

COMPARAÇÃO DAS DISTRIBUIÇÕES  
 $\alpha$ -ESTÁVEL, NORMAL,  $t$  DE STUDENT  
E LAPLACE ASSIMÉTRICAS

Walkiria M.de Oliveira Macerau

COMPARAÇÃO DAS DISTRIBUIÇÕES  
 $\alpha$ -ESTÁVEL, NORMAL,  $t$  DE STUDENT  
E LAPLACE ASSIMÉTRICAS

Walkiria M. de Oliveira Macerau

Orientador: Luís A. Milan

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

UFSCar - São Carlos-SP

Abril de 2012

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

M142cd

Macerau, Walkiria Maria de Oliveira.

Comparação das distribuições  $\alpha$ -estável, normal,  $t$  de student e Laplace assimétricas / Walkiria Maria de Oliveira Macerau. -- São Carlos : UFSCar, 2012.  
95 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Estatística. 2. Distribuição normal assimétrica. 3. Distribuição  $t$ -assimétrica. I. Título.

CDD: 519.5 (20<sup>a</sup>)

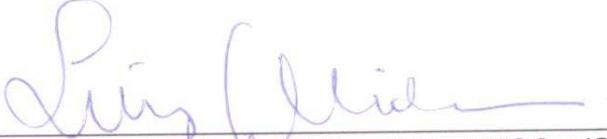
**Walkiria Maria de Oliveira Macerau**

**COMPARAÇÃO DAS DISTRIBUIÇÕES  $\alpha$ -ESTÁVEL, NORMAL,  $t$  DE  
STUDENT E LAPLACE ASSIMÉTRICAS**

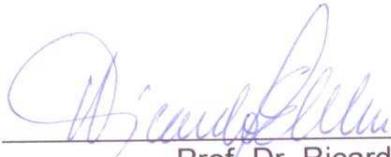
Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada em 27 de janeiro de 2012.

**BANCA EXAMINADORA**

Presidente   
Prof. Dr. Luis A. Milan (DEs-UFSCar/Orientador)

1º Examinador   
Prof. Dr. Benedito Galvão Benze (DEs-UFSCar)

2º Examinador   
Prof. Dr. Ricardo Sandes Ehlers (ICMC-USP)

*Para meu esposo Rodolfo Ferro Macerau  
com todo o meu amor e carinho.*

# Agradecimentos

À Deus que me deu a vida.

Ao meu esposo Rodolfo pelo apoio de todos os dias.

Aos meus gatinhos Kiara, Samantha e Willy pelos bons momentos que vocês me fornecem.

À minha mãe Otilia pela educação recebida.

À minha família pela compreensão da minha ausência nesses dois últimos anos.

Aos colegas do curso de Mestrado e Doutorado pela ajuda quando as dúvidas surgiram, em especial as meninas superpoderosas, Fernanda (Lindinha), Jacqueline (Florzinha) e Manuela (Docinho).

Ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos que me ofereceu a oportunidade de poder concluir o curso de Mestrado em Estatística.

Aos professores do Departamento que ministraram aula em nosso curso, por transmitiram os seus conhecimentos sem pedir nada em troca.

Em especial ao professor Luís A. Milan pelas ideias, sugestões, amizade e apoio.

Aos professores Benedito Galvão Benze, Francisco Antonio Rojas Rojas e Ricardo Ehlers, membros da banca do exame de qualificação e/ou defesa, pelas sugestões feitas para melhoria deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro concedido.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

# Resumo

As distribuições assimétricas tem experimentado grande desenvolvimento nos tempos recentes. Elas são utilizadas na modelagem de dados financeiros, médicos e genéticos entre outras aplicações. Dentre essas distribuições, a normal assimétrica (Azzalini, 1985) tem recebido mais atenção dos pesquisadores (Genton *et al.*, (2001), Gupta *et al.*, (2004) e Arellano-Valle *et al.*, (2005)). Nesta dissertação, apresentamos um estudo comparativo das distribuições  $\alpha$ -estável, normal,  $t$  de Student e Laplace assimétricas. A distribuição  $\alpha$ -estável estudada por Nolan (2009) é proposta por Gonzalez *et al.*, (2009) no contexto de dados genéticos. Neste trabalho, também apresentamos como verificar a assimetria de uma distribuição, descrevemos algumas características das distribuições assimétricas em estudo, e comparamos essas distribuições utilizando os critérios de seleção de modelos *AIC* e *BIC*.

**Palavras-chave:** *Distribuições assimétricas,  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica.*

# Abstract

The asymmetric distributions has experienced great development in recent times. They are used in modeling financial data, medical, genetics and other applications. Among these distributions, the Skew normal (Azzalini, 1985) has received more attention from researchers (Genton *et al.*, (2001), Gupta *et al.*, (2004) and Arellano-Valle *et al.*, (2005)). We present a comparative study of  $\alpha$ -stable distributions, Skew normal, Skew  $t$  de Student and Skew Laplace. The  $\alpha$ -stable distribution is studied by Nolan (2009) and proposed by Gonzalez *et al.*, (2009) in the context of genetic data. For some real datasets, in areas such as financial, genetics and commodities, we test which distribution best fits the data. We compare these distributions using the model selection criteria *AIC* and *BIC*.

**Keywords:** *asymmetric distributions,  $\alpha$ -stable, Skew normal, Skew  $t$  de Student, Skew Laplace.*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Assimetria</b>	<b>4</b>
2.1 Simetria de uma distribuição . . . . .	4
2.2 Definição de assimetria . . . . .	5
2.3 Verificação da assimetria . . . . .	7
<b>3 Distribuições assimétricas</b>	<b>10</b>
3.1 Distribuição $\alpha$ -estável . . . . .	10
3.2 Distribuição normal assimétrica . . . . .	14
3.3 Distribuição $t$ de Student assimétrica . . . . .	16
3.4 Distribuição Laplace assimétrica . . . . .	20
3.5 Casos particulares das distribuições . . . . .	23
<b>4 Estudo de simulação</b>	<b>24</b>
4.1 Inferências para os parâmetros . . . . .	24
4.2 Critérios de seleção de modelos . . . . .	26
4.3 <i>Software</i> e funções utilizadas . . . . .	29
<b>5 Resultados da simulação</b>	<b>31</b>
5.1 Resultados da simulação - Parte I . . . . .	32
5.1.1 Resultados da simulação para a distribuição $\alpha$ -estável . . . . .	32
5.1.2 Resultados da simulação para a distribuição normal assimétrica . . . . .	36

---

5.1.3	Resultados da simulação para a distribuição $t$ de Student assimétrica	39
5.1.4	Resultados da simulação para a distribuição Laplace assimétrica . .	43
5.2	Resultados da simulação - Parte II . . . . .	47
5.2.1	Resultados da simulação para a distribuição $\alpha$ -estável . . . . .	47
5.2.2	Resultados da simulação para a distribuição normal assimétrica . .	51
5.2.3	Resultados da simulação para a distribuição $t$ de Student assimétrica	55
5.2.4	Resultados da simulação para a distribuição Laplace assimétrica . .	59
5.3	Resultados da simulação - Parte III . . . . .	63
5.3.1	Resultados da simulação para a distribuição $\alpha$ -estável . . . . .	63
5.3.2	Resultados da simulação para a distribuição normal assimétrica . .	65
5.3.3	Resultados da simulação para a distribuição $t$ de Student assimétrica	66
5.3.4	Resultados da simulação para a distribuição Laplace assimétrica . .	67
5.4	Discussão dos resultados da simulação . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Aplicações a dados reais</b>	<b>71</b>
6.1	Ajuste de dados de expressão gênica . . . . .	71
6.2	Ajuste de dados financeiros . . . . .	74
6.3	Ajuste de dados de <i>commodity</i> . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>87</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Geração dos números aleatórios no <i>software R</i></b>	<b>93</b>

# Lista de Figuras

2.1	Exemplo de uma distribuição simétrica. . . . .	5
2.2	Formas apresentadas por uma distribuição. . . . .	6
3.1	Densidades da distribuição $\alpha$ -estável com parâmetros $\gamma = 1$ , $\delta = 0$ , e (a) $\beta = 0$ ; $\alpha = 0.5$ (linha em preto), $\alpha = 1$ (linha em vermelho), $\alpha = 1.5$ (linha em verde), $\alpha = 2$ (linha em azul), e (b) $\alpha = 1.5$ ; $\beta = -1$ (linha em preto), $\beta = 0$ (linha em vermelho), $\beta = 0.5$ (linha em verde), $\beta = 1$ (linha em azul). . . . .	11
3.2	Densidades da distribuição normal assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , e (a) $\lambda = 1$ ; $\omega = 0.5$ (linha em preto), $\omega = 1$ (linha em vermelho), $\omega = 1.5$ (linha em verde), $\omega = 2$ (linha em azul), e (b) $\omega = 1$ ; $\lambda = -1$ (linha em preto), $\lambda = 0$ (linha em vermelho), $\lambda = 0.5$ (linha em verde), $\lambda = 1$ (linha em azul). . . . .	15
3.3	Densidades da distribuição $t$ de Student assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 1$ , e (a) $\lambda = 2$ ; $\nu = 1$ (linha em preto), $\nu = 2$ (linha em vermelho), $\nu = 3$ (linha em verde), $\nu = 10$ (linha em azul), e (b) $\nu = 3$ ; $\lambda = 0$ (linha em preto), $\lambda = 0.5$ (linha em vermelho), $\lambda = 1$ (linha em verde), $\lambda = 2$ (linha em azul). . . . .	18
3.4	Densidades da distribuição Laplace assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , e (a) $\lambda = 2$ ; $\omega = 0.5$ (linha em preto), $\omega = 1$ (linha em vermelho), $\omega = 1.5$ (linha em verde), $\omega = 2$ (linha em azul), e (b) $\omega = 1$ ; $\lambda = 0.5$ (linha em preto), $\lambda = 1$ (linha em vermelho), $\lambda = 1.5$ (linha em verde), $\lambda = 2$ (linha em azul). . . . .	22

- 5.1 Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto), com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 30$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 33
- 5.2 Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto), com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 100$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 34
- 5.3 Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto), com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 34
- 5.4 Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto), com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 10000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 35
- 5.5 Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 30$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 37
- 5.6 Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 100$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 37

- 5.7 Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 38
- 5.8 Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 10000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 38
- 5.9 Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 30$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 41
- 5.10 Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 100$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 41
- 5.11 Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 42
- 5.12 Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 10000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 42

- 5.13 Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 30$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 45
- 5.14 Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 100$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 45
- 5.15 Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 46
- 5.16 Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 10000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 46
- 5.17 Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto) com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = -0.9$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 49
- 5.18 Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto) com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 49

- 5.19 Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto) com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 50
- 5.20 Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto) com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.9$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 50
- 5.21 Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = -0.9$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 53
- 5.22 Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 53
- 5.23 Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 54
- 5.24 Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 54

5.25 Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 57

5.26 Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 57

5.27 Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1.5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 58

5.28 Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 2.0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 58

5.29 Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 61

5.30 Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1.0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . . 61

5.31	Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto) com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 1.5$ , e modelados com distribuição $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul), $t$ de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás); $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . .	62
5.32	Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto) com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 2.0$ , e modelados com distribuição $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul), $t$ de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás); $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . .	62
6.1	Dados de expressão gênica do “Swirl Zebrafish”: (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . .	73
6.2	Dados financeiros originais do índice BOVESPA: (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação. . . . .	74
6.3	Dados financeiros de retorno do índice BOVESPA: (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação. . . . .	75
6.4	Dados financeiros do logaritmo do retorno do índice BOVESPA: (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação. . . . .	75
6.5	Dados financeiros de retorno do índice BOVESPA: (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . .	78
6.6	Dados financeiros do logaritmo do retorno do índice BOVESPA: (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . .	79
6.7	Dados originais de <i>commodity</i> soja (saca 60kg): (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação. . . . .	80
6.8	Dados de retorno de <i>commodity</i> soja (saca 60kg): (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação. . . . .	81
6.9	Dados do logaritmo do retorno de <i>commodity</i> soja (saca 60kg): (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação. . . . .	81
6.10	Dados de retorno de <i>commodity</i> soja (saca 60kg): (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . .	85
6.11	Dados do logaritmo do retorno de <i>commodity</i> soja (saca 60kg): (a) Histograma e (b) Distribuição empírica. . . . .	85

# Lista de Tabelas

5.1	Simulação de dados com distribuição $\alpha$ -estável com parâmetros $\alpha = 1.65$ , $\beta = 0.4$ , $\gamma = 0.3$ , $\delta = 0.2$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão. . . . .	32
5.2	Simulação de dados com distribuição $\alpha$ -estável com parâmetros $\alpha = 1.65$ , $\beta = 0.4$ , $\gamma = 0.3$ , $\delta = 0.2$ : Resultados segundo os critérios <i>AIC</i> e <i>BIC</i> . . .	35
5.3	Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros $\xi = -0.2$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 0.7$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão. . . . .	36
5.4	Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros $\xi = -0.2$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 0.7$ : Resultados segundo os critérios <i>AIC</i> e <i>BIC</i> . . .	39
5.5	Simulação de dados com distribuição <i>t</i> de Student assimétrica com parâmetros $\xi = -0.2$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 0.6$ , $\nu = 5$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão. . . . .	40
5.6	Simulação de dados com distribuição <i>t</i> de Student assimétrica com parâmetros $\xi = -0.2$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 0.6$ , $\nu = 5$ : Resultados segundo os critérios <i>AIC</i> e <i>BIC</i> . . . . .	43
5.7	Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros $\xi = -0.2$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 0.6$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão. . . . .	44
5.8	Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros $\xi = -0.2$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 0.6$ : Resultados segundo os critérios <i>AIC</i> e <i>BIC</i> . . .	47
5.9	Simulação de dados com distribuição $\alpha$ -estável com parâmetros $\alpha = 1.65$ , $\gamma = 0.3$ , $\delta = 0$ e variações no parâmetro $\beta$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão. . . . .	48

---

5.10	Simulação de dados com distribuição $\alpha$ -estável com parâmetros $\alpha = 1.65$ , $\gamma = 0.3$ , $\delta = 0$ e variações no parâmetro $\beta$ : Erros quadráticos médios e vieses dos estimadores. . . . .	48
5.11	Simulação de dados com distribuição $\alpha$ -estável com parâmetros $\alpha = 1.65$ , $\gamma = 0.3$ , $\delta = 0$ e variações no parâmetro $\beta$ : Resultados segundo os critérios $AIC$ e $BIC$ . . . . .	51
5.12	Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão. . . . .	51
5.13	Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Erros quadráticos médios e vieses dos estimadores. . . . .	52
5.14	Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Resultados segundo os critérios $AIC$ e $BIC$ . . . . .	55
5.15	Simulação de dados com distribuição $t$ de Student assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ , $\nu = 5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão. . . . .	55
5.16	Simulação de dados com distribuição $t$ de Student assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ , $\nu = 5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Erros quadráticos médios e vieses dos estimadores. . . . .	56
5.17	Simulação de dados com distribuição $t$ de Student assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ , $\nu = 5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Resultados segundo os critérios $AIC$ e $BIC$ . . . . .	59
5.18	Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão. . . . .	59
5.19	Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Erros quadráticos médios e vieses dos estimadores. . . . .	60

5.20	Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Resultados segundo os critérios $AIC$ e $BIC$ . . . . .	63
5.21	Simulação de dados com distribuição $\alpha$ -estável com parâmetros $\alpha = 1.65$ , $\beta = 0.4$ , $\gamma = 0.3$ , $\delta = 0.2$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	64
5.22	Simulação de dados com distribuição $\alpha$ -estável com parâmetros $\alpha = 1.65$ , $\gamma = 0.3$ , $\delta = 0$ e variações no parâmetro $\beta$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	64
5.23	Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros $\xi = -0.2$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 0.7$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	65
5.24	Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	66
5.25	Simulação de dados com distribuição $t$ de Student assimétrica com parâmetros $\xi = -0.2$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 0.6$ , $\nu = 5$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	66
5.26	Simulação de dados com distribuição $t$ de Student assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ , $\nu = 5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	67
5.27	Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros $\xi = -0.2$ , $\omega = 0.5$ , $\lambda = 0.6$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	68
5.28	Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros $\xi = 0$ , $\omega = 0.5$ e variações no parâmetro $\lambda$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	68
6.1	Dados de expressão gênica do “Swirl Zebrafish”: Resultados dos coeficientes de assimetria. . . . .	71
6.2	Dados de expressão gênica do “Swirl Zebrafish”: Estimativas, correspondentes erros padrão e Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	72

---

6.3	Dados de expressão gênica do “Swirl Zebrafish”: Resultados segundo os critérios de seleção de modelos <i>AIC</i> e <i>BIC</i> . . . . .	73
6.4	Dados financeiros de retorno e logaritmo do retorno do índice BOVESPA: Resultados dos coeficientes de assimetria. . . . .	76
6.5	Dados financeiros de retorno do índice BOVESPA: Estimativas, correspondentes erros padrão e Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	77
6.6	Dados financeiros do logaritmo do retorno do índice BOVESPA: Estimativas, correspondentes erros padrão e Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	77
6.7	Dados financeiros de retorno e do logaritmo do retorno do índice BOVESPA: Resultado segundo os critérios de seleção de modelos <i>AIC</i> e <i>BIC</i> . . . . .	79
6.8	Dados de retorno e logaritmo do retorno de <i>commodity</i> soja (saca 60kg): Resultados dos coeficientes de assimetria. . . . .	82
6.9	Dados de retorno de <i>commodity</i> soja (saca 60kg): Estimativas, correspondentes erros padrão e Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	83
6.10	Dados do logaritmo do retorno de <i>commodity</i> soja (saca 60kg): Estimativas, correspondentes erros padrão e Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros. . . . .	83
6.11	Dados de retorno e logaritmo do retorno de <i>commodity</i> soja (saca 60kg): Resultados segundo os critérios de seleção de modelos <i>AIC</i> e <i>BIC</i> . . . . .	86

# Capítulo 1

## Introdução

As distribuições assimétricas contínuas tem sido utilizadas recentemente na modelagem de dados financeiros e de economia, médicos e genéticos. Essas distribuições conseguem ajustar dados com observações extremas e com estrutura assimétrica.

Na análise de dados com estrutura assimétrica é comum utilizarmos transformações nas variáveis. Entretanto, transformar as variáveis pode ocasionar alguns problemas, como por exemplo, a difícil interpretação dos resultados (Azzalini & Capitanio (1999)).

As transformações disponíveis nem sempre eliminam por completo a assimetria, em outras palavras, tornam a distribuição dos dados que possuem estrutura assimétrica em simétrica.

Uma classe de distribuições assimétricas denominada de normal assimétrica é proposta em Azzalini (1985). Essa classe de distribuições analiticamente tratáveis consegue modelar a assimetria dos dados, e inclui a distribuição normal como um caso particular.

A distribuição normal assimétrica é construída a partir de uma função densidade de uma distribuição normal padrão, e de uma função de distribuição acumulada. Esta distribuição tem recebido grande atenção dos pesquisadores (Genton *et al.*, (2001), Gupta *et al.*, (2004) e Arellano-Valle *et al.*, (2005)).

Um método para transformar uma distribuição simétrica em assimétrica é proposto em Fernández *et al.*, (1995). Neste método de construção, os autores utilizam uma distribuição simétrica e um parâmetro de assimetria para obter a distribuição assimétrica. As distribuições  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica são construídas conforme o método de Fernández *et al.*, (1995).

---

A distribuição  $t$  de Student assimétrica é aplicada a dados com estrutura assimétrica e com observações extremas. Na literatura, encontramos aplicações da distribuição  $t$  de Student assimétrica em retornos financeiros, em Fernández & Steel (1998), e em outras aplicações, em Azzalini & Capitanio (2003) e Jones & Faddy (2003). Aplicações da distribuição Laplace assimétrica a dados biológicos são encontradas em Julià & Vive-Rego (2008) e Rubio & Steel (2010).

Outra classe de distribuições assimétricas são as distribuições estáveis ou distribuição  $\alpha$ -estável. Esta classe de distribuição foi caracterizada por Paul Lévy em seus estudos de soma de variáveis aleatórias identicamente distribuídas e independentes, por volta do ano de 1920, conforme Nolan (2009).

A distribuição  $\alpha$ -estável estudada por Nolan (2009) também permite a modelagem de dados assimétricos. Em geral, esta distribuição não possui uma forma fechada para sua função densidade de probabilidade, sendo definida por meio de sua função característica. Existem três casos particulares em que é possível escrever sua função densidade: são as distribuições normal, de Cauchy e de Lévy.

Encontramos aplicações da distribuição  $\alpha$ -estável em retornos financeiros, em Nolan (2003), Rachev (2003), e Rachev & Mittinik (2000), e Gonzalez *et al.*, (2009) utilizam esta distribuição no contexto de dados genéticos.

Como a escolha de uma distribuição adequada ou de um modelo probabilístico adequado é um fator importante na análise de dados, precisamos de critérios que selecionem um modelo, dentre os que estão sendo avaliados, ou seja, aquele que apresente um melhor ajuste ao conjunto de dados.

Na literatura, encontramos os seguintes critérios de seleção de modelos: o critério de informação de Akaike ( $AIC$ ), o critério bayesiano de Schwarz ( $BIC$ ), o teste da razão de verossimilhança ( $TRV$ ) (Bozdogan (1987), Wolfinger (1993) e Littell *et al.*(2002)), o Fator de Bayes, o critério de referência bayesiano ( $BRC$ ), e o teste de significância Bayesiano ( $FBST - Full Bayesian Significance Test$ ) (Lee (1996), Congdon (2001) e Paulino *et al.* (2006)), sendo esses três últimos utilizados em Inferência Bayesiana.

Neste trabalho, utilizamos os critérios  $AIC$  e  $BIC$  para selecionar uma distribuição dentre as distribuições assimétricas em estudo. Além disso, apresentamos algumas características dessas distribuições, definimos assimetria de uma distribuição, e descrevemos como verificar se uma distribuição é assimétrica ou não. Para a realização deste trabalho

utilizamos dados simulados e aplicações a dados reais.

Nossos objetivos de pesquisa relatados nessa dissertação são os seguintes:

1. Revisar as referências sobre assimetria e as principais distribuições assimétricas de nosso interesse, a saber,  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica.
2. Verificar a estimabilidade dos parâmetros dessas distribuições por meio do método de máxima verossimilhança.
3. Verificar o desempenho dos estimadores, bem como a separabilidade entre esses modelos probabilísticos, usando como instrumento a simulação e os critérios de seleção de modelos *AIC* e *BIC*.
4. Verificar a adequação das distribuições estudadas a diferentes tipos de dados.

Esta dissertação está organizado em sete capítulos. No Capítulo 2, apresentamos a definição de assimetria e descrevemos algumas formas para se verificar o tipo de assimetria apresentado por uma distribuição. No Capítulo 3, fazemos uma breve descrição das distribuições assimétricas em estudo. No Capítulo 4, descrevemos os procedimentos utilizados no estudo de simulação, bem como as inferências para os parâmetros, os critérios de seleção de modelos, o *software* e as funções utilizadas neste estudo. No capítulo 5, apresentamos os resultados encontrados no estudo simulação. No Capítulo 6, relatamos os resultados das aplicações a dados reais. Finalmente, no Capítulo 7, descrevemos as considerações finais deste trabalho.

# Capítulo 2

## Assimetria

A palavra assimetria significa ausência de simetria, ou seja, ausência de harmonia (ou de estética, ou de proporcionalidade e ou de equilíbrio). Em estatística, a simetria ou a assimetria é observada na distribuição dos dados.

Na análise de dados, identificar o tipo de assimetria apresentado na distribuição das observações é um fator importante, pois, uma vez que identificamos o tipo de assimetria, procuramos utilizar distribuições de probabilidade que consigam modelar o comportamento assimétrico ou não das observações.

Neste capítulo, definimos simetria e assimetria de uma distribuição de probabilidade contínua e descrevemos algumas formas para verificar a assimetria de uma distribuição.

### 2.1 Simetria de uma distribuição

A simetria de uma distribuição é verificada em relação à sua centralidade, que pode ser a sua média ou a sua mediana.

Em uma distribuição simétrica, a área abaixo da curva de função de densidade de probabilidade,  $f_X(x)$ , possui mesma área em ambos os lados da média (ou da mediana) da distribuição, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\mu} f_X(x)dx = \int_{\mu}^{\infty} f_X(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{m_d} f_X(x)dx = \int_{m_d}^{\infty} f_X(x)dx, \quad (2.1)$$

em que  $\mu$  e  $m_d$  são a média e a mediana, respectivamente, da distribuição, e  $x$  são os valores que a variável aleatória contínua  $X$  pode assumir, com  $x \in \mathfrak{R}$ .

A Figura 2.1 apresenta graficamente um exemplo de uma distribuição simétrica, com forma de sino, onde um lado da distribuição é a imagem espelhada do outro,  $\mu$  representa

a média da distribuição,  $a$  é uma distância qualquer,  $\mu - a$  e  $\mu + a$  são pontos no eixo dos valores  $x$ , que representam os valores que a variável aleatória contínua  $X$  pode assumir, e  $f_X(x)$  representa a função densidade de probabilidade, ou seja, a probabilidade que a variável aleatória  $X$  pode assumir para cada intervalo da reta  $x$ , com  $x \in \mathfrak{R}$ .

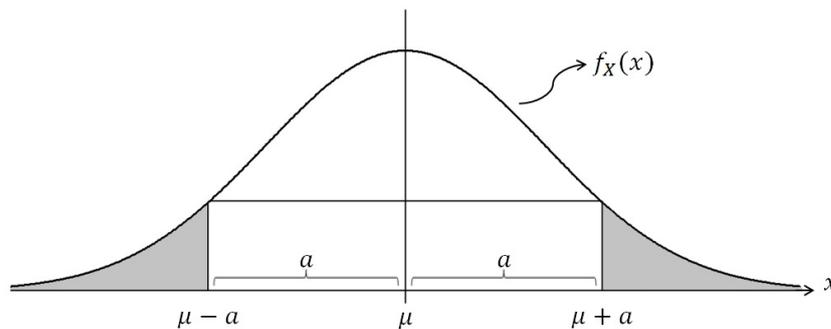


Figura 2.1: Exemplo de uma distribuição simétrica.

Observamos, por meio da Figura 2.1, que os pontos  $\mu - a$  e  $\mu + a$  são equidistantes em relação à  $\mu$ .

Em termos de probabilidade, podemos dizer que a probabilidade acumulada abaixo do ponto  $\mu - a$  é igual à probabilidade acumulada acima do ponto  $\mu + a$ , ou seja,

$$P_r(X < (\mu - a)) = P_r(X > (\mu + a)), \quad (2.2)$$

em que  $\mu - a \in \mathfrak{R}$  e  $\mu + a \in \mathfrak{R}$ .

Escrevendo de outra forma temos,

$$F_X(\mu - a) = 1 - F_X(\mu + a), \quad (2.3)$$

em que  $F_X(\cdot)$  é a função distribuição acumulada.

## 2.2 Definição de assimetria

Consideramos como assimétrica qualquer distribuição que não atenda a condição de simetria.

Em uma distribuição assimétrica a área abaixo da curva da função densidade de probabilidade,  $f_X(x)$ , não possui mesma área em ambos os lados da média (ou da mediana) da distribuição, e se tomarmos os pontos  $\mu - a$  e  $\mu + a$ , que estão afastados a uma distância

$a$  de  $\mu$ , temos que a probabilidade acumulada abaixo do ponto  $\mu - a$  não será igual à probabilidade acumulada acima do ponto  $\mu + a$ , ou seja,

$$P_r(X < (\mu - a)) \neq P_r(X > (\mu + a)). \quad (2.4)$$

A assimetria de uma distribuição pode ser à esquerda ou à direita. A assimetria à esquerda, indica que a probabilidade em um intervalo no lado esquerdo da moda da distribuição é menor do que a probabilidade em outro intervalo de mesmo comprimento do primeiro situado no lado direito da moda da distribuição. A assimetria à direita, indica que essa probabilidade do lado direito da moda distribuição é menor do que a probabilidade do lado esquerdo da moda da distribuição, supondo que a distribuição seja unimodal.

A Figura 2.2 apresenta três ilustrações de tipos de assimetria apresentados por uma distribuição, em que (a) representa uma distribuição assimétrica à esquerda, (b) uma distribuição simétrica e (c) representa uma distribuição assimétrica à direita.

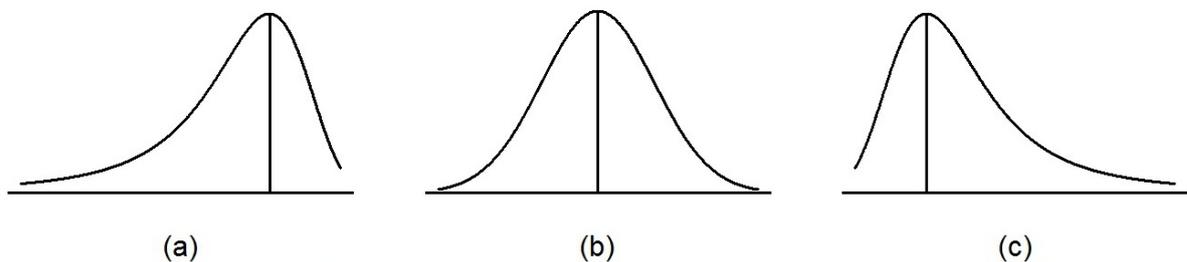


Figura 2.2: Formas apresentadas por uma distribuição.

Podemos observar que a distribuição apresentada na Figura 2.2(a) possui uma assimetria à esquerda, isto é, a menor massa de probabilidade da distribuição está concentrada no lado esquerdo do gráfico, a distribuição apresentada na Figura 2.2(c) possui uma assimetria à direita, isto é, a menor concentração da distribuição está no lado direito, e a Figura 2.2(b) apresenta uma distribuição simétrica.

Uma definição formal de assimetria é apresentada em Groeneveld & Meeden (1984). Os autores utilizam o Terceiro Momento Padronizado para avaliar a assimetria de uma distribuição de uma variável aleatória  $X$ . Essa medida é denotada por  $\gamma_1$  e definida por

$$\gamma_1 = E \left[ \left( \frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (2.5)$$

em que  $\mu_3$  é o terceiro momento em torno da média  $\mu$  e  $\sigma$  o desvio-padrão da variável aleatória  $X$ .

Esta medida só é válida quando o terceiro momento de  $X$  existe. Caso o terceiro momento não exista, recorreremos a outras formas para verificar a assimetria de uma distribuição.

## 2.3 Verificação da assimetria

As medidas de tendência central como, a média, a moda e a mediana podem ser utilizadas para verificar a assimetria de uma distribuição.

Suponha que a distribuição se apresenta com o formato da Figura 2.2(a), isto é, distribuição assimétrica à esquerda, então, neste caso, a moda e a mediana se encontram à direita da média, que tem uma tendência a se deslocar na direção dos pontos extremos. Se a distribuição se apresentar como na Figura 2.2(c), distribuição assimétrica positiva, então, a moda e a mediana estarão à esquerda da média. Para uma distribuição simétrica, como a da Figura 2.2(b), as medidas de tendência central tendem a coincidir.

Podemos estudar a assimetria de uma distribuição unimodal, ou seja, distribuições que apresentem uma única moda, utilizando o seguinte intervalo

$$\mu - M_o, \quad (2.6)$$

em que  $\mu$  e  $M_o$  são a média e a moda, respectivamente, da distribuição.

Se  $\mu - M_o < 0$ , dizemos que a assimetria é à esquerda (ou negativa), se  $\mu - M_o = 0$  a assimetria é nula, ou a distribuição é simétrica, e se  $\mu - M_o > 0$  a assimetria é à direita (ou positiva).

A relação entre a média e a moda apresentada em (2.6) também é denominada de Medida de Assimetria de Pearson. Esta medida apresenta duas limitações na aplicação. A primeira é porque ela é uma medida absoluta, e o resultado é expresso em termos da unidade original de medida da variável, ou seja, ela muda quando a unidade de medida muda. A segunda é que a mesma grandeza absoluta de assimetria tem diferentes significados para diferentes séries de dados com diferentes graus de variabilidade.

Uma medida que supera as limitações enunciadas acima pela Medida de Assimetria de Pearson é o Coeficiente de Assimetria de Pearson dado por

$$A_s^{(1P)} = \frac{\mu - M_o}{\sigma}, \quad (2.7)$$

em que  $\sigma$  é o desvio-padrão da distribuição.

A Expressão (2.7) é conhecida como 1º Coeficiente de Assimetria de Pearson. A aplicação dessa expressão envolve outra dificuldade, o fato de uma distribuição poder apresentar mais do que uma moda, enquanto que uma distribuição apresenta somente uma mediana.

No entanto, existe uma relação empírica também atribuída a Pearson, entre a média, a mediana e a moda, em que para uma distribuição moderadamente assimétrica, distribuições com  $0.15 \leq |A_s^{(1P)}| < 1$ , temos

$$\mu - M_o \approx 3(\mu - M_d), \quad (2.8)$$

em que  $M_d$  é a mediana da distribuição.

Substituindo o lado direito de (2.8) em (2.7), podemos reescrever o Coeficiente de Assimetria de Pearson como

$$A_s^{(2P)} \cong \frac{3(\mu - M_d)}{\sigma}, \quad (2.9)$$

que é conhecido como o 2º Coeficiente de Assimetria Pearson, Kenney & Keeping (1962).

Caso a média e o desvio-padrão não sejam medidas disponíveis, podemos calcular a assimetria utilizando os quartis, por meio do Coeficiente Quantil de Assimetria dado por

$$A_s^{(B)} = \frac{Q_3 - 2M_d + Q_1}{Q_3 - Q_1}, \quad (2.10)$$

em que  $Q_1$  e  $Q_3$  são o primeiro e o terceiro quartis, respectivamente, da distribuição, Yule (1912) e Bowley (1920).

O Coeficiente Quantil é conhecido como Coeficiente de assimetria de Bowley.

Podemos utilizar também o Coeficiente Centílico, conhecido como Coeficiente de Assimetria de Kelley dado por

$$A_s^{(K)} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}}, \quad (2.11)$$

em que  $P_{10}$ ,  $P_{50}$  e  $P_{90}$  são o décimo, quinquagésimo e nonésimo percentis, respectivamente, da distribuição, Kelley (1924).

Outra medida de verificação de assimetria é o Coeficiente do Momento de Assimetria ou Coeficiente de Assimetria de Fisher. Esta medida utiliza o 3º Momento Centrado na

Média, expresso sob a forma não dimensional, e definido por

$$A_s^{(F)} = \frac{m_3(\mu)}{\sigma^3}, \quad (2.12)$$

em que  $m_3(\mu)$  é o terceiro momento central e  $\sigma$  o desvio-padrão, respectivamente, da distribuição, Abramowitz (1972). Esse coeficiente é o mesmo que o definido por Groeneveld & Meeden (1984), já apresentado na Equação (2.5).

Uma medida de assimetria em termos da moda foi introduzida recentemente por Arnold & Groeneveld (1995). Os autores assumem nessa medida que a moda da distribuição existe e é única, e a definem como 1 menos 2 vezes a função distribuição acumulada à esquerda da moda, ou seja,

$$\gamma = 1 - 2F_X(M_o). \quad (2.13)$$

A medida satisfaz  $-1 < \gamma < 1$ , sendo que  $\gamma = 0$  significa que a distribuição é simétrica.

A escolha de qual coeficiente utilizar depende da dificuldade de se calcular as medidas estatísticas e do comportamento do conjunto de observações que se está analisando.

O Quadro 2.1 apresenta uma interpretação simples do resultado para os coeficientes de Pearson (1° e 2°), Bowley, Kelley e Fisher, e também para a medida de assimetria de Arnold & Groeneveld (1995).

**Quadro 2.1:** Interpretação do resultado.

Resultado	Distribuição
$A_s^{(*)} < 0$	Assimétrica à esquerda
$A_s^{(*)} = 0$	Simétrica
$A_s^{(*)} > 0$	Assimétrica à direita

(\*) indica os coeficientes de Pearson (1° e 2°), Bowley, Kelley e Fisher.

O resultado do 1° Coeficiente de Assimetria de Pearson também permite calcular o grau da assimetria de uma distribuição. Se o valor absoluto do resultado for  $|A_s^{(1P)}| < 0.15$  a assimetria da distribuição é considerada fraca, se  $0.15 \leq |A_s^{(1P)}| < 1$  a assimetria é considerada moderada, e se  $|A_s^{(1P)}| \geq 1$  a assimetria é considerada forte.

# Capítulo 3

## Distribuições assimétricas

Existem várias distribuições contínuas assimétricas, tais como, as distribuições, exponencial negativa, gama, log-normal, qui-quadrado e Weibull. A escolha de qual distribuição utilizar está relacionada ao comportamento da variável aleatória e ao intervalo em que a distribuição está definida.

Neste capítulo, fazemos uma breve descrição das distribuições assimétricas  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica. Estas distribuições estão definidas no intervalo  $(-\infty, +\infty)$ .

### 3.1 Distribuição $\alpha$ -estável

O termo *estável* se refere à característica das variáveis aleatórias que seguem uma distribuição  $\alpha$ -estável, manterem a igualdade em distribuição quando são somadas, ou seja, se somarmos variáveis aleatórias estáveis independentes, identicamente distribuídas (i.i.d.), com distribuição  $\alpha$ -estável, a variável aleatória que representar essa soma, também terá distribuição  $\alpha$ -estável. Em outras palavras, se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias estáveis i.i.d., então para todo  $n$  pertencente ao conjunto dos números naturais, temos

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n, \quad (3.1)$$

em que  $X$  também é uma variável aleatória com distribuição  $\alpha$ -estável, para qualquer constante  $c_n > 0$  e  $d_n \in \mathfrak{R}$ , e o símbolo  $\stackrel{d}{=}$  indica igualdade em distribuição. A Equação (3.1) é chamada de *estritamente estável* se  $d_n = 0$  para todo  $n$ , Nolan (2009).

A classe de distribuições que satisfaz a Equação (3.1) é descrita por quatro parâmetros  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ . O parâmetro  $\alpha$  é chamado de *indexador de estabilidade* ou *expoente característico*, ele define o *nível da intensidade local*, ou seja, o grau de concentração das observações em torno da média da distribuição;  $\alpha \in (0, 2]$ . O parâmetro  $\beta$  define a assimetria da distribuição, se  $\beta = 0$  a distribuição é simétrica, se  $\beta > 0$  a distribuição é assimétrica à direita, e se  $\beta < 0$  a distribuição é assimétrica à esquerda;  $\beta \in [-1, +1]$ . Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  determinam a forma da distribuição. O parâmetro  $\gamma$  define a dispersão ou a escala da distribuição;  $\gamma \geq 0$ , e o parâmetro  $\delta$  define a locação da distribuição;  $\delta \in (-\infty, +\infty)$ .

A distribuição  $\alpha$ -estável, em geral, não possui forma fechada para as expressões das funções densidades de probabilidade e acumulada, mas existem três casos particulares da distribuição  $\alpha$ -estável em que é possível escrever a expressão da função de densidade de probabilidade, são eles, as distribuições normal, de Cauchy e de Lévy, Nolan (2009).

Usando o *software R* (R 2.11.1, 2011), construímos a Figura 3.1, que mostra o comportamento da curva da função densidade de probabilidade de uma distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 0$ , e com (a)  $\beta = 0$  e  $\alpha$  assumindo os valores 0.5; 1; 1.5 e 2, e (b)  $\alpha = 1.5$  e  $\beta$  assumindo os valores -1; 0, 0.5 e 1.

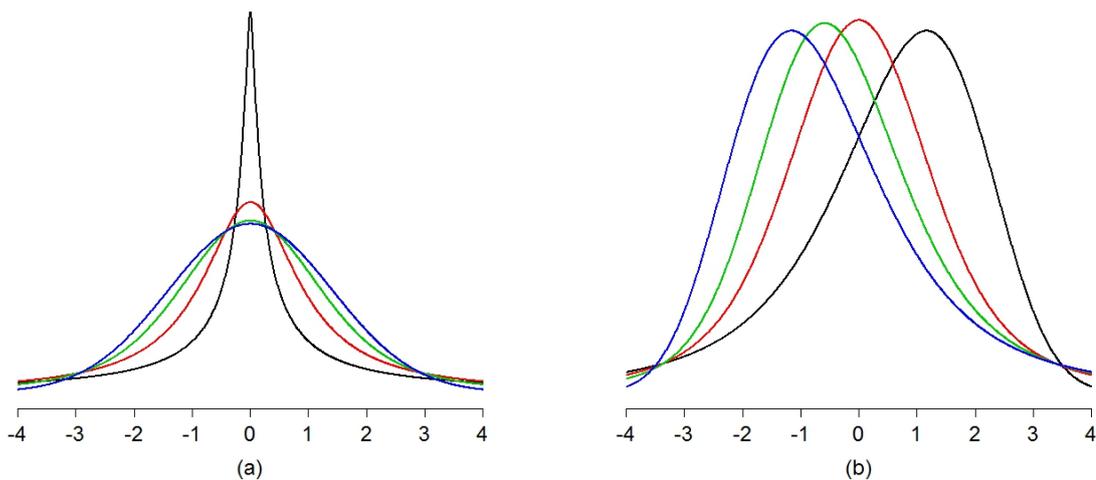


Figura 3.1: Densidades da distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 0$ , e (a)  $\beta = 0$ ;  $\alpha = 0.5$  (linha em preto),  $\alpha = 1$  (linha em vermelho),  $\alpha = 1.5$  (linha em verde),  $\alpha = 2$  (linha em azul), e (b)  $\alpha = 1.5$ ;  $\beta = -1$  (linha em preto),  $\beta = 0$  (linha em vermelho),  $\beta = 0.5$  (linha em verde),  $\beta = 1$  (linha em azul).

Observamos por meio da Figura 3.1(a), que o parâmetro  $\alpha$  controla a intensidade local, e por meio da Figura 3.1(b), que o parâmetro  $\beta$  controla a assimetria da distribuição. A Figura 3.1(a), também apresenta a densidade de uma distribuição normal (linha em azul), e a densidade de uma distribuição de Cauchy (linha em vermelho).

A distribuição  $\alpha$ -estável pode ser apresentada sob duas parametrizações denotadas por  $AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$  e  $AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1; 1)$ , as quais indicam que os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  tem a mesma interpretação, mas o parâmetro  $\delta$  tem interpretação diferente, Nolan (2009).

**Definição 3.1.** *Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição  $AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$  se sua função característica for dada por*

$$E[e^{itX}] = \begin{cases} e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \operatorname{sen}(t)(\gamma|t|^{1-\alpha} - 1)] + i\delta_0 t} & \text{para } (\alpha \neq 1), \\ e^{-\gamma |t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(t) \ln(\gamma|t|)] + i\delta_0 t} & \text{para } (\alpha = 1). \end{cases} \quad (3.2)$$

**Definição 3.2.** *Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição  $AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1; 1)$  se sua função característica for dada por*

$$E[e^{itX}] = \begin{cases} e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \operatorname{sen}(t)] + i\delta_1 t} & \text{para } (\alpha \neq 1), \\ e^{-\gamma |t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(t) \ln|t|] + i\delta_1 t} & \text{para } (\alpha = 1). \end{cases} \quad (3.3)$$

Os parâmetros de locação  $\delta_0$  e  $\delta_1$  são relacionados, e dados por

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_1 + \beta\gamma \tan(\frac{\pi\alpha}{2}), & (\alpha \neq 1), \\ \delta_1 + \beta \frac{2}{\pi} \gamma \ln(\gamma), & (\alpha = 1), \end{cases} \quad \delta_1 = \begin{cases} \delta_0 - \beta\gamma \tan(\frac{\pi\alpha}{2}), & (\alpha \neq 1), \\ \delta_0 - \beta \frac{2}{\pi} \gamma \ln(\gamma), & (\alpha = 1). \end{cases} \quad (3.4)$$

Se  $\beta = 0$  as parametrizações coincidem, quando  $\beta \neq 0$  e  $\alpha \neq 1$  as parametrizações diferem para + ou -  $\beta\gamma \tan(\frac{\pi\alpha}{2})$ , e quando  $\beta \neq 0$  e  $\alpha = 1$  as parametrizações diferem para + ou -  $\beta \frac{2}{\pi} \gamma \ln(\gamma)$ .

Um modelo  $AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$  possui função de distribuição contínua, para todos os quatro parâmetros, a parametrização  $AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$  é um modelo pertencente a uma família de distribuições de locação e escala para  $\alpha \in (0, 2]$ .

A moda de uma variável aleatória  $X \sim AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1; 1)$  tende para  $+\infty$  se  $[\operatorname{sen}(\alpha - 1)\beta] > 0$  ou tende para  $-\infty$  se  $\alpha \rightarrow 1$ . A parametrização  $AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1; 1)$  não possui função de distribuição contínua para  $\alpha = 1$ , Nolan (2009).

As distribuições normal, de Cauchy e de Lévy satisfazem a propriedade (3.1), conforme descrito em Nolan (2009). Podemos verificar que elas são casos particulares da distribuição  $\alpha$ -estável.

**Exemplo 3.1.** *Distribuição normal ou Gaussiana.* Uma variável aleatória é  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty \text{ e } \sigma^2 > 0. \quad (3.5)$$

A distribuição normal é uma distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 0$ , ou seja,  $N(\mu, \sigma^2) = AE(2, 0, \sigma/\sqrt{2}, \mu; 0)$  ou  $N(\mu, \sigma^2) = AE(2, 0, \sigma/\sqrt{2}, \mu; 1)$ .

Podemos verificar o Exemplo 3.1 substituindo os valores dos parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 0$  na Equação (3.2), ou na Equação (3.3), e então temos  $E[e^{itX}] = e^{-\gamma^2 t^2 + i\delta t}$ . Se alterarmos a notação dos parâmetros  $\gamma$  para  $\sigma/\sqrt{2}$ , e  $\delta$  para  $\mu$ , chegamos na função característica da distribuição normal.

**Exemplo 3.2.** *Distribuição de Cauchy.* Uma variável aleatória é  $X \sim Cauchy(\delta, \gamma)$  se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x; \delta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - \delta)^2}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < \gamma < \infty \text{ e } \delta > 0. \quad (3.6)$$

A distribuição de Cauchy é uma distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ , ou seja,  $Cauchy(\delta, \gamma) = AE(1, 0, \gamma, \delta; 0)$  ou  $Cauchy(\delta, \gamma) = AE(1, 0, \gamma, \delta; 1)$ .

Neste caso, verificamos o Exemplo 3.2 substituindo os valores dos parâmetros  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  na Equação (3.2), ou na Equação (3.3), obtemos  $E[e^{itX}] = e^{-\gamma|t| + i\delta t}$ , que é a função característica da distribuição de Cauchy.

**Exemplo 3.3.** *Distribuição de Lévy.* Uma variável aleatória é  $X \sim Lévy(\delta, \gamma)$  se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x; \delta, \gamma) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \delta)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2(x - \delta)} \right\}, \quad \delta < x < \infty, \delta > 0 \text{ e } \gamma > 0. \quad (3.7)$$

A distribuição de Lévy é uma distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\alpha = 1/2$  e  $\beta = 1$ , ou seja,  $Lévy(\delta, \gamma) = AE(1/2, 1, \gamma, \gamma + \delta; 0)$  ou  $Lévy(\delta, \gamma) = AE(1/2, 1, \gamma, \delta; 1)$ .

Também verificamos o Exemplo 3.3, substituindo os valores dos parâmetros  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 1$ , e  $\delta_0 = \gamma + \delta$  na Equação (3.2), e então temos  $E[e^{itX}] = e^{-\gamma^{1/2}|t|^{1/2}[1+i(\tan(\frac{\pi}{4}))(\text{sen}(t))(\gamma|t|^{1/2}-1)]+i(\gamma+\delta)t} = e^{i(\gamma+\delta)t - |\gamma t|^{1/2}[1-i(\text{sen}(t))+i(\text{sen}(t))|\gamma t|^{1/2}]}$ , ou substituindo  $\delta_1 = \delta$  na Equação (3.3), obtemos  $E[e^{itX}] = e^{-\gamma^{1/2}|t|^{1/2}[1-i(\tan(\frac{\pi}{4}))\text{sen}(t)]+i\delta t} = e^{i\delta t - |\gamma t|^{1/2}[1-i(\text{sen}(t))]}$ , que é a função característica da distribuição de Lévy.

Neste trabalho utilizamos a parametrização  $AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$ .

## 3.2 Distribuição normal assimétrica

A classe de distribuição normal assimétrica, introduzida por Azzalini (1985), é uma classe de distribuições de probabilidade contínuas que estende a distribuição normal permitindo a presença de assimetria. Sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_Z(z; \lambda) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z), \quad (3.8)$$

em que  $\phi(z)$  é a densidade de uma distribuição normal padrão e  $\Phi(\lambda z)$  é a função de distribuição acumulada em  $\lambda z$ , e  $\lambda \in \mathfrak{R}$  é o parâmetro de assimetria.

A distribuição normal pode ser recuperada na Equação (3.8) quando  $\lambda = 0$ . Quando  $\lambda > 0$  a distribuição é assimétrica à direita e quando  $\lambda < 0$  é assimétrica à esquerda.

Suponha uma variável aleatória  $Z$  com distribuição normal assimétrica com parâmetro  $\lambda$ , denotado por  $Z \sim NA(\lambda)$ . Algumas propriedades básicas da distribuição normal assimétrica, dadas por Azzalini (1985) são as seguintes

1.  $NA(0) = N(0, 1)$ ;
2. Se  $Z \sim NA(\lambda)$ , então  $-Z \sim NA(-\lambda)$ ;
3. Quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $Z \xrightarrow{d} |Y|$ , e quando  $\lambda \rightarrow -\infty$ ,  $Z \xrightarrow{d} -|Y|$ , em que  $Y \sim N(0, 1)$ ;
4. Se  $Z \sim NA(\lambda)$ , então  $Z^2 \sim \chi_1^2$ .

Para adicionar os parâmetros de locação e escala, utilizamos a transformação linear

$$X = \xi + \omega Z, \quad (3.9)$$

em que  $X$  é uma variável aleatória com distribuição normal assimétrica com parâmetros  $(\xi, \omega, \lambda)$ , ou seja,  $X \sim NA(\xi, \omega, \lambda)$ , e  $Z$  é uma variável aleatória com função densidade dada por (3.8).

A função densidade de probabilidade de  $X$  é dada por

$$f_X(x; \xi, \omega, \lambda) = \frac{2}{\omega} \phi\left(\frac{x - \xi}{\omega}\right) \Phi\left(\lambda \left(\frac{x - \xi}{\omega}\right)\right), \quad (3.10)$$

em que  $\xi$  é o parâmetro de locação,  $\xi \in (-\infty, +\infty)$ ;  $\omega$  é o parâmetro de escala,  $\omega > 0$ ;  $\lambda$  é o parâmetro de forma,  $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ , também denominado parâmetro de assimetria, a assimetria da distribuição é limitada no intervalo  $(-1, 1)$ .

A Expressão (3.10) pode ser reescrita como

$$f_X(x; \xi, \omega, \lambda) = \frac{1}{\omega\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \xi}{\omega} \right)^2 \right\} \int_{-\infty}^{\lambda \left( \frac{x - \xi}{\omega} \right)} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} dt. \quad (3.11)$$

Usando o *software R* (R 2.11.1, 2011), construímos a Figura 3.2, que mostra o comportamento da função densidade de probabilidade de uma distribuição normal assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ , e com (a)  $\lambda = 1$  e  $\omega$  assumindo os valores 0.5; 1.0; 1.5 e 2.0, e (b)  $\omega = 1$  e  $\lambda$  assumindo os valores -1.0; 0.0; 0.5 e 1.0.

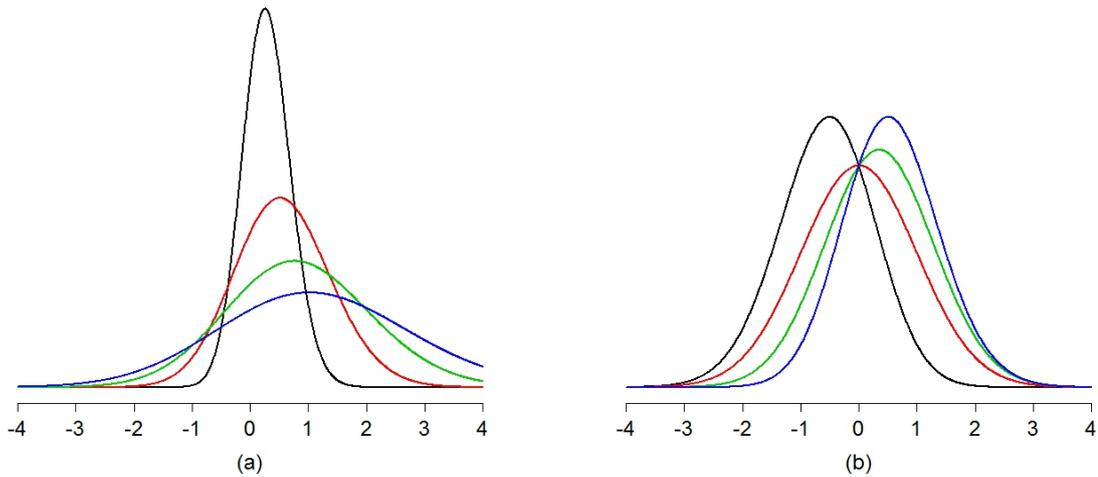


Figura 3.2: Densidades da distribuição normal assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ , e (a)  $\lambda = 1$ ;  $\omega = 0.5$  (linha em preto),  $\omega = 1$  (linha em vermelho),  $\omega = 1.5$  (linha em verde),  $\omega = 2$  (linha em azul), e (b)  $\omega = 1$ ;  $\lambda = -1$  (linha em preto),  $\lambda = 0$  (linha em vermelho),  $\lambda = 0.5$  (linha em verde),  $\lambda = 1$  (linha em azul).

Observamos, por meio da Figura 3.2(a), que o parâmetro  $\omega$  controla a dispersão, e, por meio da Figura 3.2(b), que o parâmetro  $\lambda$  controla a assimetria da distribuição. A Figura 3.2(b), também apresenta a densidade de uma distribuição normal (linha em vermelho).

**Exemplo 3.4.** *A distribuição normal com função densidade de probabilidade dada em (3.5) é um caso particular da distribuição normal assimétrica com parâmetros  $\lambda = 0$ , ou seja,  $N(\mu, \sigma^2) = NA(\xi, \omega, 0)$ .*

Verificamos o Exemplo 3.4, substituindo o parâmetro  $\lambda = 0$  na Equação (3.11), e então a nova função densidade será

$$f_X(x; \xi, \omega, 0) = \frac{1}{\omega\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \xi}{\omega} \right)^2 \right\} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} dt, \quad (3.12)$$

resolvendo a integral da Equação (3.12), e mudando os parâmetros  $\xi$  para  $\mu$  e  $\omega$  para  $\sigma$ , chegamos à função densidade de uma distribuição normal dada em (3.5).

### Medidas características da distribuição normal assimétrica

Suponha  $X$  uma variável aleatória com distribuição  $NA(\xi, \omega, \lambda)$ , a esperança de  $X$  é dada por

$$E[X] = \xi + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta(\lambda), \quad (3.13)$$

a variância de  $X$  é

$$Var[X] = \omega^2 \left( 1 - \frac{2\delta^2(\lambda)}{\pi} \right). \quad (3.14)$$

em que  $\delta(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ , e

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{2}(4-\pi)\lambda^3}{\{\pi + (\pi-2)\lambda^2\}^{3/2}}, \quad \gamma_2 = 3 + \frac{8(\pi-3)\lambda^4}{\{\pi + (\pi-2)\lambda^2\}^2} \quad (3.15)$$

são os coeficientes de assimetria e curtose, respectivamente, Lin *et al.* (2007).

### 3.3 Distribuição $t$ de Student assimétrica

A distribuição  $t$  de Student assimétrica é uma extensão da distribuição normal assimétrica. A classe de distribuição  $t$  de Student assimétrica é uma classe de probabilidade contínua com a presença de assimetria, e sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_Z(z; \lambda) = 2t_\nu(z)T(\lambda z), \quad (3.16)$$

em que  $t_\nu(z)$  é a densidade de uma distribuição  $t$  de Student com  $\nu$  graus de liberdade e  $T(\lambda z)$  é a função de distribuição acumulada de  $\lambda z$ , e  $\lambda \in \Re$  é o parâmetro de assimetria (Azzalini & Capitanio (2003))

Podemos recuperar a distribuição  $t$  de Student em (3.16) quando  $\lambda=0$ .

A distribuição  $t$  de Student assimétrica surge como uma mistura no inverso da escala de uma distribuição normal assimétrica com uma distribuição gama.

**Lema 3.1.** *Se uma variável aleatória  $V \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$ , então para qualquer  $a, b \in \Re$*

$$E \left( \Phi \left( a\sqrt{V} + b \right) \right) = P \left( T \leq a\sqrt{\alpha/\beta} \right), \quad (3.17)$$

em que  $T$  possui distribuição  $t$  de Student não centrada com  $2\alpha$  graus de liberdade e parâmetro de posição  $-b$ .

**Lema 3.2.** *Se uma variável aleatória  $X|V \sim NA(0, 1, \lambda)$  e  $V \sim Gama(\nu/2, \nu/2)$ , então a variável aleatória  $X$  tem função densidade dada por*

$$f_X(x; \lambda) = 2t_\nu(x)T_{\nu+1}\left(\lambda x \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+x^2}}\right), \quad (3.18)$$

em que  $t_\nu(\cdot)$  e  $T_{\nu+1}(\cdot)$  denotam a função densidade de probabilidade e a função de distribuição acumulada, respectivamente, de uma distribuição  $t$  de Student com  $\nu$  e  $\nu+1$  graus de liberdade.

**Definição 3.3.** *Se uma variável aleatória  $X$  tem função densidade de probabilidade dada por*

$$f_X(x; \xi, \omega, \lambda) = \frac{2}{\omega} t_\nu(y) T_{\nu+1}\left(\lambda y \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+y^2}}\right), \quad \text{com } y = \frac{x-\xi}{\omega} \text{ e } y \in \mathfrak{R}, \quad (3.19)$$

então dizemos que  $X$  tem distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetros  $(\xi, \omega, \lambda, \nu)$ , ou seja,  $X \sim TA_\nu(\xi, \omega, \lambda)$ . Neste caso,  $\xi$  é o parâmetro de localização,  $\xi \in (-\infty, +\infty)$ ;  $\omega$  é o parâmetro de escala,  $\omega > 0$ ;  $\lambda$  é o parâmetro de assimetria,  $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ ; e  $\nu$  são os graus de liberdade,  $\nu \geq 1$ .

Algumas propriedades da distribuição  $t$  de Student assimétrica, dadas por Azzalini & Capitanio (2003) são as seguintes

1.  $TA_\nu(0) = T_\nu(0, 1)$ .
2. Quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $TA_\nu(\lambda)$  tende para uma densidade  $t$  de Student truncada.
3. Se  $Z \sim TA_\nu(\lambda)$ , então  $\xi + \omega Z \sim TA_\nu(\xi, \omega, \lambda)$ .

Usando o *software R* (R 2.11.1, 2011), construímos a Figura 3.3, que mostra o comportamento da função densidade de probabilidade de uma distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 1$ , e com (a)  $\lambda = 2$  e  $\nu$  assumindo os valores 1; 2; 3 e 10, e (b)  $\nu = 3$  e  $\lambda$  assumindo os valores 0; 0.5; 1.0 e 2.0.

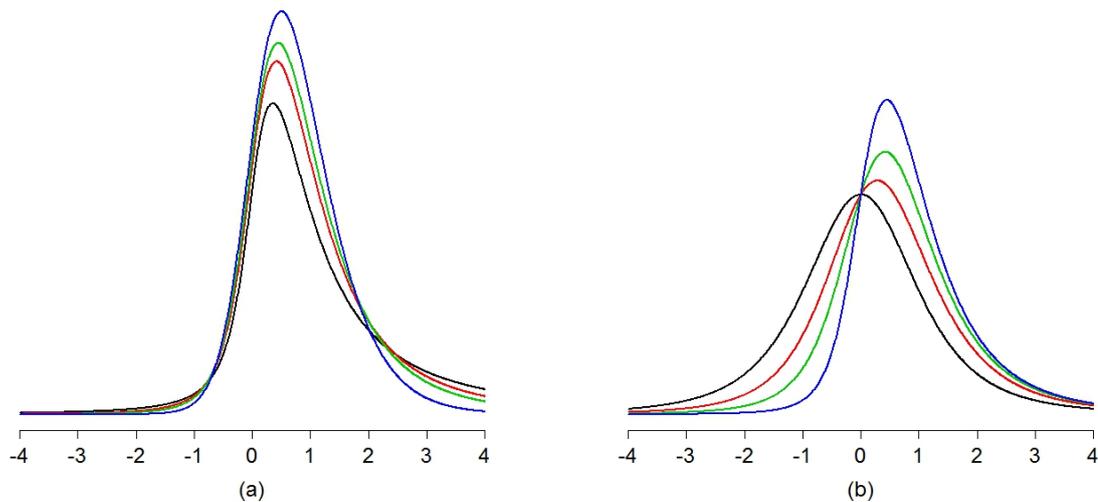


Figura 3.3: Densidades da distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 1$ , e (a)  $\lambda = 2$ ;  $\nu = 1$  (linha em preto),  $\nu = 2$  (linha em vermelho),  $\nu = 3$  (linha em verde),  $\nu = 10$  (linha em azul), e (b)  $\nu = 3$ ;  $\lambda = 0$  (linha em preto),  $\lambda = 0.5$  (linha em vermelho),  $\lambda = 1$  (linha em verde),  $\lambda = 2$  (linha em azul).

Observamos, por meio da Figura 3.3(a), que o parâmetro  $\nu$  controla a dispersão, e por meio da Figura 3.3(b), que e o parâmetro  $\lambda$  controla a assimetria da distribuição. A Figura 3.3(b), também apresenta a densidade de uma distribuição  $t$  de Student com três graus de liberdade (linha em vermelho).

As distribuições normal assimétrica, normal (casos limite) e de Cauchy também são casos particulares da  $t$  de Student assimétrica.

Fazendo os graus de liberdade  $\nu$  da variável aleatória  $X$  dada em (3.18), tender para o infinito, ou seja, se o  $\nu \rightarrow \infty$ , então a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição normal assimétrica, como dada em (3.8).

Novamente, fazendo os graus de liberdade  $\nu$  da variável aleatória  $X$  dada em (3.18), tender para o infinito,  $\nu \rightarrow \infty$ , temos a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição normal assimétrica, como dada em (3.8), e se o parâmetro  $\lambda$  for igual à 0 (*zero*) em (3.8), então temos que a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição normal.

Tomando o parâmetro de assimetria  $\lambda$  da variável aleatória  $X$  com função densidade dada em (3.18) igual à 0 (*zero*), chegamos numa distribuição  $t$  de Student simétrica, e fazendo os graus de liberdade  $\nu$  de uma variável aleatória  $X$  com distribuição  $t$  de Student simétrica igual a 1, de acordo com Mood *et al.*, (1974), essa variável aleatória  $X$  terá distribuição de Cauchy.

### Medidas características da distribuição $t$ de Student assimétrica

Suponha  $X$  uma variável aleatória com distribuição  $TA_\nu(\xi, \omega, \lambda)$ , a esperança de  $X$  é dada por

$$E[X] = \xi + \frac{\lambda\omega}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad \text{com } \nu > 1, \quad (3.20)$$

a variância de  $X$  é

$$Var[X] = \omega^2 \left[ \frac{\nu}{\nu-2} - \frac{\nu}{\pi} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right], \quad \text{com } \nu > 2, \quad (3.21)$$

e

$$\gamma_1 = \eta \left[ \frac{\nu(3-\delta^2)}{\nu-3} - \frac{3\nu}{\nu-2} + 2\eta^2 \right] \left[ \frac{\nu}{\nu-2} - \eta^2 \right]^{-3/2}, \quad \text{com } \nu > 3, \quad (3.22)$$

em que  $\gamma_1$  é o coeficiente de assimetria, sendo que  $\eta = (\nu/\pi)^{1/2} \Gamma((\nu-1)/2) \Gamma^{-1}(\nu/2) \delta$  e  $\delta = \lambda(1+\lambda^2)^{-1/2}$ , (Azzalini & Capitanio, (2003)).

### O método de Fernández *et al.*, (1995) para obter distribuições assimétricas

Um método para transformar uma distribuição simétrica em assimétrica é proposto por Fernández *et al.*, (1995). Os autores consideram uma função densidade de probabilidade  $f(\cdot)$  de uma distribuição unimodal e simétrica com relação a 0 (zero), ou seja, que a  $f(x) = f(|x|)$ . Em seguida a distribuição assimétrica é indexada por um escalar  $\lambda > 0$ .

A função densidade desta nova distribuição é dada por

$$f_X(x; \lambda) = \frac{2}{\lambda + \frac{1}{\lambda}} \begin{cases} f(\lambda x), & \text{para } x < 0, \\ f\left(\frac{x}{\lambda}\right), & \text{para } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

em que  $\lambda$  é o parâmetro de assimetria e  $f_X(x)$  é a densidade de uma distribuição simétrica.

Tomando como  $f_X(x)$  a densidade de uma distribuição  $t$  de Student com  $\nu$  graus de liberdade, Fernández & Steel (1998) escrevem a Equação (3.23)

$$f_X(x; \lambda, \nu) = \frac{2}{\lambda + \frac{1}{\lambda}} \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2\lambda^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}, & \text{para } x < 0, \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\lambda^2\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}, & \text{para } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

em que  $\Gamma$  é a função matemática Gama. Podemos observar que a distribuição  $t$  de Student simétrica pode ser recuperada em (3.24) quando  $\lambda$  é igual a 1. Então, para uma variável aleatória  $X$  com uma função densidade dada por (3.24) é representada por  $X \sim TA_\nu(\lambda)$ , e dizemos que  $X$  tem distribuição  $t$  de Student assimétrica com  $\nu$  graus de liberdade.

Para adicionar os parâmetros de locação e escala, tomamos uma variável aleatória  $X$  com distribuição  $t$  de Student assimétrica, ou seja,  $X \sim TA_\nu(\xi, \omega, \lambda)$ , em que  $\xi$  é o parâmetro de locação,  $\xi \in (-\infty, +\infty)$ ;  $\omega$  é o parâmetro de escala,  $\omega > 0$ ;  $\lambda$  é o parâmetro de assimetria,  $\lambda > 0$ ; e  $\nu$  os graus de liberdade,  $\nu \geq 1$ ; com a seguinte representação

$$X = \xi + \omega \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}}, \quad (3.25)$$

em que  $\frac{Z}{\sqrt{U/\nu}} \sim TA_\nu(\lambda)$ ,  $Z \sim NA(\lambda)$ ,  $U \sim \chi_\nu^2$ , e  $Z$  é independente de  $U$ .  $TA_\nu(\lambda)$  representa uma distribuição  $t$  de Student assimétrica, com função densidade dada em (3.24),  $NA(\lambda)$  representa uma distribuição normal assimétrica, com função densidade dada em (3.8), com  $z \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\chi_\nu^2$  representa uma distribuição Qui-quadrado, com função densidade dada por  $f_U(u; \nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu/2} u^{\nu/2-1} e^{-\frac{1}{2}u}$ , para  $u > 0$ , em que  $\nu$  são os graus de liberdade da distribuição;  $\nu > 0$ .

**Exemplo 3.5.** *Distribuição  $t$  de Student.* Uma variável aleatória é  $X \sim t_\nu$  se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}, \quad -\infty < x < \infty \text{ e } \nu > 0. \quad (3.26)$$

A distribuição  $t$  de Student simétrica é uma distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetro  $\lambda = 1$ , ou seja,  $t_\nu = TA_\nu(1)$  ou podemos escrever  $T_\nu(\xi, \omega) = TA_\nu(\xi, \omega, 1)$ .

Podemos verificar o Exemplo 3.5 substituindo o parâmetro  $\lambda = 1$  na Equação (3.24), e então podemos recuperar a distribuição  $t$  de Student com  $\nu$  graus de liberdade.

$$f_X(x; 1, \nu) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}, & \text{para } x < 0, \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}, & \text{para } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

rearranjando a função dada em (3.27) chegamos na função densidade de uma distribuição  $t$  de Student com  $\nu$  graus de liberdade (3.26).

## 3.4 Distribuição Laplace assimétrica

A distribuição Laplace assimétrica é obtida por meio da conversão de uma distribuição simétrica de Laplace em uma função densidade assimétrica, como descrito em Kotz *et al.* (2001). Essa distribuição é uma distribuição de probabilidade contínua com

três parâmetros  $(\xi, \omega, \lambda)$  e sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x; \xi, \omega, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\omega} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\lambda}{\omega}(x - \xi)\right), & \text{para } x \geq \xi, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega\lambda}(x - \xi)\right), & \text{para } x < \xi, \end{cases} \quad (3.28)$$

em que  $\xi$  é o parâmetro de localização,  $\xi \in (-\infty, +\infty)$ ;  $\omega$  é o parâmetro de escala,  $\omega > 0$ ; e  $\lambda$  é o parâmetro de assimetria,  $\lambda > 0$ . A notação utilizada para essa distribuição é  $LA(\xi, \omega, \lambda)$ .

A distribuição simétrica de Laplace ou distribuição Exponencial dupla, é um caso particular da distribuição Laplace assimétrica quando  $\lambda = 1$ .

**Exemplo 3.6.** *Distribuição de Laplace.* Uma variável aleatória é  $X \sim L(\xi, \omega)$  se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\omega}|x - \xi|\right\}, \quad \text{para } -\infty < x < \infty. \quad (3.29)$$

A distribuição de Laplace é uma distribuição Laplace assimétrica com parâmetro  $\lambda = 1$ , ou seja,  $L(\xi, \omega) = LA(\xi, \omega, 1)$ .

Podemos fazer a verificação do Exemplo 3.6 substituindo o parâmetro  $\lambda = 1$  na Equação (3.28)

$$f_X(x; \xi, \omega, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2\omega} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\omega}(x - \xi)\right), & \text{para } x \geq \xi, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega}(x - \xi)\right), & \text{para } x < \xi, \end{cases} \quad (3.30)$$

rearranjando a função dada em (3.30) chegamos na função densidade da distribuição de Laplace (3.29).

Usando o *software R* (R 2.11.1, 2011), construímos a Figura 3.4, que mostra o comportamento da função densidade de probabilidade de uma distribuição Laplace assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ , e com (a)  $\lambda = 2$  e  $\omega$  assumindo os valores 0.5; 1.0; 1.5 e 2.0, e (b)  $\omega = 1$  e  $\lambda$  assumindo os valores 0.5; 1.0; 1.5 e 2.0.

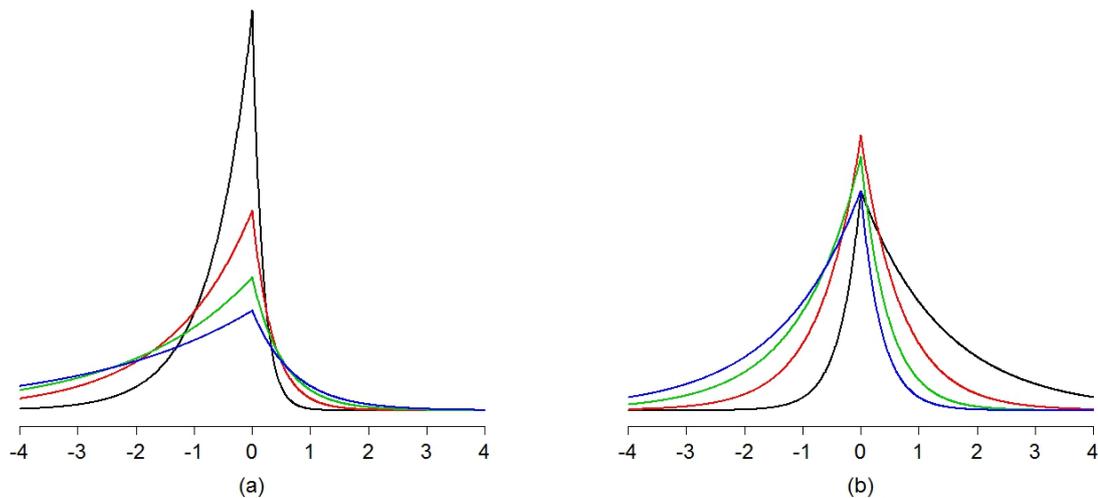


Figura 3.4: Densidades da distribuição Laplace assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ , e (a)  $\lambda = 2$ ;  $\omega = 0.5$  (linha em preto),  $\omega = 1$  (linha em vermelho),  $\omega = 1.5$  (linha em verde),  $\omega = 2$  (linha em azul), e (b)  $\omega = 1$ ;  $\lambda = 0.5$  (linha em preto),  $\lambda = 1$  (linha em vermelho),  $\lambda = 1.5$  (linha em verde),  $\lambda = 2$  (linha em azul).

Observamos por meio da Figura 3.3(a), que o parâmetro  $\omega$  controla a dispersão, e por meio da Figura 3.4(b), que e o parâmetro  $\lambda$  controla a assimetria da distribuição. A Figura 3.4(b), também apresenta a densidade de uma distribuição simétrica de Laplace (linha em vermelho).

### Medidas características da distribuição Laplace assimétrica

Suponha  $X$  uma variável aleatória com distribuição  $LA(\xi, \omega, \lambda)$ , a esperança de  $X$  é dada por

$$E[X] = \xi + \frac{\omega}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right), \quad (3.31)$$

a variância de  $X$  é

$$Var[X] = \frac{\omega^2}{2} \left( \frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 \right), \quad (3.32)$$

e

$$\gamma_1 = 2 \frac{1/\lambda^3 - \lambda^3}{(1/\lambda^2 + \lambda^2)^{3/2}}, \quad \gamma_2 = 6 - \frac{12}{(1/\lambda^2 + \lambda^2)^2} \quad (3.33)$$

são os coeficientes de assimetria e curtose, respectivamente, Kotz *et. al* (2001).

## 3.5 Casos particulares das distribuições

Podemos observar que algumas distribuições simétricas são casos particulares das distribuições desse estudo, como, por exemplo, a distribuição normal é um caso particular da distribuição  $\alpha$ -estável, da distribuição normal assimétrica e da distribuição  $t$  de Student assimétrica. O Quadro 3.1 apresenta os casos particulares encontrados.

**Quadro 3.1:** Casos particulares das distribuições em estudo.

Distribuições	$\alpha$ -estável	normal assimétrica	$t$ de Student assimétrica	Laplace assimétrica
	$AE(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 1)$	$NA(\xi, \omega, \lambda)$	$TA_\nu(\xi, \omega, \lambda)$	$LA(\xi, \omega, \lambda)$
Cauchy	$AE(1, 0, \gamma, \delta; 1)$	-	$TA_1(\xi, \omega, 0)^1$	-
Laplace	-	-	-	$LA(\xi, \omega, 1)$
Lévy	$AE(1/2, 1, \gamma, \gamma + \delta; 1)$	-	-	-
normal	$AE(2, 0, \sigma/\sqrt{2}, 0; 1)$	$NA(\xi, \omega, 0)$	$TA_\infty(\xi, \omega, 0)^2$	-
normal assimétrica	-	*	$TA_\infty(\xi, \omega, \lambda)^3$	-
$t$ de Student	-	-	$TA_\nu(\xi, \omega, 0)$	-

<sup>1</sup> A distribuição  $t$  de Student assimétrica é uma distribuição de Cauchy quando  $\lambda = 0$  e  $\nu = 1$ .

<sup>2</sup> A distribuição  $t$  de Student assimétrica é uma distribuição normal quando  $\lambda = 0$  e  $\nu \rightarrow \infty$ .

<sup>3</sup> A distribuição  $t$  de Student assimétrica é uma distribuição normal assimétrica quando  $\lambda = \lambda$  e  $\nu \rightarrow \infty$ .

# Capítulo 4

## Estudo de simulação

Neste capítulo descrevemos o método utilizado no estudo de simulação para estimar os parâmetros, e calcular os correspondentes erros padrão, os erros quadráticos médios, os vieses dos estimadores, os intervalos de confiança e os testes de significância para os parâmetros. Além disso, também apresentamos uma breve descrição dos critérios de seleção de modelos, o *software* e as funções utilizadas neste estudo.

### 4.1 Inferências para os parâmetros

Neste estudo de simulação, estimamos os parâmetros das distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica, utilizando o método de máxima verossimilhança, conforme é descrito em Mood *et al.*, (1974) e Bickel & Doksum (1977).

Sabemos que o método de máxima verossimilhança consiste em encontrar o valor  $\hat{\theta}$  que torne máxima a função de verossimilhança. Em nosso caso  $\hat{\theta}$  é um vetor das estimativas de máxima verossimilhança (*EMV*) de  $\theta$ , que, por sua vez é o vetor de parâmetros da distribuição em estudo.

A função de verossimilhança  $L(\theta, x)$  pode ser escrita como  $L(\theta, x) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$ , em que  $f(x_i, \theta)$  é a distribuição de probabilidade de  $X_i$ , e  $X_1, \dots, X_n$  é uma amostra aleatória desta distribuição.

Aplicamos o logaritmo na função de verossimilhança como um artifício para facilitar o desenvolvimento analítico, visando determinar os estimadores, pois o máximo da função de verossimilhança e o máximo do seu logaritmo, ocorrem no mesmo ponto, ou seja,

$$l(\boldsymbol{\theta}, x) = \log(L(\boldsymbol{\theta}, x)).$$

Se  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  existe, ele deve satisfazer o sistema de equações de verossimilhança, dado por

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} l(\hat{\boldsymbol{\theta}}, x) = 0, \quad \text{com } i = 1, \dots, k, \quad (4.1)$$

em que  $k$  é o número de parâmetros da distribuição e a matriz Hessiana dever ser negativa definida.

Como os nossos modelos são complexos, por exemplo, o da distribuição  $\alpha$ -estável que não possui uma forma fechada para sua função densidade de probabilidade, como já descrito no Capítulo 3, item 3.1, então torna-se necessário utilizar procedimentos numéricos para a obtenção da solução do sistema das  $k$  equações de verossimilhança.

Para a obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança por um procedimento numérico, utilizamos a função escore de  $X$  dada por

$$U(X; \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} l(\hat{\boldsymbol{\theta}}, x). \quad (4.2)$$

Se  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é o vetor de EMV de  $\boldsymbol{\theta}$ , então  $U(X; \hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$ .

Essa função escore  $U(X; \hat{\boldsymbol{\theta}})$  é expandida em série de Taylor em torno de  $\boldsymbol{\theta}_0$  (vetor de valores iniciais no processo iterativo),

$$0 = U(X; \hat{\boldsymbol{\theta}}) = U(X; \boldsymbol{\theta}_0) + (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) U'(X; \boldsymbol{\theta}_0) + \dots, \quad (4.3)$$

e em seguida, desprezando os termos de ordem mais alta, determinamos os valores de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\boldsymbol{\theta}_0$  que sejam considerados, por algum critério, próximos. Isto é

$$0 = U(X; \hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx U(X; \boldsymbol{\theta}_0) + (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0) U'(X; \boldsymbol{\theta}_0), \quad (4.4)$$

e isolando  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , na Equação (4.4), obtemos

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \approx \boldsymbol{\theta}_0 - U(X; \boldsymbol{\theta}_0) [U']^{-1}(X; \boldsymbol{\theta}_0) = \boldsymbol{\theta}_0 + U(X; \boldsymbol{\theta}_0) I^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0), \quad (4.5)$$

em que  $I(\boldsymbol{\theta}_0)$  representa a inversa da matriz de informação esperada de Fisher, que é igual à  $-U'(X; \boldsymbol{\theta}_0)$ .

Assim, tomando um vetor de valores iniciais  $\boldsymbol{\theta}_0$  e usando o processo iterativo

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(j+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(j)} + U(X; \boldsymbol{\theta}^{(j)}) I^{-1}(\boldsymbol{\theta}^{(j)}), \quad (4.6)$$

repetidamente até que o processo se estabilize segundo um critério de convergência, que pode ser  $|\boldsymbol{\theta}^{(j+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(j)}| < \epsilon$ , com  $\epsilon$  sendo um número pequeno arbitrário, igual a  $10^{-4}$ , por exemplo.

Calculamos os correspondentes erros padrão das *EMV*, utilizando a matriz de informação esperada de Fisher,  $I(\boldsymbol{\theta}_0)$ . Tomando o inverso da matriz de informação esperada de Fisher,  $[I(\boldsymbol{\theta}_0)]^{-1}$ , temos na sua diagonal principal os valores  $s_{ii}$ , que são os correspondentes erros padrão dos  $\hat{\theta}_i$ .

Também calculamos os erros quadráticos médios estimados,  $E\hat{Q}M[\theta_i]$ , utilizando a equação

$$E\hat{Q}M[\theta_i] = Var[\hat{\theta}_i] + [\hat{B}(\theta_i, \hat{\theta}_i)]^2, \quad (4.7)$$

em que  $Var[\hat{\theta}_i]$  é a variância das *EMV*, calculada tomando o quadrado dos correspondentes erros padrão das *EMV*, ou seja,  $(s_{ii})^2$ , e  $\hat{B}(\theta_i, \hat{\theta}_i)$  é o viés estimado, calculado por

$$\hat{B}(\theta_i, \hat{\theta}_i) = E[\hat{\theta}_i] - \theta_i, \quad (4.8)$$

em que  $E[\hat{\theta}_i]$  é a esperança dos estimadores dos parâmetros, ou seja, a estimativa do verdadeiro valor do parâmetro, calculada pelo processo iterativo descrito acima, ou seja,  $E[\hat{\theta}_i] = \theta_i$ .

Além da estimação pontual, calculamos os intervalos de confiança assintóticos com um coeficiente de 95% de confiança, para o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  das distribuições, utilizando a expressão

$$\hat{\theta}_i \pm 1.96\sqrt{s_{ii}}, \quad (4.9)$$

em que  $s_{ii}$  são os correspondentes erros padrão das *EMV*.

Os teste de significância dos parâmetros das distribuições foram calculados utilizando a seguinte estatística teste

$$z = \frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\sqrt{Var(\hat{\theta}_i)}}, \quad (4.10)$$

sendo que quando  $n \rightarrow \infty$ , a estatística teste  $z$  converge para uma distribuição normal padrão, ou seja,  $z \sim N(0, 1)$ .

## 4.2 Critérios de seleção de modelos

Neste estudo de simulação, utilizamos os critérios de seleção de modelos de *AIC* e *BIC*, para selecionar o melhor modelo, dentre os modelos em estudo.

O Critério de Informação de Akaike (*AIC*) admite que um modelo “verdadeiro”, ou seja, um modelo com a verdadeira distribuição dos dados é desconhecido, e que dentre

os modelos que estão sendo avaliados, nenhum é considerado o que realmente descreve a variável em estudo, Akaike (1974).

O *AIC* tenta escolher dentre os modelos que estão sendo avaliados, aquele que minimize a divergência de Kullback-Leibler (*KL*).

A divergência de *KL* é a distância entre dois modelos probabilísticos, ou entre duas distribuições de probabilidade. Em outras palavras, a divergência de *KL* é o valor esperado do logaritmo da razão das densidades dos modelos que estão sendo testados, ou seja, uma integral das diferenças entre as densidades, na escala logarítma em todo espaço em que a variável aleatória  $X$  está definida, ponderada por uma distribuição  $f_X(x)$ .

A divergência de *KL*, conforme Kullback & Leibler (1951) e Kullback (1968), é dada por

$$D_{KL}(f_X(x)||g_X(x;\boldsymbol{\theta})) = I(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log \left( \frac{f_X(x)}{g_X(x;\boldsymbol{\theta})} \right) dx, \quad (4.11)$$

em que  $f_X(x)$  é a função densidade do modelo “verdadeiro”,  $g_X(x;\boldsymbol{\theta})$  é a função densidade do modelo proposto, e  $\boldsymbol{\theta}$  é o vetor de parâmetros.

Reescrevendo a Equação (4.11), temos

$$I(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log [f_X(x)] dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \log [g_X(x;\boldsymbol{\theta})] dx. \quad (4.12)$$

Se pensarmos em termos de esperança, a Equação (4.12) pode ser escrita como

$$I(f, g) = E_f [\log [f_X(x)]] - E_f [\log [g_X(x;\boldsymbol{\theta})]], \quad (4.13)$$

com a esperança sendo tomada em relação ao modelo “verdadeiro” ( $f_X(x)$ ).

O primeiro termo da Equação (4.13) será sempre uma constante, ou seja,  $E_f [\log [f_X(x)]] = C$ , pois depende do modelo “verdadeiro”. Substituindo essa constante em (4.13) temos

$$I(f, g) - C = -E_f [\log [g_X(x;\boldsymbol{\theta})]]. \quad (4.14)$$

Como não conhecemos o modelo “verdadeiro” e os valores do vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  do modelo proposto  $g_X(x;\boldsymbol{\theta})$ , não temos como calcular o valor da expressão (4.14).

Uma estratégia é estimar o comportamento do modelo “verdadeiro” utilizando uma amostra grande, ou seja,  $E_f [\log [g_X(x;\boldsymbol{\theta})]] \approx E_x [\log [g_X(x;\boldsymbol{\theta})]]$ , que é a log-verossimilhança do modelo com relação à amostra ( $x$ ), então  $E_x [\log [g_X(x;\boldsymbol{\theta})]] = \log \{L [g_X(\boldsymbol{\theta}|x)]\}$ .

Se a amostra ( $x$ ) for suficientemente grande, e as estimativas ( $\hat{\theta}$ ) do vetor de parâmetros forem consistentes, então  $E_x [\log [g_X(x; \theta)]] \approx E_x [\log [g_X(x; \hat{\theta})]]$ .

Se as estimativas ( $\hat{\theta}$ ) dos parâmetros forem as estimativas de máxima verossimilhança (*EMV*), essa esperança é a máxima log-verossimilhança do modelo na amostra, ou seja,  $E_x [\log [g_X(x; \theta)]] = \log \left\{ L [g_X(\hat{\theta}|x)] \right\}$ , em que  $\hat{\theta}$  é o vetor de *EMV*.

Portanto, a Equação (4.14) pode ser escrita como

$$I(f, g) - C \approx -\log \left\{ L [g_X(\hat{\theta}|x)] \right\}, \quad (4.15)$$

isto é, a máxima log-verossimilhança é a estimativa da menor distância relativa possível para o modelo proposto. Ela engloba duas divergências, a divergência de aproximação entre o modelo “verdadeiro” e o modelo proposto e a divergência de estimação entre os valores dos parâmetros e as estimativas de máxima verossimilhança.

Akaike (1974), percebeu que quando a amostra que representava o modelo “verdadeiro” e a amostra utilizada para estimar os parâmetros, eram a mesma amostra, a máxima log-verossimilhança era uma estimativa viesada, e o viés era positivo e proporcional ao número  $k$  de parâmetros do modelo. Então uma estimativa corrigida é

$$\log \left\{ L [g_X(\hat{\theta}|x)] \right\} - k, \quad (4.16)$$

logo a estimativa do critério de informação de Akaike, mais conhecido como Critério de Informação de Akaike - *AIC* é dado por

$$\hat{AIC} = -2\log \left\{ L [g_X(\hat{\theta}|x)] \right\} + 2k, \quad (4.17)$$

em que  $\log \left\{ L [g_X(\hat{\theta}|x)] \right\}$  é o logaritmo da função de verossimilhança do modelo proposto com vetor de parâmetros  $\theta$ , e  $k$  é o número de parâmetros.

O modelo com menor valor de *AIC* é o modelo que melhor se ajusta aos dados.

Já o critério Bayesiano de Schwarz (*BIC*) tem como pressuposto a existência de um modelo “verdadeiro” que descreve a variável aleatória em estudo, dentre os diversos modelos sob seleção, Schwarz (1978).

O *BIC* também se baseia na função de verossimilhança e está relacionado com o *AIC*. Sabemos que o *AIC* penaliza os modelos com um maior número de parâmetros, e o *BIC* resolve esse problema, com a introdução de um termo de penalidade para o número de parâmetros do modelo. O nome Bayesiano desse critério é apenas uma formalidade, e não uma generalização Bayesiana para o *AIC*.

O *BIC* é definido como a estatística que maximiza a probabilidade de se identificar o verdadeiro modelo dentre aqueles que estão sendo avaliados, ou seja, maximiza a probabilidade de escolher o modelo “verdadeiro”.

A estimativa do *BIC* para um determinado modelo proposto é dada por

$$\hat{BIC} = -2\log \left\{ L \left[ g_X \left( \hat{\theta} | x \right) \right] \right\} + 2k \ln(n), \quad (4.18)$$

em que  $n$  é o número de observações.

O modelo com menor *BIC* é considerado o modelo que melhor se ajusta aos dados.

### 4.3 *Software e funções utilizadas*

Utilizamos neste estudo de simulação o *software R* (R 2.11.1, 2011), para gerar as amostras aleatórias das distribuições.

Geramos os números aleatórios com distribuição  $\alpha$ -estável utilizando uma função criada por Diethelm Wuertz, baseada em Nolan (1999). Esta função está implementada na *library fBasics* do *software R* (R 2.11.1, 2011).

Simulamos os números aleatórios com distribuição normal assimétrica utilizando uma função da *library VGAM* do *software R* (R 2.11.1, 2011), baseada na abordagem de Azzalini (1985).

Para simularmos números aleatórios com distribuição  $t$  de Student assimétrica utilizamos uma função da *library sn* do *software R* (R 2.11.1, 2011), uma versão multivariada pode ser encontrada em Azzalini & Capitanio (2003).

Para gerarmos os números aleatórios com distribuição Laplace assimétrica, utilizamos uma função criada por T. W. Yee, baseada em Kotz (2001), também implementada na *library VGAM* do *software R* (R 2.11.1, 2011).

No apêndice A, apresentamos um resumo sobre a geração no *software R* (R 2.11.1, 2011), dos números aleatórios das distribuições em estudo.

Estimamos os parâmetros das distribuições, como descrito no item 5.1 deste Capítulo, usando também o *software R* (R 2.11.1, 2011), por meio de duas funções de otimização, a *nlnmb* e a *optim*.

A distribuição  $\alpha$ -estável possui uma função implementada na *library fBasics* do *software R* (R 2.11.1, 2011) para estimar os parâmetros pelo método de máxima verossimilhança. Esta função utiliza o *nlnmb*, entretanto, a função *nlnmb* não fornece a matriz

*hessiana*, e precisamos dessa matriz para calcular os correspondentes erros padrão e os intervalos de confiança. Então, baseados nessa função elaboramos outra função utilizando a função *optim* com o método *L-BFGS-B*, Byrd *et al.* (1995).

A função *optim* tem a opção de retornar à matriz *hessiana*, e o método *L-BFGS-B* (Limited memory-Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno Bound), Byrd *et al.* (1995), permite a inclusão dos limites, inferior e superior dos parâmetros, sendo que os valores iniciais devem satisfazer as restrições desses limites. O método *L-BFGS-B*, Byrd *et al.* (1995), usa uma modificação na memória limitada do método quasi-Newton, também conhecido como um algoritmo variável métrico. Esta função usa valores e gradientes para construir uma imagem da superfície a ser otimizada. O critério de convergência do método ocorre quando  $\epsilon = 10^{-8}$ .

Em alguns casos em que a função *optim*, apresentou problemas de convergência na estimação dos parâmetros das distribuições, utilizamos a função com *nlminb*, sendo que a distribuição a ser estimada, não é a distribuição geradora dos dados. Por exemplo, numa estimação de parâmetros de uma distribuição normal assimétrica, em que os dados são gerados de uma distribuição  $\alpha$ -estável, se a função *optim* apresentou problemas de convergência, então utilizamos a função *nlminb*, pois, observamos que a diferença entre os resultados das estimações que não apresentaram problemas de convergência de ambas as funções, eram em sua maioria na terceira casa decimal, e também para esboçar os gráficos utilizamos somente as estimativas dos parâmetros, informações essas que a função *nlminb* fornece.

Todos os demais cálculos utilizados neste trabalho, também foram realizados usando o *software R* (R 2.11.1, 2011), além da elaboração das figuras apresentadas.

## Capítulo 5

# Resultados da simulação

Na simulação, observamos que o parâmetro  $\alpha$  da distribuição  $\alpha$ -estável, é um parâmetro influente na estimação,  $\alpha$  é o parâmetro que define a quantidade de observações em torno da média. Para as observações geradas com distribuição normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica, o parâmetro influente na estimação é o  $\lambda$ , parâmetro de assimetria.

Para as observações geradas com distribuição  $\alpha$ -estável com valor de  $\alpha$  menor que 1.5, temos problemas na estimação dos parâmetros da distribuição normal assimétrica, para tamanhos de amostras maiores que 100. Quanto mais o valor de  $\alpha$  se aproxima de 2.0, também temos problemas na estimação de  $\alpha$  da distribuição  $\alpha$ -estável. Os problemas na estimação são devido ao programa não conseguir estimar um valor para os parâmetros da distribuição, que esteja dentro dos limites em que o parâmetro está definido.

Quando simulamos observações com valores de parâmetros que são os casos particulares das distribuições em estudo, ou seja, geramos dados com distribuição normal assimétrica com valor de  $\lambda = 0$ , ou geramos dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica ou Laplace assimétrica com valor de  $\lambda = 1$ , mais resultados obtemos na estimação dos parâmetros. Entretanto, como esse não é o nosso objetivo, procuramos simular observações com valores de parâmetros que não fossem os dos casos particulares das distribuições em estudo (distribuições normal, de Cauchy, de Lévy,  $t$  de Student e de Laplace), e que não apresentassem problemas na estimação.

O estudo de simulação foi dividido em três partes. Na Parte I, tomamos valores fixos para os parâmetros da distribuição geradora dos dados, e variamos o tamanho das amostras. Na Parte II, fixamos o tamanho da amostra e variamos os valores dos parâmet-

ros de assimetria da distribuição geradora. Na Parte III, calculamos a cobertura dos intervalos, tomando inicialmente valores fixos para os parâmetros e variamos o tamanho das amostras, como descrito na Parte I, e em seguida calculamos as probabilidades de cobertura dos intervalos, fixando o tamanho das amostras e variamos os valores do parâmetro de assimetria, como descrito na Parte II.

## 5.1 Resultados da simulação - Parte I

Nesta seção, apresentamos os resultados da simulação Parte I, na qual, tomamos valores fixos para os parâmetros da distribuição geradora dos dados, e variamos o tamanho das amostras.

### 5.1.1 Resultados da simulação para a distribuição $\alpha$ -estável

Realizamos a simulação dos dados com distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros,  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$  e  $\delta = 0.2$ , com tamanhos de amostras,  $n = 30$ ,  $n = 100$ ,  $n = 1000$  e  $n = 10000$ , e modelamos essas observações com as distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica.

Apresentamos a Tabela 5.1, com as estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão, para uma réplica de dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável.

Tabela 5.1: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão.

		Estimativas dos parâmetros (erros padrão)			
Parâmetros	Valores	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
$\alpha$	1.65	1.6375 (0.3554)	1.6740 (0.1821)	1.6749 (0.0443)	1.6462 (0.0153)
$\beta$	0.40	-0.3220 (0.6439)	0.6897 (0.4065)	0.4748 (0.1189)	0.3895 (0.0364)
$\gamma$	0.30	0.2326 (0.0523)	0.3040 (0.0319)	0.2783 (0.0082)	0.3018 (0.0030)
$\delta$	0.20	0.1558 (0.2975)	0.1602 (0.0668)	0.1950 (0.0187)	0.2010 (0.0066)

Observamos que a medida que o tamanho da amostra aumenta, as estimativas dos parâmetros da distribuição  $\alpha$ -estável, se aproximam dos verdadeiros valores dos parâmetros, e os correspondentes erros padrão também tendem para zero, indicando que os estimadores sejam assintoticamente consistentes.

As Figuras 5.1, 5.2, 5.3, e 5.4 apresentam os histogramas e as distribuições empíricas dos dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável (linhas em preto), e as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linhas em vermelho), normal assimétrica (linhas em azul),  $t$  de Student assimétrica (linhas em verde) e Laplace assimétrica (linhas em lilás), para os tamanhos de amostras,  $n = 30$ , Figura 5.1,  $n = 100$ , Figura 5.2,  $n = 1000$ , Figura 5.3, e  $n = 10000$ , Figura 5.4.

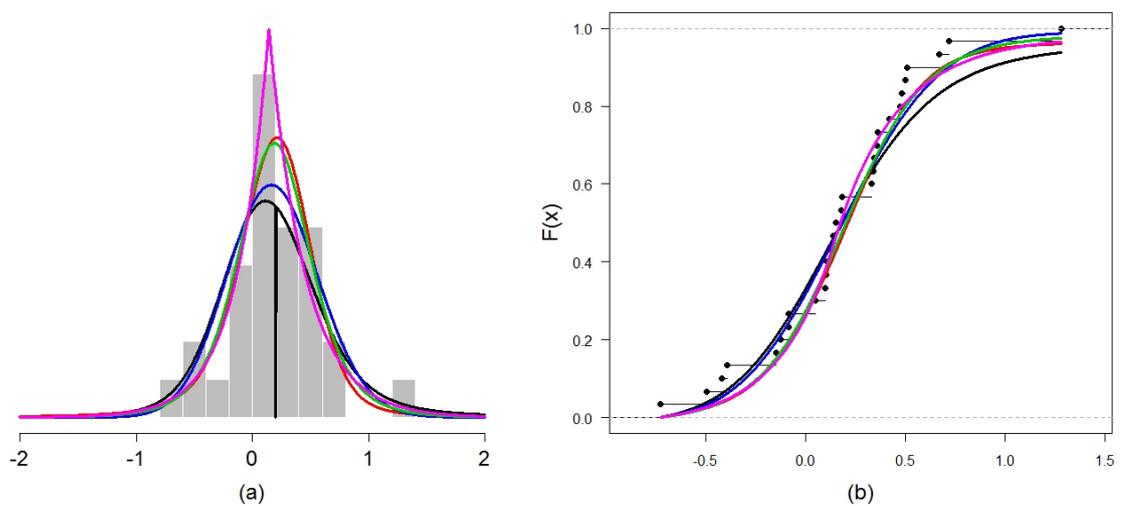


Figura 5.1: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto), com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 30$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

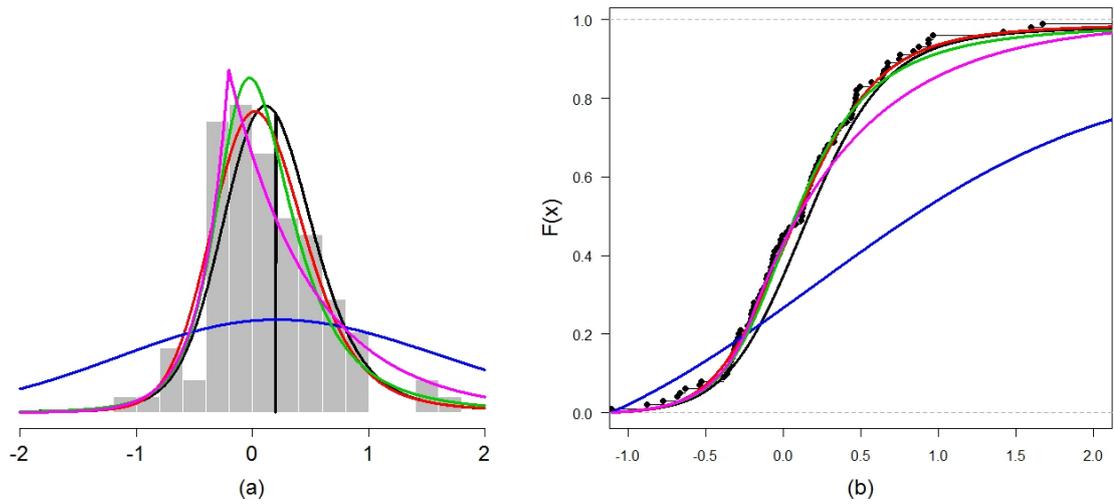


Figura 5.2: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto), com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 100$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

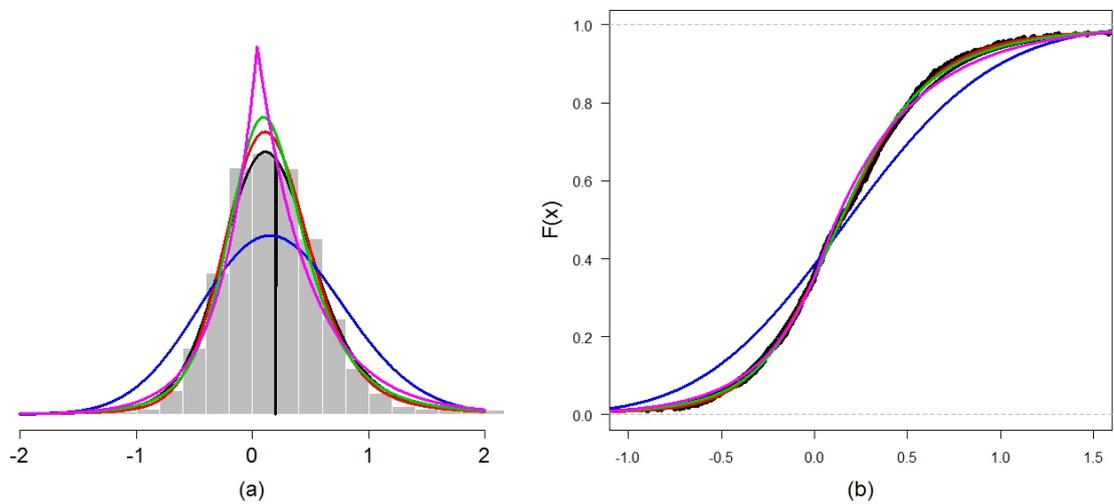


Figura 5.3: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto), com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

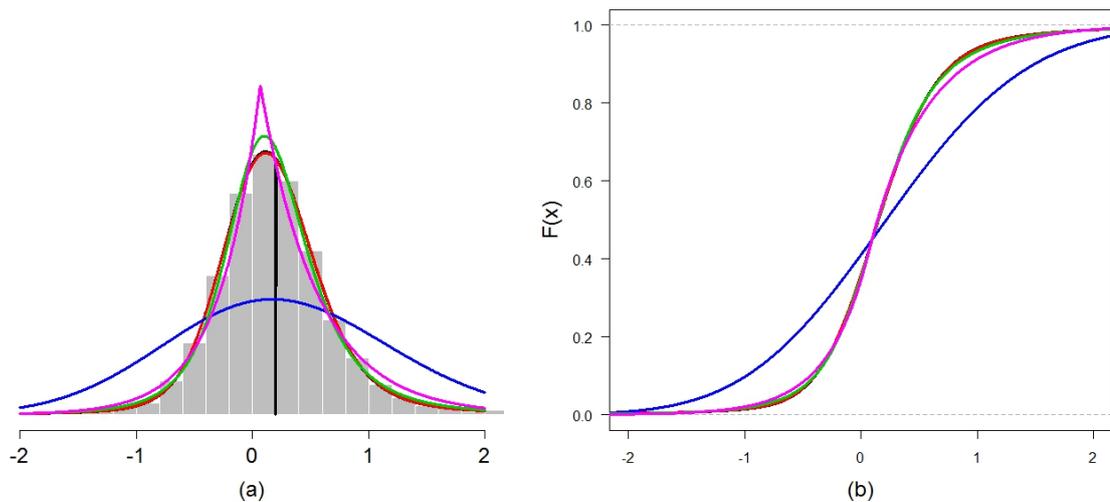


Figura 5.4: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto), com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 10000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Observamos que para a amostra de tamanho  $n = 30$ , Figura 5.1, todas as distribuições estimadas sugerem um bom ajuste. No entanto, a medida que o tamanho da amostra aumenta, a distribuição normal assimétrica estimada não sugere um bom ajuste, principalmente para  $n = 100$ , Figura 5.2, e  $n = 10000$ , Figura 5.4.

Usando os critérios  $AIC$  e  $BIC$ , obtivemos para os dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável, os resultados apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ : Resultados segundo os critérios  $AIC$  e  $BIC$ .

Distribuições	$n = 30$		$n = 100$		$n = 1000$		$n = 10000$	
	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$
$\alpha$ -estável	36.9	56.1	<b>163.3</b>	<b>192.1</b>	<b>1352.3</b>	<b>1399.6</b>	<b>15415.2</b>	<b>15481.0</b>
normal assimétrica	35.3	49.7	359.7	381.4	1895.8	1931.2	25573.8	25623.1
$t$ de Student assimétrica	36.3	55.5	166.2	195.0	1364.2	1411.4	15497.6	15563.3
Laplace assimétrica	<b>34.2</b>	<b>48.6</b>	194.9	216.5	1438.7	1474.2	16602.6	16651.9

Podemos observar que a distribuição geradora,  $\alpha$ -estável, não apresentou um melhor ajuste somente para a amostra de tamanho  $n = 30$ .

### 5.1.2 Resultados da simulação para a distribuição normal assimétrica

Realizamos a simulamos dos dados com distribuição normal assimétrica, com parâmetros,  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ , e  $\lambda = 0.7$ , com tamanhos de amostras,  $n = 30$ ,  $n = 100$ ,  $n = 1000$  e  $n = 10000$ , e modelamos essas observações com as distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica.

Apresentamos a Tabela 5.3, com as estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão, para uma réplica de dados simulados com distribuição normal assimétrica.

Tabela 5.3: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão.

		Estimativas dos parâmetros (erros padrão)			
Parâmetros	Valores	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
$\xi$	-0.20	-0.5060 (0.6526)	-0.0313 (3.4313)	-0.1793 (0.1254)	-0.2274 (0.0257)
$\omega$	0.50	0.5612 (0.3224)	0.4164 (0.0364)	0.4831 (0.0533)	0.5108 (0.0134)
$\lambda$	0.70	0.7565 (2.1769)	0.0078 (10.3265)	0.6118 (0.4299)	0.8126 (0.0987)

Observamos que a medida que o tamanho da amostra aumenta, as estimativas dos parâmetros da distribuição normal assimétrica, se aproximam dos verdadeiros valores dos parâmetros, e os correspondentes erros padrão também tendem para zero, indicando que os estimadores sejam assintoticamente consistentes, com exceção das estimativas do parâmetro de assimetria  $\lambda$ .

As Figuras 5.5, 5.6, 5.7, e 5.8 apresentam os histogramas e as distribuições empíricas dos dados simulados com distribuição normal assimétrica (linhas em preto), e as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linhas em vermelho), normal assimétrica (linhas em azul),  $t$  de Student assimétrica (linhas em verde) e Laplace assimétrica (linhas em lilás), para os tamanhos de amostras,  $n = 30$ , Figura 5.5,  $n = 100$ , Figura 5.6,  $n = 1000$ , Figura 5.7, e  $n = 10000$ , Figura 5.8.

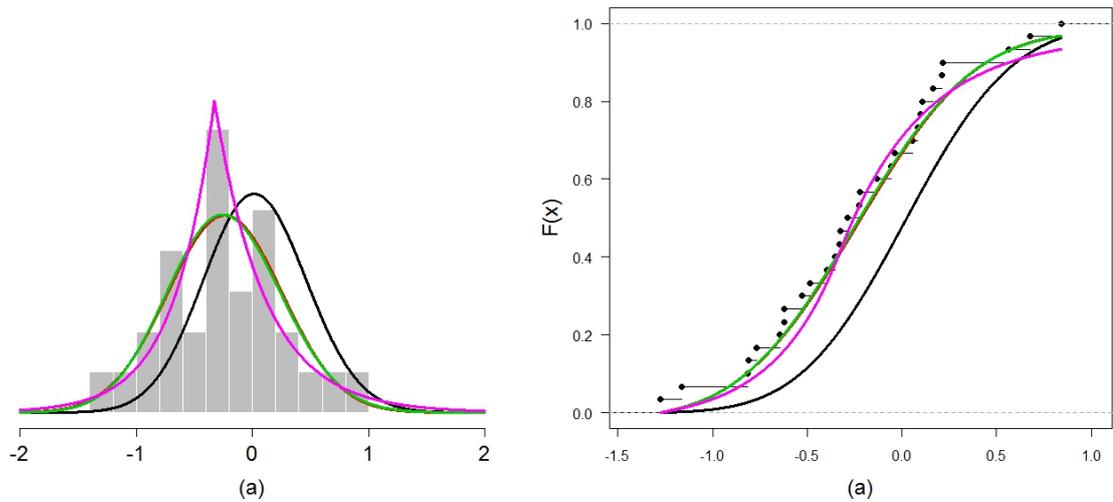


Figura 5.5: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 30$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

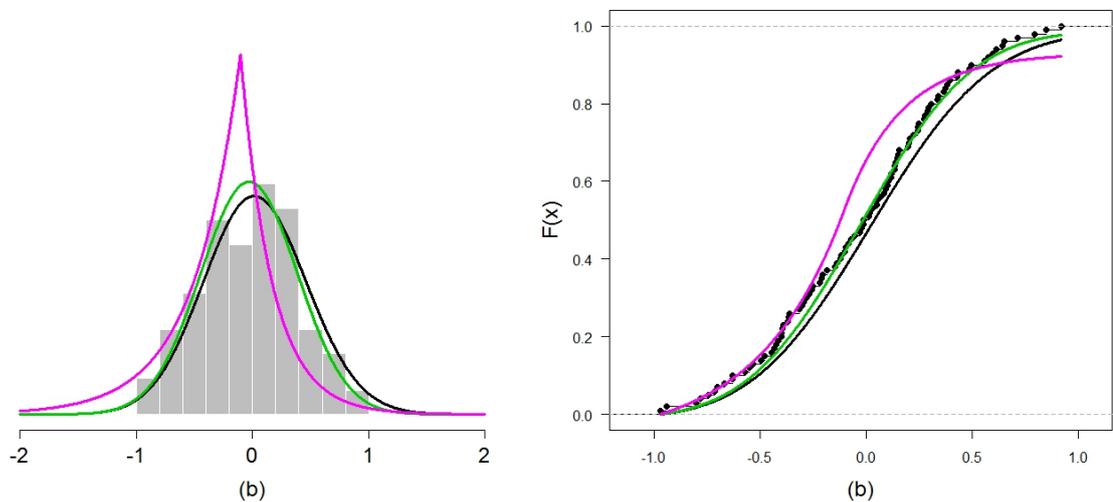


Figura 5.6: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 100$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

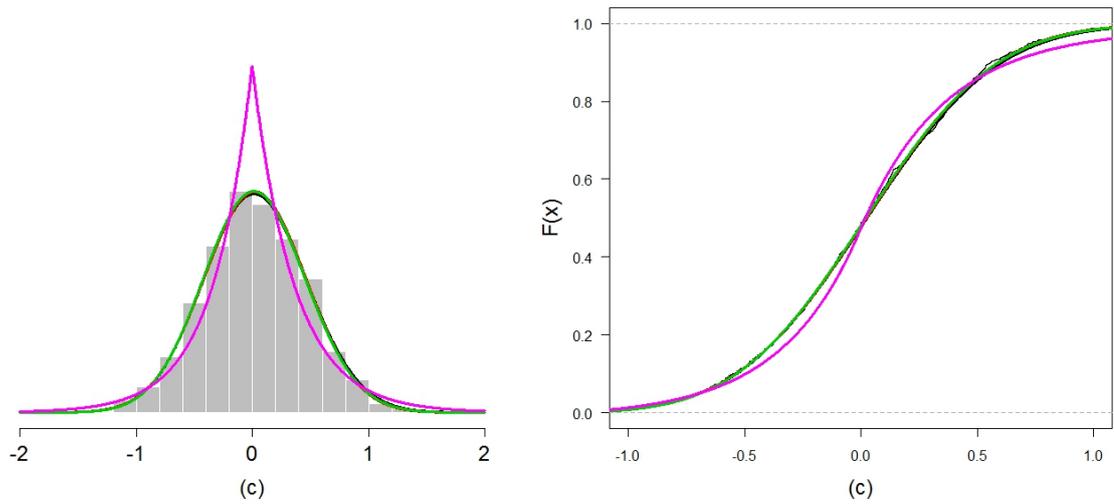


Figura 5.7: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

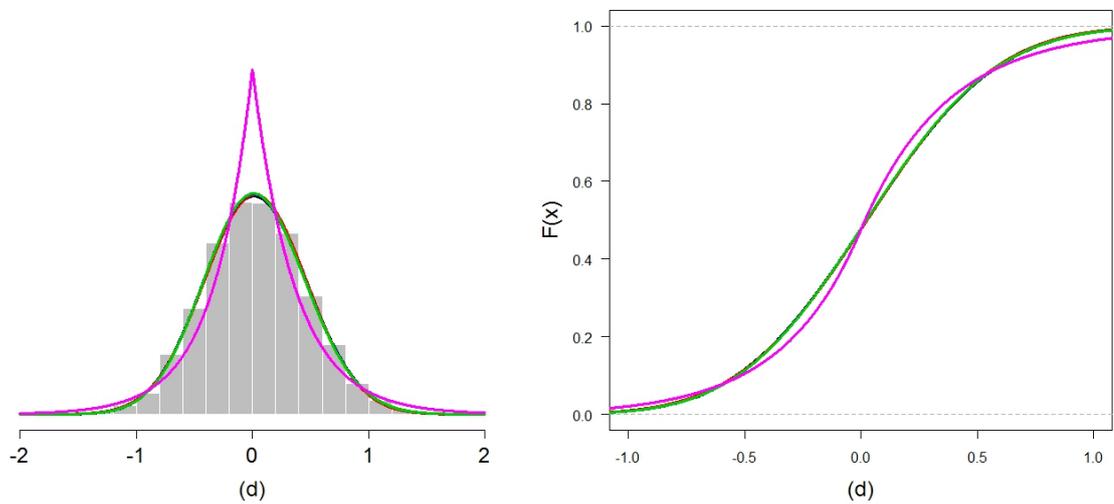


Figura 5.8: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 10000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Observamos que para o tamanho de amostra  $n = 30$ , Figura 5.5, as distribuições  $\alpha$ -estável e Laplace assimétrica estimadas, não sugerem um bom ajuste. Para os outros tamanhos de amostras, as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica e  $t$  de Student assimétrica estimadas praticamente se sobrepõem,  $n = 100$ , Figura 5.6,  $n = 1000$ , Figura 5.7 e  $n = 10000$ , Figura 5.8.

Usando os critérios  $AIC$  e  $BIC$ , obtivemos, para os dados simulados, com distribuição normal assimétrica, os resultados apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ : Resultados segundo os critérios  $AIC$  e  $BIC$ .

Distribuições	$n = 30$		$n = 100$		$n = 1000$		$n = 10000$	
	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$
$\alpha$ -estável	50.6	69.8	116.6	145.43	1200.6	1247.8	12301.8	12097.5
normal assimétrica	<b>48.5</b>	<b>63.0</b>	<b>114.6</b>	<b>136.2</b>	<b>1198.3</b>	<b>1233.7</b>	<b>12018.9</b>	<b>12068.2</b>
$t$ de Student assimétrica	50.6	70.0	116.6	145.4	1200.5	1247.5	12020.7	12086.4
Laplace assimétrica	51.1	65.5	151.7	173.3	1292.5	1327.9	12954.4	13003.7

Podemos observar que a distribuição geradora, normal assimétrica, apresenta um melhor ajuste para todos os tamanhos estudados de amostra.

### 5.1.3 Resultados da simulação para a distribuição $t$ de Student assimétrica

Realizamos a simulação dos dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica, com parâmetros,  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$  e  $\nu = 5$ , com tamanhos de amostras,  $n = 30$ ,  $n = 100$ ,  $n = 1000$  e  $n = 10000$ , e modelamos essas observações com as distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica.

Apresentamos a Tabela 5.5, com as estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão, para uma réplica de dados simulados com distribuição  $t$  de Student assimétrica.

Tabela 5.5: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão.

Parâmetros	Valores	Estimativas dos parâmetros (erros padrão)			
		$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
$\xi$	-0.20	-0.4658 (0.0921)	-0.3180 (0.1105)	-0.2061 (0.0635)	-0.2050 (0.0216)
$\omega$	0.50	0.7850 (0.2181)	0.5795 (0.1143)	0.4833 (0.0322)	0.4989 (0.0109)
$\lambda$	0.60	8.6902 (8.8983)	1.8165 (0.8752)	0.5993 (0.1983)	0.6098 (0.0659)
$\nu$	5	40.6564 (323.4978)	4.2818 (1.7717)	4.3650 (0.6135)	4.9473 (0.2425)

Observamos que a medida que o tamanho da amostra aumenta, as estimativas dos parâmetros da distribuição  $t$  de Student assimétrica, se aproximam dos verdadeiros valores dos parâmetros, e os correspondentes erros padrão também tendem para zero, indicando que os estimadores sejam assintoticamente consistentes, com exceção do correspondente erro padrão da estimativa do parâmetro  $\nu$  (graus de liberdade).

As Figuras 5.9, 5.10, 5.11, e 5.12 apresentam os histogramas e as distribuições empíricas dos dados simulados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linhas em preto), e as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linhas em vermelho), normal assimétrica (linhas em azul),  $t$  de Student assimétrica (linhas em verde) e Laplace assimétrica (linhas em lilás), para os tamanhos de amostras,  $n = 30$ , Figura 5.9,  $n = 100$ , Figura 5.10,  $n = 1000$ , Figura 5.11, e  $n = 10000$ , Figura 5.12.

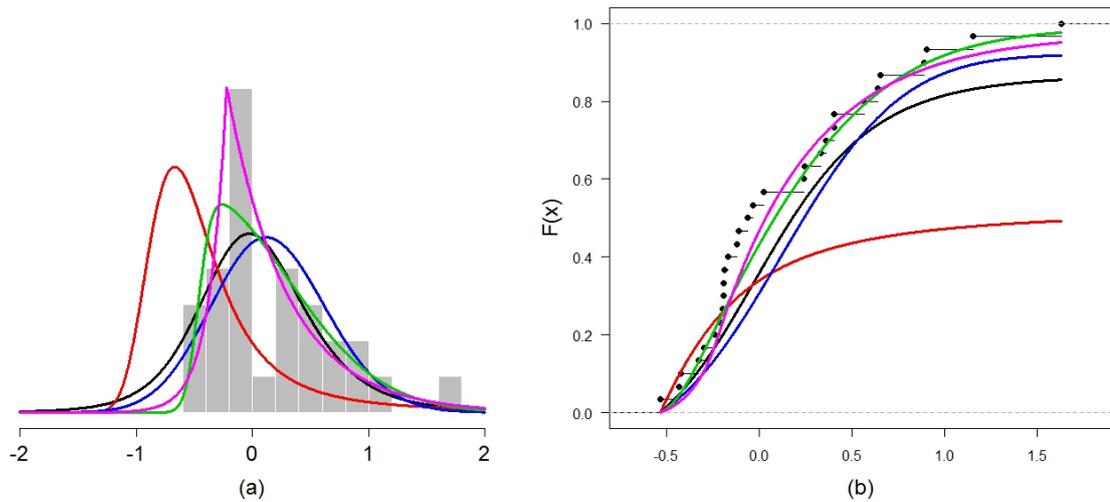


Figura 5.9: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 30$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

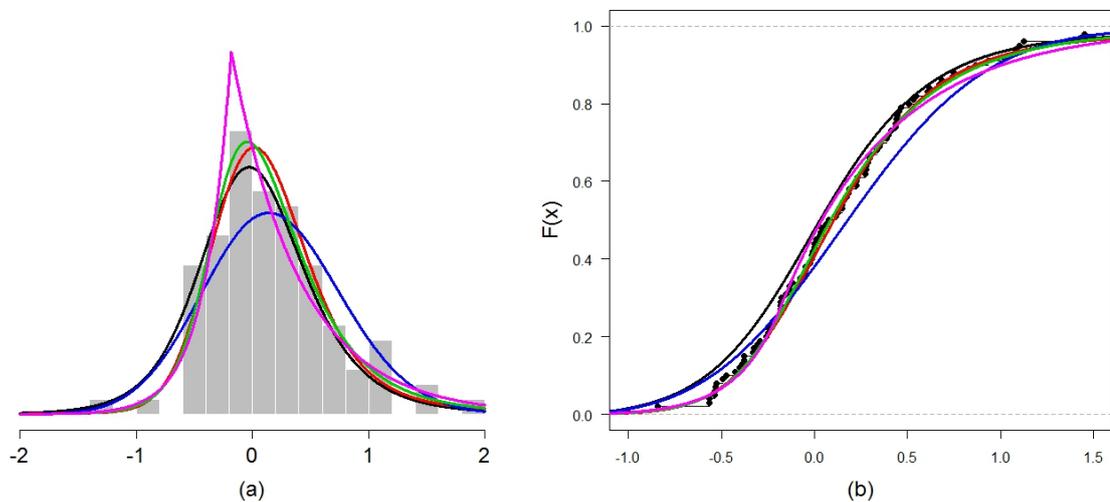


Figura 5.10: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 100$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

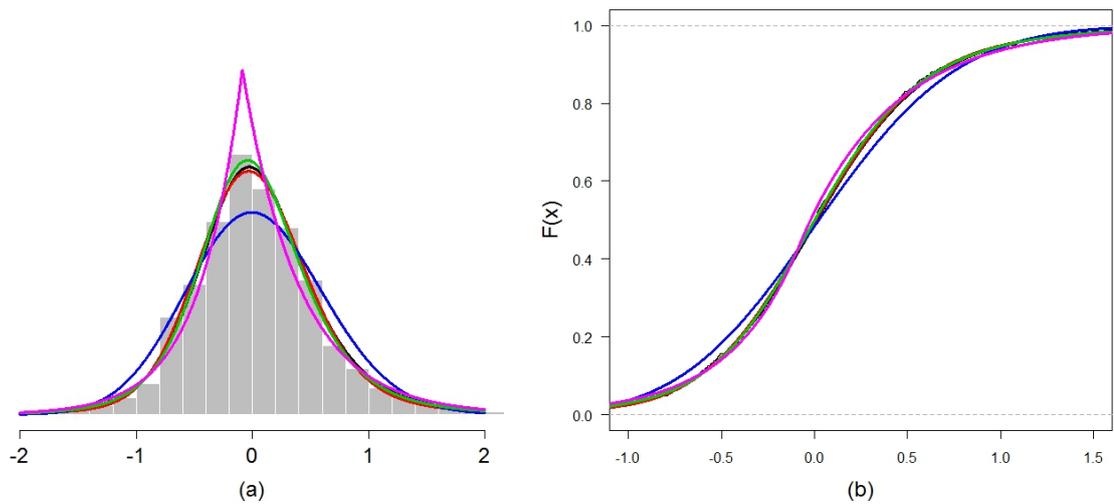


Figura 5.11: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

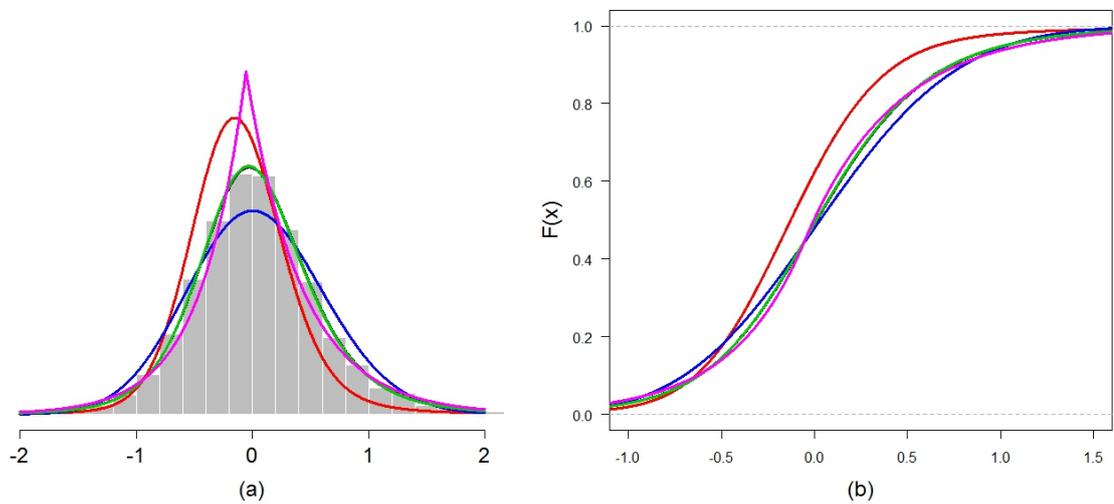


Figura 5.12: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 10000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Observamos que para a amostra de tamanho  $n = 30$ , Figura 5.9, a distribuição  $\alpha$ -estável estimada não sugere um bom ajuste. Para as amostras de tamanho  $n = 100$ , Figura 5.10,  $n = 1000$ , Figura 5.11, as distribuições  $\alpha$ -estável e  $t$  de Student assimétrica estimadas praticamente se sobrepõem. E para a amostra de tamanho  $n = 10000$ , Figura 5.12, a distribuição  $t$  de Student estimada sugere um melhor ajuste.

Usando os critérios  $AIC$  e  $BIC$ , obtivemos, para os dados simulados com distribuição  $t$  de Student assimétrica, os resultados apresentados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ : Resultados segundo os critérios  $AIC$  e  $BIC$ .

Distribuições	$n = 30$		$n = 100$		$n = 1000$		$n = 10000$	
	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$
$\alpha$ -estável	91.7	111.0	165.8	194.7	1709.7	1757.0	18472.6	18538.2
normal assimétrica	49.5	63.9	187.7	209.3	1806.8	1842.3	17836.0	17885.3
$t$ de Student assimétrica	43.3	62.5	<b>165.2</b>	<b>194.1</b>	<b>1701.9</b>	<b>1749.2</b>	<b>16937.5</b>	<b>17003.1</b>
Laplace assimétrica	<b>41.5</b>	<b>55.9</b>	188.8	216.54	1720.2	1755.6	17224.7	17273.94

Podemos observar que a distribuição geradora,  $t$  de Student assimétrica, não apresentou um melhor ajuste somente para a amostra de tamanho  $n = 30$ .

#### 5.1.4 Resultados da simulação para a distribuição Laplace assimétrica

Realizamos a simulação dos dados com distribuição Laplace assimétrica, com parâmetros,  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$  e  $\lambda = 0.6$ , com tamanhos de amostras,  $n = 30$ ,  $n = 100$ ,  $n = 1000$  e  $n = 10000$ , e modelamos essas observações com as distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica.

Apresentamos a Tabela 5.7, com as estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão, para uma réplica de dados simulados com distribuição Laplace assimétrica.

Tabela 5.7: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão.

		Estimativas dos parâmetros (erros padrão)			
Parâmetros	Valores	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
$\xi$	-0.20	-0.2730 (0.0170)	-0.2110 (0.0171)	-0.1844 (0.0110)	-0.2069 (0.0046)
$\omega$	0.50	0.4401 (0.0850)	0.4084 (0.0450)	0.4817 (0.0166)	0.5007 (0.0057)
$\lambda$	0.60	0.6159 (0.0903)	0.5672 (0.0507)	0.6159 (0.0190)	0.5910 (0.0065)

Observamos que a medida que o tamanho da amostra aumenta, as estimativas dos parâmetros da distribuição Laplace assimétrica, se aproxima dos verdadeiros valores dos parâmetros, e os correspondentes erros padrão também tendem para zero, indicando que os estimadores sejam assintoticamente consistentes.

As Figuras 5.13, 5.14, 5.15, e 5.16 apresentam os histogramas e as distribuições empíricas dos dados simulados com distribuição Laplace assimétrica (linhas em preto), e as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linhas em vermelho), normal assimétrica (linhas em azul),  $t$  de Student assimétrica (linhas em verde) e Laplace assimétrica (linhas em lilás), para os tamanhos de amostras,  $n = 30$ , Figura 5.13,  $n = 100$ , Figura 5.14,  $n = 1000$ , Figura 5.15, e  $n = 10000$ , Figura 5.16.

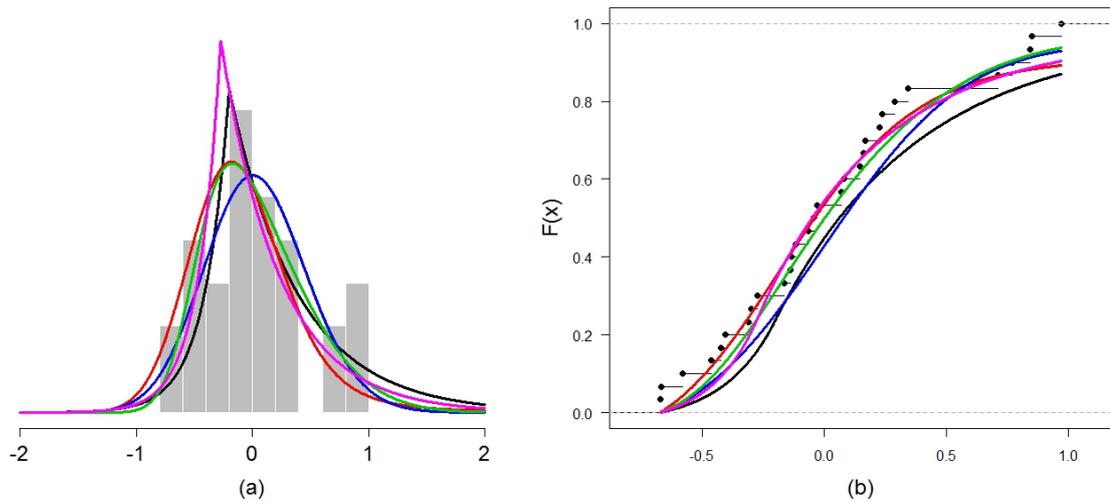


Figura 5.13: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 30$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

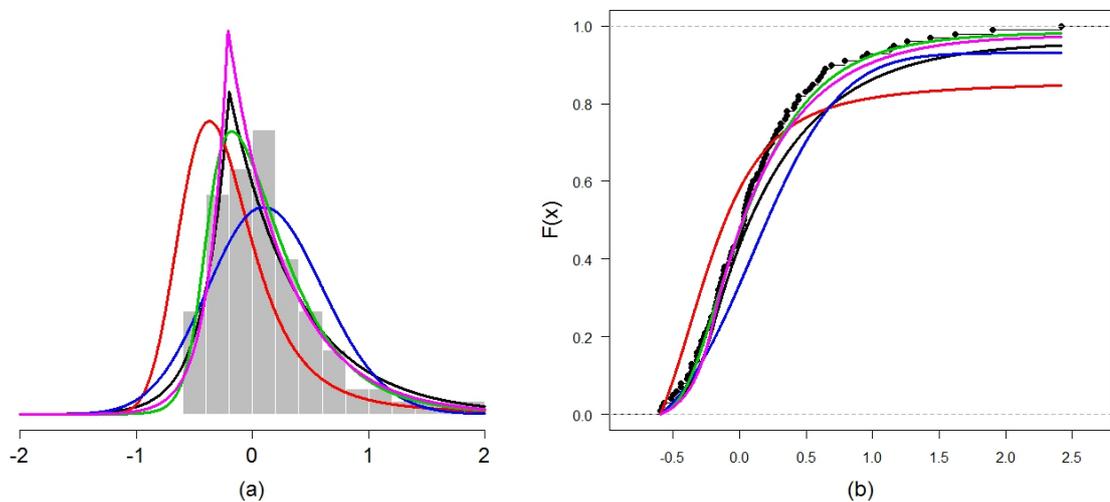


Figura 5.14: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 100$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

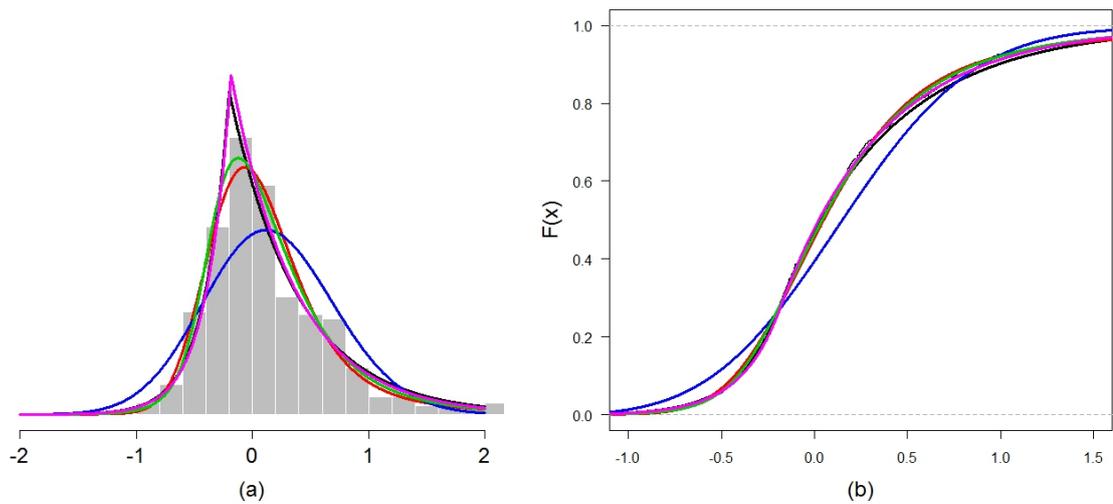


Figura 5.15: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

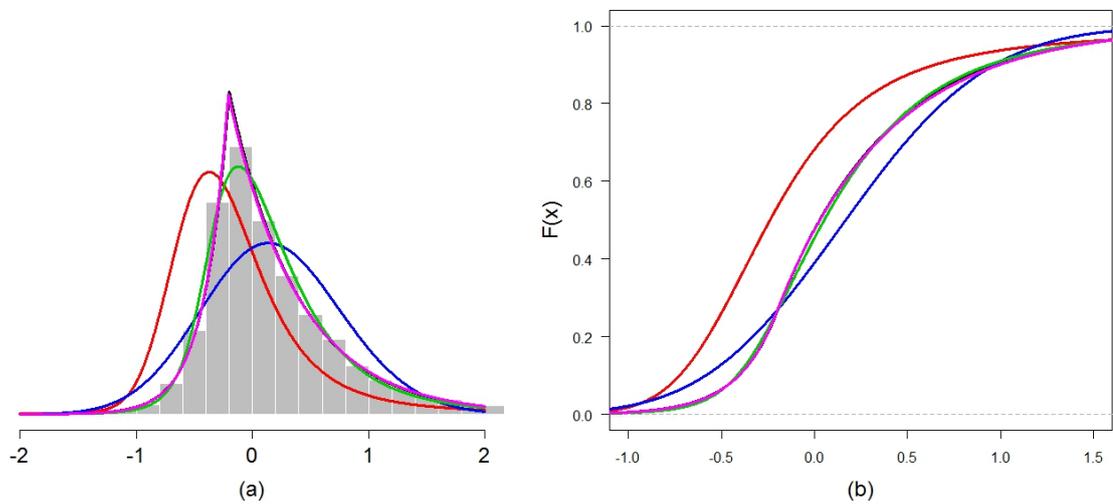


Figura 5.16: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto), com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 10000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Observamos que para a amostra de tamanho  $n = 30$ , Figura 5.13, a distribuição Laplace assimétrica estimada, sugere um melhor ajuste. Para as amostras  $n = 100$ , Figura 5.14, e  $n = 10000$ , Figura 5.16, temos que a distribuição  $\alpha$ -estável estimada não sugere um bom ajuste. E para a amostra  $n = 1000$ , Figura 5.15, somente a distribuição normal assimétrica estimada não sugere um bom ajuste.

Usando os critérios  $AIC$  e  $BIC$ , obtivemos, para os dados simulados com distribuição Laplace assimétrica, os resultados apresentados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ : Resultados segundo os critérios  $AIC$  e  $BIC$ .

Distribuições	$n = 30$		$n = 100$		$n = 1000$		$n = 10000$	
	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$
$\alpha$ -estável	46.6	65.8	177.7	206.6	1502.5	1549.7	20362.6	20428.3
normal assimétrica	<b>42.0</b>	<b>56.4</b>	154.1	175.8	1721.3	1756.8	18596.1	18645.4
$t$ de Student assimétrica	42.5	61.7	126.8	154.5	1478.4	1525.7	15925.5	15991.2
Laplace assimétrica	44.5	58.9	<b>125.7</b>	<b>148.5</b>	<b>1464.9</b>	<b>1500.3</b>	<b>15747.8</b>	<b>15797.1</b>

Podemos observar que a distribuição geradora, Laplace assimétrica, não apresentou um melhor ajuste somente para a amostra de tamanho  $n = 30$ .

## 5.2 Resultados da simulação - Parte II

Nesta seção apresentamos os resultados da simulação Parte II, na qual fixamos o tamanho da amostra e variamos o valor do parâmetro de assimetria da distribuição geradora dos dados.

### 5.2.1 Resultados da simulação para a distribuição $\alpha$ -estável

Realizamos a simulação dos dados com distribuição  $\alpha$ -estável com tamanho de amostra  $n = 1000$ , e parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$ , variando o parâmetro de assimetria em,  $\beta = -0.9$ ,  $\beta = 0$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\beta = 0.9$ , e modelando esses dados com as distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica.

Apresentamos a Tabela 5.9, com as estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão, para uma réplica de dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável.

Tabela 5.9: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$  e variações no parâmetro  $\beta$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão.

Parâmetros	Estimativas dos parâmetros (erros padrão)			
	$\beta = -0.9$	$\beta = 0$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.9$
$\alpha$	1.7204 (0.0426)	1.6257 (0.0463)	1.6249 (0.0483)	1.6160 (0.0471)
$\beta$	-0.8396 (0.0944)	0.0312 (0.1207)	0.4330 (0.1076)	0.8648 (0.0680)
$\gamma$	0.2896 (0.0081)	0.3018 (0.0093)	0.3008 (0.0094)	0.2902 (0.0089)
$\delta$	0.0361 (0.0189)	0.0046 (0.0211)	0.0067 (0.0217)	0.0069 (0.0236)

Observamos que as estimativas do parâmetro de assimetria  $\beta$ , estão próximas ao verdadeiro valor do parâmetro, e que os correspondentes erros padrão são menores que 0.12.

Apresentamos a Tabela 5.10, com os erros quadráticos médios e os vieses estimados, para uma réplica de dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável.

Tabela 5.10: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$  e variações no parâmetro  $\beta$ : Erros quadráticos médios e vieses dos estimadores.

Parâmetros	Erros quadráticos médios (vieses dos estimadores)			
	$\beta = -0.9$	$\beta = 0$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.9$
$\alpha$	0.0068 (0.0704)	0.0027 (-0.0243)	0.0030 (-0.0251)	0.0034 (-0.0340)
$\beta$	0.0126 (0.0604)	0.0155 (0.0312)	0.0161 (-0.0670)	0.0059 (-0.0352)
$\gamma$	0.0002 (-0.0104)	0.0001 (0.0018)	0.0001 (0.0008)	0.0002 (-0.0098)
$\delta$	0.0272 (-0.1639)	0.0386 (-0.1954)	0.0378 (-0.1933)	0.0378 (-0.1931)

Observamos que os erros quadráticos médios para o parâmetro de assimetria  $\beta$ , são menores que 0.02, e que os valores absolutos dos vieses dos estimadores de  $\beta$ , são menores que 0.07.

As Figuras 5.17, 5.18, 5.19, e 5.20 apresentam os histogramas e as distribuições empíricas dos dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável (linhas em preto), e as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linhas em vermelho), normal assimétrica (linhas em azul),  $t$  de Student assimétrica (linhas em verde) e Laplace assimétrica (linhas em lilás), para os valores do parâmetro de assimetria,  $\beta = -0.9$ , Figura 5.17,  $\beta = 0$ , Figura 5.18,  $\beta = 0.5$ , Figura 5.19, e  $\beta = 0.9$ , Figura 5.20.

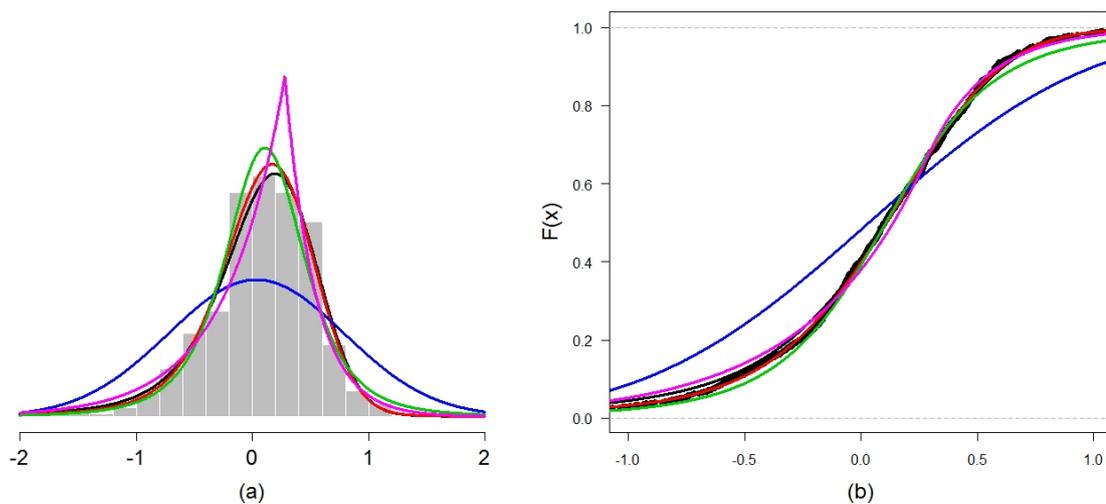


Figura 5.17: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto) com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = -0.9$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

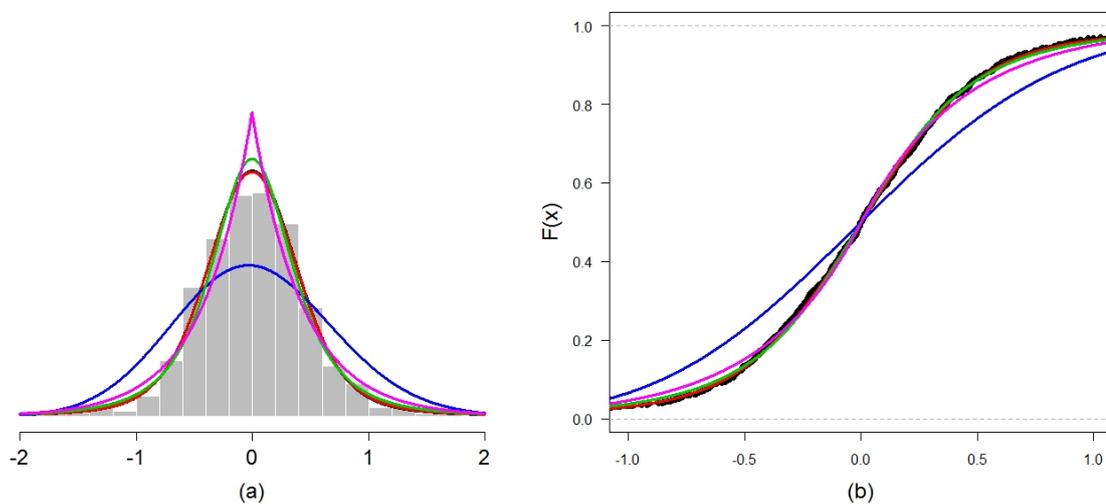


Figura 5.18: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto) com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

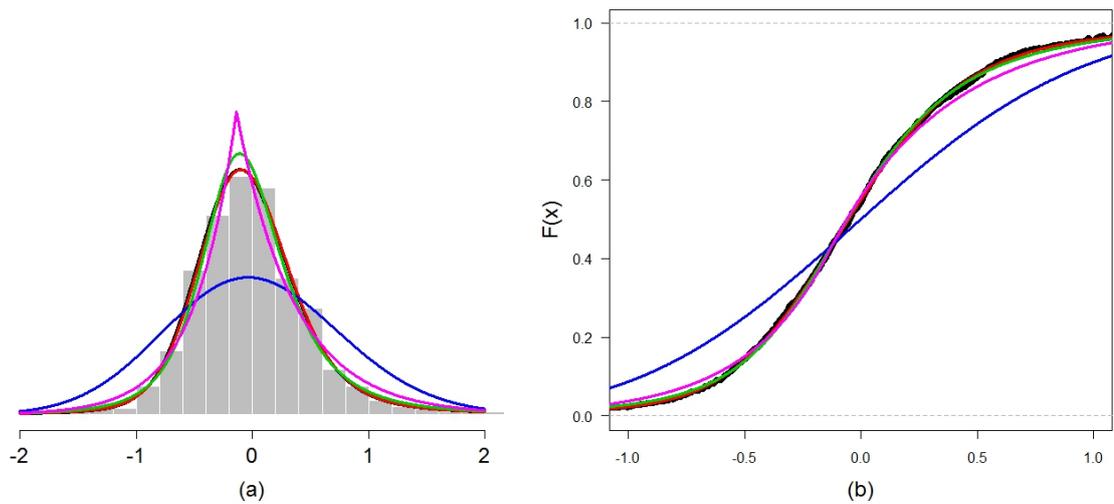


Figura 5.19: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto) com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

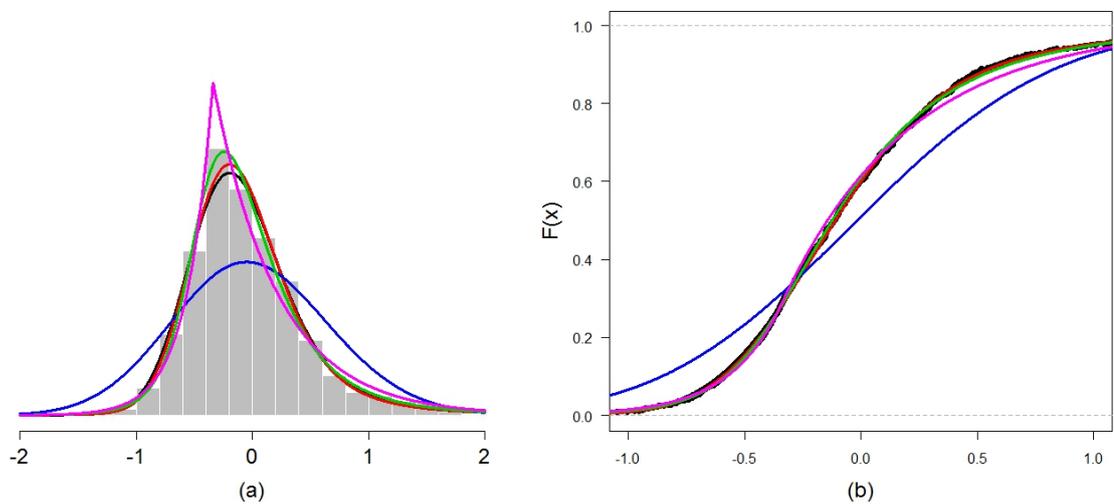


Figura 5.20: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em preto) com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.9$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Observamos por meio das Figuras 5.17, 5.18, 5.19 e 5.20, que a distribuição normal assimétrica estimada, não sugere um bom ajuste para todas as variações no parâmetro de assimetria  $\beta$ .

Usando os critérios  $AIC$  e  $BIC$ , obtivemos, para os dados simulados, com distribuição  $\alpha$ -estável, os resultados apresentados na Tabela 5.11.

Tabela 5.11: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$  e variações no parâmetro  $\beta$ : Resultados segundo os critérios  $AIC$  e  $BIC$ .

Distribuições	$\beta = -0.9$		$\beta = 0$		$\beta = 0.5$		$\beta = 0.9$	
	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$
$\alpha$ -estável	<b>1356.2</b>	<b>1403.4</b>	<b>1594.1</b>	<b>1641.4</b>	<b>1571.5</b>	<b>1618.7</b>	<b>1442.3</b>	<b>1489.6</b>
normal assimétrica	2284.7	2320.1	2092.1	2127.5	2297.7	2333.1	2080.8	2116.3
$t$ de Student assimétrica	1412.0	1459.3	1606.8	1654.1	1583.8	1631.1	1444.3	1491.5
Laplace assimétrica	1462.6	1498.0	1684.8	1720.3	1693.3	1728.7	1500.2	1535.7

Podemos observar que a distribuição geradora,  $\alpha$ -estável, apresentou um melhor ajuste para todas as variações do parâmetro de assimetria  $\beta$ .

### 5.2.2 Resultados da simulação para a distribuição normal assimétrica

Realizamos a simulação dos dados com distribuição normal assimétrica com tamanho de amostra  $n = 1000$ , e parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ , variando o parâmetro de assimetria em,  $\lambda = -0.9$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 0.5$  e  $\lambda = 0.9$ , e modelando esses dados com as distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica.

Apresentamos a Tabela 5.12, com as estimativas dos parâmetros e os correspondentes erros padrão, para uma réplica de dados simulados com distribuição normal assimétrica.

Tabela 5.12: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão.

Parâmetros	Estimativas dos parâmetros (erros padrão)			
	$\lambda = -0.9$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.9$
$\xi$	-0.4394 (0.1553)	-0.0160 (1.3013)	0.1708 (0.9945)	-0.0074 (0.0586)
$\omega$	0.4576 (0.0598)	0.5113 (0.0132)	0.4602 (0.0117)	0.5263 (0.0350)
$\lambda$	0.5403 (0.5324)	0.0064 (3.1899)	0.0034 (2.7085)	0.9837 (0.2537)

Observamos que as estimativas do parâmetro de assimetria  $\lambda$ , não estão próximas ao verdadeiro valor do parâmetro, com exceção da simulação para  $\lambda = 0$ , e que os correspondentes erros padrão são maiores que 0.25.

Apresentamos a Tabela 5.13, com os erros quadráticos médios e os vieses estimados, para uma réplica de dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável.

Tabela 5.13: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Erros quadráticos médios e vieses dos estimadores.

Parâmetros	Erros quadráticos médios (vieses dos estimadores)			
	$\lambda = -0.9$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.9$
$\xi$	0.2172 (-0.4394)	1.6936 (-0.0160)	1.0182 (0.1708)	0.0035 (-0.0074)
$\omega$	0.0054 (-0.0424)	0.0003 (0.0113)	0.0017 (-0.0398)	0.0019 (0.0263)
$\lambda$	2.3579 (1.4403)	10.1755 (0.0064)	7.5826 (-0.4966)	0.0714 (0.0838)

Observamos que os erros quadráticos médios para o parâmetro de assimetria  $\lambda$ , são maiores que 0.07, e que os valores absolutos dos vieses dos estimadores de  $\lambda$ , são maiores que 0.01.

As Figuras 5.21, 5.22, 5.23, e 5.24 apresentam os histogramas e as distribuições empíricas dos dados simulados com distribuição normal assimétrica (linhas em preto), e as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linhas em vermelho), normal assimétrica (linhas em azul),  $t$  de Student assimétrica (linhas em verde) e Laplace assimétrica (linhas em lilás), para os valores do parâmetro de assimetria,  $\lambda = -0.9$ , Figura 5.21,  $\lambda = 0$ , Figura 5.22,  $\lambda = 0.5$ , Figura 5.23, e  $\lambda = 0.9$ , Figura 5.24.

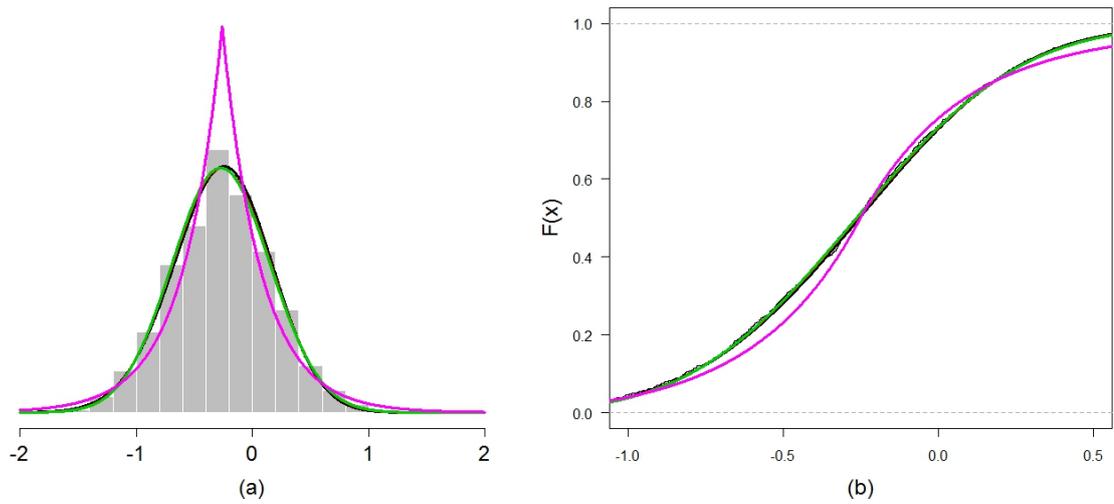


Figura 5.21: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = -0.9$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

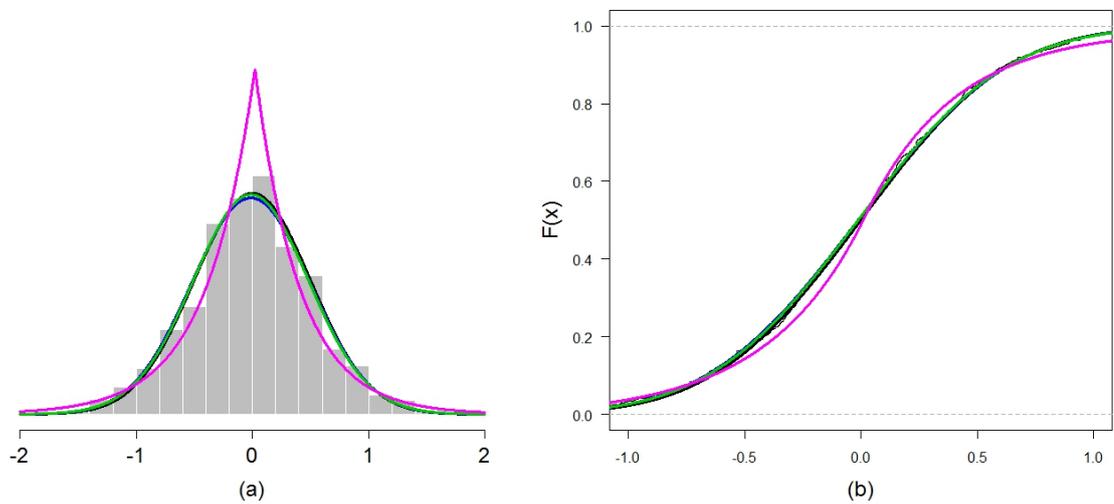


Figura 5.22: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

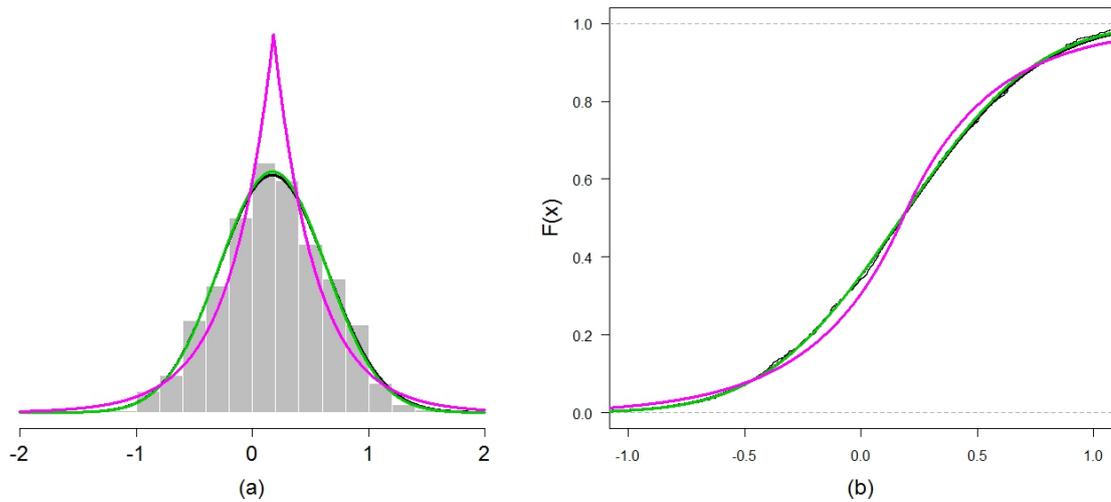


Figura 5.23: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

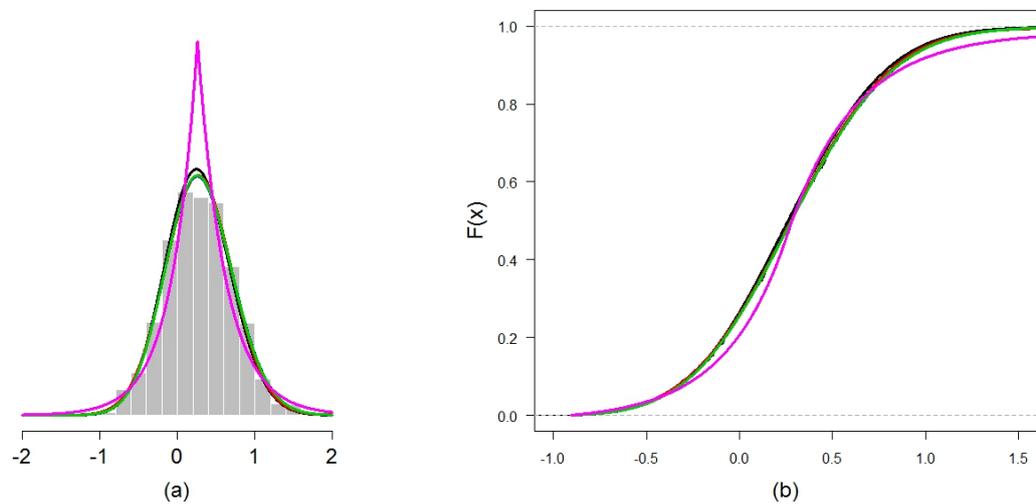


Figura 5.24: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Podemos observar que as distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica e  $t$  de Student assimétrica estimadas praticamente se sobrepõem, para todos os valores do parâmetro de assimetria  $\lambda$ , Figuras 5.21, 5.22, 5.23 e 5.24.

Usando os critérios  $AIC$  e  $BIC$ , obtivemos, para os dados simulados com distribuição normal assimétrica, os resultados apresentados na Tabela 5.14.

Tabela 5.14: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Resultados segundo os critérios  $AIC$  e  $BIC$ .

Distribuições	$\lambda = -0.9$		$\lambda = 0$		$\lambda = 0.5$		$\lambda = 0.9$	
	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$
$\alpha$ -estável	1127.0	1174.2	1504.2	1551.4	1293.5	1340.8	1185.4	1232.7
normal assimétrica	<b>1124.8</b>	<b>1160.3</b>	<b>1502.2</b>	<b>1537.6</b>	<b>1291.5</b>	<b>1326.9</b>	<b>1181.6</b>	<b>1217.1</b>
$t$ de Student assimétrica	1126.8	1174.1	1503.7	1551.0	1293.5	1340.8	1183.6	1230.9
Laplace assimétrica	1210.4	1245.9	1566.2	1601.7	1387.4	1422.9	1273.2	1308.7

Podemos observar que a distribuição geradora, normal assimétrica, apresentou um melhor ajuste para todas as variações do parâmetro de assimetria  $\lambda$ .

### 5.2.3 Resultados da simulação para a distribuição $t$ de Student assimétrica

Realizamos a simulação dos dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica, com tamanho de amostra  $n = 1000$ , e parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\nu = 5$ , variando o parâmetro de assimetria em,  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 1.5$  e  $\lambda = 2.0$ , e modelando esses dados com as distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica.

Apresentamos a Tabela 5.15, com as estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão, para uma réplica de dados simulados com distribuição  $t$  de Student assimétrica.

Tabela 5.15: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\nu = 5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão.

Parâmetros	Estimativas dos parâmetros (erros padrão)			
	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2$
$\xi$	0.0474 (0.0636)	-0.0609 (0.0385)	-0.0496 (0.0352)	-0.0354 (0.0249)
$\omega$	0.4600 (0.0264)	0.5201 (0.0367)	0.5625 (0.0383)	0.5030 (0.0311)
$\lambda$	0.4243 (0.1804)	1.3874 (0.2302)	1.7788 (0.2725)	2.1953 (0.3001)
$\nu$	3.9500 (0.5260)	4.7518 (0.7774)	5.2022 (0.8709)	4.7400 (0.7401)

Observamos que as estimativas do parâmetro de assimetria  $\lambda$ , estão próximas ao verdadeiro valor do parâmetro, e que os correspondentes erros padrão são menores que 0.30.

Apresentamos a Tabela 5.16, com os erros quadráticos médios e os vieses estimados, para uma réplica de dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável.

Tabela 5.16: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\nu = 5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Erros quadráticos médios e vieses dos estimadores.

Parâmetros	Erros quadráticos médios (vieses dos estimadores)			
	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2$
$\xi$	0.0063 (0.0474)	0.3724 (-0.6090)	0.0037 (-0.0496)	0.0019 (-0.0354)
$\omega$	0.0023 (-0.0400)	0.0018 (0.0201)	0.0054 (0.0625)	0.0010 (0.0030)
$\lambda$	0.0383 (-0.0757)	0.2031 (0.3874)	0.1520 (0.2788)	0.1282 (0.1953)
$\nu$	1.3792 (-1.0500)	0.6660 (-0.2482)	0.7994 (0.2022)	0.6153 (-0.2600)

Observamos que os erros quadráticos médios para o parâmetro de assimetria  $\lambda$ , são menores que 0.20, e que os valores absolutos dos vieses dos estimadores de  $\lambda$ , são menores que 0.39.

As Figuras 5.25, 5.26, 5.27, e 5.28 apresentam os histogramas e as distribuições empíricas dos dados simulados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linhas em preto), e as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linhas em vermelho), normal assimétrica (linhas em azul),  $t$  de Student assimétrica (linhas em verde) e Laplace assimétrica (linhas em lilás), para os valores do parâmetro de assimetria,  $\lambda = 0.5$ , Figura 5.25,  $\lambda = 0$ , Figura 5.26,  $\lambda = 1.5$ , Figura 5.27, e  $\lambda = 2.0$ , Figura 5.28.

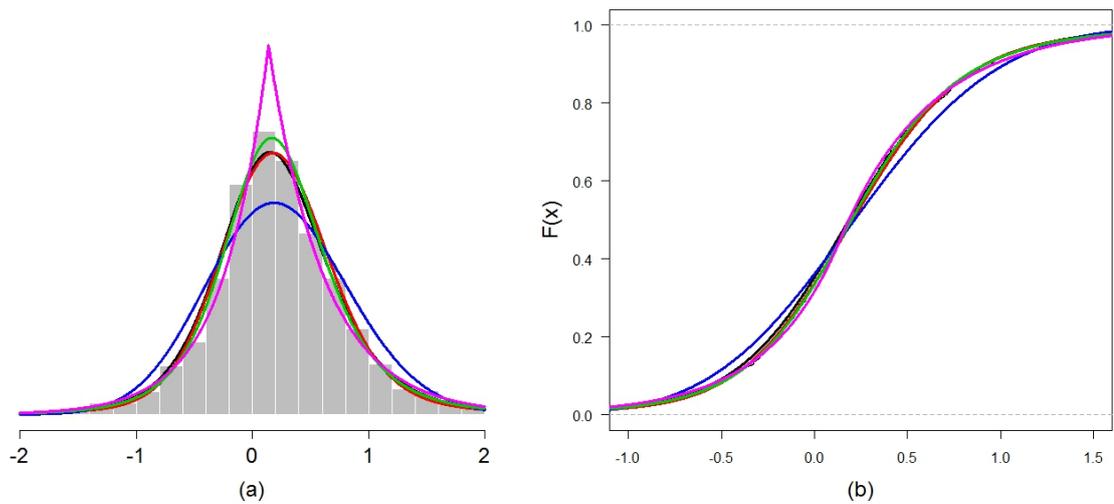


Figura 5.25: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

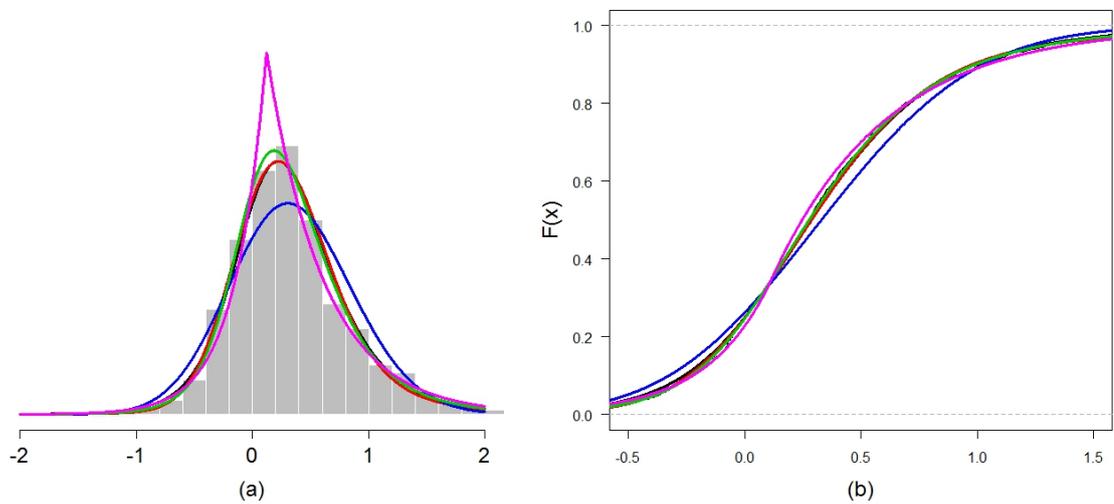


Figura 5.26: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

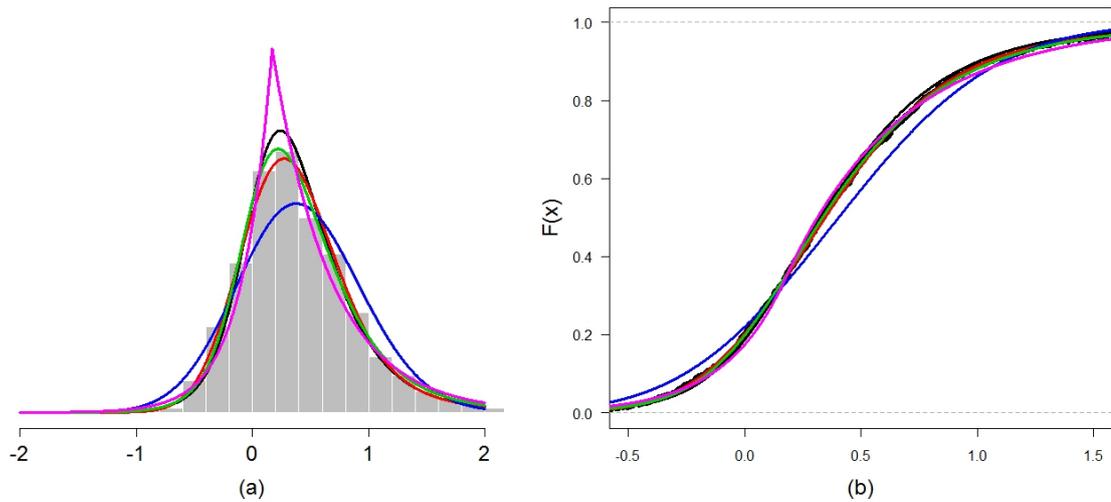


Figura 5.27: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1.5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

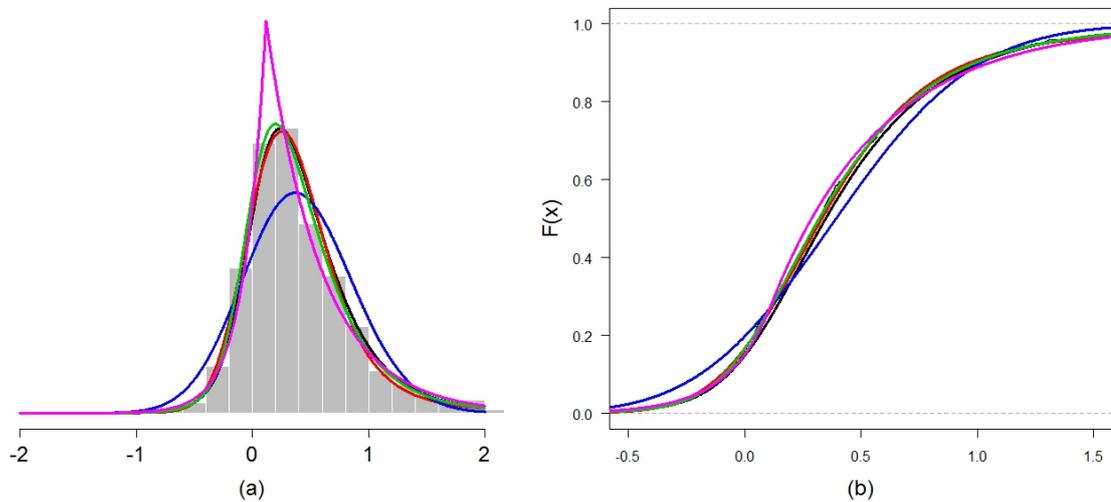


Figura 5.28: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 2.0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Observamos por meio das Figuras 5.25, 5.26, 5.27 e 5.28, que as distribuições normal assimétrica e Laplace assimétrica estimadas, não sugerem um bom ajuste, para todos os valores do parâmetro de assimetria  $\lambda$ .

Usando os critérios  $AIC$  e  $BIC$ , obtivemos, para os dados simulados com distribuição  $t$  de Student assimétrica, os resultados apresentados na Tabela 5.17.

Tabela 5.17: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\nu = 5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Resultados segundo os critérios  $AIC$  e  $BIC$ .

Distribuições	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1.0$		$\lambda = 1.5$		$\lambda = 2.0$	
	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$
$\alpha$ -estável	2116.7	2164.0	1468.8	1516.1	1439.6	1486.8	1164.3	1211.6
normal assimétrica	1872.2	1907.7	1576.6	1612.0	1603.8	1639.3	1360.7	1396.2
$t$ de Student assimétrica	<b>1732.6</b>	<b>1779.8</b>	<b>1453.9</b>	<b>1501.1</b>	<b>1436.2</b>	<b>1483.5</b>	<b>1149.7</b>	<b>1196.9</b>
Laplace assimétrica	1746.4	1781.8	1470.9	1506.4	1464.8	1500.3	1176.3	1211.7

Podemos observar que a distribuição geradora,  $t$  de Student assimétrica, apresenta um melhor ajuste em todas as variações do parâmetro de assimetria  $\lambda$ .

### 5.2.4 Resultados da simulação para a distribuição Laplace assimétrica

Realizamos a simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com tamanho de amostra  $n = 1000$ , e parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ , variando o parâmetro de assimetria em,  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 1.5$  e  $\lambda = 2.0$ , e modelando esses dados com as distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica.

Apresentamos a Tabela 5.18, com as estimativas dos parâmetros e os correspondentes erros padrão, para uma réplica de dados simulados com distribuição Laplace assimétrica.

Tabela 5.18: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Estimativas dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão.

Parâmetros	Estimativas dos parâmetros (erros padrão)			
	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2$
$\xi$	-0.0069 (0.0115)	0.0114 (0.0115)	-0.0130 (0.0130)	-0.0153 (0.0140)
$\omega$	0.4730 (0.0182)	0.4875 (0.0154)	0.5051 (0.0170)	0.5252 (0.0198)
$\lambda$	0.4889 (0.0174)	1.0212 (0.0285)	1.4746 (0.0458)	1.9223 (0.0686)

Observamos que as estimativas do parâmetro de assimetria  $\lambda$ , estão próximas ao verdadeiro valor do parâmetro, e que os correspondentes erros padrão são menores que 0.07.

Apresentamos a Tabela 5.19, com os erros quadráticos médios e os vieses estimados, para uma réplica de dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável.

Tabela 5.19: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Erros quadráticos médios e vieses dos estimadores.

Parâmetros	Erros quadráticos médios (vieses dos estimadores)			
	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2$
$\xi$	0.0002 (-0.0069)	0.0003 (0.0114)	0.0003 (-0.0130)	0.0004 (-0.0153)
$\omega$	0.0011 (-0.0270)	0.0004 (-0.0125)	0.0003 (0.0051)	0.0010 (0.0252)
$\lambda$	0.0004 (-0.0111)	0.0013 (0.0212)	0.0027 (-0.0254)	0.0107 (-0.0777)

Observamos que os erros quadráticos médios para o parâmetro de assimetria  $\lambda$ , são menores que 0.01, e que os valores absolutos dos vieses dos estimadores de  $\lambda$ , são menores que 0.08.

As Figuras 5.29, 5.30, 5.31, e 5.32 apresentam os histogramas e as distribuições empíricas dos dados simulados com distribuição Laplace assimétrica (linhas em preto), e as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linhas em vermelho), normal assimétrica (linhas em azul),  $t$  de Student assimétrica (linhas em verde) e Laplace assimétrica (linhas em lilás), para os valores do parâmetro de assimetria,  $\lambda = 0.5$ , Figura 5.29,  $\lambda = 1.0$ , Figura 5.30,  $\lambda = 1.5$ , Figura 5.31, e  $\lambda = 2.0$ , Figura 5.32.

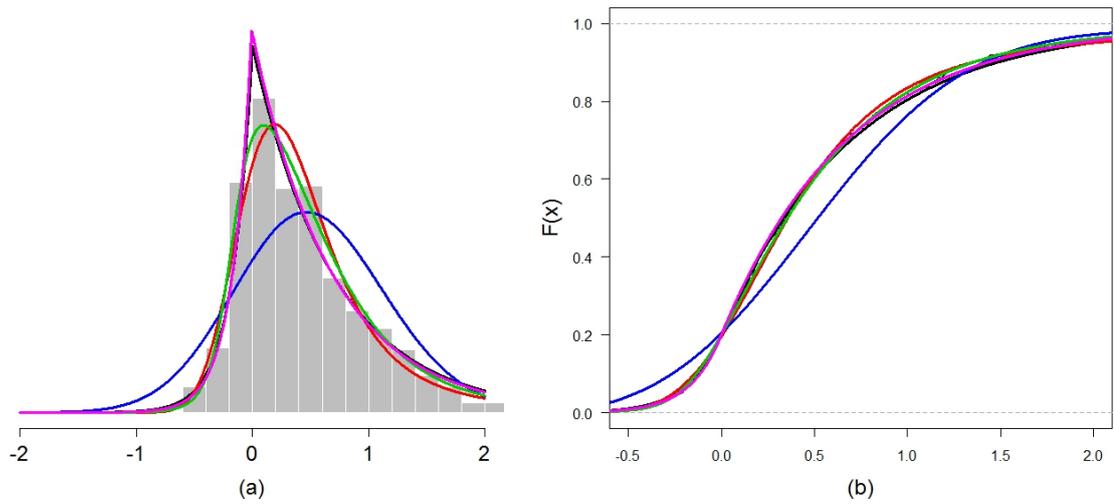


Figura 5.29: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

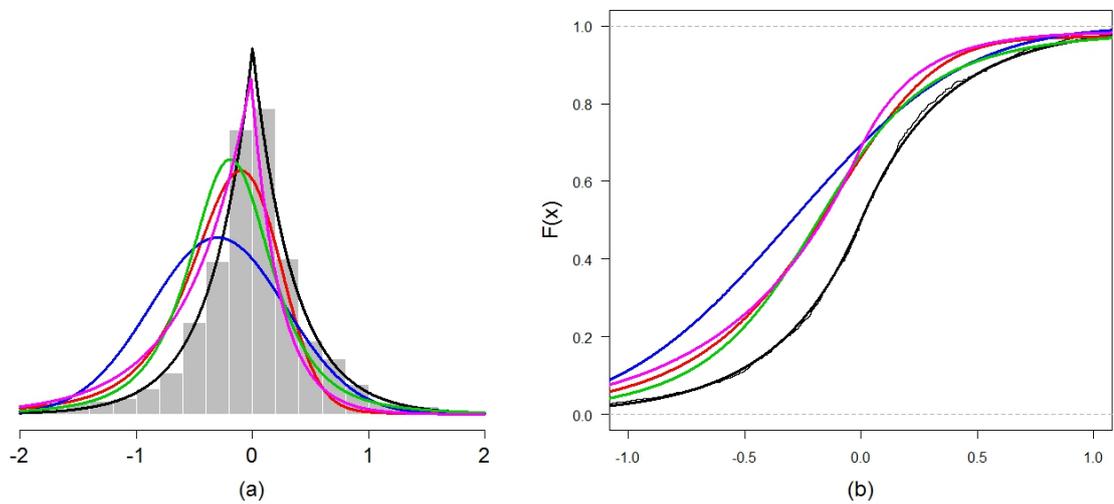


Figura 5.30: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1.0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

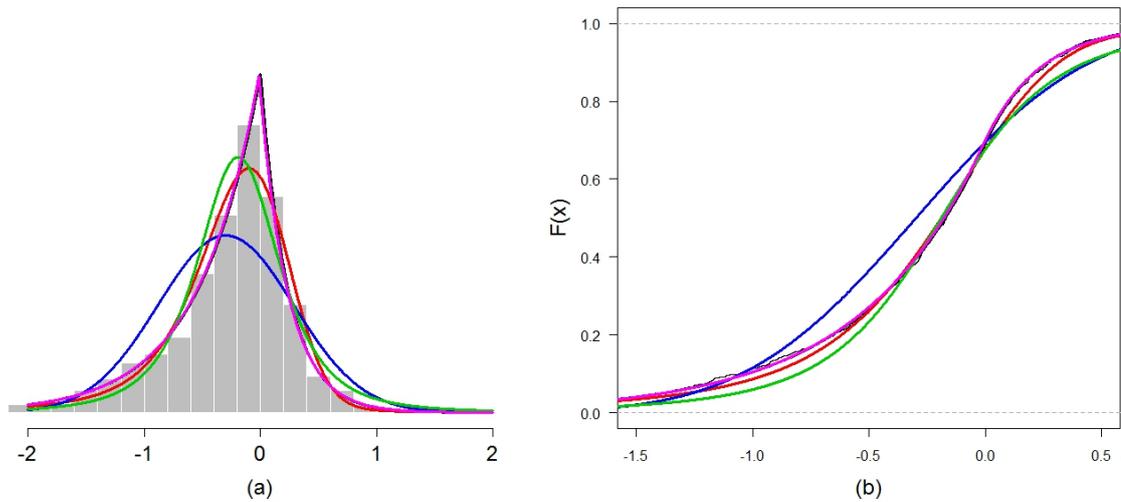


Figura 5.31: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 1.5$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

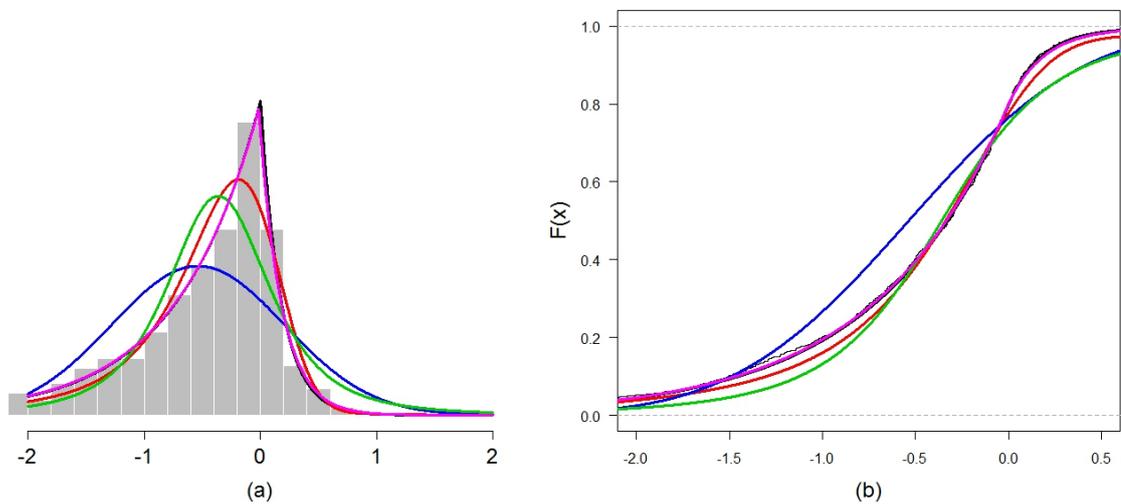


Figura 5.32: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica (linha em preto) com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 2.0$ , e modelados com distribuição  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás);  $n = 1000$ : (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Observamos por meio das Figuras 5.29, 5.30, 5.31 e 5.32, que a distribuição normal assimétrica estimada, não sugere um bom ajuste, para todas as variações no parâmetro de assimetria  $\lambda$ .

Usando os critérios  $AIC$  e  $BIC$ , obtivemos, para os dados simulados com distribuição Laplace assimétrica, os resultados apresentados na Tabela 5.20.

Tabela 5.20: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Resultados segundo os critérios  $AIC$  e  $BIC$ .

Distribuições	$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1.0$		$\lambda = 1.5$		$\lambda = 2.0$	
	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$	$AIC$	$BIC$
$\alpha$ -estável	1712.2	1759.4	1638.0	1685.2	1534.9	1582.1	1894.5	1941.8
normal assimétrica	2004.5	2039.9	1725.9	1761.4	1769.3	1804.7	2250.1	2285.6
$t$ de Student assimétrica	1679.5	1726.8	<b>1506.6</b>	<b>1553.9</b>	1607.8	1655.1	2069.1	2116.4
Laplace assimétrica	<b>1675.2</b>	<b>1710.6</b>	1584.1	1619.6	<b>1480.2</b>	<b>1515.7</b>	<b>1810.8</b>	<b>1846.3</b>

Podemos observar que a distribuição geradora, Laplace assimétrica, não apresentou um melhor ajuste, somente para a amostra simulada com valor do parâmetro de assimetria  $\lambda = 1.0$ .

### 5.3 Resultados da simulação - Parte III

Nesta seção, apresentamos os resultados da simulação Parte III, na qual, calculamos a cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros, tomando inicialmente valores fixos para os parâmetros e variando o tamanho das amostras, como descrito na Parte I, e em seguida calculamos a cobertura dos intervalos, fixando o tamanho das amostras e variando os valores do parâmetro de assimetria da distribuição geradora dos dados, como descrito na Parte II.

#### 5.3.1 Resultados da simulação para a distribuição $\alpha$ -estável

Realizamos a simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável, com parâmetros,  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ , com tamanhos de amostras,  $n = 30$ ,  $n = 100$ ,  $n = 1000$  e  $n = 10000$ , e replicamos a simulação 1000 vezes.

Apresentamos a Tabela 5.21, a seguir, com os resultados do cálculo da cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros, para 1000 réplicas de amostras de dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável.

Tabela 5.21: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.2$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

Parâmetros	Valores	Cobertura (%)			
		$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000(*)$
$\alpha$	1.65	92.6	96.2	96.2	94.7
$\beta$	0.40	93.4	95.5	94.3	92.8
$\gamma$	0.30	88.3	93.2	89.8	95.6
$\delta$	0.20	99.3	96.1	99.2	93.6

(\*) Para este tamanho de amostra foram feitas 640 réplicas

Observamos que a cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros da distribuição  $\alpha$ -estável é maior que 88.3% para todos os tamanhos de amostras.

Realizamos a simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável, com parâmetros,  $\alpha = 1.65$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$ , com tamanho de amostra  $n = 1000$ , e variamos o parâmetro de assimetria em  $\beta = -0.9$ ,  $\beta = 0$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\beta = 0.9$ , e replicamos a simulação 1000 vezes.

Apresentamos a Tabela 5.22, com os resultados do cálculo da cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros, para 1000 réplicas de amostras de dados simulados com distribuição  $\alpha$ -estável.

Tabela 5.22: Simulação de dados com distribuição  $\alpha$ -estável com parâmetros  $\alpha = 1.65$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0$  e variações no parâmetro  $\beta$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

Parâmetros	Cobertura (%)			
	$\beta = -0.9$	$\beta = 0$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.9$
$\alpha$	95.6	94.4	93.7	96.6
$\beta$	98.2	94.2	94.6	97.8
$\gamma$	95.7	94.5	93.5	94.8
$\delta$	95.1	95.3	94.8	94.5

Observamos que a cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros de assimetria  $\beta$ , da distribuição  $\alpha$ -estável é maior que 94.2% para todas as variações do parâmetro.

### 5.3.2 Resultados da simulação para a distribuição normal assimétrica

Realizamos a simulação de dados com distribuição normal assimétrica, com parâmetros,  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ , com tamanhos de amostras,  $n = 30$ ,  $n = 100$ ,  $n = 1000$  e  $n = 10000$ , e replicamos a simulação 1000 vezes.

Apresentamos a Tabela 5.23, com os resultados do cálculo da cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros, para 1000 réplicas de amostras de dados simulados com distribuição normal assimétrica.

Tabela 5.23: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.7$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

		Cobertura (%)			
Parâmetros	Valores	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
$\xi$	-0.20	99.9	100.0	99.8	95.4
$\omega$	0.50	83.2	81.6	82.9	96.5
$\lambda$	0.70	100.0	100.0	99.8	96.1

Observamos que a cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros da distribuição normal assimétrica é maior que 81.6% para todos os tamanhos de amostras.

Realizamos a simulação de dados com distribuição normal assimétrica, com parâmetros,  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ , com tamanho de amostra  $n = 1000$  e variamos o parâmetro de assimetria em  $\lambda = -0.9$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 0.5$  e  $\lambda = 0.9$ , e replicamos a simulação 1000 vezes.

Apresentamos a Tabela 5.24, a seguir, com os resultados do cálculo da cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros, para 1000 réplicas de amostras de dados simulados com distribuição normal assimétrica.

Tabela 5.24: Simulação de dados com distribuição normal assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

Parâmetros	Cobertura (%)			
	$\lambda = -0.9$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.9$
$\xi$	100	74.9	91.8	100.0
$\omega$	93.8	91.8	79.6	92.1
$\lambda$	100.0	79.6	97.9	100.0

Observamos que a cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros de assimetria  $\lambda$ , da distribuição normal assimétrica é maior que 79.6% para todas as variações do parâmetro.

### 5.3.3 Resultados da simulação para a distribuição $t$ de Student assimétrica

Realizamos a simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica, com parâmetros,  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ , com tamanhos de amostras,  $n = 30$ ,  $n = 100$ ,  $n = 1000$  e  $n = 10000$ , e replicamos a simulação 1000 vezes.

Apresentamos a Tabela 5.25, com os resultados do cálculo da cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros, para 1000 réplicas de amostras de dados simulados com distribuição  $t$  de Student assimétrica.

Tabela 5.25: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ ,  $\nu = 5$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

Parâmetros	Valores	Cobertura (%)			
		$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
$\xi$	-0.20	87.3	92.4	94.4	95.3
$\omega$	0.50	88.4	94.1	94.0	94.9
$\lambda$	0.60	100.0	99.9	95.6	95.3
$\nu$	5	87.6	91.5	94.9	95.0

Observamos que a cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros da distribuição  $t$  de Student assimétrica é maior que 87.3% para todos os tamanhos de amostras.

Realizamos a simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica, com parâmetros,  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\nu = 5$ , com tamanho de amostra  $n = 1000$  e variamos o parâmetro de assimetria em  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 1.5$  e  $\lambda = 2$ , e replicamos a simulação 1000 vezes.

Apresentamos a Tabela 5.26, com os resultados do cálculo da cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros, para 1000 réplicas de amostras de dados simulados com distribuição  $t$  de Student assimétrica.

Tabela 5.26: Simulação de dados com distribuição  $t$  de Student assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\nu = 5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

Parâmetros	Cobertura (%)			
	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2$
$\xi$	100.0	100.0	100.0	100.0
$\omega$	92.6	92.5	94.8	95.9
$\lambda$	94.0	93.9	95.9	95.2
$\nu$	95.5	95.5	94.8	94.5

Observamos que a cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros de assimetria  $\lambda$ , da distribuição  $t$  de Student assimétrica é maior que 93.9% para todas as variações do parâmetro.

### 5.3.4 Resultados da simulação para a distribuição Laplace assimétrica

Realizamos a simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica, com parâmetros,  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ , com tamanhos de amostras,  $n = 30$ ,  $n = 100$ ,  $n = 1000$  e  $n = 10000$ , e replicamos a simulação 1000 vezes.

Apresentamos a Tabela 5.27, com os resultados do cálculo da cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros, para 1000 réplicas de amostras de dados simulados com distribuição Laplace assimétrica.

Tabela 5.27: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros  $\xi = -0.2$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $\lambda = 0.6$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

		Cobertura (%)			
Parâmetros	Valores	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
$\xi$	-0.20	95.3	95.3	84.2	84.2
$\omega$	0.50	86.6	90.5	94.9	95.5
$\lambda$	0.60	72.1	80.3	86.7	91.1

Observamos que a cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros da distribuição Laplace assimétrica é maior que 72.1% para todos os tamanhos de amostras.

Realizamos a simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica, com parâmetros,  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$ , com tamanho de amostra  $n = 1000$  e variamos o parâmetro de assimetria em  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 1.5$  e  $\lambda = 2$ , e replicamos a simulação 1000 vezes.

Apresentamos a Tabela 5.28, com os resultados do cálculo da cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros, para 1000 réplicas de amostras de dados simulados com distribuição Laplace assimétrica.

Tabela 5.28: Simulação de dados com distribuição Laplace assimétrica com parâmetros  $\xi = 0$ ,  $\omega = 0.5$  e variações no parâmetro  $\lambda$ : Cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

		Cobertura (%)			
Parâmetros		$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.5$	$\lambda = 2$
$\xi$		100.0	100.0	100.0	100.0
$\omega$		94.2	95.1	95.0	92.7
$\lambda$		89.1	89.5	89.7	90.6

Observamos que a cobertura dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros de assimetria  $\lambda$ , da distribuição Laplace assimétrica é maior que 89.1% para todas as variações do parâmetro.

## 5.4 Discussão dos resultados da simulação

Elaboramos dois quadros, com o resumo dos resultados da simulação, segundo os critérios *AIC* e *BIC*.

O Quadro 5.1 apresenta os resultados da simulação Parte I, ou seja, com as alterações no tamanho da amostra, e o Quadro 5.2 apresenta os resultados da simulação Parte II, com as alterações nos parâmetros de assimetria.

<b>Quadro 5.1:</b> Resumo com os resultados da simulação - Parte I				
Distribuição geradora	Distribuição estimada com melhor ajuste			
	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10000$
$\alpha$ -estável	Laplace assimétrica	$\alpha$ -estável	$\alpha$ -estável	$\alpha$ -estável
normal assimétrica	normal assimétrica	normal assimétrica	normal assimétrica	normal assimétrica
$t$ de Student assimétrica	Laplace assimétrica	$t$ de Student assimétrica	$t$ de Student assimétrica	$t$ de Student assimétrica
Laplace assimétrica	normal assimétrica	Laplace assimétrica	Laplace assimétrica	Laplace assimétrica

<b>Quadro 5.2:</b> Resumo com os resultados da simulação - Parte II				
Distribuição geradora	Distribuição estimada com melhor ajuste			
	$\beta=-0.9;\lambda=-0.9;\lambda=0.5$	$\beta=0;\lambda=0;\lambda=1$	$\beta=0.5;\lambda=0.5;\lambda=1.5$	$\beta=0.9;\lambda=0.9;\lambda=2.0$
$\alpha$ -estável	$\alpha$ -estável	$\alpha$ -estável	$\alpha$ -estável	$\alpha$ -estável
normal assimétrica	normal assimétrica	normal assimétrica	normal assimétrica	normal assimétrica
$t$ de Student assimétrica	$t$ de Student assimétrica	$t$ de Student assimétrica	$t$ de Student assimétrica	$t$ de Student assimétrica
Laplace assimétrica	Laplace assimétrica	$t$ de Student assimétrica	Laplace assimétrica	Laplace assimétrica

A distribuição Laplace assimétrica apresentou um melhor ajuste quando as distribuições geradoras eram a  $\alpha$ -estável e  $t$  de Student assimétrica, para as amostras de tamanho  $n = 30$ . Esse resultado é interessante, pois a distribuição Laplace assimétrica possui três parâmetros, enquanto que as geradoras possuem quatro parâmetros. No entanto, quando as observações são geradas de uma distribuição Laplace assimétrica, ela não

apresentou um melhor ajuste para o tamanho de amostra  $n = 30$ , sendo a distribuição normal assimétrica a que apresentou o melhor ajuste neste caso.

Também, elaboramos um quadro com o resumo dos resultados da simulação, segundo as coberturas dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros das distribuições.

O Quadro 5.3, apresenta os resultados da simulação Parte III, com a menor cobertura dos Intervalos de Confiança, para as simulações com as alterações no tamanho da amostra, e com as alterações no parâmetro de assimetria.

Quadro 5.3: Resumo com os resultados da simulação - Parte III				
Distribuição	Menor cobertura dos Intervalos de Confiança de 95%			
	Variação no tamanho da amostra		Variação no parâmetro de assimetria	
	Probabilidade(%)	Amostra(*)	Probabilidade(%)	Parâmetro
$\alpha$ -estável	88.3	$n = 30$ ( $\gamma$ )	94.2	$\beta = 0$
normal assimétrica	81.6	$n = 100$ ( $\omega$ )	79.6	$\lambda = 0$
$t$ de Student assimétrica	87.3	$n = 30$ ( $\xi$ )	93.9	$\lambda = 1$
Laplace assimétrica	72.1	$n = 30$ ( $\lambda$ )	89.1	$\lambda = 0.5$

(\*) Parâmetro na amostra com a menor cobertura.

Quanto às coberturas dos Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros das distribuições, temos que a distribuição Laplace assimétrica foi a que apresentou um menor percentual de cobertura para as simulações com variação no tamanho da amostra, ou seja, um percentual de 72.1% para a amostra de tamanho  $n = 30$ , sendo o parâmetro de assimetria,  $\lambda$ , quem apresentou esse menor percentual. Para as simulações com variação no parâmetro de assimetria, a distribuição normal assimétrica, foi a que apresentou menor percentual, 79.6%, no parâmetro de assimetria, para o valor de  $\lambda = 0$ .

# Capítulo 6

## Aplicações a dados reais

Na aplicação deste trabalho, utilizamos três diferentes tipos de dados reais. Sendo o primeiro constituído de dados de expressão gênica, com os valores da expressão gênica do peixe “Zebrafish”, o segundo constituído de dados financeiros do índice da bolsa de valores de São Paulo-SP, Brasil, e o terceiro com dados de *commodity* soja, constituído dos valores em reais da saca de 60kg.

Apresentamos neste capítulo, os resultados encontrados para os três bancos de dados.

### 6.1 Ajuste de dados de expressão gênica

Os dados de expressão gênica são de um experimento conhecido na literatura de *microarrays*, como o “Swirl Zebrafish”, Ferreira & Filho (2009). Esse experimento foi realizado utilizando o peixe “Zebrafish” como organismo modelo para o estudo de crescimento em vertebrados, a amostra dos dados é constituída de 33.792 observações.

Para este conjunto de dados, calculamos os coeficientes de assimetria expostos no Capítulo 2, item 2.3, e apresentamos os resultados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Dados de expressão gênica do “Swirl Zebrafish”:  
Resultados dos coeficientes de assimetria.

Coeficientes	$A_s^{(*)}$	Interpretação
Pearson	-0.0174	distribuição assimétrica à esquerda
Bowley	-0.0377	distribuição assimétrica à esquerda
Kelley	-0.0308	distribuição assimétrica à esquerda
Fisher	$\approx 0$	distribuição simétrica

Podemos observar que o conjunto de dados de expressão gênica possui distribuição assimétrica à esquerda, segundo a maioria dos coeficientes. Apenas o coeficiente de Fisher indica que a distribuição se apresenta aproximadamente simétrica, e o 1º Coeficiente de assimetria de Pearson indica que o grau da assimetria é fraca.

Estimamos os parâmetros das distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica para os dados de expressão gênica, e calculamos os Intervalos de Confiança assintóticos para esses mesmos parâmetros, conforme já foi descrito no Capítulo 4, item 4.1. Organizamos os resultados encontrados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Dados de expressão gênica do “Swirl Zebrafish”: Estimativas, correspondentes erros padrão e Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

Distribuições	Parâmetros	Estimativas	Erros padrão	2.5%	97.5%
$\alpha$ -estável	$\alpha$	1.9160	0.0055	1.9053	1.9267
	$\beta$	<b>0.2257</b>	0.0560	0.1160	0.3354
	$\gamma$	0.3103	0.0014	0.3076	0.3130
	$\delta$	-0.2888	0.0026	-0.2940	-0.2837
normal assimétrica	$\xi$	-0.6112	0.0064	-0.6265	-0.5958
	$\omega$	0.5789	0.0048	0.5694	0.5884
	$\lambda$	<b>0.9999</b>	0.0314	0.9393	1.0605
$t$ de Student assimétrica	$\xi$	-0.3673	0.0199	-0.4064	-0.3282
	$\omega$	0.4187	0.0042	0.4105	0.4269
	$\lambda$	<b>0.2208</b>	0.0580	0.1071	0.3344
	$\nu$	8.5805	0.3043	7.9841	9.1770
Laplace assimétrica	$\xi$	-0.2607	0.0042	-0.2689	-0.2525
	$\omega$	0.5203	0.0029	0.5148	0.5259
	$\lambda$	<b>1.0350</b>	0.0071	1.0211	1.0489

Realizando o teste de significância para os parâmetros de assimetria das distribuições, conforme descrito no Capítulo 4, item 4.1, podemos afirmar que existem evidências amostrais de que os parâmetros  $\beta$  da distribuição  $\alpha$ -estável e  $\lambda$  das distribuições normal,  $t$  de Student e Laplace assimétricas, sejam significativos (p-valores  $< 0.01$ ), para os dados de expressão gênica, ao nível de 5% de significância.

Construímos o histograma, Figura 6.1(a), e a distribuição empírica dos dados, Figura 6.1(b), com as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás).

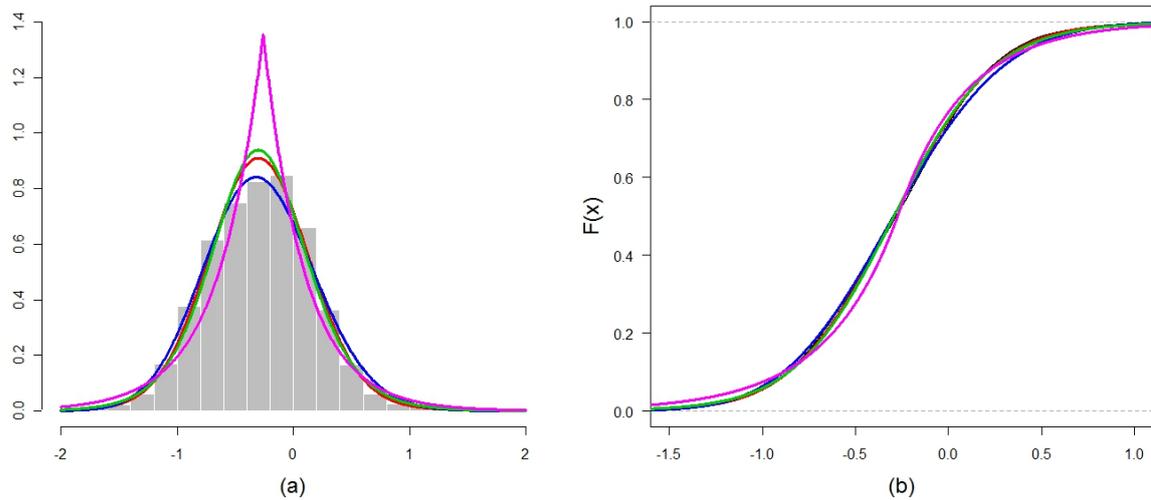


Figura 6.1: Dados de expressão gênica do “Swirl Zebrafish”: (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Podemos observar por meio da Figura 6.1 que todas as distribuições assimétricas sugerem um bom ajuste, para os dados de expressão gênica.

Usando os critérios de seleção de modelos  $AIC$  e  $BIC$ , temos os resultados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Dados de expressão gênica do “Swirl Zebrafish”: Resultados segundo os critérios de seleção de modelos  $AIC$  e  $BIC$ .

Distribuições	AIC	BIC
$\alpha$ -estável	<b>43768.28</b>	<b>43843.70</b>
normal assimétrica	45901.85	45958.41
$t$ de Student assimétrica	44190.40	44265.83
Laplace assimétrica	46898.73	46955.30

Os resultados segundo os critérios de seleção de modelos  $AIC$  e  $BIC$ , indicam que a distribuição  $\alpha$ -estável é a que apresenta melhor ajuste.

## 6.2 Ajuste de dados financeiros

Os dados financeiros da bolsa de valores de São Paulo-SP, Brasil, é um histórico de cotações do índice BOVESPA, do período de 01 janeiro de 1995 a 31 dezembro de 1997. Essas observações foram retiradas do *site* <<http://cotacoes.economia.uol.com.br/bolsas/index.html?indice=.BVSP>>, com acesso em 23 março de 2011, a amostra dos dados é constituída de 742 observações.

Fizemos o gráfico da série original, Figura 6.2(a), dos dados do índice BOVESPA, no qual observamos uma não estacionariedade na média e na variância. O comportamento da função de autocorrelação (FAC), Figura 6.2(b), indica autocorrelação das observações.

Calculamos o retorno da série, ou seja, a razão entre o dia atual e o anterior, conforme descrito em Morettin (2008) e Taylor (1986), e também aplicamos o logaritmo no retorno da série, e obtivemos a estacionariedade na média para as duas transformações, dados de retorno, Figura 6.3(a), e dados do logaritmo do retorno, Figura 6.4(a), conforme o teste o Dickey-Fuller (Said & Dickey (1984)), (p-valor = 0.01). O comportamento das funções de autocorrelação dos dados de retorno, Figura 6.3(b), e dados do logaritmo do retorno, Figura 6.4(b), indicam ausência de autocorrelação para defasagem igual a 1.

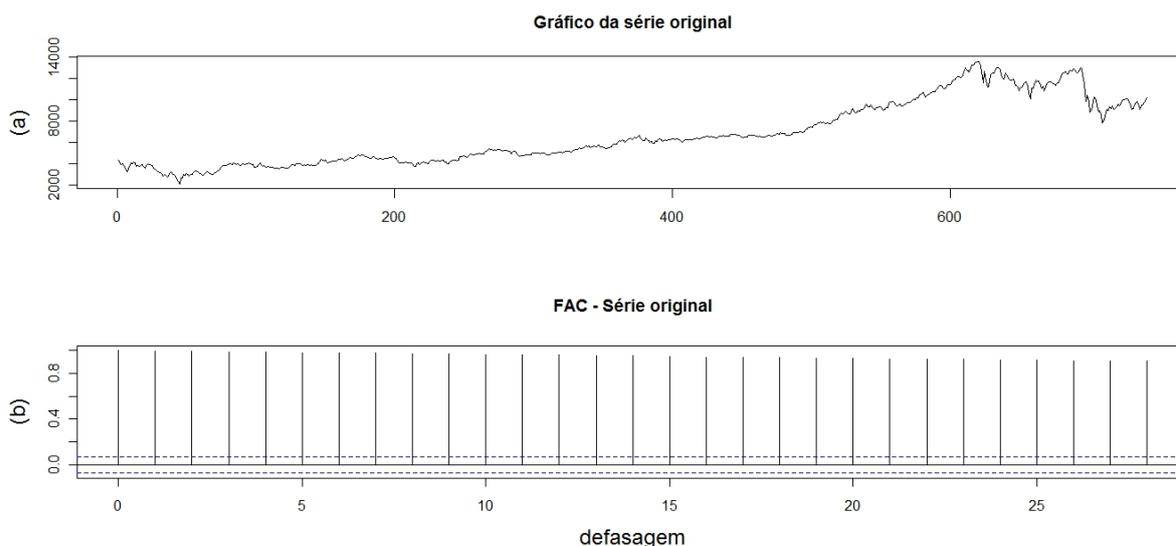


Figura 6.2: Dados financeiros originais do índice BOVESPA: (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação.

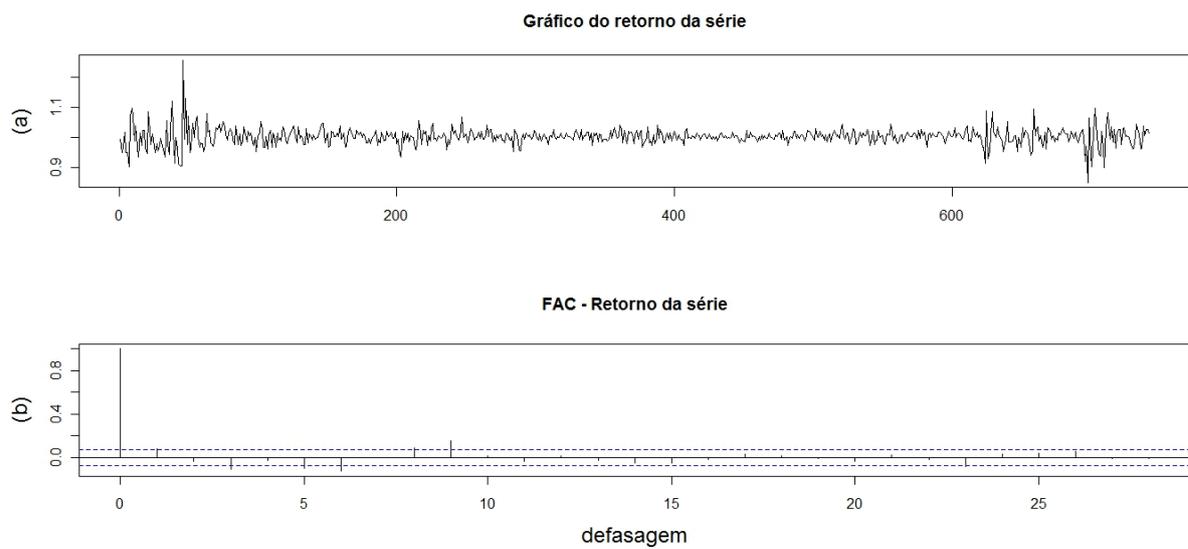


Figura 6.3: Dados financeiros de retorno do índice BOVESPA: (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação.

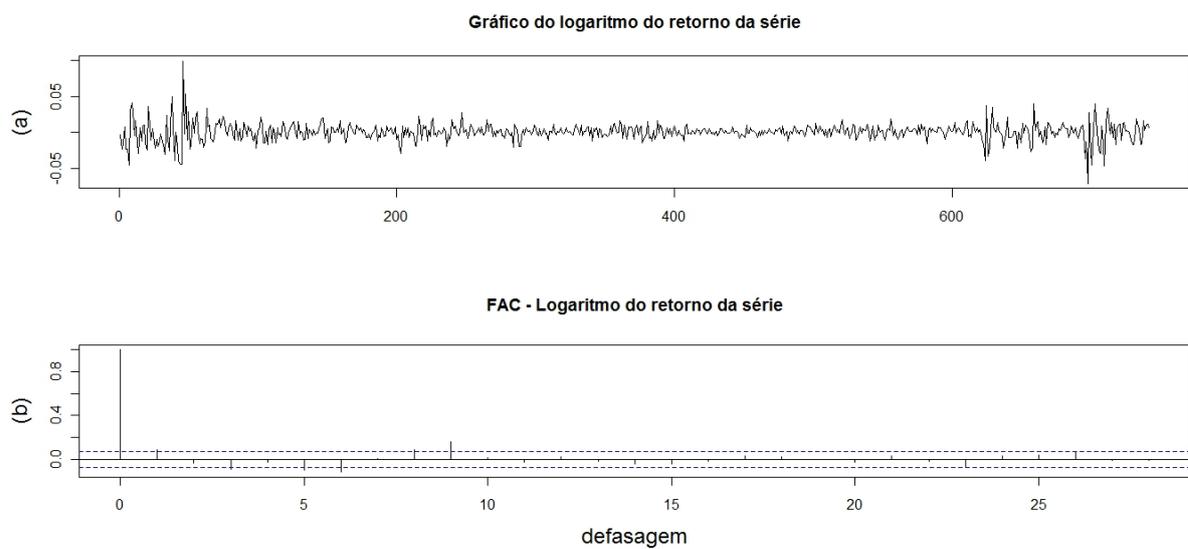


Figura 6.4: Dados financeiros do logaritmo do retorno do índice BOVESPA: (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação.

Calculamos os coeficientes de assimetria apresentados no Capítulo 2, item 2.3, para os dados de retorno e para o logaritmo do retorno, e apresentamos os resultados na Tabela 6.4.

Tabela 6.4: Dados financeiros de retorno e logaritmo do retorno do índice BOVESPA: Resultados dos coeficientes de assimetria.

Coeficientes	Dados de retorno		Dados do logaritmo do retorno	
	$A_s^{(*)}$	Interpretação	$A_s^{(*)}$	Interpretação
Pearson	-0.1265	assimétrica à esquerda	-0.1694	assimétrica à esquerda
Bowley	-0.0148	assimétrica à esquerda	-0.0330	assimétrica à esquerda
Kelley	-0.1161	assimétrica à esquerda	-0.4750	assimétrica à esquerda
Fisher	$\approx 0$	simétrica	$\approx 0$	simétrica

Observamos que o conjunto de dados financeiros do índice BOVESPA, possui distribuição assimétrica à esquerda, tanto para os dados de retorno como para os dados do logaritmo do retorno, segundo os valores dos coeficientes de assimetria. Apenas o coeficiente de Fisher indica que as distribuições são aproximadamente simétricas. Para os dados de retorno, o 1º Coeficiente de Pearson apresenta um grau de assimetria fraca, e moderada para o logaritmo do retorno.

Estimamos os parâmetros e os correspondente erros padrão das distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica para os dados financeiros do índice BOVESPA. Calculamos os seus Intervalos de Confiança assintóticos de acordo com o descrito no Capítulo 4, item 4.1 e apresentamos os resultados encontrados na Tabela 6.5 para os dados de retorno e na Tabela 6.6 para os dados do logaritmo do retorno.

Tabela 6.5: Dados financeiros de retorno do índice BOVESPA: Estimativas, correspondentes erros padrão e Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

Distribuições	Parâmetros	Estimativas	Erros padrão	2.5%	97.5%
$\alpha$ -estável	$\alpha$	1.5327	0.0596	1.4159	1.6494
	$\beta$	<b>-0.2207</b>	0.1078	-0.4319	-0.0094
	$\gamma$	0.0133	0.0005	0.0122	0.0144
	$\delta$	1.0003	0.0012	0.9978	1.0027
normal assimétrica	$\xi$	0.9826	0.0023	0.9781	0.9871
	$\omega$	0.0340	0.0015	0.0310	0.0371
	$\lambda$	<b>0.9999</b>	0.1482	0.7093	1.2905
$t$ de Student assimétrica	$\xi$	1.0023	0.0024	0.9975	1.0071
	$\omega$	0.0163	0.0008	0.0146	0.0179
	$\lambda$	0.0001	0.1629	-0.3191	0.3193
	$\nu$	2.6660	0.3130	2.0525	3.2796
Laplace assimétrica	$\xi$	1.0035	0.0009	1.0017	1.0052
	$\omega$	0.0262	0.0010	0.0243	0.0281
	$\lambda$	1.0533	0.0377	0.9794	1.1272

Tabela 6.6: Dados financeiros do logaritmo do retorno do índice BOVESPA: Estimativas, correspondentes erros padrão e Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

Distribuições	Parâmetros	Estimativas	Erros padrão	2.5%	97.5%
$\alpha$ -estável	$\alpha$	1.4000	0.0585	1.2853	1.5147
	$\beta$	<b>-0.2000</b>	0.0980	-0.3922	-0.0078
	$\gamma$	0.0057	0.0002	0.0052	0.0060
	$\delta$	-0.0002	0.0007	-0.0016	0.0012
normal assimétrica	$\xi$	-0.0066	0.0012	-0.0090	-0.0043
	$\omega$	0.0142	0.0007	0.0128	0.0155
	$\lambda$	<b>0.8310</b>	0.1607	0.5160	1.1459
$t$ de Student assimétrica	$\xi$	0.0011	0.0009	-0.0007	0.0028
	$\omega$	0.0064	0.0003	0.0059	0.0071
	$\lambda$	0.0001	0.1442	-0.2825	0.2828
	$\nu$	2.0000	0.1784	1.6504	2.3496
Laplace assimétrica	$\xi$	0.0011	0.0005	0.0002	0.0020
	$\omega$	0.0115	0.0004	0.0107	0.0123
	$\lambda$	1.0000	0.0379	0.9258	1.0742

Realizando o teste de significância para os parâmetros de assimetria das distribuições, conforme descrito no Capítulo 4, item 4.1, podemos afirmar que existem evidências amostrais de que os parâmetros  $\beta$  da distribuição  $\alpha$ -estável e  $\lambda$  da distribuição normal assimétrica, sejam significativos (p-valores  $< 0.05$ ), para os dados de retorno e logaritmo do retorno do índice BOVESPA, ao nível de 5% de significância. No entanto, encontramos evidências amostrais de que os parâmetros  $\lambda$  das distribuições  $t$  de Student e Laplace assimétricas, não sejam significativos (p-valores  $> 0.15$ ), para os ambos os conjuntos de dados, ao nível de 5% de significância.

Construímos o histograma, Figura 6.5(a), e a distribuição empírica, Figura 6.5(b), para os dados de retorno, com as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás). Também, construímos o histograma, Figura 6.6(a), e a distribuição empírica, Figura 6.6(b), para o logaritmo dos dados de retorno, com as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás).

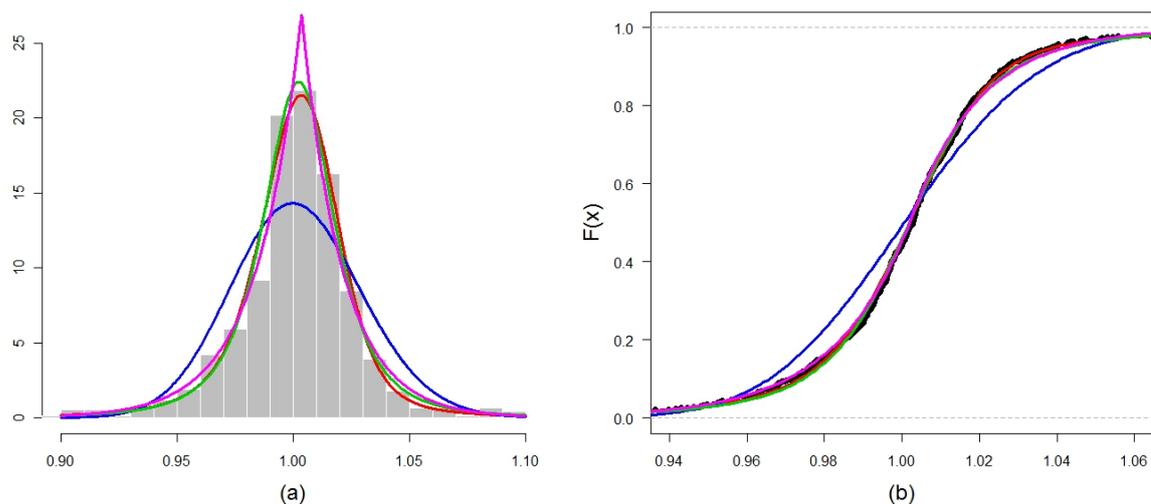


Figura 6.5: Dados financeiros de retorno do índice BOVESPA: (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

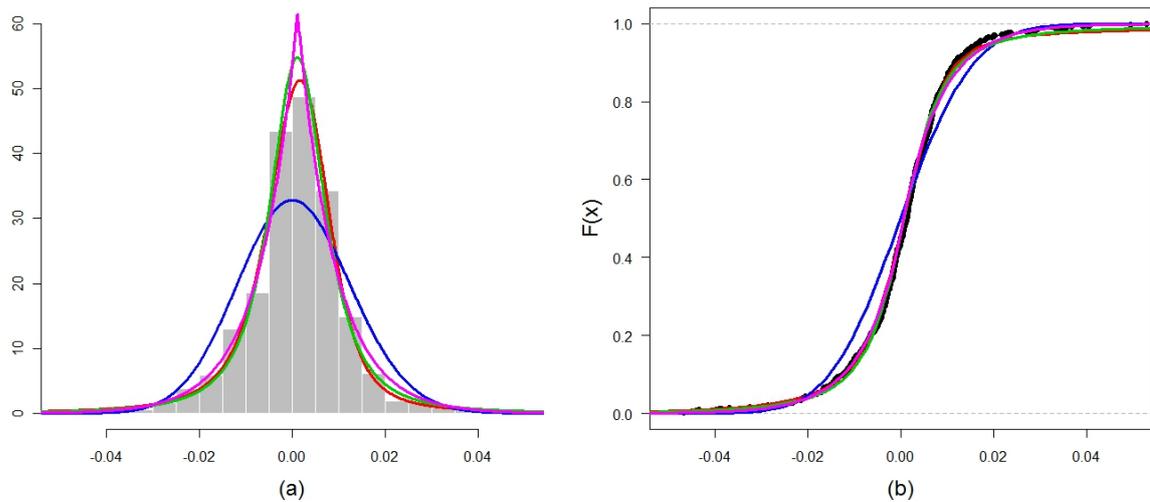


Figura 6.6: Dados financeiros do logaritmo do retorno do índice BOVESPA: (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Observamos por meio das Figuras 6.5 e 6.6 que todas as distribuições sugerem um bom ajuste, para os dados financeiros de retorno e do logaritmo do retorno do índice BOVESPA.

Usamos os critérios de seleção de modelos  $AIC$  e  $BIC$ , e apresentamos os resultados na Tabela 6.7.

Tabela 6.7: Dados financeiros de retorno e do logaritmo do retorno do índice BOVESPA: Resultado segundo os critérios de seleção de modelos  $AIC$  e  $BIC$ .

Distribuições	Dados de retorno		Dados do logaritmo do retorno	
	AIC	BIC	AIC	BIC
$\alpha$ -estável	-3402.090	-3357.215	-4636.851	-4591.976
normal assimétrica	-3194.277	-3160.621	-4434.254	-4400.598
$t$ de Student assimétrica	<b>-3407.904</b>	<b>-3365.029</b>	<b>-4639.935</b>	<b>-4595.060</b>
Laplace assimétrica	-3398.357	-3364.701	-4635.325	-4594.668

Os resultados dos critérios  $AIC$  e  $BIC$ , apontaram que a distribuição  $t$  de Student assimétrica é a que apresenta melhor ajuste, para os dados financeiros de retorno e logaritmo do retorno do índice BOVESPA.

### 6.3 Ajuste de dados de *commodity*

Os dados de *commodity* soja consiste em um histórico de cotações de uma *commodity*, com valores em reais da saca de soja de 60kg no período de 29 de julho de 1997 a 24 de junho de 2005. Essas observações foram retiradas do *site* <<http://www.boletimpecuario.com.br/cotacoes.htm>>, com acesso em 01 julho de 2011, a amostra dos dados é constituída de 1.962 observações.

Observamos que o gráfico da série original, Figura 6.7(a), para os dados de *commodity* soja, apresentam uma não estacionariedade na média e na variância, e a FAC, Figura 6.7(b), indica que os dados originais são correlacionados.

Calculamos o retorno dos dados, conforme descrito em Morettin (2008) e Taylor (1986) para tornar a série original estacionária, e também calculamos o logaritmo do retorno. Obtivemos a estacionariedade na média, Figura 6.8(a), para os dados de retorno, e para o logaritmo dos dados de retorno, Figura 6.9(a), conforme teste Dickey-Fuller (Said & Dickey (1984)), (p-valor = 0,01). Podemos observar que o comportamento da FAC indica ausência de autocorrelação para defasagem igual a 1, para os dados de retorno, Figura 6.8(b), e para o logaritmo dos dados de retorno, Figura 6.9(b).

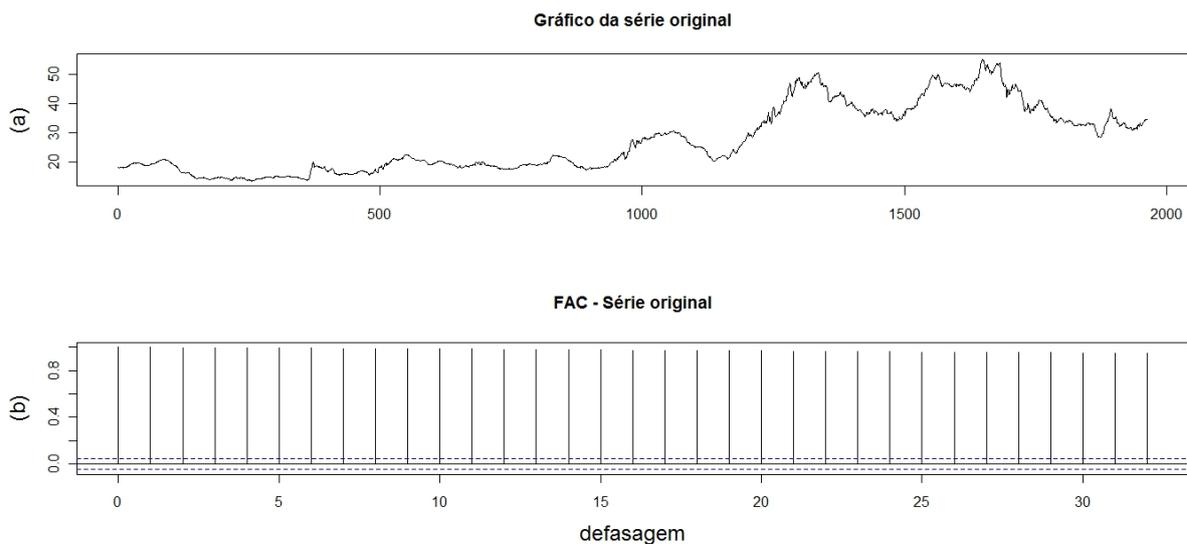


Figura 6.7: Dados originais de *commodity* soja (saca 60kg): (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação.

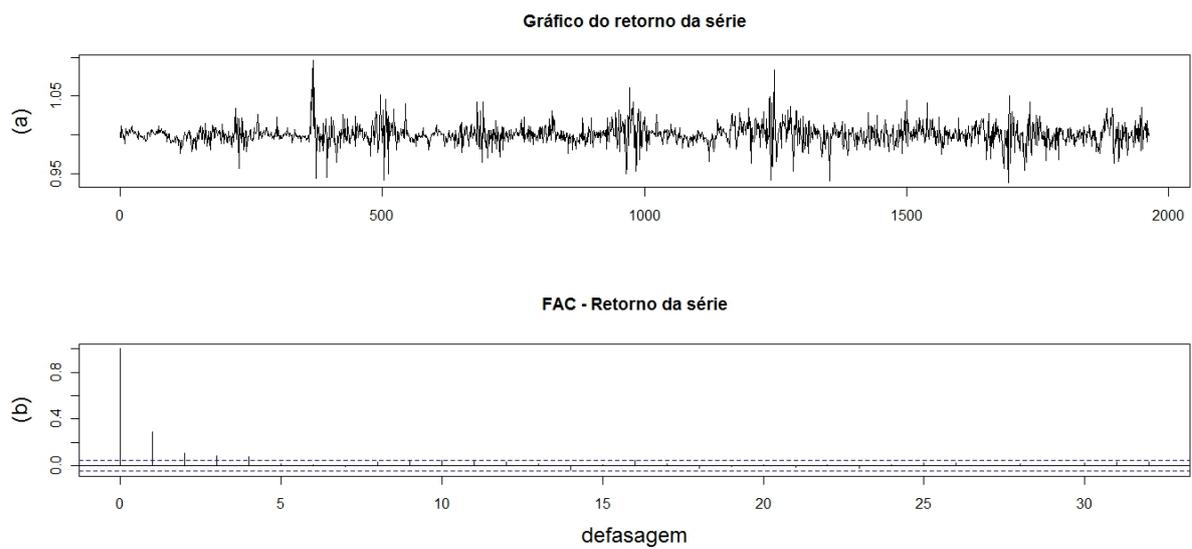


Figura 6.8: Dados de retorno de *commodity* soja (saca 60kg): (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação.

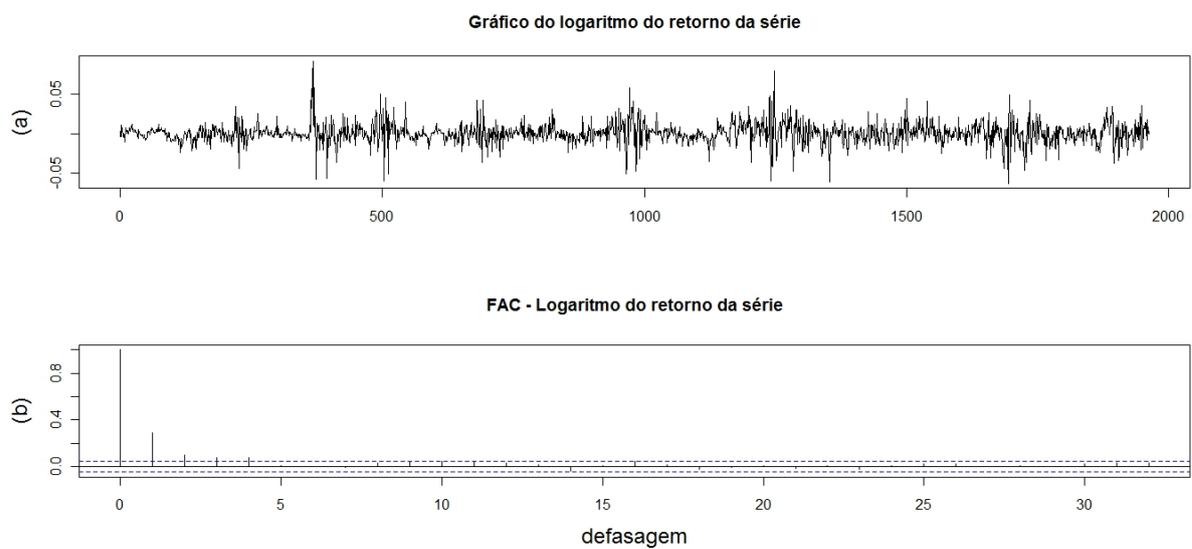


Figura 6.9: Dados do logaritmo do retorno de *commodity* soja (saca 60kg): (a) Gráfico da série e (b) Gráfico da função de autocorrelação.

Calculamos os coeficientes de assimetria apresentados no Capítulo 2, item 2.3, para os dados de retorno e o logaritmo do retorno, apresentando os resultados na Tabela 6.8.

Tabela 6.8: Dados de retorno e logaritmo do retorno de *commodity* soja (saca 60kg): Resultados dos coeficientes de assimetria.

Coeficientes	Dados de retorno		Dados do logaritmo do retorno	
	$A_s^{(*)}$	Interpretação	$A_s^{(*)}$	Interpretação
Pearson	0.0962	assimétrica à direita	0.0772	assimétrica à direita
Bowley	0.0435	assimétrica à direita	0.0106	assimétrica à direita
Kelley	0.0487	assimétrica à direita	0.0935	assimétrica à direita
Fisher	$\approx 0$	simétrica	$\approx 0$	simétrica

Observamos que o conjunto de dados de *commodity* soja, possui distribuição assimétrica à direita, tanto para os dados de retorno como para o logaritmo dos dados de retorno, segundo os valores dos coeficientes de assimetria. Apenas o coeficiente de Fisher indica que as distribuições são aproximadamente simétricas, e o 1º Coeficiente de Pearson apresenta um grau de assimetria fraca, para ambos os conjuntos de dados.

Estimamos os parâmetros e os correspondentes erros padrão das distribuições  $\alpha$ -estável, normal assimétrica, *t* de Student assimétrica e Laplace assimétrica para os dados de *commodity* soja (saca 60kg). Calculamos os seus correspondentes Intervalos de Confiança assintóticos, conforme descrito no Capítulo 4, item 4.1. Apresentamos os resultados para os dados de retorno na Tabela 6.9 e para os dados do logaritmo do retorno na Tabela 6.10.

Tabela 6.9: Dados de retorno de *commodity* soja (saca 60kg): Estimativas, correspondentes erros padrão e Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

Distribuições	Parâmetros	Estimativas	Erros padrão	2.5%	97.5%
$\alpha$ -estável	$\alpha$	1.4987	0.0397	1.4208	1.5765
	$\beta$	0.1007	0.0631	-0.0230	0.2243
	$\gamma$	0.0063	0.0002	0.0060	0.0066
	$\delta$	1.0006	0.0004	0.9998	1.0013
normal assimétrica	$\xi$	0.9917	0.0007	0.9904	0.9931
	$\omega$	0.0155	0.0005	0.0146	0.0164
	$\lambda$	<b>0.9999</b>	0.1024	0.7992	1.2006
<i>t</i> de Student assimétrica	$\xi$	0.9931	0.0010	0.9912	0.9950
	$\omega$	0.0115	0.0010	0.0095	0.0135
	$\lambda$	<b>1.1438</b>	0.1707	0.8093	1.4783
	$\nu$	5.0338	1.2293	2.6243	7.4433
Laplace assimétrica	$\xi$	0.9999	0.0003	0.9993	1.0005
	$\omega$	0.0123	0.0003	0.0118	0.0129
	$\lambda$	0.9720	0.0228	0.9272	1.0167

Tabela 6.10: Dados do logaritmo do retorno de *commodity* soja (saca 60kg): Estimativas, correspondentes erros padrão e Intervalos de Confiança de 95% para os parâmetros.

Distribuições	Parâmetros	Estimativas	Erros padrão	2.5%	97.5%
$\alpha$ -estável	$\alpha$	1.5152	0.0399	1.4370	1.5935
	$\beta$	0.0619	0.0635	-0.0627	0.1864
	$\gamma$	0.0063	0.0002	0.0060	0.0067
	$\delta$	0.0005	0.0004	-0.0003	0.0012
normal assimétrica	$\xi$	-0.0084	0.0007	-0.0097	-0.0070
	$\omega$	0.0155	0.0005	0.0146	0.0164
	$\lambda$	<b>0.9999</b>	0.1010	0.8020	1.1978
<i>t</i> de Student assimétrica	$\xi$	0.0002	0.0011	-0.0020	0.0024
	$\omega$	0.0091	-	-	-
	$\lambda$	0.0001	0.1419	-0.2781	0.2783
	$\nu$	5.000	-	-	-
Laplace assimétrica	$\xi$	0.0002	0.0003	-0.0004	0.0008
	$\omega$	0.0123	0.0003	0.0118	0.0129
	$\lambda$	1.0000	0.0239	0.9532	1.0468

Realizando o teste de significância para os parâmetros de assimetria das distribuições, conforme descrito no Capítulo 4, item 4.1, podemos afirmar que existem evidências amostrais de que os parâmetros  $\lambda$  das distribuições normal e  $t$  de Student assimétricas, sejam significativos (p-valores  $< 0.01$ ), ao nível de 5% de significância. No entanto, encontramos evidências amostrais de que os parâmetros  $\beta$  da distribuição  $\alpha$ -estável e  $\lambda$  da distribuição Laplace assimétrica, não sejam significativos (p-valores  $> 0.20$ ), ao nível de 5% de significância, para os dados de retorno de *commodity* soja (saca 60kg).

Quanto aos dados do logaritmo do retorno de *commodity* soja (saca 60kg), encontramos evidências amostrais de que o parâmetro  $\lambda$  da distribuição normal assimétrica, seja significativo (p-valor  $< 0.01$ ), ao nível de 5% de significância. Entretanto, encontramos evidências amostrais de que os parâmetros  $\beta$  da distribuição  $\alpha$ -estável e  $\lambda$  das distribuições  $t$  de Student e Laplace assimétricas, não sejam significativos (p-valores  $> 0.25$ ), ao nível de 5% de significância.

Construímos o histograma, Figura 6.10(a), e a distribuição empírica, Figura 6.10(b), para os dados de retorno, com as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás). Também construímos o histograma, Figura 6.11(a), e a distribuição empírica, Figura 6.11(b), para os dados do logaritmo do retorno, com as densidades estimadas das distribuições  $\alpha$ -estável (linha em vermelho), normal assimétrica (linha em azul),  $t$  de Student assimétrica (linha em verde) e Laplace assimétrica (linha em lilás).

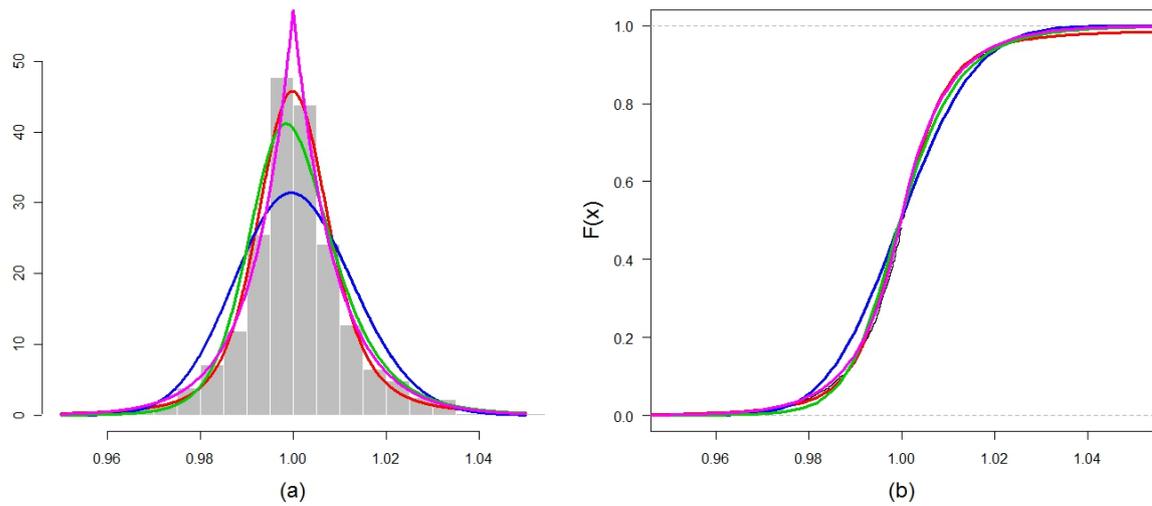


Figura 6.10: Dados de retorno de *commodity* soja (saca 60kg): (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

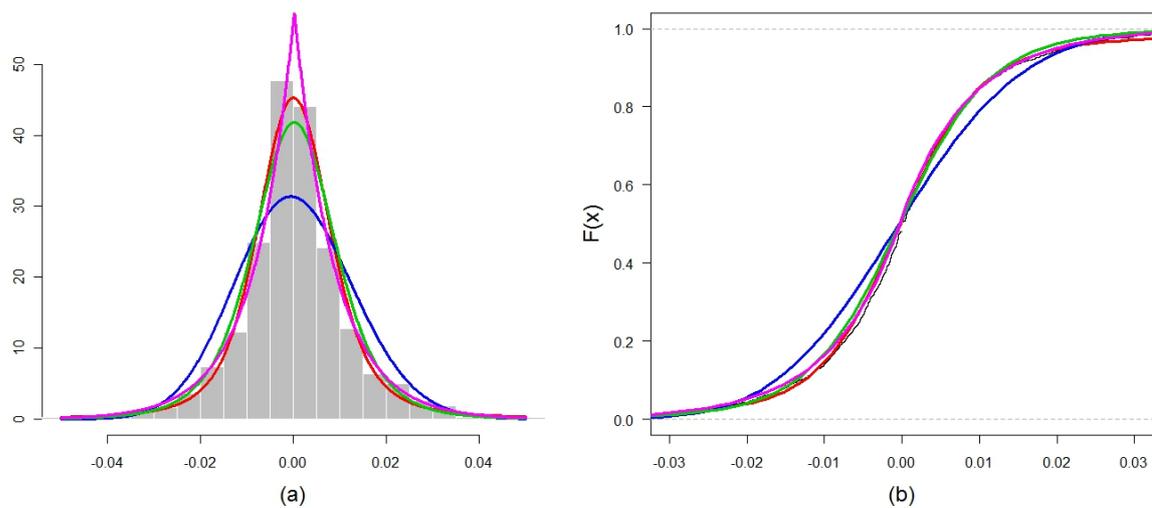


Figura 6.11: Dados do logaritmo do retorno de *commodity* soja (saca 60kg): (a) Histograma e (b) Distribuição empírica.

Observamos por meio das Figuras 6.10 e 6.11 que todas as distribuições sugerem um bom ajuste, tanto para os dados de retorno, quanto para o logaritmo dos dados de retorno de *commodity* soja (saca 60kg).

Usando os critérios de seleção de modelos *AIC* e *BIC*, para os dados de retorno e do logaritmo do retorno de *commodity* soja, obtivemos os resultados na Tabela 6.11.

Tabela 6.11: Dados de retorno e logaritmo do retorno de *commodity* soja (saca 60kg): Resultados segundo os critérios de seleção de modelos *AIC* e *BIC*.

Distribuições	Dados de retorno		Dados do logaritmo do retorno	
	AIC	BIC	AIC	BIC
$\alpha$ -estável	-11927.90	-11875.25	-11929.23	-11876.58
normal assimétrica	-11537.97	-11498.48	-11537.16	-11497.67
<i>t</i> de Student assimétrica	-11858.62	-11805.96	-11917.97	-11865.32
Laplace assimétrica	<b>-11978.94</b>	<b>-11939.45</b>	<b>-11979.35</b>	<b>-11939.86</b>

Os resultados de ambos os critérios apontaram que a distribuição que melhor se ajusta as observações é a Laplace assimétrica, tanto para os dados de retorno quanto para o logaritmo dos dados de retorno de *commodity* soja (saca 60kg).

# Capítulo 7

## Considerações finais

Verificamos, nesse estudo de simulação, que a distribuição Laplace assimétrica apresenta um melhor ajuste para amostras pequenas, quando a distribuição geradora é a  $\alpha$ -estável e  $t$  de Student assimétrica. No entanto, quando a distribuição geradora é a Laplace assimétrica, a distribuição estimada com melhor ajuste é a normal assimétrica para amostras pequenas.

Observamos que para amostras grandes as distribuições estimadas das distribuições geradoras das observações, apresentam melhor ajuste, em todos os tamanhos estudados de amostra, e em todas as variações nos parâmetros de assimetria.

Encontramos dificuldades na estimação dos parâmetros, quando os seus valores na distribuição geradora eram os valores limites em que os parâmetros estavam definidos. As dificuldades são devido ao método utilizado na estimação não concluir o processo, pois neste casos, o valor estimado não pertencia ao intervalo, em que o parâmetro estava definido.

Consideramos que a cobertura dos Intervalos de 95% de Confiança para os parâmetros das distribuições, apresentaram-se satisfatórias para o número de simulações realizadas, pois os resultados estão aproximadamente acima de 80%.

Notamos também, nesse estudo de simulação, que as estimações dos parâmetros das distribuição normal assimétrica,  $t$  de Student assimétrica e Laplace assimétrica são relativamente rápidos. Somente a distribuição  $\alpha$ -estável consome um tempo maior para a estimação dos parâmetros e dos correspondentes erros padrão das estimativas.

Na análise de dados reais, observamos que para cada conjunto de dados, uma distribuição em particular apresentou melhor ajuste, não sendo a mesma para os vários tipos de dados.

Como contribuição dessa pesquisa podemos citar que:

1. Verificamos, por meio de simulação, a estimabilidade dos parâmetros das distribuições e a indicação de consistência dos estimadores.
2. Observamos, também, via simulação, a separabilidade das distribuições, já que dados gerados por uma delas são melhor ajustado por ela mesma, isto se torna mais preciso à medida que o tamanho da amostra aumenta. Notamos certa especialização das distribuições estudadas.
3. Observamos, por meio das aplicações, que dados de expressão gênica são melhor ajustados pela distribuição  $\alpha$ -estável, dados financeiros do índice BOVESPA são melhor ajustados pela distribuição  $t$  de Student, e dados de *commoditie* soja são melhor ajustados pela distribuição Laplace assimétrica.

# Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M. & Stegun, C. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables 9th printing*. New York. Dover, 928.
- [2] Arellano-Valle, R. B.; Bolfarine, H.; & Lacho, V. H. (2005). Skew-normal Linear Mixed Models. *Journal of Data Science*. **3**, 415-438.
- [3] Arnold, B. C.; Groeneveld, R. A. (1995). Measuring Skewness With Respect to the Mode. *The American Statistician*. **49**, 34-38.
- [4] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identifications. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **19**(6), 716-723.
- [5] Azzalini, A.; (1985). A Class of Distributions which Includes the normal Ones. *Scand Journal Statistical* **12**, 171-178.
- [6] Azzalini, A. & Capitanio, A. (1999). Robustness in real life: a study of clinical laboratory data. *Biometrics* **38**, 377-396.
- [7] Azzalini, A. & Capitanio, A. (2003). Distributions Generated by Perturbation of Symmetry with Emphasis on a Multivariate Skew t Distribution. *Journal of the Royal Statistical Society*. **B**(65), 367-389.
- [8] Bickel, P.J. & Doksum, K.A.(1977) *Mathematical Statistics - Basic Ideas and Selected Topics*. Holden-Day, San Francisco.
- [9] Bozdogan, H. (1987). Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*. **52**,(3) 345-370.
- [10] Bowley, A.L. (1920). *Elements of Statistics*. New York: Scribner.

- [11] Byrd, R.H.; Lu, P.; Nocedal, J. & Zhu, C. (1995). A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM J. Scientific Computing*. **16**, 1190-1208.
- [12] Congdon, P. (2001). *Bayesian Statistical Modelling*. Jhon Wiley and Sons.
- [13] Dados de histórico de cotações de *commodity* soja. Disponível em <<http://www.boletimpecuario.com.br/cotacoes.htm>> Acesso em: 01 jul. 2011.
- [14] Dados de histórico de cotações do índice BOVESPA. Disponível em <<http://cotacoes.economia.uol.com.br/bolsas/index.html?indice=.BVSP>> Acesso em: 23 mar. 2011.
- [15] Fernández, C.; Osiewalski, J. & Steel, M.F.J. (1995). Modeling and Inference With  $v$ -Spherical Distribution. *Journal of the American Statistical Association*. **90**, 1331-1340.
- [16] Fernández, C. & Steel, M.F.J. (1998). On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness. *Journal of the American Statistical Association* **93**(441), 359-371.
- [17] Ferreira Filho, D. & Leandro, R.A. (2009). *Análise de Microarray usando o R e o Biocondutor*. Tutorial apresentado no 54°RBRAS e 13°SEAGRO.
- [18] Genton, M.G.; He, L. & Liu, X. (2001). Moments of skew-normal random vectors and their quadratic forms. *Statistics & Probability Letters*. **51**, 319-325.
- [19] Gonzalez, D.S.; Kuruoglu, E.E. & Ruiz, D.P. (2009). Modelling and Assessing Differential Gene Expression Using the Alpha Stable Distribution. *The International Journal of Biostatistics*. **5**(1), 16.
- [20] Groeneveld R.A. & Meeden, G. (1984). Measuring Skewness and Kurtosis. *Journal of the Royal Statistical Society* **33**, 391-399.
- [21] Gupta, A.K.; Nguyen, T.T. & Sanqui, J.A.T. (2004). Characterization of the Skew-normal Distribution. *The Institute of Statistical Mathematics*. **56**, 351-360.
- [22] Jones, M.C. & Faddy, M.J. (2003). A skew extension of the  $t$ -distribution, with applications. *Journal of the Royal Statistical Society* **65**(1), 159-174.

- [23] Julià, O. & Vives-Rego, J. (2008). A microbiology application of the Skew-Laplace distribution. *Sort.***2**, 141-150.
- [24] Kelley, T.L. (1924). *Statistical Method*. Macmillan Co., New York, 75
- [25] Kenney, J.F. & Keeping, E.S. (1962). *Mathematics of Statistics*. Princeton, NJ: Van Nostrand, 100-101.
- [26] Kotz, S.; Kozubowski, T.J. & Podgórski, K. (2001). *The Laplace distribution and generalizations. A revisit with applications to Communications, Economics, Engineering and Finance*. Birkhäuser.
- [27] Kullback, S. & Leibler, R.A. (1951). On information and sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*. **22**, 76-86.
- [28] Kullback, S. (1968). *Information Theory and Statistics*. Dover, New York.
- [29] Lee, P.M. (1996). *Bayesian Statistical: and Introduction*. 2nd Edition, Edward Arnold.
- [30] Lin, T.I.; Lee, J.C. & Yen, S.Y. (2007). Finite Mixture Modelling Using The Skew normal Distribution. *Statistica Sinica*. **17**, 909-927.
- [31] Littell, R.C.; Milliken, G.A.; Stroup, W.W. & Wolfinger, R.D. (2002). *SAS System for Mixed Models*. Cary: Statistical Analysis System Institute, 633.
- [32] Mood, A.M. & Graybill, F.A.(1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill International Editions.
- [33] Morettin, P.A. (2008). *Econometria Financeira*. São Paulo: Editora Blucher.
- [34] Nolan, J.P. (2009). *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Capítulo 1. Disponível em: <<http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf>> Acesso em: 1 mar. 2011.
- [35] Nolan, J.P. (2003). *Modeling financial distributions with stable distributions*. Volume 1 of Handbooks in Finance, Chapter 3, pp. 105-130. Amsterdam: Elsevier.
- [36] Nolan, J.P. (1999). *Stable Distributions*. Preprint. University Washington DC. 30

- [37] Paulino, C.D.; Turkmann, M.A.A. & Murteira, B. (2006). *Estatística Bayesiana*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- [38] Rachev, S.T. & Mittnik, S. (2000). *Stable Paretian Models in Finance*. New York, NY. Wiley.
- [39] Rachev, S. T. (2003). *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. Amsterdam. Wiley.
- [40] Rubio, F.J. & Steel, M.F.J. (2010). Inference for grouped data with a truncated skew-Laplace distribution. *University of Warwick Institutional Repository*. **10**, 20.
- [41] R. *R-Project Software Version 2.11.1*. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>.
- [42] Said, S.E.; Dickey, D.A.; (1984). Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order. *Biometrika*. **71**, 599-607.
- [43] Schwarz, G.E. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*. **6**(2), 461-464.
- [44] Taylor, S. (1986). *Modelling Financial Time Series*. New York: John Wiley & Sons.
- [45] Wolfinger, R.D. (1993). Covariance structure selection in general mixed models. *Communications in Statistics*. **22**, 1079-1106.
- [46] Yule, G.U. (1912). *Introduction to the Theory of Statistics*. London: Griffith.

# Apêndice A

## Geração dos números aleatórios no *software R*

Os números aleatórios com distribuição  $\alpha$ -estável foram gerados utilizando os seguintes procedimentos:

1. Primeiro o programa verifica os valores atribuídos para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , ou seja, se o valor atribuído para  $\alpha \in [0, 2]$ , e se o valor atribuído para  $\beta \in [-1, 1]$ .
2. Em seguida é escolhida a parametrização da distribuição, 1 ou 2, em que 1 corresponde à parametrização 0, nesta dissertação, e 2 corresponde a parametrização 1, nesta dissertação. Em nosso caso a parametrização escolhida foi a 1.
3. Após a escolha da parametrização 1, tem-se as seguintes condições:
  - se  $\alpha = 1$ , então  $\delta$ , o parâmetro de locação, é dado por  $\delta_0 = \delta_1 + \beta \frac{2}{\pi} \gamma \ln(\gamma)$ , ou
  - se  $\alpha \neq 1$ , então  $\delta$ , é dado por  $\delta_0 = \delta_1 + \beta \gamma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$ .
4. Em seguida, são calculados  $\theta$  e  $w$ , dados por
  - $\theta = \pi (\text{runif}(n) - 1/2)$ ,  
em que  $\text{runif}(n)$  é o comando, no *software R*, para a geração de  $n$  números aleatórios de uma distribuição Uniforme padrão, ou seja, no intervalo  $[0, 1]$ , e
  - $w = -\log(\text{runif}(n))$ .
  - Se  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  (distribuição de Cauchy),

$$\diamond ans = rcauchy(n),$$

em que  $rcauchy(n)$  é o comando, no *software R*, para a geração de  $n$  números aleatórios de uma distribuição de Cauchy padrão, ou seja, uma distribuição de Cauchy com parâmetros de locação igual à 0 e escala igual à 1.

- Se  $\alpha \neq 1$  e  $\beta \neq 0$ , é necessário calcular  $c$ ,  $\theta_0$  e  $ans$ , que são dados por

$$\diamond c = \left(1 + \left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^2\right)^{1/(2\alpha)}, \text{ e}$$

$$\diamond \theta_0 = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \arctan\left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right), \text{ e}$$

$$\diamond ans = \left(\frac{c(\sin(\alpha(\theta+\theta_0)))}{(\cos(\theta))^{1/\alpha}}\right) \left(\frac{\cos(\theta-\alpha(\theta+\theta_0))^{(1-\alpha)/\alpha}}{w}\right), \text{ logo } ans = ans - \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

5. Por último calcula-se o *result* dado por

- $result = ans\gamma + \delta$ .

6. O valor *result* é o número aleatório com distribuição  $\alpha$ -estável.

Os números aleatórios com distribuição normal assimétrica foram gerados utilizando os seguintes procedimentos:

1. Primeiro são verificados os valores atribuídos para os parâmetros  $\xi$ ,  $\omega$  e  $\lambda$ , ou seja, se o valor atribuído para  $\xi \in [-\infty, +\infty]$ , se o valor atribuído para  $\omega \in [0, +\infty]$ , e se o valor atribuído para  $\lambda \in [-1, 1]$ .

2. Em seguida são calculados os valores  $\rho$ ,  $u_0$ ,  $v$  e  $u_1$ , dados por

- $\rho = \alpha/\sqrt{1 + \alpha^2}$ , e

- $u_0 = rnorm(n)$ ,

em que  $rnorm(n)$  é o comando, no *software R*, para a geração de  $n$  números aleatórios de uma distribuição normal padrão, ou seja, uma distribuição normal com média igual à 0, e variância a igual á 1, e

- $v = rnorm(n)$ , e

- $u_1 = \rho u_0 + v\sqrt{1 - \rho^2}$ .

3. E, então, é calculado o *result*, dado por

- $result = \xi + \omega u_1$  se  $u_0 \geq 0$ , ou

- caso contrário,  $result = \xi + \omega(-u_1)$ .

4. O valor de  $result$  é o número aleatório com distribuição normal assimétrica.

Os números aleatórios com distribuição  $t$  de Student assimétrica foram gerados utilizando os seguintes procedimentos:

1. Primeiro são verificados os valores atribuídos para os parâmetros  $\xi$ ,  $\omega$ ,  $\lambda$ , e  $\nu$ , ou seja, se o valor atribuído para  $\xi \in [-\infty, +\infty]$ , se o valor atribuído para  $\omega \in [0, +\infty]$ , se o valor atribuído para  $\lambda \in [0, +\infty]$ , e se o valor atribuído para  $\nu \geq 1$ .

2. Em seguida são calculados os valores  $z$ ,  $v$  e  $y$ , dados por

- $z = rsn(n, location = 0, scale, shape)$ ,

em que  $rsn(n, location = 0, scale, shape)$  é o comando, no *software R*, para a geração de  $n$  números aleatórios de uma distribuição normal assimétrica com parâmetro de locação igual à 0, e escala,  $scale = \omega$ , e forma,  $shape = \alpha$  (valores atribuídos na função de geração de números aleatórios com distribuição  $t$  de Student assimétrica).

◊ Se  $\nu = \infty$ , então  $z = z + \xi$ .

- $v = rchisq(n, df)/df$ ,

em que  $rchisq(n, df)$ , é o comando, no *software R*, para a geração de  $n$  números aleatórios de uma distribuição Qui-quadrado com  $df = \nu$  graus de liberdade.

- $y = \xi + z/\sqrt{v}$ .

3. O valor de  $y$  é o número aleatório com distribuição  $t$  de Student assimétrica.

Os números aleatórios com distribuição Laplace assimétrica foram gerados utilizando os seguintes procedimentos:

1. Primeiro são verificados os valores atribuídos para os parâmetros  $\xi$ ,  $\omega$ , e  $\lambda$ , ou seja, se o valor atribuído para  $\xi \in [-\infty, +\infty]$ , se o valor atribuído para  $\omega > 0$ , e se o valor atribuído para  $\lambda > 0$ .

2. Em seguida é calculado o seguinte valor  $result$ , dados por:

- $result = \xi + \omega \log \left( \frac{runif(n)^\alpha}{runif(n)^{1/\alpha}} \right) / \sqrt{2}$ .

3. O valor de  $result$  é o número aleatório com distribuição Laplace assimétrica.