UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

TÂNIA MARA AMORIM

O ESTUDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

SOROCABA
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

TÂNIA MARA AMORIM

O ESTUDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Tânia Mara Amorim
Orientador: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCAR

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS - PPGECE

TÂNIA MARA AMORIM

ORIENTADOR: PROF. DR. PAULO CÉSAR OLIVEIRA

O ESTUDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA

2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

A524en

Amorim, Tânia Mara.
O estudo dos números complexos no ensino médio : uma abordagem com a utilização do Geogebra / Tânia Mara Amorim. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
238 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Números complexos. 3. Números imaginários. 4. Ensino médio. 5. GeoGebra (Software de computador). 6. Representação semiótica. I. Título.

CDD: 510.7 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Tânia Mara Amorim de Freitas, realizada em 19/12/2014:

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira
UFSCar

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Unesp

Prof. Dr. Wladimir Seixas
UFSCar

*"Educar-se é impregnar de sentido cada momento da vida, cada ato cotidiano",
Paulo Freire.*

AGRADECIMENTOS

Meu agradecimento eterno a Deus, fonte de toda sabedoria e vida, que mesmo estando acima de todo o Universo, cuida, ajuda, mantém e protege seus pequeninos. Sem Ele nada sou e nada conseguiria, pois somente n'Ele é que posso todas as coisas. Somente a Ele, a Deus, por me capacitar para o trabalho, para o estudo e pesquisa, pois é n'Ele que tenho aprendido a esperar e confiar a cada dia, na certeza de que no momento certo, alcançarei a vitória tão almejada.

Meu eterno agradecimento aos meus pais (in memorian), que com certeza se aqui estivessem, estariam vibrando comigo, por mais uma vitória. Foram eles que me ensinaram a acreditar que só a educação é capaz de transformar o ser humano; só através da educação somos capazes de sermos agentes transformadores do mundo.

Agradeço ao meu amado esposo Admilson, sempre presente nos momentos mais difíceis, meu braço direito e muitas vezes o esquerdo também, pois é em seu abraço que encontro forças para seguir em frente e é em seus braços que encontro conforto e afago, quando as lágrimas não querem me deixar.

Agradeço ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Paulo César Oliveira por sua orientação e observações sempre pertinentes. Por horas a fio se empenhou na leitura e crítica desse material, trazendo sempre sugestões pertinentes. Agradeço acima de tudo por ter acreditado em meu potencial. Com certeza esse trabalho também é fruto de sua dedicação. Suas aulas, fizeram toda a diferença no direcionamento desse trabalho, pois foi através delas que passei a enxergar verdadeiramente os registros de representação semiótica.

Agradeço também aos demais professores da UFSCar - Sorocaba, que dividiram conosco seus conhecimentos, mas em particular ao Prof. Dr. Wladimir Seixas, pois suas aulas, fizeram grande diferença na condução desse trabalho.

Agradeço a minha amiga Valéria Nogueira, que gentilmente cedeu seus alunos para participarem da aplicação dessa pesquisa. Sem a sua compreensão e boa vontade, este trabalho não teria acontecido desta forma. Agradeço também a equipe diretiva da Escola Estadual Coronel Dias Campos Profa. Edna Rodrigues Carriel (diretora), Prof. Gilberto Leite Machado e a Profa. Kátia de Fátima Nunes, que prontamente nos abriram as portas, permitindo que pudéssemos realizar esse trabalho. Não poderia no entanto, deixar de agradecer aos alunos do 3° ano A, que prontamente se colocaram à disposição para colaborar conosco.

Agradeço à direção e coordenações do Centro Universitário Nossa Senhora do Patrocínio, nas pessoas do diretor Prof. Ms. Neilo Marcos Trindade e aos coordenadores Prof. Esp. Mauro Jabur Arruda e ao Prof. Ms. Emanuel Melo que além de nos ceder espaço para aplicação do questionário da pesquisa junto aos alunos da Engenharia Civil da instituição, também têm acreditado, apoiado e acima de tudo, incentivado o nosso trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos e alunos que de forma direta e indireta, participaram, acreditam e acreditaram no meu trabalho. Que durante as minhas incessantes buscas e pesquisas, colaboraram, ajudaram, torceram e até mesmo partilham comigo suas críticas e sugestões.

Agradeço ao meu filho Gabriel, um presente de Deus. Ver você crescendo e aprendendo, me fez acreditar e renovar minha fé a cada dia, de que é possível construir e deixar um mundo melhor para aqueles que ainda virão.

Agradeço a todos os meus familiares e amigos, que oraram, torceram e acreditaram em mim. Seus gestos de carinho, fizeram a diferença em minha vida.

Alguém um dia disse esse verso que é um retrato fiel de minha vida:

“Eu pedi força, mas Deus deu-me dificuldades para fazer-me forte.

Eu pedi sabedoria, mas Deus deu-me problemas para resolver.

Eu pedi prosperidade, mas Deus deu-me cérebro e músculos para trabalhar.

Eu pedi coragem, mas Deus deu-me perigos para superá-los.

Eu pedi amor, mas Deus deu-me pessoas com problemas para ajudar.

Eu pedi favores, mas Deus deu-me oportunidades.

Eu não recebi nada do que pedi, mas compreendo hoje, que recebi tudo o quanto precisava.”

(Autor Desconhecido)

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo viabilizar o estudo do conteúdo de números complexos para alunos do 3° ano do Ensino Médio, dentro de um enfoque abrangendo uma contextualização geométrica com a utilização do software Geogebra, combinado com o caderno do aluno (SÃO PAULO, 2014). Observa-se no entanto que este trabalho não se trata de uma sequência didática. A motivação principal deste estudo foi a busca por uma prática inovadora, visando melhorar a qualidade do processo ensino-aprendizagem, em relação a esse conteúdo, frente as inúmeras dificuldades demonstradas pelos estudantes. O percurso teórico da pesquisa fundamentou-se principalmente na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval e análise de documentos curriculares para o Ensino Médio. Já o percurso metodológico foi construído com base nas etapas da Engenharia Didática idealizada por Michèle Artigue. A produção de informações envolveu atividades matemáticas realizadas por 31 estudantes de Ensino Superior de um curso de Engenharia Civil e entre 10 a 12 alunos (houve variação) de uma 3ª série do Ensino Médio; servindo de base para responder as seguintes questões de investigação: I - Que saberes sobre números complexos, alunos do Ensino Superior trazem como bagagem do Ensino Médio? II - Que perspectiva de construção de saberes o Caderno do aluno e do professor proporciona ao aprendizado de números complexos? III - O Geogebra pode agregar a construção de saberes quando articulado ao Caderno do aluno, disponibilizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo? Os instrumentos utilizados para reunir o montante de informações produzidas pelos sujeitos participantes, na etapa empírica da nossa investigação foram: questionário, registros escritos das tarefas (protocolos) e imagens das atividades matemáticas realizadas com o auxílio do Geogebra. Os resultados obtidos na análise dos questionários apontaram que os conhecimentos dos alunos do ensino superior, bem como dos alunos do ensino médio, são ínfimos em relação a necessidade daqueles que seguirão seus estudos, no campo das exatas. No que diz respeito aos resultados obtidos a partir da aplicação das tarefas para os alunos do Ensino Médio, a utilização do software revelou-se eficiente para uma visualização geometrizada do conteúdo em relação a construção de seus conceitos, o que permitiu aos estudantes uma compreensão muito maior frente ao conteúdo estudado.

Palavras-chave: Números Complexos. Números Imaginários. Ensino Médio. Geogebra. Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This work aimed to facilitate the study of the content of complex numbers for students in the 3rd year of High School, within a focus covering a geometric context, with the use of Geogebra software, combined with notebook student (SÃO PAULO, 2014). The main motivation of this study was to search for an innovative practice, aiming to improve the quality of the teaching-learning process, in relation to the content, since the numerous difficulties demonstrated by students. The theoretical research was based mainly on the theory of representation semiotics registers of Raymond Duval and analysis of curriculum documents for Middle School. Already the methodology was built based on the steps of the Didactics Engineering idealized by Michele Artigue. The production of information involved mathematical activities performed by 31 students of Higher Education of a Civil Engineering course and between 10 to 12 students (there was variation) of a 3rd year of High School; providing the basis for answering the following research issues: I – What knowledge about complex numbers, students of Higher Education bring the baggage of high School? II - That prospect of construction of knowledge the notebook of the Student gives the learning of complex numbers? III - The Geogebra can add the construction of knowledge when articulated to the notebook of the Student, made available by the Department of the São Paulo State of Education? The instruments used to collect the amount of information produced by participants, in empirical step of our research were: questionnaire, written records of tasks (protocols) and images of mathematical activities carried out with the help of Geogebra. The results obtained in the analysis of the questionnaires showed that the knowledge of the students in higher education, as well as the students in the middle school, are negligible in relation to the need of those who follow their studies in the field of exact area. With respect to the results obtained from the implementation of tasks for high school students, using the software proved to be efficient for a geometrized viewing the content in relation to construction of its concepts, which allowed students a much better understanding across the studied content.

Keywords: Complex Numbers. Imaginary Numbers. High School. GeoGebra. Semiotic Representation Registers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

Durante esses meus 27 anos de carreira como professora do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Superior, onde pelo menos os últimos 15 anos tenho trabalhado com as 3ªs séries do Ensino Médio, tenho observado que houve uma mudança comportamental significativa em nossos alunos e isso tem se refletido seriamente na sala de aula, bem como no processo ensino-aprendizado.

Há muito tempo tenho me preocupado como professora, em dar significado ao que se está ensinando, ou, procurar mostrar para que aquele conceito matemático pode ter uma perspectiva utilitarista. Confesso que eu mesma, enquanto aluna do Ensino Médio e do Superior me incomodava quando, ao aprender um determinado conteúdo da matemática, aprendia somente o processo operatório, pois eu queria também entender ou visualizar qual era a aplicabilidade para aquele conceito. Eu já tinha consciência na época, de que a matemática não era obra do acaso, ou, invenções de alguns matemáticos e/ou filósofos, diferente do que eu já ouvi de muitos alunos: “não tinham mais o que fazer da vida e ficavam inventando cálculos para complicar a vida das pessoas”.

Diante dessas situações, tenho procurado inserir em minha prática docente, tarefas práticas das quais os alunos precisam ter domínio do conceito para obter respostas.

Esta preocupação de dar significado ao ensino-aprendizagem, é comum a outros colegas de profissão, bem como na área de publicação de livros didáticos. Porém, alguns conteúdos nos materiais didáticos, não sofreram mudanças nas suas formas de apresentação, mantendo uma mesma tradição editorial. Isso é exatamente o que ocorre com o conteúdo dos números complexos nos livros didáticos. Desde os meus tempos como estudante do Ensino Médio, esse conteúdo se apresenta com as mesmas características e com os mesmos objetivos, ou seja, segundo os materiais didáticos, os números complexos se limitam ao status instrumental para resolução de equações polinomiais, sem maiores significados.

Lamentavelmente, essas considerações constam nas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, cuja sigla para este documento é PCN+:

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. **Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido** para os que não continuarão seus estudos na área, **ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas.** (Grifo nosso) (BRASIL, 2002, p.119)

Esta citação em relação ao estudo dos números complexos gera incômodo, pois a visualização geométrica desses números promove outro sentido e significado ao seu estudo, além de permitir aos alunos a formulação e validação ou não de hipóteses. Outro fator importante, é que a forma geométrica dos números complexos propicia a interdisciplinaridade com fenômenos da Física, fator que é valorizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000).

Na minha visão, é preciso reformular a maneira como esse conteúdo é apresentado aos alunos, e não simplesmente descartá-lo como algo que não tem muito sentido ou apenas tratá-lo como parte flexível do currículo, como foi sugerido no PCN+. A forma de tratamento dado a esse conteúdo nos materiais didáticos precisa ganhar um aspecto geométrico, além de trazer situações problemas onde se possa utilizar essa ferramenta, em buscas de respostas para situações reais. Dessa forma, o conteúdo vai ganhar “vida”.

Um fato notório que temos é que muito se fala de que os nossos alunos de hoje, são frutos de um mundo tecnológico, nasceram quase que com um computador na mão e um dos fatos mais naturais que faz parte da vida cotidiana das pessoas hoje, é utilizar o aparelho celular para fotografar, depois descarregar as fotos em um computador e diagnosticar que muitas das vezes, essas fotos aos serem abertas para a visualização, estão deitadas ou invertidas. Rapidamente, é possível editar o ajuste dessas fotos, ou seja, ampliando, reduzindo, rotacionando, transladando; todos esses processos realizados no computador, envolve operações com números complexos. Portanto, não podemos mais tratar esse conteúdo como algo sem sentido e sem utilidade.

Nossos alunos precisam saber que os números complexos são utilizados e construções de muitos recursos que fazem parte de suas vidas, como, por exemplo, a edição de fotos.

Em nossa dissertação optamos por utilizar a sequência didática do Caderno do Aluno da 3ª série do Ensino Médio da Secretaria da Educação Estado de São Paulo, volume 2, para aplicarmos suas atividades, com a utilização do software Geogebra; já que consideramos que a visualização geométrica pode contribuir para o aprendizado e nesse material a intensão de contextualização é incipiente.

Mais especificamente, procuramos responder três questões que serviram de direcionamento para este trabalho: *I) Que saberes sobre números complexos, alunos do Ensino Superior trazem como bagagem do Ensino Médio?* Este questionamento levou em conta observações em relação aos nossos alunos do Ensino Superior, quando frente ao estudo das variáveis complexas além de disciplinas da Física, onde percebe-se que a maioria desconhece as bases conceituais dos números complexos.

As outras duas questões têm a seguinte formulação: *Que perspectiva de construção de saberes o Caderno do aluno e do professor proporciona ao aprendizado de números complexos?* Podemos ressaltar de antemão que o referido material não contempla o conjugado de um número complexo e até mesmo a operação de divisão. A última questão de pesquisa foi: *o Geogebra pode agregar a construção de saberes quando articulado ao Caderno do aluno, disponibilizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo?*

Na busca por respostas a estas questões, compomos a redação de processo deste processo de investigação em cinco capítulos.

No capítulo I relatamos o ser professora na Educação Básica, bem como os motivos que nos levaram a essa pesquisa, além dos objetivos intrínsecos a ela. Neste sentido, optamos por escrever este capítulo na primeira pessoa, bem como em várias páginas desta introdução. Tal escolha foi um pedido do orientador desta dissertação por entender que é um momento de apresentação da professora Tânia que vai se constituindo gradativamente, em seu percurso sócio-histórico, um ser professora-pesquisadora.

A partir do capítulo II a escrita sofre um ajuste para a primeira pessoa do plural, por entendermos que a redação deste processo de pesquisa sofre diversas interlocuções e, portanto, não é mais individual. Há uma coletividade de debates e reflexões que vai sendo tecida, página a página, de forma singular.

Mais especificamente, o capítulo II, contemplou o percurso teórico da dissertação, o qual envolveu a análise de documentos curriculares do Ensino Médio frente ao conteúdo Números Complexos; a contribuição da teoria dos registros de representação semiótica para o nosso tema de pesquisa; bem como a descrição de teses e dissertações brasileiras como suporte teórico-metodológico desta investigação.

No capítulo III, apresentamos o percurso metodológico desta investigação, como base nas etapas da Engenharia Didática.

O Capítulo IV foi composto pelas considerações finais deste relatório de pesquisa. Trata-se de um momento de resgate das intenções deste processo de investigação que culminou em resultados para a busca de respostas às três questões de pesquisa. Não menos importante, dedicamos também em apresentar as limitações deste trabalho, bem como as possibilidades para futuras pesquisas e a contribuição do Mestrado para o ser professora-pesquisadora Tânia, autora desta obra.

Reservamos neste processo de redação a apresentação das referências bibliográficas que subsidiaram esta pesquisa, assim como anexos que julgamos pertinentes ao nosso trabalho.

2 - SOBRE A MINHA HISTÓRIA E A MOTIVAÇÃO POR ESTE PROCESSO DE PESQUISA

2.1– O interesse pelo tema

Em 1987, iniciei minha carreira como docente no Ensino Médio. Minhas turmas de 1ª série do Ensino Médio ainda trago-os muito vivos em minha memória. Eram tempos bons, onde tínhamos alunos interessados em aprender. O estudo das funções, as construções dos gráficos representativos, enfim, a diversidade de linguagens que envolvem toda esta estrutura matemática sempre tiveram muito significado para mim, mesmo sem conhecer naquele momento que esta diversidade é o foco da teoria dos registros de representações semióticas.

Na verdade, enquanto aluna do Ensino Médio, as aulas de matemática ministradas pelo professor Roberto, foram meu referencial para a constituição do ser professora. Ainda hoje me lembro dele com saudades. Eu o considerava uma sumidade. Foi através dele que fui conhecer o IME – Instituto de Matemática e Estatística da USP. Sua capacidade de criar tarefas me estimulava na busca das soluções dos problemas propostos. A admiração ao professor Roberto, que na época também era um professor universitário, causou-me um impacto profundo em minha decisão, com relação a minha carreira profissional.

Tive a oportunidade de na minha infância/adolescência ingressar no Conservatório Musical Villa Lobos na cidade de Osasco/SP, onde comecei meu estudo de música. A música me parecia ser muito intuitiva. Fluía de uma forma muito natural para mim. Não podia imaginar que toda a estrutura musical apoiava-se na matemática. Foi muito tempo mais tarde, quando tomei conhecimento sobre o “Monocórdio de Pitágoras”, que pude perceber que música também é matemática, porém com uma representação semiótica muito própria. Descobrir que Pitágoras, aquele mesmo do famoso do Teorema de Pitágoras que permitia soluções de problemas geométricos pelo uso de triângulos retângulos, escreveu toda uma estrutura musical dos tons e semitons, foi algo que me fascinou.

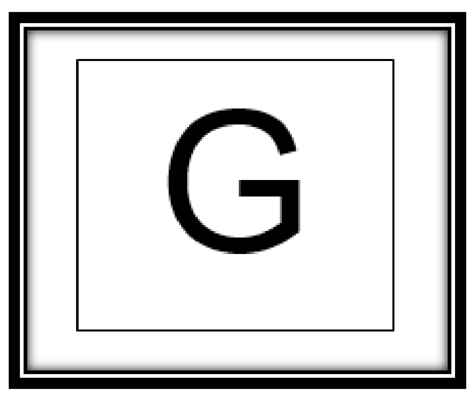
Por outro lado, na minha inocência, não conseguia compreender o porquê de muitos colegas da época apresentar dificuldades ao transpor a leitura das notas musicais para o instrumento tocado e vice versa. Tive oportunidade de conhecer algumas pessoas que são capazes de dedilhar com habilidade um piano, mas não conseguem sequer ler uma nota musical e outras que possuem uma leitura musical perfeita, mas não conseguem simultaneamente ler e tocar o instrumento. Na época isso para mim parecia irracional. Hoje compreendo que essas pessoas possuem dificuldades nas diferentes formas de representar o saber.

Há casos em que as pessoas não conseguem converter os signos dos registros de representação semiótica em relação à música. Na música podemos utilizar os signos notas musicais em uma pauta, com uma clave para poder nomear as notas e a definir um tempo, para poder se conhecer o tempo de emissão do som para cada nota. É muito comum no entanto a utilização de cifras, que são formadas por letras do alfabeto para representar cada acorde. Há aqueles que não conseguem fazer a conversão do acorde para as notas, ou vice versa. E ainda há aqueles que somente conseguem representar o som de uma música, mediante uma tablatura. Como exemplo vamos tomar o acorde de sol. Podemos representar através das notas musicais ou de sua cifra correspondente:

Figura 1: Notas Musicais

Fonte: Material da Autora

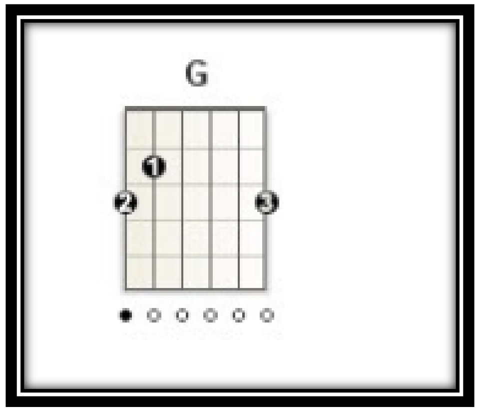
Figura 2: Cifra



Fonte: Material da Autora

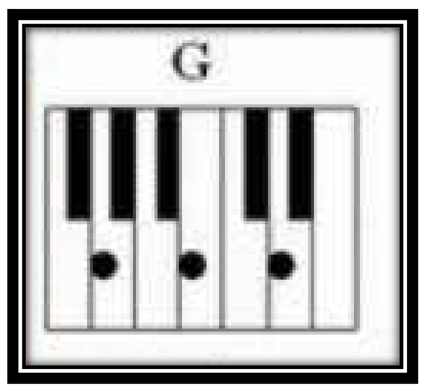
Há no entanto aqueles que somente conseguem tocar um violão, ou um teclado, se além das cifras, a partitura apresentar a tablatura.

Figura 3: Tablatura para violão



Fonte: Blog Art Music, 28 Nov.2014

Figura 4: Tablatura para teclado



Fonte: Consulta Musical, 28 Nov.2014

Como se vê nas figuras 1 e 2, é necessário que o músico saiba fazer a conversão entre as formas de representação de notas musicais para cifras e vice versa.

É muito comum em instrumentos de sopro, como por exemplo, o saxofone, ser afinado em “si maior”, ou outra tonalidade. Nesse caso, se o músico for tocar uma música cujo tom é “dó maior”, ele deverá fazer a transposição de todas as notas de uma partitura para a tonalidade de afinação do seu instrumento. Um músico experiente faz a transposição automaticamente ao tocar, sem a necessidade de reescrever a partitura com a nova tonalização.

Ingressei no curso de Matemática no ano de 1983. Formei-me em 1986 e no início do ano de 1987, ingressava na sala de aula, não mais como estudante, mas agora como professora.

2.2 – Vivência Profissional

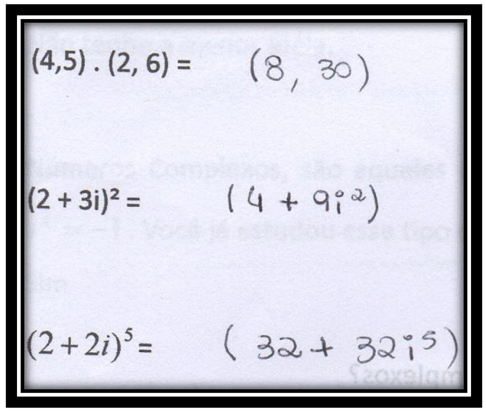
Durante esses anos, tive a oportunidade de trabalhar com classes desde o 6° ano do Ensino Fundamental até a 3ª série do Ensino Médio de Escola Pública e Privada, além de atuar também no Ensino Superior.

Ao longo desses 27 anos de carreira, percebi uma grande mudança no perfil dos alunos que atendemos. A sociedade mudou, o sistema de ensino também mudou e observo que muitas dessas mudanças, trouxeram alguns resultados positivos, porém trouxeram também muitos resultados negativos, promovendo uma mudança postural negativa na maioria de nossos alunos. Se de um lado a tecnologia evoluiu trazendo a oportunidade da utilização de novas ferramentas para o ensino, do outro lado os problemas ensino-aprendizagem se agravaram diante de uma clientela não mais acostumada a pensar, a ser desafiada, pois as ferramentas de tecnologia trazem as informações prontas. Neste sentido, porquê pensar, se é possível fazer um *"ctrl c", "ctrl v" (copy/paste).*

Ao olhar para trás e ver que muitos alunos obtiveram sucesso em suas vidas, sabendo que enquanto educadora fiz parte da transformação de suas vidas, promovendo a capacidade de aquisição de saberes necessários para que eles pudessem se tornar protagonistas de seus sucessos; é algo que me enche de satisfação pessoal. Porém é muito triste olhar para muitos alunos de hoje e perceber que a maioria não conseguem superar dificuldades básicas na matemática.

Nos últimos anos, no entanto, tenho me dedicado ao trabalho com os alunos do Ensino Médio e Ensino Superior e com isso tenho comparado as duas classes de alunos. Percebo que os alunos que chegam ao Ensino Superior trazem os mesmos problemas em relação às Representações Semióticas por eles vivenciados, no Ensino Fundamental e Médio. Abaixo podemos observar dois exemplos:

Figura 5: Resposta de aluno – Ensino superior

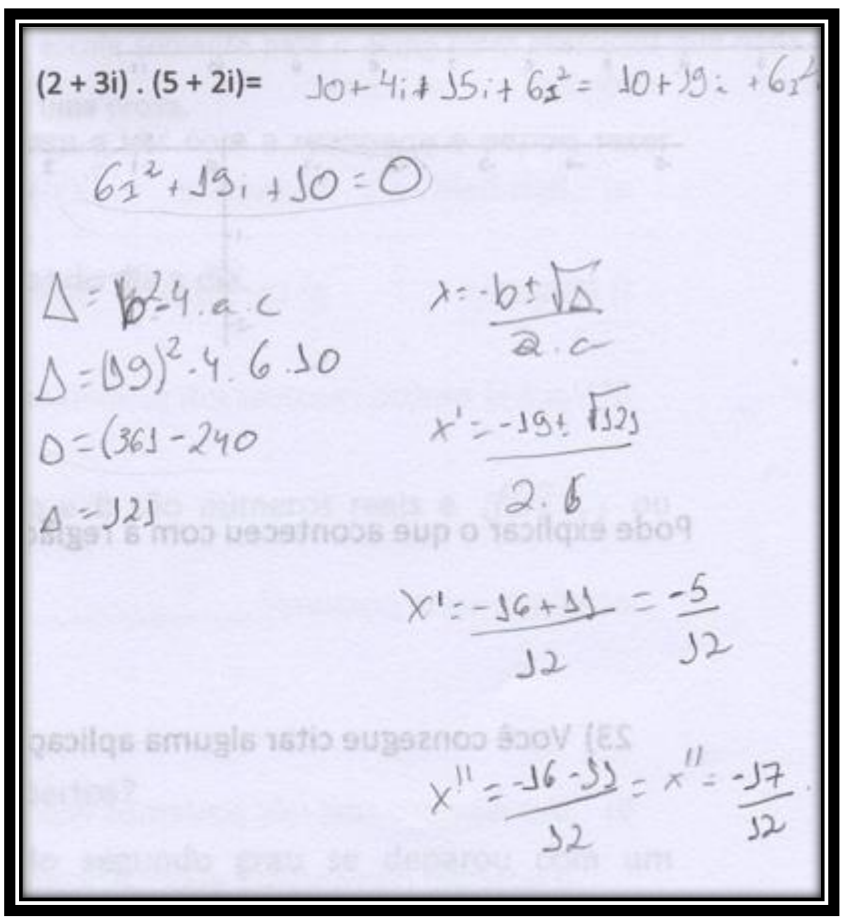

$(4,5) . (2, 6) = (8, 30)$

$(2 + 3i)^2 = (4 + 9i^2)$

$(2+2i)^5 = (32 + 32i^5)$

Fonte: Material da Autora

Figura 6: Resposta de aluno – Ensino superior


$(2 + 3i) . (5 + 2i) = 10 + 4i + 15i + 6i^2 = 10 + 19i + 6i^2$

$6i^2 + 19i + 10 = 0$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = (19)^2 - 4.6.10$

$\Delta = (361 - 240$

$\Delta = 121$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$x' = \dfrac{-19 \pm \sqrt{121}}{2.6}$

$x' = \dfrac{-16 + 11}{12} = \dfrac{-5}{12}$

$x'' = \dfrac{-16 - 11}{12} = x'' = \dfrac{-17}{12}$

Fonte: Material da Autora

Nos exemplos das figuras 5 e 6, temos respostas dadas por alunos que participaram da pesquisa da autora, que foi aplicado junto ao 2° semestre do curso de Engenharia Civil do CEUNSP (Centro Universitário Nossa Senhora do Patrocínio).

É claro pelas respostas dos três questionamentos da figura 5, que esse aluno possui deficiência em conceitos matemáticos, não só no que diz respeito aos números complexos. Na primeira alternativa, ele deveria ter reescrito os números complexos na sua forma algébrica, fazendo a conversão como é classificado dentro dos registros das representações semióticas, para então operar a multiplicação. A ideia por de trás dessa alternativa era verificar se o aluno seria capaz de distinguir o par ordenado representação de um número complexo e operar a multiplicação, do o par ordenado representação vetorial, (representação utilizada na disciplina de Álgebra Linear que o aluno cursa, cujo resultado é o produto interno em $\boldsymbol{R^2}$), ou seja, os resultados são totalmente distinto.

Na segunda alternativa, fica evidente que o aluno apresenta dificuldade com o conteúdo de Produtos Notáveis que é ensinado no 8° ano do Ensino Fundamental II, pois o tratamento para a obtenção do resultado do complexo ao quadrado é o mesmo tratamento dado na obtenção de uma equação de primeiro grau, quando elevada ao quadrado. Aqui fica evidenciado que se problema não é específico com os números complexos, mas vai além.

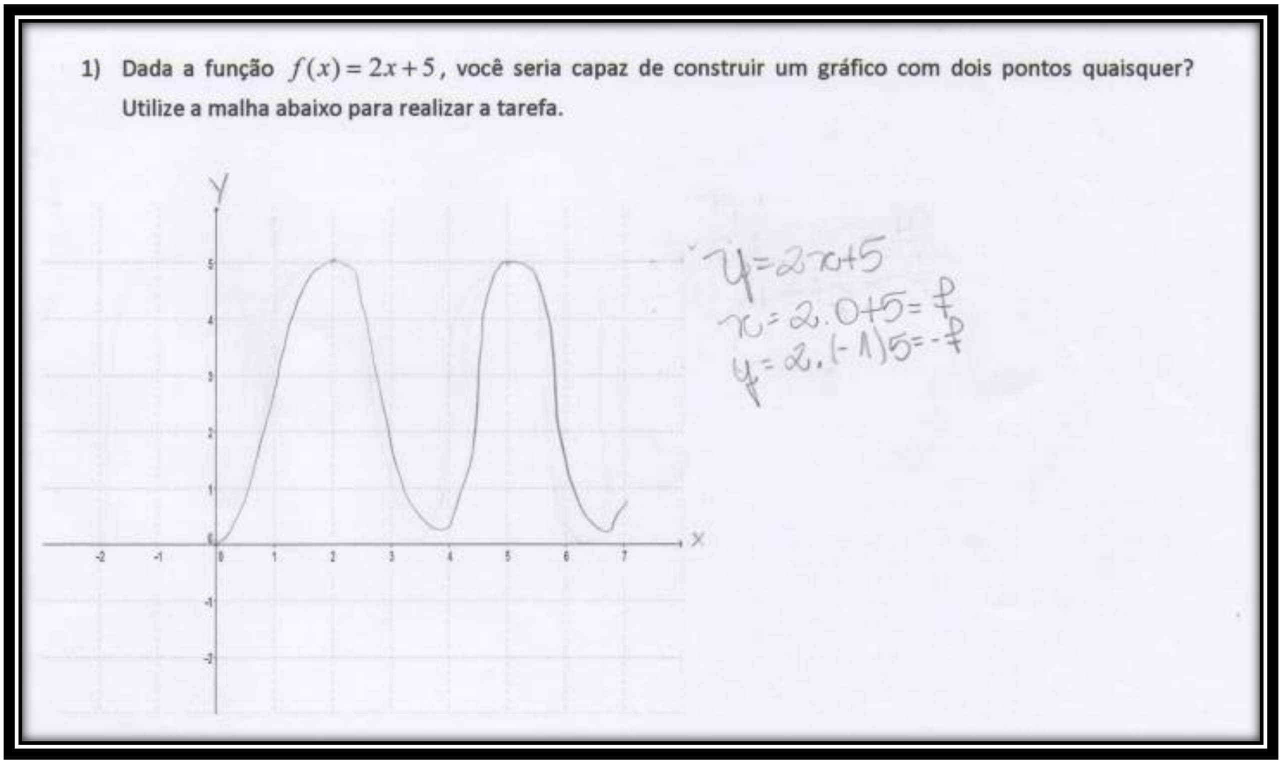
Na terceira alternativa, esperava-se que o aluno convertesse o complexo para sua forma trigonométrica para encontrar mais facilmente o resultado, porém o mesmo optou por trabalhar na sua forma algébrica. O que nos chama a atenção é que o mesmo erro cometido na alternativa anterior, foi repetida nessa alternativa. Observa-se claramente que o aluno não só possui deficiência nos conceitos dos Produtos Notáveis, mas possui deficiência nos conceitos de Potenciação. Ressalto que como professora da turma do qual o aluno em questão está inserido, sendo que leciono Cálculo I para essa turma, e devido a necessidade de utilização desses conceitos (Potenciação e Produtos Notáveis) para as resoluções de limites de derivadas, fiz uma revisão sobre o assunto, nos primeiros dias de aula do semestre. Logo concluo que a mudança da variável x para a variável i fez com que o aluno não mais conseguisse realizar a operação da segunda alternativa. Em uma observação recente feita por outro aluno do curso de Cálculo I, o aluno afirmou: *“Professora, você não sabe que se mudar a cor da grama os bois não* *pastam mais?"* O mesmo afirmou algo que a princípio parece engraçado, ao se referir a mudança de incógnita em uma operação de derivação, mas dentro da visão pedagógica é algo realmente preocupante, pois o mesmo demonstra não estar aprendendo os conceitos, mas mecanizando processos de tratamento e conversão dos registros de representação semiótica, nas resoluções de tarefas.

Na figura 6, o aluno até aplica corretamente a operação distributiva para a multiplicação, porém ao se deparar com o i^2 (número imaginário), não sabe o que fazer. O que se observa que ele considera o número imaginário como uma incógnita quadrática, aproveita para igualar a zero o resultado obtido na aplicação da operação distributiva e aplica técnicas conhecidas para a resolução de equação de 2° grau, encontrando assim dois resultados para a suposta incógnita "*i*". O pior é que após igualar a zero a suposta equação de segundo grau, ao recorrer à conhecida "formula de Baskhara" para a resolução da equação, o mesmo ainda troca a incógnita que deveria ser "i", por "x".

Se de um lado percebe-se que o aluno detém o conhecimento de alguns conceitos matemáticos, por outro lado o que se vê é que ele não sabe como usá-lo, pois recorreu a um conceito inerente para a resolução de equação de 2° grau, aplicando dentro de uma operação de multiplicação entre números complexos, onde tal conceito não é aplicável para a situação em questão.

O pior é observar alunos que chegam ao Ensino Médio sem possuírem saberes básicos necessários para esta nova etapa de estudos. É possível ter um vislumbre dessa situação que considero grave, na resposta da aluna (figura 7), cuja tarefa foi aplicada para alunos do 3° ano do ensino médio, por ocasião da introdução do estudo de Geometria Analítica (GA).

Figura 7: Resposta de aluna do ensino médio



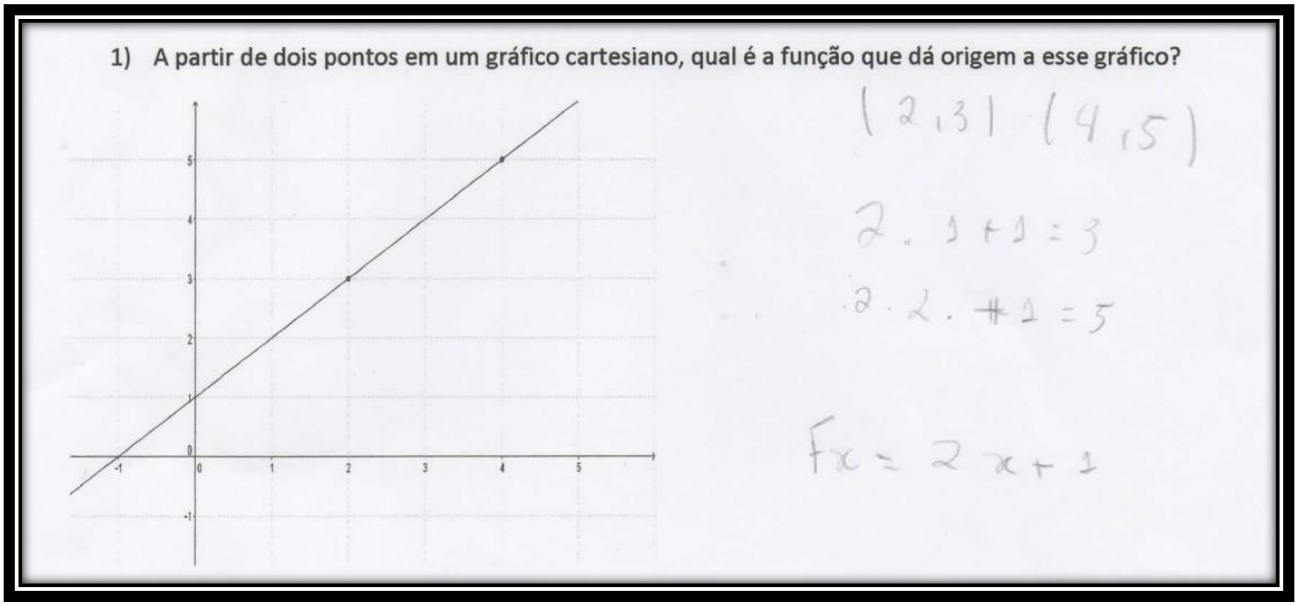
Fonte: Material da Autora

A ideia de retomar a construção de gráficos de função do 1° grau, era levar os alunos a perceberem a relação entre a equação da reta e a função de 1° grau.

O que observamos é que a aluna em questão não tem domínio da construção de gráfico de função de 1° grau, pois sua dificuldade vai muito mais além, quando observa-se as operações realizadas ao lado do gráfico, vê-se que esta aluna pode ser classificada como uma "semianalfabeta matemática", visto que ela não apresenta domínio de operações básicas, conceitos esses que deveriam ter sido aprendidos durante sua passagem pelo ensino fundamental I, ou seja, ela não opera a subtração, ela não opera a multiplicação. É claro que essa aluna não tem domínio das transformações de tratamento e nem muito menos das conversões dentro dos registros de representação da semiótica

Outro exemplo que podemos observar é o caso de um aluno também da 3 série do Ensino Médio, trabalhando em uma tarefa com o objetivo de estabelecer relações entre a função de 1° grau e o estudo da equação da reta em Geometria Analítica:

Figura 8: Resposta de aluno do ensino médio



Fonte: Material da Autora

Neste caso, o aluno conseguiu fazer uma leitura dos pares ordenados no gráfico dado, porém não consegue utilizar os conceitos necessários para construir a função que originou o gráfico em questão. Vê-se que o aluno não testou os pares ordenados por ele escolhido de forma correta. Neste caso, houve uma confusão em relação a componente x do gráfico ao aplicar na função por ele definida. A leitura que ele fez é que o resultado da operação de multiplicação do número 2 pela variável x, como sendo a componente x do par ordenado escolhido.

Neste aspecto, concordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM (BRASIL, 2006, p.77), quando afirma que "é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria", pois muitos desses problemas não existiriam se os alunos fossem dotados de tal compreensão da articulação entre a álgebra e a geometria. É comum os alunos buscarem uma solução algebrista para os questionamentos, em detrimento ao geométrico.

Nos últimos anos, tenho observado nos livros didáticos um esforço pela contextualização de seus conteúdos, articulando a álgebra com a geometria e seus respectivos fatos históricos, porém há muito que ser melhorado ainda para que isso possa se refletir em uma mudança na sala de aula.

Observando muitas das tarefas propostas em sala aula, com relação às dificuldades apresentadas pelos alunos em compreender a proposta dos enunciados, até mesmo nos erros por eles cometidos, tem me levado a busca de novas práticas docente, bem como uma investigação mais profunda sobre o assunto, principalmente no que envolve a articulação geométrica e algébrica dos números complexos, pois tenho observado que os estudantes de 3ª série do Ensino Médio deveriam apresentar mais competência e habilidades sobre este assunto.

Em minha visão a apresentação do conteúdo dos números complexos, articulando a geometria com a álgebra é uma oportunidade ímpar de retomada de conceitos que deveriam ser perfeitamente dominados pelos estudantes e que muitos, no final do 3° ano do Ensino Médio, ainda não compreenderam. Lamentavelmente o tempo direcionado para o ensino desse conteúdo tão rico é ínfimo quando se comparado com as inúmeras possibilidades analíticas e aplicativas que ele oferece, pois este conteúdo permite a retomada de conteúdos abordados desde o Ensino Fundamental II, com aplicações nos campos da geometria, geometria analítica, matrizes, física (vetores), entre outros.

Diante disso, questionei se a utilização de um software matemático na prática docente trará maior interesse e aquisição de saberes aos educandos, no referido tema.

Na tentativa de encontrar soluções para o problema que envolve as dificuldades encontradas pelos alunos nas resoluções de tarefas, ingressei no curso de Mestrado em Matemática Pura, oferecido pela PUCSP (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo) em 1991, onde cursei algumas disciplinas.

Seguindo o conselho de um amigo na época, procurei a USP (Universidade de São Paulo) no intuito de dar continuidade ao mestrado naquela universidade. A porta foi aberta, porém nos foi exigido que fizéssemos primeiramente uma especialização ali mesmo, na USP, que segundo à coordenadora na época, a saudosa profa. Drª. Iracema, era necessário ter um nivelamento para conseguir acompanhar o curso com certa tranquilidade. Acatei a sugestão e iniciei a especialização na USP/SP, fazendo algumas disciplinas ao longo do ano 1992. Infelizmente no início de 1993, meu esposo foi transferido pela empresa, para trabalhar na cidade de Rio Claro, o que acabou por me dificultar os meus estudos naquele ano.

No ano de 1994, ingressei no mestrado da UNESP (Universidade do estado de São Paulo), na Cidade de Rio Claro, sem saber a surpresa que o futuro breve me preparava. Descobri logo no início do curso que estava grávida, mas para complicar a situação, meu esposo desenvolveu uma síndrome do pânico, depressão profunda, doenças essas que na época pouco conhecidas, com poucos recursos de tratamento, levando-o a problemas de saúde crônicos. Diante desse quadro, fui obrigada a deixar de lado meus objetivos de cursar um Mestrado.

Após o falecimento (2005) de meu esposo e ao alcançar o meu filho a idade adolescente (2009), sendo ele capaz de realizar muitas atividades de forma mais independente, retomei a minha busca pelo conhecimento e por soluções em relação às minhas angústias e inquietudes, frente à sala de aula, porém agora com uma experiência como educadora muito maior, diante de uma sociedade que passava e passa por transformações muito rápidas, onde novas angústias também passaram a me perturbar no que tange o processo ensino-aprendizagem.

Em 2010, realizei uma especialização em Educação Matemática pela UNIMEP (Universidade Metodista de Piracicaba) onde desenvolvi minha monografia sob o título “O excesso da tecnologia, o grande vilão do analfabetismo matemático da geração Z”. Neste trabalho, desenvolvi a pesquisa com alunos, traçando uma comparação entre o tempo que eles dedicavam aos estudos (no caso em questão: a matemática) e o tempo destinado por eles frente as mídias (TV, internet pelo computador ou pelo celular).

Na época, observamos que a maioria dos alunos chegavam para as aulas no período matutino, apresentando dois tipos de comportamento: ou dormiam na sala de aula, onde constatamos que estes ficavam até altas horas da madrugada na internet (salas de bate papo, redes sociais ou MSN), de forma que estavam com o cérebro cansado para aprender qualquer coisa e por isso a necessidade de dormir, ou passavam as aulas driblando os professores, com o objetivo de ficarem conectados de alguma forma, através de aparelhos celulares. Uma geração viciada em tecnologia.

Na verdade estamos até pensando em reaplicar essa pesquisa, pois percebemos que como passar do tempo, apesar de curto, houve um agravo em relação a esse fenômeno e que se reflete claramente na sala de aula. A ideia da reaplicação da pesquisa se dá pelo fato de que hoje, temos uma bagagem de conhecimento diferenciada, propiciando uma visão mais aprimorada sobre o assunto.

O comportamento dos alunos muito nos angustiava e ainda angustia, pois, por mais que nos esforçássemos para apresentar uma aula de qualidade, sempre parecia que algo estava faltando. Questionava se o problema estava em mim e que mudanças eu precisava realizar em minhas aulas, ou se o problema estava nos alunos.

Desde o início dos anos 90, ouve-se a fala de muitos, de que as aulas de matemática tornam-se mais interessante aos alunos, se utilizado algum software computacional como ferramenta de aprendizagem. Confesso que na época era bastante cética em relação ao uso do computador como ferramenta de ensino, devido a postura dos alunos (a maioria) em sala de aula.

Ao realizar essa especialização, meu propósito era justamente provar que a tecnologia estava na realidade fazendo o papel de vilã em relação a falta de saberes dos alunos, além de ser responsável pelo comportamento inadequado de muitos alunos frente às aulas de matemática, que exige que o aluno utilize o raciocínio para apreensão dos saberes. Apropriamos dos conhecimentos da Neurociência em relação à Educação para validar nosso trabalho.

A realização desse trabalho trouxe-me algumas constatações de fato, porém, depois de concluí-lo não me senti plenamente satisfeita, uma vez que não promoveu mudanças dos alunos na sala de aula. O incômodo continuou.

Logo, julguei por bem que era necessário buscar outra especialização, para entender como as ferramentas midiáticas poderiam se tornar minhas aliadas na sala de aula. Diante desse fato, ingressei no curso de especialização em “Metodologia para a Educação a Distância”, pelas Faculdades Anhanguera, uma vez que a geração de alunos que temos, podemos dizer que nasceram com a difusão das mídias e, não há como mudar isso, visto que aos nossos olhos essa geração chega mesmo a ser viciada em internet, por exemplo.

O que nos preocupa, é que a maioria de nossos alunos não utiliza a tecnologia como ferramenta para a busca do conhecimento, por isso diante desse fenômeno que vem ocorrendo e é mundial, julguei por bem que precisava saber como utilizar melhor as ferramentas tecnológicas, para orientar os alunos convertê-las em objeto para a aprendizagem.

Senti que era necessário entender como fazer então para trazer o computador como uma ferramenta saudável para a sala de aula? Esse era o meu dilema! O meu intuito era melhorar minha prática pedagógica e tentar compreender as dificuldades encontradas pelos alunos de forma a despertar neles o prazer pela busca de desafios e levá-los a reflexão. Esses componentes são necessários para o aprendizado da matemática.

De fato, essa segunda especialização me levou a refletir sob vários aspectos diferentes em relação à utilização da tecnologia nas aulas, que não só representa um avanço, mas é necessário, e mais do que isso, a tecnologia deve ser utilizada como um facilitador do processo ensino aprendizado.

Em meu trabalho, tracei uma comparação entre a educação presencial e a educação à distância, no ensino da matemática, mostrando os aspectos positivos e negativos nas duas modalidades, de onde conclui que a fusão das duas seria a ideal, pois ambas têm pontos positivos e pontos negativos. Portanto, se pudéssemos unir os pontos positivos de ambas, teríamos o que chamei de “ideal”.

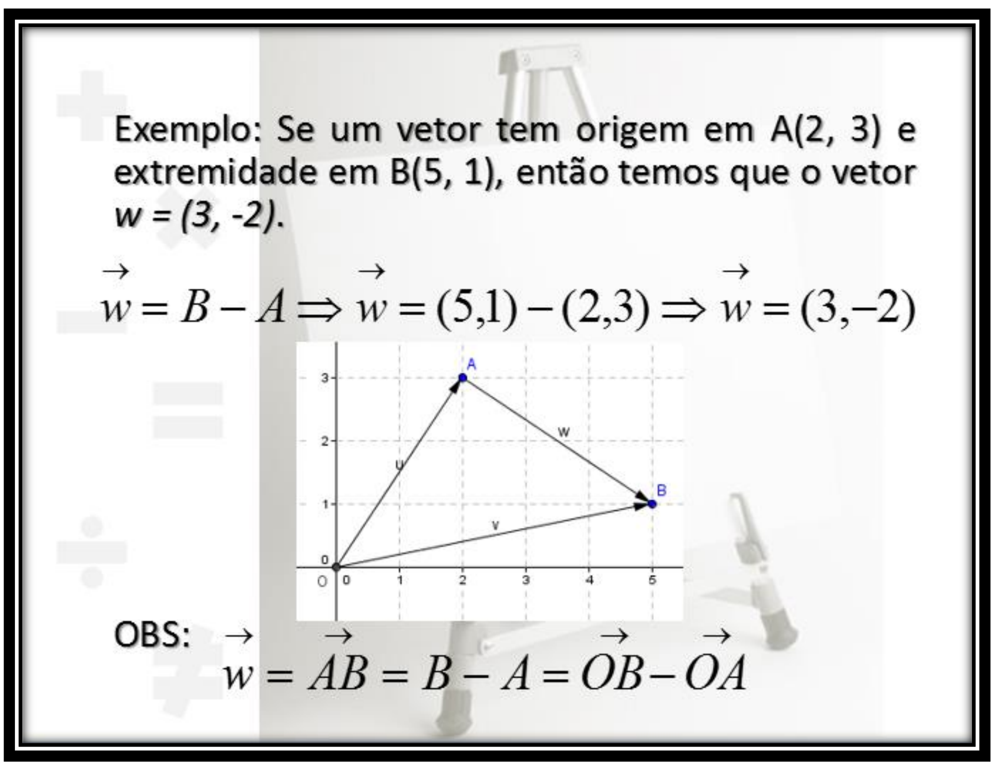
No entanto, apesar dessa especialização ter aberto minha mente em relação as inúmeras possibilidades oferecidas pelas tecnologias como aliado das aulas, ela ainda se tornou limitada pelo fato de que seu foco era o “Ensino a Distância”, ou seja, mais uma vez esbarrei em minha proposta de mudança da sala de aula, onde a aula para o meu caso, é presencial.

Diante disso, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), oferecido pela Universidade de São Carlos – Campus Sorocaba com o objetivo de buscar mais subsídios. Estou ainda em busca de soluções, mas já consigo perceber que algumas práticas inovadoras, podem sim trazer contribuições ao processo ensino-aprendizagem.

Em minha pesquisa, adotei trabalhar com a ferramenta Geogebra, pois tive a oportunidade de cursar a disciplina de Tecnologia da Informação para o Ensino de Ciências e Matemática sob a coordenação do Prof. Dr. Wladimir Seixas e do Prof. Dr. Paulo César Oliveira, e aprendi a manipular melhor essa ferramenta e a perceber que essa ferramenta oferece muitos recursos para o ensino. Em meu pouco conhecimento, antes de ingressar no mestrado, não via como esse software Geogebra poderia ser um recurso a facilitar as aulas sobre o estudo dos números complexos para os alunos do 3° ano do Ensino Médio. Pude verificar que essa ferramenta é muito rica e há um vasto campo a ser explorado, onde estou começando a caminhar.

Confesso que tive a oportunidade de utilizar essa ferramenta também, em minhas aulas de Álgebra Linear, para o curso de Engenharia de Produção do CEUNSP. As aulas se tornaram muito interessantes, pois pudemos fazer os alunos refletirem sobre alguns questionamentos, validando ou não as situações propostas, nas operações envolvendo os vetores. Na figura 9, temos cópia de um dos slides da aula de Álgebra Linear. Esclareço que executávamos o software Geogebra enquanto explicávamos o assunto em questão, conforme protocolo a seguir:

Figura 9: Slide da aula



Fonte: Material da Autora

Hoje visualizo que a ferramenta tecnológica pode ser uma grande aliada na sala de aula e no processo de ensino aprendizagem, desde que utilizada de forma correta e no caso da matemática, com a utilização de softwares adequados a cada situação de ensino.

2.3 – O porquê do tema escolhido

O tema foi escolhido com base na prática da sala de aula da autora e na sua busca incessante por ajudar os alunos na construção do conhecimento matemático. A importância desse estudo se dá visto que a matemática faz parte do cotidiano de cada um e a absorção e compreensão de conceitos básicos da matemática de forma intrínseca, é primordial para o desenvolvimento do raciocínio lógico humano, em todas as áreas.

A evolução da sociedade nas últimas décadas de forma vertiginosa é algo inegável e trouxe consigo ferramentas inovadoras para o ensino, cada vez mais sofisticadas. Diante desse fato, não há como a educação permanecer estagnada frente a uma sociedade que evolui rapidamente. Para tanto, os profissionais da área educacional devem estar abertos a inovar e buscar novas metodologias de ensino-aprendizagem, com a utilização dessas ferramentas como, por exemplo, o Geogebra para a matemática.

Sabe-se que o ensino da Matemática ocorre de uma forma diferenciada quando comparada a outras disciplinas como Física, Química e Biologia que são palpáveis e visuais os seus fenômenos, além de experimentáveis. A matemática praticada, muito embora parta de situações concretas, na maior parte tem os seus conceitos construídos na abstração, fazendo com que os alunos muitas vezes cheguem a conclusões errôneas ou nem consigam concluir os conceitos. Para que o aluno construa uma conclusão correta é necessário que o mesmo compreenda toda a dimensão da abstração apresentada, e para tanto se faz necessário à construção da abstração a partir do concreto, do palpável. Logo, o tempo dedicado ao estudo é necessário para a articulação da construção dos conteúdos, partindo do concreto e fazendo que o educando consiga absorver os conceitos abstratos de forma correta.

Para Duval (2012, p. 309):

> Na matemática, mais que em todas as outras disciplinas, é necessário compreender para poder aprender. Somente se pode aprender matemática e concluir as atividades propostas se compreendermos não somente as instruções e os enunciados de um problema, mas também aquilo que se pode fazer para buscar resolvê-lo e por que aquilo que se encontra está certo ou errado. (...) Esta exigência constante de compreensão coloca o ensino da matemática em uma situação muito particular em relação a todos os outros ensinos e aponta a uma primeira pergunta sobre aquilo que se entende por “compreender”.

Ao visualizar os conteúdos do Ensino Médio elencados para a disciplina de Matemática, observa-se claramente que o tempo do professor junto aos seus alunos é muito pouco frente à necessidade dos assuntos a serem abordados em cada uma das séries deste segmento escolar. Além do mais, os conteúdos se articulam entre si, porém com abordagens diferenciadas. Para tanto, seria necessário o professor disponibilizar de muito mais tempo junto aos seus alunos para que esses pudessem compreender as diferentes formas representativas da mesma situação. Há que se entender também, que cada estudante é único e cada qual tem o seu tempo de absorção da informação.

É nesse ponto que o uso do computador em sala de aula transforma-se num grande aliado, permitindo ao professor articular novas metodologias com recursos tecnológicos educacionais que ao mesmo tempo possibilitam uma maior motivação e interação entre os educandos, além de propiciar mais tempo ao professor para o tratamento do conteúdo em questão.

Ao pensar na importância da utilização do computador como um aliado na construção de um número complexo a partir do par ordenado transpondo para sua forma vetorial geométrica e articulando com sua forma trigonométrica, isso se pode fazer em um tempo muito rápido, além de permitir ao aluno a possibilidade de testar vários elementos do conjunto universo utilizado no estudo, podendo tirar conclusões e conceituar de uma forma mais rápida, pois se parte do concreto para o abstrato. Tal procedimento quando realizado com lápis e papel, muitas vezes torna-se inviável pelo tempo dispensado na construção, além da dificuldade da realização da tarefa.

Parto do pressuposto que um dos fatores que tem levado a desmotivação de aprender a matemática, os alunos do Ensino Fundamental II, Ensino Médio e posteriormente também no Ensino Superior está relacionado com a forma como lhes são apresentados os conceitos da matemática, onde métodos que privilegiam a representação algébrica do conteúdo estudado, contemplam a memorização do saber aplicar os procedimentos corretos para obter o resultado final, ou seja, operar algebricamente, em detrimento do raciocínio lógico utilizado na resolução da questão.

Quando o aluno tem a oportunidade de fazer a dedução lógica do raciocínio da situação problema proposta, provavelmente conseguirá articular os conceitos apreendidos com aplicação em outras tarefas, sem a utilização de fórmulas mecanizadas.

De acordo com Borba e Penteado (2003, p.31), "usualmente, a ênfase para o ensino de funções se dá via álgebra. Assim, é comum encontrarmos em livros didáticos um grande destaque para a expressão analítica de uma função e quase nada para os aspectos gráficos e tabulares". É notório que os livros didáticos de matemática possuem uma linguagem bastante algébrica. Nos últimos anos uma mudança tem sido observada nos livros didáticos, onde os autores têm buscado dar um enfoque mais amplo, com uma visão mais generalizada sobre os assuntos abordados. No entanto, de nada adianta uma mudança no enfoque didático se não houver uma mudança na sala de aula sobre a forma de abordagem do assunto. Dessa forma faz-se necessário que os professores busquem novas formas de abordagem dos conteúdos, apresentando outras possibilidades de compreensão sobre o mesmo assunto.

Por outro lado, simplesmente acreditar que a inserção de ferramentas tecnológicas na sala de aula é suficiente por si só para que o aprendizado ocorra, é utópico. É necessário que a utilização dos recursos tecnológicos seja feita com qualidade e articulando sua utilização ao material didático, bem como a proposta pedagógica.

Segundo Francisco (2002, p.179), em todo o planeta está ocorrendo transformações que vão "muito além de uma simples mudança de tecnologia e de comunicação e informação". A didática do ensino da matemática deve ter sua metodologia aprimorada frente às novas tecnologias, tanto no Ensino Médio como no Ensino Fundamental, porém temos que ter o cuidado de observar que nem tudo o que é velho é ruim e nem tudo o que é novo é bom. É necessário se ter bom senso na articulação de novas práticas de ensino, novos métodos e aplicação das novas teorias que tem surgido, com relação ao ensino da matemática. Não adianta a mudança de paradigma, ou qualquer outro método de ensino, se o aluno não *aprendeu a aprender*. Esse é o grande desafio do profissional da educação da matemática.

Deve-se então analisar qual seria a melhor aula, já que muito se fala que a aula presencial no Ensino Público hoje, deixa a desejar pela falta do aparato tecnológico, ou porque os educadores não estão preparados para utilizar essas tecnologias como ferramenta de ensino, e que elas deveriam estar presentes frente a uma clientela acostumada com o mundo virtual. Será isso verdade? Pode a tecnologia atrelada à sala de aula mudar a postura dos alunos e, sobretudo, a construção de seus saberes? Pelo presente estudo, ampliando conhecimentos anteriormente adquiridos através das especializações realizadas e já comentadas anteriormente, tudo leva a crer que sim, desde que a tecnologia seja usada de forma qualitativa, ou seja, como uma ferramenta, tal qual, o lápis e o papel. Essa é a nossa expectativa.

Outro aspecto que é preciso ser observado é de que a tecnologia não consegue substituir o papel do professor como mediador do processo ensino-aprendizagem, pois por melhor que sejam as ferramentas tecnológicas, elas ainda possuem limitações para serem utilizadas em certos conteúdos e principalmente na construção de seus conceitos e da abstração desses.

2.4 – Justificativa: Focando o problema do Ensino/Aprendizagem

No ensino da matemática, deve-se notar o papel do professor como mediador do conhecimento a ser transmitido/adquirido. A aprendizagem não deve ser mecanizada, mas deve promover uma reflexão sobre o que se está aprendendo. Nesse aspecto, o papel do professor enquanto mediador da construção do conhecimento assume um papel fundamental. O que vale ressaltar nesse ponto ainda é que, o educando tem a intervenção do professor de forma imediata. O papel do professor então deve ser não o de dar respostas prontas, mas, o de conduzir o aluno a uma investigação lógica, fazendo-o raciocinar sobre o assunto em questão.

Outro aspecto que também deve ser salientado sobre o papel do professor, é quanto a sua didática de ensino e prática pedagógica que deve ser constantemente aprimorada, para despertar a atenção dos alunos e motivá-los à participação das atividades propostas, na construção do conhecimento.

Os bloqueios na construção dos conceitos da matemática por muitos alunos, somatizam-se com os sentimentos negativos desenvolvidos pelos mesmos e trazem consigo um sentimento ainda maior, o fracasso. Como a matemática se apresenta de uma forma de difícil compreensão e pouca utilidade para muitos, isso influencia diretamente na aprendizagem. Segundo Vitti (1999, p. 19):

> O fracasso do ensino de matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é um fato novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para que o ensino da matemática seja assinalado mais por fracassos do que por sucessos.

Em entrevista cedida a Arbex (2009), Charlot comenta que o “fracasso escolar” dos alunos é algo que não existe, mas o que existem sim são alunos que se encontram em situações de fracasso escolar, porém, não se pode atribuir esse fracasso meramente ao professor ou a modalidade de ensino dentro da Escola Pública, onde a ferramenta disponível em muitas Unidades Escolares é somente lousa e giz, pois o problema envolve outras dimensões. Apropriando-se da fala de Bernard Charlot pode-se concluir que não existe fracasso do ensino da matemática, mas o que existe são alunos que se encontram em situações de fracasso em relação à matemática. Vale salientar que muitas das dificuldades dos alunos, estão na falta de compreensão textual e como a matemática tem uma linguagem própria, além do mais, para se compreender um conceito, muitas vezes se depende de outro conceito que se não foi devidamente compreendido, não será possível compreender um novo conceito, com isso aumenta a dimensão do problema.

Para Lima e Borges (2008, p. 378):

> Uma das maiores dificuldades enfrentadas no aprendizado de matemática consiste em compreender a linguagem ou a simbologia utilizada nessa área de conhecimento. Ler e interpretar, não apenas problemas, mas também situações representadas por meio de símbolos, gráficos, equações, expressões numéricas ou algébricas. Conhecer e saber utilizar a linguagem matemática torna-se um desafio para os estudantes e professores.
> A fim de reverter essa visão que muitos alunos têm em relação à matemática, propõe-se a utilização de métodos didáticos que

> desenvolvam habilidades de leitura e escrita da linguagem matemática, tendo em vista que a capacidade de ler, escrever e comentar demonstra a compreensão do sujeito acerca de determinado assunto.

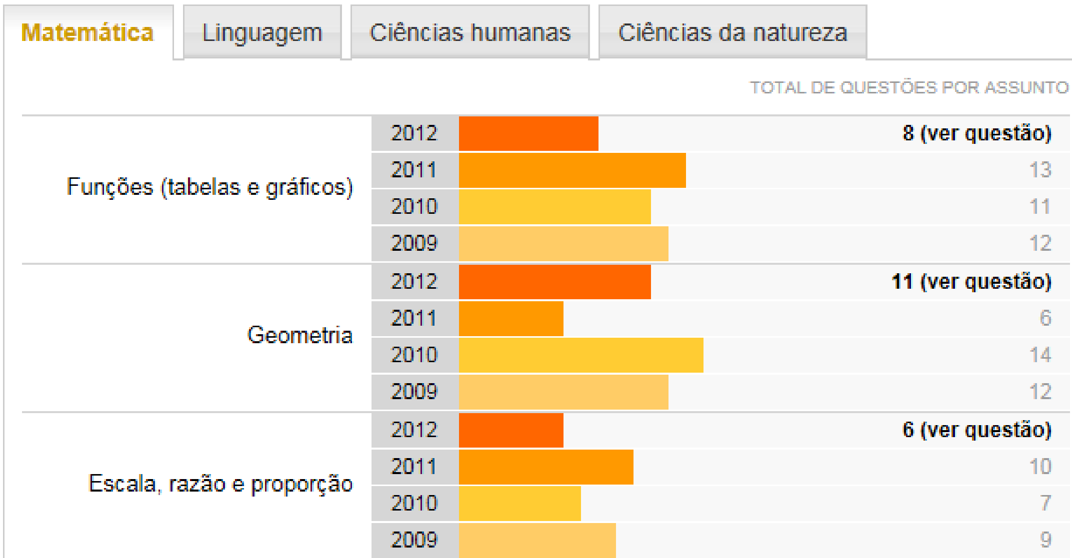
As capacidades de leitura e escrita são fundamentais para a compreensão dos conteúdos abordados e se articula intimamente com a comunicação correta e bem sucedida dos conceitos ou ideias abordadas. Fica claro que para Lima e Borges a problemática em relação ao aprendizado de muitos educandos está relacionada, segundo Duval, aos Registros de Representação Semiótica.

Podemos ter um vislumbre da dimensão dessa problemática quando olhamos para as avaliações nacionais, tais como as avaliações do ENEM dos últimos anos. O ENEM que foi criado em 1998 em seu primeiro padrão e contava com 63 questões interdisciplinares, cujos conteúdos cobrados, nem sempre estavam relacionados com os conteúdos ministrados no Ensino Médio. Além disso, nos moldes do qual as avaliações eram formuladas, não era possível fazer traçar um perfil comparando as notas e o desempenho dos alunos.

A partir de 2009, mudanças ocorreram no ENEM, tais como as provas atuais constam de 45 questões para cada grupo de provas que privilegia as quatro áreas do conhecimento: linguagens, códigos e suas tecnologias (incluindo redação); ciências humanas e suas tecnologias; ciências da natureza e suas tecnologias e matemática e suas tecnologias. Segundo o INEP, “com o novo ENEM, o MEC busca reformular o currículo do ensino médio e mudar o acúmulo excessivo de conteúdos, hoje cobrado nos vestibulares”. (BRASIL, 2009)

A partir dessas mudanças ocorridas no novo ENEM, verificamos uma grande cobrança nos conteúdos do Ensino Médio: Funções (tabelas e gráficos), Geometria, Escala, Razão e Proporção. De acordo com dados divulgados no site da Revista VEJA Online, (06/05/12 – ENEM e Vestibulares) observa-se a informação comparativa para esses conteúdos, conforme quadro 1. Em 2009, de acordo com o INEP, 57,7% dos alunos inscritos para a realização do ENEM, não atingiram a nota média (500) em matemática e somente 0,7% atingiram nota maior que 800.

Quadro 1: Conteúdos mais relevantes abordados no ENEM



Fonte: Revista Veja, 03 Mar.2014

Uma comparação entre os resultados do biênio 2011 e 2012, foi também divulgado no site da g1.globo.com online (28/12/2012 – Educação/ENEM 2012), com base na fonte do INEP, onde se destaca no quadro uma queda acentuada na nota mínima obtida na matemática e suas tecnologias, caindo de 321,6 em 2011 para 277,2 em 2012. (*Veja quadro 2 abaixo).*

Quadro 2: Escala de notas do ENEM 2012

	Mínimo	Máximo
Ciências Humanas e suas tecnologias	295,6	874,9
Ciências da Natureza e suas tecnologias	303,1	864,9
Linguagens e códigos e suas tecnologias	295,2	817,9
Matemática e suas tecnologias	277,2	955,2

Fonte: Portal do Inep – Questões são Calculadas pela TRI, 22 Nov.2014

De acordo com o site do INEP (17/01/2012), “para alunos convencionais que entregaram a prova em branco, as menores notas são: 304,2 (inglês) ou 301,2 (espanhol) em linguagens; 321,6 em matemática, 252,9 em ciências humanas e 269,0 em ciências da natureza”.

No início desse ano (2014), novas informações vieram à tona, com a divulgação das notas do ENEM de 2013, onde ocorreu um leve aumento nas notas, em relação ao ano anterior. Pode-se confirmar a informação no quadro 3 abaixo, conforme informações divulgadas pelo G1.globo.com.online (22/01/2014 – Educação/ENEM/2013)

Quadro 3: Escalas de notas do Enem - biênio 2012/2013

EVOLUÇÃO DAS NOTAS MÁXIMAS E MÍNIMAS DO ENEM				
	ENEM 2012		**ENEM 2013**	
	MÍNIMA	**MÁXIMA**	**MÍNIMA**	**MÁXIMA**
Ciências humanas	295,6	874,9	**299,5**	**888,7**
Ciências da natureza	303,1	864,9	**311,5**	**901,3**
Linguagens	295,2	817,9	**261,3**	**813,3**
Matemática	277,2	955,2	**322,4**	**971,5**
Redação*	0	1.000	0	1.000
Fonte: Inep/MEC *A redação não usa a metodologia TRI: a nota final é composta de cinco notas de 0 a 200 pontos, definidas em intervalos de 40 pontos de acordo com o domínio das cinco competências avaliadas pelo Enem				

Fonte: G1 Globo Educação, 11 Mar.2014

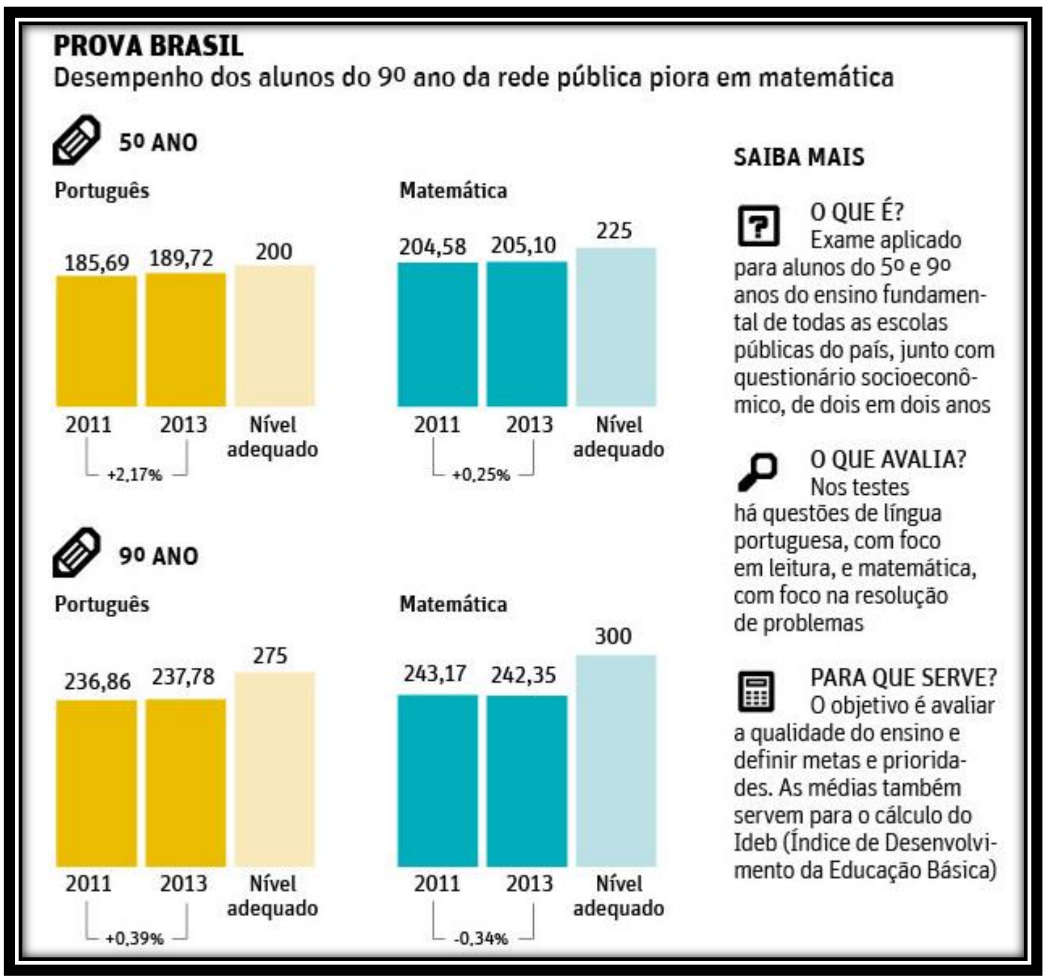
Segundo a Revista Veja Online (17/01/14, INEP divulga notas máxima e mínima do Enem 2013) “em matemática e suas tecnologias a nota máxima foi de 971,5. Nesta área, o menor desempenho foi de 322,4 pontos. Ciências da Natureza registrou a nota máxima de 901,3 e a menor foi de 311,5. Já em Ciências Humanas, o desempenho máximo chegou a 888,7 e o mínimo ficou em 299,5. A prova de Linguagens e Códigos teve como nota mais alta 813,3 pontos e a menor pontuação ficou em 261,3”.

Quando se analisa os resultados da Prova Brasil dos últimos anos, disponível no Portal Brasil, nota-se que de 1995 até 2005 houve uma diminuição do conhecimento matemático, variando do nível de proficiência 280 em 1995 para 270 em 2005 (nível Brasil – Escolas Urbanas). O decréscimo é ainda maior quando tomamos em comparação o nível de proficiência do Estado de São Paulo de 1995 para 2005, caindo de 290 para 272.

Em 2011 o nível de proficiência atingiu 273 no Brasil contra 283 no Estado de São Paulo, de acordo com as fontes do INEP. O que se observa é que os alunos na sua grande maioria possuem um nível de conhecimento e amadurecimento conceitual, muito abaixo do esperado.

O Jornal O Estado de São Paulo, divulgou no dia 29/11/2014, novas informações sobre os resultados da Prova Brasil realizada em 2013, cujos resultados são ainda piores quando comparado com os resultados de 2011, conforme quadro divulgado nesse jornal:

Quadro 4: Prova Brasil - comparativo 2011/2013



Fonte: Folha Uol Educação, 29 Nov.2014

O reflexo desses resultados já se tem sido sentido tanto nas salas de aulas do ensino médio, bem como do ensino superior, onde os alunos chegam sem dominar conteúdos básicos como produtos notáveis ou potenciação, por exemplo.

Diante desse quadro, não há como fechar os olhos e acreditar que tudo por si só irá se resolver. É preciso que o educador atualize suas práticas pedagógicas, aprimorando seus conhecimentos e técnicas metodológicas para atingir seus objetivos profissionais, o de ensinar.

Por outro lado, ao observarmos as avaliações do ENEM dos últimos anos (a partir de 2009, visto a mudança ocorrida), onde verificamos uma grande cobrança nos conteúdos do Ensino Médio: Funções (tabelas e gráficos), Geometria, Escala, Razão e Proporção, em total detrimento aos números complexos, que foi totalmente descartado, como se as funções polinomiais produzissem todas elas, soluções restritas ao campo dos números reais. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2000), é mencionado o estudo da álgebra, trigonometria, da geometria, porém não faz qualquer menção sobre o conteúdo dos números complexos.

2.5 - Objetivo Central da Pesquisa

Esta pesquisa tem como objetivo tratar dos números complexos articulando com a sua representação geométrica, ou seja, a partir da expressão algébrica e/ou sua representação como par ordenado, obter a representação gráfica e vice versa, além de poder obter sua representação trigonométrica também e vice versa. A ideia principal é geometrizar o conteúdo, de forma que se torne visual ao aluno e com a utilização do software dinâmico, tornar o estudo mais interessante e motivador. A elaboração das tarefas investigatórias deverá levar ao discente a abrir sua visão sobre as diferentes representações semióticas. Esclarecemos ao leitor que este trabalho não se pautou na criação de uma sequência didática, mas sim na utilização do software Geogebra articulado com o caderno do aluno (SÃO PAULO, 2014)

Esperamos com essa pesquisa, a partir dos pressupostos das situações vivenciadas na pesquisa e das conclusões obtidas, confirmar que com a contextualização geométrica, articulada com software Geogebra, proporcione não somente um foco motivador ao estudo, tornando-o mais fácil de ser estudado, bem como a valorização desse conteúdo.

O objetivo geral da pesquisa tem implícito algumas especificidades, as quais entendemos como objetivos secundários. Tais objetivos envolvem as competências e habilidades que desejamos desenvolver nos alunos, baseada no Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) e no PCNEM (BRASIL, 2000, p.46):

> Formular hipóteses e prever resultados, ler, interpretar e utilizar representações matemáticas; Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa; Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta; Produzir textos matemáticos adequados; Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação; Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc); Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; Formular hipóteses e prever resultados; Selecionar estratégias de resolução de problemas; Interpretar e criticar resultados numa situação concreta; Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos. Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho. Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

3 - PERCURSO TEÓRICO DA INVESTIGAÇÃO

3.1 – Números Complexos via Registros de Representações Semióticas

A matemática é permeada pela multiplicidade de representações, seja pela escrita na língua natural, linguagem algébrica, gráfico, entre outras. As representações de natureza semiótica permitem o acesso ao objeto matemático que, na sua essência é abstrato. Este fato é um marco da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

A natureza semiótica deve-se ao fato de que a aprendizagem frente aos objetos matemáticos ocorre na forma conceptual. Neste sentido, Duval (2003, 2009, 2012) estuda o funcionamento cognitivo do aluno na realização de tarefas matemáticas e seus possíveis problemas de aprendizagem.

Para Duval (2009), a distinção entre objeto e representação é fundamental para a compreensão matemática. O alerta para que não haja confusão na relação objeto – representação deve-se ao fato de que diversas representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático.

No caso do nosso objeto matemático número complexo, podemos representá-lo a partir do registro algébrico (z = a+bi, com “a” e “b” elementos reais), registro na forma trigonométrica, representação gráfica, entre outras.

A possibilidade de se representar um determinado objeto matemático através de pelo menos dois destes registros de representação, torna mais viável a compreensão em matemática, ou mesmo a capacidade de trocar a todo instante de registro de representação. Há dois tipos de transformações dos registros semióticos: os tratamentos e as conversões.

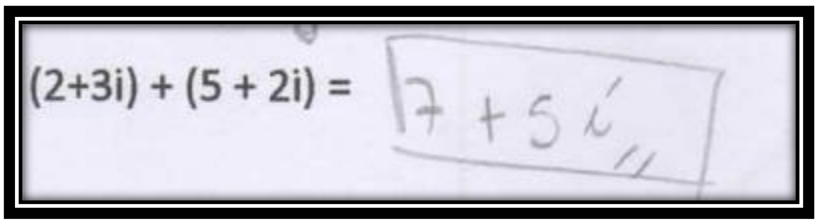
Com relação à transformação de tratamento, Duval (2009, p.56) afirma:

> Um **tratamento** é a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação, considerada como terminal em relação a uma questão, a um problema ou uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformações efetuadas. Um tratamento é uma **transformação**

> **de representação interna a um registro** de representação ou a um sistema.

Em outras palavras, quando se faz operações algébricas envolvendo os números complexos estamos realizando uma transformação de tratamento, devido ao fato de que o resultado da operação também é um número complexo (propriedade do fechamento). Um exemplo disso pode ser observado na figura 10:

Figura 10: Resposta de aluno do 3° ano do ensino médio

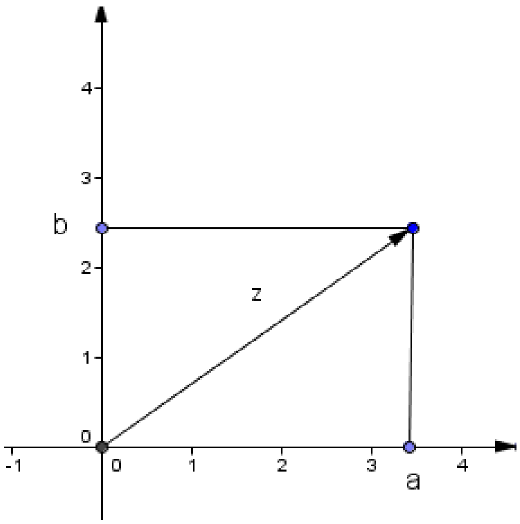


Fonte: Material da Autora

Já com relação à transformação por conversão, Duval (2009, p. 58) explica que:

> Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro. As operações que designamos habitualmente pelos termos “tradução”, “ilustração”, “transposição”, “interpretação”,” codificação”, etc., são operações que a uma representação de registro dado, fazem corresponder uma outra representação num registro. A conversão é uma **transformação externa em relação ao registro da representação de partida**.

Ao correspondermos o registro gráfico do número complexo com suas respectivas relações trigonométricas estamos mobilizando diferentes formas de registro (conversão) para um mesmo objeto, dentro de um único sistema semiótico:

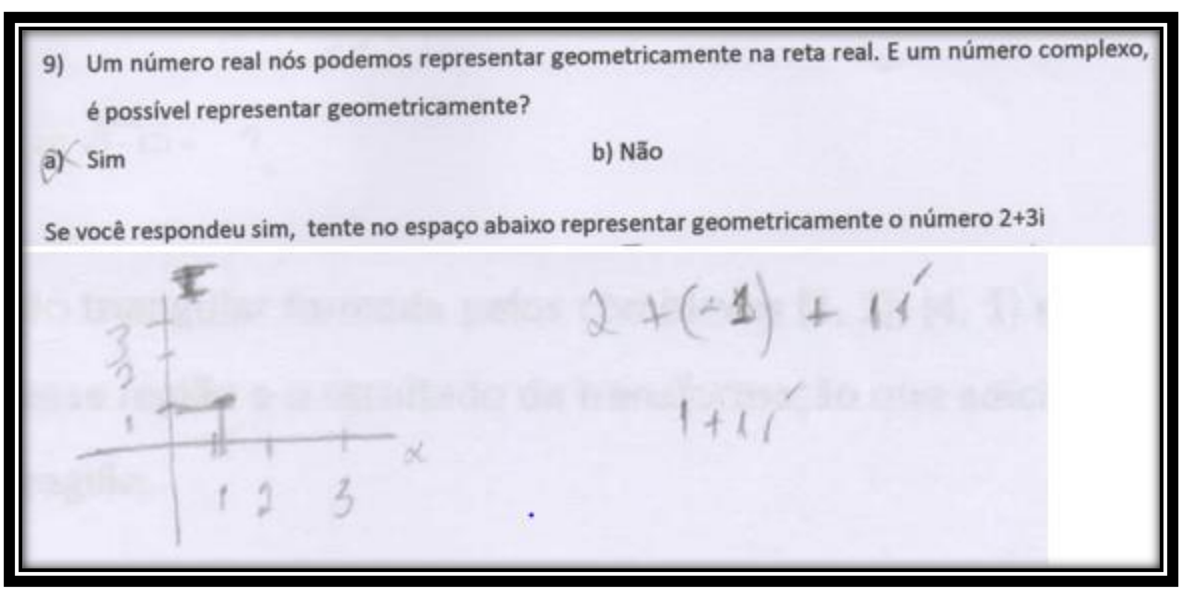


$$sen\,\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot sen\,\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos\theta$$

Duval ainda explica que é necessário saber distinguir entre o "sentido e a referência dos signos, ou entre o conteúdo de uma representação e aquilo que ela representa". (2009, p.59). Para o autor, se o aluno não conseguir perceber essa diferença, a transformação por meio da conversão, se torna impossível ou incompreensível. Um exemplo claro disso que vivenciamos em nossa pesquisa, pode ser observado no protocolo a seguir:

Figura 11: Resposta de aluno do 3° ano do ensino médio


9) Um número real nós podemos representar geometricamente na reta real. E um número complexo, é possível representar geometricamente?

a) Sim b) Não

Se você respondeu sim, tente no espaço abaixo representar geometricamente o número 2+3i

Fonte: Material da Autora

No conteúdo desta figura, observamos que o aluno não desenvolveu a transformação da conversão do número complexo para sua forma geométrica.

O que se percebe é que o aluno em questão apresenta outras dificuldades que vão além da simples dificuldade de transitar pelas representações semióticas. É visível que esse aluno não consegue nem mesmo operar adequadamente com outros conteúdos da matemática, pois é evidente que ele não possui "alfabetização matemática". De acordo com Duval (2012, p.307):

> Isto fez surgir a urgência de uma questão que, até este momento, não existia nesta escala demográfica e sob a pressão cultural de uma "alfabetização matemática": porque a matemática provoca dificuldades de aprendizado que não são encontradas em outras disciplinas e por que estas dificuldades se mostram insuperáveis para muitos alunos? Esta questão das dificuldades específicas no aprendizado da matemática constitui, evidentemente, o maior desafio do professor. Ela se encontra em todos os níveis do currículo. Respondê-la é o maior objetivo das pesquisas sobre o ensino, uma vez que ela se relaciona com a compreensão e com a capacidade de utilização da matemática pelos alunos.

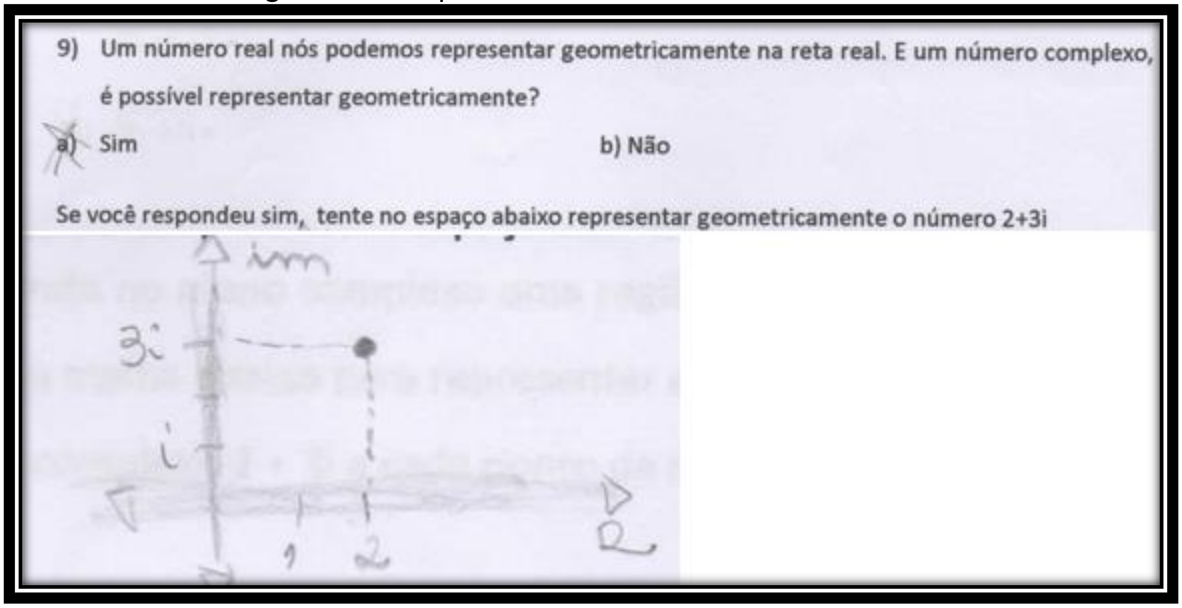
Um outro aspecto também importante que deve ser observado em relação a certos tipos de dificuldade apresentadas por alunos em transitar pelos registros semióticos, não impede que ocorra certa compreensão. Duval (2012, p. 283) afirma que:

> Naturalmente, a ausência de coordenação não impede toda compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações aonde deveriam realmente ser utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do "sentido" daquilo que é feito.

Segundo Duval (2012, p. 283), "quando há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, a conversão é trivial e poderia quase ser considerada, intuitivamente, como um simples código". Neste último protocolo, esperava-se que o aluno não apresentasse dificuldade na conversão do registro algébrico para o geométrico, devido ao fenômeno da congruência.

No próximo protocolo (figura 12), outro aluno (3ª série do Ensino Médio), não teve dificuldade em realizar parte da tarefa proposta:

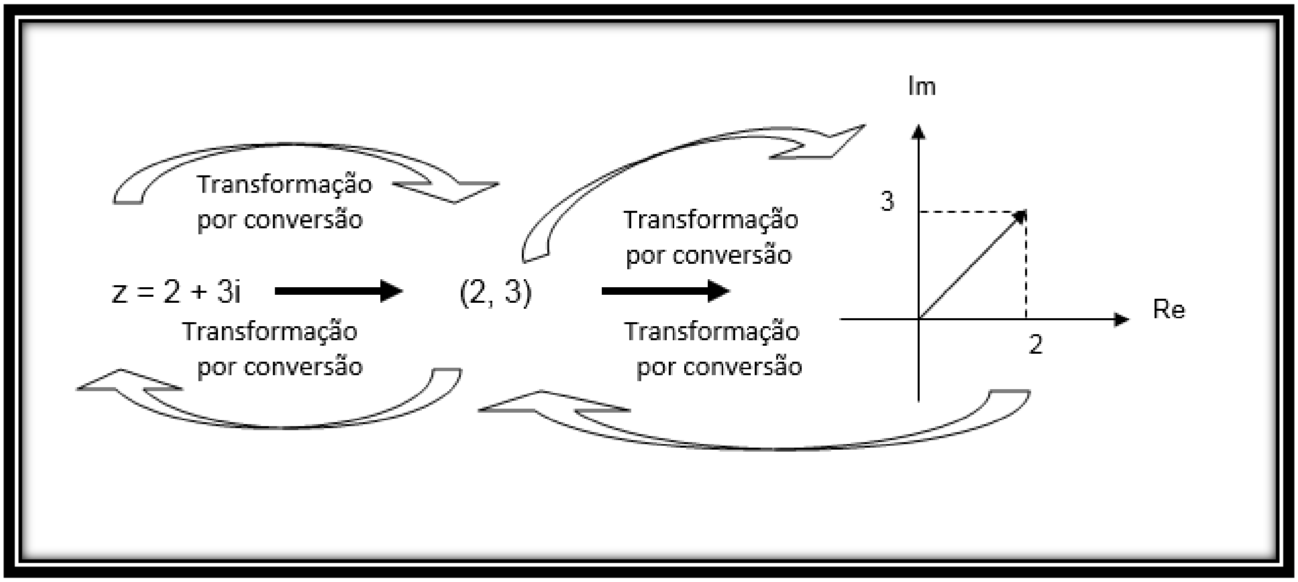
Figura 12: Resposta de aluno 3° ano do ensino médio



Fonte: Material da Autora

O que se percebe, que no caso de haver a congruência, a conversão da representação do número complexo na forma algébrica para a sua forma vetorial (par ordenado) e este por sua vez, para a forma geométrica (ou gráfica) ocorre de forma natural. Percebe-se que neste o caso acima, o aluno fez a representação do vetor no sistema Argand Gauss, ou seja, ele tem a percepção da conversão, porém não completa a conversão.

Quadro 5: Esquema Semiótico



Fonte: Material da Autora

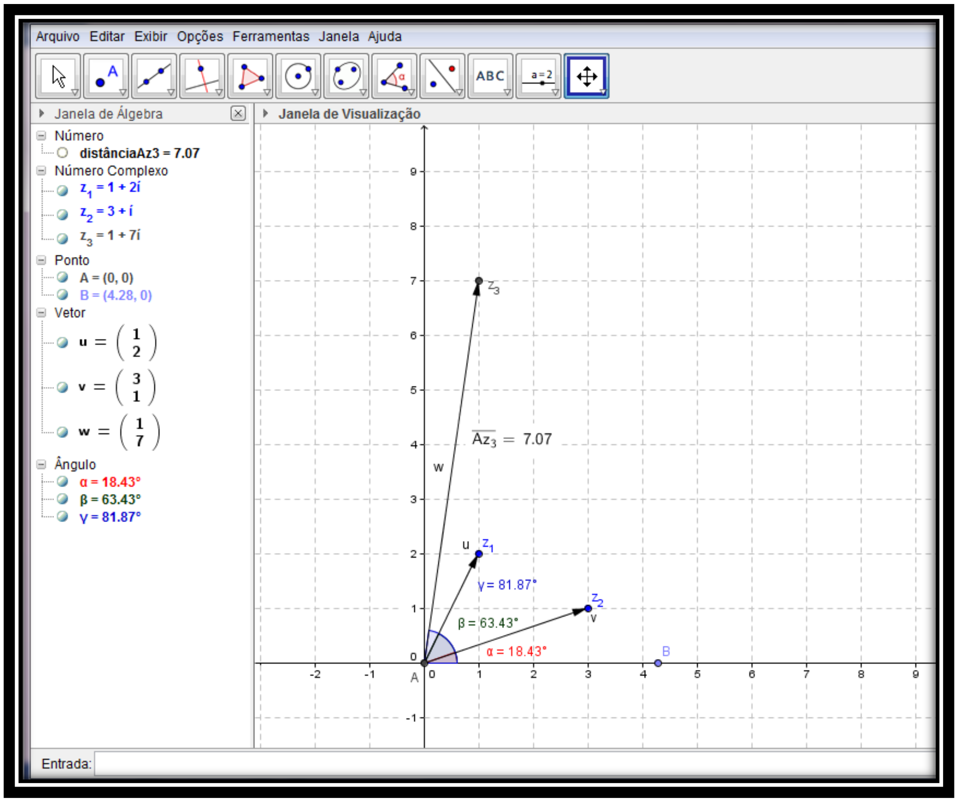
No caso dessa tarefa proposta, mesmo que solicitássemos que o aluno trabalhasse com o processo inverso, ou seja, a partir do gráfico para a representação na forma algébrica do número complexo, devido haver congruência na conversão, o processo seria trivial.

No entanto, nem sempre o processo da conversão é congruente. De acordo com Duval (2012, p. 284) “quando não há congruência, não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente”.

Isso ficou muito evidente na aplicação da pesquisa. Observamos que a conversão da língua natural nas tarefas propostas, para a linguagem computacional (Geogebra), aconteceu de forma tranquila, pois havia congruência no fenômeno de conversão, porém o mesmo não ocorreu no inverso da situação. A conversão da linguagem computacional para a língua natural não é congruente.

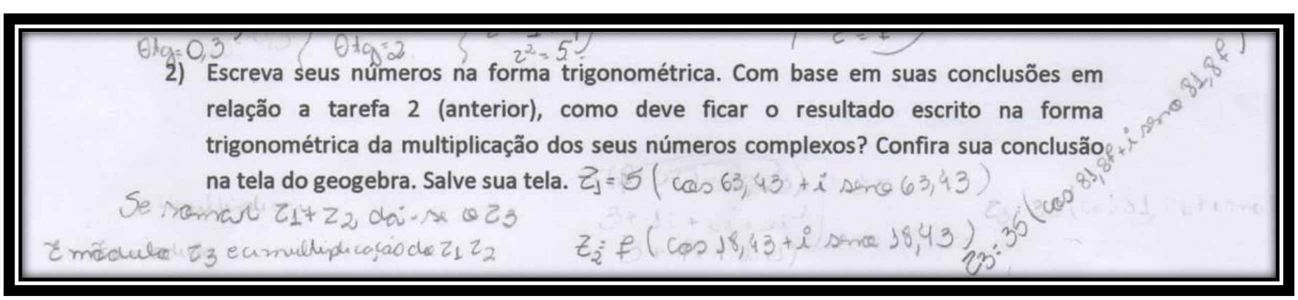
Foi solicitado aos alunos que após validar as operações no Geogebra, os mesmos explicassem quais eram as conclusões que eles chegaram sobre cada situação proposta. A grande maioria teve dificuldade de informar de forma correta, dentro da linguagem culta da matemática, quais foram suas percepções e conclusões. Apresentamos dois protocolos (figuras 13 e 14), nos quais uma mesma aluna opera corretamente no Geogebra, porém, comete erros ao converter o registro geométrico para o registro na língua natural e/ou algébrico:

Figura 13: Atividade da aluna G – Geogebra



Fonte: Material da Autora

Figura 14 A: Atividade da aluna G - escrita



θtg = 0,3 θtg = 2 $z^2 = 5$

2) Escreva seus números na forma trigonométrica. Com base em suas conclusões em relação a tarefa 2 (anterior), como deve ficar o resultado escrito na forma trigonométrica da multiplicação dos seus números complexos? Confira sua conclusão na tela do geogebra. Salve sua tela. $z_1 = 5\,(\cos 63,43 + i \,\text{sen}\, 63,43)$

Se somar $z_1 + z_2$ dá-se o z_3

É módulo z_3 e a multiplicação de $z_1\, z_2$

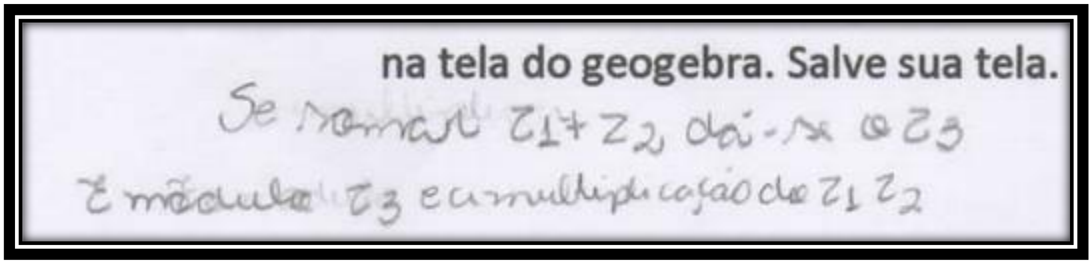
$z_2 = \mathit{f}\,(\cos 18,43 + i \,\text{sen}\, 18,43)$

$z_3 = 35\,(\cos 81,8f + i \,\text{sen}\, 81,8f)$

Fonte: Material da Autora

Fazendo uma ampliação na resposta da aluna, para que possa ser melhor visualizado temos:

Figura 14 B: Atividade aluna G - escrita



Fonte: Material da Autora

Observamos que a aluna tenta informar que a adição do ângulo do número complexo z_1 com o número complexo z_2, corresponde ao ângulo do número complexo z_3. No caso do módulo do número complexo z_3, corresponde a operação de multiplicação entre os módulos dos números complexos z_1 e z_2. É evidente que ela não consegue fazer a conversão da forma gráfica computacional (Geogebra), para a forma da língua natural, onde envolve signos matemáticos. Tal conversão não é congruente.

Segundo Duval (2009), quando se observa os problemas inerentes da matemática em relação ao aprendizado é notório que um entrave na vida de muitos estudantes está na diversidade de representações semióticas e principalmente quando advindos dos fenômenos de não-congruência como resultado de conversão das representações. Este ainda conclui que: “Não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação”. Duval (2009, p.29). Em outras palavras, as representações semióticas são a própria essência da matemática, tudo na matemática são representações semióticas. Nenhuma ciência tem tamanha afinidade com a semiótica, como a matemática.

Devido essa diversidade de representação semiótica de um número complexo, é preciso saber coordenar essas diferenças, pois isso é condição necessária para a compreensão do que se está buscando aprender. De acordo com Duval (2009, p.82),

> é preciso que um sujeito seja capaz de atingir o estado da coordenação de representações semioticamente heterogêneas, para que ele possa discriminar o representante e o representado, ou a representação e o conteúdo conceitual que essa representação exprime, instancia ou ilustra.

É certo que alguns registros possuem um tratamento mais simples do que outros, porém se não forem plenamente compreendidos, perdem seus sentidos. Ao se trabalhar com os números complexos, não se pode limitar a operar com registros cujas transformações se limitem ao do tratamento ou das conversões mais simples, pois o estudo perderia o sentido, além de criar a visão de que o estudo dos números complexos é algo inútil, pois não existe aplicação.

Para Duval (2012, p. 270),

> No entanto, é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. E, independentemente de toda comodidade de tratamento, o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações. A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado.

O que se espera dos estudantes ao final do Ensino Médio, que ao longo de seus onze anos de estudo, estes tenham adquirido competências e habilidades para articular com as diferentes representações semióticas dentro de suas especificidades, ou seja, a diversidade de registros na forma algébrica, linguagem natural, gráficos, entre outros, bem como mobilizar as transformações necessárias entre os registros.

No próximo item vamos dedicar a análise do que é proposto, em termos de aprendizagem dos números complexos nos documentos curriculares vigentes, assim como as potencialidades e limitações do Geogebra no estudo deste conteúdo.

3.2 – O Tratamento dos Números Complexos via Documentos Curriculares e a Utilização do Software Geogebra como Recurso Didático

Um grande avanço para a matemática surgiu quando René de Descartes, propôs o seu trabalho que ganhou destaque ao sugerir a articulação da álgebra com a geometria, através da representação gráfica, o que permitiu não só o desenvolvimento da geometria analítica, o sistema de coordenadas, mas abriu espaço para uma melhor compreensão e visualização através da representação geométrica, os números complexos.

Sabemos que a história dos números complexos aconteceu ao longo de muitas décadas, sendo que a referência mais antiga que se tem conhecimento em relação às raízes de números negativos, pode ter ocorrido no século I d.C., em um trabalho do matemático grego e também inventor Heron de Alexandria. Porém a utilização dos números complexos se tornou mais evidente, a partir do século XVI, em fórmulas para resolução de funções do terceiro e quarto grau, descobertas por Nicolo Tartaglia e Gerolamo Cardano, mas foi a partir de René de Descartes (século XVII), que ele passa a ser legitimado através de sua representação e interpretação geométrica.

As primeiras soluções de funções cúbicas foram encontradas por Tartaglia e Scipione Del Ferro. Já Moivre e Euler, estabeleceram as estruturas algébricas dos números complexos, no século XVIII, o que permitiu a Gauss, nesse mesmo século, apresentar o Teorema Fundamental da Álgebra, mostrando que o Conjunto dos Números Complexos é um corpo fechado.

De acordo com o PCNEM (BRASIL, 2000, p. 54), a contextualização histórica do desenvolvimento das Ciências e da Matemática, mostra-se relevante, uma vez que permite ao estudante a percepção da existência de uma evolução dos conceitos a serem aprendidos, no entanto, quando nos voltamos para o caderno do aluno (SÃO PAULO, 2014), vê-se de forma clara que há uma tentativa na construção de alguns conceitos dentro da evolução histórica dos fatos, porém, sem trazer tais informações aos alunos. Observa-se ainda que muitos conceitos importantes são suprimidos.

Um dos pontos fundamentais no estudo dos polinômios está justamente na redução de um polinômio de grau n, em um produto de n equações de grau 1, onde o termo independente de cada equação representa o elemento oposto da raiz. Tal estudo é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra. Não é nosso intuito aqui, fazer as demonstrações de teoremas, mas para que fique bem compreendido o que estamos querendo dizer, vamos de forma simples demonstrar.

Sendo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe um número r_1 de maneira que $P(r_1) = 0$. Logo podemos representar o polinômio da seguinte forma: $P(x) = (x - r_1).\ Q_1(x) = 0$. (I)

Assim, podemos concluir que $x - r_1 = 0$ ou $Q_1(x) = 0$.

Mas sendo $n > 1$, então $Q_1(x)$ não é polinômio constante e portanto ele admite uma raiz r_2, de forma que: $Q_1(x) = (x - r_2).Q_2(x)$ (II)

Logo, substituindo (II) em (I) temos: $P(x) = (x - r_1).(x - r_2).Q_2(x) = 0$

Assim procedendo, podemos escrever:

$P(x) = (x - r_1).(x - r_2).(x - r_3).\ ...\ .(x - r_n).\ Q_n$, onde $r_1, r_2, ..., r_n$ são raízes do polinômio $P(x)$ e sendo Q_n uma constante e a_n o coeficiente de x^n, concluímos pela identidade de polinômios que $Q_n = a_n$.

Portanto, podemos afirmar que:

$P(x) = a_n.(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3).\ ...\ .\ (x - r_n)$

Salientamos no entanto, que inúmeras funções polinomiais de grau *n* admitem raízes complexas, ou seja, o enunciando mais conhecido do Teorema Fundamental da Álgebra diz:

“Todo polinômio não constante, de grau *n,* com coeficientes complexos, tem *n* raízes complexas”. Ou, uma outra maneira comum de encontrarmos esse enunciado é:

“Todo polinômio não constante, de grau *n,* com coeficientes complexos, tem pelo menos uma raiz complexa”.

É fato conhecido também que se um número complexo é raiz de um polinômio de grau *n*, então o seu conjugado também é raiz do polinômio. Esse fato é demonstrável, porém não o faremos aqui, já que esse não é o nosso propósito.

Ressaltamos com base nas informações acima sobre o estudo dos números complexos também para a obtenção de raízes polinomiais, onde é necessário o aluno conhecer sobre o conjugado de um complexo. Nesse ponto no entanto, afirmamos que o caderno do aluno (SÃO PAULO, 2014), tanto em relação ao estudo dos polinômios, quanto ao estudo dos números complexos, deixa a desejar uma vez que não apresenta o Teorema Fundamental da Álgebra, consequentemente não há o porquê estudar sobre o conjugado de um complexo, que por sua vez também descarta o processo divisório de números complexos.

Com a utilização do software Geogebra pode-se fazer a articulação algébrica e geométrica do número complexo de forma mais lúdica, permitindo ao estudante a compreensão de conceitos que muitas vezes são apresentados de forma abstrata e em muitos livros didáticos, de uma forma desconexa em relação a outros conteúdos matemáticos, o que torna este conteúdo sem sentido.

Uma correta compreensão e construção desse conhecimento permitem ao educando articular de forma contextualizada e interdisciplinar esse conteúdo, observando que álgebra e geometria estão intrinsecamente ligadas à estrutura dos números complexos, ou seja, não se consegue compreender a grandiosidade dos números complexos, se não houver essa articulação. Ao se trabalhar com os números complexos pode-se ver uma clara articulação desses com a geometria analítica, ou seja, a estrutura desses dois estudos acaba por se fundir naturalmente, porém isso não é abordado nos livros didáticos, nem no Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010), assim como nos documentos curriculares de âmbito nacional.

Deve-se observar que o estudo dos números complexos é muito similar ao estudo de uma parte da geometria analítica, visto que o número complexo possui uma forma algébrica de representação, bem como uma forma geométrica, assim o conhecimento da função linear e sua forma representativa gráfica articulada à geometria analítica, bem como à trigonometria são utilizados como requisitos necessários para construção de conceitos dos números complexos. Dessa forma, um tratamento similar ao utilizado no estudo da geometria analítica, torna o conteúdo mais significativo, de fácil compreensão, além de articular a álgebra com a geometria. Nas Orientações Curriculares do Ensino Médio - OCEM destaca que:

> O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas via equações, e o

> entendimento de equações, via figuras geométricas. (BRASIL, 2006, p. 77).

Neste trabalho do professor na transição entre figuras geométricas e equações há a valorização da aprendizagem via conversão de registros distintos de representação semiótica. O mesmo ocorre quando olharmos para os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM:

> [...] o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, **ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.** (Grifo nosso). (BRASIL, 2000, p.43)

Esse ajuste mencionado, como se vê acima, é necessário para a compreensão, a construção e a interpretação de um número complexo.

Ao analisarmos o PCNEM (BRASIL, 2000), nos deparamos com algumas informações contraditórias, pois de um lado fala da importância entre a conexão dos conteúdos abordados dentro de uma contextualização e interdisciplinaridade, fazendo referências claras de que o estudo das funções algébrica e trigonométricas com suas representações gráficas, o estudo das sequências e progressões, que são funções, porém representadas de uma forma diferenciada, o estudo da geometria analítica por se tratar de um estudo que articula as funções com a geometria e também o estudo dos polinômios, ou seja, procura-se justificar a importância desses estudos, mostrando que eles se articulam. Por outro lado, não se menciona o estudo dos números complexos, o que deixa claro que o mesmo deve ser esquecido ou descartado, como se ele fosse totalmente descontextualizado em relação aos demais conteúdos da matemática, conforme lemos no próprio PCNEM:

> Também por isso, o currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizados. Outros aspectos merecem menor ênfase e **devem mesmo ser abandonados por parte dos organizadores de currículos e professores**. (Grifo nosso) (BRASIL, 2000, p. 43).

Isso nos parece muito contraditório, pois para uma compreensão da estrutura dos números complexos, é necessário que o aluno perceba que ele tem uma forma algébrica representativa. Que esta pode ser convertida em sua forma geométrica, através da representação vetorial. Esta por sua vez, permite uma conversão na forma trigonométrica de representação, portanto, o estudo dos números complexos vem de encontro com o que é proposto pelo PCNEM (BRASIL, 2000), quando esse faz referências de que o estudo dos conteúdos da matemática deve privilegiar a articulação entre si e de que a articulação algébrica e a geométrica devem sempre estar presentes. Nesse aspecto, não é possível desvincular a forma geométrica e a forma algébrica, no estudo dos números complexos Muitos alunos que hoje ingressam nos cursos de engenharia e tecnológicos, trazem consigo a desinformação parcial ou total em relação ao conjunto dos números complexos, visto que devido ao PCNEM (BRASIL, 2000), os mesmos foram deixados de lado em muitas escolas brasileiras, por se tratar de um assunto descontextualizado da matemática, ou supérfluo. Segundo o PCN+:

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (BRASIL, 2002, p. 122).

Estamos diante de uma contradição, pois nos PCNEM “o currículo do Ensino Médio deve garantir aos alunos condições de estes aprofundarem seus conhecimentos, bem como capacidade de articular com as informações interdisciplinares, como entre a matemática e a física” (BRASIL, 2000,p.43). Um dos campos de maiores articulações entre as duas disciplinas está nos conceitos dos vetores, capazes de explicar fenômenos físicos em relação aos movimentos dos corpos, onde as operações vetoriais podem ser facilmente compreendidas através do estudo dos números complexos, com suas operações, já que estes representam os vetores.

Esclarecemos que o comportamento do conjunto ***C*** é identicamente ao comportamento do conjunto ***R***^{2}. Dessa forma, podemos tratar a função $f: C \to C$, como sendo uma função do tipo $f: R^2 \to R^2$. O que esclarecemos no entanto é que as funções complexas são de quarta dimensão, sendo impossível visualizá-la, uma vez que somente conseguimos enxergar até três dimensões. Uma das grandes vantagens de se utilizar o conjunto ***C*** em relação ao conjunto ***R***^{2}, está na operação de multiplicação que em ***C*** que além de ser fácil visualizar geometricamente a rotação (movimento), ao se operar com dois números complexos quaisquer e que também facilmente operável quando os números complexos estão representados em sua forma trigonométrica. Já no ***R***^{2}, como o ângulo é o que se encontra entre os dois vetores escolhidos, tem-se a limitação do ângulo variando até 180°, ou seja, $0° < \theta < 180°$. Dessa forma, o trabalho em ***C*** pode ser generalizado.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, “os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isto, uma equação bem simples, $x^2 + 1 = 0$”. (BRASIL, 2006, p. 71).

Neste documento curricular presenciamos uma visão estreita de que os números complexos devem ser vistos como uma mera ampliação do conjunto de soluções de expressões polinomiais, além de outra contradição quando voltamos o olhar para os PCNEM que se posiciona “como sendo importante articular os fatos históricos com o conteúdo abordado”. (BRASIL, 2000, p.43)

Em termos de educação do Estado de São Paulo destacamos consolidação do novo Currículo (CESP) com base nas leis de Diretrizes e Bases Nacionais e na adoção de competências e habilidades contidas na matriz de avaliação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Os conteúdos da Matemática foram organizados em três grandes temas que se inter-relacionam, a saber: Números, Geometria e Relações. Ao depararmos com os conteúdos elencados e habilidades que devem ser contempladas em relação aos Números Complexos, na 3ª série do Ensino Médio, percebemos que o foco está na contextualização geométrica deste número, ou seja, segundo o CESP (SÃO PAULO, 2010, p. 69), no 2° bimestre do Ensino Médio temos o tópico do conteúdo a ser trabalhado "números complexos: operações e representação geométrica". Para as habilidades referente a este tópico, foram elencadas duas, a saber: "saber expressar o significado dos números complexos por meio do plano Argand-Gauss" e "**compreender o significado geométrico das operações com números complexos**, associando-as a transformações no plano". (Grifo nosso).

Fica evidente pelo próprio CESP (SÃO PAULO, 2010) que há uma contextualização geométrica no estudo envolvendo os números complexos e que não há como desvincular a forma algébrica de sua forma geométrica, pois o número perderia totalmente seu significado.

Vale ressaltar também que uma contextualização histórica dos números complexos, ou seja, dar ao discente a oportunidade de entender a necessidade do surgimento desses números; está respaldado na necessidade humana de busca por soluções e respostas de problemas.

No volume 1 do Caderno do Aluno da 3ª série do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2014), material complementar ao CESP, observamos que a contextualização histórica é pobre. O material apresenta o número *i* (imaginário) a partir do seu significado rotacional no plano. Em seguida apresenta o número na sua forma algébrica z =a + bi e elenca alguns números complexos para se realizar as operações (adição, subtração, multiplicação e potenciação). O que se tem a criticar é que em momento algum, apresenta-se o número como um par ordenado, e a importância de observar Regra do Paralelogramo na operação de adição/subtração, além das operações de potenciação e radiciação pela forma polar.

O que chama muito a atenção também é que a operação de divisão e a representação do conjugado de um complexo, não são apresentadas. Já comentamos anteriormente que uma grande necessidade na apresentação do conjugado de um número, está em compreender o Teorema Fundamental da Álgebra, onde se uma das raízes de um polinômio é complexa, então seu conjugado também é raiz. Como o caderno do aluno (SÃO PAULO, 2014), não apresenta aos alunos esse teorema, também não vê a necessidade de apresentar o conjugado de um número complexo.

Com relação à potência de um conjugado, deve-se salientar que se o expoente é maior que 2, a operação não é tão simples assim e requer que primeiramente o aluno aprenda sobre o módulo, forma trigonométrica, para a partir disso operar a potenciação e a radiciação. Aliás, as operações de potenciação e radiciação pela forma trigonométrica nem são mencionadas. Trabalha-se com o módulo e a conversão do registro algébrico para o trigonométrico, e vice versa, articulando estas conversões com o Plano Argand Gauss. Termina-se o conteúdo com alguns exercícios geométricos, porém sem levar ao aluno a refletir no seu significado em relação às aplicações.

Há ainda que se observar que o referido Caderno do Aluno deu alguma importância à contextualização geométrica ao estudo, o que é um fator bastante positivo quando comparado com muitos materiais didáticos que exploram as operações algébricas. Observa-se nos exercícios finais do referido conteúdo algumas regiões geométricas desenhadas no plano Argand-Gauss e pede-se ao aluno mostrar a região transformada pela operação indicada, para os casos listados.

Ao se trabalhar com os números complexos, é claro que o aluno deve aprender a dominar, sua forma algébrica de representação, operando de forma algébrica e articulando sua representação na forma de par ordenado, na forma geométrica (através do Plano Argand Gauss – como vetor), bem como na sua forma trigonométrica, fazendo as transformações de tratamento e conversões semióticas.

Logicamente o tratamento geométrico em relação aos Números Complexos é fundamental para uma perfeita compreensão do número. No entanto, o que se observa nas habilidades elencadas no CESP que apesar de haver um espaço amplo para a geometrização do aprendizado deste conteúdo, porém na prática, quando visualizamos o Caderno do aluno e o Caderno do professor (volume 1), a abordagem deixa a desejar. O conjugado de um número complexo e sua simetria geométrica nem é mencionado, portanto, é descartada. Apresenta-se as operações de adição, subtração e multiplicação de forma geométrica, porém a operação de divisão, nem foi cogitada sua possibilidade e existência. Quando se fala da geometrização das operações de adição e subtração, deixou-se de lado a articulação destas com a Regra do Paralelogramo, ou seja, a visão vetorial do número não existe, o que seria uma ótima oportunidade de articular o estudo dos números complexos à Física, quando se trabalha as grandezas vetoriais e os fenômenos físicos. Com isso restringe-se muito a visão do aluno quanto à possibilidade de utilização dessa classe de números, como algo realmente útil e que faz parte do cotidiano de suas vidas, afinal, os fenômenos físicos estão por toda parte e seus efeitos podem se não quantificados, mas podem ser sentidos.

É bem verdade que ninguém sai por aí dizendo, por exemplo, andei 3 + 4i metros, pois parece ilógico e irracional, afinal não existe uma fita métrica que possa quantificar essa medida, porém quando analisamos dentro do conceito vetorial, podemos entender que ao andar 3 + 4i metros, não somente informamos a distância efetivamente percorrida (módulo), mas também a direção e o sentido do movimento. Logo a informação que temos a respeito desse movimento de andar 3 + 4i metros é muito mais rica e precisa, pois traz em si o fato de que andou: 5 metros, no sentido da esquerda para a direita, em uma direção de aproximadamente 59° em relação á horizontal do referencial adotado.

Destacamos a importância do estudo dos números complexos, uma vez que o mesmo promove interdisciplinaridade entre a matemática e diversos fenômenos físicos, já que se sabe, o conjunto dos números complexos é o conjunto que representa os vetores, tão utilizados para explicar fenômenos físicos que são nitidamente percebidos no campo da computação gráfica e em jogos digitais que se utilizam dos quatérnions[1] (que são provenientes dos números complexos, por se tratar de resultados de operações envolvendo os números complexos) para criar os efeitos de movimentos, nos estudo dos fractais onde esse conhecimento é necessário para análise dos movimentos dinâmicos, o que permitem os meteorologistas fazerem previsões do tempo, bem como os astrônomos para estudo dos movimentos dor corpos celestes, além da sua utilização no campo da medicina, para análise de pulsos elétricos cerebrais e de batimento cardíaco, entre outros.

No campo das engenharias, por exemplo, o conhecimento dos números complexos é fundamental para a compreensão de fenômenos quando se articula como, por exemplo, em materiais utilizados em construções, onde a ação dos ventos, das águas, dos sons, dos movimentos de corpos ou até mesmo dos movimentos humanos, tais como, pular, andar, promovem vibrações que precisam ser analisadas no sentido

[1] Um quatérnion é definido como um número complexo, generalizado, na forma $q = q_0 + q_1*i + q_2*j + q_3*k = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, ou ainda, $q = (s, u)$, onde $s = q_0$ = escalar e $u = (q_1, q_2, q_3)$ = vetor.

estrutural, visando qualidade com segurança. Como se vê, há uma vasta aplicação nesse conhecimento, pois a descoberta dos números complexos promove uma ruptura com a matemática tradicional e milenar, abrindo o espaço para o surgimento do que podemos chamar de verdadeira da Matemática Moderna[2], o que trouxe grande avanço nas ciências. Portanto, tratar desse conteúdo como algo descartável, sem sentido, é algo totalmente absurdo frente a um mundo em que os avanços tecnológicos caminham a largos passos

O que se pretende é com a utilização do Geogebra, é o estudo dos números complexos na sua forma visual, construindo sua abstração a partir do concreto. Esperamos também que nossa dissertação possa contribuir no âmbito da formação inicial de professores, pois

> [...] é fundamental que os cursos de licenciatura preparem o professor para o uso das novas tecnologias. De fato, uma vez que a informática parece estar chegando realmente às salas de aulas, é preciso formar um profissional consciente e apto a fazer uso deste novo instrumento didático. Porém isto não tem sido sistematicamente objeto de estudo dos licenciados, e que implica novos professores sendo colocados no mercado de trabalho sem formação no uso das novas tecnologias educacionais. Para esses professores, assim como para tantos outros que estão trabalhando há muitos anos e que não tiveram acesso a esse tipo de formação, é necessário oferecer cursos de formação continuada para que eles se atualizem. (BITTAR, 2001, p. 77)

Se de um lado devemos ter docentes melhores preparados, com condições de promover uma aula mais dinâmica e com utilização de novos recursos, de outro lado é importante visualizar a importância desses recursos como diferencial da aprendizagem, frente a um grupo de estudantes acostumados com a tecnologia.

No final da década de 80 e início da década de 90, vários estudos foram realizados com o objetivo de questionar a abordagem sobre o estudo das funções, por exemplo, e de seus conceitos, suas articulações com outros conteúdos da matemática, além de mostrar que era importante utilizar as múltiplas formas de abordagem desse conteúdo.

---

[2] Matemática Moderna aqui denominado, não se trata do movimento surgido na década de 60 (1960), mas sim, nos referimos ao fato de que o surgimento desses números abriu espaço para um grande avanço nas Ciências. Um exemplo claro disso é o desenvolvimento da Computação Gráfica.

Assim, acredita-se que a utilização do computador bem como mídias, como aliados na sala de aula nas práticas inovadoras do ensino-aprendizagem permite ao educador trabalhar as múltiplas formas representativas dos conteúdos matemáticos, articulando as informações de uma forma rápida e concreta, permitindo ao educando a construção da conceituação de uma forma mais rápida. Esse ganho de tempo em termos de custo cognitivo é fundamental frente a uma situação que exige tempo e ele é escasso.

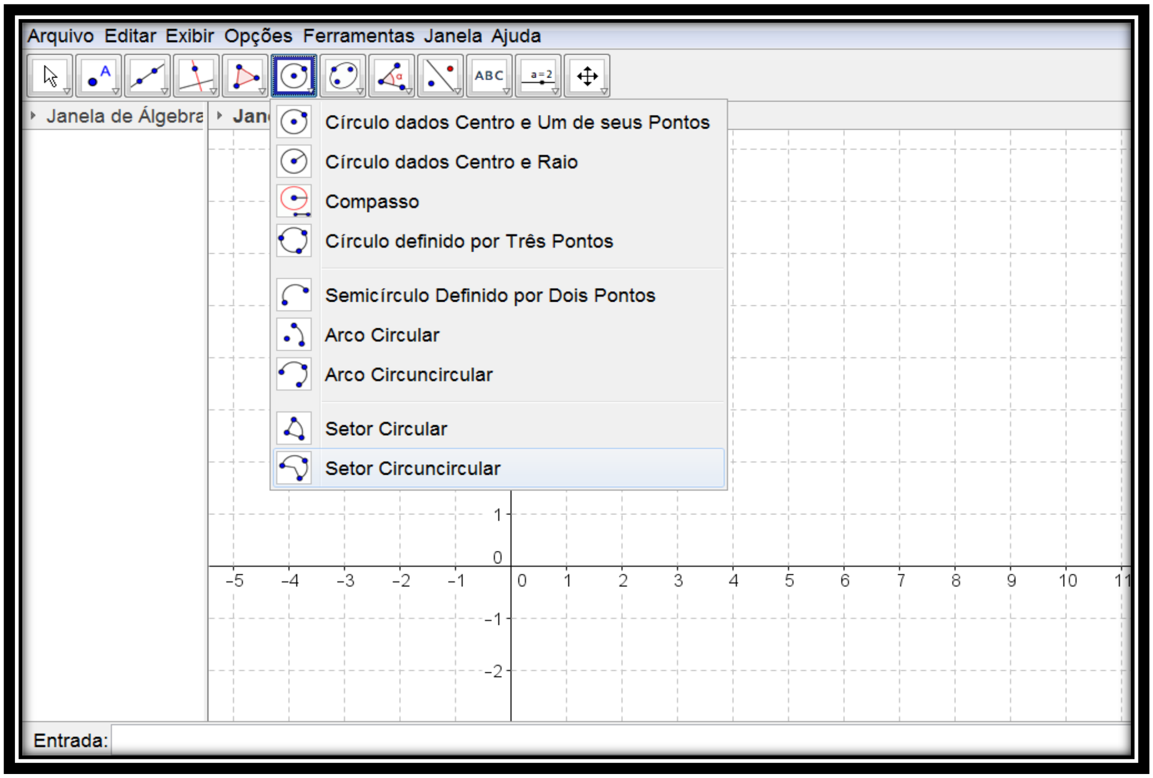
Ao olharmos o ensino da matemática por esse foco, estamos indo de encontro ao que está regulamentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000), onde o eixo é a contextualização e a interdisciplinaridade. Mais especificamente, o potencial de um tema permite conexões entre diversos conceitos matemáticos, além de outras áreas do conhecimento e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância do tema, que vem sendo deixado de lado em muitas escolas, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Pensando em como melhorar essa articulação entre os conteúdos de uma forma mais eficaz é que surge o Geogebra, um software desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001/2002, sendo parte de sua dissertação de mestrado em educação matemática e ciência da computação, pela Universidade da Salzburg, Áustria. Tendo recebido apoio da Academia Austríaca para desenvolvimento de seu projeto, o que levou o criador do software ao doutoramento em Educação Matemática. Ao longo dos anos o software foi traduzido para diversas línguas inclusive o português o que lhe rendeu também alguns prêmios internacionais, despertando a atenção de profissionais da educação e pesquisadores.

O software é gratuito e pode ser baixado diretamente da internet e independe de licença para uso, já que o criador acredita na importância da gratuidade do acesso da ferramenta, visando à qualidade da educação e do acesso a todos os cidadãos de todas as nações, nos diferentes níveis escolares.

O Geogebra permite facilmente uma articulação entre os conteúdos da geometria com a álgebra e pode ser utilizado em vários níveis de ensino. As ferramentas geométricas mais comuns são: ponto, reta, ângulo, polígonos, círculos, elipses, coordenadas, entre outras, conforme ilustração da figura 15 abaixo:

Figura 15: Geogebra 5.0 – Recursos de Janela



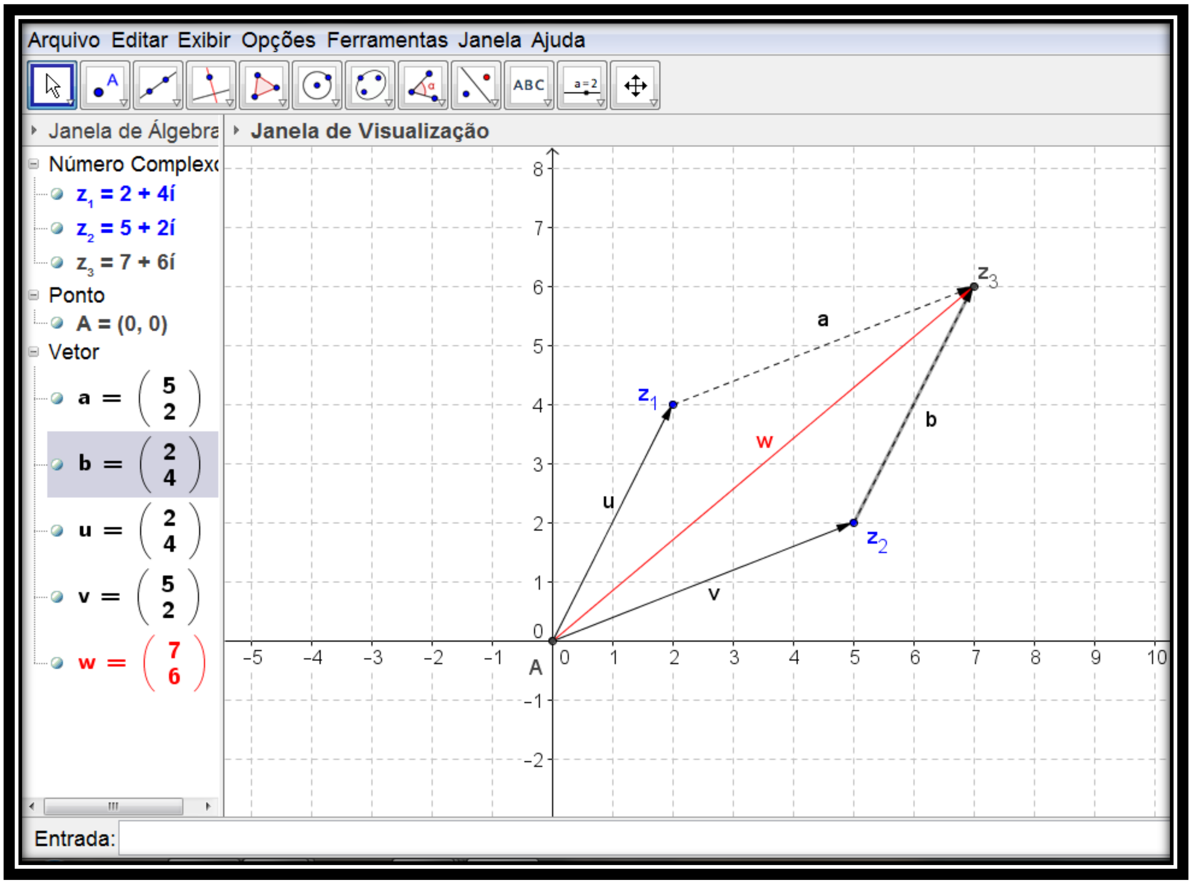
Fonte: Geogebra 5.0 – Material da Autora

O software permite ao professor utilizá-lo como ferramenta didática para o ensino, bem como por ser manipulativo, oferecendo a oportunidade ao estudante de construir seu conhecimento.

Uma de suas grandes vantagens é que como se pode movimentar as figuras em várias direções, levando a comparações, isso permite validação de hipóteses. O software também oferece recursos para trabalho com os números complexos, na sua forma algébrica.

Nas figuras 16 e 17 abaixo, podemos observar um exemplo de soma entre dois complexos e que quando movimentamos alterando um dos complexos, percebe-se que é possível validar a hipótese sobre a operação. Percebe-se ainda que é possível se estabelecer a regra do paralelogramo.

Figura 16: Operação de Adição no Geogebra

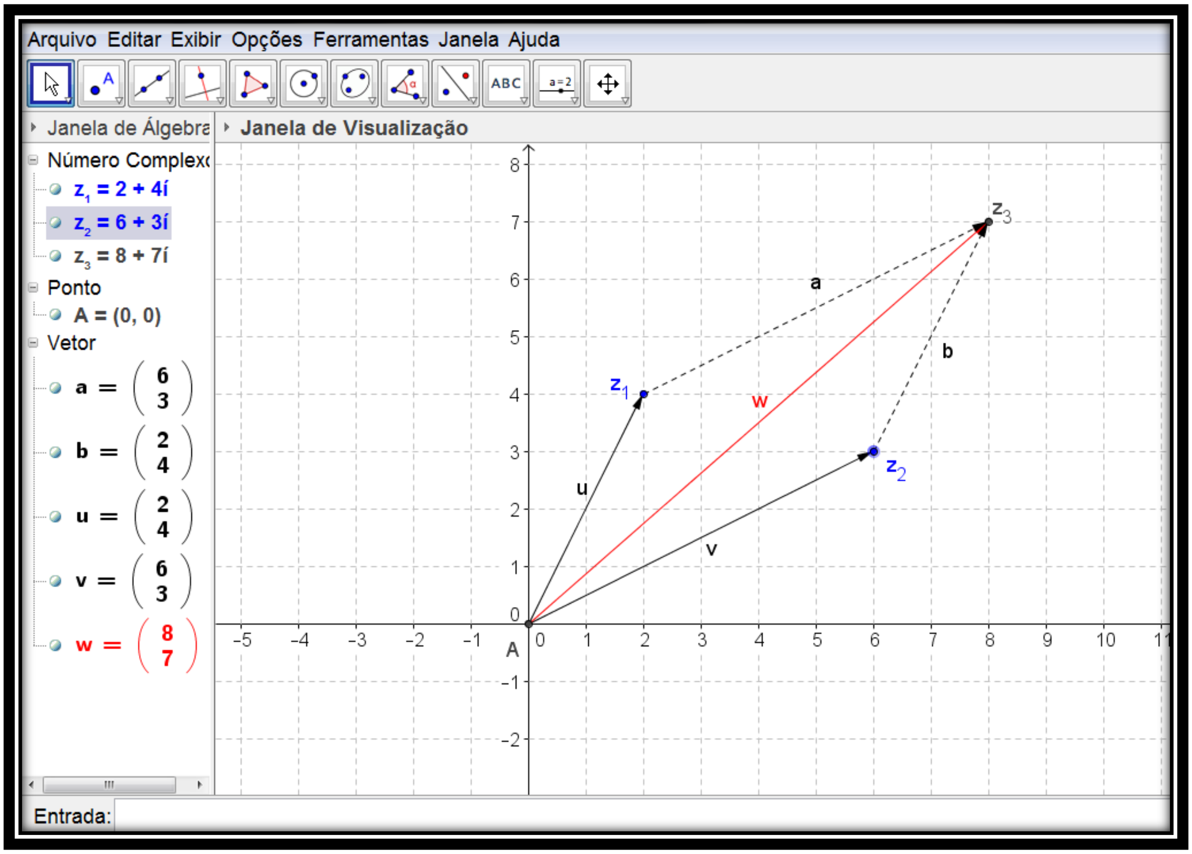


Fonte: Geogebra 5.0 - Material da Autora

Ao se movimentar um dos números complexos, percebemos que ele altera a figura do paralelogramo e o vetor soma, validando a operação para qualquer número complexo. O mesmo vale para a operação de subtração, multiplicação e divisão.

Vale ressaltar que o Geogebra é limitado para o ensino dos números complexos, pois não conseguimos inserir em sua entrada a forma trigonométrica $[z = \cos\theta + i.sen\theta]$ de um número complexo. É possível também utilizar a forma de par ordenado para representar o número, porém, devido ao fato de que o software lê o par ordenado como vetor, isso faz com que ao se realizar a operação de multiplicação, o resultado obtido é um produto vetorial, e não, o resultado da multiplicação de dois números complexos. Apesar desses inconvenientes, isso não tira o mérito do uso dessa ferramenta como facilitador no ensino dos números complexos.

Figura 17: Operação de Adição – Movimento do Número Complexo



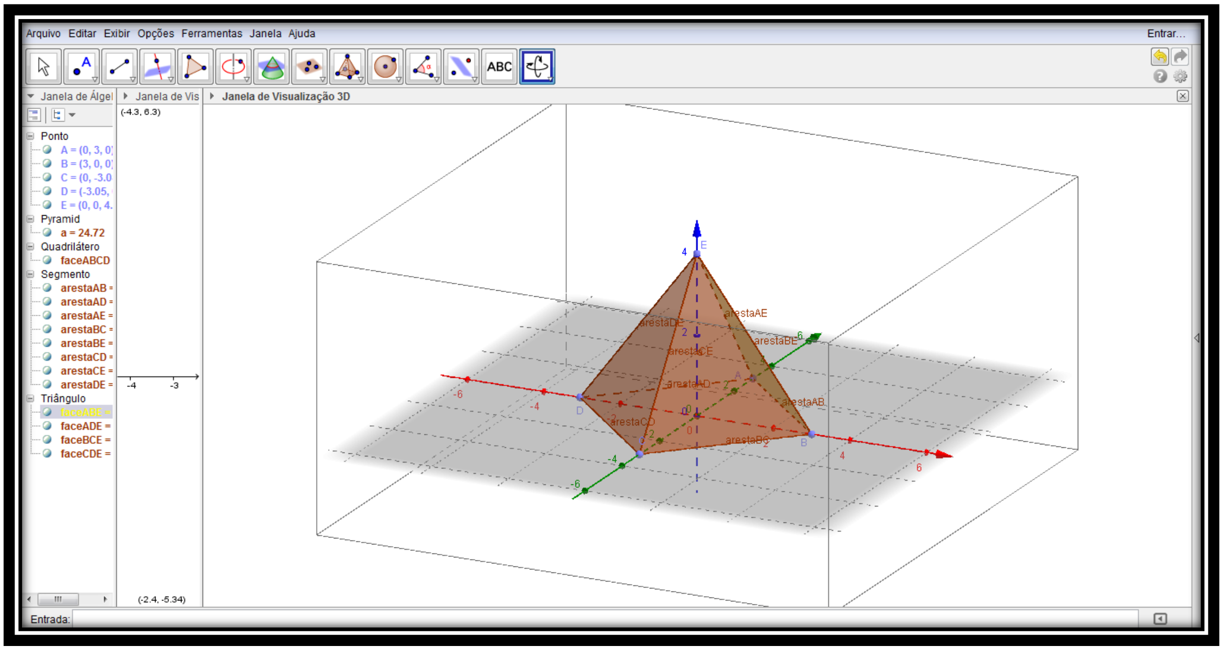
Fonte: Geogebra 5.0 - Material da Autora

O software Geogebra 5.0 permite o trabalho apenas no plano bidimensional. No entanto, já está em fase de teste o software Geogebra 3D Beta versão 5.0, que trabalha no plano tridimensional. Uma versão 3D Alpha foi lançada em 2007. Ambos se utilizam da plataforma Java e só é possível utilizá-los, conectado na internet, pois é uma versão web. Um dos problemas com a utilização da versão 3 D, está nos bugs (não investigamos sobre isso, já que não era o foco de nossa pesquisa)[3]. Uma interface dessa versão pode ser visto na figura 18 abaixo.

Não testamos a versão 3 D para operações envolvendo os números complexo.

[3] Disponível em: http://forum.geogebra.org/viewforum.php?f=19. Acesso em 04/12/2014

Figura 18: Geogebra 3D – Beta – versão 5.0



Fonte: Geogebra 3D – Material da Autora

3.3 - E a Produção Acadêmica: O que foi relevante para o percurso metodológico?

Com o objetivo de situar nosso trabalho no contexto acadêmico, encontramos junto ao banco de teses da CAPES e na relação de Teses e Dissertações editado pela Revista Zetetiké, 16 produções acadêmicas em nível de Dissertação, no período de 1998 a 2013. Observamos um despertar para a abordagem e importância do estudo dos Números Complexos nesses últimos anos. Somente no último ano (2013), tivemos oito dissertações sendo defendidas em várias universidades brasileiras. Na tabela a seguir, descrevemos a distribuição dessas dissertações por ano:

Tabela 1: Quantidade de Dissertações Defendidas sobre Números Complexos

ANO	1998	2006	2007	2008	2009	2010	2012	2013
Quant.	1	2	1	1	1	1	1	8

Fonte: Material da Autora

Temos o conhecimento de uma primeira dissertação sobre este conteúdo, que foi defendida em 1992, porém não conseguimos ter acesso à mesma.

Uma leitura minuciosa de todos estes trabalhos permitiu elaborarmos a tabela 2, a qual relaciona o número de publicações com o respectivo descritor comum entre os trabalhos. Estamos concebendo descritor como sendo o(s) foco(s) da cada pesquisa.

Tabela 2: Descritores comuns das Dissertações sobre Números Complexos

Descritor	**Quantidade**
Análise de Livros Didáticos	4
Descrição Histórica dos Números Complexos	11
Números Complexos: definições, propriedades, teoremas e demonstrações	10
Sequência Didática	8

Software Dinâmico Geogebra	3
Contextualização e Aplicações Diversas	5
Engenharia Didática	5
Modelagem Matemática	2
Registros de Representação Semiótica	2

Fonte: Material da autora

Posteriormente, debruçamos em cada dissertação, na sua ordem cronológica de publicação e elaboramos cada resenha, levando em conta o conteúdo de cada capítulo dos trabalhos em questão. Optamos por esta forma não-convencional de realizar as resenhas, pela escassez de trabalhos envolvendo esta temática de pesquisa, bem como pelo descaso dos documentos curriculares atuais quanto a importância da aprendizagem dos números complexos. No entanto, o montante das resenhas gerou um material denso em detalhes para a leitura; o que nos obrigou aloca-los no Anexo C deste trabalho.

Como conteúdo deste subtítulo limitamo-nos a descrever informações de algumas das 16 dissertações que influenciaram diretamente o percurso metodológico desta investigação.

O primeiro trabalho que nos impactou, foi o de Rosa (1998) e por isso, foi um referencial muito forte em nossa pesquisa.

Inicialmente, o que nos chamou a atenção na pesquisa de Rosa (1998), foi fato de ele propor um questionário que foi por ele aplicado junto aos estudantes do curso de engenharia de uma universidade particular de São Paulo, do qual ele era o professor. Dessa forma, nos apropriamos do questionário de Rosa (1998), com acréscimos de perguntas, visto que o foco da pesquisa deste ser diferente da nossa. Acrescentamos algumas perguntas além, para fazer frente ao tratamento dado aos números complexos no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), volume 1.

Outro ponto que também foi importante para nós, é o fato de que Rosa (1998) fundamentou sua pesquisa em cima dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, e dessa forma, seu trabalho se tornou uma boa fonte de pesquisa, uma vez que nós também nos valemos desse referencial teórico para validar os resultados obtidos na parte empírica desta pesquisa.

O terceiro ponto no trabalho de Rosa (1998), deve-se ao fato de que ele elaborou uma sequência didática para aplicar aos seus alunos do ensino médio, onde seu foco era a contextualização histórica para a construção dos conceitos dos números complexos, seguindo assim o Currículo do Estado de São Paulo vigente à época.

Uma observação importante ficou clara no trabalho de Rosa (1998) em relação ao ensino dos números complexos à época, de que o foco do ensino desse conteúdo, estava voltado às resoluções de equações polinomiais, fenômeno esse que permanece até os dias de hoje, mesmo frente a um novo Currículo do Estado de São Paulo, ou seja, quase nada mudou. As poucas mudanças que ocorreram, aos nossos olhos, foram para pior.

Em sua conclusão final, Rosa (1998) informou que suas percepções em relação ao ensino dos números complexos a partir da contextualização histórica se mostraram verdadeiras.

O segundo material importante foi o de Oliveira (2010). Dois aspectos no trabalho dele, vieram de encontro com o que pretendíamos em nossa pesquisa. O primeiro é o fato de que ele se apropriou do Geogebra como ferramenta de estudo. O segundo estava no fato de que ele, assim como nós, tem uma percepção geométrica em relação aos números complexos. Além disso, Oliveira (2010) se apropriou da engenharia didática de Artigue, como metodologia de análise de pesquisa, que foi a metodologia adotada por nós também.

Um fato curioso no material de Oliveira (2010), é que este aplicou suas atividades (uma sequência didática) para os estudantes, após esses terem aprendido o conteúdo de números complexos. Nós também nos valemos desse fato, devido ao foco que tínhamos em relação a nossa pesquisa.

A dissertação de Caon (2013), trouxe contribuições para nossa pesquisa, visto que essa autora, também trabalhou na perspectiva do ensino dos números complexos a partir de uma visão geométrica. Essa autora não aplicou nenhuma atividade, pois em seu material, se ateve a demonstrar as propriedades que cercam os números complexos. Um ponto que julgamos muito positivo é a articulação que a autora faz dos números complexos e suas aplicações em diversas áreas.

Uma quarta dissertação que também foi uma boa fonte de pesquisa é o trabalho de Caldeira (2013). Para a autora, a geometrização dos números complexos, abriu espaço para um aprendizado diferenciado e significativo. A autora criou e aplicou uma sequência didática com seus alunos com uma contextualização geométrica e isso veio de encontro com o que acreditamos.

A autora também se valeu dos registros de representação semiótica como referencial teórico, se utilizando da engenharia didática como metodologia de análise da pesquisa de campo. Esses detalhes foram importantes para nós, pois enriqueceu nosso conhecimento em direção a nossa pesquisa.

Um trabalho que achamos muito interessante e ajudou-nos a “abrir nossa mente” em relação ao que pensávamos sobre os números complexos, foi o trabalho de Feitosa (2013). Muito embora esse autor tenha uma linha de pesquisa muito diferente da nossa, seu trabalho é muito rico no sentido que mostra as inúmeras possibilidades para a utilização dos números complexos, uma vez que o autor articula os números complexos à geometria analítica.

Esses materiais sem dúvida, ampliaram nossa visão de pesquisador, permitindo e acrescentando conhecimentos que ajudaram a compor nosso percurso metodológico.

4 - O PERCURSO METODÓLOGICO

Quando ingressei no mestrado profissional junto a UFSCar – Sorocaba, tinha ideia de que realmente queria trabalhar com conceitos geométricos. A princípio, tinha em mente realizar minha pesquisa com Geometria Analítica, porém logo no primeiro semestre, com o conhecimento aflorando, minha busca em trabalhar conceitos geométricos aumentou e como sempre tive fascínio pelo estudo dos Números Complexos, pois sempre os vi como uma extensão quase natural do estudo da Geometria Analítica (equação da reta), além de julgar como um conteúdo importante por ver sua aplicabilidade.

No segundo semestre tudo se tornou muito mais claro, ao cursar a disciplina de Tecnologia da Informação para o Ensino de Ciências e Matemática sob a coordenação do prof. Dr. Wladimir Seixas e do prof. Dr. Paulo César Oliveira. O professor Wladimir solicitou-nos uma tarefa envolvendo a apresentação de um plano de aula com a utilização de alguma ferramenta tecnológica, possível de ser aplicado para alunos do Ensino Médio. Naturalmente preparamos uma apresentação usando o Geogebra como recurso tecnológico atrelado ao plano aula sobre Números Complexos.

Começamos a construção da revisão bibliográfica com base em teses e dissertações no primeiro semestre de 2013. Nesta primeira etapa conseguimos encontrar apenas sete dissertações sobre o assunto, distribuídas entre o período de 1998 a 2010. Numa segunda etapa de levantamento dos trabalhos acadêmicos encontramos uma dissertação defendida em 2012 e oito novas dissertações em 2013.

Nestes dois momentos de pesquisa bibliográfica recorremos ao banco de teses da CAPES e no banco de teses e dissertações publicadas periodicamente na revista Zetetiké, no período de 1971 a 2011.

Esta etapa da pesquisa foi relevante e contribuiu significativamente para demarcarmos os próximos passos de nossa investigação, que culminou na aplicação de um questionário tanto para uma amostra de alunos do 2º semestre de Engenharia Civil de uma instituição particular de ensino, quanto para uma amostra de alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública. Posteriormente, aplicamos uma sequência didática envolvendo o uso do Geogebra apenas para os alunos da referida série do Ensino Médio.

A seguir detalhamos as etapas empíricas de nossa pesquisa pautadas na estrutura da Engenharia Didática.

4.1 – Perspectiva Metodológica

O discurso atual da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo é de que o professor não deve dispensar o livro didático indicado pelo Programa Nacional do Livro didático (PNLD), ou seja, deve seguir a sequência didática do Caderno do Aluno e do Professor (SÃO PAULO); porém deve acrescentar informações que o professor julgue necessário, utilizando-se do livro didático.

No entanto, a realidade de várias escolas públicas do Estado de São Paulo é norteada pela imposição do uso obrigatório do Caderno do Aluno e do Professor (SÃO PAULO), uma vez que a prova do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) está embasada neste material. Tem-se tornado cada vez mais comum a preocupação por parte dos Gestores das escolas públicas em treinar os alunos para responder com êxito a prova do SARESP, em prol do "Bônus"(que é uma compensação financeira paga aos professores e gestores das escolas que atingirem as notas mínimas impostas pela Secretaria da Educação do Estado).

Em contrapartida, para vários de nós professores, o mais importante não é o Bônus e sim o conhecimento que o aluno é capaz de agregar. Na condição de professora-pesquisadora ratifico que esta situação é uma inversão de valores quanto ao processo ensino-aprendizagem.

É neste cenário educacional da escola pública que desenvolvemos parte do trabalho de campo, pautado nos princípios da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, em busca de respostas para as seguintes questões de investigação:

1) Que saberes sobre números complexos, alunos do Ensino Superior trazem como bagagem do Ensino Médio?

2) Que perspectiva de construção de saberes o Caderno do Aluno e do Professor proporciona ao aprendizado de números complexos?

3) O Geogebra pode agregar a construção de saberes quando articulado ao Caderno do aluno, disponibilizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo?

A Engenharia Didática segundo Almouloud e Coutinho (2008, p.66),

> vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a posteriori. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

O pré-teste e pós-teste são etapas comuns em pesquisas envolvendo avaliação psicológica, por exemplo. Dada a constituição da amostra utiliza-se o pré-teste que geralmente são procedimentos de aplicação de instrumentos diagnósticos para servir de base a um processo de intervenção segundo os objetivos da pesquisa. Posteriormente submete-se a amostra à aplicação do pós-teste, ou seja, geralmente os sujeitos de pesquisa são reavaliados seguindo a mesma ordem e procedimento de aplicação dos instrumentos no pré-teste.

No caso de nossa pesquisa, cumprimos as quatro fases que compõe a metodologia da Engenharia Didática proposta por Michèle Artigue (1988), conforme descrição de cada uma delas a seguir.

A primeira fase designada como análises preliminares, deve ser embasada em um referencial teórico. Dedicamos o capítulo 2 desta dissertação para discorrermos sobre o percurso teórico desta investigação, permeado por leituras e reflexões tanto sobre a pesquisa acadêmica pautada em dissertações defendidas a partir de 1998, quanto pela análise de documentos curriculares vigentes sobre o ensino-aprendizagem de números complexos.

Na segunda fase **(concepção e análise a priori)** deve-se levar em conta que para Artigue (1998, p.205) o:

> [...] objetivo da análise a priori é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e significado de cada um desses comportamentos. Para isso ela vai

> se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação está indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise a priori e a análise posteriori a ser operada na quarta fase.

Para nossa investigação aplicamos um mesmo questionário para duas amostras distintas de estudantes. Aproveitamos um questionário composto por 13 questões elaboradas e aplicadas por Rosa (1998) para uma amostra de 31 estudantes do 1º ano de Engenharia Mecânica e reaplicamos este instrumento de produção de informações acrescido de outras nove questões elaboradas por esta pesquisadora.

Uma das amostras de nossa pesquisa também foi composta por 31 estudantes do 2º semestre do curso de Engenharia Civil de uma instituição privada, na qual a pesquisadora também é professora desta turma. A outra amostra foi composta de 13 alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública.

A terceira fase **(experimentação)** oportuniza ao pesquisador sua ida a campo para aplicar suas tarefas embasadas em uma sequência didática, observando com cuidado e rigor, os registros levantados frente aos estudantes; sujeitos da pesquisa (ARTIGUE, 1998).

O nosso trabalho de campo contou com a aplicação e análise dos questionários, bem como a aplicação de um conjunto de tarefas apenas para os alunos da 3ª série do Ensino Médio.

A última fase **(análise a posteriori)** tem como objetivo uma análise profunda baseada na produção de informações, com o objetivo de buscar respostas às nossas indagações.

4.2 – Questionário: resultados frente aos estudantes do Ensino Superior

Iniciamos nossa redação explicando como foi constituída a amostra dos estudantes, assim como o objetivo frente a este instrumento de produção de informações.

A participação do estudante como sujeito de nossa pesquisa foi opcional. Fizemos o convite para 61 alunos do 2° semestre de Engenharia Civil do Centro Universitário Nossa Senhora do Patrocínio (CEUNSP), cuja pesquisadora também é professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Contamos com a participação de 31 alunos da referida turma, sendo 71% dos participantes com idade entre 17 e 22 anos, 19% com idade entre 23 e 30 anos e 10% na faixa de idade entre 31 e 45 anos.

Traçamos dois objetivos com as respostas do questionário (Anexo A). O primeiro deles foi descrever os saberes apreendidos sobre os conceitos envolvendo números complexos, quando estudado no Ensino Médio. De acordo com a faixa etária dos sujeitos de pesquisa aliado ao fato de que a grande maioria dos ingressantes nos cursos de Engenharia dessa instituição são oriundos de escolas públicas, podemos afirmar que o Caderno do Aluno e do Professor fez parte no seu processo ensino-aprendizagem.

Tendo em vista que treze das vinte e duas questões do questionário foram aplicadas por Rosa (1998) a uma amostra de 31 estudantes de um primeiro ano do curso de Engenharia Mecânica; nosso segundo objetivo foi comparar o grau de saberes dos nossos estudantes com os alunos da amostra do referido pesquisador.

Este interesse foi pautado no fato de que a Proposta Curricular nos tempos em que Rosa (1998) realizou seu trabalho de campo difere do atual Currículo do Estado de São Paulo (2010). Na década de oitenta e noventa, o objetivo geral para o ensino de números complexos era "perceber porque aparece um novo conjunto de números. Representar números complexos geométrica e trigonometricamente; operar com esses números" (SÃO PAULO, 1992, p.41). Ainda na forma de comentários, destacamos duas opções didáticas para o estudo dos números complexos:

> Contar um pouco da história dos números complexos também pode ser bastante motivador.
> Relacionar a radiciação de números complexos com elementos dos polígonos regulares é um trabalho de aplicação desse conteúdo, bastante interessante para aluno, que, a esta altura, tem oportunidades de tratar números e geometria entrosadamente (SÃO PAULO, 1992, p.41).

A seguir apresentamos o conteúdo de cada uma das vinte e duas questões com a respectiva análise a priori e a posteriori.

1) *Assinale as alternativas que mais se aproximam da sua ideia a respeito da Matemática.*

a) *A Matemática é uma disciplina difícil, pois os conceitos são inventados por pessoas em momento de inspiração, de maneira teórica, nada tendo a ver com os fatos concretos da nossa vida, como números complexos, logaritmos, etc. Grande parte dos conceitos matemáticos, são dados na escola somente para o aluno fazer exercícios que nada têm a ver com a realidade e depois fazer uma prova.*
b) *Os conceitos matemáticos nasceram de situações concretas do dia a dia.*
c) *Não tenho a menor ideia.*

Deste questionamento obtivemos 1 resposta da alternativa (a), 28 respostas da alternativa (b), e 2 não responderam o questionamento, o que nos assustou em relação as não respondidas e a resposta da alternativa (a), pois o questionário foi aplicado junto a alunos do curso de engenharia, onde entende-se que tem afinidade e gosto pela matemática, além de um raciocínio lógico mais apurado. Com relação às 28 respostas da alternativa (b), entendemos que os alunos tiveram a percepção e o aprendizado de conceitos matemáticos através de problemas concretos e situações aplicadas, porém, ao analisarmos as demais respostas do questionário, vemos uma contradição, o que nos passou a impressão de que muitos escolheram essa alternativa porque acreditam nela, ou até por julgar mais coerente, porém não tem clareza sobre seu significado, ou seu aprendizado não condiz com a alternativa escolhida.

2) *Números Complexos, são aqueles do tipo a + bi onde a e b são números reais e $\sqrt{-1} = i$ ou $i^2 = -1$. Você já estudou esse tipo de números?*

a) *Sim* b) *Não*

Para esse questionamento, obtivemos 22 respostas na alternativa (a) e 9 respostas na alternativa (b). Como da classe de 60 alunos, somente 31 se dispuseram a participar dessa pesquisa, temos a crer que muitos mais não estudaram os números complexos. Cremos que talvez pelo fato de termos mencionado que a pesquisa era sobre esse assunto, muitos que não conheciam o assunto, nem se arriscaram a participar da pesquisa. Alguns poucos até pegaram a folha de pesquisa e nos devolveram logo em seguida.

3) *Como você acha que os números complexos foram descobertos?*

a) *Quando um matemático ao resolver uma equação do segundo grau se deparou com um discriminante negativo (* $\Delta = b^2 - 4.a.c$ *), e para continuar a resolução ele resolveu criar um número i tal que* $i^2 = -1$*.*

b) *Os números complexos foram descobertos quando um matemático tentava resolver uma equação do terceiro grau.*

c) *Não tenho a menor ideia.*

Em relação a essa questão, obtivemos 2 respostas da alternativa (a), o que ficou claro para nós que esses alunos haviam estudado alguma coisa sobre o conteúdo, porém a introdução desse conteúdo, ou a ênfase fora dada na resolução de equações de segundo grau, quando o discriminante é negativo. Tivemos 6 respostas da alternativa (b), o que nesse caso nos mostrou que esses estudantes haviam aprendido os números complexos e tinham clareza sobre seu surgimento dentro do contexto histórico e o que levou ao descobrimento de tais números. Outras 11 respostas da alternativa (c), vem corroborar com a nossa conclusão em relação a questão número 1, onde percebemos que muitos alunos não têm clareza sobre muitos conceitos matemáticos e seus desenvolvimentos. Ainda obtivemos 2 alunos que não responderam esse questionamento, demonstrando que também não tem conhecimento sobre o assunto.

4) *Você já resolveu algum problema concreto do dia a dia, que apesar de na sua resolução aparecer raiz quadrada de um número negativo, o resultado final foi um número real, como R$ 3,00, 7 metros, etc., enfim que representava uma quantidade?*

a) Sim *b) Não*

Se você respondeu sim, pode descrever como era esse problema?

Com relação a essa questão, 7 responderam a alternativa (a), 22 responderam a alternativa (b), 1 respondeu as duas alternativas e 2 não responderam. No caso das respostas em relação a alternativa (a), foi solicitado também para que o aluno descrevesse o problema. Dos 7, obtivemos 2 respostas: não lembro, 1 resposta onde o aluno tentou explicar o problema, porém muito sem sentido, os outros nada responderam. Diante disso, realmente nos questionamos se realmente esses 7 alunos viram problemas desse tipo ou se tal situação em um problema apareceu devido a um erro de cálculo matemático na resolução. De qualquer forma, observamos que a maioria não sabe que números complexos também podem ser utilizados na resolução de situações contextualizadas.

5) *Baseado no seu conhecimento de números complexos coloque V no verdadeiro e F no falso.*

____ Os números complexos como, por exemplo, 2 + 3i, na realidade não são números, são apenas representações matemáticas, pois não representam uma quantidade, uma vez que ninguém diz: "ganho (2+3i) reais de salário", ou paguei (4-2i) reais, ou ainda andei (7+2i) metros, etc.

Neste item, obtivemos 12 respostas como (V), 13 respostas como (F), e 6 não responderam. Ficou evidente que os 12 alunos que responderam V e os 6 que não responderam, veem os números complexos como mero símbolos e destituídos de significados. Já os outros 13 conseguem perceber que os conceitos matemáticos possuem alguma finalidade concreta, mesmo que eles ainda não tenham total domínio ou não saibam exatamente para que servem.

____ Os números complexos são números sim, pois com eles podemos resolver problemas do dia-a-dia e chegar à resposta que representam quantidades.

Aqui nesse item, obtivemos 17 respostas (V), 8 respostas (F) e 6 não responderam. Ao compararmos essas respostas com as do item anterior, vemos claramente que os alunos são contraditórios e não possuem clareza sobre os conceitos dos números complexos e nem de sua utilidade. Temos motivos para crer que as 17 respostas (V), deve-se ao fato de que esses alunos creem que os conceitos matemáticos devem ter alguma utilidade, mesmo eles não sabendo como utiliza-los.

____ *Os números complexos são na verdade a expressão matemática dos vetores e eles podem ser percebidos nos fenômenos físicos, nas relações geométricas, matriciais, etc.*

Nesse item, obtivemos 16 respostas (V), 8 respostas (F) e 7 não responderam. É evidente que essas respostas estão compatíveis com as do item anterior. Cremos que os alunos para responderem esse item, devem ter relacionado ao conteúdo de álgebra linear, que faz parte da grade curricular desse semestre e/ou se lembraram de alguns aspectos do que haviam aprendido quando estudaram os números complexos.

Olhando para as respostas dessa questão, fica claro que para vários alunos, os números complexos são meros símbolos e sem significado.

6) *Dentre os nomes abaixo, quais você associaria com a história dos números complexos?*

a) Bombelli *b) Argand* *c) Wallis* *d) Wessel*

e) Gauss *f) Hamilton* *g) Cardano* *h) Moivre*

Para esse questionamento, obtivemos 1 resposta (a), 1 resposta (b), 4 respostas (c), 1 resposta (d), 10 respostas (e), 2 respostas (f), 3 respostas (g), 1 resposta (h), 12 não responderam. Somente dois alunos selecionaram mais de 1 resposta. No entanto, apesar de nos levar a pensar que esses dois alunos que assinalaram mais de uma resposta devem conhecer mais dos números complexos e sua história, isso não é verdade, pois ambos a alternativa (c); o único matemático da lista acima que não teve qualquer contribuição em relação aos números complexos.

Com relação as demais respostas, vê-se claramente uma insegurança por parte dos alunos em relação ao contexto histórico, visto que quem escolheu por exemplo a alternativa (b) “Argand”, não escolheu a alternativa (e) “Gauss” e no entanto o plano representativo geométrico de um número complexo é conhecido como “Plano Argand-Gauss”.

7) *Você já tentou resolver um problema de geometria utilizando os números complexos?*

   a) sim *b) não*

Acha que seria possível? ____

Nessa questão obtivemos 6 respostas (a), 21 respostas (b) e 8 não responderam. Ficou claro que o ensino dos números complexos no ensino médio é destituído de significado geométrico. Esse é um dos motivos do qual os alunos perceberem esses números como meros símbolos e sem significado. No entanto, quando questionamos se “acha que seria possível?” na segunda parte da questão, obtivemos 12 respostas sim, 1 resposta não, 2 responderam “talvez”, 1 respondeu que nunca tentou, 1 respondeu que “tudo é possível”, 1 respondeu “pois com ele você pode obter pontos”, e 13 não responderam.

8) *Um número real nós podemos representar geometricamente na reta real. E um número complexo, é possível representar geometricamente?*

a) Sim *b) Não*

Se você respondeu sim, tente no espaço abaixo representar geometricamente o número 2+3i

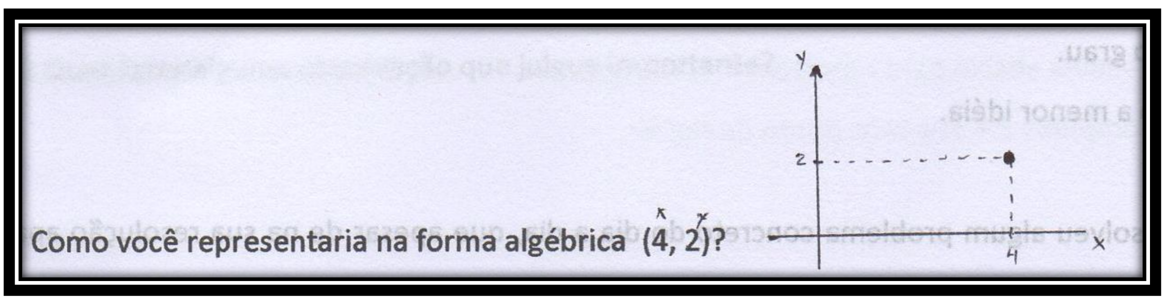
Nessa questão, tivemos 15 respostas sim, 7 respostas não, 8 não responderam e 1 afirmou que desconhece. Nos casos afirmativos, foi solicitado que o aluno representasse o número 2 + 3i de forma geométrica. Somente 4 fizeram a representação e desses 1 acertou e 3 erraram, sendo que um deles, confundiu a reta real com a imaginária. Fica evidente que os alunos lembram-se vagamente que é possível fazer a representação geométrica. Nos surpreendemos nesse quesito, pois imaginávamos que muitos fariam com facilidade essa questão, contrariando nossa previsão.

9) Como você representaria na forma algébrica (4, 2)?

Neste item, esperava-se que os alunos soubessem articular a representação em par ordenado e a representação na forma algébrica. Um total de 24 alunos não respondeu essa questão. Sete estudantes tentaram fazer, mas erraram; sendo que 4 deles fizeram a representação geométrica, conforme a figura 19. No que diz respeito ao conteúdo desta figura, a representação do par ordenado está voltada para o aspecto funcional e não para o conjunto dos números complexos.

Tendo em vista esse enunciado há indícios de que eles não compreendem a distinção entre representação algébrica e representação geométrica.

Figura 19: Resposta de aluno

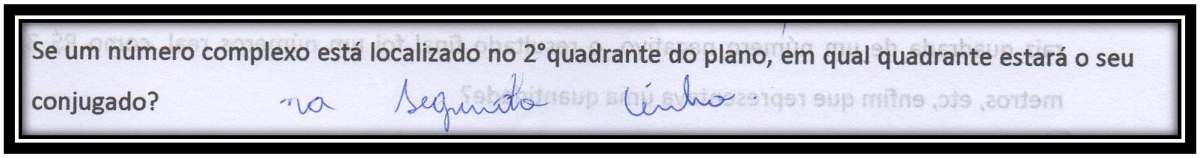


Fonte: Material da Autora

10) Se um número complexo está localizado no 2°quadrante do plano, em qual quadrante estará o seu conjugado?

No caso desse questionamento, esperava-se que o aluno soubesse a relação de simetria entre o número complexo e seu conjugado. Neste caso tivemos 1 acerto, 5 respostas erradas e 25 não responderam, o que ficou evidente que o aluno sequer reconhece o conjugado de um número complexo. Na figura 20, observa-se em relação a esse item, que o aluno confunde quadrante com linha

Figura 20: Resposta de aluno


Se um número complexo está localizado no 2°quadrante do plano, em qual quadrante estará o seu conjugado? na Segundo linha

Fonte: Material da Autora

11) Você sabe explicar o que acontece quando somamos um número complexo com o seu conjugado?

Aqui esperávamos que o aluno, além de conhecer os números complexos, saber a relação entre o complexo e seu conjugado, além da relação de simetria entre eles, soubesse que a operação de adição entre eles remete a um número real. Nesse quesito, 1 aluno errou a resposta, 25 não responderam, 4 disseram “não” e 1 estudante afirmou que “tal soma não existe”.

12) Qual das alternativas abaixo representa uma relação com as operações da adição e subtração de complexos:

a) Teorema de Pitágoras
b) Regra do Paralelogramo
c) Teorema de Tales
d) Regras Trigonométricas
e) Teorema de Bhaskara

Nessa pergunta ficou claro que os alunos reconhecem os vários Teoremas e Regras, porém não sabem quando utilizá-los e nem muito menos tem claro seus conceitos. Obtivemos 7 respostas na alternativa (a), 2 respostas na alternativa (b), 7 respostas na alternativa (c), 2 respostas na alternativa (d) e 3 respostas na alternativa (e). Neste caso, dos 31 participantes, somente 2 acertaram a resposta

13) Ao tomarmos um número complexo z, pertencente ao primeiro quadrante do plano, se multiplicarmos este complexo z por i (unidade imaginária), onde estará a imagem resultante?

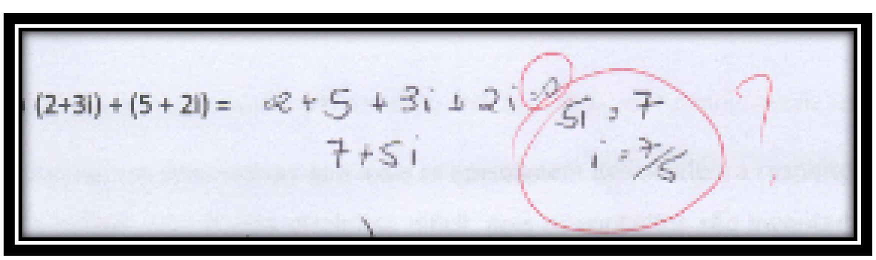
Mais uma vez ficou evidente que os alunos têm déficit de saberes no que diz respeito aos conceitos sobre números complexos. Tivemos 1 resposta certa, 2 respostas erradas e 28 alunos não responderam. Entre as respostas erradas, uma delas chamou-nos a atenção: “*no segundo número*”, mostrando que não tem a menor compreensão do assunto.

Nas questões abaixo, esperávamos que os alunos soubessem resolver e até temos razões para crer que esses articularam a informação com a forma de representação vetorial, estudada na aula de álgebra linear. Por estarem no segundo semestre do curso de Engenharia Civil, faz parte da grade curricular para este semestre, a disciplina de álgebra linear, onde os alunos aprendem os conceitos, as operações e relações vetoriais. Dessa forma, no momento da aplicação dessa pesquisa (agosto de 2014), eles estavam aprendendo que um par ordenado é uma representação vetorial e que o mesmo, semelhantemente ao número complexo, pode ser representado geometricamente.

14) (2 + 3i) + (5 + 2i) =

Neste caso tivemos 2 acertos, 24 optaram por não fazer e 5 erraram. Em um dos casos, o aluno aplica a propriedade distributiva da multiplicação. Um outro caso que também nos chamou a atenção, pode ser visto na figura 21, abaixo. Observa-se que o aluno efetua corretamente a adição, porém erra, ao iguala-la a zero e resolve-la como se fosse uma equação do 1° grau, chegando ao resultado de (*i*).

Figura 21: Resposta de Aluno

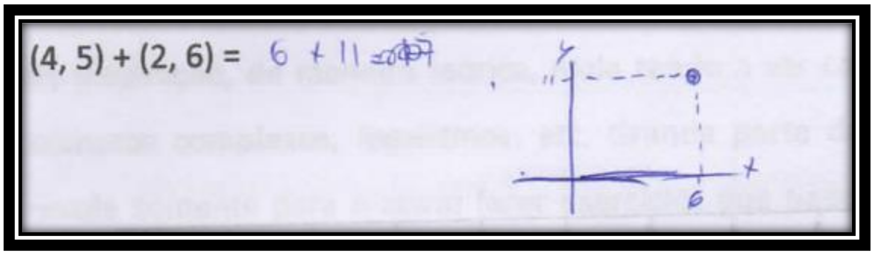


Fonte: Material da Autora

15) (4, 5) + (2, 6) =

Nesta questão, ficamos muito surpresa com relação ao resultado, pois esperávamos que todos realizassem a operação, devido ao fato de que a soma de números complexos na forma de par ordenado é igual à soma de vetores do $\boldsymbol{R^2}$, no entanto, 23 alunos não fizeram, 7 acertaram e 1 dos alunos, respondeu conforme figura 22:

Figura 22: Resposta de Aluno



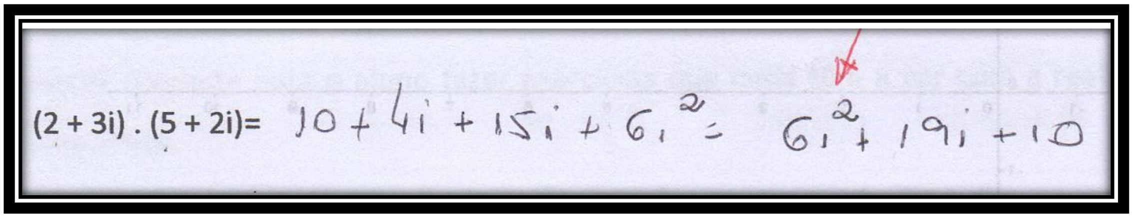
Fonte: Material da Autora

Vê-se claramente que o aluno opera a soma corretamente, porém não escreve em forma de par ordenado, antes, efetua a soma das duas componentes do número complexo (vetor) resultante. Aqui é notório que ele confunde a operação de soma vetorial com a operação de produto escalar, estudado em álgebra linear. Para completar ainda tenta representar o vetor resultante no sistema cartesiano, o que mostra claramente que ele não enxergando como números complexos, mas sim como vetores do $\boldsymbol{R^2}$.

16) (2 + 3i) . (5 + 2i) =

Nesta questão 5 alunos erraram e 26 não conseguiram efetuar a operação. Observamos a aplicação correta da propriedade distributiva, porém, os alunos não utilizaram a substituição $i^2 = -1$, impossibilitando chegar à resposta correta (figura 23).

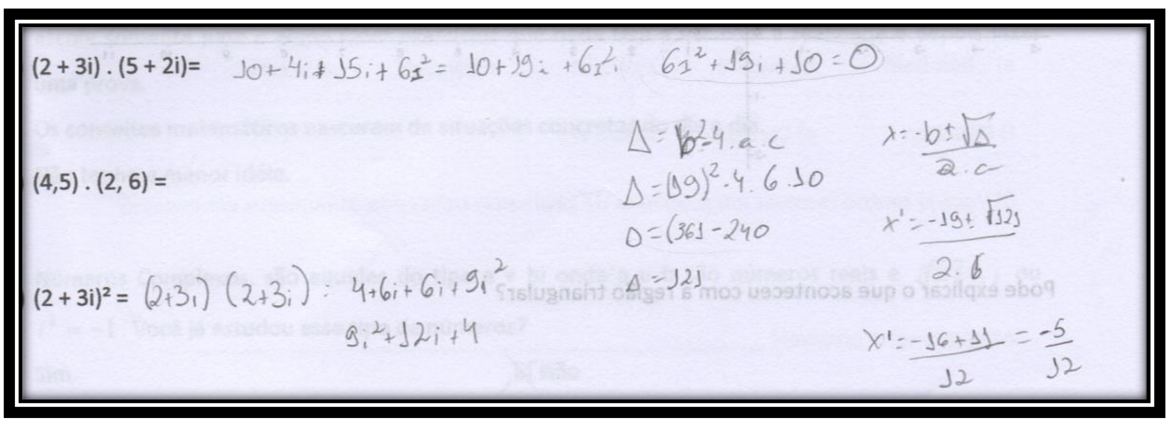
Figura 23: Resposta de aluno



Fonte: Material da Autora

Um caso que chamou a atenção foi o aluno que igualou o produto dos números complexos a zero e aplicou a Fórmula de Bhaskara, para encontrar o valor da suposta incógnita "*i*", a qual foi trocada por *"x"* (figura 24). Trata-se de mais um caso de desconhecimento que o produto de dois números complexos é um número complexo e que o mesmo não tem relação alguma com o cálculo de raiz de uma equação.

Figura 24: Resposta do aluno

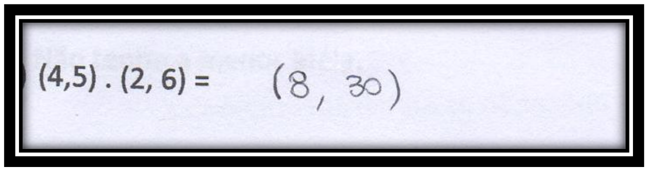


Fonte: Material da Autora

17) (4,5) . (2, 6) =

Os quatro alunos que resolveram esta questão cometeram o seguinte erro:

Figura 25: Resposta de aluno



Fonte: Material da Autora

Em termos de registros de representação semiótica (Duval, 2003) há um desconhecimento por parte dos estudantes na conversão de registros, ou seja, eles não compreenderam que (4, 5) é uma forma de representar o número complexo z = 4 +5i.

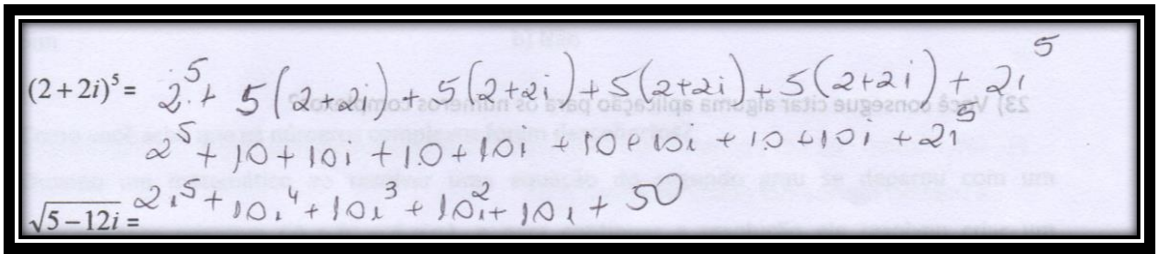
18) $(2 + 3i)^2$ =

Nesta questão, ficamos surpresos, pois esperávamos que os alunos demonstrassem domínio no desenvolvimento dos Produtos Notáveis para a solução. Apenas cinco alunos fizeram a questão e erraram a resposta, pois elevaram somente o 1° e o 2° termo ao quadrado, esquecendo-se de multiplicar o 1° e o 2° termo por 2.

19) $(2+2i)^5 =$

Os mesmos alunos que tentaram resolver a questão 16 reproduziram erroneamente o mesmo princípio de resolução para esta questão, ou seja, elevaram somente o 1° e o 2° termo a quinta potência. A resolução esperada deveria envolver o registro semiótico na forma trigonométrica. Na figura 26 apresentamos a tentativa de um aluno em desenvolver termo a termo do produto notável a partir do suposto desenvolvimento de $(a+b)^5$:

Figura 26: Resposta de aluno

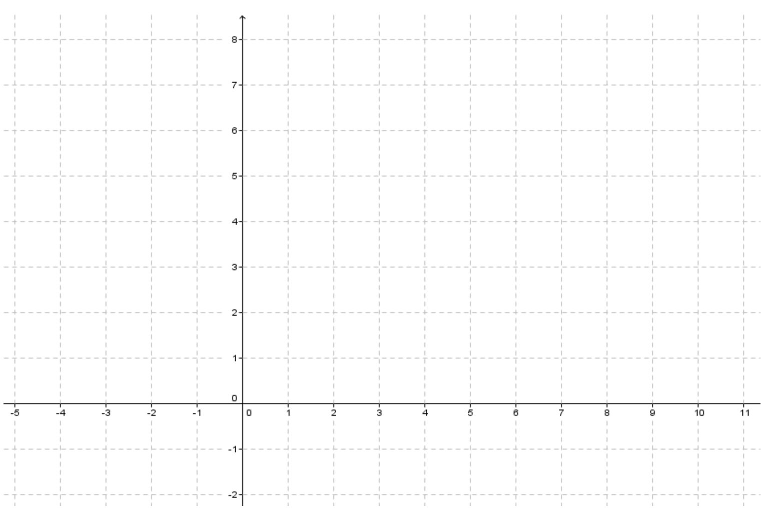


Fonte: Material da Autora

20) $\sqrt{5-12i}$ =

Esta questão não foi resolvida por nenhum aluno. Nossa expectativa era saber se algum deles lembrava-se da fórmula de Moivre. Porém, a maioria dos nossos estudantes, são oriundos de escolas públicas, e no Caderno do Aluno e do Professor (SÃO PAULO, 2014) esta parte do conteúdo foi excluída.

21) Considerando no plano complexo uma região triangular formada pelos complexos (1, 2); (4, 1) e (3, 4). Utilize a malha abaixo para representar essa região e o resultado da transformação que adiciona o número complexo 2 + 3i a cada ponto da região.



Pode explicar o que aconteceu com a região triangular?

Apenas um aluno tentou resolver a questão, apenas localizando os pares ordenados no Plano de Argand-Gauss. Era esperado como resultado da solução que os alunos percebessem que se promove uma mudança de posição da região triangular, ou uma translação em relação ao número complexo.

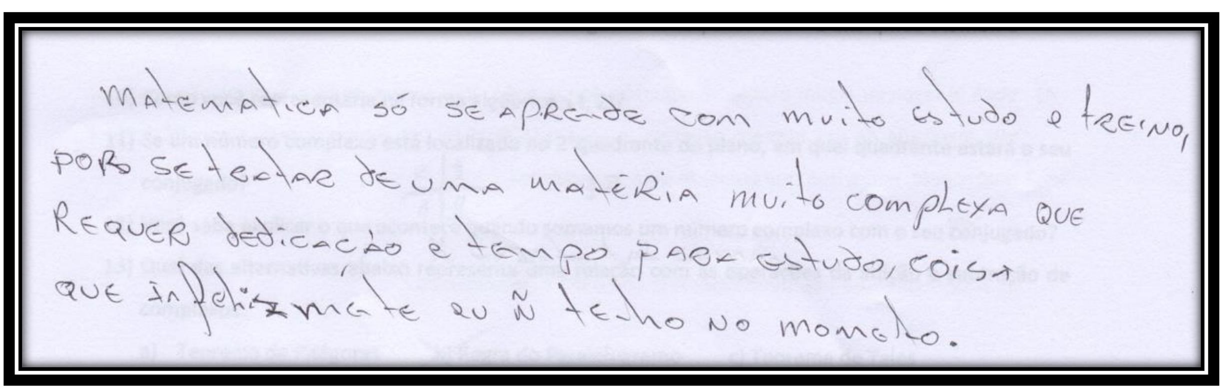
22) Você consegue citar alguma aplicação para os números complexos?

Nesta questão, 27 alunos não se manifestaram, 3 responderam não e 1 respondeu "*limite, escalonamento e outros*", demonstrando assim que desconhece o assunto.

23) Quer fazer alguma observação que julgue importante?

Neste caso, somente duas pessoas se manifestaram para fazer comentários, sendo que um informou não se lembrar do conteúdo, ou seja, dá indícios de que estudou o assunto, porém esqueceu. No segundo caso, o comentário contempla a necessidade de estudo, dedicação e tempo para se aprender a matemática, de acordo com o relato a seguir:

Figura 27: Resposta de aluno


Matematica só se aprende com muito estudo e treino, por se tratar de uma matéria muito complexa que requer dedicação e tempo para estudo, coisa que infelizmente eu ñ tenho no momento.

Fonte: Material da Autora

O que se vê na fala do aluno acima, é a necessidade de uma compreensão dos conceitos matemáticos. Naturalmente o aluno tem um amadurecimento matemático simplista e não consegue observar que há outros aspectos importantes envolvidos na concepção da matemática, como por exemplo uma “alfabetização matemática”, conforme afirma Duval (2012, p. 307)

Fazendo uma análise do todo em relação as respostas do questionário aplicado, observa-se que o conteúdo até foi ensinado aos alunos, porém não foi plenamente absorvido e compreendido. Falando sobre a importância da compreensão para que haja aprendizado, Duval (2012, p.309) afirma:

> Na matemática, mais que em todas as outras disciplinas, é necessário compreender para poder aprender. Somente se pode aprender matemática e concluir as atividades propostas se compreendermos não somente as instruções e os enunciados de um problema, mas também aquilo que se pode fazer para buscar resolvê-lo e por que aquilo que se encontra está certo ou errado. A repetição sem reflexão não gera nenhuma aquisição real e útil. Isto se deve a que utilizar este procedimento ou considerar explicações advindas dele conduz frequentemente a resultados errôneos e confusos que mostram que “não se entendeu”, ou que o conhecimento subjacente não foi adquirido. Esta exigência constante de compreensão coloca o ensino da matemática em uma situação muito particular em relação a todos os outros ensinos e aponta a uma primeira pergunta sobre aquilo que se entende por “compreender”. Aqui, divergências profundas aparecem entre o ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo.

Na análise dos dados coletados por Rosa, na questão de número 2, este evidencia que as respostas dos alunos em relação ao surgimento dos números complexos, ocorreu devido a tentativa de resolução de equação de 2° grau, cujo discriminante era negativo. Nesse aspecto, Rosa observa que além dos materiais didáticos privilegiarem por resolução de tais equações, muito presente nos livros didáticos ainda hoje, não havia a contextualização histórica de que tais números surgem na verdade, como busca de soluções de equações cúbicas, contrariando a proposta do Currículo do Estado de São Paulo, vigente à época. Segundo Rosa (1998, 92):

> Os alunos foram questionados se os números complexos surgiram quando da resolução de uma equação do segundo grau ou do terceiro grau. Todos responderam que foi a equação do 2° grau que

> originou os complexos e isso parece indicar que nenhum deles teve contato com esses números da maneira como surgiram na história, quando da resolução de uma equação do terceiro grau**. Esse fato talvez seja a explicação para que eles operem sem ver significado nas operações.** (Grifo nosso)

De acordo com Rosa (1998, p. 92), “o fato de os alunos não conhecerem a história da matemática, ... não o impede de realizar operações matemáticas e representá-los (os números complexos) geometricamente”. Em sua conclusão sobre a análise, Rosa (1998, p.113) afirma:

> Analisando as respostas dos alunos pudemos constatar que nenhum deles teve contato com os números complexos da maneira como estamos sugerindo nesse trabalho, ou seja, através de uma equação do 3° grau. Nenhum deles conseguiu extrair raízes de números complexos nem efetuar potenciação e uma pequena minoria conseguiu efetuar o produto de números complexos. A maioria dos alunos acha que os conceitos Matemáticos surgem de situações reais, mas eles não se depararam com esses conceitos através de situações concretas, e este é um bom motivo para introduzir-se os conceitos como eles surgiram na história. Os alunos que julgam que os conceitos matemáticos são inventados erraram as operações mais simples com números complexos, o que parece evidenciar que se um conceito é simplesmente inventado, não deve ter aplicação nem importância, o que faz com que os alunos não se interessem por ele.

O questionário de Rosa (1998) era composto por 13 questões sendo elas as seguintes em relação ao nosso questionário: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 14, 15,16, 17, 18, 19 e 20. Salientamos ainda que em nosso questionário, acrescentamos a alternativa (c) nas questões 1, 3 e 5, quando comparado com o questionário de Rosa. Observamos que coincidentemente na pesquisa de Rosa, bem como na nossa, tivemos a participação da mesma quantidade de alunos, ou seja, 31.

Quanto ao acréscimo da alternativa c nessas três questões, deu-se devido ao foco da pesquisa nossa ser um pouco diferente, a de Rosa. Nas questões 1 e 3, acrescentamos a alternativa c (não tenho a menor ideia), pois nosso objetivo era verificar se o aluno teve realmente algum contato com o conteúdo “números complexos” do material Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), que trabalha na vertente de reconstruir o surgimento dos números complexos dentro de uma contextualização histórica, a partir da resolução de equações de 3° grau. Nesse o aspecto, ao olharmos para o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), parece enxergarmos nele a pesquisa de Rosa que propõe que os números complexos devem ser ensinados a partir da contextualização histórica do seu surgimento.

No entanto, devido ao posicionamento adotado pelo PCN+ (BRASIL, 2002, p.122), onde esse se posiciona que os números complexos servem apenas para resoluções de equações de grau superiores e que portanto podem ser tratados na parte flexível do currículo escolar. Tal posicionamento tem levado muitas escolas a abolirem de seus currículos, o estudo dos números complexos. O atual Currículo do Estado de São Paulo não o aboliu, porém pouca importância dá a esse estudo e isso fica claro quando olhamos a forma como o mesmo está sendo abordado no material que vem sendo distribuído aos alunos da rede estadual, desde 2008, denominado “Caderno do Aluno”.

O foco dos números complexos dentro da contextualização histórica no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), se dá meramente para atender a fala da ampliação dos conjuntos numéricos e para a resolução das equações polinomiais. Diante disso, não foi surpresa para nós, obtermos 11 alunos que nos responderam justamente a alternativa “c” da questão de número 3, onde questionamos sobre o surgimento dos números complexos, ou seja, esses não têm “a menor ideia”. Em contra partida, também obtivemos 12 alunos respondendo a alternativa “a”, que alega que tais números surgiram da resolução de equações do 2° grau, cujo discriminante é negativo. Esse número expressivo de escolhas pode ter acontecido devido a própria orientação do OCEM (BRASIL, 2006, p. 71)

> Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$.

Nesse aspecto, o OCEM (BRASIL, 2006) está em contradição com Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), já que este faz uma sutil reconstrução histórica, se valendo da fórmula de Tartaglia e Cardano resolução de funções polinomiais do 3° grau, onde devido à necessidade, surgem os números complexos. Fica evidente pelo Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) que o foco não é o estudo dos números complexos, mas sim a ampliação dos conjuntos numéricos para resolução de equações polinomiais. Temos motivos para crer que esse conflito de enfoques entre o OCEM (BRASIL, 2006) e o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) é devido ao fato de que temos professores da Rede Estadual que trabalham na perspectiva do Caderno do Aluno e outros professores, utilizam outros materiais didáticos, como por exemplo, os livros do PNLEM.

Vamos observar agora a tabela 3, com as informações dispostas a partir da pesquisa de Rosa (1998) e do trabalho de campo realizado por esta professora-pesquisadora. Adotamos a nomenclatura A (acertos), E (erros). Lembramos que o teor das questões poderá ser visualizado no Anexo A.

Também é possível observar as comparações questão a questão, no gráfico 1 abaixo, onde Rosa A e Rosa E significam os acertos e erros da pesquisa de Rosa respectivamente em relação as questões e similar, Amorim A e Amorim E os acertos e erros na pesquisa de Amorim respectivamente.

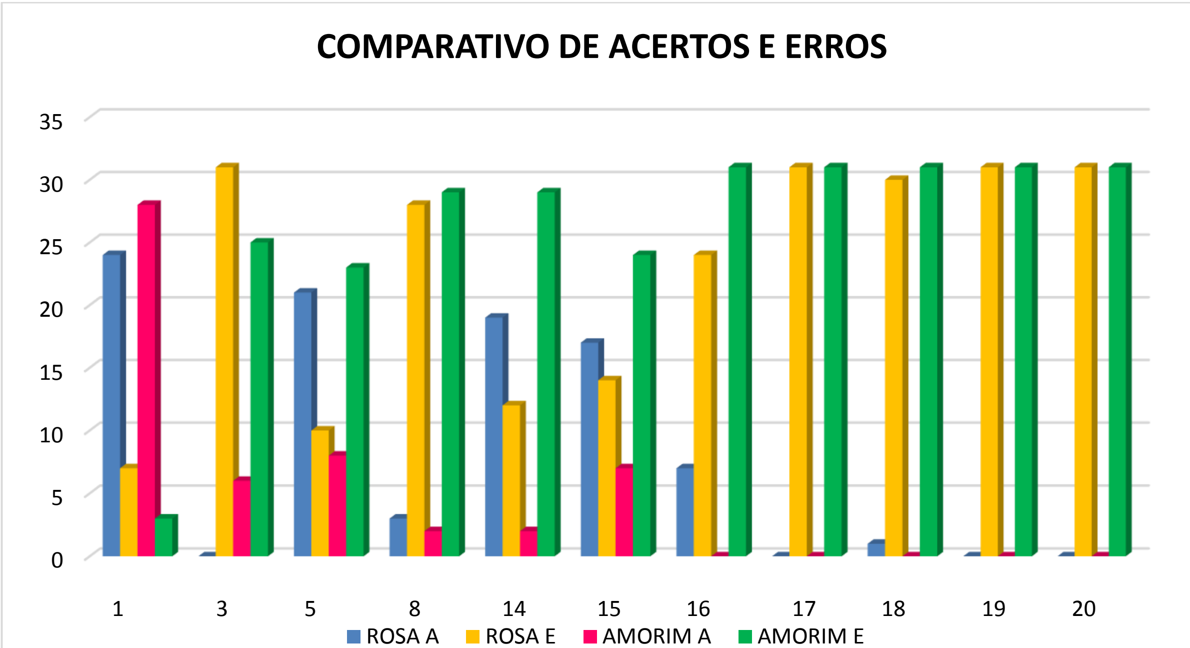
Tabela 3: Análise comparativa Rosa X Amorim

Questão	ROSA				AMORIM			
	A	%	E	%	A	%	E	%
1	24	77%	7	23%	28	90%	3	10%
3	0	0%	31	100%	6	19%	25	81%
5	21	68%	10	32%	8	26%	23	74%
8	3	10%	28	90%	2	6%	29	94%
14	19	61%	12	39%	2	6%	29	94%
15	17	55%	14	45%	7	23%	24	77%
16	7	23%	24	77%	0	0%	31	100%
17	0	0%	31	100%	0	0%	31	100%
18	1	3%	30	97%	0	0%	31	100%
19	0	0%	31	100%	0	0%	31	100%
20	0	0%	31	100%	0	0%	31	100%

Fonte: Material da autora

Também é possível observar as comparações questão a questão, no gráfico 1, onde Rosa A e Rosa E denotam os acertos e erros dos dados de Rosa (1998) para cada uma das questões e, de forma similar, Amorim A e Amorim E representam os acertos e erros relativos aos resultados do nosso questionário:

Gráfico 1



Fonte: Material da autora

Ao analisarmos as respostas da questão 1, verificamos que muito embora tenhamos ligeiramente um índice de acerto maior em nossa aplicação, comparado ao de Rosa, porém não é nada de tão expressivo a ponto de concluirmos que houve algum avanço. Com relação a questão número 3 temos um alto índice de erro, sendo ligeiramente melhor na situação da nossa aplicação, onde o índice é um pouco mais baixo, porém nada de tão expressivo também. Isso se deve em parte, ao que já foi comentado anteriormente, sobre a abordagem envolvendo o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014). De qualquer forma já se percebe que alguns alunos tem o conhecimento de que o surgimento dos números complexos está relacionado à resolução de equações do 3° grau.

A diferença de acertos em relação a questão de número 5, temos motivos para crer que está relacionado ao fato de que em nossa pesquisa elencamos 3 informações para serem avaliadas entre verdadeiro ou falso e no caso da pesquisa de Rosa havia apenas duas alternativas da qual Rosa informava que uma estava certa e outra errada. Se em nossa pesquisa considerarmos apenas as duas questões elencadas por Rosa, teremos 12 alunos que acertaram, já que 4 ficaram em dúvida em relação ao item inserido por nós, que mencionava a articulação dos números complexos aos vetores.

Em relação a questão 8, podemos dizer que o índice de acerto permaneceu e muito baixo, ou seja, os alunos continuam apresentando problemas nas conversões de representação semiótica, ou seja, conversão do registro algébrico para o registro gráfico. Neste caso, como tal conversão é congruente, esse procedimento deveria ser trivial, de acordo com Duval (2012, p.283)

Sintetizando nossa conclusão em relação as demais questões, observa-se em nossa pesquisa em relação a Rosa de que na maioria dos casos as dificuldades vão além do simplesmente transitar pelos registros de representação semiótica, que deveriam ser dominados por esses estudantes. Quando comparamos os erros, percebemos em 1998 a maioria dos alunos erraram tentando fazer e na situação atual, a maioria dos alunos deixaram em branco porque não tem entendimento matemático para compreender o que o exercício pede.

A impressão que temos é que o que estava ruim, ficou um pouco pior, pois os erros apresentados pelos alunos na pesquisa de Rosa, estavam ligados aos registros de representação semiótica nas transformações e conversões e os erros apresentados pela grande maioria nos dias atuais, podemos denominar como "*alfabetização matemática insuficiente*", dificuldade essa mencionada por Duval (2012, p. 307), onde o aluno consegue ler os números, mas não compreende o significado. Em nossa pesquisa na maioria dos erros observados, os alunos deixaram em branco as questões. Generalizando nossa percepção em relação ao todo, concluímos que a situação de hoje está em vários aspectos, pior que em 1998, quando Rosa aplicou sua pesquisa.

Analisando as questões 2 e 4 que cuja resposta se limitava a "sim" ou "não", portanto não há em cima dessas questões uma concepção de certo ou errado. Dessa forma analisamos separadamente essas duas questões. Vejamos a comparação entre as respostas obtidas por Rosa e por nós (Amorim) no gráfico 2. Na tabela 4 abaixo, consideramos S (sim) e N (não). Relembrando as questões, temos:

2) *Números Complexos, são aqueles do tipo a + bi onde a e b são números reais e* $\sqrt{-1} = i$ ou $i^2 = -1$*. Você já estudou esse tipo de números?*

   a) *Sim* b) *Não*

4) *Você já resolveu algum problema concreto do dia a dia, que apesar de na sua resolução aparecer raiz quadrada de um número negativo, o resultado final foi um número real, como R$ 3,00, 7 metros, etc, enfim que representava uma quantidade?*

   a) *Sim* b) *Não*

   Se você respondeu sim, pode descrever como era esse problema?

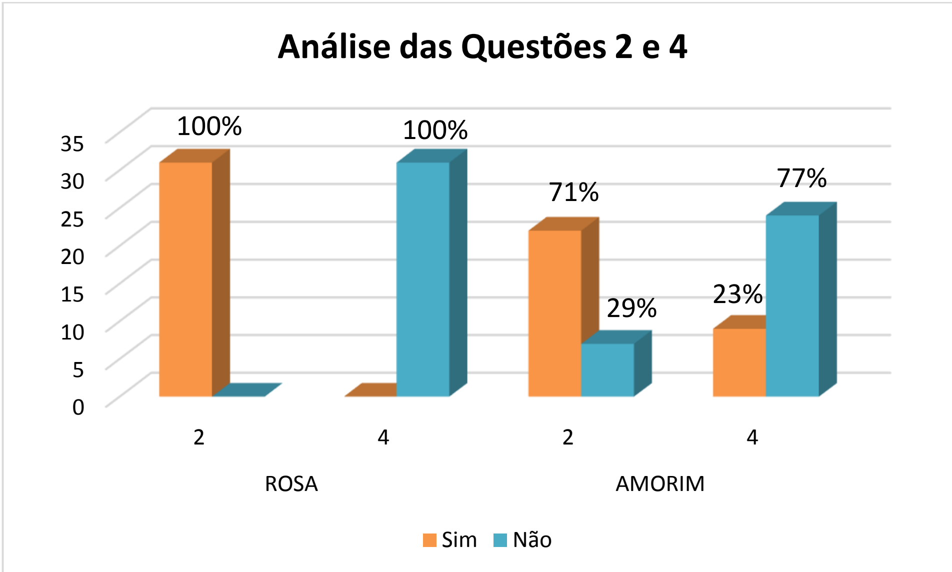
Tabela 4: Análise Comparativa das Questões 2 e 4

Questão	ROSA				AMORIM			
	S	%	N	%	S	%	N	%
2	31	100	0	0	22	71%	9	29%
4	0	0	31	100	7	23%	24	77%

Fonte: Material da autora

Comparando as informações, percebemos que nas respostas da questão 2 que 100% dos alunos em 1998 responderam sim, ou seja, haviam estudado os números complexos, contra 71% do tempo atual (2014). Podemos dizer que 30% dos alunos de hoje não sabem da existência do Conjunto dos Números Complexos, suas operações e propriedades. Isso vem de encontro com o que já afirmamos antes de que o PCN + (BRASIL, 2002), o qual descartou a aprendizagem desse conteúdo, produzindo reflexos negativos na aquisição de saberes de nossos alunos.

Gráfico 2



Fonte: Material da autora

Com relação a questão de número 4, observa-se que em 1998 não havia qualquer contextualização ao se trabalhar com esses números, deixando claro que esse conteúdo deveria ser desconexo com os demais conteúdos da matemática. A realidade atual ainda não mudou muito, mas percebe-se um avanço, 23% dos alunos atuais estudaram os números complexos, mesmo que sem aprofundamento, mas de uma forma um pouco mais contextualizada. Ainda colocamos em dúvida esse total, dentro do que percebemos pelas respostas dos próprios alunos. Há indícios que de alguns deles tenham chego erroneamente em resultados que geraram raízes de números negativos e daí concluírem que sim na pesquisa.

De qualquer forma, não podemos deixar de observar que o Caderno do Aluno da Secretaria do Estado de São Paulo, realmente procura fazer alguma contextualização. Entretanto, sabemos também que há professores hoje que tem procurado modificar suas práticas de aula, buscando dar significado ao que se ensina, mostrando aos estudantes que a matemática não é obra do acaso e que existem sim, aplicabilidades aos conteúdos estudados. Mas essa é uma realidade muito pequena ainda.

Com relação as demais questões que foram propostas por nós, que são as questões de números 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 21, 22, 23. Tais questões foram elencadas para atender o objetivo de nossa pesquisa, cujo foco está no trabalho dos números complexos dentro de uma concepção geométrica e histórica. Cremos que tais fenômenos são de suma importância para levar aos alunos a compreensão dos conceitos que envolvem esse estudo. Apenas a questão 23 que foi deixada com o objetivo de que o aluno pudesse ter espaço para nos dar alguma informação a mais, que viesse a acrescentar em nossa pesquisa.

A questão 6, remeteu os alunos aos fatos históricos do surgimento dos números complexos. As demais questões, foram elaboradas de forma a articular os conceitos que envolvem os números complexos e sua geometria. Dessa forma, para que o aluno pudesse responder, ele deveria estar familiarizado com as transições de tratamento e conversão dos registros semióticos que permeiam os números complexos, portanto era necessário eles terem conhecimento de tais conceitos que envolvem esse conteúdo da matemática.

Nosso propósito nessas questões era de verificar o domínio de quais saberes esses alunos levaram consigo para o ensino superior.

Com exceção da questão de número 10, que aborda sobre o conjugado de um complexo, conteúdo esse não trabalhado no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), todas as demais questões, foram elaboradas utilizando-se esse material.

Naturalmente esperava-se que esses alunos apresentassem esses saberes, no entanto o que concluímos é que:

I) Os alunos não têm noção dos fatos históricos que permeiam o surgimento dos números complexos.

II) Apesar de o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), dar uma certa contextualização geométrica no assunto porém deficitária, mas quando olhamos para o assunto como um todo, o foco não é o aprendizado dos números complexos e sim, se utilizar deles para resolução de equações polinomiais, pode-se ver claramente nas respostas dos alunos, suas dificuldades em transitar com os números complexos na sua forma geométrica. Nenhum aluno conseguiu realizar a questão 22, que era uma operação totalmente geométrica.

III) Os alunos demonstram não dominar as conversões congruentes, razão essa do porque eles não compreendem os conceitos básicos dos números complexos.

IV) Os alunos não dominam os conceitos básicos da operação de multiplicação. É evidente que eles não perceberam o significado da operação de forma geométrica.

V) Os alunos não aprenderam a lidar com as operações de potenciação e radiciação de números complexos. Tais operações não são abordadas no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014).

Concluímos segundo os pressupostos teóricos de Raymond Duval (2003) que para haver compreensão conceitual de um conteúdo, é necessário que os alunos coordenem pelo menos, dois registros distintos de representação semiótica.

Da mesma forma que tratamos os resultados do questionário aplicado aos alunos do Ensino Superior, faremos o tratamento das respostas frente ao mesmo instrumento de produção de informações, aplicado aos alunos do Ensino Médio.

.

4.3 – Questionário: Resultados frente aos estudantes do Ensino Médio

O mesmo questionário aplicado para estudantes do Ensino Superior também foi aplicado para uma amostra de 13 alunos de uma turma de 3ª série do Ensino Médio da Escola Estadual Coronel Dias Campos, na cidade de Capela do Alto/SP.

Nesta unidade escolar a professora da turma, colega do Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências Exatas (PPGECE) da pesquisadora, desenvolveu o conteúdo Números Complexos (operações e representação geométrica) de acordo com a proposta do Currículo do Estado de São Paulo (SÃOPAULO, 2010). Nas palavras da própria professora temos uma descrição mais detalhada do referido processo de ensino-aprendizagem:

> Conforme orientação do Currículo procurei não dar ênfase aos cálculos algébricos no estudo dos números complexos. Para

> introduzir o conteúdo, procurei mostrar a necessidade da expansão dos conjuntos numéricos já conhecidos, através da resolução de uma situação-problema, onde a equação que traduzia o problema era uma equação cúbica e na sua resolução nos deparamos com uma raiz quadrada negativa. A partir daí procurei enfatizar o significado e a representação geométrica dos complexos no plano, bem como as escritas na forma algébrica e trigonométrica. Através do Geogebra construímos equações polinomiais e tivemos a oportunidade de visualizar a localização das raízes reais e complexas de tais equações. Trabalhei as operações com complexos apenas dando ênfase as transformações de suas imagens no plano (fragmento do diário de bordo da pesquisadora).

Quando a professora terminou o referido conteúdo, ela combinou com a pesquisadora, a aplicação do questionário, o qual foi reduzido de uma questão em relação aquele aplicado na turma de Engenharia Civil.

O objetivo deste instrumento de produção de informações foi diagnosticar os saberes apreendidos sobre este conteúdo, durante o processo ensino-aprendizagem, com base nas tarefas propostas no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014). Este diagnóstico foi fundamental para o planejamento das tarefas utilizando o Geogebra**.**

A seguir apresentamos os enunciados de cada questão e as análises *a priori* e *a posteriori* relativas a um grupo voluntário de 6 alunas e 7 alunos concluintes do Ensino Médio, sendo 12 deles com 17 anos e 1 aluno com 16 anos:

1) *Assinale as alternativas que mais se aproximam da sua ideia a respeito da Matemática.*

a) *A Matemática é uma disciplina difícil, pois os conceitos são inventados por pessoas em momento de inspiração, de maneira teórica, nada tendo a ver com os fatos concretos da nossa vida, como números complexos, logaritmos, etc. Grande parte dos conceitos matemáticos, são dados na escola somente para o aluno fazer exercícios que nada têm a ver com a realidade e depois fazer uma prova.*
b) *Os conceitos matemáticos nasceram de situações concretas do dia a dia.*
c) *Não tenho a menor ideia.*

Em relação a esta questão, obtivemos 11 respostas da alternativa (b) e 2 respostas da alternativa (a). Nossa expectativa era de que todos tivessem bem claro a situação do surgimento dos conceitos da matemática e sua aplicabilidade. No entanto ainda há no grupo 2 alunos que não tem clareza desse fato.

2) *Números Complexos, são aqueles do tipo a + bi onde a e b são números reais e* $\sqrt{-1} = i$ *ou* $i^2 = -1$. *Você já estudou esse tipo de números?*
   a) Sim *b) Não*

Nesse caso, todos responderam sim e essa era a nossa expectativa, uma vez que os alunos haviam acabado de estudar sobre esse conteúdo e estavam em fase de preparação para a avaliação.

3) *Como você acha que os números complexos foram descobertos?*

a) *Quando um matemático ao resolver uma equação do segundo grau se deparou com um discriminante negativo (*$\Delta = b^2 - 4.a.c$*), e para continuar a resolução ele resolveu criar um número i tal que* $i^2 = -1$.
b) *Os números complexos foram descobertos quando um matemático tentava resolver uma equação do terceiro grau.*
c) *Não tenho a menor ideia.*

Neste caso, esperávamos que os alunos percebessem que o surgimento dos números complexos aconteceu através da busca por raízes de 3° grau.

O conteúdo de números complexos foi estrategicamente colocado no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), logo após a introdução do estudo de polinômios, onde há uma pequena contextualização sobre o seu desenvolvimento histórico e as contribuições de Cardano e Tartaglia. Dessa forma, esperava-se que os alunos lembrassem disso, apesar da professora da turma ter nos informado que essa parte do conteúdo fora estudado no segundo bimestre. Seis alunos assinalaram a alternativa (a) e um aluno marcou a alternativa (c), contrariando nossa expectativa de que essas respostas não seriam escolhidas. Os demais alunos (6) escolheram a alternativa (b). Neste sentido, 53,8% dos alunos não compreenderam os conceitos em relação ao surgimento dos números complexos.

4) *Você já resolveu algum problema concreto do dia a dia, que apesar de na sua resolução aparecer raiz quadrada de um número negativo, o resultado final foi um número real, como R$ 3,00, 7 metros, etc, enfim que representava uma quantidade?*

   b) Sim *b) Não*

Nesta questão ficamos bastante surpresa, pois 12 alunos responderam não e somente 1 respondeu sim, o que contrariou totalmente nossa expectativa, uma vez que a professora relatou que abordou o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) e esta questão foi planejada com base no volume 1, no qual a tarefa 6 (p.58)[4], contém uma solução via cálculo de uma raiz de um número negativo. O único aluno que respondeu "sim", quando solicitado a explicar como era o problema respondeu: "*não sei explicar*."

5) *Baseado no seu conhecimento de números complexos coloque V no verdadeiro e F no falso.*

____ Os números complexos como, por exemplo, 2 + 3i, na realidade não são números, são apenas representações matemáticas, pois não representam uma quantidade, uma vez que ninguém diz: "ganho (2+3i) reais de salário", ou paguei (4-2i) reais, ou ainda andei (7+2i) metros, etc.

[4] 6. Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo com base retangular, de lados 3 m e 5 m, e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4 m. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4 m³ maior que o do paralelepípedo. a) Escreva a equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de x. b) Use a fórmula de Cardano-Tartaglia para determinar as raízes da equação do item a. A que conclusão você chega? Verifique diretamente na equação apresentada que x = 4 m é uma raiz, ou seja, fazendo x = 4 m, temos o cubo com volume de 64 m³ e o paralelepípedo com volume de 60 m³

Nessa alternativa 8 responderam (V) verdadeiro e 5 responderam (F) falso. Esperava-se que todos respondessem falso, mas diante da resposta obtida no exercício anterior, talvez devesse esperar 100% verdadeiro, já que os mesmos alegaram não terem resolvidos problemas com contextualização em números complexos. No entanto, percebe-se que existem 38,5% dos alunos que acreditam na possibilidade de utilizar os complexos para resolução de situações contextualizadas.

____ *Os números complexos são números sim, pois com eles podemos resolver problemas do dia-a-dia e chegar à resposta que representam quantidades.*

Para esta proposição, obtivemos 7 respostas (V) verdadeira e 6 respostas (F) falsa. Naturalmente que a ideia aqui era de que eles tivessem escolhido como falsa a alternativa anterior e verdadeira essa alternativa. Reitera-se o que foi dito acima, que existem alunos que acreditam na possibilidade da utilização dos números complexos na resolução de problemas.

____ *Os números complexos são na verdade a expressão matemática dos vetores e eles podem ser percebidos nos fenômenos físicos, nas relações geométricas, matriciais, etc.*

Nessa alternativa, novamente obteve-se 8 (V) verdadeiro e 5 (F) falso, ratificando o desempenho da afirmação anterior.

6) Dentre os nomes abaixo, quais você associaria com a história dos números complexos?

a) Bombelli *b) Argand* *c) Wallis* *d) Wessel*

e) Gauss *f) Hamilton* *g) Cardano* *h) Moivre*

Ao colocarmos essa questão, a intensão era verificar se os alunos conseguiam relacionar os fatos históricos com os seus protagonistas. Uma pessoa a alternativa (b), 2 na alternativa (c), 5 na alternativa (e), 7 na alternativa (g) e 1 não respondeu. Vale ressaltar que os alunos poderiam escolher mais de uma alternativa e 2 alunos assim o fizeram. Devido a construção da fórmula de Cardano, para resolução de equações do 3° grau, os alunos relacionaram este matemático com o desenvolvimento conceitual dos números complexos.

Apenas um aluno relacionou os nomes de Argand e Gauss, e cremos deve ser pelo nome do plano geométrico para representação do número complexo. Outros dois alunos relacionaram Gauss e Cardano.

Percebe-se que um único aluno desconhece totalmente o assunto e escolheu o nome de Wallis, que dentre todos os listados, é o único que não tem contribuições para o desenvolvimento dos números complexos, pois sua contribuição se restringiu a mostrar os números complexos de forma geométrica. Fica claro também que devido o material não trabalhar as fórmulas de Moivre para busca de resultados de potenciação e radiciação de complexos, os alunos desconhecem a contribuição desse matemático.

7) Você já tentou resolver um problema de geometria utilizando os números complexos?

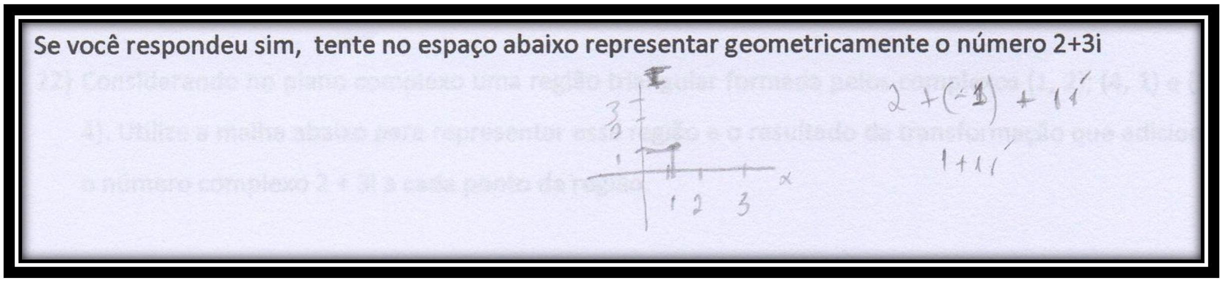
a) sim *b) não*

Acha que seria possível? ________________________________

Dado o conteúdo deste enunciado, sabíamos que os alunos aprenderam a trabalhar com os números complexos na sua representação algébrica, na sua representação geométrica ou gráfica e na representação simbólica (par ordenado). O quadro de respostas foi: cinco alunos assinalaram “sim”, 7 marcaram “não” e 1 aluno não respondeu.

O registro a seguir confronta a resposta dos cinco alunos, pois afirma que a professora trabalhou nesta perspectiva:

Figura 28: Resposta de aluno EM



Fonte: Material da Autora

Quando questionamos “Acha que seria possível?”, 10 alunos responderam afirmativamente e 3 não responderam essa indagação, sendo que um deles afirmou que não entendeu a pergunta.

Nesse aspecto, esperávamos que todos tivessem respondido afirmativamente, por se lembrarem da resolução da questão 6, p. 58 do Volume 1 do Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), o qual comentamos na questão 4, deste questionário.

Isto se deve ao fato de haver uma única situação no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) cuja contextualização deveria ser tratada com mais intensidade, mostrando a aplicabilidade dos números complexos, desmistificando a ideia de que estudo trata-se de algo totalmente desconexo em relação à matemática.

8) *Um número real nós podemos representar geometricamente na reta real. E um número complexo, é possível representar geometricamente*?

   a) Sim *b) Não*

Se você respondeu sim, tente no espaço abaixo representar geometricamente o número 2+3i

Neste caso era esperado que os alunos não apresentassem qualquer problema para responder esse questionamento, uma vez que eles trabalharam em sala com a representação algébrica este tipo de representação, segundo depoimento da professora da turma.

Obtivemos 11 respostas afirmativas e 2 respostas negativa. Na segunda parte da questão pede-se aos alunos representar o número 2 + 3i geometricamente, porém, nove alunos representaram apenas o par ordenado, ou seja, apenas o ponto, sem indicar o vetor. Os outros dois não responderam

9) *Como você representaria na forma algébrica (4, 2)?*

Nossa intenção era verificar a mobilização de registros de representação semiótica, no caso, a transição do registro na forma do par ordenado (a,b) para a forma algébrica z=a+bi.

Ficamos surpresos com o desempenho dos alunos, pois esperávamos que os alunos não tivessem a menor dificuldade em responder, uma vez que o assunto foi trabalhado em sala de aula. Dos 13 alunos participantes, 10 não responderam, e alguns informaram que não se lembrava como fazê-lo, 2 erraram, pois fizeram representação geométrica e somente 1 acertou.

10) *Se um número complexo está localizado no 2°quadrante do plano, em qual quadrante estará o seu conjugado?*

Ao indicarmos essa questão, tínhamos em mente que nenhum dos alunos seria capaz de responder, uma vez que no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) o conceito de conjugado não é tratado.

Alguns alunos no momento da aplicação do questionário, indagaram sobre o que se tratava, ao qual tivemos que dizer que não seria possível de nossa parte responder naquele momento, devido aos objetivos da pesquisa. No entanto, alguns tentaram responder mesmo sem o referido saber houve 2 acertos, 6 erros. O que nos chamou a atenção foi o fato de obtermos 2 acertos. Cremos que esses dois alunos, acertaram no chute, já que a professora não tratou o conceito em aula.

Alguns deles, intrigados por saber o que era o conjugado, ao retornarem para a aula, questionaram a professora regente sobre tal assunto e ela, prontamente respondeu.

11) *Você sabe explicar o que acontece quando somamos um número complexo com o seu conjugado?*

Esperávamos também não obter respostas em relação a esse item, já que como afirmamos anteriormente, eles não estudaram sobre o conjugado de um número complexo. Mesmo assim, três deles tentaram responder, porém, sem sucesso.

A ideia aqui era intriga-los no sentido de perceberem que existem outros conceitos além daqueles abordados em sala de aula. Nossa intensão realmente funcionou, pois além de nos questionarem, eles indagaram a professora regente sobre o assunto. Este mesmo questionamento retornou em nossas tarefas aplicadas com o Geogebra, cujo objetivo era mostrar que a referida soma resulta um número real.

12) *Qual das alternativas abaixo representa uma relação com as operações da adição e subtração de complexos:*

a) Teorema de Pitágoras *b) Regra do Paralelogramo*

c) Teorema de Tales *d) Regras Trigonométricas*

e) Teorema de Bhaskara

Esperava-se que os alunos não tivessem o menor problema em responder essa questão, visto que a operação de soma e subtração de números complexos é básica e a observação da formação da regra do paralelogramo é importante até mesmo para articular o estudo dos números complexos aos conceitos da Física. No entanto, somente 1 aluno acertou respondendo a alternativa (b). Os outros, 7 responderam Teorema de Pitágoras e 5 responderam Regras Trigonométricas, 2 responderam Teorema de Bhaskara, 1 escolheu Regra do Paralelogramo e 2 dos alunos escolheram duas opções.

O desempenho dos alunos mostrou-nos um desconhecimento de tal relação, tendo em vista que no Caderno do Aluno não há um tratamento dos números complexos via regra do paralelogramo. Naturalmente isso não impede que o professor aborde esta relação em sala de aula. A importância de articular esse conteúdo à Física faz com que o aluno perceba a contextualização desses números com fenômenos desta área.

13) *Ao tomarmos um número complexo z, pertencente ao primeiro quadrante do plano, se multiplicarmos este complexo z por i (unidade imaginária), onde estará a imagem resultante?*

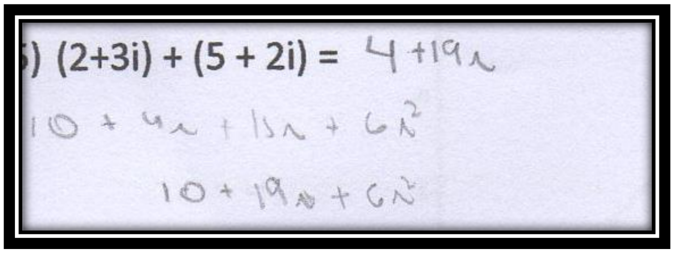
O conteúdo desta questão é tratado no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014). No entanto, obtivemos 3 acertos e 3 erros. Em um dos erros, o aluno faz a observação de que ocorre um giro de 90° em relação ao número complexo dado, porém sua resposta remete o número ao quarto quadrante, como se a multiplicação fosse realizada com (-i). Cremos que o aluno confundiu.

De qualquer forma, a quantidade de alunos que não fizeram ou erraram foi grande, o que deixou-nos intrigados. O desempenho dos alunos tem-nos mostrado que o déficit de compreensão sobre números complexos gerou como consequência dificuldades na mobilização de diferentes registros de representação semiótica.

14) *(2+3i) + (5 + 2i) =*

Nesta questão, 12 alunos acertaram e 1 errou. Observamos que no erro o aluno fez a multiplicação e não a operação de soma como foi solicitado. Porém, desenvolveu a operação de multiplicação corretamente, conforme protocolo a seguir:

Figura 29: Resposta de aluno EM



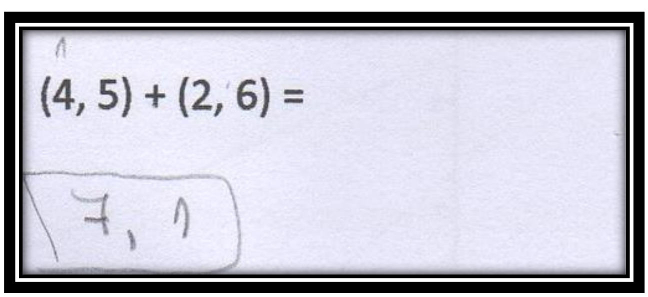
Fonte: Material da Autora

15)(4, 5) + (2, 6) =

A expectativa era de um bom desempenho na operação, pois apenas mudamos a forma do registro de representação semiótica, quando comparado à questão 14. No entanto, somente 4 acertaram a operação, os demais erraram. Os alunos apresentaram dificuldades quanto à mobilização dos registros semióticos, como o caso de dois alunos que apresentaram a resposta (6 + 11). Cremos que os mesmos pensaram no número complexo na sua forma algébrica e por isso colocaram o sinal operatório, porém essa forma de representação está errada.

Houve casos como o protocolo que apresentamos a seguir, que não foi possível ter clareza sobre o que o aluno pensou ao resolver a operação:

Figura 30: Resposta de aluno EM

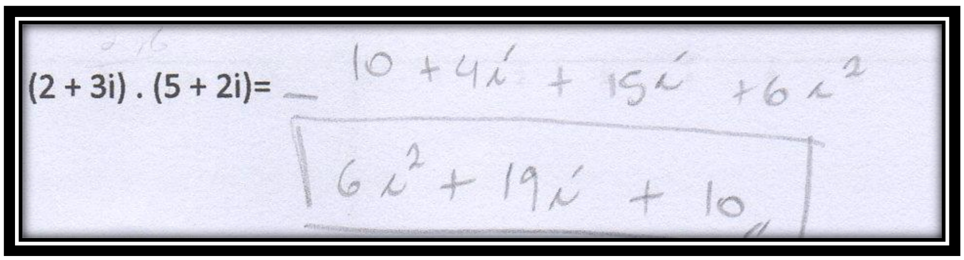


Fonte: Material da Autora

16) (2 + 3i) . (5 + 2i)=

O desempenho dos alunos na parte operatória foi, novamente, insatisfatório; contrariando nossa expectativa. Apenas 3 acertaram a questão. Dois alunos aplicaram a propriedade distributiva corretamente, mas não finalizaram a operação, pois não souberam o que fazer com i^2, conforme mostramos no protocolo a seguir:

Figura 31: Resposta de aluno EM



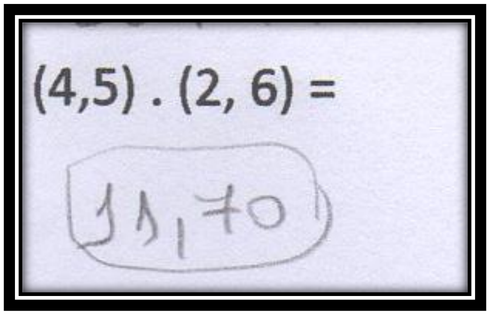
Fonte: material da Autora

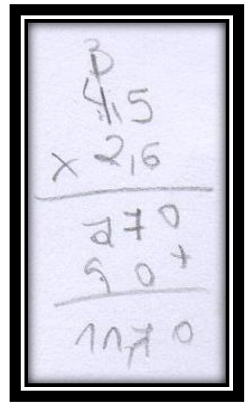
17)(4,5) . (2, 6) =

Nesta questão mudamos a forma de apresentar o registro de representação semiótica, mantendo a operação de multiplicação. O número de acertos foi pior ainda; 11 alunos erraram e 2 não fizeram.

Analisando os erros, percebemos que alguns deles erraram ao fazer a leitura, confundindo o par ordenado com o número escrito na sua forma decimal. Neste caso o déficit de compreensão foi representativo, pois se o assunto que estava sendo tratado era os números complexos, não haveria o porquê cometer o engano de ler o par ordenado na forma decimal. A seguir apresentamos um protocolo ilustrativo deste déficit:

Figura 32: Resposta de aluno EM



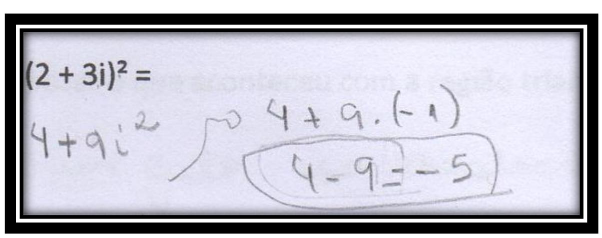


Fonte: Material da Autora

18) $(2 + 3i)^2 =$

Apesar do Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) não abordar a operação de potenciação, os alunos poderiam recorrer às propriedades de produtos notáveis para resolver a questão. No entanto, somente 1 aluno acertou a aplicação do produto notável, os demais erraram e, em sua maioria, elevaram ao expoente 2, somente o primeiro e o segundo termo, como no protocolo a seguir:

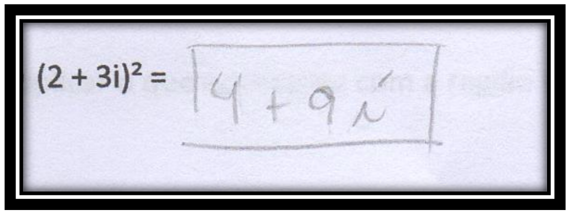
Figura 33: Resposta de aluno EM



Fonte: Material da Autora

Em outros casos, elevaram ao expoente 2, somente o primeiro e o segundo termo, mas esqueceram nesse processo errôneo de elevar a parcela i ao expoente 2:

Figura 34: Resposta de aluno EM



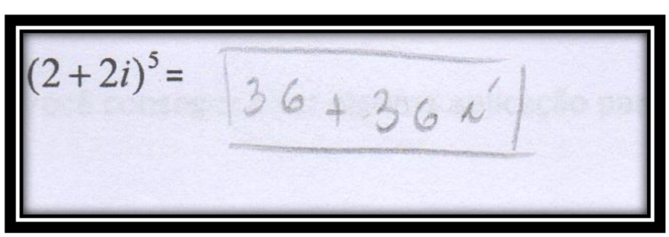
Fonte: Material da Autora

19) $(2+2i)^5 =$

No caso dessa questão não esperávamos que os alunos fizessem essa operação, muito embora partíssemos do pressuposto de que como são alunos do 3° ano do ensino médio, haveria a possibilidade de alguns deles tentarem resolver de forma algébrica, operando a multiplicação cinco vezes do número complexo por ele mesmo. Realmente todos tentaram resolver e todos erraram. Observando os resultados, em 7 deles a resposta foi a mesma, utilizando o procedimento errado do produto notável da questão anterior, ou seja, encontraram $32 + 32\,i^2$.

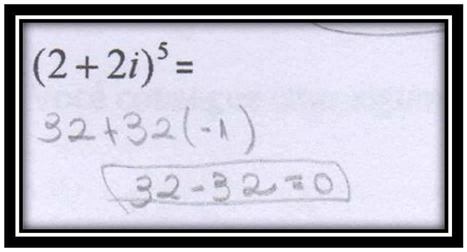
Esperávamos que alguns deles até nos respondessem que não sabiam fazer pois não aprenderam. Nesse aspecto, fiquei surpresa, pois todos tentaram resolver, apesar que por caminhos totalmente errados.

Figura 35: Resposta de aluno EM



Fonte: Material da Autora

Figura 36: Resposta de aluno EM

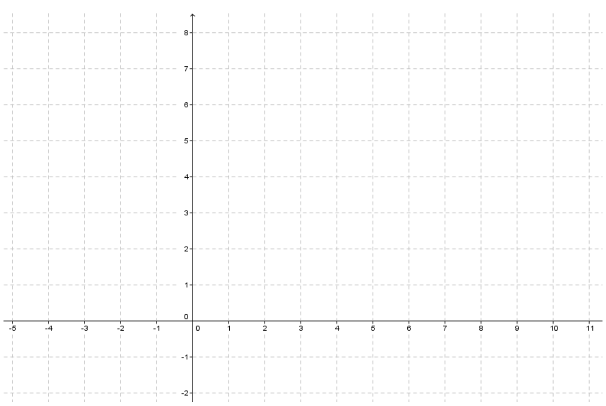


Fonte: Material da Autora

20) $\sqrt{5-12i}$ =

Em relação a esta questão, nossa expectativa era de que ninguém fizesse, pois afinal esse conteúdo realmente não é explorado no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014). Os resultados foram de encontro a nossa expectativa.

21) Considerando no plano complexo uma região triangular formada pelos complexos (1, 2); (4, 1) e (3, 4). Utilize a malha abaixo para representar essa região e o resultado da transformação que adiciona o número complexo 2 + 3i a cada ponto da região.



Pode explicar o que aconteceu com a região triangular?

Planejamos o enunciado desta tarefa inspirado no contexto do Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014). Nossa intenção era observar a percepção dos alunos quanto ao processo de translação. Somente 7 alunos conseguiram realizar a questão de forma correta, tanto na primeira como na segunda parte; explicando o que ocorreu com a região triangular.

Dos seis alunos que erraram a questão, três deles não responderam a segunda parte da questão. Nesse caso, observamos que os alunos têm dificuldades em lidar com as conversões, nos processos das representações dos registros semióticos.

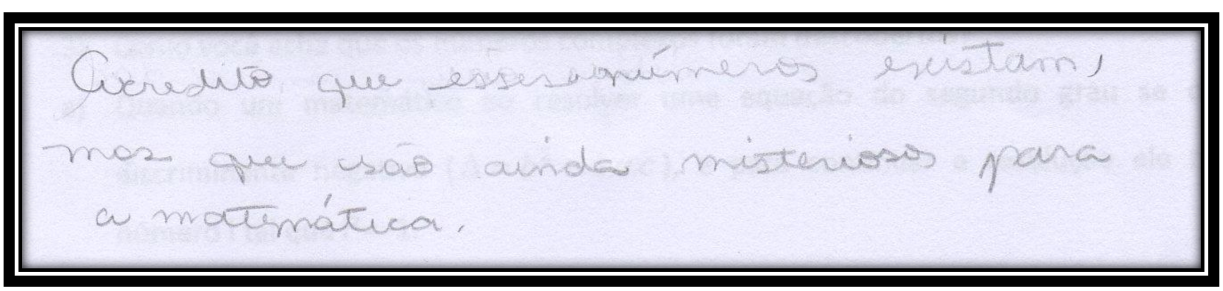
22) *Você consegue citar alguma aplicação para os números complexos?*

Nosso objetivo era verificar que saberes foram apreendidos pelos alunos sobre números complexos. Nesta tarefa, 6 alunos não responderam e 3 apresentaram respostas sem sentido, como por exemplo: plano cartesiano.

Alguns alunos citaram como aplicação o cálculo de raízes de polinômios do 3° grau. Infelizmente, o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) tem este enfoque. Claro que é importante, porém, seria necessário expandir o campo de aplicações

A resposta de uma aluna muito nos chamou a atenção conforme pode ser visualizado na figura 37:

Figura 37: Resposta de aluna EM


Acredito que esses números existam, mas que são ainda misteriosos para a matemática.

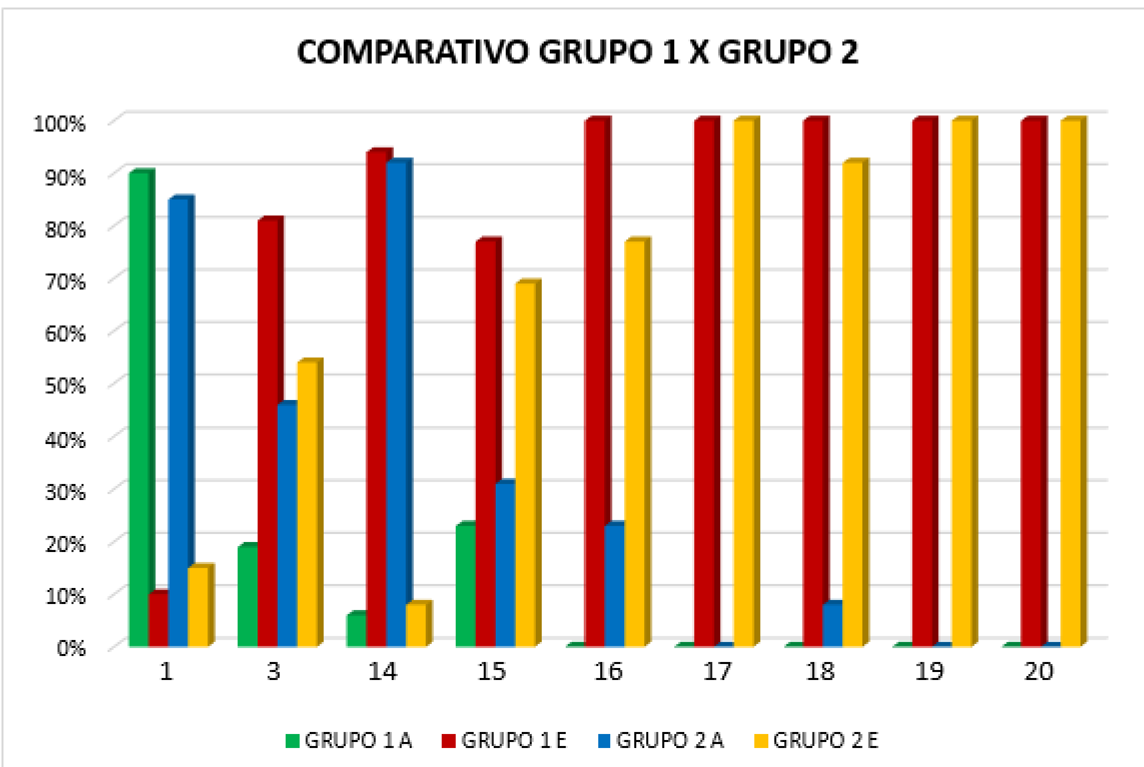
Fonte: Material da Autora

Essa resposta vem de encontro com aquilo que pensamos de que o conteúdo precisa ser melhor trabalhado e articulado com relação a aplicabilidade, pois da maneira como é tratado, passa a ideia de que não serve para muita coisa e que esses números são realmente frutos da imaginação de alguns lunáticos. Tais números não são misteriosos, mas da maneira como vem sendo trabalhado, é o que representa na cabeça de muitos alunos.

Quando comparamos os dois grupos, o Grupo 1 (alunos do 2° semestre de engenharia civil) e o Grupo 2 (alunos do 3° ano do ensino médio) em relação aos saberes demonstrados entre esses dois grupos, percebe-se que ambos estão no mesmo nível de proficiência em relação ao conhecimento.

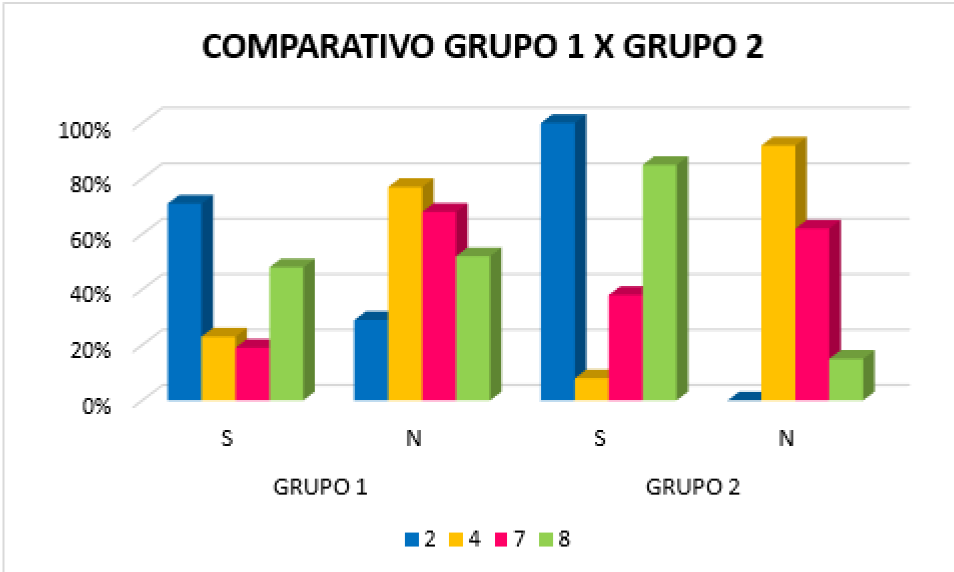
Ao observarmos os gráficos 3 e 4, no que diz respeito aos acertos e erros de algumas questões foi notório as mesmas dificuldades encontradas nos dois grupos. Somente nas questões de número 3 e 14 é que o Grupo 2 superou em acertos em relação ao Grupo 1 (Gráfico 3). No Gráfico 4, estão relacionadas as questões 2, 4,7 e 8, em que os alunos deveriam optar por sim ou não em relação a questão. Lembramos que as questões todas estão elencadas no Anexo A.

Gráfico 3: Comparativo das questões 1, 3, 14, 15,16,17,18,19 e 20



Fonte: Material da Autora

Gráfico 4: Comparativo das questões 2, 4, 7 e 8



Fonte: Material da Autora

Minhas expectativas iniciais era de que os alunos do ensino médio (Grupo 2), pudessem ter superado as dificuldades demonstradas pelos alunos do ensino superior (Grupo 1).

Acreditávamos que os alunos do Ensino Superior, por já estarem a algum tempo sem ter contato com o conteúdo, iriam ter dificuldades, o que realmente ocorreu, porém, para os alunos do ensino médio, foi criada outra expectativa, uma vez que eles acabaram de aprender o conteúdo. Aplicamos esse questionário, na mesma semana em que a professora regente da turma aplicou a prova referente a esse conteúdo.

Verificamos que os alunos do Ensino Médio apresentaram as mesmas dificuldades em transitar pelos registros de representação semiótica que os alunos universitários. Tais constatações me levaram a reformular as Tarefas 1, 2 e 3 que foram aplicadas a seguir, com a utilização do Geogebra. Nos preparamos para uma situação em que esperava dos alunos maiores saberes e domínios nas articulações com os registros de representação semiótica.

Os alunos participantes da pesquisa apresentaram muitas dificuldades, devido à falta de domínio de saberes básicos, não alcançados no decorrer dos estudos no Ensino Fundamental. Por exemplo, o desenvolvimento dos produtos notáveis é fundamental para a compreensão de conceitos que envolvem os números complexos e suas operações.

Apesar dessas dificuldades apresentadas pelos alunos, ratificamos que a aprendizagem dos números complexos é importante e o seu estudo não pode ser descartado do currículo do Ensino Médio, como é feito nos documentos curriculares atuais.

4.4 - Tarefas

A aplicação das tarefas com a utilização do Geogebra ocorreu em cinco encontros, sendo às quartas-feiras, nas duas últimas aulas do período matutino, durante o período de 27 de Agosto a 8 de Outubro de 2014.

As aplicações das Tarefas 1, 2 e 3, ocorreu na sala de informática da escola, pois a nossa intensão era observar e fazer com que os alunos utilizassem a ferramenta Geogebra para resolver as atividades propostas em cada Tarefa.

Vale salientar que o trabalho talvez tenha sido prejudicado em sua ideia inicial devido a vários fatores, como por exemplo:

1° - Não conseguimos aplicar as atividades em uma semana fechada, uma vez que os encontros ocorreram às quartas-feiras, nas duas últimas aulas, que eram aulas da disciplina de matemática. Após 1 semana, os alunos já não lembravam as atividades realizadas na tarefa anterior, ou como utilizar os recursos do Geogebra.

2° - Alguns encontros foram prejudicados, pois ao chegar na escola para aplicação da atividade, a pesquisadora descobriu que a escola havia marcado alguma atividade extra, no horário pré-agendado para a aplicação da pesquisa. Em uma das vezes, a maioria dos alunos da sala havia saído para uma excursão programada pela escola. Outra vez, foi apresentada uma peça de teatro, fatos esses que nos levou a adiar as aplicações das atividades, fazendo com que os alunos distanciassem das atividades realizadas anteriormente, dificultando as aplicações.

3° - Um outro aspecto importante a salientar é que devido à falta de manutenção dos equipamentos da Rede Pública e a forma de gerenciamento dos equipamentos, tivemos perda de material, uma vez que em uma das vezes o computador desligou-se, e como ele está programado para não salvar nenhum arquivo, perdemos o material de um dos nossos alunos. Em outro momento, o sistema operacional travou e o computador acabou por reiniciar, deletando todos os arquivos da Tarefa realizada pelo aluno. Vale salientar que se um professor da própria Unidade Escolar resolver levar seus alunos na sala de informática para uma aula diferente, onde se utilize algum software para construção de algum conhecimento, e caso ocorra uma falta de energia momentânea, isso fará com que a aula do professor seja inteiramente perdida, visto que os computadores das Escolas Públicas Estaduais estão programados para deletarem todas as informações salvas ou não, no momento em que o equipamento desligar. Em nossa visão, entendemos que não é possível deixar as máquinas abarrotadas com arquivos e lixos, porém cremos que a melhor forma de manutenção seria que ao final do expediente, o aluno monitor contratado pela Rede Estadual para acompanhar a sala de informática, desse um comando a partir do servidor local para que limpasse a máquina. Se assim fosse, não teríamos perdido os nossos arquivos, e que acabaram por prejudicar essa nossa pesquisa, mesmo sabendo que os alunos em questão, realizaram corretamente a construção da atividade solicitada no Geogebra.

Apresentamos a partir de agora as Tarefas 1, 2 e 3 separadamente, com suas respectivas análises a priori e posteriori.

A Tarefa 1 foi constituída de 6 alternativas, a saber, A, B, C, D, E e F. O propósito da Tarefa 1 era levar o aluno a refletir sobre o processo da construção das operações de adição e subtração, com a utilização do Geogebra, pois esse instrumento facilita a validação de hipóteses, uma vez que ele é flexível no sentido de poder se movimentar o número complexo escolhido, permitindo assim visualizar que o resultado da operação acompanha o movimento. Outro aspecto que queríamos que os alunos pudessem visualizar era em relação ao conjugado de um número complexo. Nossa intensão era de permitir que os alunos observassem e tirassem conclusões a respeito de um número complexo comparado ao seu conjugado, além de estabelecer relações. O terceiro propósito dessa tarefa, estava a questão de perceber se os alunos conseguiriam estabelecer a relação da regra do paralelogramo para a adição e subtração.

Na Tarefa 2, constituída das alternativas A, B, C, D e E, nosso propósito era levar o aluno a refletir sobre as relações envolvendo os ângulos e os módulos dos números complexos, nas operações de multiplicação e divisão, fazendo os alunos compararem as duas operações com o intuito de verificarem que essas relações são inversas. Em todas as tarefas a ideia sempre era fazer o aluno refletir sobre seus resultados escritos, quando comparado com a operação geométrica, ou seja, a ideia era de mostrar que os números complexos não são somente símbolos quaisquer sem significado, mas que sua compreensão envolve conceitos geométricos. Observamos aqui que, devido ao fato de o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) não trabalhar com o processo da divisão, fomos movidos a demonstrar um exemplo nesta tarefa, de como ocorre o processo operatório matemático para a resolução dessa operação. A contribuição do Geogebra aqui é grande, pois ele permite a observação do módulo e do ângulo muito rapidamente para cada escolha tomada pelo aluno. Caso se movimente o número complexo, é possível validar as hipóteses sugestionadas.

Para a Tarefa 3, constituída das alternativas 1, 2, 3, 4 e 5, abrangia dois aspectos, sendo que o primeiro era complementar à Tarefa 2, ou seja, levar o aluno a articular as conclusões sobre os módulos e ângulos na operação de multiplicação e divisão e usar esse fato para representar e trabalhar com os números na sua forma trigonométrica. Observamos aqui que o Geogebra é limitado e não nos oferece aprofundamentos com a forma trigonométrica de representação dos números complexos. O outro aspecto que queríamos que os alunos observassem, estava relacionado à condição de se ter uma figura geométrica no plano (no caso escolhido foi um quadrilátero) e o resultado ao se operar multiplicações com os vértices do quadrilátero, que eram números complexos. Neste segundo caso, a contribuição do Geogebra é grande, por permitir a validação de hipóteses, uma vez que posso alterar o número complexo, alterando a estrutura da figura formada e a validação em relação as hipóteses permanecem.

Na Tarefa Final, constituída de três questões, nosso propósito era ter um feedback do alunos, do impacto que a pesquisa lhes causou e principalmente se eles viram o

Geogebra como um facilitador do aprendizado. A Tarefa Final foi aplicada conjuntamente com a Tarefa 3.

A seguir apresentamos a análise *a priori* e *a posteriori* de cada uma das tarefas propostas aos nossos alunos do Ensino Médio; participantes voluntários do trabalho de campo da nossa pesquisa.

4.4.1 – Análise a Priori e Posteriori da Tarefa 1

A Tarefa 1 foi composta de 6 alternativas (A, B, C, D, E e F) que direcionava os alunos na realização das atividades. Para esta atividade, contamos com a participação de 12 alunos.

Figura 38: Alternativas A e B

TAREFA 1

A) Você aprendeu que um número complexo $z = a + bi$ pode ser representado no plano Argand Gauss, como um vetor, cuja origem coincide com a origem do plano Argand Gauss e extremidade no ponto (a,b). Represente um número complexo no plano usando o Geogebra.

B) Sabe-se que o conjugado de um complexo $z = a + bi$ é representado por $\bar{z} = a - bi$. Construa no Geogebra o vetor conjugado ao complexo que você representou no item A acima. Observando os dois, o z e $\bar{z}$, descreva graficamente qual é a relação entre esses dois números.

Fonte: Material da Autora

Verificamos que nenhum aluno teve dificuldade em compreender o que estava sendo solicitado na alternativa A. As dificuldades que todos apresentaram estava no fato de não conhecerem a ferramenta Geogebra. Para tanto, em um primeiro momento pedimos que eles explorassem um pouco a ferramenta, para adquirir familiaridade com o software. Com a utilização de um Datashow procuramos mostrar alguns dos recursos que iríamos utilizar, como forma de orientá-los na utilização da ferramenta.

Na alternativa B, procuramos explicar rapidamente como obter o conjugado de um número complexo, pois como já foi dito anteriormente esse assunto não é abordado na apostila do aluno, e portanto, eles não sabiam o que era. Nos limitamos a informar apenas como obter o conjugado do número e observar a maneira como eles perceberiam os demais conceitos. O que se pretendia ao solicitar a realização dessa atividade era que eles pudessem observar dois aspectos importantes em relação ao número complexo e seu conjugado. O primeiro é que eles são simétricos, logo, eles possuem o mesmo módulo e mesmo ângulo em relação ao eixo de simetria (eixo real do sistema Argand Gauss). Isso é o que foi solicitado na alternativa B.

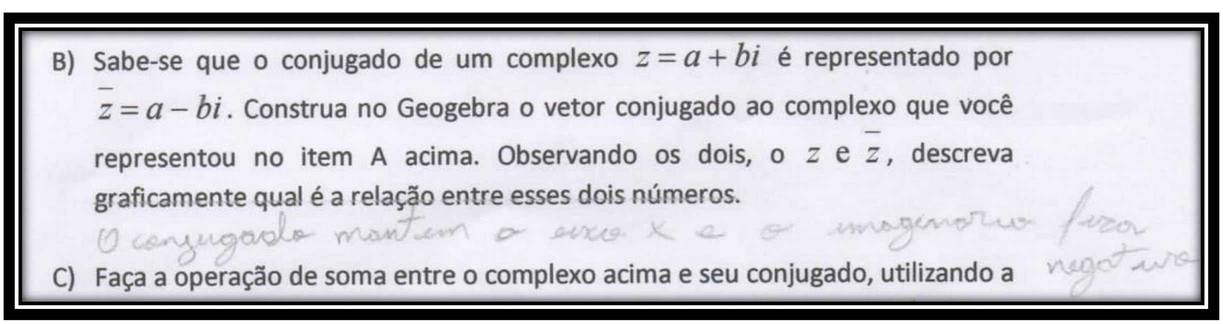
Ao observar os resultados desta alternativa, conclui-se que alguns alunos tiveram uma percepção parcial. Talvez, há entre esses alunos aqueles que tenham percebido, porém não conseguiram se expressar para explicar o que visualizaram. Percebe-se que muitos alunos possuem dificuldades em relação a alfabetização matemática e/ou relacionada as conversões das representações semióticas, e isso os atrapalha nas conclusões lógicas quando solicitadas. Podemos concluir ainda que esses alunos apresentam dificuldades em relação à conversão do registro algébrico ou o registro gráfico para o registro linguístico dentro registros de representação semiótica.

Na verdade, observa-se em todas as atividades e tarefas aplicadas que os alunos apesar de realizarem muitas atividades até com certa facilidade no Geogebra, na hora de transcreverem suas conclusões na forma da língua natural, apresentam grandes dificuldades em explicar de forma clara o que realmente observaram. Segundo Duval (2009, p.78),

> As unidades significantes de um gráfico correspondem aos valores de diferentes variáveis visuais (DUVAL, 1988, P.240-242). O aluno que não as discrimine é como cego para a conversão inversa da que é classicamente ensinada. Isso quer dizer que ele tem poucas chances de fazer uma leitura “correta” dos gráficos.

Um dos alunos, respondeu que os dois vetores *possuem o mesmo ângulo em relação ao "zero"*. Percebe-se que o aluno queria dizer eixo de simetria. Outros três alunos responderam que ambos *os números, possuem o mesmo módulo*. Outro aluno indica que os números são "*espelhados" em quadrantes diferentes*. Entendemos nesse caso que o aluno percebeu a simetria, porém não soube expressar-se de forma correta e por isso usou a informação "espelhados", pois não indicou em relação a qual eixo ocorre o espelhamento. Outros dois alunos informaram que *o conjugado acontece no "quarto quadrante"*, ou seja, há mudança de quadrante. Outros três alunos perceberam que a parcela real do número permanece inalterada, e que na parcela imaginária ocorre uma troca de sinal. Essa conclusão cremos que é muito primária e esperávamos algo além. Os outros dois últimos alunos não souberam responder, ou seja, suas respostas são totalmente sem sentido, o que deixa claro que tais alunos possuem grandes dificuldades em relação ao aprendizado matemático. Como se vê na figura abaixo, o aluno não respondeu o que foi questionado, ou seja, qual a relação entre o número complexo e seu conjugado. Ele somente explicou em sua visão o que é o conjugado, porém ao alegar que "*o imaginário fica negativo*", naturalmente entendemos que ele está se referindo a parcela imaginária do número, porém não pensou que se o número complexo tomado já possuir sua parcela imaginária negativa, o conjugado desse número apresenta uma parcela imaginária positiva.

Figura 39: Alternativa B – Resposta do aluno L


B) Sabe-se que o conjugado de um complexo $z = a + bi$ é representado por $\bar{z} = a - bi$. Construa no Geogebra o vetor conjugado ao complexo que você representou no item A acima. Observando os dois, o z e $\bar{z}$, descreva graficamente qual é a relação entre esses dois números.

O conjugado mantem o eixo x e o imaginario fica negativo

C) Faça a operação de soma entre o complexo acima e seu conjugado, utilizando a

Fonte: Material da Autora

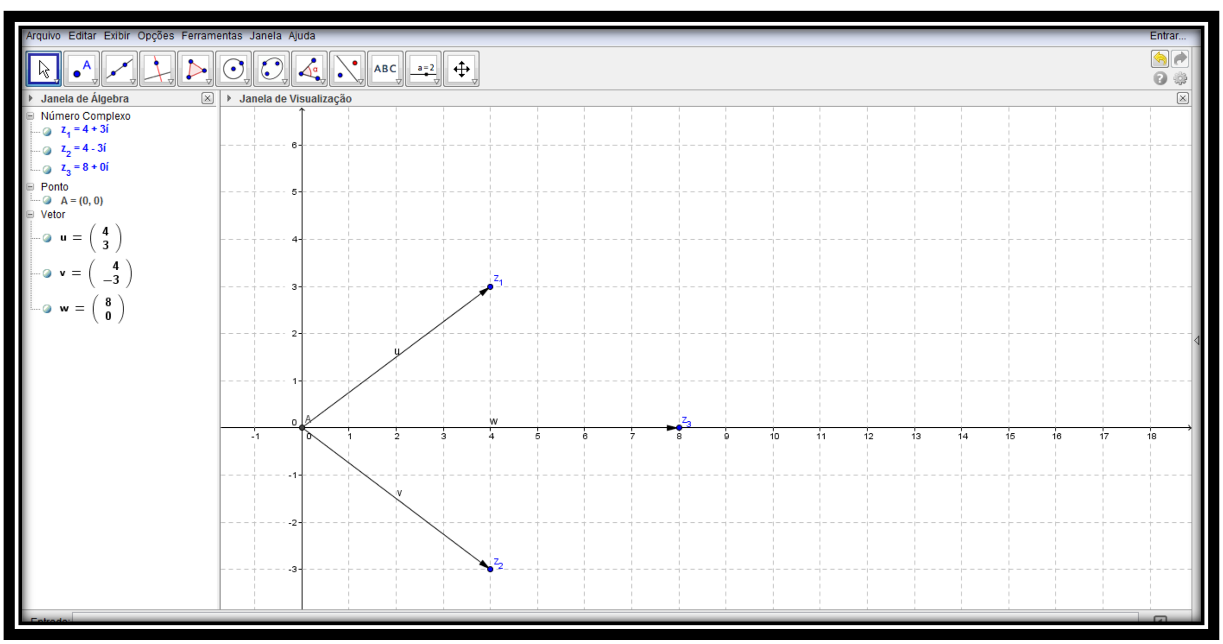
Figura 40: Alternativa C

C) Faça a operação de soma entre o complexo acima e seu conjugado, utilizando a caixa de entrada do geogebra. Que conclusão você chega em relação ao resultado obtido? Se você movimentar o z_1, o que acontece? Salve esta tela como atividade 1 em sua pasta. Agora limpe a tela.

Fonte: Material da Autora

Em relação a alternativa C procuramos fazer o aluno refletir sobre o segundo aspecto importante na relação de um número complexo com o seu conjugado, que está no fato de que a operação de adição entre eles, torna o resultado um número real e encontramos o resultado no eixo de simetria. Esperava-se que os alunos tivessem essa percepção. Ao solicitar ao aluno que movimentasse o número complexo escolhido, a ideia era que ele percebesse que para qualquer número complexo quando somado com o seu conjugado o resultado é um número real, ou seja, esperava-se que eles percebessem que esses conceitos sempre serão válidos, para qualquer número complexo escolhido.

Figura 41: Geogebra - Alternativa C – Resposta da aluna B



Fonte: Material da Autora

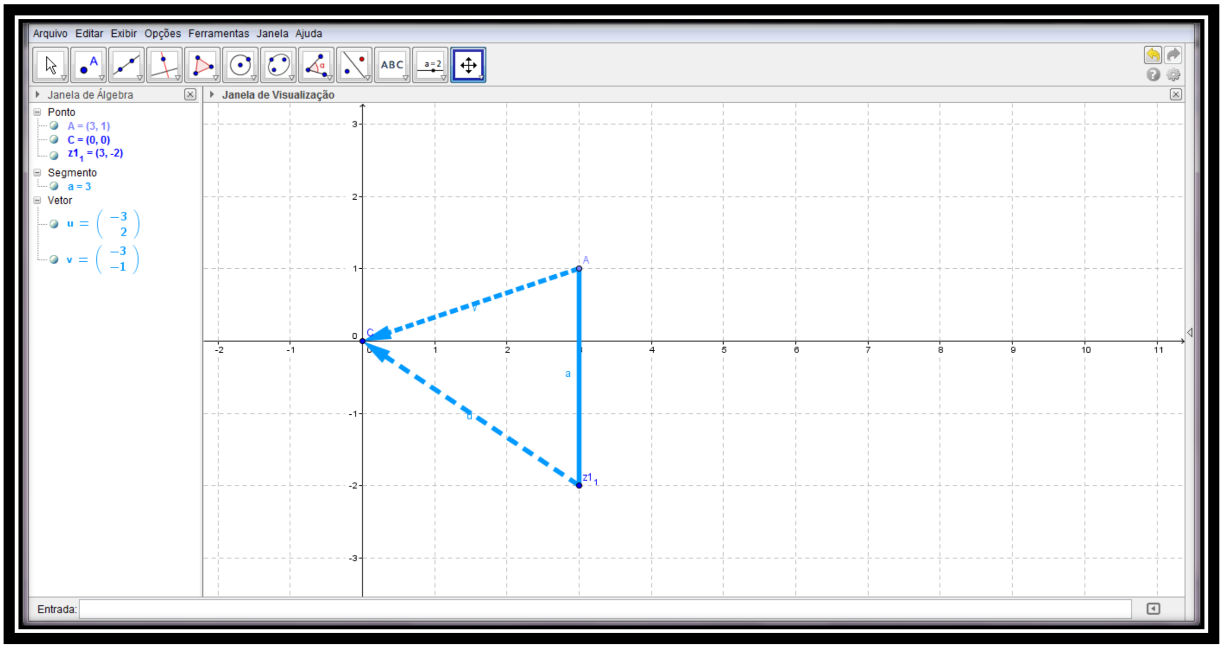
Em relação a esse item, uma aluna conseguiu se posicionar no sentido de que a operação entre o complexo e seu conjugado, torna o número um real. Percebeu ainda que o resultado da soma se altera, quando se movimenta o z1 de tal maneira que o z2 deixa de ser o conjugado, porém se movimentar o z2 colocando na condição de conjugado, a relação de soma entre eles retorna a obter como resultado um número real. Muito embora a aluna não tenha escrito toda essa informação, mas ela nos respondeu, quando fomos questionando o que acontecia.

Outros quatro alunos não perceberam que o resultado da soma gera um número real, mas perceberam que ao movimentar o z1, o resultado da soma também alterava, pois "*é diretamente dependente da posição do z1"* Um outro aluno respondeu que *o módulo não muda, continuará o mesmo ao se movimentar o z1,* o que nos deixou claro que o aluno ou não movimentou o z1, ou não compreendeu o questionamento, visto que a realização da operação foi feita de forma correta, pelo que observamos em seu arquivo salvo.

Um outro aluno não compreendeu o questionamento e respondeu que o "*a dobrou e o b diminuiu*". O aluno aqui está se referindo a parte real e imaginária do número complexo, que ao realizar a soma, dobra a parte real e a imaginária zera. Percebe-se que este aluno tem dificuldades em expressar sua percepção, além de não fornecer todas as respostas pedidas. Em seu arquivo verifica-se que o aluno realizou a operação de forma correta, porém tem dificuldades em expressar suas percepções.

Os outros cinco alunos se limitaram a realizar a operação no Geogebra, não nos respondendo quais foram suas percepções. Desses cinco alunos, dois deles não conseguiram realizar corretamente a operação na ferramenta Geogebra, como pode-se observar na imagem abaixo:

Figura 42: Geogebra – Alternativa C - Resposta do aluno G



Fonte: Material da Autora

Figura 43: Alternativa D

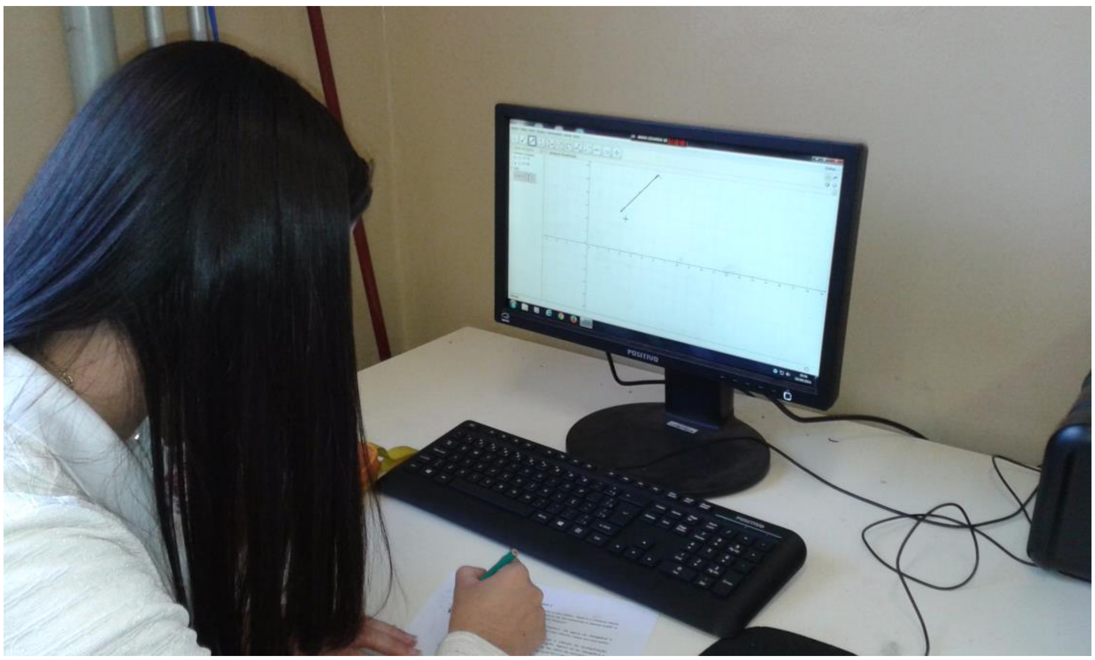
D) Tome dois números complexos. Na caixa de entrada faça a soma entre eles. Na extremidade de z_1, estique um vetor até a extremidade do vetor soma. Compare esse vetor com z_2, que conclusão você chega? Faça o contrario agora, ou seja, vá à extremidade de z_2 e estique um vetor até a extremidade do vetor soma e compare com z_1. Que conclusão você chega disso tudo? Que figura geométrica formou? Salve esta tela como atividade 2

Fonte: Material da Autora

Para a resolução dessa tarefa, eu tive que ler com eles e orientar o que estava escrito e o que estava sendo pedido. Vários alunos reclamaram alegando não estar entendendo. Lembrei a eles que isso era uma pesquisa e que o objetivo era justamente procurar entender o que eles não compreendiam. Percebemos que na verdade eles estão acostumados a não serem desafiados, eles estão acostumados com as coisas prontas; deixando de lado o exercício do “pensar”.

Esperávamos que os alunos não apresentassem qualquer dificuldade em realizar a tarefa e que tirassem as conclusões corretas em relação à figura formada (paralelogramo) e que observassem que o vetor soma era a diagonal maior do paralelogramo. Nossa expectativa estava pautada no fato de que nas aulas da disciplina de Física, os alunos aprenderam sobre a relação da operação de soma entre forças, onde se utiliza a regra do paralelogramo.

Figura 44: Aluna C realizando atividade no Geogebra

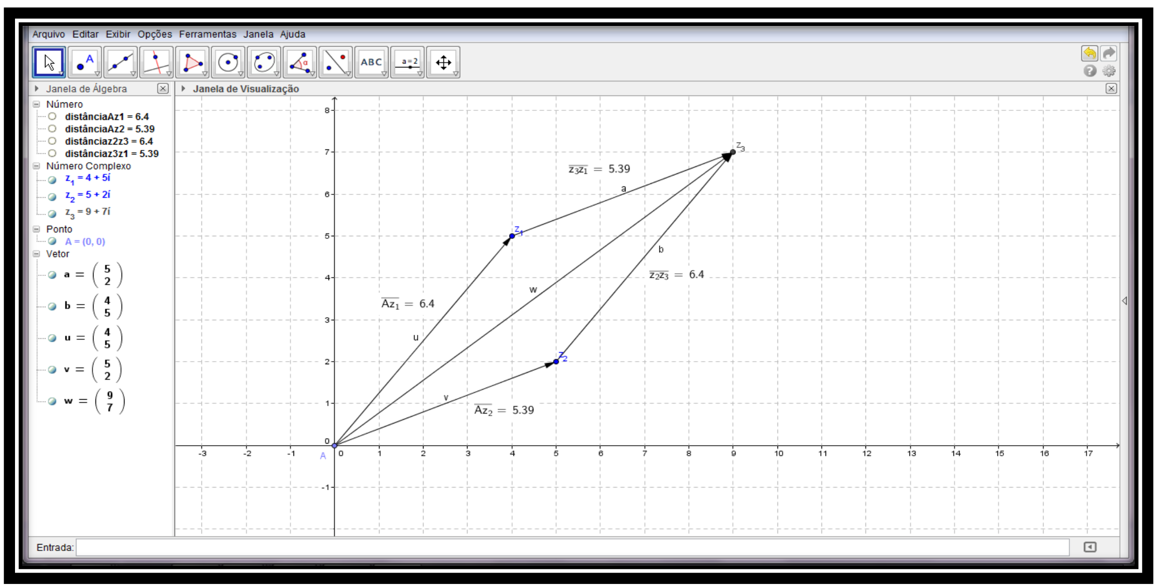


Fonte: Material da Autora

Dois alunos perceberam que a figura formada era um paralelogramo e que os lados opostos aos vetores tomados eram iguais (mesma medida). Um desses alunos percebeu ainda que se ele movimentasse um dos complexos escolhidos, a relação de igualdade com os vetores dos lados opostos e também com o vetor soma, permanecia a mesma, porém, ambos não informaram que o vetor soma era a diagonal maior do paralelogramo.

Outro aluno percebeu também que a figura formada era um paralelogramo, porém tirou conclusões errôneas em relação a operação de soma. Um quarto aluno apenas informou que havia obtido um paralelogramo. Outro aluno percebeu que o vetor soma mantém a relação com os vetores z1 e z2 escolhidos quando ocorre o movimento de algum deles, porém o aluno concluiu que a figura formada era um losango. Outros dois alunos apenas observam que a figura formada é um quadrilátero. Outros três alunos informaram que a figura formada é um prisma, sendo que um deles porém ressalta que quando se movimenta um dos vetores, o vetor resultante (soma), acompanha o movimento. Outro aluno não respondeu e o último aluno não conseguimos entender suas conclusões. Em nossa expectativa, esperávamos um pouco mais em relação ao que foi obtido.

Figura 45: Geogebra – Alternativa D - Resposta da aluna SB



Fonte: Material da Autora

Figura 46: Alternativa E

E) Utilizando a tela acima, faça a operação a operação de subtração entre z_1 e z_2 Agora uma as extremidades dos vetores z_1 e z_2 e compare com o resultado do vetor subtração. Movimente um dos complexos (z_1 ou z_2). Qual conclusão você chega?

Fonte: Material da Autora

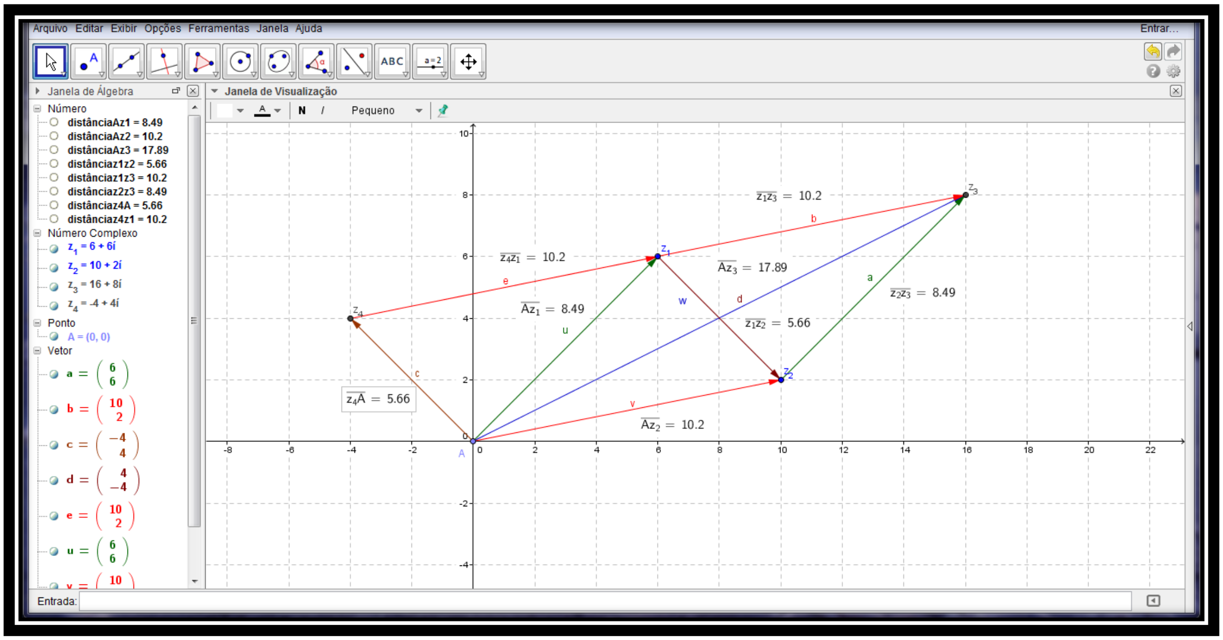
Na alternativa E, a expectativa era que os alunos percebessem o mesmo tipo de relação que ocorre na operação da soma, também ocorre na operação da subtração, com a diferença de que o vetor diferença é representado pela diagonal menor do paralelogramo. Também esperava-se que eles percebessem que ao se movimentar um dos vetores, a relação sempre permanece.

Muito nos surpreendeu as respostas dadas pelos alunos, pois 9 deles perceberam que as igualdades modulares entre os vetores opostos permaneciam e, que se movimentassem qualquer um deles, a relação entre os vetores z1, z2 e o vetor subtração também permaneciam, porém, não relacionaram a operação de subtração com a figura do paralelogramo. Um dos alunos apenas informou que a "*linha da subtração é metade da linha da soma*", ou seja, chamou o vetor de linha.

Outra aluna creio que confundiu-se e na hora de responder, trocando a subtração por soma, disse: "*indepente da onde movimentada não altera a soma*", vê-se que o aluno tem dificuldades inclusive em expressar-se na língua natural. O último aluno apenas escreveu: "*Nenhuma conclusão*".

Na figura 47 observa-se o protocolo de registro da aluna C, onde ela mostra o resultado dos registros das operações de soma e de subtração envolvendo dois números complexos. É possível visualizar o paralelogramo formado e as diagonais do paralelogramo como resultado das operações.

Figura 47: Geogebra – Alternativa E - Resposta da aluna C



Fonte: Material da Autora

Figura 48: Alternativa F

F) Olhando para a figura formada pelos dois vetores que você escolheu, o que representa o vetor soma e o vetor subtração em relação à figura formada? Salve sua tela como atividade 3

Fonte: Material da Autora

Na última alternativa (F), esperava-se claramente que os alunos respondessem que o vetor soma é a diagonal maior do paralelogramo e o vetor subtração é a diagonal menor do paralelogramo.

Em relação as conclusões obtidas pelos alunos aqui, observa-se que apenas dois deles vincularam os vetores resultantes às diagonais do paralelogramo, sem contudo, informar qual representava a diagonal maior e qual representava a diagonal menor.

Outros dois informaram que o vetor ao dividir a figura inicial (paralelogramo) formou triângulo. Muito embora essa observação seja verdadeira, não era a que esperava-se. Todos os demais alunos deram informações que não correspondem ao questionado.

Nesta etapa de aplicação da tarefa, tivemos bastante dificuldades, na transição do paradigma de dar ao aluno “tudo mastigado”, para o paradigma de deixar por conta deles o processo de reflexão e busca pela construção de saberes.

Apesar disso tudo, penso que foi positivo, pois quando os alunos conseguiam concluir a tarefa no Geogebra, havia uma satisfação pessoal por ter conseguido. Outro ponto fundamental era a questão da descoberta. Notadamente percebia que eles passaram a compreender melhor o processo operatório, muito embora apresentando enormes dificuldades em se expressar corretamente na linguagem natural escrita, todas as suas percepções. Tal fenômeno ocorre visto que a conversão dos registros geométricos computacionais não é congruente.

De acordo com Duval (2012, p. 284):

> ... quando não há congruência, não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente.

Outro ponto importante a ressaltar que a dificuldade que os alunos têm em transitar entre os registros de representação semiótica, os leva a dificuldades na compreensão de conceitos muitas vezes simples, como vimos na alternativa B que envolvia a comparação de um número complexo e o seu conjugado.

4.4.2 – Análise a Priori e Posteriori da Tarefa 2

A Tarefa 2 foi realizada 15 dias após a aplicação da Tarefa 1, devido a escola ter programado uma excursão de última hora, onde envolveu os alunos da turma que estávamos aplicando a pesquisa, sendo que a maioria dos alunos não estava presente naquele dia. Para essa atividade contamos com a participação de 10 alunos, ou seja, 2 dos alunos que anteriormente participaram, decidiram não participar e entendemos que era devido a dinâmica de trabalho proposta para a pesquisa. Não estávamos lá para ensiná-los o conteúdo, mas fazê-los pensar, refletir e tirar conclusões sobre as atividades propostas abrangendo o conteúdo que já havia sido ministrado pela professora regente da sala. A Tarefa 2 foi composta pelas alternativas A, B, C, D e E.

Figura 49: Alternativas A e B

TAREFA 2

A) No Geogebra, tome um número complexo e seu vetor. Qual é o módulo desse complexo (faça o calculo). Agora vá na barra de ferramentas e vamos medir o comprimento do vetor. Qual conclusão você chegou?

B) Encontre o argumento do seu número complexo. Vá agora ao Geogebra e verifique o ângulo do seu vetor e compare com seu cálculo. Salve em sua pasta.

Fonte: Material da Autora

Nas alternativas A e B desta tarefa, esperava-se que os alunos realizassem os cálculos encontrando os resultados e depois usassem o Geogebra para verificar e validar seus resultados.

Para a alternativa B, tivemos que ajudá-los com a utilização da calculadora para obtenção do valor do ângulo, visto que os mesmos não sabiam manipular a ferramenta para obtenção do resultado.

Algo que nos chamou a atenção foi o fato de que todos tinham em mente de que seus resultados tinham que ser iguais ao do software e nos casos em que os resultados deram diferentes, os alunos (três deles), nos chamaram para nos informar que os resultados não estavam iguais. Então solicitei que verificassem se seus cálculos estavam corretos e questionei também se seria possível o software estar com informação errônea, o que foi contestada pelos três alunos. Todos os três ao verificarem seus cálculos, encontraram o erro e finalmente concluíram que os resultados do software eram verídicos.

Figura 50: Alternativas A e B – Respostas do aluno I

TAREFA 2

Atravez de pitagoras cheguei na distancia correta.

A) No geogebra, tome um número complexo e seu vetor. Qual é o módulo desse complexo (faça o calculo). Agora vá na barra de ferramentas e vamos medir o comprimento do vetor. Qual conclusão você chegou? $z_1 = 6 + 2i$ / $x = 6,32$

$x^2 = 6^2 + 2^2$; $x^2 = 36 + 4$; $x = \sqrt{40}$; $x = 2\sqrt{10}$

$\frac{CO}{CA} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

B) Encontre o argumento do seu número complexo. Vá agora ao Geogebra e verifique o ângulo do seu vetor e compare com seu cálculo. Salve em sua pasta.

Atravez da tangente conseguimos o angulo do z_1

$\alpha = 18,43$

C) Tome dois números complexos quaisquer. Faça o cálculo da multiplicação

Fonte: Material da Autora

Sempre solicitávamos aos alunos, em todas as atividades, que eles devessem sempre arrastar o número complexo para outras posições para verificar se os resultados eram válidos. A ideia em questão era sempre validar as operações utilizadas nas resoluções dos números complexos.

Figura 51: Alternativas C e D

C) Tome dois números complexos quaisquer. Faça o cálculo da multiplicação abaixo e encontre o Z3, resultado da multiplicação. Agora vá ao Geogebra e coloque os dois complexos escolhidos por você. Na caixa de entrada e faça a multiplicação digitando: $z\_1 * z\_2$ (enter). Veja qual foi o resultado z3 obtido e compare com seu cálculo. Qual é a conclusão?

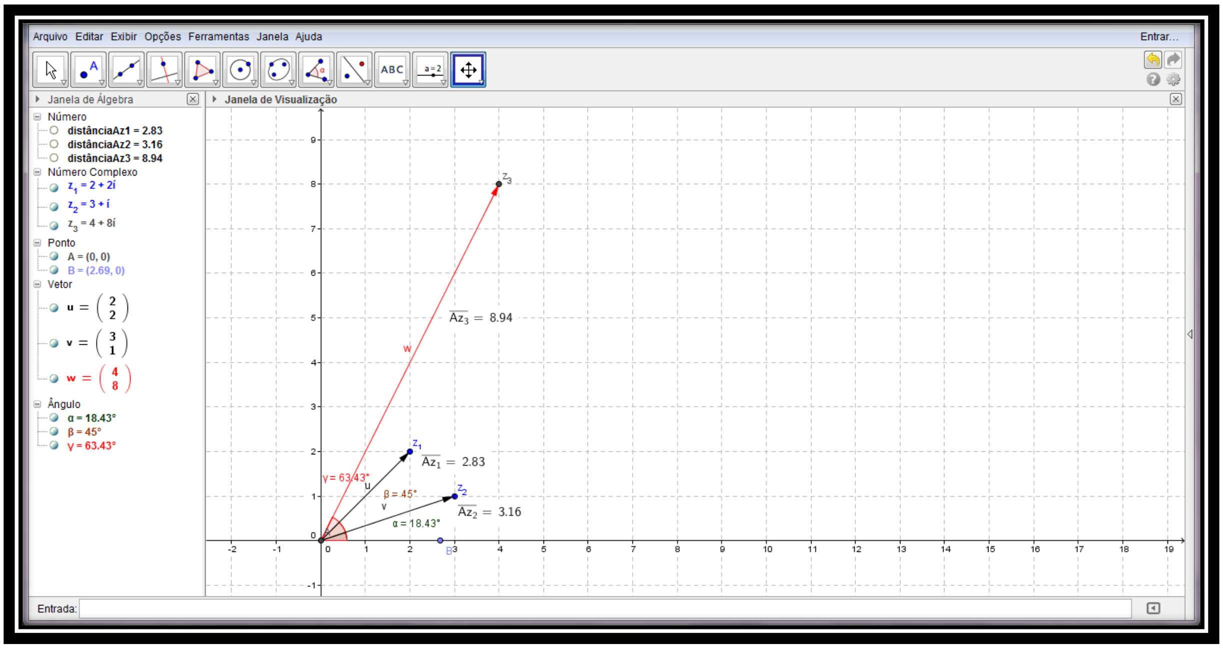
D) Meça os ângulos z1, z2 e z3. Meça também os módulos de z1, z2 e z3. Qual é a relação entre os ângulos de z1, z2 comparado com o de z3? Qual é a relação entre os módulos de z1, z2 comparado com os de z3? (Ou seja, qual a relação entre os complexos escolhidos e o resultado da operação de multiplicação). Salve em sua pasta

Fonte: Material da Autora

A ideia por de trás dessas alternativas era validar a operação utilizada na multiplicação de números complexos, além de levá-los a refletir na relação existente entre os módulos e os ângulos dos números escolhidos, com o módulo e o ângulo do complexo resultante do produto.

Neste caso, todos os alunos conseguiram perceber que a relação entre os módulos acontece através da multiplicação e a relação entre os ângulos é através da adição. Os alunos não tiveram dificuldades na realização dessa parte da tarefa.

Figura 52: Geogebra – Alternativa C e D – Resposta do aluno I



Fonte: Material da Autora

Ao acompanharmos a aplicação da tarefa junto aos alunos, pudemos observar que eles conseguiam perceber na figura, a relação entre os módulos dos vetores com o vetor produto, bem como a relação entre os ângulos dos vetores quando comparado com o vetor produto. No entanto, ao verificarmos a produção escrita ficamos bastante decepcionadas, pois observa-se claramente a dificuldade que os alunos têm em expressar corretamente suas conclusões. Vê-se que as frases são soltas, não explicam corretamente, conforme apresentação dos dois protocolos a seguir:

Figura 53: Alternativas C e D – Resposta da aluna M

C) Tome dois números complexos quaisquer. Faça o cálculo da multiplicação abaixo e encontre o Z3, resultado da multiplicação. Agora vá ao Geogebra e coloque os dois complexos escolhidos por você. Na caixa de entrada e faça a multiplicação digitando: $z\_1 * z\_2$ (enter). Veja qual foi o resultado z3 obtido e compare com seu cálculo. Qual é a conclusão?

$(1+2i)\cdot(4+4i)$ $\quad 4+12i+8(-1)$

através da distributiva encontr... $4+4i+8i+8i^2$ $\quad 4+12i-8$

e z_3

$\boxed{-4+12i}$

D) Meça os ângulos z1, z2 e z3. Meça também os módulos de z1, z2 e z3. Qual é a relação entre os ângulos z1, z2 comparado com z3? Qual é a relação entre os módulos z1, z2 comparado com z3? (Ou seja, qual a relação entre os complexos escolhidos e o resultado da operação de multiplicação). Salve em sua pasta

A relação entre eles é a soma

$z_1 = 1+2i$

$z_2 = 4+4i$

$z_3 = -4+12i$

E) Tome dois números complexos quaisquer. Faça o cálculo da divisão. Não

Fonte: Material da Autora

Figura 54: Alternativa E

E) Tome dois números complexos quaisquer. Faça o cálculo da divisão. Não esqueça de que para resolver, é necessário multiplicar em cima e em baixo, pelo conjugado do número de baixo, conforme o exemplo abaixo:

$$\frac{3+2i}{1-5i}=\frac{(3+2i).(1+5i)}{(1-5i).(1+5i)}=\frac{(3+2i+15i+10i^2)}{1^2-(5i)^2}=\frac{3+10.(-1)+17i}{1-25i^2}=\frac{-7+17i}{1+25}=\frac{-7+17i}{26}$$

Desenhe no Geogebra, os dois vetores escolhidos por você. Agora vá à caixa de entrada e digite: z_1/z_2 (enter). Compare o resultado z3 com o seu resultado. Compare os módulos de z1 e z2, com o de z3. Compare os ângulos de z1 e z2 com o de z3. Em outras palavras, qual é a relação entre os ângulos e entre os módulos. Salve em sua pasta

Fonte: Material da Autora

Para a realização da atividade proposta na alternativa E, colocamos o exemplo explicativo de como se opera a divisão de complexos, pois os alunos não aprenderam a fazer essa operação, visto que o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) não contempla essa parte do conteúdo, o que julgamos ser um grande erro.

Um aluno observador poderia elaborar o seguinte questionamento: mas se existe a operação de soma, subtração, multiplicação, porque não há a divisão? A potenciação? A radiciação?

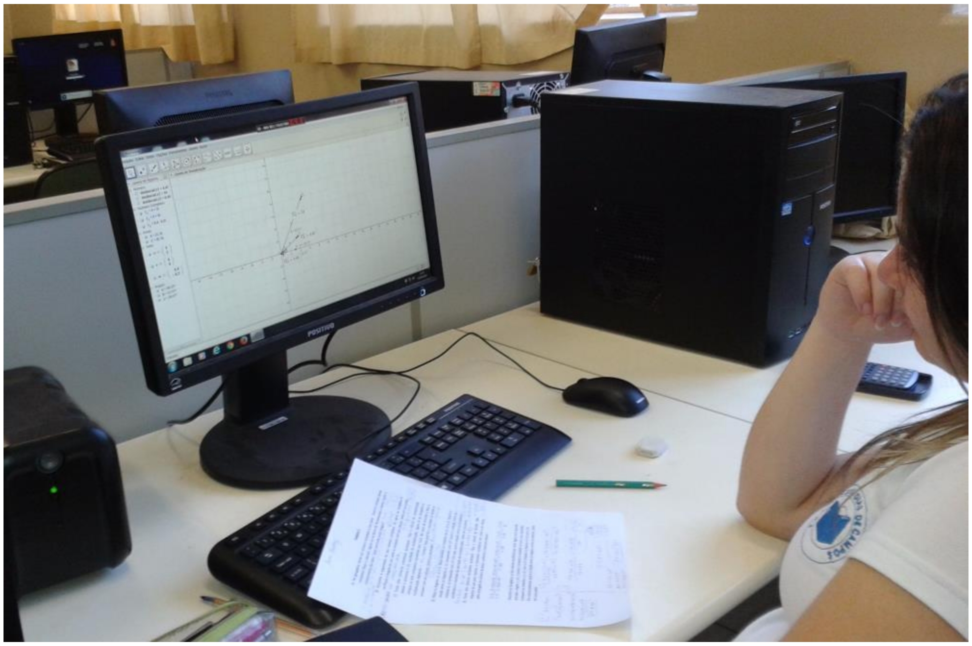
Dessa maneira, como pretendíamos que os alunos fossem capazes de observar as semelhanças e diferenças nas operações que envolvem a multiplicação e a divisão, envolvendo seus módulos e ângulos, fomos levados a dar algumas poucas explicações a respeito do exemplo. Os alunos desenvolveram suas atividades matemáticas com base na comparação do nosso exemplo para realizarem a operação. Explicamos ainda a eles que não é conveniente deixar uma raiz no denominador, no caso em questão, a parcela “i”, e por isso utilizamos o processo da racionalização o qual eles já haviam aprendido anteriormente. Não nos aprofundamos em nossas explicações, pois não era o nosso objetivo.

Realmente nesse caso ficamos bastante surpresas com as conclusões dos alunos, pois apesar de terem um pouco de dificuldade na realização do cálculo, 90% dos alunos conseguiram realizar de forma correta e concluíram de forma correta o resultado no Geogebra. Eles perceberam que as relações que envolvem a divisão são inversas em relação as relações da multiplicação. No entanto, a conclusão no registro linguístico, nos preocupou bastante. Somente uma aluna não conseguiu efetuar operação, pois errou nos cálculos.

No protocolo da aluna SB (figura 56), pode-se observar que apesar da aluna não ter aprendido a operação de divisão, uma vez que a professora regente seguiu o Caderno do Professor e do Aluno (SÃO PAULO, 2014) e tal abordagem não está presente nesse material, tínhamos motivos para crer que os alunos encontrariam muito mais dificuldades em realizar essa tarefa escrita. No entanto, observa-se que a mesmo conseguiu realizar a operação.

A tarefa não se limitava a resolução escrita. Era necessário fazer a construção utilizando a ferramenta Geogebra. De acordo com o enunciado, foi solicitado que o aluno procurasse observar as relações entre os módulos e os ângulos dos números complexos tomados para realizar a operação de divisão e relacionasse com o módulo e ângulo do número complexo resultante.

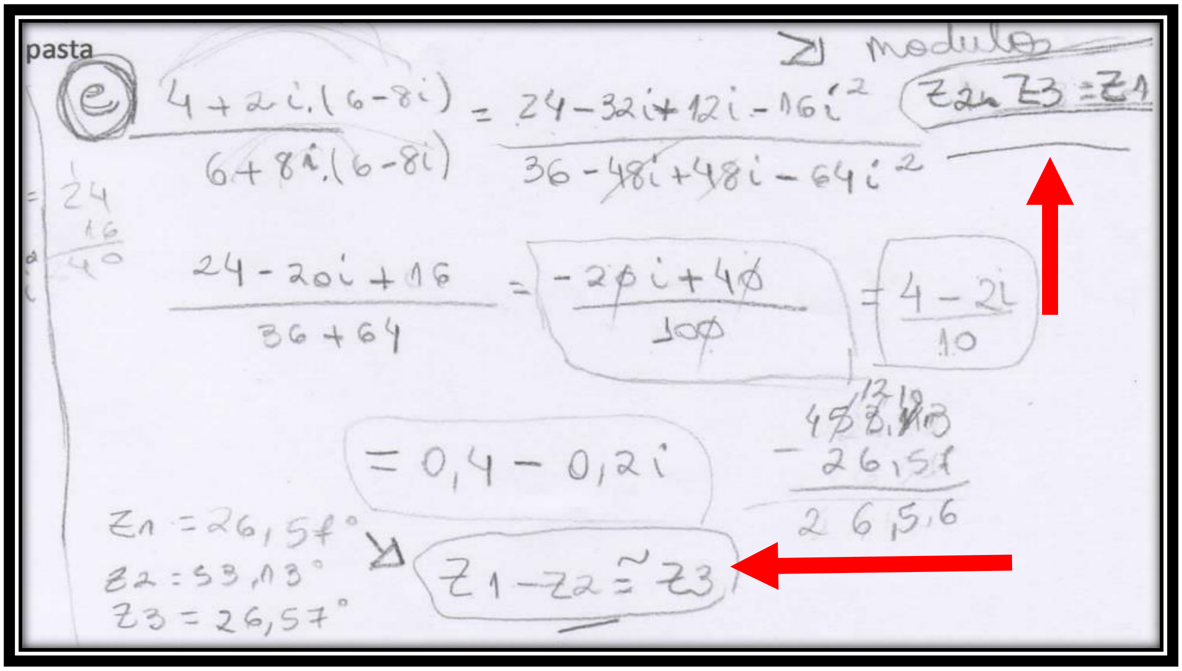
Figura 55: Aluna SB realizando operação de multiplicação com ajuda do Geogebra



Fonte: Material da Autora

Deixamos abaixo o protocolo de registro sobre as conclusões que a aluna em questão chegou. Nota-se claramente que ela compreende o que ocorre, porém não consegue fazer a conversão da representação para a língua escrita formal, explicando. Novamente confirmamos que esse problema ocorre porque essa conversão dentro dos registros de representação semióticas, não é convergente.

Figura 56: Alternativa E – Resposta da aluna SB



Fonte: Material da Autora

Ao final da aplicação desta tarefa, percebemos que os alunos estavam satisfeitos por terem participado da realização da atividade, bem como percebemos um certo ar de satisfação de quem havia descoberto algo novo o que nos deixou bastante satisfeita.

A aplicação dessa tarefa se deu de forma mais tranquila, pois os alunos perceberam que eles precisavam ser mais autônomos com relação ao desenvolvimento das tarefas propostas na pesquisa.

Em minha percepção, os alunos também se sentiram bastante satisfeitos com as conclusões que eles chegaram. Alguns deles discutiam entre si as soluções e os resultados, de uma maneira muito positiva.

Percebemos também que para essa tarefa, os alunos transitavam de uma forma mais tranquila no Geogebra e que a realização das atividades com a utilização desse instrumento realmente veio a agregar saberes aos alunos, pois a visualização dos fenômenos ocorridos nas operações, facilitaram a compreensão.

Um dos pontos mais positivos dessa tarefa é de que os alunos compreenderam o processo da operação de divisão, o qual não lhes havia sido ensinado e principalmente, conseguiram estabelecer relações entre os processos da multiplicação e da divisão. Isso foi possível, devido a utilização do Geogebra como ferramenta de aprendizagem.

Como ponto negativo, observo ainda as mesmas dificuldades dos alunos em relação as representações semióticas, no que tange a conversão de tratamento da língua natural escrita, em relação aos registros de suas percepções, como foi observado acima.

Um dos maiores problemas em relação a isso é que como professores, temos aceitado qualquer protocolo escrito dos alunos, ou seja, alguém um dia disse que se o sujeito se comunicou é suficiente, porém, verificamos que não é bem assim, pois frases sem sentido ou sem nexo, podem ser interpretadas de forma diferente por diferentes pessoas que as lerem, portanto o protocolo escrito, tem o dever de trazer a informação correta, dentro de uma norma culta.

A matemática, com sua riqueza de representações semióticas, tem uma norma culta de representação e escrita, e isso precisa ser não só ensinado, mas cobrado dos alunos. Não podemos mais cruzar os braços e aceitar qualquer coisa. Infelizmente esse processo de correção precisa necessariamente começar no Ensino Fundamental I.

4.4.3 – Análise a Priori e Posteriori da Tarefa 3

Para a aplicação da Tarefa 3, novamente ao chegarmos na escola, uma semana após a aplicação da atividade 2, a escola havia programado a apresentação de uma peça teatral, que ocorreria justamente no horário da aplicação da atividade de pesquisa. Devido a isso, decidimos remarcar a data da aplicação para a semana seguinte. Como teríamos mais um quarto encontro para a realização da Tarefa Final, contamos com a colaboração da professora regente que se organizou com a escola de maneira que a Tarefa 3 e a Tarefa Final puderam ser aplicadas no mesmo dia. Dessa forma utilizamos as 3 últimas aulas do dia para a realização dessas atividades que ocorreu no dia 08 de Outubro.

Novamente contamos com a colaboração de 10 alunos participantes na aplicação dessas Tarefas.

Figura 57: Alternativas 1, 2 e 3

TAREFA 3

Na tarefa 2, você teve a oportunidade de tomar dois números complexos e operar a multiplicação e a divisão com eles e tirar conclusões em relação aos módulos e aos ângulos resultantes em relação aos módulos e ângulos dos números complexos utilizados.

1) Tome dois números complexos, encontre o módulo e o argumento (ângulo). Agora vá no Geogebra, represente os números complexos e verifique seu resultado obtido, com os valores obtidos no Geogebra.

2) Escreva seus números na forma trigonométrica. Com base em suas conclusões em relação a tarefa 2 (anterior), como deve ficar o resultado escrito na forma trigonométrica da multiplicação dos seus números complexos? Confira sua conclusão na tela do Geogebra. Salve sua tela.

3) Como deve ficar o resultado escrito na forma trigonométrica da divisão dos seus números complexos? Confira sua conclusão na tela do Geogebra. Salve sua tela.

Fonte: Material da Autora

Para a aplicação dessas três atividades, percebemos que seria necessário relembrá-los das conclusões que eles haviam chegado na aplicação da Tarefa 2. Nossa ideia era que eles percebessem que trabalhar o resultado das operações de multiplicação e divisão na forma trigonométrica é muito mais simples do que operar com elas na forma algébrica.

Naturalmente todos os alunos conseguiram realizar com tranquilidade essas três atividades, pois eles já haviam realizado a Tarefa 2 e haviam ficado satisfeitos. Além do mais, eles haviam aprendido a passar números complexos na forma algébrica para a forma trigonométrica. A princípio um dos alunos questionou: *Mas como se escreve o número na forma trigonométrica?* Um outro aluno ao lado, logo respondeu: *“cosseno do ângulo mais i seno do ângulo”, certo professora?* Ao que respondi: correto.

Figura 58: Alternativa 2 e 3 – Resposta da aluna C

2) Escreva seus números na forma trigonométrica. Com base em suas conclusões em relação a tarefa 2 (anterior), como deve ficar o resultado escrito na forma trigonométrica da multiplicação dos seus números complexos? Confira sua conclusão na tela do geogebra. Salve sua tela.

$z_1 = 3{,}61(\cos 56{,}3° + i \operatorname{sen} 56{,}3°)$ $z_3 = 23{,}09(\cos 107{,}65° + i \operatorname{sen} 107{,}65°)$

$z_2 = 6.40(\cos 51{,}34° + i \operatorname{sen} 51{,}34°)$

3) Como deve ficar o resultado escrito na forma trigonométrica da divisão dos seus números complexos? Confira sua conclusão na tela do geogebra. Salve sua tela.

$z_4 = 0{,}56(\cos 4{,}97° + i \operatorname{sen} 4{,}97°)$. Dividindo o modulo z2 pelo z1 você encontra o módulo do z4. E para os angulos você subtrai o z1 pelo z2.

Fonte: Material da Autora

Figura 59: Alternativa 4

4) Escolha quatro números complexos e use a representação na forma de par ordenado no Geogebra. Agora una esses pontos, formando um quadrilátero. Multiplique os quatro complexos escolhidos pelo complexo z = 0 + 1i (ou simplesmente i). Uma os resultados formando um novo quadrilátero. Explique o que aconteceu. Salve sua tela

Fonte: Material da Autora

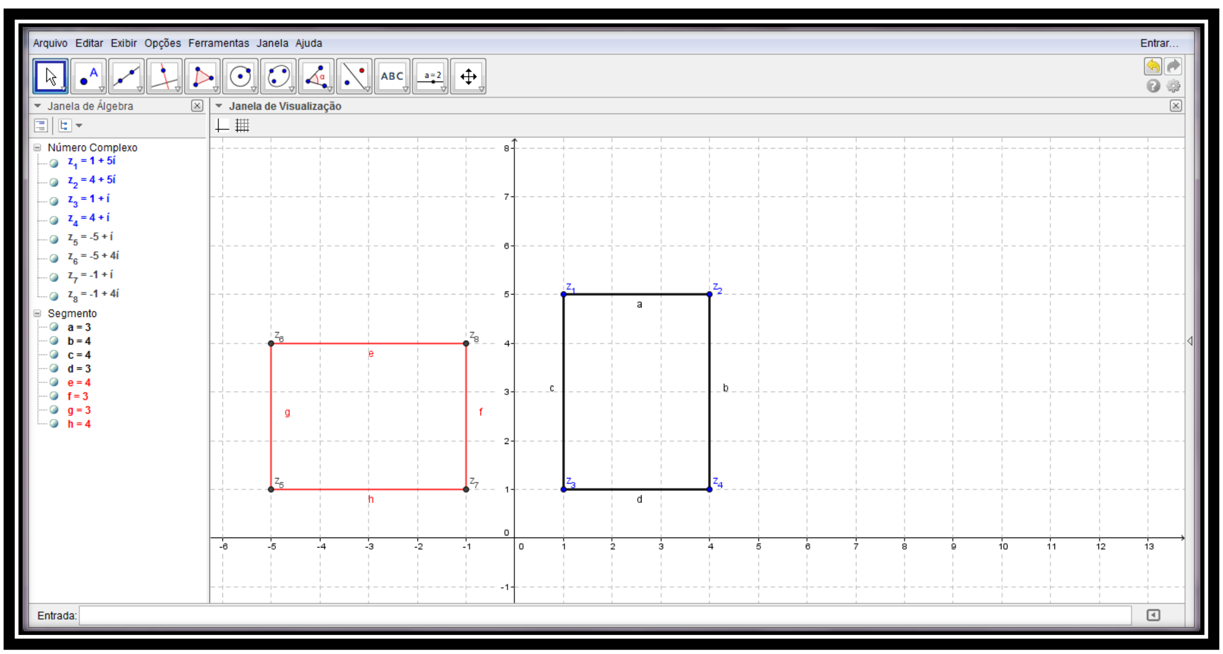
Quando os alunos iniciaram a realização dessa atividade, percebemos que se eles utilizassem a forma de par ordenado para representar o número, não seria possível a operação de multiplicação usando o Geogebra, dessa forma solicitamos que eles utilizassem a forma algébrica do número complexo.

Nossa expectativa nessa atividade era de que os alunos percebessem que a figura faria uma rotação de 90°. Esse tipo de atividade eles trabalharam no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014, p. 79), por isso resolvemos utilizá-las, pois nossa proposta em relação a isso é de que não basta apenas colocar essa informação no Caderno do Aluno, mas é necessário mostrar de que forma isso é utilizado no cotidiano dele. Tínhamos a plena certeza de que eles fariam as atividades, porém eles não imaginavam como elas estavam ligadas as suas próprias vidas.

Observamos que 70% dos alunos (7 alunos) perceberam que houve uma rotação de 90° da figura. Um dos alunos relatou que a figura ampliou e mudou de lugar, outro aluno relata que os pontos se moveram 40° para a esquerda e outro aluno alega que a figura mudou de quadrante. Cremos que esses três alunos não tenham compreendido corretamente o assunto quando foi trabalhado em sala de aula.

Na figura 60, podemos observar o protocolo da aluna N, onde ela escolheu trabalhar com um quadrilátero retangular. Solicitamos que eles realizassem as operações no protocolo escrito para cada número complexo escolhido na realização da tarefa e finalmente utilizasse o mesmo sistema para registrar o resultado (figura final). A aluna em questão escolheu inicialmente a figura ao lado direito e concluiu como resultado a figura do lado esquerdo, como resultado da multiplicação de cada número complexo por (i), verificando assim uma rotação de 90° na figura.

Figura 60: Alternativa 4 – Resposta da aluna N



Fonte: Material da Autora

Neste outro protocolo (figura 61), pode-se observar as conclusões da aluna B, após a realização da alternativa 4 desta tarefa, onde ela observa além da rotação de 90° que ocorre, mas também a mudança de quadrante. Observe que a aluna não sabe como expressar a “rotação” sofrida pela figura e se refere a esse fenômeno como sendo um “deslocamento”.

Figura 61: Alternativa 4 – Resposta da aluna B

4) - Ele muda de quadrante, e os valores que
eram positivos ficaram negativos, e sofre deslocamen-
to de 90°, do quadrante 1 vai para o quadrante 2

Fonte: Material da Autora

Figura 62: Alternativa 5

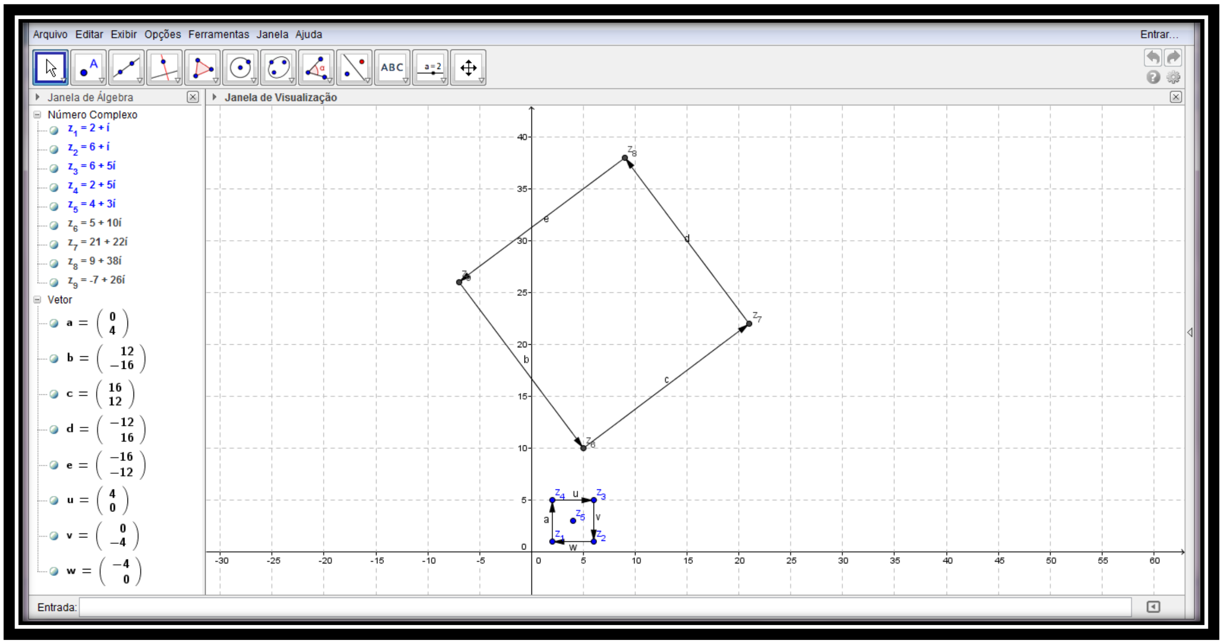
5) Limpe a tela e tome os quatro complexos formando um quadrilátero. Escolha um z_5 e opere as multiplicações com os quatro complexos. Una os quatro pontos resultantes, formando um quadrilátero. Explique o que aconteceu com novo quadrilátero comparado com o inicial.

Fonte: Material da Autora

Na atividade acima, alternativa 5 pretendia-se que o aluno observasse que além do giro que a figura faz e nesse caso não seria de 90°, mas dependeria do z_5 escolhido, a figura também se modificaria, pois dependem das parcelas “a” e “b” do número complexo escolhido para ser o z_5.

Na figura 63, pode-se observar o protocolo a atividade realizada pela aluna C, onde é visível a rotação e a ampliação da figura obtida como resultado da operação.

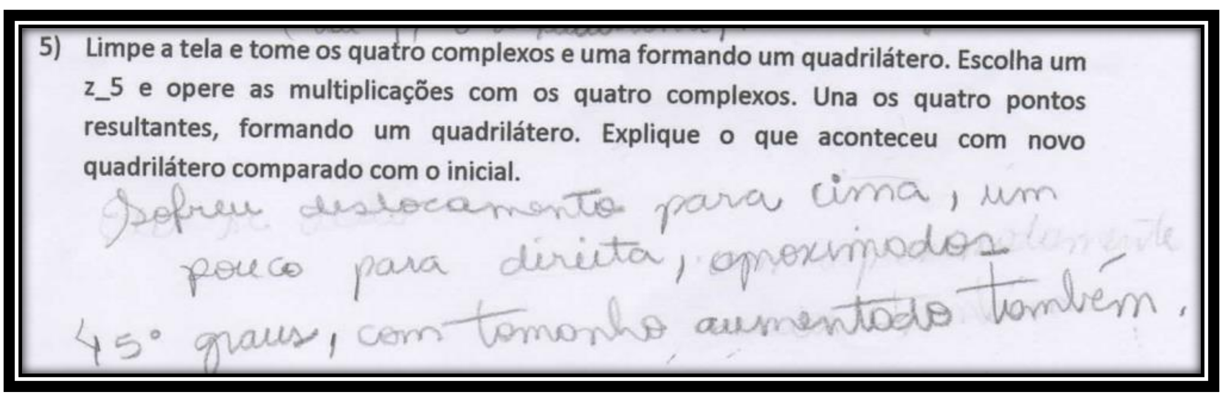
Figura 63: Alternativa 5 – Resposta da aluna C



Fonte: Material da Autora

No protocolo abaixo, da figura 64, a aluna SB tenta explicar com suas palavras, qual é sua percepção em relação ao que ocorreu na operação da multiplicação. Essa outra aluna também usa a palavra “deslocamento” ao se referir rotação ocorrida devido a operação.

Figura 64: Alternativa 5 – Resposta da aluna SB



5) Limpe a tela e tome os quatro complexos e uma formando um quadrilátero. Escolha um z_5 e opere as multiplicações com os quatro complexos. Una os quatro pontos resultantes, formando um quadrilátero. Explique o que aconteceu com novo quadrilátero comparado com o inicial.

Sofreu deslocamento para cima, um pouco para direita, aproximadamente 45° graus, com tamanho aumentado também.

Fonte: Material da Autora

Todos os alunos perceberam que ocorre uma rotação diferente do ângulo de 90° e que a figura se amplia. Somente um aluno não percebeu a ampliação, devido ao número z_5 escolhido. Ficou claro para nós que eles perceberam as modificações que ocorrem com a figura.

Poderíamos ter pedido também para que operassem a divisão em relação a algum quadrilátero, porém não teríamos mais tempo para essa realização, sendo que esse era o último dia em relação a aplicação dessas tarefas. Tínhamos a intensão inicial de fazer não só este mais outros questionamentos, como levá-los a pensar no que seria a operação de potenciação na forma geométrica, mas devido a alguns contratempos ocorridos no período das aplicações das tarefas, tais como ao chegar na escola e os alunos terem saído para uma excursão, ou irem assistir uma peça teatral, etc., esses fatos atrapalharam a aplicação de nossas tarefas, dentro do prazo que tínhamos estipulado.

Em nossa percepção em relação a aplicação dessa tarefa, percebemos que os alunos conseguiram compreender o que havia sido proposto e novamente para esta tarefa, eles agiram de forma muito mais autônoma e participativa. Perceberam que é muito mais fácil operar com a multiplicação e a divisão através da forma trigonométrica do que da forma algébrica, pois basta somar ou subtrair os ângulos respectivamente e multiplicar ou dividir os módulos respectivamente dos números complexos envolvidos na operação.

Ficamos satisfeitos com a aplicação dessa pesquisa, pois os alunos conseguiram compreender de forma mais fácil as operações propostas.

Outro ponto a destacar é que a pesquisa permitiu que eles aprendessem o que é o conjugado de um complexo e como utilizá-lo na resolução do processo da divisão entre complexos.

4.4.4 – Análise da Tarefa Final

Para a Tarefa Final, fizemos três questionamentos, dos quais todos os 10 alunos participaram.

Figura 65: Alternativa 1

TAREFA FINAL

1) Dê sua opinião sobre qual sua participação nesta pesquisa sobre os números complexos utilizando o software Geogebra. Você acha que a utilização do Geogebra pode ser um facilitador do aprendizado ou não? Crê que a aula é mais interessante ou não?

Fonte: Material da Autora

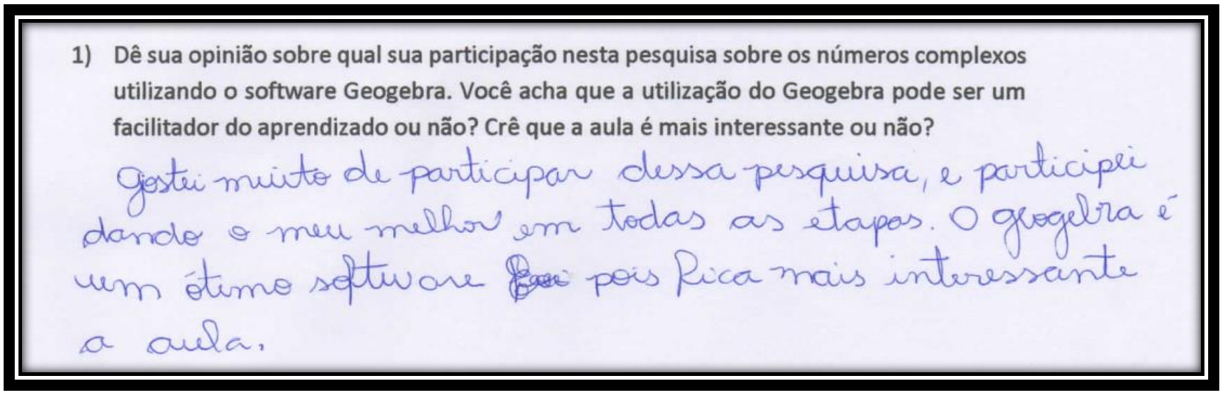
Pedimos aos alunos que realmente fossem sinceros em suas opiniões, pois a informação era importante para a conclusão da pesquisa.

Para esse item, 100% dos alunos responderam que:

- Gostaram de ter participado da pesquisa.
- A utilização do Geogebra tornou a aula mais interessante.
- Ajudou a compreender alguns pontos que não tinham sido plenamente compreendidos.
- A visualização da imagem permite compreender melhor a operação que se está realizando.

Na figura 66, podemos visualizar o protocolo do registro da aluna C, que participou ativamente nessa pesquisa em todas as etapas. Percebe-se pela fala da aluna, a satisfação de sua participação nessa pesquisa, mas que ao nosso olhar, também está no fato de que ela agregou saberes que não haviam sido plenamente compreendidos antes, na aula tradicional.

Figura 66: Alternativa 1 – Resposta da aluna C



1) Dê sua opinião sobre qual sua participação nesta pesquisa sobre os números complexos utilizando o software Geogebra. Você acha que a utilização do Geogebra pode ser um facilitador do aprendizado ou não? Crê que a aula é mais interessante ou não?

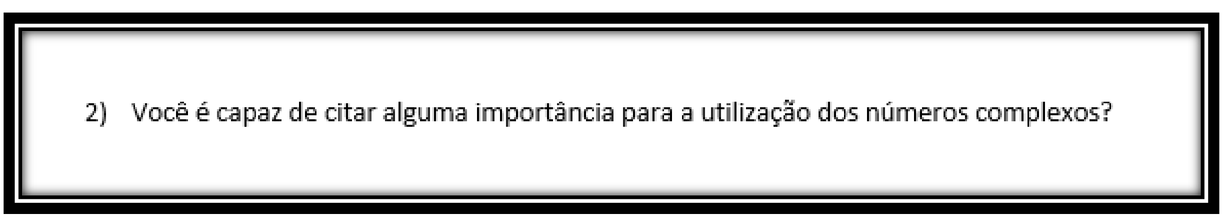
Gostei muito de participar dessa pesquisa, e participei dando o meu melhor em todas as etapas. O geogebra é um ótimo software ~~[illegible]~~ pois fica mais interessante a aula.

Fonte: Material da Autora

A resposta da aluna acima, vem de encontro com a fala de Duval (2013, p. 32):

> De um ponto de vista cognitivo, os softwares trazem três grandes inovações. A mais fascinante é o poder de visualização que eles oferecem em todas as áreas. A segunda é que eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela. Em outras palavras, eles não são somente um instrumento de cálculo cuja potência cresce de modo ilimitado, mas eles cumprem uma função de simulação e de modelagem que ultrapassa tudo o que podemos imaginar "mentalmente" ou realizar de modo gráfico-manual. Enfim, a produção pelos computadores é quase imediata: um clique, e isto é obtido sobre a tela! É esta tripla inovação do ponto de vista cognitivo que gera o interesse e os benefícios pedagógicos dos ambientes informatizados no ensino de matemática.

Figura 67: Alternativa 2



2) Você é capaz de citar alguma importância para a utilização dos números complexos?

Fonte: Material da Autora

Apesar de realmente termos percebido que os alunos ao final estavam se sentindo satisfeitos em participar da pesquisa, sabíamos que essa pergunta que já havia sido questionada no teste inicial, não teria uma resposta diferente após a aplicação da pesquisa.

Obtivemos 4 alunos respondendo que é útil para as áreas das Engenharias, porém não sabem explicar como. Um outro aluno alegou ser útil para resolução de problemas que não é possível resolver utilizando-se somente dos números reais. Outro aluno respondeu que é útil em algumas áreas, porém não especificando também e os outros 4 alunos restantes, não souberam responder.

Figura 68: Alternativa 3

3) Você gostaria de saber mais sobre os números complexos, como, operar potenciação, radiciação, e principalmente sua utilização?

Fonte: Material da Autora

Ao colocarmos esse questionamento, nosso intuito era de realmente verificar de que maneira a utilização do Geogebra havia impactado sobre os alunos.

Neste caso 70% dos alunos responderam que se sentiram curiosos em conhecer além e ressaltaram que queriam saber de forma mais imediata. 20% dos alunos informaram que até gostariam de saber mais sobre o assunto, mas em um momento oportuno e somente um aluno (10% dos alunos), respondeu que não tem interesse no assunto.

Para dar um fechamento em nossa pesquisa, optamos por levar todos os alunos da sala do 3° A até a sala de vídeo, onde fizemos um breve relato do porquê de nossa pesquisa, sobre qual era o nosso intuito, aproveitamos para agradecer aos participantes e através de alguns slides, procuramos mostrar para que servem os números complexos e isso está na vida deles, quando utilizam por exemplo, computador.

Ressaltamos a importância para a Computação Gráfica, na Previsão do Tempo, no campo da Medicina, até mesmo em simples edição de fotos.

Após nossa apresentação, um dos alunos da sala se colocou em pé e exclamou: *“Quer dizer que a todo tempo eu estou utilizando dos números complexos quando eu faço edição de fotos, ampliando, girando, diminuindo, no meu computador?”*

- Isso mesmo, respondemos ao aluno.

Destaco que três pontos positivos podem ser claramente observados em todo o tempo da pesquisa, a saber:

1°) A contextualização geométrica dos números complexos dá ao aluno a chance de uma melhor compreensão dos conceitos inerentes a esse estudo.

2°) A utilização do Geogebra como ferramenta para a articulação geométrica foi de grande importância, pois permitiu a absorção de conceitos num tempo bem menor, como já havíamos previsto no início dessa dissertação. Conforme vimos acima na fala de Duval (2013, p.32), os softwares permitem um trabalho diferenciado dentro da estrutura dos registros semióticos, devido sua rapidez com relação as conversões semióticas.

Observa-se que muito embora o software Geogebra se mostrou útil, no entanto não se dispensa a importante figura do professor, que deve auxiliar o aluno não só na correta manipulação da ferramenta, mas principalmente deve ajudar aos alunos a se expressarem matematicamente de forma correta, para que haja compreensão nas conclusões obtidas, afinal, o software não faz milagres.

3°) Não podemos deixar de mencionar que as dificuldades que os alunos encontraram em seus protocolos escritos, está relacionado diretamente com as transformações de tratamento e conversões dos registros de representação da semiótica, bem como a coordenação entre os registros.

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciarmos essa pesquisa, partimos do pressuposto de que o estudo dos números complexos dentro de uma perspectiva geométrica, ou seja, articulando sua representação algébrica ou representação em forma de par ordenado, com sua representação geométrica, e aliado a isso, articular as construções das operações que envolvem esses números de forma geométrica, iria permitir ao aluno a construção de conceitos, além de permitir uma compreensão de seu significado, pois ao nosso ver, trabalhar com esses números de forma puramente algébrico, tira a chance do aluno de ser protagonista de seus saberes.

Do ponto de vista da perspectiva geométrica, entendemos que o Geogebra seria um grande aliado para as construções geométricas de nossa pesquisa, além de uma ferramenta motivadora para o estudo.

Em nossa trajetória, elencamos três questionamentos para nortear nossa pesquisa que são:

I) *Que saberes sobre números complexos, alunos do Ensino Superior trazem como bagagem do Ensino Médio?*

II) *Que perspectiva de construção de saberes o Caderno do Aluno e do Professor (SÃO PAULO, 2014), proporciona ao aprendizado de números complexos?*

III) *O Geogebra pode agregar a construção de saberes quando articulado ao Caderno do Aluno, disponibilizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo?*

Baseado nesses três questionamentos, parti em busca do referencial bibliográfico e teórico que pudesse me direcionar nessa pesquisa, de forma a responder em minhas inquietudes.

Em busca de respostas a essas inquietudes frente aos conhecimentos que os alunos demonstram em relação a esse conteúdo, uma vez que em nossa visão, o conteúdo sobre os números complexos abordado no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), é insuficiente. É notório que o foco em relação aos números complexos é somente permitir ao aluno manipular com eles nas resoluções de equações polinomiais.

Devido à falta de contextualização e a maneira como esses são abordados, passa ao aluno a ideia de que esses números para nada servem e principalmente que eles são números do "além", ou "fantasmagóricos". Algo surreal.

Fui em busca de respostas para tentar entender o porquê o Caderno do Aluno e Professor da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, aborda de maneira tão pobre um conteúdo tão rico, conclui que ele vem de encontro as falas do que está nos aportes curriculares nacionais. O próprio Currículo do Estado de São Paulo, apesar de elencar esse conteúdo, deixa claro que seu objetivo é atender exclusivamente ao ensino das equações polinomiais.

Busquei junto às publicações científicas, quais eram as opiniões frente a esse tratamento dado a esse conteúdo. Ao analisarmos todos os trabalhos de nossos colegas, o qual compôs nossa referência bibliográfica, entendemos que todos veem grande importância no estudo dos números complexos, porém, é necessária uma mudança na prática de ensino desse conteúdo, pois da maneira como ele é transmitido não só pelos profissionais do ensino, mas também pela maneira como se apresenta nos materiais didáticos, transmite ao aluno a ideia de que esse conteúdo não tem qualquer importância e seu estudo para nada serve, pois é totalmente desarticulado da própria matemática.

Lamentavelmente os PCN (BRASIL, 2000) difundiram erroneamente a informação de que esse conteúdo deve ser descartado pois não se articulam interdisciplinarmente com outras disciplinas do currículo do Ensino Médio e nem mesmo com a matemática. Baseado nessa informação, o Enem, excluiu esse conteúdo da disciplina de matemática, como informa a Revista Veja, edição 2131 online de 23 de setembro de 2009, onde se lê:

> ***4. Não perder tempo com disciplinas que foram excluídas do novo Enem****. O exame tem 10% menos conteúdo do que um vestibular tradicional (e a tendência é que encolha ainda mais no ano que vem). O Inep informa que ficaram de fora da prova de matemática, por exemplo, temas como* ***números complexos****, matrizes e determinantes.*

O conteúdo dos números complexos é muito rico e articulável com vários conteúdos da própria matemática, facilitando em vários casos, a resolução de situações problemas que envolvem por exemplo, a geometria. Além do mais, é perfeitamente articulável com a disciplina de Física em suas várias frentes.

Por acreditar que em relação a esse conteúdo deva ser feito um trabalho sério no sentido de mudar o enfoque da forma como é ensinado o conteúdo, criando atividades interdisciplinares, de maneira que os alunos possam compreender a importância desse estudo e de como utilizá-lo como ferramenta na resolução de problemas. Vale salientar que esse conteúdo é muito rico, pois permite diferentes formas de registros de representação da semiótica, o que abre espaço para articular com outros temas da própria matemática.

O referencial teórico dentro dos registros de representação da semiótica se mostraram ser importantes, primeiro pelo fato de que no estudo dos números complexos, devido sua diversidade de representação, a apreensão dos conceitos se dá de forma intrínseca à manipulação correta das conversões dos registros semióticos em relação a esse conteúdo. Dessa forma, esse aporte teórico se mostrou muito importante, quando das análises da pesquisa em todas as suas etapas.

Trabalhamos com nossa pesquisa em três etapas distintas, com o objetivo de tentar responder aos nossos questionamentos.

Em nossa primeira etapa, aplicamos um questionário (Anexo A), aos alunos do 2° semestre de engenharia civil do ensino superior de uma instituição particular de ensino, no intuito de encontrar respostas em relação ao nosso questionamento. Esse questionário também foi aplicado a alunos do 3° ano do ensino médio de uma escola pública estadual, onde apenas retiramos a última questão.

Ao compor esse questionário, nos valemos de questões constantes da dissertação de Rosa (1998), que também havia aplicado um questionário frente a alunos do ensino superior no curso de engenharia.

Dessa forma pudemos estabelecer critério de análises comparativas. Comparando os saberes dos nossos alunos do ensino superior, com os alunos do ensino superior de Rosa (1998). Percebemos que apesar de estarmos em situações distintas quanto ao foco em relação ao Currículo do Estado de São Paulo, devido a mudança de currículo ocorrida em 2009, porém ao se comparar as realidades em relação ao foco do estudo desse conteúdo, praticamente nada mudou. Desde aquela época o estudo dos números complexos tem se dado somente para atender ao estudo das equações polinomiais. Dessa forma em nossas análises, apesar de parecer que em alguns pontos houve melhora, quando comparamos de uma maneira mais aprofundada, percebemos que em alguns aspectos houve piora, já que os nossos alunos de hoje apresentam dificuldades muito maiores em transitar pelos diferentes registros de representação semióticas que são requeridos nesse estudo.

Ao aplicar a mesma pesquisa aos alunos do 3° ano do ensino médio de uma escola pública, pudemos também traçar uma comparação entre os saberes dos alunos do ensino superior e os alunos do ensino médio. Nesse ponto ficamos mais preocupados ainda, pois os alunos do ensino médio, que acabaram de estudar o conteúdo, não apresentar nenhum rendimento melhor que os alunos do ensino superior, onde vários deles haviam estudo o conteúdo há pelo menos mais de um ano. A expectativa era de que os alunos do ensino médio apresentassem um melhor rendimento, o que não ocorreu.

Diante disso, concluímos que estamos certos com relação ao que pensamos sobre a forma de abordagem desse conteúdo e a maneira como ele é apresentado e ensinado frente aos materiais didáticos disponíveis e frente os aportes teóricos curriculares nacionais e estaduais, onde o conteúdo é apresentado apenas para que o aluno consiga chegar ao resultado de raízes polinomiais. Por isso em nossa pesquisa, obtivemos a fala de um aluno dizendo que esses números “são misteriosos”. Eles são apresentados dessa forma aos alunos. Um número que não se consegue representar na reta real, realmente por esse aspecto, o aluno está correto, eles são realmente “misteriosos”.

Continuando nossa pesquisa, pois nosso objetivo em responder todos os nossos questionamentos ainda continuava, dessa forma, aplicamos três blocos de Tarefas com a utilização do Geogebra para os alunos do 3° ano do ensino médio. Aplicamos após essas tarefas um questionário com três questões, apenas para que pudéssemos ter um feedback dos alunos em relação à nossa pesquisa.

A aplicação das tarefas foi muito positiva, apesar de os alunos demonstrarem bastante dificuldades em relação aos registros escritos, devido ao fato de que a transição da conversão da linguagem computacional para a linguagem matemática natural escrita, ser uma conversão de não congruência.

Através das atividades elencadas em nossa pesquisa, os alunos puderam se apropriar de saberes além dos que estão disponíveis no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), e devido a utilização da ferramenta Geogebra, a apropriação desses novos conceitos se deu de forma muito tranquila, atendendo nossa expectativa.

Dessa forma, podemos responder nossos questionamentos a saber:

Que saberes sobre números complexos, alunos do Ensino Superior trazem como bagagem do Ensino Médio?

Os saberes são ínfimos quando comparados com a real necessidade para os alunos que seguiram carreira dentro do campo das exatas. Se a maneira como vinha sendo abordado antes, na época da pesquisa de Rosa (1998), não estava a contento, isso não é motivo para descartar o conteúdo, como afirma o Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000). O que precisa é haver uma reformulação na forma como é conduzido esse conteúdo. Em nossa pesquisa junto aos alunos do ensino superior, cerca de 70% deles recém saídos do ensino médio, apresentaram uma bagagem de saberes insuficiente.

Que perspectiva de construção de saberes o Caderno do Aluno e do Professor (SÃO PAULO, 2014) proporciona ao aprendizado de números complexos?

O Caderno do Aluno e do Professor (SÃO PAULO, 2014), corrobora com a fala do PCN (BRASIL, 2000), colocando esse conteúdo como algo desnecessário, já que o foco é apenas para resolução das equações polinomiais. Até há uma pequena contextualização histórica e geométrica, mas é preciso uma revisão séria, dentro de uma abordagem que possa agregar conhecimento aos alunos, pois nos surpreendemos quando aplicamos o questionário constando de perguntas idênticas as que se encontram no Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) e esperávamos que os alunos fossem capazes de responder mais prontamente as questões elencadas. O que percebemos é que vários alunos têm dificuldades em relação a alfabetização matemática e outros têm dificuldades em relação a transposição e conversão dos registros de representação semiótica.

A bagagem de conhecimento que eles demonstraram é considerada insatisfatória, para um conteúdo que acabara de ser ensinado. Salientamos também que o problema não está com relação ao ensino passado pela professora, pois verifica-se nas respostas dos alunos que esses afirmam que o conteúdo foi ensinado. O que conseguimos concluir é que a maneira como o Currículo do Estado de São Paulo e o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014) trata esse conteúdo, não é suficiente para fazer com que o aluno se aproprie dos conhecimentos mínimos necessários.

O Geogebra pode agregar a construção de saberes quando articulado ao Caderno do Aluno, disponibilizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo?

Não ficou dúvidas em nós de que a utilização do software Geogebra como ferramenta de ensino e aprendizagem, trouxe uma grande contribuição, pois conforme já concluímos anteriormente, 70% dos alunos que participaram da pesquisa se sentiram motivados em conhecer mais sobre o assunto e de sua importância e utilidade. Lembramos ainda a fala do aluno em nossa apresentação final, onde depois de mostrarmos algumas utilizações para os números complexos o mesmo conclui que a todo tempo está utilizando-se de números complexos e suas operações quando está mexendo com suas fotos no computador.

O software Geogebra se mostrou uma ferramenta não somente eficiente para o aprendizado, mas também, motivacional, vindo de encontro com aquilo que acreditamos.

Ao ingressar no mestrado junto à UFSCar – Campus Sorocaba, sabia que precisava buscar mais conhecimentos de forma que isso pudesse se traduzir em mudanças na minha prática pedagógica.

Quando ingressamos no mestrado, não via na ferramenta Geogebra realmente algo que pudesse transformar a minha pratica pedagógica nem muito menos via o estudo dos registros de representação da semiótica como algo que pudesse realmente vir de encontro com o que eu buscava, para compreender as dificuldades dos alunos em relação ao processo ensino-aprendizagem.

Ao final do primeiro ano de estudo, tudo isso já havia mudado em mim, ou seja, a realização desse mestrado realmente abriu minha visão e meu conhecimento em relação a ferramenta Geogebra, bem como o conhecimento mais aprofundado sobre os registros de representação das semióticas, e trouxeram-me os subsídios necessários, para uma melhor compreensão e análise da minha prática enquanto docente.

Sem sombra de dúvida, esse estudo, essa pesquisa me proporcionaram uma mudança em relação a minha prática docente. Algo que realmente fiz e nem imaginaria que fosse viável, foi a utilização do Geogebra enquanto ferramenta de ensino para Álgebra Linear, dos meus alunos do ensino superior.

Claro que em relação a ferramenta Geogebra, ela se mostrou eficiente para o ensino em vários campos de aplicação, dos quais ainda pretendo experimentar, mas principalmente se mostrou fundamental, apesar de suas limitações, para o estudo dos números complexos aos alunos do 3° ano do ensino médio.

Naturalmente esta pesquisa se concluiu de forma muito positiva, porém a docente e pesquisadora, ainda não se dá por satisfeita, uma vez que agora surge outros espaços, novos questionamentos, como por exemplo: Pode o Geogebra agregar saberes se utilizado como ferramenta em disciplinas do ensino superior? Quais? E quais seriam suas limitações? Esses questionamentos pretendemos responder, porém em uma nova pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revista Eletrônica de Educação Matemática,** p.62-77, 2008, n.6, v.3.

ARAÚJO, Nanci Barbosa Ferreira. **Números complexos**: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio. 2006. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.

ARBEX, Daniela. Entrevista com Bernard Charlot, **Educação em foco**, Juiz de Fora, p. 213-220, 2010, n.2, v.14.

ARTIGUE, Michèle. Ingéniere didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, p.231-308, 1988, n. 3, v. 9.

BITTAR, Marilena. O uso de softwares educacionais no contexto da aprendizagem virtual. In: CAPISANI, Dulcimira. **Educação e arte no mundo digital**. Campo Grande: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2001.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009. Disponível em: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/910/1000>. Acesso em: 10 Mar. 2013.

BRASIL. Inep: Exame nacional do ensino médio – ENEM. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/educacao/2009/10/bom-desempenho-do-enem-pode-garantir-vaga-na-faculdade>. Acesso em: 22 Nov. 2014.

BRASIL. Inep: Escala de notas do enem 2012. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/c/journal/view_article_content?groupId=10157&articleId=103744&version=1.3> Acesso em: 22 Nov. 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais:** Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.109 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+:** Ensino médio - orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC, 2002.141p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 135p., 2006, v.2.

CALDEIRA, Cláudia Rosana da Costa; **Números complexos**: uma proposta geométrica. 2013, 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.

CAON, Fernanda; **Números complexos**: inter-relação entre conteúdos e aplicações. 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Ponta Grossa: Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2013.

COMPARATIVO PROVA BRASIL, disponível em:<http://www1.folha.uol.com.br/educacao/2014/11/1555428-nota-de-matematica-recua-na-rede-publica.shtml> Acesso em: 29 Nov. 2014

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, Silvia D.A. (Org.) **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009, fascículo I.

DUVAL, Raymond. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? **Práxis Educativa**, p. 305-330, jul/dez, 2012, n.2, v. 7.

ESCALA DE NOTAS DO ENEM 2012/2013, G1.globo.com**.** Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/enem/2013/noticia/2014/01/notas-maximas-do-enem-sobem-em-todas-provas-exceto-linguagens.html> Acesso em: 30 Nov. 2014.

FEITOSA, Laércio Francisco. **Aplicações dos números complexos na geometria plana**. 2013, 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2013.

FERREIRA, Maria Sueli Fonsêca; **Uma análise dos questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos.** 2006. 94 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.

FOLHA UOL EDUCAÇÃO. Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br/educacao/2014/11/1555428-nota-de-matematica-recua-na-rede-publica.shtml, 29 Nov.2014

FRANCISCO, Deise Juliana; DAL TOÉ, Mabel Cristina; ALBERTI, Taís Fim. Processo de implementação de ambientes informatizados e a prática docente. **Psicologia Escolar e Educacional**, p. 177-184, 2002, n.2, v.6.

G1.Globo.com - EDUCAÇÃO/ENEM 2012. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/enem/2012/noticia/2012/12/veja-notas-minimas-e-maximas-registradas-no-enem-2012.html> Acesso em 11 Mar. 2013.

G1.Globo.com - ESCALA DE NOTAS DO ENEM 2012/2013. Disponível em: <http://g1.globo.com/educacao/enem/2013/noticia/2014/01/notas-maximas-do-enem-sobem-em-todas-provas-exceto-linguagens.html> Acesso em: 30 Nov. 2014.

GOMES, Márcio Roberto; **Explorando o tratamento matricial para uma introdução aos números complexos**. 2013. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 2013.

GOMES, Reinaldo. **Números complexos e polinômios**: estratégias de ensino para aplicação por meio do Geogebra. 2013. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2013.

IMAGEM, Tablatura para violão, disponível em: http://blogartmusic.blogspot.com.br/p/cifras.html. Acesso em: 28 Nov. 2014.

IMAGEM, Tablatura para teclado, disponível em: https://consultamusical.wordpress.com/category/informacoes/cifras/. Acesso em: 28 Nov. 2014.

LIMA, Valéria Muniz; BORGES, Fábio Alexandre. Utilização da linguagem matemática como instrumento para reflexão sobre o ensino-aprendizagem: O caso da redação matemática. In: SEMINÁRIO DE HISTÓRIA E INVESTIGAÇÃO DE/EM AULAS DE MATEMÁTICA - SHIAM, 2, 2008, Campinas, **Anais...** Campinas: UNICAMP, 2008, p.377-387.

MONZON, Larrisa. **Números complexos e funções de variável complexa no ensino médio**: uma proposta didática com uso de objeto de aprendizagem. 2012. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de; **Números complexos**: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

PAES, Liliam Aparecida Alves; **Números complexos**: uma proposta didática na modelagem matemática e em contextos históricos. 2013, 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2013.

PAULA, Luciene; **A interpretação geométrica dos números imaginários no século XIX**: a contribuição de Jean Robert Argand (1768-1822). 2007. 156f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Cuiabá: Universidade Federal do Mato Grosso, 2007.

PINTO JUNIOR, Ulício; **A história dos números complexos**: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand. 2009. 94 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

ROSA, Mário Servelli. **Números complexos**: uma abordagem histórica para aquisição de conceitos. 1998. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). SãohPaulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1998.

REVISTA VEJA. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/noticia/educacao/raio-x-do-enem-os-conteudos-mais-cobrados-desde-2009>. Acesso em 03 Mar. 2013.

REVISTA VEJA. Disponível em: < http://veja.abril.com.br/230909/chave-faculdade-p-078.shtml>. Acesso em 01 Nov. 2014.

REVISTA VEJA. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/noticia/educacao/inep-divulga-notas-maximas-e-minimas-do-enem-2013> Acesso em 29 Nov. 2014.

SANTOS, Marcos André dos; **Dos números complexos aos quatérnions**: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações. 2013. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2013.

SANTOS, Robson de Oliveira. **O uso pedagógico de uma sequência didática para a aquisição de algumas ideias relacionadas ao conceito de números complexos**. 2008, 135 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de matemática**: 2º grau. 3ª ed. São Paulo: SE/CENP,1992.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do aluno**: 3ª série do Ensino Médio, Matemática. São Paulo: SEE, 2014, v.2.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do professor**: 3ª série do Ensino Médio, Matemática. São Paulo: SEE, 2014, v.2.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática – Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, SEE: 2010.

SILVA, Daniele da Cunha; **Modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem de números complexos**: uma proposta didática. 2013, 88f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2013.

VITTI, Catarina Maria. **Matemática com prazer**: a partir da história e da geometria. 2ª Ed. Piracicaba: Editora UNIMEP. 1999.

ANEXO A

QUESTIONÁRIO – PESQUISA I

Qual sua idade? __________ Sexo: ____________Atualmente você continua estudando?_____________ Se sim, em qual área/ou o que estuda? ___________________________________

1) Assinale as alternativas que mais se aproximam da sua ideia a respeito da Matemática.
a) A Matemática é uma disciplina difícil, pois os conceitos são inventados por pessoas em momento de inspiração, de maneira teórica, nada tendo a ver com os fatos concretos da nossa vida, como números complexos, logaritmos, etc. Grande parte dos conceitos matemáticos, são dados na escola somente para o aluno fazer exercícios que nada têm a ver com a realidade e depois fazer uma prova.
b) Os conceitos matemáticos nasceram de situações concretas do dia a dia.
c) Não tenho a menor ideia.

2) Números Complexos, são aqueles do tipo a + bi onde a e b são números reais e $\sqrt{-1} = i$ ou $i^2 = -1$. Você já estudou esse tipo de números?
a) Sim b) Não

3) Como você acha que os números complexos foram descobertos?
a) Quando um matemático ao resolver uma equação do segundo grau se deparou com um discriminante negativo ($\Delta = b^2 - 4.a.c$), e para continuar a resolução ele resolveu criar um número i tal que i^2= -1.
b) Os números complexos foram descobertos quando um matemático tentava resolver uma equação do terceiro grau.
c) Não tenho a menor ideia.

4) Você já resolveu algum problema concreto do dia a dia, que apesar de na sua resolução aparecer raiz quadrada de um número negativo, o resultado final foi um números real, como R$ 3,00, 7 metros, etc, enfim que representava uma quantidade?

a) Sim b) Não

Se você respondeu sim, pode descrever como era esse problema?

5) Baseado no seu conhecimento de números complexos coloque V no verdadeiro e F no falso.

____ Os números complexos como, por exemplo, 2 + 3i, na realidade não são números, são apenas representações matemáticas, pois não representam uma quantidade, uma vez que ninguém diz: “ganho (2+3i) reais de salário”, ou paguei (4-2i) reais, ou ainda andei (7+2i) metros, etc.

____ Os números complexos são números sim, pois com eles podemos resolver problemas do dia-a-dia e chegar à resposta que representam quantidades.

____ Os números complexos são na verdade a expressão matemática dos vetores e eles podem ser percebidos nos fenômenos físicos, nas relações geométricas, matriciais, etc.

6) Dentre os nomes abaixo, quais você associaria com a história dos números complexos?

a) Bombelli b) Argand c) Wallis d) Wessel e) Gauss

f) Hamilton g) Cardano h) Moivre

7) Você já tentou resolver um problema de geometria utilizando os números complexos?

a) sim b) não

Acha que seria possível? ____

8) Um número real nós podemos representar geometricamente na reta real. E um número complexo, é possível representar geometricamente?

b) Sim b) Não

Se você respondeu sim, tente no espaço abaixo representar geometricamente o número 2+3i

9) Como você representaria na forma algébrica (4, 2)?

10) Se um número complexo está localizado no 2°quadrante do plano, em qual quadrante estará o seu conjugado?

11) Você sabe explicar o que acontece quando somamos um número complexo com o seu conjugado?

12) Qual das alternativas abaixo representa uma relação com as operações da adição e subtração de complexos:

a) Teorema de Pitágoras b) Regra do Paralelogramo c) Teorema de Tales

d) Regras Trigonométricas e) Teorema de Bháskara

13) Ao tomarmos um número complexo z, pertencente ao primeiro quadrante do plano, se multiplicarmos este complexo z por *i* (unidade imaginária), onde estará a imagem resultante?

14) (2+3i) + (5 + 2i) =

15) (4, 5) + (2, 6) =

16) (2 + 3i) . (5 + 2i)=

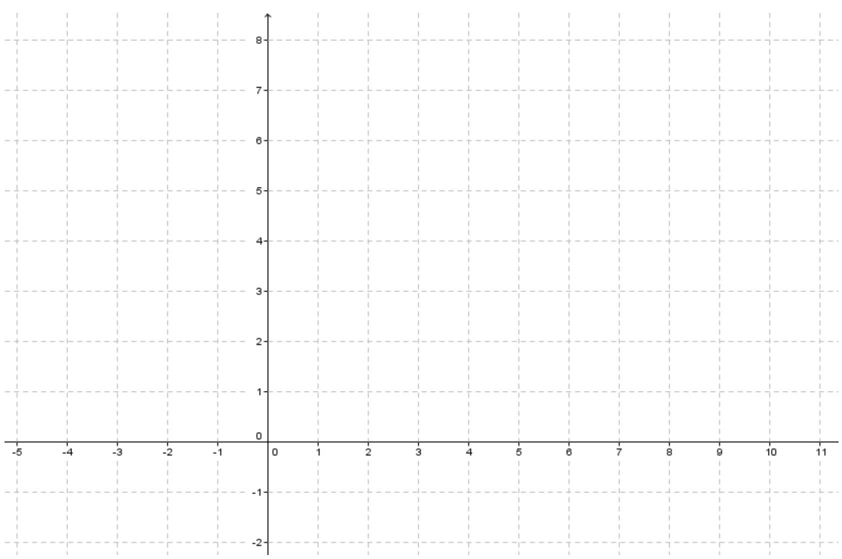
17) (4,5) . (2, 6) =

18) $(2 + 3i)^2$ =

19) $(2+2i)^5$ =

20) $\sqrt{5-12i}$ =

21) Considerando no plano complexo uma região triangular formada pelos complexos (1, 2); (4, 1) e (3, 4). Utilize a malha abaixo para representar essa região e o resultado da transformação que adiciona o número complexo 2 + 3i a cada ponto da região.



Pode explicar o que aconteceu com a região triangular?

22) Você consegue citar alguma aplicação para os números complexos?

23) Quer fazer alguma observação que julgue importante?

(OBS: A questão 23 foi aplicada somente para os alunos do ensino superior)

ANEXO B

TAREFA 1

A) Você aprendeu que um número complexo $z = a + bi$ pode ser representado no plano Argand Gauss, como um vetor, cuja origem coincide com a origem do plano Argand Gauss e extremidade no ponto (a,b). Represente um número complexo no plano usando o Geogebra.

B) Sabe-se que o conjugado de um complexo $z = a + bi$ é representado por $\bar{z} = a - bi$. Construa no Geogebra o vetor conjugado ao complexo que você representou no item A acima. Observando os dois, o z e $\bar{z}$, descreva graficamente qual é a relação entre esses dois números.

C) Faça a operação de soma entre o complexo acima e seu conjugado, utilizando a caixa de entrada do Geogebra. Que conclusão você chega em relação ao resultado obtido? Se você movimentar o z_1, o que acontece? Salve esta tela como atividade 1 em sua pasta. Agora limpe a tela.

D) Tome dois números complexos. Na caixa de entrada faça a soma entre eles. Na extremidade de z_1, estique um vetor até a extremidade do vetor soma. Compare esse vetor com z_2, que conclusão você chega? Faça o contrário agora, ou seja, vá à extremidade de z_2 e estique um vetor até a extremidade do vetor soma e compare com z_1. Que conclusão você chega disso tudo? Que figura geométrica formou? Salve esta tela como atividade 2

E) Utilizando a tela acima, faça a operação a operação de subtração entre z_1 e z_2 Agora uma as extremidades dos vetores z_1 e z_2 e compare com o resultado do vetor subtração. Movimente um dos complexos (z_1 ou z_2). Qual conclusão você chega?

F) Olhando para a figura formada pelos dois vetores que você escolheu, o que representa o vetor soma e o vetor subtração em relação à figura formada? Salve sua tela como atividade

TAREFA 2

A) No Geogebra, tome um número complexo e seu vetor. Qual é o módulo desse complexo (faça o cálculo). Agora vá na barra de ferramentas e vamos medir o comprimento do vetor. Qual conclusão você chegou?

B) Encontre o argumento do seu número complexo. Vá agora ao Geogebra e verifique o ângulo do seu vetor e compare com seu cálculo. Salve em sua pasta.

C) Tome dois números complexos quaisquer. Faça o cálculo da multiplicação abaixo e encontre o Z3, resultado da multiplicação. Agora vá ao Geogebra e coloque os dois complexos escolhidos por você. Na caixa de entrada e faça a multiplicação digitando: $z\_1 * z\_2$ (enter). Veja qual foi o resultado z3 obtido e compare com seu cálculo. Qual é a conclusão?

D) Meça os ângulos z1, z2 e z3. Meça também os módulos de z1, z2 e z3. Qual é a relação entre os ângulos de z1, z2 comparado com o de z3? Qual é a relação entre os módulos de z1, z2 comparado com os de z3? (Ou seja, qual a relação entre os complexos escolhidos e o resultado da operação de multiplicação). Salve em sua pasta

E) Tome dois números complexos quaisquer. Faça o cálculo da divisão. Não esqueça de que para resolver, é necessário multiplicar em cima e em baixo, pelo conjugado do número de baixo, conforme o exemplo abaixo:

$$\frac{3+2i}{1-5i}=\frac{(3+2i).(1+5i)}{(1-5i).(1+5i)}=\frac{(3+2i+15i+10i^2)}{1^2-(5i)^2}=\frac{3+10.(-1)+17i}{1-25i^2}=\frac{-7+17i}{1+25}=\frac{-7+17i}{26}$$

Desenhe no Geogebra, os dois vetores escolhidos por você. Agora vá à caixa de entrada e digite: z_1/z_2 (enter). Compare o resultado z3 com o seu resultado. Compare os módulos de z1 e z2, com o de z3. Compare os ângulos de z1 e z2 com o de z3. Em outras palavras, qual é a relação entre os ângulos e entre os módulos. Salve em sua pasta

TAREFA 3

Na tarefa 2, você teve a oportunidade de tomar dois números complexos e operar a multiplicação e a divisão com eles e tirar conclusões em relação aos módulos e aos ângulos resultantes em relação aos módulos e ângulos dos números complexos utilizados.

A) Tome dois números complexos, encontre o módulo e o argumento (ângulo). Agora vá no Geogebra, represente os números complexos e verifique seu resultado obtido, com os valores obtidos no Geogebra.

B) Escreva seus números na forma trigonométrica. Com base em suas conclusões em relação a tarefa 2 (anterior), como deve ficar o resultado escrito na forma trigonométrica da multiplicação dos seus números complexos? Confira sua conclusão na tela do Geogebra. Salve sua tela.

C) Como deve ficar o resultado escrito na forma trigonométrica da divisão dos seus números complexos? Confira sua conclusão na tela do Geogebra. Salve sua tela.

D) Escolha quatro números complexos e use a representação na forma de par ordenado no Geogebra. Agora una esses pontos, formando um quadrilátero. Multiplique os quatro complexos escolhidos pelo complexo $z = 0 + 1i$ (ou simplesmente i). Uma os resultados formando um novo quadrilátero. Explique o que aconteceu. Salve sua tela

E) Limpe a tela e tome os quatro complexos formando um quadrilátero. Escolha um z_5 e opere as multiplicações com os quatro complexos. Una os quatro pontos resultantes, formando um quadrilátero. Explique o que aconteceu com novo quadrilátero comparado com o inicial.

TAREFA FINAL

1) Dê sua opinião sobre qual sua participação nesta pesquisa sobre os números complexos utilizando o software Geogebra. Você acha que a utilização do Geogebra pode ser um facilitador do aprendizado ou não? Crê que a aula é mais interessante ou não?

2) Você é capaz de citar alguma importância para a utilização dos números complexos?

3) Você gostaria de saber mais sobre os números complexos, como, operar potenciação, radiciação, e principalmente sua utilização?

ANEXO C

RESENHAS DAS DISSERTAÇÕES SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS, EM ORDEM CRONOLÓGICA.

Conforme orientação da banca, deixamos abaixo um sumário das dissertações resenhadas, com o propósito de facilitar a busca pelo leitor, uma vez que trata-se de uma grande quantidade. Esclarecemos que no sumário abaixo, deixamos para o leitor a informação do título da dissertação resenhada e seu respectivo autor.

SUMÁRIO ANEXO C

A dissertação para a obtenção da titulação de mestre, sob o título Números Complexos – Uma abordagem Histórica para Aquisição do Conceito foi apresentada por Mário Servelli Rosa à Pontifícia Universidade Católica-SP, em 1998, e contou com a orientação da Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

Em sua introdução o autor comenta que seu trabalho pretende organizar atividades de forma que os alunos consigam operar com os números complexos. Discorre rapidamente o que cada capítulo aborda sendo que sua dissertação está dividida em sete capítulos.

No capítulo I – O Objeto Matemático, o autor se deteve em apresentar o conjunto dos números complexos, fazendo suas definições, apresentando suas propriedades e teoremas, as operações de adição, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação, apresentando também o módulo de um número complexo, sua forma trigonométrica. Em cada item ele definiu, apresentou os teoremas e propriedade com suas devidas demonstrações.

No capítulo II – A Problemática e a Metodologia da Pesquisa, o autor inicia dizendo que o conteúdo pode ser introduzido para estudo dos alunos do 3° ano do ensino médio, de diversas maneiras distintas.

Através de algumas conclusões da dissertação de Nilza Silveira Almeida (PUC-1992), observou que os resultados dela, vinham de encontro a sua proposta em relação à abordagem dos números complexos, articulando atividades que levem os alunos a necessidade de operarem com esses números, porém dentro de um contexto similar ao verdadeiro, ou seja, similar ao ocorrido na História dos Números Complexos. Dessa forma, introduzir os números complexos através de equações de segundo grau, cujo discriminante é negativo, de acordo com Rosa, não desperta no aluno a curiosidade e nem a necessidade de conhecer melhor a estrutura desses números, pois, seus resultados são destituídos de significados. Em sua hipótese é importante que os alunos sejam colocados diante de situações problemas das quais existem soluções reais, mas onde se tenha a raiz quadrada de um número negativo.

Em sua pesquisa, ele foi motivado a responder algumas questões: Ao propor uma sequência didática os alunos participariam de forma ativa para adquirir os conceitos esperados? E após a aplicação dessa sequência didática, os alunos seriam capazes de operar com potenciação e radiciação de números complexos?

O capítulo II é dedicado a Fundamentação Teórica, onde o autor afirma que sua pesquisa está baseada na linha francesa da Didática da Matemática e algumas teorias da Psicologia Cognitiva de Piaget. Aqui o autor se dedica a explicar sobre a linha construtivista de Piaget, bem como, apresenta também a metodologia de Regina Douady – Didática da Matemática. Faz uma rápida menção sobre a Teoria das Representações Semióticas de Duval, concernente a forma de representação diferenciada de números complexos (forma algébrica e forma geométrica). Fundamenta-se também nos obstáculos epistemológicos de Brousseau (1976), onde observa que “os obstáculos didáticos aparecem mediante a escolha de estratégia do ensino, além de que, os obstáculos são inevitáveis, inerentes à necessidade de transposição didática”. (p. 35).

Em seu trabalho, o autor afirma ter lançado mão de uma situação-problema geradora de novas ferramentas matemáticas para elucidação dessa situação-problema, procurada pelos alunos.

Ressalta ainda que sua abordagem é diferenciada, o que acaba por romper com o contrato didático padrão do Brasil, dos quais os alunos estão acostumados, onde o professor faz a aula expositiva, resolve alguns exercícios e propõe exercícios parecidos para os alunos resolverem.

O autor apresenta a metodologia a ser utilizada na elaboração de sua pesquisa que tem por objetivo “fazer com que os alunos adquiram os conceitos a respeito dos números Complexos, porém de forma significativa, compreendendo que essas operações podem resolver problemas concretos chegando a soluções que são números reais”. (p.38)

Para validar sua pesquisa, propõe a elaboração de uma sequência didática para ser aplicada a alunos do terceiro ano do ensino médio, onde serão aplicados testes de confronto com outra turma que aprendeu sobre os números complexos pela forma tradicional.

Para sua análise, utiliza-se da engenharia didática, estabelecendo uma análise a priori, a experimentação e uma análise a posteriori, onde fará apresentação dos fatos observados, análise dos fenômenos observados além da análise dos erros e comportamentos dos alunos.

O capítulo III trata-se de um Estudo Histórico e Epistemológico dos Números Complexos. Nesse capítulo Rosa se detém a um embasamento histórico, começando pelas equações de segundo grau com discriminantes negativos encontrados a 1700 a.C., mas que, porém, não foi o elemento motivador da descoberta dos números complexos, comenta sobre Heron de Alexandria e também de Diophanto quando este chega a uma operação envolvendo uma raiz de número negativo. Tece comentários a respeito de Mahavira do século IX e também sobre Bhaskara que viveu no século XII, onde esses observam operações em que aparecem raízes de números negativos. Faz ainda, observações também sobre Paccioli e Chuquet, ambos do século XV, onde esses concluem operações com "soluções impossíveis".

Em seu traçado histórico, chega a Cardano no século XVI trazendo a situação problema vivenciada por este matemático. Comenta também sobre o método de Tartaglia, descrevendo o poema que este escreveu sobre a solução de equações do terceiro grau, poema este enviado a Cardano. Faz uma análise do poema de Tartaglia, traduzindo para representações algébricas, demonstrando e justificando a luz de Tartaglia. Com isso surge os números complexos. Caminha pela história e apresenta a descoberta de Bombelli, apresentando aqui também, trechos de sua obra.

Discorre sobre os progressos dos números complexos, começando pela simbologia $\sqrt{-1}$ introduzida por Girard e depois a representação como *i*, feita por Euler que foi amplamente aceito após a utilização por Gauss. Comenta sobre as tentativas de Leibniz e de Wallis, trazendo deste último, trechos de sua obra. Comenta ainda sobre o logaritmo de números negativos, trabalhados por Bernoulli. De Roger, apresenta o resultado relacionado à obtenção de raízes enésimas de números complexos. Comenta sobre Moivre, mostrando seu trabalho e trazendo todas as conclusões de Euler em relação ao estudo de Moivre, já que este apenas enunciou.

Ao comentar sobre a representação gráfica do número complexo, retoma o século XVII, com o estudo de Wallis, pois este propôs uma construção geométrica para as raízes imaginárias. Faz às construções a luz do trabalho de Wallis. No século XVIII, comenta sobre o trabalho de Wessel, chegando ao século XIX, com Argand, concluindo que a formalização dos números complexos se tornou completa com o trabalho de Hamilton.

Na segunda parte deste capítulo, Rosa transcreveu o comentário epistemológico, com base em um artigo publicado por Michèle Artigue, onde destaca que “quando se começa a falar em números complexos, pensa-se que vão aparecer novos números, mas pode-se ver pela história, que não são novos números que surgem, mas sim novos operadores” (p. 71).

Dos comentários de Artigue (1992), o autor tira suas conclusões e observa que fatores parecidos ocorrem quando se resolvem equações do terceiro grau, que foi o elemento propulsor de Cardano.

Sobre o comentário didático do artigo de Artigue (1992), Rosa destaca o papel motor dos desequilíbrios cognitivos e a distinção entre os polos ferramenta e objeto de um conceito matemático, explicando cada um deles.

No capítulo IV, o autor se debruça no Estudo da Transposição Didática dos Números Complexos. Toma por base uma análise da Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o ensino da matemática no 2° grau (1994), vigente na época, do qual observa que a participação do aluno na construção de seu conhecimento é considerada um dos pontos fundamentais para a aprendizagem, porém a participação do aluno deve ser orientada uma vez que conceitos precisam ser construídos.

Rosa destaca ainda que de acordo com a Proposta Curricular, situações problemas que desafie o aluno a refletir, levantar hipóteses, a buscar soluções, devem ser considerados, pois visa à compreensão dos conceitos.

Segundo o autor, a Proposta Curricular vigente da época (1998), faz destaque em relação aos números complexos da seguinte maneira:

> [...] *é conveniente que a introdução dos números complexos seja feita a partir de problemas significativos para o aluno do ponto de vista tanto da Matemática quanto do seu dia a dia. Contar um pouco da história dos números complexos também pode ser bastante motivador. (p. 78).*

Dessa fala, o autor conclui a importância de aproximar a Matemática de sua história, pois permitiria aos alunos vivenciarem as necessidades que fizeram surgir certos conceitos, de maneira a quebrar o paradigma de que a “Matemática é uma disciplina na qual os conceitos são *inventados.” (pg.79).*

Na sequência, Rosa faz análise de livros didáticos e constata que nenhum deles introduz a abordagem dos números complexos a partir das equações do terceiro grau e somente dois dos livros analisados, contextualiza os conceitos com a história. Dessa forma conclui que “os livros didáticos analisados, não dão importância à história do surgimento dos números complexos”. (p.80)

Tece ainda comentários sobre como é feita a abordagem desse conteúdo nos livros didáticos, exemplificando com amostra de exercícios.

Neste capítulo ainda, o autor abre espaço para analisar as concepções iniciais dos alunos sobre o conceito de números complexos, para comprovar que os alunos não possuem total compreensão sobre a utilidade dos números complexos, o autor realiza uma pesquisa, constando de 13 questões para serem respondidas, que foi aplicado em um 1° ano do curso de Engenharia Mecânica, ou seja, para alunos que supostamente já teriam estudado os números complexos. Numa classe de 60 alunos, 29 se manifestaram que não haviam aprendido esse conteúdo. Os dados dessa pesquisa foram tabulados com a utilização dos softwares CHIC e CHADOC, onde o autor apresenta na sequência, os resultados de todas as análises feita.

Segundo as análises, o autor conclui que:

> *Podemos perceber por essa análise, que o fato de os alunos não conhecerem a história da matemática, e pensarem que um número complexo é apenas um símbolo matemático, não o impede de realizar operações e representá-los geometricamente. Acreditamos em vista disso que os alunos operem com os complexos, sem perceber o significado desses números, julgando que eles sirvam apenas para fazer exercícios sem maiores consequências. (p.92)*

Em sua proposta de trabalho, o autor tem por objetivo trazer um significado às operações com os números complexos, de forma que se possam obter respostas reais de uma equação, mesmo quando se trabalha com raízes de números negativos. (p.93)

No capítulo V, Rosa propõe uma sequência didática para ser aplicada para alunos do 3° ano do ensino médio (2° grau na época), partindo do método de Cardano-Tartaglia, para solução de equações do 3° grau, oportunizando a condição de recair em uma raiz de número negativo, promovendo uma análise de forma que os alunos percebam que há uma solução e acabe por questionar a existência da raiz de número negativo. Isso fará com que os alunos tenham a necessidade de extrair raiz de números negativos.

Em sua proposta didática, o autor elenca treze questões sequenciais dentro do princípio construtivista, onde o autor em cada uma comenta sobre o objetivo esperado e faz uma análise matemática e didática. Na aplicação de sua proposta, o autor faz uma mudança de contrato pedagógico, pois ele propõe atividades a serem desenvolvidas, sem a explicação por parte do professor, onde o professor deve instigar o aluno a procurar por respostas, intervindo quando necessário, apenas no sentido de orientar o aluno para que ele prossiga em sua construção do conhecimento.

No capítulo VI, trata-se da aplicação da sequência didática proposta pelo autor, onde este inicialmente convida apenas dois alunos para participar, com o objetivo de verificar possíveis falhas. Após os ajustes, Rosa aplica as atividades em uma turma com 18 alunos. No início percebeu certa resistência por parte dos alunos devido à mudança do contrato pedagógico proposto. Para o autor, seus objetivos foram alcançados, pois ao final da aplicação de sua sequência proposta, o autor aplica a mesma pesquisa que havia aplicado para os alunos do curso de Engenharia Mecânica, com o objetivo de validar sua pesquisa alcançando resultados positivos.

O capítulo VII, ao tratar das conclusões, o autor expressa ter obtido resultados positivos em relação à aplicação da sequência didática, onde viu como salutar o trabalho em dupla, a oportunidade dos alunos de descobrirem o motivo que os levou a extrair raiz de números negativos, sentiram a necessidade de mudança de registro de representação do algébrico para o geométrico, a oportunidade de ser chegar a soluções reais.

A dissertação de Maria Sueli Fonseca Ferreira para a obtenção da titulação de mestre, cujo título “Uma Análise dos Questionamentos dos Alunos nas Aulas de Números Complexos”, foi apresentada junto à Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em 2006, e contou com a orientação da Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey.

A autora subdivide sua dissertação em cinco capítulos, a saber:

No capítulo 1 – Introdução, a autora introduz com a informação de que durante treze anos vem ministrando o conteúdo de números complexos para alunos do segundo ano do ensino médio em uma instituição pública federal, para alunos que passam por uma rigorosa avaliação para ingresso nessa instituição. Suas inquietações começaram mediante o questionamento dos mais diversos, feito por seus alunos, em relação ao conteúdo. Questões do tipo: Por que os números complexos são chamados imaginários? Ou Onde vamos utilizar os números complexos? Entre outras.

Segundo a autora a maneira que o professor se coloca diante dos questionamentos realizados pelos alunos promove a motivação ou não, dos alunos em relação ao aprendizado. Sua preocupação era em estabelecer uma metodologia que despertasse o interesse e a curiosidade dos alunos em relação à disciplina. “Observa que muitas publicações defendem a ideia de que o ensino da Matemática tem sido historicamente bastante enfadonho, causando nos alunos um elevado grau de apatia e até aversão por esta disciplina”. (p. 9).

Para a autora, tornar a aula interessante é um desafio para os professores, pois “não basta dominar os conteúdos da Matemática para ensinar. É preciso criar uma metodologia em sala de aula que desperte o interesse e a curiosidade dos alunos”. (p.9).

A autora reforça a ideia defendida por D’Ambrósio, por Fossa, Mendes e Barbosa de que a inserção da História da Matemática traz motivação e desperta o interesse dos alunos em sala de aula, promovendo uma aprendizagem significativa. Ela se apoia também no trabalho de Jones, que propõe o uso da História da Matemática articulada ao ensino da Matemática, para dar sentido e significado, melhorando a qualidade do processo ensino-aprendizagem. Para Jones, focar os questionamentos dos alunos é importante, pois se pode classificar em três categorias: a cronológica, a lógica e a pedagógica.

Segundo a autora, sua pesquisa procura investigar os questionamentos que os alunos levantam na sala de aula, à luz das classificações dos porquês definidos por Jones e qual o papel da História da Matemática como ferramenta para respostas aos questionamentos.

Em sua pesquisa se valeu da engenharia didática como metodologia de sua pesquisa, pois seria mais coerente em relação aos seus objetivos. Portanto sua pesquisa foi elaborada em quatro fases, a saber: analise preliminar, análise a priori, experimentação ou aplicação da sequência didática e análise a posteriori.

No capítulo 2, Fundamentação Teórica e Revisão Bibliográfica, a autora confirma que sua base de pesquisa está fundamentada no trabalho de Jones que classifica os “porquês” dos alunos, em três categorias distintas e que afirma que o embasamento histórico propicia ao professor, condições de devolver aos alunos uma resposta que gera interesse e curiosidade pelo saber. A autora explica o significado de cada uma das categorias, exemplificando.

Para a autora,

> *Nesse trabalho, não se busca na História a origem de definições constituídas, como nos porquês cronológicos, mas sim o desenvolvimento da Matemática e seu crescimento através de generalizações e abstrações, mostrando historicamente que grandes homens tiveram dificuldades, em seu tempo, com conceitos que hoje são bem esclarecidos. (p.23).*

Ferreira também se apoia em Paes, para explicar as fases da metodologia da engenharia didática, que foi utilizada em suas análises. Dessa forma, Ferreira se articulou da seguinte forma:

Fase Preliminar – Definiu que as aulas seriam ministradas de forma tradicional.

Fase da Análise a Priori – Organizou uma sequência de ensino, num total de vinte nove horas de pesquisa.

Fase da Aplicação da Sequência Didática – Para tal, elencou quatro hipóteses, e passou a observá-las. Contou com a ajuda de um aluno que gravava os questionamentos realizados pelos colegas, para que esse material pudesse ser utilizado pela pesquisadora, no estudo dos “porquês” dos alunos.

Fase da Análise a Posteriori – Enumerou, classificou e analisou a cada uma das perguntas feitas.

No capítulo 3, a autora destinou para a sua metodologia de pesquisa, começando por sintonizar o leitor dentro de seu espaço de pesquisa, falando sobre a Instituição de Ensino, sobre a qualidade oferecida aos alunos, os recursos tecnológicos dos quais a Instituição dispõe, bem como um quadro de quem são os alunos que participaram de sua pesquisa. Uma observação que se faz é a quantidade de alunos na turma, ou seja, 29. Discorre a seguir sobre seu cronograma e planejamento de trabalho, passando a uma orientação de como analisou sua pesquisa.

No capítulo 4, Ferreira se dedica para a classificação e análise das perguntas realizadas pelos alunos, ao longo das 29 horas aulas projetadas para a pesquisa. Ao todo obteve 59 perguntas, duas das quais foram prejudicadas no áudio, portanto trabalho com a classificação das 57 perguntas restantes. Utilizou as classificações de Jones, porém se deparou com situações em que percebeu que somente as três classificações propostas por Jones, não eram suficiente para promover uma correta classificação do estudo e, portanto, ampliou o universo das classificações em: Outras, para porquês sem definição específica, adotando ainda as classificações: Lógico e Pedagógico, Cronológico e Lógico e finalmente Cronológico, Lógico e porquês para aquelas que possuíam as duas ou três condições de análise simultânea. Fez também uma análise sobre suas hipóteses inicias.

Conclui que os alunos fazem perguntas do tipo cronológico (resposta que dependem de contextualização histórica), quando são estimulados. A maioria dos questionamentos é do tipo lógico e muito mais pedagógico. A autora também conclui com base em Jones que: “os encaminhamentos a serem tomados pelo professor a partir dos questionamentos dos alunos serão mais consistentes quando suas respostas tiverem o apoio da História, mesmo que as perguntas se enquadrem nos porquês pedagógicos e lógicos”. (p. 45).

A seguir a autora buscou em vários livros didáticos embasamento histórico para subsidiar o professor no conhecimento o suficiente para responder aos questionamentos dos alunos em relação aos números complexos, se utilizando de fatos históricos. Conclui que em apenas poucas obras, encontra-se algum subsídio histórico, algumas mais outras menos. A maioria dos livros didáticos utilizados para o ensino médio, a autora concluiu que a contribuição é insignificante.

Em suas considerações finais a autora afirma que sua investigação era motivada em oferecer uma “pequena contribuição” em relação a discussões existentes, para uma melhoria no processo ensino-aprendizagem da Matemática. Conclui que seus objetivos foram alcançados de uma forma satisfatória.

Também conclui que o material didático “em Português que estão acessíveis aos professores de Ensino Médio e que tratam do conteúdo de números complexos, é pobre e restrito”. (p.57).

Considerou a possibilidade de haver alguma divergência nos resultados devida o fato de os alunos saberem que estavam sendo registrados em seus questionamentos, funcionou como fator inibidor para alguns e motivador para outros. Sua ideia inicial era que pudesse obter questionamentos dentro de uma situação totalmente natural.

Conclui ainda que “os livros didáticos (assim como os de História da Matemática) pouco dizem dobre o surgimento e a evolução dos métodos de cálculos utilizados”. (p. 58).

A dissertação de Nanci Barbosa Ferreira Araújo, para a obtenção da titulação de mestre, sob o título “Números Complexos: Uma Proposta de Mudança Metodológica para uma Aprendizagem Significativa no Ensino Médio”, apresentada junto à Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em 2006, contando com a orientação da Profa. Dra. Marlúcia Oliveira de Santana Varela e co-orientação da Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey.

A presente dissertação foi dividida em cinco capítulos, sendo que a autora reservou o primeiro capítulo para a introdução de seu trabalho. Inicia informando que sua experiência profissional foi um referencial para seu trabalho, pois sua vivência como professora desde 1986 agrega muitas informações e observações ao longo desses anos de trabalho, onde pode perceber as dificuldades encontradas por alunos em relação ao estudo dos Números Complexos, principalmente quando representados na forma trigonométrica e em relação à primeira e segunda fórmula de Moivre.

Faz referência a respeito de dados constantes junto ao INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais), sobre a qualidade do ensino de Matemática no Brasil, onde segundo a autora, constata-se “que o nível de escolaridade dos estudantes, continua refletindo um baixo índice de aprendizagem”. (pg.15).

Observa que no contexto atual, mudanças significativas têm ocorrido quanto ao ensino da Matemática quanto à preocupação de que o educando deve em sua formação obter um desenvolvimento conceitual em sua aprendizagem escolar. Segundo a Lei de Diretrizes e Bases n° 4024/61, orientação dada às escolas era de uma educação tradicional e com a advinda da Matemática Moderna, houve uma centralização dos conteúdos dentro do campo das estruturas algébricas e da teoria de conjuntos.

Segundo Araújo, há alguns anos uma mudança vem ocorrendo em relação ao Ensino da Matemática, pois Associações de Ensino da Matemática, Sociedades de Professores têm se mobilizado e discutido propostas de melhorias, porém isso tudo ainda é insuficiente em atender as necessidades dos alunos. Conclui que quando se trata em relação ao estudo dos Números Complexos a situação é ainda pior.

A autora comenta que durante sua vivência profissional, muitos dos questionamentos que foram levantados em suas aulas expositivas, não eram questionamentos embasados nas operações, conceitos ou propriedades que envolvem os números complexos, mas questões pertinentes à descontextualização do conteúdo, de sua utilidade e aplicação.

Com base em suas observações elencou três questões como norteadora de seu trabalho:

> *Que motivações são adequadas à aprendizagem do aluno em relação aos números complexos? Que mudanças metodológicas podem favorecer a aprendizagem destes conteúdos? E como implementar uma metodologia de ensino adequada? (p.18).*

Com o objetivo de responder essas questões, optou por elaborar uma sequência didática aplicada por meio de atividades baseadas nos trabalhos de Oliveira (2006) e Mendes (2001) e aplicá-la em sua sala de aula. Segundo a autora,

> *... acreditamos que o uso de atividades estimula o aluno a estabelecer uma interação maior na sala de aula tanto num raciocínio individual como na integração do conteúdo discutido em grupo. (pg. 19).*

A autora ainda destaca em sua introdução de que seu trabalho foi articulado com base na Engenharia Didática. A seguir, destaca os pontos principais de cada capítulo.

O capítulo 2 foi dedicado aos Números Complexos no Ensino Médio, onde faz uma breve retomada a evolução histórica dos Números Complexos, com vista a subsidiar as atividades propostas que serão desenvolvidas pelos alunos, na fase da experimentação, onde o objetivo é articular o contexto histórico com as formas representativas (algébrica, geométrica e simbólica numérica) de um número complexo. Destaca no enfoque simbólico a unidade imaginária $i^2 = -1$, onde esclarece não pertence ao conjunto dos números reais. A partir desse elemento, pode-se deduzir as demais potências, verificando a repetição a cada ciclo de 4. No enfoque numérico, ressalta a importância de estender o conjunto dos números reais para se obter o conjunto dos números complexos (C), já que o conjunto dos números reais não consegue abrigar elementos como a raiz quadrada de – 1. Já no enfoque geométrico, olha para o número complexo na forma *a* + *bi* como coordenadas de um ponto que pode ser representada num plano cartesiano e dessa forma pode-se definir $\sqrt{-1}$ como sendo o par ordenado (0, 1). Há que se observar que o número complexo z quando representado num sistema cartesiano tem-se a parte real no eixo das abscissas e a parte imaginária no eixo das ordenadas. Tal plano é denominado Argand-Gauss.

A partir da representação vetorial de um número complexo z no plano Argand-Gauss é possível se obter o módulo de z, o argumento de z e a forma polar de representação de z. Observa ainda que é possível operar-se a soma e a subtração no plano, através da regra do paralelogramo.

No enfoque algébrico, destaca as operações de adição e multiplicação existentes entre os números complexos. Define um número complexo da forma algébrica e também como par ordenado estabelecendo a parte real e a imaginária do número.

Já no capítulo 3, definiu os caminhos de sua pesquisa. Começando por apresentar a escola (CEFET), a sala de aula, os recursos disponíveis e a turma escolhida para a aplicação da pesquisa, que trata-se de alunos que passaram por um processo seletivo. Como a escola (Técnica Federal) possui um planejamento para o ensino de matemática, sua pesquisa procurou se adequar dentro do planejamento da escola (num total de 12 horas aulas). Descreve também sobre sua metodologia adotada, respaldando sua pesquisa em Michèle Artigue, Douady e também Waldegg. Entende que uma metodologia que privilegia dados da realidade com os conhecimentos matemáticos facilita a aprendizagem, o que torna a atividade significativa. Na sequência, a autora explica sobre a engenharia didática e as razões pelas quais optou por essa metodologia.

Na primeira fase discorre sobre os processos metodológicos adotados em sua pesquisa. Faz uma análise de como o conteúdo é abordado nos livros didáticos, tomando uma amostra de dez livros. Observou além do tratamento dado, o quanto de páginas do livro é destinada ao conteúdo, a quantidade de exercícios, os tipos de exercícios, etc. Fez também uma entrevista com professores de matemática com o propósito de investigar como os números complexos são trabalhados pelos professores colegas, procurando obter informações sobre como o professor vê a importância desse conteúdo, se relaciona a história com o conteúdo, as dificuldades dos alunos na compreensão desse conteúdo, etc.

Na segunda fase, análise a priori, preparou uma sequência didática através de atividades, com perguntas selecionadas e situações problemas que trabalhassem numa ordem crescente de dificuldade e finalizando com uma avaliação.

Já na terceira fase, destinada a aplicação das atividades da pesquisa, onde durante as 12 horas aulas, propôs atividades que apresentassem os números complexos, suas formas representativas, suas definições e operações. Fez um registro de cada aula e como se processou a aplicação, sendo que ao final de cada aula, resolvia e explicava item a item daquilo que fora sugerido ao aluno que fizesse, por tentativa, como uma descoberta.

Dentro do capítulo 4, a autora coloca a quarta fase que trata da análise a posteriori, buscando a interpretação e compreensão dos resultados obtidos. A autora divide essa etapa e faz análise sobre: o material apresentado nos livros didáticos em relação aos números complexos; os comentários das respostas das entrevistas realizadas com professores, onde ressaltou que nenhum dos professores entrevistados trabalha com os números complexos através de atividades; discussão sobre alguns resultados mais relevantes da experimentação realizada em classe, onde aborda sobre qual era o objetivo comparando com os resultados obtidos para cada atividade proposta, culminando com a avaliação final, respaldada pelas respostas dadas por alunos, onde concluiu que sua proposta metodológica foi alcançada dentro de suas expectativas.

No capítulo 5, a autora realizou suas considerações finais, observou que após a avaliação do bimestre, constatou que os alunos tiveram um bom aproveitamento do conteúdo, pois somente 10% ficaram com notas abaixo da média, o que lhe serviu como resposta as suas questões iniciais, de forma positiva. Salienta a autora também que entre as respostas obtidas na entrevista realizada com professores, confirmou as análises realizadas nos livros didáticos em que se observa a falta de contextualização significativa, de forma a respaldar o trabalho em sala de aula e também a dificuldade que os alunos têm em articular os números complexos na forma algébrica ou geométrica com a trigonometria.

Em sua dissertação para a obtenção da titulação de mestre, Luciene de Paula apresentou junto à Universidade Federal do Mato Grosso, em 2007, sob o título "Interpretação Geométrica dos Números Imaginários no Século XIX: A Contribuição de Jean Robert Argand (1768-1822)", e que contou com a orientação do Prof. Dr. Michael Otte. Seu trabalho foi subdividido em Introdução, Capítulo 1, Capítulo 2, Capítulo 3, Capítulo 4, Capítulo 5 e Considerações finais.

Introduzindo seu trabalho a autora destaca os dois movimentos que existiam no início do século XIX, "onde de um lado o movimento da aritmetização e do rigor aritmético e, de outro lado, se desenvolveu a álgebra abstrata e a axiomática moderna (OTTE, 1989)". (pg. 12).

Segundo a autora, a diferença que permeava esses dois grupos, centrava-se na maneira como cada um encarava a existência dos números imaginários, ou seja, de um lado o movimento da aritmetização que não aceitava que números imaginários tivessem significado próprio, apesar de considerarem que eram formados por pares de números reais. Por outro lado, o movimento da álgebra abstrata e axiomática, ao considerar os números complexos como vetores e procuravam representá-los geometricamente. No entanto, segundo a autora, ambos os grupos concordavam de que os números imaginários não podiam ser tratados como meros símbolos de cálculo, assim como haviam sido considerados desde sua evolução a partir de Cardano e Bombelli. (pg. 12).

Ainda em sua introdução, Paula faz menção sobre a importância da distinção dos dois movimentos que segundo Hintikka, foram acompanhados por diferentes concepções lógicas. Menciona ainda sobre alguns trabalhos como de Boole, Grassmann, Cardano e Bombelli, e afirma que seu trabalho pautou-se por apresentar os números imaginários à luz de Jean Robert Argand.

Em cada capítulo a seguir, Paula discorre sobre a história da matemática, procurando trazer o foco das razões pelas quais levaram ao descobrimento dos números racionais. A autora dividiu em tópicos de forma que retoma a história sempre que necessário, abordando em cada qual com um aspecto diferenciado. A riqueza do minucioso contexto histórico encontrado nesse material oferece ao leitor uma importante fonte de pesquisa e informação. À luz das informações aqui contidas é possível compreender o motivo do porquê se levou tantos séculos para que os números complexos pudessem emergir.

O capítulo I, denominado *Simbolização,* Paula parte da álgebra de teoria das equações, iniciando seu contexto histórico com os tabletes sumérios e como os egípcios possuíam um grau de conhecimento, capaz de utilizar para a resolução de problemas do cotidiano, isso tudo no século XVI a.C. A autora ainda observa que: "Em geral é correto afirmar que o desenvolvimento da álgebra em alguns países atravessou, sucessivamente, três fases: a retórica, a sincopada e a simbólica." (pg.19*)*

Segundo a autora a fase retórica é caracterizada pela ausência de símbolos representativos e onde se utilizavam de palavras para indicar as expressões. Na atualidade essa representação ganhou uma nova roupagem. A álgebra sincopada trata-se de uma transição entre a álgebra retórica e a álgebra simbólica.

A partir desse ponto, a autora introduz através da história da evolução matemática e o surgimento gradativo da simbologia utilizada atualmente. Desde a maneira como os hindus abreviavam certas palavras, o surgimento dos símbolos (–) e (+) na Europa medieval, passando por Diophantus de Alexandria, o primeiro matemático a reconhecer as frações como números, onde a álgebra grega era totalmente retórica, pois os mesmo se utilizavam de letras do alfabeto para representar números, o causava algumas confusões. Devem os gregos serem considerados como o precursor da álgebra moderna. Tais símbolos (letras gregas) são ainda utilizados nos dias de hoje, costume esse herdados dos gregos. De acordo com a autora,

> *Sem os símbolos, o objeto é uma percepção humana e reflete todas as fases que os sentidos humanos adquirem; substituindo por um símbolo, o objeto torna-se uma abstração completa, um mero operando sujeito a certas operações indicadas. (pg.21).*

Por outro lado, não se pode desprezar a contribuição dos hindus, apesar de que sua matemática teve pouca influência na Europa, mas é deles que parte a álgebra sincopada, já que conseguiram atribuir símbolos para operações e igualdades fundamentais, e também para números negativos.

Falando sobre a matemática árabe, a autora, observa que a civilização mulçumana naquele período era uma mistura das culturas oriental e a helênica. O matemático mais famoso dessa cultura, Omar pode ser considerado como o que deu origem aos métodos gráficos, além de haver indícios de que ele foi o precursor de Isaac Newton na descoberta da fórmula binomial. No período em que a cultura mulçumana atingia um ápice, a Europa dormia profundamente, logicamente pela condição político-religiosa imposta à Europa, na idade média, pela Igreja Romana. Coube a Fibonacci ser o primeiro a romper esse sono europeu, apresentando contribuições valiosas para aritmética, álgebra e a geometria que foi a mola propulsora da matemática italiana.

Final do século XVI a contribuição de Viète, teve um papel dominante no desenvolvimento da matemática, devido sua proposta de se utilizar de letras para equacionar a álgebra, trazendo à época uma ruptura com as tradições estabelecidas, pois a partir dessa notação, abriu-se espaço para o avanço da álgebra que estava estagnada, “visto que a utilização de letras liberou a álgebra da escravidão das palavras”. (pg.26).

A autora discorre a partir de Viète, o rompimento com os limitadores existentes na matemática, frente à oportunidade de poder definir as operações, estabelecer ordem aos conjuntos, definir como corpo, ou seja, dar uma estrutura, de tal forma que culminou com Peano (século XIX/XX) toda a fundamentação conhecida hoje como matemática moderna.

No capítulo 2, tem como tema as equações do segundo grau, do terceiro grau e as quantidades impossíveis ou imaginárias, a autora começa por fazer uma analogia de como é apresentada de forma natural nos dias atuais, a existência do conjunto dos números complexos, porém para solução de algumas equações do segundo ou terceiro graus, o que segundo a autora, poderia levar ao estudante “questionar do porquê resolver essa equação? E quem se preocupa se ela tem alguma solução?” (pg. 38). Isso ocorre porque para o estudo dos números naturais, dos inteiros, dos racionais e dos reais, há uma motivação e uma justificativa, porém, a compreensão da importância e utilização dos números complexos vai além de um nível introdutório. São necessários conhecimentos mais sofisticados para poder entender as aplicações.

Com relação à resolução de uma equação do segundo grau, se dá de forma simples, utilizando-se a fórmula que no Brasil foi introduzida em 1960, e é imputado a Bhaskara, o que é uma inverdade. É verdade que o Hindu Bhaskara (século XII), apresenta várias resoluções de equações do segundo grau, porém seu trabalho trata-se de cópia de trabalhos já escritos anteriormente. Pela história, sabe-se que no final do século XVI, não se utilizava nenhuma fórmula para obtenção das raízes de equações quadráticas. O surgimento das fórmulas aparece depois do trabalho de Viète.

No antigo Egito, aproximadamente 1800 a.C., já se encontravam trabalhos de resolução envolvendo equações de segundo grau, logicamente utilizando a forma retórica. Segundo a autora, a história mostra que 2000 a. C., os babilônicos já eram capazes de resolver equações equivalentes à do segundo grau, já que sua álgebra era bastante avançada. Já os gregos, conseguiam resolver as equações do segundo grau por métodos geométricos. Os hindus por sua vez, hábeis aritméticos e que contribuíram de forma importante para a álgebra, utilizavam-se do método do retorno para resolução de problemas aritméticos. No mundo Árabe, Al-Khowarizmi utiliza-se da forma retórica e geométrica (distinta dos gregos), através de um método denominado método do complementar quadrado, para resolver equações do segundo grau.

Já na Europa, do século XV ao XVII, utilizava-se para a resoluções envolvendo equações de segundo grau, a receita de Bhaskara.

Foi Viète que introduziu a fórmula utilizada por nós hoje, para a resolução de equações de segundo grau, fórmula essa, denominada no Brasil como sendo fórmula de Bhaskara. Descartes no século XVII, também desenvolveu um método para resolução, sendo um método geométrico para obtenção de solução positiva.

Quanto as equações do terceiro grau, a autora começa a discorrer sobre a participação de Paccioli (sec. XV), abordando na sequência a contribuição de del Ferro (sec. XV/XVI), esse desenvolveu um método para resolução de equações cúbicas, porém nunca publicou. Sua contribuição somente apareceu devido ao seu genro, sucessor na Universidade e seu aluno Fiore que teve a audácia de desafiar Tartaglia para uma competição. Tal competição vencida por Tartaglia ficou conhecida, o que levou Cardano a persuadi-lo a contar sobre a forma de resolução das equações cúbicas. Cardano acaba por publicar a forma de resolução, o que gerou intrigas com Tartaglia, devido ao um juramento de segredo feito por Cardano a Tartaglia. A fórmula hoje conhecida é chamada de fórmula de Cardano-Tartaglia. Cardano, porém avançou seus estudos obtendo soluções por radicais de equação do quarto grau. Isso permitiu ao avanço para o reconhecimento das raízes múltiplas e até a aceitação das raízes negativas.

A autora descreve ainda, sobre as quantidades impossíveis ou imaginárias, ressaltando que em 275 d.C., Diophanto de Alexandria já havia se deparado com raiz de número negativo, e havia percebido a possibilidade de resolução. No século XVI, Cardano se depara com um problema cuja resolução via equação recai em raízes negativas, no entanto, conhecia o resultado. Coube a Bombelli (sec. XVI) a explicar o procedimento para resolução da equação do problema proposto por Cardano. Bombelli publicou uma obra onde se utilizava da fórmula de Cardano para resolução de equação cúbica, onde essa recaía em uma raiz negativa, porém ele conhecia que um dos resultados era um número real, ou seja, a equação possuía solução, muito embora quando equacionada recaísse em raiz de um número negativo. O achado de Bombelli foi importante para o avanço dos números complexos, no entanto para a resolução de equações cúbicas naquele momento, pouco contribuiu, já que era necessário se conhecer uma das raízes. Ainda Euler no século XVIII, demonstrava desenvoltura ao se utilizar dos números imaginários, apesar de manter dúvidas quando a sua legitimidade. Nesse período, apesar de todos os esforços, os números imaginários eram totalmente destituídos de significado, o que impedia que fossem totalmente aceitos.

O capítulo 3 a autora se dedicou em mostrar a representação geométrica: o elo legitimador dos números imaginários. Os números imaginários ganham legitimação a partir do século XIX, e devido às tentativas de Hamilton em ampliar a representação geométrica de números complexos para o R^3, que o levou a descobrir os quatérnions.

Nesse capítulo a autora, começa por apresentar Wessel (sec. XVIII), um respeitado agrimensor e que publicou um brilhante trabalho representando um número complexo em um plano complexo, com um vetor dirigido da origem do sistema ao ponto formado pelo número complexo que possui um par de elementos reais. Dessa forma era possível verificar o ângulo formado, o que permitiu escrever o número em sua forma polar, além de poder se determinar o comprimento do vetor. Em seu trabalho, Wessel conduziu a articular os números complexos com operações vetoriais. Dessa forma

Wessel conseguiu descobrir como multiplicar segmentos de retas a partir de generalizações dos números reais. A autora discorre aqui com riqueza de detalhes o trabalho desenvolvido por Wessel, e ressalta que seu trabalho ficou esquecido até ser redescoberto.

Em seguida apresenta Argand, que viveu no final do século XVIII, início do século XIX e que publicou um pequeno panfleto sobre maneiras de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas e que por sorte do destino, cópia desse trabalho foi parar nas mãos de Legendre (sec. XVIII/XIX). Legendre por sua vez, passou esse trabalho para Français, que se utilizou para problemas matemáticos relacionados à artilharia. Este por sua vez quando faleceu, seu irmão Jacques recebeu por herança os documentos do irmão. Jacques acabou por publicar um artigo sobre aquelas ideias em uma renomada revista de matemática. Durante esse período Wessel nem Argand não tomaram conhecimento do trabalho um do outro, que eram semelhantes. Somente no final do século XIX é que o trabalho de Wessel é descoberto e percebe-se que ele antecedeu o trabalho de Argand.

A autora também menciona sobre o trabalho desenvolvido por Buée que propôs uma interpretação geométrica para as quantidades imaginárias. Trata-se de um trabalho longo e confuso devido a diferentes espécies de operação. Dá detalhes e explicações sobre o que consistia o trabalho de Buée e qual era sua interpretação em relação à $\sqrt{-1}$. Menciona o matemático Playfair e sua posição dentro do contexto do trabalho publicado por Buée.

Destaca ainda a respeito de Grassmann (séc. XIX) que teve uma valiosa contribuição dentro das estruturas da Teoria das Extensões Lineares, trazendo luz sobre o assunto, o que permitiu o desenvolvimento de uma álgebra geométrica. Foi Grassmann que conseguiu definir o produto de vetores e com isso estabeleceu-se uma nova teoria para o eletromagnetismo. Nesse mesmo período, Hamilton publicou seu trabalho onde obteve um sistema chamado quatérnions que se mostraram ser objetos muito adequados para descrever operações no espaço tridimensional. No final do século XIX, Clifford organiza um trabalho unindo a estrutura do sistema de Grassmann e de Hamilton denominada álgebra geométrica, conhecida hoje por álgebra de Clifford. Mas, foi somente final do século XIX, início do século XX que o trabalho de Grassmann passou a ganhar notoriedade, primeiramente com Clifford, seguido por Gibbs que propagou mais intensamente o trabalho de Grassmann ao estudar o problema dos quatérnios chegando a publicar vários artigos mostrando a relação existente nos trabalhos de Hamilton e Grassmann.

Para o capítulo 4 a autora reservou para mostrar com riqueza de detalhes, todo o trabalho desenvolvido por Argand partindo de suas explicações iniciais, concepções e generalizações, para se fazer entender no significado do que seria a interpretação da raiz de um número negativo, como sendo uma rotação de 90°. Trata-se de uma boa fonte de pesquisa do assunto.

Já no capítulo 5, Paula abordou as reflexões sobre o ensino dos números complexos, onde afirma que normalmente esse conteúdo faz parte do programa do ensino médio e também nos programas de Bacharelado e Licenciatura de Matemática, no entanto, a autora conclui que esse conteúdo não é abordado de forma adequada, pois no ensino médio é considerado conceitos muito abstratos e no ensino superior, esse é um tema muito elementar, ou seja, há uma falta de equilíbrio entre as informações e isso tem causado alguns problemas ao ensino de certos conteúdos do ensino superior, para aqueles que optam em seguir carreira na área de exatas. A autora procurou subsidio para suas reflexões em livros didáticos do ensino médio, testemunhos de professores e alunos, análise de provas e até de concursos. Coloca ainda em sua reflexão que a forma como é apresentada os números complexos aos alunos, onde a unidade imaginária i aparece como que por encanto, um passe de mágica, tudo isso é totalmente absurda. Por essa razão passa a ser destituído de real significado ou qualquer utilidade quer seja no campo da Matemática ou da Física. Comenta sobre a importância da operação multiplicativa, visto essa se apresentar como rotação em torno do eixo, abrindo espaço para um campo vasto de análises. Para a autora,

> *O enfoque algébrico permite logo a operar com os números complexos sem dificuldade. Mas a experiência tem mostrado que, quando se perde a chance de introduzir os números complexos como entes geométricos, em geral ela não é recuperada, mesmo quando mais tarde, se introduz (quando se introduz) a forma trigonométrica. (p.119).*

A seguir a autora aborda qual seria uma proposta ideal para se introduzir o estudo dos números complexos de uma forma geométrica e a partir disso construir o conjunto dos números complexos de uma forma mais natural, ou seja, olhando como par ordenado, passando então a trabalhar os conceitos de igualdade, adição, o elemento oposto, a forma algébrica, a subtração, a multiplicação, sempre considerando os pares ordenados para então se introduzir o significado que será algo dedutível a partir da definição adotada, para $i^2 = -1$. A partir disso então, passa-se a compor a álgebra que envolve os números complexos, operação de divisão, a forma polar, potenciação e radiciação de números complexos.

A autora tece ainda mais algumas reflexões de aprofundamento como a imersão de ***R*** em ***C***, e a relação de ordem que existe ***C***.

Em suas considerações finais a autora chama a atenção para um problema epistemológico que considera grave e questiona o porquê o movimento do rigor aritmético prevaleceu fortemente no ensino em detrimento do pensamento relacional da axiomática abstrata, sendo que esse último é a única maneira de se dar uma interpretação satisfatória dos números complexos. A autora se coloca ainda de que a interpretação geométrica dos números imaginários veio romper com o paradigma de uma álgebra formal mostrando uma nova forma de entendimento, de teoria de estruturas.

A dissertação para a obtenção da titulação de mestre sob o título “O uso Pedagógico de uma Sequência Didática para a Aquisição de Algumas Ideias Relacionadas ao Conceito de Números Complexos”, foi apresentada por Robson de Oliveira Santos junto à Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em 2008, e contou com a orientação do Prof. Dr. John Andrew Fossa.

A presente dissertação Inicia-se com uma breve apresentação onde o autor destaca alguns pontos importantes em seu trabalho, tais como informar que iniciou fazendo uma análise histórica que envolveu o surgimento dos números complexos e usando do referencial histórico, para compor suas atividades que denotassem uma sequência didática sugestiva para o ensino de Números Complexos. Afirma o autor que foi motivado pela dissertação de Rosa (1998) apresentado junto à PUC. Também faz alusão de que sua fundamentação teórica está embasada “nos princípios de Richard Skemp (1980) na sua formação do conceito e atividades estruturadas”. (p.12).

No Capítulo I, trabalha com sua introdução de forma subdividida em alguns tópicos como a problemática, fazendo a alusão sobre as possibilidades diferenciadas para inserir o conteúdo no Ensino Médio. Observa que em sua sugestão, procura da ênfase do conteúdo, partindo da resolução de equações de segundo grau, cujo discriminante é negativo, visto depender de conceitos dos quais os alunos já estão familiarizados. Justifica suas ideias afirmando que o padrão das aulas de matemática é a tradicional onde o conteúdo é ministrado de forma sem sentido frente a uma "crescente preocupação dos autores em abordar as questões e conceitos científicos por uma ótica mais humanística, enfatizando os aspectos históricos". (p.15). Aborda ainda que, os seus objetivos estão fundamentados em proporcionar aos alunos uma motivação pela necessidade dos números complexos. Em sua metodologia, alega que:

> *"... é importante que o aluno do ensino médio entre em contato com o conceito de número complexo entendendo que este possui um significado e que com ele poderemos chegar a resultados reais de diversos problemas, constatando que conceitos matemáticos não surgem do nada". (p.18)*

Comenta ainda que a pesquisa foi elaborada em três etapas ou seja, aplicou sua pesquisa em três diferentes escolas, com os alunos do 3° ano do ensino médio. Tomou como base para análise a última pesquisa, visto as duas anteriores terem apresentado alguns contratempos e consequentemente seus resultados são questionáveis.

Santos coloca ainda que em seu percurso de trabalho utilizou-se do método qualitativo baseado no construtivismo de Piaget, incorporando a história da matemática e os princípios defendidos por Skemp.

No capítulo II, Santos se dedica à sua Fundamentação Teórica, trabalhando sobre a ideia do construtivismo e a história dos Números Complexos. Utiliza-se das falas de Fossa, Mendes e Skemp, para justificar sua fundamentação construtivista e também como a história da matemática eixo norteador de suas atividades didáticas. Afirma o autor que a utilização da história permite aos alunos a investigação das dificuldades encontradas pelos matemáticos do passado, bem como suas maneiras para superar tais dificuldades. Alega o autor que:

> *É comum encontrarmos em todos os níveis de ensino alunos que ainda têm uma visão equivocada dos conceitos matemáticos, isto é, fazem jus à*

> *crença de que esses conhecimentos surgem de forma acabada como um passe de mágica. (p.36).*

Baseado em suas pesquisas, entende que a história da matemática pode servir de instrumento a contribuir com o aprendizado de forma humanizada, além de permitir uma articulação entre vários conceitos.

Faz nesse capítulo ainda, um breve histórico do surgimento dos números complexos, introduzindo a partir do século XV com o trabalho de Chuquet, passando por Cardano, Bombelli, Girard, Gauss, Descartes, Wallis, Euler, Wussing, Millies, Wessel, fazendo um breve relato dos pontos principais de cada um desses matemáticos do passado.

O capítulo III, Santos se debruçou na fase exploratória de sua pesquisa. As experiências negativas anteriores (duas), serviu como base para reestruturar alguns pontos que julgou importantes, como por exemplos, fazer uma revisão de conteúdos básicos que necessitavam ser de domínio dos alunos, para que sua proposta pudesse surtir o efeito esperado. Começa por apresentar escola e a turma escolhida para o trabalho. Observa que a turma era relativamente pequena, o que proporcionou condições para a obtenção de resultados melhores. Os alunos foram assíduos e participativos, pois a turma era homogênea.

Sua sequência didática é composta em quatro atividades, onde em cada qual está elencado uma sequência de questões construtiva (modelando), para a formação do conceito, mas sempre iniciando por uma ou duas questões motivadoras. Utilizando-se da sequência dos fatos históricos, mescla a informação histórica, mostrando as dificuldades enfrentadas pelos matemáticos do passado em conceber os números complexos, fazendo com que os alunos experimentassem as mesmas inquietações por tentar compreender os resultados encontrados. Finaliza o capítulo III, apresentando sua análise crítica em relação a cada questão abordada e a forma como os alunos conseguiram total ou parcialmente, ou ainda não conseguiram, concluir os resultados, apresentando também toda uma análise feita em cima das falas dos alunos da entrevista realizada ao final da aplicação da pesquisa, onde foram feitas várias questões aos alunos, sobre suas dificuldades encontradas na construção dos conceitos apresentados. Conclui ainda que, a figura do professor é importante nesse processo de construção, pois interage com os alunos, ajudando-os a superar as dificuldades encontradas. Afirma ainda que não é seu objetivo induzir sua metodologia em substituição às outras, mas contribuir, apresentando mais uma possibilidade, uma alternativa para a introdução ao ensino dos números complexos.

O capítulo IV é direcionado para as conclusões finais, onde observa que em relação aos seus objetivos, obteve êxito, pois houve a interação dos alunos com a proposta do autor. Percebeu em alguns alunos a resistência a uma nova metodologia de aprendizado, visto os mesmos estarem acostumados com as aulas tradicionais. O trabalho foi articulado em dupla, o que segundo o autor proporcionou a dupla a discussão quanto à forma de resolução das atividades propostas, o que tornou positivo os resultados. Concluiu que a articulação das questões elaboradas dentro do contexto histórico também foi salutar, pois a maioria dos alunos se sentiu motivados na busca por soluções.

Sob o título “A História dos Números Complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand”, Ulício Pinto Junior apresentou sua dissertação para a obtenção da titulação de mestre, junto à Universidade Federal do Rio de Janeiro, em 2009, e contou com a orientação do Profa. Dra. Tatiana Marins Roque.

Em sua pesquisa, o autor subdividiu seu trabalho em Introdução, três capítulos e Considerações Finais.

Na Introdução, o autor começa observando que o conteúdo dos números complexos nos livros didáticos, não é apresentado em uma ordem histórica. Além do mais, ao ser introduzido como uma extensão dos conjuntos numéricos transmite uma impressão de que “a história dos conjuntos numéricos é linear” (pg. 8), com propósito de solucionar equações. Outro ponto importante que o autor destaca está no fato da resistência por parte dos docentes com relação à abordagem do conteúdo, o que tem promovido para sua eliminação dos currículos escolares, justificando a falta de aplicação concreta em relação ao conteúdo. O autor ainda se coloca como parte integrante de professores que desconhecem o surgimento e o motivo que levaram a descoberta dos números complexos e qual teria sido seu papel no desenvolvimento da matemática.

O pesquisador optou, no entanto em trabalhar com o contexto histórico que antecedeu a formalização dos números complexos que conhecemos hoje, ou seja, seu propósito foi centralizado em compreender o surgimento dos números complexos e o que teria realmente motivado isso.

No Capítulo I, as equações cúbicas e as quantidades "sofisticadas", o autor informa que leitor que há um equívoco de que os números complexos surgiram para solucionar as equações quadráticas, as quais já apareciam na matemática dos tempos grega provenientes de investigações geométricas, onde algumas soluções não podiam ser determinadas. Mesmo com o desenvolvimento da matemática pelos árabes, ainda assim, as soluções que não se podiam justificar geometricamente eram consideradas insolúveis.

O autor aborda que a busca por soluções das equações cúbicas, vem desde os tempos gregos, onde é possível encontrar trabalhos de Diofanto do qual se conhece um dos resultados, porém não se sabe como foi à conclusão obtida por este. Também o matemático árabe Khayan, apoiado nos trabalhos de Apolônio encontrou resultados para várias equações cúbicas. Vale salientar, no entanto que nesses casos aqui mencionados, todas as soluções dessas equações se apoiavam em problemas geométricos. Segundo o autor:

> *Por centenas de anos, matemáticos procuravam uma fórmula de resolução de cúbicas através de radicais, análoga à que se usava para a solução de equações quadráticas. (pg. 12).*

Menciona sobre o trabalho de Pacioli e del Ferro, se detendo no desafio de Fior, discípulo de Del Ferro, direcionado a Tartaglia, onde este por sua vez foi vencedor, o que levou a Cardano a informação de que Tartaglia havia encontrado um método para soluções das equações cúbicas. Cardano por sua vez ludibriou Tartaglia e extraiu desde a informação sobre seu método, vindo publicar, onde o autor observa que um aspecto importante no trabalho publicado por Cardano, foi trazer a informação da "existência de quantidades sofisticadas" (pg.14), referindo-se as raízes quadradas de números negativos. Salienta o autor que Cardano não fez caso sobre esses números, antes "construiu exemplos que expressam o propósito de lidar com estas quantidades". (pg.14).

Para o autor, além de Cardano demonstrar as fórmulas de Tartaglia e del Ferro, ele foi além pois encontrou e demonstrou a existência de múltiplas raízes para vários tipos de equações cúbicas e biquadradas, observou as relações entre raízes, estabelecendo relações entre as raízes e os termos numéricos da equação, e até mesmo a equações que teriam duplicidade de raízes e logicamente encontrando soluções envolvendo raízes quadradas de números negativos.

O autor ainda demonstra a fórmula de Cardano para redução de termo e menciona que em seu trabalho, Cardano mostrou e demonstrou os 13 casos diferentes de equações cúbicas que envolviam o termo quadrático. Na sequência o autor apresenta a resolução feita por Cardano, tal qual publicada em seu livro *Ars Magna,* e apresenta uma análise da linguagem adotada por este, reescrevendo em linguagem matemática atual. O autor salienta que em cada caso apresentado por Cardano, ele teve a preocupação em trazer fundamentação geométrica para suas demonstrações. Salienta ainda que, "Cardano se referia às raízes de números negativos como sofisticadas e chegou a avaliar que esses resultados eram tão sutis quanto inúteis". (pg. 23)

Logo após, apresenta o trabalho de Bombelli, observando que o trabalho dele, foi influenciado por Diofanto. Também faz menção sobre a contribuição notável que Bombelli deixou, com relação à linguagem simbólica por ele adotada, considerada um grande avanço para época. O autor apresenta alguns trechos da obra de Bombelli, comparando a linguagem utilizada por ele com a linguagem simbólica atual. Bombelli ainda, se utilizou da fórmula de Cardano e demonstrou que soluções de equações cúbicas, das quais eram consideradas irredutíveis, visto suas raízes se darem com raízes quadradas de números negativos, conhecendo que a solução (raízes) da equação era valores reais, mas que com a aplicação da fórmula de Cardano, recaía em raiz quadrada de número negativo. Nesse aspecto, Bombelli abriu espaço para a importância da existência dos números complexos. A partir de Bombelli, quantidades imaginárias começaram a ser utilizadas em cálculos, apesar de ainda causar incômodo.

No capítulo II, o autor aborda *os números imaginários* na matemática dos séculos XVII e XVIII. A abordagem é feita a partir de Harriot, considerado um dos pais da Análise Matemática. Harriot introduziu a condição de transportar os termos do segundo membro, com atribuição de sinais e igualando a equação ao zero. Uma de suas contribuições é uma formalização inovadora para encontrar equações canônicas a partir de produtos de fatores binômias. Apesar de não admitir raízes negativas como soluções para equações cúbicas, mas suas equações canônicas serviram de referencial para se encontrar o número de raízes de equações do terceiro e quarto graus, desde que essas raízes sejam estritamente positivas. Também inventou os símbolos >, <. Para Harriot, raiz quadrada de números negativos são tidas como inexplicáveis.

Na sequência, o autor, relata um pouco da vida de Girard e sua contribuição para a matemática. Segundo o autor, Girard também introduz alguns símbolos para representar operações. Na época não havia uma notação padrão e Girar tinha sua própria notação para resolver equação quadrática por exemplo. Foi Girard que enunciou o teorema que relaciona o número de raízes de uma equação como seu grau. O autor ainda comenta sobre a obra de Girard, mostrando a forma como ele exemplificou algumas soluções. Acredita que Girard foi influenciado com as obras de Chuquet, Stiefel e Bombelli. Segundo o autor, “provavelmente ele foi o primeiro a fornecer a ideia precisa sobre a representação dos números negativos, quando este afirmou que era de forma geométrica que se explica solução por menos ou mais, no primeiro caso retrocede e no segundo caso avança”. (p.33)

Avançando na matemática dos séculos XVII, agora é a vez de Descartes. Em relação à obra deste matemático, o autor coloca um destaque especial, mostrando detalhes e transcrevendo trechos da obra dele. Segundo o autor, Descartes introduz uma simbologia matemática muito próxima da que usamos nos dias atuais. O autor ainda traz as demonstrações com contextos geométricos que foram feitas por Descartes em relação à análise feita por ele para equações quadráticas. O autor destaca que para Descartes, quando a solução de uma equação se dava por um número negativo, ele concluía que a raiz era falsa, ou seja, verdadeira para resultados positivos, e falsa, para resultados negativos. Em um trecho da obra de Descartes que foi destacado pelo autor, ele afirma a respeito de uma equação cúbica que possui uma única raiz real, as outras duas, embora nós possamos somá-las, diminuí-las ou multiplicá-las de acordo com as regras estabelecidas, permanecerão sempre imaginarias. (p. 41). Segundo o autor, a influência da obra de Descartes foi significativa para os sucessores dele.

“O século XVII é o palco de uma verdadeira explosão matemática” (p.42), afirma Pinto Junior. Em todas as áreas da matemática ocorrem grandes avanços e como muitas das inovações não estavam apoiadas dentro do rigor matemático, isso abriu espaço para que os números complexos pudessem ser vistos sob uma nova perspectiva. O autor destaca da obra de D. Flament que três campos da pesquisa contribuíram para a utilização dos números imaginários nos cálculos matemáticos e também sobre o progresso de sua utilização. São eles: I - Tentativas de banir os imaginários dos resultados. Aqui introduz a visão de Leibniz e sua contribuição e Huygens sobre os números imaginários. Aborda sobre Moivre e seu trabalho, fazendo as demonstrações obtidas por ele, para determinar a solução de equação de grau ímpar. Observa que Moivre se utiliza uma tábua logarítmica para efetuar algumas operações. O mais importante resultado de Moivre está relacionado à fórmula trigonométrica. Apresenta seguir o trabalho de Nicole, corolário I, II e III, em relação a equações cúbicas e suas demonstrações. Nesses trabalhos, o autor faz observações sobre a maneira como se apresentavam os números imaginários, como eram denominados e também a forma simbólica utilizada por cada um.

No século XVIII, faz análise sobre o trabalho de Euler e sua contribuição, onde este começou por esclarecendo sobre a fórmula de Moivre, que devem ser utilizadas as quantidades imaginárias, pois são de grande utilidade na combinação e na multiplicação de arcos.

Já em relação às tentativas para decompor toda fração em elementos simples, o autor faz uma breve retomada histórica, salientando sobre cada matemático acima, os principais pontos de seus trabalhos. Assim chegou-se às contribuições de Leibniz e Bernoulli, onde estes articularam com as integrais de funções racionais, fazendo decomposições em elementos simples. Esse foi um passo importante, pois abriu espaço para demonstração das regras aplicadas também para as quantidades imaginárias. Com isso, decomposições poderiam assumir elementos imaginários e através da integração poderia se utilizar o problema dos logaritmos dos números imaginários. D’Alembert foi o primeiro a demonstrar essa condição sem muito rigor matemático, aonde Gauss chegou a apresentar algumas objeções em relação ao trabalho de D’Alembert. Já para Lagrange, a obra de D’Alembert era engenhosa, porém necessitava de um caráter mais rigoroso e com maior generalidade. A seguir, o autor coloca um trecho da obra de Gauss, onde este relata observações importantes envolvendo os números imaginários. Enfim, o século XVIII abriu as portas para uma grande discussão sobre os números imaginários, sob vários aspectos.

O autor apresenta ainda algumas discussões sobre a utilização dos logaritmos, entre Bernoulli e Euler, que passou a ser utilizados no cálculo integral. Essas controvérsias entre Euler, Bernoulli e Leibniz, foram de grande valia para a ampliação dos conhecimentos dos números imaginários. Estudos realizados (por Wallis, Newton e Bernoulli) com funções exponenciais, mostraram que essas eram funções inversas das funções exponenciais, logo as equações exponenciais poderiam ser estendidas aos números imaginários. Isso permitiu que Euler apresentasse um resultado importante sobre as quantidades exponenciais imaginárias. O autor não só faz essa alusão como mostra toda a conclusão de Euler.

Observa-se que muito embora os números imaginários não fosse o foco do estudo durante esse período da evolução matemática, todavia eles abriram espaço para uma ampliação dos estudos matemáticos em outras áreas do conhecimento.

O capítulo III – A representação geométrica dos números imaginários, novamente o autor retoma rapidamente a história comentando desde a Grécia até o século XVIII, sobre o desenvolvimento no campo da álgebra, chegando a Descartes que foi o primeiro a dar um passo no sentido de solucionar problemas geométricos com a utilização da álgebra. Retoma também sobre o trabalho de Wallis, colocando inclusive trechos de seu trabalho, fazendo as demonstrações e análises. De igual modo, mostra o trabalho de Wessel, colocando trechos de sua obra e fazendo análises sobre as demonstrações deste. Traz uma análise e trechos da obra de Buée, fazendo alusão da importância do trabalho dele em relação ao desenvolvimento do conceito de números negativos e a representação gráfica dos números imaginários. Segundo o autor, Buée introduziu a noção de qualidade para o sinal negativo. Pela definição de Buée, fornece a ideia do sinal $\sqrt{-1}$, estar relacionado com movimento (rotação).

No século XIX, Argand em sua pesquisa, articula de uma forma muito similar à de Wessel. Argand ousou representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas, o que lhe valeu o título de um verdadeiro “arquiteto”, devido à importância de sua descoberta. O autor faz uma explanação sobre o trabalho de Argand, mostrando trechos de sua obra, explicando sobre as conclusões de Argand e trazendo as ideias deste para os dias atuais. É devido o trabalho de Argand que se conheceu a periodicidade das potências de números imaginários. Argand propôs em seu trabalho que $\sqrt{-1}$ está relacionado com um movimento angular de 90°. O autor conclui que apesar do trabalho de Argand ser grande, mas como não trazia o critério do rigor para que essas quantidades fossem aceitas pela comunidade matemática. No entanto, não podemos deixar de considerar a representação geométrica de números complexos, como um marco histórico.

Em suas considerações finais, o autor afirma que a partir do contexto histórico é possível compreender o grande problema em relação ao ensino dos números complexos, já que a forma utilizada hoje, não condiz com a ordem histórica e daí, o autor se coloca frente essa problemática, sugerindo que "seria pertinente que nós recriássemos o modo de ensinar a fim de proporcionar aos alunos a experiência de conviver e de compreender como a matemática estudada nos dias de hoje, foi produzida e descoberta ao longo dos séculos". (pg. 81). Segundo o autor ainda, com base em uma reestruturação da metodologia de ensino para os números complexos é possível fornecer uma *"concretude* para novos entes matemáticos" (p.82), com isso abrindo espaço para o interesse em novas investigações que gerem desenvolvimento da matemática.

Conclui ainda o autor que, a história dos números complexos fornece um leque de discussões dentro de outras áreas da matemática. Além disso, percebe-se que o surgimento dos números complexos está atrelado a um "problema", ou seja, encontrar as soluções de uma equação cúbica.

A dissertação para a obtenção da titulação de mestre, sob o título Números Complexos – Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos, foi apresentada por Carlos Nely Clementino de Oliveira, junto à Pontifícia Universidade Católica/SP em 2010, sob a orientação do Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva.

O autor optou por constituir sua dissertação distribuída em Introdução, quatro capítulos e Considerações finais.

Introduz afirmando que o problema da ilha do tesouro que fora publicado na edição 47 da Revista do Professor de Matemática, foi a mola propulsora motivadora para escolher o conteúdo de números complexos para seu estudo. O autor afirma que como professor de geometria por vários anos, a possibilidade de utilizar-se de números complexos como ferramenta para resolução geométrica era algo que ele sentiu necessidade de investigar. Segundo o autor, na proposta curricular para o estado de São Paulo, no caderno do professor de matemática do ensino médio, 3ª série, 2° bimestre, encontra-se como sugestão para esse estudo, uma abordagem com ênfase em gráficos, porém essa abordagem não aparece nos livros didáticos.

Observa o autor da riqueza dos números complexos, pois estes possuem diferentes formas de representação, o que o leva a se apoiar nos Registros de Representação da Semiótica de Raymond Duval. Para sua investigação, o autor se utilizou da metodologia da Engenharia Didática de Michelle Artigue com propostas de atividades sequenciais, com análise a priori e a posteriori.

Em seu capítulo 1, o autor traz a problemática e a fundamentação teórica de seu trabalho, onde corrobora com autores que defendem a ideia de que a visualização é relevante para o pensamento matemático avançado. De acordo com o autor:

> *"E números complexos é um campo fértil para a visualização de transformações geométricas e abordagens simultâneas com Geometria Analítica, que costuma ser dada na mesma série, além de permitir visualizar graficamente algumas funções como sendo resultados de translações, rotações, simetrias, etc.". (p.19).*

Concorda que a introdução dos números complexos a partir do conhecimento histórico leva ao aluno a percepção de que o surgimento dos números complexos está atrelado a soluções de equações do 3° grau.

O autor salienta que o conteúdo da forma como está abordado no caderno do professor mencionado acima, pode ir um pouco além, contemplando a parte gráfica por ser relevante. Entende que seja um pouco trabalhoso ao professor esse trabalho, mediante o aparato tecnológico de sala de aula: giz e lousa, e esperar que se consiga facilmente imaginar o processo da rotação e translação no plano Argand-Gauss.

Em sua fundamentação teórica, faz observações acerca das dissertações de Silveira (1992) e Rosa (1998), onde esse último apresenta uma sequência didática que aplicou a um grupo de alunos e serviu de alicerce e questionamentos para trabalho. No entanto, Oliveira observa que ambos os trabalhos detêm um enfoque basicamente algébrico e seu interesse é investigar com um enfoque geométrico, utilizando-se lápis, papel e também o software Geogebra, onde a questão norteadora é: “Ensinar o conteúdo Números Complexos, enfatizando seus aspectos gráficos, torna seu aprendizado mais significativo?” (p. 29).

Oliveira também elenca três hipóteses em relação à problemática observada por ele em relação aos Números Complexos, sendo: 1° os aspectos gráficos não são apresentados no ensino médio. 2° Professores não se utilizam desse conceito para resoluções de problemas ligados a geometria plana. 3° acredita que a visualização gráfica permitirá ao aluno na compreensão do conteúdo.

O autor ainda, para testar suas hipóteses, propôs a professores de uma escola particular de São Paulo a resolução de um problema, ou seja, forneceu dois pontos, vértices de um quadrado e pediu que esses encontrassem os outros dois vértices. Esse problema também foi apresentado aos alunos participantes da pesquisa. Em sua constatação, verificou que nenhum dos professores, alguns com mais de trinta anos de trabalho, resolveu o problema utilizando-se dos conceitos de números complexos, o que tornaria muito mais simples a resolução, lançaram mão da geometria analítica de regra geral.

Para sua fundamentação teórica, baseou-se nos Registros de Representação Semiótica que segundo Duval se apresenta em quatro tipos: língua natural, sistemas de escritas, figurais e gráficos e que possuem dois tipos de representações: conversões e os tratamentos. Oliveira julgou pertinente esse embasamento teórico, os números complexos apresentarem diferentes formas representativas que se articulam entre si, além da possibilidade da análise dada em relação às conversões e tratamento. O autor também se apoiou na Teoria das Situações Didáticas, considerando fase adidática, onde permite ao professor formular uma situação-problema levando em consideração os conhecimentos prévios do aluno, dos quais ele poderá se valer para resolver a situação problema. Portanto, diz o autor, o objetivo de sua sequência didática é trabalhar com situações adidáticas.

Em relação ao procedimento metodológico, lançou mão da Engenharia Didática como forma de análise, por englobar várias fases, onde é permitido saber quais são os conhecimentos prévios que os alunos trazem para a solução das atividades propostas. O autor apresenta também que para seu trabalho contou com a participação de seis alunos (pg. 41 e 105), o que nos deixou confusa, pois em outro momento alega serem sete alunos (pg. 107 e 108), alunos de uma escola particular de São Paulo e que se dispuseram a participar, e que se realizou em uma sala com computadores disponíveis, com o recurso Geogebra.

No capítulo 2, em seus estudos preliminares, Oliveira afirma estar indo de encontro com a recomendação do PCN+ (2002, p.27) quando "a desenvolver no estudante a articulação dos símbolos e códigos, estendendo a linguagem algébrica para a visualização gráfica. (pg.43). Além disso, atende algumas competências que envolvem a investigação e compreensão.

Salienta sua discordância ao PCN+ (2002), quando esse afirma que os números complexos introduzidos na matemática é um tema isolado da resolução de equações por isso perde seu sentido. O autor alega que se o tema for devidamente abordado pode servir para resoluções de problemas concernentes à geometria plana, entre outros. Em relação aos livros didáticos, com base nas análises de Lima (2001), onde este aponta várias falhas na abordagem dos números complexos, Oliveira observa que a falha que mais se destaca é a falta da interpretação geométrica das operações entre números complexos. Para Oliveira,

> *"O registro de representação algébrico é necessário, mas a sua articulação com o registro de representação gráfico, vetorial e trigonométrico, também é essencial na medida em que proporciona visualizações de propriedades que, de outra forma, ficariam sem tanta evidência, como será apresentado". (pg. 47).*

Faz nesse capítulo também um breve relatório histórico e epistemológico dos números complexos, começando por Diofanto e Viète, onde comenta sobre a aritmética de Diofanto, mostrando que o módulo de um número complexo se articula com o produto da soma de dois quadrados de Diofanto. Em relação à Viète, observa que este a partir do estudo de Diofanto, encontra uma propriedade inerente a dois triângulos em que o ângulo gerado pelo produto dos dois triângulos é dado pela soma dos ângulos dos dois triângulos que operaram entre si. A seguir, apresenta o trabalho de Cardano e Tartaglia, demonstrando a fórmula que recebeu o nome desses matemáticos. Naturalmente não poderia deixar de falar de Bombelli, que se utilizou da fórmula de Cardano-Tartaglia, para resolver uma expressão cúbica, onde ao se aplicar a fórmula em questão, obtém-se uma raiz de número negativo, mas cuja solução é um número real, o que o autor faz a demonstração dos passos adotados por Bombelli. Na sequência, comenta sobre o trabalho de Wallis, que interpretou os números negativos como distâncias em sentido oposto ao positivo, ou seja, à esquerda de um ponto dado. O autor mostra geometricamente que Wallis havia criado uma interpretação geométrica para a raiz quadrada de um número negativo. Conclui que Wallis chegou perto da construção gráfica dos números complexos. Sobre Wessel, Argand e Gauss, destaca que estes foram os primeiros a ousarem associar os números complexos com pontos em um plano. Já Argand, deu uma contribuição significativa, pois este argumenta que a partir do número 1 da reta real, ao se multiplicar por *i*, isso promove uma rotação de 90°. Mas foi somente após Gauss ter apresentado sua tese de doutorado que a interpretação geométrica dos números complexos passou a ser aceita.

O capítulo 3 inicia-se fazendo uma análise dos Registros de Representação Semiótica de Números Complexos. A partir da representação algébrica, define a adição e a multiplicação, mostrando e demonstrando as propriedades: comutativa, elemento neutro, elemento oposto, a multiplicação, elemento inverso, o conjugado, a distributiva, enfim, conclui que os números complexos com essas propriedades formam um corpo comutativo. Abre espaço aqui para informar ao leitor que no século XIX, Hamilton define as operações de adição e multiplicação, considerando um número complexo como par ordenado de números reais, ou seja, dentro do $\boldsymbol{R^2}$. Demonstra ainda o isomorfismo em relação à $\boldsymbol{R^2}$.

O autor trabalha no sentido de mostrar as conversões de registro de representação, na forma algébrica, forma de par ordenado, forma gráfica, faz às demonstrações gráficas das operações de adição, subtração, o oposto, o módulo, o argumento, a multiplicação e a divisão. No registro de representação trigonométrica, demonstra a conversão da forma algébrica para a forma trigonométrica e, com base nesta, mostra que as operações de soma e subtração, se tornam inconvenientes, pois apresenta limites para as operações, porém é possível a verificação de propriedades como comutativa, associativa, etc. Já nas operações de multiplicação e divisão, a utilização da forma trigonométrica se mostra bastante eficientes e compreensíveis. Dessa forma o autor faz as demonstrações com as devidas rotações proporcionadas pelas operações envolvidas. O mesmo se dá ao verificar a potenciação e a radiciação. O autor finaliza demonstrando os registros de representação por matrizes, onde as operações podem ser feitas na forma usual por matrizes, pois um número complexo representa um vetor, portanto, passível de representação matricial. Dessa forma, o autor demonstra as várias formas de registros de representação semiótica que podem ser explorados no estudo dos números complexos.

No capítulo 4, o autor descreve sobre sua pesquisa, situando o leitor de quem são os participantes da pesquisa, onde esclarece o autor e pesquisador, tais alunos já haviam aprendido da forma usual sobre os números complexos. O autor inicia seus trabalhos com uma pesquisa sobre os conhecimentos prévios que esses alunos traziam. O projeto foi aplicado em sete encontros de 1 hora cada, onde os seis alunos trabalharam em dupla. Para a realização das atividades os alunos se utilizaram de lápis, papel e principalmente o recurso do software Geogebra. Cada atividade estava subdividida em alternativas. Nesse capítulo, o autor optou por apresentar as questões juntamente com as análises a priori e posteriori, para facilitar a visualização do leitor. Apresenta também algumas falas e conclusões importantes para deste estudo.

Em suas conclusões finais, o autor observa que os alunos inicialmente apresentaram dificuldades nas conversões de registros algébricos e gráficos, onde se concluiu a primeira hipótese de que os aspectos gráficos não são explorados por nas aulas sobre os números complexos, no ensino médio. O autor informou que a utilização do Geogebra foi importante, pois permitiu aos alunos a visualização dinâmica entre os vetores e, com o domínio da ferramenta, os alunos melhoraram seu desempenho.

Ainda segundo Oliveira, sua sequência didática foi bem sucedida, porém observa que a situação-problema final dada aos alunos (que é o mesmo que foi passado aos professores, conforme mencionamos no 10° parágrafo), estes também não se utilizaram dos conhecimentos dos números complexos para a resolução do problema. Acredita que sua pesquisa foi parcialmente respondida, visto que concluiu que deveria ter usado mais atividades com aplicações dentro da geometria.

A dissertação “Números Complexos e funções de variável complexa no ensino médio – Uma proposta didática com o uso de objeto de aprendizagem”, para a obtenção da titulação de mestre, foi apresentada por Larissa Weyh Monzon junto à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em 2012, e contou com a orientação da Profa. Dra. Maria Alice Gravina.

A estrutura da dissertação foi organizada e distribuída em tópicos.

No capítulo 1 – Introdução, a autora começa discorrendo a razão que a levou ao mestrado profissional, com o objetivo de trazer uma maior contribuição ao ensino da matemática junto aos seus alunos. Neste tópico ela mostra suas razões e como se organizou para articular sua proposta de trabalho. A mesma leciona matemática para o ensino médio, onde ao trabalhar com o conteúdo de geometria analítica e espacial, pode perceber a satisfação em seus alunos no aprendizado do conteúdo, pela fácil visualização e contextualização, até porque o conteúdo é muito presente no cotidiano de muitos.

A autora dedica-se desde o tempo de sua licenciatura a aprimorar seus conhecimento e desenvolver softwares de matemática, razão pela qual a levou em seu mestrado não só construir uma sequência didática, mas também a construir um site “números complexos”, vinculado à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, onde utilizando o software Geogebra, com a ajuda de duas bolsistas da graduação, onde construiu uma sequência dinâmica para utilização e ensino junto aos seus alunos do 3° ano do ensino médio, de uma escola pública, onde a autora é professora, pois sentiu a necessidade de “organizar o material a ser utilizado a saber: o vídeo e as animações manipulativas construídas no software Geogebra” (p. 15) e dessa forma responder ao seu questionamento.

A autora tinha alguns questionamentos iniciais, os quais a levaram a uma busca por informações, com o objetivo de aprimorar e utilizar a tecnologia como ferramenta de ensino dos números complexos. O questionamento chave que norteou sua dissertação foi: “através de recursos tecnológicos na forma de objeto de aprendizagem, é possível implementar um ensino introdutório de Funções de Variável Complexa na educação escolar de nível médio?” (p.15)

No capítulo 2 – A educação matemática no ensino básico, a autora acredita que sua proposta pedagógica é inovadora e poderá auxiliar demais professores no ensino desse conteúdo. Esse capítulo destina-se a sua fundamentação teórica baseia-se no construtivismo, pois o *indivíduo se constrói diante das interações com o meio, dia após dia. (p.17).* Para isso, justifica-se que “segundo Carretero (1997, p.10): O conhecimento não é uma cópia da realidade, mas, sim, uma construção do ser humano.”

Neste capítulo, faz uma comparação e articulação entre a teoria piagetiana e a teoria vygotskiana. Em suas considerações teóricas, deixa claro que em seu entendimento, o professor deve estar à “frente ao desafio de propor aos seus alunos material e situações que permitam um desenvolvimento de seus alunos que dependem tanto das interações sociais quanto de processos interiores individuais”. (p.20).

Ainda nesse capítulo, ela faz uma análise sobre o tratamento dado ao conteúdo de números complexos, junto ao PCN+, 2002, observando as competências elencadas. Também faz a comparação entre três livros, denominados por ela: A, B e C, sobre a abordagem dos números complexos e como cada autor introduz os conceitos e articula a sequência didática.

Em sua abordagem teórica, recorreu a artigos e dissertações sobre o assunto, observando e comparando a visão de cada autor e também a conclusão que cada um chegou a sua pesquisa.

Utiliza-se das representações semióticas de Duval, já que são de importância primordial para o ensino da matemática, já que ele faz uma análise aos aspectos cognitivos dos alunos em relação às suas dificuldades no aprendizado matemático. Faz referência da importância do conceito de transformação da teoria de Duval, visto que o processo de aprendizagem matemática consiste em transformações de tratamento e conversões e neste segundo, onde os alunos encontram as maiores dificuldades.

Faz referência sobre as considerações de Souza e Gravina, 2009, onde as autoras concluem que a “apropriação dos sistemas de representação digitais e dinâmicos depende de situações didáticas planejadas e é assim que os alunos desenvolvem habilidades para aprender matemática com as ferramentas de mediação semiótica". (p.39).

No capítulo 3 – Os números complexos na história, segue explanando um pouco sobre a história da descoberta e a evolução dos números complexos, desde Heron (75 d.C.), passando por Cardano, Tartaglia, Leibniz, Moivre, Wessel, à Argand e Gauss, no século XIX.

No capítulo 4 – Tecnologias e números complexos: possibilidades para o ensino, aborda que a dissertação tem por objetivo propor e analisar uma sequência didática sobre números complexos para o ensino médio.

Explica que a primeira ferramenta que utilizou para a concepção da sequência didática que propôs, o vídeo *Dimensions: une promenade mathematique,* produzido por Jos Leys, Étienne Ghys e Aurélien Alvares, que possuem nove capítulos e tenta explicar a quarta dimensão, foi também a ferramenta que a motivou e inspirou na construção da sequência didática que propõe.

A segunda ferramenta didática que utilizou como objeto de aprendizagem é a ferramenta desenvolvida por ela que é um recurso educacional dinâmico, onde os alunos podem interagir manipulando as animações e os efeitos do dinamismo, que segundo a autora, pode ajudar na compreensão do conteúdo. O recurso educacional dinâmico foi construído com o software Geogebra. Para a construção do recurso dinâmico, levou em consideração o sistema de representação semiótica principalmente dentro do conceito de transformação.

A seguir passa a apresentar o material desenvolvido e a concepção de cada recurso que foi elencado no site, onde procurou delinear uma sequência didática com a multimídia.

No capítulo 5 – A implementação e a análise de uma proposta de ensino, trata-se da aplicação do projeto e sua validação, a qual utilizou-se da metodologia engenharia didática em suas análises, seguindo as fases:

Análises prévias: Segundo a autora, as análises prévias foram feitas nos capítulos anteriores.

Concepção da proposta e análise a priori: Justifica que a concepção da proposta visa solucionar o problema quando ao ensino dos números complexos. Apoia-se na análise a priori. “As tecnologias serão utilizadas para poder explorar, de uma maneira dinâmica, diferentes registros semióticos, com o intuito de promover a compreensão e assimilação dos conceitos relativos aos números complexos e funções de variável complexa”. (p. 84).

Separa as atividades por assunto e para cada qual elenca questões que deverão serem respondidas pelos alunos, utilizando a estrutura dinâmica criada no Geogebra.

Experimentação e análise a posteriori: Utilizando um total de 11 encontros, a autora acompanhou a experimentação, de forma que pode interver quando necessário, para esclarecer dúvidas, sempre instigando a participação dos alunos.

Como o grupo de alunos participantes é do 3° ano do Ensino Médio que funciona no período noturno, a autora julgou que muitos estudantes trabalham e por isso a experimentação ficou um pouco prejudicada pela ausência de alunos

Fez uma análise a priori e a posteriori de cada questão sugestionada aos alunos.

Concluiu fazendo um resumo das análises a posteriori onde constatou que a utilização do recurso tecnológico facilitou a compreensão dos alunos, no conteúdo abordado.

O clímax de sua experimentação era verificar se era possível, alunos do ensino médio compreender a introdução das funções de variáveis complexas, concluiu que devido a boa apropriação das operações com os números complexos, eles conseguiram adquirir com facilidade, pois haviam compreendido as transformações que cada operação realizava. Apenas o que atrapalhou foi a falta de tempo, uma vez que a experimentação foi realizada em encontros que ocorreram no último mês do ano letivo.

Validação da proposta: verificou que os alunos de modo geral apropriaram-se dos conceitos que envolvem os números complexos. O uso das tecnologias foi fundamental para a aprendizagem e compreensão das ideias matemáticas em seus diferentes sistemas de representação.

Observou que introduzir o conteúdo do ponto de vista geométrico, foi mais produtivo e com a utilização dos recursos manipulativos percebeu a absorção dos conceitos de uma forma muito mais rápida. Concluiu que os alunos se mostraram mais interessados e que a experiência pode trazer um processo ensino-aprendizagem mais significativo.

No capítulo 6 – Considerações finais - observou que suas reflexões teóricas adotaram alinha vygotskiana, porém sua referência fundamental foi os registros de representação semiótica de Duval. Mesmo diante de algumas adversidades, como o fato de os alunos serem do curso noturno, onde não dão muita importância aos estudos, o tempo muito curto para o ensino, viu como positiva a experiência, pois percebeu que aprimorar as aulas, as ideias e conhecimentos, deve fazer parte do cotidiano do professor, ou seja, o bom professor deve ser sempre um pesquisador e nunca se acomodar.

A dissertação de Reinaldo Gomes, apresentada junto à Universidade Estadual de Maringá, em 2013, para obtenção do título de mestre contou com a orientação da Profa. Dra. Marcela Duarte da Silva, cujo título é: Números complexos e polinômios: estratégias e ensino para aplicação por meio do Geogebra.

No capítulo I – Introdução, o autor justifica a importância do estudo dos números complexos e dos polinômios com a utilização das TIC, tendo como propósito facilitar o processo de ensino-aprendizagem.

Segundo o autor, sua pesquisa trata-se de uma metodologia de atividades práticas sugestivas para serem utilizadas em sala de aula, por professores, no qual o autor disponibiliza ao final de sua dissertação, um roteiro de atividades com a utilização do software Geogebra. As atividades práticas foram baseadas nas investigações matemáticas, tendo como referência Ponte, Brocado e Oliveira.

Nesse capitulo também, ele faz uma rápida apresentação dos demais capítulos abordados na pesquisa.

Capítulo II – História dos números complexos e dos polinômios, neste capítulo, o autor faz um breve relato histórico do surgimento dos números complexos e sua evolução, articulando seu aparecimento e sua utilização como objeto de solução para expressões polinomiais.

Capítulo III – Os números complexos – Todo o capítulo é dedicado ao conjunto dos números complexos, onde o autor define o conjunto dos números complexos como R-espaço vetorial, estabelecendo suas propriedades. Define um número complexo como sendo um par ordenado formado por um termo real e um termo imaginário, sua forma de representação algébrica, as propriedades da adição e da multiplicação, demonstrando cada uma delas.

Coloca os números complexos como sendo o conjunto de vetores, com todas as suas propriedades e, portanto, define base dos números complexos, combinações lineares, subespaços, definindo e demonstrando o produto interno, o conjugado, norma e módulo com suas respectivas definições, mostrando também a desigualdade de Chauchy-Shwartz e a desigualdade triangular. Ele fecha o capítulo definindo o conceito de distância, demonstrando, define o argumento e apresenta o Plano de Argand-Gauss, concluindo a representação de um número complexo, através de sua forma trigonométrica com seus teoremas e demonstrações.

Capítulo IV – Função polinomial ou polinômio – Neste capítulo, o autor inicia com as definições de um polinômio, dando o mesmo tratamento dado no capítulo anterior, porém agora, aplicado aos polinômios, ou seja, olha para o conjunto dos polinômios como um R-espaço vetorial, com suas definições, operações usuais, o subespaço vetorial com suas propriedades, a base, dimensão, além de estudo de algumas operações de divisão polinomial e estudo de suas raízes, sempre definindo, mostrando as propriedades com suas respectivas demonstrações.

Capítulo V – Roteiro de atividades – Neste capítulo, o autor trabalhou a construção das atividades propostas divididas em quatro módulos, num total de catorze aulas distribuídas em: atividades de construção, de resolução e de experimentação com a utilização do Geogebra. Na modelagem das atividades o autor seguiu da linha de tratamento metodológica da investigação matemática exploratória, proposta por Ponte, Brocado e Oliveira. As atividades devem ser aplicadas de forma que os alunos tenham tempo para apresentar conjecturas, organizar as ideias e dessa forma conseguir chegar ao aprendizado. Ele esclareceu que as atividades para os números complexos apresentam algumas restrições no software Geogebra.

Os módulos foram construídos utilizando-se a seguinte sequência:

- Apresentação do software, com duas atividades explorando os números complexos na forma de par ordenado e na forma de vetor.
- As operações com os números complexos, distribuídas em três atividades, sendo abordada a adição, a multiplicação por escalar e exercícios operatórios.

- O conjugado, com três atividades.
- A forma trigonométrica, fazendo uma relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares. O módulo foi dividido em três atividades explorando o módulo e o argumento.

Em suas considerações finais, o autor faz menção que procurou “estabelecer uma proposta inovadora de aplicação de conteúdos matemáticos” (p.79), utilizando como ferramenta os recursos tecnológicos, com o intuito de uma nova metodologia e prática de ensino. Sua expectativa em relação aos alunos é que esses se sintam motivados ao aprendizado da matemática, procurando buscar autonomia em conjecturar, questionar, idealizar, discutir e construir hipóteses. Com relação aos professores, ele espera ter contribuído de forma a enriquecer o conhecimento e a metodologia prática de ensino.

Na dissertação de Fernanda Caon para a obtenção da titulação de mestre, sob o título Números Complexos: Inter-relação entre Conteúdos e Aplicações, apresentada junto à Universidade Estadual de Ponta Grossa em 2013, sob a orientação do Prof. Dr. Marciano Pereira.

Em seu trabalho a autora introduz, justificando a importância do seu trabalho, pois está pautada no PCNEM/2000 e nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática do Estado do Paraná. A autora comenta que:

> [...] a*pesar de documentos norteadores do ensino da Matemática destacarem a importância de estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e entre esses e outras áreas do conhecimento, a fim de atribuir-lhes sentido e dar significado à aprendizagem dos mesmos, alguns livros didáticos que constituem o material de apoio imediato de professores e alunos trata dos Números Complexos de forma isolada, como um capítulo à parte, sem conexões com outros conteúdos e tampouco aplicações. (p.9)*

Para a autora é necessário mostrar que existe relação entre os números complexos e outros conteúdos matemáticos e que precisam ser explorados suas aplicações matemáticas, dentro de uma abordagem de fácil compreensão aos alunos do Ensino Médio, onde “tal abordagem pode ser feita partindo do contexto histórico dos Números Complexos, passando para um estudo integrado com outros conteúdos matemáticos e finalizando com algumas aplicações em outras áreas do conhecimento". (p. 9).

A importância de conhecer o contexto histórico faz com que se conheçam os problemas que envolveram o surgimento dos números complexos. Além disso, como os números complexos servem de suporte as áreas da própria matemática, bem como de outras áreas do conhecimento, "nada mais correto que explorar essas possibilidades para uma aprendizagem mais significativa no ensino médio". (p.11).

Ainda para finalizar a introdução, a autora faz um breve relato do que contém cada capítulo.

Capítulo 1 – História dos Números Complexos – A autora faz questão de frisar que o nascimento dos números complexos ocorreu associado à resolução de equações cúbicas e que erroneamente aparecem em alguns livros que o surgimento estaria associado a resoluções de equações quadráticas, cujo discriminante é um número negativo.

A autora discorre a história dos números complexos, começando por Heron de Alexandria (século I), passa por Diofanto (século III). Já no início do século XVI, "se percebeu que os Números Reais, não eram suficientes e surgem as primeiras ideias da criação do Conjunto dos Números Complexos". (p.13). Seguindo pela história, tece comentários dos trabalhos de Scipione Del Ferro, seguindo para Tartaglia, na resolução de equações cúbicas e chegando a Cardano (século XVI). Ainda no século XVI, Bombelli, discípulo de Cardano estuda o material de seu mestre e, publica uma obra de forma didática, das ideias de Cardano. Segundo a autora, Bombelli foi o primeiro matemático a dar importância aos números complexos, definindo regras de adição e multiplicação.

Já no século XVIII, Euler melhora a simbologia dos números complexos, onde definiu $\sqrt{-1}$ como sendo i, e logicamente $i^2 = -1$, "de onde surge à base dos números imaginários". (p.26). Apesar disso, Euler considerava esses números *impossíveis*.

O primeiro registro histórico sobre a representação geométrica dos números complexos foi proposto por Wessel, final do século XVIII, início do século XIX. Wessel utilizou um sistema de eixos orientados similar ao Sistema Cartesiano Ortogonal, sendo uma reta real e a outra, a reta imaginária, fazendo uma correspondência biunívoca do ponto (a, b) relacionando ao número complexo $a + bi$, com isso foi possível demonstrar a adição de dois complexos através da regra do paralelogramo, utilizando-se de vetores. No século XIX, Argand faz uma representação semelhante a de Wessel, onde Argand articula o número imaginário *i* com uma rotação de 90° no sentido anti-horário, "utilizando sua obra para demonstrar teoremas da Álgebra, da Geometria e da Trigonometria". (p. 18).

Mas foi com Gauss no final do século XVIII que os números complexos ganharam notoriedade. Gauss apresenta em sua tese de doutorado a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, que diz que toda equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$ admite pelo menos uma raiz complexa. "Foi Gauss que inventou o termo Números Complexos" (p.18). Após isso, surgem as funções circulares estabelecendo uma conexão entre os números complexos e sua representação geométrica.

No século XIX, Hamilton traduz as definições geométricas de Gauss, na forma algébrica e segundo a autora,

> [...] *analisando a história dos Números Complexos fica fácil perceber que nem sempre a ordem que os fatos ocorreram condiz com a que são ensinados, até mesmo porque, muitas vezes, o mesmo conceito foi estudado por matemáticos diferentes em épocas diferentes. (p.19).*

No capítulo 2, Caon começa abordando que os Números Complexos podem ser definidos na forma algébrica, trigonométrica, exponencial ou geométrica, sendo todas elas importantes e que se relacionam entre si. Na sequência faz uma análise, observando a forma como é explorado o conteúdo em dez livros didáticos, que participaram do Plano Nacional do Livro Didático 2011. Segundo suas análises, alguns autores têm se esforçado para incluir fatos históricos em seus livros, mesmo que superficial, pois não apresenta vínculo com o conteúdo. 80% dos autores iniciam o conteúdo utilizando equações quadráticas com discriminante negativo, o que induz ao erro, aos desinformados, que pensarão que o surgimento dos Números Complexos está atrelado a esse tipo de resolução, quando na verdade é vinculada a resolução de equações cúbicas. Segundo a autora ainda, "todos os livros mostram os Números Complexos como vetor, mas deixam a desejar no que se refere à representação geométrica da adição, subtração, multiplicação, conjugado, etc." (p.21).

Verificou também que quase todos os livros têm suprimido demonstrações, mesmo que simples, além de que, estrategicamente, os Números Complexos estão alocados no capítulo que antecede o estudo dos Polinômios. Alguns autores relacionam os Números Complexos e Geometria e alguns autores, relacionam os Números Complexos com outras áreas de conhecimento, tais como: Física, Arte, Engenharia Elétrica e até mesmo que as Funções Complexas dão origem aos Fractais.

Na conclusão desta análise, Caon considera positivo o fato de a maioria dos autores estarem inserindo contextos históricos em seus livros, mas que precisam ser melhores articulados ao conteúdo. Por outro lado, considera negativo o fato de alguns autores omitirem as demonstrações, “pois seus resultados são inerentes ao conhecimento”. (p. 22).

Na segunda parte deste capítulo, a autora se dedica a conceituar, colocando definições e propriedades, demonstrando todas elas em relação ao Conjunto dos Números Complexos. Coloca todas as propriedades da adição e da multiplicação. Define Números Reais e Unidade Imaginária. Explica a Representação Algébrica e a Geométrica, demonstrando as operações de forma algébrica e geométrica: Adição, Subtração, Multiplicação, o Conjugado de um Complexo, Divisão, Potenciação, Módulo de um Número Complexo, a Forma Trigonométrica, a Multiplicação e a Divisão na Forma Polar, 1ª e 2ª Lei de Moivre (Potenciação/Radiciação), a Forma Exponencial dos Números Complexos. Acredita na importância das demonstrações, pois favorece a generalização dos conceitos.

Conclui afirmando que seu trabalho não tem por finalidade ditar uma sequência didática, mas trazer subsídios aos professores, na organização do trabalho pedagógico.

O capítulo 3 é dedicado a estabelecer conexões dos Números Complexos, com outros conteúdos matemáticos. A ideia aqui é mostrar que existem conexões entre os Números Complexos e outros conteúdos da matemática e, portanto essa articulação precisa ser feita quando do ensino desse conteúdo.

A seguir, a autora passa a mostrar como e em quais são estas conexões, dividindo em duas sequências: I) Números Complexos e Geometria - Em relação aos Movimentos no Plano – Translação, Dilatação ou Contração, Rotação em relação à origem, Reflexão em torno de uma reta pela origem, Paralelismo e Perpendicularismo no

Plano Complexo, Equação da Reta no Plano Complexo, Retas Paralelas e Perpendiculares no Plano Complexo, Alinhamento de três pontos, Mediatriz no Plano Complexo, Semelhança de Triângulos no Plano Complexo e Circunferência no Plano Complexo. Para cada um desses itens, a autora traz explicações demonstrações algébricas e principalmente demonstrações geométricas. II) Números Complexos e Equações Algébricas - Faz alusão ao Teorema Fundamental da Álgebra (sem demonstrações), Teorema da Decomposição, explicado e demonstrado passo a passo, Equações Binomiais e Trinomiais, fazendo as definições.

Com isso, conclui o capítulo fazendo a alusão de que existem várias conexões dos números complexos e outros conteúdos matemáticos, o que não justifica estudá-lo de forma isolada e descontextualizada.

No capítulo 4, descreve aplicações diversas, sem utilizar aprofundamentos teóricos. “Citando Araújo, hoje temos aplicações que não se fizeram presentes na história da sua criação, tais como: Topografia, Cosmologia, Informática, Física Moderna e Eletricidade”. (p.10)

Com relação às aplicações destaca: Aplicações na Física - verifica-se nos contextos das Grandezas Vetoriais, na Reflexão de Espelho. Aplicações na Engenharia Elétrica - no princípio da indução eletromagnética, nos circuitos de corrente alternada. Aplicações na Aerodinâmica - serve para explicar matematicamente a aerodinâmica para sustentação gerada por um corpo em movimento através de um fluído ao ideal. Aplicações nos Fractais - que são conhecidos por gerarem figuras exóticas, mas que é importante no estudo de sistemas dinâmicos. Conhecimento este utilização para fazer previsão do tempo, estudo do movimento das estrelas e galáxias do sistema solar, análises de pulsos elétricos cerebrais e de batimentos cardíacos, ou seja, é uma geometria que permite explicar vários fenômenos da natureza, onde não é possível fazê-la com a utilização da geometria tradicional. Além disso, os fractais permitem as modelagens de imagens nas telas de computadores. Aplicações na Arte - onde se consegue criar imagens com efeitos, utilizando-se de rotação e translação.

Em suas considerações finais, Caon conclui “que os Números Complexos se constituem uma grande ferramenta para solução de diversos problemas”. (p. 68). Vê de forma negativa o fato de muitos autores explorarem a manipulação de operações e conceitos sem a utilização gráfica, ou seja, apenas de forma técnica e de omitirem as aplicações com outros conteúdos e da disciplina e em outras áreas do conhecimento.

Acredita que o conhecimento histórico, algébrico e geométrico dos Números Complexos e suas aplicações diversas permitem aos professores uma melhor abordagem, tornando o conteúdo de forma mais significativa, o que favorece a aprendizagem.

Já Márcio Roberto Gomes apresentou sua dissertação intitulada Explorando o Tratamento Matricial para uma Introdução aos Números Complexos, para a obtenção da titulação de Magister Scientiae, junto à Universidade Federal de Viçosa, em 2013, contando com a orientação da Prof. Dr. Kennedy Martins Pedroso.

Em sua introdução, o autor aborda que sua sequência didática foi estabelecida utilizando o conteúdo de matrizes aprendido anteriormente, tirando a ideia de que para trabalhar com esse conteúdo só é possível a partir do elemento imaginário *i.* Com a utilização das matrizes, o autor coloca o trabalho articulado com a geometria

No Capítulo 1- Matrizes 2X2 especiais e sua estrutura algébrica – Neste capítulo o autor conceitua as matrizes de ordem 2 especiais, trabalhando suas operações: adição e multiplicação, com suas respectivas propriedades, demonstrando cada uma delas. Conceitua e define Corpo e Grupo Abeliano. Na sequência, o autor mostra a representação geométrica de uma matriz especial. Utilizando o conceito dos vetores, define a norma, e utiliza-se de algumas definições e conceitos utilizados na Álgebra Linear.

Para o Capítulo 2 - Números Complexos, o autor para falar dos números complexos, apresenta primeiramente as matrizes em suas operações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, todas exemplificadas e representadas geometricamente.

No Capítulo 3 - Deformação de figuras planas e conformidade – Conceitua e define as transformações por funções elementares, verificando a translação, a rotação e a dilatação, no plano, através da estrutura das funções vetoriais, representando na forma matricial

O Capítulo 4 - Proposta de Atividade Educacional, o autor propõe fazer uma revisão nas definições, conceituações e operações com matrizes. Identifica os tipos de matrizes, define determinante e a inversa de uma matriz de ordem 2. Propõe alguns exercícios de fixação. Em seguida ele toma a matriz especial citada no capítulo 1 s sua forma geométrica e agora exemplifica. Conceitua a matriz unidade ou identidade e a matriz unidade imaginária representada por *i*. A partir das matrizes unidade e unidade imaginária, multiplicando-as por números reais e somando-se os resultados, constrói a forma algébrica de um número complexo e faz sua representação gráfica, exemplificando, demonstra a igualdade, o módulo e o argumento, as operações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação com números complexos, exemplificando e demonstrando geometricamente. Termina o capitulo propondo uma sequência de dez exercícios para serem resolvidos pelos alunos.

Em sua conclusão, o autor afirma que uma abordagem geométrica além de ser uma alternativa, propiciará aos alunos a oportunidade de articular os números complexos, com conteúdos estudados anteriormente. Sugere também a utilização de software de geometria dinâmica para simular, conjecturar, facilitando assim os experimentos a serem realizados. O autor ainda afirma que aqui não é o fim do trabalho, pois espera difundi-lo com outros colegas da área.

A dissertação Modelagem Matemática no Processo de Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: Uma Proposta Didática, para a obtenção da titulação de mestre, apresentada por Daniele da Cunha Silva, junto à Universidade Estadual de Londrina em 2013, e contou com a orientação do Prof. Dr. Paulo Laerte Natti.

Em seu trabalho, a autora introduz o assunto, colocando de forma crítica que o estudo dos números complexos faz parte do currículo do Ensino Médio e é direcionado a alunos do 3° ano. De acordo com a autora, onde ela menciona sobre livros voltados ao Ensino Médio, todos mantêm um mesmo padrão de abordagem, iniciando com a História da Matemática fazendo referência à equação cúbica, voltando-se para a equação quadrática cujo discriminante é um número negativo e introduzindo a ideia de que é necessário um novo conjunto para se obter as soluções nessas situações. Apresenta-se o conjunto dos números complexos com suas definições e operações, elencam-se exercícios que segundo a autora, são resolvidos mecanicamente, sem a compreensão do aluno e ainda ao final do capítulo finaliza-se com textos falando um pouco mais da história e também sobre as aplicações no campo da geometria e na engenharia elétrica. Para completar esse quadro, ainda segundo a autora, os professores aplicam uma prova cobrando exercícios similares aos realizados em aula, alterando os níveis de dificuldades, e finalmente se obtém alunos com o conhecimento adquirido.

Na opinião da autora, uma abordagem alternativa do conteúdo, de forma a atribuir significado é a relação entre as operações envolvendo os números complexos e as transformações no plano, abordagem essa que não é explorada nos livros.

Tece ainda algumas críticas sobre os trabalhos de Oliveira (2010) e de Spinelli (2009), onde ambos utilizam o Geogebra como recurso didático, e ainda do trabalho de Cerri e Monteiro (2001) que utiliza a abordagem histórica, como construção de conceitos.

Na visão da autora, uma situação problema deve ser o ponto de partida para motivação do estudo. Intercalar história com questionamentos e somente então introduzir as ideias, conceitos e procedimentos, finalmente retornando ao problema inicial e utilizando-se das ferramentas adquiridas e finalmente conclui-se o resultado. O que a autora coloca é que dessa forma se estará atribuindo um significado ao conteúdo de forma que tragam ao aluno, condições de se utilizar dos conceitos adquiridos como ferramenta para soluções em situações problemas que possam surgir.

A autora se utiliza do método da Modelagem Matemática como fundamentação de sua proposta de trabalho.

Sobre a problemática e fundamentação teórica, a autora coloca que o trabalho foi motivado na tentativa de responder a seguinte questão: “Como melhorar o processo e aprendizagem dos números complexos?” (p.14). Pensando nisso, ela olhou como desafio a elaboração de uma sequência didática para o tratamento do estudo dos números complexos.

Utilizando os princípios da Modelagem Matemática, ela se fundamentou nos trabalhos de Sadovsky, Chaves e Espírito Santo, e Almeida e Vertuan. Justificou ainda que sua proposta de trabalho está em acordo com o “Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (SÃO PAULO, 2012, p. 47), que diz: Procurar, em cada problema, não apenas uma solução, mas sim a melhor solução, para minimizar os custos ou maximizar os retornos, por exemplo, pode construir um atrativo a mais na busca de contextualização dos conteúdos estudados”. (p.18)

Destaca ainda em sua fundamentação teórica que os dois problemas abaixo, serviram-lhe de inspiração para sua pesquisa:

Problema 1 - (GUIMARÃES, 2013) Considere o quadrado ABCD, de diagonal AC definida pelos pontos $(1,1)$ *e (3, 4). Determine as coordenadas dos demais vértices do quadrado.*

Problema 2 - (ELIAS, 2013) Um arquiteto gostaria de construir um edifício de base quadrada em frente à praia, de tal forma que uma das diagonais de sua base fosse paralela à orla, conforme a ilustração abaixo. Utilizando um sistema de coordenadas cartesiano, ele determinou que os vértices da base que determinam a diagonal paralela à orla deverão ser A(2, 6) e C(6, 2) . Determine as coordenadas dos outros dois vértices, de modo que o quadrilátero ABCD seja, de fato, um quadrado. (p.19)

No capítulo 3 – O ensino dos números complexos, a autora recorre à história da matemática com o intuito de resgatar as origens dos números complexos, bem como a forma como eles surgiram a partir de situações problemas, donde veio a necessidade de soluções reais.

Ainda nesse capítulo, discorre sobre a história dos números complexos, começando por Heron de Alexandria (século I), passando por Cardano, Scipione Del Ferro, Tartaglia, Bombelli todos no século XVI. Aborda também sobre os trabalhos de Girard e Descartes no século XVII, bem como nos trabalhos de Euler, Gauss, Wessel e Argand nos séculos XVIII e XIX, terminando com as descobertas de Hamilton, onde “considera-se que este seja o marco do início da moderna formulação dos números complexos”. (p.25).

A autora se utiliza de três livros didáticos do Ensino Médio, de autores conhecidos, onde tece comparações e analisa a forma como os conceitos são apresentados nesses livros. Segundo a autora, os três livros seguem uma abordagem padrão. A seguir, apresenta um resumo de como o conteúdo é apresentado nos livros, sendo sua sequência: Igualdade e Operações entre Números Complexos; Representação Algébrica de Números Complexos; Operações na Forma Algébrica; Representação Geométrica de Números Complexos; Argumento de um Número Complexo; Forma Trigonométrica de Números Complexos.

No capítulo 4, Intervenção Pedagógica na Escola, a autora, faz sua sugestão com um roteiro de atividades que seguem uma sequência didática explorando os conceitos matemáticos, a saber, representação dos números complexos, operações fundamentais com números complexos, conjugado, módulo e argumento de um número complexo e as relações entre tais conceitos. Destaca-se ainda que as inovações encontram-se na abordagem do conteúdo.

Para Silva, alguns princípios fundamentais devem nortear o processo de ensino-aprendizagem, ou seja, "selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problemas, sendo estes, uma das cinco competências do Enem". (p.31).

A sequência didática sugerida por Silva está dividida em seis etapas da seguinte forma:

Na Etapa I – Deve-se apresentar uma situação problema, para instigar os alunos na busca por respostas, com isso tem-se a oportunidade de retomar alguns conceitos e a necessidades da busca de novos conceitos.

Etapa II – Colocar uma situação problema articulado com a história de forma a observar a necessidade dos números complexos.

Para a Etapa III – Deve-se apresentar o conteúdo de números complexos através de uma sequência de atividades mesclando a representação geométrica e a algébrica, "para que os alunos adquiram o domínio das técnicas do conteúdo". (p.32).

Etapa IV – Elaborar a resolução do problema inicial motivador, utilizando-se dos conceitos aprendidos pelo conteúdo abordado. *Voltamos ao ponto de partida para fechar o processo de Modelagem Matemática, e demonstramos, assim, que o novo conteúdo facilita a resolução deste problema. (p.32).*

Na Etapa V – Oferecer aos alunos mais problemas, para explorar mais a nova ferramenta adquirida.

Finalmente na Etapa VI – Propor aos alunos, um questionário individual para se ter um feedback do processo ensino-aprendizagem em relação ao conteúdo.

A seguir, a autora apresenta uma sequência de atividades sugestivas para serem aplicadas, tecendo comentários sobre como devem ser aplicadas, o que o professor deve esperar de seus alunos, como intervir, até mesmo sugerindo que os grupos devem sociabilizar as soluções encontradas, com o propósito de promover uma discussão sobre a situação-problema. A autora também resolve passo a passo suas sugestões, abordando quais itens são importantes a serem destacados.

A autora não sugere a utilização do recurso Geogebra, porém se utiliza dele para representar geometricamente os números complexos, operações com números complexos, conjugado, módulo, a multiplicação a forma trigonométrica, etc.

No final do capítulo a autora elenca algumas sugestões de situações-problemas extras, com as devidas resoluções, para serem aplicadas. Finalmente conclui com um questionário com questões envolvendo os números complexos, num total de dezessete questões para serem respondidas pelos alunos, envolvendo todo o conteúdo.

Em suas considerações finais, a autora destaca que a sequência didática proposta por ela, irá contribuir com o aprendizado do aluno, visto ser uma forma interessante de abordagem. A autora também afirma que pretende aplicar a própria proposta didática.

Na dissertação de Liliam Aparecida Alves Paes para a obtenção da titulação de mestre, cujo título Números Complexos: Uma Proposta Didática baseada na Modelagem Matemática e em Contextos Históricos foi apresentada à Universidade Estadual de Londrina, em 2013, e contou com a orientação da Prof. Dr. Paulo Laerte Natti.

A autora inicia sua introdução comentando das inquietudes geradas para alunos e professores, no que tange ao ensino dos números complexos, na maneira como é abordado nos materiais didáticos, de onde sempre sobram aos alunos, questões tais como: Estudar números complexos pra que? Ou Para que serve os números complexos? De onde a autora em sua pesquisa conclui: *“...* deparamo-nos com algumas dissertações, teses e artigos sobre o tema, que reforçaram o fato de que muitos de nossos alunos, e até mesmo muitos professores, não compreendem a importância dos números complexos.” (p.11)

Segundo a autora, os livros didáticos mantêm um padrão de abordagem dos conteúdos geralmente apresentados em três etapas: na forma de pares ordenados, na forma algébrica, ou na forma trigonométrica, com suas operações básicas no contexto algébrico sem fazer o relacionamento com o plano complexo, ou seja, descontextualizado e limitado pela aplicação de meras fórmulas. A autora ainda faz a referência de que comparou a sequência didática do conteúdo abordado em três livros didáticos tradicionais para Ensino Médio.

Para a autora, este conteúdo deve ser abordado a partir de uma situação-problema, se valendo da história quando se fizer necessário, para uma melhor compreensão. Seu trabalho teve como objetivo principal a elaboração de uma sequência didática, onde se utilizou da metodologia de modelagem matemática. Observa a autora que a mesma não aplicou sua sugestão em sala de aula.

No capítulo 2, trata da Problemática e da Fundamentação Teórica, Paes afirma que a maneira como o conteúdo tem sido tratada em sala de aula é totalmente descontextualizado e os alunos meros reprodutores e sem compreensão.

Neste capítulo também ela apresenta análise de duas dissertações que abordam sobre o conteúdo.

Justifica ainda que:

> *"Em geral, é notável que a Matemática ensinada na sala de aula, assim como a forma como é ensinada, não acompanhou a evolução tanto social quanto tecnológica, gerando conflitos entre aqueles que devem ensinar (professores) e os que devem aprender (alunos)."*

Cita alguns autores, como Barbosa, Burak, Almeida, Vertuan, para justificar sua opção de escolha dentro da modelagem matemática.

No capítulo 3, sobre o Ensino dos Números Complexos, Paes aborda sobre a história dos números complexos e na sequência, trabalha as abordagens matemáticas *tradicionais* (grifo nosso) para o dos Números Complexo, onde afirma que em geral para o ensino dos números complexos é feito uma retomada na evolução dos números, começando pelos naturais e concluindo a necessidade de construção dos números complexos, como abordado em alguns livros didáticos, que segundo a autora, feito de uma forma descontextualizada. Coloca também como é transmitida a representação geométrica de um Número Complexo, passando na sequência às operações básicas: adição, subtração, multiplicação, conjugado, divisão, potência de i, módulo de um Número Complexo, e a forma trigonométrica, trabalhados apenas no contexto algébrico.

Sobre a Intervenção Pedagógica na Escola, no capítulo 4, Paes se dedica a construção de uma sequência didática, que segue a seguinte estrutura: Na etapa 1, propõe uma situação-problema, com objetivo de instigar os alunos. Na etapa 2, propõe algumas atividades para que os alunos possam se apropriar de conceitos sobre os números complexos. Na etapa 3, faz-se a retomada da situação-problema proposta na etapa1. Fechando com a etapa 4, através de um questionário para avaliar a qualidade da intervenção pedagógica.

Na sequência, a autora introduz a primeira atividade que faz parte da etapa 1 com uma situação-problema para ser aplicado, tecendo comentários sobre o que espera do aluno, trazendo as possíveis soluções para problema proposto. O professor deve conduzir os alunos na resolução, sem, no entanto, contar como se resolve.

Na etapa 2, ela propõe uma segunda atividade, contextualizando com a história da matemática, introduzindo uma situação-problema que gera uma equação de grau cúbico e propõe. Em seguida entra com a atividade três dando um texto para que os alunos leiam, abordando sobre a história dos números complexos, onde introduz a fórmula de Cardano-Tartaglia. Discute com os alunos sobre o texto lido e em seguida fala que a atividade dois é baseada nesse princípio de Cardano-Tartaglia. Em seguida, propõe uma situação similar, pedindo aos alunos utilizar os procedimentos de Bombelli. Finalmente na atividade cinco deve ser feita geometricamente, onde é fornecido alguns números complexos para serem colocados no plano Argand-Gauss, representando as operações no plano e pedindo que os alunos comparem a forma algébrica resolução, com a forma geométrica da resolução, sempre solicitando que os alunos anotem suas observações. Para finalizar, sugerir aos alunos fazerem a operação de multiplicação de um complexo por i e por i^2, observando o que acontece. As atividades são propostas para serem trabalhadas em grupos de 2 a 3 pessoas.

A etapa 3, é a hora da retomada da etapa 1, onde os alunos devem se utilizar dos conceitos aprendidos para resolver o problema proposto. Como última atividade, propõe um questionário para se ter o feedback sobre a percepção dos conceitos absorvidos pelos alunos.

No capítulo 6, em suas considerações finais, afirma que os questionamentos realizados por alunos sobre o porquê e para que estudar os complexos, a levou ao encontro de algumas sequências didáticas, na qual se identificou com a modelagem matemática com a contextualização histórica, o que gerou sua proposta para uma sequência didática.

A dissertação para a obtenção da titulação de mestre, sob o título Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana apresentada por Laércio Francisco Feitosa, junto à Universidade Federal da Paraíba, em 2013, e contando com a orientação do Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta, foi dividida em dois capítulos e conta com Apêndices A e B.

A ideia permeada nessa dissertação é a apresentação do conteúdo de números complexos aplicado de forma significativa na geometria plana, demonstrando que a estrutura geométrica dos números complexos vai além do estudo na forma polar.

Em sua introdução, o autor faz um breve relato a história dos números complexos. Comenta também que a importância dos números complexos transpõe a mera obtenção de raízes quadráticas de números negativos, pois os números complexos se apresentam nos mais diversos ramos da matemática.

No capítulo I, Feitosa dedica para a explanação dos números complexos, introduzindo a partir de um exemplo padrão, ou seja, uma equação do segundo grau, cujo discriminante é negativo, e assim definindo o *elemento imaginário i.*

Apresenta toda a estrutura que compõe o conjunto dos números complexos, fazendo todas as definições e propriedades que norteiam a estrutura desse conjunto, demonstrando cada uma. Nas operações que envolvem os números complexos, em cada uma delas, apresenta de forma geométrica também, mostrando seu significado geométrico.

No capítulo II, o autor começa por explanar algumas propriedades da geometria analítica e da geometria que envolve os números complexos, tais como: a distância entre dois pontos, o ângulo formado entre duas retas, a condição de alinhamento de três pontos no plano complexo, a equação da reta, a equação paramétrica da reta, a equação da circunferência, o perpendicularismo no plano complexo, a equação da reta perpendicular, a equação da mediatriz de um segmento, os triângulos, triângulos semelhantes, triângulo equilátero, os pontos notáveis em um triângulo e o baricentro. Faz algumas aplicações dos números complexos em situações da geometria plana. Enuncia e demonstra o

Teorema de Napoleão, o Teorema do Círculo dos Nove Pontos e o Teorema da Reta de Simsom. Nas Leis do Seno e do Cosseno, também enuncia o Teorema de cada um, fazendo as respectivas demonstrações. Finaliza o capítulo sugerindo quatro problemas, apresentando as devidas resoluções.

No apêndice A, dedica-se a apresentar mais informações da geometria analítica envolvendo os números complexos. Enuncia Proposições e faz as demonstrações, envolvendo a equação da reta, a condição entre duas retas, a equação da reta determinada por um ponto e uma direção, a equação da reta determinada por dois pontos e a condição de alinhamento de três pontos.

No apêndice B, resolve os quatro problemas apresentados no capítulo dois, mas agora utilizando a geometria comum para a resolução.

Sob a orientação da Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering, Claudia Rosana da Costa Caldeira, apresentou sua dissertação intitulada Números Complexos: Uma Proposta Geométrica junto à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em 2013.

Para a autora em sua introdução, a ideia de seu trabalho era verificar a possibilidade de se estudar os números complexos a partir da geometria. Destaca que as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) não evidencia o estudo dos números complexos, mas ao mesmo tempo salienta a importância da articulação da álgebra com a geometria.

A autora também descreve um pouco de sua trajetória profissional e aborda a importância do estudo dos números complexos, pois estes são ferramentas para estudos nas áreas de Engenharia e Eletrônica e sua inquietude da maneira como o conteúdo é ministrado normalmente, e acredita que se pode fazer uma inversão do enfoque de algébrico, normalmente apresentados nos livros didáticos, para o enfoque geométrico.

Explica que sua proposta foi se “utilizar da formulação de Números Complexos apresentada por Hamilton, partindo da ideia de pares ordenados até a correspondência do par (0, 1) com a unidade imaginária i”. (p. 12).

No segundo capítulo, faz um estudo preliminar, comentando sem delongas a história do surgimento dos números complexos, demonstrando a fórmula de Cardano-Tartaglia e conclusão dada por Bombelli. Comenta que de acordo com os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), que um dos aspectos que deve priorizado é a contextualização da Matemática, e pensando nesse aspecto, elaborou uma proposta didática privilegiando a abordagem geométrica, no estudo dos números complexos. Para tanto, escolheu as Representações Semióticas de Duval em sua análise, pois permite o transito entre as diferentes formas de representação dos símbolos.

Na sequência, faz uma análise do conteúdo e a forma de abordagem presentes em oito tradicionais livros didáticos, sendo que seis deles são recomendados pelo PNLDEM entre os anos 2007 e 2012. Na análise foi observada a quantidade de páginas direcionadas ao estudo do conteúdo, bem como o contexto da abordagem, ou seja, se existem o tratamento histórico, como é introduzido o conceito, como se articula o número complexo com a geometria e de que forma ocorre essa articulação, como são feitas as representações geométricas e trigonométricas, além das operações com os números complexos. Por fim, analisa os tipos de exercícios resolvidos e propostos e concluem que:

> [...] *todos os autores mantêm um padrão de apresentação dos exercícios. Após a exposição teórica, apresentam exemplos ou exercícios resolvidos. Posteriormente, propõem exercícios para que os alunos os resolvam. Em geral, tais atividades exigem, na sua maioria, procedimentos similares ou até iguais aos resolvidos nos exemplos de cada livro. São exercícios que exigem pouca interpretação, e geralmente, muitos cálculos. (p. 28)*

Faz análise também de quatro dissertações envolvendo os números complexos, escritos em momentos distintos, variando de 1998 a 2012, onde a autora se identificou com a questão proposta por Oliveira (2010), cuja questão norteadora é: “Ensinar o conteúdo Números Complexos, enfatizando seus aspectos gráficos, torna seu aprendizado mais significativo?” Segundo Caldeira, o autor (Oliveira) para responder esta questão utilizou-se do software Geogebra, fundamentando seu trabalho na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, e para metodologia, utilizou-se da engenharia didática de Michèle Artigue. Pensando nos questionamentos proposto por Oliveira, Caldeira procurou responder alguns deles em sua dissertação, já que possui um enfoque geométrico. Analisou a dissertação de Araújo (2006), a de Monzon (2012) e a de Rosa (1998). Em todas elas, Caldeira procurou identificar as similaridades e diferenças, além dos enfoques dados por cada uma.

No terceiro capítulo, a autora discorre sobre o referencial teórico adotado para seu trabalho, ou seja, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, pois vem de encontro com suas expectativas em termos de análise cognitivo. Faz aqui uma releitura do que é a representação semiótica e como os Números Complexos se comportam diante dessa Teoria.

Com base no contexto teórico, afirma a autora:

> [...] *elaboramos uma sequência didática para introduzir o estudo dos Números Complexos, trabalhando a dependência e o relacionamento entre as formas geométrica e algébrica na elaboração de atividades que privilegiam a articulação entre os diferentes registros de representação dos Números Complexos. (p. 44).*

No capítulo 4, o mais longo, a autora dedica-se para a apresentação e descrição de sua Proposta Didática, passo a passo. Esclarece que a aplicação da proposta foi realizada com uma turma do curso técnico de Eletrônica – período noturno, composta por 18 alunos.

As atividades foram divididas em nove encontros de no mínimo 90 minutos cada um, onde foi se construindo, a partir de pares ordenados do IR^2, a idéia de vetores no plano, observando o comportamento das operações, os ângulos formados, comparando resultados, de forma a fazer com que os alunos se apropriassem dos conceitos de maneira natural. Em cada encontro a autora procurava instigar os alunos com algum questionamento dos quais eles precisariam buscar respostas. Os alunos trabalharam em grupo de forma que podiam discutir as possibilidades entre si. Somente no quinto encontro, foi que se introduziu a unidade imaginária *i.*

No último encontro (nono), talvez devido à complexidade do conteúdo, parece que a autora optou por apresentar o conteúdo fazendo as demonstrações no que envolve as fórmulas de Moivre (Potenciação e Radiciação) de Números Complexos, para então fazer questionamentos.

Como atividade final, a autora propôs algumas atividades de números complexos aplicados em outras áreas de conhecimento.

Em suas considerações finais, viu que sua proposta foi bem aceita pelos alunos de um modo geral, mas houve algumas resistências por parte de alguns alunos repetentes. Observou que a abordagem geométrica proporcionou um significado geométrico dinâmico, já que os alunos puderam participar diretamente nas construções dos conceitos e tirar suas próprias conclusões, a partir de conceitos já conhecidos. A autora não se utilizou de nenhum recurso tecnológico, porém crê que sua proposta possa ser perfeitamente articulável com a utilização desses recursos.

Particularmente achei muito interessante a Proposta Didática de Caldeira e vejo de forma muito positiva a introdução dos números complexos a partir da contextualização com a geometria.

A dissertação foi submetida para a obtenção da titulação de mestre, sob o título Dos Números Complexos aos Quatérnions: Desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações, elaborada por André Marcos dos Santos e defendida junto à Universidade Tecnológica Federal do Paraná, em 2013, contando com a orientação da Profa. Dra. Olga Harumi Saito.

Segundo o autor, o desenvolvimento de sua dissertação fundamentou-se na elaboração de uma linha do tempo em relação ao estudo dos números complexos.

A dissertação foi dividida em cinco capítulos de forma que:

O capítulo 1 – *A introdução* é bastante sucinta, e o autor apresenta o significado da palavra **complexo** segundo o dicionário Graus (2013).

Também toma como pedra fundamental para o desenvolvimento de seu trabalho, a fala “segundo (Caldeira, 2012) - uma visão histórica facilita o entendimento dos conceitos a serem desenvolvidos e possibilita que se estabeleçam as relações entre a área do domínio específico, no caso os Números Complexos, e suas relações transversais com os demais conteúdos a ele associados.” (p. 12). Partindo desse pressuposto, onde julga que a abordagem histórica do surgimento dos números complexos até sua utilização torna sua manipulação simples para os estudantes que deverá concluir “que ***de complexo*** esses números só possuem o nome”. (p.12). (Grifo nosso)

A seguir traz ao leitor um rápido vislumbre sobre os tópicos abordados em cada um dos capítulos a seguir.

No capítulo 2 – *A História dos números complexos*, o autor faz um aprofundamento histórico sobre o surgimento dos números complexos, dividindo em tópicos, mostrando:

Antes dos Complexos - começando pelo matemático grego Heron (75 D.C), passando para Diofanto de Alexandria (250 D.C.) comentando sobre o trabalho deste, cuja a resolução de uma equação quadrática o leva a uma raiz quadrada de um número negativo, sem uma solução efetiva.

Surgem os números complexos – apresenta nesse tópico o problema motivador do estudo de Cardano e suas conclusões que cuja obra foi publicada sob o título *Ars Magna (século XVI).* Menciona também que nessa obra que Cardano admitiu que a sugestão para a resolução da equação cúbica procedia de Tartaglia.

A dedução da fórmula de Cardano – neste tópico, o autor faz toda a demonstração da fórmula de Cardano e como este, chegou ao resultado, porém sem conseguir explica-lo. Demonstra também as conclusões de Bombelli (sec. XVI), um algebrista italiano que conseguiu resolver o problema da fórmula de Cardano e conseguiu explicar o resultado final obtido por Cardano, utilizando a forma representativa: $a + b\sqrt{-1}$.

Menciona ainda que no século XVII que foi Girard o primeiro a utilizar o símbolo $\sqrt{-1}$. De acordo com o autor, *segundo (Baungart, 1994)*, Girard se utilizou dos números imaginários com ousadia, utilizando-os para a solução de problemas geométricos e aceitando também, como raízes de equações de grau mais elevado. No entanto, foi à fala de Descartes (século XVII) dá o nome das raízes de números negativos como sendo "*imaginários*".

No século XVIII, Moivre relaciona os números complexos às funções trigonométrica e dessa forma *as raízes no campo dos complexos fica definitivamente estabelecida*, conforme Milies, 1993.

O Desenvolvimento trigonométrico – Neste tópico, o autor mostra o desenvolvimento de que prova que os números eram úteis para resolução de problemas de divisão de arcos de círculos, onde Moivre "concluiu que um número imaginário unitário pode ser representado por $\cos(\theta) \pm \sqrt{-1}.\,\mathrm{sen}(\theta)$." (p. 19). Faz menção de que Moivre resolveu uma equação do quinto grau, onde este se utilizou uma tabela de logaritmos, porém sem justificar o que o levou a tal fazer tal utilização.

Mostra também qual era o artifício utilizado por Moivre na resolução de equações de grau ímpares, utilizando $a = \cos(\theta)$ e $b = sen(n\theta)$. O autor faz a demonstração segundo Moivre e conclui que com isso, surge a fórmula conhecida como *Fórmula de Moivre.*

Neste tópico, tece ainda comentários sobre Cotes (século XVIII), onde este apresentou um artigo publicado em 1714, a fórmula: $\ln(cos\theta + isen\theta) = i\theta$. O autor, faz a demonstração desta fórmula, segundo Cotes no Anexo B.

Discorre ainda que Euler e Bernoulli trocaram cartas onde estes, utilizaram a $\sqrt{-1}$ para resoluções envolvendo integrais e equações diferenciais. O autor faz as demonstrações destes e suas conclusões.

O desenvolvimento geométrico – Final do século VXII, Wallis foi o primeiro a procurar por uma interpretação geométrica para os números denominados por Descartes, por imaginários. Neste tópico, Santos refaz toda a trajetória do Wallis, explicando e exemplificando o procedimento adotado por ele para interpretar a raiz quadrada de um número negativo. Comenta ainda que além de Wallis, também Wessel, Argand e Gauss "perceberam a relação entre os números complexos e os pontos reais no plano". (p.25).

Santos faz a demonstração do trabalho publicado por Wessel, final do século XVIII, início do século XIX, onde Wessel "propôs uma representação analítica para segmentos de retas no plano, com o objetivo de representar os números complexos como pontos do plano". (p.25). Também Argand no século XVIII/XIX, publicou um Ensaio sobre *Maneira de Representar as Quantidades Imaginárias,* onde Argand considera que multiplicar o número imaginário *i* por -1 ou por +1 promove-se rotações em torno dos eixos no plano. Gauss (século XVIII/XIX) escreveu um artigo onde associava à forma algébrica *a* + *bi* com o par ordenado (*a, b*) o que representava um único ponto no plano. Esse foi o elemento chave para total aceitação da existência dos números complexos.

Já em 1833, Hamilton apresenta um artigo à Academia Irlandês, formalizando a álgebra dos números complexos, definindo as operações de soma e multiplicação.

Segundo Santos,

> [...] *além dos complexos – A história dos quatérnions*, *logo após Hamilton formalizar a álgebra dos números complexos, constata-se que a teoria dos números complexos era consistente e isso marca o início da Álgebra Moderna e os números complexos passam a constituir um poderoso método para resolução de problemas em diversas áreas. (p.29).*

A partir deste ponto, passa a se questionar se era possível a ampliação dos complexos na forma tripletos (x, y, z). Hamilton percebe que a operação da adição de tripletos se comporta de forma idêntica à forma binomial, porém a multiplicação, não correspondia. Santos refaz a trajetória de Hamilton na tentativa de obter sucesso neste tipo de construção para complexos, mostrando os problemas encontrados por Hamilton. Muitos anos de pesquisa se passaram até que Hamilton consegue compreender e comprovar que para esse tipo de operação (multiplicação) envolvendo o tripleto, era necessária a consideração de um quarto termo na expressão. Surgem então os quatérnions, criando uma ruptura entre a álgebra e aritmética, onde para se operar num espaço de dimensão três, é preciso utilizar-se de um espaço de quarta dimensão, já que a operação da multiplicação não goza da propriedade comutativa. Fica instaurada definitivamente a Álgebra Moderna.

No capítulo 3 – Teoria dos números complexos, o mais longo dos capítulos, é o foco central da dissertação dividida em tópicos e subtópicos, onde passou a abordar sobre: A insuficiência dos reais. O conjunto dos números complexos (Potências de i com expoentes inteiros). Representação geométrica dos números complexos (Módulo e conjugado de um número complexo, Propriedade do quociente de um número complexo, Relação entre o módulo e o conjugado de um número complexo, Propriedades de um conjugado de um número complexo, Propriedades do módulo de um número complexo). Raiz quadrada de um número complexo. Forma polar ou forma trigonométrica. Operações com números complexos na forma trigonométrica (Multiplicação, Divisão, Potenciação, Radiciação). Forma exponencial (Logaritmo, Potências complexas). Forma matricial de um número complexo. Quatérnions, Operações com quatérnions (Adição, Produto, Módulo).

Observa-se uma grande quantidade de tópicos e subtópicos utilizados nesses capítulos. Santos procurou reunir todos os conceitos pertencentes ao conjunto dos números complexos e dedica-se a elencar as definições, teoremas e propriedades inerentes de cada situação, fazendo todas as demonstrações.

No quarto capítulo – *Aplicações*, neste capítulo, o autor sugestiona problemas diversos, no campo da geometria, das combinações envolvendo o binômio de Newton, na geometria dos fractais, que é utilizada para representar fenômenos naturais, das quais não se pode usar a geometria clássica. Neste ponto, o autor se preocupa em explicar os fractais e como se apresentam, mostrando figuras vinculadas a forma complexa de representação, como o Conjunto de Mandelbrot e o Conjunto de Júlia.

Na sequência, Santos faz uma análise da utilização dos números complexos para resolução em circuitos elétricos, já que as correntes elétricas, as tensões, e reatâncias podem ser representadas de forma vetorial, enfim, por serem vetores no plano, podem ser representados na forma de complexos.

Na aerodinâmica, Santos explica que em 1906, Nikolai Yegorovitch Jukovsky cientista russo considerado o fundador da aerodinâmica, se utiliza das variáveis complexas para transformar figuras geométrica de um plano complexo em figuras totalmente diferentes em outro plano, técnica essa ainda utilizada em áreas avançadas de pesquisa.

Na Biomecânica, onde se utiliza dos quatérnions, utilizado como ferramenta de análise de rotação em movimentos esportivos.

Na computação gráfica, Santos faz menção de que nos jogos de computadores a utilização dos quatérnions permite as animações para girar objetos. O método matricial é mais caro quando comparado com o método dos quatérnions.

No estudo de cálculo diferencial com os números complexos é utilizado para explicar a teoria sobre o escoamento dos fluídos incompressíveis.

No capítulo 5 - *Considerações finais*, de acordo com o autor sua preocupação ao propor seu trabalho era fazer um resgate histórico a respeito dos números complexos, mostrando suas formas representativas, articulando com outros conteúdos da própria matemática e também de outros ramos das ciências, mostrando o vínculo entre os números complexos e os quatérnions. Ainda segundo o autor, houve a preocupação também em promover um equilíbrio matemático, trazendo subsídio aos professores e estudantes, e promover uma didática mais atraente para promover o aprendizado. A ideia de utilizar-se da história é fazer com que alunos percebam que os elementos da matemática não nascem num passe de mágica, mas que levou longos anos, além de romper com o mito de que esses conceitos surgem de um nada.

Para finalizar seu trabalho, o autor coloca o Anexo A – Obtenção da fórmula de Euler através do uso de integrais, onde ele faz todo o desenvolvimento da fórmula. O Anexo B – Cotes e a fórmula de Euler, aqui o autor explica como Cotes utilizou a fórmula de Euler para obter a área da superfície de revolução de um elipsoide. O autor faz a demonstração do procedimento utilizado por Cotes. Já o Anexo C, trata-se da linha do tempo, onde faz menção de cada personagem e sua contribuição para o desenvolvimento dos números complexos, organizado de forma cronológica.

Sem sombra de dúvidas, o trabalho de Santos se constitui uma rica fonte de pesquisa para quem quer conhecer mais sobre a estrutura que envolve o conjunto dos Números Complexos.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM E DEPOIMENTOS

Eu, ____________________________________, portador (a) do CPF _________________, e do RG___________________, responsável pelo (a) Menor ____,

aluno(a) devidamente matriculado no 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Coronel Pedro Dias Campos, na cidade de Capela do Alto/SP AUTORIZO, através do presente termo, autorizo as pesquisadoras **Professora Tânia Mara Amorim de Freitas e Professora Valéria Nogueira Batista,** alunas regularmente matriculadas no programa de Mestrado Profissional da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba e sob a orientação do **Professor Doutor Paulo Cesar Oliveira**, a realizar imagens da produção escolar dos alunos, bem como colher depoimento sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes, do Menor citado.

O uso da imagem e dos depoimentos tem fins científicos, ou seja, pode constituir como material integrante da DISSERTAÇÃO da primeira pesquisadora. É resguardado os direitos das crianças e adolescentes (Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA, Lei N.º 8.069/ 1990), dos idosos (Estatuto do Idoso, Lei N.° 10.741/2003) e das pessoas com deficiência (Decreto Nº 3.298/1999, alterado pelo Decreto Nº 5.296/2004).

Capela do Alto, _____ de Março de 2014.

____

Assinatura do Pai ou Responsável