

**Débora Delbem Gonçalves**

**Risco Operacional: O cálculo do Capital Regulatório usando  
Dependência**

**São Carlos, 2014**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Débora Delbem Gonçalves

## **Risco Operacional: O cálculo do Capital Regulatório usando Dependência**

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos-Des-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Carlos Alberto Ribeiro Diniz

**São Carlos, 2014**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

G635ro      Gonçalves, Débora Delbem.  
Risco operacional : o cálculo do capital regulatório usando dependência / Débora Delbem Gonçalves. -- São Carlos : UFSCar, 2014.  
76 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Estatística. 2. Risco operacional. 3. Capital regulatório.  
4. Perdas inesperadas. 5. Dependência. 6. Cópula. I. Título.

CDD: 519.5 (20<sup>a</sup>)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Estatística  
Via Washington Luís, Km 235 - C.P.676 - CGC 45358058/0001-40  
FONE: (016) 3351-8292 – Email: ppgest@ufscar.br  
13565-905 - SÃO CARLOS-SP - BRASIL

---

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Aluno(a) : Débora Delbem Gonçalves**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA E APROVADA EM 16/01/2014  
PELA COMISSÃO JULGADORA:

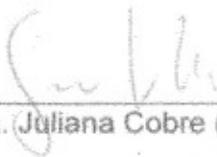
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Carlos Alberto Ribeiro Diniz (DEs-UFSCar/Orientador)

1º Examinador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Adriano Polpo de Campos (DEs-UFSCar)

2º Examinador

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Juliana Cobre (ICMC-USP)

## **Agradecimentos**

A Deus por nunca ter me desamparado e sempre ter me dado forças para continuar.

A minha família por sempre me apoiar e me ajudar no que fosse preciso.

Meu orientador, Prof<sup>o</sup> Dr. Carlos Diniz, por sempre ter me ajudado com minhas dificuldades.

Ao Guaraci que foi meu companheiro e me ajudou durante todo o período sempre me dando forças para continuar.

A todos meus novos amigos que estiveram comigo nessa caminhada.

A todos os professores do Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - UFSCar por transmitir novos conhecimentos em minha vida acadêmica.

A todos os funcionários do Departamento de Estatística por sempre estarem disponíveis para nos ajudar no que fosse preciso e também por deixar o ambiente de estudo muito agradável.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, estiveram presentes comigo nesses dois anos de mestrado.



## Resumo

Neste trabalho propomos um novo método para o cálculo do capital regulatório para o risco operacional. O método proposto é utilizado para calcular o capital regulatório para duas classes de risco e é baseado em alguns pressupostos considerados importantes no cálculo deste capital. Entre esses pressupostos se destacam a opinião de especialistas e a captação de dependência entre as variáveis perdas considerando a probabilidade dos eventos de perdas ocorrerem conjuntamente. Essa probabilidade é captada via cópula. Além disso, apresentamos mais dois métodos, o do somatório, proposto pelo Acordo de Basileia II (2004), e o da correlação não-perfeita, proposto por Frachot et al. (2004). Finalmente, realizamos um estudo de simulação com o objetivo de comparar os capitais regulatórios totais calculados em cada método.

**Palavras-chave:** Risco operacional, Capital regulatório, Perdas inesperadas, Dependência, Cópula.



## **Abstract**

In this paper we propose a new method for the calculation of regulatory capital required for operational risk. This method is based on some important assumptions for calculation of this capital, for instance, expert opinion, dependence between loss variables considering the joint probability associated to two loss events. The copula theory is applied to determine this joint probability. Furthermore, we present two more methods, sum method proposed by Basel II Accord (2004) and non-perfect correlation method proposed by Frachot et al. (2004). Finally, we perform a simulation studies in order to compare all the methods presented in this dissertation.

**Keywords:** operational risk, regulatory capital, unexpected losses, dependence, copula.



# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e objetivo . . . . .	5
1.2 Organização do trabalho . . . . .	5
<b>2 Risco operacional</b>	<b>7</b>
2.1 Definição do risco operacional . . . . .	7
2.2 Capital regulatório . . . . .	9
2.2.1 O que é feito hoje na alocação do capital regulatório . . . . .	13
<b>3 Teoria de cópulas</b>	<b>14</b>
3.1 Definições básicas . . . . .	15
3.2 Teorema de Sklar . . . . .	17
3.3 Estimação e escolha da cópula . . . . .	19
3.3.1 Estimação . . . . .	21
3.3.2 Escolha da cópula . . . . .	22
<b>4 A correlação no modelo LDA</b>	<b>25</b>
4.1 <i>Loss distribution approach</i> - LDA . . . . .	26
4.2 Cálculo do capital regulatório no LDA . . . . .	30
4.3 O estudo da correlação no modelo LDA . . . . .	31
4.3.1 Correlação perfeita - Método do somatório . . . . .	31
4.3.2 Correlação não-perfeita . . . . .	32

4.3.3	Correlação nula . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Metodologia proposta</b>	<b>38</b>
5.1	Pressupostos . . . . .	38
5.2	Descrição do método . . . . .	41
5.3	Comportamento teórico do método . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Simulação</b>	<b>54</b>
6.1	Comparação entre os métodos . . . . .	54
6.2	Ajuste da cópula . . . . .	56
6.3	Um estudo com quatro perdas operacionais . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>71</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Lista de Figuras

4.1	Perda Agregada. . . . .	29
4.2	Tipos de Perdas. . . . .	31
5.1	Comportamento do método do somatório. . . . .	43
5.2	Possíveis funções para o método proposto. . . . .	43
5.3	Sequência de funções. . . . .	44
5.4	Comportamento da família de funções $f$ . . . . .	45
5.5	Comportamento de $p$ e $\theta$ . . . . .	49
5.6	Comportamento do $CR_{PROP}$ em relação a $p$ . . . . .	50
5.7	Comportamento do $CR_{PROP}$ em relação a $\kappa^*$ . . . . .	51
5.8	Comportamento do $CR_{PROP}$ em relação a $\kappa^*$ e $p$ conjuntamente. . . . .	52
5.9	Comportamento do $CR_{PROP}$ em relação a $\kappa^*$ e $p$ conjuntamente. . . . .	53
6.1	Comparando os três métodos: $CR_{SUM}$ , $CR_{NPERF}$ e $CR_{PROP;\kappa_m^*}$ . . . . .	56
6.2	Dados de perdas uniformizados. . . . .	57
6.3	Semelhanças da cópula Normal e Frank. . . . .	58
6.4	Gráfico da diagonal - Frank. . . . .	59
6.5	Curvas de Nível - Frank. . . . .	60
6.6	Gráfico da diagonal. . . . .	60
6.7	Curvas de nível. . . . .	61
6.8	Comparando o capital regulatório obtido em cada cópula do conjunto $\tilde{C}$ e com $C_n$ . . . . .	62
6.9	Capital Regulatório Multivariado - Caso 1. . . . .	66
6.10	Capital Regulatório Multivariado - Caso 2. . . . .	69

# Lista de Tabelas

1.1	Principais diferenças entre o acordo atual e o novo acordo. . . . .	4
1.2	Andamento do Novo Acordo no Brasil . . . . .	4
2.1	Algumas ocorrências em destaque na comunidade financeira internacional. . .	9
2.2	Linhas de negócios e respectivos fatores de riscos. . . . .	11
2.3	Tipos de Perda e Linhas de Negócio no Risco Operacional. . . . .	12
3.1	Famílias de Cópulas Arquimedianas. . . . .	20
4.1	Distribuições. . . . .	36
5.1	$EL$ , $OPVaR$ e $UL$ de $L_1$ e $L_2$ . . . . .	48
5.2	Capital regulatório proposto para diferentes $p$ e $\kappa^*$ - Cópula de Frank. . . . .	50
6.1	Comparação entre $CR_{SUM}$ , $CR_{NPERF}$ e $CR_{PROP}$ . . . . .	55
6.2	Estimação dos parâmetros das cópulas de $\tilde{C}$ . . . . .	58
6.3	Capital Regulatório - Frank . . . . .	62
6.4	Capitais regulatórios marginais - Caso 1. . . . .	64
6.5	Correlação - Caso 1. . . . .	65
6.6	$CR_{PROP;\kappa_{ii}^*}$ e $CR_{PROP;\kappa_{ii}^*}$ . . . . .	66
6.7	Capitais regulatórios marginais - Caso 2. . . . .	67
6.8	Correlação - Caso 2. . . . .	67
6.9	$CR_{PROP;\kappa_{iii}^*}$ e $CR_{PROP;\kappa_{iii}^*}$ . . . . .	68

# Capítulo 1

## Introdução

O mercado financeiro começou a enfrentar diversas crises a partir de 1970 deixando-o mais vulnerável aos diversos tipos de riscos. Entre tais crises destacam-se: a crise do México (1982); a crise asiática (1997); e a crise econômica mundial (2008). Acontecimentos como esses são responsáveis pelo aumento da exposição fazendo com que cada vez mais sejam necessárias melhorias no cenário de mensuração de riscos.

Devido a alta volatilidade na década de 1970, em 1974 um grupo de bancos centrais criou o Comitê de Supervisão Bancário de Basileia visando o estabelecimento de uma política supranacional de supervisão bancária. O objetivo principal do comitê é assegurar um nível adequado de capital para proteger e garantir a solidez e segurança do sistema financeiro internacional.

Em 1988 o Comitê de Basileia levou o sistema financeiro internacional à utilização do capital regulatório por intermédio do Acordo de Capitais de Basileia. A intenção do capital regulatório, além de cobrir perdas inesperadas relativas aos riscos assumidos pelas instituições financeiras, é a defesa contra risco sistêmico <sup>1</sup> (Power, 2005).

Entre os principais riscos do mercado financeiro se destacam o de mercado <sup>2</sup>, crédito <sup>3</sup> e operacional. Cruz (2002) argumenta que quando se classifica as perdas sobre os resultados por área de impacto dentro de instituições financeiras, risco operacional e outros riscos explicam 35% da volatilidade dos ganhos das instituições financeiras, enquanto que riscos de mercado e de crédito, explicam, respectivamente, 15% e 50%. Através desses índices, podemos ver a

---

<sup>1</sup>É o risco de uma instituição criar falhas em outras instituições no sistema financeiro, devido à correlação entre as transações bancárias.

<sup>2</sup>Decorre da possibilidade de perdas que podem ser ocasionadas por mudanças no comportamento das taxas de juros, do câmbio, dos preços das ações e dos preços de commodities.

<sup>3</sup>É definido como a possibilidade de perda resultante da incerteza quanto ao recebimento de valores pactuados com tomadores de empréstimos, contrapartes de contratos ou emissões de títulos.

importância de uma gestão eficaz para o risco operacional. Neste trabalho, nos restringiremos ao risco operacional.

O risco operacional foi discutido consideravelmente nos últimos anos. O termo “risco operacional” ganhou destaque logo após a falência do famoso banco Barings em Londres no ano de 1995. Segundo Cruz (2002) tal banco sofreu um colapso após seu funcionário Nick Lesson gerar perdas de US\$ 1,4 bilhão em especulações sobre contratos futuros. Deve-se ressaltar que existiram indícios de que Lesson manteve posições perdedoras sem conhecimento da administração de Barings. Além desse caso, outras instituições financeiras sofreram crises por meio do risco operacional, como por exemplo o caso do banco Daiwa em 1995 e do banco Allied Irish em 2002.

Cruz (2002) considera que a falência do banco Barings trouxe pela primeira vez ao público o termo risco operacional, passando então a gerar interesse de pesquisadores e gestores do mercado financeiro, haja visto que este risco passaria a se relacionar diretamente com eventuais perdas financeiras consideráveis não relacionadas a risco de crédito e de mercado.

O risco operacional está relacionado a possíveis perdas como resultado de sistemas e/ou controles inadequados, falhas de gerenciamento e erros humanos. O risco operacional é um dos quatro grandes grupos de risco, ao lado do risco de crédito, risco de mercado e risco legal (Duarte, 2001).

A maioria dos grandes escândalos envolvendo o risco operacional ocorreram na década de 1990. Segundo Guimarães (2003), essa incidência deve-se provavelmente a três fatores: globalização, competição no sistema financeiro e avanços tecnológicos. Esses fatores fizeram com que as instituições financeiras se tornassem mais sensíveis a falhas. Apesar do gerenciamento do risco ser algo novo, a exposição ao risco operacional sempre existiu dentro das instituições financeiras.

Devido a queixa das instituições da forma do cálculo do capital regulatório, a falta de discriminação entre os diferentes perfis de risco de acordo com as suas áreas de negócios específicas, os grandes escândalos dos anos 90 e o desenvolvimento das práticas bancárias, o Acordo de Basileia mostrou-se menos eficaz em assegurar requerimento de capital adequado ao verdadeiro perfil de riscos das instituições, sendo então culminado em junho de 2004, o Novo Acordo de Basileia ou Basileia II. Nele está proposta a exigência de capital para o risco operacional.

O maior exemplo dessa nova estratégia foi implementado em 1996, quando o Comitê de Basileia permitiu o uso de modelos internos para o cálculo do capital contra a exposição do risco de mercado. Neste caso, o capital regulatório passou a ser calculado usando o *Value at*

*Risk*, denotado como VaR. O VaR é a perda máxima esperada para um horizonte de tempo em um dado nível de confiança. Neste caso, o nível de significância adotado foi de 5% da distribuição de perdas e lucros (Coleman, 2000; Power, 2005).

O Novo Acordo de Basileia apresenta uma nova estrutura para o sistema de exigência de capital. Este acordo é constituído por três pilares:

- Requisito mínimo de capital;
- Supervisão bancária;
- Disciplina de mercado.

Tais pilares permitiram as instituições financeiras e aos órgãos reguladores uma melhor avaliação da exposição aos diversos riscos presentes no mercado financeiro.

O primeiro pilar determina os requerimentos mínimos de capital, mantendo tanto a definição atual de capital regulatório, quanto o requisito mínimo de 8% do capital para ativos ponderados pelo risco. Este pilar é o responsável pela inovação mais significativa desta nova proposta: a possibilidade das instituições financeiras utilizarem modelos internos para a mensuração e administração de seus riscos.

O segundo pilar foi aprimorado para elevar a eficiência das entidades de supervisão bancária na constatação do cumprimento das exigências mínimas de capital pelas instituições financeira, tendo ainda, como papel indutor, contribuir para uma melhoria contínua na gestão de riscos e de processos.

A disciplina de mercado, terceiro pilar, representa outra novidade no novo acordo e está relacionada a reforçar a segurança e a confiabilidade do sistema bancário, através de uma divulgação mais ampla das exposições ao risco e dos níveis de capital ao mercado, de maneira que a indústria e os investidores possam melhor avaliar o grau de solvência de uma instituição.

Na Tabela 1.1, apresentamos as principais diferenças entre o Acordo atual de 1988 e o Novo Acordo de 2004.

Este Novo Acordo não é simplesmente um ajuste às boas práticas da indústria, como foi feito para o caso do risco de crédito e de mercado. Agora, é o Comitê de Basileia que está tentando definir as melhores práticas, calcadas basicamente sobre a definição de risco operacional (Herring, 2002).

Na Tabela 1.2, apresentamos o andamento do Novo Acordo em relação ao risco operacional no Brasil.

Tabela 1.1: Principais diferenças entre o acordo atual e o novo acordo.

<b>Acordo em vigor</b>	<b>Novo Acordo</b>
Contempla basicamente a administração do nível mínimo de capital bancário.	Combina a administração eficaz do nível mínimo de capital bancário, a disciplina de mercado e a fiscalização necessária.
Tamanho único (modelo padrão).	Mais ênfase nas metodologias internas próprias dos bancos.
Não exige aprimoramento na gestão do risco.	Incentiva uma melhor administração de riscos: quanto melhor o controle interno, menor o capital mínimo requerido.
Foco em uma mensuração única de risco, não propiciando grandes diferenciações entre riscos.	Propicia uma maior diferenciação entre riscos, gerando capitais mínimos para riscos de Crédito, Mercado e Operacional.

Fonte: Guimarães (2003).

Tabela 1.2: Andamento do Novo Acordo no Brasil

<b>2007</b>	Estabelecimento de parcela de requerimento de capital.
<b>2008-2009</b>	Divulgação de pontos-chaves para modelos internos.
<b>2010-2011</b>	Critérios de elegibilidade de modelos internos.
<b>2012</b>	Início do processo de autorização para o uso de modelos internos.
<b>2013</b>	Implementação*

\*Após a conclusão do processo de Autorização. Fonte: Banco do Brasil.

O foco desta dissertação está no primeiro pilar, requisito mínimo de capital. Discutimos três modelos de mensuração para o risco operacional e citamos quais as vantagens e desvantagens de cada um deles e o efeito que tais modelos geram no capital regulatório final. Vale ressaltar, que cabe a instituição financeira escolher o método que mais se adeque a seu cenário real.

Atualmente, o método utilizado é o que considera a correlação perfeita entre as variáveis perdas agregadas. Este método é extremamente conservador. Buscando uma solução para este problema, usamos a teoria de cópulas para modelar a dependência entre as perdas e fazemos um estudo da influência da escolha da cópula no cálculo do capital regulatório.

## 1.1 Motivação e objetivo

Atualmente as instituições financeiras alocam mais capital do que o necessário para se protegerem de perdas que envolvam o risco operacional. Isso se deve ao fato de que a dependência considerada entre as perdas é a perfeita. O método utilizado para esse tipo de dependência é o método do somatório.

Para muito estudiosos da área, considerar a dependência perfeita entre as perdas operacionais é irreal, pois a instituição alocará muito mais capital do que o necessário. Na realidade, existe sim uma dependência entre as classes de risco, mas essa dependência deve ser captada de forma realista, fazendo com que o capital alocado seja o suficiente para cobrir as perdas. A literatura sobre a mensuração do risco operacional incentiva o estudo de métodos robustos para o cálculo do capital regulatório.

Como dito anteriormente, o capital regulatório é aquele destinado para cobrir as perdas inesperadas totais. Sendo assim, o grande problema está em definir o que são essas perdas. Então, o objetivo deste trabalho é responder a seguinte pergunta: “O que são perdas inesperadas totais?”. Essa pergunta deve ser respondida fazendo-se um estudo sobre o efeito da dependência das perdas operacionais, como, por exemplo, o que ocorre se a dependência entre ambas for baixa.

A resposta para essa pergunta não é trivial, depende de vários conceitos, como por exemplo, a estrutura de dependência entre as perdas. Neste trabalho, apresentamos três métodos de cálculo do capital regulatório, inclusive o método do somatório, onde cada um deles consideram diferentes tipos de dependência entre as variáveis perdas. Veremos que os métodos aqui apresentados retornam diferentes capitais regulatórios para a instituição financeira como um todo.

## 1.2 Organização do trabalho

O trabalho está dividido em sete capítulos. No Capítulo 2 apresentamos a definição de risco operacional e exemplos, definição de capital regulatório e métodos para o cálculo do mesmo, como, por exemplo, o que é feito nos dias de hoje. No Capítulo 3, apresentamos a teoria de cópulas tais como definição, estimação e como proceder na escolha da cópula. No Capítulo 4 definimos o modelo *Loss distribution approach - LDA*, muito utilizado para a modelagem de perdas agregadas para o risco operacional. Além do mais, mostramos o método da correlação não-perfeita para o cálculo do capital regulatório. O Capítulo 5 compreende um estudo de um novo método para o cálculo do capital regulatório. Além disso, fazemos

um estudo do comportamento teórico deste novo método. Uma vez que não existe banco de dados disponíveis para efeito de estudo do risco operacional, no Capítulo 6 apresentamos uma simulação para comparar o capital regulatório calculado através dos métodos discutidos no trabalho. Finalmente, no Capítulo 7 fazemos uma conclusão do trabalho, falando sobre as vantagens e desvantagens da escolha dos métodos para o cálculo do capital regulatório.

## Capítulo 2

# Risco operacional

### 2.1 Definição do risco operacional

Em janeiro de 2001 o Basel Committee on Banking Supervision (2001a) definiu o risco operacional como: “O risco de perdas diretas ou indiretas resultantes de processo internos falhos ou inadequados, pessoas e sistemas, ou de eventos externos”. Nesta definição estão inclusos o risco legal, o risco reputacional e estratégico. Além disso, o foco desta definição está na causa da perda.

É importante notar que, apesar de ter citado anteriormente somente os três maiores tipos de riscos, mercado, operacional e crédito, existem também diversos outros riscos dentro das instituições financeiras, tais como risco legal, estratégico, reputacional, imagem, conjuntura, liquidez, entre outros.

Apesar de o mercado ter aceitado a definição acima, o conceito etéreo de perdas indiretas, e o desinteresse do capital regulatório cobrir todas perdas indiretas e custos de oportunidade motivaram a mudança da definição do risco operacional. Assim em setembro de 2001, Basel Committee on Banking Supervision (2001c) definiu o risco operacional como: “O risco de perdas resultantes de processos internos falhos, ou inadequados, pessoas e sistemas, ou de eventos externos”. Nesta nova definição continuou incluindo o risco legal, mas deixou-se o risco reputacional e estratégico de fora (Nyström & Skoglund, 2002).

Diante desta definição, o foco da perda é na causa, e não no efeito. Isso porque um efeito pode ser gerado por mais de uma causa.

As causas do risco operacional são classificadas em:

- **Processos:** falha no registro, processamento ou liquidação de transações, contas de clientes, negócios diários e falhas na apresentação de relatórios obrigatórios. *Exemplos:*

indenizações decorrentes de processos trabalhistas, falha do cadastro de clientes;

- **Pessoas:** perdas causadas por colaboradores ou com participação indireta destes (de maneira internacional ou não), ou advindas pelo relacionamento com clientes, acionistas ou terceiros. *Exemplos:* fraudes internas ou externas, acidentes envolvendo clientes ou terceiros nas dependências da instituição;
- **Sistemas:** perdas decorrentes da interrupção de negócios ou falha de sistemas, causadas pela indisponibilidade de infraestrutura ou recursos de TI. *Exemplos:* indisponibilidade, falta de manutenção, inadequação, falhas de sistemas ou inexistência do backup ou plano de contingência, relacionados a equipamentos, softwares básico, sistemas aplicativos ou infraestrutura de comunicação ou energia;
- **Fatores externos:** perdas causadas por terceiros, danos a patrimônio ou ativos. *Exemplos:* atos terroristas, guerras, sabotagens, tumultos, arrombamentos, vandalismo, incêndios, desabamentos, acidentes, inundações, raios, terremotos.

Em outras palavras, o risco operacional está associado à deficiência nos controles internos de uma instituição e é oriundo, principalmente, de três fatores-chaves: pessoas, tecnologia e processos, materializando-se por erros humanos, fraudes praticadas por terceiros e por empregados, falhas nos sistemas informatizados e por procedimentos inadequados.

Na Tabela 2.1 apresentamos alguns eventos de risco operacional que ocorreram e despertaram a atenção da comunidade financeira internacional.

Um caso recente envolvendo o risco operacional ocorreu em 2008, quando o banco europeu Société Générale sofreu uma crise devido a um certo funcionário executar uma série de operações não autorizadas que custaram à companhia mais de € 4,9 bilhões, a maior perda gerada por um único funcionário da história da indústria financeira.

De acordo com o Comitê de Basileia, houve em 1998 mais de US\$ 20 milhões em perdas decorrentes de “outros riscos” (riscos que não se referem ao de mercado e ao de crédito) nas grandes empresas financeiras mundiais.

O risco operacional sempre existiu dentro das instituições financeiras e esteve presente em todas as atividades da mesma. Mas, durante um bom tempo, não foi visto como um problema para as instituições, pois se costumava perceber quando ocorriam eventos com grandes perdas, o que era raro de acontecer.

Tabela 2.1: Algumas ocorrências em destaque na comunidade financeira internacional.

Instituição	Evento	Ano	Perda US\$
Daiwa Bank, New York	Negociação não autorizada de bonds devido à falha em controles gerenciais.	1984-1995	1.100.000,00
Sumitomo Corp, London	Negociação não autorizada, fraude e falsificação.	1986-1996	1.700.000,00
Credit Lyonnais	Falta de controle de empréstimos.	1980s, 1990s	29.000.000,00
Barings, Singapore	Controle inadequado das operações futuras.	1995	1.600.000,00

Fonte: Marshall (2001).

## 2.2 Capital regulatório

Como visto anteriormente, no Primeiro Pilar do Novo Acordo, as instituições precisam constituir a reserva de capital, exigida pelos órgãos reguladores, para que a instituição como um todo evite a insolvência. Em outras palavras, podemos dizer que a mesma deve alocar esse capital para proteção contra os diversos tipos de risco. Este capital é denominado **capital regulatório**. O capital regulatório considerado ideal é aquele suficiente para cobrir eventuais perdas decorrentes do risco que se está mensurando sem ser excessivamente conservador.

Basel Committee on Banking Supervision (2004) diz o seguinte sobre o capital regulatório:

*Supervisors will require the bank to calculate its regulatory capital requirement as the sum of expected loss (EL) and unexpected loss (UL), unless the bank can demonstrate that it is adequately capturing EL in its internal business practices. That is, to base the minimum regulatory capital requirement on UL alone, the bank must be able to demonstrate to the satisfaction of its national supervisor that it has measured and accounted for its EL exposure.*

Neste trabalho, vamos supor que as instituições financeiras alocam o capital regulatório para cobrir somente as perdas inesperadas, considerando que tais instituições absolvem as perdas esperadas.

Para determinar a quantidade de capital regulatório é necessário estabelecer métodos, garantindo assim a consistência exigida pelo segundo pilar. Monteiro (2003) diz que para medir os riscos operacionais e se criar regras de proteção para as empresas e para a sociedade, como a alocação de reservas de capital para estas despesas, é necessário que se desenvolvam técnicas precisas de mensuração sobre bases de dados confiáveis. Ainda segundo ele, um dos problemas mais comuns em se mensurar risco operacional passa pela dificuldade de isolar o elemento “perda operacional” de perdas em outras categorias, ou seja, existe uma correlação entre as distintas perdas e a mensuração deste nível de correlação costuma ser um grande desafio quando se estuda os riscos operacionais.

O Novo Acordo apresenta três abordagens de cálculo de capital para o risco operacional, que são apresentados em ordem de escala crescente de sofisticação e sensibilidade ao risco:

- Abordagem Básica (*Basic Indicator Approach - BIA*);
- Abordagem Padronizada (*Standardized Approach - SA*);
- Abordagem Avançada (*Advanced Measurement Approach - AMA*).

O Comitê de Basileia recomenda que os bancos internacionalmente ativos adotem a AMA. Já os demais bancos devem desenvolver modelos de gestão e alocação de capital que estejam em conformidade com a complexidade de seus negócios (Guimarães, 2003).

Apresentaremos a seguir, um conceito geral de cada abordagem.

### **Abordagem Básica**

A Abordagem Básica (BIA) exige que os bancos retenham capital para o risco operacional equivalente de uma dada porcentagem, chamada de fator  $\alpha$ , de um indicador simples, como, por exemplo, a receita bruta. Parte do princípio de que quanto maior o resultado bruto de uma transação, maior será o seu risco operacional.

A simplicidade desta metodologia bem como sua pouca relação com risco não proporciona incentivos para sua utilização. Além disso, esta abordagem não requer exigências qualitativas.

### **Abordagem Padronizada**

A Abordagem Padronizada (SA) é muito parecida com a BIA, exceto pelo fato das atividades bancárias serem divididas em oito linhas de negócio, e o capital pode ser calculado para cada linha pela multiplicação de um indicador de exposição de linha por um fator fixo, denominado fator beta, desta linha (ver Tabela 2.2).

A complexidade de implementação, neste caso, aumenta um pouco visto que é necessário o cálculo dos resultados por linhas de negócios o que, para muitos, implicará em adaptações de processos que permitam a segregação das atividades nessas linhas de negócios. No entanto, semelhante ao Método de Indicador Básico, não proporciona incentivos para sua utilização.

Tabela 2.2: Linhas de negócios e respectivos fatores de riscos.

<b>Linha de Negócio</b>	<b>Fatores</b>
Varejo	12%
Comercial	15%
Finanças corporativa	18%
Negociação e venda	18%
Pagamentos e liquidações	18%
Serviços de agente financeiro e custódia	15%
Administração e Ativos	12%
Corretagem de varejo	12%

Diferentemente da BIA, as instituições que optarem por adotar a abordagem SA devem atender alguns critérios de qualificação. Mesmo com a necessidade de testes e verificações futuras, a SA parece apresentar uma melhor sensibilidade ao risco do que a BIA. Isto porque, quanto maior a desagregação (divisão em várias linhas de negócio, neste caso), maior a sensibilidade em si, além de prover uma estrutura do mapeamento interno para o gerenciamento do risco operacional. Além disso, para estas abordagens, os bancos não são obrigados a coletar e usar base de dados de perdas.

### **Abordagem Avançada**

A Abordagem Avançada (AMA) é uma alternativa flexível, pois permite que instituições financeiras desenvolvam seu próprios modelos internos de mensuração para alocação de capital, desde que atendam exigências dos tipos gerais, qualitativas e quantitativas. Caso a instituição opte pelo AMA é necessário a aprovação do Órgão Supervisor que avaliará os requerimentos necessários para o cálculo do capital. Além disso, todas as exigências deverão ser cumpridas com pelo menos um ano de antecedência à implementação do Novo Acordo.

O Comitê de Basileia recomenda estabelecer um piso em um primeiro momento e depois irá flexibilizar estes limites, o que proporcionará as instituições financeiras maiores graus de liberdade na definição eficiente do capital a ser alocado. Portanto, a metodologia avançada,

apesar de exigir mais investimentos é a que traz mais incentivos às instituições financeiras.

As instituições que optarem pelo AMA, deverão determinar o capital para cada célula tipo de risco  $\times$  linha de negócio, o qual Frachot et al. (2001) denomina por classe de risco. O documento Basel Committee on Banking Supervision (2004) define 8 linhas de negócio e 7 tipos de riscos operacionais, apresentados na Tabela 2.3. Assim, segundo tal documento, serão necessárias até 56 estimativas de requerimento para se obter o total de capital exigido para cobrir os gastos que envolvam o risco operacional.

Tabela 2.3: Tipos de Perda e Linhas de Negócio no Risco Operacional.

<b>Tipo de Risco</b>	<b>Linha de Negócio</b>
1. Fraude Interna	1. Finanças Corporativas
2. Fraude Externa	2. Negociações e Vendas
3. Práticas dos Empregados e Segurança do Trabalho	3. Atividades Bancárias de Varejo
4. Clientes, Produtos e Práticas de Negócios	4. Atividades Bancárias Comerciais
5. Danos a Ativos Físicos	5. Pagamentos e Liquidações
6. Interrupção dos Negócios e Falhas de Sistemas	6. Serviços de Agência
7. Execução, Entrega e Gestão dos Processos	7. Gestão de Ativos
	8. Corretagens

O Comitê de Basileia sugere duas formas para o cálculo do risco operacional em sua abordagem avançada:

- Modelo de mensuração interna (*Internal measurement approach - IMA*);
- Modelo de distribuição de perdas (*Loss distribution approach - LDA*).

Apesar de citar essas alternativas, a regulamentação deixa, em aberto, a possibilidade do uso de outros modelos desenvolvidos internamente pelas instituições financeiras. Porém, esses modelos devem também respeitar critérios qualitativos e quantitativos estabelecidos pelo Novo Acordo, como as exigências de que se tenha uma base histórica de perdas operacionais de, no mínimo, 3 anos e que o VaR tenha um intervalo de confiança de 99,9% no período de 1 ano.

Os modelos IMA e LDA permitem que os bancos usem seus dados de perdas internas para estimar a verossimilhança ou frequência e a severidade. A frequência e a severidade podem ser representadas por um único valor como no caso do IMA, ou por suas distribuições de probabilidade como no LDA.

Neste trabalho, todos os métodos apresentados residem no modelo LDA, pelo fato deste ser o mais difundido e bem aceito entre os profissionais da área, como veremos na Seção 4.1.

### 2.2.1 O que é feito hoje na alocação do capital regulatório

Atualmente as instituições financeiras que optam em calcular o capital regulatório através do modelo LDA, consideram que as perdas sejam perfeitamente correlacionadas. Assim, o cálculo do capital regulatório é feito da seguinte maneira: calcula-se o capital para cada célula tipo de risco  $\times$  linha de negócio e, ao final, soma-se todos os capitais. Este método é conhecido como o **método do somatório**.

Embora as perdas ocorrem dentro de uma mesma instituição, estudiosos da área, dizem que existe uma correlação entre elas, mas se considerada perfeita, a instituição é considerada conservadora, alocando mais capital do que o necessário. Entendendo essa hipótese, o Comitê de Basileia, permite o uso de correlação menor que 1 para o cálculo do capital.

Frachot et al. (2004) argumenta que apesar das correlações perfeitas serem aceitas, a soma do carregamento de capital das diferentes linhas de negócios e tipos de riscos devem ser somados, gerando um carregamento de capital maior do que se fosse considerado qualquer efeito de correlação entre as distintas linhas de negócios e tipos de perda.

Alguns autores que utilizam o modelo LDA consideram correlações não-perfeitas ou correlações nulas entre as variáveis perdas, seja através da determinação dos indicadores de correlação ou por meio de modelagem via cópulas. Nos próximos capítulos serão detalhadas as três correlações, que são citadas na literatura, presentes no modelo LDA: nula, perfeita e não-perfeita.

Neste trabalho, mostramos três metodologias de cálculo deste capital, em que algumas delas, usamos cópulas como ferramenta para captar a dependência entre as perdas. No próximo capítulo apresentamos a teoria de cópulas. Descrevemos a definição, estimação de seus parâmetros, cópula empírica e bondade de ajuste.

## Capítulo 3

# Teoria de cópulas

Quando falamos em modelagem de dependência, atualmente um dos primeiros temas a ser levado em consideração é a recente teoria de cópulas discutidas por Joe (1997) e Nelsen (1999). Esta teoria se torna atrativa devido às cópulas abrangerem um grande leque de estrutura de dependência e conseguirem modelar completamente a estrutura dos dados.

A grosso modo podemos dizer que a cópula liga a função de distribuição multivariada a suas marginais. De um outro modo, podemos dizer que cópulas são funções de distribuições cujas marginais são uniformes no intervalo  $[0,1]$ .

A palavra cópula foi empregada pela primeira vez no sentido matemático/estatístico por Sklar (1959) no teorema, que é considerado o resultado central desta teoria, que descreve as funções que “ligam/conectam” as distribuições univariadas à distribuição multivariada.

Em relação a teoria de riscos, Cherubini et al. (2004) afirmam que a principal vantagem das cópulas é a maneira como elas representam uma distribuição conjunta de probabilidade. Elas oferecem maior flexibilidade na agregação de riscos, pois a escolha das distribuições marginais pode ser feita de forma independente da modelagem da estrutura de associação das variáveis estudadas.

Dessa forma, tal flexibilidade permite construir uma distribuição conjunta de duas ou mais variáveis aleatórias e que cada uma delas seja individualmente modelada por uma distribuição marginal diferente, que pode ser a normal, t-student, exponencial ou qualquer outra. Ao mesmo tempo, a dependência entre essas variáveis pode assumir estruturas diversas, até mesmo não-lineares, de acordo com o tipo de cópula utilizada.

No âmbito do risco operacional temos que as diversas perdas, ocorridas para cada classe de risco, são consideradas variáveis aleatórias dependentes. Como visto anteriormente, hoje é considerada a dependência perfeita entre as variáveis perdas operacionais. Embora o Comitê

exija este tipo de dependência entre as variáveis perdas agregadas para o cálculo do capital, o Comitê aprova que as instituições financeiras usem outras correlações, desde que cumpram exigências qualitativas e quantitativas. Segundo Basel Committee on Banking Supervision (2004):

*Risk measures for different operational risk estimates must be added for purposes of calculating the regulatory minimum capital requirement. However, the bank may be permitted to use internally determined correlations in operational risk losses across individual operational risk estimates, provided it can demonstrate to the satisfaction of the national supervisor that its systems for determining correlations are sound, implemented with integrity, and take into account the uncertainty surrounding any such correlation estimates (particularly in periods of stress). The bank must validate its correlation assumptions using appropriate quantitative and qualitative techniques.*

Existem vários trabalhos que envolvem teoria de cópulas e risco operacional, como por exemplo em Böcker & Klüppelberg (2008), Embrechts et al. (2003), entre outros.

### 3.1 Definições básicas

Nesta seção apresentamos algumas definições importantes sobre teoria de cópulas. Para isso, usaremos as seguintes notações:

- $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ;
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$  (reta estendida);
- $I = [0,1]$  (intervalo unitário);
- $I^2 = [0,1] \times [0,1]$  (quadrado unitário);
- $Dom(H) \subseteq \overline{\mathbb{R}^2}$  e  $Im(H) \subseteq \mathbb{R}$  são, respectivamente, o domínio e a imagem de uma função  $H$  bivariada real.

Antes de definir a cópula de uma maneira formal, daremos algumas definições importantes.

**Definição 3.1. H-volume.** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  subconjuntos não-vazios de  $\overline{\mathbb{R}}$ , a função  $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$  e o retângulo  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ ,  $(x_i, y_j) \in Dom(H)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Defina-se  $H$ -volume de  $B$  como:*

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \quad (3.1)$$

**Definição 3.2. Função bicrescente.** Dizemos que  $H$  é uma função bicrescente se  $V_H(B) \geq 0$ , para todo  $B$ .

**Definição 3.3. Aplanada.** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  subconjuntos não-vazios de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Uma aplicação  $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$  é aplanada se  $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$  para todo  $(x, y) \in H : S_1 \times S_2$  sendo  $a_i = \min(z_i; z_i \in S_i), i = 1, 2$ .

**Definição 3.4. Sub-cópula.** Uma sub-cópula é uma função  $C'$  com as seguintes propriedades:

- 1-  $Dom(C') = S_1 \times S_2$ , no qual  $S_1$  e  $S_2$  são subconjuntos de  $I$  contendo 0 e 1;
- 2-  $C'$  é aplanada e bicrescente;
- 3-  $C'$  é marginalmente uniforme, ou seja, para todo  $u \in S_1$  e  $v \in S_2$ ,

$$C'(u, 1) = u \text{ e } C'(1, v) = v.$$

Com as definições acima conseguimos definir, de uma maneira formal, o que é uma cópula.

**Definição 3.5. Cópula.** Uma Cópula é uma Sub-cópula cujo domínio é  $I^2$ .

O teorema a seguir, mostra que toda cópula é limitada.

**Teorema 3.1.** Seja  $C'$  uma sub-cópula. Então para todo  $(u, v) \in Dom(C')$ ,

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v).$$

**Demonstração:** Seja  $(u, v)$  um ponto arbitrário do  $Dom(C')$ . Como  $C'$ , por hipótese, é aplanada, marginalmente uniforme e não-decrescente, então  $0 = C'(0, v) \leq C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$  e também,  $0 = C'(u, 0) \leq C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u$ . Logo,

$$0 \leq C'(u, v) \leq \min(u, v).$$

Agora, considere  $B = [u, 1] \times [v, 1]$ , então:

$$V_{C'}(B) = C'(1, 1) - C'(u, 1) - C'(1, v) + C'(u, v) = 1 - u - v + C'(u, v) \geq 0,$$

pois  $C'$  é uma sub-cópula, ou seja, é função bicrescente. Daí,  $C'(u, v) \geq u + v - 1$ .

Além disso,  $C'(u, v) \geq 0$  para todo  $(u, v) \in Dom(C')$ . Logo,  $C'(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0)$ .

Portanto,

$$\max(u + v - 1) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v),$$

para todo  $(u, v) \in Dom(C')$ .

■

A desigualdade anterior é denominada de Desigualdade dos Limitantes de Fréchet, sendo:

$$W(u,v) = \max(u + v - 1, 0) : \text{Limitante inferior de Fréchet};$$

$$M(u,v) = \min(u,v) : \text{Limitante superior de Fréchet}.$$

**Corolário 3.1.**  $M(u,v)$  e  $W(u,v)$  são cópulas.

## 3.2 Teorema de Sklar

O Teorema de Sklar é o resultado central da teoria de cópulas. Tal teorema elucidada o desempenho da cópula na relação entre funções de distribuições multivariadas e suas marginais univariadas. Antes de enunciar o teorema, daremos algumas definições importantes.

**Definição 3.6. Função de distribuição.** *Uma função de distribuição é uma função  $F$  com domínio  $\overline{\mathbb{R}}$ , tal que:*

- 1-  $F$  é não decrescente;
- 2-  $F(-\infty) = 0$  e  $F(\infty) = 1$ .

**Definição 3.7. Função de distribuição conjunta.** *Uma função de distribuição conjunta é uma função  $H$  com domínio  $\overline{\mathbb{R}^2}$ , tal que:*

- 1-  $H$  é bicrescente;
- 2-  $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$  e  $H(\infty, \infty) = 1$ .

$H$  tem marginais  $F$  e  $G$  dadas por  $F(x) = H(x, \infty)$  e  $G(y) = H(\infty, y)$ , respectivamente.

**Teorema 3.2. Sklar.** *Seja  $H$  uma função de distribuição conjunta com marginais  $F$  e  $G$ . Então existe uma cópula  $C$  tal que para todo  $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ ,*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)). \quad (3.2)$$

*Se  $F$  e  $G$  são contínuas, então  $C$  é única, caso contrário,  $C$  é unicamente determinada em  $Im(F) \times Im(G)$ . Reciprocamente, se  $C$  é uma cópula e  $F$  e  $G$  são funções de distribuições, então a função  $H$  definida em 3.2 é uma função de distribuição conjunta com marginais  $F$  e  $G$ .*

**Definição 3.8. Inversa generalizada.** *Seja  $F$  uma função de distribuição. A inversa generalizada de  $F$  é qualquer função  $F^{(-1)}$  com domínio em  $I$ , tal que:*

1- Se  $t \in \text{Im}(F)$  então  $F^{(-1)}(t) = x, x \in \mathbb{R}$ , tal que  $F(x) = t$ , ou seja,  $F(F^{(-1)}(t)) = t$ , para qualquer  $t \in \text{Im}(F)$ ;

2- Se  $t \notin \text{Im}(F)$  então  $F^{(-1)}(t) = \inf\{x|F(x) \geq t\} = \sup\{x|F(x) \leq t\}$ .

**Corolário 3.2.** *Sejam  $H, F, G$  e  $C'$  definidas como anteriormente e sejam  $F^{(-1)}$  e  $G^{(-1)}$  as inversas generalizadas de  $F$  e  $G$ , respectivamente. Então, para qualquer  $(u, v) \in \text{Dom}(C')$ ,*

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (3.3)$$

**Teorema 3.3.**  $X, Y$  variáveis aleatórias independentes  $\iff C(u, v) = u.v$ , para todo  $u, v \in I$ .

**Demonstração:** Sejam  $F$  e  $G$  funções de distribuições de  $X$  e  $Y$ , respectivamente e  $H$  a função de distribuição conjunta de  $X$  e  $Y$ . Consideremos também,  $u = F(x) \Rightarrow F^{-1}(u) = x$  e  $v = G(y) \Rightarrow G^{-1}(v) = y$ .

( $\Rightarrow$ ) Como, por hipótese,  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes, podemos escrever a distribuição conjunta como sendo o produto das marginais, ou seja,

$$H(x, y) = F(x).G(y).$$

Do Corolário 3.2,

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \Rightarrow C(u, v) = H(u, v) \Rightarrow C(u, v) = uv,$$

para todo  $(u, v) \in I^2$ .

( $\Leftarrow$ ) Do teorema de Sklar 3.2,

$$C(u, v) = uv \Rightarrow H(x, y) = C(F(x)G(y)) = F(x)G(y),$$

para todo  $x, y \in \overline{\mathbb{R}^2}$ .

Portanto,  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes se, e somente se,  $C(u, v) = uv$ , para todo  $u, v \in I$ . ■

**Definição 3.9. Ordem de concordância.** *Se  $C_1$  e  $C_2$  são cópulas, dizemos que  $C_1$  é menor que  $C_2$  (ou  $C_2$  é maior que  $C_1$ ), e escrevemos  $C_1 \prec C_2$  (ou  $C_2 \succ C_1$ ) se  $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$  para todo  $u, v \in I$ .*

Existem famílias de cópulas que são totalmente ordenadas. Chamaremos uma família paramétrica  $\{C_\theta\}$  de cópulas positivamente ordenadas se  $C_\alpha \prec C_\beta$  sempre que  $\alpha \leq \beta$ ; e negativamente ordenada se  $C_\alpha \succ C_\beta$  sempre que  $\alpha \leq \beta$ .

Ao considerarmos os Limites de Fréchet, descrito no Teorema 3.1, temos que:

$$C^- \prec C \prec C^+,$$

em que  $C^- = W(u,v) = \max(u+v-1,0)$  é o limitante inferior,  $C^+ = M(u,v) = \min(u,v)$  é o limitante superior e  $C$  é uma cópula qualquer. Logo,  $C^+$  é a maior de todas as cópulas e  $C^-$  é a menor.

Considerando as cópulas dos Limitantes de Fréchet, temos que a distribuição de  $C^-$  contém toda sua massa sobre a diagonal entre (0,1) e (1,0), enquanto que a distribuição de  $C^+$  tem toda sua massa sobre a diagonal entre (0,0) e (1,1). Dessa maneira, dizemos que  $C^+$  e  $C^-$  descrevem dependência perfeita positiva e dependência perfeita negativa, respectivamente.

Se pensarmos no ponto de vista do Teorema 3.2, ao considerarmos duas variáveis aleatórias,  $X$  e  $Y$ , com dependência perfeita positiva (perfeitamente correlacionadas), então a distribuição conjunta  $H$  é da seguinte forma:

$$H(x,y) = C^+(F(x), G(y)),$$

em que  $F$  e  $G$  são as funções de distribuição de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

De uma maneira informal, quando duas variáveis são perfeitamente correlacionadas temos que o conhecimento de uma implicará o conhecimento da outra.

Jouanin et al. (2004) demonstram, utilizando um banco de dados com dois tipos de perdas operacionais, que considerar o cálculo do VaR operacional global como a simples soma dos VaRs operacionais para cada classe de risco operacional corresponde ao caso da agregação dos riscos operacionais utilizando a cópula limitante superior de Fréchet.

Dentre as principais famílias de cópulas estão as Arquimedianas e as Elípticas. Na Tabela 3.1 apresentamos algumas cópulas da família Arquimediana. Na família Elíptica se destacam a cópula normal e cópula t. Para mais detalhes sobre as famílias de cópulas ver Nelsen (1999) e Cherubini et al. (2004).

### 3.3 Estimação e escolha da cópula

Na literatura são encontrados diversos métodos de estimação para cópulas. Nesta seção, apresentamos três métodos: *Maximum likelihood* - ML, o *Inference function for margins* - IFM (proposto por Joe & Xu (1996)) e o *Canonical maximum likelihood* - CML. De uma forma resumida, no método ML são estimados todos os parâmetros (tanto das marginais, quanto da cópula) de uma única vez. Já no IFM, estima-se inicialmente os parâmetros das marginais

Tabela 3.1: Famílias de Cópulas Arquimedianas.

Família	$C_\theta(u, v)$	$\phi_\theta(t)$	$\theta \in$	Limitantes e Casos especiais
Clayton	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$C_{-1} = W, C_0 = \Pi, C_1 = \frac{\Pi}{\Sigma - \Pi},$ $C_\infty = M$
Ali-Mikhail-Haq	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$\ln \frac{1 - \theta(1-t)}{t}$	$[-1, 1)$	$C_0 = \Pi, C_1 = \frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$
Gumbel	$\exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta})$	$(-\ln t)^\theta$	$[1, \infty)$	$C_1 = \Pi, C_\infty = M$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$	$C_{-\infty} = W, C_0 = \Pi, C_\infty = M$
Joe	$1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{1/\theta}$	$1 - (1 - \exp(-t))^{1/\theta}$	$[1, \infty]$	

e, a partir desses parâmetros estimados, estima-se o parâmetro da cópula. No método CML primeiramente uniformizamos o conjunto de dados e depois estimamos o parâmetro da cópula através do método ML.

Para a escolha da cópula usaremos como ferramenta a cópula empírica que será detalhada mais adiante. O objetivo dessa seção é mostrar como se estima e escolhe a cópula para um determinado banco de dados.

### 3.3.1 Estimação

Apresentamos a seguir os três métodos citados anteriormente.

#### Método ML

No método ML todos os parâmetros (distribuições marginais e cópula) são estimados de uma única vez.

Seja  $C$  a cópula bivariada para as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , em que  $F$  e  $G$  são as funções de distribuições e  $f$  e  $g$  são as funções de densidade de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Seja  $h$  a função de densidade conjunta para  $X$  e  $Y$ :

$$h(x,y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y), \quad (3.4)$$

em que  $c$  é a densidade da cópula  $C$ :

$$c(u,v) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u \partial v}. \quad (3.5)$$

Neste caso, a função log-verossimilhança será:

$$l(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \ln c(F(x_i, \boldsymbol{\alpha}_1), G(y_j, \boldsymbol{\alpha}_2); \theta) + \sum_{i=1}^n (\ln f(x_i, \boldsymbol{\alpha}_1) + \ln g(y_j, \boldsymbol{\alpha}_2)), i = j = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

em que  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \theta)$  é o vetor de parâmetros das distribuições marginais  $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$  e da cópula  $(\theta)$ . Daí,  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{ML}$  será o estimador de MV maximizando  $l(\boldsymbol{\alpha})$ .

#### Método IFM

O problema com o método ML se deve ao fato de que para casos com altas dimensões, a computação pode ser intensiva, pois estimaremos ao mesmo tempo os parâmetros das distribuições marginais e o da cópula. O método IFM é apresentado no trabalho de Joe & Xu (1996).

Tal método é baseado em dois passos:

**1º passo:** Estima-se os parâmetros das marginais pelo método da máxima verossimilhança.

**2º passo:** Estima-se o parâmetro da cópula considerando a estimação feita no 1º passo.

Neste caso, a log-verossimilhança descrita na Equação (3.6), será:

$$l(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \ln c(F(x_i, \boldsymbol{\alpha}_1), G(y_j, \boldsymbol{\alpha}_2); \theta) + \sum_{i=1}^n (\ln f(x_i, \boldsymbol{\alpha}_1) + \ln g(y_j, \boldsymbol{\alpha}_2)), i = j = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

em que  $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \theta)$ .  $\boldsymbol{\alpha}_1$  e  $\boldsymbol{\alpha}_2$  são os vetores dos parâmetros das distribuições marginais  $F$  e  $G$ , respectivamente, e  $\theta$  é o parâmetro da cópula  $C$ .

O 1º passo é determinar  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1$  e  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2$  através do método de máxima verossimilhança:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \arg \max \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \boldsymbol{\alpha}_1)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \arg \max \sum_{i=1}^n \ln g(y_j, \boldsymbol{\alpha}_2).$$

O 2º passo é substituir  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1$  e  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2$  na Equação (3.7) e estimar  $\theta$ :

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=1}^n \ln c(F(x_i, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_1), G(y_j, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_2); \theta).$$

### Método CML

O método CML é baseado nas distribuições empíricas das funções de distribuições marginais. Este método também consiste em dois passos:

**1º passo:** Uniformizar o conjunto de dados  $(x_i, y_j)$ ,  $i = j = 1, \dots, n$  em  $(\hat{u}, \hat{v})$ ;

**2º passo:** Estimar o parâmetro da cópula através do método ML da seguinte forma:

$$\hat{\theta} = \arg \max \sum_{i=1}^n \ln c(\hat{u}_i, \hat{v}_i; \theta).$$

Para mais detalhes sobre os métodos descritos anteriormente ver Durrleman et al. (2000).

### 3.3.2 Escolha da cópula

A escolha da cópula é baseada na cópula empírica que foi introduzida por Deheuvels (1979). De forma sucinta a escolha da cópula é feita da seguinte maneira: define-se um conjunto finito de cópulas, o qual denotamos por  $\tilde{C}$ , e calculamos uma distância entre a cópula empírica e as cópulas pertencentes a  $\tilde{C}$ . Assim, a cópula com menor distância será a escolhida. A seguir, definiremos cópula empírica e daremos mais detalhes sobre o processo de escolha da cópula.

**Definição 3.10. Cópula empírica.** A cópula empírica é uma função,  $C_n$ , definida como:

$$C_n(u, v) = \frac{\text{número de pares } \{(u_k, v_k)\}_{k=1}^n, \text{ tal que } u_k \leq u, v_k \leq v}{n}, \quad (3.8)$$

em que  $(u, v) \in I^2$  e  $\{(u_k, v_k)\}_{k=1}^n$  são os dados uniformizados.

Note que essa definição vem do fato de queremos estimar  $C(u,v)$  através de  $C_n(u,v)$ , em que  $C(u,v) = P(U \leq u, V \leq v), (u,v) \in I^2$ . Então através da amostra  $\{(u_k, v_k)\}_{k=1}^n$  do par  $(U,V)$  devemos estimar empiricamente  $P(U \leq u, V \leq v), (u,v) \in I^2$  em que esta estimação é obtida através de  $C_n$ .

**Exemplo 3.1.** Consideremos o seguinte conjunto de dados uniformizados, obtidos através da função de distribuição empírica:

$$\{(u_k, v_k); k = 1, 2, 3, 4\} = \{(1/2, 1/3), (1/2, 1/4), (1/3, 1/6), (2/3, 1)\}$$

Podemos construir a cópula empírica para todos  $(u,v) \in I^2$ . A seguir, apresentamos alguns valores para  $C_n$ .

$$C_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4};$$

$$C_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \frac{3}{4};$$

$$C_n(\frac{1}{2}, 1) = 0;$$

$$C_n(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}) = 0;$$

$$C_n(1, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4};$$

$$C_n(1, 1) = 1;$$

□

Para mais detalhes sobre cópula empírica ver Deheuvels (1979).

Após a construção da cópula empírica, iremos definir um conjunto finito de cópulas,  $\tilde{C} = \{C_1, \dots, C_J\}$ . A escolha das cópulas deste conjunto pode ser feita através da análise do comportamento dos dados uniformizados. Assim, caso os dados tenham características similares ao comportamento de certas cópulas, por exemplo simetria, assimetria, dependência na cauda à esquerda ou à direita etc., podemos selecioná-las para pertencerem ao conjunto  $\tilde{C}$ . Após definido o conjunto  $\tilde{C}$ , estimamos os parâmetros das cópulas através dos dados.

Assim, para a escolha da cópula calculamos uma distância entre  $C_n$  e as cópulas do conjunto  $\tilde{C}$ . Denotaremos essa distância por  $d(C_n, C_j), j = 1, \dots, J$ . Assim, a cópula a ser escolhida será a de menor distância.

Podemos usar as distâncias baseadas em diversas normas, como a norma  $L_2$  ou absoluta. Como estamos trabalhando com o caso bivariado, denotaremos a distância por  $d_2$ . A seguir definimos a norma  $L_2$  e a absoluta, respectivamente:

$$d_2(C_n, C_j) := \| C_n - C_j \|_{L_2} = \left[ \int_0^1 \int_0^1 (C_n(u,v) - C_j(u,v))^2 dudv \right]^{1/2} \quad (3.9)$$

e

$$d_{\parallel}(C_n, C_j) := \int_0^1 \int_0^1 | C_n(u,v) - C_j(u,v) | dudv. \quad (3.10)$$

As integrais acima podem ser difíceis de serem solucionadas dependendo da cópula em questão. Portanto, podemos utilizar uma aproximação discreta para essas distâncias. Durrleman et al. (2000) sugere a norma  $L_2$  discreta para aproximar a distância  $d_2$  como:

$$\hat{d}_2(C_n, C_j) = \left( \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \left[ C_n \left( \frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) - C_j \left( \frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) \right]^2 \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Analogamente, sugerimos a seguinte distância discreta para aproximar  $d_{\parallel}$ :

$$\hat{d}_{\parallel}(C_n, C_j) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \left| C_n \left( \frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) - C_j \left( \frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) \right|. \quad (3.12)$$

No Capítulo 6 utilizamos a distância média baseada em  $\hat{d}_{\parallel}$  denotada por  $\bar{d}_2$ , ou seja, utilizamos:

$$\bar{d}_2(C_n, C_j) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \left| C_n \left( \frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) - C_j \left( \frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) \right|. \quad (3.13)$$

## Capítulo 4

# A correlação no modelo LDA

O *Loss distribution approach* - LDA é um método estatístico muito popular em ciências atuarial para determinar a distribuição de perdas agregadas. As instituições financeiras estimam para cada classe de risco, a distribuição de perdas devido ao risco operacional, para um determinado horizonte de tempo. Todos os métodos apresentados neste trabalho serão baseados na metodologia LDA.

Decidiu-se utilizar o LDA para a mensuração do risco por sua objetividade, uma vez que não necessita da interpretação gerencial dos indicadores de risco, dependendo obrigatoriamente do histórico de perdas observadas para previsão da distribuição de perdas futuras; e por permitir fazer previsões, análise de cenários, teste de estresse e análise de custo-benefício - inclusive transferência de risco (Coleman, 2000).

Adicionalmente, sob o ponto de vista metodológico este modelo parece ser menos complicado para construção do que os modelos internos para risco de crédito e de mercado (Frachot et al., 2001).

O LDA é uma metodologia que consta no AMA. No documento de Basel Committee on Banking Supervision (2004), anexo 6, o LDA é apresentado como:

*Under the Loss Distribution Approach, the bank estimates, for each business line/risk type cell, the probability distribution functions of the single event impact and the event frequency for the next (one) year using its internal data, and computes the probability distribution function of the cumulative operational loss.*

Segundo Giacometti (2008), esta metodologia é a mais precisa do ponto de vista estatístico, pois utiliza as perdas históricas - frequência e severidade - e é baseada no banco de dados interno de perdas de cada instituição. Sendo assim, esse modelo pode capturar o grau de controle interno e prevenção de perdas de cada instituição.

Frachot et al. (2001) apresenta uma descrição detalhada e matematicamente formal do LDA, que será apresentada na próxima seção.

#### 4.1 *Loss distribution approach* - LDA

Para apresentar uma forma matemática do LDA, vamos definir alguns conceitos importantes.

**Definição 4.1. Frequência.** *A frequência é uma variável aleatória discreta que representa o número de eventos de perda entre um determinado período de tempo.*

As distribuições mais utilizadas para a frequência das perdas são as distribuições de Poisson, binomial negativa, binomial, geométrica, hipergeométrica, entre outras.

O número de fraudes internas ocorridas em um determinado período de tempo são exemplos de variáveis aleatórias de frequência no risco operacional.

**Definição 4.2. Severidade.** *A severidade é uma variável aleatória contínua positiva que representa o valor dos eventos de perda entre um determinado período de tempo.*

As distribuições mais utilizadas para a severidade são as distribuições gama, log-normal, Pareto, entre outras.

A seguir, apresentamos um exemplo para elucidar as definições de frequência e severidade.

**Exemplo 4.1.** Uma instituição financeira observa o número de fraudes internas ocorridas no período de um mês. Sabemos que o número e o valor monetário de cada fraude são variáveis aleatórias, o qual denominamos frequência e severidade, denotadas por  $N$  e  $X$ , respectivamente. Assim, se admitirmos que observamos  $N = 3$ , os valores de cada evento de perda poderão ser  $\mathbf{X} = (R\$300,00; R\$1.000,00, R\$400,00)$ .

□

A partir do Novo Acordo, consideremos as seguintes notações:

- $M$  é o número total das classes de risco operacional (células da matriz linha de negócio  $(i) \times$  tipo de risco  $(j)$ ) e  $m$  representa uma determinada classe de risco,  $m = 1, \dots, M$ ;
- $X_1, X_2, \dots$ , variáveis aleatórias contínuas, cada uma representando a severidade da perda para uma determinada classe de risco. A distribuição de severidade de uma determinada classe  $m$  será denotada por  $F_m$ .

- O número de eventos entre o tempo  $t$  e  $t + \gamma$ <sup>1</sup> é aleatório. Assim, denotamos essa variável, a frequência, para uma determinada classe  $m$ , por  $N_m$ , sendo sua função de probabilidade denotada por  $p_m$ , em que  $Pr(N_m = n) = p_m$ .

No LDA, a perda operacional ocorrida para uma classe de risco  $m$  em um período de tempo, será denominada **perda agregada**, sendo denotada por  $L_m$ :

$$L_m = \sum_{i=1}^{N_m} X_i, \quad (4.1)$$

em que  $N_m$  é a frequência em que as perdas ocorrem e  $X_i$  é a severidade das perdas para uma determinada classe  $m$ . Note que  $L_m$  é uma soma de variáveis aleatórias finitas, cujo o índice dessa soma é também aleatório, ou seja, temos uma soma aleatória de variáveis aleatórias. Denotemos por  $G_m$  a função de distribuição da variável aleatória  $L_m$ .

Para obter a função de distribuição de  $L_m$ , assumimos os seguintes pressupostos:

- $N_m$  e  $(X_1, X_2, \dots)$  são variáveis aleatórias independentes;
- $X_1, X_2, \dots$  é um conjunto de variáveis aleatórias independentes ;
- $X_1, X_2, \dots$  seguem a mesma distribuição marginal.

O primeiro pressuposto indica que frequência e severidade são duas fontes independentes de aleatoriedade. O segundo e terceiro indicam que as perdas ocorridas em uma mesma classe de risco são independentes e identicamente distribuídas.

Queremos determinar a função de distribuição para  $L_m$ , o qual denotamos por  $G_m$ . Seguindo a definição de função de distribuição e os pressupostos, temos:

$$\begin{aligned} G_m(l) &= P(L_m \leq l) & (4.2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(L_m \leq l, N_m = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(L_m \leq l | N_m = n) P(N_m = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=0}^{N_m} X_i \leq l | N_m = n\right) P(N_m = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=0}^n X_i \leq l\right) P(N_m = n) \end{aligned}$$

A partir dos pressupostos, quando  $l = 0$  obtemos  $P(\sum_{i=0}^n X_i \leq 0) = 1$ . De fato,

---

<sup>1</sup>O Novo Acordo recomenda  $\gamma = 1$  ano.

$$l = 0 \Rightarrow G_m(0) = P(\sum_{i=0}^0 X_i \leq 0 | N_m = 0)P(N_m = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{N_m} X_i \leq 0 | N_m = n)P(N_m = n) = P(N_m = 0).$$

A probabilidade  $P(\sum_{i=0}^0 X_i \leq 0 | N_m = 0)$  é 1, pois uma vez que a frequência é nula a soma das severidades também será. Já a probabilidade  $P(\sum_{i=1}^n X_i \leq 0 | N_m = n)$  será sempre nula, pois se  $n \geq 1$ , conseqüentemente temos  $\sum_{i=0}^n X_i > 0$ , pois ocorreu um evento de perda.

Assim, a distribuição composta  $G_m$  é obtida através da convolução e será dada por:

$$G_m(l) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P(N_m = n)F_m^{n*}(l), & \text{se } l > 0 \\ P(N_m = 0), & \text{se } l = 0 \end{cases}$$

em que  $*$  é operador da convolução <sup>2</sup> na função de distribuição e  $F^{n*}$  é a n-ésima auto-convolução de  $F_m(l)$ <sup>3</sup>.

Uma vez que a variável  $G_m$  é não-negativa, as distribuições mais utilizadas para a perda agregada  $L_h$  são log-normal, Weibull, gama, Pareto etc..

Resumidamente, a modelagem do LDA é feita em duas etapas. Primeiramente são ajustadas as distribuições de frequência e severidade. E, na segunda etapa, obtemos a distribuição de perdas agregadas compondo essas distribuições. A Figura 4.1 ilustra esse processo.

Existem casos, muito particulares, em que a solução analítica de  $G_m$  é fechada, porém na grande maioria deles tal solução é obtida por métodos numéricos implementados em computadores ou métodos analíticos aproximados. O método mais utilizado para a simulação é o de Monte Carlo.

---

<sup>2</sup>**Definição (Feller, 2008):** A convolução de uma função limitada pontual  $\phi$  com uma distribuição de probabilidade  $F$  é a função definida por

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)F(dy).$$

Isto será denotado por  $u = F * \phi$ . Quando  $F$  tem densidade  $f$ , escrevemos  $u = f * \phi$  e temos

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-y)f(y)$$

<sup>3</sup>Estas relações são importantes para o cálculo da auto-convolução:

$$F^{1*} = F$$

$$F^{n*} = F^{(n-1)*} * F.$$

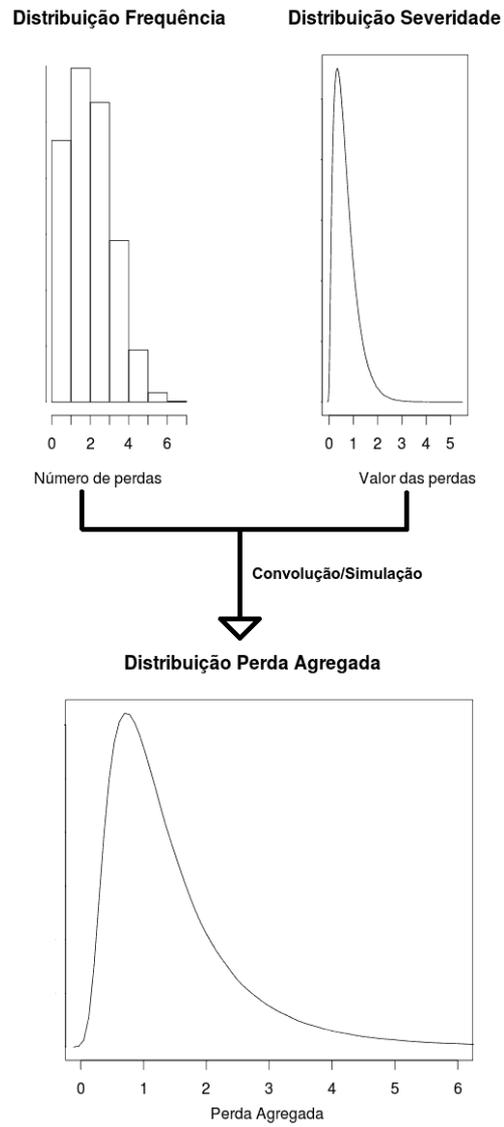


Figura 4.1: Perda Agregada.

## 4.2 Cálculo do capital regulatório no LDA

Com a distribuição de perda agregada estabelecida, para uma determinada classe de risco  $m$ , podemos determinar o capital regulatório através do *Value-at-Risk* (VaR). O VaR é uma medida já utilizada por outros tipos de risco, como o risco de mercado. No caso do risco operacional, denotaremos o VaR por OPVaR.

**Definição 4.3.** *Value-at-Risk (OPVaR).* Seja  $G_m$  a função de distribuição da perda agregada  $L_m$  para uma determinada classe de risco  $m$ . O OPVaR é o percentil  $\alpha$ <sup>4</sup> de  $G_m$ , ou seja,

$$OPVaR(L_m) = G_m^{-1}(\alpha). \quad (4.3)$$

Antes de definir o capital regulatório marginal para o LDA, definiremos as perdas esperada e inesperada marginais.

A **perda esperada** de uma classe risco  $m$ ,  $EL_m$ , é o valor esperado da variável aleatória  $L_m$  que segue a distribuição das perdas agregadas, ou seja,

$$EL_m = \int_0^{\infty} g_m(l) dl. \quad (4.4)$$

A **perda inesperada** de uma determinada classe de risco  $m$ ,  $UL_m$ , é dada por:

$$UL_m = OPVaR(L_m) - EL_m. \quad (4.5)$$

Note que as perdas inesperadas e as perdas esperadas estão bem definidas marginalmente.

**Definição 4.4. Capital regulatório - para uma determinada linha de negócio e tipo de risco.** O capital regulatório marginal para uma determinada classe de risco  $m$ , o qual denotaremos por  $CR(L_m)$ , é dado por:

$$CR_{L_m} = OPVaR(L_m) - EL_m = UL_m, \quad (4.6)$$

em que  $OPVaR(L_m)$  é o *Value-at-Risk* e  $EL_m$  é a perda média, ambos da classe de risco  $m$ .

A Figura 4.2 ilustra tais definições.

---

<sup>4</sup>Basileia recomenda  $\alpha = 0.999$



Figura 4.2: Tipos de Perdas.

### 4.3 O estudo da correlação no modelo LDA

Atualmente, as instituições financeiras consideram a correlação entre as perdas do modelo LDA como sendo perfeita. Segundo Frachot et al. (2004), o capital requerido considerando esse tipo de correlação é superestimado, ou seja, o capital alocado é maior do que se fosse considerado qualquer outro efeito de correlação entre as diferentes linhas de negócios e tipos de evento. As instituições financeiras, ao atribuir este tipo de correlação, são consideradas conservadoras.

Apresentaremos nessa seção três tipos de correlação no modelo LDA: perfeita (sugerida por Basel II), não-perfeita (proposta por Frachot et al. (2004)) e a nula (considerada somente para efeito de comparação).

#### 4.3.1 Correlação perfeita - Método do somatório

A correlação entre as perdas operacionais do modelo utilizada atualmente é a perfeita. Neste caso a instituição calcula o capital exigido para cada classe de risco. Assim, o capital regulatório total para cobertura do risco operacional, para a instituição como um todo, é obtido pelo método do somatório, em que se soma o requerimento de capital obtido em cada classe de risco.

Alexander (2003) afirma que se toda dependência entre as distribuições de perdas agregadas pudessem ser mensuradas pela correlação, ao somarmos a carga de capital para

cobertura de risco operacional estaríamos supondo que as classes de risco são perfeitamente correlacionadas. Isso implica que todos eventos extremos de perda operacional devem ocorrer ao mesmo tempo em todas as classes de risco, o que é uma hipótese irreal.

No Apêndice A de Frachot et al. (2004) é mostrado que quando consideramos a correlação perfeita entre duas perdas agregadas,  $L_1$  e  $L_2$ , referentes as classes de risco 1 e 2, respectivamente, ocorre que:

$$OPVaR(L_1 + L_2) = OPVaR(L_1) + OPVaR(L_2),$$

daí o fato de ser utilizado o método do somatório para a correlação perfeita.

Quando analisamos o requerimento do capital regulatório total, para uma instituição como um todo, com  $M$  classes de risco, obtemos:

$$CR_{SUM} = \sum_{i=1}^M UL_i. \quad (4.7)$$

Note que o  $CR_{SUM}$  é uma das respostas do que é a perda inesperada total. Neste caso, a perda inesperada total, quando considerado que as perdas são perfeitamente correlacionadas, é simplesmente a soma dos capitais regulatórios marginais.

Como visto anteriormente, o Novo Acordo propõe 56 estimativas de requerimentos para se obter o total de capital exigido para cobrir os gastos que envolvam o risco operacional. Assim, se a instituição considerar a divisão das classes dessa forma, podemos escrever a Equação (4.7) como sendo:

$$CR_{SUM} = \sum_{i=1}^{56} (OPVaR(L_i) - EL_i) = \sum_{i=1}^{56} UL_i. \quad (4.8)$$

### 4.3.2 Correlação não-perfeita

A correlação não-perfeita no modelo LDA é apresentada em Frachot et al. (2004). Um dos pressupostos do modelo LDA se refere a independência das perdas individuais de uma específica classe de risco. Assumir que exista correlação entre as severidades das perdas de duas classes de risco implicaria em assumir, simultaneamente, que há independência de severidades dentro de cada classe de risco (pressuposto do modelo LDA) e que há correlação entre severidades de duas classes de risco. Segundo Frachot et al. (2004) é conceitualmente difícil assumir essa hipótese. Além disso, ao assumir correlação entre severidades, haverá uma alteração no LDA padrão, sendo necessário uma reformulação no modelo. Para reformular o modelo são encontrados dois problemas cruciais, o primeiro se refere a matemática trabalhosa e o segundo a escassez de bancos de dados.

O motivo acima é que faz com que seja adicionada a correlação na frequência dos eventos. Ou seja, assume-se que as variáveis severidades são independentes e as frequências correlacionadas e, conseqüentemente, obtemos que as perdas agregadas operacionais são correlacionadas.

Adicionar correlação entre frequências dos eventos de classes de riscos distintas não altera o modelo LDA. Em particular, não muda a forma de como se calcula o capital regulatório. Além disso, é possível calcular a correlação entre as frequências através de correlação histórica entre as frequências dos eventos, desde que se tenha dados suficientes.

Investigando como e em que extensão a correlação entre frequências gera correlação entre as perdas agregadas, Frachot et al. (2004) demonstram que mesmo quando existe uma forte correlação entre frequências, a correlação entre as perdas agregadas pode ser baixa. Isso porque a independência das severidades domina a dependência das frequências, principalmente no caso de eventos de alta severidade, isto é, quando as distribuições das severidades têm caudas pesadas.

Iremos considerar, nesta demonstração,  $M = 2$ , ou seja, vamos analisar o caso da correlação não-perfeita somente para duas classes de risco.

Portanto, para calcular a correlação não-perfeita, empiricamente, entre duas perdas agregadas  $L_1$  e  $L_2$ , devemos considerar:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{corr}(N_1, N_2) \neq 0 \\ X, Y \text{ independentes} \Rightarrow \text{corr}(X, Y) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{corr}(L_1, L_2) \neq 0$$

em que  $N_1$  e  $X$  são as variáveis frequência e severidade, respectivamente, da perda agregada  $L_1$  e  $N_2$  e  $Y$  são as variáveis frequência e severidade, respectivamente, da perda agregada  $L_2$ .

Assumiremos, para melhor entendimento e simplificação de notação, que  $N_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$  e  $N_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ .

Primeiramente, devemos determinar a covariância entre  $L_1$  e  $L_2$ .

$$\text{Cov}(L_1, L_2) = E[L_1 L_2] - E[L_1]E[L_2],$$

em que

$$L_1 = \sum_{i=1}^{N_1} X_i \text{ e } L_2 = \sum_{j=1}^{N_2} Y_j.$$

Assim,

$$Cov(L_1, L_2) = E\left[\sum_{i=1}^{N_1} X_i \sum_{j=1}^{N_2} Y_j\right] - E\left[\sum_{i=1}^{N_1} X_i\right]E\left[\sum_{j=1}^{N_2} Y_j\right] \quad (4.9)$$

Vamos calcular separadamente cada uma das esperanças.

- $E\left[\sum_{i=1}^{N_1} X_i \sum_{j=1}^{N_2} Y_j\right] = E[L_1 L_2]$

$$E[L_1 \cdot L_2 | N_1 = n_1, N_2 = n_2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n_2} Y_j\right)\right] = E\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i\right)E\left(\sum_{j=1}^{n_2} Y_j\right) = n_1 E(X) n_2 E(Y),$$

na segunda igualdade usamos o fato de  $X$  e  $Y$  serem independentes e na última o fato de  $X_1, \dots, X_{n_1}$  serem i.i.d. e  $Y_1, \dots, Y_{n_2}$  também serem i.i.d..

Assim, usando a propriedade de esperança condicional, obtemos:

$$E(L_1 L_2) = E[E(L_1 L_2 | N_1, N_2)] = E(N_1 E(X) N_2 E(Y)) = E(X) E(Y) E(N_1 N_2)$$

- $E(L_1)$  e  $E(L_2)$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n_1} X_i | N_1 = n_1\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n_1} X_i\right] = E(X_1) + \dots + E(X_{n_1}) = n_1 E(X),$$

na segunda e terceira igualdade usamos o fato de  $X_1, \dots, X_{n_1}$  serem i.i.d..

Usando a propriedade de esperança condicional:

$$E(L_1) = E[E(L_1 | N_1)] = E(N_1 E(X)) = E(N_1) E(X) = \lambda_1 E(X)$$

De forma análoga, obtemos:

$$E(L_2) = \lambda_2 E(Y)$$

Substituindo esses valores na Equação (4.9), obtemos:

$$Cov(L_1, L_2) = [E(N_1 N_2) - \lambda_1 \lambda_2] E(X) E(Y) \quad (4.10)$$

Encontrada a covariância, podemos calcular o coeficiente de correlação de  $L_1$  e  $L_2$ .

$$Corr(L_1, L_2) = \frac{Cov(L_1, L_2)}{\sqrt{Var(L_1) Var(L_2)}} \quad (4.11)$$

Usando a propriedade de variância condicional determinaremos a  $Var(L_1)$  e  $Var(L_2)$ .

$$Var(L_1|N) = Var\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i | N_1 = n_1\right) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_{n_1}) = n_1 Var(X)$$

Logo,

$$\begin{aligned} Var(L_1) &= E(Var(L_1|N_1)) + Var(E(L_1|N_1)) = E(N_1 Var(X)) + Var(N_1 E(X)) = \quad (4.12) \\ &= Var(X)E(N_1) + [E(X)]^2 Var(N_1) = Var(X)\lambda_1 + [E(X)]^2 \lambda_1 = \\ &= \lambda_1 [(E(X))^2 + Var(X)] = \lambda_1 E(X^2). \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos:

$$Var(L_2) = Var(Y)\lambda_2 + [E(Y)]^2 \lambda_2 = \lambda_2 [(E(Y))^2 + Var(Y)] = \lambda_2 E(Y^2). \quad (4.13)$$

Substituindo (4.12) e (4.13) em (4.11), obtemos:

$$Corr(L_1, L_2) = \frac{[E(N_1 N_2) - \lambda_1 \lambda_2] E(X) E(Y)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 E(X^2) E(Y^2)}} = Corr(N_1, N_2) \eta(X) \eta(Y), \quad (4.14)$$

em que  $\eta(X) = \frac{E(X)}{\sqrt{Var(X) + [E(X)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2(x)}} \leq 1$ , sendo  $c^2(x) = \frac{Var(X)}{[E(X)]^2}$ , e  $X$  uma variável aleatória positiva, de forma análoga obtemos  $\eta(Y)$ .

É fácil verificar que:

$$0 \leq Corr(L_1, L_2) \leq Corr(N_1, N_2) \leq 1,$$

ou seja, a correlação das perdas agregadas é mais baixa que a correlação entre as frequências, especialmente quando as distribuições das severidades têm caudas pesadas, como dito anteriormente.

No caso de  $M$  classes de risco, Frachot et al. (2004) define o capital regulatório total, para o caso em que as frequências são correlacionadas e as severidades independentes, como sendo:

$$CR_{NPERF} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^M \rho_{i,j} (OPVar(L_i) - EL_i) \times (OPVar(L_j) - EL_j)}, \quad (4.15)$$

em que  $\rho_{i,j}$  é o coeficiente de correlação linear entre as perdas agregadas.

É possível observar que quando tivermos somente duas perdas,  $M=2$ , e considerarmos  $\rho_{1,2} = 1$ , ou seja, considerar que as duas perdas são perfeitamente correlacionadas, teremos que  $CR_{NPERF}$  se reduzirá ao capital obtido pelo método do somatório.

Note que o  $CR_{NPERF}$  obtido representa mais uma resposta para a questão central do trabalho: o que são perdas inesperadas totais?

Como as instituições financeiras tem maior conhecimento ao seu perfil de risco, o Novo Acordo prevê, ainda que de maneira tímida, que o cálculo de capital requerido pode ser feito utilizando-se correlação menor que 1 entre as classes de risco, desde que o banco possa validar seus pressupostos.

**Exemplo 4.2.** Consideremos duas perdas agregadas  $L_1$  e  $L_2$ , com as respectivas severidades  $X$  e  $Y$  e frequências  $N_1$  e  $N_2$ . Na Tabela 4.1 apresentamos as distribuições das severidades e das frequências.

Tabela 4.1: Distribuições.

	Frequência	Severidade
$L_1$	$N_1 \sim Poisson(\lambda_1)$	$X \sim \mathcal{LN}(\mu_X, \sigma_X)$ <sup>1</sup>
$L_2$	$N_2 \sim Poisson(\lambda_2)$	$Y \sim \mathcal{LN}(\mu_Y, \sigma_Y)$

Primeiramente vamos determinar  $\eta(X)$  e  $\eta(Y)$ .

$$\eta(X) = \frac{E(X)}{\sqrt{Var(X) + [E(X)]^2}} = \frac{e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}}}{\sqrt{e^{2\mu_x + \sigma_x^2}(e^{\sigma_x^2} - 1) + (e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}})^2}} = \frac{e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}}}{\sqrt{e^{2\mu_x + \sigma_x^2}(e^{\sigma_x^2} - 1) + e^{2\mu_x + \sigma_x^2}}}$$

$$\eta(X) = \frac{e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}}}{\sqrt{(e^{2\mu_x + \sigma_x^2})(e^{\sigma_x^2} - 1 + 1)}} = \frac{e^{\mu_x + \frac{\sigma_x^2}{2}}}{(e^{2\mu_x + \sigma_x^2})^{1/2}(e^{\sigma_x^2})^{1/2}} = e^{-\frac{1}{2}\sigma_x^2}$$

De forma análoga, obtemos  $\eta(Y) = e^{-\frac{1}{2}\sigma_y^2}$ . Assim, por 4.14, obtemos a correlação entre  $L_1$  e  $L_2$ .

$$Corr(L_1, L_2) = Corr(N_1, N_2) \times \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_x^2 - \frac{1}{2}\sigma_y^2\right).$$

□

Portanto, o cálculo do capital regulatório quando utilizamos a metodologia da correlação não-perfeita, é obtido por uma simples fórmula que depende somente da correlação entre as frequências e da variância e esperança das severidades. A desvantagem desse método está

em considerar somente como medida de dependência a correlação linear. Nele não existe um estudo mais rigoroso sobre a relação de dependência entre as várias perdas operacionais.

### 4.3.3 Correlação nula

A correlação nula no modelo LDA é considerada apenas para efeito de comparação com as demais metodologias, uma vez que é improvável que duas classe de risco sejam independentes já que ocorrem dentro de uma mesma instituição.

Se observarmos a Equação (4.15), ao considerarmos a correlação entre as perdas sendo nula, ou seja,  $\rho_{i,j} = 0$ , quando  $i \neq j$  e  $\rho_{i,j} = 1$ , quando  $i = j$ , obtemos uma nova fórmula para o cálculo do OPVaR total, em que neste caso denotamos por  $OPVaR_{TOTNULA}$ , definido por Frachot et al. (2004):

$$OPVaR_{TOTNULA} = EL + \sqrt{\sum_{i=1}^M (OPVaR_i - EL_i)^2}, \quad (4.16)$$

em que  $OPVaR(L_i)$  e  $EL_i$  são, respectivamente, o  $OPVaR$  e a perda esperada marginal e  $EL$  é a soma de todas as perdas esperadas, ou seja,  $EL = \sum_{i=1}^M EL_i$ .

Assim, por (4.7), obtemos mais uma definição para a capital regulatório total,  $CR_{NULA}$ , considerando a correlação nula:

$$CR_{NULA} = \sqrt{\sum_{i=1}^M (OPVaR(L_i) - EL_i)^2}. \quad (4.17)$$

---

<sup>1</sup>Se  $W \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$ , então a função de distribuição de probabilidade de  $W$  é dada por:

$$f_W(w; \mu, \sigma) = \frac{1}{w\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln w - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], w > 0.$$

E, também  $E(W) = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$  e  $Var(W) = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$ .

# Capítulo 5

## Metodologia proposta

Neste capítulo, apresentamos uma nova metodologia para o cálculo do capital regulatório utilizando a teoria de cópulas para captar a dependência entre as perdas agregadas. O objetivo do método a ser apresentado é o cálculo de um capital que cubra todas as perdas causadas pelo risco operacional, mas que não seja conservador, ou seja, este novo cálculo será feito de acordo com o cenário real da instituição financeira. Nos restringimos somente ao caso de duas perdas agregadas operacionais, ou seja, o método que propomos é bivariado.

### 5.1 Pressupostos

Para a construção do método consideramos  $M = 2$  e nos baseamos em cinco pressupostos que são descritos a seguir.

**Pressuposto 1:** Opinião de especialistas quantificada em um índice;

O método será considerado ideal através da opinião de especialistas de cada instituição. São eles que determinam o modelo a ser utilizado de acordo com o cenário que a instituição vivencia. O modelo deve ser robusto e cumprir todas as exigências do Comitê de Basileia.

A opinião de especialistas deve ser expressa através de um índice. Este índice determinará o quanto de capital será alocado e será denotado por  $\kappa^*$ . Veremos adiante mais informações sobre o  $\kappa^*$ .

**Pressuposto 2:** Considerar a probabilidade de perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente;

Sabemos que o capital regulatório (CR) marginal está bem definido. Ou seja, ao considerarmos duas perdas agregadas,  $L_1$  e  $L_2$ , pertencentes a classe de risco 1 e 2,

respectivamente, temos que:

$$CR_{L_1} = OPVaR(L_1) - EL_1 = UL_1 \text{ e}$$

$$CR_{L_2} = OPVaR(L_2) - EL_2 = UL_2,$$

em que  $OPVaR$  é o percentil 0.999 da distribuição perda agregada e  $EL_1$  e  $EL_2$  são as esperanças das variáveis perdas  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente.

Considerar que a perda inesperada marginal ocorre na classe de risco 1, é equivalente a considerar que  $L_1 \in [EL_1, OPVaR(L_1)]$ . De forma análoga para a classe de risco 2,  $L_2 \in [EL_2, OPVaR(L_2)]$ .

Nosso interesse é modelar as variáveis aleatórias perdas conjuntamente, considerando o grau de dependência entre ambas, por meio de cópulas. Sendo assim, devemos relacionar o evento  $(L_1, L_2) \in ([EL_1, OPVaR(L_1)] \times [EL_2, OPVaR(L_2)])$ , usando teoria de cópulas, com o capital regulatório total. Uma maneira de se obter essa relação é através da probabilidade de ocorrência deste evento, o qual denotaremos por  $p$ .

Daí,

$$\begin{aligned} p &= P(\text{perdas marginais ocorrerem conjuntamente}) \\ &= P((L_1, L_2) \in ([EL_1, OPVaR(L_1)] \times [EL_2, OPVaR(L_2)])) \\ &= P(EL_1 \leq L_1 \leq OPVaR(L_1), EL_2 \leq L_2 \leq OPVaR(L_2)) \end{aligned}$$

Considerando  $C$  uma cópula qualquer,  $H_C$  a função de distribuição conjunta de  $L_1$  e  $L_2$ , a Definição 3.1 e o retângulo  $B = [EL_1, OPVaR(L_1)] \times [EL_2, OPVaR(L_2)]$ , temos:

$$\begin{aligned} p &= V_h(B) = H_C(OPVaR(L_1), OPVaR(L_2)) - H_C(EL_1, OPVaR(L_2)) - \\ &\quad H_C(OPVaR(L_1), EL_2) + H_C(EL_1, EL_2). \end{aligned} \tag{5.1}$$

**Pressuposto 3:** Deve-se considerar as perdas inesperadas marginais (ou capitais regulatórios marginais) de  $L_1$  e  $L_2$ , como foram definidas anteriormente, ou seja,  $UL_1 = OPVaR(L_1) - EL_1$  e  $UL_2 = OPVaR(L_2) - EL_2$ .

**Pressuposto 4:** Se de fato  $L_1$  e  $L_2$  possuem dependência perfeita positiva, o capital regulatório proposto deve ser igual ao capital obtido pelo Método do somatório;

Quando se trata de dependência perfeita positiva, a cópula a ser utilizada na modelagem dos dados é a do Limitante superior de Fréchet, ou seja,  $C^+(u, v) = \min(u, v)$ . Por outro lado, vimos que quando consideramos tal dependência, obtemos:

$$OPVaR(L_1 + L_2) = OPVaR(L_1) + OPVaR(L_2),$$

(Apêndice A de Frachot et al. (2004)), sendo então o capital regulatório o mais conservador possível, o  $CR_{SUM}$ .

O fato é que quando utilizamos  $C^+$ , devemos obter  $CR_{PROP}$  igual ao  $CR_{SUM}$ . Desta forma, quando  $p = p^+$ , ou seja, quando  $C = C^+$ , devemos ter  $CR_{PROP} = CR_{SUM}$ .

Pelo Teorema de Sklar 3.2, obtemos:

$$\begin{aligned}
p^+ &= \min[F(OPVaR(L_1)), G(OPVaR(L_2))] - \min[F(EL_1), G(OPVaR(L_2))] - \\
&\quad - \min[F(OPVaR(L_1), G(EL_2))] + \min[F(EL_1), G(EL_2)] \\
&= \min(0.999, 0.999) - \min(F(EL_1), 0.999) - \min(0.999, G(EL_2)) + \min[F(EL_1), G(EL_2)] \\
&= 0.999 - \min(F(EL_1), 0.999) - \min(0.999, G(EL_2)) + \min[F(EL_1), G(EL_2)] \\
&= 0.999 - F(EL_1) - G(EL_2) + \min[F(EL_1), G(EL_2)] \tag{5.2}
\end{aligned}$$

**Pressuposto 5:** Se  $C = C^-$  ( $L_1$  e  $L_2$  possuem dependência perfeita negativa) então  $CR_{PROP} = \max(UL_1, UL_2)$ ;

Para analisar este caso usamos a cópula Limitante Inferior de Fréchet, ou seja,  $C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ . Denotando a distribuição conjunta de  $L_1$  e  $L_2$  por  $H_{C^-}$  e  $p^-$  a probabilidade obtida para este caso, temos

$$\begin{aligned}
p^- &= \max[F(OPVaR(L_1)) + G(OPVaR(L_2)) - 1, 0] - \max[F(EL_1) + G(OPVaR(L_2)) - 1, 0] - \\
&\quad - \max[F(OPVaR(L_1)) + G(EL_2) - 1, 0] + \max[F(EL_1) + G(EL_2) - 1, 0] \\
&= \max(0.999 + 0.999 - 1, 0) - \max[F(EL_1) + 0.999 - 1, 0] - \max[0.999 + G(EL_2) - 1, 0] + \\
&\quad + \max[F(EL_1) + G(EL_2) - 1, 0] \\
&= (0.999 + 0.999 - 1) - (F(EL_1) + 0.999 - 1) - (G(EL_2) + 0.999 - 1) + \\
&\quad + \max[F(EL_1) + G(EL_2) - 1, 0].
\end{aligned}$$

O fato de que o  $\max[0.999 + G(EL_2) - 1, 0] = 0.999 + G(EL_2) - 1$  se refere a considerar que  $0.999 + G(EL_2) - 1 > 0 \iff G(EL_2) > 0.001$ . De forma análoga, temos que  $\max[F(EL_1) + 0.999 - 1, 0] = F(EL_1) + 0.999 - 1$ . Dentro da classe de funções de distribuições para perdas operacionais agregadas, as funções que não satisfazem a desigualdade  $G(EL_2) > 0.001$  não são utilizadas. Então,

$$p^- = 1 - F(EL_1) + G(EL_2) + \max[F(EL_1) + G(EL_2) - 1, 0]. \tag{5.3}$$

As distribuições de perdas agregadas são assimétricas à direita, o que nos garante que  $\text{Moda} < \text{Mediana} < \text{Média}$ . Logo,

$$E(L_1) > \text{Mediana}(L_1) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} F(EL_1) > F(\text{Mediana}(L_1)) \Rightarrow F(EL_1) > 0.5.$$

(\*)  $F$  é crescente. De forma análoga, obtemos que  $G(EL_2) > 0.5$ .

Daí, obtemos que  $\max[F(EL_1) + G(EL_2) - 1, 0] = F(EL_1) + G(EL_2) - 1$ . Substituindo em (5.3):

$$\begin{aligned} p^- &= 1 - F(EL_1) + G(EL_2) + F(EL_1) + G(EL_2) - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Neste caso, a probabilidade conjunta é nula, ou seja,  $p^- = P(EL_1 \leq L_1 \leq OPVaR(L_1), EL_2 \leq L_2 \leq OPVaR(L_2)) = 0$ . Então, somente é possível que :

- 1) o evento  $EL_1 \leq L_1 \leq OPVaR(L_1)$  ocorre e  $EL_2 \leq L_2 \leq OPVaR(L_2)$  não ocorre;
- 2) o evento  $EL_1 \leq L_1 \leq OPVaR(L_1)$  não ocorre e  $EL_2 \leq L_2 \leq OPVaR(L_2)$  ocorre;
- 3) os eventos  $EL_1 \leq L_1 \leq OPVaR(L_1)$  e  $EL_2 \leq L_2 \leq OPVaR(L_2)$  não ocorrem.

Então, o mais plausível é ser o mais conservador possível, alocando o máximo entre os capitais regulatórios marginais de  $L_1$  e  $L_2$ , ou seja,  $CR = \max(UL_1, UL_2)$ . Embora isso, não reflita na realidade dentro das instituições financeiras, esse pressuposto deve ser considerado para a construção do método.

Resumidamente, os pressupostos a ser considerados na construção do método são:

1. Opinião de especialista quantificada pelo índice  $\kappa^*$ ;
2. A probabilidade ( $p$ ) das perdas inesperadas ocorrerem conjuntamente;
3. Considerar as perdas inesperadas marginais;
4. Se  $L_1$  e  $L_2$  possuem dependência perfeita positiva então  $CR_{PROP} = CR_{SUM}$ ;
5. Se  $L_1$  e  $L_2$  possuem dependência perfeita negativa então  $CR_{PROP} = \max(UL_1, UL_2)$ .

## 5.2 Descrição do método

A partir dos pressupostos acima, para obtermos um método robusto, devemos ter uma forma funcional entre  $p$  e  $CR$ , que obedecem certas características. Ou seja,  $\exists f : [0, p^+] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que,

- i)  $CR_{PROP} = f(p)$ ;
- ii)  $f(0) = \max(UL_1, UL_2)$ ;
- iii)  $f(p^+) = CR_{SUM}$ ;
- iv)  $f$  é uma função crescente.

Assumir que  $f$  é crescente se deve ao fato de que conforme aumentamos a probabilidade das perdas ocorrerem conjuntamente, o capital a ser alocado também aumentará.

A partir das condições citadas, temos que  $f : [0, p^+] \rightarrow [\max(UL_1, UL_2), CR_{SUM}]$ . Vale ressaltar que o método utilizado hoje, somatório, não considera a variação da probabilidade no cálculo do capital regulatório, ou seja, o valor de  $CR$  é constante para qualquer valor de  $p$ .

A resposta à questão central do trabalho (O que são perdas inesperadas totais?) será respondida por meio de uma forma funcional entre o capital regulatório proposto ( $CR_{PROP}$ ) e a probabilidade das perdas ocorrerem conjuntamente ( $p$ ), ou seja,  $f(p) = CR_{PROP}$ , em que  $f$  possui as características descritas anteriormente.

Na Figura 5.1, podemos observar o comportamento do capital regulatório e  $p$  em relação ao método do somatório. Já na Figura 5.2 mostramos algumas possíveis funções para o método proposto.

Portanto, existem infinitas funções com as características descritas anteriormente, como por exemplo a própria reta que passa pelos dois pontos é uma possível função. Para dar uma solução para este problema, vamos utilizar a teoria de sequência de funções.

Na próxima subseção, apresentamos sucintamente a teoria de sequência de funções, que será utilizada na construção do método proposto.

### Sequência de funções

Queremos determinar uma função que cumpra as condições iniciais supracitadas. É frequente, nesses casos, obter-se uma sequência de funções  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ , cada uma das quais cumpre as condições exigidas.

Daremos a seguir a definição de sequência de funções e alguns exemplos que serão suficientes para a construção do método.

**Definição 5.1. Sequência de funções.** *Uma sequência de funções em um domínio  $D$  é definida como um conjunto  $\{f_i\}$  de funções  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  indexadas com um índice  $i, i \in \mathbb{N}$ .*

São exemplos de sequências de funções:

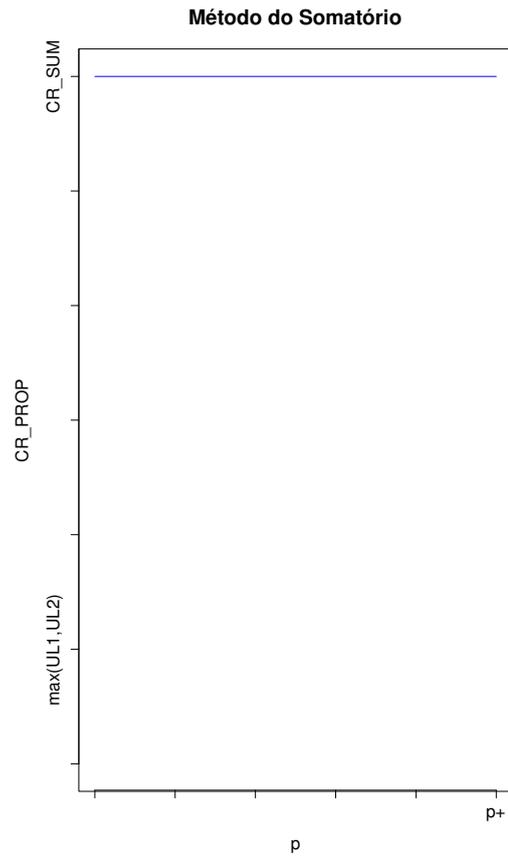


Figura 5.1: Comportamento do método do somatório.

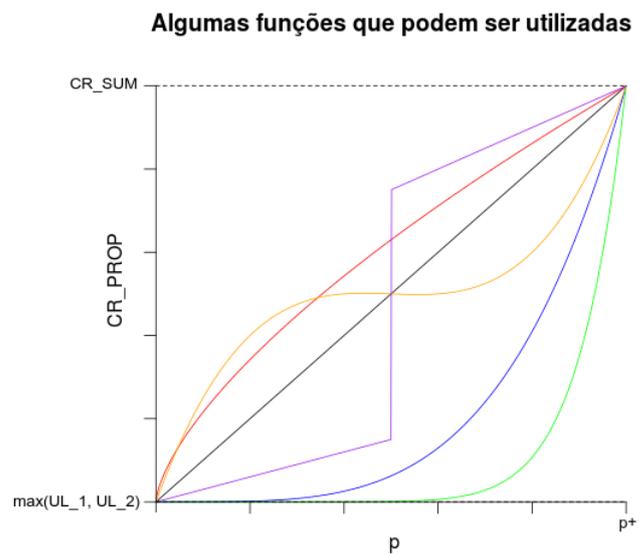


Figura 5.2: Possíveis funções para o método proposto.

- 1)  $f_i(x) = ix^2$ ;
- 2)  $f_i(x) = \frac{i}{i+x^2}, i \geq 1$ ;
- 3)  $f_i(x) = \frac{i}{x}, i \geq 1$ , em que  $i \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 5.1.** A sequência de funções

$$f_i : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_i(x) = x^i \quad i \in \mathbb{N},$$

converge simplesmente para a função descontínua  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0, 0 \leq x < 1, f(1) = 1$ .

Na Figura 5.3 podemos ver o comportamento das funções para diferentes valores de  $i$ .

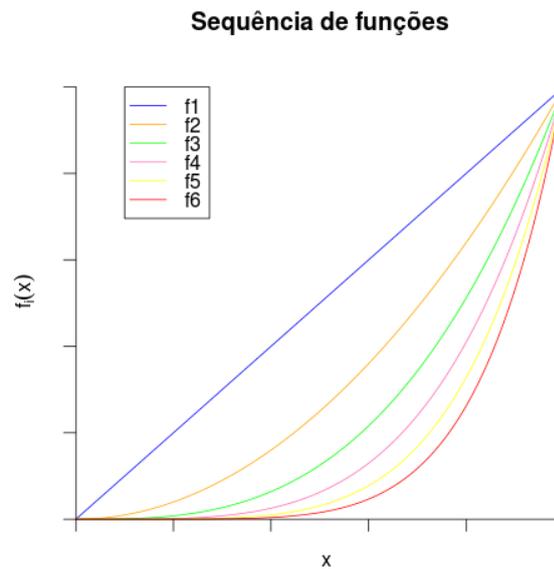


Figura 5.3: Sequência de funções.

□

Existem várias propriedades acerca de sequência de funções (ver em Lima (1995)).

Além de sequências de funções, temos também as “famílias de funções”, que ao invés de serem indexadas por  $i$  pertencente aos naturais, podem ser indexadas por algum índice real, digamos  $\kappa$  ou ainda um real positivo. No Exemplo 5.1, ao invés de considerar a sequência de funções, podemos considerar uma família de funções, tal que,  $f_i : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_\kappa(x) = x^\kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ .

□

No método aqui proposto, construiremos uma família de funções indexadas por  $\kappa$  e veremos que a escolha desse índice está relacionada com o Pressuposto 1, descrito na Seção 5.1. O

motivo dessa escolha é porque a família de funções é abrangente no que diz respeito a relação entre  $p$  e o  $CR_{PROP}$ .

É interessante notar que a família de funções  $f_\kappa(x) = x^{1/\kappa}$ ,  $x \in [0,1]$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}^+/\{0\}$  abrange todo o quadrado unitário quando variamos  $\kappa$ . Na Figura 5.4, podemos ver o comportamento dessa família de funções para diferentes valores de  $\kappa$ .

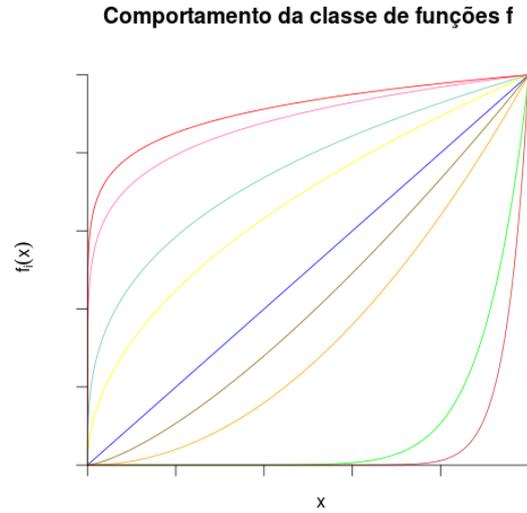


Figura 5.4: Comportamento da família de funções  $f$ .

No entanto, queremos uma família de funções que obedecem as características supracitadas. Uma possível solução para esse problema é considerar a família de funções da seguinte forma:

$$f_\kappa(x) = ax^{1/\kappa} + b, \quad \kappa \in \mathbb{R}_*^+, \tag{5.4}$$

em que  $a$  e  $b$  são as constantes pertencentes ao conjunto dos reais,  $f_\kappa(x)$  corresponde ao  $CR_{PROP}$  e  $x$  a probabilidade conjunta  $p$ . Logo, podemos reescrever (5.4) como sendo:

$$CR_{PROP}(p; \kappa) = ap^{1/\kappa} + b, \quad \kappa \in \mathbb{R}_*^+, \quad p \in [0, p^+]. \tag{5.5}$$

Resta-nos agora determinar quem são os coeficientes  $a$  e  $b$ . Sabemos que:

$$CR_{PROP}(0; \kappa) = \max(UL_1, UL_2)$$

e

$$CR_{PROP}(p^+, \kappa) = CR_{SUM}.$$

Daí,

$$CR_{PROP}(0; \kappa) = \max(UL_1, UL_2) \Rightarrow b = \max(UL_1, UL_2). \tag{5.6}$$

Também,

$$CR_{PROP}(p^+, \kappa) = CR_{SUM} \Rightarrow CR_{SUM} = a(p^+)^{1/\kappa} + b \Rightarrow a = \frac{CR_{SUM} - b}{(p^+)^{1/\kappa}}. \quad (5.7)$$

Logo, de (5.6) e (5.7), obtemos:

$$CR_{PROP}(p, \kappa) = \left[ \frac{CR_{SUM} - \max(UL_1, UL_2)}{(p^+)^{1/\kappa}} \right] p^{1/\kappa} + \max(UL_1, UL_2), \quad \kappa \in \mathbb{R}_*^+, \quad p \in [0, p^+], \quad (5.8)$$

Ainda é possível reescrever (5.8) como sendo:

$$\begin{aligned} CR_{PROP}(p, \kappa) &= \left[ \frac{(UL_1 + UL_2) - \max(UL_1, UL_2)}{(p^+)^{1/\kappa}} \right] p^{1/\kappa} + \max(UL_1, UL_2) \\ &= [\min(UL_1, UL_2)] \left( \frac{p}{p^+} \right)^{1/\kappa} + \max(UL_1, UL_2), \\ &\quad \kappa \in \mathbb{R}_*^+, \quad p \in [0, p^+], \end{aligned} \quad (5.9)$$

em que  $p$  e  $p^+$  são descritos em (5.1) e (5.2), respectivamente.

A escolha da classe de funções da forma  $CR_{PROP} = ap^{1/\kappa} + b$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $p \in [0, p^+]$ , deve-se ao fato de que tais funções obedecem às características citadas anteriormente. Além disso, tal classe de funções está limitada no retângulo  $[0, \max(UL_1, UL_2)] \times [p^+, CR_{SUM}]$ .

Como citado anteriormente, o grande problema no cálculo do capital regulatório para o risco operacional é como captar a dependência entre as classes de risco. Vemos na Equação 5.9) que de fato essa dependência é captada, via cópula, através de  $p$ . Ou seja, a dependência entre  $L_1$  e  $L_2$  é captada por meio de uma cópula  $C$  ajustada a partir dos dados. Toda a estrutura de dependência captada pela cópula é refletida na distribuição conjunta  $H$  de  $L_1$  e  $L_2$ . Então, a estrutura de dependência, entre  $L_1$  e  $L_2$ , é modelada através de  $p$ , descrito em (5.1).

A escolha de  $\kappa$ , está relacionada ao Pressuposto 1, opinião do especialista. Através de  $\kappa$ , o método pode variar de menos conservador ao mais conservador possível. A opinião do especialista torna o método mais robusto e realístico de acordo com o cenário atual de cada instituição financeira. Ou seja, a instituição pode escolher o valor de  $\kappa$  de acordo com o cenário financeiro que vivencia no momento ou que prevê futuramente.

Vimos que  $\kappa$  está compreendido em todos os reais positivos. Com o objetivo de restringir esses valores, facilitando a quantificação dos especialistas, buscamos uma função bijetora entre os intervalos  $(0, \infty)$  e  $(0, 1)$ . Encontramos a seguinte relação:

$$\kappa = tg\left(\frac{\pi}{2}\kappa^*\right), \quad \kappa^* \in (0, 1). \quad (5.10)$$

Então, substituindo (5.10) em (5.9):

$$CR_{PROP}(p, \kappa^*) = [\min(UL_1, UL_2)] \left( \frac{p}{p^+} \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\kappa^*\right)}} + \max(UL_1, UL_2). \quad (5.11)$$

Assim, a opinião quantificada do especialista se limita simplesmente ao intervalo (0,1). Vale ressaltar que existem outras funções bijetoras entre os intervalos  $(0, \infty)$  e  $(0,1)$ .

É possível observar algumas propriedades presentes na Equação (6.3).

**Propriedade 5.1.** Se  $\kappa^* = \frac{1}{2}$  então  $CR_{PROP} = [\min(UL_1, UL_2)] \left( \frac{p}{p^+} \right) + \max(UL_1, UL_2)$ .

**Prova:** De fato, se  $\kappa^* = \frac{1}{2}$ , temos  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ , obtendo então uma relação linear entre  $p$  e  $CR_{PROP}$ . ■

**Propriedade 5.2.** Se  $\kappa^* \rightarrow 1$ , então  $CR_{PROP}(p, \kappa^*) = CR_{SUM}$ .

**Prova:** Se  $\kappa^* \rightarrow 1$  então teremos  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow +\infty$  e conseqüentemente  $\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \rightarrow 0$ , restando

$$CR_{PROP}(p, \kappa^*) = UL_1 + UL_2 = CR_{SUM}. \quad \blacksquare$$

**Propriedade 5.3.**  $\kappa_1^* < \kappa_2^* \Leftrightarrow CR_{PROP}(p, \kappa_1^*) < CR_{PROP}(p, \kappa_2^*), \forall p \in (0, p^+)$ .

**Prova:** De fato, sabemos que a função tangente é crescente e está bem definida no intervalo  $(0, \pi/2)$ .

$$\begin{aligned} \kappa_1^* < \kappa_2^* &\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\kappa_1^*\pi}{2}\right) < \operatorname{tg}\left(\frac{\kappa_2^*\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\kappa_1^*\pi}{2}\right)} > \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\kappa_2^*\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow \left(\frac{p}{p^+}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\kappa_1^*\pi}{2}\right)} < \\ &\left(\frac{p}{p^+}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\kappa_2^*\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\min(UL_1, UL_2)] \left(\frac{p}{p^+}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\kappa_1^*\pi}{2}\right)} + \max(UL_1, UL_2) < [\min(UL_1, UL_2)] \left(\frac{p}{p^+}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\kappa_2^*\pi}{2}\right)} + \\ &\max(UL_1, UL_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow CR_{PROP}(p, \kappa_1^*) < CR_{PROP}(p, \kappa_2^*). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 5.3 Comportamento teórico do método

Neste seção apresentamos o comportamento teórico do Método proposto através de um estudo de simulação. Neste estudo analisamos o comportamento da Equação 6.3. É suposto que as distribuições das perdas agregadas já foram estimadas, pois aqui nosso interesse não está na forma como elas são estimadas. A escolha das distribuições foram baseadas no que se diz a seu respeito na literatura e não existiu um motivo especial pela escolha de seus parâmetros.

Consideremos duas variáveis de perdas agregadas, denotadas por  $L_1$  e  $L_2$ , com as seguintes distribuições:

$$L_1 \sim \text{Gama}(1, 2) \text{ e } L_2 \sim \text{Pareto}(1, 2.5).$$

Na Tabela 5.1, estão descritas as perdas esperadas e inesperadas,  $EL$  e  $UL$ , respectivamente, e o  $OPVaR$  das variáveis perdas agregadas  $L_1$  e  $L_2$ .

Tabela 5.1:  $EL$ ,  $OPVaR$  e  $UL$  de  $L_1$  e  $L_2$ .

	$L_1$	$L_2$
$EL$	2	1.66667
$OPVaR$	9.23341	15.84893
$UL$	7.23341	14.18227

A partir desses valores, obtemos o o capital regulatório total,  $CR_{SUM}$ , pelo método do somatório:

$$CR_{SUM} = UL_1 + UL_2 = 7.23341 + 14.18227 = 21.41568.$$

Para melhor entendimento, apresentamos um algoritmo do que foi feito na simulação e, em seguida, mostramos os resultados.

**Algoritmo:**

1. Determinar  $EL_1$ ,  $EL_2$ ,  $OPVaR(L_1)$ ,  $OPVaR(L_2)$ .
2. Calcular os capitais regulatórios marginalmente,  $CR_{L_1} = UL_1 = OPVaR(L_1) - EL_1$  e  $CR_{L_2} = UL_2 = OPVaR(L_2) - EL_2$ .
3. Obter o capital regulatório total pelo método do somatório,  $CR_{SUM} = CR_{L_1} + CR_{L_2}$ .
4. Encontrar o valor de  $p^+$  via cópula limitante superior de Fréchet e H-volume.
5. Variar o parâmetro da cópula, o qual denotamos por  $\theta$ .

6. Variar  $\kappa^*$  no intervalo  $(0,1)$ .
7. Para cada  $\theta$  determinar uma cópula. Em cada cópula obter uma distribuição conjunta. Para cada distribuição conjunta obter um valor de  $p$ .
8. Para cada  $p$ , varia-se  $\kappa^*$  para obter diferentes  $CR_{PROP}$ .

A cópula utilizada na simulação foi a de Frank, descrita na Tabela 3.1. Sabemos que o parâmetro dessa cópula está restrito ao intervalo  $(-\infty, \infty) \setminus 0$ .

Para determinar  $p^+$  utilizou-se a cópula Limitante Superior de Fréchet vista no Teorema 3.1 e a Definição 3.1, obtendo-se  $p^+ = 0.2778548$ . Além disso, também obtemos os valores dos coeficientes da Equação 6.3, ou seja,  $a = \min(UL_1, UL_2) = 7.23341$  e  $b = \max(UL_1, UL_2) = 14.18227$ .

Neste estudo foi possível observar que quando  $\theta$  aumenta o valor de  $p$  também aumenta, ou seja,  $p$  é crescente em  $\theta$ , como podemos ver na Figura 5.5. De uma outra maneira, podemos escrever que  $\theta_1 < \theta_2 \Leftrightarrow p_1 < p_2$ . Ainda, foi possível notar que se  $\theta \rightarrow \infty \Rightarrow p = p^+$ .

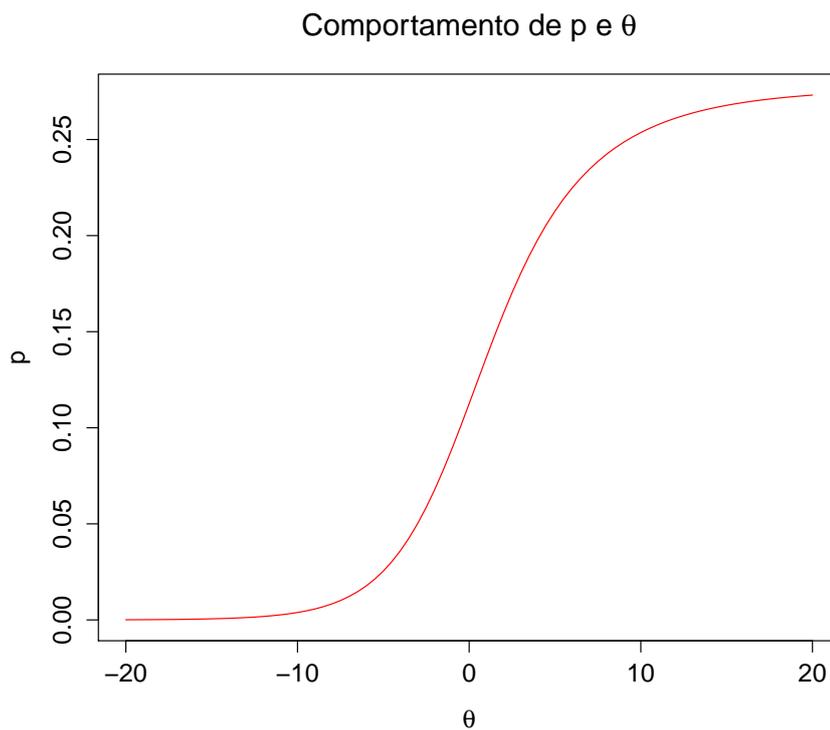


Figura 5.5: Comportamento de  $p$  e  $\theta$ .

Na Tabela 5.2, mostramos valores do  $CR_{PROP}$  para diferentes valores de  $p$  e  $\kappa^*$ . É possível notar que quando  $p$  e  $\kappa^*$  são pequenos, o capital a ser alocado é menor. Se fixamos um valor pequeno para  $p$  e variamos  $\kappa^*$  o capital alocado aumenta consideravelmente a medida que  $\kappa^*$

aumenta. O mesmo ocorre quando  $\kappa^*$  pequeno é fixado e varia-se os valores de  $p$ . Nas Figuras 5.6 e 5.7 exibimos o comportamento do  $CR_{PROP}$  em relação a  $p$  e a  $\kappa^*$ , respectivamente.

Tabela 5.2: Capital regulatório proposto para diferentes  $p$  e  $\kappa^*$  - Cópula de Frank.

	$\kappa^*$								
$p$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
<b>0.10064</b>	14.19414	14.49988	15.16790	15.96990	16.80216	17.64083	18.49361	19.38264	20.34093
<b>0.25124</b>	18.01281	19.48823	20.11867	20.47962	20.72284	20.90543	21.05395	21.18287	21.30124
<b>0.26693</b>	19.79679	20.57532	20.86787	21.02701	21.13117	21.20784	21.26929	21.32198	21.36985
<b>0.27694</b>	21.26755	21.34309	21.36931	21.38313	21.39201	21.39848	21.40361	21.40798	21.41193
$p^+ = \mathbf{0.27785}$	21.41568	21.41568	21.41568	21.41568	21.41568	21.41568	21.41568	21.41568	21.41568

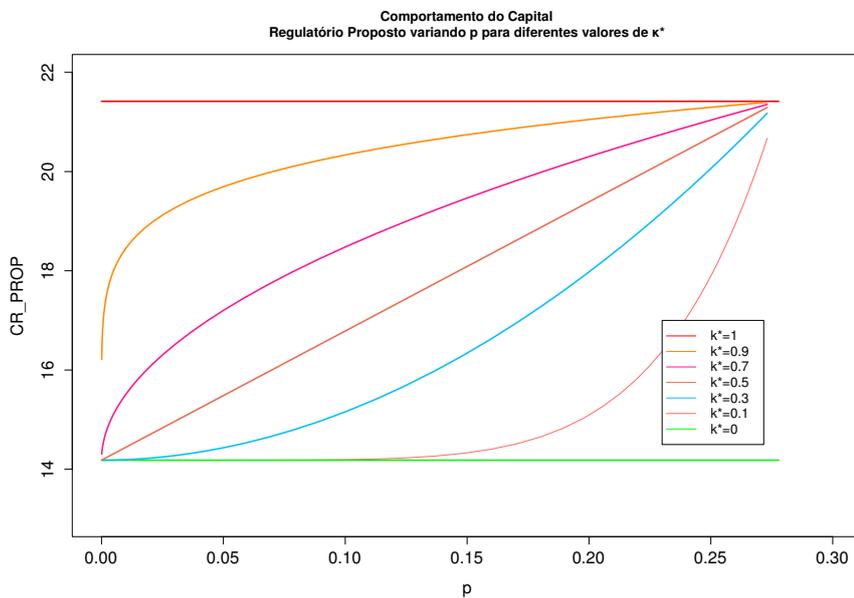


Figura 5.6: Comportamento do  $CR_{PROP}$  em relação a  $p$ .

Além disso, quando  $p = p^+$  o  $CR_{PROP}$  é o mesmo que o obtido pelo método do somatório, para qualquer  $\kappa^*$ , satisfazendo o Pressuposto 4.

Na simulação foi possível observar que quando  $\kappa^* \rightarrow 1$  o  $CR_{PROP} = CR_{SUM}$ , como mostrado na Propriedade 5.2.

Como  $CR_{PROP}$  é uma função bivariada, pois depende de  $p$  e  $\kappa^*$ , na Figuras 5.8 e 5.9 mostramos seu comportamento. Note que nas Figuras 5.6 e 5.7 temos as respectivas curvas de nível desta superfície.

Neste capítulo damos mais uma resposta a questão central do trabalho (“O que são perdas inesperadas totais?”). Note que, para cada estrutura de dependência e para cada valor de

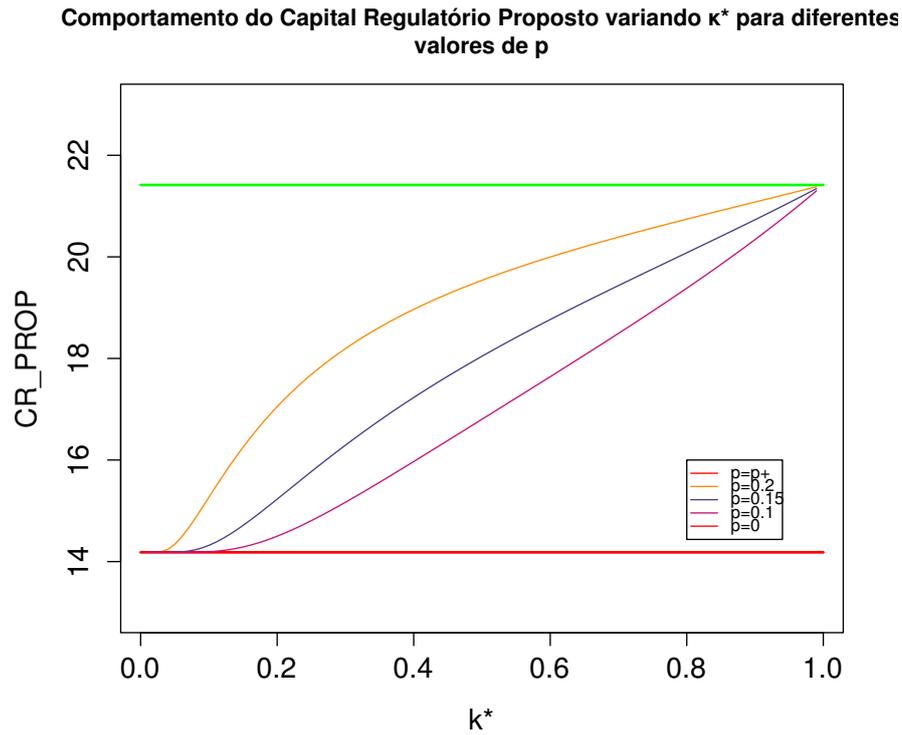
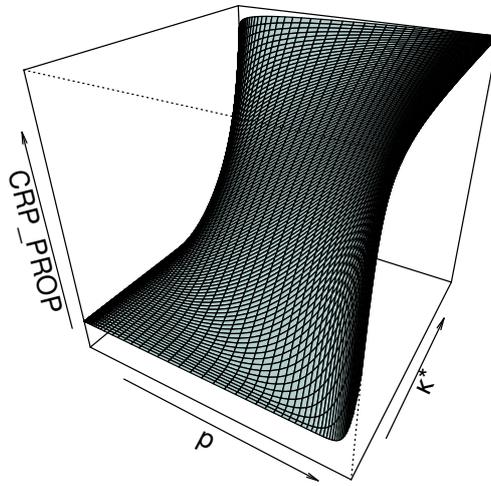
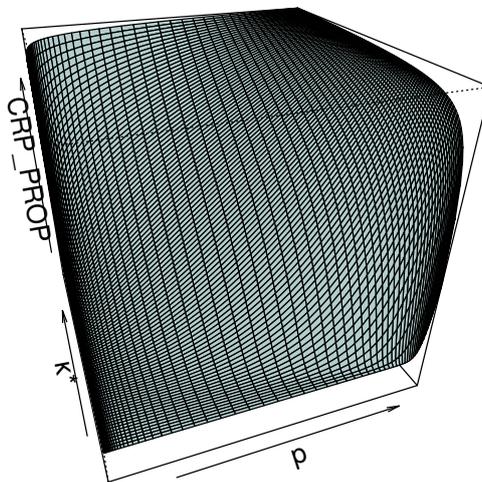


Figura 5.7: Comportamento do  $CR_{PROP}$  em relação a  $\kappa^*$ .

$\kappa^*$  temos uma resposta diferente a questão. No próximo capítulo realizamos uma simulação supondo várias situações no cenário financeiro e para cada uma delas calculamos o capital regulatório total usando os métodos apresentados neste trabalho.

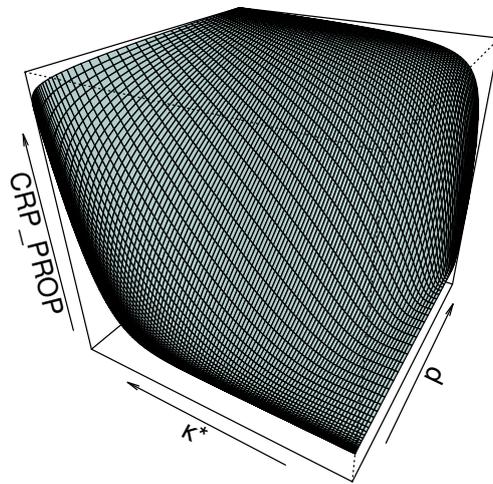


(a)

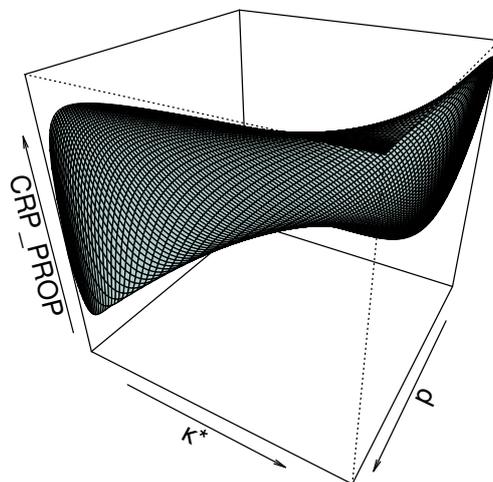


(b)

Figura 5.8: Comportamento do  $CR_{PROP}$  em relação a  $\kappa^*$  e  $p$  conjuntamente.



(a)



(b)

Figura 5.9: Comportamento do  $CRP\_PROP$  em relação a  $\kappa^*$  e  $p$  conjuntamente.

# Capítulo 6

## Simulação

Neste capítulo aplicamos a metodologia desenvolvida em bases de dados simulados. Dados reais não são facilmente disponibilizados pelas instituições financeiras.

Em uma situação real, as instituições financeiras aderem distribuições a seus dados de frequência e severidade. Em seguida é feita a construção da função de distribuição da perda agregada por meio da metodologia LDA, como descrito anteriormente. Neste estudo consideramos que a distribuição esteja definida.

A simulação apresentada neste capítulo está dividida em três partes. Na parte 1 comparamos os capitais regulatórios totais obtidos nos três métodos descritos no trabalho: somatório, correlação não-perfeita e o proposto. Na parte 2, ajustamos uma cópula aos dados e comparamos a influência da escolha da cópula no cálculo do capital regulatório. Por fim, na parte 3, apresentamos uma análise de quatro perdas, comparando os valores dos capitais regulatórios obtidos através dos três métodos.

### 6.1 Comparação entre os métodos

Nesta parte da simulação, fixamos uma família de cópulas a qual representa a estrutura de dependência entre as perdas agregadas  $L_1$  e  $L_2$ . Fixamos também as distribuições de tais perdas. O nosso objetivo é estudar o comportamento do capital regulatório através de todos os métodos descritos no trabalho variando o grau de dependência (variando o parâmetro da cópula) entre  $L_1$  e  $L_2$  comparando o que ocorre em cada caso.

A cópula escolhida é a Frank e as distribuições para as perdas agregadas são:

$$L_1 \sim \text{Gama}(1, 2) \text{ e } L_2 \sim \text{Pareto}(1, 2.5).$$

A seguir, apresentamos o algoritmo utilizado nessa parte da simulação para obter o

comportamento do capital regulatório através dos métodos apresentados no trabalho:

1. Tome  $K$   $\theta$ 's,  $\theta \in (-a, a)$  obtendo-se uma grade de valores para  $\theta$ . Seja  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_K)$  os valores obtidos nessa grade. Na simulação usaremos  $a = 20$ , uma vez que  $|\theta| = 20$  já representa uma forte dependência entre as perdas agregadas;
2. Tome  $M$   $\kappa^*$ 's,  $\kappa^* \in (0, 1)$ , obtendo-se uma grade de valores para  $\kappa^*$ . Seja  $\boldsymbol{\kappa}^* = (\kappa_1^*, \dots, \kappa_M^*)$  a grade de valores para  $\kappa^*$ ;
3. Para cada  $\theta_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , construa uma cópula  $C_{\theta_k}$ ;
4. Para cada  $C_{\theta_k}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , gere dados  $(l_{1_i}, l_{2_i})_k$ ,  $i = 1, \dots, n$  da distribuição conjunta  $H(l_1, l_2) = C_{\theta_k}(F(l_1), G(l_2))$ ;
5. Para cada matriz de dados  $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)_k$ ,  $n \times 2$ ,  $k = 1, \dots, K$ , calcule o  $CR_{SUM}$ ,  $CR_{NPERF}$  e para cada  $\kappa_m^*$ ,  $m = 1, \dots, M$ , obtenha o  $CR_{PROP; \kappa_m^*}$ .

Tabela 6.1: Comparação entre  $CR_{SUM}$ ,  $CR_{NPERF}$  e  $CR_{PROP}$

$\theta$	$CR_{SUM}$	$CR_{NPERF}$	$CR_{PROP; \kappa^*=0.1}$	$CR_{PROP; \kappa^*=0.5}$	$CR_{PROP; \kappa^*=0.7}$	$CR_{PROP; \kappa^*=0.9}$
-20	20.5419	12.4889	13.5567	13.5591	13.6755	15.5252
-10	20.9300	13.1044	13.9448	14.0437	14.7427	17.5034
-5	19.8664	12.7227	12.8812	13.5267	14.9569	17.6715
-1	20.3614	14.5787	13.3815	15.6220	17.2944	19.2123
$\rightarrow 0$	20.2501	15.0219	13.2883	16.0966	17.6743	19.3193
1	21.9110	16.9362	14.9963	18.2988	19.7462	21.1503
5	21.3236	17.8705	15.5388	19.6233	20.3982	21.0217
10	19.3028	19.3028	18.7185	21.3214	21.6387	21.8756
20	19.68969	19.6897	20.8725	21.7258	21.8105	21.8718

Na Tabela 6.1 são apresentados os valores dos capitais regulatórios para cada método. No caso do método proposto, calculamos o capital para  $\kappa^*$  igual a 0.1, 0.5, 0.7 e 0.9. Teoricamente no cálculo do  $CR_{SUM}$ , não levamos em consideração a estrutura de dependência entre as variáveis perdas agregadas. É possível notar na Figura 6.1 que quando  $\theta \rightarrow \infty$  os capitais regulatórios obtidos no método proposto e correlação não-perfeita serão iguais ao capital obtido pelo método do somatório. Além disso, como foi visto na teoria, o  $CR_{NPERF}$  e o  $CR_{PROP}$  são crescentes de acordo com o grau de dependência entre as variáveis perdas agregadas, ou seja, quanto maior o grau de dependência entre as variáveis maior será o retorno de capital. Podemos ver na Tabela 6.1 que isso não ocorre em todos os casos devido a aleatoriedade dos dados. Além do  $CR_{PROP}$  ser crescente em  $\theta$ , ele também cresce a medida que o valor de  $\kappa^*$  (opinião do especialista) aumenta. Por exemplo, ao fixarmos  $\theta = -20$  e

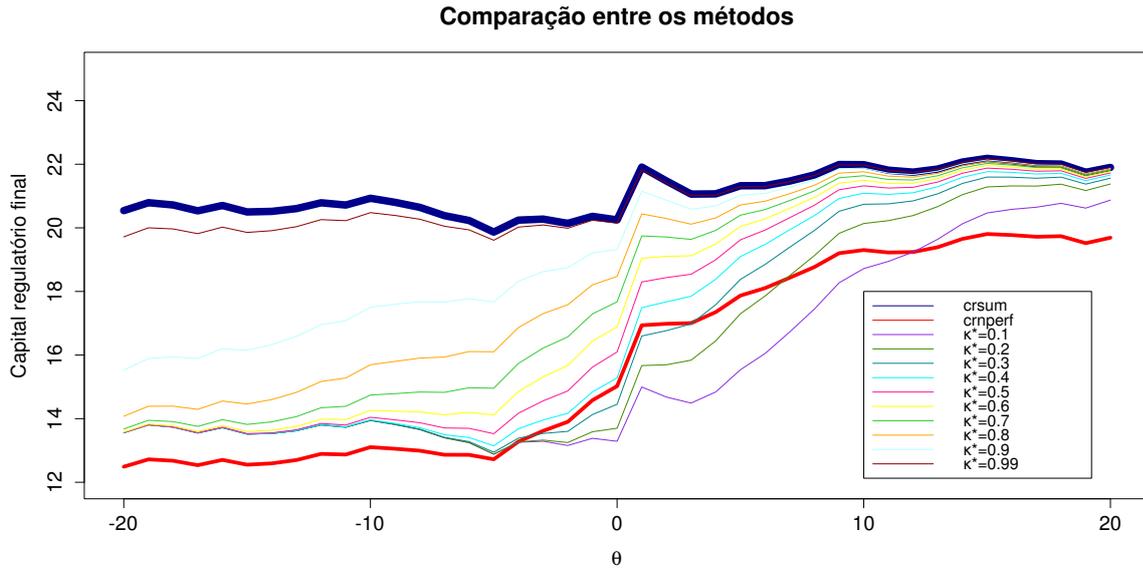


Figura 6.1: Comparando os três métodos:  $CR_{SUM}$ ,  $CR_{NPERF}$  e  $CR_{PROP; \kappa_m^*}$ .

variarmos os valores de  $\kappa^*$ , o capital regulatório aumentará conforme aumentamos os valores de  $\kappa^*$  (ver, por exemplo, a segunda linha da Tabela 6.1).

## 6.2 Ajuste da cópula

Nesta parte da simulação mostramos como é feita a escolha da cópula. Na parte 1 da simulação, fixamos a cópula de Frank e variamos seu respectivo parâmetro para estudar a influência da estrutura de dependência dos dados no cálculo do capital regulatório. Na prática, tem-se os dados e através deles estima-se uma cópula.

Para a escolha da cópula usamos a cópula empírica  $C_n$  e o conjunto de cópulas  $\tilde{C}$ , definidos no Capítulo 3. A seguir, apresentamos o algoritmo o qual utilizamos na simulação para a escolha da cópula:

1. Gerar dados de uma cópula com parâmetro fixo;
2. Fixar algumas famílias de cópulas no qual serão famílias candidatas a modelar os dados;
3. Estimar os parâmetros de cada família de cópula do passo 2 através dos dados gerados em 1 e obter  $\tilde{C}$ ;
4. Construir a cópula empírica  $C_n$  com os dados em 1;
5. Calcular uma distância entre a cópula empírica e as cópulas de  $\tilde{C}$ ;

- Escolher a cópula de  $\tilde{C}$  de menor distância e calcular o  $CR_{PROP; \kappa^*}$ .

Utilizamos a cópula de Frank com parâmetro  $\theta = 5$  para gerar os dados do passo 1 do algoritmo e as famílias fixadas foram: Frank, Normal, Clayton, Gumbel e Joe. As marginais da cópula de Frank (que representam as perdas agregadas) possuem as mesmas distribuições utilizadas na parte 1 dessa simulação, ou seja,

$$L_1 \sim \text{Gama}(1, 2) \text{ e } L_2 \sim \text{Pareto}(1, 2.5).$$

Na Figura 6.2 apresentamos as perdas agregadas uniformizadas para ter um breve conhecimento da estrutura de dependência.

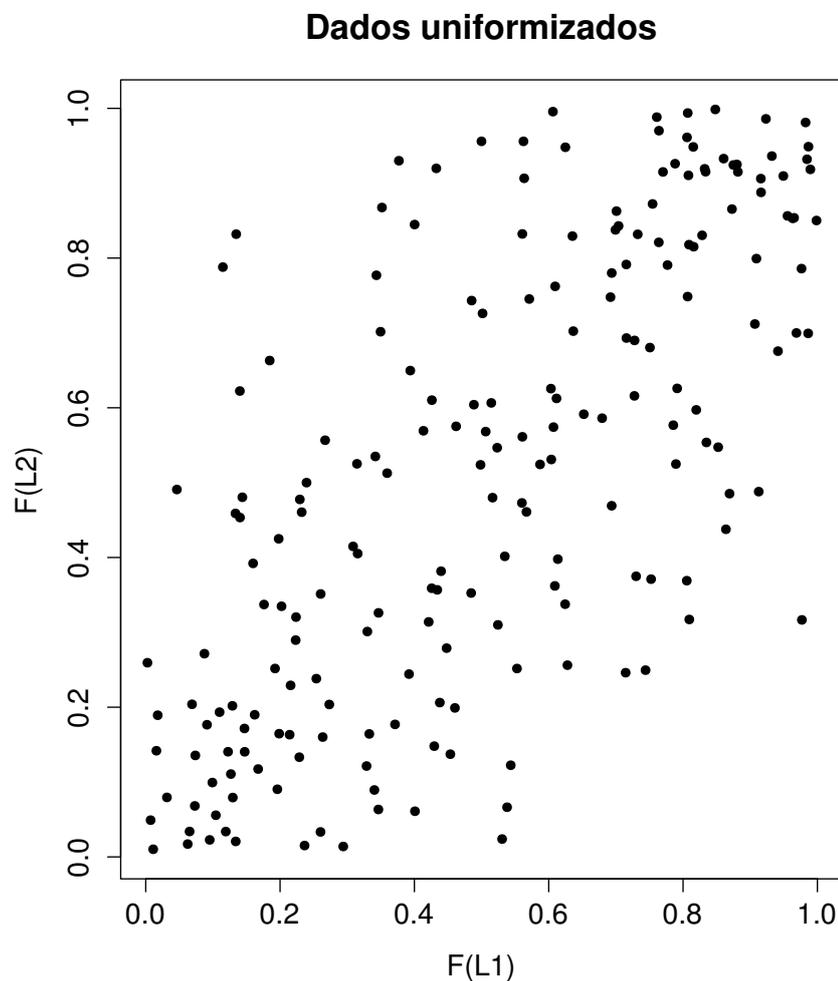


Figura 6.2: Dados de perdas uniformizados.

Observando a Figura 6.2 aparentemente percebemos uma simetria e uma dependência maior nas caudas à direita e à esquerda.

Através do IFM apresentado no Capítulo 3, estimamos os parâmetros das cópulas pertencentes a  $\tilde{C}$ . O método IFM foi utilizado, pois os parâmetros das marginais foram fixados. A fórmula do cálculo da distância foi baseado no artigo de Durrleman et al. (2000), o qual denotamos por  $\bar{d}_2$ , e é dada por:

$$\bar{d}_2(C_n, C_j) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \left| C_n \left( \frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) - C_j \left( \frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) \right|. \quad (6.1)$$

Os resultados são referentes aos 200 dados gerados nessa simulação e se encontram na Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Estimação dos parâmetros das cópulas de  $\tilde{C}$ .

$\tilde{C}$	Família	$\hat{\theta}$	Distância $\bar{d}_2(C_n, C_j)$
$C_1$	Frank	5.4153	0.013189
$C_2$	Normal	0.6453	0.013434
$C_3$	Clayton	1.1872	0.014195
$C_4$	Gumbel	1.6555	0.017986
$C_5$	Joe	1.7635	0.026089

Na Tabela 6.2 podemos observar que a menor distância corresponde a cópula  $C_1$ , ou seja, a cópula de Frank, com  $\hat{\theta} = 5.4153$ . Esse resultado era de se esperar, pois os dados foram gerados a partir da família Frank, sendo então captadas as propriedades desta família para a escolha da cópula. A outra cópula com distância menor foi a  $C_2$ , ou seja, a cópula Gaussiana com parâmetro  $\hat{\theta} = 0.6453$ . Isso ocorre pois, as cópulas de Frank e Normal possuem propriedades similares, como por exemplo, simetria. Na Figura 6.3 podemos observar essas semelhanças.

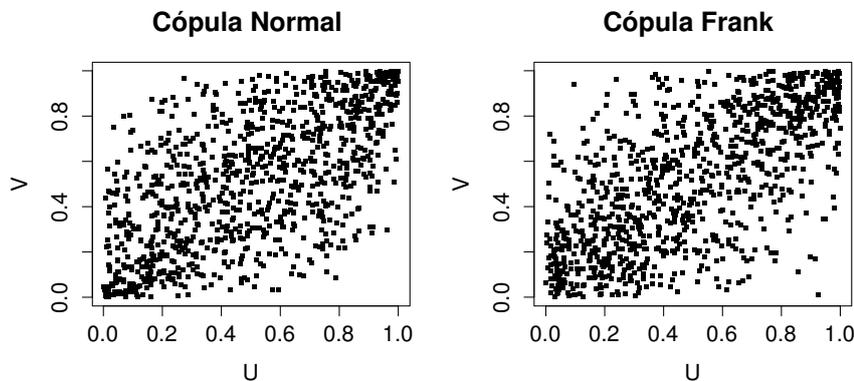


Figura 6.3: Semelhanças da cópula Normal e Frank.

O gráfico da diagonal é uma ferramenta utilizada para verificar essa distância. Sucintamente tal gráfico compara a cópula  $\tilde{C}_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ , com a cópula empírica  $C_n$ , ou seja,  $\tilde{C}_i(u, u), u \in I$  e  $C_n(u, u), u \in I$ .

Na Figura 6.4 apresentamos o gráfico da diagonal das cópulas Frank e  $C_n$ . Podemos verificar graficamente que a distância entre as cópulas é pequena, como visto numericamente.

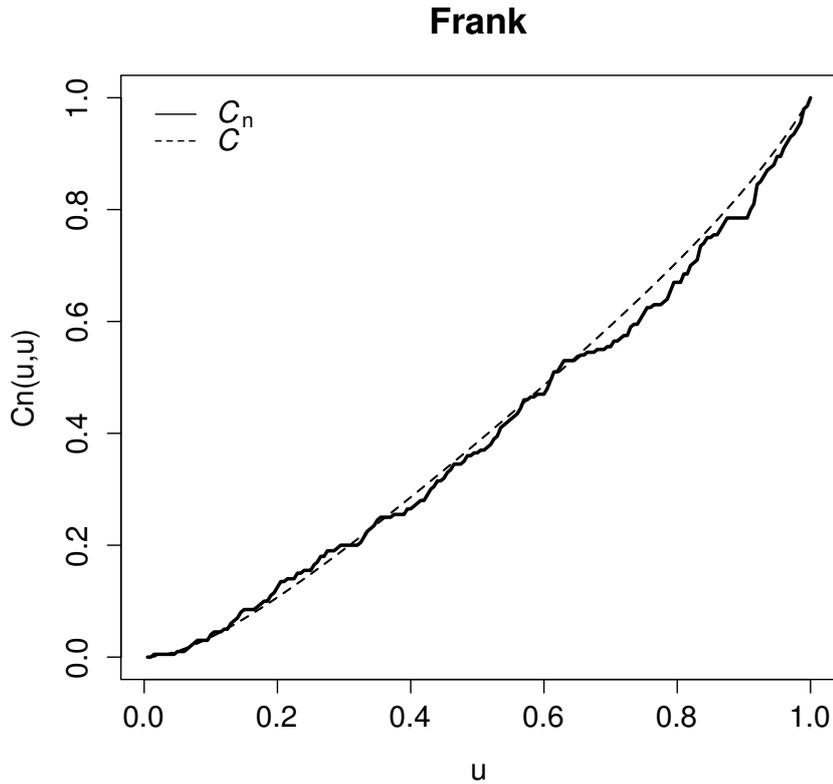


Figura 6.4: Gráfico da diagonal - Frank.

Uma outra maneira de verificar essa distância graficamente é através das curvas de nível. Esse, por sua vez, é mais completo, pois apresenta mais valores das cópulas, não tratando somente dos valores da diagonal, como no gráfico da Figura 6.4. Na Figura 6.5 podemos ver as curvas de nível das cópulas Frank e  $C_n$ . Mais uma vez é perceptível que a distância entre ambas é pequena.

Na Figura 6.6 mostramos o gráfico da diagonal para outras cópulas do conjunto  $\tilde{C}$ . E na Figura 6.7 mostramos as curvas de níveis.

Podemos observar que a cópula Normal também apresentou uma distância bem próxima da cópula empírica, como visto numericamente. Além disso, podemos observar que a cópula de maior distância, a  $\tilde{C}_5$  (Joe), apresenta-se um pouco distante de  $C_n$ , como visto numericamente.

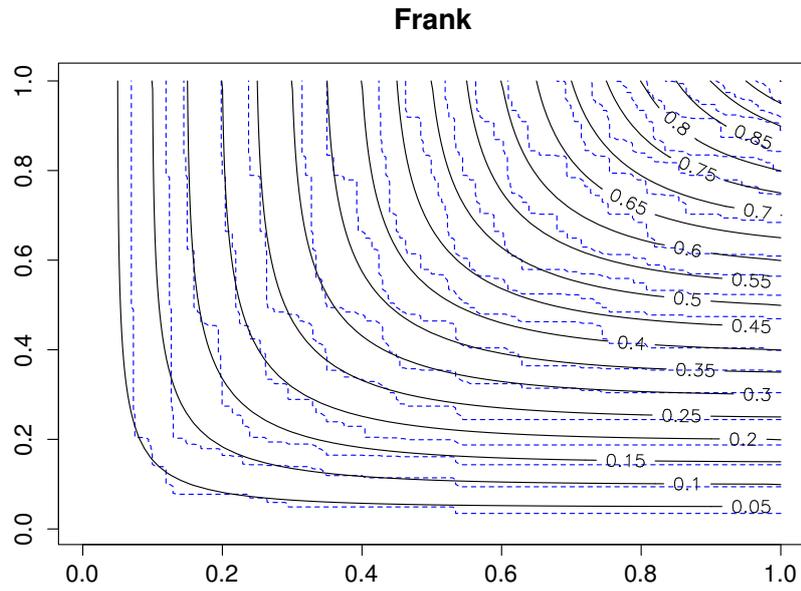


Figura 6.5: Curvas de Nível - Frank.

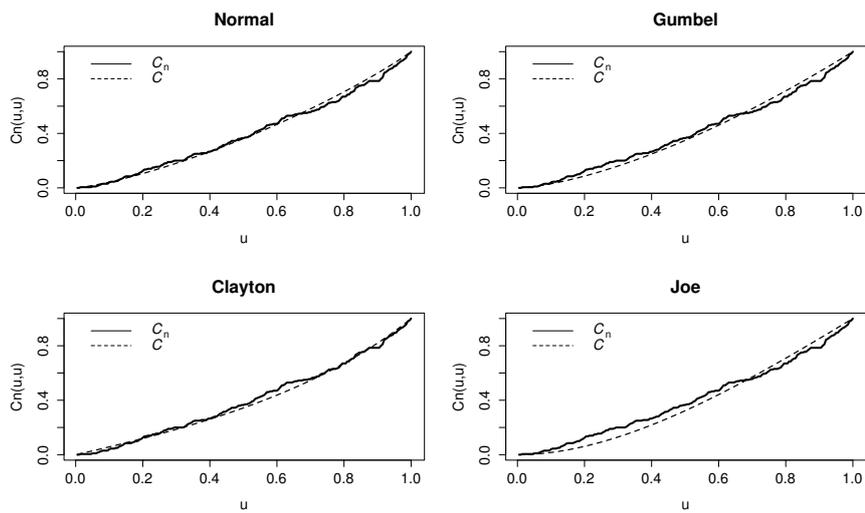


Figura 6.6: Gráfico da diagonal.

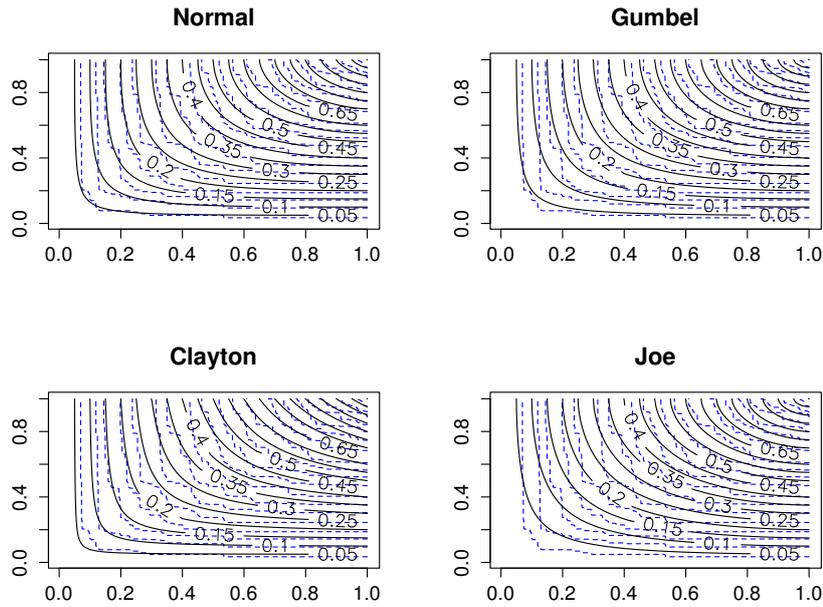


Figura 6.7: Curvas de nível.

Na Figura 6.8 apresentamos o gráfico que compara o cálculo do capital regulatório utilizando todas as cópulas do conjunto  $\tilde{C}$  através do método proposto. Para efeito de comparação, também utilizamos a cópula empírica no cálculo do capital regulatório. Essa por sua vez, apresentou o maior capital comparada com as cópulas do conjunto  $\tilde{C}$ . Ainda é possível notar que os capitais obtidos pelas cópulas Normal e Gumbel são próximos. Já o capital obtido utilizando a cópula de Joe (maior distância) na modelagem dos dados está entre o capital regulatório resultante da Gumbel e Clayton (menor capital obtido).

Na Tabela 6.3 mostramos os valores dos capitais regulatórios obtidos através do método proposto, para diferentes valores de  $\kappa^*$ , método do somatório e o da correlação não perfeita, usando a cópula de Frank. Vale ressaltar que o método do somatório e o da correlação não-perfeita não dependem da escolha da cópula. Este último se baseia somente no coeficiente de correlação linear entre as perdas agregadas. No método proposto, para cada cópula utilizada obtemos um capital diferente.

É possível notar que a medida que  $\kappa^*$  aumenta, o  $CR_{PROP;\kappa^*}$  se aproxima do  $CR_{SUM}$ . Além disso, o  $CR_{NPERF}$  é menor do que o  $CR_{SUM}$  e está próximo do  $CR_{PROP;\kappa^*=0.3}$ .

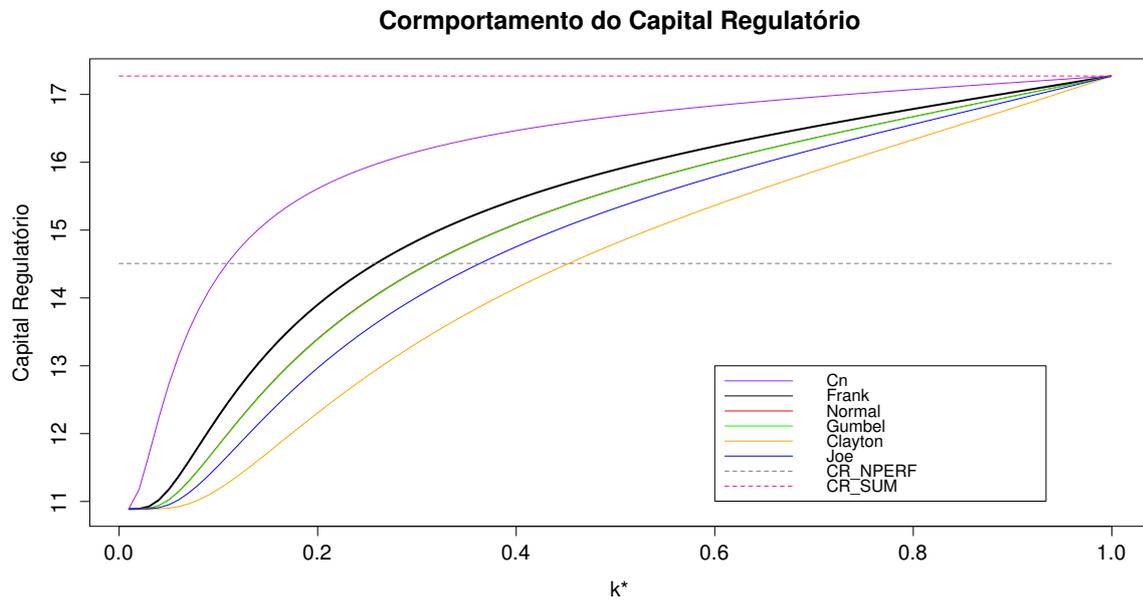


Figura 6.8: Comparando o capital regulatório obtido em cada cópula do conjunto  $\tilde{C}$  e com  $C_n$ .

Tabela 6.3: Capital Regulatório - Frank

$\kappa^*$	$CR_{PROP;\kappa^*}$	$\kappa^*$	$CR_{PROP;\kappa^*}$
0.1	12.2565	0.6	16.2353
0.2	13.9012	0.7	16.5261
0.3	14.8432	0.8	16.7859
0.4	15.4513	0.9	17.0304
0.5	15.8902	0.99	17.2480

$CR_{SUM}$	$CR_{NPERF}$
17.2725	14.5084

### 6.3 Um estudo com quatro perdas operacionais

Nesta parte da simulação vamos considerar quatro perdas agregadas. É importante lembrar que na instituição financeira podem existir até 56 tipos de perdas, sendo então 56 variáveis aleatórias de perdas agregadas.

Uma vez que o método proposto é bivariado e sua extensão para o método multivariado não é trivial, o cálculo do capital regulatório será feito dois a dois sendo o capital total a soma dos mesmos. Por exemplo, calculamos o capital regulatório para as perdas  $L_1$  e  $L_2$ ,  $CR_{PROP_{L_1,L_2}}$ , e o capital referente a  $L_3$  e  $L_4$ ,  $CR_{PROP_{L_3,L_4}}$  e finalmente, calculamos o capital regulatório total:  $CR_{PROP_{TOTAL}} = CR_{PROP_{L_1,L_2}} + CR_{PROP_{L_3,L_4}}$ . Uma observação importante é que quando fazemos essa soma para obter o total, sabemos que foram captadas a relação de dependência entre cada par,  $\{L_1, L_2\}$  e  $\{L_3, L_4\}$ . A dúvida que surge é em relação a estrutura de dependência entre os pares  $\{L_1, L_2\}$  e  $\{L_3, L_4\}$ , pois não sabemos se tal estrutura é perfeita (fazendo uma analogia com o método do somatório).

O objetivo desta parte é verificar o que ocorre com o capital regulatório, calculado através do método proposto, pela alternativa multivariada descrita no parágrafo anterior. Como estamos considerando quatro variáveis perdas,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ , sabemos que existem seis maneiras de agrupá-las duas a duas.

Sabemos que o capital regulatório proposto é obtido pela seguinte função:

$$CR_{PROP}(p, \kappa^*) = [\min(UL_1, UL_2)] \left( \frac{p}{p^+} \right)^{\frac{1}{tg(\frac{\pi}{2}\kappa^*)}} + \max(UL_1, UL_2), \quad \kappa^* \in (0,1); \quad p, p^+ \in (0,1). \quad (6.2)$$

Note que o  $\min(UL_1, UL_2)$  é ponderado pelo termo  $\left( \frac{p}{p^+} \right)^{\frac{1}{tg(\frac{\pi}{2}\kappa^*)}}$ , em que está contida a informação da estrutura de dependência entre as perdas agregadas, modelada através de  $p$  e a opinião do especialista, quantificada por meio de  $\kappa^*$ .

É possível observar que se a estrutura de dependência entre as variáveis perdas for negativa, o  $CR_{PROP_{\kappa^*}}$  obtido será próximo do máximo, para um determinado  $\kappa^*$ . Além disso, se o mínimo e o máximo dos capitais regulatórios marginais forem muito distantes, o  $CR_{PROP_{\kappa^*}}$ , para essas duas perdas, também será próximo do máximo, independentemente do valor de  $p$ .

Diante desses fatos, julgamos importante estudar o que ocorre com o  $CR_{PROP_{\kappa^*}}$  considerando os quatro casos descritos a seguir:

- i) variáveis perdas agregadas com maior correlação e com capitais regulatórios marginais distantes;
- ii) variáveis perdas agregadas com menor correlação e com capitais regulatórios marginais

mais próximos;

- iii) variáveis perdas agregadas com maior correlação e com capitais regulatórios marginais próximos;
- iv) variáveis perdas agregadas com menor correlação e com capitais regulatórios marginais mais distantes.

O estudo desses casos possibilitará a instituição financeira, que optar pelo uso do método proposto, a escolher qual é a forma melhor de agregar os capitais regulatórios para obter o valor total, desde que nessa escolha o capital alocado cubra o valor de todas as perdas agregadas. Para cada um dos casos acima, obteremos capitais diferentes.

As distribuições das perdas agregadas,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  são:

$$L_1 \sim \text{Gama}(1, 2), L_2 \sim \text{Pareto}(1, 2.5), \\ L_3 \sim \text{Gama}(7, 10) \text{ e } L_4 \sim \text{Pareto}(4.5, 2.3).$$

### Caso 1

No Caso 1 analisamos os itens *i*) e *ii*). Os dados das variáveis  $L_1$  e  $L_3$  foram simulados através da cópula Frank com parâmetro  $\theta_1 = 5$ . Utilizando esta mesma cópula, mas com parâmetro  $\theta_2 = 10$ , simulamos as observações das variáveis  $L_3$  e  $L_4$ . A intenção em gerar os dados através de cópulas é necessário para que haja uma estrutura de dependência entre as variáveis perdas, para podermos então analisar os casos propostos. Para garantir a proximidade dos capitais regulatórios marginais, assumimos distribuições com características que pudessem fazer com que os mesmos fossem próximos. A Tabela 6.4 mostra os capitais regulatórios marginais (CR) de cada perda.

Tabela 6.4: Capitais regulatórios marginais - Caso 1.

<b>Perdas Agregadas</b>	<b>CR</b>
$L_1$	6.9852
$L_2$	13.9185
$L_3$	88.7854
$L_4$	73.6755

Gerados os dados, fizemos a matriz de correlação linear para ilustrar o grau de dependência entre as perdas agregadas. Como já era de se esperar, pela forma de como tais dados foram

gerados, as variáveis perdas  $L_1$  e  $L_3$  são correlacionadas, o mesmo ocorrendo com as perdas  $L_2$  e  $L_4$ . Na Tabela 6.5 apresentamos os valores das correlações entre as variáveis.

Tabela 6.5: Correlação - Caso 1.

	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$
$L_1$	1	0.005126585	0.572017931	0.003498369
$L_2$	0.005126585	1	0.005283321	0.295763467
$L_3$	0.572017931	0.005283321	1	0.003897905
$L_4$	0.003498369	0.295763467	0.003897905	1

Através das Tabelas 6.4 e 6.5 e através dos itens  $i$ ) e  $ii$ ), o capital regulatório foi calculado, utilizando o método proposto, da seguinte forma:

- i) variáveis perdas agregadas com maior correlação e com capitais regulatórios marginais distantes, ou seja, obter o capital regulatório proposto para  $L_1$  e  $L_3$  e para  $L_2$  e  $L_4$  e, ao final, somar esses capitais:

$$CR_{PROP;\kappa_{L_1,L_3}^*} + CR_{PROP;\kappa_{L_2,L_4}^*} = CR_{PROP;\kappa_i^*}.$$

- ii) variáveis perdas agregadas com menor correlação e com capitais regulatórios marginais mais próximos, ou seja, obter o capital regulatório proposto para  $L_1$  e  $L_2$  e para  $L_3$  e  $L_4$  e, ao final, somar os resultados:

$$CR_{PROP;\kappa_{L_1,L_2}^*} + CR_{PROP;\kappa_{L_3,L_4}^*} = CR_{PROP;\kappa_{ii}^*}.$$

Na Tabela 6.6 mostramos alguns valores do capital regulatório calculado através do método proposto (para alguns valores de  $\kappa^*$ ), somatório e correlação não-perfeita, considerando as condições dos itens  $i$ ) e  $ii$ ), respectivamente. Na Figura 6.9, comparamos o capital regulatório obtido em cada método. Note que o capital do item  $ii$ ), em que considera as perdas com menor correlação e mais próximas, é menor do que o capital assumindo as condições do item  $i$ ) para qualquer valor de  $\kappa^*$ . Além disso, para um valor de  $\kappa^*$  no intervalo  $0.2 < \kappa^* < 0.4$  o  $CR_{PROP;\kappa_{ii}^*}$  é igual ao  $CR_{NPERF}$ . Tanto no item  $i$ ) quanto no  $ii$ ) o capital obtido pelo método do somatório e o método da correlação não-perfeita são os mesmos, pois não dependem da opinião do especialista quantificada pelo índice  $\kappa^*$ .

Tabela 6.6:  $CR_{PROP;\kappa_i^*}$  e  $CR_{PROP;\kappa_{ii}^*}$ .

$\kappa^*$	$CR_{PROP;\kappa_i^*}$	$CR_{PROP;\kappa_{ii}^*}$
0.1	166.1692	103.2382
0.2	171.4573	109.6672
0.3	174.6710	119.6011
0.4	176.7980	129.6449
0.5	178.3552	139.0590
0.6	179.5917	147.9065
0.7	180.6411	156.4393
0.8	181.5842	164.9567
0.9	182.4770	173.7950
0.99	183.2749	182.3605

$CR_{SUM}$	$CR_{NPERF}$
183.3647	122.2219

Comparação dos Capitais Regulatórios - Caso 1

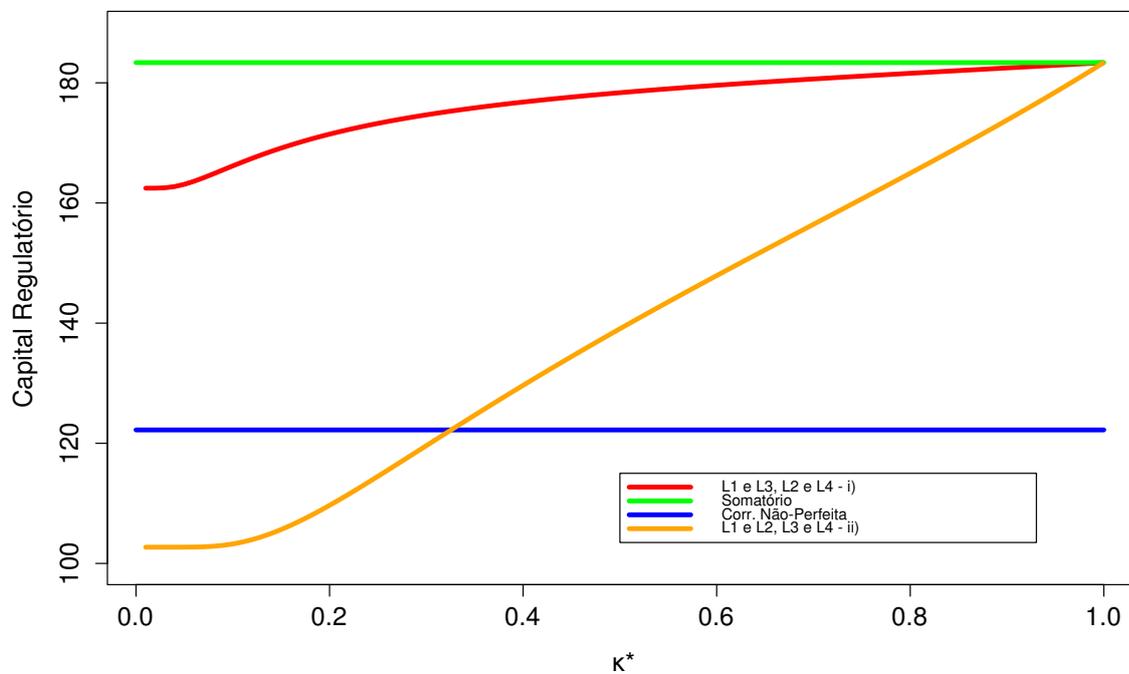


Figura 6.9: Capital Regulatório Multivariado - Caso 1.

**Caso 2**

Neste caso vamos analisar os itens *iii*) e *iv*). Para isso, geramos os dados das variáveis perdas  $L_1$  e  $L_2$  da cópula Frank, com parâmetro  $\theta_1 = 5$ . Utilizando a mesma cópula, simulamos os dados de  $L_3$  e  $L_4$  com parâmetro  $\theta_2 = 10$ . Na Tabela 6.7, mostramos os capitais regulatórios marginais (CR).

Tabela 6.7: Capitais regulatórios marginais - Caso 2.

<b>Perdas Agregadas</b>	<b>CR</b>
$L_1$	6.9852
$L_2$	14.3384
$L_3$	88.0579
$L_4$	73.6755

Com os dados gerados, temos uma nova estrutura de correlação entre as variáveis. Tal estrutura está representada na Tabela 6.8 através da correlação linear entre as variáveis perdas.

Tabela 6.8: Correlação - Caso 2.

	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$
$L_1$	1	0.324338075	0.572017931	0.005121149
$L_2$	0.324338075	1	0.005288889	0.002926139
$L_3$	0.005121149	0.005288889	1	0.390031579
$L_4$	0.003498369	0.002926139	0.390031579	1

Utilizando as informações das Tabelas 6.7 e 6.8, o capital regulatório foi calculado da seguinte maneira:

- iii) variáveis perdas agregadas com maior correlação e com capitais regulatórios marginais próximos, ou seja, obter o capital regulatório proposto para  $L_1$  e  $L_2$  e para  $L_3$  e  $L_4$  e, ao final, somar esses capitais:

$$CR_{PROP;\kappa_{L_1,L_2}^*} + CR_{PROP;\kappa_{L_3,L_4}^*} = CR_{PROP;\kappa_{iii}^*}.$$

- iv) variáveis perdas agregadas com menor correlação e com capitais regulatórios marginais mais distantes, ou seja, obter o capital regulatório proposto para  $L_1$  e  $L_3$  e para  $L_2$  e

$L_4$  e, ao final, somar os resultados:

$$CR_{PROP;\kappa_{L_1,L_3}^*} + CR_{PROP;\kappa_{L_2,L_4}^*} = CR_{PROP;\kappa_{iv}^*}.$$

A Tabela 6.9 mostra os capitais regulatórios obtidos para o Caso 2. O  $CR_{SUM}$  é o mesmo para os Casos 1 e 2, pois não dependem da estrutura de dependência entre as perdas. Já o  $CR_{NPERF}$  foi maior do que no Caso 1, pois os dados foram gerados de forma diferente, mudando assim o grau de dependência entre as variáveis perdas.

Comparando o  $CR_{PROP;\kappa_{iii}^*}$  com o  $CR_{PROP;\kappa_{iv}^*}$ , vemos que este último é menor do que o primeiro para um determinado intervalo de  $\kappa^*$  (ver Figura 6.10). Observando a Figura 6.10, vemos que o  $CR_{PROP;\kappa_{iii}^*}$  será igual ao  $CR_{PROP;\kappa_{iv}^*}$  para um  $\kappa^* \in (0.1,0.2)$ . Além disso, para um  $\kappa^* \in (0,0.1)$ , temos  $CR_{PROP;\kappa_{iii}^*} = CR_{NPERF}$ .

Tabela 6.9:  $CR_{PROP;\kappa_{iii}^*}$  e  $CR_{PROP;\kappa_{iv}^*}$ .

$\kappa^*$	$CR_{PROP;\kappa_{iii}^*}$	$CR_{PROP;\kappa_{iv}^*}$
0.1	155.8742	161.7861
0.2	167.7504	162.6213
0.3	172.727	164.3572
0.4	175.5806	166.5159
0.5	177.5103	168.8471
0.6	178.964	171.2796
0.7	180.1503	173.8294
0.8	181.1833	176.5614
0.9	182.1346	179.5826
0.99	182.9648	182.6829

$CR_{SUM}$	$CR_{NPERF}$
183.0571	136.3521

A seguir, ilustramos através de um exemplo, o que ocorre com o capital regulatório quando combinamos diferentes valores de perdas, ou seja, o que ocorre com o capital total quando consideramos a proximidade dos capitais regulatórios marginais, desconsiderando a estrutura de dependência e a opinião do especialista.

**Exemplo 6.1.** Suponha que uma determinada instituição financeira opte por utilizar o método proposto multivariado e que a mesma registre em seu banco de dados quatro perdas:  $L_1, L_2, L_3$  e  $L_4$ , cujos capitais regulatórios marginais são, respectivamente, 10, 20, 1000, 1500. A pergunta que surge é a seguinte: O que ocorre com o capital regulatório total quando:

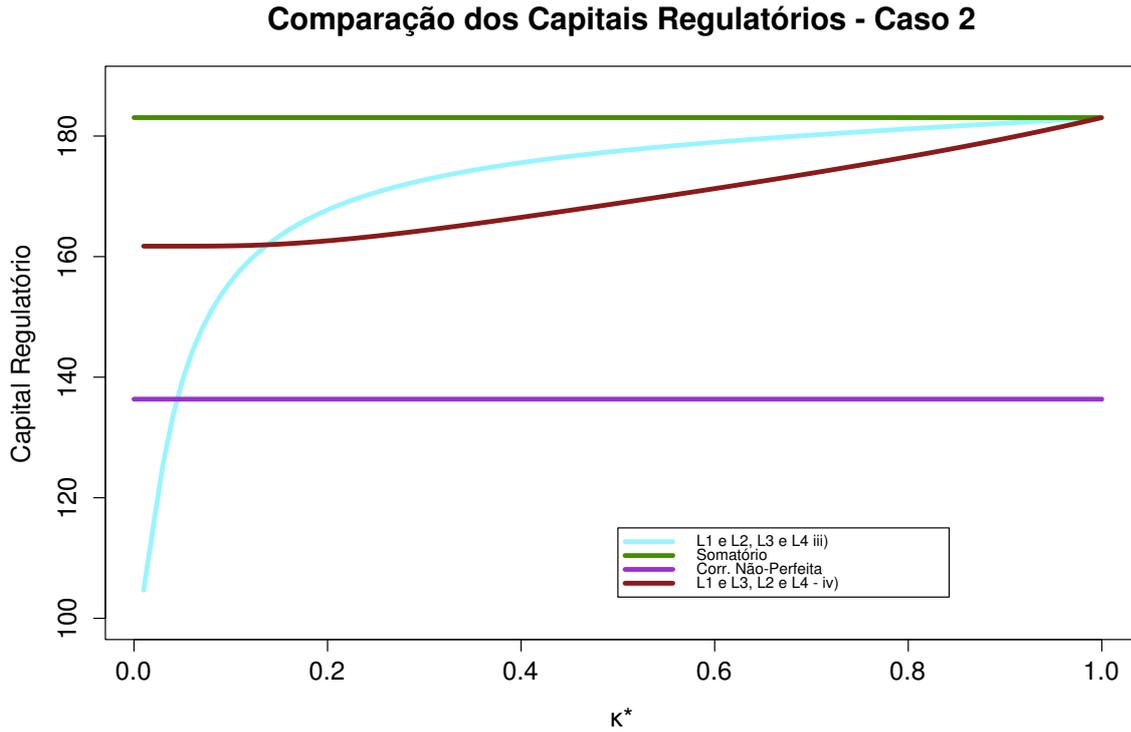


Figura 6.10: Capital Regulatório Multivariado - Caso 2.

- a) Agrupamos duas a duas as perdas mais próximas?
- b) Agrupamos duas a duas as perdas mais distantes?

Para responder a essas questões, consideremos a função para obter o capital regulatório por meio do proposto:

$$CR_{PROP}(p, \kappa^*) = [\min(UL_1, UL_2)] \left( \frac{p}{p^+} \right)^{\frac{1}{tg(\frac{\pi}{2}\kappa^*)}} + \max(UL_1, UL_2), \quad \kappa^* \in (0,1); \quad p, p^+ \in (0,1). \quad (6.3)$$

Seja  $q = \left( \frac{p}{p^+} \right)^{\frac{1}{tg(\frac{\pi}{2}\kappa^*)}}$ , em que  $q \in [0,1]$ .

Vamos analisar as questões separadamente:

a)  $CR_{L_1, L_2} = \min(10,20)q_1 + \max(10,20) = 10q_1 + 20 \Rightarrow 20 \leq CR_{L_1, L_2} \leq 30.$

$CR_{L_3, L_4} = \min(1000,1500)q_2 + \max(1000,1500) \Rightarrow 1500 \leq CR_{L_3, L_4} \leq 2500.$

Disso, temos que o capital regulatório total será:

$$1520 \leq CR_a) \leq 2530.$$

b)  $CR_{L_1, L_3} = \min(10,1000)q_3 + \max(10,1000) = 10q_3 + 1000 \Rightarrow 1000 \leq CR_{L_1, L_3} \leq 1010.$

$CR_{L_2, L_4} = \min(20,1500)q_4 + \max(20,1500) = 20q_4 + 1500 \Rightarrow 1500 \leq CR_{L_2, L_4} \leq 1520.$

Disso, temos que o capital regulatório total será:

$$2500 \leq CR_b \leq 2530.$$

Analisando as soluções das questões, vemos que em *a*) a amplitude do intervalo do capital regulatório total é maior do que o encontrado em *b*), isso porque quando consideramos as perdas duas a duas com capitais marginais distantes o mínimo não influenciará muito no resultado final, fazendo com que a amplitude do intervalo seja pequena.

□

## Capítulo 7

# Conclusão

Sempre ocorreram perdas operacionais dentro das instituições financeiras, embora não eram classificadas como risco operacional. Após vários desses acontecimentos, os empreendedores chegaram a conclusão de que essas perdas não podiam ser classificadas como risco de crédito ou mercado e sim como risco operacional.

Isso fez com que o risco operacional passasse a ser observado com outros olhos por especialistas, aumentando consideravelmente os estudos sobre o mesmo. Hoje existem vários profissionais, como matemáticos e estatísticos, que dedicam seus estudos somente para o risco operacional.

A literatura sobre metodologias para o cálculo do capital para o risco operacional ainda é bem escassa. Não existem muitos métodos para o cálculo do capital regulatório na literatura. Com o passar do tempo, as instituições financeiras obtiveram mais observações de seus dados de perdas e isso fez com que o Comitê de Basileia permitisse o uso de metodologias próprias de mensuração, desde que as mesmas cumprissem as regras qualitativas e quantitativas.

O método considerado hoje, método do somatório, foi formalizado em 2004. Tal método superestima o capital alocado. Isso se deve ao fato de que a estrutura de dependência entre as variáveis é perfeita. Ou seja, se ocorre um evento com uma perda grande, outro evento também irá ocorrer com probabilidade 1, o que segundo especialistas está fora da realidade do sistema financeiro. A grande vantagem desse método é sua fácil implementação e cálculo do capital regulatório, não necessitando de um estudo da estrutura de dependência entre as variáveis perdas agregadas.

Uma outra metodologia que se destaca para o cálculo do capital é a que vimos neste trabalho, proposta por Frachot et al. (2004), a correlação não-perfeita, em que na construção da distribuição de perda agregada é considerado que as variáveis frequências são

correlacionadas e as severidades independentes. A vantagem desse método é que o capital regulatório total é obtido através de uma única fórmula, além de tal método ser multivariado e fácil de implementar. Já a desvantagem desse método é que a medida de correlação considerada para o cálculo do capital regulatório é a de Pearson, que não capta toda a estrutura de dependência entre as variáveis, somente o grau de linearidade.

No método que propomos é possível perceber uma certa coerência no cálculo do capital regulatório com cada instituição. Vimos pelos pressupostos que existe uma relação funcional entre o capital regulatório com a probabilidade de ocorrência de dois eventos conjuntamente e a opinião do especialista. Nesta nova teoria utilizamos uma ferramenta importante: a cópula. O estudo da teoria de riscos e cópula vem crescendo a cada dia, pois a cópula possibilita a captação da estrutura de dependência entre as classes de risco, possibilitando que o cálculo do capital regulatório seja mais coerente, de acordo com o cenário de cada instituição.

O método proposto apresenta como vantagens sua forma fácil de implementar e rapidez computacional. Uma outra vantagem do método proposto está relacionada a opinião do especialista, quantificada através do índice  $\kappa^*$ . Isso torna importante, pois cada instituição financeira terá seu índice de acordo com o cenário que vivencia, tornando o capital regulatório mais realístico.

A grande desvantagem do método proposto é que o mesmo é bivariado. Uma sugestão para o cálculo multivariado desse método é estudar a estrutura de dependência ou propriedades de interesse entre todas as perdas e agrupá-las duas a duas e, ao final, somar todos esses capitais, como foi feito na parte 3 da simulação.

No Capítulo 6 foi apresentado uma simulação detalhada de formas para se determinar o capital regulatório total usando os métodos mostrados neste trabalho. Foi possível notar que em todas as situações o capital obtido pelo método do somatório foi o maior e o capital obtido pela correlação não-perfeita foi o menor. Já o capital do método proposto variou de acordo com o índice  $\kappa^*$ .

Podemos perceber que a pergunta central do trabalho, “O que são perdas inesperadas totais?”, foi respondida em todos os métodos descritos e para cada método a resposta foi diferente. Isto é, dependendo do método escolhido pela instituição financeira, teremos diferentes retornos de capital para ser alocado. O importante é que o capital regulatório final deve cobrir todas as perdas sem ser extremamente conservador. Um gerenciamento eficaz para o risco operacional se torna importante para a escolha do método a ser utilizado pela instituição.

### **Propostas futuras**

Discutimos neste parágrafo algumas sugestões futuras. Bem como mostra Böcker & Klüppelberg (2007) em alguns casos a medida OPVar foge a propriedade da subaditividade, isso permite um estudo onde essa propriedade não funciona. Além do mais, Frachot et al. (2001) questiona a construção do modelo LDA através dos pressupostos fixados. Um estudo pode ser realizado alterando tais pressupostos, como por exemplo, estudar a estrutura de dependência entre a frequência e a severidade, para que assim a dependência seja captada desde a construção da perda, tornando a alocação de capital mais realística. Além disso, pode-se utilizar métodos Bayesianos para a estimação do VaR (ver Gatarek et al. (2013)). Pode-se ainda utilizar teoria do valor extremo para abordar a mensuração do risco operacional como mostrado em Chavez-Demoulin et al. (2013).

# Referências Bibliográficas

ALEXANDER, C. (2003). *Operational risk: regulation, analysis and management*. Pearson Education.

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (2001a). *Operational Risk*. Bank for International Settlements. Acesso em 12/04/2013, URL <http://www.bis.org/publ/bcbsca07.pdf>.

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (2001c). *Working paper on the regulatory treatment of operational risk*. Bank for International Settlements. Acesso em 15/04/2013, URL [http://www.bis.org/publ/bcbs\\_wp8.pdf](http://www.bis.org/publ/bcbs_wp8.pdf).

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (2004). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Stands: a revised framework*. Bank for International Settlements. Acesso em 20/04/2013, URL <http://www.bis.org/publ/bcbs107.htm>.

BÖCKER, K. & KLÜPPELBERG, C. (2007). Multivariate operational risk: dependence modelling with lévy copulas. In *2007 ERM Symposium Online Monograph, Society of Actuaries, and Joint Risk Management section newsletter*. To appear.

BÖCKER, K. & KLÜPPELBERG, C. (2008). Modelling and measuring multivariate operational risk with lévy copulas. *Journal of Operational Risk* 3, 3–28.

CHAVEZ-DEMOULIN, V., EMBRECHTS, P. & HOFERT, M. (2013). An extreme value approach for modeling operational risk losses depending on covariates .

CHERUBINI, U., LUCIANO, E. & VECCHIATO, W. (2004). *Copula methods in finance*. Wiley.com, 2004.

COLEMAN, R. (2000). Using modelling in operational risk management. *self* v. 70, pg. 45.

CRUZ, M. G. (2002). *Modeling, measuring and hedging operational risk*. John Wiley & Sons New York.

- DEHEUVELS, P. (1979). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés: Un test non paramétrique d'indépendance. v. 65, pg. 274–292.
- DUARTE, A. M. J. (2001). Am risco: definições, tipos, medição e recomendações para seu gerenciamento. *Gestão de risco e Derivativos. São Paulo: Atlas* .
- DURRELMAN, V., NIKEGHBALI, A. & RONCALLI, T. (2000). Which copula is the right one.
- EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F. & MCNEIL, A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, v. 8, pg. 329–384.
- FELLER, W. (2008). *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2. John Wiley & Sons.
- FRACHOT, A., GEORGES, P. & RONCALLI, T. (2001). Loss distribution approach for operational risk. *Manuscript. Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais, France. April. <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/lda.pdf>* .
- FRACHOT, A., RONCALLI, T. & SALOMON, E. (2004). The correlation problem in operational risk. *OperationalRisk Risk's Newsletter* .
- GATAREK, L., HOOGERHEIDE, L., HOONING, K. & VAN DIJK, H. (2013). Censored posterior and predictive likelihood in bayesian left-tail prediction for accurate value at risk estimation.
- GIACOMETTI, R. (2008). *Aggregation issues in operational risk*. Ph.D. thesis, School of Management, Syracuse University.
- GUIMARÃES, T. A. (2003). *Implementação do método de distribuição de perdas para risco operacional*. Master's thesis.
- HERRING, R. J. (2002). The basel 2 approach to bank operational risk: Regulation on the wrong track. *Journal of Risk Finance*, v. 4, pg. 42–45.
- JOE, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*, vol. 73. CRC Press.
- JOE, H. & XU, J. J. (1996). The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Technical report.
- JOUANIN, J.-F., RIBOULET, G. & RONCALLI, T. (2004). Financial applications of copula functions .

- LIMA, E. L. (1995). *Curso de análise*, vol. 1. Instituto de matemática pura e aplicada.
- MARSHALL, D. C. (2001). *Measuring and managing operational risks in financial institutions: tools, techniques, and other resources*. John Wiley.
- MONTEIRO, A. (2003). *Simulação de Monte Carlo para mensuração do risco operacional: aplicação do modelo LDA*. Master's thesis.
- NELSEN, R. B. (1999). *An introduction to copulas*. Springer.
- NYSTRÖM, K. & SKOGLUND, J. (2002). Quantitative operational risk management. *Sweden-bank, Group Financial Risk Control* .
- POWER, M. (2005). The invention of operational risk. *Review of International Political Economy* v. 12, pg. 577–599.
- SKLAR, M. (1959). *Fonctions de répartition à  $n$  dimensions et leurs marges*. Université Paris.