importante também na exploração desse bloco desenvolver atividades que permitam ao

> aluno perceber que pela composição de movimentos é possível transformar uma figura em uma outra.

Como nosso estudo está voltado ao 7º ano do Ensino Fundamental, analisamos mais profundamente o que os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) orientam para o trabalho de Geometria no Terceiro Ciclo. Segundo este documento, neste ciclo, os alunos retomam e reorganizam conceitos já trabalhados no ciclo anterior, porém com maior complexidade e profundidade. É nesse período que noções de direção e sentido, ângulos, perpendicularismo e paralelismo são trabalhadas com mais ênfase. Além disso, é neste ciclo que os alunos devem conhecer e explorar as formas geométricas, suas características (como planicidade, bidimensionalidade e tridimensionalidade), seus elementos, propriedades e algumas de suas relações.

Ainda de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), nessa fase escolar, a Geometria deve ressaltar os procedimentos de observação, representação e construção de figuras geométricas, além do manuseio de instrumentos que permitam tais construções e a formulação de conjecturas acerca das propriedades e relações observadas. É desejável que se desenvolva destreza no manuseio de materiais como régua, compasso, esquadros e transferidor na realização de atividades e resolução de problemas.

Entre os aspectos citados nos PCN (BRASIL, 1998) para o Ensino e Aprendizagem de Geometria no Terceiro Ciclo, muitos são relevantes ao desenvolvimento desta pesquisa, visto que estaremos trabalhando com o desenvolvimento de alguns conceitos geométricos que dependem e se relacionam com várias habilidades e noções aqui citadas: direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpedicularismo; polígonos, suas propriedades e algumas de suas relações; além do manuseio de instrumentos de medida para construção e análise de figuras.

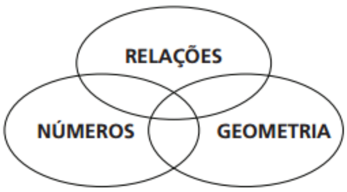
Em 2009, a Secretaria do Estado de São Paulo lançou uma nova Proposta Curricular, sendo consolidada como Currículo oficial em 2010 e atualizada em 2011. No documento Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011) os conteúdos disciplinares de Matemática foram organizados em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações.

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011), o bloco **Números** se refere às noções de contagem, de medida e representação simbólica de grandezas e de representações algébricas das operações fundamentais sobre elas, dando especial atenção as noções de ordem e equivalência na construção numérica. O bloco **Geometria** trata da percepção das formas e relações entre elementos e propriedades das figuras planas e espaciais, além da construção e representação de formas geométricas já existentes ou imaginadas e da percepção do espaço como suporte ao mundo físico em que se vive.

O terceiro bloco temático é o das **Relações.** Segundo (SÃO PAULO, 2011), esse bloco abrange as noções de medidas com a ideia de aproximação, as relações métricas em geral e de interdependência, como é o caso das funções e da proporcionalidade.

Entretanto, é importante destacar que os três blocos se relacionam permanentemente. Na figura 02 podemos observar um esquema que indica a interpenetrabilidade entre esses três eixos:

Figura 02: Blocos temáticos da área de Matemática



NÚMEROS	equivalência/ordem simbolização/operações
GEOMETRIA	percepção/concepção construção/representação
RELAÇÕES	medidas/aproximações proporcionalidade/ interdependência

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011, p. 39).

É praticamente impossível abordar um destes blocos temáticos sem a participação quase automática dos dois outros, e de acordo com o Currículo (SÃO PAULO, 2011, p. 39), isso é algo positivo.

> De fato, os Números são construídos a partir das relações de equivalência e de ordem; na Geometria, um lugar de especial destaque é ocupado pelas relações métricas; e praticamente todas as Relações que imaginarmos incluirão números ou formas geométricas.

Nesse documento, no bloco Geometria para o Ensino Fundamental há uma preocupação inicial com o reconhecimento, a representação e a classificação das figuras geométricas. Para isto, é sugerido trabalhar em contextos concretos com os alunos do 6º e 7º anos. No último ciclo do Ensino Fundamental, destaca-se a construção de raciocínios lógicos e deduções simples, conforme a distribuição de conteúdos na grade curricular.

O conhecimento geométrico no Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011) apresenta quatro faces interligadas na caracterização do espaço: a **percepção**, a **concepção**, a **construção** e a **representação**. Segundo este documento o conhecimento geométrico se inicia por meio da percepção das formas geométricas, seus elementos e propriedades. Porém, essa percepção se relaciona desde o início com a construção, a representação e a concepção de objetos existentes ou imaginados. Para construir ou representar, primeiramente concebemos o objeto observado ou imaginado por meio de representações. Além disso, "mesmo as concepções mais inovadoras têm como referencia percepções ou construções já realizadas, renovando seus pressupostos ou transcendendo seus limites". (SÃO PAULO, 2011, p. 42)

Temos então, ainda segundo (SÃO PAULO, 2011, p.42), quatro faces de um conhecimento que estão intimamente relacionadas e que não podem ser vistas separadamente, pois a sua força está no mútuo apoio que essas faces se propiciam.

Como estão relacionadas mutuamente, em situações de ensino é necessário que se busque uma alimentação dessas quatro faces do conhecimento geométrico por meio de atividades integradoras.

No que se refere ao bloco das Relações, que permeia constantemente os outros dois, para a Geometria fica extremamente visível essa articulação quando trabalhamos com as noções e conceitos de áreas, perímetros e volumes e estudos das medidas de figuras planas e espaciais.

Trata-se de um currículo que dá sentido e significado à escola, o qual cabe ao professor despertar o interesse dos alunos para os conteúdos que irão aprender e as competências que irão desenvolver. Os conteúdos, por sua vez, proporcionam a criação e exploração de centros de interesse, além de serem também meios para o desenvolvimento das competências idealizadas. Uma das estratégias que o professor pode utilizar no tratamento dos conteúdos é o da problematização e formulação de tarefas. Problematizar significa explicitar perguntas bem adequadas a respeito de determinado tema.

Temos um documento curricular (SÃO PAULO, 2011) que possibilita ao professor fazer escolhas sobre o que e como ensinar, selecionando conteúdos que serão mais ou menos aprofundados de acordo com as necessidades e possibilidades do projeto pedagógico da escola onde trabalha e das características do grupo de alunos. É um exercício de planejamento que exige competência didática do professor e uma formação sólida. A execução dos currículos, de certa forma, sempre depende da mediação do professor.

Quanto à organização dos conteúdos decidiu-se fazer um mapeamento por bimestres, no qual ideias fundamentais foram o foco e ponto de partida para a exploração de subtemas, geralmente entrelaçados. Foram elaborados em 2008, paralelamente à Proposta Curricular do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2008), Cadernos do Professor para todas as disciplinas, que são divididos e distribuídos bimestralmente para cada ano/série. Em cada um desses cadernos, o tema principal foi dividido em oito unidades agrupadas em quatro Situações de Aprendizagem, que constituem quatro centros de interesse para se desenvolver com os alunos. Essas situações de aprendizagem são mais uma sugestão que uma imposição. Novamente cabe ao professor o papel de redimensionar a dedicação dos subtemas de acordo com as circunstâncias.

Em 2009 foi elaborada a primeira versão do Caderno do Aluno, que veio para aperfeiçoar o trabalho que já estava sendo realizado e auxiliar no desenvolvimento das competências e habilidades almejadas. Nesse Caderno, o aluno pode analisar as situações propostas, registrar conjecturas, fazer tarefas e elaborar textos conclusivos com a orientação e mediação do professor. No entanto, os Cadernos não engessam o conteúdo nem dão conta de todos os temas e subtemas propostos para cada série/ano letivo. São orientações gerais, onde o que muda com relação ao que é ensinado usualmente nas escolas é a forma de abordagem dos assuntos. Tais abordagens procuram evidenciar os princípios norteadores do presente currículo, notadamente a contextualização.

No 6º ano (5ª série), por exemplo, o eixo **Geometria/Medidas** aparece no terceiro bimestre, com o estudo das figuras planas e espaciais, noção de perímetro e área de figuras planas e cálculo de área por composição e decomposição. Já no 7º ano (6ª série), esse eixo é trabalhado no segundo bimestre, explorando-se os conceitos de ângulos, polígonos, circunferências, simetrias, poliedros e alguns exercícios de construções geométricas. O eixo volta a aparecer no terceiro bimestre atrelado à ideia de proporcionalidade quando é apresentado aos alunos o número π.

No 8º ano (7ª série) do Ensino Fundamental a sugestão é para que se trabalhe a Geometria mais intensamente no 4º bimestre, quando se pressupõe que os alunos já terão desenvolvidas habilidades que envolvem estimativas e cálculos algébricos. São abordados o cálculo de área de figuras planas, os teoremas de Tales e Pitágoras e os prismas. No terceiro bimestre o conceito de plano cartesiano é trabalhado em uma Situação de Aprendizagem com figuras geométricas e suas coordenadas. Nessa situação são ampliados os conceitos de simetria e homotetia por meio das transformações das figuras no plano.

Para o trabalho com áreas utiliza-se o conceito de equivalência de figuras planas e áreas de retângulos, pois espera-se que os alunos já saibam realizar esse tipo de cálculo.

E para o 9º ano (8ª série), os conteúdos de Geometria são tratados no 3º e no 4º bimestres. No 3º Bimestre são propostos os conteúdos de proporcionalidade e semelhança, relações métricas entre triângulos retângulos e razões trigonométricas, enquanto que no 4º Bimestre estuda-se o número π, a circunferência, o círculo, suas partes e sua área, além do volume e área do cilindro.

Nosso trabalho de pesquisa envolve o desenvolvimento dos conteúdos curriculares de Geometria referentes ao 2º Bimestre de um 7º ano (6ª série) do Ensino Fundamental II de uma Escola Pública do Estado de São Paulo.

Observamos que as tarefas do Caderno do Aluno não davam conta de mobilizar todos os saberes geométricos pretendidos para a série e propostos no Caderno do Professor, como o aprofundamento do conceito de ângulo, destreza na manipulação e utilização do transferidor como instrumento de medida, construção de ângulos com régua e compasso, análise dos diferentes tipos de ângulos e suas propriedades, relações de paralelismo, construção de polígonos regulares e análise de suas propriedades, algumas relações e regularidades.

Como orientação do próprio Caderno do Professor, desenvolvemos tarefas complementares para potencializar o processo de ensino e aprendizagem desses conceitos, mas privilegiando a estratégia de aulas exploratório-investigativas. As tarefas complementares, em sua maioria, foram criteriosamente analisadas e combinadas com as situações de aprendizagem sugeridas nos Cadernos do Professor e do Aluno.

1.3 Os Cadernos: Do Professor e do Aluno

Em minha experiência como professora da rede estadual de São Paulo desde 1996, vivenciei algumas mudanças no currículo escolar e pude constatar que desde 2008, quando foi implantada a nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo, foram distribuídos aos professores da rede estadual, Cadernos contendo orientações sobre o que deveria ser trabalhado nas aulas, competências e habilidades desenvolvidas em cada unidade ou situação de aprendizagem, sugestões de avaliações além de indicações de materiais, sites, jogos e outras fontes para pesquisa, aprofundamento e desenvolvimento dos conteúdos. Todas as disciplinas têm quatro cadernos, um para cada bimestre.

Em 2009, a pedido dos professores, os Cadernos foram revisados e elaboraram-se os Cadernos dos Alunos nos mesmos moldes, inclusive contendo algumas atividades propostas no Caderno do Professor. Cada situação de aprendizagem foi organizada com atividades, lições de casa, espaço para construção de um texto narrativo intitulado “O que eu aprendi...” e, às vezes, algumas folhas para recortes, folhas quadriculadas ou poligonais, como no Caderno do Aluno do 7º ano, Vol. 2.

A diferença básica entre o Caderno do Professor e do Aluno é que no primeiro há instruções didáticas sobre como trabalhar cada Situação de Aprendizagem, sugestões de estratégias de ensino, avaliações e atividades extras. No Caderno do

Professor também existe um quadro contendo o conteúdo programático para todo o ano letivo, dando destaque ao ano/série e bimestre do próprio material.

Os assuntos são abordados em anos e bimestres diferentes, fazendo conexões e com diferentes níveis de aprofundamento e complexidade. Por isso, o conteúdo não deve jamais ser esgotado numa única situação, de forma única. O professor deve estar atento a esse movimento e conhecer bem todo o programa para não se perder em situações que não estejam promovendo a aprendizagem dos alunos.

Cada Situação de Aprendizagem do Caderno do Professor vem acompanhada de um cronograma com o tempo previsto para o seu desenvolvimento. Nesse material há indicações para que o docente use seu conhecimento sobre a turma e suas necessidades de aprendizagem para gerenciar esse tempo:

> Insistimos, no entanto, no fato de que somente o professor, em sua circunstancia particular, e levando em consideração seu interesse e o dos alunos pelos temas apresentados, pode determinar adequadamente quanto tempo dedicar a cada uma das unidades. Caderno do Professor, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009, p. 8)

Isso ocorreu em várias situações como no exemplo a seguir extraído do Caderno do Aluno.

Quadro nº 01: Tarefa do Caderno do Aluno

Desenhe as seguintes figuras:
a) Triângulo com três ângulos agudos.
b) Quadrilátero com dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos.
c) Quadrilátero com exatamente três ângulos agudos.
d) Quadrilátero com quatro ângulos retos.

Fonte: São Paulo (2009, Vol. 2, p. 16)

No cabeçalho que precede esta tarefa, aparece a indicação para que o aluno pesquise os termos desconhecidos num dicionário ou na internet: *Caso você desconheça algum termo geométrico mencionado nas atividades desta seção,* *consulte um dicionário, a internet ou o seu professor em classe*. Caderno do Aluno, Vol.2 (SÃO PAULO, 2009, p. 16).

É nítida a impressão de que a tarefa proposta pressupõe que o aluno, por um lado, conheça o significado de ângulo agudo e obtuso sem que esse conceito tenha sido trabalhado em problemas e/ou exercícios anteriores nos Cadernos do Aluno desta série/ano em questão ou mesmo em séries/anos anteriores. Por outro lado, a realidade da maioria das escolas públicas está longe de uma inclusão tecnológica com acesso a internet para todos. Muitas escolas, como aquela em que desenvolvemos o trabalho de campo da pesquisa, atendem alunos que moram em zonas rurais e não têm acesso algum à internet ou bibliotecas em contra-turno. Os alunos dispõem apenas da biblioteca da própria escola para fazer pesquisas a qual possui um acervo insuficiente.

O que é certo é que as Situações de Aprendizagem não dão conta de trabalhar todos os conteúdos e habilidades propostos de forma satisfatória e que garanta uma aprendizagem sólida de novos conceitos. Faltam tarefas para sistematização e manutenção de procedimentos e definições que poderiam ajudar os alunos a estudar e relembrar o que já foi discutido. Assim, é imprescindível que o professor faça um trabalho de planejamento integrando vários materiais, metodologias e estratégias de ensino. No entanto, não deverá perder de vista que as tarefas devem ser bem planejadas para contribuir com a aprendizagem e não se confundir com mera atividade de memorização e "decoreba".

Sobre isso, Ponte (2005, p. 4) diz que os exercícios servem para o aluno por em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos. "Servem essencialmente para um propósito de consolidação de conhecimentos, e reduzir o ensino da Matemática à resolução de exercícios comporta grandes riscos de empobrecimento nos desafios propostos e de desmotivação dos alunos". Além disso, algumas atividades do Caderno do Aluno intituladas "lição de casa" apresentam geralmente um nível de dificuldade grande para os alunos que não estão acostumados a pesquisar e nem contam com apoio em casa para realizarem as tarefas.

A questão a seguir é sugerida como "lição de casa" e encontra-se apenas no Caderno do Aluno do 7º ano, Vol.2, não fazendo parte do Caderno do Professor:

> Comparando o resultado obtido na atividade anterior com o que você discutiu nas duas últimas atividades realizadas na seção **Você**

> **aprendeu?**, formule uma hipótese sobre a relação entre a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer e a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo qualquer. Em seguida, apresente um argumento lógico que possa justificar sua hipótese. Caderno do Aluno, Vol.2 (SÃO PAULO, 2009, p. 8).

Será que as atividades anteriores citadas na questão fornecem os instrumentos necessários para que todos os alunos consigam compreender o enunciado da investigação e a realizem sozinhos em casa? Esses alunos conhecem o significado de hipótese e argumento lógico? Para ambas as questões, a resposta é não. Talvez um aluno mais adiantado consiga compreender a questão e resolvê-la, mas a maior parte dos alunos dos 7º anos com os quais trabalhamos, não tem ainda bem desenvolvida a questão da interpretação dos enunciados, principalmente quando estes exigem um nível maior de autonomia, análise e síntese. Para um aluno deste nível escolar, até mesmo com a mediação e orientação do professor, é bastante complexa a elaboração de um texto argumentativo. Em casa, a situação pode ser muito mais difícil e desestimulante.

Nas atividades anteriores do referido Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2009, p. 6), são propostas tarefas nas quais os alunos devem desenhar dois tipos de triângulos e dois tipos de quadriláteros, medir seus ângulos internos usando um transferidor de papel construído por eles mesmos e anotar essas medidas. Após a construção dos dois triângulos aparece a questão:

> Com base nos resultados de sua observação, levante uma hipótese a respeito da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo e busque uma forma de justificá-la com argumentos lógicos. (CADERNO DO ALUNO; SÃO PAULO, 2009, p. 6).

Acreditamos que essa é uma boa questão para ser trabalhada em grupo, em sala de aula, num contexto de tarefa exploratório-investigativa, confrontado opiniões e argumentos e não individualmente, com a realização de poucos testes e exemplos ou como lição de casa. Pensando desta forma, adotou-se uma postura mais investigativa ao se trabalhar com as questões dos cadernos, optando-se por desenvolver as tarefas sempre em sala de aula, em grupos ou duplas de alunos, incentivando-se a elaboração de conjecturas e levando essas ideias e descobertas para discutir com toda a turma, antes que elaborassem suas “conclusões”. Esse tipo de abordagem mais investigativa preparou o caminho para as explorações geométricas que seriam realizadas.

Nas Situações de Aprendizagens propostas no Caderno do Aluno, foi retomada a noção de ângulo já vista no 6º ano, trabalhando-se com instrumentos de medida e desenho e explorando-se situações que envolviam simetrias de figuras geométricas e propriedades de polígonos e poliedros.

As questões dos Cadernos são bem elaboradas em sua maior parte, mas devem ser bem analisadas antes de se decidir como implementá-las em sala de aula, pois nem sempre têm um enunciado de fácil entendimento para o aluno. Muitas vezes, a sequência das tarefas propostas nos Cadernos não apresenta um encadeamento de ideias que possam levar à elaboração de conjecturas e levantamento de hipóteses que as questões pressupõem.

Ao analisar o Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009) observamos que há uma indicação clara para que o professor tenha sempre uma postura investigativa em sala de aula, priorizando tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento argumentativo, a elaboração de conjecturas, testes e justificativas por meio de registros escritos. No entanto, não existe referência neste material de como deve ser uma aula investigativa em Matemática, ficando a cargo de o professor criar sua própria estratégia de ensino. Além do mais, as poucas questões propostas no Caderno do Aluno, Vol.2 (SÃO PAULO, 2009) não dão conta de desenvolver os conceitos geométricos pretendidos, cabendo ao professor ter um olhar crítico sobre cada Situação de Aprendizagem e um grande domínio conceitual dos conteúdos a serem desenvolvidos com os alunos, evitando que as atividades fiquem sem sentido ou sejam muito superficiais. A esse respeito, concordamos com Ponte (2003a, p. 21), que afirma que “a investigação requer uma racionalidade muito diferente da simples opinião. Pressupõe, da parte de quem a realiza, um esforço de clareza nos conceitos, nos raciocínios e nos procedimentos”.

Pensando nesta dificuldade, resolvemos utilizar a estratégia das aulas exploratório-investigativas na tentativa de melhorar a aprendizagem dos conceitos geométricos almejados para esse nível de escolaridade. As duas primeiras tarefas tiveram como objetivo ampliar os conhecimentos dos alunos acerca de algumas relações entre os ângulos, como os ângulos opostos pelo vértice, suplementares, agudos, obtusos, retos, rasos, assim como o manuseio do transferidor como instrumento de medida.

Em seguida, foram desenvolvidas tarefas para explorar algumas regularidades e relações dos polígonos, como a soma de seus ângulos internos e a medida dos ângulos internos e externos em polígonos regulares. A partir daí desenvolvemos uma tarefa para explorar as condições necessárias para o ladrilhamento de uma região plana com polígonos regulares, questionando sobre que saberes geométricos seriam gerados ou mobilizados pelos alunos durante a realização desta tarefa exploratório-investigativa.

Acreditamos que neste tipo de aula os alunos podem se envolver de forma mais profunda, tendo a chance de estudar mais sobre o que se investiga, conversar sobre as conjecturas e descobertas feitas com os colegas e professor e escrever sobre a própria experiência, num movimento de autorreflexão e análise sobre o processo que vivencia.

Procuramos analisar até que ponto aulas de natureza exploratório-investigativas podem contribuir para uma aprendizagem mais sólida por parte dos alunos, dos conceitos geométricos pretendidos para o 7º ano do Ensino Fundamental.

As tarefas exploratório-investigativas desenvolvidas nesta pesquisa foram realizadas entre as tarefas propostas no Caderno do Professor, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009) buscando promover uma aprendizagem além do que é proposto nos Cadernos. Não se tratou de trabalhar com conteúdos extracurriculares, mas trazer maior sentido aos conteúdos do currículo oficial vigente por meio da abordagem de tarefas desta natureza.

No próximo item, descreveremos mais detalhadamente a concepção de investigação matemática e sua importância para a Atividade Matemática dos alunos.

2. INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS: O QUE É INVESTIGAR?

Muitos são os significados que assume o termo investigar e consequentemente o substantivo investigação. Podemos pensar em investigação criminal, ou jornalística, inquéritos, investigação científica entre outros. Inclusive, algumas pessoas entendem investigação como ato de pesquisar. No entanto, para os matemáticos, esse conceito assume novos significados.

Em algumas comunidades acadêmicas, alguns mitos foram criados sobre o significado desse termo. Entre eles, segundo Ponte (2003a), existe a crença de que investigar é uma atividade reservada a um grupo especial de pessoas, “os investigadores profissionais”.

Quando pensamos em investigação matemática, não estamos pensando nessa “grande investigação”, realizada nas universidades, empresas e laboratórios do Estado e que tem certa função social, mas sim, num tipo de trabalho que nos motive a responder questões para as quais não temos respostas prontas, questões que se apresentem até de modo confuso no início e para as quais procuramos responder de forma lógica, racional, fundamentada pelo rigor matemático.

Em sua pesquisa sobre o conceito de investigação, Brocardo (2001) analisou algumas perspectivas diferentes na tentativa de clarear uma definição para esse termo. Uma delas procurou caracterizar o que é uma investigação a partir dos processos matemáticos que nela estão envolvidos e nas suas relações, havendo ainda autores que comparam as investigações matemáticas com a realização de outras atividades, como a formulação e a resolução de problemas. No entanto, podemos considerar as investigações como atividade matemática, sendo essa a ideia que utilizaremos nesse trabalho. Dessa forma, concordamos com a autora, que aprender matemática é uma atividade criativa que pode estar próxima, em termos de qualidade, da atividade realizada pelos matemáticos profissionais.

Brocardo (2001) explica que alguns autores salientam a importância dos alunos experimentarem em suas atividades de aprendizagem o mesmo tipo de trabalho dos matemáticos profissionais. Por isso, pode-se considerar que as investigações são parte daquilo que vários autores referem como atividade matemática. Nesse sentido, a investigação é uma atividade central no processo de ensino e aprendizagem desta disciplina e deve estar entre as atividades realizadas em sala de aula pelos alunos.

A esse respeito pode-se questionar sobre o real significado de atividade matemática, visto que a definição de Matemática como corpo de conhecimentos construído por processos indutivos e dedutivos e caracterizado pelo rigor absoluto é incompleta (BROCARDO, 2001).

Lamonato e Passos (2011) ressaltam que a Matemática, vista como uma disciplina que se encerra em si mesma, que já está pronta e que deve ser aprendida, desqualifica-a enquanto ciência e campo de conhecimento e pesquisa, outorgando apenas a alguns o poder de conhecê-la e estuda-la.

Quando isso ocorre, a matemática passa a ser como um produto acabado, rígido. Para muitos professores que veem a matemática dessa forma, ela não passa de um conjunto de conteúdos a ser transmitido.

De acordo com Lakatos (1984), a identificação da Matemática como ciência puramente formal, baseada numa axiomática abstrata e em um conjunto de teoremas pré-estabelecidos nada tem a ver com os períodos de criação e descoberta das teorias matemáticas. Desse modo, o autor defende o papel das matemáticas não formais, mais empíricas, que se desenvolvem por meio de conjecturas que só é possível devido à especulação, à crítica, aos testes, provas e refutações. No seu livro, *Proofs and Refutations* (LAKATOS, 1984, p. 5), Lakatos questionou a identificação da Matemática como uma abstração puramente axiomática. Em sua perspectiva, defende os processos de criação e descoberta, influenciando vários educadores matemáticos para a crença de que para compreender a matemática é preciso atuar como os matemáticos, em seus processos criativos.

> (...) Seu modesto objetivo é elaborar o ponto em que a matemática informal, quase empírica, cresce não através de um monótono aumento do número de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas através da melhora incessante das hipóteses por especulação e crítica, pela lógica de provas e refutações.

Essa Matemática para ser inventada passa, segundo Hadamard (1945) por um processo mental que envolve quatro fases distintas estendidas ao longo do tempo: iniciação, incubação, iluminação e verificação. Esse autor tentou caracterizar psicologicamente o processo de invenção da matemática e em seus estudos, salientou o papel da intuição e do inconsciente nesta criação.

A primeira das fases descritas por Hadamard (1945) é a fase de iniciação e consiste em um trabalho deliberado e totalmente consciente para se resolver uma questão. Ao se deparar com situações que não consegue resolver de imediato, o pesquisador entra numa fase denominada fase de incubação, que é um momento inconsciente, gerado pelo esforço anterior consciente. Essa fase é extremamente importante e pode levar à fase de iluminação, que vem acompanhada de uma sensação de certeza sobre o que se quer solucionar. Por último vem a fase de verificação, de testes sobre a solução encontrada. Essa ideia foi descrita pela experiência pessoal de Poincaré quando estudava as características de um tipo de funções:

> Justamente neste momento, deixei Caen, onde eu morava, para ir em uma excursão geológica sob os auspícios da Escola de Minas. O incidente da viagem me fez esquecer meu trabalho matemático. Tendo alcançado Coutances, entramos num ônibus para ir a um outro lugar. No momento em que pus meu pé no degrau, a ideia veio a mim, sem que nada em meus pensamentos antigos parecesse ter pavimentado o caminho para ela: as transformações que eu tinha usado para definir as funções Fuschian eram idênticas as das não euclidianas (Poincaré[6] apud LILJEDAHL, 2004, p. 13). Tradução nossa.

Essa perspectiva se contrapõe a crença de que a atividade do aluno e do matemático sejam extremamente diferentes e estejam em universos totalmente separados.

Sabemos que a realidade de um aluno, quer seja do Ensino Fundamental ou Médio, é realmente muito distinta do profissional Matemático. Mesmo assim, suas atividades podem apresentar aspectos em comum. Sobre isso, baseando-se em suas pesquisas sobre a descoberta matemática, Hadamard (1945, p.104) diz que “entre o trabalho do aluno que tenta resolver um problema de Geometria ou Álgebra e uma obra de invenção, pode-se dizer que existe apenas uma diferença de grau, de nível, pois ambas as obras são de natureza similar”.

[6] Poincaré, H. **Science and Method**. Dover Publications Inc. New York. NY, 1952.

Segundo Ponte (2009) para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. Além disso, em Matemática o que caracteriza uma investigação é o estilo de elaboração das conjecturas – testes – demonstrações que lhe é próprio, sendo condição fundamental para que o aluno aprenda o seu envolvimento ativo nas situações e processos de aprendizagem. Esse é um dos principais aspectos das investigações.

Para esse autor, o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Nessa perspectiva, podemos nos questionar sobre como fazer para que os alunos mobilizem tais recursos. Esse é sem dúvida um dos maiores desafios que encontramos enquanto educadores.

2.1 Por que investigar?

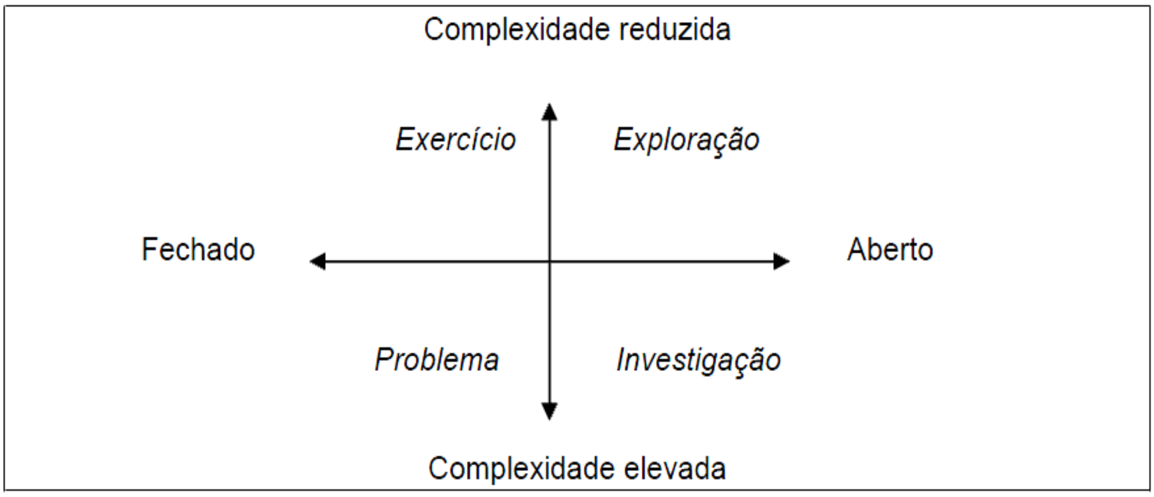
O trabalho com a formulação de questões e conjecturas, testes e/ou argumentações, provas e refutações, demonstração e comunicação dos resultados faz com que o aluno seja levado a pensar e agir como um matemático, utilizando-se dos processos de descobertas da própria matemática.

Contradizendo alguns matemáticos e educadores, esse é um trabalho que está ao alcance dos alunos com os quais interagimos em sala de aula.

Para melhor caracterizar as atividades investigativas, Ponte (2003a) distingue, em um diagrama (figura 03), quatro tipos diferentes de tarefas: exercícios, problemas, explorações e investigações.

Podemos observar esse diagrama a seguir:

Figura 03 : Tipos de tarefas



Fonte: Ponte (2003a, p. 5)

Os exercícios são tarefas sem muita dificuldade e de estrutura fechada. São tarefas que trabalham a memorização de cálculos e procedimentos. Importantes para sistematização de técnicas operatórias que facilitem a exploração de tarefas mais complexas.

Já os problemas se enquadram como tarefas de complexidade elevada e estrutura fechada. São tarefas que envolvem questões para serem solucionadas que apresentam certo grau de dificuldade para o aluno.

As explorações tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, demandando um tempo relativamente pequeno de trabalho. São frequentemente utilizadas para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático.

As investigações, por sua vez, levam mais tempo e demandam, segundo Ponte (2003a), quatro momentos principais: exploração e formulação de questões investigativas (ou situações problemáticas), organização de dados e construção de conjecturas, realização de testes, refinamento, sistematização das conjecturas e construção de justificativas, argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados.

Segundo Oliveira, Segurado e Ponte (1996), as investigações matemáticas também são importantes do ponto de vista educacional de um modo geral, pois estimulam o envolvimento do aluno necessário para uma aprendizagem significativa.

Fornecem vários pontos de partida para estudantes em níveis cognitivos diferentes; estimulam um modo mais abrangente de pensamento, relacionando vários aspectos do conhecimento e fornecem uma visão completa da matemática, já que investigar é algo essencial à atividade matemática.

Em nossos estudos, observamos que alguns autores caracterizam as investigações matemáticas como metodologia de ensino, usando a expressão metodologia de investigação matemática, como Brocardo (2001). Outros consideram que as explorações-investigações em matemática fazem parte de uma estratégia de ensino. Em nosso trabalho, optamos pela segunda definição e concordamos com Ponte (2005) que numa estratégia de ensino, se destacam sempre dois pontos; a atividade do professor e a atividade do aluno (ou o que se espera que ele faça).

Ponte (2005) distingue e descreve duas estratégias básicas utilizadas para o ensino de matemática: a do ensino direto, mais conhecida como ensino expositivo ou tradicional e o ensino exploratório, também comumente chamado de ensino ativo.

O ensino direto é o mais conhecido dentre todas as pessoas que já sentaram em um banco escolar ou dos profissionais ligados à educação, onde o professor geralmente transmite os conteúdos que estão presentes nos materiais didáticos e indicados pelo currículo e documentos oficiais. É uma estratégia que tem o professor como protagonista do processo de ensino e aprendizagem, utilizando-se da aula expositiva e da realização de exercícios para aplicação do que se julga que o aluno tenha aprendido. Já o “ensino-aprendizagem exploratório”[7] , tem como característica principal deixar para o aluno parte do trabalho e da descoberta, sendo também responsável pela própria construção do conhecimento (PONTE, 2005).

Salienta Ponte (2005) que um sistema que adota uma abordagem exploratório-investigativa como estratégia de ensino, também pode se utilizar de momentos de exposição e sistematização de conceitos. Para o autor:

> Ensino-aprendizagem exploratório não significa que tudo resulta da exploração dos alunos, mas sim, que esta é uma forma de trabalho marcante na sala de aula. Ou seja, não é a realização ocasional de um outro tipo de tarefa que define o caráter geral do ensino, mas a tendência geral do trabalho desenvolvido. (PONTE, 2005, p. 14)

[7] Expressão utilizada pelo autor.

Desse modo, trabalhar com uma proposta de ensino que prioriza o ensino e a aprendizagem exploratório em matemática significa dar ênfase às tarefas exploratório-investigativas sem se esquecer de incluir resoluções de problemas e exercícios em alguns momentos das aulas.

Em síntese, podemos dizer que as investigações matemáticas diferenciam-se das demais, por serem situações-problema desafiadoras e abertas, proporcionando aos alunos, alternativas de exploração e investigação. Neste sentido, pode-se trabalhar e investigar, sem estabelecer uma distinção clara, entre as duas últimas formas de tarefas acima referidas. Por isso, para fazer referência a ambas, utilizamos a expressão tarefas exploratório-investigativas.

A vantagem de trabalhar com tarefas dessa natureza é o fato de colocar o aluno diante do próprio processo de produção matemática. Não exige uma linearidade curricular; possibilita ao aluno trabalhar com verdades provisórias e abre leque para criações matemáticas. O processo de investigação deve possibilitar ao aluno o pensar matemático, ou seja, ver o mundo do ponto de vista matemático e ter os instrumentos para tirar proveito, para matematizar com sucesso.

2.2 Etapas de uma aula exploratório-investigativa

Como citado anteriormente, Ponte (2003a), divide as investigações em quatro momentos principais, no entanto, Brocardo (2001), define apenas três processos básicos envolvidos numa aula investigativa: a exploração de possibilidades, a formulação de conjecturas e a procura de argumentos que validem as descobertas realizadas. Esses processos fazem parte das atividades realizadas pelos alunos e mediadas pelo professor durante a exploração-investigação. Entendemos que a autora faz a união da fase de formulação de conjecturas e testes em seus estudos. Isso é possível porque numa tarefa exploratório-investigativa não há uma linearidade, onde o processo ocorra sequencialmente e de forma arbitrária. É possível que as conjecturas surjam antes mesmo da elaboração de dados ou só após a produção de muitos exemplos. Os testes, por sua vez, podem gerar mais questões ou mais conjecturas. Essas classificações não são rigorosas e dependem muito de como o pesquisador vivencia e compreende esse tipo de aula, totalmente dinâmica.

Quanto ao professor, poderá organizar as aulas investigativas em três etapas principais, assim como caracterizou Ponte (2009): (I) Introdução da tarefa; (II) Desenvolvimento da tarefa e (III) Discussão dos resultados. Essa sequência pode ocorrer em apenas uma aula, caso a tarefa exploratório-investigativa seja simples ou em várias aulas quando as questões forem mais complexas ou levarem a outras questões interessantes para pesquisa. Isso porque nesse tipo de aula, podemos programar como iniciar as atividades, mas não temos como saber seu término. O percurso e encerramento de uma tarefa assim é totalmente imprevisível. Isso não significa que seja algo negativo. É preciso que o professor esteja preparado intelectual e emocionalmente para esse tipo possibilidade, pois como salientam Oliveira, Segurado e Ponte (1996, p.5):

> Com ou sem a intervenção sistemática do professor existem sempre alunos que vão mais longe do que se tinha previsto: surgem processos e resultados inesperados. Tal como diz uma professora, ao reportar-se à preparação das suas aulas de investigação: por muito que explore a tarefa e pense em ‘n’ abordagens, os alunos conseguem sempre surpreender-me e apresentam ‘n’ mais uma. O professor precisa, pois, estar atento e disponível para perceber e dar continuidade aos caminhos inusitados dos alunos.

Todo esse movimento e flexibilidade não são fáceis para o professor gerir quando inicia suas primeiras experiências com tarefas desta natureza. É importante que haja planejamento, mas também compreensão das próprias limitações e reflexão crítica sobre como melhorar as intervenções durante a realização das tarefas. O estudo contínuo dos trabalhos realizados por outros pesquisadores, a prática em sala de aula e a discussão das experiências vivenciadas em grupos de professores-pesquisadores, pode ser um bom caminho para o entendimento e desenvolvimento dos processos envolvidos nessa estratégia de ensino.

2.2.1 A introdução da tarefa

Na etapa de introdução da tarefa temos a fase em que se formulam as questões, que podem ser propostas oralmente ou por escrito. Essas questões podem ser elaboradas pelo professor ou pelos alunos, no entanto, em nossa pesquisa, optamos por planejar as questões previamente e levá-las para a classe, já que os alunos não tinham muita habilidade com esse tipo de aula. Trata-se de uma fase muito importante porque poderá motivar ou não o aluno a realizar as atividades e a se envolver na tarefa. Sabemos que um aspecto crucial para que ocorra a aprendizagem é o envolvimento dos alunos nas atividades propostas, independente da natureza da tarefa.

Formular boas questões e saber como “lançar” o desafio para os estudantes é então parte importante do processo de uma aula exploratório-investigativa. O aluno tem que “comprar” a ideia, aceitar o desafio proposto.

Destacamos algumas ações importantes do professor nessa fase da tarefa: primeiramente a explicitação aos alunos acerca da tarefa, do que precisam explorar e o que se espera que façam. Essa explicação pode ser feita oralmente, de forma escrita, ou ambas, principalmente se os alunos não têm ainda experiência com esse tipo de aula. Ponte (2009) clarifica que mesmo a tarefa sendo fornecida aos alunos por escrito, não dispensa uma explicação oral pelo professor.

É importante também o cuidado e planejamento das questões iniciais e elaboração do enunciado da tarefa de tal modo que não condicione o aluno, mas que lhe ofereça o máximo de autonomia. De acordo com Oliveira, Segurado e Ponte (1996), ao selecionar ou criar uma tarefa, o professor deve definir bem os objetivos a atingir e ter em atenção o nível etário e o desenvolvimento matemático dos alunos. A familiaridade, ou não, dos alunos com este tipo de atividade é um fator muito importante.

Preparar e executar uma tarefa verdadeiramente rica em possibilidades de descobertas que gerem aprendizagens significativas é um verdadeiro desafio para o professor. Quando isso ocorre, segundo Ponte (2009), não existe o perigo de que o professor limite a possibilidade dos alunos estabelecerem as suas próprias conjecturas, se der algumas pistas de exploração ou pedir a eles algumas sugestões. Nesse sentido, manter uma postura investigativa durante todo o tempo em que ocorre a tarefa é tão importante quanto preparar uma boa questão, pois esta pode representar apenas “uma pergunta” e não motivar o caráter investigativo dos alunos.

É comum o aluno fazer mais afirmações que perguntas sobre os dados e relações que percebem. O professor deve então combater esse tipo de postura por meio de exemplos e devolvendo as questões que lhe são feitas com outras questões. Os alunos normalmente perguntam: *"É assim professora?", "Tá certo professora?"*. A esse tipo de pergunta o professor pode responder com outra pergunta: *"O que você acha?", "Você já testou para ver se está certo?", "Você já verificou?", "Por que você acha isso?".* Esses são apenas alguns exemplos de questões que podem ser colocadas durante as interações com os alunos.

Oliveira, Segurado e Ponte (1996) deixam claro que "o professor é confrontado com decisões difíceis quanto à gestão do tempo devido ao elevado número de aspectos que necessita de relativizar e conjugar" numa tarefa investigativa. Além desse, outro aspecto importante é o planejamento de como a tarefa será realizada. O professor deverá decidir anteriormente se os alunos trabalharão em duplas, em grupos ou individualmente. Deverá refletir sobre a melhor maneira de trabalho pensando não só na questão da gestão em sala de aula e gestão de tempo, mas no que será supostamente mais adequado ao tipo de tarefa. Supostamente porque não é possível prever o que irá acontecer realmente durante as explorações, mesmo que o planejamento seja minucioso.

Santos et al. (2002, p. 8) esclarecem que:

> Planejar aulas com investigações matemáticas não envolve apenas selecionar ou construir tarefas para os alunos investigarem. É igualmente necessário preparar o modo como a tarefa vai ser apresentada aos alunos, escolher a metodologia de trabalho, decidir o modo como vão ser confrontados os processos usados, bem como a produção final que é esperada dos alunos e refletir após as aulas para poder inflectir e reajustar as próximas planificações.

Apesar de ser necessário levar em conta um bom planejamento das questões, isso não garantirá o sucesso da tarefa. Para Lamonato e Passos (2011, p. 56):

> (...) *a* preparação da tarefa e suas características inerentes não garantem o envolvimento dos alunos na atividade matemática pretendida, uma vez que não é possível prever antecipadamente as ocorrências na sala de aula. A tarefa é apenas um dos diversos fatores que podem caracterizar a atividade.

2.2.2 Desenvolvimento da tarefa e seus processos

Segue-se a essa primeira etapa, o desenvolvimento da tarefa, onde se inicia a exploração por parte dos alunos sendo mediada pelo professor. Nessa fase, ocorrem alguns processos comuns como a análise dos dados, a elaboração de conjecturas, os testes dessas conjecturas e algumas vezes a produção de mais dados e questões pelos próprios alunos. Também é nessa etapa que são elaboradas as justificativas e provas das hipóteses levantadas.

Concordamos com Ponte (2009) de que nessa fase cabe ao professor procurar compreender como o trabalho do aluno vai se processando e prestar apoio quando for necessário. Em seu trabalho com Oliveira et al. (1996, p.211) os autores explicam que o apoio dado aos alunos pode ajudá-los a superar bloqueios e tornar mais rica sua exploração/investigação:

> (...) é uma das facetas mais complexas da intervenção do professor. Tem muita importância numa investigação a reflexão do aluno sobre o seu trabalho. Esta pode ser estimulada direta ou indiretamente pelo professor. É necessária experiência e sensibilidade para lidar com estes problemas de uma forma bem sucedida.

Em nossa pesquisa, percebemos claramente que algumas das atividades desenvolvidas durante a exploração não seguiram uma linearidade, passando sequencialmente pelos momentos descritos anteriormente. Há mesmo um movimento não linear, pois algumas vezes a refutação de algumas ideias pode gerar outros dados para testes. Essa é outra característica das tarefas investigativas citada por vários autores, como Brocardo (2001, p.99) que dá um exemplo dessa situação:

> (...) quando se percebe que os testes realizados não confirmam determinada conjectura é necessário voltar atrás de forma a formular outra conjectura. No entanto, para isso, é importante perceber-se o que falhou para que a primeira conjectura não resistisse aos sucessivos testes e procurar ter em conta esse aspecto na formulação de uma nova conjectura. Deste modo, uma atividade de investigação não é caracterizada apenas pelos processos matemáticos nela envolvidos, mas, também, pela interação entre eles, ou seja, pelas relações que se devem necessariamente estabelecer entre eles.

Ponte (2009) indica os quatro momentos principais dessa etapa no quadro 02 a seguir, o qual detalhamos acrescentando outros processos observados durante a pesquisa de campo e estudos teóricos a fim de clarear as etapas de uma aula exploratório-investigativa. As alterações estão sublinhadas no quadro.

Quadro 02: Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática; • Explorar a situação problemática <u>(analisar dados e/ou gerar novos dados);</u> • Formular novas questões.
Conjecturas	• Organizar dados; • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura);
Testes e reformulação	• Realizar testes; • <u>Refutar uma conjectura se for o caso;</u> • Refinar uma conjectura <u>(elaborar mais dados e testá-los se necessário);</u>
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura; • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: Adaptado de Ponte (2009, p.21).

Complementamos o quadro, com as ações de "analisar dados e/ou gerar novos dados" e "elaborar mais dados e testá-los se necessário", pois entendemos que este tipo de atividade do aluno pode ocorrer tanto no início da tarefa, quanto na fase de testes. Outro fato comum é o aluno refutar uma conjectura no momento em que realiza os testes e já abandoná-la, voltando a fazer outras análises ou reformulando suas conjecturas iniciais.

Esses processos envolvem a formulação de conjecturas, sua verificação e justificativas por meio de argumentações ou provas no caso de alunos em nível de escolaridade mais adiantados. Para os alunos mais novos do Ensino Fundamental (6º e 7º anos), conseguir argumentar consistentemente e comunicar os resultados obtidos pode ser considerada como uma habilidade de alto nível. Devido a importância desses processos na aprendizagem de conceitos matemáticos, buscamos compreender como funcionam e ocorrem dentro de uma tarefa exploratório-investigativa. Assim, procuramos clarear alguns aspectos e propriedades que são inerentes ao pensamento argumentativo do aluno envolvido em tarefas dessa natureza.

2.2.3 A formulação de questões e conjecturas

Uma conjectura é uma afirmação ou uma ideia que não foi provada ainda. Geralmente é baseada em suposições sobre algum fato pensado ou observado. Em matemática utilizamos o termo “hipótese” para as conjecturas que queremos demonstrar, provar. De acordo com Ponte (1998a), uma conjectura é uma afirmação que responde a uma determinada pergunta e que se considera ser verdadeira, podendo-se referir a um único objeto ou a toda uma classe de objetos. Algumas são mais elementares e evidentes que outras.

O processo de elaboração de questões e formulação de conjecturas ocorre quando os alunos começam a explorar os dados da tarefa ou mesmo por analogia com outras tarefas já realizadas. Quando isso ocorre, eles se questionam, questionam uns aos outros e ao professor, e nessa interação surgem algumas ideias que vão ganhando forma até que se tornem afirmações. Essas afirmações muitas vezes são contestadas pelos colegas, o que leva a necessidade de testes e verificações. É um trabalho indutivo que, na maioria das vezes, fica no universo dos pensamentos dos alunos. No entanto, Ponte (1998a) afirma que a formulação de questões a estudar é um dos pontos fracos dos alunos, pois esse processo ocorre na maior parte das vezes de forma implícita, sendo difícil o aluno formular perguntas com precisão.

Essa constatação não deve ser surpresa para ninguém de acordo com Ponte e Matos (1992). Para os autores, o conhecimento que os alunos supostamente aprendem são muito formais e organizados, ou seja, ensinam-se “respostas” sem dar a mínima importância às “questões” que as originaram ou à forma como foram alcançadas.

A esse respeito, Ponte (2003b) verificou que alguns autores que pesquisam as tarefas de explorações e investigações matemáticas, concluíram que, muitas vezes, os alunos não sentem a necessidade de verbalizar a questão inicial que fomenta seus pensamentos e mesmo com certa experiência e habilidade com tarefas dessa natureza, não dão importância a explicitação de questões. Em alguns casos, os alunos ficam confusos com o que têm que investigar. São muitas variáveis para o professor perceber e intervir da melhor forma possível sem que comprometa a riqueza da descoberta e o processo de aprendizagem dos alunos.

Outro ponto muito recorrente é os alunos chamarem suas conjecturas de conclusões. Isso pode ocorrer em virtude da atitude do próprio professor, que segundo Ponte (2009), costuma utilizar essa linguagem quando dialoga com os alunos: “Vocês já chegaram a alguma conclusão?” ou “O que vocês concluíram sobre o que observaram?”. O grande problema nesse caso é que muitas vezes os alunos deixam de elaborar justificativas porque acreditam que suas conjecturas são conclusões. Para alunos menores ou em níveis mais elementares de escolaridade é muito difícil o aluno aceitar a necessidade de justificar suas conjecturas. No entanto é importante que o professor deixe claro que por mais que se faça vários testes na tentativa de verificar uma conjectura, esse procedimento não tem estatuto de prova matemática.

Nos estudos de vários autores como Ponte (2003a), Brocardo (2001) e Oliveira (1996), percebe-se que os alunos interiorizam com facilidade a importância de realizar testes às suas conjecturas, no entanto, é muito comum que utilizem um número reduzido de casos para justificar ou refutar tais afirmações.

Em sua pesquisa, Brocardo (2001, p. 540) analisando a evolução de seus alunos do 8º ano observou que:

> É muito forte nos alunos a ideia de que uma tarefa matemática implica a procura de respostas/conclusões e que a evolução para uma postura realmente investigativa em que formulam conjecturas e desenvolvem vários ciclos de confirmação ou refutação destas, é um processo demorado e que tem de ser objeto de um trabalho explícito por parte do professor.

Segundo Brocardo (2001), quando a tarefa é mais aberta, os alunos têm mais dificuldade em decidir o número e o tipo de casos a estudar e, por isso, tendem a utilizar poucos testes antes de elaborar alguma “conclusão”. No entanto, para a autora, esta tendência tem muito mais a ver com *as* “dificuldades iniciais em perceber características importantes do processo investigativo do que com dificuldades relacionadas com a realização de testes”. (BROCARDO, 2001, p. 540)

Em nossa pesquisa, observamos que um dos aspectos interessantes desta etapa está em analisar os registros que os alunos fazem de suas conjecturas e comparar com os registros de áudio e vídeo ou anotações do pesquisador. Pois percebemos que é comum o aluno não escrever tudo o que fala e possivelmente não dizer tudo aquilo que pensa.

A realização de atividades durante a tarefa deve levar a reflexão da situação por parte dos alunos, gerando algum tipo de conhecimento novo ou mesmo fazendo com que revejam alguns conceitos já aprendidos anteriormente para que formulem novas conjecturas. Esse processo de testar e conjecturar pode formar um ciclo que pode ser executado várias vezes pelo aluno. Até mesmo o processo de testar pode se dar de diferentes formas. Nos trabalhos de Ponte e Matos (1992), salientam-se que os testes podem ser de casos escolhidos, casos aleatórios ou mesmo tentando realizar algum tipo de prova.

2.2.4 Argumentação e prova numa tarefa exploratório-investigativa

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), no terceiro ciclo, atualmente 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, é essencial que os alunos sejam estimulados a construir e analisar diferentes processos de resolução de situações-problema e compará-los. Tendo em vista que as aulas exploratório-investigativas são geradas a partir de questões desafiadoras abertas, concluímos que o que vale para a resolução de problemas também é indicado para o desenvolvimento de tarefas de exploração e investigação. Quando o aluno busca por soluções, generalizações ou pensa criticamente sobre as questões e dados da tarefa, sente a necessidade de elaborar argumentos plausíveis. Ainda segundo esse documento (BRASIL, 1998, p.70), “a argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la”. Nesse sentido, um argumento será aceito se estiver baseado em conteúdos matemáticos verdadeiros e se for possível responder aos contra-argumentos ou réplicas que lhe forem impostos.

Em seus estudos sobre os saberes em Geometria e as aulas exploratório-investigativas, Grando, Nacarato e Luci (2008, p. 42), descrevem que:

> (...) este ensino, até a década de 1960, esteve pautado por um excesso de formalismo, com a prevalência das demonstrações geométricas euclidianas. Nesse período, o caráter estritamente formal e axiomático da matemática produzida pelos matemáticos profissionais estabelecia os critérios de verdade dessa área do conhecimento. Não se questionavam esses critérios quanto à matemática escolar. Assim, outros processos de argumentação em Geometria não encontravam espaços na escola.

Em termos curriculares vigentes (BRASIL, 1998), no trabalho com alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, o processo de justificação ou prova das conjecturas não é muito priorizado, entretanto é desejável que o processo de argumentação seja bem desenvolvido e refinado com o passar do tempo e das várias experiências vividas com tarefas de natureza investigativa. Não podemos confundir uma argumentação com uma prova ou demonstração.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1998), a argumentação é uma habilidade próxima das práticas discursivas espontâneas e regida pelas leis de coerência da língua materna, enquanto que as demonstrações, tem por objetivo provas dentro de um referencial assumido, sendo regidas pelas leis da lógica formal. O processo de argumentação inicia o desenvolvimento de habilidades que permite provar alguns resultados. Com o tempo e a experiência, os alunos vão construindo argumentos mais sólidos e elaborando suas primeiras demonstrações. Esta etapa, de provar e demonstrar, pode ser iniciada no 7º ano do Ensino Fundamental de forma menos sistemática e aperfeiçoada. Mesmo assim, deve-se levar em conta que geralmente os alunos encaram as provas e demonstrações como atividades difíceis e complicadas.

Fernandes e Fonseca (2004, p. 250) afirmam que *o* “raciocínio utilizado para construir conjecturas plausíveis é o raciocínio argumentativo”. As autoras complementam afirmando que

> (...) com a argumentação não se pretende demonstrar a verdade de uma afirmação, nem mostrar a validade lógica de um raciocínio, mas obter a concordância de outrem para a validade de uma dada afirmação. O objetivo da argumentação seria o de convencer, enquanto que o da demonstração seria o de garantir a verdade. No entanto, nem sempre os argumentos que convencem são válidos.

Consideramos, que para alunos neste nível de escolaridade, a habilidade de argumentação é um raciocínio de alto nível e por isso mesmo vai se desenvolvendo aos poucos, com o passar do tempo e as várias experiências vivenciadas. De início, durante a realização das tarefas de campo desta pesquisa, os alunos entendiam a necessidade de justificativa de suas conjecturas como uma complicação a mais e desnecessária. Quando uma conjectura resistia a alguns poucos testes sucessivos, já era suficiente para indicar sua veracidade.

Observamos também, que os alunos argumentavam oralmente enquanto conversavam com seus colegas de dupla ou grupo ou ainda com o professor, quando expunham suas ideias para a turma e quando registravam suas descobertas, ou seja, quando escreviam. Sobre isso, Ponte (2003b, p. 28), explicou que a qualidade da argumentação dos alunos pode melhorar com a redação continuada de relatórios escritos.

Brocardo (2001) alertou que os alunos vão melhorando a qualidade dos registros escritos sobre suas investigações à medida que vão adquirindo experiência nesse tipo de atividade. Os textos, no início são curtos e lacônicos e, aos poucos, vão ficando mais elaborados e detalhistas.

Como referimos anteriormente, com várias experiências e boas intervenções feitas pelo professor, aos poucos os alunos vão compreendendo a importância em justificar suas conjecturas, mesmo que não consigam ainda realizar demonstrações formais. Uma das grandes dificuldades que tivemos neste aspecto foi fazer sempre "boas intervenções", abandonando a postura de professora convencional, acostumada a dar respostas, para uma postura investigativa, formulando outras questões que possibilitassem a busca do próprio aluno por novas descobertas.

Neste trabalho de pesquisa, incentivamos o raciocínio argumentativo dos alunos, levando-os a justificarem suas afirmações produzindo explicações plausíveis, tanto na oralidade como por meio da escrita. É preciso dar espaço a outros processos de argumentação menos formais, principalmente para os alunos do Ensino Fundamental II, possibilitando que eles vivenciem experiências de natureza investigativa e desenvolvam o prazer pela descoberta Matemática.

2.2.5 A discussão: o momento de justificar e socializar

O momento de discussão da tarefa ou socialização dos resultados é também essencial. Sem essa etapa, a tarefa exploratória ou investigativa pode perder o sentido. É um momento para que o conhecimento possa ser partilhado por toda a turma.

Para Oliveira, Segurado e Ponte (1996), é durante essa fase que serão postas em confronto as estratégias, conjecturas e justificativas dos alunos. O professor assume o papel de moderador, mediando conflitos e conduzindo a discussão de forma que os alunos possam aprender ainda mais com o que é dito, justificado ou refutando. Cabe ao professor enfatizar aspectos importantes do que é discutido pelos alunos e procurar motivá-los a expor seus pensamentos e suas descobertas.

Nessa etapa, dois processos são particularmente desenvolvidos: a comunicação matemática e a habilidade argumentativa. Para Oliveira, Segurado e Ponte (1996, p.8):

> O confronto das realizações dos alunos é um momento em que as interações professor-aluno e aluno-aluno podem assumir variadíssimas formas. O professor deverá, para cada situação, refletir sobre quais são os objetivos principais da discussão, qual o papel a dar aos alunos, que tipo de perguntas colocar, como exercer o seu papel de moderador e como promover uma participação generalizada dos alunos.

Ponte (2010b, p. 23), baseando-se em Bishop eGoffree[8], afirmou que “os momentos de discussão na sala de aula são muito importantes pela possibilidade que abrem de negociação de significados”. É o momento da aula em que os alunos devem ser encorajados a compartilhar ideias com seus colegas, mesmo que a tarefa tenha sido realizada individualmente. O autor ainda ressalta que em tais discussões, diferentes representações emergem e são comparadas, representações convencionais são analisadas com mais detalhes e o uso da linguagem matemática é então trabalhado e fixado.

---

[8] BISHOP, A.; GOFFREE, F.**Classroom organization and dynamics**. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education. Dordrecht: D. Reidel. 1986.

Sobre a fase de discussão, concordamos com Ponte (2010b, p. 23) quando afirma que:

> Este é também o momento em que as principais ideias relacionadas com a tarefa são clarificadas, formalizadas e institucionalizadas como novo conhecimento, daí em diante aceite como tal na comunidade da sala de aula.

Acreditamos que é importante que o professor trabalhe de forma a evitar que todos os alunos falem ao mesmo tempo no momento de socialização e discussão de resultados e por outro lado permitir que os alunos se expressem com espontaneidade, sem assumir o protagonismo da investigação. Esse movimento não é de forma alguma simples ou fácil para o professor.

De acordo com Ponte (2010b), a discussão é um momento das aulas exploratório-investigativas muito complexo para o professor. Estimular e gerir a participação dos alunos é uma das dificuldades apontadas por professores que possuem experiência limitada com esse tipo de aula. Neste estudo procuramos analisar os momentos de discussões de algumas tarefas que consideramos ricos para o desenvolvimento do raciocínio argumentativo dos alunos, sobretudo quando esses momentos foram mais dinâmicos durante a tarefa, que a fase inicial exploratória.

2.3 Tarefas Exploratório-Investigativas em Geometria

O pensamento geométrico nasce da observação e percepção sensorial do espaço. As crianças, ainda muito cedo, observam e exploram as formas e suas representações no meio em que vivem. Essa exploração muitas vezes se dá com a manipulação material dos objetos ou por imagens mentais que vão sendo construídas a partir de tais manipulações ou de suas representações.

Em nossos estudos, entendemos que a Geometria é uma área do conhecimento matemático privilegiada para o desenvolvimento e a realização de tarefas exploratório-investigativas e a possibilidade de descobertas matemáticas.

A Geometria apresenta dois aspectos que se complementam e podem se valorizados enquanto objetos de ensino e aprendizagem. Por um lado, muitas vezes, é um tipo de conhecimento que pode ser visto e manipulado concretamente, ou seja, feito com as próprias mãos. Por outro lado, exige uma justificação bem lógica das descobertas e conjecturas formuladas enquanto se observa, manipula e/ou se analisa propriedades e relações.

Temos observado, por anos, em nossa prática, que a Geometria apresenta várias situações e objetos de estudo que podem ser utilizados como fonte de explorações e investigações de elementos, propriedades e relações, como é o caso das figuras planas e espaciais, envolvendo problemas de visualização e representação.

Outro aspecto que observamos em nossa prática e é ressaltado por Ponte (2009), é que as tarefas exploratório-investigativas em Geometria possibilitam que alunos de diferentes níveis de aprendizagem se envolvam de forma efetiva, sem necessitar de pré-requisitos. Muitas vezes, alunos com dificuldades de aprendizagem em Aritmética ou Álgebra, se saem bem em tarefas de Geometria, apresentando mais interesse e compreensão.

Sendo assim, qual o motivo do insucesso dos alunos em questões de Geometria? Parece algo contraditório diante do que afirmamos que nossos alunos apresentem um baixo rendimento em questões de Geometria em avaliações externas.

Hershkovitz[9] apud Nacarato (2000, p. 191) defende que a dedutividade da Geometria tem falhado porque tem sido imposta e não reinventada, ou seja, redescoberta. Ainda segundo a autora, dois fatores podem estar por traz do insucesso dos alunos no desenvolvimento do raciocínio geométrico e sua utilização para resolução de questões e problemas: a primeira causa estaria relacionada ao fato de que se enfatiza apenas o produto final do processo de descoberta matemática, sem se preocupar com o seu processo de construção; a outra estaria ligada a própria imaturidade do aluno em sentir a necessidade de provar o que supostamente descobriu, mesmo que inconscientemente.

As hipóteses levantadas por Hershkovitz (1990) fazem todo sentido quando comparamos os resultados de avaliações externas com as avaliações que elaboramos, enquanto professores, para nossos alunos.

---

[9] HERSHKOWITZ, Rina. Psychological aspects of learning geometry. In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Ed.) **Mathematics and Cognition.** Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990. p. 70-95.

Quando avaliamos as competências e habilidades geométricas desenvolvidas pelos alunos, consideramos todo o processo vivenciado por eles, seus avanços e o envolvimento nas tarefas. Já as avaliações externas, como SARESP e prova Brasil, levam em conta apenas uma única forma de avaliação, ou seja, a solução de questões.

Concordamos também com a hipótese de que a imaturidade dos alunos pode estar por trás do insucesso quando as questões exigem provas e demonstrações formais. Os alunos não entendem a necessidade de justificar suas conjecturas. Essa postura está possivelmente relacionada com a própria concepção que eles têm da Matemática como corpo de conhecimento rígido e acabado. Muitos alunos e até mesmo professores acreditam que na Matemática as coisas são como são e não há mais nada a dizer. É uma ciência exata, em que dois mais dois são quatro e ponto final. Desta forma, por que deveriam justificar a descoberta de um procedimento ou regularidade descobertos?

Para sair deste tipo de postura e mentalidade, as tarefas exploratório-investigativas podem ser uma ótima estratégia de ensino, fazendo com que a ação pedagógica promova descobertas mais empíricas e desenvolva o raciocínio dedutivo Geométrico. Em tarefas dessa natureza, os alunos fazem descobertas, elaboram conjecturas e podem mesmo sentir a necessidade de justificá-las. Principalmente quando trabalham em grupo e confrontam suas ideias com as de outros colegas.

Outro aspecto importante é que durante o desenvolvimento de tarefas desta natureza, é comum surgirem situações para se discutir e analisar definições, favorecendo a construção de conceitos geométricos e o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, que vão sendo elaborados de acordo com as várias experiências vivenciadas ao longo do tempo.

Em seus estudos, Grando, Nacarato e Luci (2008, p. 44), salientam que o ensino de Geometria por meio de tarefas exploratório-investigativas, se vem mostrando favoráveis para minimizar algumas das “lacunas” existentes em decorrência da carência do ensino de conteúdos geométricos na educação básica.

Concordamos com essas autoras que a Geometria apresenta uma forte tendência para o desenvolvimento de um ensino voltado às explorações e investigações.

No entanto, acreditamos que esse tipo de estratégia de ensino precisa ser melhor entendida e difundida para que um número maior de professores possam se apropriar de tal conhecimento, melhorando a qualidade de suas aulas.

2.4 Exploração-Investigação e a Resolução de Problemas

Uma abordagem utilizada por vários autores que qualifica o conceito de investigação é comparar tarefas exploratório-investigativas com resolução de problemas. Essa é uma dúvida muito comum para quem entra no universo das aulas investigativas, sendo muitas vezes bastante difícil saber com certeza onde começa um tipo de estratégia e termina a outra. Por esta razão, achamos pertinente buscar algumas ideias sobre o assunto na tentativa de melhorar nosso próprio entendimento acerca dessa questão.

Separar as tarefas exploratório-investigativas da resolução de problemas é em nosso ponto de vista, geralmente algo complexo, que ocorre por duas razões fundamentais. A primeira porque o termo investigação descreve um processo que envolve a procura, a busca, a ação de investigar, de inquirir, e que faz parte tanto da resolução de problemas, quanto das tarefas exploratório-investigativas. Enquanto que a segunda razão sugere que o termo, sendo um substantivo, propicia sua utilização num sentido mais restrito, em que se identifica “a investigação” como uma situação de partida, apenas uma situação inicial para a resolução de um problema. É comum lermos em enunciados de problemas matemáticos a expressão “investigue”.

Quando entendemos a investigação por essa segunda perspectiva, como uma situação de partida da tarefa, corremos o risco de se substituir o significado da atividade investigativa por apenas uma de suas partes, o que pode modificar totalmente a proposta da investigação. É como mudar o foco de um processo voltado para quem aprende e redirecioná-lo para quem ensina. Isso porque numa resolução de problema, o professor é o protagonista, que lança a questão, que formula ou apresenta os problemas, enquanto que numa tarefa exploratório-investigativa, o professor pode ou não elaborar a situação de arranque, cabendo aos alunos formularem as questões para as quais irão buscar soluções por meio da exploração.

Oliveira, Segurado e Ponte (1996) também abordaram sobre a distinção entre Resolução de Problemas e Tarefas Exploratório-Investigativas, explicando que essa demarcação é muitas vezes pouco evidente devido ao uso indistinto dos dois tipos de atividades. Segundo esses autores, as investigações matemáticas sugerem um tipo de tarefa em que se enfatizam processos matemáticos envolvendo a procura por regularidades, a formulação, teste, justificativa e prova de conjecturas, além de promover a reflexão e generalização. São atividades de aprendizagem tendencialmente abertas:

> As atividades investigativas contrastam-se com as tarefas de tipo fechado e estruturado, que são habitualmente usadas no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que são tendencialmente abertas, permitindo que o aluno estabeleça o caminho a seguir e coloque as suas próprias questões. (OLIVEIRA; SEGURADO; PONTE, 1996, p. 2).

No problema a questão vem pronta, já se sabe o que se quer solucionar, enquanto que numa investigação as questões são "o primeiro passo" a desenvolver. Nesse caso, as questões podem ser elaboradas pelos próprios alunos.

Em nossa pesquisa de campo, percebemos que outro aspecto a considerar é que numa investigação outras questões vão sendo formuladas durante o processo, o que pode provocar inclusive, a mudança de foco da atividade. Tudo depende das descobertas que vão sendo feitas, as questões que vão emergindo na mente dos alunos. Algo que foge à linearidade e previsibilidade. Esse fato não costuma ocorrer na resolução de um problema, onde se sabe muito bem o que se quer solucionar. Este aspecto também é referido por Oliveira, Segurado e Ponte (1996), quando enfatizam que as investigações têm um caráter mais divergente que a resolução de problemas.

> Ao explorarem uma investigação, pretende-se que os alunos "explorem possibilidades, formulem conjecturas, e se convençam a si próprios e aos outros da validade das suas descobertas". Assim, uma investigação é uma atividade que envolve três processos: exploração de possibilidades, formulação de conjecturas e procura de argumentos que validem as descobertas realizadas. (PIRIE[10] apud BROCARDO, 2001, p.98)

[10] PIRIE, S**. Mathematical investigations in your classroom**. London: The Open University, 1987.

Desta forma, entendemos que uma tarefa exploratório-investigativa em Matemática pode envolver a resolução de vários problemas que vão surgindo ao longo da exploração. Não se trata de desmerecer uma ou outra estratégia de ensino, visto que não se faz Matemática sem que se formule e resolva problemas, sem que se investigue e explore situações, mas sim de demarcar alguns pontos de distinção entre ambas as estratégias para se ter mais segurança e embasamento sobre o que se faz em sala de aula com os alunos.

2.5 Tarefas e Atividades Matemáticas

Além do conceito de investigação, outro ponto importante de debate envolve a ideia do que é tarefa e do que é atividade. No Brasil, entende-se tarefa como lição de casa ou como um trabalho qualquer a ser desenvolvido que é confundido com atividade. Desse modo, tarefa e atividade podem ter o mesmo significado. No senso comum, tarefa é sinônimo de trabalho a desempenhar.

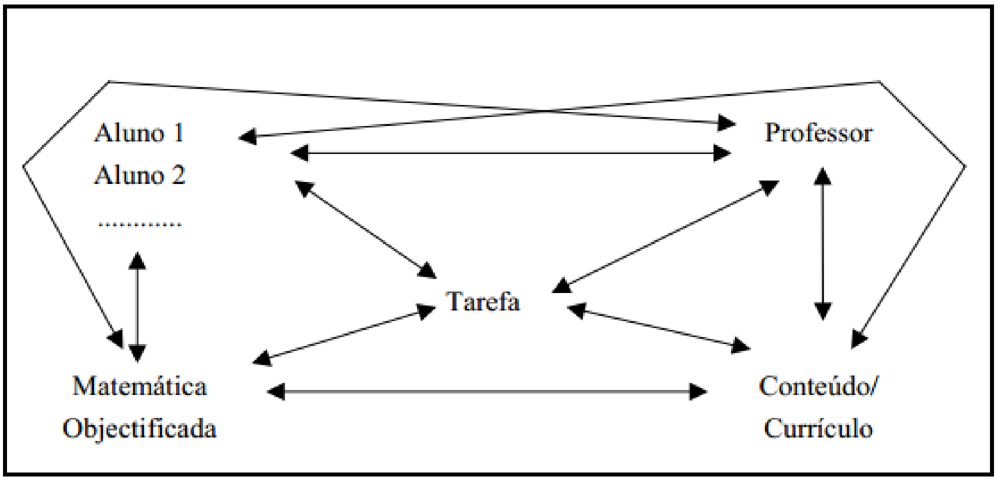
Para o desenvolvimento dessa pesquisa, consideramos o significado de tarefa referenciado por Cunha (2000). Para a autora, o termo tarefa representa a proposta de trabalho que o professor apresenta aos seus alunos, enquanto que eles se envolvem em atividades matemáticas para resolver.

É importante destacar que a tarefa em si não garante a aprendizagem por parte dos alunos, sendo necessário que se considere outros aspectos que influenciam o processo de ensino e aprendizagem como o interesse e a atenção do aluno durante a realização de atividades.

O pesquisador pode analisar e planejar com muito critério uma tarefa para explorar com um grupo de alunos, mas isso não implicará necessariamente em motivação ou comprometimento dos alunos na atividade. Para que a tarefa tenha sucesso, o aluno precisa se engajar nas atividades propostas, “comprar” a ideia, ou seja, se envolver realmente no processo, e nem sempre isso acontece como planejamos.

Pensar no conceito de tarefa também nos remete às relações que existem no desenvolvimento de uma tarefa exploratório-investigativa. Christiansen e Walther (1986) descrevem que tarefas e atividades se relacionam diretamente com conteúdos/currículo, professor/investigador, alunos e com a própria Matemática objetificada (aquela concebida por matemáticos e professores com grande formação). Essas relações são apresentadas por esses autores no diagrama indicado na figura 04**.** As relações que envolvem o conceito de tarefa aparecem explícitas neste modelo, mas o conceito de atividade fica implicitamente ilustrado, visto que faz parte das relações entre as componentes indicadas pelas setas.

Figura 04: Tarefas e Atividades



Fonte: Christiansen; Walther (1986, p. 248).

Christiansen e Walther (1986) analisam quatro relações binárias do diagrama, deixando para futuros pesquisadores analisarem as demais relações existentes. Os autores fazem as seguintes afirmações sobre as relações entre:

(1) Conteúdo/Currículo e Matemática: são domínios instituídos socialmente, mas de formas muito diferentes, havendo discrepâncias entre ambos. É preciso que os educadores responsáveis pela elaboração da Matemática Escolar (conteúdo/currículo) preocupem-se conscienciosamente com essas relações;

(2) Professor e Tarefa: o professor deve se preocupar com a identificação e a preparação de uma tarefa dando atenção para as demais relações existentes no diagrama;

(3) Tarefa e Aluno: embora seja fundamental que o professor conheça essas relações para tomar decisões sobre as atividades dos alunos, são relações para serem estudadas no contexto educativo, requerendo uma

discussão teórica do conceito de atividade para se tentar responder algumas questões;

(4) Professor e Aluno: essa é a relação que mais influencia nas relações entre tarefa e aluno(s). O professor assume diferentes papéis nos vários estágios do processo de ensino e aprendizagem, cabendo-lhe utilizar a linguagem como estratégia para iniciar, motivar e mediar todo o processo. Além disso, o grau de apoio (orientação e controle) dado ao aluno em atividade é fundamental.

No que diz respeito à atividade, Christiansen e Walther (1986, p.16) afirmam que:

> Atividade não é somente reação comportamental e adaptação a condições ambientais. Por isso, a atividade consciente e orientada para um certo objetivo de uma pessoa em ação resulta em correspondentes mudanças nas suas necessidades e intenções e nos motivos com elas relacionadas.

Estes autores ainda distinguem duas formas de atividades voltadas para o contexto educacional: a *atividade educacional* (quando os alunos trabalham como resultado de planejamento educacional) e a *atividade de aprendizagem* que ocorre quando a atividade educacional resulta na aprendizagem intencionada. No nosso estudo, podemos exemplificar essa situação quando afirmamos que uma das aprendizagens pretendidas é que os alunos desenvolvam suas habilidades de argumentação e comunicação matemática, envolvendo conceitos geométricos.

Nesse processo, é muito importante o papel da linguagem e da conexão entre alunos e professor, abrangendo processos que envolvem interpretação, argumentação, discussão, negociações, decisões sobre a atividade em desenvolvimento.

> Linguagem e ações estão 'entrelaçadas' em todo este desenvolvimento durante o qual imitação (dos alunos mutuamente e do aluno 'copiando' professor) bem como o teste (de ideias, conjecturas e linguagem e terminologia) têm papéis dominantes. (CHRISTIANSEN; WALTHER; 1986, p. 24)

A maneira como o professor interage com os alunos e as intervenções que realiza podem refletir no tipo de atividade que os alunos desenvolverão. A forma de questionar, de orientar e mediar pode interferir no andamento da tarefa, motivando ou não os alunos a realizarem atividades que promoverão aprendizagens mais ou menos consistentes.

3. O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

O raciocino matemático é apontado por muitos autores como o principal objetivo do ensino e aprendizagem em Matemática. Para Ponte (2012), raciocinar matematicamente significa compreender situações matemáticas, relacionando conceitos e procedimentos, transformando ideias em conjecturas que poderão gerar possíveis demonstrações. Não se trata apenas de memorização de tais conceitos e aplicação de técnicas operatórias, mas de relacionar os conceitos fazendo estimativas, previsões, questionamentos, procurando por regularidades, fazendo análise e síntese. Esses são pensamentos comuns de quem "faz Matemática".

É necessário perceber como esses conceitos se relacionam e como utilizá-los para resolver questões e problemas. Segundo Ponte (2012), para desenvolver a capacidade de raciocínio matemático é preciso trabalhar em tarefas que requerem raciocínio e ao mesmo tempo, estimulam o raciocínio. Só deste modo se pode esperar uma compreensão efetiva dos conceitos e procedimentos matemáticos por parte do aluno. Além disso, é necessário que se compreenda o porquê dos procedimentos funcionarem ou não em determinadas situações e não apenas utilizá-los sem qualquer compreensão. É comum observarmos em nossa prática, alunos utilizarem procedimentos para resolverem situações-problema e não conseguirem interpretar os resultados obtidos.

Mas como funciona o pensamento matemático? Como se dá o desenvolvimento desse tipo de pensamento? Em nossos estudos conhecemos a teoria de Tall (1995), que separa a atividade humana em três componentes: a percepção, o pensamento e a ação. Deste modo podemos perceber os objetos matemáticos, pensar e agir sobre eles. Segundo este autor, os objetos são percebidos à primeira vista como imagens visuais-espaciais Gestalts[11], mas em seguida, como são analisados e suas propriedades são esmiuçadas, eles são descritos verbalmente, o que leva à classificação (primeiro em coleções, em seguida, em hierarquias[12]), que corresponde ao início de uma dedução verbal

---

[11] Gestalt é um termo alemão de difícil tradução. O termo mais próximo em português seria forma ou configuração. É um fenômeno perceptivo guiado pela busca de propriedades de fechamento, simetria e regularidade que são inerentes às imagens visuais-espaciais.

relacionada com as propriedades e ao desenvolvimento sistemático de uma demonstração formal.

O autor levanta a hipótese de que o pensamento matemático começa com a "*percepção de*" e a "*ação sobre*" os objetos do mundo real e é construído por meio de dois desenvolvimentos paralelos – um que evolui do visual-espacial para o verbal dedutivo e o outro que se baseia num sucessivo capsular de processos em objetos através da manipulação de símbolos – que servem para inspirar um pensamento criativo baseado em objetos formalmente definidos e na demonstração sistemática.

O termo capsular, de acordo com Domingos (2003, p.78):

> (...) corresponde ao termo em inglês encapsulation, e refere-se à conversão de um processo dinâmico num objeto estático. Mais concretamente, a construção dos objetos matemáticos é feita pelo capsular de processos interiorizados que são coordenados de modo adequado.

Um aluno, por exemplo, pode dividir um polígono em seu número mínimo de triângulos para calcular a soma de seus ângulos internos. Esse processo pode tornar-se uma fórmula matemática que facilitará os cálculos para o aluno que já se encontra em um nível superior de raciocínio. O processo de contagem pode tornar-se adição e o processo de adições sucessivas de parcelas iguais pode tornar-se multiplicação. Esses são exemplos de processos que são capsulados em objetos matemáticos.

Segundo Tall (1995) a linguagem é o meio usado para se formular as propriedades dos objetos, mas na Matemática elementar a descrição é realizada por meio da experiência que se tem com o objeto e não construídas a partir da definição, como é o caso da Matemática avançada.

---

[12] Podemos exemplificar este processo de classificação em coleções quando os alunos, por exemplo, agrupam polígonos segundo suas propriedades específicas, como números de lados. Os agrupamentos por hierarquia requerem um raciocínio mais elaborado. É preciso que o aluno reconheça a inclusão de classes. Por exemplo, o aluno consegue perceber que o quadrado é um tipo de retângulo especial, que por sua vez, pertence ao grupo dos quadriláteros e que estes são polígonos que possuem quatro lados.

Nesse sentido, nos identificamos com Tall (1995), pois acreditamos que o raciocínio geométrico se inicia a partir da percepção das formas do mundo em que vivemos, observando, analisando e agindo sobre os objetos e representações geométricas. Percepção, ação e pensamento estão intimamente ligados à compreensão e construção de conceitos geométricos e para os alunos mais novos é muito importante a experiência com o próprio objeto, para a partir daí começarem a descrever propriedades e relações geométricas observadas por meio da linguagem materna.

Outro termo utilizado por Tall para se referir a um conceito é o termo *conceito imagem*. Em seus estudos Tall e Vinner (1981) explicam que quando ouvimos ou lemos uma palavra que representa um conceito, como por exemplo, a palavra triângulo, recebemos um estímulo e imediatamente algo surge em nossa mente. Mas o que surge não é o conceito formal de triângulo e sim algo não verbal associado ao nome do conceito de triângulo. A esse tipo de representação imediata Tall e Vinner (1981) chamam de *conceito imagem*.

De acordo com Vinner (1983, 1991), o conceito imagem é alguma coisa que não verbalizamos, mas que está associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual interna do conceito ou até uma coleção de impressões e experiências. Essas representações visuais e as impressões que temos do objeto podem ser traduzidas por formas verbais. Entretanto, as formas verbais nem sempre são a primeira coisa a surgir em nossas mentes quando pensamos, por exemplo, em um conceito geométrico.

Neste processo, são particularmente importantes, o desenvolvimento de dois tipos de raciocino matemático, o indutivo e o dedutivo. O primeiro, parte do particular para o geral, e apresenta um aspecto de criação do conhecimento. O segundo é um tipo de raciocínio mais formal, próprio da Matemática, que privilegia as demonstrações e a lógica, partindo do geral para o particular. O raciocínio dedutivo é um tipo de raciocínio que depende de um encadeamento de ideias que levem a algum tipo de conclusão que apresente um caráter de validação do conhecimento.

Em nossos estudos, nos preocupamos em analisar mais detalhadamente o processo do pensamento indutivo e sua importância na construção de conceitos matemáticos, sobretudo os figurais, visto que nosso objeto de estudo são alunos de um 7º ano do Ensino Fundamental.

Nos estudos realizados por Ponte (2010a, 2012), sobre a Matemática no Ensino Básico e o Raciocínio Matemático, o autor evidencia a estreita relação entre analogia e indução, explicando que quem induz, o faz por analogias. Em contrapartida, segundo o autor, é por meio do raciocínio indutivo que se elaboram hipóteses que posteriormente poderão ser verificadas. Nessa perspectiva, o raciocino indutivo é heurístico, desenvolvendo-se do particular para o geral, não precisando necessariamente conduzir a conclusões e demonstrações, mas sendo fundamental no processo de construção de novo conhecimento.

Ponte (2010a) ressalta que além da importância dos raciocínios indutivo e dedutivo, é também muito importante saber quais processos de raciocínio são usados nos diferentes tipos de tarefas matemáticas. Segundo o autor, quando falamos de explorações e investigações, por exemplo, temos de um lado a formulação de conjecturas sobre um objeto específico ou genérico, apoiadas numa razão e, por outro, a definição de uma estratégia para testar uma conjectura.

Ponte (2010a) acrescenta que são fundamentais para os diversos tipos de tarefas outros processos de raciocínio como o estabelecimento de relações de equivalência, ordem, pertinência, etc., entre objetos matemáticos e não matemáticos.

Concordamos com as ideias destes autores (TALL; PONTE), que para alunos no nível de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, é muito importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático, que eles tenham contato com situações de aprendizagem onde os conceitos sejam construídos a partir da experiência. Principalmente quando tratamos de conceitos geométricos, pois este é um tipo de raciocínio que se apoia nas imagens que observamos e elaboramos em nossas mentes a partir da manipulação dos objetos e suas representações, como desenhos e construções tridimensionais.

Nesta fase escolar, devemos incentivar o raciocínio argumentativo, onde o aluno precisa justificar suas conjecturas recorrendo à análise de vários casos e testes, elaborando justificativas mais informais sobre os passos dados na resolução de problemas e questões de tarefas exploratório-investigativas. Essas justificações devem evoluir para argumentações cada vez mais sólidas e complexas que poderão levar a generalizações e até mesmo contraexemplos.

3.1 O Raciocínio Geométrico

No desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas desta pesquisa, procuramos trabalhar com a construção geométrica, utilizando instrumentos de medida, aliado a manipulação de materiais concretos para que os alunos pudessem perceber algumas propriedades e relações dos objetos estudados. Valorizamos as três componentes da atividade humana descritas por Tall (1995), "o perceber", "o agir" e o "pensar sobre", para que raciocínio indutivo fosse sendo elaborado pelos alunos enquanto se envolviam nas atividades das tarefas.

Percebemos outro aspecto que apareceu nas argumentações dos alunos enquanto discutiam suas conjecturas ou quando eram questionados durante as discussões em grande grupo, a intuição. Alguns alunos costumam fazer afirmações bem prematuras, baseados apenas em suas intuições, antes mesmo de realizar qualquer tipo de teste e ou analisar outros casos. Muitas vezes as ideias que apresentavam eram infrutíferas ou triviais, mas algumas vezes eram verdadeiras, precisando de apenas alguns testes para serem comprovadas e justificadas. Para alguns autores, como Fischbein (1993) e Pais (1996), a intuição faz parte do processo de invenção matemática.

Fischbein (1993) afirmou que durante o processo de invenção somos basicamente inspirados principalmente por intuição e não por explícitas cadeias lógicas de argumentos. Se, em suas pesquisas, os matemáticos buscassem constantemente por justificativas analíticas formais, como teoremas e definições, o fluxo de ideias produtivas seria perturbado ou até inibido.

Todavia, segundo Fischbein (1993), é recorrendo principalmente a figuras intrinsecamente controladas por restrições conceituais que o processo de invenção em Geometria pode progredir criativamente. Para este autor, durante o processo de construção dos conceitos geométricos, chamados por ele de conceitos figurais, as propriedades conceituais e imaginativas interagem constantemente. Neste estudo assumiremos a definição *conceito figural*, criada por Fischbein, (1993) para designar conceitos e figuras geométricas, como o conceito figural de ângulo, paralelismo, perpendicularismo e figuras geométricas como triângulo, quadrado, e outros polígonos.

Concordamos que a intuição é parte fundamental no processo de construção dos conceitos figurais. Sobre isso, Pais (1996, p. 72) diz que:

> A intuição é uma forma de conhecimento imediato que está sempre disponível no espírito das pessoas e cuja explicação não requer uma dedução racional guiada por uma sequência lógica de argumentos deduzidos uns dos outros. Se pensarmos nos axiomas euclidianos, nos deparamos com conceitos primitivos que podem ser aceitos com base nesta forma de conhecimento intuitivo. Mas quando trata-se de teoremas, necessitamos do raciocínio dedutivo, pelo fato de não ser evidente esse segundo tipo de raciocínio não pode jamais ser obtido pela intuição.

Ainda de acordo com Pais, a intuição só leva a novas descobertas quando existem conhecimentos prévios suficientes para impulsionar a imaginação. Para o autor:

> Um conhecimento baseado somente na intuição caracteriza-se, antes de tudo, por uma funcionalidade quase imediata quando comparada com o desenvolvimento necessário de uma sequencia dedutiva do raciocínio lógico. Mas esta disponibilidade é evidentemente relativa ao conjunto de conhecimentos já acumulados pelo sujeito. O que pode ser intuitivo e evidente para uma pessoa pode não o ser para outra.

Além da intuição, outros elementos fundamentais e indissociáveis do raciocínio geométrico são a visualização e a representação. Os conceitos geométricos apresentam duas dimensões, os aspectos conceituais e figurais. Sobre estes últimos, concordamos com Fischbein (1993), que são dotados de propriedades visuais/espaciais e que as imagens geométricas são elaboradas mentalmente. Dessa forma, acreditamos que o processo de visualização é muito importante para a construção das imagens mentais.

Com base nos trabalhos de Fischbein (1987), em seus estudos sobre a visualização geométrica, Hershkowitz (1990, p. 75) “afirma que a visualização, geralmente se refere à habilidade para representar, transformar, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre informação visual”.

Nesse sentido, podemos falar em representação visual. O aluno representa o que imagina e elabora imagens visuais/mentais a partir do que observa.

Segundo Fischbein (1987), as representações visuais contribuem para a organização de informação em representações sinóticas (resumidas, sintéticas) e constituem, portanto, um fator importante para a globalização da informação. Por outro lado, essas representações fornecem concretude às imagens visuais, sendo um fator essencial para a criação do desenvolvimento analítico de uma solução.

Assim como os autores citados neste item, entendemos que tanto a percepção e observação do espaço, a ação, a intuição e os processos de visualização e representação visual são importantes para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, devendo o Ensino de Geometria contemplar todos estes aspectos. Dessa forma, acreditamos que o uso de alguns materiais manipuláveis e modelos concretos, como desenhos e dobraduras, podem contribuir para a visualização e construção de imagens mentais, sendo, portanto, adotados em alguns momentos das tarefas exploratório-investigativas desta pesquisa de campo.

3.2 Conceito Imagem e Conceito Figural

Segundo Fischbein (1993), a Geometria lida com entidades mentais que possuem simultaneamente características figurais e conceituais. Essas entidades mentais são usualmente chamadas de figuras geométricas.

As teorias cognitivas defendem a existência de dois tipos distintos de entidades mentais: os conceitos e as imagens. Há um forte indício de que no caso das figuras geométricas essas entidades se integrem totalmente, formando o que Fischbein (1993) chama de conceito figural.

Mas o que é conceito? E o que vem a ser imagem mental?

Para Fischbein (1993) o que caracteriza um conceito é o fato de que expressa uma ideia, uma representação ideal de uma classe de objetos, baseada em seus aspectos comuns. Conceitos apresentam as propriedades inerentes de idealidade, abstração, perfeição absoluta e universalidade. Os objetos dos quais a Geometria trata – pontos, lados, ângulos, polígonos e as operações com eles – possuem uma existência unicamente ideal. São entidades que não existem concretamente. Pontos, lados, retas paralelas, quadrados e triângulos, por exemplo, são entidades totalmente abstratas. Mesmo os desenhos dessas figuras, não passam de representações concretas, sendo, portanto, materiais.

No universo da idealidade existe perfeição absoluta das entidades geométricas, como retas, quadrados, cubos, esferas. E em terceiro lugar, porque todas essas construções são representações universais, como cada conceito, e nunca cópias mentais particulares de objetos concretos. Quando falamos em um hexágono, por exemplo, não nos referimos a um desenho ou imagem mental específica, mas a certo formato que pode ser o formato de uma infinita classe de objetos.

Para clarear a ideia de universalidade, pensemos, por exemplo, em um triângulo regular. A imagem que nos vem à mente é uma imagem totalmente controlada pela definição de triângulo equilátero, que é universal: triângulo que possui os três lados de mesma medida, ou seja, congruentes. Também possui os três ângulos congruentes, medindo 60° cada, sendo, portanto, um triângulo regular. Não importa se pensamos em um triângulo grande ou pequeno, se ele tem preenchimento, ou se é apenas uma linha poligonal. O que realmente importa é que todos fazem parte de uma classe de objetos que possuem propriedades comuns.

Mesmo não sendo uma tarefa fácil, Fischbein (1993) define imagem mental como uma representação sensorial de um objeto ou fenômeno. Essas imagens são criadas internamente a partir das percepções sensoriais das propriedades e relações espaciais.

A imagem projetada em nossas mentes ao pensarmos em um triângulo regular é dotada de propriedades sensoriais, como cor, textura, brilho, entre outras. Entretanto, quando estamos operando com as propriedades de um triângulo regular num problema geométrico, nos preocupamos apenas com suas propriedades espaciais, como forma, magnitude e posição. É esse tipo de imagem pensada o objeto genuíno de estudo da geometria que, segundo Fischbein (1993), não percebemos sensorialmente, ou seja, é uma imagem abstrata, totalmente diferente de um desenho projetado em um papel, já que o desenho é um tipo de materialização, uma representação concreta do conceito figural.

De acordo com Gomes e Ralha (2005), os conceitos matemáticos não são, em regra geral, passíveis de serem deduzidos a partir da sua forma ou do seu material. O significado dos conceitos matemáticos tem que ser construídos pelo indivíduo em interação com contextos baseados na experiência ou em referências abstratas. As definições são, neste sentido, centrais na descrição e na análise do ensino da

Matemática e, por outro lado, a representação é um meio de ligação fundamental na codificação e na compreensão dos conceitos matemáticos.

As figuras geométricas possuem atributos conceituais e figurais, compondo outro tipo de entidade mental. Essas entidades possuem todas as características dos conceitos, mas não são simples conceitos, pois incluem a representação mental da propriedade espaço.

Fischbein (1993) argumenta que as figuras geométricas não podem ser consideradas conceitos puros ou figuras comuns. Segundo ele, entidades como pontos, ângulos, retas, polígonos e as operações que realizamos com elas, possuem qualidades conceituais. Não são meros desenhos ou objetos materiais, visto que esse tipo de representação é apenas um modelo materializado das entidades mentais com as quais o matemático lida. Um segundo aspecto a considerar é que apenas num senso conceitual podemos considerar a perfeição absoluta das entidades geométricas. Essas entidades não possuem correspondentes materiais verdadeiros. Os objetos da nossa realidade são tridimensionais, embora objetos como uma esfera ou um cubo, evocados pelo matemático, não existam na realidade. Não encontramos no mundo real uma esfera perfeita.

Outra propriedade conceitual das figuras geométricas é que são representações universais e nunca cópias mentais particulares de objetos concretos. Além disso, as propriedades das figuras geométricas são impostas ou derivadas de definições e axiomas próprias da Matemática.

> Um quadrado não é uma imagem desenhada numa folha de papel. É um formato controlado por sua definição (embora possa ser inspirado por um objeto real). Um quadrado é um retângulo que possui lados iguais. Começando dessas propriedades podemos prosseguir para descobrir outras propriedades do quadrado (a igualdade de ângulos que são todos ângulos retos, a igualdade das diagonais, etc.) (FISCHBEIN, 1993, p.141). Tradução nossa.

Além das propriedades conceituais, as entidades geométricas possuem propriedades espaciais, como forma, magnitude, posição. A forma se refere aspecto da figura, a configuração ou molde, se são triangulares, curvas, poligonais, se são linhas retas, entre outros. Já a magnitude nos remete ao tamanho, extensão da figura, se é que a mesma possui tamanho, enquanto que a posição está relacionada ao modo que visualizamos os elementos das figuras, sua colocação no espaço, se o vértice do triângulo está voltado para baixo ou para cima, por exemplo.

Não são simples imagens mentais, dotadas de propriedades sensoriais, mas ao contrário disto, são imagens “pensadas”, imagens que exigem um esforço intelectual para serem imaginadas e operadas em nossa mente. Para Fischbein (1993), somente quando nos referimos a imagens, podemos considerar operações como girar, reverter e sobrepor. É o que fazemos ao operar as figuras geométricas, inclusive quando utilizamos as transformações envolvendo simetrias, translações e homotetias.

Segundo Fischbein (1993, p.143), a fusão das propriedades — conceituais e figurais — expressa somente um ideal, situação extrema em geral não alcançada em absoluto devido a limitações psicológicas. Entretanto, é desejável que o professor promova situações em que sejam trabalhados ambos os aspectos das entidades geométricas e que imagens e conceitos se interajam intimamente.

Concordamos com Fischbein (1993) que as figuras geométricas são entidades próprias, com características conceituais e espaciais e que muitas vezes as características figurais dessas entidades podem escapar ao controle conceitual, provocando conflitos e contradições. Para ele, muitos dos erros dos alunos no raciocínio geométrico podem ser explicados devido a essa ruptura entre os aspectos figurais e os conceituais do conceito figural.

Um aluno pode acreditar que a altura de um dado triângulo é sempre o segmento que liga o ponto médio de sua base ao vértice oposto. Isso pode acontecer, por exemplo, em virtude de visualizações anteriores de alturas de triângulos acutângulos apenas, mesmo conhecendo a definição de altura de um triângulo e sabendo que cada triângulo possui três alturas relativas às suas bases.

Outro tipo de situação comum de ocorrer é o aluno acreditar que precisa de várias verificações empíricas mesmo estando diante de uma demonstração matemática em consequência dos aspectos figurais dominantes num conceito figural.

Além das questões didáticas no que se refere ao trabalho com os conceitos figurais em sala de aula e os problemas cognitivos que podem surgir de algumas intervenções e práticas, temos que levar em conta que as figuras possuem características próprias e que são controladas por forças Gestalts. Essas características, ou propriedades, conduzem o pensamento quando observamos as figuras de forma imediata e intuitiva, sendo de difícil controle e análise, visto que é uma percepção mental e sensorial. O componente conceitual pode também provocar falácias lógicas. Como exemplo, podemos pensar na afirmação que fazemos quando dizemos aos nossos alunos que todo quadrado é um quadrilátero que possui os quatro lados de mesma medida. Se não ficar claro que para ser quadrado, o quadrilátero também precisa ter os ângulos retos, os alunos poderão imaginar que todo losango é também um quadrado. Outro erro comum que ocorre com os alunos menores é pensar que todo quadrilátero que tem ângulos retos é um quadrado.

Essa tensão entre os componentes figurativos e conceituais de um conceito figural vai se transformando ao longo do tempo de acordo com as instruções que o aluno vai recebendo e sua respectiva idade. Nesse processo, o componente figural vai aos poucos cedendo espaço às propriedades e definições conceituais, se aproximando cada vez mais de uma simbiose entre ambos. No entanto, o componente figurativo nunca deixa de existir numa entidade geométrica, mesmo que totalmente controlado por conceitos.

Nesse processo, é fundamental que o professor proponha questões que integrem ambos os aspectos desse tipo de entidade mental, favorecendo a fusão entre eles. Segundo Fischbein (1993), esse processo não é algo natural e espontâneo, necessitando de instrução contínua para que se avance na construção dos conceitos figurais.

3.3 A imagem mental e a visualização no raciocínio geométrico

Considerando que a Geometria tem como objeto de estudo os conceitos figurais e concordando com Fischbein (1993) sobre sua afirmação de que as propriedades conceituais devem controlar os aspectos figurais de um conceito figural, podemos levantar a seguinte questão: *qual o papel da imagem mental no raciocínio geométrico?*

Acreditamos que os aspectos visuais/figurais não devem se sobrepor aos conceituais, concordamos com Nacarato (2000) quando diz que se o conceito figural tem suas propriedades conceituais e figurais e estas últimas são decorrentes de imagens visuais/mentais, a visualização pode ser considerada como uma habilidade espacial necessária à formação desse conceito. Entretanto, como descrito anteriormente, não é nada fácil definir formalmente uma imagem mental. PAIS (1996) salienta que o indivíduo tem uma imagem desse tipo quando é capaz de enunciar de forma descritiva, propriedades e elementos de um objeto ou desenho na ausência destes. O autor salienta que a formação de imagens mentais é consequência quase que exclusiva do trabalho com desenhos e objetos, dado que os conceitos geométricos são entidades puramente abstratas e, portanto, estranhas à percepção sensorial humana. Desse modo, para os interesses do ensino e aprendizagem de Geometria, os objetos e os desenhos podem estimular a formação mental de boas imagens. Imagens essas que devem ser associadas a conceitos, teoremas e noções geométricas fundamentais.

Ao estudar as propriedades figurais e o papel da imagem na formação do conceito figural, Fischbein (1993) considera a figura geométrica como uma imagem visual, uma imagem não percebida sensorialmente, mas pensada e representada materialmente. Além disso, o curso do processo de raciocínio é determinado essencialmente por construções conceituais (simbolizadas ou mediadas por meios imaginários) ou vice versa. É como um jogo no qual redes conceituais ativas interagem com fontes imaginativas.

Por esse motivo, o processo de visualização se torna essencial à construção dos conceitos figurais, pois quando o aluno representa uma imagem visual, ele está lidando diretamente com os aspectos e propriedades figurais destes conceitos.

Nessa mesma perspectiva, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997, p. 127):

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades.

Dessa forma, podemos supor que o raciocínio geométrico se constrói a partir da visualização, da observação das formas e do espaço ao redor. Essa visualização gera pensamento e estruturas mentais dotadas de propriedades que aos poucos vão sendo percebidas e enunciadas. São as imagens mentais, que quando agregadas a conceitos geométricos, formam os conceitos figurais. Concordamos com Fischbein (1993) que não há como dissociar os aspectos conceituais dos figurais em uma figura geométrica e que é por meio da construção de imagens mentais, que o aluno consegue realizar operações com as figuras geométricas, como rotacionar, girar, reverter, transformar, entre outras.

PARTE II : PERCURSO METODOLÓGICO

4. Escolha da metodologia de pesquisa

Este trabalho surgiu do interesse inicial em analisar as contribuições ao desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos de 7º anos do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede estadual, situada no município de Pilar do Sul (SP), por meio de tarefas exploratório-investigativas.

A pesquisa tem também como meta, contribuir com uma proposta para se trabalhar o ensino de Geometria neste ano/série de escolaridade, integrada ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo e que possa ser utilizada por outros professores e pesquisadores.

Para responder a questão *“Que saberes geométricos são gerados e mobilizados por meio de tarefas exploratório-investigativas pelos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental na construção de mosaicos?”*, norteadora desta pesquisa, optamos por uma abordagem de natureza qualitativa na modalidade de estudo de caso; pois pretendemos analisar e compreender com profundidade os processos educacionais vivenciados em uma sala de aula específica de um 7º ano do Ensino Fundamental. Essa turma pode ser caracterizada como tendo características próprias bem pontuais que descrevemos mais adiante.

Para tanto, procuramos destacar o valor das atividades elaboradas e desenvolvidas pelos alunos e salientar os saberes matemáticos mobilizados por eles durante todo o trabalho. Nessa perspectiva, o processo vivenciado pelos próprios alunos e o percurso teórico-metodológico em que se estruturou esse trabalho, se mostra muito mais importante que a elaboração de qualquer produto final. Essa ideia está entrelaçada com a definição de investigação qualitativa que adotamos após leituras e estudos teóricos para construção deste referencial. Segundo Lüdke (1986, p. 18), “o estudo qualitativo [...] é o que se desenvolve numa situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada”.

Concebemos que uma investigação de cunho qualitativo leva em conta o ser humano como agente do mundo em que vive como ser interpretativo e atuante e não apenas como ser passivo. Segundo Oliveira (2008, p. 3) o estudo da experiência humana deve ser feito, entendendo que as pessoas interagem, interpretam e constroem sentidos. Já para Coutinho (2008, p. 7) a abordagem qualitativa:

> (...) defende uma lógica indutiva no processo da investigação; os dados são recolhidos não em função de uma hipótese predefinida que há que pôr à prova, mas com o objetivo de, partindo dos dados, encontrar neles regularidades que fundamentem generalizações que serão cada vez mais amplas.

Essa é uma característica presente em nosso trabalho e pode ser observada a partir da formulação da questão norteadora, que não pretende provar nenhum tipo de hipótese inicial, mas sim de analisar os fenômenos ocorridos no contexto de uma sala de aula de uma escola pública estadual, repleta de dificuldades, como o número excessivo de alunos, a falta de materiais didáticos e o pouco interesse em estudar por parte de alguns alunos, e que mesmo assim, se envolvem em atividades matemáticas visando descobertas geométricas por meio de tarefas exploratório-investigativas.

Em nossa pesquisa, adotamos o papel de pesquisadora e ao mesmo tempo de professora, participando da seleção, adaptação e elaboração de todas as tarefas e aplicação das mesmas com a turma do 7º ano. Para André (2002), quando o pesquisador é o principal responsável pela produção e análise das informações, isso envolve alguma vantagem, que está diretamente relacionada à maior experiência e sensibilidade.

Entendemos que o duplo papel, professora/pesquisadora, pode provocar certa passionalidade na análise das informações, devido ao envolvimento com a turma. Por isso mesmo, optamos por utilizar várias técnicas para coleta de dados, como a gravação de áudio e de vídeo, fotografias, registros escritos dos alunos acerca de suas conjecturas, testes e descobertas, relatórios descritivos sobre as experiências vivenciadas e anotações pessoais da professora em diário de bordo. Além do que, segundo Ludke (1986, p. 12) “o pesquisador deve, atentar para o maior número de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para melhor compreensão do problema que está sendo estudado”.

4.1 Por que o estudo de caso?

De acordo com Ponte (2006), o estudo de caso é caracterizado por estudar uma situação muito particular que pode envolver uma pessoa, um programa, uma instituição ou qualquer entidade social. O pesquisador se debruça sobre uma situação bem específica que se supõe ser única ou especial, mesmo que apenas em alguns aspectos. Segundo o autor, o pesquisador procura descobrir o que há de mais essencial e característico nessa situação e que pode contribuir para a compreensão global de certo fenômeno de interesse. Essa é uma característica que permeia toda a nossa pesquisa, visto que foi realizada com uma turma específica de 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual com aspectos próprios, possibilitando um maior aprofundamento acerca da geração e mobilização dos saberes geométricos produzidos pelos alunos em suas atividades matemáticas.

Yin (2001, p.32) descreve as características relevantes do estudo de caso:

> Um estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos. Complementa que “a investigação de um estudo de caso enfrenta uma situação tecnicamente única em que haverá muito mais variáveis de interesse do que pontos de dados, e, como resultado, baseia-se em várias fontes de evidências com os dados precisando convergir em um formato de triângulo, e, como outro resultado, beneficia-se do desenvolvimento prévio de proposições teóricas para conduzir a coleta e a análise de dados.

Neste trabalho, nos preocupamos com os aspectos citados anteriormente desde o seu início, pois o estudo a todo o momento visou à descoberta de novos elementos que podiam surgir por meio do processo investigativo, se preocupando em retratar os fatos como ocorreram verdadeiramente por meio de diversas fontes de informação, tais como transcrições de áudio e vídeo, trechos de registros escritos e fotografias de alguns momentos do processo. Preocupamos-nos também, em destacar diferentes tipos de situações que ocorreram com o que podemos chamar de subcasos, quando analisamos mais detalhadamente o processo de algum aluno em especial ou grupos diferentes dentro da turma.

Procuramos analisar como os alunos estavam aprendendo, ou não, para selecionar e/ou elaborar as próximas tarefas e planejar como seriam exploradas e gerenciadas. De fato, a questão da pesquisa, como já referido, focou-se nos aspectos da aprendizagem dos conceitos figurais por meio das tarefas exploratório-investigativas em alunos de um 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual.

Além disso, a sala de aula é o ambiente natural de nosso estudo e o contexto no qual obtivemos a produção de informações, onde os alunos e a professora-pesquisadora assumiram papéis únicos e centrais no processo.

O aspecto mais importante para a escolha desta turma como estudo de caso foi o fato de serem alunos desta professora-pesquisadora desde o ano letivo anterior, o que possibilitou um maior entrosamento entre os protagonistas da pesquisa. A professora conhecia bem seus alunos, suas limitações e potencialidades, e isto foi essencial na elaboração e gestão das tarefas.

A maior preocupação em nossos estudos sempre foi com o processo de ensino e aprendizagem e como ele se dava. Muito mais importante que "quantos", "quem" ou "onde", nossas inquietações buscaram respostas ao "como" e aos "porquês". Sobre essa tendência, Yin[13] apud André (2002, p. 51) afirmou que "deve ser dada preferência a metodologia de estudo de caso quando: as perguntas da pesquisa forem do tipo "como" e "porquê" e/ou quando o pesquisador tiver pouco controle sobre aquilo que acontece ou pode acontecer no desenrolar dos fatos".

Outro aspecto importante para a escolha dessa modalidade de pesquisa é a questão do produto final esperado. Num estudo de caso, o "produto final" é a própria descrição dos casos analisados. Segundo Merriam[14] apud Brocardo (2001, p. 195*),* "intimamente relacionado com a natureza das questões, o produto final deverá constituir essencialmente uma descrição detalhada e uma interpretação dos fenômenos estudados".

Deste modo, pretendemos, por meio de análise sistemática do cruzamento das informações coletadas, mostrar que mesmo em uma sala de aula numerosa do Ensino Fundamental II, de uma escola pública estadual, quando os alunos se envolvem nas tarefas, é possível que eles aprendam Matemática, fazendo Matemática.

4.2 Instrumentos para a produção de informações

Seguindo a recomendação de Yin (2001, p.107) utilizamos algumas diferentes fontes para a produção de informações e posterior triangulação das

[13] YIN, R. K. **Case Study Research**: design and methods. London: Sage, 1988.

[14] MERRIAM, S. **Case study research in education**: a qualitative approach. S. Francisco: Jossey Bass Publishers, 1988.

mesmas, o que nos propiciou uma compreensão mais profunda e global do que acontecia durante o processo de realização das tarefas. Procurando valorizar o caráter descritivo do trabalho, utilizamos os seguintes instrumentos: (1) observação participante da professora-pesquisadora por meio de anotações pessoais; (2) audiogravação das discussões em grupos, duplas e da turma; (3) vídeos com alguns trechos de apresentações dos alunos; (4) registros escritos das produções dos alunos; (5) fotografias; (6) relatórios individuais. Organizamos essas fontes de informações em três grupos principais:

Quadro 03: Instrumentos para produção e descrição das informações

Instrumentos para produção e descrição das informações	**Descrição**
Observação participante	• Anotações que a professora-investigadora realizou durante as aulas quando da observação direta de acontecimentos considerados importantes para análise.
Áudio e vídeo gravação	• Gravação de áudio das discussões em grupos ou duplas de alunos, bem como da introdução das tarefas e discussão final das mesmas. • Trechos de filmagens de apresentações de alunos para a socialização e discussão de conjecturas feitos por câmera digital.
Documentos	• Registros contendo as estratégias utilizadas pelos alunos para testar suas conjecturas; • Elaboração de relatos escritos em forma de pequenos textos sobre as descobertas realizadas (individualmente, em pares ou grupos); • Relatórios sobre as impressões que os alunos tiveram das aulas. • Fotografias digitais de vários momentos importantes das aulas que documentaram as produções dos alunos e a disposição física dos grupos.

Fonte: Arquivo da pesquisadora

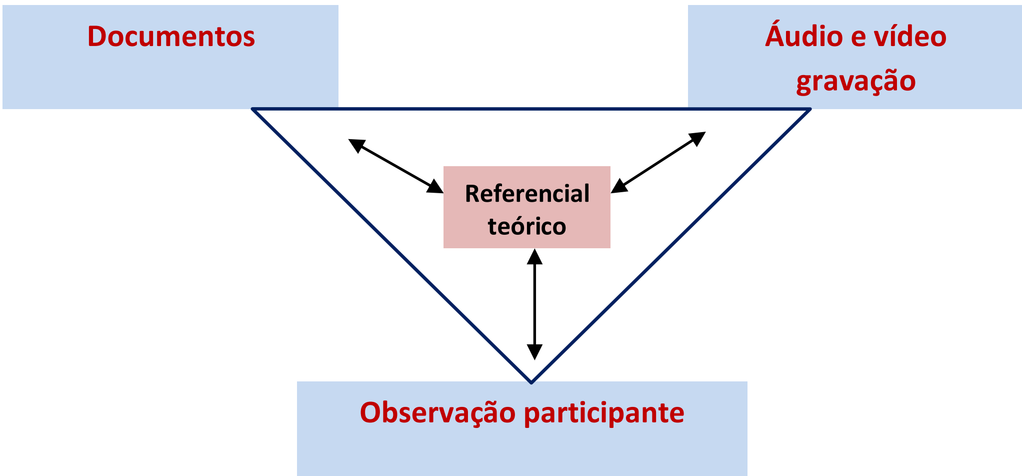
4.3 A triangulação como técnica de análise

Para análise da produção de informações, optamos pela técnica de triangulação como recomenda Martins (2008, p. 80): “a convergência de resultados advindos de fontes distintas oferece um excelente grau de confiabilidade à pesquisa, muito além de pesquisas orientadas por outras estratégias”.

Martins (2008) descreve quatro tipos de triangulação: (1) a triangulação de pesquisadores, a qual avaliadores distintos colocam suas posições sobre as descobertas do estudo; (2) a triangulação de teorias, que envolve a leitura dos dados por pontos de vistas de diferentes teorias; (3) a triangulação metodológica, que trabalha com diferentes abordagens metodológicas para conduzir uma pesquisa e a (4) triangulação de fontes de dados, que preconiza o uso de várias fontes de dados de modo a obter uma descrição mais detalhada e completa dos fenômenos, sendo esta a alternativa mais utilizada pelos investigadores e adotada por nós nesse estudo.

A escolha pela triangulação dos dados produzidos para a análise se deu também pela possibilidade que a professora-pesquisadora encontrou em dispor de vários instrumentos para a produção de informações, durante o trabalho de campo. Essas diferentes fontes de informações podem trazer maior clareza à análise e sobre o que realmente aconteceu durante a aplicação das tarefas (Figura 05).

Figura 05: Triangulação de dados



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Em um vértice do triângulo analisamos os documentos produzidos durante a realização das tarefas e relatórios sobre as impressões que os alunos tiveram desse tipo de aula. Em outro vértice, contamos com a análise feita acerca das transcrições de áudio e vídeo e no terceiro vértice do "triângulo", utilizado como esquema, as anotações da observação participante da professora-pesquisadora.

4.4 Caracterização da Escola

Entendemos como fundamental a caracterização da turma em que essa pesquisa foi realizada para que se compreenda melhor a análise das informações e evolução dos resultados obtidos. Sobre isso Brocardo (2001) explica que esse tipo de estudo de caso constitui uma referência central para analisar o modo como um currículo, em que tarefas de natureza investigativa são encaradas como metodologia privilegiada, influencia a forma como os alunos aprendem e veem a Matemática.

As tarefas desenvolvidas foram aplicadas em uma escola estadual, onde a professora-pesquisadora atua há nove anos. A escola, com mais de 50 anos, se situa no centro do município de Pilar do Sul, interior de São Paulo, sendo considerada por toda a comunidade local como uma boa escola. Seu público, que inclui alunos do 6°ano do Ensino Fundamental à 3ª série do Ensino Médio, vem se modificando ao longo dos anos e atualmente é bastante misto, se dividindo entre alunos da zona urbana e alunos da zona rural, o que muitas vezes nos dá a impressão de trabalharmos em duas escolas diferentes, principalmente, porque os alunos são geralmente separados desde que veem para a escola no 6º ano em turmas previamente formadas na escola anterior: há uma tendência observada em separar alunos do sítio e da cidade em turmas distintas, mas isso não é regra.

Quanto aos professores, muitos que lecionam atualmente foram alunos da própria escola e, em sua maioria, foram efetivados por concurso público; o que reflete um maior comprometimento com a proposta pedagógica da escola.

Atualmente a escola funciona em dois turnos, manhã e tarde, tendo um total de 12 salas e 24 turmas, sendo 13 de Ensino Fundamental II. As turmas de 6º e 7º anos possuem, em média, 36 alunos. Fisicamente a escola possui uma biblioteca, um laboratório de ciências, cozinha, sala de coordenação, sala da mediação (onde fica uma professora encarregada de mediar conflitos entre alunos-alunos, alunosfuncionários e aluno-professor, para atender e tentar resolver tais conflitos), sala multimídia, quadra de esportes coberta, sala da direção, sala dos professores, sala em que funciona o C.E.L. (Centro de Estudos de Línguas), secretaria e uma pequena sala onde funciona o Acessa Escola, com sete computadores, onde os alunos podem fazer pesquisas escolares na internet no contraturno. Não temos laboratório de informática por não haver espaço físico para sua constituição. Para a formação de um laboratório de informática a escola teria que fechar duas salas de aula, uma no diurno e outra no vespertino, o que é inviável para a demanda da comunidade.

4.5 Avaliações externas: A escola e os resultados do SARESP - 2012

O SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) é realizado anualmente e consideramos pertinente destacar os resultados das provas de Matemática referentes ao Relatório de 2012 (é o último que tivemos acesso) como forma de situar o rendimento da escola diante dos resultados gerais do Município e do Estado além de comparar esses índices com os considerados satisfatórios ou adequados.

Na tabela a seguir, observamos a distribuição dos alunos nos níveis de proficiência de Matemática por ano/série referentes às escolas estaduais.

Tabela 02

SARESP 2012 – Distribuição dos Alunos nos Níveis de Proficiência de Matemática por ano/série – Rede Estadual

CLASSIFI-CAÇÃO	NÍVEL	REDE ESTADUAL				RMSP				RMBS				RMC				RMVale				INTERIOR			
		5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM
Insuficiente	Abaixo do Básico	27,9	37,6	36,6	55,8	30,3	41,5	41,1	60,8	35,3	39,0	38,9	58,1	23,8	34,1	31,1	50,6	24,9	34,6	34,8	51,1	20,0	33,1	31,4	50,2
Suficiente	Básico	35,4	40,8	53,2	39,4	36,5	40,4	51,5	35,8	35,7	42,3	53,6	39,1	33,1	42,0	56,9	43,6	35,6	41,7	53,3	43,2	32,1	40,8	54,9	43,1
	Adequado	27,1	18,9	9,1	4,5	25,5	16,2	6,9	3,2	23,5	16,8	6,8	2,8	29,4	20,8	10,7	5,5	29,2	20,6	10,3	5,4	32,1	22,2	12,1	6,2
Avançado	Avançado	9,7	2,7	1,0	0,3	7,7	1,9	0,6	0,2	5,5	1,9	0,7	0,0	13,8	3,0	1,2	0,3	10,3	3,1	1,6	0,4	15,8	3,8	1,5	0,5

Fonte: Resultados gerais do SARESP 2012 - site da FNDE.

As siglas na tabela 02, RMSP, RMBS, RMC e RMVale se referem, respectivamente a Região Metropolitana do Estado de São Paulo, Região Metropolitana da Baixada Santista, Região Metropolitana de Campinas e Região Metropolitana do Vale do Paraíba e Litoral Norte.

Destacamos na tabela 03 as informações referentes às escolas do interior do Estado de São Paulo:

Tabela 03 : Interior

INTERIOR			
5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM
20,0	33,1	31,4	50,2
32,1	40,8	54,9	43,1
32,1	22,2	12,1	6,2
15,8	3,8	1,5	0,5

Fonte: Resultados gerais do SARESP 2012 - site da FNDE.

Segundo esse documento, os níveis são caracterizados da seguinte forma:

Nível abaixo do básico: os alunos demonstram domínio **insuficiente** dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para o ano/série escolar em que se encontram;

Nível básico: os alunos demonstram domínio **mínimo** dos conteúdos, competências e habilidades, mas possuem as estruturas necessárias para interagir com o currículo do ano/série subsequente;

Nível adequado: os alunos demonstram domínio **pleno** dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para o ano/série escolar em que se encontram;

Nível avançado: os alunos demonstram domínio dos conteúdos, competências e habilidades acima do esperado para o ano/série em que se encontram.

Para o 7º ano, a média precisa atingir o mínimo de 250 pontos para ser considerado como nível adequado de proficiência (tabela 04).

Tabela 04: Níveis de proficiência

MATEMÁTICA

	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM
Abaixo do Básico	< 175	< 200	< 225	< 275
Básico	175 a < 225	200 a < 250	225 a < 300	275 a < 350
Adequado	225 a < 275	250 a < 300	300 a < 350	350 a < 400
Avançado	≥ 275	≥ 300	≥ 350	≥ 400

Fonte: Resultados gerais do SARESP 2012 - site da FNDE.

Quanto aos resultados da nossa escola nesse sistema de avaliação, separamos apenas as notas referentes à disciplina de Matemática para obtermos maior clareza em nossas análises (tabela 05). Assim, é fácil compreender que embora as médias dos níveis de proficiência da escola estejam acima das médias estaduais e municipais, ainda está longe de atingir o nível adequado em qualquer que seja o ano ou série de escolaridade avaliado.

Tabela 05: Médias do SARESP 2012

MÉDIAS DO SARESP 2012

INSTÂNCIAS	MATEMÁTICA			
	5º EF	7º EF	9º EF	3ª EM
REDE ESTADUAL	207,6	215,4	242,3	270,4
INTERIOR	221,2	220,9	248,9	276,7
DIRETORIA DE ENSINO	223,1	222,5	248,8	274,4
MUNICÍPIO – ESCOLAS ESTADUAIS	-	224,0	255,5	284,3
ESCOLA		**241,0**	**271,1**	**303,1**

Fonte: Resultados gerais do SARESP 2012 - site da FNDE.

Em análise mais detalhada temos a distribuição percentual dos alunos dos 7º anos por nível de proficiência na tabela 06, o que reforça nossa conclusão de que muito há ainda que se fazer para que os níveis de aprendizagem em Matemática cheguem a um nível satisfatório. Na última coluna podemos observar os dados da escola em que foi realizado este trabalho de pesquisa (veja seta indicativa).

Tabela 06: Distribuição percentual dos alunos por nível de proficiência

7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL							
CLASSIFICAÇÃO	NÍVEL		REDE ESTADUAL	INTERIOR	DIRETORIA DE ENSINO	MUNICÍPIO ESCOLAS ESTADUAIS	ESCOLA
Insuficiente	Abaixo do Básico	< 200	37,6	33,1	30,5	29,3	**16,7**
Suficiente	Básico	200 a < 250	40,8	40,8	43,0	42,8	**43,1**
	Adequado	250 a < 300	18,9	22,2	23,0	22,2	**30,4**
	Básico + Adequado		*59,7*	*63,0*	*66,0*	*65,0*	***73,5***
Avançado	Avançado	≥ 300	2,7	3,8	3,6	5,6	**9,8**

Fonte: Resultados gerais do SARESP 2012 - site da FNDE.

Desenvolver um trabalho que promova melhoria na qualidade da aprendizagem desses alunos é um dos objetivos centrais desse estudo.

Por tudo o que foi exposto até aqui, acreditamos que o trabalho com a estratégia de aulas exploratório-investigativas pode favorecer o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos a partir da melhoria nas habilidades de observação, argumentação, justificação e negociação.

Não pretendemos nos fixar nos dados das avaliações externas na tentativa de superar os índices atuais, mas como uma ferramenta a mais para caracterizar o contexto escolar e justificar essa pesquisa.

4.6 A turma

Entre as turmas de Ensino Fundamental II, no ano de 2013, três classes de 7º anos funcionavam no período da tarde, sendo que esta professora-pesquisadora, trabalhou com a turma do 7º ano B no ano letivo anterior. Esse fato foi preponderante para escolha dos protagonistas deste estudo. Mais especificamente, a questão da afetividade e gestão de aula foram importantes, pois com essa turma havia um maior entrosamento e possibilidade de desenvolver trabalhos em grupos. Isso porque o problema de indisciplina, muito comum em sala de aula, não comprometia a aprendizagem da maioria dos alunos do 7º ano B. Além disso, em tarefas anteriores realizadas em grupos com esses alunos, percebeu-se que a maioria deles se envolvia realmente com as questões exploradas.

A turma selecionada era formada por 17 meninas e 19 meninos, totalizando 36 alunos, mas durante as etapas das tarefas, raramente todos estavam presentes, pois alguns alunos faltavam muito às aulas, sendo este um verdadeiro problema enfrentado por toda a equipe escolar. Na primeira tarefa, Ângulos 1, havia 34 alunos participando, já na Tarefa Ângulos 2, apenas 18 alunos compareceram a escola enquanto que na Tarefa Ladrilhando o Plano, trabalhamos com 33 alunos.

Todas as turmas desta Unidade Escolar são geralmente mistas, formadas por estudantes que residem na zona urbana e estudantes da zona rural. O 7º ano B era composto em sua maioria, por alunos da zona urbana.

É evidente que em uma turma com 36 alunos, alguns apresentaram mais dificuldades e falta de motivação que outros, e se não fosse assim, essa pesquisa não teria sentido. Acreditamos que a heterogeneidade da turma foi fundamental para a obtenção de resultados reais, visto que o mais comum em sala de aula é termos alunos, em diferentes níveis de aprendizagem. Lidamos cada vez mais com alunos diferentes e que demonstram muito desinteresse em tudo o que se relaciona com os estudos. Sobre isso, Ponte (2005, p. 20) também comenta em seus trabalhos, dizendo que:

> Dentro de uma mesma turma, há, muitas vezes, alunos com características muito diversas no que respeita aos seus conhecimentos matemáticos, interesse pela Matemática, atitude geral em relação à escola, condições de trabalho em casa, acompanhamento por parte de família, etc.

Continuando suas considerações sobre essa heterogeneidade entre os alunos, Ponte (2005, p. 20) completa afirmando que “a diversidade dos alunos que o professor tem na sua sala de aula deve ser por ele ponderada, de modo a tentar corresponder, de modo equilibrado, às necessidades e interesses de todos".

Por esse motivo, selecionamos alguns alunos e grupos diferentes para analisarmos o desenvolvimento de cada tarefa mais detalhadamente.

Para cada tarefa trabalhada, escolhemos dois grupos ou duplas como subcasos de análise além de algumas falas e registros que julgamos interessantes e que ocorreram durante as discussões e mediação da professora.

4.7 O aluno no 7º ano do Ensino Fundamental

Nessa fase escolar, nos deparamos com alunos que vivenciaram um período de muitas mudanças em suas vidas. Foram mudanças de ordem física, emocional e psicológica que influenciaram muito a forma como pensavam, o comportamento e o que desejavam para o futuro. Acreditamos ser fundamental conhecer algumas características dos alunos que estão nesse nível de escolaridade para que possamos compreender as situações, sejam elas de aprendizagem ou comportamentais, e as relações estabelecidas em sala de aula durante o processo de desenvolvimento das tarefas e atividades. De acordo com PCN (BRASIL, 1998, p. 61):

> Junto a certa instabilidade, medo e insegurança, que caracterizam as reações dos adolescentes diante das situações diversas, intensifica-se a capacidade para questionar, acirra-se a crítica, às vezes pouco fundamentada, que faz com que coloquem em dúvida a importância de certos valores, atitudes e comportamentos e, inclusive, a necessidade de certas aprendizagens.

É nessa fase que os conflitos de relacionamento se intensificam e são interpretados como indisciplina pelos professores e gestores das escolas. Alguns alunos do 7º ano B ainda vivenciavam uma fase infantil, enquanto outros estavam mais maduros e com interesses voltados à liberdade e sexualidade. Em contrapartida, nesta fase do desenvolvimento humano:

> (...) ampliam-se as capacidades para estabelecer inferências e conexões lógicas, para tomar algumas decisões, para abstrair

> significados e ideias de maior complexidade, para argumentar expressando ideias e pontos de vista com mais clareza. (BRASIL, 1998, p. 62).

No 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, os alunos chegam à escola com certa “bagagem” de conhecimentos que não pode ser desprezada pelo professor. Ele aprendeu vários conceitos e procedimentos nos anos/séries anteriores, mas a maioria não consegue exprimir suas ideias por meio de uma linguagem matemática. É natural que ele não consiga se comunicar matematicamente de forma adequada se não teve nenhum tipo de experiência anterior com narrativas orais e escritas para comunicações sobre suas ideias. Mas é justamente nessa fase de transições e mudanças que os alunos demonstram muita curiosidade em aprender coisas novas, questionam com facilidade e se envolvem verdadeiramente nas tarefas.

> Outro aspecto importante que o professor precisa levar em conta consiste em canalizar para a aprendizagem toda a ebulição desse espírito questionador, que estimula os alunos a buscar explicações e finalidades para as coisas, discutindo questões relativas à utilidade da Matemática, como ela foi construída, como pode contribuir para a solução tanto de problemas do cotidiano como de problemas ligados à investigação científica. Desse modo, o aluno pode identificar os conhecimentos matemáticos como meios que o auxiliam a compreender e atuar no mundo. (BRASIL, 1998, p. 62)

Para o professor, este é um ótimo período para trabalhar com atividades exploratório-investigativas e iniciar o desenvolvimento das habilidades de observação, análise, argumentação, justificação e comunicação, tão latentes no espírito questionador do aluno de 6º e 7º anos.

5. PREPARANDO O CAMINHO

Tendo como objetivo a familiarização com tarefas exploratório-investigativas, havíamos desenvolvido no início do ano letivo um estudo piloto com uma tarefa desta natureza sobre potenciação com o 7º ano B. Essa atividade gerou um relatório, orientado e discutido no Grupo de Estudos e Planejamento de Atividades Matemáticas (GEPLAM) da UFSCar-Campus de Sorocaba do qual a professora-pesquisadora deste trabalho é integrante. Posteriormente este relatório gerou um artigo intitulado *Ensaio envolvendo tarefas exploratórias sobre potenciação para o 7º ano do Ensino Fundamental,* que foi apresentado no Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemáticas (IV SHIAM) promovido pela Unicamp e publicado em seus anais (MIRANDA; OLIVEIRA, 2013).

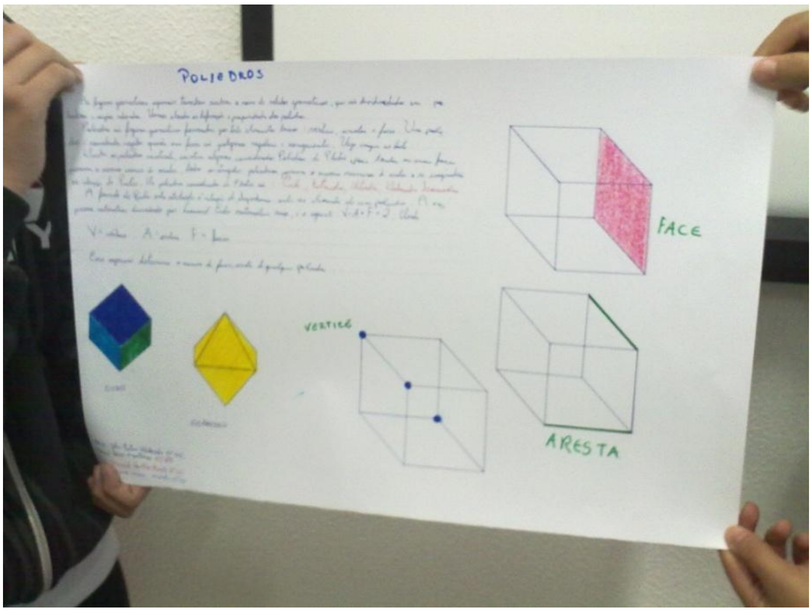
Tal trabalho propiciou maior segurança para a professora-pesquisadora no planejamento das tarefas de Geometria que seriam realizadas posteriormente para esta pesquisa e mais confiança na estratégia de ensino que utilizaria. Neste estudo piloto, os alunos foram organizados em duplas. O trabalho em grupo em sala de aula era então, uma atividade nova e motivante para toda a turma.

Já no início do segundo bimestre letivo de 2013, mais ou menos no início do mês de maio, iniciamos o ensino de Geometria com uma pesquisa extraclasse que foi proposta aos alunos sobre alguns conceitos básicos dessa área do conhecimento matemático. A turma se dividiu em grupos de três ou quatro alunos e cada grupo pesquisou um assunto, que foi sorteado pela professora. Os temas sorteados foram: Ângulos; Ângulos nos Triângulos; Tipos de Triângulos; Polígonos Regulares e Poliedros. Cada grupo deveria preparar uma apresentação para toda a classe sobre as propriedades principais do assunto que deveriam estudar. Não deveriam entregar nada para a professora, mas poderiam usar cartazes, lousa, data show ou a mídia que quisessem para a apresentação.

Foi explicado pela professora que após todas as apresentações, cada aluno deveria escrever um relatório sobre o que aprenderam. Os alunos tiveram duas semanas para preparar seus trabalhos e levaram três aulas de 50 minutos para apresenta-los. A quarta aula foi para o registro escrito do relatório. Na apresentação oral, muitos tinham dificuldades em se expor diante dos colegas e não falavam nada, ficando a cargo de um aluno do grupo explicar o trabalho para a classe. Poucos foram os grupos cujos alunos participaram com desenvoltura e extroversão; em contrapartida, os alunos que não estavam na frente da sala apresentando, não tinham nenhum constrangimento em perguntar o que não entendiam para os colegas ou contestar alguma informação transmitida que não concordavam. A maior parte dos alunos ficou bastante atenta às apresentações porque sabiam que teriam que redigir um relatório após as aulas e que esse relatório seria avaliado.

Consideramos que essa foi uma ótima tarefa para iniciar uma prática investigativa e de comunicação oral das ideias que surgiram durante a pesquisa. Foram elaborados ótimos cartazes para apresentação e bons textos por quase todos os alunos. Esses textos serviram para diagnóstico e avaliação formal do processo de aprendizagem dos alunos conforme o exemplo de cartaz apresentado:

Figura 06 : Poliedros



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Os alunos registraram suas ideias e descobertas sobre a pesquisa que realizaram em grupo e sobre o que aprenderam com as apresentações dos demais colegas.

Normalmente classificamos as notas dos alunos em quatro níveis: abaixo do básico (menos que 5); básico (notas 5 e 6); adequado (7, 8 e 9) e avançado (nota 10). Dos 34 alunos presentes no dia que redigiram o relatório que serviu para diagnóstico avaliativo, apenas 4 alunos registraram textos curtos e confusos, ficando no nível que consideramos básico, com notas entre 5 e 6. A seguir podemos observar trechos de transcrições desses textos:

> **Aluno FeM**: *O primeiro grupo foi apresentar sobre polígono. Os polígonos são formados pelas faces dos poliedros. Os polígonos são bidimensionais. E ângulos rasos: de 0 graus a 360 graus. Tinham também polígonos regulares: são aqueles que têm que ter a mesma medida. Tinha tipos de triângulos. Por exemplo: Agudo e Escaleno. Tipos de ângulos quanto aos triângulos foi muito legal também.*

O texto do aluno **FeM** foi corrigido, pois contém em sua forma original muitos erros ortográficos e de concordância. Percebemos a confusão ao escrever sobre ângulo raso e a classificação dos triângulos. Esse aluno apresentava sempre notas baixas em praticamente todas as disciplinas. É um aluno bem mais imaturo que os demais. No entanto, percebemos um grande envolvimento de sua parte na realização e apresentação de sua pesquisa. Ele levou um vídeo sobre os poliedros para apresentar para os colegas e não se acanhou em explicar o que havia compreendido sobre o assunto. Mesmo assim, suas conclusões foram bastante triviais e confusas.

O texto do aluno **Ga,** apresentado a seguir, está entre os mais curtos. Ele apresentava muita dificuldade em escrever mesmo durante a realização de atividades rotineiras. No entanto, podemos notar que suas afirmações, embora aparentemente triviais, são verdadeiras, o que é algo positivo quando pensamos no desenvolvimento do raciocínio geométrico deste aluno.

> **Aluno Ga:** *São figuras formadas por lados retos os polígonos. Não podem ser feitos por 2 lados porque precisa de 3 para poder fazer um triângulo e tem várias formas de ângulos: agudo, reto, raso, obtuso. Os polígonos são figuras formadas por 2 elementos básicos: vértices e arestas.*

O aluno **Ga** apresentou o trabalho sobre os tipos de ângulos, no entanto, ele mesmo, praticamente não falou nada durante a apresentação. Em geral esse aluno não consegue ultrapassar um rendimento básico (notas entre 5 e 6). Mas, durante as tarefas exploratório-investigativas, que descreveremos adiante, sua participação melhorou significantemente.

Dos demais alunos, 18 foram avaliados no nível adequado (notas 7, 8 e 9) nesta tarefa que desenvolveram. Esses alunos escreveram bons textos, mas às vezes, se confundiram com algum termo ou noção geométrica. Vejamos o texto do aluno **Th** logo a seguir. Esse aluno participou ativamente de todas as tarefas desenvolvidas, principalmente na oralidade. Para escrever ele foi bastante conciso nos demais relatórios. Mas neste primeiro, apresentou muitas informações sobre o que havia observado e descoberto, mesmo que tenha se confundido com termos geométricos. Chamou equilátero de quadrilátero, triângulo obtusângulo de triângulo obtuso e não havia construído ainda a definição adequada de triângulo acutângulo. No fim de seu texto, ele disse que o poliedro está sempre de cabeça para cima e para baixo ao mesmo tempo. Não entendemos esta fala, mas é possível que o aluno se referisse aos prismas.

> **Aluno Th:** *Eu observei várias coisas com as apresentações feitas, o primeiro grupo falou sobre os polígonos, explicou que para a figura ser um polígono, tem que ter todos os lados retos e a figura deve estar completa. Se estiver faltando algo, parecendo um buraco ele é chamado de não polígono. O segundo grupo foi o meu. Nós falamos sobre os ângulos. Os principais deles são: ângulos retos, raso, obtuso e o agudo. Também falamos dos transferidores, que são divididos em graus e servem para medir ângulos. Também vi sobre os polígonos regulares e descobri que para ele ser regular deve ter duas características: todos os lados devem ter a mesma medida e todos os ângulos também. Ouvi sobre os três triângulos: o escaleno, que tem todos os lados diferentes, "quadrilátero" que tem todos os lados iguais e o isósceles, que tem dois lados iguais. Também tem os triângulos de acordo com os ângulos. O obtuso é quando tem um ângulo obtuso, o acutângulo quando tem um ângulo agudo e o triângulo retângulo, que tem o ângulo reto. Também tem os poliedros que são figuras geométricas formadas por: vértice, aresta e face. E ele está sempre de cabeça para cima e para baixo ao mesmo tempo, pois não tem como girar ele.*

Por fim, tivemos 12 alunos que redigiram textos que classificamos como ótimos, tanto do ponto de vista conceitual, como na questão da escrita (coerência e coesão). Entre eles, selecionamos o texto da aluna **Fê**:

> **Aluna Fê:** *Polígonos – Eu aprendi que polígonos são formas fechadas com lados retos. Eles podem ter vários lados. Polígonos de 1 e 2 lados não existem, pois não fecham. Polígonos são bidimensionais. Aprendi que ângulos são a região entre duas linhas:*
> *Agudo – é semelhante a ponta do lápis, tem menos que 90°.*
> *Reto – tem a medida exata de 90°.*
> *Raso – é a volta de 180°.*
> *Um tipo de régua para medir um ângulo é o transferidor.*
> *Entendi que para ser um polígono regular tem que ter duas características: seus lados devem ter a mesma medida e seus ângulos também. Como o quadrado que tem os quatro lados com a mesma medida e seus ângulos também.*
> *Eu apresentei meu trabalho e o tema era Tipos de Triângulos quanto aos lados. Nós mostramos os triângulos isósceles, equilátero e escaleno:*
> *Isósceles – esse triângulo tem 2 lados de mesma medida.*
> *Equilátero – ele é considerado um polígono regular, pois seus lados e ângulos são iguais.*
> *Escaleno – tem todas as medidas diferentes e ângulos também.*
> *Triângulos também têm ângulos e seus nomes são:*
> *Obtusângulo – tem ângulo obtuso, ou seja, maior que 90°.*
> *Acutângulo – ângulo agudo com menos de 90°.*
> *Triângulo Retângulo – com ângulo interno reto de 90° exatos.*

A aluna **Fê** se destaca como melhor aluna da turma desde o 6º ano por vários bimestres consecutivos. Para essa classificação não é considerada apenas a disciplina de Matemática, mas todas as disciplinas escolares do 7º ano. No ano de 2013 ela é também representante de classe. É uma aluna muito concentrada nas tarefas que realiza, não sendo de falar muito durante as aulas, mas quando questionada responde prontamente. Preocupa-se muito com a qualidade de suas produções, buscando sempre por aprimoramento e perfeição em seus registros.

Os outros 11 relatórios escritos também apresentaram uma estrutura muito boa, além de referências importantes sobre o que os alunos aprenderam e observaram nas apresentações dos colegas. Todos esses conhecimentos serviram de pré-requisitos às tarefas exploratório-investigativas que realizaram nas aulas seguintes.

A partir desta experiência, planejamos as próximas etapas do nosso trabalho de campo. Primeiro trabalhamos com algumas tarefas da situação de aprendizagem intitulada “A Geometria dos Ângulos”, do Caderno do Aluno, Volume 2.

Em seguida iniciamos a primeira tarefa exploratório-investigativa, que chamamos de Ângulos 1. O objetivo desta primeira tarefa foi o aprofundamento do conceito de ângulo e o estudo de algumas propriedades e relações entre eles, como a descoberta dos ângulos suplementares, resultando sempre 180°, a congruência dos ângulos opostos pelo vértice, entre outras relações que pudessem ser percebidas e/ou questionadas pelos próprios alunos.

Dando continuidade as descobertas realizadas, desenvolvemos a Tarefa Ângulos 2, em que outras relações angulares e geométricas puderam ser exploradas e analisadas. Os alunos exploraram as relações de congruência entre ângulos alternos e correspondentes sem uma preocupação com a linguagem formal, mas tentando encontrar justificativas para suas descobertas. Foram trabalhadas também as noções de paralelismo e perpendicularidade nesta tarefa.

Após as duas primeiras tarefas exploratório-investigativas, retomamos as tarefas do Caderno do Aluno. Trabalhamos as situações de aprendizagem 1 e 2. A primeira sobre simetria axial; simetria rotacional; transformações no plano (reflexão, translação, rotação); ângulo central e inscrição de polígonos; a segunda sobre polígonos e ladrilhamento no plano. Nesta segunda situação de aprendizagem, trabalhamos apenas a questão da soma dos ângulos internos em polígonos quaisquer utilizando as questões do Caderno do Aluno. As condições necessárias para o ladrilhamento no plano, deixamos para a terceira tarefa exploratório-investigativa: Ladrilhando o Plano com Polígonos. As tarefas dos Cadernos do Aluno e do Professor que foram desenvolvidas estão descritas a seguir no item 5.1.

No entanto, antes de iniciarmos a terceira tarefa exploratório-investigativa, fizemos alguns trabalhos envolvendo o conceito de mosaicos geométricos. Preparamos uma apresentação em slides mostrando vários tipos de mosaicos no dia-a-dia, na Arte, nas formas da natureza, artesanatos, construções arquitetônicas, até falar sobre os mosaicos geométricos formados por polígonos. A primeira tarefa desta sequência teve como objetivo, motivar os alunos para a produção de uma pavimentação com polígonos irregulares, por isso mesmo, foi uma tarefa de caráter bem livre, ou seja, pouco formal:

> *Faça um desenho bem bonito como você preferir e depois cubra-o com polígonos irregulares feitos de papel colorido. Você pode fazer um desenho comum ou um desenho abstrato com figuras geométricas. Bom trabalho!*

Os alunos foram orientados para construir mosaicos em que as peças ficassem bem juntas, sem se sobreporem. Alguns trabalhos dos alunos podem ser vistos na figura 07:

Figura 07: Mosaicos geométricos – Polígonos irregulares

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Após essa etapa, iniciamos as tarefas exploratório-investigativas sobre as condições necessárias para se construir mosaicos geométricos com polígonos regulares no plano. Essas tarefas foram divididas em duas fases, pavimentação do plano com polígonos regulares não congruentes, e pavimentação com polígonos regulares congruentes entre si. A seguir continuamos a apresentação detalhada do trabalho de campo desenvolvido com os alunos do 7º ano B.

5.1. A Geometria no Caderno do Aluno e do Professor

Na aula seguinte a elaboração dos textos dos alunos referentes a pesquisa descrita no item 5, iniciamos o trabalho com o Caderno do Aluno, Volume 2. Esse caderno possui atividades que exploram o conceito de ângulos, ângulos nos triângulos, simetria, polígonos e poliedros. Decidimos trabalhar as questões como estão nos Cadernos; dessa forma poderíamos refletir e analisar sobre a sequência didática proposta e registrar os avanços cognitivos dos alunos e/ou problemas que poderiam decorrer de tal abordagem para o ensino do conceito de Ângulo.

A primeira Situação de Aprendizagem foi intitulada de “A Geometria dos Ângulos” e segundo as orientações do segundo volume do Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009), deveria ser trabalhada em três semanas. Como não trabalhamos todas as atividades propostas, levamos menos tempo. O objetivo era desenvolver algumas habilidades para depois dar início às tarefas exploratório-investigativas planejadas.

Durante o desenvolvimento das atividades dessa Situação de Aprendizagem, trabalhamos com a construção e medição de ângulos, a estimativa das medidas de ângulos por observação, desenhos geométricos de bissetrizes e polígonos regulares com régua e compasso e os ângulos de giro sobre malhas quadriculadas.

Nessa Situação de Aprendizagem era desejável o desenvolvimento das seguintes competências e habilidades (SÃO PAULO, 2009, p.11):

- Reconhecer e estimar medidas angulares em contextos e formas de linguagem diversificadas;
- Estabelecer comparações e classificações como processo para a aquisição de vocabulário geométrico;
- Utilizar a lógica de pensamento estruturado para resolver problemas de natureza geométrica;

- Desenvolver a motricidade fina por meio de instrumentos geométricos de desenho, bem como o pensamento antecipatório nos processos de resolução de problemas.

A segunda situação de aprendizagem do Caderno do Aluno que trabalhamos foi chamada de Polígonos e Ladrilhamento no Plano. O objetivo desta tarefa era desenvolver o raciocínio indutivo por meio do levantamento de hipóteses que levassem a generalizações. Desta forma, o aluno deveria compreender o processo de divisão de polígonos quaisquer em um número mínimo de triângulos para calcular a soma dos ângulos internos desses mesmos polígonos, elaborando uma expressão geral que permitisse realizar cálculos para polígonos de n lados.

Em seguida, seguimos a orientação do Caderno do Professor, Volume 2, p. 34 e trabalhamos uma tarefa que chamamos: *Por que apenas um vértice?* Essas tarefas estão descritas a seguir.

5.1.1 Construindo um Transferidor de Papel

A primeira atividade proposta nessa unidade do Caderno do Aluno foi a construção de um transferidor de papel por meio de dobraduras. Os alunos deveriam utilizar uma folha de papel comum do próprio Caderno do Aluno e a partir daí construir a dobradura proposta, seguindo passo a passo as recomendações (figura 08). Levamos duas aulas de 50 minutos cada para confeccionar o transferidor e iniciar as primeiras atividades e mais seis aulas para concluir a Situação de Aprendizagem

É importante frisar que no ano letivo anterior (2012), esses alunos tiveram contato com o conceito de ângulo em atividades sobre a classificação de polígonos. Eles conheceram os tipos de triângulos e o caso do triângulo retângulo, que contém um ângulo reto (formato em “quina”).

Figura 08: Construindo um transferidor de papel

VOCÊ APRENDEU?

1. Seguindo as orientações de seu professor e as indicações a seguir, você vai construir um transferidor de papel com 16 subdivisões.

a) Recorte a folha em branco disponível no final deste Caderno (Anexo 1).

b) Usando os instrumentos geométricos (régua, compasso, esquadros ou transferidor), construa um quadrado nessa folha. Caso tenha dúvidas sobre essa construção, consulte seu professor.

c) Dobre o quadrado ao meio por lados opostos e pelas diagonais de forma a fazer vincos visíveis.

d) Considere os pontos de **A** até **H**, conforme a Figura 1. Em seguida, dobre **OA** sobre **OB**, depois **OB** sobre **OC**, depois **OC** sobre **OD**, e assim sucessivamente até **OH** sobre **OA**, obtendo as marcas (dobras e vincos), conforme indicado na Figura 2.

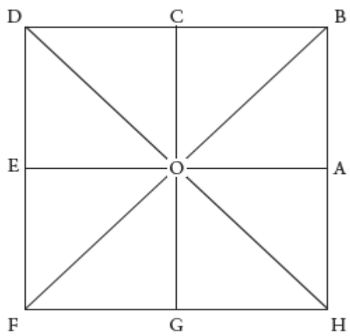


Figura 1

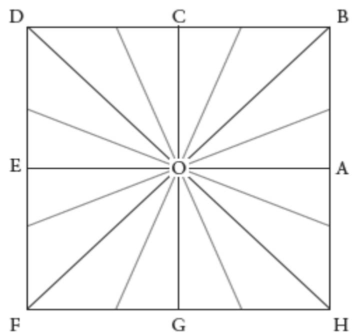


Figura 2

e) Marque com uma caneta ou um lápis a linha dos ângulos, inscreva uma circunferência dentro do quadrado utilizando o compasso e recorte-a (havendo dúvidas nesse passo, consulte seu professor). O transferidor com unidade de medida igual a $\frac{1}{16}$ da circunferência está pronto.

Fonte: Caderno do Aluno, Vol. 2, 7º ano (SÃO PAULO, 2009, p. 3)

Uma crítica que fizemos sobre essa atividade é a ausência de explicação do porquê dessa subdivisão em 16 partes iguais. Se o professor não souber explicar no momento das dobraduras, as divisões ficam sem sentido, totalmente arbitrárias e sem lógica para o aluno. Para a exploração da atividade da figura 08, a professora-pesquisadora adotou uma maneira mais prática para fazer as dobras, utilizando a linguagem das frações (metade, quarta parte, oitavos e por último um dezesseis avos).

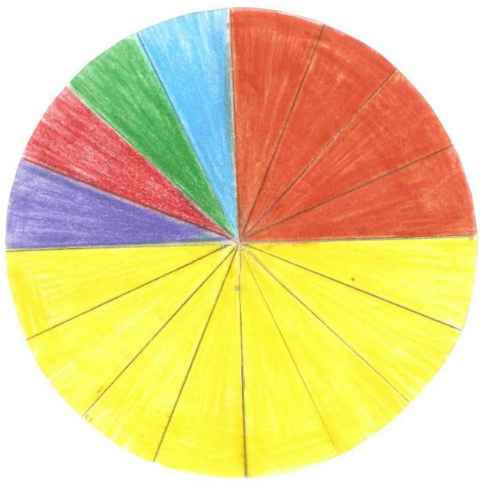
Desse modo, optamos trabalhar com os alunos uma maneira de se obter um quadrado a partir de um retângulo e partindo daí fomos dobrando o quadrado “em metades”. Foi proposto, ao final da dobradura o desenho do círculo; uma comparação entre os conhecimentos que os alunos já possuíam acerca dos ângulos e as subdivisões que haviam feito. Trata-se de um paralelo entre a linguagem adotada no Caderno do Aluno e o que os alunos já haviam pesquisado anteriormente. Isso porque a comanda proposta para as atividades seguintes propõe uma nomenclatura diferente para a medição dos ângulos:

> “Chamaremos cada uma das 16 subdivisões do transferidor de 1 tuti, cuja abreviação será 1 t. Meça cada um dos ângulos indicados nas figuras a seguir com seu transferidor e indique as medidas em tutis”. Caderno do Aluno, Vol. 2, 7º ano (SÃO PAULO, 2009, p. 4)

Com o transferidor de papel pronto, a professora orientou os alunos para que colorissem as subdivisões dos ângulos como mostra a figura 09: uma cor para a metade do círculo, outra para a “metade da metade” e cada tuti que sobrasse com cores individuais. Dessa forma seria mais fácil para que percebessem o ângulo de meia volta (180º), o ângulo reto (90º) e os valores para os “*tutis”* a partir de relações que pudessem fazer entre essas medidas e as divisões da dobradura.

Percebe-se no desenvolvimento dessas atividades e nas orientações do Caderno do Professor, uma preocupação com a questão da visualização por meio de uma representação material do conceito de ângulo.

Figura 09: Transferidor de papel



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Após a construção do transferidor de papel, os alunos utilizaram o instrumento para realizar as tarefas da primeira situação de aprendizagem do Caderno do Aluno, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009), construindo ângulos, triângulos e quadriláteros e medindo seus ângulos. Os traços dos desenhos não ficavam muito precisos e as medidas eram aproximadas, pois cada "*tuti*", que media aproximadamente 22,5°, ficou com uma espessura que complicava as construções geométricas e o processo de medição. Esse fato precisou ser esclarecido aos alunos.

Numa atividade subsequente, utilizamos o transferidor comum, fazendo uma transição comparativa entre o transferidor de papel e o usual, de acrílico. Foi proposta aos alunos a construção de uma tabela para que fizessem a conversão de tutis em graus, usando a ideia de proporcionalidade direta.

Na sequência das atividades nesta Situação de Aprendizagem, os alunos fizeram, aos pares, a estimativa de vários ângulos dados indicando suas medidas em graus. Depois conferiram os resultados usando o transferidor. Para a realização das duas sequências de atividades: construção do transferidor de papel com resolução de problemas e estimativas das medidas de ângulos levamos oito aulas de 50 minutos cada e mesmo assim, muitos alunos apresentaram dificuldades com a utilização do transferidor de acrílico. Eles confundiam as marcações inferiores e superiores do instrumento, como veremos em detalhes na análise da Tarefa Ângulos 1. Só após essas tarefas do Caderno do Aluno e atividades complementares é que desenvolvemos a Tarefa Ângulos 1, que foi a primeira tarefa exploratório-investigativa geométrica realizada com essa turma.

Em nossos estudos, durante a aplicação da Tarefa Ângulos 1, apenas uma aluna insistiu em continuar usando o transferidor de papel, o que levou-a a cometer erros em suas medidas, dificultando o processo dedutivo.

Pode-se constatar esse fato no trecho da transcrição de áudio de um grupo de meninas. As alunas **A.C., Wa, Ell** e **Am** formaram um grupo na Tarefa Ângulos 1. Trechos dos diálogos entre elas e registros escritos serão analisados na segunda parte desta pesquisa com maior detalhamento e profundidade.

A.C.: O **a** e o **c** dá 110.

*As alunas se referiam aos ângulos **a** e **c**.*

Wa: Dá 129. Vou usar meu "tuti" pra fazer isso.

Ell: É mesmo! Vamos ver? Quanto vale cada tuti?

Wa: É 20, não é?

Ell: Uhm... é 112 vírgula...

Wa: Não dá certo com o tuti! Chama a professora!

Am: Professora, aqui o dela deu errado.

Prof.ª Sílvia: O que deu errado?

Am: Um ficou 120 e o outro 140.

Prof.ª Sílvia: O que vocês perceberam até agora? O que descobriram até agora?

Wa: Eu tentei fazer com o tuti.

Prof.ª Sílvia: Mas aqui não está falando pra fazer (medir) com o tuti, não é?

Foi importante ressaltar para os alunos que devido a ser um instrumento de medida impreciso, os valores encontrados em algumas medições seriam aproximados. Esse instrumento elaborado pelos próprios alunos, embora bastante "rústico", proporcionou uma aula prazerosa onde todos se envolveram e puderam retomar a ideia de ângulo mesmo que de maneira menos formal, ou seja, mais intuitiva, sem associar ângulo a um arco que comumente aparece nos livros didáticos.

Então, para aprofundarmos os conhecimentos acerca de algumas propriedades dos ângulos formados entre retas e iniciarmos o trabalho de campo dessa pesquisa, iniciamos a primeira tarefa exploratório-investigativa, que será descrita e analisada na terceira parte deste estudo, no capítulo 6.

Após a realização das tarefas exploratórias sobre ângulos, desenvolvemos mais duas tarefas do Caderno do Aluno, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009) antes de iniciarmos as investigações com polígonos e mosaicos.

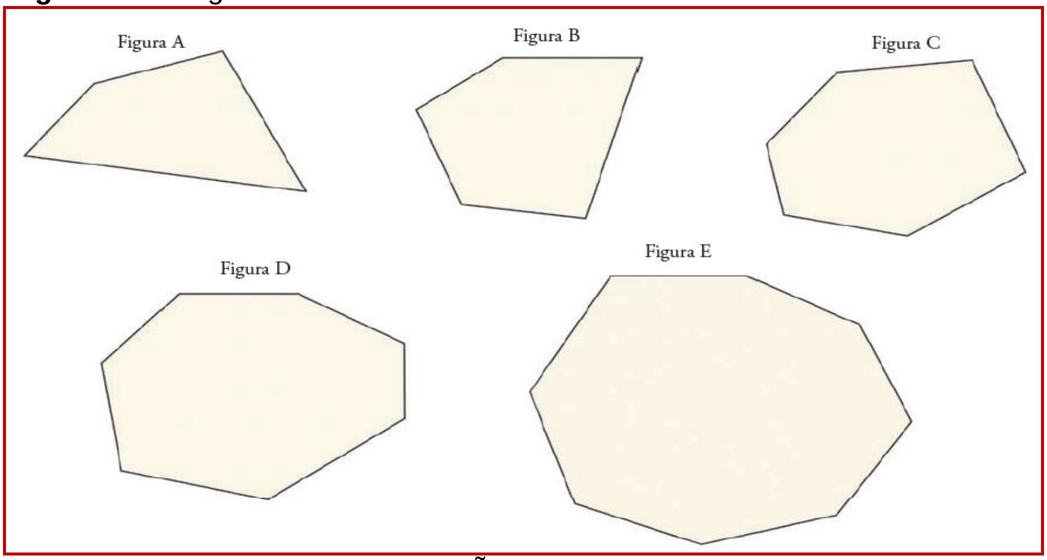
5.1.2 Ladrilhando e investigando

A Situação de Aprendizagem 3 do Caderno do Aluno tem como título “Polígonos e Ladrilhamento no Plano”. Na sequencia de atividades propostas são trabalhados alguns procedimentos para o cálculo da soma dos ângulos internos de alguns polígonos e para calcular a medida do ângulo interno e externo de polígonos regulares. Essas atividades são encadeadas de forma a conduzir o raciocínio do aluno para generalizar a fórmula que determina o ângulo interno de um polígono de **n** lados. No entanto, o objetivo principal não é o de memorização de tais fórmulas, mas de fazer com que os alunos compreendam que é possível calcular tais medidas sem a necessidade de se ficar desenhando os polígonos e os dividindo em triângulos sempre.

A seguir, temos a sequência das atividades 1, 2 e 3 propostas no Caderno do Aluno, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009, p. 33). Foram necessárias duas aulas de 50 minutos para o desenvolvimento das três atividades e a resolução de mais três problemas complementares retirados do livro didático dos alunos.

1. *Escolha um vértice dos polígonos a seguir e, ligando-o com outros vértices do polígono, trace todos os triângulos possíveis. Depois de traçar os triângulos, marque nas figuras, com cores diferentes, cada “tripla de ângulos” cuja soma seja 180º, e preencha a tabela indicada.* Caderno do Aluno, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009, p. 33).

Figura 10: Polígonos e Ladrilhamento do Plano



Fonte: Caderno do Aluno, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009, p. 33)

Tabela 07: Somando os ângulos internos

Figura	Nome do polígono	Número de lados	Número de triângulos a partir de um vértice	Soma dos ângulos internos
A				
B				
C				
D				
E				

Fonte: Caderno do Aluno, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009, p. 33)

2. ***Polígonos regulares*** *são aqueles que possuem lados de mesma medida e ângulos de mesma medida. A medida do ângulo externo de um polígono é o suplemento da medida do ângulo interno correspondente. Como um pentágono tem 540º de soma dos ângulos internos, um pentágono regular terá ângulos internos de medida 540º ÷ 5 = 108º e ângulos externos de medida 180º - 108º = 72º. Usando os dados obtidos na atividade anterior, complete a tabela a seguir. Caderno do Aluno, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009, p. 33)*

Tabela 08: Medida do ângulo interno e externo em polígonos regulares

Polígono regular	Medida de cada ângulo interno	Medida de cada ângulo externo
Triângulo equilátero		
Quadrado		
Pentágono regular	540º ÷ 5 = 108	180º – 108º = 72º
Hexágono regular		
Heptágono regular		
Octógono regular		

Fonte: Caderno do Aluno, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009, p. 34)

3. *Observe atentamente o padrão nas tabelas das duas atividades anteriores e responda: Qual é a fórmula para calcular a medida do ângulo interno de um polígono regular de* ***n*** *lados?*

Após relembrar com os alunos a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, iniciou-se o desenvolvimento das atividades. Foi explicado aos alunos que eles deviam dividir os polígonos em triângulos sempre a partir de um único vértice utilizando-se a lousa para exemplificar por meio da representação de alguns polígonos: o quadrilátero e o pentágono. Lançamos a seguinte questão para a turma: *Como fazer para calcularmos a soma dos ângulos internos dos polígonos aqui desenhados?*

Um aluno respondeu prontamente: *É só multiplicar o número de triângulos por 180.* Os colegas concordaram e então pedimos que preenchessem a primeira tabela (tabela 07); o que fizeram sem dificuldades. Em seguida formulamos mais uma questão: *Que relação vocês percebem entre o número de triângulos e o número de lados dos polígonos observando a tabela?* O aluno **Ya** manifestou-se: *Que o número de triângulos é sempre dois a menos.* A professora-pesquisadora interagiu: *Todos concordam com isso? Vamos verificar?*

Aproveitamos para ir até o quadro (lousa) e socializar a tabela que os alunos já haviam preenchido em seus cadernos: "quando o polígono tem quatro lados, obtemos quantos triângulos? quando tem cinco lados, são quantos triângulos? quando.... Fomos formulando frases em que os alunos iam completando. *E se o polígono tivesse **n** lados? Qual o número de triângulos?*

Demorou pra que entendessem o que era sugerido, sendo necessário a reformulação da pergunta algumas vezes e explicação de que **n** representaria o número de lados de um polígono qualquer, que **n** era um número. Novamente o aluno **Ya** respondeu: *Se for **n** polígonos, então o número de lados é **n** menos dois!*

Durante todo o desenvolvimento das atividades, instigamos os alunos para que chegassem à expressão que determina a medida do ângulo interno nos polígonos regulares de forma mais significativa, valorizando o raciocínio indutivo. No entanto, essa tarefa foi bem direcionada e conduzida, o que não caracteriza uma tarefa exploratório-investigativa. Consideramos que esteve mais para uma tarefa de resolução de problema, onde o professor sabe exatamente o que os alunos precisam resolver e a que solução devem chegar.

Terminada essa etapa, em uma aula subsequente, os alunos resolveram três problemas do livro didático MATEMÁTICA, 7º ano (IMENES; LELLIS, 2009), utilizando-se dos dados obtidos nas tabelas que completaram no Caderno do Aluno. Cada aluno tem um livro didático que utilizamos para complementar e aprofundar as tarefas dos Cadernos, principalmente com lições de casa, definições e resoluções de problemas. Na aula seguinte iniciamos outra tarefa de natureza mais exploratória que faz parte da Situação de Aprendizagem Ladrilhando o Plano, sugerida pelo Caderno do Professor, Vol.2. (SÃO PAULO, 2009). Chamamos esta tarefa de *Dividindo em triângulos* e a descrevemos no item a seguir.

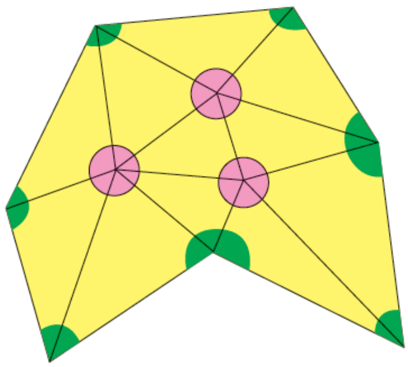
5.1.3 Tarefa: Dividindo em triângulos

Nesta aula os alunos foram organizados aos pares e havia apenas 30 dos 36 alunos da turma. Utilizamos duas aulas de 50 minutos. A seguir descrevemos o enunciado da tarefa, um trecho da transcrição de áudio e alguns registros dos alunos. Em seguida continuamos com a análise dos dados coletados e nossas reflexões sobre a tarefa.

Essa atividade foi sugerida no Caderno do Professor, Vol.2 (SÃO PAULO, 2009, p. 34) para explicar aos alunos o motivo de se escolher apenas um vértice para dividir os polígonos em triângulos. Sugere-se que se apresente aos alunos um polígono irregular, no caso um heptágono, com outro tipo de divisão. Um interessante aspecto que pode ser explorado pelo professor, após apresentar o método citado para demonstrar a formula $(n - 2).180^o$, é o fato de os triângulos terem sempre de partir do mesmo vértice do polígono.

Para que o aluno reflita sobre o assunto, o professor pode apresentar a seguinte figura:

Figura 11: Dividindo em triângulos



Fonte: Caderno do Professor, Volume 2 (SÃO PAULO, 2009, p. 34)

O polígono acima foi decomposto em 11 triângulos e sua decomposição não seguiu a regra de que todos os triângulos tivessem um vértice comum.

A partir dessa sugestão de investigação no Caderno do Professor, elaboramos a seguinte questão para que os alunos explorassem:

A tarefa

Você aprendeu na aula anterior que para calcularmos a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer, podemos dividir o polígono em triângulos partindo sempre de um único vértice. Mas o que aconteceria se a divisão não seguisse essa regra? Será que a soma dos ângulos seria verdadeira? Investigue. **Sugestão:** Você pode desenhar alguns polígonos e dividi-los em triângulos sem obedecer a regra de um vértice comum e ver o que acontece. Não esqueça de registrar suas conclusões! Bom trabalho!

Após a leitura da questão, observando o pouco entendimento dos alunos, resolvemos representar na lousa uma situação em que o polígono não fosse dividido seguindo a regra de divisão por apenas um vértice: *Vocês observam que a figura foi dividida em triângulos, não é? Se somarmos os ângulos internos de todos os triângulos obtidos, a soma será a mesma que vocês encontraram nas tarefas anteriores? Pensem um pouco...*

De um modo geral, a maioria dos alunos percebeu que quanto mais triângulos desenhavam no interior do polígono, maior era a soma dos ângulos. Dentre as 15 duplas de alunos, 12 chegaram a essa descoberta e apenas 3 duplas apresentaram respostas confusas ou que divergiam do objetivo da exploração. A seguir transcrevemos as respostas de 3 duplas que perceberam a relação entre o número de triângulos e o aumento da soma dos ângulos internos nos polígonos. Por último transcrevemos o texto confuso da dupla **Fer** e **He**:

> **Dupla Am e Ell:** *Percebemos que se não obedecermos as regras, não chegaremos a resposta correta. Nunca chegaremos ao resultado porque podemos traçar de várias maneiras, com isso a quantidade*

de triângulos será diferente. Quanto maior a quantidade de triângulos, maior será o resultado em ângulos.

Dupla Fê e Taci: *Nós percebemos que a soma dos ângulos internos aumenta conforme o número de triângulos. Ou seja, se não seguirmos a regra os ângulos internos de um polígono podem ser aumentados fazendo com que a soma dê errada.*

Dupla Bf e Br: *Nós percebemos que quando ligamos todos os pontos a soma do polígono sempre vai aumentando em 180°. Mas também, no meio desses triângulos que foram formados podem ter quadriláteros e pentágonos. E quanto mais triângulos se têm, mais ângulos são formados na parte interna*.

Dupla Fer e He: *Mesmo a gente dividindo triângulos ainda saem quadriláteros irregulares. Os ângulos não são de mesmo tamanho, pois tem vários tamanhos e medidas diferentes e também vários tipos de triângulos como exemplo: escaleno, isósceles e equilátero. Todas essas figuras se encaixam em um hexágono. Dependendo da quantia de vértices que a gente risca aumenta a quantia de triângulos e da soma. Os ângulos não são da figura marcada e sim dos triângulos construídos que estão dentro da figura.*

Essas tarefas foram particularmente importantes para preparar os alunos às próximas etapas, em que deveriam realizar tarefas de caráter mais aberto, as tarefas exploratório-investigativas geométricas.

Consideramos que foram ótimas tarefas para mobilizar alguns conceitos geométricos e preparar o caminho que iriam trilhar.

5.1.4 Descrição das Tarefas Exploratório-Investigativas

Neste item, descreveremos os enunciados das tarefas desenvolvidas na pesquisa de campo deste trabalho, os objetivos principais de cada uma e o tempo gasto em sua execução.

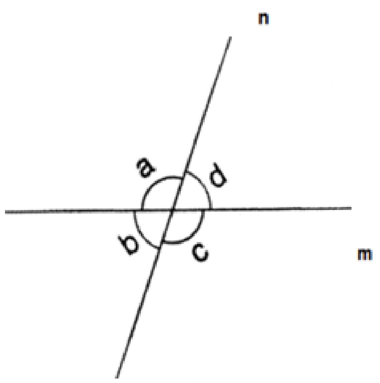
Tarefa Ângulos 1

Esta primeira tarefa exploratório-investigativa teve como objetivos principais, explorar, investigar, gerar e mobilizar habilidades e conceitos relacionados aos ângulos, algumas de suas propriedades e relações, como ângulos opostos pelo vértice e suplementares. Para tanto, utilizamos 2 aulas de 50 minutos para a exploração-investigação e 1 aula para a socialização e registros por parte dos alunos.

<u>Enunciado:</u>

a) Observem o desenho abaixo.
b) Meçam a amplitude de cada ângulo e registrem.
c) Pintem com a mesma cor os ângulos de medidas iguais.
d) Construam outros exemplos como este, modificando as posições das retas.
e) Nomeiem os ângulos e compare-os.
f) O que vocês percebem? Registrem todas as relações que vocês descobrirem.
g) Por último, para cada uma de suas hipóteses, tentem responder: Isso acontece sempre? Por quê?

Figura 12: Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Tarefa Ângulos 2

A segunda tarefa exploratório-investigativa teve como meta mobilizar o conceito de ângulos opostos pelo vértice, reconhecendo outras propriedades e relações entre os ângulos formados por retas paralelas interceptadas por uma transversal, como a de ângulos alternos, correspondentes e colaterais, sem preocupação com definições formais. Foram programadas e utilizadas 2 aulas de 50 minutos para exploração e registros e 1 aula para atividade diagnóstica.

Enunciado

Vocês receberão canudinhos de refrigerante e “tachinhas” para uni-los conforme a figura a seguir (figura 13).

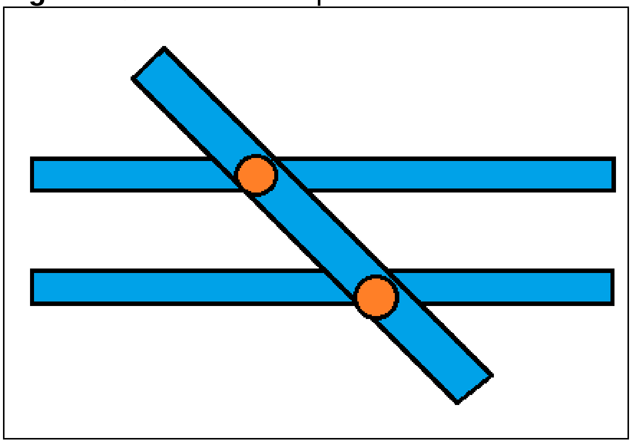
Primeiro, procurem manter dois canudinhos paralelos um com relação ao outro, como no primeiro desenho. Observem que o canudinho que está por cima secciona os outros dois em dois pontos, onde estão as tachinhas.

Meça os ângulos formados por esse canudinho (que atravessa por cima) com os outros paralelos que estão por baixo.

Você pode fazer desenhos para medir se isso ajudar. Também poderá nomear os ângulos como preferir.

Que relações entre os ângulos formados vocês observam? Registrem todas as relações que vocês perceberem. Façam alguns testes.

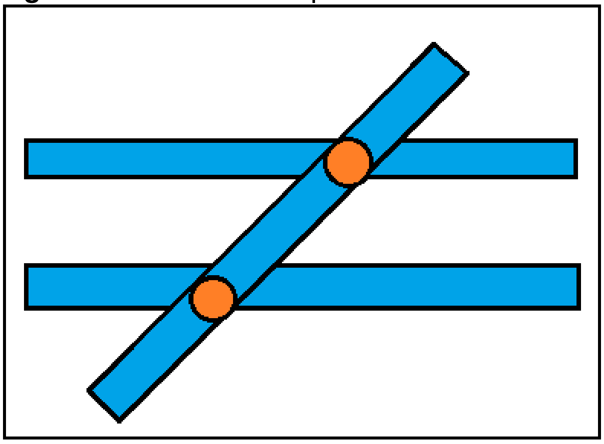
Figura 13: Canudinhos paralelos



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Agora, experimentem mover o canudinho que está em cima e encaixá-lo em outras posições, mas mantendo os dois de baixo paralelos.

Figura 14: Canudinhos paralelos 2



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Novamente registrem as relações encontradas entre os ângulos formados.

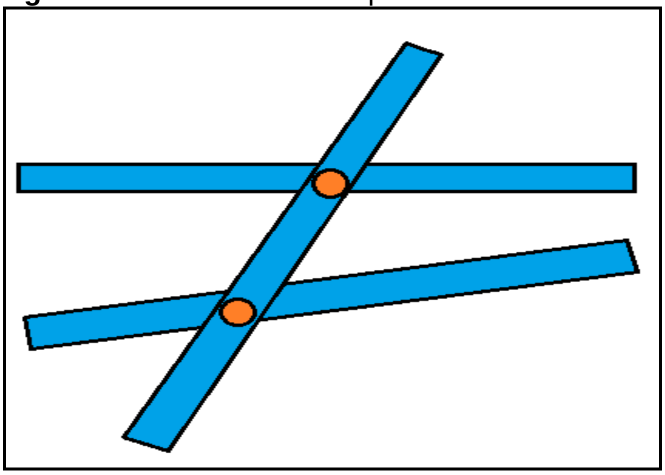
Movam o canudinho de cima de várias outras maneiras. Testem suas hipóteses.

O que vocês observam?

E se os canudinhos de baixo não estiverem paralelos, o que acontece?

Verifiquem por meio de alguns exemplos e testes.

Figura 15: Canudinhos não paralelos



Fonte: Arquivo da pesquisadora

O que vocês concluem? Por que isso acontece?

Tarefa Ladrilhando o Plano: Primeira Parte

Os objetivos para esta parte da tarefa foram: explorar e investigar as condições necessárias para que polígonos regulares **congruentes entre si** pudessem formar mosaicos no plano, mobilizando e ampliando noções e conceitos de ângulos, propriedades e relações entre lados, vértices e ângulos dos polígonos regulares. As atividades foram desenvolvidas em 3 aulas de 50 minutos, incluindo exploração-investigação e discussão.

Enunciado da tarefa

Mosaicos

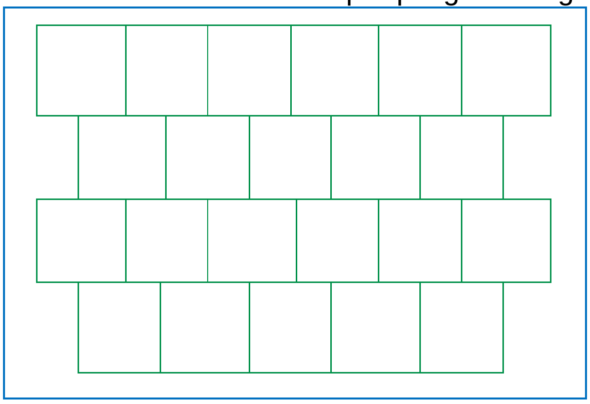
Os mosaicos geométricos podem ser construídos com polígonos regulares ou irregulares. Vamos estudar nessa investigação apenas os mosaicos formados por polígonos regulares.

Uma malha geométrica pode ser formada por polígonos regulares, recobrindo todo o plano. Você pode construir malhas geométricas com polígonos congruentes ou com polígonos distintos. Essa cobertura, chamada mosaico no plano, deve ser feita de tal forma que não haja nem lacunas nem superposições entre as "peças".

Para os mosaicos que iremos explorar, obedeceremos duas regras:

Se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou um vértice comum. Desse modo, estamos eliminando coberturas do tipo:

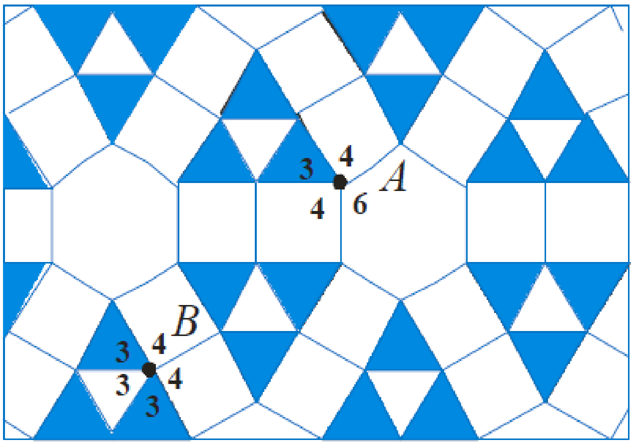
Figura 16: Mosaicos formados por polígonos regulares



Fonte: Alves; Dalcin (1999, p. 4)

A distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma. Assim, não valem coberturas do tipo:

Figura 17: Mosaicos formados por polígonos regulares



Fonte: Alves; Dalcin (1999, p. 4)

Observem que ao redor do vértice **A** temos a sequência 4,6,4,3 enquanto que do vértice **B** a sequência é 4,4,3,3,3.

Você e seus colegas receberão alguns polígonos regulares coloridos para recortar.

Seguindo as condições anteriores, investigue:

— Dentre os polígonos que vocês recortaram, quais os únicos polígonos regulares e congruentes entre si pavimentam perfeitamente o plano?

— Que relação vocês observam entre os ângulos internos dos polígonos e as pavimentações que construíram?

Tarefa Ladrilhando o Plano: Segunda Parte – Quando a figura sai do plano

O objetivo para esta tarefa foi explorar e investigar o que acontece quando se insere mais um polígono regular no plano em torno de um vértice de polígonos congruentes que não pavimentam o plano. Utilizamos uma aula de 50 minutos para a exploração e elaboração dos registros.

Enunciado da tarefa:

Na investigação anterior, com polígonos congruentes entre si, vocês disseram que com alguns polígonos não é possível pavimentar o plano, pois sobra um "espaço" que não cabe outro polígono do mesmo tipo. O que pode acontecer se colocarmos mais um polígono do mesmo tipo, de modo que seus lados se encaixem perfeitamente e seus vértices coincidam? Verifiquem em outros casos e registrem suas descobertas.

Tarefa Ladrilhando o Plano: Terceira Parte

Nesta última tarefa elaborada, tivemos como objetivo central explorar e investigar as condições necessárias para que polígonos regulares **não congruentes entre si** pudessem formar mosaicos no plano, mobilizando os conceitos figurais construídos nas tarefas anteriores. Além disso, foi desejável que os alunos identificassem os possíveis casos para composições de mosaicos com polígonos regulares que se estendem no plano. Utilizamos 2 aulas de 50 minutos para exploração do material manipulável e início da elaboração das primeiras conjecturas, além de complementar o estudo com uma pesquisa extraclasse sobre o tema.

Enunciado da tarefa

Vocês já investigaram as possíveis pavimentações com polígonos regulares de um só tipo. Mas, o que acontece se combinarmos polígonos regulares não congruentes entre si?

Construam o máximo de pavimentações (malhas) diferentes com polígonos regulares que conseguirem. Os polígonos desta vez podem ser diferentes.

Observem as construções que vocês fizeram e os ângulos internos dos polígonos. O que vocês percebem?

Registrem suas conjecturas, testes, descobertas e justificativas por meio de colagens, desenhos e textos explicativos.

Use ao máximo seu potencial de "investigador"!

PARTE III: DESCRIÇÃO, ANÁLISE E REFLEXÃO SOBRE A PRODUÇÃO DE INFORMAÇÕES DOS ALUNOS

6. ANALISANDO O PROCESSO VIVENCIADO PELOS ALUNOS

Apresentamos nesse capítulo a análise dos dados e processo experienciado pela professora-pesquisadora e principalmente pelos alunos do 7º ano. Utilizamos para essa análise a triangulação dos registros escritos dos alunos, anotações da professora e registros audiovisuais (fotografias, gravações de áudio e vídeo), dando ênfase à transcrição das falas dos alunos em suas discussões e comunicações orais. Essas descrições são acompanhadas por um diálogo constante com o referencial teórico deste estudo, que a todo o momento foi buscar respostas para o que estava acontecendo durante o trabalho de campo e compreensão mais profunda dos saberes em movimento.

Estruturamos o capítulo com o estudo das tarefas, analisando os registros de algumas duplas de alunos ou grupos conforme as atividades foram sendo realizadas.

6.1 Tarefa Ângulos 1

Atrelado ao conteúdo curricular, o objetivo desta primeira tarefa exploratório-investigativa foi ampliar o conceito imagem de ângulo, favorecendo o aprofundamento do desenvolvimento desse conceito figural de forma que se aproximasse mais de uma definição formal baseada na experiência e descoberta matemática.

Foi desejável que a tarefa Ângulos 1 mobilizasse a percepção de certas regularidades e propriedades dos ângulos, sobretudo, a identificação de ângulos opostos pelo vértice, ângulos suplementares e o desenvolvimento da habilidade de medir ângulos usando o transferidor. Entretanto, para além desses conceitos, procedimentos e processos, pretendíamos que a tarefa fosse particularmente significativa para o desenvolvimento das habilidades que envolvessem o fazer matemática.

Para a aplicação desta primeira tarefa exploratório-investigativa de Geometria com o 7º ano, experimentamos o trabalho em grupo, formado por quatro alunos em média.

O plano era realizar a tarefa e a socialização da mesma em duas aulas de 50 minutos. A professora-pesquisadora organizou a turma em grupos e explicou aos alunos que desta vez eles fariam uma investigação um pouco mais livre que a anterior. Havia 34 dos 36 alunos dessa classe, dentre os quais 17 eram meninas e 17 meninos. Eles se organizaram em sete grupos de quatro alunos cada e dois grupos de três alunos. Ao todo, formaram nove grupos.

Foram escolhidos dois grupos para fazermos a gravação de áudio dos diálogos entre os alunos. O **Grupo I** foi escolhido por se tratar de alunos mais ativos e autônomos, que possuem um bom rendimento nas aulas. Os quatro alunos são alunos críticos e comprometidos com os estudos. Já o **Grupo II** foi formado por quatro meninas, que embora muito responsáveis e consideradas boas alunas, são mais tímidas para expor suas ideias oralmente.

Nesse segundo grupo, duas das alunas se destacaram por dois anos consecutivos na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Apenas uma aluna apresentava mais dificuldade, mesmo nas atividades rotineiras. Além das gravações de áudio, fizemos a transcrição da observação participante da professora enquanto interagia com os demais grupos da turma. Algumas falas foram retiradas das anotações da professora, que passeava pela sala de aula, mediando as ações dos alunos, intervindo e registrando o que estava acontecendo ao mesmo tempo. Esse tipo de registro é bastante complicado, exigindo grande atenção e agilidade por parte do professor-pesquisador. O ideal seria ter levado mais um gravador enquanto se caminhava por entre os grupos. Ao final das aulas, a professora-pesquisadora transcrevia suas anotações para não perder nenhum detalhe do que havia ocorrido.

Após distribuir as folhas com o enunciado da tarefa e folhas em branco para os registros, pediu-se para que os grupos começassem a trabalhar.

Os gravadores foram ligados e a professora-pesquisadora foi passando para observar o que acontecia com os outros grupos. A intenção era captar o maior número possível de diálogos que ocorriam entre os alunos. Os dois grupos que estavam sendo audiogravados puderam ser analisados com mais profundidade, levando a muitas reflexões sobre estratégia de ensino, atividade matemática e construção de alguns saberes geométricos.

Percebeu-se que desta vez eles solicitaram bem menos a presença da professora comparando-se com a tarefa sobre potenciação, citada anteriormente.

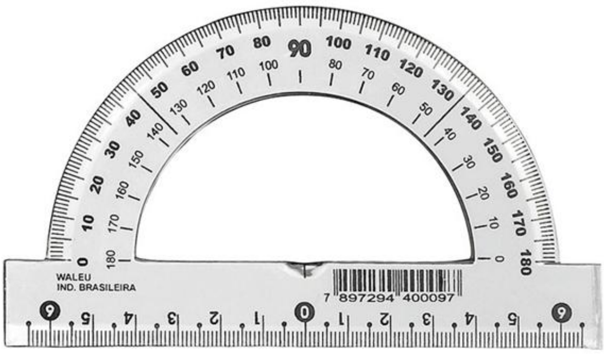
Alguns alunos perguntavam coisas relativas ao vocabulário, como por exemplo, o que significava amplitude. Em um grupo os alunos tiveram mais dificuldade em medir os ângulos porque confundiam as marcações do transferidor. Isso ficou bem nítido na pergunta do aluno **Ga**:

> ***Aluno Ga:*** *— Professora, esse ângulo aqui tá marcando essa medida?*
> ***Professora Sílvia:*** *— Isso mesmo. É assim mesmo que se observa a medida. Quanto está marcando?*
> ***Aluno Ga:*** *— 70 graus... Eu disse pra eles que era esse número aqui de baixo que devia olhar.*
> ***Professora Sílvia****: — E o outro ângulo? Quanto mede? — Nesse momento eu apontava para o ângulo suplementar do ângulo de 70°.*
> ***Aluno Ga****: — Então, eu acho que não é 70 o outro, mas eles (se referia aos colegas) disseram que é igual.*
> ***Professora Sílvia****: — Mas eles são do mesmo tamanho?*
> ***Aluno Ga****: — Não.*
> ***Professora Sílvia****: — E é maior ou menor que o de 70°?*
> ***Aluno Ga.:*** *— É maior.*
> ***Professora Sílvia****: — Então você percebe que não podem ser iguais?*
> ***Aluno Ga:*** *— Sim. Eu disse. Esse outro tem 110.*
> ***Professora Sílvia****: — Eu acho que você devia acreditar mais no que você está vendo. Existem duas marcações no transferidor. Você tem que calcular a medida da abertura entre as retas, não é? Tente fazer isso. Então deixei que ele e seus colegas pensassem e medissem novamente os ângulos com o transferidor.*

O conceito figural de ângulo não havia sido construído ainda por esses alunos. Eles confundiam as medidas porque não haviam compreendido que deviam medir “o espaço entre as duas retas”. Já para o aluno **Ga**, havia um conflito entre o conceito imagem que possuía acerca de ângulo e os números indicados no transferidor. Esse conflito aumentou porque os demais colegas disseram que o tal ângulo de 70° media 110° e não 70. Como o aluno **Ga** é um aluno mais inseguro que os outros, não conseguiu se convencer de que estava certo, precisando da intervenção da professora-pesquisadora.

O fato de haverem duas marcações para os ângulos, uma no sentido horário e outra no sentido anti-horário, pode ser um complicador nesse momento de construção do conceito de ângulo (figura 18).

Figura 18: Transferido de acrílico comum



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Entendemos que é importante o aluno conhecer esse movimento e ter contato com esse tipo de transferidor para não ficar condicionado a acreditar que só podemos medir os ângulos em um sentido, o que poderia provocar problemas futuros; até mesmo com o círculo trigonométrico.

Mas não será melhor que ao menos de inicio, os alunos utilizem um transferidor mais simples? (figura 19).

Figura 19: Transferidor de acrílico mais simples

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Se tivéssemos feito uma transição mais suave entre o transferidor de papel e o transferidor de acrílico, isso poderia facilitar a habilidade de manuseio do transferidor comum? Fica aqui a dúvida e algo para se pensar.

É importante lembrar que esses alunos tiveram apenas oito aulas duplas anteriores de 50 minutos cada uma onde aprenderam a construir e manipular um transferidor de papel para medir e construir ângulos. Em seguida, tiveram um primeiro contato com o uso do transferidor de acrílico, conforme descrito anteriormente. Nas atividades propostas muitos alunos conseguiram medir os ângulos com bastante precisão e autonomia, mas alguns tiveram dificuldades.

Passar de uma representação concreta e, portanto, manipulável, para uma representação por meio de esquemas e desenhos é uma atividade que exige um raciocínio mental complexo. Nesse caso, os alunos precisavam compreender que os ângulos construídos com o transferidor de papel podiam ser medidos, que essa medida é feita em graus e que corresponde a “abertura” entre as retas. Precisavam também, fazer essa medição usando o transferidor usual, pois o transferidor de papel não é um instrumento preciso. Isso foi muito bem conversado com eles, mas alguns alunos mais imaturos, de início não aceitaram esse fato, insistindo em usar os “tutis” para medir os ângulos construídos. Eles pareciam querer brincar com o material que construíram e quando foram questionados disseram que achavam mais fácil medir os ângulos usando a dobradura do que o transferidor. Sentiam-se inseguros em usar um novo instrumento de medida.

6.1.1 O Grupo I

O **Grupo I** foi formado por quatro alunos de bom desempenho na disciplina de Matemática e um tanto críticos e comunicativos. Eles tiveram autonomia para escolher seus pares. Não houve interferência ou manipulação por parte da professora em nenhum momento da formação dos grupos, apenas a orientação de que não poderiam ser mais que quatro alunos por grupo, isso por uma questão de gestão pedagógica. Chamemos esses alunos de **Gi, Ya, Th** e **Ig**. Os alunos **Ya, Th e Ig** já estudavam juntos desde o ano anterior, enquanto que o aluno **Gi** passou a integrar a turma no 7º ano. Desde o início do ano letivo esse aluno se mostrava muito participativo nas aulas, indo sempre à lousa quando solicitado para explicar alguma questão ou resolver algum problema. Os quatro alunos não tinham problemas com timidez, o que facilitou muito nossa interação com o grupo.

> *O aluno **Gi** pegou a folha e leu parte do enunciado para os demais colegas:*
> ***Gi:** Nomeie os ângulos e compare.*
> ***Ya**: Tem que nomear os ângulos.*
> ***Gi:** Pôr a, b, c e d.*
> ***Ya:** Coloca y, i, g e a.*
> *Então o aluno **Ya** leu todo o enunciado para o grupo.*
> ***Ya:** Posso escrever? Eu descobri que tem dois ângulos diferentes e dois ângulos iguais.*
> *Após algum tempo, fazendo desenhos e observando, o aluno **Ya** disse:*
> ***Ya**: Noventa, noventa, noventa e noventa!*
> ***Th**: É porque esse daí é o ângulo reto!*
> ***Ya**: Oh! Se você fizer ângulo torto vai ficar dois agudos e dois obtusos. Aqui ó, dois com mais de 90° e dois com menos.*
> ***Ig:** Faz outro.*
> ***Th:** Ah! Eu percebi. Eu já percebi um negócio... Por exemplo, se for esse ângulo daí é o ângulo reto, vai dar 90° e 90°. Se for o obtuso ele vai dar é ... mais de 90°.*

Os alunos se detiveram nos exemplos com retas perpendiculares. Eles pareciam perceber que existiam apenas dois tipos de ocorrências: os ângulos formados por retas perpendiculares e os que não eram formados por retas desse tipo. O conceito imagem de ângulo reto, agudo e obtuso parecia muito forte como imagem mental para esses alunos, eles não conseguiam naquele momento visualizar outras propriedades e elementos representados nas figuras.

Após algum tempo e muita discussão em torno da medição dos ângulos com o transferidor a professora se aproximou e interviu:

> ***Professora Sílvia:** Mas o que aconteceu aqui e aqui? — Apontou para dois desenhos com retas secantes não perpendiculares. E*

continuou: E neste outro exemplo? O que vocês percebem que está sempre acontecendo?

Th: *Aqui ele tá abertão, o 93. É o ... agudo.*

Professora Sílvia: *Ahm??*

Th*: Não, agudo não, é obtuso. E o que é fechadinho aqui é o agudo, o de 88 graus.*

Th: *Sempre tem dois ângulos iguais.*

Ig: *Dois tipos de graus.*

Th: *Dois ângulos "convexos".*

Nessa fala percebemos que o aluno queria expressar alguma relação que passou por sua mente, mas que não dominava a linguagem matemática correta para transmitir verbalmente. Ele estava se referindo aos ângulos opostos pelo vértice ao falar de "ângulos convexos". Infelizmente a professora-pesquisadora não aproveitou o momento para perguntar o que ele queria dizer com "convexos" e assim avançar na discussão e negociação de significados. A conversa prosseguiu:

Ya: *Tem dois ângulos obtusos e dois ângulos agudos.*

Professora Sílvia: *Sempre?*

Th*: Depende, se você fizer assim vai dar sempre 90°.*

Ya: *Depende o grau que tá aqui vai dar isso, mas se fizer dois retos vai dar 90.*

Professora Sílvia*: Mas se não tiver retas perpendiculares, o que acontece?*

Professora Sílvia*: Não tem mais nada que vocês conseguem perceber?*

Th: *Tá sempre repetindo dois tipos de graus?*

Gi: *Mas daí no perpendicular é tudo igual.*

Ya: *O número de baixo é igual ao de cima.*

Professora Sílvia*: Esse número que você fala é a amplitude do ângulo, a medida do ângulo. Então, você está dizendo o que?*

Ya: *Que a amplitude do ângulo de baixo é igual esse (apontou o de cima).*

Professora Sílvia*: Isso acontece sempre?*

Th: *Todos, fora os perpendiculares (aqui ele já usava o conceito de retas perpendiculares para ângulos perpendiculares).*

> ***Professora Sílvia**: Mas quando as retas são perpendiculares não acontece a mesma coisa?*
> ***Th**: É a mesma coisa só que os números são iguais ué!*
> ***Ya:** Esse igual a esse e esse igual a esse.*
> ***Ig:** Mas o que ele falou esse de cima é igual o de baixo. Não é o do lado.*
> ***Professora Sílvia:** Então vocês podem acrescentam mais alguma coisa além disso ao que já escreveram?*
> ***Th:** Que todos os ângulos "opostos dos lados" vão ser iguais? Sempre vai ser igual.*

Houve muita discussão sobre as retas perpendiculares e os alunos pareciam não perceber as relações entre os ângulos além das que já haviam observado sobre ângulos retos, obtusos e agudos. Observamos que a imagem representada evocava apenas essas ideias em suas mentes e eles simplesmente não enxergavam que os ângulos agudos eram sempre opostos, assim como os obtusos. Os alunos percebiam os elementos, descreviam algumas propriedades, mas não conseguiam relacioná-las.

Após algum tempo o aluno **Th** explicou para os colegas:

> ***Th**: Assim ó: Se ela for perpendicular vai dar todos os ângulos retos e vai dar todos iguais. Agora, se for "tortinha", vai dar dois iguais.*
> ***Ya:** Dois agudos e dois obtusos.*

Os alunos desse grupo não conseguiam visualizar inicialmente os ângulos adjacentes suplementares. Se percebessem essa relação, poderiam ter avançado um pouco mais em suas conjecturas, mas entendemos que só o fato que começarem a usar alguns termos próprios da Geometria, como a nomenclatura dos ângulos e de retas perpendiculares e paralelas, já era algo muito positivo naquele momento.

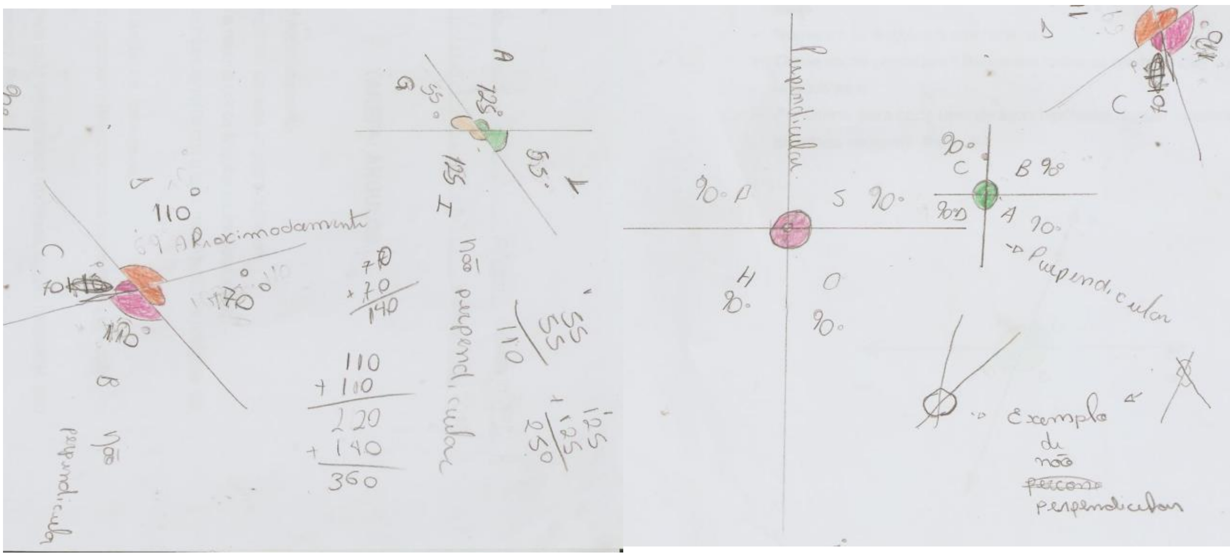
Desde o 6º ano, a professora-pesquisadora desses alunos sempre os incentivou a utilizar uma linguagem mais formal, passando gradualmente de uma linguagem mais próxima do vocabulário deles para a linguagem própria da

Matemática. Esse aspecto ficou bastante evidente nas falas dos alunos, mesmo que se confundissem com os termos.

6.1.2 Desenhando e escrevendo nas aulas de Matemática: Grupo I

Durante a exploração da tarefa os alunos desse grupo se envolveram de forma bastante efetiva, demonstrando motivação e envolvimento a maior parte do tempo. A primeira coisa que fizeram foi a leitura do enunciado da tarefa e organização de como fariam a investigação. Dois alunos tomaram a dianteira nessa fase, os alunos **Gi** e **Ya**, que fizeram a leitura em voz alta para os demais, mas no decorrer da exploração, as discussões foram intensas e todos participaram de forma ativa, sugerindo, questionando, conjecturando e testando por meio de desenhos e cálculos que iam registrando.

Figura 20: Registros da Tarefa Ângulos 1 – Grupo I

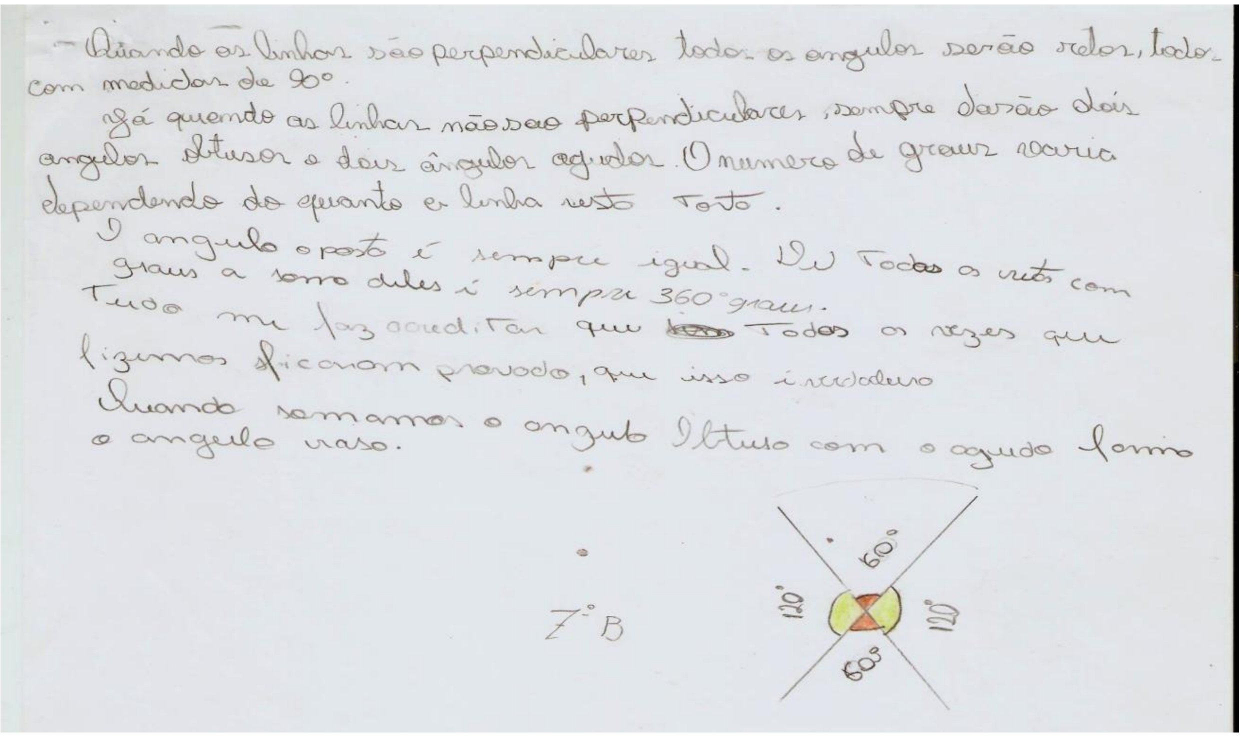


Fonte: Arquivo da pesquisadora

Foi um momento rico no desenvolvimento do raciocínio e linguagem matemática, pois em muitas das falas dos alunos desse grupo, percebeu-se a evolução da narrativa que usaram para explicar o que pensavam.

Percebemos nos registros dos alunos a ênfase que deram aos dois casos, um dos ângulos formados por retas perpendiculares e o outro das retas não perpendiculares. A imagem desses dois tipos de figuras chamou-lhes a atenção por algum tempo até que perceberam que os ângulos obtusos e os agudos eram opostos. Em seus cálculos resolveram somar esses ângulos, verificando que sempre resultavam em 360°. Após algum tempo, somaram um ângulo agudo com um obtuso, verificando que resultava em um ângulo raso:

Figura 21: Registro do Grupo I – Tarefa Ângulos 1



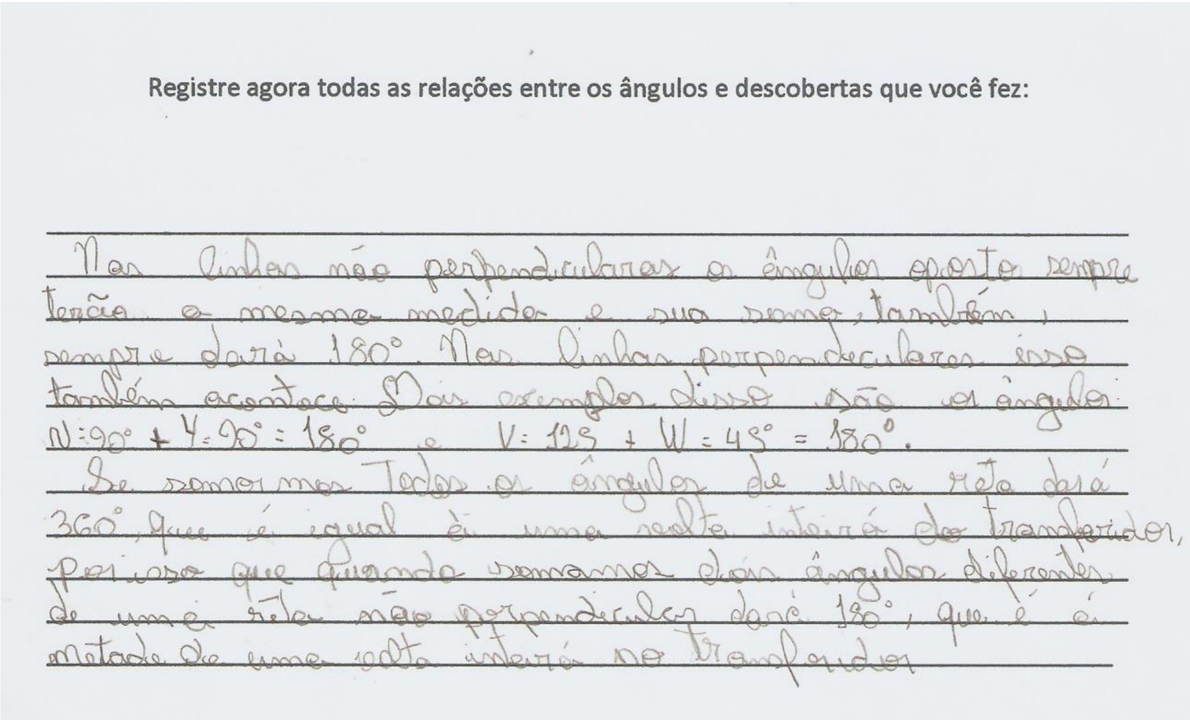
Fonte: Arquivo da pesquisadora

É interessante analisarmos a frase do aluno **Gi**: *Tudo me faz acreditar que todas as vezes que fizemos ficaram provado, que isso é verdadeiro.*

Nessa fase de escolaridade da Educação Básica, os alunos não compreendem a necessidade de uma “prova” formal, nem tampouco conhecem esse tipo de raciocínio e formalização. Aqui, o que é verdadeiramente fundamental é a discussão dessas “conclusões” e o desenvolvimento do raciocínio argumentativo. No desenvolvimento da tarefa em suas várias fases esses alunos tiveram a oportunidade de compartilhar descobertas, refutar algumas conjecturas feitas previamente e ampliar suas percepções sobre as propriedades dos ângulos formados e as relações entre eles.

No relato do aluno **Ya** (figura 22) observamos certa confusão em seu texto quando disse que os ângulos opostos sempre darão uma soma de 180°. Acreditamos que ele estava se referindo aos ângulos suplementares. Mais adiante ele voltou a escrever sobre esse tipo de relação: *quando somamos dois ângulos diferentes de uma reta não perpendicular, dará 180º, que é a metade de uma volta inteira no transferidor.*

Figura 22: Registro do Grupo I – Tarefa Ângulos 1



Registre agora todas as relações entre os ângulos e descobertas que você fez:

Nas linhas não perpendiculares os ângulos oposto sempre terão a mesma medida e sua soma, também, sempre dará 180°. Nas linhas perpendiculares isso também acontece. Nos exemplos disso são os ângulos: N: 90° + Y: 90° = 180° e V: 135 + W = 45° = 180°.
Se somarmos todos os ângulos de uma reta dará 360°, que é igual à uma volta inteira do transferidor, por isso que quando somamos dois ângulos diferentes de uma reta não perpendicular dará 180°, que é a metade de uma volta inteira no transferidor

Fonte: Arquivo da pesquisadora

A insistência em separar as figuras em dois tipos: ângulos formados por retas perpendiculares e ângulos formados por retas não perpendiculares pode ter ocorrido do fato deles acreditarem que as retas perpendiculares sejam um caso muito particular de retas concorrentes, cuja imagem visual apresenta um forte apelo. Uma hipótese para essa ênfase é a de que o conceito figural de ângulo reto tenha ficado muito forte em suas mentes desde o ano letivo anterior, quando tiveram contato com figuras e objetos com ângulos retos em atividades com materiais manipuláveis. Inclusive, esses alunos aprenderam que existe um triângulo muito especial, chamado triângulo retângulo, que tem esse nome por conter um ângulo reto. Os próprios esquadros de acrílico utilizados por eles nas aulas apresentam esses ângulos.

Já no relatório do aluno **Th**, há mais coesão no texto e coerência nas conjecturas registradas:

> *Nós descobrimos várias coisas, por exemplo, os ângulos de lados opostos sempre têm a mesma medida, quando a figura das retas é feita por linhas perpendiculares, temos o ângulo reto e todas as medidas de graus são 90. Agora se a linha não for perpendicular, temos na figura dois tipos de ângulos, o ângulo agudo e o obtuso, tendo assim duas medidas de graus diferentes, uma de cada lado.*

Para esse aluno, a escrita é um desafio sempre, pois se mostra muito mais motivado em tarefas que envolvem a oralidade que a escrita. Para ele, a redação desse pequeno parágrafo conclusivo foi um grande avanço.

Mesmo assim, devemos enfatizar o valor do registro escrito como processo importante para a avaliação acerca da aprendizagem realizada por esses alunos. Nesse ponto, concordamos com Brocardo (2001) que com o passar do tempo e as várias experiências, os alunos vão melhorando as redações de seus textos e organizando melhor os seus registros escritos.

Quando o aluno escreve, precisa pensar sobre o que está registrando, analisar, conjecturar, sintetizar, reformular e criar. Esse processo auxilia na memorização dos conceitos envolvidos na exploração/investigação.

No início do processo com tarefas exploratório-investigativas, os registros serviram apenas para nos indicar exatamente o que os alunos não compreenderam, não deixando de ser de grande valia para o diagnóstico da construção de saberes geométricos.

6.1.3 O Grupo II

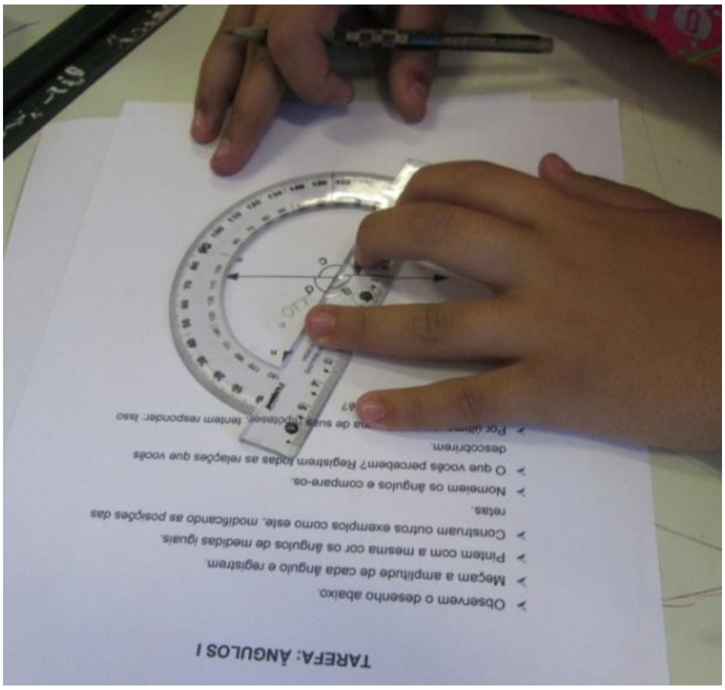
Esse segundo grupo audiogravado foi formado por quatro meninas: **Ell, Wa, Ac e Am**. No início da exploração, a aluna **Am** fez a leitura do enunciado para o próprio grupo e tentou explicar para as colegas o que era para ser feito. Essa aluna é líder nata, se destacando em várias atividades em sala de aula, com uma postura geralmente muito participativa e solidária.

Após a leitura, dividiram a tarefa:

> ***Ell**: Cada um mede dois.*
> ***Wa**: O **a** mede 70°.*
> ***Ac:** O **b** dá 110.*
> ***Ell**: O **c** é 70 também. É o mesmo!*

Nesse momento as alunas estavam medindo os ângulos ao contrário. Usavam a “segunda” marcação do transferidor. Esse problema apareceu em quase todos os grupos. Os alunos não conseguiam perceber que o que importava realmente era a diferença entre os valores indicados pelo transferidor para medir a amplitude dos ângulos.

Figura 23: Grupo II – Tarefa Ângulos 1



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Houve discussão sobre as medidas dos ângulos.

> ***Ac**: O **a** e o **c** dá 110.*
> ***Wa**: Dá 129. Vou usar meu tuti pra fazer isso.*
> ***Ell**: É mesmo! Vamos ver? Quanto vale cada tuti?*
> ***Wa**: É 20, não é?*

***Ell**: Uhm... é 112 vírgula...*
***Ac**: É 110 mesmo. É 110.*
***Ell**: Vai dar 110 mesmo. — Disse conferindo com o transferidor de acrílico.*
***Am**: Você tem que desenhar essas retas só que de jeitos diferentes. Tipo viradas.*
***Ac:** Tem que desenhar outros tipos de retas!*

As alunas deste grupo perderam muito tempo escolhendo as cores para pintar as figuras e discutindo se as medidas dos ângulos estavam certas ou não. Elas queriam pintar cada ângulo de uma cor diferente.

***Am**: Eu e a **Ac** vamos fazer como uma cruz. — Disse para as duas outras colegas.*
E voltaram a discutir como iriam construir os ângulos. Elas escolhiam a medida de um ângulo para então desenhá-lo em seguida, ao invés de traçar as retas e depois medir os ângulos formados.
***Wa:** Não dá certo com o tuti! Chama a professora!*
***Am:** Professora, aqui o dela deu errado.*
***Professora Sílvia**: O que deu errado?*
***Am:** Um ficou 120 e o outro 140.*
***Professora Sílvia:** O que vocês perceberam até agora? O que descobriram até agora?*
***Wa:** Eu tentei fazer com o tuti.*
***Professora Sílvia:** Mas aqui não está falando pra fazer (medir) com o tuti, não é? Eu acho que se você fizer com o tuti é possível que o resultado seja diferente. Aqui você anotou as medidas dos ângulos e aqui também... E o que vocês estão percebendo nos desenhos de vocês?*
Elas ficaram pensativas e nada disseram. Então insisti:
***Professora Sílvia:** O que está acontecendo? Neste desenho, este, aquele, este? O que eles têm em comum?*
***Ac**: Têm dois iguais. Dois números de ângulos iguais.*
***Professora Sílvia:** Quantos exemplos vocês fizeram?*
***Ac:** Quatro.*

***Wa**: Um exemplo!*

***Professora Sílvia:** Um exemplo só? Não acha que é pouco?*

As alunas ficaram pensativas e se dispuseram a trabalhar mais, fazer outras figuras para testar. No entanto, elas continuaram tentando construir ângulos aleatoriamente, sem se preocupar nesse momento em seguir a orientação do enunciado ou observar as propriedades e relações entre os ângulos.

***Ell**: O meu não deu certo até agora.*

***Professora Sílvia:** Mas aqui você tem duas retas como estas aqui? — Mostrei o exemplo do enunciado. M e n?*

***Ell:** Ah... É pra fazer assim?*

***Professora Sílvia:** Duas retas. Não são duas retas? Se cortando? Tem que fazer como essas, só que mudando as posições das retas para verificar o que acontece.*

Após esse momento, elas passaram a discutir como iriam nomear os ângulos.

***Ell**: Am, você não vai colocar os nomes aí , aqui na... tem que colocar nas linhas. Quer que eu pergunte pra professora? Tem uma linha **m** e outra **n**!*

A discussão era sobre se deviam ou não nomear as retas também.

Após algum tempo elas continuaram tentando elaborar alguma conjectura.

***Am**: E o que que eu estou falando desde o início?*

***Ell**: Não sei.*

***Am:** Assim: quando temos duas retas os ângulos são... dois dos ângulos são iguais. Duas duplas.*

***Wa**: Vai ser a mesma!*

***Ell**: Aqui ó, vai dar a mesma coisa.*

***Wa**: Então vai dar igual em todas! É isso, óh meu Pai!*

Nesse ponto, as alunas Wa e Ell finalmente perceberam o que as outras duas já haviam observado.

Então a professora interveio:

***Professora Sílvia:** Além disso, tem mais alguma coisa?*

***Am**: Eu percebi uma coisa.*

Professora Sílvia: *O que?*

Am*: Que esses dois são iguais e são acima de 100° e esses dois que são iguais são abaixo de ... — Ela não concluiu. Ficou pensando.*

Apontando para um ângulo agudo e depois para um obtuso, perguntei:

Professora Sílvia: *Que tipo de ângulo é esse? E este outro aqui?*

Ac*: Ângulo agudo e ângulo obtuso? Isso né? Agudo e obtuso.*

Am: *Quando os ângulos são obtusos, eles são acima de 100 graus.*

Nesse momento ela parou e não prossegui com o que dizia.

Havia claramente a questão de não terem memorizado as classificações dos ângulos agudos e obtusos. Ficaram discutindo sobre as medidas destes ângulos.

Professora Sílvia: *Se você olhar aqui — Apontei para o transferidor encaixado sobre o ângulo — não percebe nada?*

Queríamos que elas percebessem que os dois ângulos (agudo e obtuso juntos formavam um ângulo de 180°).

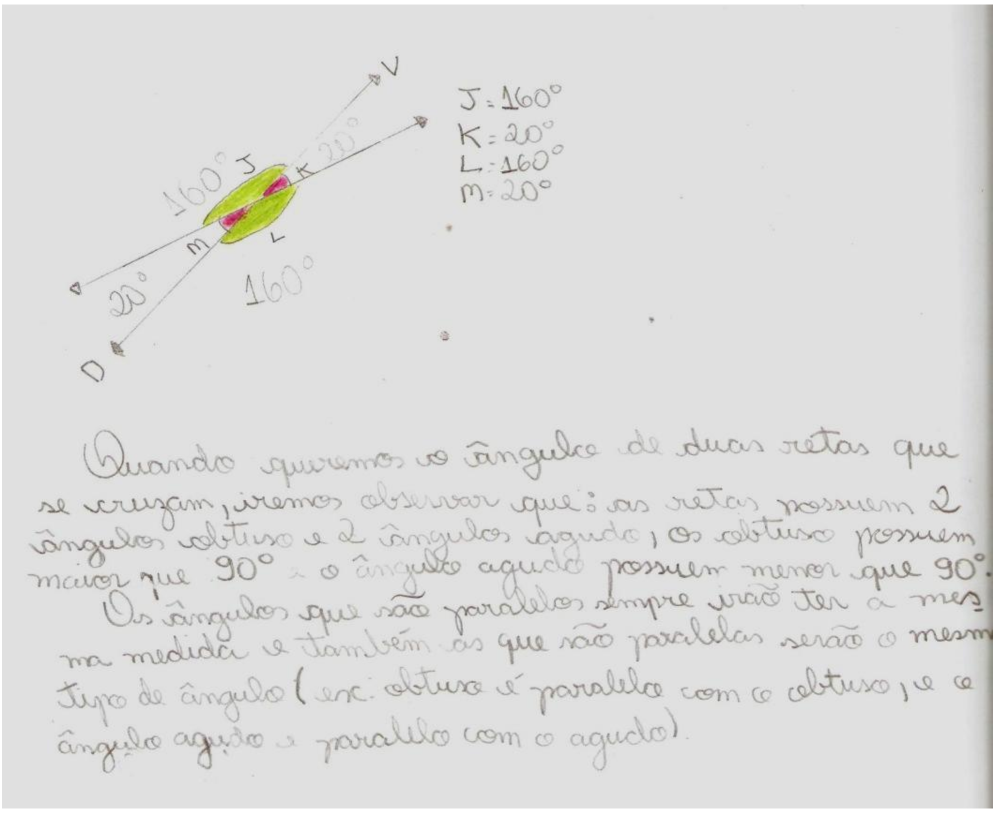
É algo muito difícil para o professor não dar uma resposta, não adiantar e atropelar a descoberta dos alunos. Quando a aluna **Am** disse que para ser obtuso o ângulo precisava ter mais que 100 graus foi muito difícil não contestar. Esse é um exercício complicado para o professor que passa muito tempo trabalhando apenas com questões e situações de aprendizagem rotineiras. Mesmo assim, nesse momento, a professora não disse que a aluna estava enganada, apenas pediu para que prestassem mais atenção ao que estavam afirmando e verificassem essa afirmação. Não levou muito tempo para que a própria aluna, em conversa com suas colegas do grupo, percebesse seu engano e reformulasse sua afirmação sobre as condições dos ângulos para serem agudos ou obtusos.

6.1.4 Desenhando e escrevendo nas aulas de Matemática: Grupo II

Nesta fase de registros de conjecturas e testes, as alunas escreveram coisas que não verbalizaram e conseguiram organizar melhor as ideias que tinham discutido durante a tarefa. Inclusive explicaram sobre os ângulos agudos e obtusos usando a comparação de maior que 90° e menor que 90°, modificando o que disseram durante o diálogo gravado. Para expressar “ângulos opostos” elas escreveram “ângulos paralelos”.

A aluna **Am** foi a redatora do grupo, registrando o que descobriram neste primeiro momento da exploração. O texto (figura 24) mostra que não há ainda uma utilização correta de alguns termos geométricos. Enquanto que no **Grupo I**, os alunos usaram o termo “ângulos convexos”; nesse grupo apareceu a expressão “ângulos paralelos”, para indicar os ângulos opostos pelo vértice.

Figura 24: Grupo II – Tarefa Ângulos 1



Fonte: Arquivo da pesquisadora

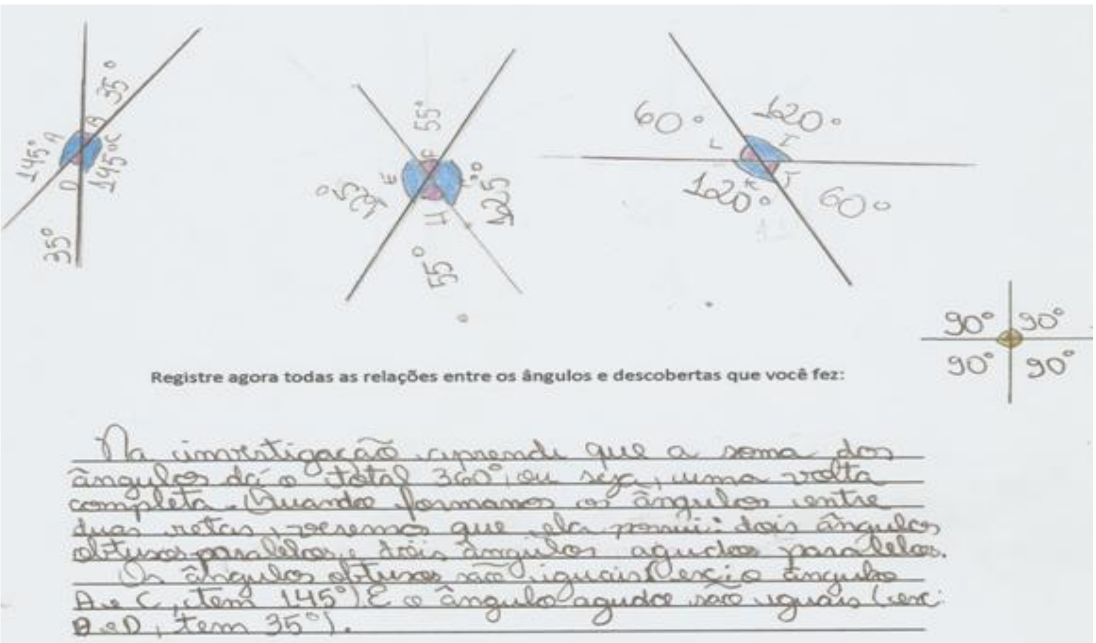
A impressão que ficou muito evidente a respeito desse grupo para a professora-pesquisadora foi o fato das alunas quase não expressarem oralmente suas ideias quando eram questionadas. Elas pareciam tímidas, falavam baixo e pareciam pensar mais e falar menos. Isso aconteceu com vários grupos de alunos durante a aula. Os alunos de um modo geral, não verbalizavam suas conjecturas. Ponte (1998a) se refere a essa situação explicando que na interação entre os alunos existem muitas coisas que parecem ser pensadas, mas não chegam a ser ditas:

> Os alunos não dizem tudo o que pensam, mesmo quando pensam em voz alta, e isso muitas vezes dificulta a comunicação. Entre eles, grande parte da comunicação é não verbal. Por vezes, os alunos têm ideias interessantes, mas têm também dificuldade em expressá-las clara e corretamente — trata-se de um problema relativo ao domínio de ferramentas cognitivas básicas. Uma vez obtidas as conclusões, outra grande dificuldade manifestada por muitos alunos é a elaboração do seu registro escrito. Na comunicação, termos matemáticos inadequados são usados com sucesso, o que, no entanto, não impede os alunos de fazerem muitos raciocínios corretos (PONTE, 1998a, p. 7).

Nesta etapa o que mais dificultou o desenvolvimento da tarefa para o **Grupo II** foi o tempo despendido para o desenho e pintura das figuras, além das discussões sobre as medidas dos ângulos. Assim como nos demais grupos, conjecturas que não verbalizavam, mas que pareciam formular por meio de observações de poucos casos, foram assumidas como conclusões. Essa foi uma característica que apareceu em todos os grupos. Faziam um ou dois exemplos e já "concluíam".

A seguir pode-se analisar o relatório que a aluna **Am** fez após a discussão dos resultados:

Figura 25: Grupo II – Tarefa Ângulos 1

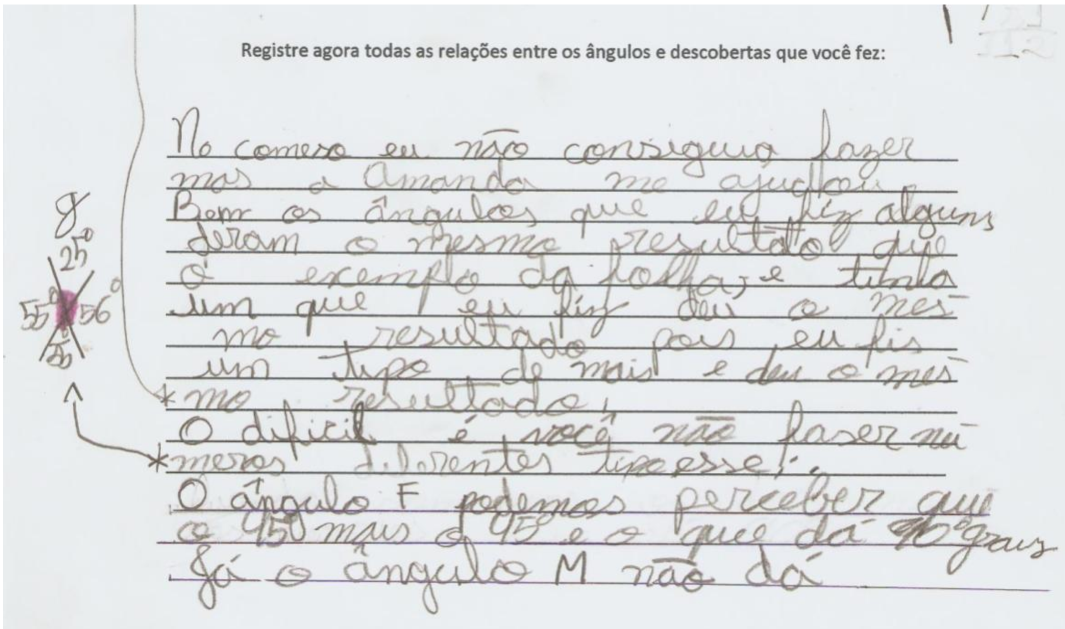


Fonte: Arquivo da pesquisadora

A aluna manteve a notação “ângulos paralelos”. Denotando a ausência do conceito figural de paralelismo.

A aluna **Wa** apresentou muita resistência para trocar o transferidor de papel pelo convencional e mesmo após várias intervenções e discussões, apresentou registros confusos, como o texto que redigiu em seu relatório individual. Ela não conseguia medir os ângulos com precisão, elaborando falsas conjecturas. Além disso, se fixou em tentar copiar a figura apresentada no enunciado da tarefa, dizendo ser “difícil não fazer números diferentes” (figura 26).

Figura 26: Grupo II – Tarefa Ângulos 1



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Quanto ao processo de argumentação desse grupo, ficou muito a desejar, o que é compreensível, visto que para esses alunos entraram em jogo muitas variáveis que para eles não eram comuns, sobretudo nas aulas de Matemática: trabalhar em grupo, ouvir o outro, concordar ou refutar, interpretar, analisar, conjecturar e comunicar suas descobertas foram só algumas das atividades envolvidas.

Procurar por argumentos que justificassem as conjecturas formuladas foi algo que nem passou pela mente dessas alunas e, embora no 1º ciclo do Ensino Fundamental II o processo de demonstração matemática esteja aquém das capacidades dos alunos, a formulação de conjecturas e argumentações devem ser estimuladas e amplamente desenvolvidas para dar suporte às futuras demonstrações que aprenderão a fazer nas séries/anos seguintes. Sobre o processo de argumentação encontramos a seguinte consideração nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> (...) é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas (BRASIL, 1998, p. 71).

6.1.5 Análise geral dos registros dos grupos

Após a aplicação da tarefa com os nove grupos, obtivemos os seguintes resultados a partir dos registros escritos:

- Cinco grupos escreveram sobre as medidas dos ângulos opostos, concluindo que são sempre as mesmas;
- Dois grupos perceberam que entre as retas sempre existem dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos;
- Quatro grupos apontaram que a soma dos quatros ângulos dão sempre 360°;
- Quatro grupos indicaram que os a soma dos ângulos adjacentes resultam 180° ou que é igual ao ângulo raso. Eles não usaram o termo adjacente, ao invés disso, escreveram “paralelos” ou “ângulo obtuso + ângulo agudo”;
- Apesar da maioria dos grupos ter desenhado retas perpendiculares, apenas um grupo registrou que neste caso, os ângulos formados dão sempre 90° (ângulos retos);
- Três grupos apresentaram grande dificuldade com a medição de ângulos. Um deles marcou a medida dos ângulos sobre as retas, deixando claro que não compreenderam ainda o conceito de ângulo. Nesses grupos apareceu sempre o desenho de retas perpendiculares e figuras para testes iguais a que foi dada no enunciado da tarefa, o que demonstra certo engessamento na forma de pensar.

Um fator complicador desta tarefa foi o problema com as medições dos ângulos. Os alunos não conseguiam perceber as relações porque erravam nas medidas. Isso ocorria por dois motivos: alguns alunos não tinham desenvolvido habilidades para manusear o transferidor com destreza e o próprio transferidor, muitas vezes não era um instrumento tão preciso. Se eles percebessem logo de início que cada par de ângulos adjacentes eram suplementares, talvez fosse mais fácil a medição. No entanto, esse fato só foi percebido após algum tempo de exploração da tarefa.

Em contrapartida, essa foi uma excelente oportunidade para se perceber com mais atenção as dificuldades apresentadas pelos alunos, auxiliando-os de forma mais dinâmica e pontual. Às vezes, o que aparentemente não dá certo pode gerar reflexões e análises que enriquecem a aprendizagem.

A elaboração de testes e o levantamento de conjecturas, por vezes chamadas de hipóteses, ocorreram na medida em que os alunos foram realizando a medição dos ângulos e discutindo sobre a tarefa. No entanto, vale ressaltar que:

> As conjecturas, mesmo quando resistem a vários testes, não têm ainda o estatuto de verdades matemáticas. Para serem consideradas matematicamente válidas têm de ser justificadas com base numa argumentação lógica ou, pelo menos, plausível” (PONTE, 1998a, p. 9)

Em alguns grupos, as conjecturas surgiam logo de início para depois realizarem os testes, já em outros grupos os alunos precisaram fazer alguns desenhos antes de pensar sobre o que estava acontecendo. Nestes casos foi necessário que a professora inquirisse várias vezes para que percebessem algum tipo de relação entre os ângulos. Isso é observado nos trechos das audiogravações, como na transcrição a seguir de outro grupo de alunos:

> ***Professora Sílvia****: — Vocês entenderam o que é pra fazer?*
>
> ***Aluno Br****: — Sim. Nós estamos desenhando.*
>
> ***Professora Sílvia****: — E vocês já perceberam alguma coisa?*
>
> ***Aluno Br****: — Eu vi que as medidas dos lados opostos são iguais.*

> ***Professora Sílvia**: — Que medidas? O que você tá chamando de lados?*
> ***Aluno Br:** —Esses aqui. — E apontou para os ângulos.*
> ***Professora Sílvia**: — E isso se chama lado?*
> ***Aluno Br**: — Não... É...é ângulo. São ângulos.*
> ***Professora Sílvia**: — Então como você poderia registrar sua ideia?*
> ***Aluno Br**: — Que as medidas dos ângulos opostos são iguais!*
> *A professora não conteve a expressão de contentamento:*
> ***Professora Sílvia**: — Isso mesmo! Uau! Então escreva essa sua hipótese e verifique para ver se funciona sempre, ok?*

Além disso, um único caso era suficiente para que tirassem "conclusões", sendo preciso que se perguntasse se já haviam testado em outras situações e explicasse que isso era muito importante nesse tipo de aula.

Existe um tipo de resistência por parte dos alunos em fazer outros testes, elaborar exemplos diferentes e verificar se a conjectura é válida em "mais casos". Os alunos gostam de ficar em grupos para conversar, para estarem perto dos amigos e isso gera muito barulho e distração, o que dificultou muito a investigação.

Embora essa tarefa não envolvesse a possibilidade de "muitas descobertas" diferentes, devido ao número limitado de informações e relações entre os ângulos formados por duas retas secantes, a procura por qualquer tipo de demonstração que validasse suas conjecturas nem passou perto da preocupação dos alunos. Não se percebeu curiosidade em saber o porquê das relações ocorrerem. Pensamos que para esses alunos, com pouca experiência em atividades de natureza exploratório-investigativa e que ainda não aprenderam a trabalhar com generalizações, o raciocínio dedutivo é algo ainda um pouco distante. No entanto, é exatamente nesta fase do desenvolvimento humano que aumentam as capacidades em se fazer inferências e conexões lógicas, abstrações e argumentações. É nesse ponto que as tarefas exploratório-investigativas ganham destaque e podem se tornar ótima estratégia de ensino e aprendizagem em sala de aula. Mesmo que a tarefa fique em nível de uma exploração e não atinja o *status* de investigação matemática, não deixa de ter seu valor para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Segundo Grando, Nacarato e Luci (2008, p. 54):

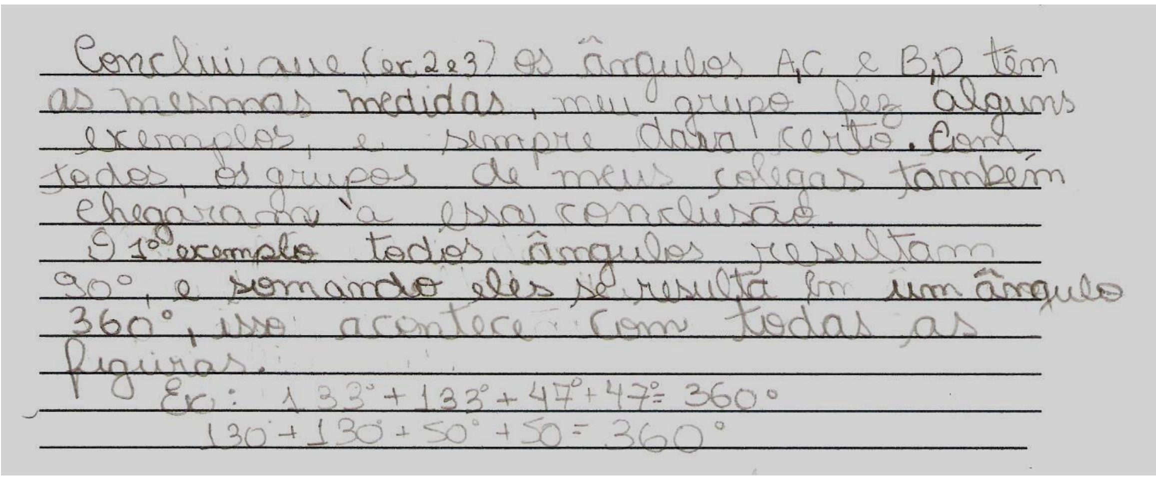
> (...) mesmo que uma tarefa não se torne investigativa, a dinâmica adotada para a sua realização (trabalho em pequenos grupos, registro das estratégias e socialização oral para a classe toda) cria um ambiente de comunicação de ideias matemáticas propício à produção de novos conhecimentos pelos alunos e implica desafios para o professor.

Quanto ao processo de argumentação, que ocorre numa tarefa desta natureza, entendemos que está mais próximo das práticas discursivas espontâneas e é regido mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração. Se por um lado, a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro lado, ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração. Nessa perspectiva, vemos a argumentação como processo fundamental para a aprendizagem de uma Matemática rica e dinâmica.

Analisando todos os dados obtidos nesta tarefa, percebemos que os alunos muitas vezes se confundiam ao utilizar os termos geométricos. No **Grupo I** os meninos utilizaram o termo "convexos" para se referir aos ângulos opostos, já no **Grupo II** chamaram esses ângulos de "paralelos", o que ficou evidente, de acordo com Fischbein (1993), que não possuíam o conceito figural de paralelismo formado. De início, até mesmo a nomenclatura para o termo ângulo apresentou algum tipo de confusão, como podemos observar na fala do aluno **Br**, integrante de um outro grupo de alunos*: Eu vi que as medidas dos lados opostos são iguais.* Fala como essas se repetiram: *Na reta perpendicular todos os lados são iguais, com a mesma medida, somando no total 360°; Eu descobri que se cruzarmos duas linhas, somando os lados sempre vai dar 180°.*

Com o desenvolvimento das atividades, conversa com os colegas e com a professora, os próprios alunos foram reformulando muitas vezes suas frases e hipóteses iniciais, utilizando termos mais adequados nos registros escritos. A aluna **Ell** nomeou os ângulos usando letras maiúsculas, mesmo não sendo o mais adequado consideramos ser um avanço, visto que no início da tarefa a aluna apresentou dificuldades em interpretar o enunciado. No relatório que fez na aula seguinte, essa aluna descreveu que os ângulos têm as "mesmas medidas" e não que os lados são iguais, como aconteceu em muitos relatos dos demais alunos.

Figura 27: Grupo II – Tarefa Ângulos 1


Concluiu que (ex. 2 e 3) os ângulos A,C e B,D têm
as mesmas medidas, meu grupo fez alguns
exemplos, e sempre dava certo. Com
todos os grupos de meus colegas também
chegaram à essa conclusão.
O 1º exemplo todos ângulos resultam
90°, e somando eles se resulta em um ângulo
360°, isso acontece com todas as
figuras.
Ex: 133° + 133° + 47° + 47° = 360°
130 + 130 + 50° + 50 = 360°

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Quando pensamos no aspecto da visualização, a questão que podemos fazer é: até que ponto a figura apresentada na folha com o enunciado da tarefa auxiliou ou complicou a atividade mental do aluno? Principalmente para o **Grupo II** o que podemos notar é que as meninas não conseguiam a princípio imaginar que as retas podiam deslizar uma sobre a outra, ampliando ou diminuindo os ângulos formados entre elas. Esse tipo de problema poderia ter sido minimizado com o uso de um software de Geometria Dinâmica ou até mesmo com a utilização de material manipulável, como fizemos na Tarefa Ângulos 2 ? Essa é uma alternativa a ser considerada.

Segundo Ponte (2009, p.87) “o uso de materiais manipuláveis constitui um importante ponto de partida que entusiasma os alunos a fazer explorações, apoia a recolha de dados e a formulação de conjecturas”.

Nesta tarefa, mais difícil para o aluno foi o fato de que ele precisava ver a figura e abstrair a imagem, percebendo mentalmente que as retas podiam se movimentar e depois representar essa situação no papel novamente. Um processo mental de desconstrução e reconstrução de imagens, ampliando significados e conceitos. Sobre esse fato, Pais (1996, p.71), explica “que a transposição da dupla correlação dialética, do particular para o geral, do concreto ao abstrato, é possivelmente o principal obstáculo vivenciado pelo aluno no desenvolvimento inicial da aprendizagem de conceitos figurais”.

A princípio, as alunas **Ell** e **Wa**, do **Grupo II**, não exercitaram esse tipo de pensamento. Elas resolveram desenhar ângulos utilizando o transferidor de papel, determinando primeiro os valores dos ângulos para depois observar se a figura havia ficado parecida com a que estava representada no enunciado. Só após a intervenção da professora-pesquisadora essas alunas perceberam o que deveriam fazer:

> ***Ell**: O meu não deu certo até agora.*
> ***Professora Sílvia:** Mas aqui você tem duas retas como estas aqui?*
> *— Mostrei o exemplo do enunciado. M e n?*
> ***Ell:** Ah... É pra fazer assim?*

Pelos relatos escritos foi possível inferir que mesmo não apresentando o rigor da Matemática formal, esses alunos comunicaram ideias e conjecturas matemáticas relacionadas a conceitos em processo de elaboração. Tudo indica que houve uma mobilização de saberes geométricos e a ampliação de alguns conceitos figurais, como o de ângulo, tipos de ângulos (reto, agudo e obtuso), perpendicularidade, propriedade dos ângulos opostos pelo vértice e suplementares.

Concordamos com Ponte (2009, p.89) de que na realização de explorações e investigações geométricas, deve ser dado ao aluno tempo e oportunidade para que o mesmo possa organizar suas experiências espaciais. A aprendizagem de conceitos figurais não ocorre rapidamente, em um curto espaço de tempo.

6.2 Tarefa Ângulos 2

Constatada a dificuldade dos alunos na medição de ângulos durante o desenvolvimento das atividades da tarefa exploratória anterior (Ângulos 1), dedicou-se algum tempo, cerca de oito aulas, para se retomar noções de ângulos, ângulos retos, medição e construção de ângulos com régua, esquadros e compasso desenvolvendo habilidades por meio de atividades e questões propostas em livros didáticos e no próprio Caderno do Aluno, Vol. 2 (SÃO PAULO,2009). Segundo o Caderno do Professor, Vol. 2 (SÃO PAULO, 2009), as atividades propostas no Caderno do Aluno contribuem para desenvolver a motricidade fina por meio de instrumentos geométricos de desenho, bem como o pensamento antecipatório nos processos de resolução de problemas. Nas tarefas trabalhadas com o Caderno do

Aluno, Vol. 2 (2009), eles precisavam medir ângulos usando o transferidor, construir ângulos usando esquadros, régua e compasso, construir a bissetriz de um ângulo dado e traçar percursos com régua e transferidor, usando a ideia de ângulo de giro. Além dessas atividades, propusemos aos alunos, a construção de polígonos regulares usando esses instrumentos de medida. Eles fizeram construções do triângulo regular, passando pelo quadrado, pentágono, hexágono, heptágono e octógono. Em seguida, fizeram atividades do livro didático adotado na escola, verificando os conhecimentos adquiridos. A maioria dos alunos fez as atividades do livro com bastante autonomia e rapidez, mobilizando os conceitos trabalhados anteriormente.

No Caderno do Aluno não se aborda a nomenclatura de ângulos complementares, suplementares ou qualquer outra definição além dos nomes dos tipos de ângulos (reto, raso, agudo, obtuso e reflexo), mas pensando na exploração que fariam posteriormente e numa preocupação com o enriquecimento da linguagem matemática, foi apresentado aos alunos a definição de ângulos suplementares antes de iniciarmos a tarefa Ângulos 2. Desse modo, após as tarefas descritas neste item, percebemos que os alunos sentiam-se mais seguros no trabalho com os instrumentos de construção e medidas de ângulos, reconheciam ângulos agudos, obtusos, retos e rasos e conseguiam realizar as medições com maior precisão. Além disso, desenvolveram a motricidade fina enquanto construíam ângulos e figuras geométricas.

Iniciamos essa segunda tarefa, no dia 24 de julho com o objetivo de ampliar os conhecimentos acerca de algumas propriedades dos ângulos. Como já foi comentado anteriormente, segundo o Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009), o professor não deve se preocupar "num primeiro momento" com formalizações e sim em proporcionar situações para que o aluno construa o conceito de ângulo. No entanto, nesse mesmo documento, orienta-se que o professor pode usar alguns tipos de ângulos para introduzir termos como correspondentes, alternos e opostos pelo vértice.

Os dias em que desenvolvemos a tarefa foram atípicos, pois devido ao mal tempo, muitos alunos faltaram à escola. Trabalhamos com apenas 18 alunos, sendo 11 garotos e 7 garotas num período de duas aulas de 50 minutos (aulas duplas) e uma aula no dia posterior de 50 minutos para a elaboração de relatórios escritos e uma atividade diagnóstica sobre os conceitos geométricos mobilizados na tarefa. Os alunos foram organizados em duplas e receberam canudinhos de refrigerante e tachinhas para montarem as estruturas propostas no enunciado da tarefa, com materiais manipuláveis.

Ponte (2009, p. 87) "ressalta que professores e alunos devem ter acesso a material apropriado para desenvolver problemas e ideias para explorações e que todas as salas de aula devem ser equipadas com conjuntos de materiais manipuláveis".

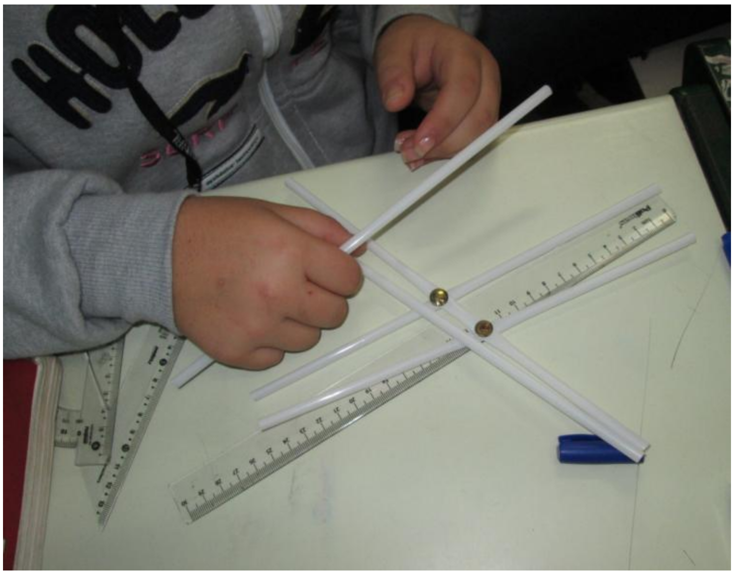
Como não dispomos em nossa escola pública de um ambiente equipado com tais materiais manipuláveis, muitas vezes, improvisamos; utilizando materiais de baixo custo que podem servir aos propósitos educacionais.

Na primeira aula os alunos exploraram o material manipulável e tentaram realizar as atividades propostas. Já na segunda aula foi feito o registro escrito mais sistemático do que observaram e a discussão dos resultados. Numa etapa seguinte, em aula posterior de 50 minutos, os alunos realizaram algumas atividades envolvendo ângulos e responderam algumas questões sobre os conceitos trabalhados na tarefa.

Como veremos mais adiante, o registro escrito desta vez se mostrou mais organizado e coeso que a própria fala ou comunicação oral. A exploração iniciou-se por meio de uma explicação sobre o que deveriam fazer com os canudinhos.

Os alunos demonstraram bastante interesse com a possibilidade de usarem os canudinhos para formarem as figuras desenhadas. Mesmo assim, tiveram dificuldades em medir os ângulos formados usando o transferidor, pois os canudos se moviam ao serem manipulados. Percebendo esse problema, pensamos em orientar os alunos para que fizessem um modelo da figura construída, no papel. Desta maneira seria mais fácil para eles medirem os ângulos construídos. Assim, à medida que iam movendo o canudo transversal, deveriam desenhar outra figura e medir os ângulos, mas na forma bidimensional representada.

Figura 28: Tarefa Ângulos 2



Fonte: Arquivo da pesquisadora

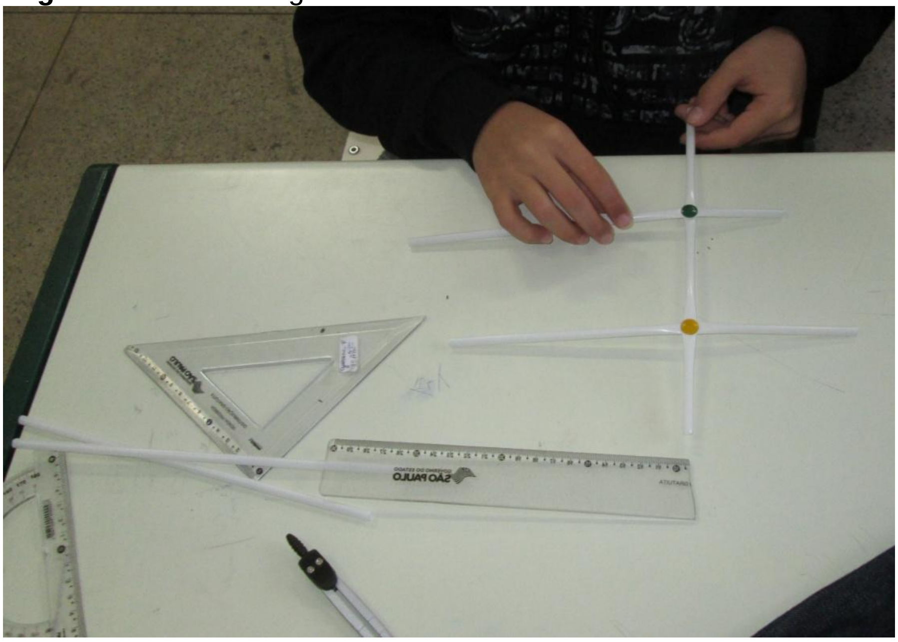
A utilização dos canudinhos de refrigerante para iniciar a tarefa teve como objetivo principal tornar a exploração mais dinâmica e auxiliar o pensamento no sentido do aluno perceber algum tipo de movimentação possível entre as retas. Diferente do uso de um software como o Geogebra, onde é possível fixar pontos e retas, movimentando-se os elementos conforme se queira, a opção por este tipo de material favoreceu apenas o movimento "giratório" da reta transversal sobre as paralelas e entre as retas paralelas, o que em nosso ponto de vista já foi uma vantagem. Conforme as movimentações que faziam, os alunos deixavam a transversal perpendicular às paralelas, transformavam as paralelas em retas "não paralelas" e modificavam as aberturas dos ângulos.

Acreditamos que o uso de materiais manipuláveis deve ser cuidadosamente estudado antes de ser inserido como estratégia de ensino, e mesmo com muito planejamento, não há como prever como os alunos irão se comportar e o que conseguirão "enxergar". Sobre isso, Matos e Serrazina[13] (1996), apud Nacarato (2005, p.3) ressaltam que embora muitos professores e alunos defendam o uso do material manipulável nas aulas de Matemática, "não há nenhuma garantia que os alunos vejam as mesmas relações nos materiais que vemos".

---

[13] MATOS, José M.; SERRAZINA, Maria de Lurdes. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

Figura 29: Tarefa Ângulos 2.



Fonte: Arquivo da pesquisadora

A observação da professora-pesquisadora no momento da exploração com os canudinhos foi importante para que os alunos tomassem contato com mais um termo e conceito geométrico: o conceito de reta transversal. Além disso, retomamos o conceito de paralelismo, quando os alunos foram orientados a desenharem primeiramente modelos com retas paralelas entre si.

Na tarefa **Ângulos 1**, os alunos haviam demonstrado não dominar totalmente este conceito. O interessante é que eles pareciam saber quando as retas eram paralelas, mas usaram esse mesmo termo para classificar os ângulos opostos pelo vértice e ângulos adjacentes, o que indicou a não construção do conceito figural de paralelismo e um conceito imagem ainda confuso. Deste modo, nossa hipótese é que no decorrer desta tarefa, o conceito imagem de paralelismo para os alunos envolvidos, abrangia muitas ideias diferentes.

O que ficou bastante evidente é que essa exploração precisou de mais intervenção e mediação que a tarefa anterior (**Ângulos 1**). Os alunos precisavam a todo o momento de orientação sobre o que deveriam observar e relacionar. Alguns alunos perderam muito tempo brincando com os canudinhos, deixando a exploração de lado. Uma dupla de alunos considerados muito bons em atividades rotineiras produziu “pouca Matemática” devido a essa distração. O lado lúdico do material tomou conta da atividade. Isso nos levou a refletir ainda mais sobre o uso do material manipulável nesse contexto e considerar que esse tipo de recurso didático deve ser bem planejado pelo professor e negociado com os alunos previamente. Além disso, é bem natural que nessa faixa etária, os alunos se envolvam e manipulem materiais concretos como fazem com brinquedos.

Durante a realização da tarefa, muitas questões foram feitas na tentativa de fazer com que os estudantes percebessem algumas relações possíveis entre os ângulos, sendo nessa tarefa o diálogo entre professora e alunos, predominante:

> ***Professora:*** *Se vocês pararem para perceber, usando o que vocês descobriram na Tarefa Ângulos 1, será que é preciso medir todos os ângulos aqui? Se eu tiver a medida do ângulo* ***a*** *é possível eu saber a medida do ângulo* ***b****?*
> ***Alunos:*** *Sim.*
> ***Professora:*** *Eu preciso medir o ângulo* ***b****?*
> ***Alunos:*** *Não!*
> ***Professora:*** *Por que não?*
> ***Aluno Br****: Porque são... opostos.*
> ***Professora:*** *São opostos não é? E ai vocês já sabem o que acontece com os ângulos opostos.*

O diálogo continuou com a professora tentando fazer com que os alunos percebessem que quando conheciam o valor de um ângulo, poderiam saber o seu suplemento sem medir com o transferidor.

Os alunos estavam mais quietos e introvertidos quando eram questionados, mas conversavam baixinho sobre assuntos pessoais. A **dupla II** não levou a sério o fato de seu diálogo estar sendo gravado. Passaram todo o tempo com conversas paralelas e cantarolando baixinho, o que impossibilitou a transcrição posterior de suas falas. Também tivemos problemas de microfonia e contamos apenas com as anotações pessoais da professora-pesquisadora, os registros escritos dos alunos e a gravação de áudio da introdução da tarefa por esta docente e discussão com a turma na segunda fase.

Na transcrição da discussão da tarefa percebe-se que os alunos não queriam falar. Eles praticamente se recusaram a expor suas ideias quando questionados e por ter se tornado fundamental essa etapa para o processo de aprendizagem dos alunos e auto reflexão por parte da professora-pesquisadora, optamos por descrevê-la com mais detalhes na análise desta tarefa.

Escolhemos alguns registros dos mesmos alunos que formavam os grupos na tarefa anterior para analisar o processo de evolução que apresentaram e alguns registros de casos interessantes que ocorreram especificamente nesta tarefa sobre ângulos.

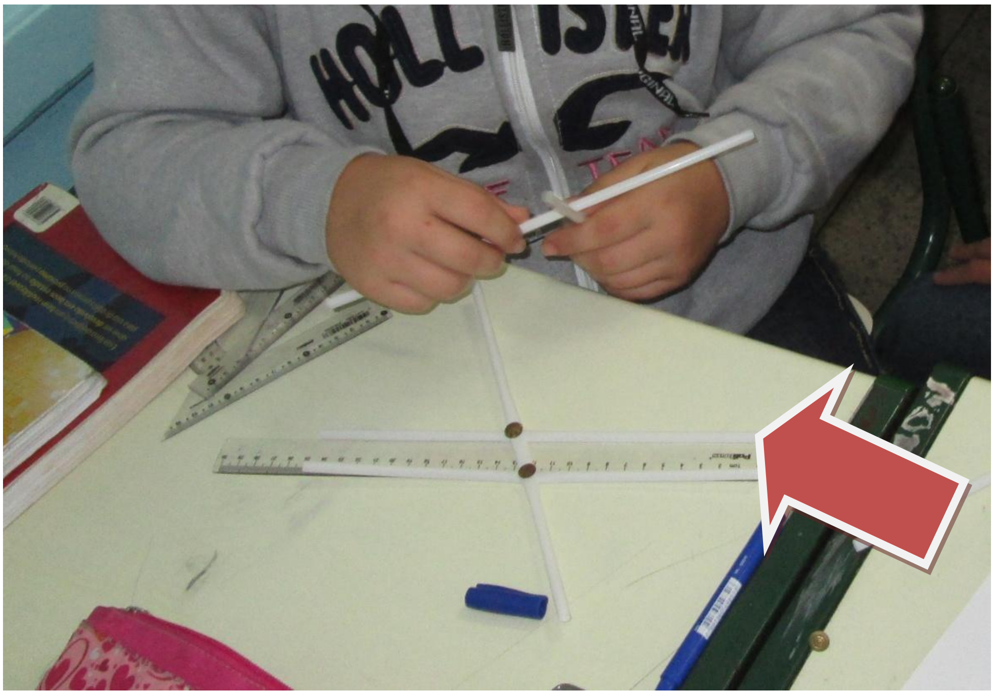
6.2.1 O caso da dupla I

A **dupla I** foi formada por duas alunas que participaram do grupo II da tarefa anterior: as alunas **Am** e **Ell**. Essas alunas fazem parte da turma desde o ano letivo anterior e como já foi mencionado, são alunas que vem se destacando nas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas por dois anos consecutivos. Participam também de aulas extras de Matemática no contra turno uma vez por semana. Nestas aulas elas trabalham em grupos na resolução de problemas e desafios. São meninas normalmente muito interessadas e consideradas muito boas alunas, inclusive na disciplina de Matemática. Além disso, são amigas e estão sempre juntas durante as aulas e nos intervalos. No entanto, no decorrer da tarefa elas falaram pouco e muito *“baixo”*; apenas discutiram sobre como arrumar os canudinhos e iniciaram os registros.

A hipótese para essa maior introspecção dos alunos é que com a turma reduzida à metade, mudou-se completamente o ambiente de sala de aula e qualquer coisa que dissessem, era ouvido por todos os colegas. Outro ponto a ser considerado é que os grupos de amigos não estavam completos e, além disso, os alunos foram dispostos em duplas e não em grupos maiores, como aconteceu na primeira tarefa sobre ângulos.

Após a explicitação do enunciado da tarefa, as alunas começaram a trabalhar, construindo seus modelos com os canudinhos:

Figura 30: Tarefa Ângulos 2



Fonte: Arquivo da pesquisadora

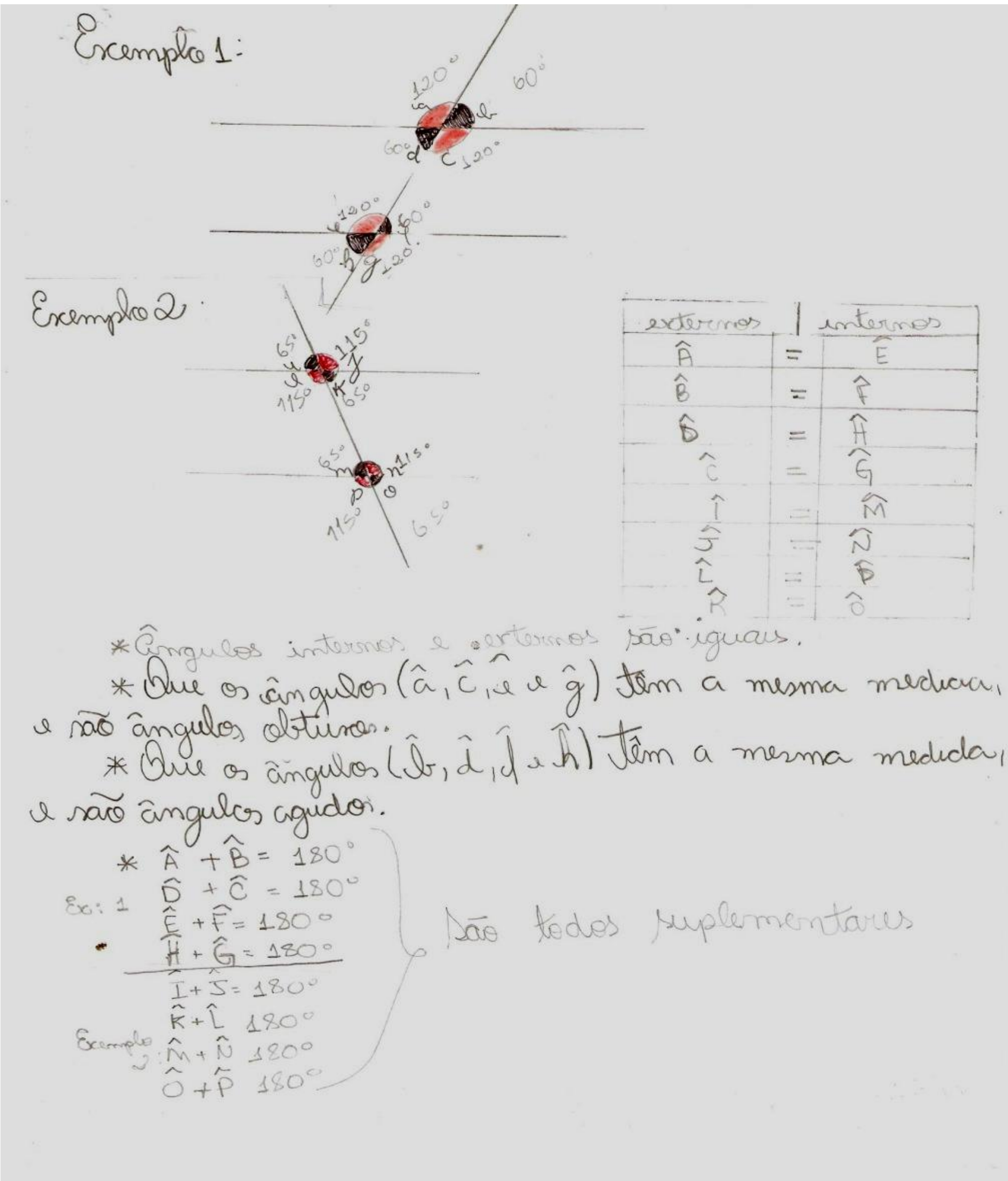
Podemos observar que elas usaram a própria régua para deixar os canudos paralelos entre si, uma ideia que outros alunos não tiveram (figura 30).

O passo seguinte foi a elaboração de alguns testes escritos para identificar as relações entre os ângulos, o que a dupla fez com bastante eficiência (figura 31).

Em seus registros observamos o pequeno número de testes realizados e uma tendência em elaborar-se “conclusões” a partir de poucos exemplos. As duas estudantes fizeram dois desenhos e utilizaram também as figuras do enunciado para realizar suas medições.

Os testes realizados por elas foram referentes às primeiras questões da tarefa, onde as retas deveriam ser paralelas e interceptadas por uma transversal.

Figura 31: Tarefa Ângulos 2

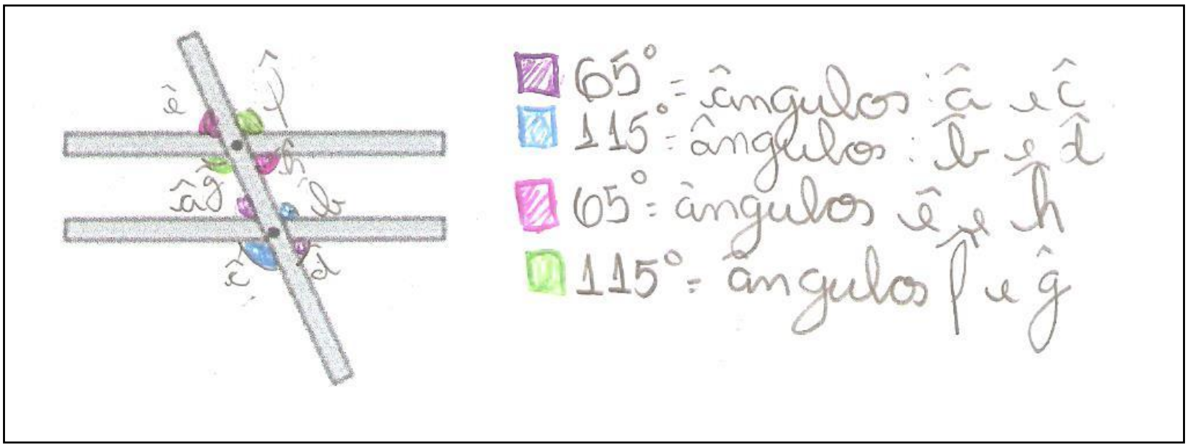


Fonte: Arquivo da pesquisadora

Percebemos também que houve certa mobilização de termos e conceitos geométricos na elaboração das conjecturas. Elas utilizaram expressões como internos e externos para os ângulos e nomearam-nos de forma bastante organizada numa tabela, mesmo que essa denominação não tenha sido igual a definição formal sobre ângulos internos e externos. Elas chamaram de externos, os ângulos acima das retas paralelas, e de internos, os formados embaixo das mesmas. Essas decisões foram espontâneas, partindo das próprias estudantes.

Já a afirmação que as alunas fizeram sobre os ângulos suplementares (figura 31) foram baseadas nos registros de outros colegas que foram à lousa explicar como haviam pensado durante a fase de discussão da tarefa. Em um dos testes, **Ell** e **Am** utilizaram uma legenda (figura 32):

Figura 32: Tarefa Ângulos 2

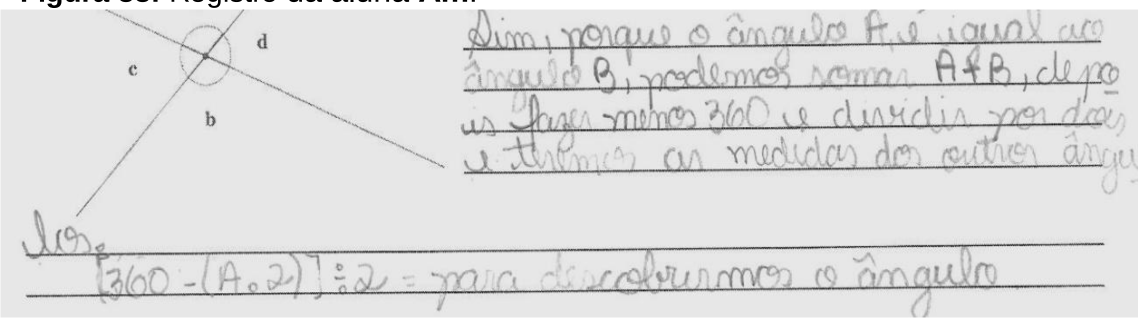


Fonte: Arquivo da pesquisadora

Na atividade diagnóstica relativa às descobertas que fizeram e durante as tarefas exploratório-investigativas sobre ângulos, ambas as alunas tentaram utilizar a maior quantidade possível de termos e noções geométricas que conheciam sobre o assunto. As respostas (a), (b) e (c) referentes à questão 1 mostram o que afirmamos:

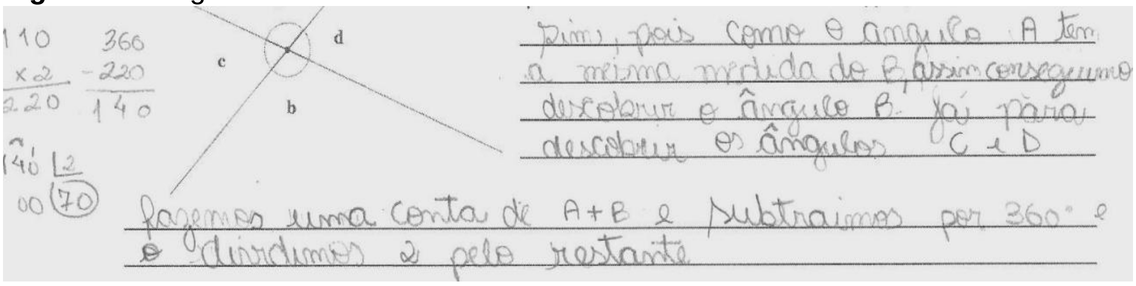
- ***Questão 1a:*** *Se você souber a medida do ângulo **a**, é possível dizer quais as medidas de **b**, **c** e **d** sem usar o transferidor? Por quê?*

Figura 33: Registro da aluna **Am**:



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 34: Registro da aluna **Ell**:

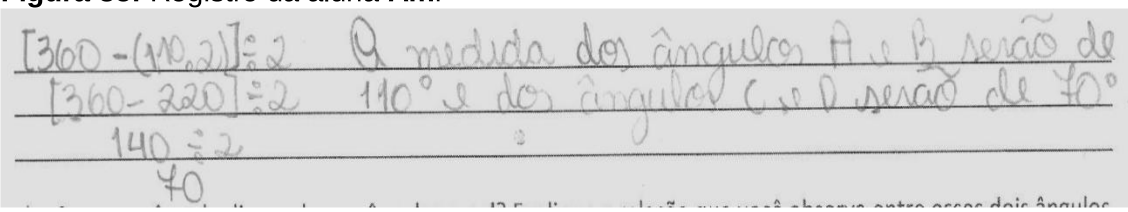


Fonte: Arquivo da pesquisadora

Ambas as alunas conjecturam sobre como chegar ao resultado da medida dos ângulos **b**, **c** e **d** utilizando-se do conhecimento que possuíam sobre os ângulos opostos pelo vértice. No entanto, a aluna **Am** utilizou uma expressão algébrica para indicar como pensou, o que demonstra um domínio maior na utilização da linguagem e escrita matemática, além de maior mobilização do raciocínio indutivo, pois está pronta para uma generalização a partir de casos particulares observados. Segundo Ponte (2012:339): o *raciocínio indutivo tem lugar, sobretudo na formulação de conjeturas gerais a partir de casos específicos.*

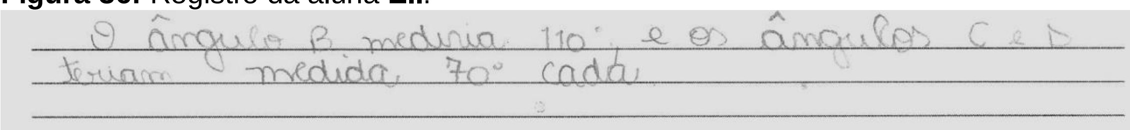
- ***Questão 1b:*** *Vamos supor que o ângulo* ***a*** *mede 110º. Nesse caso, quais as medidas dos outros ângulos?*

Figura 35: Registro da aluna **Am**:



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 36: Registro da aluna **Ell**:



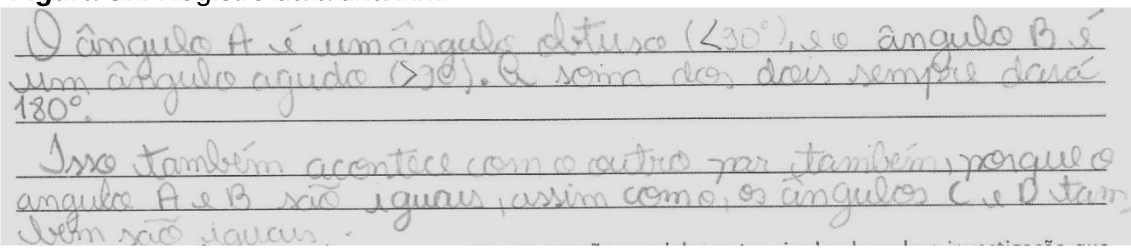
Fonte: Arquivo da pesquisadora

A resposta da aluna **Ell** foi mais concisa, mas notamos que ela fez seus cálculos no canto da folha, como podemos ver na resposta a questão (a), na figura 34.

- ***Questão 1c:*** *O que você pode dizer sobre os ângulos* ***a*** *e* ***d****? Explique a relação que você observa entre esses dois ângulos. Isso acontece com outros pares de ângulos? Por quê?*

Essa questão tinha como objetivo fazer com que os alunos percebessem a relação dos ângulos suplementares adjacentes.

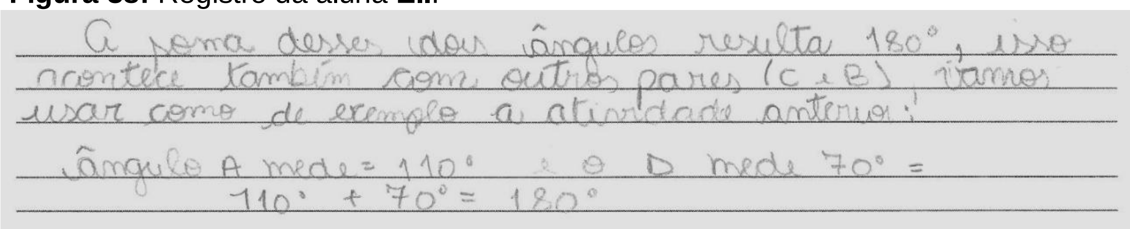
Figura 37: Registro da aluna **Am**:


O ângulo A é um ângulo obtuso (<30°), e o ângulo B é um ângulo agudo (>30°). A soma dos dois sempre dará 180°.
Isso também acontece com o outro par também, porque o ângulo A e B são iguais, assim como, os ângulos C e D também são iguais.

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Na resposta da aluna **Am**, podemos notar que ela se confundiu ao usar os símbolos > (maior que) e < (menor que) e também se referiu ao ângulo **d** como ângulo **B**. No entanto, concluiu que a soma dos dois ângulos sempre dava 180º. Ela afirmou que o ângulo obtuso somado ao agudo sempre dará 180°. Nossa hipótese neste caso é que a aluna percebeu que os dois ângulos da figura 34 formam um ângulo raso e por isso a soma dos dois só pode dar 180°. No entanto, a aluna não registrou essa ideia nem tampouco comentou o que realmente pensou. A partir daí, usando a congruência dos ângulos opostos pelo vértice, ela justificou que o ângulo **c** tinha a mesma medida que o ângulo **d,** e que por isso, o outro par de ângulos também somavam 180°.

Figura 38: Registro da aluna **Ell**:

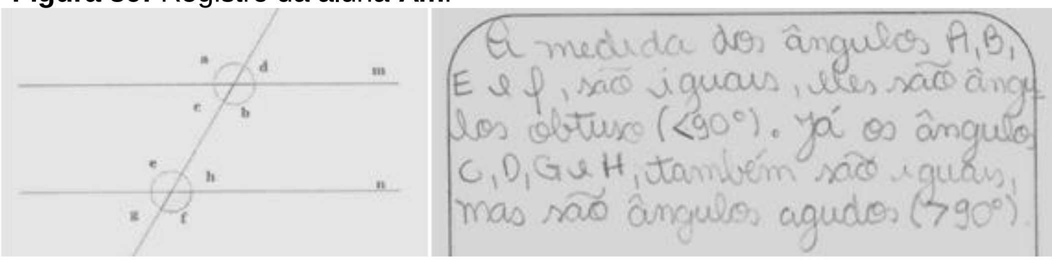

A soma desses dois ângulos resulta 180°, isso acontece também com outros pares (C e B), vamos usar como de exemplo a atividade anterior:
ângulo A mede = 110° e o D mede 70° =
110° + 70° = 180°

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Na resposta da aluna **Ell** (figura 38), percebemos que ela afirmou que a soma dos dois ângulos dava 180°, mas justificou usando os cálculos (testes) realizados anteriormente. Ela afirmou que os ângulos **a** e **b** mediam 110° cada porque sabia que eram opostos pelo vértice, no entanto não explicou esse fato. Da mesma forma, calculou os ângulos **c** e **d,** chegando ao resultado de que cada um media 70º.

- ***Questão 2:*** *Observando a figura a seguir, em que as retas m e n são paralelas entre si e lembrando a investigação que você fez com canudos, o que você pode dizer sobre as medidas dos ângulos? Explique.*

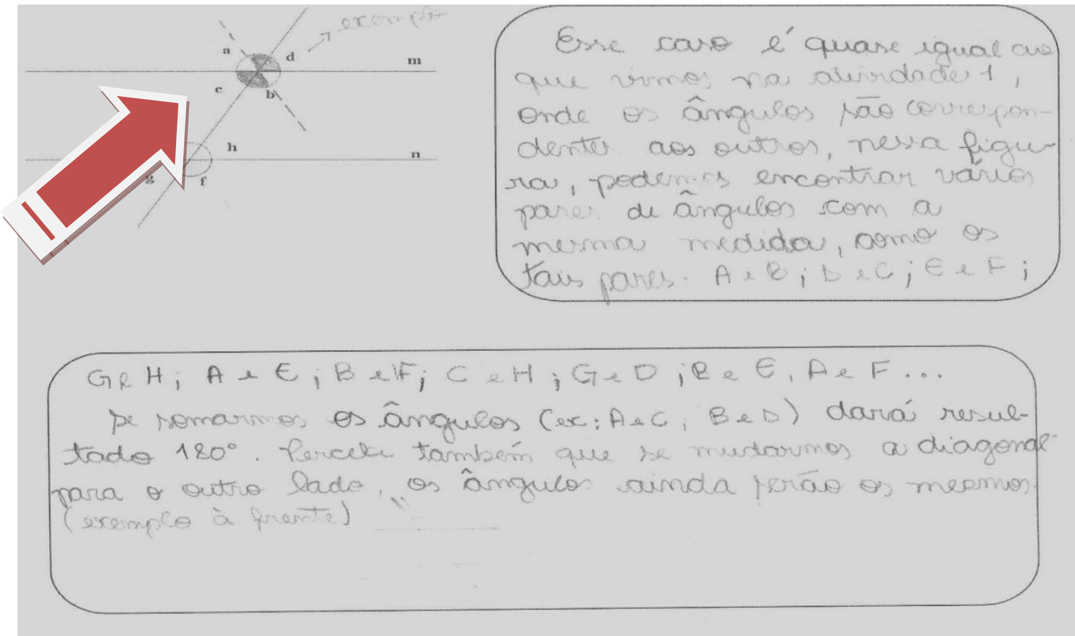
Figura 39: Registro da aluna **Am**:



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Em sua resposta a aluna continuou confundindo os sinais de maior que (<) e menor que (>). Também disse que os ângulos são iguais e não que as medidas dos ângulos são iguais. Mas esse tipo de justificativa é compatível para um aluno do Ensino Fundamental II que está iniciando o processo de construção de conceitos geométricos e raciocínio argumentativo em Matemática.

Figura 40: Registros da aluna **Ell**:



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Enfim, a aluna **Ell** fez referência a uma descoberta que fizeram, mas que não comentaram ou haviam registrado até então e que era um dos objetivos da investigação: *Percebi também que se mudarmos a diagonal para o outro lado, os ângulos ainda serão os mesmos* (figura 40). A aluna quis dizer que quando mudamos a reta transversal de posição, que ela chama de diagonal, as relações entre os ângulos permanecem as mesmas.

Ela usou o desenho do enunciado e traçou uma outra reta transversal, para ilustrar o que disse (ver seta na figura 40).

Concluímos que esta dupla de alunas percebeu as relações entre os ângulos formados por retas paralelas e que esses conhecimentos serão de grande importância para futuras explorações e investigações geométricas.

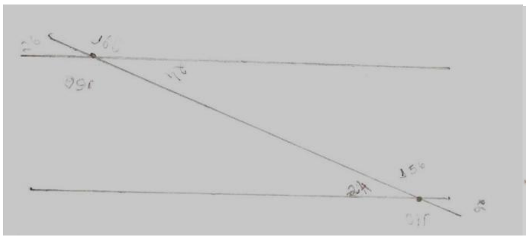
6.2.2 O caso da dupla II

A **dupla II** foi formada pelos alunos **Gi** e **Br**. **Gi** fez parte do **Grupo I** da primeira tarefa com ângulos. Ambos os estudantes são muito comunicativos nas aulas, expressando suas ideias com bastante desenvoltura e se arriscando a dizer o que estão pensando quando são questionados. Entretanto, nesta tarefa, eles também se distraíram muito brincando com os canudinhos, principalmente quando a professora se afastava para atender o chamado de outros alunos. Outro aspecto que observamos é que estes alunos, assim como outros, não gostam de escrever, resumem ao máximo suas conjecturas e descobertas. Eles são rápidos no raciocínio, comunicam oralmente o que pensam, mas ficam contrariados quando precisam registrar no papel suas ideias. Por isso, foi preciso muita conversa e intervenção para que redigissem de forma clara o que relacionaram.

Esse problema com o registro escrito apareceu mais com o aluno **Gi**, que parece ter pressa em terminar tudo, cometendo alguns erros em cálculos e até mesmo em suas interpretações quando resolve problemas matemáticos em geral. Mesmo assim, esse aluno tem um ótimo rendimento na disciplina de Matemática, demonstrando muito interesse na realização das atividades em praticamente todas as aulas, além de ser muito atento às explicações dadas.

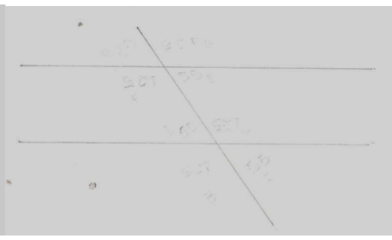
Na primeira parte da exploração, logo após a explicação da tarefa e da manipulação "lúdica" com os canudinhos, os dois alunos elaboraram alguns testes para medir os ângulos (figuras 41a;41b;41c). Eles utilizaram régua e esquadro para traçarem as retas.

Figura 41a: Tarefa Ângulos 2



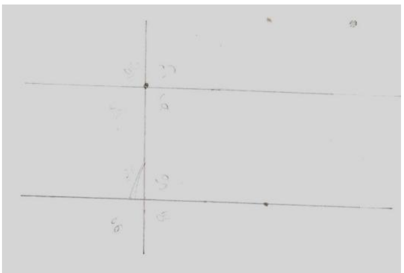
Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 41b: Tarefa Ângulos 2



Fonte: Arquivo da pesquisadora

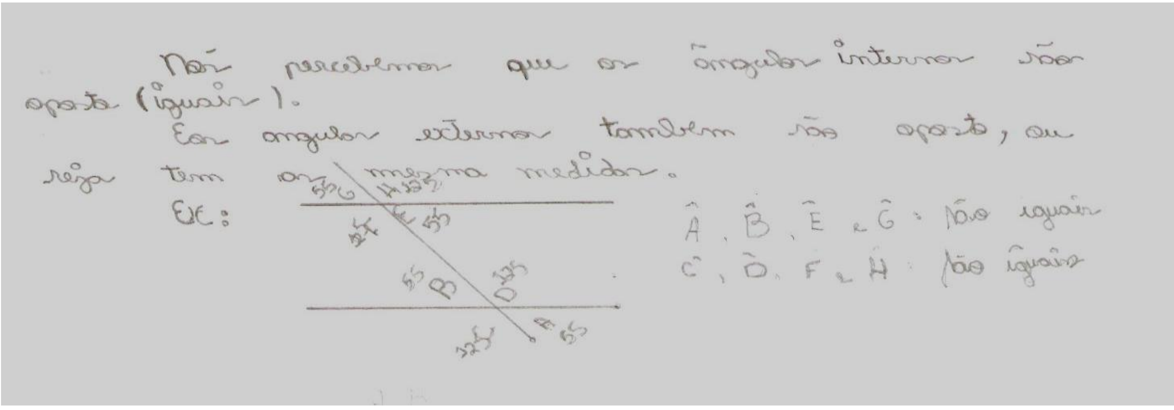
Figura 41c: Tarefa Ângulos 2



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Por fim, retomaram a atividade proposta e elaboraram alguns testes, explicando as relações que perceberam entre os ângulos. Indicaram ainda que os ângulos **a, d, e** e **h** são iguais e que os ângulos **b, c, f** e **g** também são iguais. Em seguida redigiram um pequeno parágrafo contando o que descobriram (figura 42). Nesse momento, **Br** fez o registro escrito:

Figura 42: Tarefa Ângulos 2- Registros do aluno **Br**



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Analisando o vídeo desta aula, percebemos que no início da exploração o aluno **Br** se ateve mais a manipulação dos canudos que seu colega **Gi** e que aparentemente eles estavam trabalhando individualmente. **Gi** logo começou a fazer representações das retas e medir os ângulos, tomando a liderança na exploração.

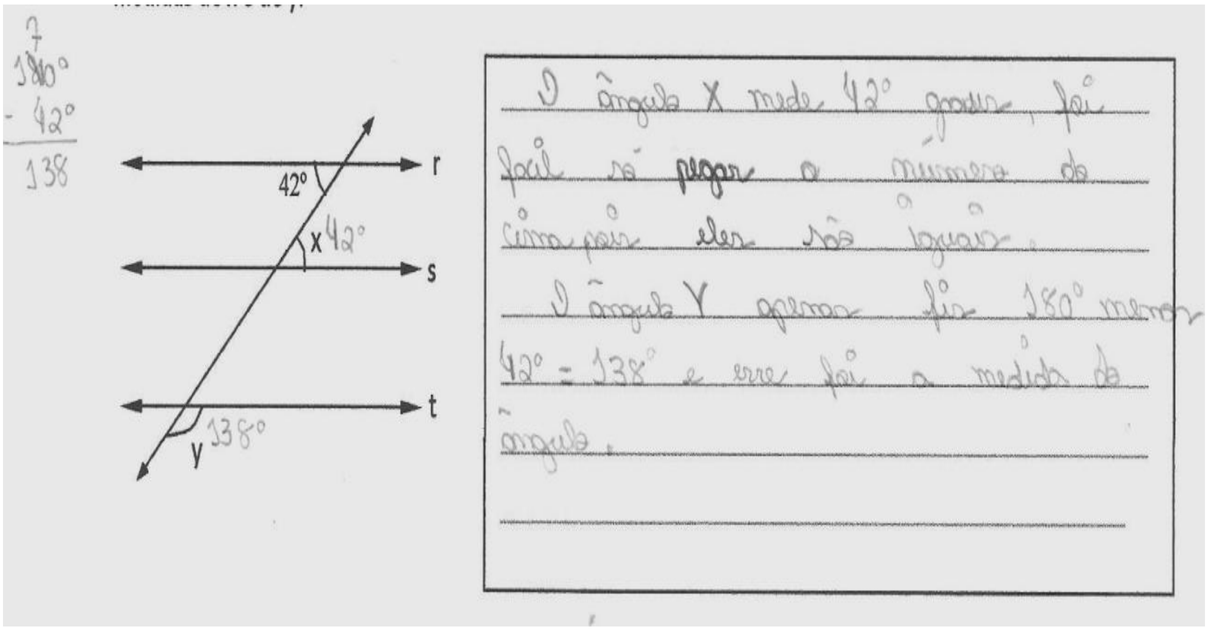
Passados cerca de 20 minutos após o início da tarefa, os dois alunos se distraíram completamente por algum tempo, fazendo esculturas com os canudinhos e brincando com as meninas que estavam sentadas logo atrás deles.

Assim como na **dupla I**, aparece nos registros dos alunos os termos internos e externos para classificação dos ângulos, no entanto, não ficou claro o que eles queriam dizer exatamente com ângulos internos e ângulos externos. Eles afirmaram que os ângulos opostos são “iguais” e usaram na segunda frase a afirmação de que sendo opostos, tinham a mesma medida.

Após essa fase de realização de testes e elaboração de conjecturas e primeiros registros escritos, passamos à fase da discussão da tarefa com toda a turma e no dia seguinte os alunos fizeram uma atividade diagnóstica para que verificássemos o que haviam mobilizado em termos de conceitos figurais.

Em uma das questões propostas, o objetivo era descobrir as medidas dos ângulos formados por três retas paralelas interceptadas por uma transversal, dada a medida de apenas um ângulo (figura 43).

Figura 43: Tarefa Ângulos 2- Registros do aluno **Br**

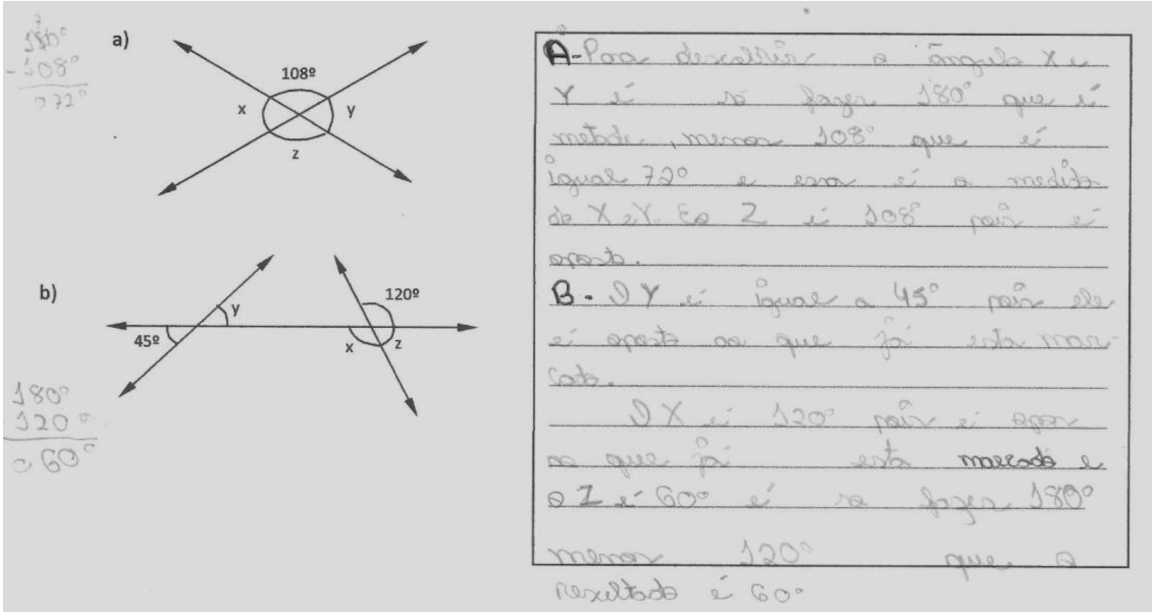


Fonte: Arquivo da pesquisadora

Nessa atividade, o aluno **Br** teve êxito, porém sua resposta pareceu um tanto confusa, faltando elementos que descrevessem melhor suas ideias e a utilização de termos geométricos adequados. Ele disse que foi fácil descobrir a medida do ângulo X porque “é só pegar o número de cima, pois eles são iguais”. O aluno chamou o ângulo oposto de “o número de cima”.

A segunda questão tinha como objetivo que os alunos calculassem as medidas dos ângulos indicados por letras nas figuras. O aluno **Br** fez os cálculos facilmente, mas praticamente não justificou esses resultados, exceto quando disse na alternativa **a** que o ângulo **z** é 108° porque é oposto, conforme apresentamos na figura 44, houve uma tendência dos alunos em descrever os procedimentos usados, porém sem justificar as escolhas que fizeram.

Figura 44: Tarefa Ângulos 2- Registros do aluno **Br**



Fonte: Arquivo da pesquisadora

6.2.3 Discussão da tarefa com a classe

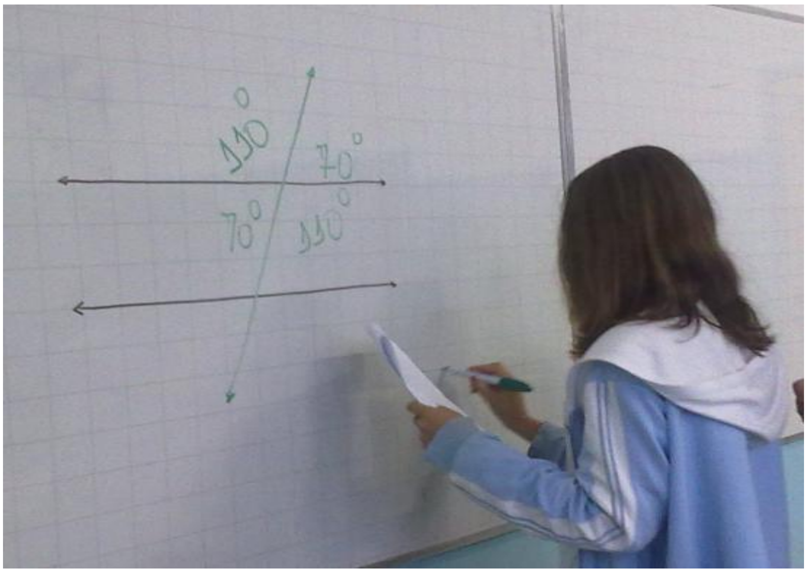
Esse momento da tarefa foi iniciado pela professora, que fez várias perguntas aos alunos, incitando-os expor suas ideias, opiniões e conjecturas.

Os alunos pareciam mais tímidos do que normalmente são, levando a professora a fazer muitas intervenções e questionamentos para que alguém começasse a falar. A gravação não ficou boa e algumas respostas dos alunos eram repetidas pela professora para que ficassem registradas. Segue um fragmento deste episódio:

> ***Professora:*** *Quem quer ser o primeiro a falar? O que vocês perceberam nas medidas dos ângulos?*

Fez-se silêncio. Ninguém disse nada. Então a professora perguntou novamente, dizendo que ficaria ali até que alguém dissesse alguma coisa. No quadro a professora desenhou uma figura, como aquela das folhas que receberam, só que ao invés de canudinhos, desenhou retas. Duas alunas, por sua vez, pediram para irem à lousa indicar as medidas dos ângulos. Elas apresentaram seus cálculos com base em uma única relação observada (figura 45):

Figura 45: Aluna **Ca** indicando as medidas dos ângulos



Fonte: Arquivo da pesquisadora

As alunas explicaram que perceberam que a soma dos quatro ângulos dava 360°, mas não conseguiram relacionar os conjuntos dos ângulos formados. Em seus registros escritos, elas conseguiram ser mais claras e argumentar melhor:

> *Com três canudos mudamos de posição e deu medidas diferentes umas das outras. E se somarmos todos os ângulos dá 360°. Em todos os ângulos se somar o $\hat{A}$ + $\hat{C}$ = 180° e o $\hat{B}$ + $\hat{D}$ = 180°, pois somando todos irá dar 360°.*

Continuaram registrando todas as somas de ângulos que resultavam 180°, mas o que mais chamou a atenção dessas alunas foi o fato de que tanto no caso de retas paralelas, como no caso de retas não paralelas, em que os conjuntos de ângulos tinham medidas diferentes, mesmo assim davam 360° os quatro ângulos. Talvez por isso elas tenham falado especificamente sobre essa descoberta quando foram à lousa. Mesmo assim, também no registro escrito, não disseram nada sobre os ângulos envolvidos no cálculo.

Elas não haviam percebido até este momento, que quando as retas não eram paralelas, as relações entre os ângulos não se mantinham, isso porque não identificaram as relações entre os ângulos alternos e colaterais, ocorridas quando as retas eram paralelas.

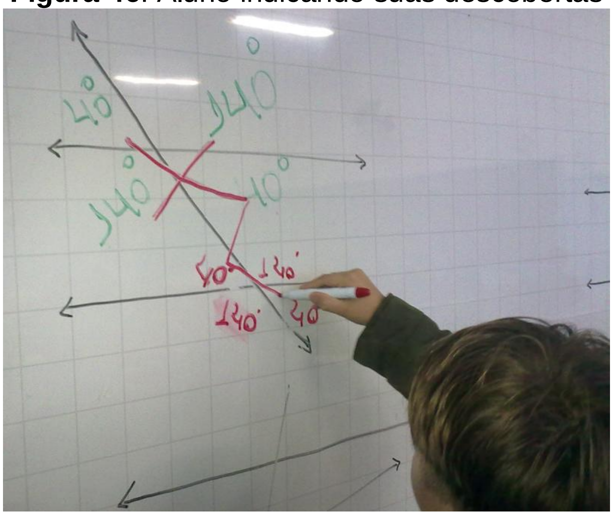
> ***Professora:*** *Além de perceberem que a soma dos quatro ângulos resultam 360 graus, vocês não perceberam mais nada? — Fez-se um longo tempo de silêncio. Ninguém dizia nada.*
> ***Professora:*** *Vocês não vão falar nada? Eu sei que vocês descobriram mais algumas coisas porque vi que vocês escreveram.*

Passado algum tempo, o aluno **FeM** disse que havia percebido algo. Esse aluno apresentava um baixo rendimento nas atividades rotineiras em sala de aula e avaliações em praticamente todas as disciplinas. No entanto, se mostrou mais participativo em todas as tarefas exploratório-investigativas desenvolvidas no ano letivo. Ele foi até a lousa para mostrar o que percebeu.

> ***Aluno FeM.:*** *Eu vi que forma um zig-zag aqui.*
> ***Professora:*** *Então mostre com a caneta.*

O aluno desenhou no quadro, fazendo a correspondência entre os ângulos de mesmas medidas, dizendo que formavam um zig-zag (duas retas paralelas interceptadas por uma reta transversal), completando as medidas dos ângulos formados pela reta paralela inferior:

Figura 46: Aluno indicando suas descobertas



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Na sequência a professora questionou os alunos:

> ***Professora:*** *Será que isso é verdade? Será que o que ele percebeu vale para todos os exemplos que vocês fizeram?*
> ***Aluno Th:*** *Não.*
> ***Professora:*** *Por que não?*
> ***Aluno Th:*** *Se as retas não são paralelas não dá certo porque mudam os ângulos.*
> ***Professora:*** *Mas e se as retas forem paralelas?*
> ***Aluno Th:*** *Aí dá.*
> ***Professora:*** *E essa ideia dele do zig-zag? Dá certo ou não dá certo?*
> ***Aluno Th:*** *Dá.*
> ***Professora:*** *Será? Vocês já testaram? Sabiam que na Matemática não tem adivinhação? Temos que provar, verificar, testar... , Essa ideia do zig-zag que o* ***FeM*** *descobriu, funciona para todos os modelos que têm retas paralelas?*

Os alunos ficaram pensativos e tentaram verificar em seus próprios desenhos se a ideia do colega funcionava mesmo ou não. A tendência a concluir com apenas poucos testes continuou. Eles rapidamente diziam que o tal “zig-zag” funcionava em todos os casos de retas paralelas entre si. Nos registro escritos da dupla dos alunos **FeM** e **Van** podemos observar suas conjecturas:

> **Aluna Van:** *Eu aprendi que o ângulo $\hat{x}$ + $\hat{w}$ dá 180°, mas no meu primeiro exemplo não deu 180°. Se somarmos os ângulos $\hat{T}$ + $\hat{P}$ +$\hat{S}$ +$\hat{Q}$ = 360°. Se nós mudarmos a posição dos canudos, muda a medida dos ângulos. Se os ângulos estiverem paralelos “ela” vai fazer um zig-zag.*

Os demais alunos continuaram a verificar em seus “desenhos”, observando as medidas que marcaram nos ângulos. Direcionando as questões a alguns alunos da turma, a professora inquiriu:

> ***Professora:*** *Já verificou **Gi**? Deu certo? — O aluno respondeu afirmativamente.*
>
> ***Professora:*** *O que mais vocês perceberam?*
>
> ***Aluno Th:*** *Duas retas... são suplementares.*
>
> ***Professora:*** *As retas são suplementares? São as retas que são suplementares?*
>
> ***Aluno Th:*** *Os ângulos.*
>
> ***Professora:*** *Quais são os ângulos suplementares?*
>
> ***Th****: Os opostos?*
>
> ***Professora:*** *Os opostos são suplementares? O que os Ângulos precisam para serem suplementares?*
>
> *Os alunos foram dizendo aleatoriamente:*
>
> *— Têm que ter a mesma medida?*
>
> *— Ser um do lado do outro.*
>
> *— Tá em linha reta.*

A professora ia repetindo a fala dos alunos como se quisesse relacionar e sintetizar as ideias deles, fazendo-os refletir sobre o que estavam dizendo.

> ***Professora:*** *Ângulos suplementares... Nós já vimos isto. Vocês não lembram?*
>
> *Ficaram em silêncio. Então a professora se dirigiu ao aluno **Br.***
>
> ***Professora: Br****, conta o que você percebeu, sem se preocupar com essa ideia de ângulos suplementares. O que você percebeu? O que está acontecendo? Eu acredito que você percebeu alguma coisa para ter falado nisso.*

O aluno nada disse, ficando pensativo. Para todos eles, de uma forma geral, explicar como pensavam e o que conjecturavam era tarefa bem complicada. A habilidade para relacionar propriedades e expor tais pensamentos é algo que trabalhamos continuamente com os alunos, mas como isso não era habitual nas aulas de Matemática, as crianças acabavam por apresentar dificuldades quando tinham que por em prática tantos aspectos de seu raciocínio e aprendizagem ao mesmo tempo. De acordo com Ponte (2010b, p. 15), *a* “realização de uma investigação matemática envolve processos conscientes e inconscientes, sensibilidade estética, conexões e analogias com problemas matemáticos e situações não matemáticas”*.* Entendemos a sensibilidade estética como uma percepção sensorial e mental intuitiva que busca por regularidades, padrões e simetria. É uma busca inconsciente pela beleza da Matemática, que faz com que procedimentos e conceitos ganhem sentido.

Em nossa opinião, são muitos processos ocorrendo simultaneamente. Os alunos precisam analisar dados, comparar, testar, argumentar e justificar. E como se não bastasse, precisam comunicar oralmente o que pensaram e registrar na forma escrita por meio de palavras, esquemas, figuras, tabelas, entre outros. Para que essas habilidades se tornem naturais é preciso muito trabalho e tempo dedicado a tarefas desta natureza.

A professora retomou a relação que as alunas **Ca** e **Gi** explicaram no início da discussão sobre a soma dos quatro ângulos resultarem 360°. Então perguntou aos alunos se não haviam observado nenhuma relação de igualdade ou diferença entre os ângulos. Nesse momento o aluno **Ya** falou o que havia pensado, dizendo que “*os ângulos opostos davam 180°*”.

> ***Professora:*** *Esses dois ângulos que você está mostrando são opostos? O que são ângulos opostos? — O aluno ficou pensativo — O que significa a palavra oposto?*
> ***Aluno Ya:*** *Contrário.*
> ***Professora****: Então esses dois ângulos que você está mostrando dão 180° não é? Esses dois ângulos que você está mostrando são chamados opostos?*
> ***Aluno Ya:*** *Eles dão 180. Não... está um do lado do outro.*
> ***Aluno Th****: É um ângulo raso.*

O aluno **Ya** havia percebido que os dois ângulos adjacentes somavam 180°, mas não se lembrava do que havia estudado anteriormente sobre ângulos suplementares. A maioria dos alunos percebeu que os ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida e que quando estão lado a lado, somam 180°. Chegaram a essa “conclusão” por meio dos testes que realizaram medindo cada ângulo com o transferidor. No entanto, tanto na tarefa **Ângulos 1**, quanto nesta tarefa, **Ângulos 2**, nenhum aluno conseguiu justificar os ângulos opostos pelo vértice a partir do conceito de ângulos suplementares. Eles percebiam o que acontecia, mas não conseguiam explicar o porquê. Alguns alunos tinham o conceito mental, mas não conseguiam explicar o que era em linguagem matemática. Entendemos que isso é bem natural para um aluno de 7º ano já que não é comum na prática escolar desses alunos atividades que envolvam a necessidade de se justificar hipóteses e descrever o próprio raciocínio lógico. Sobre isso, Ponte (1998a) explica que é compreensível a reduzida percepção da necessidade de generalizações para o aluno, devido a pouca importância dada a realização de investigações, argumentações e demonstrações no cotidiano escolar.

No entanto, foi intenção desta pesquisa, desenvolver nos alunos o raciocínio argumentativo, priorizar a comunicação oral e escrita e fazer com que reconhecessem a relevância de justificar as conjecturas produzidas.

6.2.4 Análise geral dos registros

Elaboramos uma análise qualitativa dos registros escritos durante a tarefa exploratório-investigativa, destacando os aspectos geométricos figurais.

Com relação às figuras representadas na tarefa Ângulos 2, cinco duplas das nove, mediu corretamente todos os ângulos usando o transferidor; três duplas cometeu algum erro em suas medições e uma dupla errou totalmente as medidas. Entre os alunos que erraram as medidas dos ângulos, destacamos que a dupla que não conseguiu medir nenhum ângulo corretamente parece não ter desenvolvido essa habilidade nem compreendido como usar o transferidor, enquanto que as demais trocaram as medidas dos ângulos porque usaram o transferidor ao contrário. Eles começavam medindo a partir de 180º e iam voltando, 170°, 160°, 140°, 130°, 120°. Marcando a medida de 120° para um ângulo de 60°. Isso mostrou-nos que neste caso, os alunos também não se apropriaram do conceito de medida de ângulos, visto que marcaram ângulos menores com medidas maiores. Se eles estivessem atentos ao que a figura mostrava, teriam percebido seus erros.

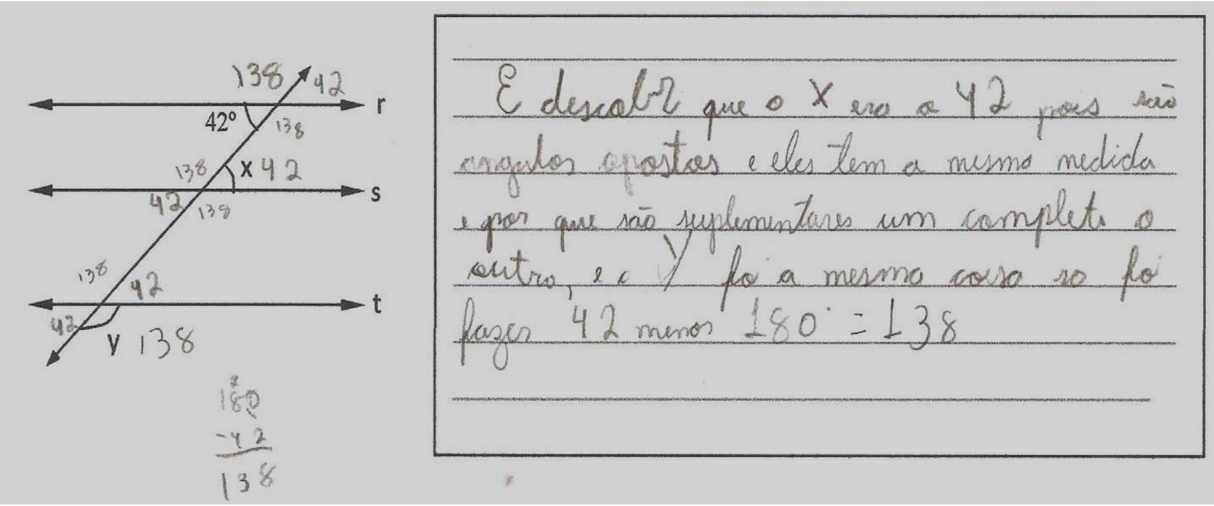
Alguns alunos mostram nitidamente que usaram o conhecimento sobre ângulos opostos pelo vértice para marcar as medidas de alguns ângulos sem precisar ficar medindo todos. Isso foi observado durante a aula pela professora.

Percebemos, nos registros da maioria dos alunos, uma maior coesão e utilização da linguagem matemática. Mesmo os alunos que não conseguiram sucesso na realização da tarefa, fizeram algum tipo de mobilização de saberes geométricos, pois utilizaram instrumentos de medida como régua, transferidor, esquadros, levantando hipóteses e confrontando-as com os registros de outros colegas.

Dos 18 alunos que participaram da realização da tarefa Ângulos 2,14 responderam satisfatoriamente a primeira atividade diagnóstica proposta (Anexo B) e quatro alunos se confundiram na medida dos ângulos ou deram respostas confusas.

É possível observar o que afirmamos nos exemplos anteriores das duas duplas analisadas e nos registros do aluno **Da**. Este aluno é extremamente quieto, no entanto muito centrado e responsável com os estudos. Nas figuras 47 e 48 temos os registros bem coerentes deste aluno.

Figura 47: Registros do aluno **Da**

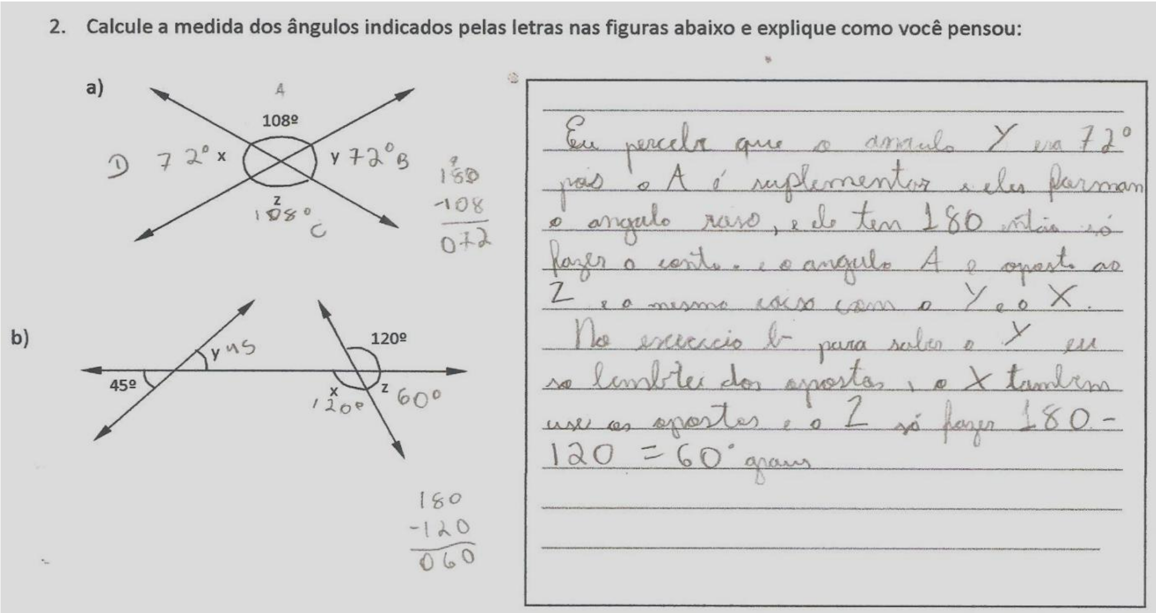


Fonte: Arquivo da pesquisadora

O que ficou um pouco confuso foi a frase em que disse: *(...) e porque são suplementares, um completa o outro (...)*. De acordo com nossas experiências, concluímos que ele não estava se referindo aos ângulos opostos pelo vértice, pois ele completou a frase dizendo: *(...) e o y foi a mesma coisa, só foi fazer 42 menos*

180° = 138. No entanto, no registro a seguir, na figura 48, ficou claro que este aluno se apropriou do conceito de ângulo suplementar e sua definição:

Figura 48: Registros do aluno **Da**



Fonte: Arquivo da pesquisadora

No primeiro registro, realizado em dupla, o aluno **Da** e seu colega **Je**, registraram as seguintes descobertas sobre retas paralelas cortadas por uma transversal:

> *Nós descobrimos que quando as retas são paralelas os valores sempre são os mesmos, mas quando não são paralelas, os valores são diferentes. E descobri que isso é praticamente um X da investigação passada, pois eles são opostos e somando um valor do lado do outro (por exemplo a figura acima, e o ângulo A e B) é igual a 180°, formando um ângulo raso. E se somarmos todos os lados dá 360°. E se somarmos o ângulo A com o B teremos sempre 180° pois eles são ângulos suplementares. E outra coisa interessante é que se fizermos um "zig zag" como na imagem acima e somarmos os ângulos externos (os 4) vai dar 360° e a mesma coisa acontece com os internos.*

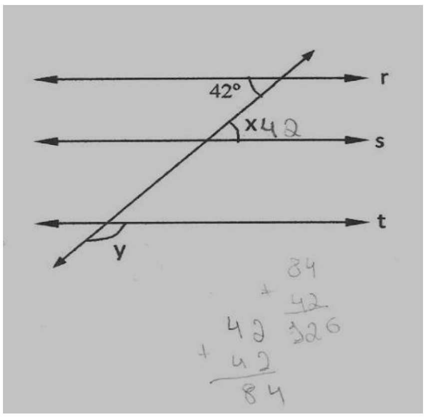
Conceituar é algo mais difícil que simplesmente definir. É um nível mais elevado de apropriação do conhecimento. Segundo Pais (2006, p. 22), “o domínio de um nível conceitual passa pelo domínio de sua definição, mas vai além”. O autor afirma ainda, Pais (2006, p. 120) que “uma definição Matemática é como uma expressão linguística formal, que resume por meio de palavras e expressões as características essenciais de determinado conceito”.

Já Fischbein (1993), assim como Pais (2006) também entende que um conceito é algo abstrato e possui características de universalidade e perfeição.

Concordamos Pais e Fischbein quanto a complexidade na construção de conceitos, sobretudo dos conceitos figurais. Em nossas análises percebemos que a maior parte dos alunos compreendeu a relação de ângulos opostos pelo vértice e a de ângulos suplementares, no entanto, não conseguiam explicar verbalmente ou registrar como pensaram, confundindo termos geométricos. Esse processo de relacionar, definir formalmente e conceituar é um processo que leva algum tempo para ocorrer. É por isso que defendemos o método de ensino em espiral, no qual o conteúdo é retomado em vários momentos, num vaivém de conexões que vão se estabelecendo durante a vida escolar. O aluno aprende novos conceitos a partir de conhecimentos prévios que são mobilizados nessas conexões, passando pelos mesmos pontos de forma a ir cada vez mais longe e com profundidade. Por isso, acreditamos que tais noções devam ser retomadas em outros momentos e tarefas durante o ano letivo e mesmo em outras séries/anos.

Para exemplificar as respostas confusas de alguns alunos, seguem os registros dos alunos **Ba** e **FeM:**

Figura 49: Registros do aluno **Ba**



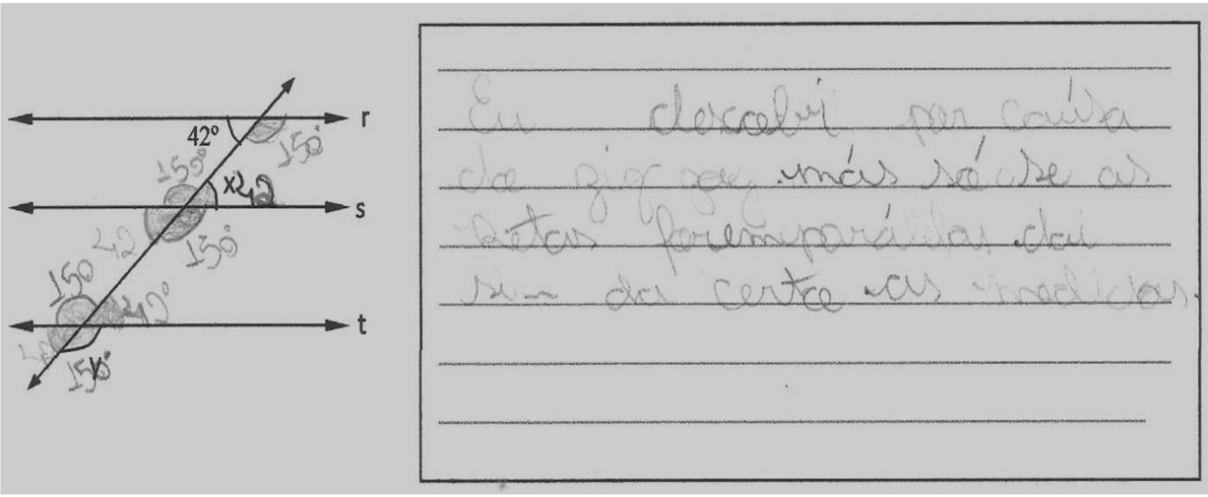
Fonte: Arquivo da pesquisadora

> ***Aluno Ba**: Eu vi que o ângulo marcado é igual a X. Somando o ângulo marcado com o ângulo X que é igual ao outro, que vai dar 84°, somando 84° mais 42 vai dar 126 que é o valor do último ângulo.*

O insucesso do aluno **Ba** ocorreu quando conjecturou que o ângulo **y** poderia ser encontrado somando-se os ângulos opostos pelo vértice três vezes. Não há como saber o motivo que o levou a ter feito esses cálculos e pensado desta forma, pois para isso seria necessário que a intervenção da professora-pesquisadora tivesse sido pontual, no momento da atividade.

Já o aluno **FeM** se fixou na ideia que teve sobre o "*zig-zag*" na primeira atividade. Ele acertou a medida do ângulo que já estava indicado, porém não conseguiu determinar as medidas dos outros ângulos, errando nos cálculos.

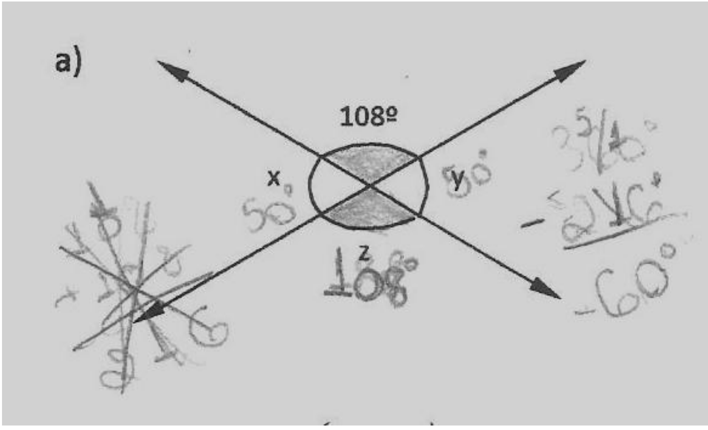
Figura 50: Registros do aluno **FeM**



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Na segunda atividade ele teve êxito em alguns cálculos, mas não marcou corretamente as medidas dos ângulos (figura 51). Isso demonstra que o aluno, embora tenha mobilizado alguns conceitos e levantado conjecturas, não conseguiu atingir o objetivo integral da tarefa no que se refere a construção de conceitos geométricos.

Figura 51: Registro do aluno **FeM**



Fonte: Arquivo da pesquisadora

De forma geral, durante a realização desta tarefa, os alunos mobilizaram os conhecimentos geométricos que já possuíam e conseguiram relacionar e inferir mais hipóteses, ampliando o conceito imagem de ângulo que já tinham construído.

Foi uma tarefa realizada em um curto espaço de tempo, apenas três aulas. Isso demonstrou que uma tarefa exploratório-investigativa pode necessitar de mais ou menos tempo para sua execução, dependendo do tema a ser investigado e do que ocorrer em sala de aula durante sua realização.

Os alunos foram se apropriando do uso adequado dos termos geométricos e algumas definições, melhorando o vocabulário e a escrita em linguagem matemática. O próprio uso de material manipulável, além de motivar para a realização da tarefa, contribuiu para o desenvolvimento da visualização mental e representações concretas por meio de desenhos.

Ponte (2009, p. 83) salienta que “há importância em estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria a situações da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceitual em Geometria”. Entendemos que os modelos concretos citados por Ponte (2009) são as representações figurais, mesmo os esquemas e desenhos feitos em papel ou construídos virtualmente, como foi o caso da utilização dos canudinhos de refrigerante nesta exploração.

Após a realização desta tarefa, passamos para a próxima etapa da pesquisa: o estudo dos Mosaicos Geométricos em um contexto de tarefa exploratório-investigativa.

6.3 Tarefa Ladrilhando o Plano com Polígonos Congruentes

Como descrevemos nos itens 5.1.2 e 5.1.3 desta pesquisa, após trabalharmos com as tarefas exploratório-investigativas Ângulos 1 e Ângulos 2, desenvolvemos com os alunos algumas tarefas do Caderno do Aluno, Vol.2 (SÃO PAULO, 2009, p.33) e do Segundo Volume do Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009, p.34). A primeira foi a tarefa “Polígonos e Ladrilhamento no Plano”, (atividades 1, 2 e 3 do Caderno do Aluno) e a segunda foi a tarefa “Dividindo em triângulos”, sugerida no Caderno do Professor.

As duas tarefas foram fundamentais para preparar os alunos para a próxima tarefa exploratório-investigativa em grupo. Os alunos chegaram facilmente à generalização da soma dos ângulos internos dos polígonos na tarefa *Polígonos e Ladrilhamento no Plano*, pois já haviam trabalhado anteriormente a soma dos ângulos internos em um triângulo qualquer.

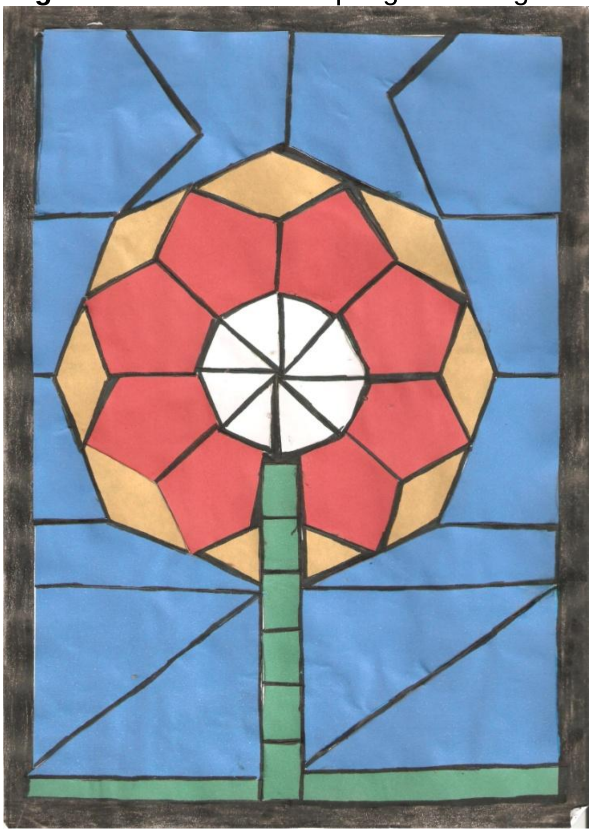
Iniciamos então a aula sobre Mosaicos. O primeiro passo foi retomar o conceito, visto que essa turma de alunos já havia trabalhado com mosaicos no 6º ano, construindo mosaicos modulares em malhas geométricas. Foi elaborada uma apresentação em *slides* pela professora-pesquisadora sobre o tema, contendo muitas ilustrações coloridas e atraentes para despertar o interesse estético pela tarefa em que seriam convidados a se engajar. Em aparelho de projeção (*data show*), os alunos observaram vários tipos de mosaicos em construções arquitetônicas, no artesanato, na natureza, entre outros.

Fizeram uma primeira atividade, compondo mosaicos com polígonos irregulares, sem muita preocupação com regras ou definições rígidas. O objetivo dessa atividade foi motivar os alunos e iniciar a percepção da necessidade de que para ser esteticamente agradável, os mosaicos deveriam ter as peças “bem encaixadas”, sem sobrepô-las. Essa condição foi apresentada previamente.

Para incentivar ainda mais a elaboração desta atividade, a nossa unidade escolar realizou um concurso para premiar os alunos que fizessem os melhores trabalhos. Entre os alunos vencedores estão os trabalhos publicados na página 108 deste relatório de pesquisa. A primeira das três produções foi da aluna **Am**, que ficou com o primeiro lugar por ter respeitado a regra de ser formado apenas por polígonos justapostos sem se sobreporem uns aos outros.

Destacamos novamente o trabalho desta aluna na figura 52 a seguir:

Figura 52: Mosaico com polígonos irregulares



Fonte: Arquivo da pesquisadora

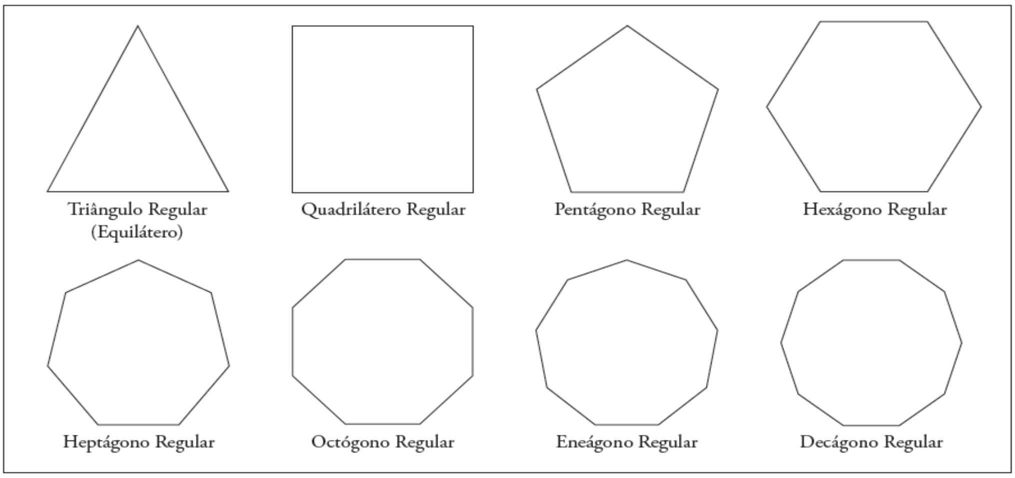
Esse concurso contribuiu muito para o envolvimento da maior parte da turma na realização da tarefa. No entanto, os alunos que se saíram melhor nas tarefas exploratório-investigativas realizadas até então, não deram muita importância à qualidade dos trabalhos. Diziam que não gostavam de desenhar, muito menos de colorir figuras.

Após essa etapa, apresentamos aos alunos alguns mosaicos formados apenas por polígonos regulares e organizamos a turma para a realização da tarefa, que foi dividida em três partes: pavimentação com polígonos regulares entre si; estudo do ângulo poliédrico e pavimentações com polígonos regulares não congruentes entre si. Adotamos o mesmo significado nesta pesquisa, para as expressões, pavimentações do plano, ladrilhamento do plano e composição de mosaicos.

6.3.1 Organização da turma

No primeiro dia de aplicação desta tarefa havia 33 dos 36 alunos do 7ºB. Optamos por organizá-los em grupos de quatro ou três alunos para iniciar a exploração, totalizando 9 grupos. Cada aluno recebeu, em aula anterior, uma coleção de polígonos regulares da professora-pesquisadora em papel colorido. Eles levaram esse material para recortar em casa, visto que levariam muito tempo para fazer essa atividade em sala de aula. Assim ganhamos tempo para a exploração. Os polígonos regulares escolhidos para o desenvolvimento da exploração foram: triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, eneágonos e decágonos. Essa escolha se deu pelo fato destes serem os polígonos sugeridos para o trabalho no Caderno do Aluno, Vol. 2 (2009), cuja maior parte das atividades haviam sido trabalhadas anteriormente.

Figura 53: Polígonos Regulares



Fonte: Caderno do Aluno, Vol. 2, 7º ano (SÃO PAULO, 2009, p. 53).

Antes de iniciar a exploração a professora conversou novamente com os alunos sobre o objetivo da atividade, enfatizando o “fazer matemática” por meio da investigação, buscando descobertas e “coisas escondidas”. Além disso, foi necessário retomar conteúdos atitudinais sobre como trabalhar em grupo, já que o problema da conversa paralela durante as explorações continuou dificultando o desenvolvimento das mesmas no tempo planejado. Sobre essa questão pedagógica, Ponte et al. (1998b, p. 7) explica que:

> Para que seja possível e proveitosa esta nova “maneira de viver” na sala de aula é necessário a negociação e estabelecimento de um conjunto de normas de relacionamento entre os alunos e o professor, que indiquem, com clareza, o que se espera de cada um e o que é e não é permitido.

É importante salientar que o 7º ano B não era uma classe problemática quanto à indisciplina, no entanto, como qualquer aluno nesta idade, conversavam demais. Se não houvesse uma negociação e estabelecimento de algumas regras antes da realização das tarefas, seria muito complicado o trabalho em grupo.

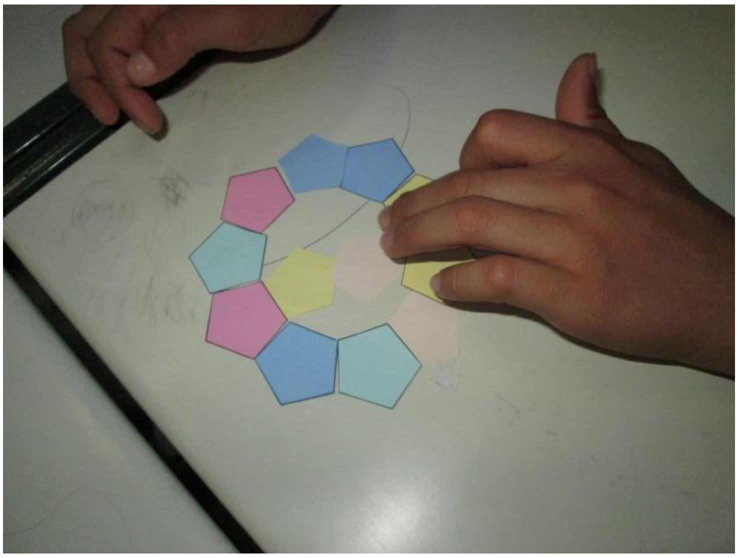
Para essa exploração foram utilizadas 5 aulas de 50 minutos cada. Duas aulas duplas para as explorações-investigações e uma aula para discussão e socialização dos resultados.

6.3.2 Introdução da tarefa

Após a organização da classe e dos grupos, a professora-pesquisadora retomou a apresentação em *slides* sobre Mosaicos, usando a projeção das imagens como meio de motivação para o início da tarefa. Foi explicado que eles deveriam considerar apenas mosaicos compostos por polígonos regulares em suas planificações, como pode ser visto no enunciado da tarefa.

Também foi necessário a leitura e explicação pormenorizada da tarefa para a turma já que a questão da leitura e interpretação textual para alguns desses alunos era bem comprometida. Muitas vezes, os alunos sabiam realizar os cálculos, compreendiam relações matemáticas, mas não conseguiam resolver problemas matemáticos. Mesmo tendo clareza de que uma explicação muito detalhada da tarefa poderia torná-la menos “espontânea” para os alunos, foi necessária uma intervenção maior, principalmente sobre as regras para a composição dos mosaicos com polígonos regulares. Os alunos pareciam não compreender as condições para as construções geométricas. Esse fato foi observado quando os alunos insistiram em pavimentar o plano unindo os polígonos a partir de seus lados e não de seus vértices (figura 54):

Figura 54: Mosaico com polígonos regulares congruentes



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Concordamos com Ponte et al. (1998b) quando afirmam que a fase de introdução de uma tarefa é um momento muito importante neste tipo de aula, pois é nesta etapa que se é possível colocar boas questões que mobilizem os alunos para a busca por soluções. Além disso, Ponte et al. (1998b) ressaltam que um enunciado bem escrito pode auxiliar no processo de realização da tarefa, principalmente porque o aluno pode retornar a ele sempre que tiver dúvidas. Por esse motivo, procuramos elaborar todos os enunciados das tarefas de forma escrita, seguindo-se sempre de uma leitura e interpretação oral por parte da professora-pesquisadora.

Foi fundamental levar em conta que numa sala de aula muito numerosa, composta por adolescentes em vários níveis de desenvolvimento e de maturação, o professor tem muito trabalho para fazer com que todos compreendam o que precisam fazer, neste caso, explorar e investigar utilizando os recursos próprios do raciocínio matemático.

6.3.3 Desenvolvimento da tarefa

Após a leitura das duas questões de “arranque” para iniciar a exploração, os alunos começaram a trabalhar. Alguns grupos de alunos separaram os polígonos em montes, marcaram o número de lados em cada um para facilitar a visualização e classificação e começaram a construir planificações sobre a mesa. Praticamente todos os alunos perderam muito tempo “brincando” com os polígonos ou compondo e decompondo malhas. Eles compunham uma determinada malha, desmontavam e voltavam a compô-la. Era necessário intervir o tempo todo para que se concentrassem nas atividades e após quase uma aula inteira de 50 minutos, não haviam iniciado nenhum registro escrito de qualquer conjectura.

Percebendo que os alunos não haviam compreendido que deveriam "encaixar" os polígonos por um vértice comum, a professora-pesquisadora resolveu então conversar novamente com toda a turma sobre como deveriam pavimentar o plano e enfatizar o que deveriam investigar:

> ***Professora Sílvia:*** *Vocês precisam investigar quais polígonos regulares pavimentam o plano e quais não pavimentam. Mas tentem explicar porque isso acontece. É importante explicar como vocês chegaram a essas conclusões!*

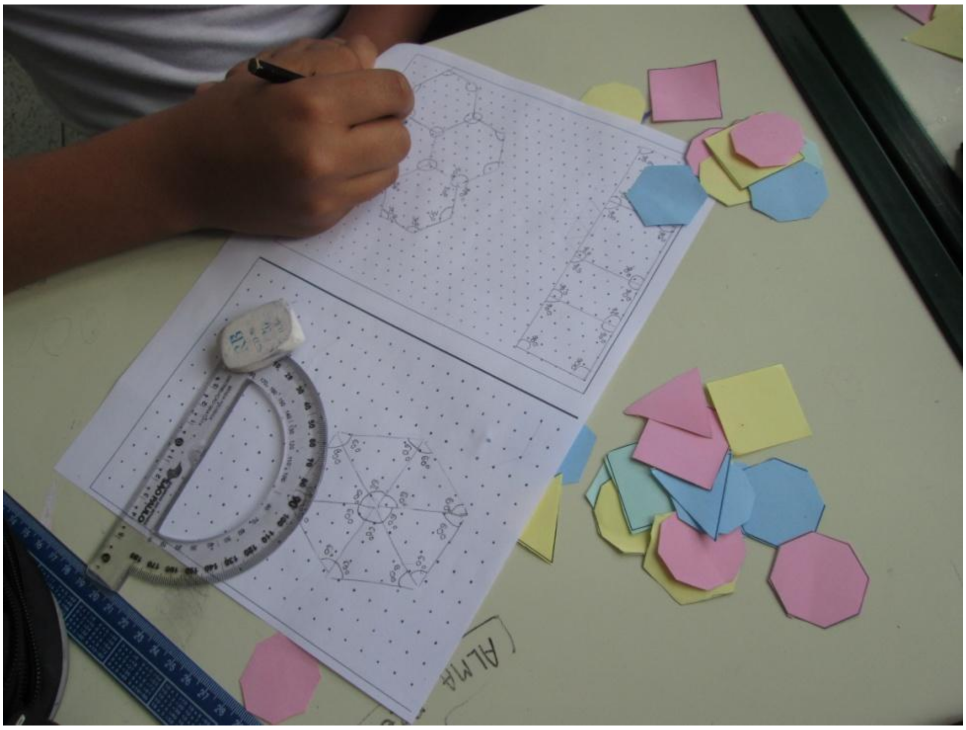
Quase todos os alunos perceberam nas primeiras aulas que apenas o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular, dentre os polígonos que possuíam em suas mãos, pavimentavam o plano. Sabemos por meio de estudos mais aprofundados que estes são realmente os únicos polígonos regulares de um mesmo tipo capazes de pavimentar o plano perfeitamente. Nos texto de Alves e Dalcin (1999, p.5), podemos encontrar as demonstrações para essas afirmações. Segundo os autores, "tais coberturas são chamadas mosaicos regulares do plano e são indicadas pelas sugestivas notações (3,3,3,3,3,3), (4,4,4,4) e (6,6,6)". Utilizamos esse tipo de notação para indicar as possíveis combinações de polígonos na parte final desta tarefa.

Nessas duas primeiras aulas de 50 minutos os alunos não conseguiram iniciar qualquer tipo de registro escrito sobre suas descobertas. Ficaram apenas manipulando os polígonos, ladrilhando o plano da mesa.

No dia seguinte, optou-se por trabalhar o registro da tarefa com os alunos dispostos em pares, já que em grupos a concentração deles na atividade foi insatisfatória devido ao barulho gerado pelas conversas.

A primeira atividade que realizaram foi a pavimentação, em malha pontilhada, com os polígonos regulares que cobrem o plano "perfeitamente" (figura 55). Essa atividade foi trabalhada com o intuito de retomar a questão investigada no dia anterior e avivar o raciocínio dos alunos, promovendo ainda uma sistematização das ideias geradas até então.

Figura 55: Polígonos Regulares na Malha Pontilhada



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Foi explicado aos alunos que poderiam continuar a exploração-investigação com os polígonos e que deveriam fazer colagens em folhas para registrar suas ideias. Além disso, a professora pediu para que indicassem as medidas dos ângulos internos dos polígonos que iam colando, pensando que desta forma eles poderiam perceber mais facilmente as relações entre as medidas dos ângulos e as pavimentações. Esse seria também um meio para verificar se haviam compreendido como calcular as medidas de tais ângulos.

Alguns alunos continuavam colando os polígonos formando faixas (figura 56), sem unir os vértices.

Figura 56: Polígonos Regulares Congruentes

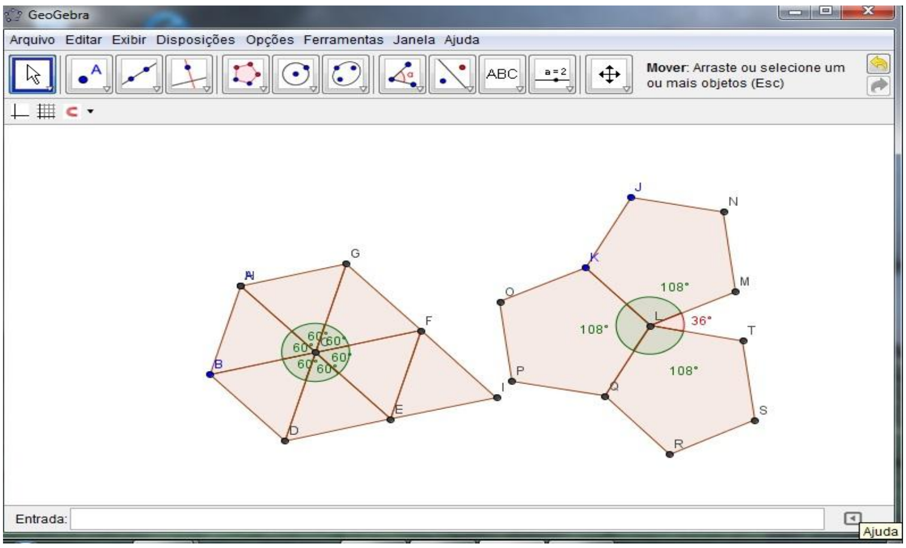
Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Nesse momento a professora-pesquisadora utilizou o software Geogebra e mostrou com uso de projeção como compor uma “malha” com polígonos regulares, usando para isso exemplos dos próprios alunos.

Alguns alunos ficaram muito interessados no software, questionando a possibilidade de haver como aplicativo para o celular. O aluno **Gi** ficou tão interessado que baixou o programa no computador de sua casa para explorá-lo.

.

Figura 57: Polígonos Regulares com o Geogebra



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

A seguir podemos observar como aconteceu essa interação entre os alunos e a professora-pesquisadora:

> ***Professora:*** *Então gente, vocês disseram que apenas três polígonos são capazes de pavimentar o plano perfeitamente. Quais são esses polígonos?*
> ***Coro****: O triângulo, o quadrado e o hexágono.*
> ***Professora:*** *Então vamos ver como podemos fazer isso no Geogebra.*

A professora então desenhou uma pequena malha com triângulos e com quadrados na janela do Geogebra. Os alunos adoraram ver como isso era fácil e possível.

> **Professora:** *Agora vou marcar as medidas dos ângulos internos. Fazemos assim...*

E continuou. Depois desfez o mosaico com quadrados e iniciou a pavimentação com pentágonos conversando com os alunos:

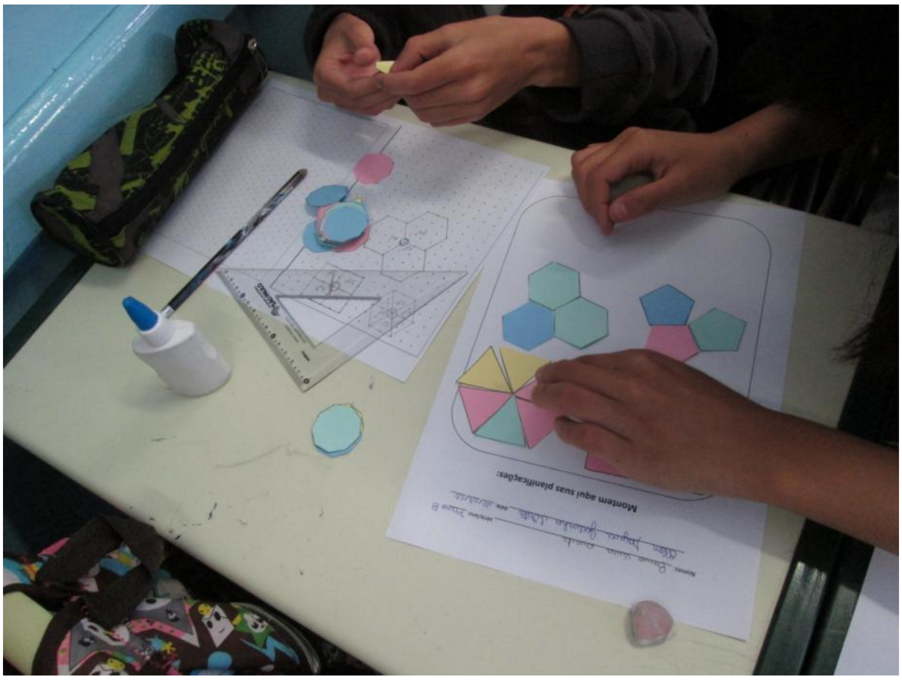
> ***Professora:*** *E falem pra mim um exemplo de polígono que não pavimenta o plano.*
> ***Aluno Th:*** *O pentágono!*
> ***Professora:*** *Mas por quê?*
> ***Aluno Th:*** *Porque não encaixa.*
> ***Professora:*** *Então vou construir aqui. — E construiu os pentágonos em volta de um único vértice. — Agora vou clicar na ferramenta ângulo pra marcar as medidas dos ângulos. Vejam como fica... O que vocês percebem?*
> ***Aluno Ya:*** *Que falta um pedacinho. Não dá pra colocar outro pentágono.*
> ***Professora:*** *Por que não dá?*
> ***Aluno Ya:*** *Porque o espaço é pequeno.*
> ***Aluno Th:*** *Se não colocar falta e se colocar outro, passa.*

> ***Professora:*** *Vocês precisam tentar construir as malhas geométricas com os outros polígonos e registrar as descobertas que forem fazendo.*

Houve um pouco de resistência em fazer colagens com todos os tipos de polígonos por parte da maioria das duplas. Eles questionavam sempre: *"Precisa fazer com todos professora?"* E a resposta era sempre a mesma: *"Vocês precisam justificar a hipótese de vocês sobre os polígonos que pavimentam o plano. Precisam fazer testes. Como vão dizer que não é possível se não tentarem? Se não justificarem? A não ser que vocês consigam justificar de alguma outra forma".*

A partir daí demoraram demais com as colagens, precisando que fossem lembrados constantemente de registrar o que estavam pensando. Muitos resistiam em marcar as medidas dos ângulos internos nos polígonos e alguns usaram o transferidor para medir, esquecendo-se de usar os conhecimentos trabalhados em aulas anteriores.

Figura 58: Pavimentação com polígonos regulares em material manipulável



Fonte: Arquivo da pesquisadora

A quarta aula terminou e as duplas não haviam realizado seus registros escritos, ficando para a próxima aula a fase de conclusão e discussão da tarefa.

6.3.4 Discussão da tarefa

Na quinta aula os alunos retomaram suas colagens e melhoraram seus registros escritos. Então se passou para a fase de discussão dos resultados. Nessa etapa a professora perguntou para os alunos quais os polígonos que realmente pavimentam o plano e porque isso acontece. Como ocorreu em praticamente todas as aulas com tarefas exploratório-investigativas com essa turma, os mesmos alunos tomaram a palavra e explicaram o que pensavam:

> ***Professora Sílvia:*** *Por que a pavimentação dá certo com o triângulo e não dá certo com o pentágono?*
> ***Aluno Th****: Eu acho que sei. Os triângulos têm ... seis triângulos. Cada um tem um ângulo de 60 e como são seis, 6 x 60 dá 360. E dá certo. Nos pentágonos se colocar mais um passa de 360º.*
> ***Professora Sílvia:*** *Mas por que isso acontece?*
> ***Aluno Th****: Porque os ângulos tem que dar 360 e com o pentágono não dá.*
> *O aluno* **Ya** *interviu:*
> ***Aluno Ya:*** *É porque o ângulo interno precisa ser divisor de 360º pra dar certo!*
> ***Professora Sílvia:*** *E 108 é divisor de 360?*
> ***Aluno Ya:*** *Não.*
> ***Professora Sílvia:*** *Então mostre isso.*

É perceptível nesse diálogo a mobilização do pensamento argumentativo. Segundo Fernandes e Fonseca (2004), para se construir argumentações plausíveis, utilizamos o raciocínio argumentativo, e para elaborar tais conjecturas, basta observarmos um determinado número de casos, passando do particular para o geral, como parece ter feito o aluno **Ya** quando afirmou que o ângulo interno precisava ser divisor de 360°. Podemos perceber na fala do aluno, o início do rigor em seu raciocínio argumentativo. Sobre esse processo, afirmam Fernandes e Fonseca (2004, p. 4*)* que "o rigor dos argumentos deve estar sempre presente no raciocínio dos alunos, sem que tal se relacione necessariamente com formalismo".

No caso dos polígonos regulares, sabemos que o argumento do aluno **Ya** é válido, mas ele não explicou como chegou a esta hipótese nem verificou se os demais ângulos internos dos outros polígonos eram ou não divisores de 360. Seria necessário um diálogo mais direto com estes alunos para fazê-los evoluir em seus raciocínios, o que demandaria mais tempo e exigiria que houvesse menos alunos na turma.

Os alunos perceberam que o polígono deveria ter um ângulo interno divisor de 360, mas não justificaram de forma mais lógica o motivo dos demais não formarem mosaicos. Se listassem todos os divisores de 360, talvez conseguissem elaborar argumentos mais consistentes.

Algumas duplas chegaram a mesma hipótese do aluno **Ya**, outras perceberam a relação de divisibilidade após o colega falar e alguns alunos não conseguiram entender muito bem o que ele estava explicando. Uma dupla de meninos pensava que para dar certo a pavimentação, o "número de lados" do polígono é que devia ser divisor de 360. Então foi questionado pela professora: *"Vocês disseram que o pentágono não pavimenta. Inclusive desenharam e fizeram colagens com pentágonos para mostrar esse resultado. Mas 5 é divisor de 360? Verifiquem."*

Esses alunos concluíram rapidamente que 5 é divisor de 360, mas como o pentágono não pavimentava o plano, então não era sobre isso que o colega **Ya** estava falando. Após algum tempo, um aluno dessa dupla procurou a professora e disse: *"Ah professora, eu descobri. O ângulo é que tem que ser divisor de 360. Não é?"*

6.3.5 O Grupo I

O grupo I foi formado pelos alunos **Gi**, **Ya**, **Ig** e **Ga**. Os alunos **Ya** e **Gi** são alunos participativos e geralmente bastante interessados nas aulas. O aluno **Ig** também é um bom aluno, se esforçando bastante para tirar boas notas. É muito participativo nas aulas, realizando quase sempre todas as atividades propostas. Também gosta muito de ir à lousa resolver problemas e atividades. Já o aluno **Ga** apresenta bastante dificuldade em praticamente todas as disciplinas e não costuma se envolver nas tarefas. Demonstra pouco interesse e entusiasmo na realização de atividades no dia-a-dia em sala de aula. No entanto, nas tarefas exploratório-investigativas realizadas nesta pesquisa foi mais participativo, algumas vezes solicitando ajuda da professora, atitude pouco comum para este aluno.

Após a leitura do enunciado e explicação da tarefa pela professora, os quatro alunos deste grupo começaram a tentar formar pavimentações sobre as mesas, mas logo, perceberam que os polígonos misturados dificultavam o trabalho.

> ***Aluno Gi:*** *Você pode colocar os triângulos no jeito.*
> ***Aluno Ya:*** *Peraí, o que você tá querendo fazer?*
> ***Aluno Gi****: Ver quais são os melhores.*
> ***Aluno Ya****: Como assim?*
> ***Aluno Gi****: Preencher tudo, sem sobrar nada ó. Por exemplo, é aqui ó... dá pra fazer tudo.*
> ***Aluno Ya****: Tem que formar um retângulo não é?*
> ***Aluno Gi****: É. Agora to tentando pegar o quadrado.*
> ***Aluno Ya****: Ah... o quadrado dá.*
> ***Aluno Gi:*** *O quadrado dá e o triângulo também.*
> ***Aluno Ig:*** *Coloca todos os triângulos aqui.*
> ***Aluno Gi:*** *O pentágono acho que dá.*
> ***Aluno Gi:*** *O hexágono, vamos ver o hexágono.*
> ***Aluno Ya:*** *Como que eu posso dizer?*
> ***Aluno Ig:*** *O pentágono não dá.*
> ***Aluno Ya:*** *Eu vou tentar com o octógono.*

Tiveram então a ideia de marcar nos polígonos o número de lados de cada um, agrupando-os. Pareciam bastante preocupados com a numeração dos polígonos, dividindo a tarefa. **Ga** e **Ig** ficaram numerando os polígonos segundo os números de lados enquanto **Gi** e **Ya** tomaram a liderança na exploração, verificando quais polígonos encaixavam. Ficaram discutindo que quem estava marcando os números deveria numerar os dois lados. Então um dos alunos perguntou se o quadrado precisava ser numerado também, pois no caso do quadrado não era difícil reconhecer visualmente a figura sem contar os lados. Por fim decidiram não continuar numerando os quadrados.

> ***Aluno Gi:*** *Eu vou numerar.*
> ***Aluno Ya:*** *Vai numerar todos?*
> ***Aluno Ig:*** *Oito, oito, sete... nove...*
> ***Aluno Ya:*** *Como é o nome do que tem nove lados?*

Aluno Gi: *Eneágono.*

Aluno Gi: *O de sete não dá porque ele tem uma pontinha em cima.*

Aluno Ig: *Não precisa marcar o nome. Marca o número.*

Aluno Gi: *Decágono, dez.*

De certa forma, após a marcação dos polígonos, houve um equilíbrio na liderança do grupo por parte dos três alunos, **Gi, Ya** e **Ig**. Já o aluno **Ga** praticamente só seguiu o que os colegas diziam, sem argumentar ou contestar as afirmações feitas.

Em todas as tarefas o aluno **Gi** se mostrou bastante independente. Ele parecia decidir o que ia fazer e já executava rapidamente, sem depender de outras opiniões. Já o aluno **Ya** conversava mais com os colegas e fazia muitas perguntas quando tinha alguma dúvida. Essa é uma característica deste aluno, que sempre questiona o que não compreende durante as aulas, contestando e defendendo seu ponto de vista em várias situações.

Aluno Ya: *Não pode por um em cima do outro também, né?*

Ninguém respondeu.

Aluno Gi: *Agora vou ver o de sete lados.*

Aluno Ga: *Sete lados não dá.*

Aluno Gi: *Eita. Vamos ver! ... é mesmo aí ó. Não encaixa o de sete lados. Fica sobreposto.*

Aluno Ya: *Não! Mas tipo assim, você pode por esses e então você encaixa o triângulo aqui.*

Aluno Ig: *Mas não pode. É só com um.*

Aluno Gi: *É só um ... (não conseguiu completar a frase, mas queria dizer só um tipo de polígono).*

Aluno Ga: *O sete foi eliminado né?*

Aluno Ig: *Foi.*

Aluno Gi: *Pronto, agora vamos ver o octógono.*

Aluno Ya: *A gente faz um pequeno e se der certo a gente tenta com um grande.*

Aluno Gi: *O octógono também não dá.*

Aluno Ya: *Tá certo o que vocês tão colocando aqui?*

Aluno Gi: *Vamos pedir pro* ***Ig*** *numerar.*

Durante alguns minutos o grupo discutiu novamente se os triângulos equiláteros formavam um mosaico. Havia claramente uma preocupação em classificar os polígonos usando a nomenclatura correta.

> ***Aluno Gi:*** *Olha, com seis e com quatro tenho certeza que dá. Só o triângulo que... Vamos tentar o triângulo daí depois a gente vê na hora de colar.*
> ***Aluno Ig:*** *Dá com seis. Dá com seis.*
> ***Aluno Ga:*** *Com o quadrado é mais fácil.*
> ***Aluno Ya:*** *Um pentágono!*
> ***Aluno Gi:*** *É um eneágono. Tá escrito aqui que é um eneágono*.

Nesse momento a professora interveio, percebendo que eles estavam discutindo muito, mas que não haviam registrado nada ainda:

> ***Professora Sílvia****: Vocês precisam escrever as hipóteses de vocês. Verifiquem todas as hipóteses, tá?*

A conversa mantinha-se acalorada entre os três alunos deste grupo. **Ga**, apenas observava e tentava montar pavimentações copiando os colegas timidamente. Foi necessária a intervenção da professora-pesquisadora para que registrassem suas conjecturas. A seguir realizamos uma análise destes registros a fim de cruzar os dados escritos com as transcrições de áudio e observações feitas.

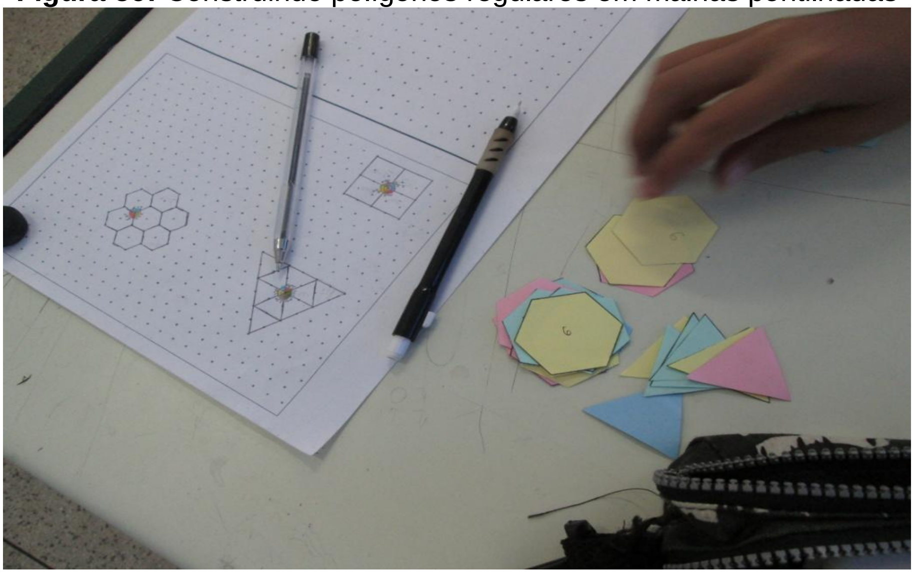
6.3.6 Desenhando e escrevendo nas aulas de Matemática: Grupo I

Os alunos dos nove grupos fizeram alguns registros ao fim das primeiras aulas. Alguns destes registros foram mais detalhados, outros mais concisos. Nós focamos apenas nos registros dos alunos dos dois grupos audiogravados e em alguns textos produzidos por alunos de outros grupos que nos chamaram a atenção quanto a qualidade e riqueza de elementos geométricos explorados. Neste item, segue nossa análise sobre as produções dos alunos do **Grupo I**.

No dia seguinte a primeira parte da Tarefa Ladrilhando o Plano com Polígonos Regulares, pensando em retomar as noções e conceitos já mobilizados durante a exploração, foi proposto aos alunos que reproduzissem as pavimentações construídas em malhas pontilhadas (figura 59) e, em seguida, elaborassem um registro escrito em forma de texto, explicando suas ideias e conjecturas. Desta vez, as atividades realizadas por eles foram feitas em duplas.

A escolha da passagem do material manipulável para a representação nas malhas pontilhadas se justifica pelo fato de que acreditamos que os objetos geométricos são percebidos primeiramente no espaço para depois serem reelaborados mentalmente, num movimento do raciocínio que envolve a visualização como habilidade para perceber, representar, transformar e criar.

Figura 59: Construindo polígonos regulares em malhas pontilhadas



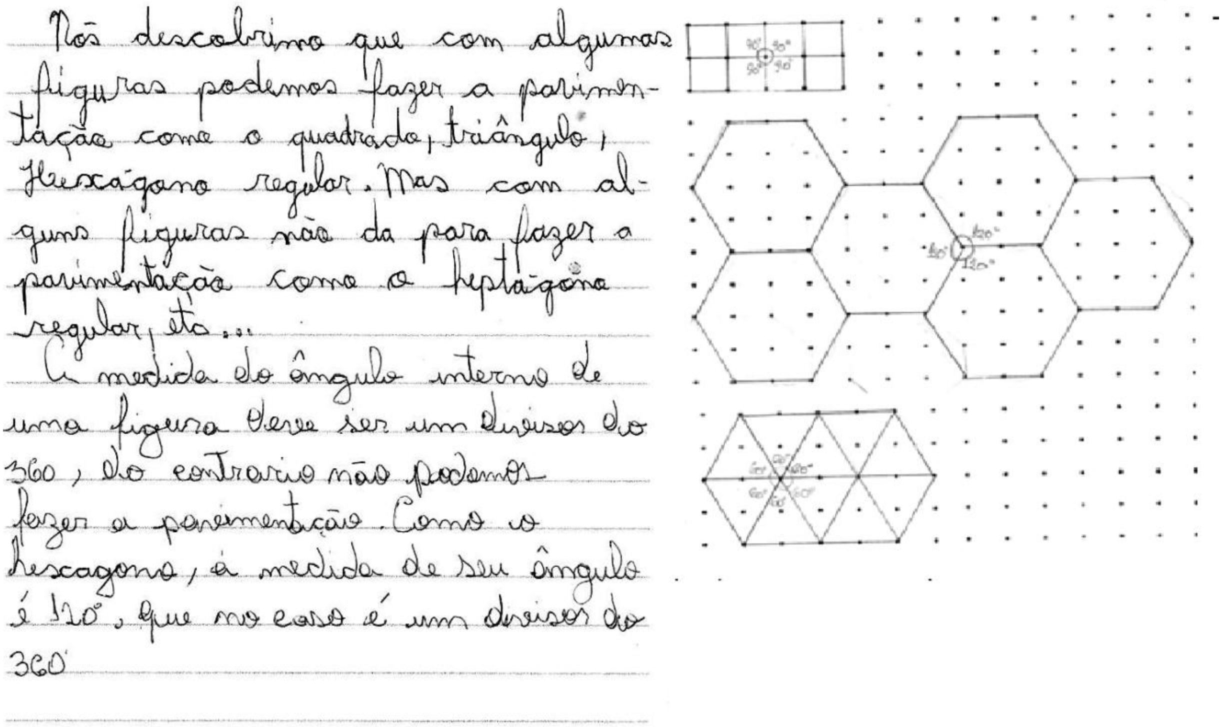
Fonte: Arquivo da pesquisadora

Sobre essa ideia, concordamos com Santos (2009, p. 22) que depois de percebidos no espaço, os objetos "são observados e analisados, identificadas e descritas suas propriedades, classificados, conceituados e por fim representados visualmente e mentalmente". Nesse processo, a visualização ganha importância fundamental.

> A visualização não é apenas o ato de ver, no sentido de utilizar um órgão sensorial. Está relacionada à capacidade de analisar o que se percebe como parte do mundo real e memorizar aspectos que caracterizem os objetos vistos. Refere-se então ao contato visual físico, mas também ao contato mental (imaginário) com o espaço. (SANTOS, 2009, p. 21)

Para alguns alunos a construção dos polígonos em malha pontilhada foi mais difícil do que imaginávamos que seria. Alguns deles não conseguiram construir triângulos ou hexágonos regulares e pediram ajuda. Essa transição do concreto manipulável para o “concreto desenhado” exige um tipo de manipulação mental da imagem que alguns alunos encontraram dificuldades em operar. Outros faziam as representações imediatamente, sem nenhuma dificuldade, como foi o caso dos alunos do **Grupo I**. Analisamos os registros do aluno **Ya** após a construção em malha pontilhada:

Figura 60: Construindo polígonos regulares em malhas pontilhadas



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Para este aluno (**Ya)**, a tarefa foi muito mais exploratória que investigativa, visto que percebeu facilmente a condição necessária para que os polígonos regulares ladrilhassem o plano. Mesmo assim, a tarefa ofereceu-lhe a oportunidade de perceber por meio da experiência o porquê disto. Suas conjecturas e questionamentos auxiliaram os demais colegas de grupo ou dupla a organizarem melhor suas próprias ideias. Além disto, durante a realização da tarefa, o aluno **Ya** pôde mobilizar os conhecimentos geométricos que já possuía, ampliando-os enquanto confrontava suas hipóteses com as de seus colegas. Em sua fala, percebemos que algumas vezes ele formulava a questão, que não era respondida por ninguém, mas que, de alguma forma, fazia com que ele próprio pensasse no assunto e elaborasse alguma conjectura que muitas vezes não era dita. Isso fica mais evidente quando confrontamos sua fala com o texto que elaborou na figura 59.

> ***Aluno Ya:*** *Não pode por um em cima do outro também, né?*
> *Ninguém respondeu.*
> ***Aluno Gi:*** *Agora vou ver o de sete lados.*
>
> ***Aluno Ya:*** *Não! Mas tipo assim, você pode por esses e então você encaixa o triângulo aqui.*
> ***Aluno Ig:*** *Mas não pode. É só com um.*

Nesta última fala o aluno **Ya** queria, a todo custo, encaixar um triângulo no espaço que ficava entre os pentágonos. Muitos alunos tentaram fazer a mesma coisa que ele durante a exploração. No entanto, seu colega **Ig** foi incisivo, explicando que só poderia ser usado um tipo de polígono.

Já em seus registros, **Ya** usou termos geométricos adequados e foi bastante claro em suas afirmações: *A medida do ângulo interno de uma figura deve ser divisor de 360, do contrário não podemos fazer a pavimentação.* Deu um exemplo para mostrar o que afirmou sobre o hexágono (figura 60). Isso mostra uma evolução entre o momento do trabalho em grupo, as discussões e a elaboração do registro escrito.

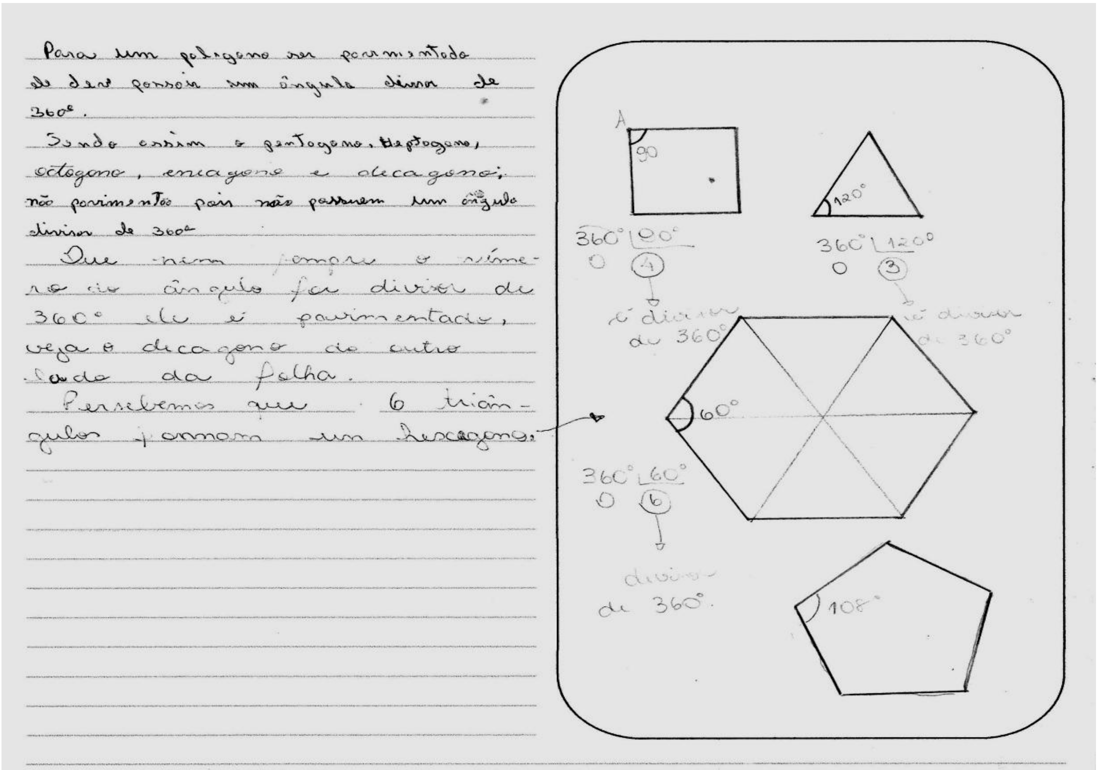
De acordo com Ponte (2010a, p.33):

> (...) os alunos evoluem na forma de exprimirem as suas ideias e de descreverem os processos matemáticos que utilizam, progredindo na tradução de relações da linguagem natural para a linguagem matemática e vice-versa, na variedade de formas de representação matemática que usam e no rigor com que o fazem.

Quanto ao aluno **Gi**, como aconteceu em praticamente todas as tarefas e registros, acabou cometendo erros por distração e ansiedade em terminar logo as atividades. Mas, essa é apenas uma hipótese, pois não temos como saber o que se passava na mente do aluno no momento em que escrevia. Baseamos-nos em observações feitas nas primeiras tarefas desta pesquisa e no conhecimento que a professora-pesquisadora possui sobre o aluno em tarefas rotineiras no dia a dia em sala de aula, além do rendimento em provas escritas e relatórios. Esse registro foi realizado pelo aluno **Gi** juntamente com o aluno **Ga,** porém **Ga** apenas escreveu o que seu colega ditou.

Podemos chamar estes “erros” de “enganos”, visto que é o que mais nos parece coerente com relação ao aluno **Gi,** que dominou essa fase da exploração da tarefa, construindo inclusive, todas as figuras geométricas e marcando as medidas dos ângulos. Na figura 61 observamos quando estes dois alunos claramente confundem as medidas dos ângulos dos triângulos equiláteros com as dos hexágonos.

Figura 61: Registrando e aprendendo



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Com tudo o que observamos sobre o aluno **Ga** durante as aulas**,** não podemos afirmar que esse aluno não tenha gerado e/ou mobilizado algum tipo de conceito geométrico. Ele não falou muito, não se expôs, mas estava atento, percebendo que alguns polígonos não formavam os mosaicos. Assumiu mesmo uma posição de aluno ouvinte. A parte que escreveu dizia o seguinte: *Para um polígono ser pavimentado ele deve possuir um ângulo divisor de 360º. Sendo assim o* *pentágono, heptágono, octógono, eneágono e decágono não pavimentam, pois não possuem um ângulo divisor de 360º.*

O aluno queria dizer "para um polígono pavimentar", e não "ser pavimentado". De acordo com Ponte (1998a, p. 7), "na comunicação, termos matemáticos inadequados são usados com sucesso, o que, no entanto, não impede os alunos de fazerem muitos raciocínios corretos".

Voltando ao aluno **Gi,** talvez o seu engano tenha ocorrido por ele ter percebido que com seis triângulos equiláteros, conseguia formar um hexágono. Essa visualização pode ter sido fonte de equívocos, que coincidiram com alguns cálculos que o aluno fez para verificação. Nesses cálculos o aluno dividiu 360º pelo ângulo interno dos polígonos regulares que sabia pavimentar o plano, pois testou esse fato previamente com material manipulável. No entanto, quando fez as representações nas malhas pontilhadas, trocou as medidas dos ângulos internos dos triângulos regulares pelas medidas dos ângulos internos dos hexágonos regulares. Em seguida fez os cálculos e circulou os quocientes, indicando que esses valores eram divisores de 360º. Mesmo isso sendo verdade, a informação pode ter induzido o aluno a pensar equivocadamente que esses quocientes indicavam o número de lados do polígono, como podemos observar no triângulo desenhado com medida de um ângulo igual a 120º (figura 61 da página anterior).

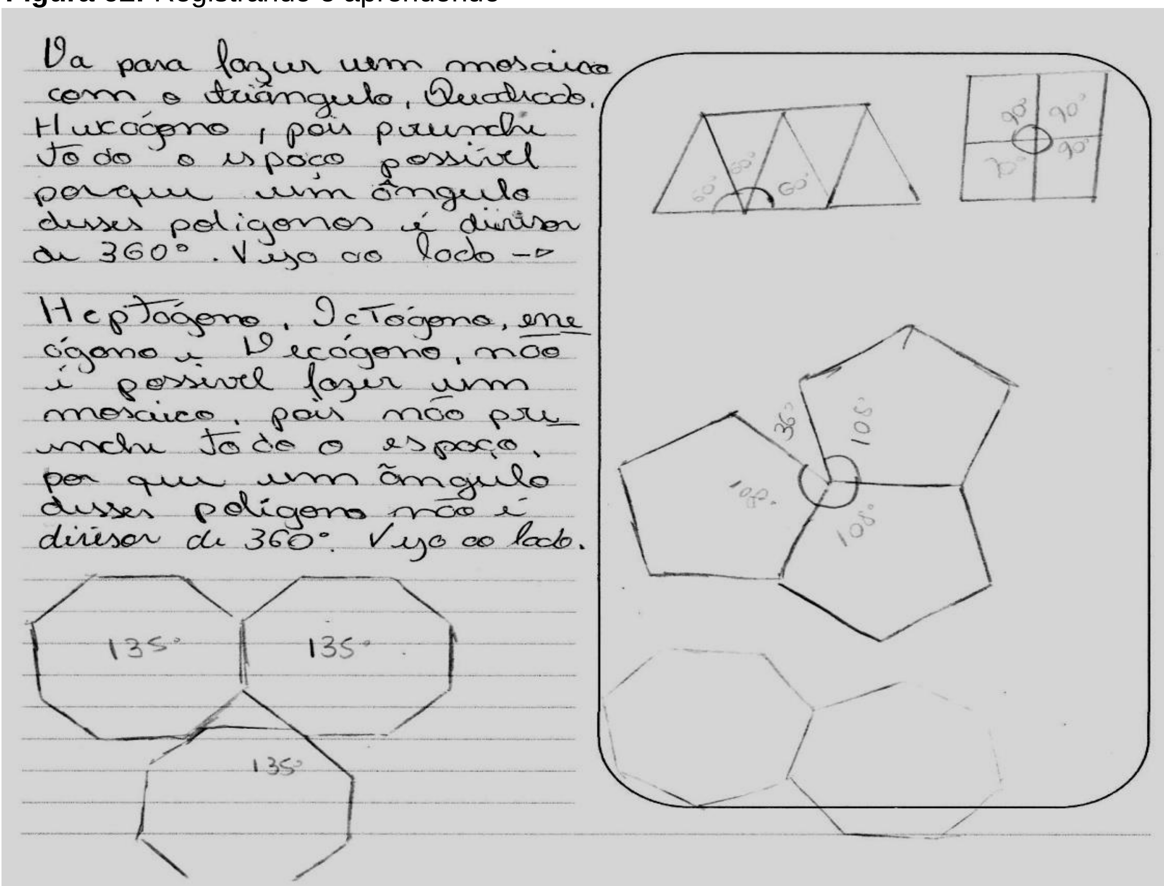
Sabemos que uma relação parecida com essa é válida para o ângulo externo dos polígonos regulares em que, dividindo 360° pelo número de lados, encontramos a medida do ângulo externo de determinado polígono. Mas nesse contexto, a relação não era verdadeira. **Gi** não percebeu que 360° deveria ser a soma dos ângulos dos polígonos em torno de um vértice. Por conta disso, errou em seus cálculos e suposições, mesmo concluindo que apenas ângulos divisores de 360º possibilitariam a pavimentação do plano.

O aluno **Ig** elaborou um texto mais simples, usando o termo mosaico, ao invés de pavimentação. Em seus registros percebemos que ele não utilizou uma representação com triângulos realmente equiláteros e nem os dispôs em torno de um único vértice (figura 62). Alguns alunos continuavam construindo "faixas" com os polígonos.

Ig teve uma participação e envolvimento muito maior quando estava trabalhando em grupo no primeiro dia da tarefa. Ele interagiu constantemente com os amigos, questionando, respondendo espontaneamente e tentando montar os mosaicos sobre a mesa. No dia em que precisou registrar suas conjecturas, ficou mais quieto e demonstrou menos interesse.

De um modo geral, os três alunos, **Ya, Gi** e **Ig**, apresentaram desde o início desta pesquisa, uma predisposição para tarefas de natureza exploratório-investigativa, enquanto que o aluno **Ga**, permaneceu um pouco tímido, esperando que os outros colegas tomassem sempre a liderança na realização das atividades.

Figura 62: Registrando e aprendendo



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Percebemos que muitas vezes houve alguns “vácuos” entre o que os alunos pensavam, diziam e registravam. Segundo Ponte (1998a, p. 7):

> Grande parte da comunicação dos alunos é não verbal. Por vezes, eles têm ideias interessantes, mas têm também dificuldades em expressá-las clara e corretamente — trata-se de um problema relativo ao domínio de ferramentas cognitivas básicas. Uma vez

> obtidas as conclusões, outra grande dificuldade manifestada por muitos alunos é a elaboração do seu registro escrito.

Por isso não é conveniente avaliar os conhecimentos de nossos alunos por meio de um único instrumento de coleta de informações. É necessário desenvolver o registro escrito da linguagem matemática, mas ouvir o que os alunos dizem, conversar mais com eles sobre o que estão pensando, fazendo e como pretendem executar o que planejam. Tarefa essa nem sempre possível em nossa realidade escolar, mas que devemos almejar sempre.

6.3.7 O Grupo II

O grupo dois, composto pelos alunos **Th, Br, Bf** e **Lu**, não se saiu muito bem na primeira parte desta tarefa exploratório-investigativa. Pouco do que disseram durante as aulas pôde ser transcrito, pois se envolveram demais em conversas paralelas inadequadas e brincadeiras.

A impressão que tivemos foi que exageraram nas atitudes porque sabiam que suas falas estavam sendo gravadas, o que nos pareceu estranho, visto que até então a gravação inibia o comportamento natural dos alunos. Neste dia, e com este grupo especificamente, ocorreu exatamente o contrário, mas num sentido negativo para a exploração matemática da tarefa proposta. Não temos como saber se o comportamento natural desses alunos é realmente assim quando estão em grupo, pois em aulas rotineiras costumam sentar em carteiras individuais e respeitando um “mapa de sala” feito pelos professores para evitar indisciplina. É possível que o fato de estarem juntos em sala de aula tenha despertado o comportamento espontâneo deles. O certo é que esses alunos não se envolveram na tarefa como pretendíamos que ocorresse.

Para Ponte (2003a), muitos alunos não têm qualquer interesse pelas investigações matemáticas. Isso pode ocorrer porque não têm interesse pela escola ou porque seus interesses estão voltados para outros objetivos pessoais. Os alunos deste grupo, por exemplo, são bons alunos, mas devido à própria idade em que se encontram, quando estão reunidos em grupos gostam mesmo de conversar sobre assuntos de interesse próprio, como jogos, esportes, namoro e outras coisas pessoais.

Ainda sobre essa dificuldade, de acordo com Segurado e Ponte (1998, p. 9):

> (...) o trabalho investigativo poderá estar ao alcance da generalidade dos alunos dos diversos níveis de ensino, mas pode defrontar-se com dificuldades decorrentes das suas concepções e atitudes, bem como de fatores associados ao contexto escolar e ao sistema educativo.

Os únicos momentos em que conseguimos transcrever suas falas foram os que a professora-investigadora interviu para que participassem da tarefa. Passando pelo grupo, a professora observou o que estavam fazendo, então o aluno **Th** perguntou:

> ***Aluno Th:*** *Professora, pode misturar os polígonos?*
>
> ***Professora Sílvia:*** *Pode. Por isso eu entreguei bastante para que vocês tenham muitas peças para usar.*
>
> ***Aluno Lu:*** *Vai logo, escreve aí.*
>
> ***Aluno Bf:*** *Escreve o que? Não tem nada pra falar!*

Eles tentavam fazer o ladrilhamento sobre um livro no meio das mesas. Montavam e desmontavam os mosaicos enquanto brincavam e conversavam informalmente. Então continuaram:

> ***Aluno Lu:*** *Pentágono dá. Eu acho...*
>
> ***Aluno Lu:*** *Pentágono não vai ficar direito ó...*
>
> ***Aluno Bf:*** *É lógico! Aqui é um ângulo de 90° (devia se referir ao quadrado). Aqui não é ângulo de 90° (no pentágono).*
>
> ***Aluno Th:*** *Coloca assim ó, o pentágono, o heptágono e o octógono não formam malha.*
>
> ***Aluno Bf:*** *Não, deixa assim! Vai escrever mais?*
>
> ***Aluno Lu:*** *Não dá malha por quê?*

Mesmo com o pouco envolvimento na atividade, durante a fase de exploração do material manipulativo, dois alunos deste grupo elaboraram textos razoáveis sobre suas descobertas na aula seguinte, os alunos **Th** e **Lu**. Já os alunos **Br** e **Bf** produziram textos curtos e confusos, sem se preocupar muito com qualidade. Não surgiram novas conjecturas além das que já descrevemos no **Grupo I**. Separamos os registros dos quatro alunos para análise mais detalhada no próximo item.

6.3.8 Desenhando e escrevendo nas aulas de Matemática: Grupo II

O aluno **Th**, não se desligou do trabalho feito com os colegas e redigiu seu relatório recorrendo às percepções que fez com o grupo:

> *Nós descobrimos que para saber se um polígono pavimenta o plano tem que ver o ângulo do polígono. Ex.: O quadrado tem cada ângulo de 90º, se juntarmos 4, temos 360º certos. Já o pentágono tem 108º, se juntarmos 4 irá passar, se colocar só 3 vai sobrar 36º, que é de um triângulo, ou seja, ele não tem pavimentação. Nós conseguimos pavimentar com o quadrado, triângulo e hexágono.*

Podemos ver que o aluno **Th** utilizou a nomenclatura correta para os polígonos e também mediu corretamente os ângulos das figuras utilizadas (quadrado e pentágono). No entanto, apenas descreveu o que observou em sua exploração, não chegando a elaborar uma generalização. Já o aluno **Bf** foi bem mais confuso:

> *Nós percebemos que só dá para fazer uma malha com 3 polígonos, o triângulo equilátero, o quadrilátero e o hexágono. Já as outras figuras valiam polígonos na malha daí eles não formam um mosaico. Nós podemos ver que os polígonos que dão para fazer um mosaico têm ângulos iguais que fala o grau da figura.*

O aluno **Bf** é um aluno que apresenta problemas de indisciplina em sala de aula. Conversa muito e não costuma terminar as tarefas propostas, tampouco faz as lições de casa. É um aluno esperto, compreende bem as explicações dadas, mas não se interessa muito pelos estudos. Durante as tarefas exploratório-investigativas, seu comportamento não mudou muito, o que contribuiu para um rendimento insatisfatório.

A afirmação que o aluno **Bf** fez na segunda frase de seu registro escrito ficou muito confusa, não sendo possível compreender o que ele quis dizer. Já a conjectura que elaborou na terceira frase não é válida: *Nós podemos ver que os polígonos que dão para fazer um mosaico têm ângulos iguais que fala o grau da figura. O* aluno não se preocupou em realizar testes ou justificar sua afirmação e não mediu os ângulos internos de todos os polígonos dados na tarefa. Na verdade isso não era necessário. Pelo que pudemos observar, o aluno mediu apenas os ângulos dos quadrados, que ele chamou de quadriláteros, e dos triângulos, concluindo precipitadamente que os polígonos que possuíam "ângulos iguais", pavimentavam o plano. É provável também que o aluno não tenha percebido que os polígonos que manipulava eram regulares e muito menos que sendo regulares, seus ângulos eram congruentes.

Mesmo trabalhando várias tarefas envolvendo noções e conceitos geométricos anteriormente, nossa hipótese é que o aluno não se apropriou de algumas habilidades e conceitos, como por exemplo, medir ou calcular a medida dos ângulos internos de um polígono regular, estabelecer relações entre algumas propriedades dos polígonos (soma dos ângulos internos, ângulos externos, número de lados, ângulos internos e polígonos regulares). Além disso, o aluno estava mais distraído que de costume.

O terceiro aluno do **Grupo II** foi o aluno **Lu**, que é considerado um aluno bastante responsável, educado e interessado em tirar boas notas. Essa concepção de que o aluno precisa tirar boas notas para ser considerado bom, é predominante em nosso meio escolar. É muito difícil para o aluno, entender que sua aprendizagem é um processo e não um fim, como os resultados de provas escritas e avaliações formais. Esse tipo de concepção é construída ao longo do tempo, pelos próprios professores, pais e toda a comunidade escolar da qual a criança faz parte desde cedo. Dessa forma, não é fácil para o professor, fazer com que os alunos entendam que o "fazer matemática" está muito mais relacionado à motivação pela busca de soluções criativas e eficientes para as questões propostas do que ao sucesso em provas e exames escritos.

Nos registros de **Lu**, ele descreveu passo a passo seus testes com todos os polígonos:

> *Triângulo: juntando 6 triângulos forma-se um hexágono. Os ângulos em volta dos pontos que ligam os triângulos o resultado é de 360º.*

> *Com o triângulo é possível fazer a planificação porque 360º é divisível por 60º.*
> *O quadrado: juntando 4 quadrados formam-se um quadrado maior. Cada ângulo do quadrado é de 90º e juntando todos dá 360º.*
> *Pentágono: não dá para formar a malha quadricular. Porque irá sobrar um triângulo pequeno.*
> *Hexágono: dá para formar uma malha porque não sobrará nenhuma parte.*
> *Heptágono: não dá para fazer a malha porque ele não é divisível por 360º.*
> *Octógono: o octógono também não dá para formar na malha porque se você juntar os 4 octógonos sobra um quadrado no meio.*

Em seu texto, **Lu** foi descrevendo o que aconteceu quando tentou construir os mosaicos com cada polígono regular. O aluno utilizou corretamente a nomenclatura para os polígonos e fez afirmações, que embora triviais, eram verdadeiras. A questão de ser trivial ou não tem muito a ver com o quanto a descoberta é importante ou não para o aluno e sua necessidade em registrar o maior número possível de informações percebidas. Mais uma vez, acreditamos que essa tendência por parte de alguns alunos está relacionada às suas concepções de ensino e aprendizagem e do que precisam fazer para terem sucesso, ou seja: “quanto mais eu escrever, melhor será minha nota”.

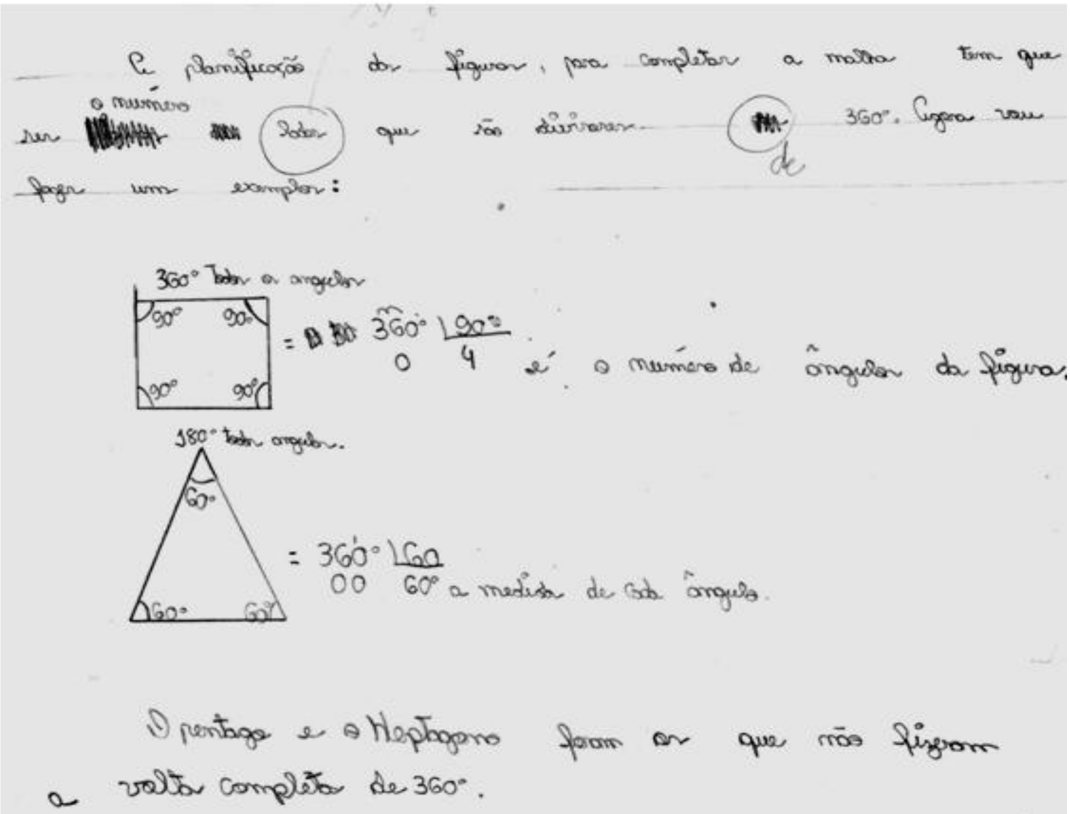
É importante frisar que antes de iniciar cada tarefa a professora-pesquisadora explicou aos alunos que eles fariam registros e relatórios sobre suas ideias, conjecturas e descobertas, e que seriam avaliados também por meio destes instrumentos. Esse fator pode ter contribuído para tal tendência dos alunos em registrar informações já bem conhecidas por parte deles, como é o caso da soma dos ângulos internos de um quadrado ser 360º ou o fato de que cada um de seus ângulos mede 90º.

Interessante no registro do aluno **Lu** é que ele explicou que *com o triângulo é possível fazer a planificação porque 360º é divisível por 60º*, mas não usou esse argumento para os demais polígonos. Não usou o conceito de divisibilidade para generalizar a situação.

Mais uma vez estamos diante da dificuldade dos alunos em registrar o que pensam ou dizem enquanto exploram materiais, informações, realizam testes, conjecturam e analisam uma ou mais questões. Mesmo assim, acreditamos que além de ser um ótimo instrumento para diagnóstico da aprendizagem dos alunos, o registro escrito faz com que seus interlocutores reflitam sobre sua própria experiência durante as tarefas, sendo também excelente meio para avivar a memória.

Por último temos o registro do aluno **Br**, que claramente não relacionou a medida dos ângulos internos dos polígonos à possibilidade de planificação em forma de mosaico (figura 63).

Figura 63: Registrando e aprendendo



Fonte: Arquivo da pesquisadora

O aluno **Br** fez a conjectura de que a “planificação” das figuras se deve ao número de lados ser ou não divisor de 360º. Essa hipótese foi reforçada pelo fato do aluno dividir primeiramente 360º por 90º e resultar em 4, que é o número de lados do quadrado. Depois ele dividiu 360º por 60º, mas errou no quociente, pois o resultado correto deveria ser 6 e não 60. Esses cálculos nos indicam uma certa confusão no pensamento do aluno. Se ele afirmou que a pavimentação dependia do número de lados do polígono ser ou não divisor de 360º, por que então se preocupou com os ângulos das figuras em questão? No final de seu registro, afirmou que o pentágono e o heptágono foram os únicos que não fizeram a volta completa de 360º, mas não explicou como chegou a esta conclusão.

Percebemos que há um conflito entre duas ideias que emergiram na mente do aluno **Br**: por um lado, acreditava que o que definia a construção dos mosaicos com polígonos regulares era o número de lados dos polígonos e, por outro lado, como essa primeira afirmação não deu certo para o pentágono, ele utilizou a medida dos ângulos para o cálculo com o triângulo.

Mesmo usando essas últimas informações, sobre os ângulos internos do triângulo e sobre alguns polígonos não darem uma volta completa de 360º, **Br** não reformulou sua hipótese inicial.

Analisando os registros dos 33 alunos participantes, constatamos que 29 alunos responderam que apenas os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares podiam ladrilhar o plano, formando mosaicos. Oito duplas afirmaram que a soma dos ângulos em torno de um vértice dos polígonos devia ser 360º e que em alguns casos a pavimentação não era possível porque quando juntavam os polígonos, essa soma era maior que 360º ou faltava um "pedacinho".

Quanto a generalização da condição necessária para se obter mosaicos formados por polígonos regulares, ou seja, que o ângulo interno do polígono regular deveria ser divisor de 360, apenas seis duplas comentaram em seus registros escritos.

Além dessas respostas, quatro duplas fizeram afirmações que não se verificam ou que não nos fazem sentido:

- *Precisamos de 7 triângulos para formar um heptágono.*
- *A "planificação" das figuras para completar a malha tem que ser o número de lados que são divisores de 360º.*
- *O pentágono e o heptágono foram os únicos que não deram para fazer a malha.*
- *Nós podemos ver que os polígonos que dão para fazer um mosaico têm ângulos iguais que fala o grau da figura.*

Essas afirmações foram elaboradas pelos alunos que mais apresentam dificuldades na disciplina de Matemática. Algumas dessas dificuldades estão fortemente relacionadas à relação que estes estudantes têm com a Matemática e com os estudos de um modo geral, visto que demonstram pouco interesse em aprender os conteúdos de outras as disciplinas também.

Entretanto, os mesmos alunos que elaboraram as afirmações confusas acima, perceberam quais eram os três polígonos regulares que formam mosaicos.

Sendo assim, concluímos positivamente que todos os alunos da turma, de alguma forma, mobilizaram vários conceitos geométricos enquanto realizavam as atividades desta tarefa. Eles se preocuparam em utilizar termos matemáticos específicos, fizeram a construção de várias representações dos polígonos em malhas pontilhadas e no papel em branco, trabalhando a visualização e operando mentalmente as imagens. Esses processos possibilitaram o desenvolvimento dos conceitos figurais envolvidos na exploração-investigação, como os conceitos de ângulos, polígonos, polígonos regulares, vértice e plano. É possível que outros conceitos tenham sido construídos ou mobilizados, no entanto, não temos como analisá-los, pois não temos como saber o que os alunos pensam enquanto estão envolvidos em atividades de aprendizagem. Lidamos apenas com as informações que eles comunicam oralmente ou por meio de registros escritos.

Mesmo assim, constatamos que alguns alunos foram além, relacionando as propriedades específicas dos ângulos dos polígonos regulares como condição necessária para formar mosaicos no plano. Esses alunos apresentaram um raciocínio matemático mais elaborado que os demais, vislumbrando desde já, a beleza do processo que envolveu o raciocínio indutivo, na busca por regularidades e generalizações.

Após a discussão da primeira parte da tarefa Ladrilhando o Plano e elaboração dos registros escritos pelos dos alunos, lançamos mais uma questão para que investigassem. Essa questão norteou a segunda parte da tarefa investigativo-exploratória e será descrita a seguir.

6.4 Ladrilhando o Plano: Segunda Parte

Optamos em fazer uma análise mais geral desta etapa da tarefa, visto que levou apenas uma aula de 50 minutos para sua realização. Descrevemos o enunciado da questão lançada para os alunos, o desenvolvimento da tarefa e algumas falas durante a realização da mesma, seguindo-se de uma discussão com toda a classe. Também inserimos alguns registros escritos de algumas duplas que nos chamaram a atenção em suas conjecturas e testes. Estávamos na sexta aula da tarefa.

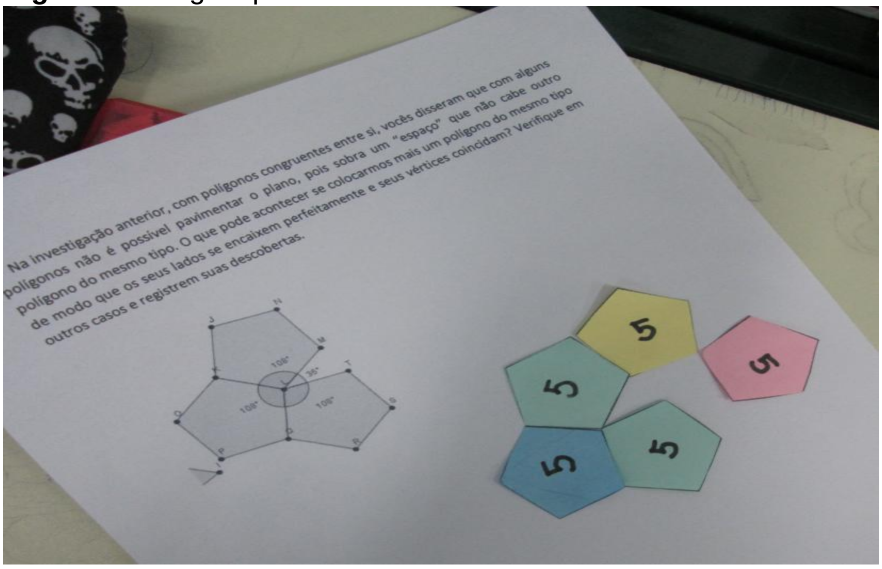
6.4.1 Quando o a figura sai do plano

Quando os alunos insistiram em inserir um pequeno triângulo entre os pentágonos, pensamos em propor uma situação nova para eles. Lançamos a seguinte questão para que explorassem em grupos de quatro alunos cada:

> *Na investigação anterior, com polígonos congruentes entre si, vocês disseram que com alguns polígonos não é possível pavimentar o plano, pois sobra um "espaço" que não cabe outro polígono do mesmo tipo. O que pode acontecer se colocarmos mais um polígono do mesmo tipo, de modo que seus lados se encaixem perfeitamente e seus vértices coincidam? Verifiquem em outros casos e registrem suas descobertas.*

O enunciado foi acompanhado de uma figura feita com pentágonos regulares, construída pela professora-investigadora com software Geogebra (figura 64). O intuito dessa figura era relembrar os alunos do que haviam verificado na tarefa anterior. Cada dupla recebeu uma folha com o enunciado da questão e utilizaram polígonos recortados em papel colorido para explorar a situação e registrar suas conjecturas. Havia 35 alunos na classe neste dia.

Figura 64: Ângulo poliédrico



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Antes de iniciar a tarefa, a professora retomou a apresentação em slides, comentando novamente a existência dos vários tipos de mosaicos nas construções humanas e na natureza, finalizando a apresentação com alguns mosaicos formados por polígonos. Conversou com os alunos sobre as descobertas que fizeram nas aulas anteriores sobre polígonos regulares que ladrilhavam o plano e o porquê disto acontecer.

> ***Professora Sílvia:*** *Vocês descobriram que os polígonos que pavimentam o plano são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Mas vocês precisavam investigar porque esses polígonos pavimentaram o plano e os outros não. O que acontecia entre os ângulos destes polígonos que não ocorria com os demais*? *Alguns de vocês conseguiram justificar melhor suas conjecturas e outros elaboraram afirmações mais simples. A partir daí vamos continuar com mais esta questão...*

Como nas tarefas anteriores, a professora fez a leitura do enunciado para toda a turma, explicando o que era proposto:

> ***Professora Sílvia:*** *Vocês lembram-se desta imagem? Alguns de vocês disseram, vamos colocar aqui o caso do pentágono (a professora usava a imagem em projetor data show), que não dá pra*

colocar mais um pentágono porque se eu colocar mais um passa de...?

***Alunos:** 360º.*

***Professora Sílvia:** Passa de 360º... E se eu não colocar, fica faltando. Foi isso que disseram?*

***Professora Sílvia:** A pergunta que eu tenho pra vocês agora é a seguinte: E se eu colocar mais um pentágono aí?*

***Aluno Th**: Não cabe.*

***Professora Sílvia:** Mas e se eu forçar? Se eu prender os lados desse pentágono nos lados dos outros, encostando o vértice no vértice comum aos pentágonos colados no plano? Vamos tentar fazer?*

Passados aproximadamente 20 minutos de investigação por parte dos alunos, a professora-pesquisadora interviu, conversando com eles na intenção de verificar o que já haviam realizado e como estavam pensando.

***Professora Sílvia**: Pessoal, vamos parar um pouquinho pra que a gente possa ver o que os grupos conseguiram perceber até agora. Quem sabe, com o que algum colega disser vocês possam ter "uma luz" para continuar. Então, o que eu propus? Que vocês tentassem encaixar mais um polígono regular no espaço que vocês falaram que era pouco.*

***Professora Sílvia**: Para pavimentar, o ângulo central tem que ser de quantos graus?*

***Aluno Gi:** Trinta e seis.*

***Professora Sílvia**: Trinta e seis?*

***Aluno Ig:** Não. 108... não! 360!*

***Aluno Ya:** 360.*

***Professora Sílvia**: 360º em volta de um.... vértice... é isso?*

Todos disseram que sim.

***Professora Sílvia**: O que aconteceu quando vocês colaram o outro pentágono nesse espacinho aí, que era de 36º? E vocês colaram um outro pentágono... que tem o ângulo interno de quanto mesmo?*

***Alunos:** 108º!*

***Professora Sílvia**: Vocês tentaram fazer 108 caber dentro de 36 não foi isso?*

***Aluna Fe:** A figura ficou tridimensional.*

***Aluno Ya:** Na verdade, o nosso só não ficou mais uma planificação, ficou com um tipo de uma "lombadinha" assim... — E mostrou no papel sua construção para a classe.*

***Professora Sílvia**: Ficou uma lombadinha? Uhm... Mas você não concorda com a **Fe** quando ela diz que ficou tridimensional a construção?*

*O aluno voltou o olhar para sua construção e balançou a cabeça, mas seu colega de dupla, o aluno **Ig**, respondeu prontamente:*

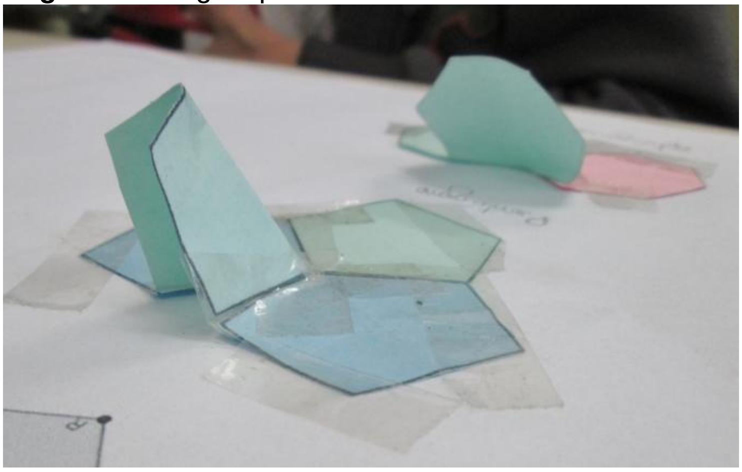
***Aluno Ig**: Sim.*

***Aluno Gi:** Saiu do plano professora?*

***Professora Sílvia**: Saiu do plano?*

A professora repetiu a pergunta para não respondê-la ao aluno **Gi**, tentando fazer com que eles mesmos refletissem sobre o que estava sendo comentado. O aluno **Ya** balançava a cabeça afirmativamente. Na figura 65 podemos observar uma das construções feitas por estes alunos

Figura 65: Ângulo poliédrico



Fonte: Arquivo da pesquisadora

***Professora Sílvia**: Quanto vai ficar valendo esse ângulo agora?*

***Aluno Ig**: 432º.*

***Professora Sílvia**: Bem, o **Ig** falou que dá 432º. Vocês têm que verificar se ele fez essa conta direito.*

> ***Professora Sílvia**: Se o ângulo passou de 360º... ó ... vocês disseram que se têm 360º a figura fica no plano... Como o ângulo ficou maior, sendo 432º, a figura tá saindo do plano, não é isso? Será que isso acontece no caso dos outros polígonos que não pavimentaram o plano, como o heptágono, o octógono?*

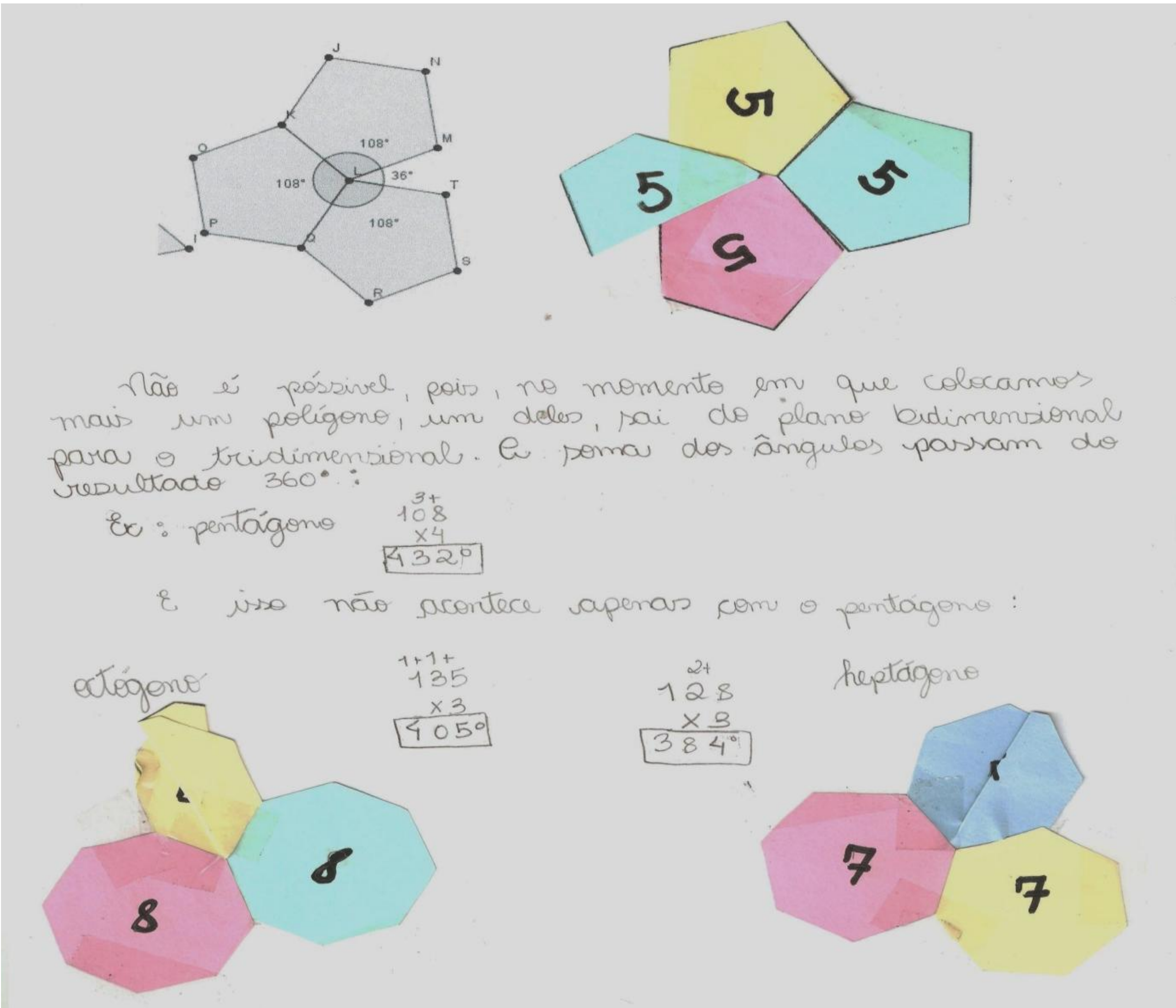
Os alunos começaram a tentar encaixar os polígonos conforme a professora sugeriu. Em seguida fizeram colagens e registros escritos sobre o que estavam percebendo.

> ***Aluna Am:** Será que só podem ser polígonos regulares? Porque se não for polígono irregular o ângulo não vai diminuir, entendeu?*
> ***Aluna Ell:** Vou tentar com outro pentágono aqui. Será que tem que ser regular?*
> ***Aluna Am:** É isso que eu estava falando.*
> ***Aluna Ell:** Ah... peraí!*
> ***Aluna Am:** Não tá falando nada aqui que tem que ser regular.*
> *A aluna **Am** chamou a professora.*
> ***Aluna Am:** Tem que ser só polígono regular ou pode ser irregular?*
> ***Professora Sílvia**: Esse tem que ser regular. Você precisa encaixar um outro polígono regular aqui, igual aos outros. O que vai acontecer com essa figura? O que vai acontecer com esse ângulo?*
> *As alunas ficaram quietas, sem entender muito bem do que se tratava a proposta da professora, pois na mente delas, não cabia outro pentágono ali de forma alguma.*
> ***Professora Sílvia**: Essa é a ideia de que vocês terão que colar esse pentágono aqui na folha. Então juntem aqui os lados.*
> ***Aluna Ell:** Então tem que colocar outro polígono do mesmo jeito desde daqui?*
> ***Aluna Am:** Não.*
> ***Aluna Am:** Acho que cortei errado.*
> ***Aluna Ell:** Pra mim não tá ornando isso... (risos).*
> ***Aluna Ell:** Vai sobrar de qualquer jeito.*
> ***Aluna Am:** Vai sobrar.*
> ***Aluna Ell:** Não vai dar certo os ângulos.*

> ***Aluna Am****: Nós podemos ver que não vai dar certo porque se não um vai cobrir o outro!*
>
> ***Aluna Ell:*** *Eu acho que isso é impossível cara.*
>
> *A professora foi até a dupla para orientar como deviam colar o polígono que a princípio não cabia no espaço existente.*

Após muita conversa e interação com os grupos, eles foram conseguindo fazer as colagens. Embora tenha sido complicada a realização desta etapa da tarefa para os alunos, fazer essa operação apenas mentalmente, seria bem mais difícil para a maioria deles. Por isso, optamos pelo uso do material manipulável. Os registros das alunas **Am** e **Ell** podem ser observados na figura 66:

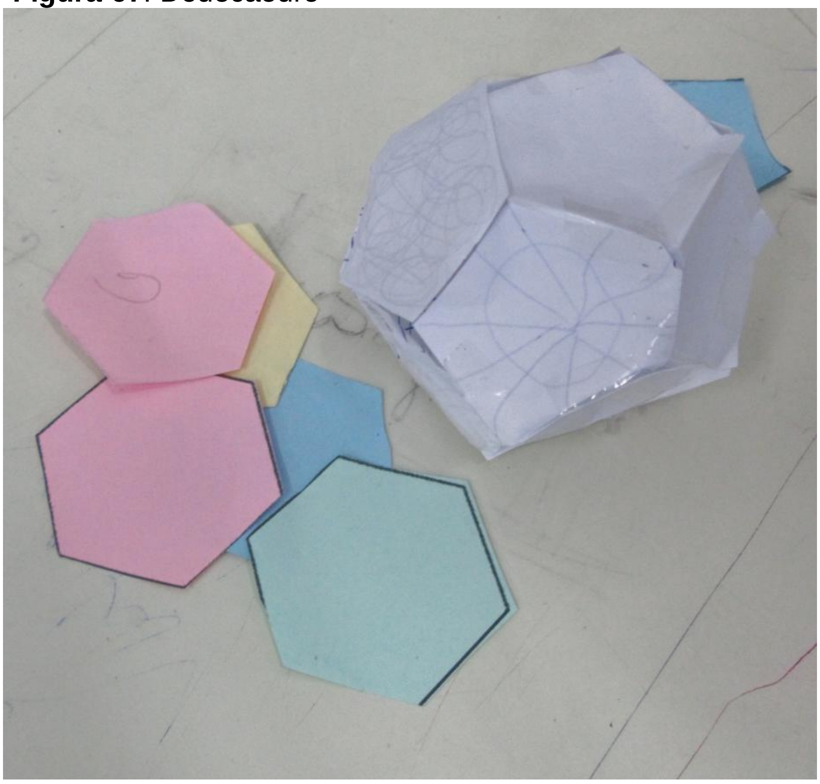
Figura 66: Ângulo Poliédrico



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Um fato interessante que ocorreu nesta aula foi o que a aluna **Wan** fez enquanto os colegas do próprio grupo exploravam outros polígonos regulares. Ela percebeu que o ângulo formado, ao unir mais um pentágono à planificação já feita, era do tipo poliédrico. A aluna não conhecia esse termo, no entanto, à medida que foi percebendo o que estava acontecendo com as figuras bidimensionais, ela construiu mais pentágonos e foi unindo-os, até construir um dodecaedro (figura 67). Isso só aconteceu porque **Wan** uniu os pentágonos entre si, sem colar os três primeiros no plano, como fizeram os outros alunos. Nenhum de seus colegas pensou nessa possibilidade, que teria facilitado muito o trabalho de encaixar mais um pentágono no espaço que havia entre os outros três.

Figura 67: Dodecaedro



Fonte: Arquivo da pesquisadora

A descoberta da aluna **Wan** foi bastante comentada pela professora-pesquisadora, que mostrou sua construção para toda a turma, elogiando-a. Para a aluna, esse momento foi muito importante no que diz respeito à valorização de sua autoestima. A aluna geralmente apresentava um comportamento mais imaturo que as demais colegas da mesma idade e tinha algumas dificuldades na disciplina de

Matemática. O objeto construído por ela serviu para ilustrar mais concretamente a tridimensionalidade do ângulo maior que 360° para a turma.

Entre os 35 alunos que participaram desta exploração-investigação, 28 escreveram que os ângulos obtidos ao se encaixar mais um polígono congruente na tentativa de pavimentar o plano, tinham a soma superior a 360º. Neste caso a figura deixava de ser bidimensional, tornando-se tridimensional. Apenas 3 duplas de alunos não perceberam essa relação, escrevendo descobertas equivocadas ou que não se relacionavam com a exploração.

Quanto aos testes realizados, 2 alunos fizeram testes com 4 tipos de polígonos, 6 alunos com 3 tipos, 10 alunos fizeram 2 testes e 11 alunos fizeram apenas 1 teste.

Percebemos nesses resultados, a pouca disposição para testar suas conjecturas. Os alunos se cansavam muito rápido em fazer qualquer tipo de atividade e a motivação que aparecia inicialmente, geralmente durava pouco tempo.

Foi preciso intervenção contínua durante a aula por parte da professora-pesquisadora e mesmo assim alguns alunos resistiram à necessidade de verificar as afirmações que faziam. No caso desta tarefa, sabemos que poucos testes seriam suficientes para que generalizassem a situação, mas alguns cálculos ou figuras eram importantes para guiar o raciocínio da maioria dos estudantes.

Listamos a seguir, fragmentos de alguns registros dos alunos:

> ***Alunos Da e Je****: O pentágono não é possível fazer a pavimentação porque sobra um ângulo de 36º para completar a volta. Se tentarmos encaixar o quarto pentágono eles não vão ser mais bidimensionais, se tornam tridimensionais.*
>
> ***Alunas Va e Fe****: Percebemos que as figuras que não cobrem o plano, como o pentágono e o heptágono, se tentarmos fazê-las caber no ângulo que sobrou, um ângulo menor do que o regular, o ângulo se torna poliédrico, a figura se torna tridimensional.*
>
> ***Alunos Di e FeD:*** *Os pentágonos quando se encaixam, 3 deles ficam no plano e 1 não é mais plano, além de virar tridimensional. E o que sai fora do plano fica como uma espécie de lombada quando encaixada com outro pentágono. E o ângulo da figura fica maior que*

> *360º, já que a soma dos ângulos da figura mostra que é maior que 360º.*

No caso das alunas **Va** e **Fe**, elas falaram do ângulo poliédrico porque enquanto a professora conversava com o grupo dessas meninas, **Fe** perguntou que tipo de ângulo era esse. Então a professora explicou que era chamado de ângulo poliédrico e que isso tinha um motivo:

> ***Professora Sílvia****: Vocês perceberam que o ângulo ficou maior que 360º não foi?*
> ***Aluna Fe****: Sim.*
> ***Professora Sílvia:*** *E o que aconteceu com a construção?*
> ***Aluna Fe:*** *Ficou tridimensional. Mas que tipo de ângulo é esse?*
> ***Professora Sílvia****: Ahhhh... muito bem. Esse ângulo é chamado de ângulo poliédrico. Por que será, não é mesmo?*
> ***Aluna Fe:*** *Porque é o ângulo de um poliedro?*
> ***Professora Sílvia****: Uhm... vocês podem investigar isso.*

De um modo geral, a exploração dessa segunda parte da tarefa teve resultados positivos, pois a maior parte dos alunos percebeu a construção do ângulo poliédrico. A aluna **Fe** perguntou o nome do ângulo porque até o momento tinha aprendido sobre os ângulos retos, rasos, obtusos, agudos e reflexos. Como estes recebiam uma nomenclatura própria, o ângulo em questão devia ter também um nome especial. Além disso, a exploração serviu para que os alunos sistematizassem os conceitos figurais mobilizados e aprendidos até então em outras tarefas. Um dos alunos que deu respostas bem confusas na tarefa anterior, não percebendo a relação entre a medida do ângulo interno dos polígonos regulares para a construção de mosaicos, escreveu o seguinte relato com seu colega de dupla:

> ***Alunos Bf e Br****: Nós percebemos que os pentágonos não fazem pavimentações porque a soma de um ângulo interno não é divisível por 360º. Chegamos a uma conclusão que para poder fazer a pavimentação, um ângulo tem que ser divisor de 360º porque se não o número terá resultado infinito. A conta não acaba.*

No registro desses alunos (**Bf** e **Br**), eles falaram que se o ângulo não fosse divisor de 360º, a conta não acabava. Isso porque fizeram a divisão de 360º por 108, obtendo a dízima periódica 3,333... Mesmo não realizando mais testes nesta atividade, e não fazendo o que o enunciado pedia na exploração anterior, esses alunos não haviam chegado a essa conclusão e elaboraram várias afirmações confusas. Isso reforçou nossa hipótese de que os conceitos vão sendo aprendidos gradativamente, em várias situações e em ritmos diferentes. O fato de um aluno não ter sucesso em uma tarefa, não significa que ele não aprendeu nada, apenas que precisa de mais tempo e outras oportunidades para desenvolver percepções, conceitos e relações.

Ainda há em alguns relatos, termos confusos e erros relacionados às dificuldades em registrar o próprio raciocínio. Nossa hipótese é que essa dificuldade está diretamente relacionada a pouca habilidade com a linguagem corrente e com o uso da linguagem matemática. Os alunos que mais apresentaram dificuldades com os registros escritos demonstraram o mesmo tipo de problema nas demais disciplinas.

6.5 Terceira Parte da Tarefa Ladrilhando o Plano

Na semana seguinte, continuamos a exploração. Desta vez havia 35 dos 36 alunos da classe. Utilizamos duas aulas de 50 minutos cada para a exploração e discussão dos resultados. O objetivo desta tarefa era ampliar os conceitos figurais mobilizados nas tarefas anteriores por meio da construção de mosaicos com polígonos regulares não congruentes entre si.

O arranque da tarefa foi como o das anteriores, quando a professora-pesquisadora fez a leitura do enunciado para a turma, fazendo os usuais esclarecimentos e tentando incentivar os alunos. Em sua fala, enfatizou que desta vez os polígonos regulares deviam ser diferentes e que as construções seriam feitas em malhas pontilhadas também.

Os grupos foram organizados com 3 ou 4 alunos. Mas para o registro, eles foram agrupados em duplas. Alguns estudantes se envolveram mais do que outros na realização da investigação. Como aconteceu nas tarefas já descritas nesta pesquisa, alguns ficaram brincando durante a aula e não apresentaram um rendimento satisfatório, mas esses foram minoria.

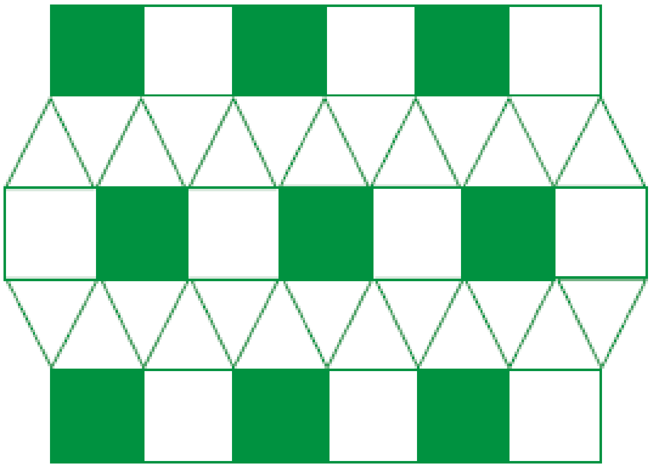
6.5.1 Desenvolvimento e análise da tarefa

Após distribuir as folhas em branco e malhas pontilhadas aos grupos, a professora ficou andando pela sala, conversando com os alunos e intervindo quando era necessário. Observando que os alunos apresentavam dificuldades em compreender o enunciado e construir os mosaicos, fez uma intervenção mais geral, conversando com toda a turma:

> ***Professora Sílvia:*** *Pessoal, prestem atenção em uma coisa: Quanto dá a soma dos ângulos internos em volta de um vértice?*
> ***Alunos:*** *360º.*
> ***Professora Sílvia:*** *Então, vocês precisam verificar que na hora que vocês conseguem pavimentar, essa soma também está dando 360º. Pra isso é mais fácil se vocês souberem qual é a medida do ângulo interno de cada polígono estudado.*
> ***Aluno Ya****: O nosso deu certinho professora: 60, 120 e 180.*
> ***Professora Sílvia****: Aqui você conseguiu formar com triângulos equiláteros e quadrados? Aí você pode chamar esse aqui de 3, 3, 3... 4, 4? Ficaria igual em todos os vértices essa sequência 3,3,3,4,4 ?*
> ***Aluno Ya:*** *Ficaria, ficaria sim ó...*
> ***Professora Sílvia:*** *Então você vai escrevendo: composição 3,3,3,4,4. Aí depois outra composição.*
> ***Aluna Ca:*** *Mas esse aqui dá?*
> ***Aluno Ya:*** *Tem que ser polígonos diferentes.*
> ***Aluno Ya:*** *Aqui a gente tem que pensar no seguinte: juntar os polígonos no vértice e no caso tem que dar 360º.*
> ***Professora Sílvia:*** *Para facilitar, vocês podem numerar cada polígono de acordo com o número de lados que ele possui. Então, o triângulo equilátero vocês podem chamar de polígono 3, o quadrado 4, o pentágono 5, e assim por diante. A hora em que vocês fizerem as colagens lembrem-se das imagens dos slides. Vocês podem usar esse tipo de nomenclatura para nomear cada composição obtida.*

Nesse momento a professora pediu para os alunos interromperem a exploração para orientar-lhes como poderiam fazer para nomear as diferentes composições de forma mais prática, utilizando exemplos dos próprios alunos na lousa. Uma construção que fizeram foi usando triângulos e quadrados, como a de Alves e Dalcin (1999:12), de configuração 3,3,3,4,4:

Figura 68: Mosaicos com polígonos regulares



Fonte: Alves e Dalcin (1999, p. 12).

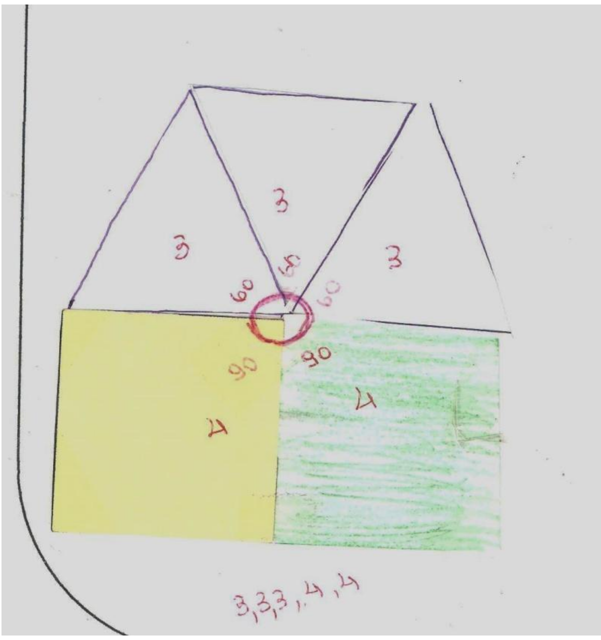
Interessante é que embora essa primeira configuração tenha sido apontada pela maioria dos alunos, nenhum deles conseguiu estendê-la na malha pontilhada corretamente. Veremos um exemplo deste fato logo adiante, na figura 73.

Outro fato que se repetiu durante a exploração foi a resistência por parte de alguns alunos em compor os mosaicos nas malhas pontilhadas. Muitos se recusaram em repetir o padrão para verificar se o "molde" encontrado pavimentava realmente o plano. Quando conseguiam dispor os polígonos formando 360º em torno de um vértice, já se davam por satisfeitos. Para eles era uma complicação desnecessária e um trabalho "chato" ficar construindo e colorindo malhas geométricas.

O que os alunos não perceberam na exploração é que não precisariam ficar tentando construir os "moldes" concretamente, com figuras recortadas ou nas malhas, bastava que verificassem os conjuntos de ângulos internos de polígonos regulares que somassem 360º e a partir daí testassem se essa configuração se estendia no plano.

Construção feita pelo aluno **Gi**:

Figura 69: Composição 3,3,3,4,4.

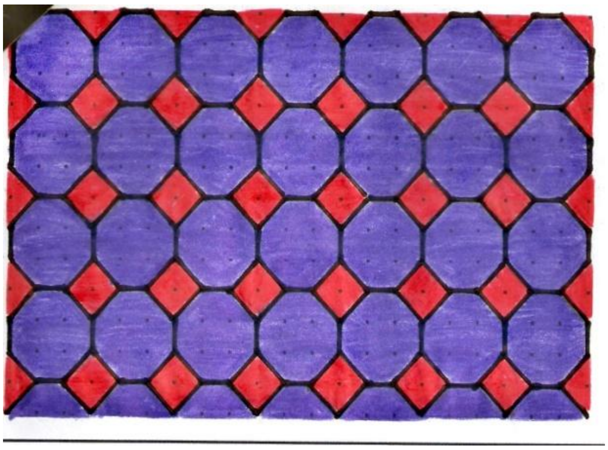


Fonte: Arquivo da pesquisadora

Durante a exploração, três duplas de alunos insistiram em unir polígonos congruentes entre si e a maioria fez apenas a construção 3,3,4,3,4 com colagens.

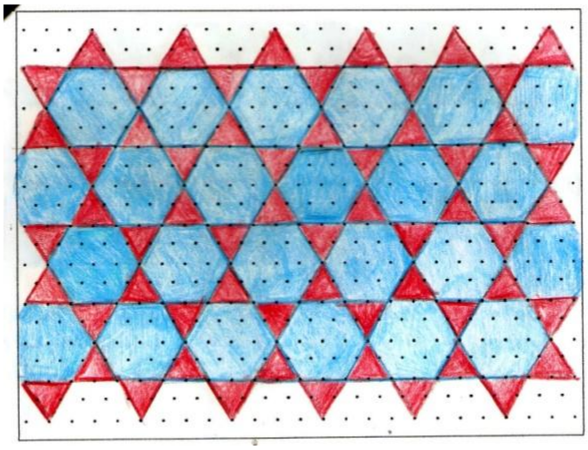
Nas malhas pontilhadas, 30 alunos tentaram compor mosaicos e 5 simplesmente não fizeram. Dentre os que fizeram a atividade, 11 duplas fizeram apenas mosaicos do tipo 3,6,3,6 e 8,4,8, pois eram as pavimentações que lhes pareciam mais fáceis para construir. Três duplas conseguiram 3 composições, as já mencionadas, 3,6,3,6; 8,4,8 e a primeira que fizeram com colagens, 3,3,3,4,4. Apenas uma dupla de alunas, as alunas **Am** e **Ell**, fizeram 4 composições: 3,3,3,4,4; 3,6,3,6; 8,4,8 e também a composição 3,3,4,3,4, com triângulos equiláteros e quadrados. Mesmo assim, nenhuma dupla que tentou construir a malha 3,3,3,4,4 (figura 73) conseguiu manter a repetição do padrão, pois os vértices não coincidiram. Todos os alunos cometeram erros nessa configuração. Podemos observar essas composições em alguns trabalhos dos alunos (figuras 70, 71,72 e 73) a seguir:

Figura 70: Composição 8,4,8



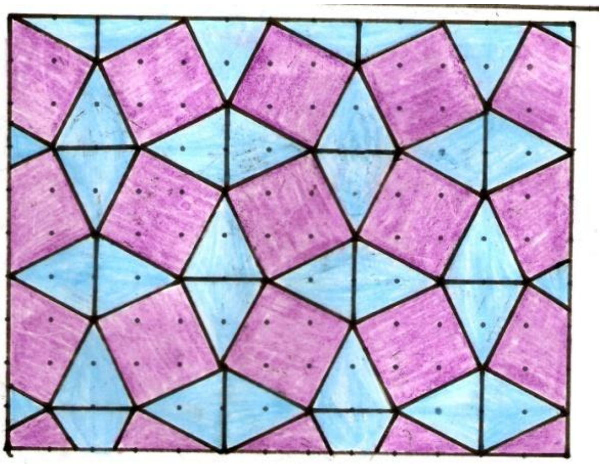
Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 71: Composição 3,6,3,6



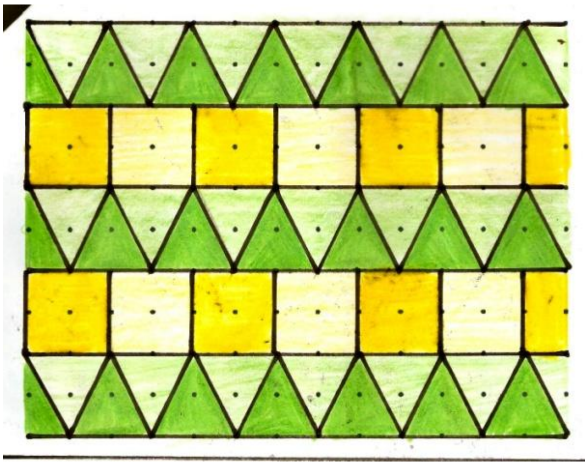
Fonte: Arquivo da pesquisadora

Figura 72: Composição 3,3,4,3,4



Fonte: Arquivo da pesquisadora

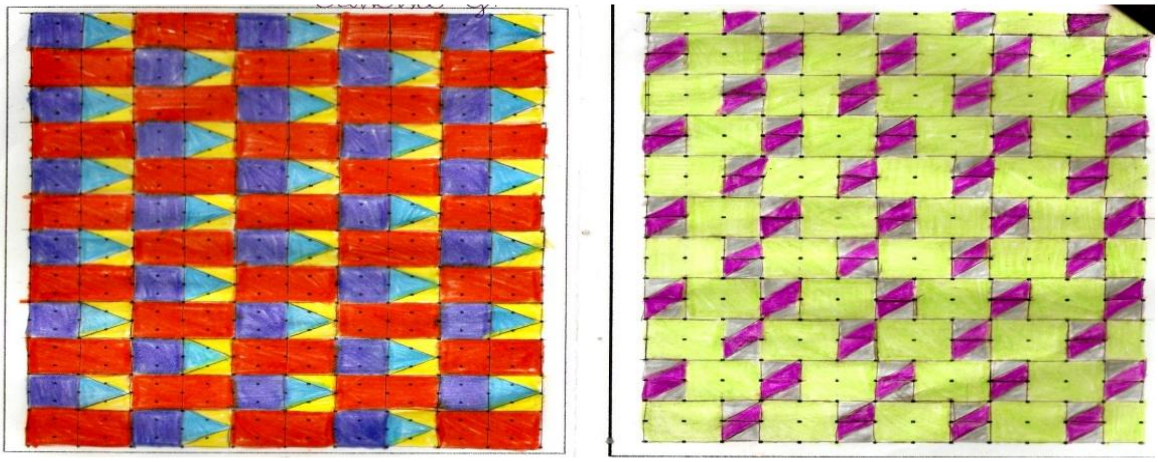
Figura 73: Composição 3,3,,3,4,4



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Outro ponto observado foi que a maior parte dos alunos fez composições que fugiram das regras estabelecidas nos enunciados: usaram polígonos irregulares, não estendiam o "molde" sobre a malha e deixavam vértices desalinhados, criando mosaicos bem diferentes. Mesmo os melhores alunos cometeram erros deste tipo (figura 74).

Figura 74: Mosaicos com polígonos irregulares



Fonte: Arquivo da pesquisadora

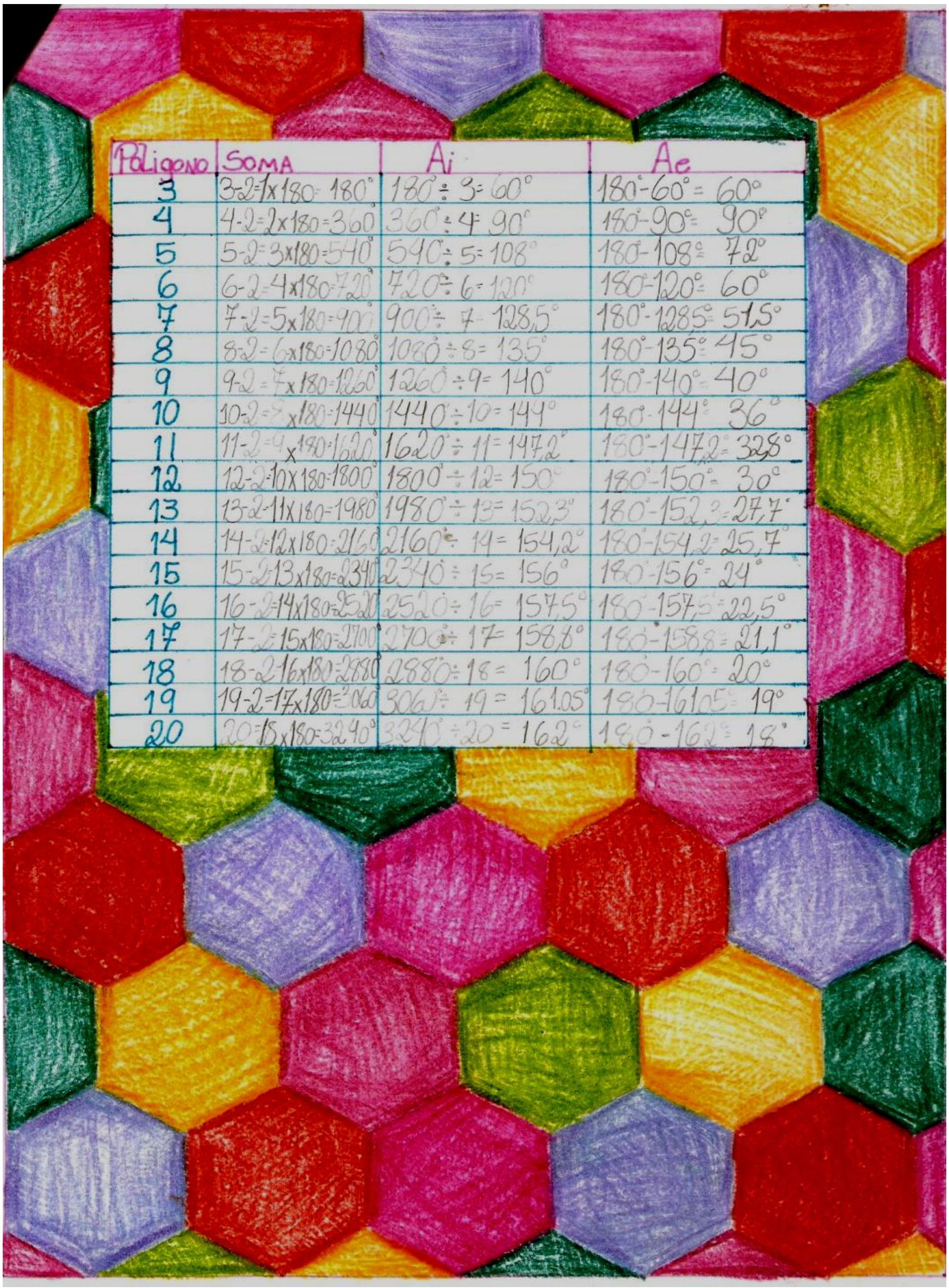
Pensando nos enganos que os alunos cometeram em suas construções geométricas, pedimos que fizessem uma pesquisa individual mais detalhada do assunto, só que em livros, revistas ou na internet. Eles tiveram uma semana para explorar e pesquisar quais as possíveis composições com polígonos regulares de tipos diferentes poderiam cobrir o plano. Como primeiro passo da pesquisa, a professora-pesquisadora orientou-os para que construíssem uma tabela contendo os valores para os ângulos internos e externos dos 20 primeiros polígonos regulares.

A partir daí propôs a seguinte questão de investigação:

> *Observando os valores da tabela que você construiu, explique o que é necessário para que um polígono regular pavimente o plano, formando mosaicos geométricos.*

Na figura 75 podemos ver o belo trabalho da aluna **Tha** ao construir e preencher sua tabela. Ela também elaborou uma segunda tabela contendo as possíveis combinações de polígonos que formam 360º em torno de um vértice. Apesar de muito caprichosa, a aluna não construiu nenhum mosaico para as possíveis configurações que registrou.

Figura 75: Calculando os ângulos em polígonos regulares



Polígono	Soma	Ai	Ae
3	3-2=1x180=180°	180°÷3=60°	180°-60°=60°
4	4-2=2x180=360°	360°÷4=90°	180°-90°=90°
5	5-2=3x180=540°	540°÷5=108°	180°-108°=72°
6	6-2=4x180=720°	720°÷6=120°	180°-120°=60°
7	7-2=5x180=900°	900°÷7=128,5°	180°-128,5°=51,5°
8	8-2=6x180=1080°	1080°÷8=135°	180°-135°=45°
9	9-2=7x180=1260°	1260°÷9=140°	180°-140°=40°
10	10-2=8x180=1440°	1440°÷10=144°	180°-144°=36°
11	11-2=9x180=1620°	1620°÷11=147,2°	180°-147,2=32,8°
12	12-2=10x180=1800°	1800°÷12=150°	180°-150°=30°
13	13-2=11x180=1980°	1980°÷13=152,3°	180°-152,3=27,7°
14	14-2=12x180=2160	2160°÷14=154,2°	180°-154,2=25,7°
15	15-2=13x180=2340°	2340°÷15=156°	180°-156°=24°
16	16-2=14x180=2520	2520°÷16=157,5°	180°-157,5=22,5°
17	17-2=15x180=2700°	2700°÷17=158,8°	180°-158,8=21,1°
18	18-2=16x180=2880°	2880°÷18=160°	180°-160°=20°
19	19-2=17x180=3060	3060°÷19=161.05°	180°-161,05=19°
20	20=18x180=3240°	3240°÷20=162°	180°-162°=18°

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Analisando as respostas dos 34 alunos que realizaram a pesquisa, constatamos que:

- 5 alunos observaram que para pavimentar o plano, a soma dos ângulos deveria dar 360º. Eles não fizeram nenhuma referência ao fato do ângulo ser divisor de 360º no caso dos polígonos serem congruentes entre si.
- 9 alunos responderam que para pavimentar, o ângulo interno do polígono deveria ser divisor de 360º. Esses alunos esqueceram-se de explicar o que acontecia com os polígonos não congruentes entre si.
- 2 alunos não responderam a questão proposta, apenas fizeram a tabela e alguns desenhos sem muita qualidade.
- 18 alunos explicaram que no caso dos polígonos serem congruentes, os ângulos precisavam ser divisores de 360º, mas se não fossem, a soma em torno de um vértice deveria dar 360º.

Algumas respostas interessantes:

> ***Aluno Gi:*** *Para ser um polígono ladrilhante, ele precisa conter os ângulos internos divisores de 360°. Também podemos ladrilhar com polígonos diferentes, mas tem um porém, a soma de um ângulo com o ângulo do outro polígono tem que dar 360°.*
>
> ***Aluno Da:*** *É necessário que os ângulos internos se encaixem perfeitamente formando 360° como: hexágono (três deles formam 360° por causa de seu ângulo interno 120°). Para facilitar de sabermos se todos os polígonos congruentes pavimentam certinho é só simplesmente o ângulo interno ser divisível por 360°, mas quando são diferentes (como decágono, hexágono e quadrado, que juntos formam os necessários 360°), é preciso somar os ângulos internos de cada um e que dê 360°.*

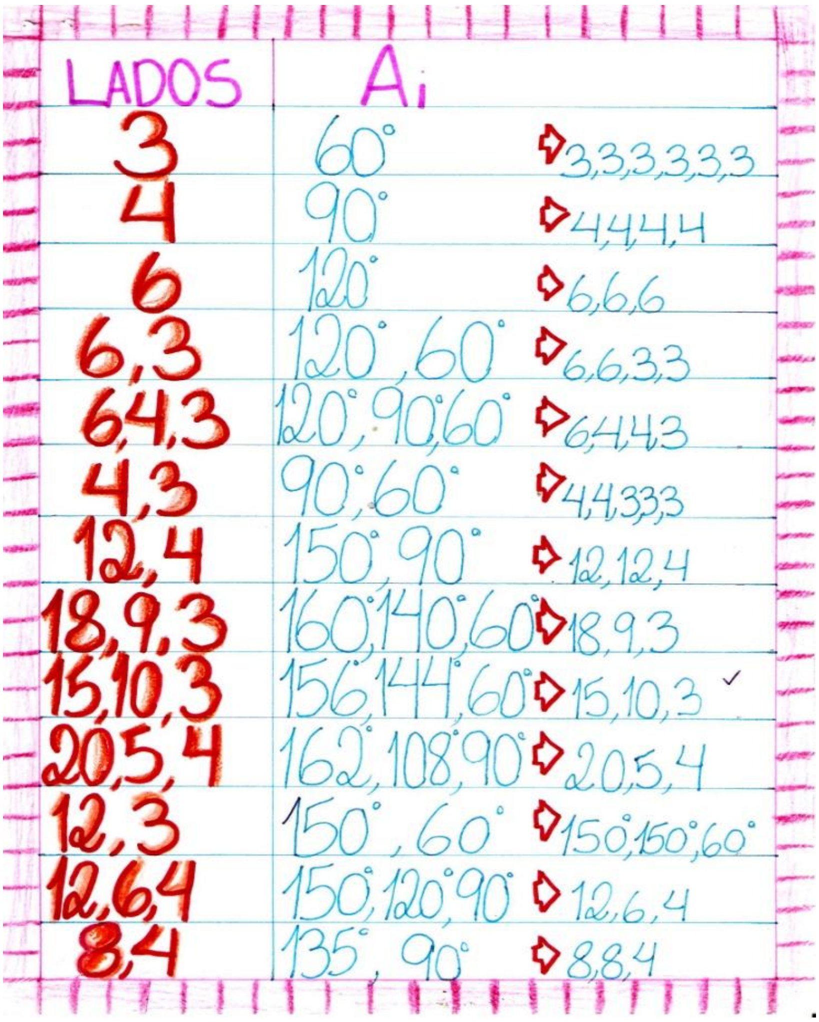
De todos os alunos que realizaram a tarefa exploratório-investigativa sobre polígonos e a pesquisa extraclasse, apenas três alunos comentaram a existência de composições diferentes das trabalhadas em sala de aula com os polígonos regulares não congruentes, a aluna **Ell,** o aluno **Da** e a aluna **Tha**. Mesmo assim, eles não verificaram se essas composições (moldes) formavam mosaicos realmente.

A aluna **Ell** mostrou os moldes para construções dos tipos: 3,3,3,3,3,3; 4,4,4,4; 6,6,6; 3,6,3,6; 3,3,6,6; 3,4,4,6; 3,3,3,4,4; 3,3,4,3,4; 3,3,3,3,6; 4,8,8 e 3,4,6,4. Das combinações que ela descreveu, apenas a 3,4,4,6 não forma um mosaico. Sendo assim, excluindo-se as três composições com polígonos congruentes entre si, **Ell** conseguiu mais 7 formas de compor mosaicos geométricos.

O aluno **Da** também indicou mais 7 combinações que supostamente gerariam mosaicos. Foram as combinações: 4,8,8; 4,4,3,3,3; 6,3,6,3; 20,5,4; 3,4,3,12; 12,12,3 e 12,4,6. Dentre essas combinações, as sequências 20,5,4 e 3,4,3,12 não formam mosaicos geométricos, pois não se estendem no plano.

Já a aluna **Tha,** utilizou os dados da tabela (figura 75) para combinar os ângulos e construir uma nova tabela (figura 76). No entanto, a aluna também não verificou as configurações que realmente formam mosaicos.

Figura 76: Calculando os ângulos em polígonos regulares



LADOS	Ai	
3	60°	3,3,3,3,3,3
4	90°	4,4,4,4
6	120°	6,6,6
6,3	120°, 60°	6,6,3,3
6,4,3	120°, 90°, 60°	6,4,4,3
4,3	90°, 60°	4,4,3,3,3
12,4	150°, 90°	12,12,4
18,9,3	160°, 140°, 60°	18,9,3
15,10,3	156°, 144°, 60°	15,10,3 ✓
20,5,4	162°, 108°, 90°	20,5,4
12,3	150°, 60°	150°, 150°, 60°
12,6,4	150°, 120°, 90°	12,6,4
8,4	135°, 90°	8,8,4

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Os três alunos (**Ell, Tha** e **Da**) não perceberam seus enganos porque não tentaram construir as pavimentações como foi sugerido em aula pela professora.

Percebemos em nossa análise, que os alunos apresentaram mais dificuldades nesta última tarefa do que nas anteriores. Além disso, a tarefa, mesmo possibilitando o surgimento de diferentes descobertas, ficou um pouco restrita pelas condições impostas em suas questões. Sabemos de antemão que existem algumas composições possíveis e outras não e os alunos precisavam investigar quais eram. A maior dificuldade para eles foi realizar os testes, tentando construir os mosaicos. Eles não estavam habituados a realizar trabalhos de pesquisa neste nível.

Concordamos com Segurado e Ponte (1998, p. 6) que “a realização e trabalho investigativo na sala de aula tem grandes potencialidades, mas também envolve os seus problemas”. Por isso, é importante conhecer a origem das dificuldades conceituais que os alunos podem ter sobre as tarefas e das estratégias que podem utilizar durante sua execução.

Embora os alunos não tenham rejeitado essa terceira parte da tarefa, também não a aceitaram totalmente. Não se envolveram como nas etapas anteriores. Uma das hipóteses que consideramos é que após a realização das tarefas anteriores sobre ângulos e das duas primeiras partes da tarefa Ladrilhando o Plano, os alunos perderam um pouco o interesse, pois o trabalho em grupo não era mais novidade. Além disso, perceberam que mesmo estando em grupos, o objetivo maior era a aprendizagem e não a brincadeira. Mesmo a pesquisa extraclasse que fizeram não despertou grande interesse por parte da maioria dos estudantes, e só foram realizadas porque a professora disse que contaria para a avaliação.

Apesar dessas observações, acreditamos que esta terceira parte da tarefa, onde os alunos precisavam explorar e investigar os mosaicos construídos por polígonos regulares diferentes, contribuiu para uma melhor compreensão dos conceitos geométricos trabalhados anteriormente, desenvolvendo uma maior percepção e domínio das propriedades figurais e conceituais dos objetos estudados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando pesquisamos soluções para nossas questões e inquietações no campo da Educação, nos deparamos com outras situações que vão emergindo e clamando por respostas, exigindo reflexão mais profunda e uma crescente busca por outras ideias que possam auxiliar nas dificuldades e limitações que possuímos.

Ser professor não é tarefa fácil. Ser professor da Escola Pública no Brasil é ainda mais complicado. Lidamos com vários dilemas, contrariedades e condições que não favorecem o processo de ensino e aprendizagem, como turmas numerosas, falta de interesse dos alunos pelos estudos e outros fatores externos que limitam a riqueza de uma boa aula.

Além dos fatores externos, a prática em sala de aula depende tanto do aluno, quanto do professor, e aulas do tipo exploratório-investigativas dão muito mais trabalho do que aulas expositivas e rotineiras, desde o planejamento até sua execução, em todas as suas etapas. O professor precisa estar atento a tudo o que ocorre nas interações entre os alunos para intervir no momento certo. Deve gerenciar várias situações diferentes, ter flexibilidade, e de certa forma, controlar a própria ansiedade em dar respostas prontas aos alunos.

Concordamos com Ponte (1998b, p. 3) quando afirma que “o professor tem de ser capaz de apreender intuitivamente as situações, articulando pensamento e ação e gerindo dinamicamente relações sociais; tem de ter autoconfiança e capacidade de improvisação perante situações novas”. Esse tipo de competência se constrói por meio da experiência e de formação profissional sólida. Não é algo simples, nem tampouco, fácil.

Mesmo diante de todas essas e outras limitações, acreditamos que utilizar aulas de natureza exploratório-investigativa em sala de aula como estratégia de ensino, pode ser uma poderosa ferramenta para o professor que se preocupa em trabalhar com objetivos educacionais que estimulem a compreensão e o raciocínio dos alunos.

A experiência vivenciada como professora-pesquisadora e partilhada com os alunos do 7º ano B promoveu mudanças significativas em nossa prática em sala de aula, onde deixamos a postura de professora “afirmativa”, que sempre dava respostas aos alunos, para uma postura cada vez mais “interrogativa”.

O trabalho com tarefas exploratório-investigativas nos abriu um universo diferente. Junto aos alunos, passamos a ser também investigadores, partilhando da experiência de fazer a Matemática por meio de descobertas. Os alunos exploravam, investigavam, descobriam e aprendiam. Enquanto isso, como professora-pesquisadora, participava ativamente de outras descobertas. Descobertas sobre o processo de aprendizagem dos próprios alunos enquanto se envolviam em atividades, e de relações matemáticas ligadas aos conteúdos para os quais nunca havia pensado.

Saberes foram gerados e mobilizados, conceitos construídos e reestruturados por meio da ação dos próprios alunos, mostrando que é possível realizar mudanças positivas em nossas salas de aulas quando de tem determinação e apoio.

Essa análise almejou ainda, perceber a evolução dos alunos envolvidos em sua forma de raciocinar, argumentar e justificar as conjecturas elaboradas durante as várias etapas de desenvolvimento das tarefas. Podemos observar no quadro a seguir as tarefas desenvolvidas durante este estudo:

Tabela 09: Organização das tarefas e objetivos

Tarefa	Objetivo	Número de aulas
Ângulos 1	Explorar, investigar, gerar e mobilizar habilidades e conceitos relacionados aos ângulos, algumas de suas propriedades e relações, como ângulos opostos pelo vértice e suplementares.	2 aulas de 50 minutos para a exploração-investigação e 1 aula para a socialização e registros.
Ângulos 2	Mobilizar o conceito de ângulos opostos pelo vértice, reconhecendo outras propriedades e relações entre os ângulos formados por retas paralelas interceptadas por uma transversal, como a de ângulos alternos, correspondentes e colaterais, sem preocupação com definições formais.	2 aulas de 50 minutos para exploração e registros e 1 aula para atividade diagnóstica.
Ladrilhando o Plano com Polígonos regulares: parte 1	Explorar e investigar, as condições necessárias para que polígonos regulares congruentes entre si possam formar mosaicos no plano, mobilizando e ampliando noções e conceitos de	3 aulas de 50 minutos para exploração e discussão.

	ângulos, propriedades e relações entre lados, vértices e ângulos dos polígonos regulares.	
Ladrilhando o Plano com Polígonos regulares: Ângulo Poliédrico	Explorar e investigar o que acontece quando se insere mais um polígono regular no plano em torno de um vértice de polígonos congruentes que não pavimentam o plano.	1 aula de 50 minutos para exploração e discussão.
Ladrilhando o Plano com Polígonos regulares: parte 3	Explorar e investigar, as condições necessárias para que polígonos regulares não congruentes entre si possam formar mosaicos no plano, mobilizando os conceitos figurais construídos nas tarefas anteriores. Identificar os possíveis casos para composições de mosaicos com polígonos regulares que se estendem no plano.	2 aulas de 50 minutos para exploração e investigação, mais pesquisa extraclasse.

Fonte: Arquivo da pesquisadora

Planejamos as referidas tarefas envolvendo noções e conceitos geométricos atrelados ao conteúdo curricular proposto para o 7º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, nos baseamos principalmente nos estudos de João Pedro da Ponte (2003; 2009) sobre tarefas exploratórias e/ou investigativas em Matemática e na Teoria dos Conceitos Figurais de Fischbein (1993).

Fazendo uma análise mais profunda sobre todo o processo vivenciado durante a realização das tarefas deste projeto, chegamos a conclusões que já foram apontadas em vários trabalhos com investigações matemáticas, como Ponte (2009), Brocardo (2001) e Lamonato e Passos (2001).

O primeiro aspecto a ser considerado é que as aulas de natureza exploratório-investigativas podem ser grandes aliadas no ensino de conceitos geométricos, visto que a Geometria oferece muitas possibilidades para explorações que desenvolvam os raciocínios indutivo e dedutivo do aluno. Por meio das explorações e investigações geométricas os alunos formulam conjecturas baseados, muitas vezes, em suas observações e percepções sensoriais. Essas percepções são a base para o processo de visualização das imagens mentais.

Na tarefa Ângulos 1, os alunos se envolveram totalmente, medindo os ângulos com o transferidor, compartilhando conjecturas com os colegas de grupo, questionando e elaborando registros que envolveram desenhos e pequenas frases para explicar como pensaram. Reconhecemos durante a exploração, que alguns alunos não dominavam ainda a habilidade de manuseio do transferidor e, portanto, fizemos várias intervenções durante a tarefa para auxiliá-los.

Um dos momentos mais ricos nesta primeira tarefa foi a discussão em grande grupo, quando duplas de alunos se prontificaram ir à lousa para explicar as conjecturas que formularam e tentar justificá-las. Algumas vezes, ao enunciar seus pensamentos, eles mesmos percebiam seus enganos e modificavam suas falas. Outras vezes, colegas que estavam sentados pediam para ir à frente ajudar ou mostrar como estavam pensando. Nesses momentos de discussão foi possível perceber alguns conhecimentos matemáticos que os alunos mobilizavam enquanto argumentavam oralmente. Para alguns alunos mais participativos, foi uma aula extremamente motivante e desafiadora, visto que dividir com a professora a responsabilidade de fazer Matemática, para eles era algo inusitado.

Já na tarefa Ângulos 2, a intenção foi aprofundar algumas percepções geométricas, que contribuíssem para uma elaboração mais completa dos conceitos figurais já existentes e/ou gerar esses conceitos em novas situações. Durante essa tarefa, algumas reflexões emergiram em nossas mentes. Refletimos sobre a utilização do material manipulável como recurso didático, suas contribuições e limitações, concluindo que uma aula que envolva esse tipo de material deverá ser sempre muito bem planejada e acompanhada de boas intervenções, para que o aspecto lúdico não domine totalmente a situação de aprendizagem. Esse foi um problema que encontramos ao lidar com alguns alunos que perderam muito tempo brincando com os "canudinhos de refrigerante". Os alunos pareciam acreditar que a finalidade da aula era a simples manipulação dos canudinhos. Quando precisaram passar para a fase de investigação realmente importante, tiveram que ter a atenção chamada várias vezes para que se concentrassem. Vale salientar que esse tipo de exploração com materiais manipulativos é geralmente demorado. Embora esse aspecto tenha causado certa ansiedade e preocupação com a gestão do tempo por parte da professora-pesquisadora, essas explorações requerem mais tempo pelos alunos.

Por conta desta situação, a professora-pesquisadora adiantou a discussão sobre o que estavam percebendo na exploração, mas a participação dos alunos ficou um pouco a desejar. Eles não verbalizavam o que estavam pensando. A pouca motivação e envolvimento dos alunos nesta tarefa provocou certo desconforto na professora-pesquisadora durante as intervenções que fez com a turma. Um sentimento de impotência e frustração diante da situação foi inevitável. A questão proposta não foi desafiadora para os alunos.

Embora a tarefa Ângulos 2 tenha apresentado alguns pontos para uma reflexão mais crítica e profunda sobre a própria prática enquanto professora e investigadora, os alunos produziram bons textos e mobilizaram importantes conceitos figurais enquanto registravam suas descobertas.

Para Lamonato e Passos (2011), a preparação da tarefa e suas características inerentes não garantem o envolvimento dos alunos na atividade matemática pretendida, uma vez que não é possível prever antecipadamente as ocorrências na sala de aula. A tarefa é apenas um dos diversos fatores que podem caracterizar a atividade. Essa afirmação das autoras (LAMONATO; PASSOS, 2011) foi importante em nossas análises e reflexões sobre esta segunda tarefa, trazendo certo alívio ao saber que a ocorrência deste tipo de situação é normal quando iniciamos o trabalho com tarefas investigativas.

É interessante perceber que mesmo quando algumas coisas não saem como planejamos ou imaginamos, numa aula assim, há sempre a possibilidade de se colher bons frutos. Mas para isso o professor deve estar atento e saber como contornar algumas situações. Neste caso, o aproveitamento da maior introspecção dos alunos para que escrevessem, foi extremamente importante. De outra forma, não teríamos como conjecturar a respeito de suas descobertas e impressões.

A terceira tarefa, dividida em três partes, foi mais longa e envolveu várias situações diferentes. A primeira parte foi realizada com bastante entusiasmo pela maioria dos grupos, mas tivemos o mesmo problema que aconteceu com os canudinhos na tarefa Ângulos 2. Os alunos se detiveram mais tempo que o esperado manuseando os polígonos de papéis coloridos, sem partir para a exploração-investigação que realmente interessava. Foi necessário muita intervenção e explicação, para que se concentrassem de verdade no que precisavam investigar. Ao final da segunda aula, quase todos os grupos de alunos concluíram que os únicos polígonos regulares congruentes entre si que possibilitavam o ladrilhamento do plano por meio de mosaicos eram o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Alguns alunos generalizaram o caso, justificando essa escolha, o que consideramos um grande avanço no raciocínio argumentativo.

A segunda parte da tarefa Ladrilhando o Plano com Polígonos Regulares foi bem mais rápida, durando apenas uma aula de 50 minutos. A grande dificuldade dos alunos na questão proposta foi aceitar que a situação era possível, mas que neste caso, a figura deixava de ser bidimensional. Abandonar um pensamento que já haviam construído, de que não cabia mais um polígono regular no espaço entre três pentágonos, por exemplo, foi uma operação mental difícil para os alunos desta turma. Nesta questão, o material manipulável foi de grande utilidade, pois eles puderam observar concretamente a formação do ângulo poliédrico.

A última etapa da terceira tarefa, não foi muito bem compreendida pelos alunos no início da exploração e mesmo quando compreenderam o que deveriam investigar, não entenderam que precisavam testar suas hipóteses com cálculos e depois concretamente, montando os mosaicos. A maioria dos alunos se deteve em poucos exemplos, muitas vezes copiando as ideias de outros colegas. Mesmo assim, praticamente todos escreveram que a condição necessária para pavimentar o plano com o polígonos regulares não congruentes entre si estava relacionada a soma de seus ângulos resultarem 360º em torno de um vértice.

Sintetizando, podemos destacar que as tarefas exploratório-investigativas nesta pesquisa, de um modo geral, envolveram algumas características particulares e compreenderam as seguintes fases: exploração inicial da questão, com uma explicação mais ou menos detalhada por parte da professora-pesquisadora; a formulação de outras questões durante a exploração; coleta e análise de dados; realização de testes e elaboração de conjecturas; justificação de conjecturas que pareceram verdadeiras por meio de raciocínio argumentativo. Segundo Ponte (2009), essas fases não seguem uma linearidade, e em nossos estudos isso se confirmou.

Algumas vezes, como na tarefa Ângulos 2, foi necessário adiantar uma discussão com toda a turma para que se pudesse avançar na elaboração de testes e formulação de conjecturas pelos alunos. Em determinadas situações, os alunos iam criando seus exemplos para então, por meio da análise de propriedades e relações, elaborar conjecturas. Na maior parte das vezes, já formulavam uma conjectura imediatamente após observação rápida, para então começar a testá-la.

Em outros momentos afirmavam ideias baseados em pura intuição para só depois raciocinar sobre o que estavam dizendo, percebendo enganos ou compreendendo que precisavam verificar a veracidade ou falsidade de suas hipóteses.

Alguns resultados de nossas análises e reflexões demonstraram alguns apontamentos importantes que ocorreram em praticamente todas das tarefas com a maior parte da turma.

Muitos alunos tinham dificuldades em compreender a tarefa como um todo e interpretar os enunciados. Por esse motivo, todas as tarefas foram acompanhadas de uma explicação pormenorizada por parte da professora-pesquisadora, que leu cada enunciado para a turma antes que iniciassem as explorações-investigações.

A maior parte dos alunos apresentou a tendência de considerar um ou dois testes suficientes para justificar uma conjectura, que logo classificavam como "conclusão". No início das primeiras tarefas, mesmo os alunos mais aplicados consideravam as justificações de suas conjecturas como algo desnecessário e complicado, evitando ao máximo escrever como encontraram determinados resultados. Eles não tinham o hábito de escrever nas aulas de Matemática. Escrever era "coisa de língua portuguesa". Outros alunos, pensando que o que importava era a quantidade e não a qualidade de suas conjecturas e argumentos registravam qualquer observação que faziam, mesmo que trivial, sem dar importância às justificativas.

Com o passar do tempo e desenvolvimento das experiências, os alunos foram evoluindo em seus registros escritos, melhorando a qualidade da linguagem matemática utilizada, elaborando representações figurais, cálculos, expressões, termos matemáticos e geométricos mais adequados e redigindo pequenos textos que explicavam como estavam pensando.

A maior parte dos alunos também demonstrou maior interesse nas aulas que envolveram explorações em grupo. Diziam que em grupo aprendiam melhor com os colegas. Podemos perceber o que afirmamos nas falas dos alunos em seus relatos sobre as aulas exploratório-investigativas que participaram:

> ***Aluno Ya****: Nas investigações nós podemos pensar e aprender mais com mais tempo e diversas questões que podem nos ajudar no futuro. Essas investigações também me ajudaram a ter um raciocínio melhor, ter hipóteses e testá-las para ver se eram mesmo reais. E*

> *também teve a hora de ir à lousa e falar o que nós havíamos pensado, ajudando os outros colegas e sendo ajudados por eles.*
>
> **Aluno Ba:** *A aula em dupla ou em grupo é diferente porque nós temos que pensar juntos. Essas experiências são diferentes porque nós temos que tentar fazer uma descoberta, temos que provar que aquilo é verdadeiro, ver a descoberta dos nossos colegas, discutir com eles, perguntar como eles fizeram as descobertas. Quando descobrimos alguma coisa precisamos falar para a professora e mostrar aos colegar como fizemos. Mostrar se nossa descoberta funciona, se ela é verdadeira ou não. E é isso o diferente nas investigações feitas em nossas aulas.*

Outro ponto que destacamos é que a maior tendência dos alunos continuou a ser a de utilizar o modo afirmativo na elaboração de suas conjecturas e não o modo interrogativo, como sugere aulas desta natureza. Eles afirmavam alguma ideia que surgia em suas mentes para em seguida verificar se eram verdadeiras ou se não se sustentavam. Isso provavelmente aconteceu devido a concepção que os alunos têm de que é o professor quem deve sempre validar ou refutar suas conjecturas.

Observamos também que durante a discussão coletiva dos resultados obtidos, alguns alunos defendiam suas ideias e hipóteses, confrontando-as com os demais colegas, o que acreditamos ter levado a fomentação de um raciocínio mais crítico e reflexivo sobre o conhecimento matemático em jogo. Sobre esse aspecto, acreditamos que o aluno aprende realmente enquanto pensa criticamente sobre o que faz, observa e transforma. É a reflexão sobre o que ele está realizando durante a tarefa que promove a aprendizagem e não sua simples realização.

Quanto a classificação da tarefa como exploratória ou investigativa, como já explicamos, é algo que depende de vários fatores que ocorrem antes e durante o desenvolvimento das atividades dos alunos.

Ponte (2003b) diz que não há como saber de antemão se uma tarefa se constituirá ou não em uma tarefa investigativa, pois isso depende do seu grau de dificuldade, da turma de alunos e do tempo que é dedicado a sua realização. Segundo Grando, Nacarato e Gonçalves (2008), se o aluno tiver pouco conhecimento acerca dos conteúdos geométricos envolvidos na tarefa, certamente a mesma ficará a nível de exploração, mas se o aluno apresentar um domínio maior dos conteúdos geométricos ou mesmo algébricos, existe grande possibilidade de que para ele, a tarefa se torne investigativa.

Lamonato e Passos (2011) afirmam que a análise e a exploração de uma tarefa pelo professor, não definem a ela seu grau de dificuldade e de abertura. Os fatores que ocorrem em sala de aula, como explicações, informações, sugestões e orientações do professor e, até mesmo, as relações estabelecidas pelos alunos com seus colegas também modificam o alcance e o processo de desenvolvimento da atividade a partir da tarefa.

Nesta pesquisa, percebeu-se que para a maior parte dos alunos as tarefas foram mais exploratórias, principalmente pelo fato de dedicarem algum tempo na observação e manipulação de materiais concretos e não utilizarem os conhecimentos geométricos que já possuíam para se engajar nas questões relevantes. Para alguns alunos, como os alunos **Ya**, **Ig**, **Th**, **Am** e **Ell**, as tarefas pareciam muitas vezes ser realmente investigativas, visto que eles se envolveram com determinação, procurando observar, perceber e relacionar as propriedades e informações que visualizavam, levantando questões durante as discussões em grupo ou com toda a turma. O modo como questionavam, conjecturavam e argumentavam com espontaneidade, determinou o sucesso das tarefas para toda a turma neste projeto. Esses e outros alunos, líderes por natureza, impulsionaram os demais colegas com suas falas, ações e participação ativa.

Concluímos ainda que, mesmo que as tarefas tenham sido mais exploratórias do que investigativas, toda a dinâmica que permeou as atividades, proporcionou um ambiente rico para a geração e mobilização de saberes pelos alunos. Eles retomaram procedimentos e conceitos que já possuíam, reconstruíram alguns destes conceitos, ampliando e/ ou aprofundando conhecimentos matemáticos por meio do raciocínio e da comunicação.

Quanto ao aspecto lúdico do material manipulável, acreditamos que com o passar do tempo e desenvolvimento de outras experiências desta natureza, os alunos vão amadurecendo e compreendendo o verdadeiro caráter das aulas investigativas em Matemática. Mas essa superação requer um trabalho contínuo e de longo prazo. Não será de um momento para outro que os alunos irão compreender o real sentido de uma aula exploratório-investigativa. Ainda sobre esse ponto, consideramos que o material manipulável e outros tipos de materiais concretos, como desenhos de figuras geométricas, auxiliam a elaboração mental dos conceitos figurais, visto que as características conceituais dos objetos geométricos são totalmente abstratas. Desse modo, acreditamos que é por meio dessas construções, observações, manipulações e ações sobre as figuras, que o aluno vai construindo as imagens mentais atreladas às características conceituais dos objetos geométricos.

Os resultados também apontam que o entendimento por parte dos alunos do que é uma hipótese ou conjectura só foi alcançado com as discussões em grande grupo, quando foi possível analisar cada questionamento e afirmação feita, validando ou refutando as ideias que elaboravam. Nesses momentos, foi possível, para a professora-pesquisadora, perceber o nível de conhecimentos matemáticos mobilizados pelos alunos, esclarecendo alguns pontos e indicando caminhos a percorrer.

Com todas as considerações feitas, concluímos que as tarefas exploratório-investigativas podem contribuir para a motivação dos alunos, favorecer a criação de um ambiente de aprendizagem dinâmico e mais aberto, onde o aluno tem voz ativa e pode comandar o próprio ritmo de aprendizagem. Esse tipo de aula é importante para que o aluno compreenda a Matemática como uma ciência viva.

Destacamos ainda que um dos objetivos centrais desta pesquisa foi o de analisar como tarefas de natureza exploratório-investigativas poderiam contribuir para a geração e/ou mobilização de conceitos geométricos em alunos de um 7º ano do Ensino Fundamental, sobretudo os conceitos construídos durante a exploração e composição de mosaicos formados por polígonos regulares. Para tanto, respondendo a questão central que norteou todo o nosso trabalho: *“Que saberes geométricos são gerados e mobilizados por meio de tarefas exploratório-investigativas pelos alunos do 7° ano do Ensino Fundamental na construção de mosaicos?”,* podemos inferir que além dos apontamentos feitos anteriormente sobre cada tarefa realizada, a análise dos casos individuais nos revelou uma forte mobilização de conceitos figurais (conceitos geométricos) pelos alunos durante a realização das tarefas exploratório-investigativas.

Além de mobilizar os conceito-imagens que já possuíam sobre tipos de ângulos, polígonos e retas, construíram e ampliaram alguns outros conceitos figurais e relações, como o de ângulos suplementares, ângulos opostos pelo vértice, ângulos alternos, soma dos ângulos internos em polígonos regulares, medida do ângulo interno e do ângulo externo em um polígono regular, ângulo poliédrico, noções de bidimensionalidade, tridimensionalidade, paralelismo e perpendicularidade. Também desenvolveram habilidades motoras no manuseio de instrumentos de medida, como transferidor, esquadros e compasso para realizarem construções geométricas.

Os resultados mostraram que os alunos desenvolveram também aspectos relacionados à visualização e representação, principalmente quando operavam com as imagens, raciocinando, conjecturando e registrando. Utilizaram termos geométricos adequados em seus textos, ampliando o vocabulário que já possuíam. Mesmo se confundindo algumas vezes com algumas expressões ou termos, a maioria utilizou-se de um vocabulário bem apropriado, considerando-se o nível escolar em que se encontram.

Concluímos que houve uma apropriação real dos conceitos figurais envolvidos e que a aprendizagem de tais conceitos servirá de base para novas explorações geométricas no futuro escolar destes alunos.

Acreditamos ainda que este é só o início do nosso trabalho, pois há muito ainda para se estudar sobre as investigações matemáticas como estratégia de ensino, sobre as aulas exploratório-investigativas e especialmente sobre as potencialidades deste tipo de aula para o ensino-aprendizagem de Geometria. É um trabalho que para dar frutos precisa ser realizado a longo prazo, possibilitando aos alunos compreenderem o real significado das tarefas que envolvem investigações e de suas implicações para a aprendizagem em Matemática.

Outro resultado que salientamos neste trabalho foi a possibilidade de se produzir uma experiência capaz de agregar novas opções ao Currículo Oficial do Estado de São Paulo, oferecendo à comunidade dos professores e formadores, um material que possa ser utilizado em sala de aula como fonte de reflexão e motivação para outras práticas. Todas as tarefas desenvolvidas neste estudo podem ser trabalhadas, complementando as sugeridas nos Cadernos do Aluno e do Professor.

A que se desenvolver outros trabalhos desta natureza, principalmente em nosso país, que avança timidamente neste cenário da Educação Matemática. Desta forma, pretendemos dar continuidade aos nossos estudos sobre as contribuições que as aulas exploratório-investigativas podem oferecer para o ensino e aprendizagem de Geometria no Ensino Fundamental II, ampliando, mobilizando, gerando e/ou aprofundando conceitos figurais e habilidades relacionadas à visualização e construção de figuras geométricas pelos alunos.

REFERÊNCIAS

ALVES, Sérgio; DALCIN, Mário. Mosaicos no plano. **Revista do professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 40, p. 3-12, 2º quadrimestre, 1999.

ANDRÉ, Marli Eliza D. **A etnografia na prática escolar**. Campinas, SP: Papirus, 2002. Disponível em: < http://books.google.com.br>. Acesso em: 15 jan. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROCARDO, Joana. **As investigações na aula de Matemática**: um projecto curricular no 8º ano. Tese (Doutorado). Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001.

CAMPAÑA, Thelma Cardinal Duarte. **Estudo sobre noções de geometria e suas relações com atividades diversificadas na escola**. Dissertação (Mestrado em Educação). Centro Universitário Moura Lacerda, CUML, Ribeirão Preto, SP, 2009.

CHRISTIANSEN, Bent.; WALTER, Gerd. Task and activity. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (Ed.). **Perspectives on mathematics education.** Dordrecht: D. Reidel, 1996. p. 243-307.

COUTINHO, Clara Pereira. A qualidade da investigação educativa de natureza qualitativa: questões relativas à fidelidade e validade. **Educação Unisinos**, v.12, n.1, p. 5-15, jan./abr. 2008.

CUNHA, Maria Helena Saberes profissionais de professores de matemática: dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. **Revista Millenium on-line**. n. 17, 2000. Disponível em: < http://www.ipv.pt/millenium/17_ect5.htm >. Acesso em: 21 abr. 2014.

D'AMBROSIO, Beatriz**.** Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, p. 35-41, mar. 1993. Disponível em <http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/~proposicoes/textos/10-artigos-d%5C'ambrosiobs.pdf>. Acesso em: 31 maio 2013.

DOMINGOS, António Manuel Dias. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados:** a matemática no início do superior. 2003. Tese (Doutorado em Ciência da Educação). Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

FERNANDES, Domingos; FONSECA, Lina. Argumentação e demonstração no contexto da formação inicial de professores. In: BORRALHO, A.; MONTEIRO, C.; ESPADEIRO, R. **A matemática na formação do professor**. Évora: Sociedade

Portuguesa de Ciências da Educação, 2004. p. 249-275. Disponível em: <http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2003/2003_13_DFernandes.pdf> . .Acesso em: 3 abr. 2014.

FISCHBEIN, Efraim. **Intuition in science and mathematics**: an educational approach. Netherlands: D. Reidel Public; Mathematics Educational Library, 1987. Disponível em: < http://books.google.com.br/books?id=u2in8s_IOjAC&pg=PA103&hl=pt-BR&source=gbs_toc_r&cad=4#v=onepage&q&f=false> Acesso em: 3 mar. 2014.

FISCHBEIN, Efraim. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics,** Berlin, v. 24, n. 22, p. 139-162, 1993.

GOMES, Alexandra; RALHA, Elfrida. O conceito de ângulo: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático. Associação de Professores de Matemática. **Quadrante,** Lisboa, v.14, n.1, p.109-131, 2005.

GRANDO, Regina Célia; NACARATO, Adair Mendes; LUCI, Mara Gotardo. Compartilhando saberes em geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. **Caderno CEDES**, Campinas, v.28, n.74, p.39-56, abr. 2008.

HADAMARD, Jacques. **The psychology of invention in the mathematical field**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

HERSHKOWITZ, Rina. Psychological aspects of learning geometry**.** In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Ed.). **Mathematics and Cognition**. England: Cambridge University Press, 1990. p.70-95.

IMENES, Luiz Marcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática Imenes & Lellis.** 7º ano. São Paulo: Moderna, 2009.

LAKATOS. Inre. **Preuves et réfutations**: essai sur la logique de la découverte mathématique. Paris: Hermann, 1984.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Zetetiké**, Campinas, v.19, n.36, jul./dez. 2011. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/viewFile/3996/3316>. Acesso em: 21 abr. 2014.

LILJEDAHL, Peter. **The AHA! experience:** mathematical contexts, pedagogical implications. Thesis (Doctor of philosophy) - Faculty of Education, Simon Fraser University, 2004. Disponível em: <http://www.peterliljedahl.com/wp-content/uploads/Thesis.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2014.

LÜDKE, Menga. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas**.** São Paulo: EPU, 1986.

MARTINS, Gilberto de Andrade. **Estudo de caso:** uma estratégia de pesquisa. São Paulo: Atlas, 2008. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAff7IAE/estudo-caso-gilberto-martins?part=14>. Acesso em: 22 jan. 2014.

MARTINS, Renata Aparecida. **Ensino-aprendizagem de geometria**: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais. 2003. 246f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2003.

MIRANDA, Sílvia Andrea Alexandre; OLIVEIRA, Paulo César. Ensaio envolvendo tarefas exploratórias sobre potenciação para o 7º ano do Ensino Fundamental. In: SEMINÁRIO DE HISTÓRIAS E INVESTIGAÇÕES DE/EM AULAS DE MATEMÁTICA- SHIAM, 4., 2013, Campinas. **Anais...** Campinas: UNICAMP, 2013. 10p. Disponível em: <https://docs.google.com/file/d/0B6LrM9hpRrC6SlNURS1GZ3RTTHc/edit>. Acesso em: 21 abr. 2014.

NACARATO, Adair Mendes. **Educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação:** currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando Geometria. 2000. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2000.

NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9/10, p. 1-6, 2005.

OLIVEIRA, Cristiano Lessa de. Um apanhado teórico-conceitual sobre a pesquisa qualitativa: tipos, técnicas e características. **Revista Travessia**, v.2, n.3, 2008. Disponível em: <e-revista.unioeste.br/index.php/travessias/article/download/3122/2459>. Acesso em: 5 jan. 2014.

OLIVEIRA, Hélia Margarida; SEGURADO, Maria Irene; PONTE, João Pedro da. Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. In: ROQUE, A.; LAGARTO, M. J. (Ed.). **Actas do ProfMat 98**. Lisboa: APM, 1996. p. 207-213. Disponível em <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto9.PDF> Acesso em: 5 jan. 2014.

PACHECO, José Augusto. **Teorias curriculares**: políticas, lógicas e processos de regulação regional das práticas curriculares. Braga, Portugal. Universidade do Minho, 2005. Disponível em <http://webs.ie.uminho.pt/jpacheco/files/curriculoRegional.pdf>. Acesso em: 11 dez. 2013.

PACHECO, José Augusto. Currículo, investigação e mudança. In: LIMA, LICÍNIO C. et al. **A educação em Portugal (1986-2006)**: alguns contributos de investigação. Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2006. p.67-136. Disponível em: <http://www.adcl.org.pt/observatorio/pdf/AeducacaoemPortugal_1986_2006.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2013.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Revista Zetetiké**, Campinas, v. 4, n.6, p.45-63, jul./dez. 1996.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, João Pedro; MATOS, João Filipe. Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations. In: PONTE, João Pedro et al. (Ed.). **Mathematical problem solving and new information technologies**: research in contexts of practice. Berlin: Springer, 1992. p. 239-254.

PONTE, João Pedro da et al. Investigando as aulas de investigação matemática. In: ABRANTES, PAULO et al. (Ed.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo.** Lisboa: APM; Projecto MPT, 1998a. p.133-152. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto12.PDF> Acesso em: 8 jun.2013.

PONTE, João Pedro da et al. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, Lisboa, v.7, n.2, p.41-70, 1998b.

PONTE, João Pedro. **Investigar, ensinar e aprender.** Lisboa: Actas do ProfMat, 2003a. p. 25-39. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf>. Acesso em: 13 mar. 2013.

PONTE, João Pedro. Investigação sobre investigações Matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, Lisboa, v.2, p. 93-169, 2003b.

PONTE, João Pedro. Gestão curricular em Matemática. In: GRUPO DE TRABALHO DA INVESTIGAÇÃO- GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular** . Lisboa: APM, 2005. p.11-34.

PONTE, João Pedro. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v.25, 2006. p.105-132.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, João Pedro; SOUSA, Hélia. Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico. In: GRUPO DE TRABALHO DA INVESTIGAÇÃO- GTI (Ed.). **O professor e o programa de Matemática do ensino básico**. Lisboa: APM, 2010a. p.11-41. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3174/1/10-Ponte-Sousa%20GTI4.pdf>. Acesso em: 9 set.2013.

PONTE, João Pedro. Explorar e investigar em Matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. **Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática,** Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM), v.21, p. 13-30, 2010b.

PONTE, João Pedro; HENRIQUES, Ana; PEREIRA, Joana Mata. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 355-377, jul./dez. 2012.

ROSSI, Gicele da Rocha. **O ensino e aprendizagem de polígonos e de transformações geométricas no plano**: relacionando arte e matemática por meio de frisos e dos ladrilhos. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física e de Matemática) — Centro Universitário Franciscano, UNIFRA, Santa Maria (RS), 2009. Disponível em: <http://tede.unifra.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=51.>. Acesso em: 5 jan. 2013.

SANTOS, Cristiane de Oliveira. **A importância da visualização no ensino da geometria plana e espacial.** Anápolis: Universidade Estadual de Goiás, 2009. Monografia do Curso de Licenciatura em Matemática.

SANTOS, Leonor et al. Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In: PONTE, João Pedro et al. (Org.). **Actividades de Investigação.** Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2002. p.83-106. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/msantos/textos/6GT3.PDF>. Acesso em: 05 fev. 2012.

SEGURADO, Irene; PONTE, João Pedro. Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo. **Quadrante**, Lisboa, v.7, n.2, p.5-40, 1998.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP). **Proposta Curricular para o ensino de matemática**: 1º grau, 3. ed. São Paulo: SE/CENP, 1988.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do professor**: 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental, Volume 2, Matemática. São Paulo: SE, 2009.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do aluno**: 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental, Volume 2, Matemática. São Paulo: SE, 2009.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática – Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2011

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Proposta curricular do estado de São Paulo**: Matemática. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática** – 1º grau. São Paulo: SE/CENP,1988.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Relatório Pedagógico 2010- SARESP**. São Paulo, 2011.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Relatório Pedagógico 2011- SARESP**. São Paulo: SE, 2012.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **SARESP:** Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. São Paulo: FDE, 2012. Disponível em:

<http://saresp.fde.sp.gov.br/2012/Pdf/Resultados/2%20-%20Saresp2012Resultados%20Gerais%20da%20Rede%20Estadual.pdf>. Acesso em: 29 dez. 2013.

TALL, David; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

TALL, David. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: MEIRA, LUCIANO; CARRAHER, M. DAVID (Ed.). **Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Recife, Brasil: PME, v.1, p. 61-75, 1995.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function**. International Journal of Education in Science and Technology**, n.14, p. 293-305, 1983.

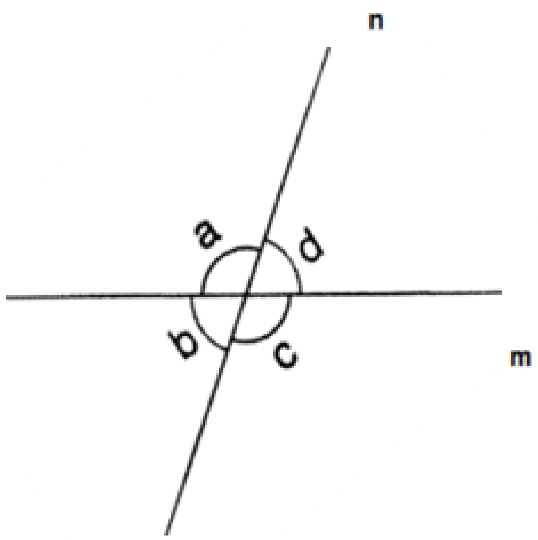
VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, David (Ed.). **Advanced mathematical thinking** Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 65-81.

YIN, Robert K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

Anexo A – Enunciados das tarefas

TAREFA: ÂNGULOS I

- Observem o desenho abaixo.
- Meçam a amplitude de cada ângulo e registrem.
- Pintem com a mesma cor os ângulos de medidas iguais.
- Construam outros exemplos como este, modificando as posições das retas.
- Nomeiem os ângulos e compare-os.
- O que vocês percebem? Registrem todas as relações que vocês descobrirem.
- Por último, para cada uma de suas hipóteses, tentem responder: Isso acontece sempre? Por quê?



TAREFA: ÂNGULOS II

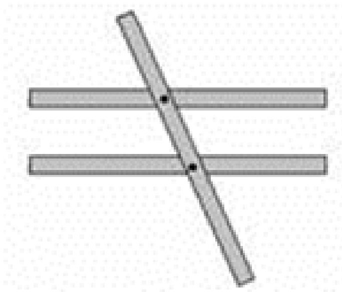
Vocês receberão canudinhos de refrigerante e "tachinhas" para uni-los conforme a figura a seguir.

Primeiro, procurem manter dois canudinhos paralelos um com relação ao outro, como no primeiro desenho. Observem que o canudinho que está por cima secciona os outros dois em dois pontos, onde estão as tachinhas.

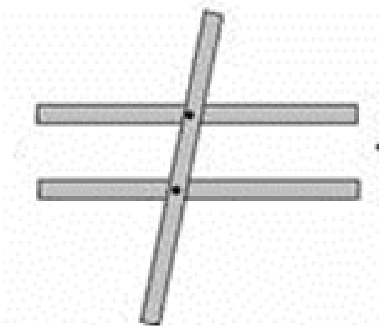
Meça os ângulos formados por esse canudinho (que atravessa por cima) com os outros paralelos que estão por baixo.

Você pode fazer desenhos para medir se isso ajudar. Também poderá nomear os ângulos como preferir.

Que relações entre os ângulos formados vocês observam? Registrem todas as relações que vocês perceberem. Faça alguns testes.



Agora, experimentem mover o canudinho que está em cima e encaixá-lo em outras posições, mas mantendo os dois de baixo paralelos.



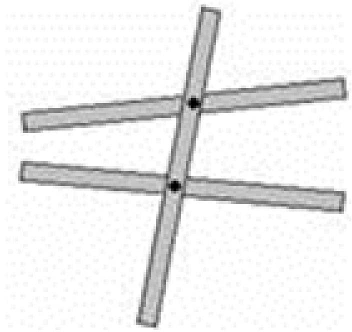
Novamente registrem as relações encontradas entre os ângulos formados.

Movam o canudinho de cima de várias outras maneiras. Testem suas hipóteses.

O que vocês observam?

E se os canudinhos de baixo não estiverem paralelos, o que acontece?

Verifiquem por meio de alguns exemplos e testes.



O que vocês concluem? Por que isso acontece?

Ladrilhando o Plano

Parte 1

Você e seus colegas receberão alguns polígonos regulares coloridos para recortar

Seguindo as condições anteriores, investigue:

1) Dentre os polígonos que vocês recortaram, quais os únicos polígonos regulares e congruentes entre si pavimentam perfeitamente o plano?

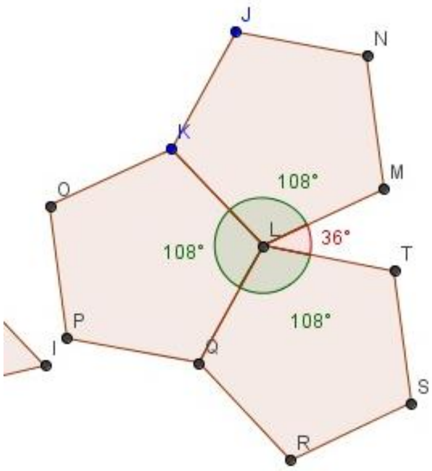
2) Que relação vocês observam entre os ângulos internos dos polígonos e as pavimentações que construíram?

Neste espaço você pode fazer contas, desenhar ou fazer esquemas e diagramas.

TAREFA: LADRILHANDO O PLANO

Parte 2

Na investigação anterior, com polígonos congruentes entre si, vocês disseram que com alguns polígonos não é possível pavimentar o plano, pois sobra um "espaço" que não cabe outro polígono do mesmo tipo. O que pode acontecer se colocarmos mais um polígono do mesmo tipo de modo que os seus lados se encaixem perfeitamente e seus vértices coincidam? Verifique em outros casos e registrem suas descobertas.



TAREFA: LADRILHANDO O PLANO

Parte 3

Vocês já investigaram as possíveis pavimentações com polígonos regulares de um só tipo. Mas, o que acontece se combinarmos polígonos regulares não congruentes entre si?

Construam o máximo de pavimentações (malhas) diferentes com polígonos regulares que conseguirem. Os polígonos dessa vez podem ser diferentes.

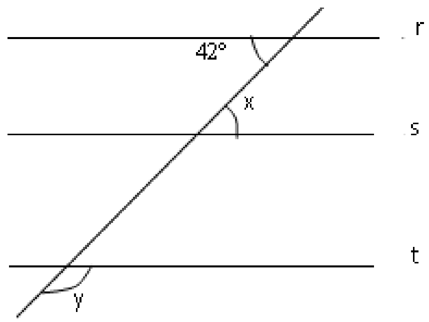
Observem as construções que vocês fizeram e os ângulos internos dos polígonos. O que vocês percebem?

Que relação vocês observam entre os ângulos internos dos polígonos e as pavimentações que construíram? Registrem suas conjecturas, testes, descobertas e justificativas por meio de colagens, desenhos e textos explicativos. Use ao máximo seu potencial de "investigador"!

Anexo B – Atividades Diagnósticas

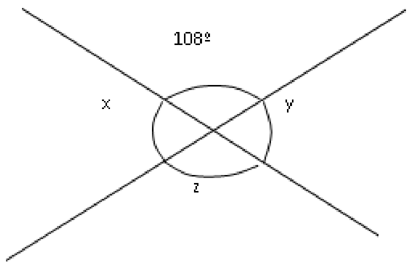
ÂNGULOS

1. Sabendo que **r** é paralela a **s** e **s** é paralela a **t**, calcule **x** e **y**. Em seguida explique como você fez pra descobrir as medidas de x e de y.

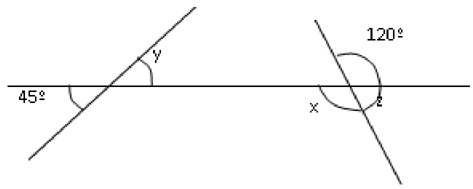


2. Calcule a medida dos ângulos indicados pelas letras nas figuras abaixo e explique como você pensou:

a)

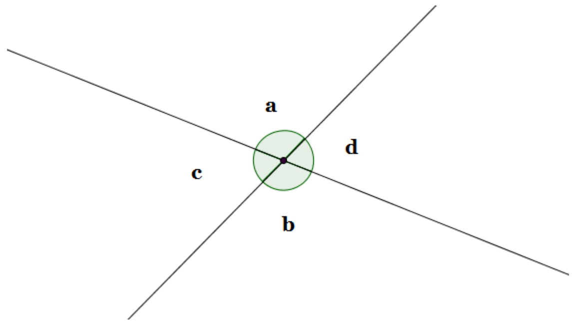


b)



INVESTIGANDO UM POUCO MAIS

1. Você participou de investigações matemáticas e aprendeu um pouco mais sobre ângulos esse ano. Pensando em suas descobertas, responda as questões a seguir.



Na figura ao lado, duas retas se intersectam formando quatros ângulos.

a) Se você souber a medida do ângulo **a**, é possível dizer quais as medidas de **b**, **c** e **d** sem usar com o transferidor? Por quê?

____
____
____
____
____
____

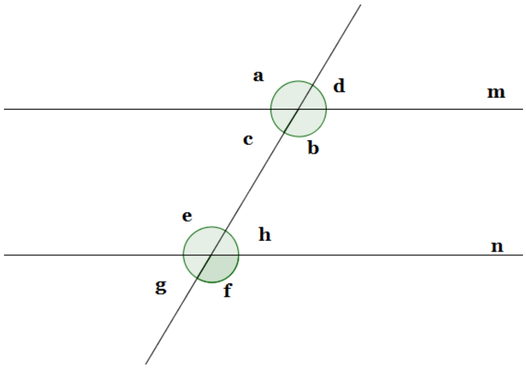
b) Vamos supor que o ângulo **a** mede 110°. Nesse caso quais as medidas dos outros ângulos?

____
____
____
____

c) O que você pode dizer sobre os ângulos **a** e **d**? Explique a relação que você observa entre esses dois ângulos. Isso acontece com outros pares de ângulos? Por quê?

____
____
____
____
____
____
____

2. Observando a figura a seguir, em que as retas **m** e **n** são paralelas entre si e lembrando a investigação que você fez com canudos, o que você pode dizer sobre as medidas dos ângulos? Explique.



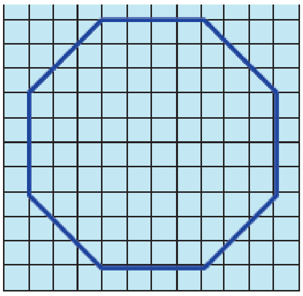
Conte um pouco sobre as experiências que você vivenciou com as aulas de exploração e investigação sobre ângulos esse ano.

Anexo C – Análise de Resultados de Questões de Matemática (Espaço e Forma) – 7º Ano do Ensino Fundamental

Relatório do SARESP (2010:128): Questão Aberta.

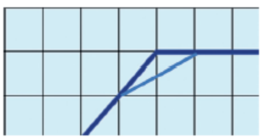
Habilidades: Resolver problemas envolvendo medidas de ângulos de triângulos e de polígonos em geral.

Em uma aula sobre polígonos regulares, a professora Marta explicava para seus alunos como calcular o ângulo interno de polígonos regulares. Gustavo, que é um aluno muito esperto, pensou no octógono com todos os seus lados iguais em uma malha quadrangular, conforme ilustrado abaixo.



Rapidamente, conseguiu determinar o ângulo interno do octógono regular. Determine a medida desse ângulo.

Resolução

	Observando um dos ângulos internos do octógono, reproduzido ao lado, pode-se concluir que ele é formado por um ângulo reto (90º) e por um ângulo que mede metade de 90º, isto é, 45º. Então o ângulo pedido mede 90º + 45º = 135º. Ou, utilizando a fórmula para a medida da soma dos ângulos internos de um polígono regular: S = (n – 2) x180º, onde n = número de lados → S = (8 – 2) x 180º = 6 x 180º = 1080º. Portanto a medida de um ângulo interno do octógono regular é obtida fazendo 1080º ÷ 8 = 135º.

Resposta: O ângulo mede 135º.

Grade de correção	%	Comentários
Certo: 135º	2,2	Apenas cerca de 3% dos alunos resolveram o problema. O octógono foi apresentado, desenhado em uma malha quadriculada, exatamente para o aluno perceber que seu ângulo interno é formado por dois ângulos, como visto na resolução.
Apresentou 90º + 45º, mas errou o cálculo.	0,1	Este percentual de acerto é muito pequeno dado o nível de dificuldade da questão e a série cursada pelos alunos.
Armou a fórmula corretamente, mas errou nas contas	0,6	
Resposta errada, que não contempla as respostas anteriores	74,7	
Sem resposta	22,4	Estes alunos deixaram em branco porque não sabiam resolver?
Total	100,0	

Relatório do SARESP (2011:126): Questões de múltipla escolha.

Tabela 28. – Desempenho em Itens da Prova
Matemática – 7º Ano Ensino Fundamental – SARESP 2011

Habilidade	Descrição: o que o aluno faz	% Acerto (em %)
12	identifica a expressão algébrica que traduz um problema envolvendo a medida do perímetro de um retângulo.	8,0
27	calcula a medida do terceiro ângulo interno de um triângulo, dadas as medidas dos outros dois.	17,2
05	calcula 2 - 1/5.	17,2
24	identifica a medida do giro que o ponteiro dos minutos de um relógio realiza em quinze minutos.	17,4
35	interpreta informação a partir de dados mostrados em gráfico setorial (cálculo de porcentagens).	17,9
38	resolve problema que envolvam a ideia do princípio multiplicativo de contagem (interpretação de desenho com trajetórias possíveis).	18,3
09	faz cálculos com potências (multiplicação e expoentes 2 e 3).	18,5
27	resolve problema que envolve medida dos ângulos internos de um triangulo.	18,7
05	calcula (-7/3) + (2/5).	19,6
38	calcula a quantidade de números de dois algarismos que podem ser formados com três algarismos dados.	19,8
09	efetua cálculos com potências, expoentes 3, 4 e 5.	22,1
02	reconhece número primo (dois algarismos).	22,5