

**Guaraci de Lima Requena**

**Dependência entre perdas em risco operacional**

**São Carlos, fevereiro de 2014**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

**Guaraci de Lima Requena**

Dependência entre perdas em risco operacional

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos-Des-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Carlos Alberto Ribeiro Diniz

**São Carlos, fevereiro de 2014**

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

R427dp

Requena, Guaraci de Lima.

Dependência entre perdas em risco operacional / Guaraci de Lima Requena. -- São Carlos : UFSCar, 2014.  
93 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Estatística. 2. Risco Operacional. 3. Acordo da Basiléia II. 4. Capital regulatório. 5. Dependência estocástica. 6. Teoria de cópulas. I. Título.

CDD: 519.5 (20ª)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Estatística  
Via Washington Luís, Km 235 - C.P.676 - CGC 45358058/0001-40  
FONE: (016) 3351-8292 – Email: ppgest@ufscar.br  
13565-905 - SÃO CARLOS-SP - BRASIL

---

## FOLHA DE APROVAÇÃO

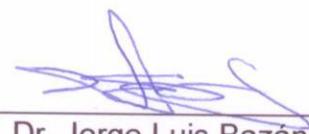
**Aluno(a) : Guaraci de Lima Requena**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA E APROVADA EM 12/02/2014  
PELA COMISSÃO JULGADORA:

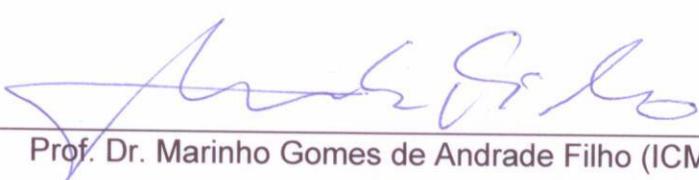
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Carlos Alberto Ribeiro Diniz (DEs-UFSCar/Orientador)

1º Examinador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Jorge Luis Bazán Guzmán (ICMC-USP)

2º Examinador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Marinho Gomes de Andrade Filho (ICMC-USP)

# Agradecimentos

---

Ao Prof. Dr. Carlos Diniz pela sua orientação tanto na elaboração desta dissertação quanto durante todo o curso de mestrado, pelas discussões acadêmicas e pela introdução ao risco operacional e à teoria de cópulas.

Aos Professores Doutores Marinho Gomes de Andrade Filho e Jorge Luis Bazán Guzmán pelos comentários, sugestões e correções, e pela participação como Banca Examinadora.

À minha família, especialmente ao meu pai, minha mãe e minha irmã, que sempre estão presentes ao meu lado, sempre com muito apoio e compreensão.

À Débora Delbem, minha companheira que me ajudou muito nesta fase, com muita paciência e dedicação, cuja dissertação de mestrado também se focou em risco operacional sob orientação do mesmo professor, Carlos Diniz.

Aos meus amigos e colegas tanto do curso de mestrado em estatística que estiveram presentes nesta fase árdua da vida, quanto aos outros tão importantes para que fosse possível a elaboração deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Estatística da UFSCar e do ICMC-USP que direta, ou indiretamente, colaboraram com este trabalho e com a minha formação.

À CAPES pelo apoio financeiro.



# Resumo

---

Nesse trabalho, abordamos o risco operacional nas instituições financeiras sob o ponto de vista do Acordo de Basileia II, a característica da presença de dependência estocástica entre as variáveis aleatórias em questão, a ferramenta para modelagem de tal dependência (teoria de cópulas) e a alocação de capital regulatório.

Como o método usual para alocação de capital regulatório sugerido pelo Acordo de Basileia II superestima tal capital por considerar que as variáveis perdas são perfeitamente dependentes, propomos neste trabalho uma metodologia alternativa, baseada em teoria de cópulas, para o caso bivariado. Tal metodologia modela a dependência entre duas perdas e ainda inclui a opinião de especialistas da área no modelo final. Também discutimos uma metodologia existente na literatura (método da convolução) e fazemos um estudo de simulação para analisar o comportamento dos métodos abordados: método usual, proposto e da convolução.

**Palavras-chave:** Risco operacional, Acordo de Basileia II, capital regulatório, dependência e cópulas.



# Abstract

---

In this work, we present and discuss the operational risk in the financial institutions, Basel Accord II, the structure of dependence between cumulative operational losses, a tool for modeling this dependence (theory of copula) and the allocation of a capital, called regulatory capital.

The usual method for calculation of regulatory capital for operational risk, suggested by Basel Committee, overestimates the final capital because it is considered that the losses are perfectly positively dependents. Then, we propose a new method for this calculation based on theory of copula for the bivariate case. Such method models the dependence between two losses and considers a index (representing the expert opinion). We discuss also a method studied on [Alexander \(2003\)](#) and perform a simulation study in order to compare all methods, the usual, the proposed and the convolution one.

**Keywords:** Operational risk, Basel Accord II, regulatory capital, stochastic dependence and theory of copulas.



# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Mensuração do risco operacional . . . . .	1
1.2 Estrutura do trabalho . . . . .	3
1.3 Definição de risco operacional . . . . .	4
1.4 Abordagens de alocação do capital regulatório para risco operacional . . . . .	6
1.5 Perdas operacionais agregadas e o LDA . . . . .	8
1.6 Cálculo do capital regulatório nos dias atuais – Método do somatório . . . . .	12
1.7 Motivação e contribuição . . . . .	18
<b>2 Cópulas e dependência estocástica</b>	<b>20</b>
2.1 A importância da teoria de cópulas para problemas com presença de dependência	20
2.2 Tipos, estruturas e medidas de dependência . . . . .	21
2.3 Cópulas . . . . .	27
2.3.1 Limites de Fréchet . . . . .	31
2.3.2 Cópula Gaussiana . . . . .	33
2.4 Estimação e escolha de cópulas . . . . .	37
2.4.1 Estimação de cópulas paramétricas . . . . .	37
2.4.2 Escolha da cópula . . . . .	39
<b>3 Método da convolução</b>	<b>42</b>
3.1 Descrição do método . . . . .	43
3.2 Simulação e aplicação . . . . .	47

3.3	O ponto de vista multivariado . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Método proposto</b>	<b>50</b>
4.1	Pressupostos . . . . .	50
4.2	Construção . . . . .	54
4.3	Aplicação – Estudo do comportamento teórico do método . . . . .	59
4.4	Comparação entre os métodos – um estudo de simulação . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Questões práticas – um estudo de simulação</b>	<b>69</b>
5.1	Estimando uma cópula . . . . .	69
5.2	Uma alternativa multivariada . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>87</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>90</b>

# Lista de Figuras

1.1	Complexidade das abordagens para cálculo do CR. . . . .	6
1.2	OpvarX e a classificação das perdas. . . . .	14
2.1	Limitantes para $\rho_{S_{X,Y}}$ e $\tau_{X,Y}$ . . . . .	25
2.2	Gráfico de dispersão de $X$ e $Y$ não uniformizadas. . . . .	26
2.3	Gráfico de dispersão de $X$ e $Y$ uniformizadas. . . . .	27
2.4	Gráficos de dispersão com diferentes estruturas de dependência. . . . .	28
2.5	Cópuas limites de Fréchet (a) inferior e (b) superior. . . . .	33
2.6	Estruturas de dependência captadas pela cópula Gaussiana de forma coerente. . . . .	34
2.7	(a) Densidade da cópula gaussiana e (b) Densidade da normal bivariada padrão, ambas com $\rho = 0.4$ . . . . .	35
3.1	Comportamento de $opvar(Z)$ utilizando a cópula Gaussiana, variando $\rho$ . . . . .	45
3.2	Comportamento e comparação entre os métodos da convolução e do somatório. . . . .	48
4.1	Comportamento da probabilidade $p$ em relação ao $\rho$ (para as particulares distribuições das marginais e cópula dadas). . . . .	61
4.2	Comportamento de $CR_{PROP}$ em relação a $p$ , para alguns $\xi^*$ (para as particulares distribuições das marginais e cópula dadas). . . . .	61
4.3	Comportamento de $CR_{PROP}$ em relação a $p$ , para alguns $\xi^*$ (para as particulares distribuições das marginais e cópula dadas). . . . .	62
4.4	Comportamento bivariado do CR total proposto (para as particulares distribuições das marginais e cópula dadas). . . . .	63
4.5	Comparação entre todos os métodos. . . . .	68
5.1	Comparação entre as diagonais das cópuas de $\tilde{C}$ e $C_n$ . . . . .	73
5.2	Comparação entre as curvas de nível das cópuas de $\tilde{C}$ e $C_n$ . . . . .	75

5.3	Comparação entre os CR proposto por diferentes cópulas com a cópula Gaussiana escolhida. . . . .	77
5.4	Comparação dos CR totais – Alternativa multivariada. Caso 1. . . . .	81
5.5	Comparação dos CR totais – Alternativa multivariada. Caso 2. . . . .	83

# Lista de Tabelas

1.1	Alguns termos da definição de RO segundo Basileia II. . . . .	5
3.1	Comparação entre os métodos do somatório e da convolução. . . . .	48
4.1	Capital Regulatório total via método do somatório. . . . .	60
4.2	Coefficientes para a determinação do CR total proposto. . . . .	60
4.3	Comportamento numérico do CR total proposto. . . . .	64
4.4	Comparação entre $CR_{SOMA}$ , $CR_{PROP}$ e $CR_{CONV}$ . . . . .	67
5.1	Cópias de $\tilde{C}$ com respectivas estimativas dos parâmetros e distâncias. . . . .	71
5.2	Valores dos CR's com a cópula escolhida. . . . .	76
5.3	CR marginais e correlações lineares das observações de $X$ , $Y$ , $W$ e $Z$ . Caso 1. . . . .	80
5.4	Comparação dos CR totais – Alternativa multivariada. Caso 1. . . . .	81
5.5	CR marginais e correlações lineares das observações de $X$ , $Y$ , $W$ e $Z$ . Caso 2. . . . .	83
5.6	Comparação dos CR totais – Alternativa multivariada. Caso 2. . . . .	84

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Mensuração do risco operacional

A fragilidade do mercado financeiro mundial se agravou em 1973 quando esse se encontrava em uma alta volatilidade. Por conta disso, um grupo do G10 <sup>1</sup> no final de 1974 criou o Comitê de Regulamentação Bancária e Práticas de Supervisão (Comitê de Basileia ou, simplesmente, Comitê), situado no Banco de Compensações Internacionais. Nesse comitê são discutidos problemas da indústria bancária mundial com o objetivo de fortalecê-la.

O Comitê de Basileia tem como principal objetivo tomar medidas com o fim de proteger e reforçar a segurança e solidez do sistema financeiro internacional. Em 1988 foi acordado, através do Acordo de Basileia I (Basileia I), a exigência da alocação junto aos órgãos reguladores<sup>2</sup> de um capital econômico mínimo, denominado capital regulatório, provindo das instituições financeiras para suportar riscos. Também foi acordado métodos de cálculo desse capital para o Risco de Crédito. O Basileia I visava também igualizar a competitividade entre as instituições financeiras internacionalmente ativas minimizando as diferenças entre regras de alocação do capital mínimo de instituição para instituição.

Somente oito anos depois, em uma emenda ao Basileia I de 1996, julgou-se necessário a extensão do conceito de capital regulatório (CR) para o Risco de Mercado. Nessa emenda houve um avanço muito importante para as instituições bancárias: a possibilidade de utilizar modelos internos das instituições financeiras na mensuração dos riscos (até então o de crédito e de mercado) desde que aprovados pelos órgãos reguladores. Antes de tal emenda, o CR era calculado através de uma taxa fixa chamada Razão de BIS.

---

<sup>1</sup>Os 11 países-membros do G10 são: Alemanha, Bélgica, Canadá, EUA, França, Itália, Japão, Holanda, Reino Unido, Suécia e Suíça.

<sup>2</sup>No Brasil, o órgão regulador é o Banco Central do Brasil (BACEN).

O termo “Risco Operacional” se tornou evidente em 1995 devido a ocorrência de um famoso evento no cenário bancário mundial: a falência do Banco Barings, que foi o banco mais antigo de Londres, Inglaterra. O evento que o levou à falência não se encaixa em risco de crédito nem de mercado e antes disso pouco se acreditava que outros riscos pudessem trazer grandes perdas ao sistema financeiro. O Banco Barings foi fundado em 1762 e em 1989 contratou Nicholas Leeson que seis anos depois seria o principal responsável pela sua falência (Körnert, 2003). Em suma, Leeson começou a fazer operações fraudulentas em 1992 quando sofreu várias perdas devido a contratos futuros e, logo depois, perdeu milhões de libras devido a diversas quedas na bolsa de valores de Tóquio (dadas por um forte terremoto em Kobe em 1994). Então, Leeson teve que apostar alto em diversas jogadas em nome do Barings acumulando ainda mais perdas. Em 1995 as perdas se acumularam em de cerca de 600 milhões de libras levando o Barings à falência (Körnert, 2003; Pressman, 1997)<sup>3</sup>. Não classificando-se como risco de crédito ou mercado, o evento ocorrido se classifica em “Risco Operacional” (que definimos formalmente na Seção 1.3). Após tal fato, o risco operacional (RO), durante os anos seguintes, evidenciou-se se tornando preocupação crescente nas instituições financeiras. Frequentemente o capital econômico para o RO supera o capital para risco de mercado em instituições financeiras internacionalmente ativas (De Fontnouvelle et al., 2006).

Oito anos depois da emenda de 1996 e ainda com o acúmulo de várias perdas em instituições financeiras devido ao RO, o Comitê instituiu o Novo Acordo de Basileia (Basileia II) em 2004. Na verdade, o Comitê divulgou alguns documentos antes do Novo Acordo que dão suporte a ele. No nosso trabalho citamos alguns como [Basel Committee on Banking Supervision \(1997, 2001a\)](#). Basileia II formalizou a preocupação com a mensuração do RO e também renovou os conceitos no âmbito de risco de crédito e de mercado principalmente no que diz respeito a flexibilidade aos modelos internos para o cálculo do CR. Essa flexibilidade é refletida ao RO e é extremamente importante para o nosso trabalho, pois nele estudamos e propomos um modelo estatístico (interno) de cálculo de CR (baseado em dados históricos de perdas). No Basileia II a aprovação dos modelos internos pelos reguladores continua evidente.

O Acordo de Basileia II é o vigente no sistema financeiro mundial nos dias atuais. O Brasil aderiu a ele e portanto deve seguir suas especificações. Nosso objetivo nesse trabalho é, como dito, estudar e incorporar à literatura sobre o assunto um modelo estatístico para alocação do CR em RO e, conseqüentemente, devemos nos apoiar nesse acordo e também nas resoluções e notificações do órgão regulador brasileiro.

---

<sup>3</sup>A falência do Banco Barings ficou tão famosa que hoje existem livros (um deles escrito pelo próprio Leeson) e inclusive um filme (chamado “Rogue Trader”, de 1999) sobre o assunto

## 1.2 Estrutura do trabalho

Nesta seção, apresentamos a estrutura a qual essa dissertação está posta.

Após apresentar alguns fatos históricos da mensuração do RO, ainda nesse capítulo, definimos formalmente RO e o exemplificamos; apresentamos as abordagens para o cálculo do CR e como tal cálculo é feito pela maioria das instituições financeiras nos dias atuais (e suas implicações); por fim descrevemos as motivações e contribuições do nosso trabalho.

No Capítulo 2 discutimos os principais pontos, para o nosso trabalho, em dependência estocástica e teoria de Cópulas. Mostramos alguns resultados importantes na captação de dependência entre as perdas operacionais agregadas (POA's) e ainda algumas técnicas para ajustar e escolher cópulas paramétricas com o uso da cópula empírica.

Nos Capítulos 3 e 4 apresentamos e discutimos dois métodos para calcular o CR para RO, respectivamente o “Método da Convolução” (já existente na literatura) e o método que propomos nessa dissertação, “Método Proposto”. Além de apresentar e discutir o método proposto, mostramos como é feita sua construção e também fazemos um estudo de simulação para comparar todos os métodos abordados.

No Capítulo 5 fazemos um estudo de simulação a fim de se discutir duas questões práticas: se estimar e escolher uma cópula bivariada para os dados de perdas. Finalmente, estudamos uma abordagem multivariada ao método proposto e algumas implicações.

Por fim, no Capítulo 6, discutimos os resultados obtidos e apresentamos algumas observações e conclusões do trabalho como um todo e algumas sugestões para trabalhos futuros.

É importante salientar que durante toda essa dissertação fazemos as respectivas revisões bibliográficas dos trabalhos que nos deram base para a elaboração da mesma.

Como nota, cabe dizer aqui, copiando a ideia de Richard Dawkins no prefácio da edição de 1976 do livro “O Gene Egoísta”, que durante a escrita deste trabalho, estavam sempre presentes “três leitores imaginários”: o leigo, para que se evitasse o uso em demasia de termos técnicos, tentando discutir em palavras algumas situações e ideias; o especialista, para que a formalização necessária fosse feita; e o estudante, o meio do caminho entre o leigo e o especialista, fazendo com que este trabalho seja uma ponte para a inicialização aos estudos de risco operacional com enfoque na captação da dependência entre unidades de risco.

### 1.3 Definição de risco operacional

Nesta seção definimos, sob algumas vertentes, o que entende-se por “Risco Operacional”. Etimologica e brevemente, o termo “Risco Operacional” está associado a incerteza de se perder (ou de se ganhar) no que se refere a trabalho, atividade ou a uma operação qualquer. Essa ideia de RO é muito geral e contém diversas ambiguidades. Voltado para o sistema financeiro, consideramos definições presentes na literatura bem como a definição do Basileia II e do BACEN.

Jorion (1997) considera que RO “refere-se às perdas potenciais resultantes de sistemas inadequados, má administração, controles defeituosos ou falha humana e também inclui fraude e risco tecnológico”. Uma definição mais ampla define RO como “o risco de que as operações sejam ineficientes e ineficazes para executar o modelo de negócios da empresa, satisfazer seus clientes e atender os objetivos da empresa em termos de qualidade, custo e desempenho temporal” (DeLoach & Andersen, 2000).

A definição mais formal possível, no âmbito mundial, é dada no Acordo de Basileia II (Basel Committee on Banking Supervision, 2004). Citando o parágrafo 644:

*“Operational risk is defined as the risk of loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events. This definition includes legal risk, but excludes strategic and reputational risk.”* <sup>4</sup>

Na Resolução do BACEN 3.380/2006 (Banco Central do Brasil, 2006) vemos que o Brasil aderiu a definição dada no Basileia II e no artigo 2º a reforça:

*“[...] define-se como risco operacional a possibilidade de ocorrência de perdas resultantes de falha, deficiência ou inadequação de processos internos, pessoas e sistemas, ou de eventos externos.”*

Banco Central do Brasil (2006) ainda observa que tal definição inclui o risco legal associado à inadequação ou deficiência em contratos firmados pela instituição, bem como a sanções em razão de descumprimento de dispositivos legais e a indenizações por danos a terceiros decorrentes das atividades desenvolvidas pela instituição. Alguns termos dessa definição são apresentados na Tabela 1.1.

Há ainda uma definição bem abrangente que define RO como todo o risco que não seja o de mercado e nem o de crédito. Porém essa definição inclui diversos outros tipos de risco que, muitas vezes, não têm ligação aparente com o RO como por exemplo: risco país, de

---

<sup>4</sup>Note que essa definição é muito próxima do que foi definido por Jorion (1997).

Tabela 1.1: Alguns termos da definição de RO segundo Basileia II.

<b>Processos</b>	falha no registro, processamento ou liquidação de transações, contas de clientes, negócios diários e falhas na apresentação de relatórios obrigatórios.
<b>Pessoas</b>	perdas causadas por colaboradores ou com participação indireta destes (de maneira intencional ou não), ou advindas pelo relacionamento com clientes, acionistas ou terceiros.
<b>Sistemas</b>	perdas decorrentes da interrupção de negócios ou falha de sistemas, causados pela indisponibilidade de infra-estrutura ou recursos de TI.
<b>Eventos externos</b>	perdas causadas por terceiros, danos a patrimônios ou ativos.

transferência, de taxa de juros, de liquidez, legal, reputacional, estratégico, entre outros ([Basel Committee on Banking Supervision, 1997](#)). O que é de concordância geral é que os três maiores riscos no sistema financeiro são os já citados: de crédito, de mercado e o operacional.

É interessante dizer que diferentemente dos riscos de crédito e de mercado, a exposição ao RO só traz o aspecto da perda, enquanto que os outros dois riscos trazem um retorno à instituição financeira de acordo com sua exposição. Busca-se uma otimização entre as perdas e os retornos devidos aos riscos de crédito e de mercado, enquanto que em RO essa otimização não existe sendo de desejo das instituições sempre mitigá-lo.

**Exemplo 1.1.** *Alguns eventos em RO são:*

- *fraudes internas e externas;*
- *práticas inadequadas relativas a clientes, produtos e serviços;*
- *danos a ativos físicos próprios ou em uso pela instituição;*
- *aqueles que acarretem a interrupção das atividades da instituição;*
- *falhas em sistemas de tecnologia da informação;*
- *acidentes de trabalho, internos e externos;*
- *falhas na execução, cumprimento de prazos e gerenciamento das atividades na instituição;*
- *catástrofes naturais como chuva, terremotos; entre outros.*

## 1.4 Abordagens de alocação do capital regulatório para risco operacional

Como vimos na primeira seção desse trabalho, em 1988 o Basileia I levou o sistema financeiro internacional ao uso do CR que é “o *capital econômico ‘mínimo’ exigido pelos órgãos reguladores para cobrir riscos financeiros*”. O que se faz é fixar um horizonte de tempo (e.g. 1 ano)<sup>5</sup> e utilizar alguma abordagem de cálculo do CR para se assegurar dos riscos para o próximo horizonte (próximo ano).

Em suma, o CR para RO é uma forma de seguro, obrigatório para as instituições financeiras, que cobre as perdas operacionais inesperadas<sup>6</sup>. É importante frisar que, para entendermos o papel do CR, devemos entender o que significa o termo “perdas operacionais inesperadas”. Quando definirmos perdas operacionais agregadas (POA’s) veremos como as instituições financeiras classificam suas perdas e então compreender o significado de tal termo.

No Basileia II são propostas três as abordagens para o cálculo do CR em RO.

- BIA (*Basic indicator approach*): Abordagem Básica
- SA (*Standardized approach*): Abordagem Padronizada
- AMA (*Advanced measurement approach*): Abordagem Avançada

Devemos dar atenção ao fato de que o termo “abordagem” para o cálculo do CR é diferente do termo “método” para tal cálculo. O método fornece diretamente o valor do CR. Já a abordagem é mais geral, fornecendo um conjunto de especificações quantitativas e qualitativas em que os métodos se baseiam; é como se os métodos “residissem” nessas abordagens. Vemos, ainda, adiante que existem subclasses para tais abordagens, especificando ainda mais onde os métodos residem.

Essas abordagens, segundo a complexidade de cada uma e também a sensibilidade no cálculo do CR é visto na Figura 1.1.

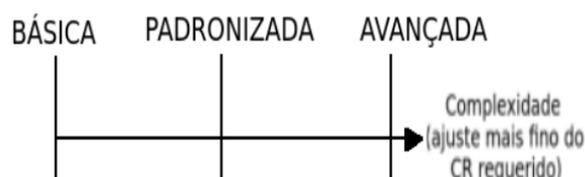


Figura 1.1: Complexidade das abordagens para cálculo do CR.

<sup>5</sup>Basileia II recomenda 1 ano.

<sup>6</sup>Vemos mais adiante que essa é uma de duas visões que existem de CR.

Hoje, grande parte das instituições financeiras lidam com a abordagem mais complexa, AMA, pois assim tem a liberdade para optarem por metodologias, estatísticas ou não, de cálculo do CR usufruindo de seus dados internos e conseqüentemente obtendo um CR mais bem aproximado da realidade (previsto para o ano seguinte) – inclusive o Comitê determina que as instituições financeiras internacionalmente ativas prefiram a AMA. Nosso trabalho está inserido completamente em tal abordagem.

Como nota importante desse trabalho, apresentamos aqui a agenda do mercado financeiro brasileiro descrita pelo BACEN no Comunicado nº 019028 ([Banco Central do Brasil, 2009](#)):

- I – até o final de 2009: estabelecimento dos critérios de elegibilidade para adoção de modelos internos para apuração do requerimento de capital para risco de mercado; divulgação do processo de solicitação de autorização para uso de modelos internos para apuração do requerimento de capital para risco de mercado; e divulgação dos pontos-chave para formatação de base de dados para sistemas internos para apuração de requerimento de capital para risco operacional;
- II – até o final do primeiro semestre de 2010: início do processo de autorização para uso de modelos internos para apuração do requerimento de capital para risco de mercado;
- III – até o final de 2010: estabelecimento dos critérios de elegibilidade para a implementação da abordagem baseada em classificações internas para apuração de requerimento de capital para risco de crédito; e divulgação do processo de solicitação de autorização para uso da abordagem baseada em classificações internas para apuração de requerimento de capital para risco de crédito;
- IV – até o final de 2011: estabelecimento dos critérios de elegibilidade para adoção de modelos internos de apuração de requerimento de capital para risco operacional; e divulgação do processo de solicitação de autorização para uso de modelos internos de apuração de requerimento de capital para risco operacional;
- V – até o final de 2012: início do processo de autorização para uso das abordagens básica e avançada baseadas em classificações internas para apuração de requerimento de capital para risco de crédito;
- VI – até o final do primeiro semestre de 2013: início do processo de autorização para uso de modelos internos de apuração de requerimento de capital para risco operacional.

Observando o cronograma imposto às instituições financeiras pelo documento supracitado, vemos que o uso de modelos internos na mensuração e estimação do CR para RO é

extremamente recente em âmbito nacional. É em 2013 o ano previsto para autorização do “uso de modelos internos de apuração de requerimento de capital para risco operacional”. É importante dizer que esse cronograma foi ajustado pelo BACEN em 2009 devido ao início da crise financeira mundial em 2007.

Não discutimos a fundo a AMA no quesito inserido nas ciências econômicas e financeiras, tendendo as discussões feitas aqui nesse trabalho para o campo da estatística e modelagem matemática. O Comitê propõe duas sub-abordagens (modalidades ou sub-classes) para o cálculo do CR dentro da AMA:

- IMA (*Internal Measurement Approach*): Modelo de Mensuração Interna;
- LDA (*Loss Distribution Approach*): Modelo de Distribuições de Perdas

Nosso foco, na próxima seção, será apresentar o LDA pois é a modalidade estatística mais difundida na literatura e presente nas exigências quantitativas do Comitê e também é onde a grande maioria dos métodos estatísticos se baseiam, incluindo o nosso.

## 1.5 Perdas operacionais agregadas e o LDA

Por existir muitas ocorrências de diferentes eventos de perdas em RO e pela sua característica heterogênea, as instituições financeiras se dividem em unidades que julgam estarem expostas a tal risco. Para a mensuração se tornar mais sensível, não se considera a instituição como um único bloco, e sim diversas unidades consideradas em exposição ao risco. Isso se dá pois cada unidade tem características diferentes implicando em perdas com características diferentes. É, também, mais fácil mitigar o RO em cada unidade de risco do que na instituição como um todo.

Para melhor elucidar essa ideia, considere duas unidades de risco  $A$  e  $B$ . Suponha que na unidade  $A$  ocorrem muitos eventos de perda (alta frequência) com valores monetários baixos (baixas severidades<sup>7</sup>), e que na unidade  $B$  ocorra poucos eventos de perda (baixa frequência) com valores elevados (alta severidade). A perda na unidade  $A$  tem característica bem distinta da perda em  $B$  e é natural notar que a mensuração é mais sensível quando feita separadamente pois é melhor captada essa distinção de características entre unidades.

Uma unidade de risco é um par (linha de negócio, tipo de risco). Basileia II sugere 56 unidades de risco (8 linhas de negócios e 7 tipos de riscos), mas há classificações mais sofisticadas tendo até 19 linhas de negócios e até 70 tipos de riscos (Anexos 6 e 7 do Basileia II).

---

<sup>7</sup>Definimos formalmente frequência e severidade mais adiante.

É comum classificações menos sofisticadas pela baixa quantidade de dados. Para generalizar, consideramos então que a instituição financeira tenha  $p$  unidades de risco. Durante o nosso trabalho, não será necessária a distinção entre linhas de negócios e tipos de riscos.

O LDA é uma modalidade estatística dentro da AMA usada para obter as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias (v.a.'s) que representam as perdas em RO para, a partir daí, dar toda a base estatística, paramétrica, necessária para a proposta de modelos estocásticos para o cálculo do CR. Tais v.a.'s são denominadas “perdas operacionais agregadas” (POA's). O LDA também é utilizado na mensuração de risco de crédito e de mercado; sob o ponto de vista metodológico este parece ser o modelo menos complicado para construção do que os modelos internos para tais riscos Frachot et al. (2001). Embrechts & Puccetti (2006) ressaltam que a metodologia mais sensível ao risco (na AMA) é, de longe, o LDA.

Em Frachot et al. (2001) há uma descrição mais detalhada do LDA para RO. O que fazemos nessa seção é discutir seus principais pontos nos baseado principalmente nesse trabalho e também em Frachot et al. (2004).

No ponto de vista estatístico e também sob as exigências quantitativas do Basileia II, temos no problema  $N + 1$  variáveis aleatórias: a de frequência (que denotamos por  $N$ ) e as de severidades (cuja denotação é  $S_1, S_2, \dots, S_N$ ) definidas abaixo.

**Definição 1.1** (Frequência). *É a variável aleatória (v.a.), denotada por  $N$ , que representa o número de vezes que eventos de perda operacional ocorrem dentro de uma unidade de risco e em um período de tempo. Ou seja,  $N$  é um contador de eventos de perda e esses eventos podem ser os mesmos (por exemplo, várias fraudes internas) ou diferentes uns dos outros.*

Por representar o número de vezes que o evento ocorre, é uma v.a. discreta e as distribuições de probabilidade mais frequentes na literatura são Poisson e binomial negativa, mas também há exemplos com uso de geométrica, binomial, entre outras. Para reforçar a definição,  $N$  “conta”, então  $N \in (0, 1, 2, 3, \dots)$ , todos os eventos de perda que ocorrem em uma fixada unidade de risco e período de tempo, sejam eles do mesmo tipo ou não.

**Definição 1.2** (Severidades). *São v.a.'s, denotadas por  $S_1, S_2, \dots, S_N$ , que representam a gravidade (severidade) em valor monetário, de cada evento operacional ocorrido para cada unidade de risco e para um fixado período de tempo.*

Observe que o índice das v.a.'s severidades pertence ao conjunto  $(1, 2, \dots, N)$  em que  $N$  é a frequência. Ou seja, o que se faz em cada unidade de risco é observar ao longo de um período de tempo, e.g. um ano, eventos de perda em RO e quantificar em valor monetário

a perda associada a cada ocorrência. Note que a frequência é aleatória pois não se sabe antecipadamente quantos eventos de perda operacional vão ocorrer e a aleatoriedade das severidades se dá por desconhecer o valor monetário das perdas (severidade) associado a cada ocorrência. Observe ainda que as v.a.'s severidades, por representarem perdas monetárias, são contínuas e sempre assumem valores positivos (pois não há ocorrência de um evento operacional que implique em perda negativa). Na literatura, são mais comumente encontradas as distribuições log-normal, Weibull, gama e Pareto. Mas outras distribuições com essas características podem ser usadas.

O que se faz no LDA é compor as severidades (agregá-las) para cada unidade de risco. Essa agregação dá origem, para cada unidade de risco  $i$ , à v.a. perda operacional agregada, como vemos na definição abaixo.

**Definição 1.3** (Perda operacional agregada para uma unidade de risco  $i$ ). *A perda operacional agregada na unidade de risco  $i$  denotada por  $X$  é:*

$$X = \sum_{k=1}^N S_k = S_1 + S_2 + \dots + S_N \quad (1.1)$$

em que  $N$  e  $S_k$ ,  $k \in (1, 2, \dots)$ , são respectivamente frequência e severidades na unidade de risco  $i$ . Ou seja,  $X$  é uma soma aleatória de variáveis aleatórias.

Há três pressupostos para se utilizar o LDA como expressado na Equação 1.2 e com a perda agregada como na definição acima.

- i)  $N$  e  $S_k$ ,  $k \in (1, 2, \dots)$ , são v.a.'s independentes;
- ii)  $S_1, S_2, \dots$  são v.a.'s independentes;
- iii)  $S_1, S_2, \dots$  têm a mesma distribuição de probabilidade (marginal).

A distribuição de probabilidade de  $X$  também tem características das distribuições das severidades (por  $X$  ser uma soma de severidades), ou seja, são contínuas e positivas e também é comum se obter através do LDA as distribuições log-normal, Weibull, gama e Pareto. Porém, em geral, não se obtém uma expressão analítica (fechada) da distribuição de  $X$ . Assim, o que se faz é aderir (estimar) uma distribuição de probabilidades através de simulações, onde os mais difundidos são os método de Monte Carlo.

Observe que o primeiro pressuposto é discutível pois a quantidade de vezes que eventos de perda operacional ocorre está, aparentemente, relacionado com o valor monetário dessas perdas e vice-versa. Frachot et al. (2004) argumenta que o número de perdas e seus correspondentes montantes se movem juntos, i.e., parcialmente correlacionados.

Já os Pressupostos *ii*) e *iii*) são de maior aceitação, mas ainda assim discutíveis pois é de se supor que haja dependência intrínseca entre as severidades por estarem todas associadas à mesma unidade de risco (debatendo o Pressuposto *ii*) e, teremos diferentes grupos de severidades gerados de diferentes eventos de perda, podendo se debater o Pressuposto *iii*) pois cada grupo desses de severidades podem ter distribuições distintas.

Contudo os pressupostos são necessários pois, se assim não fosse, os modelos seriam de complexidade muito elevada e impraticáveis. Para se ajustar distribuições de probabilidade às POA's por meios não analíticos (pois a solução fechada só existe em casos muito particulares e irrealis no mundo financeiro) os pressupostos são importantes e tornam o ajuste possível.

O uso do LDA para mensuração de riscos se dá por sua objetividade, uma vez que não necessita da interpretação gerencial dos indicadores de risco, dependendo obrigatoriamente do histórico de perdas observadas para previsão da distribuição das perdas futuras e por permitir fazer predições, análises de cenário, teste de estresse e análise de custo-benefício – inclusive para transferência de risco (Coleman, 2000). Essas discussões nos indica o quão complexo é o sistema financeiro no que diz respeito as suas perdas.

Desejando obter a distribuição de probabilidades de  $X$ , considere  $F$  a função de distribuição de  $X$  e suponha uma unidade de risco qualquer. O LDA determina a distribuição de  $X$  como na equação abaixo:

$$\begin{aligned}
 F(x) = Pr[X \leq x] &= \sum_{n=0}^{\infty} Pr[X \leq x \text{ e } N = n] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} Pr[X \leq x | N = n] Pr[N = n] \\
 &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Pr \left[ \sum_{k=0}^N S_k \leq x | N = n \right] Pr[N = n] \\
 &\stackrel{(**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Pr \left[ \sum_{k=0}^n S_k \leq x \right] Pr[N = n] \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

em que,  $F$  caracteriza unicamente a distribuição de probabilidade de  $X$ . Note que na passagem destacada por  $(*)$  é usada a definição de  $X$  dada na Equação 1.1 e por  $(**)$  os pressupostos descritos acima são utilizados. Mais precisamente, em  $(**)$  é utilizado o Pressuposto *i*) que considera independência entre frequência e severidades; para obtermos através de métodos de simulação estocástica a distribuição de  $\sum_{k=0}^n S_k$  (pois temos que determinar a  $Pr[\sum_{k=0}^n S_k \leq x]$  precisamos dos Pressupostos *ii*) e *iii*). Note que se  $N = 0$  então na passagem  $(**)$  obtemos  $F(x) = P[N = 0]$ .

Sendo assim, o LDA se baseia nos pressupostos supracitados para construir a POA  $X$  para toda unidade de risco na instituição através da soma na Equação 1.1. O que se faz na prática é

observar as v.a.'s frequência e severidades em períodos de tempo (obtendo-se dados) e ajustar distribuições de probabilidades para elas e, assim, estimar uma distribuição para a POA em questão obtida através do LDA. Em suma, o que se tem hoje na instituição financeira são distribuições de probabilidades ajustadas para as POA's em cada unidade de risco que são atualizadas ao passar dos anos com a inclusão de novos dados. A visão do Comitê sobre o que discutimos nessa seção sobre o LDA é vista num trecho do documento consultivo ([Basel Committee on Banking Supervision, 2001a](#)) abaixo:

*“Under the Loss Distribution Approach, the bank estimates, for each business line/risk type cell, the probability distribution functions of the single event impact and the event frequency for the next (one) year using its internal data, and computes the probability distribution function of the cumulative operational loss.”*

Não se pode perder de vista que o LDA é uma modalidade da AMA e então se utiliza dos dados internos da instituição financeira; mas também pode utilizar dados externos de outras instituições financeiras<sup>8</sup> e simulados em cenários de estresse tornando o LDA mais realístico.

Além do uso de dados internos e simulados, o Comitê permite, na AMA, o uso da opinião de especialistas e isso torna, também, o LDA um modelo mais robusto; e.g. pode-se dar maior peso a perdas mais recentes, julgando tais perdas mais condizentes com o cenário atual em que as instituições estão imersas (de acordo com especialistas).

Com o LDA definido e com suas respectivas observações feitas, podemos discutir o método usual feito nos dias de hoje para o cálculo do CR na maior parte das instituições financeiras.

## 1.6 Cálculo do capital regulatório nos dias atuais – Método do somatório

Nos dias atuais, grande parte das instituições financeiras utilizam o denominado Método do Somatório para calcular o CR a ser alocado para a instituição financeira como um todo em RO. Há basicamente duas visões do papel do CR em RO. Definimo-lo anteriormente como o capital econômico mínimo para cobrir as perdas em RO, mas a questão presente aqui é: quais são essas perdas que o capital deve de cobrir? As duas visões para essa questão são:

- i) cobrir as perdas esperadas e inesperadas;
- ii) cobrir somente as perdas inesperadas.

---

<sup>8</sup>Um dos pilares do Basileia II é a transparência, ou seja, a instituição deve disponibilizar seus dados de perdas para consulta aos outros instituições.

Ambas as visões excluem o fato do CR ter o papel de cobrir todas as perdas da instituição, i.e., exclui a cobertura de perdas extremas em RO. A visão que consideramos nesse trabalho é a segunda (veremos o porquê um pouco mais adiante), porém ambas dependem da conceituação de perdas esperadas e inesperadas. Aparentemente a segunda visão depende somente do conceito de perdas inesperadas, mas conceituá-las exige definir perdas esperadas.

Contudo, o que é bem definido pelo Comitê e pela literatura sobre o assunto, e também o que é de aceitação mais geral entre as instituições, é o conceito de “Perdas Esperadas Marginais” (EL) e “Perdas Inesperadas Marginais” (UL). O termo “marginais” é no sentido da divisão feita em unidades de risco. Ou seja, para cada unidade de risco tem-se bem definidas perdas esperadas e inesperadas.

### Para uma unidade de risco $i$

As definições de perdas esperadas e inesperadas marginais vão ser delongadas pois exigem, indispensavelmente, da definição de uma medida muito utilizada no sistema financeiro para aferir o valor que está em risco: a medida VaR (Value-at-Risk). O VaR é altamente utilizado em ciências atuárias e representa a volatilidade do que está sendo medido. Particularmente em RO, a definição de Var operacional, denotado por  $opvar$  (ou muitas vezes por  $OpVaR$ ), é o percentil de 99.9% da distribuição de probabilidade de  $X$  (considerando aqui que  $X$  é a POA em uma fixada unidade de risco  $i$ ). Matematicamente definindo, temos:

**Definição 1.4** (VaR Operacional). *Considere  $X$  a POA para a unidade de risco  $i$ . Considere também  $F(\cdot)$  a função de distribuição de  $X$ .*<sup>9</sup> Então:

$$opvar X = F^{(-1)}(0.999) = \inf\{x | F(x) \geq 0.999\}.$$

*Se  $F$  é uma função contínua e bem definida para todo valor de  $X$ , então  $opvar X$  é tal que:*

$$F(opvar X) = 0.999.$$

Definido  $opvar$  de uma perda  $X$  marginal, podemos conceituar EL e UL em RO (denotadas por  $ELX$  e  $ULX$ , respectivamente).

**Definição 1.5.** *Considere novamente que  $X$  representa a POA na unidade  $i$ :*

- **Perdas Esperadas Marginais:** *são as perdas até a média de  $X$ , i.e.,  $ELX = E(X)$ .*<sup>10</sup>

<sup>9</sup>Deve-se reafirmar que  $X$  é contínua e só assume valores positivos.

<sup>10</sup>Coleman (2003) sugere que se use a mediana ao invés da média para que a medida que delimita tais perdas também seja em termos de percentil, assim como o  $opvar$ , e então seja de maior facilidade nas interpretações. Ele afirma: “I would recommend using the median in place of the mean giving a direct difference of percentiles.”

Tais perdas são absorvidas pelo valor dos produtos das instituições (transações) e lucros das receitas.

- **Perdas Inesperadas Marginais:** são as perdas que estão entre  $E(X)$  e  $opvarX$ , i.e.,  $ULX = opvarX - E(X)$ . O CR tem o papel de cobrir tais perdas (lembrando que estamos sempre falando em 1 ano a frente). Na realidade, o CR deve cobrir as perdas inesperadas como um todo, como veremos mais adiante.
- **Perdas Catastróficas Marginais:** estão além do  $opvarX$  e são consideradas extremas. Tais perdas exigem um capital extra e outras formas de seguro. É comum haver um fundo (seguro) comum entre as instituições financeiras para cobrir partes dessas perdas, pouco prováveis, mas possíveis.

A Figura 1.2 elucida a definição das perdas dada acima:

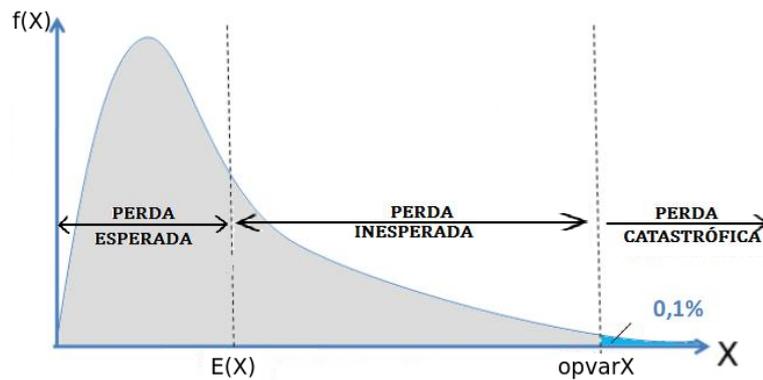


Figura 1.2: OpvarX e a classificação das perdas.

**Definição 1.6** (Capital Regulatório Marginal). *O CR marginal na unidade de risco  $i$  (cuja perda é representada por  $X$ ), denotado por  $CR(X)$ , é dado por:*

$$CR(X) = ULX = opvarX - ELX = F^{(-1)}(0.999) - E(X).$$

O Comitê através do Basileia II nos afirma:

*“Supervisors will require the bank to calculate its regulatory capital requirement as the sum of expected loss (EL) and unexpected loss (UL), unless the bank can demonstrate that it is adequately capturing EL in its internal business practices. That is, to base the minimum regulatory capital requirement on UL alone, the bank must be able to demonstrate to the satisfaction of its national supervisor that it has measured and accounted for its EL exposure. ”*

Ou seja, a instituição financeira deve ser capaz de mostrar ao seu órgão regulador que suas práticas internas (taxas em transações etc.) cobrem as perdas esperadas. É por essa razão que estamos considerando a segunda visão supracitada, i.e., por considerar que a maior parte das instituições financeiras absorvem bem as perdas esperadas com suas transações internas.

Existem na literatura diversas discussões sobre VaR e suas implicações. Há estudos sobre o VaR dentro da teoria de valor extremo e até mesmo com o uso de processos estocásticos que, conseqüentemente, dependem de um tempo  $t$  (Cruz, 2002). No entanto, consideramos no nosso trabalho a definição dada acima que é bem aceita pelo Comitê de Basileia.

A questão que surge dos fatos mencionados e que é a questão central no que tange a problemática desse trabalho é a seguinte:

**Questão 1.1.** “O que se pode considerar como sendo perdas inesperadas para a instituição financeira como um todo?”

A resposta para essa questão não é trivial e também não é única. Respondê-la significa propor um capital regulatório global, i.e., um capital que cubra as perdas inesperadas totais da instituição financeira. A literatura dispõe de diferentes respostas para essa questão e nós, no nosso trabalho, propomos a inserção de mais uma resposta à literatura sobre o assunto.

### Para a instituição financeira como um todo

Basileia II responde a questão posta com o que comentamos no início dessa seção: o Método do Somatório. Abordamos tal método nessa parte do trabalho. O Comitê sugere que seja utilizado tal método que consiste em determinar o CR marginal, como definido anteriormente, para todas as unidades de risco da instituição e, simplesmente, somá-los. Ou seja, denotando por  $CR_{TOTAL}$  o CR para a instituição financeira como um todo e  $UL_{TOTAL}$  a perda inesperada para a instituição financeira como um todo e supondo mais uma vez que tal instituição tenha  $p$  unidades de risco, temos:

$$\begin{aligned} CR_{TOTAL} &= \sum_{k=1}^p CR(X_i) = \sum_{k=1}^p ULX_i = \sum_{k=1}^p (opvar X_i - ELX_i) \\ &= \left( \sum_{k=1}^p opvar X_i \right) - \left( \sum_{k=1}^p ELX_i \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

em que  $X_i$ ,  $ULX_i$ ,  $opvar X_i$  e  $ELX_i$  são, respectivamente, a POA, UL, opvar e EL na unidade de risco  $i$ .

Como iremos discutir mais adiante outras respostas à Questão 1.1, ou seja, outras

propostas de CR total, denotamos por  $CR_{SOMA}$  o capital dado na Equação 1.3 acima. Então:

$$CR_{SOMA} = \left( \sum_{k=1}^p \text{opvar} X_i \right) - \left( \sum_{k=1}^p ELX_i \right). \quad (1.4)$$

O próprio Comitê no documento consultivo [Basel Committee on Banking Supervision \(2001a\)](#) afirma:

*“The Committee is therefore proposing a simple summation of the capital charges across bussines line/loss type cells.”*

Aparentemente, o método considera independência entre as unidades de risco, pois o CR para cada unidade de risco é modelado separadamente, ou seja, tratado de forma independente; e soma-se tais capitais para obter uma agregação de risco para a instituição financeira como um todo. Porém na hora em que a resposta para a nossa questão 1.1 central é dada, i.e., na hora em que é proposto a soma dos CR marginais como o CR total, implicitamente, se considera dependência perfeitamente positiva entre todas as unidades de risco.

O método do somatório<sup>11</sup> em si é extremamente simples. Porém, a suposição de dependência perfeita positiva (crucial para a motivação do nosso trabalho e para estudos de métodos alternativos para alocação de CR) incomoda de certa forma as instituições financeiras. Esse incômodo se dá pelo fato de, primeiro, tal suposição fugir à realidade e, segundo, por superestimar em níveis extremamente conservadores o CR total.

Então, não é por acaso e nem somente pela facilidade analítica, de implementação computacional e de interpretação (que são consideradas vantagens do método) que o Comitê o propõe (e que também é aceito facilmente pelos reguladores), mas pelo fato de tal método ser extremamente conservador no que tange a alocação de capital (agregação de riscos), fazendo com que as instituições aloquem mais capital do que o necessário.

**Propriedade 1.1** (Método do somatório). *Se a instituição financeira utiliza o método do somatório para obter a perda inesperada total (e então determinar um CR total a ser alocado para o ano seguinte), então tal instituição está impondo (supondo) que todas as suas unidades de risco, i.e., que todas as variáveis aleatórias POA's (denotadas por  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , supondo  $p$  unidades de risco), têm dependência perfeitamente positiva<sup>12</sup>.*

<sup>11</sup>Na literatura, muitas vezes não é esse o nome empregado ao método. Em muitos casos ele é chamado simplesmente de método usual. Convém observar que ele é proposto primeiramente em uma outra abordagem dentro da AMA (a IMA), mas no LDA é proposto exatamente da mesma maneira, diferindo na interpretação e também na abordagem das unidades de risco de maneira estocástica.

<sup>12</sup>A demonstração dessa propriedade se encontra no apêndice A de [Frachot et al. \(2004\)](#).

O senso comum sugere que eventos em RO podem ser, pelo menos, parcialmente não-correlacionados. Na verdade, supor que todas as perdas graves em RO ocorrem simultaneamente e de forma sistemática no mesmo ano é bastante duvidoso e dificilmente apoiado por evidências empíricas. Então, em certo sentido, seria exatamente como se tudo desse errado ao mesmo tempo para todo par linha de negócio/tipo de risco. Em termos matemáticos, isso implicaria que tanto frequência quanto gravidade das perdas são acionadas por uma única fonte de aleatoriedade ao invés de, possivelmente, 7x8 fontes <sup>13</sup> independentes. Mesmo considerando que no “mundo real” pode haver de 1 a 56 fontes de aleatoriedade, acreditamos fortemente que considerar apenas 1 fonte é uma maneira extremamente conservadora na captação de dependência entre perdas (Frachot et al., 2004).

A soma dos VaRs <sup>14</sup> é normalmente feito. (Embrechts & Puccetti, 2006). [...] um banco pode efetivamente reduzir sua carga de CR tendo em conta a estrutura de dependência que existe entre as unidades de risco (Giacometti, 2008).

É compreensível que o Basileia II tenha sugerido em 2004 o uso do método do somatório, pois as instituições financeiras tinham poucos dados referentes a RO<sup>15</sup> e, então, deveriam ser extremamente cautelosos. Com o passar dos anos, as instituições financeiras acumularam e atualizaram seus dados e também podem obter informações e dados de outras instituições financeiras (terceiro pilar do Basileia II <sup>16</sup>). Com isso, a segurança de se utilizar modelos que captam a “real” correlação <sup>17</sup> se torna cada dia mais sólida. O Comitê reconhecendo essa verdade no diz em [Basel Committee on Banking Supervision \(2003\)](#) que:

---

<sup>13</sup>Classificação de nível 1 dada no Basileia II para o par linha de negócio/tipo de risco.

<sup>14</sup>No nosso trabalho, por considerarmos a segunda visão supracitada, essa soma é análoga ao método do somatório que estamos considerando na Equação 1.3.

<sup>15</sup>Pela recente mensuração e também pelas observações serem feitas durante 1 ano, e não num período de tempo mais curto.

<sup>16</sup>Os três pilares são: I - Capital (guardar) (o principal pilar motivador do nosso trabalho); II - Supervisão (fiscalizar) e III - Transparência e Disciplina de Mercado (divulgação de dados).

<sup>17</sup>Vemos no Capítulo 2 o termo “correlação” sob um ponto de vista muito mais geral, não nos restringindo apenas à medidas de correlação, mas sim de “dependência” que é bem mais abrangente.

*“Risk measures for different operational risk estimates must be added for purposes of calculating the regulatory minimum capital requirement. However, the bank may be permitted to use internally determined correlations in operational risk losses across individual operational risk estimates, provided it can demonstrate to a high degree of confidence and to the satisfaction of the national supervisor that its systems for determining correlations are sound, implemented with integrity, and take into account the uncertainty surrounding any such correlation estimates (particularly in periods of stress). The bank must validate its correlation assumptions.”*

ou seja, as instituições financeiras devem ser capazes de convencer os seus reguladores que seus modelos de captação de correlação são sólidos, aplicados com integridade e levam em conta a incerteza em quaisquer dessas estimativas de correlação (principalmente em períodos de stress). Então, sob esse ponto de vista, é dado pelo Comitê a liberdade para que as instituições financeiras invistam na criação e estudo de modelos internos que captem a dependência entre as unidades de risco e retornem um CR total mais próximo da realidade do que o método do somatório.

## 1.7 Motivação e contribuição

Todos esses argumentos discutidos nessa última parte na seção anterior são a forte motivação do nosso trabalho. Ainda mais além, tudo o que vimos até agora nesse capítulo introdutório também motiva nosso trabalho: tanto os fatos históricos que motivaram vários estudos antes desse sobre o RO, como as recomendações do Acordo de Basileia II, a flexibilidade que Basileia II dá aos modelos internos da instituição financeira, o ponto de vista de vários autores sobre o assunto e também por ser um assunto recente e em voga no Brasil<sup>18</sup> e também no âmbito internacional.

Também somos motivados pela necessidade de modelagem estatística da dependência existente no problema (um forte argumento dessa existência é, além do empírico, o fato de que todas as unidades de risco pertencerem à mesma instituição – dependência intrínseca). Porém, vimos que é extremamente conservador supor que essa dependência é a perfeita e, por superestimar o CR total, essa é a maior motivação no nosso trabalho. Também há de se dizer que a literatura sobre o assunto sempre incentiva o estudo e aperfeiçoamento dos modelos estatísticos em RO e em alocação de capital e dão uma forte estrutura para trabalhos atuais.

---

<sup>18</sup>Vide a agenda do RO no Brasil dada pelo BACEN, discutida anteriormente na Seção 1.4.

É importante ressaltar que o nosso trabalho se torna possível devido ao uso de uma ferramenta muito importante na captação e modelagem da dependência e também muito bem estruturada por sua vasta, forte e abrangente teoria, que são as Funções de Cópulas. Teoria de Cópulas é frequentemente utilizada por diversos autores na área financeira e na área de RO. Fora das finanças, essa teoria é muito usada por causa da grande demanda de problemas com presença de dependência (em muitíssimos problemas se supõe forçadamente uma independência e isso, muitas vezes, tornam as soluções menos reais). Como no nosso problema estamos interessados em visualizar o comportamento das perdas das unidades de risco conjuntamente (pois uma influencia a outra – presença de dependência) se faz necessário o uso de teoria de cópulas.

Formalizando aqui, esse trabalho tem a contribuição de agregar à literatura sobre o assunto, uma proposta de uma nova metodologia de agregação de risco operacional, i.e., de uma nova metodologia para determinar o CR total para o ano seguinte baseado em captação e modelagem de dependência via cópulas (mais precisamente, usaremos a cópula Gaussiana, mas veremos que a escolha da cópulas poderá variar livremente na nossa modelagem do CR total). Essa modelagem se dá através de probabilidades de eventos conjuntos de perda determinadas a partir da função de distribuição conjunta construída através de simulações e do teorema de Sklar (o veremos no Capítulo 2).

Nesse trabalho consideramos duas unidades de risco, ou seja, estamos considerando o caso bivariado, mas abordamos uma alternativa multivariada para o nosso método proposto (e veremos que a extensão da nossa sugestão para o caso multivariado não é trivial como as extensões para os métodos do somatório e da convolução). Considerar o caso bivariado é como se estivéssemos supondo a instituição financeira com apenas duas unidades de risco. Ainda como contribuição, discutimos um método que também é alternativo ao método do somatório, o denominado “Método da Convolução”, também sob o ponto de vista bivariado. De fato, mais adiante veremos que, uma instituição financeira tem muito mais que somente duas unidades de risco. O Comitê sugere, chamando esta sugestão de “nível 1”, 56 unidades de risco. No entanto, as instituições são livres para classificar de acordo com sua necessidade. Como já dissemos, tratamos o caso bivariado mas é evidente a necessidade de discutir a natureza multivariada do problema. O método da convolução, como veremos, também é de fácil extensão, mas parece que quanto mais unidades considerarmos em uma única modelagem, mais informação “marginal” nós perdemos. Face a este problema, como já dissemos, discutimos uma alternativa multivariada – fazendo estudos de simulação – do método proposto nesta dissertação. Para trabalhos futuros, a necessidade de extensão é visível.

## Capítulo 2

# Cópuas e dependência estocástica

Nesse capítulo abordamos os principais pontos de dependência estocástica e cópuas voltados para o nosso trabalho. Para ver com mais detalhes essas teorias, veja os trabalhos [Joe \(1997\)](#) e [Nelsen \(2006\)](#).

### 2.1 A importância da teoria de cópuas para problemas com presença de dependência

Recentemente, cópuas têm tido uma grande atenção em problemas financeiros. Para reafirmar isso, [Giacometti \(2008\)](#) diz que cópuas estão ganhando popularidade em medir a dependência em risco financeiro. Há diversos autores que as utilizam na área de riscos, para citar alguns, [Böcker & Klüppelberg \(2008\)](#), [Chavez-Demoulin et al. \(2006\)](#), [Embrechts & Puccetti \(2006\)](#), [Giacometti \(2008\)](#), entre diversos outros.

Em finanças, grupos de acontecimentos parecem sempre estar ligados de alguma forma: índices de bolsa de valores, economias de países, entre outros. Se afunilarmos o campo de visão e enxergarmos as relações intra-instituição também vemos diversos níveis de certas dependências entre grupos de acontecimentos, pelo fato de terem, por si só, relações intrínsecas. Se focarmos o olhar no âmbito de RO, por se tratar da mesma instituição e da mesma classe de risco, os acontecimentos parecem ser ainda mais interligados.

Com a insatisfação com soluções que são dadas por modelos que não consideram dependência, se faz necessário o uso de teorias que abordam dependência a fim de captá-la e usar essa captação para dar uma melhor solução. A teoria mais difundida e completa para tal é a de cópuas. Essa teoria não é tão recente quanto a preocupação de captar dependência em riscos, aliás, na história da estatística, a teoria pode ser considerada antiga.

Para ter uma ideia, o conceito de cópula aparecem nos trabalhos [Fréchet \(1951\)](#), [Dall’Aglio \(1956\)](#), [Féron \(1956\)](#), entre outros, mas um dos pioneiros em cópulas foi Höfding com seu trabalho matemático de 1941 ([Höfding, 1941](#)). Porém, o termo “cópula” e sua forte ligação com a estatística veio por meio de [Sklar \(1959\)](#) que é considerado um dos mais importantes trabalhos na teoria pois faz o link entre a teoria matemática de cópulas com as distribuições de probabilidade. Sklar, nesse trabalho, definiu cópula e mostrou que ela liga distribuição conjunta com suas marginais com distribuição de probabilidade uniforme no intervalo  $(0,1)$  (como veremos mais adiante no teorema de Sklar).

É importante dizer alguns fatores que tornaram o uso de cópulas cada vez mais crescente em diversas áreas. Em primeiro lugar, os trabalhos de [Joe \(1997\)](#) e de [Nelsen \(2006\)](#) (em que sua versão mais antiga é de 1999) introduziram o conceito de cópulas para modelagem padrão. Antes disso, eram poucos os modelos multivariados que captavam dependência fugindo da habitual normalidade multivariada, ou seja, antes dos trabalhos de Joe e Nelsen, grande parte das modelagens com captação da dependência se dava apenas pela distribuição normal multivariada, que é limitada pois capta apenas dependência linear (e simétrica) por meio da correlação linear ([Embrechts et al. \(2002\)](#) nos mostram que há diversos problemas à suposição de normalidade). Um outro fator muito importante é o aparato tecnológico e seu avanço exponencial. Isso possibilitou, e muito, a análise e implementação de modelos com uso de cópulas e também possibilitou a visualização dos resultados, o que é indispensável em qualquer trabalho que aplique cópulas nos dias de hoje (muitos softwares estatísticos já têm inclusos pacotes com implementações de cópulas).

## 2.2 Tipos, estruturas e medidas de dependência

Discutimos aqui tipos, estruturas e medidas de dependência supondo o caso bivariado e contínuo, ou seja, considerando apenas duas v.a.’s  $X$  e  $Y$  contínuas (representando as POA’s discutidas no Capítulo 1).

O conceito de dependência é muito mais abrangente do que o de independência e também do que dependência perfeita. É claro que se as v.a.’s em questão têm dependência considerada baixa, muitas vezes é compensador utilizar a suposição de independência; porém, se a dependência é evidente, para uma melhor solução de um problema, deve-se modelá-la. Por outro lado, à grosso modo,  $X$  e  $Y$  têm dependência total quando o conhecimento de uma das v.a.’s determina o conhecimento da outra. Então temos três extremos:

- dependência total negativa;

- independência;
- dependência total positiva.

Entre esses extremos existem infinitas estruturas de dependência para  $X$  e  $Y$ . Deve-se notar que estrutura e tipo de dependência são coisas distintas. Podemos ter, por exemplo, estruturas exponencial ou linear entre  $X$  e  $Y$  e ambas descrevendo algum tipo dependência positiva. “Tipos de dependência” é muitas vezes referenciado na literatura de língua inglesa como “dependence properties”. Existem tipos de dependência positiva e negativa.

**Definição 2.1** (Dependência positiva e negativa). *De uma maneira geral,  $X$  e  $Y$  têm dependência positiva (negativa) se a estrutura de dependência estiver entre os extremos “dependência total negativa” e “independência” (“independência” e “dependência total positiva”).*

*Em termos probabilísticos,  $X$  e  $Y$  têm dependência positiva se é mais provável observar o par  $(X, Y)$  grande-grande ou pequeno-pequeno do que grande-pequeno ou pequeno-grande.*

Apresentamos na sequência alguns tipos de dependência. Alguns trabalhos mais detalhados sobre o assunto são: [Viola \(2009\)](#), [Barlow & Proschan \(1975\)](#), [Marshall & Olkin \(1988\)](#), [Kimeldorf & Sampson \(1989\)](#), [Block et al. \(1982\)](#) e [Lehmann \(1966\)](#).

## Tipos de dependência

**Definição 2.2** (Dependência no quadrante positivo). *Seja  $H$  seja a função de distribuição conjunta das variáveis  $X$  e  $Y$  (usamos essa notação durante toda a nossa dissertação). Dizemos que  $X$  e  $Y$  são dependentes no quadrante positivo (ou que  $H$  possui dependência no quadrante positivo) se*

- $P(X > x, Y > y) \geq P(X > x)P(Y > y)$  ou
- $P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y), \forall (x, y) \in \text{Dom}(H)$ .

*Note que no nosso caso, ou seja,  $X$  e  $Y$  POAs, temos que  $\text{Dom}(H) = \mathbb{R}_+^2$ .*

$X$  e  $Y$  com esse tipo de dependência implica que é mais provável que  $X$  e  $Y$  assumam valores grandes (ou pequenos) conjuntamente do que separadamente. Sendo assim, descreve um tipo de dependência positiva.

**Definição 2.3** (Dependência no quadrante negativo). *Dizemos que  $X$  e  $Y$  são dependentes no quadrante negativo (ou que  $H$  possui dependência no quadrante negativo) se*

- $P(X > x, Y > y) \leq P(X > x)P(Y > y)$  ou

$$ii) P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y), \forall (x, y) \in \text{Dom}(H).$$

$X$  e  $Y$  com esse tipo de dependência implica que é mais provável que  $X$  e  $Y$  assumam valores grandes (ou pequenos) separadamente do que conjuntamente descrevendo um tipo de dependência negativa.

**Definição 2.4** (Estocasticamente crescente e decrescente). *Dizemos que  $Y$  é estocasticamente crescente (decrescente) em  $X$  se*

$$P(Y > y|X = x) \text{ é uma função não-decrescente (não-crescente) em } x, \text{ para todo } y.$$

$Y$  ser estocasticamente crescente (decrescente) em  $X$  descreve um tipo de dependência positiva (negativa).

Para completarmos esse quadro de tipos de dependência, definimos o que queremos dizer quando uma v.a. é crescente (ou decrescente) à cauda de uma outra v.a.:

**Definição 2.5** (Crescência ou decrescência às caudas).

*i)  $Y$  é crescente na cauda à direita em  $X$  se  $P(Y > y|X > x)$  é função não-decrescente em  $x$ , para todo  $y$ .*

*ii)  $Y$  é crescente na cauda à esquerda em  $X$  se  $P(Y \leq y|X \leq x)$  é função não-decrescente em  $x$ , para todo  $y$ .*

*iii)  $Y$  é decrescente na cauda à direita em  $X$  se  $P(Y > y|X > x)$  é função não-crescente em  $x$ , para todo  $y$ .*

*iv)  $Y$  é decrescente na cauda à esquerda em  $X$  se  $P(Y \leq y|X \leq x)$  é função não-crescente em  $x$ , para todo  $y$ .*

Note que as definições 2.5i) e 2.5ii) são tipos de dependência positiva, pois é mais provável que  $Y$  assumam valores grandes (respectivamente, pequenos) quando  $x$  aumentar (respectivamente, diminuir) (mais provável observar grande-grande ou pequeno-pequeno). Contrariamente, as definições 2.5iii) e 2.5iv) descrevem tipos de dependência negativa.

Para finalizar essa seção, enunciamos um teorema que é importante quando discutirmos teoria de cópulas e os limites de Fréchet.

**Teorema 2.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$ , cada uma, distribuídas uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ , ou seja,  $X, Y \sim U(0, 1)$ . Então:*

*i)  $Y = X \Leftrightarrow X$  e  $Y$  têm dependência perfeita positiva e*

*ii)  $Y = 1 - X \Leftrightarrow X$  e  $Y$  têm dependência perfeita negativa.*

## Medidas de dependência

Apresentamos brevemente aqui 4 medidas de dependência:  $\rho$  de Pearson,  $\tau$  de Kendall,  $\rho$  de Spearman e os coeficientes de dependência caudal. Essas medidas nos dão uma ideia do quão dependentes são  $X$  e  $Y$ . As notações de funções de distribuição continuam as mesmas e também continua a suposição de que  $X$  e  $Y$  são as v.a.'s do problema e que são contínuas.

**Definição 2.6** ( $\rho$  de Pearson). *Também denominada correlação linear entre  $X$  e  $Y$ , é definido como:*

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}},$$

em que  $\text{Cov}(X,Y)$ ,  $\text{Var}(X)$  e  $\text{Var}(Y)$  são, respectivamente, covariância e variâncias de  $X$  e  $Y$ .

**Definição 2.7** ( $\tau$  de Kendall). *Seja  $(X',Y')$  um vetor aleatório independente e identicamente distribuído com  $(X,Y)$ . O  $\tau$  de Kendall para  $X$  e  $Y$  é definido como:*

$$\tau_{X,Y} = P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0].$$

**Definição 2.8** ( $\rho$  de Spearman). *Seja  $(X',Y')$  como na definição 2.7 e seja  $(X'',Y'')$  um vetor aleatório independente e identicamente distribuído com  $(X,Y)$  e com  $(X',Y')$ . O  $\rho$  de Spearman é definido como:*

$$\rho_{S_{X,Y}} = 3\{Pr[(X - X')(Y - Y'') > 0] - Pr[(X - X')(Y - Y'') < 0]\}.$$

### Propriedade 2.1.

- i)  $\rho_{X,Y}$ , em geral, não é invariante a transformações monótonas. Já  $\tau_{X,Y}$  e  $\rho_{S_{X,Y}}$  são.
- ii) Se  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $\rho_{X,Y} = \tau_{X,Y} = \rho_{S_{X,Y}} = 0$  (as recíprocas não são verdadeiras);
- iii) Se  $\rho_{X,Y} = -1$ , então  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeita negativa e mais:  $Y = aX + b$ ,  $a < 0$ .  
Se  $\rho_{X,Y} = 1$ , então  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeita positiva e mais:  $Y = aX + b$ ,  $a > 0$ ;
- iv)  $\tau_{X,Y} = 1$  ou  $\rho_{S_{X,Y}} = 1$  ( $\tau_{X,Y} = -1$  ou  $\rho_{S_{X,Y}} = -1$ ) se, e somente se,  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeitamente positiva (negativa);
- v)  $\rho_{X,Y} = \rho_{S_{F(X),G(Y)}}$ .

A demonstração de algumas dessas propriedades (bem como outras propriedades sobre tais medidas) podem ser encontradas em [Nelsen \(2006\)](#), [Embrechts et al. \(2002\)](#) e em [Embrechts et al. \(2003\)](#).

Pelo fato do  $\tau$  de Kendall e o  $\rho$  de Spearman serem ambas medidas de concordância, existem algumas relações dadas nas propriedades abaixo.

**Propriedade 2.2** (Relações entre  $\tau_{X,Y}$  e  $\rho_{S_{X,Y}}$ ).

- i)  $-1 \leq 3\tau_{X,Y} - 2\rho_{S_{X,Y}} \leq 1$ ;
- ii)  $\frac{1+\rho_{S_{X,Y}}}{2} \geq \left(\frac{1+\tau_{X,Y}}{2}\right)^2$ ;
- iii)  $\frac{1-\rho_{S_{X,Y}}}{2} \geq \left(\frac{1-\tau_{X,Y}}{2}\right)^2$ ;
- iv)  $\frac{3\tau_{X,Y}-1}{2} \leq \rho_{S_{X,Y}} \leq \frac{1+2\tau_{X,Y}-\tau_{X,Y}^2}{2}, \tau_{X,Y} \geq 0$ ;
- v)  $\frac{\tau_{X,Y}^2+2\tau_{X,Y}-1}{2} \leq \rho_{S_{X,Y}} \leq \frac{1+3\tau_{X,Y}}{2}, \tau_{X,Y} \leq 0$ .

As demonstrações podem ser vistas em [Nelsen \(2006\)](#). Todos os itens da Propriedade 2.2 dão limitantes para  $\tau_{X,Y}$  e  $\rho_{S_{X,Y}}$  e sendo assim, nos retornam a região vista na Figura 2.1.

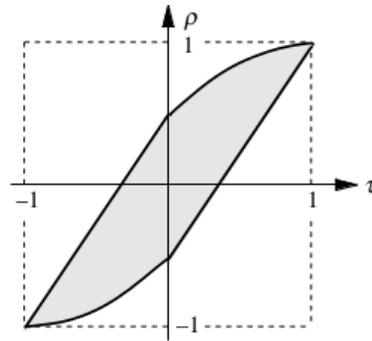


Figura 2.1: Limitantes para  $\rho_{S_{X,Y}}$  e  $\tau_{X,Y}$ .

**Definição 2.9** (Coeficientes de dependência caudal). *Os coeficientes de dependência caudal superior e inferior são, respectivamente:*

- i)  $\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} P(Y > G^{-1}(t) | X > F^{-1}(t))$ ;
- ii)  $\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P(Y < G^{-1}(t) | X < F^{-1}(t))$ .

Discutido algumas medidas de dependência, devemos salientar que, para se observar, de fato, a estrutura de dependência que há entre  $X$  e  $Y$ , deve-se uniformizar as variáveis. Vejamos o porquê no exemplo abaixo:

**Exemplo 2.1.** *Suponha  $X \sim \text{Gamma}(1,2)$  e  $Y \sim \text{Weibull}(1,1)$ . Simulamos 1000 observações de ambas distribuições de forma independente. A dispersão é representada na Figura 2.2.*



Figura 2.2: Gráfico de dispersão de  $X$  e  $Y$  não uniformizadas.

Observando o gráfico da Figura 2.2, pode-se concluir erroneamente que  $X$  e  $Y$  parecem assumir valores ‘pequenos’ conjuntamente. Senão, é difícil dizer se  $X$  e  $Y$  seguem algum tipo de dependência e, se seguem, qual é a estrutura. Então, devemos uniformizar  $X$  e  $Y$  através de suas respectivas funções de distribuição conforme o teorema abaixo.

**Teorema 2.2.** *Se  $X$  e  $Y$  são duas v.a.s contínuas com distribuições quaisquer, então  $U = F(X)$  e  $V = G(Y)$  são distribuídas uniformemente, cada uma, no intervalo unitário  $[0,1]$  ( $F$  e  $G$  continuam denotando as funções de distribuição de  $X$  e  $Y$  respectivamente).*

Dessa maneira, o  $\rho_{S_{X,Y}}$  se torna uma medida interessante, pois mede correlação linear entre as funções de distribuição de  $X$  e  $Y$ . Uniformizando as v.a.’s através de suas funções de distribuição, obtemos gráfico visto na Figura 2.3

Observando o gráfico na Figura 2.3, percebemos que não há nenhum tipo e nem estrutura de dependência aparente. Uniformizar as variáveis é um fato importante e que sempre deve ser feito quando se quer estudar a dependência entre tais v.a.’s, graficamente. Podemos adiantar aqui que em teoria de cópulas, as v.a.’s são sempre distribuídas uniformemente em  $(0,1)$ . Mais precisamente, veremos que uma cópula é uma função definida em  $[0,1] \times [0,1]$ .

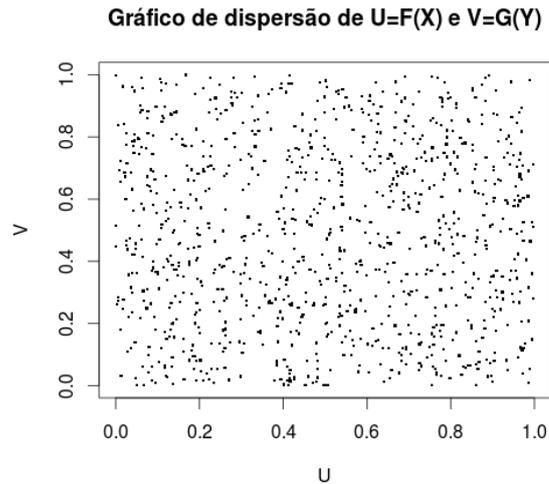


Figura 2.3: Gráfico de dispersão de  $X$  e  $Y$  uniformizadas.

## Estruturas de dependência

Como dissemos, há uma infinidade de estruturas de dependência entre duas v.a.'s  $X$  e  $Y$ . Discutimos também que a ferramenta gráfica é uma boa opção para visualizar tal estrutura presente nas v.a.'s e também que tais v.a.'s devem ser uniformizadas. Sendo assim, apresentamos alguns gráficos, através da Figura 2.4, cada um com uma estrutura diferente (variando entre os tipos apresentados) entre  $U = F(X)$  e  $V = G(Y)$ .

## 2.3 Cópulas

Informalmente, uma cópula bidimensional é uma função que acopla (junta)<sup>1</sup> duas distribuições em uma conjunta. Sabemos que se  $X$  e  $Y$  são independentes, então temos que  $H(x, y) = F(x)G(y)$ . A questão é, e quando não há independência? As funções de cópulas vão fazer esse papel de captar a dependência e refleti-la sobre a função de distribuição conjunta.

**Definição 2.10** (Cópulas Bidimensionais). *Uma função  $C$  de  $I^2$  em  $I$  ( $I = [0, 1] \in \mathbb{R}$  e  $I^2 = I \times I$ ) é uma cópula bidimensional quando satisfizer:*

1. Para todo  $(u, v) \in I^2$ , vale

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \text{ (função aplanada)}$$

---

<sup>1</sup>Dai o nome, cópula, que quer dizer união, ligação.

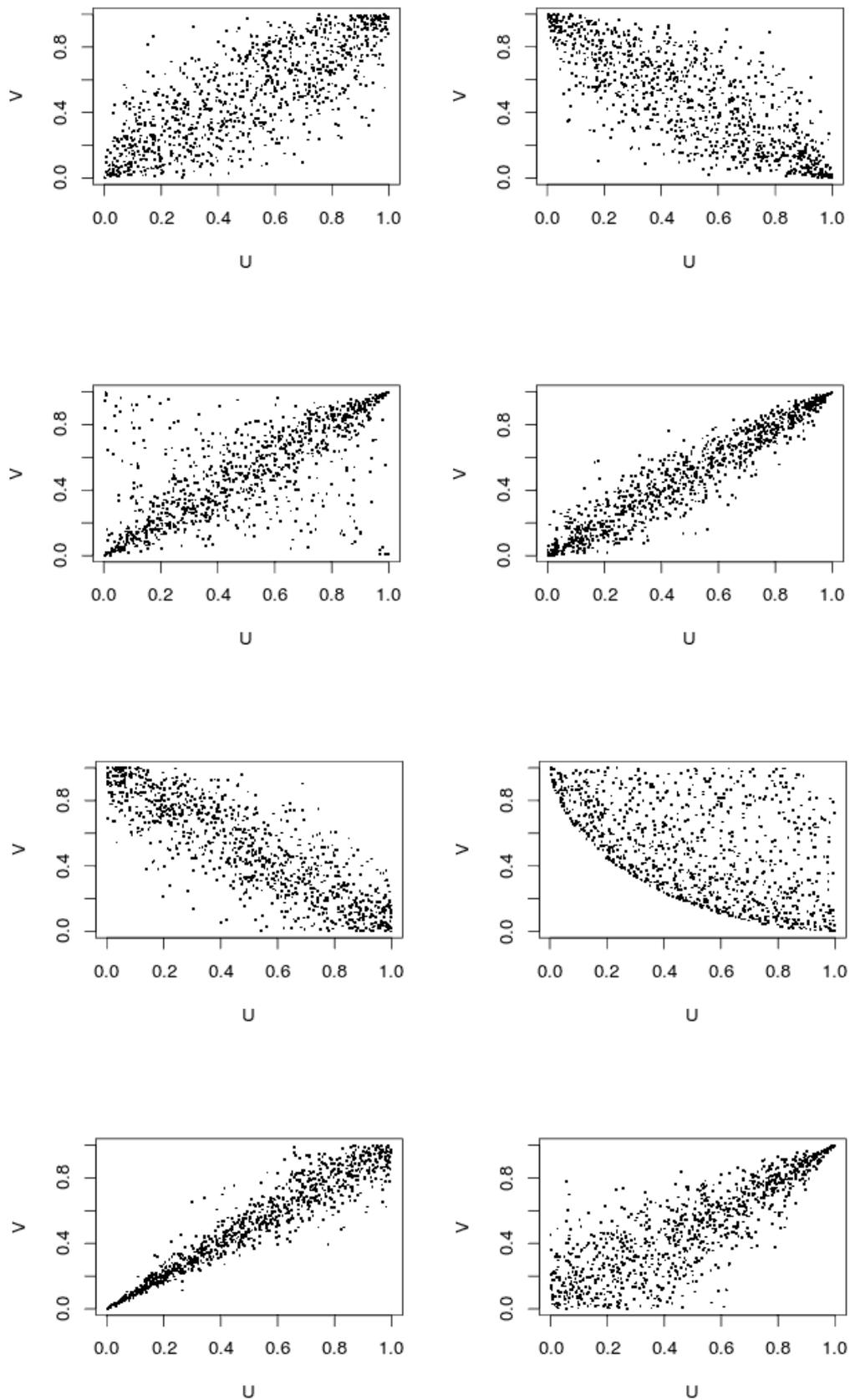


Figura 2.4: Gráficos de dispersão com diferentes estruturas de dependência.

e

$$C(u, 1) = u; C(1, v) = v \text{ (função marginalmente uniforme) .}$$

2. Para todo  $u_1 \leq u_2$  e  $v_1 \leq v_2$  em  $I$ , vale

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0. \text{ (função bicrescente) .}$$

Note que se  $X$  e  $Y$  são v.a.'s, então, como dissemos  $F(X)$  e  $G(Y)$  são uniformes no intervalo unitário. Há uma definição alternativa de cópula bivariada, como segue.

**Definição 2.11** (Definição alternativa de cópulas). *Uma cópula  $C$  é uma função de distribuição cuja marginais, digamos  $U$  e  $V$ , são ambas uniformes em  $I$ , ou seja,  $C(u, v)$  é função de distribuição bivariada para  $(u, v) \in I^2$ .*

Estendendo a Definição 2.11 para o caso multivariado, uma cópula multivariada é uma função de distribuição definida em  $I^n$  cujas marginais univariadas são uniformes em  $I$ . Embrechts et al. (2003) afirmam que essa definição é a padrão “operacional” de cópulas e ainda que é muito natural. O problema é que essa definição mascara alguns problemas que se enfrentam na construção de cópulas utilizando alguns métodos.

Sendo assim, a escolha da cópula para melhor captar dependência existente entre  $U$  e  $V$  (ou entre  $F(X)$  e  $G(Y)$  e conseqüentemente entre  $X$  e  $Y$ ) se baseia no ajuste de uma função de distribuição bivariada para  $U$  e  $V$ . O que se faz na prática, é estudar a dependência (tipos, estruturas, medidas) entre as v.a.'s uniformizadas e então buscar uma função de distribuição bivariada com a característica de dependência que foi estudada. Em suma, essa tarefa é o estudo de ajuste de distribuições multivariadas (mas se restringindo ao caso bivariado com marginais uniformes(0,1)). No entanto, o ajuste de cópula tem suas peculiaridades importantes para cada problema em questão.

Foi Sklar no seu trabalho Sklar (1959) que fez a mais importante ligação entre cópulas e distribuições de probabilidade. Sklar, observando as definições de cópula, viu que uma cópula  $C$  leva um par  $(u, v) \in I^2$  no intervalo unitário  $I$  e relacionou o par  $(u, v)$  com o par de v.a.'s uniformizadas  $(F(x), G(y))$ . Ou seja, o link feito por Sklar foi a visão de que uma cópula  $C$  leva o par  $(F(x), G(y)) \in I^2$  para  $H(x, y) \in I$ . Essa visão é dada pelo teorema abaixo:

**Teorema 2.3** (Sklar). *Seja  $H$  função de distribuição conjunta com marginais  $F$  e  $G$  das v.a.'s  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Então existe uma cópula  $C$  tal que, para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ,*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

*Se  $F$  e  $G$  são contínuas,  $C$  é única. Senão,  $C$  é unicamente determinada em  $ImF \times ImG$ .*

**Observação 2.1.**

- i) A demonstração do teorema pode ser vista em [Nelsen \(2006\)](#).
- ii) No nosso problema,  $F$  e  $G$  são contínuas, então uma para uma função de distribuição com marginais  $F$  e  $G$ , existe uma única cópula  $C$  que  $H(x, y) = C(F(x), G(y)), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- iii) Mas o que queremos é determinar a função de distribuição conjunta  $H$ . O que a instituição financeira tem são os ajustes de  $F$  e  $G$ , então usando uma cópula qualquer  $C$ , pelo teorema de Sklar teremos a conjunta  $H$  com marginais  $F$  e  $G$ .
- iv) A propriedade acima ainda nos diz que existem infinitas funções de distribuição conjunta  $H$  com marginais  $F$  e  $G$  pelo fato de haver uma infinidade de cópulas.
- v) Como dissemos, a escolha da cópula  $C$  deve ser feita com base na dependência existente entre  $U = F(X)$  e  $V = G(Y)$ .

O teorema de Sklar é o que permite a modelagem da dependência entre  $X$  e  $Y$  através de cópulas. Ele ainda permite construir cópulas partindo de uma função de distribuição conjunta e de duas marginais univariadas. Tal construção é dada no corolário abaixo.

**Corolário 2.1.** *Seja  $H$ ,  $F$ ,  $G$  e  $C$  como no Teorema 2.3 e sejam  $F^{(-1)}$  e  $G^{(-1)}$  as quasi-inversas<sup>2</sup> de  $F$  e  $G$ , respectivamente. Então, para qualquer  $(u, v) \in I$  temos que*

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)).$$

*Quando  $F$  e  $G$  são contínuas, o resultado acima fornece um método de construção de cópulas.*

A demonstração pode ser vista em [Nelsen \(2006\)](#).

Em termos de densidades temos:

**Corolário 2.2.** *Seja  $H$ ,  $F$ ,  $G$  e  $C$  como no teorema 2.3. Então para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,*

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y)$$

*em que  $h$  é a função de densidade conjunta de  $X$  e  $Y$ ,  $f$  e  $g$  as respectivas funções de densidade marginais univariadas e  $c$  é a densidade de cópula dada por*

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

---

<sup>2</sup>A definição de *quasi-inversa* é  $F^{(-1)}(t) = \inf\{x|F(x) \geq t\} = \sup\{x|F(x) \leq t\}$

Como já dissemos, existem infinitas cópulas bivariadas. Alguns exemplos são:

**Exemplo 2.2.** *Suponha  $(u, v) \in I^2$ :*

$$i) C(u, v) = uv;$$

$$ii) C(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\};$$

$$iii) C(u, v) = \min\{u, v\};$$

$$iv) C(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv};$$

$$v) C(u, v) = [\max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\}]^{-1/\theta}, \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\};$$

$$vi) C(u, v) = \exp\left(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\right), \theta \in [1, \infty);$$

$$vii) C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right), \theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}.$$

A cópula em *i*) é a denominada cópula produto (ou também cópula de independência), e a denotamos por  $C^\perp$ . Com ela podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 2.4.** *Seja  $X$  e  $Y$  como vimos abordando até agora com suas respectivas funções de distribuição. Então  $X$  e  $Y$  são independentes se, e somente se,*

$$H(x, y) = C^\perp(F(x), G(y)), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Em *i*) até *iv*), as cópulas são não-paramétricas pois só dependem, funcionalmente, de  $u$  e  $v$ . Já as cópulas em *v*), *vi*) e *vii*) são cópulas paramétricas e para qualquer  $\theta$  no seu respectivo espaço paramétrico, temos uma cópula diferente. Essas são as famílias, respectivamente, de Clayton, Gumbel e Frank. O parâmetro  $\theta$  é de dependência e o variando, a respectiva cópula capta de uma forma diferente estrutura de dependência. Existem ainda cópulas com mais de um parâmetro.

As cópulas em *ii*) e *iii*) são denominadas, respectivamente, limite inferior de Fréchet e limite superior de Fréchet e são denotadas por  $C^-$  e  $C^+$ , respectivamente.

### 2.3.1 Limites de Fréchet

Por definição, toda cópula é limitada por 0 e 1, mas dependendo de  $u$  e  $v$  podemos estreitar os limites de  $C$ .

**Definição 2.12.** *Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas cópulas distintas. Então  $C_1$  é menor do que  $C_2$ , e denotamos por  $C_1 \prec C_2$  se, e somente se,  $C_1(u, v) \leq C_2(u, v), \forall (u, v) \in I^2$ .*

**Teorema 2.5** (Limites de Fréchet). *Sejam  $C^-$  e  $C^+$  como no Exemplo 2.2ii) e 2.2iii). Seja também  $C$  uma cópula qualquer. Então,*

$$C^- \prec C \prec C^+,$$

isto é,

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v), \forall (u, v) \in I^2.$$

A demonstração pode ser vista em [Nelsen \(2006\)](#).

**Corolário 2.3.** *A versão do teorema acima para funções de distribuição é o que segue.*

$$\max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq H(x, y) \leq \min(F(x), G(y)), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Teorema 2.6.**

*Sejam  $X$  e  $Y$  v.a.'s com cópula  $C^-$ , ou seja,  $H(x, y) = C^-(F(x)G(y))$ . Então, existem duas funções monótonas  $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e existe uma v.a.  $Z$  tal que*

$$(X, Y) =_d (\alpha(Z), \beta(Z)),$$

*com  $\alpha$  monótona crescente e  $\beta$  monótona decrescente. A notação “ $=_d$ ” se refere à igualdade em distribuição.*

*O caso usando  $C^+$  é análogo mudando o fato de  $\alpha$  e  $\beta$  serem ambas monótonas crescente.*

A demonstração desse teorema pode ser vista em [Embrechts et al. \(2002\)](#).

**Definição 2.13.**  *$X$  e  $Y$  são ditas anti-monotônicas se têm cópula  $C^+$  e são ditas comonotônicas se têm cópula  $C^-$ .*

**Corolário 2.4.**  *$X$  e  $Y$  têm dependência perfeita positiva (negativa)  $\iff X$  e  $Y$  são v.a.'s com cópula  $C^+$  ( $C^-$ ).*

Sendo assim, no nosso problema, usar o método do somatório implica em considerar que as unidades de risco são comonotônicas, i.e., têm cópula  $C^+$ . Se considerarmos as 56 unidades de risco<sup>3</sup> propostos por Basileia II, então utilizar tal método implica que é imposto que exista 56 funções monótonas crescentes, digamos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{56}$  e uma única v.a.  $Z$  tal que as respectivas perdas operacionais agregadas, digamos  $X_1, X_2, \dots, X_{56}$ , são tal que  $X_1 = \alpha_1(Z), X_2 = \alpha_2(Z), \dots, X_{56} = \alpha_{56}(Z)$ .

Note ainda que se  $X$  e  $Y$  têm cópula  $C^-$ , então tais v.a.'s uniformizadas, digamos respectivamente  $U$  e  $V$ , são tal que  $U = 1 - V$  (pelo Teorema 2.1). Analogamente se  $X$  e  $Y$  têm cópula  $C^+$ , então  $U = V$ . Veja a Figura 2.5 para visualizar como são, respectivamente,  $C^-$  e  $C^+$  como função de distribuição bivariada de  $U$  e  $V$ .

<sup>3</sup>A extensão de  $C^+$  para o caso multivariado é simplesmente  $C^+(u_1, u_2, \dots, u_n) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

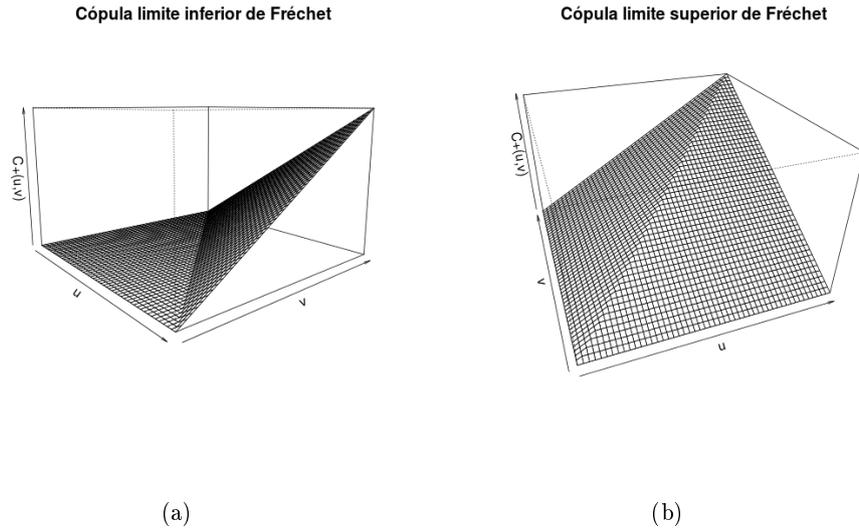


Figura 2.5: Cópulas limites de Fréchet (a) inferior e (b) superior.

### 2.3.2 Cópula Gaussiana

Há duas grandes famílias (ou classes) de cópulas:

- Cópulas elípticas;
- Cópulas Arquimedianas.

O principal objetivo nesse trabalho é, a partir de um banco de dados, retornar um capital regulatório de acordo com um modelo utilizando cópulas. Então, a cópula a ser utilizada no nosso modelo, como veremos no Capítulo 4, é geral, podendo ser qualquer uma de acordo com as hipóteses. Com isso, nessa seção, discutimos sobre a família elíptica (pois simulamos os dados através da cópula Gaussiana) fazendo algumas notas sobre a família Arquimediana.

Cópulas elípticas são as que tem distribuição elíptica. As distribuições elípticas mais usadas comumente são as distribuições multivariadas normal e a t-Student. A cópula Gaussiana é uniparamétrica e o parâmetro é o coeficiente de correlação linear ( $\rho$  de Pearson). Cabe dizer que a cópula Gaussiana tem a propriedade de captar estruturas de dependência lineares e simétricas, como na Figura 2.6.

A construção das cópulas Elípticas e conseqüentemente da cópula Gaussiana se dá pelo corolário do teorema de Sklar (Corolário 2.1). Ou seja, a família elíptica corresponde a uma distribuição elíptica bivariada no teorema de Sklar, como é visto na Definição 2.14.

**Definição 2.14** (Cópula elíptica). *Seja  $H$  uma função de distribuição elíptica bivariada com*

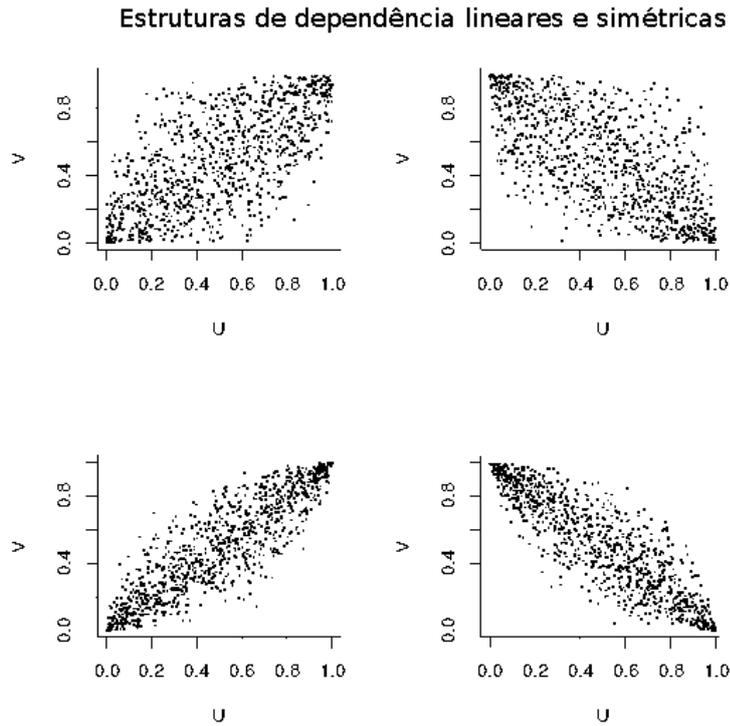


Figura 2.6: Estruturas de dependência captadas pela cópula Gaussiana de forma coerente.

marginais  $F$  e  $G$ . Então,  $C$  é uma cópula elíptica quando

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)), \forall (u, v) \in I^2.$$

Yan (2007) nos afirma que cópulas elípticas se tornaram muito populares em finanças e gestão de riscos devido a sua fácil implementação e conveniência na obtenção de distribuições condicionais. Frahm et al. (2003) ainda complementa que distribuições elípticas são amplamente aplicadas em estatística e econometrias, especialmente na área financeira.

**Definição 2.15** (Função de densidade da normal bivariada padrão). *Sejam  $X$  e  $Y$  v.a.'s normais padrão. Se a função de densidade de  $X$  e  $Y$ ,  $h$ , é tal que*

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} [x^2 - 2\rho xy + y^2] \right\}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

então  $h(x, y)$  é a função de densidade normal bivariada, onde  $\rho$  representa a correlação linear entre  $X$  e  $Y$ .

**Definição 2.16** (Função de distribuição normal bivariada padrão). *Sejam  $X$  e  $Y$  e  $h$  como na definição acima. Então a função de distribuição normal bivariada é  $H$ :*

$$\Phi(x, y) = H(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y h(s, t) ds dt.$$

Com essas definições, podemos definir, então, a cópula Gaussiana.

**Definição 2.17** (Cópula Gaussiana). *Seja  $\Phi$  como na definição acima. A cópula Gaussiana é dada por:*

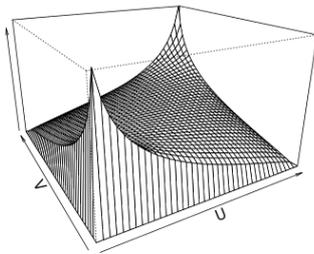
$$C_\rho(u, v) = \Phi(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \forall (u, v) \in I^2,$$

em que  $\rho$  é o parâmetro da da cópula e representa a correlação linear entre  $U$  e  $V$  e  $\Phi^{-1}$  é a inversa da função de distribuição normal padrão univariada.

**Observação 2.2.**

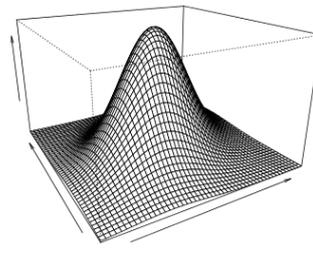
- i) Note que essa definição (e de todas as outras cópulas) independe de quais são as v.a.'s originais  $X$  e  $Y$  no problema e de quais são suas respectivas distribuições de probabilidade. A definição de cópula só necessita de uma função de distribuição conjunta com suas respectivas marginais, mas essas distribuições não são necessariamente as de  $X$  e  $Y$ .
- ii)  $C_\rho(u, v)$  é função de distribuição bivariada, mas não é a função de distribuição normal bivariada padrão em  $u$  e  $v$ . É fácil notar isso pois  $u$  e  $v$  estão em  $I$ . Para ilustrar essa observação, observe as densidades bivariadas da cópula e da normal padrão na Figura 2.7.

Densidade da cópula Gaussiana com  $\rho = 0.4$



(a)

Densidade da normal bivariada padrão com  $\rho = 0.4$



(b)

Figura 2.7: (a) Densidade da cópula gaussiana e (b) Densidade da normal bivariada padrão, ambas com  $\rho = 0.4$ .

- iii) A Figura 2.7(a) justifica a propriedade na linearidade na captação de dependência. Observe que (nesse caso a correlação é positiva) gerando pontos dessa distribuição, teremos uma massa maior de pontos em torno da reta  $U = V$  com uma concentração maior próximo de  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ .

**Propriedade 2.3** (Cópula Gaussiana).

i)  $C_{\rho=-1} \equiv C^-$ ;

ii)  $C_{\rho=1} \equiv C^+$ ;

iii)  $C_{\rho=0} \equiv C^\perp$ ;

iv)  $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow C_{\rho_1} \prec C_{\rho_2}$ ;

v) *Das propriedades anteriores podemos afirmar que:*

$$C^- \equiv C_{\rho=-1} \prec C_{-1 < \rho < 0} \prec C_{\rho=0} \equiv C^\perp \prec C_{0 < \rho < 1} \prec C_{\rho=1} \equiv C^+;$$

vi) *X e Y tem dependência perfeita positiva se, e somente se, tem cópula  $C_{\rho=1}$ ;*

vii) *X e Y tem dependência perfeita negativa se, e somente se, tem cópula  $C_{\rho=-1}$ ;*

viii) *X e Y são independentes se, e somente se, tem cópula  $C_{\rho=0}$ .*

Sendo assim, o uso de tal cópula no nosso trabalho se dá pelo fato de sua melhor interpretação de parâmetro, por conseguirmos alcançar facilmente os limites de Fréchet, por conseguirmos alcançar a independência das v.a.'s e por podermos estipular diferentes níveis de correlação entre as v.a.'s. Também é importante notar que o espaço paramétrico é limitado entre  $[0, 1]$ , o que facilita ainda mais a interpretação. É de se notar também que supor e usar a cópula Gaussiana não é impor normalidade aos dados, como ressaltado na observação 2.2i).

Como nota, definimos a cópula  $t$  que também pertence a família elíptica.

**Definição 2.18** (Cópula  $t$ ). *Uma cópula  $t$  é uma cópula elíptica dada por*

$$C_{\rho, \nu}(u, v) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp \left\{ 1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\nu(1-\rho^2)} \right\}^{-(\nu+2)/2} dx dy,$$

onde  $t_\nu^{-1}(\cdot)$  é a inversa da função de distribuição da  $t$  com  $\nu$  graus de liberdade e  $\rho$  é o coeficiente de correlação linear (os parâmetros da cópula, são, então  $\nu$  e  $\rho$ ).

Para encerrar esse capítulo, faremos uma nota sobre cópulas Arquimedianas. A vantagem das cópulas Arquimedianas é que são mais abrangentes do que as elípticas, no entanto, são mais difíceis de interpretar os parâmetros e ainda podendo não atingir os limites de Fréchet que será importante para nosso trabalho para fins de simulação. A principal diferença entre essas classes é a forma com que as cópulas são construídas. Vimos na Definição 2.14 como são construídas as cópulas elípticas. Já as Arquimedianas dependem de uma

função denominada gerador (geralmente denotado por  $\varphi$ ) e são construídas de tal modo que  $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$  desde que  $\varphi$  siga algumas condições (ver [Nelsen \(2006\)](#)) que não abordaremos aqui. Exemplos de cópulas Arquimedianas são vistas no Exemplo 2.2 em  $v)$ ,  $vi)$  e  $vii)$  que são denominadas famílias, respectivamente, de Clayton, Gumbel e Frank. Alguns comportamentos e captação de dependência podem ser vistas na Figura 2.4 nas quatro últimas subfiguras.

## 2.4 Estimação e escolha de cópulas

Nessa parte do trabalho, abordamos um assunto de interesse prático. Discutimos o ajuste de cópulas bivariadas e contínuas no que diz respeito à estimação de seus parâmetros. Então, discutimos uma forma de se escolher uma dentre algumas cópulas baseada em uma distância via cópula empírica.

### 2.4.1 Estimação de cópulas paramétricas

Nesta seção, discutimos brevemente alguns dos mais populares métodos de estimação de uma dada família de cópula paramétrica. Por exemplo, com base nos dados, podemos estimar através de um método (descrito abaixo) o parâmetro  $\rho$  da cópula Gaussiana apresentada anteriormente. Maiores detalhes na estimação de cópulas podem ser vistos em [Durrleman et al. \(2000\)](#).

Os métodos apresentados aqui são todos baseados na função de verossimilhança (considerando, claro, a dependência), mas tomam caminhos diferentes na estimação e então têm propriedades distintas. São denominados método “*maximum likelihood*” (ML), “*inference functions for margins*” (IFM) e “*canonical maximum likelihood*” (CML).

#### *Maximum likelihood* – ML

Sejam  $C$  a cópulas para  $X$  e  $Y$  (lembrando que, no nosso problema,  $X$  e  $Y$  representam as POA’s),  $F$  e  $G$  as funções de distribuição de  $X$  e  $Y$  respectivamente e  $f$  e  $g$  as funções de densidades para  $X$  e  $Y$  respectivamente. Sendo  $h$  a função de densidade conjunta para  $X$  e  $Y$ , temos:

$$h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y),$$

em que  $c$  é a densidade da cópula  $C$ , como visto anteriormente na versão do teorema de Sklar para densidades.

Assim sendo, pode-se construir a função de log-verossimilhança, com  $n$  observações  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$  como segue.

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln c(F(x_i; \boldsymbol{\theta}_X), G(y_i; \boldsymbol{\theta}_Y); \boldsymbol{\alpha}) + \sum_{i=1}^n (\ln f(x_i; \boldsymbol{\theta}_X)g(y_i; \boldsymbol{\theta}_Y)). \quad (2.1)$$

Na Equação 2.1,  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_X, \boldsymbol{\theta}_Y, \boldsymbol{\alpha})$  em que  $\boldsymbol{\theta}_X$  e  $\boldsymbol{\theta}_Y$  são os vetores de parâmetros das distribuições de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e  $\boldsymbol{\alpha}$  é o vetor de parâmetros da cópula  $C$ .

No método de estimação ML, o estimador é

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}}(l(\boldsymbol{\theta})),$$

isto é,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$  é o estimador de  $\boldsymbol{\theta}$  obtido através da maximização da função dada na Equação 2.1.

### *Inference functions for margins – IFM*

O método ML apresentado acima tem a vantagem de estimar todos os parâmetros em um único processo de estimação, desde os das marginais até os da cópula. No entanto, tal método pode trazer problemas computacionais de convergência e demasiada demora na estimação, dependendo da cópula e das marginais bem como da dimensão do problema. Face a isso, [Joe & Xu \(1996\)](#) propuseram uma alternativa ao ML em que, ao invés de se estimar todos os parâmetros de uma só vez, primeiro estimam-se os parâmetros das marginais e com tais estimativas, estimam-se os parâmetros da cópula.

Matematicamente falando, estimam-se os parâmetros  $\boldsymbol{\theta}_X$  e  $\boldsymbol{\theta}_Y$  através de algum método, por exemplo o da máxima verossimilhança, obtendo-se as estimativas  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_X$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_Y$ ; [Joe & Xu \(1996\)](#) propõem substituí-las na Equação 2.1 e assim o problema se resume a estimar  $\boldsymbol{\alpha}$  dado  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_X$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_Y$ . Desse modo, a Equação 2.1 pode ser reescrita como:

$$l(\boldsymbol{\theta}; \hat{\boldsymbol{\theta}}_X, \hat{\boldsymbol{\theta}}_Y) = l^*(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \ln c(F(x_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_X), G(y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_Y); \boldsymbol{\alpha}) + \sum_{i=1}^n (\ln f(x_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_X)g(y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_Y)). \quad (2.2)$$

E, então:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{IFM} = \underset{\boldsymbol{\alpha}}{\operatorname{argmax}}(l^*(\boldsymbol{\alpha})).$$

O estimador IFM apresenta menor eficiência em relação ao estimador ML pois procedendo a estimação em dois passos (primeiro os das marginais e depois os da cópula – método IFM) pode haver um acúmulo de erros de estimação maior do que feito em um único passo (método ML). Contudo, em geral, os resultados em ambos os métodos são similares.

No Capítulo 5 utilizamos esse método para estimar os parâmetros da cópula de interesse. Devemos notar e observar que ao utilizarmos verossimilhança perfilada, em alguns casos, podemos ter diversos problemas de convergência entre outros. [Silva \(2005\)](#) argumenta que “tratar a função de verossimilhança perfilada como uma verossimilhança genuína pode levar a alguns problemas, como, por exemplo, inconsistência e ineficiência dos estimadores de máxima verossimilhança. Outro problema comum refere-se à aproximação usual da distribuição da estatística da razão de verossimilhanças pela distribuição qui-quadrado, que, dependendo da quantidade de parâmetros de perturbação, pode ser muito pobre”.

### *Canonical maximum likelihood – CML*

O uso desse método é interessante quando não é necessário estimar os parâmetros das distribuições marginais, ou seja, quando se quer estimar somente o parâmetro da cópula. Isso se dá pois o CML se baseia nas distribuições marginais empíricas, isto é, não é necessário supor um modelo paramétrico às v.a.’s  $X$  e  $Y$ . O que se faz, em suma, é uniformizar as observações  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ , ao qual são denotadas por  $(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$ , através das distribuições marginais empíricas. A partir daí, estima-se  $\alpha$  como:

$$\hat{\alpha}_{CML} = \underset{\alpha}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^n \ln(c(\hat{u}_i, \hat{v}_i; \alpha)).$$

**Um comentário sobre métodos Bayesianos:** A alternativa Bayesiana pode ser atrativa em algumas situações. [Smith \(2011\)](#) discute algumas delas. A ideia é trabalhar com a posteriori  $p(\theta | (\mathbf{x}, \mathbf{y}))$  via métodos MCMC para fazer inferência no parâmetro de interesse e/ou em funções para tais; e para fazer previsões e/ou para funções das variáveis aleatórias; etc. Maiores detalhes podem ser vistos, além do já citado [Smith \(2011\)](#), em [dos Santos Silva & Lopes \(2008\)](#).

### 2.4.2 Escolha da cópula

Um problema prático no que diz respeito aos problemas que envolvem cópulas é quando, tendo os dados observados, temos que “escolher” uma cópula que melhor capta as relações de dependência, no nosso caso, entre  $X$  e  $Y$ . Uma forma de se escolher uma cópula que melhor se aproxima dos dados é baseada na cópula empírica. Definimo-la abaixo.

**Definição 2.19** (Cópula empírica). *A cópula empírica é a função, denotada por  $C_n$ , dada por:*

$$C_n(u, v) = \frac{\text{número de pares } (u_k, v_k), k = 1, 2, \dots, n, \text{ tal que } u_k \leq u \text{ e } v_k \leq v}{n}, (u, v) \in I^2,$$

em que  $(u_k, v_k), k = 1, 2, \dots, n$ , denota os dados uniformizados.

Note que essa definição vem do fato de  $C_n(u, v)$  ser uma estimação empírica de  $C(u, v)$ . Sabemos que  $C(u, v) = Pr(U \leq u; V \leq v), (u, v) \in I^2$ , então através da amostra  $(u_k, v_k), k = 1, 2, \dots, n$ , de  $(U, V)$ , devemos estimar empiricamente tal probabilidade. Essa estimação é dada por  $C_n$  na fórmula acima.

**Exemplo 2.3** (Cópula empírica). *Sejam  $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}), (\frac{2}{3}, 1)\}$  os dados uniformizados  $(u_k, v_k), k = 1, 2, 3, 4$ . Sendo assim, podemos construir a cópula empírica para quaisquer  $(u, v) \in I^2$ . Construimo-la para alguns valores de  $(u, v)$ , como segue:*

$$C_n(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}) = 0;$$

$$C_n(1, \frac{1}{3}) = \frac{2}{4};$$

$$C_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4};$$

$$C_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \frac{3}{4};$$

$$C_n(\frac{3}{4}, 1) = 1.$$

Para mais detalhes sobre cópula empírica, ver [Deheuvels \(1979\)](#).

A escolha da cópula deve ser feita baseada num conjunto, ao qual denotamos por  $\tilde{C}$ , contendo  $M$  cópulas que estamos interessados. O que queremos dizer é que não é possível escolher uma cópula genericamente, então o que se deve fazer é escolher um conjunto de cópulas (com os devidos parâmetros fixados) e então calcular uma distância de cada uma das cópulas desse conjunto até a cópula empírica.

Sendo assim, o que se faz na prática é determinar certas famílias de cópulas que desejamos que pertençam ao  $\tilde{C}$ , digamos  $M$  famílias, com características interessantes observadas através dos dados (como simetria, forte dependência nas caudas etc.) e estimar os parâmetros de cada família com algum dos métodos abordados anteriormente. Desse modo, teremos  $M$  cópulas, ou seja,  $\tilde{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_M\}$ . Feito isso, deve-se determinar uma distância, baseada em uma norma, entre cada uma dessas cópulas até a cópula empírica. Denotamos essa distância por  $d(C_n, C_m), m = 1, 2, \dots, M$ . A cópula dentre essas  $M$ , com a menor distância, será a escolhida.

Podemos utilizar distâncias baseadas em diferentes normas, como por exemplo a norma  $L^2$  ou a norma absoluta, entre outras. Lembrando que estamos trabalhando com o caso bivariado, definimos essas duas distâncias abaixo denotando, respectivamente, por  $d_2$  e  $d_{|\cdot|}$ .

$$d_2(C_n, C_m) := \left\{ \int_0^1 \int_0^1 [C_n(u, v) - C_m(u, v)]^2 dudv \right\}^{1/2}$$

e

$$d_{|\cdot|}(C_n, C_m) := \int_0^1 \int_0^1 |C_n(u, v) - C_m(u, v)| du dv.$$

Contudo, solucionar essas integrais pode ser demasiado difícil dependendo da cópula em questão. Com base nisso, podemos aproximar essa distância com uma aproximação discreta. [Durrleman et al. \(2000\)](#) sugere a norma  $L^2$  discreta para aproximar a distância  $d_2$  acima como:

$$\widehat{d}_2(C_n, C_m) = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ C_n \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C_m \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right]^2 \right)^{1/2}.$$

Analogamente, sugerimos a seguinte distância discreta para aproximar  $d_{|\cdot|}$ :

$$\widehat{d}_{|\cdot|}(C_n, C_m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| C_n \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C_m \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right|.$$

No Capítulo 5 utilizamos a distância média baseada em  $\widehat{d}_{|\cdot|}$ , denotada por  $\bar{d}_{|\cdot|}$ , como segue:

$$\bar{d}_{|\cdot|}(C_n, C_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| C_n \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C_m \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right|.$$

## Capítulo 3

# Método da convolução

Feita toda uma discussão de cópulas e do seu importante papel como ferramenta estatística na captação das estruturas de dependência entre v.a.'s, devemos, nesse momento, buscar alternativas ao método do somatório pois, esse, não modela a realidade quando pressupõe que as POA's associadas às suas respectivas classes de risco têm dependência perfeitamente positiva (comonotônicas), como discutido no Capítulo 1. Na busca por outros métodos que retratam mais realisticamente o comportamento das POA's, para que retornem um CR total mais realístico do que o  $CR_{SOMA}$ , deve levar em consideração um estudo de dependência das v.a.'s envolvidas no problema.

Vamos, como dito anteriormente, tratar o caso bivariado supondo que a instituição financeira tenha apenas duas unidades de risco em que suas POA's são representadas por  $X$  e  $Y$ . Vimos que quando supomos que  $X$  e  $Y$  são comonotônicas, isto é, têm dependência perfeita positiva (cópula  $C^+$ ), então o CR total é a soma dos capitais marginais:  $CR(X) = opvarX - E(X)$  e  $CR(Y) = opvarY - E(Y)$ .

A questão, então, é o que deve-se propor como CR total quando  $X$  e  $Y$  não têm dependência perfeita positiva. Desse modo, o método da convolução, apresentado nesse capítulo, nos dá uma possível resposta para a questão central do nosso trabalho (Questão 1.1): “O que pode-se considerar como sendo perdas inesperadas totais, isto é, para o banco como um todo?”

O método da convolução também pode ser estudado em [Alexander \(2003\)](#) onde são feitas algumas simulações para estudar o comportamento do método para duas distribuições fixadas.

A ideia do método é relativamente simples. Suponha novamente que a instituição tenha duas classes de risco em que as POA's são  $X$  e  $Y$ . Suponha ainda que  $X$  é a perda representando a classe A e que  $Y$  representa a perda na classe B. A ideia do método consiste

em determinar o capital para o banco como um todo baseada em uma “junção” das classes A e B obtendo-se uma única POA, digamos  $Z$ , que é a soma de  $X$  e  $Y$ . Dessa forma, é como se a instituição financeira observasse apenas uma unidade de risco obtida na junção das unidades A e B. Assim, observa-se ao longo dos anos  $z_1, z_2, z_3, \dots$ , que são observações de  $Z$ , e aí estima-se  $opvarZ$  e  $E(Z)$  para se obter o capital “marginal”  $CR(Z) = opvarZ - E(Z)$ . Sendo assim, a resposta para a nossa questão é dada por  $CR(Z)$ .

No entanto, as instituições financeiras observam os riscos separadamente para que o processo de mitigação desses riscos seja feita de maneira mais efetiva, para que características peculiares de cada unidade de risco sejam captadas e também pelo fato dos eventos operacionais terem características heterogêneas. Se a instituição financeira observasse as perdas vindas de um único bloco exposto ao risco, isso dificultaria a identificação e mitigação do RO.

A denominação do método, convolução, se dá pois o que é proposto é, como dissemos, determinar a soma das v.a.'s  $X$  e  $Y$ , i.e.,  $Z = X + Y$ . Então, deve-se estimar as distribuições de probabilidades para  $X$  e  $Y$  e então fazer a convolução de destas para se obter a distribuição de probabilidades de  $Z$ .

Quando somam-se as POA's  $X$  e  $Y$ , a estrutura de dependência de ambas variáveis são refletidas na soma  $Z$  e então o capital a ser alocado baseado nesse método, intuitivamente, é mais realístico do que o método do somatório por captar tal dependência. Sendo assim, vamos formalizar o que discutimos brevemente até agora nesse capítulo.

### 3.1 Descrição do método

O método da convolução é faz uma analogia ao cálculo do CR marginal discutido no Capítulo 1. Ou seja, se o banco tem as perdas  $X$  e  $Y$ , então o método considera como sendo a perda total uma variável  $Z$  que é a soma de  $X$  e  $Y$ , i.e,

$$Z = X + Y,$$

e a partir disso deve-se determinar  $CR(Z)$ . Para tal, é necessário a determinação de  $E(Z)$  e  $opvarZ$  para então obtermos  $UL_{TOTAL} = UL_Z = opvarZ - E(Z)$ , que denotaremos por  $CR_{CONV}$ . Então:

$$CR_{CONV} = opvarZ - E(Z) = opvar(X + Y) - E(X + Y). \quad (3.1)$$

Note que, uma vez determinado  $E(X)$  e  $E(Y)$ , pode-se obter diretamente  $E(Z)$ , como na propriedade abaixo:

**Propriedade 3.1.** *Seja  $Z = X + Y$ ,  $X$  e  $Y$  v.a.'s representando as POA's para duas unidades de risco. Se  $E(X)$  e  $E(Y)$  existem, então  $E(Z)$  existe e*

$$E(Z) = E(X) + E(Y).$$

É importante notar aqui que na determinação da esperança de  $Z$ ,  $E(Z)$ , não há influência alguma da estrutura de dependência presente entre  $X$  e  $Y$ . Ou seja, a dependência não pode ser captada por  $E(X + Y)$ . Isso é visto observando a propriedade acima, encontrada em diversos livros de inferência estatística e probabilidade, em que a única hipótese de tal propriedade é que  $X$  e  $Y$  sejam somáveis, ou seja, que existam  $E(X)$  e  $E(Y)$ . Em outras palavras, para quaisquer estruturas de dependência que possam existir entre  $X$  e  $Y$ , sempre temos que  $E(Z) = E(X) + E(Y)$  desde que  $X$  e  $Y$  sejam somáveis.

Mas, de fato, desejamos modelar a dependência entre  $X$  e  $Y$  e ela é captada por  $CR_{CONV} = opvarZ - E(Z)$ . Como tal dependência não pode ser captada por  $E(Z)$ , devemos verificar que ela é captada através do  $opvarZ$  que é, como dito, o percentil 0.999 da distribuição de probabilidades de  $Z$ .

Para uma melhor elucidação do que queremos dizer, suponha que  $X$  e  $Y$  podem ser modelados por uma cópula cujo parâmetro de dependência é  $\theta \in \mathbb{R}$ . E mais, suponha que quanto menor for  $\theta$ , mais negativamente dependentes são  $X$  e  $Y$ ; e quanto maior for  $\theta$ , mais positivamente dependentes são. Queremos analisar o que ocorre com  $opvar(X + Y)$  quando  $\theta$  percorre a reta, isto é, quando  $X$  e  $Y$  têm uma estrutura de dependência que vai de um extremo ao outro.

Dessa forma, surge a questão de como determinar  $opvarZ$  em termos matemáticos. Fazendo a convolução entre as distribuições de  $X$  e  $Y$ , obtemos a distribuição de  $Z$ , como dito. Tendo tal distribuição em mãos, é possível obter  $opvarZ$ . É importante notar que nem sempre é verdade que  $opvar(X + Y) = opvarX + opvarY$ . O teorema abaixo nos mostra isso.

**Teorema 3.1.** *Seja  $Z = X + Y$ ,  $X$  e  $Y$  as perdas para duas unidades de risco. Se  $X$  e  $Y$  são perfeitamente correlacionadas, i.e., têm a cópula limite superior de Fréchet, então:*

$$opvarZ = opvarX + opvarY,$$

*com  $opvarZ$ ,  $opvarX$  e  $opvarY$  como definido anteriormente. A demonstração desse teorema pode ser visto em [Frachot et al. \(2004\)](#).*

Desse teorema podemos verificar que quando  $\theta$  tende a infinito, então  $opvar(X + Y) = opvarX + opvarY$ . Vimos no Capítulo 1 que o método do somatório superestima o CR

total; mas tal método determina o CR total usando o fato da comonotonicidade. Sendo assim, quanto maior for  $\theta$ , maior será  $opvar(X + Y)$ . Geralmente, a ideia do comportamento do percentil da soma ( $opvarZ$ ) se dá pelo seguinte fato: suponha  $X$  e  $Y$  negativamente dependentes (perfeitamente). Dessa forma, o par  $(X, Y)$  assume valores (grande, pequeno) ou (pequeno, grande). Somando-se esses valores temos a soma *grande + pequeno*. Analisando o outro extremo, isto é,  $X$  e  $Y$  dependentes perfeitamente positivos, o par  $(X, Y)$  assume valores (pequeno, pequeno) ou (grande, grande) e por um lado temos que a soma pode ser *pequeno + pequeno*, mas por outro, podemos ter a soma sendo *grande + grande* implicando que a calda da distribuição da soma  $Z$  é mais larga (pesada) e então obtendo o percentil 0.999 maior.

Como um exemplo ilustrativo, simulamos valores para  $X$  e  $Y$  sendo  $X \sim Weibull(1.5, 1.25)$  e  $Y \sim Lognormal(0, 0.5)$  e utilizamos a cópula Gaussiana para especificar diversos níveis de correlação entre tais variáveis. A Figura 3.1 mostra o comportamento de  $opvar(Z)$ , em que  $Z = X + Y$  para diferentes  $\rho$ 's, que é o parâmetro da cópula Gaussiana.

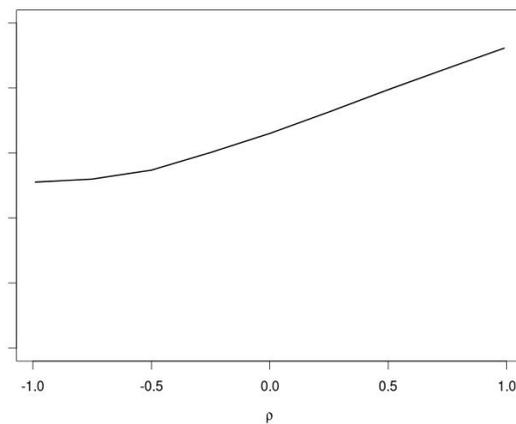


Figura 3.1: Comportamento de  $opvar(Z)$  utilizando a cópula Gaussiana, variando  $\rho$ .

Em geral, o que temos é que o  $opvar$  segue a propriedade da subaditividade, ou seja

$$opvar(X + Y) \leq opvar(X) + opvar(Y),$$

mas isso pode falhar para alguns casos mais particulares onde as caldas das distribuições de  $X$  e  $Y$  são extremamente pesadas (ver [Giacometti \(2008\)](#)). No entanto, no nosso trabalho, vamos considerar o caso mais geral onde tal propriedade da subaditividade funciona, isto é, quando o OpVaR é uma medida coerente (ver [Artzner et al. \(1999\)](#) e [Cruz \(2002\)](#)).

A subaditividade juntamente com o teorema acima, nos diz que o método do somatório se reduz a um caso particular do método da convolução quando usamos a cópula limitante

superior de Fréchet, i.e., quando supomos que  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeita positiva, como mostra a propriedade abaixo:

**Propriedade 3.2.** *Se supormos que  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeita positiva, então*

$$CR_{CONV} = CR_{SOMA}.$$

A propriedade acima é facilmente verificada pois se  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeita positiva então  $CR_{CONV} = opvar(X+Y) - E(X+Y) = opvarX + opvarY - E(X) - E(Y) = CR_{SOMA}$ .

Para conseguirmos determinar o CR total via método da convolução, devemos determinar a distribuição de probabilidades de  $Z$ . Matematicamente falando, considere  $h_C(x, y)$  a função de densidade conjunta para as perdas  $X$  e  $Y$  construída a partir de uma cópula  $C$ . É importante observar que o teorema de Sklar é aplicado aqui, ou seja, existe uma cópula  $C$  tal que a função de distribuição conjunta,  $H_C(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ . Das propriedades de cópulas temos que:

$$h_C(x, y) = c[F_X(x), F_Y(y)] f_X(x) f_Y(y),$$

onde  $f_X(\cdot)$  e  $f_Y(\cdot)$  são as funções de densidade marginais,  $F_X(\cdot)$  e  $F_Y(\cdot)$  são as funções de distribuição marginais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e  $c$  é a densidade da cópula dada por

$$c(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

Com a função  $h_C(x, y)$ , desejamos obter a distribuição de  $Z = X + Y$ . Isso é feito através da integral de convolução (daí a denominação do método)

$$g(z) = \int_x h_C(x, z-x) dx = \int_y h_C(z-y, y) dy,$$

em que  $g(z)$  será a função de densidade da variável soma  $Z$ .

Sabemos que  $g(Z)$  caracteriza a distribuição de  $Z$ . Tendo em mãos tal distribuição, basta determinarmos o  $opvarZ$  como discutido no Capítulo 1, ou seja,  $opvarZ$  é o percentil 0.999 da distribuição de  $Z$ .

Feito isso, obtemos uma resposta para a nossa questão e tal resposta é a dada na Equação 3.1.

Em termos computacionais, o que pode ser feito é como segue no algoritmo abaixo.

**Algoritmo:** Suponha que tem-se  $n$  observações para o par de perdas  $(X, Y)$ , digamos  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$  e que a cópula  $C$  é a cópula escolhida para modelagem da dependência de tais observações.

1. Fazer

$$z_i = x_i + y_i,$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  e obter “observações” da variável  $Z$ ;

2. Estimar  $E(Z)$  e  $opvarZ$ ;

3. Determinar  $CR_{CONV} = CR(Z) = opvarZ - E(Z)$ , utilizando-se os estimadores do passo 2.

Deve-se observar que o método é simples computacionalmente mas complicado em termos analíticos por conta da determinação de  $h_C(x, y)$  e da distribuição analítica de  $Z$ , que depende da integral de  $h_C(x, y)$ , como visto acima. Então, o que pode-se fazer na prática é seguir o algoritmo acima ao invés de determinar as soluções analíticas que dependendo da cópula escolhida e das marginais podem ser extremamente complicadas.

Em termos de um estudo de simulação, o algoritmo acima ainda é válido, mas ao invés de ter o banco de dados em mãos, pode-se simular valores para o par  $(X, Y)$  de várias cópulas (várias estruturas de dependência) e obter o comportamento do método para tais estruturas supostas.

### 3.2 Simulação e aplicação

Nesta seção, fazemos um estudo de simulação como aplicação para estudar o comportamento do método da convolução de maneira bivariada com distribuições fixadas. Utilizamos as seguintes distribuições

$$X \sim Weibull(1.5, 1.25) \text{ e } Y \sim Lognormal(0, 0.5).$$

Vale ressaltar que os dados são simulados e não reais. A escolha de tais distribuições é arbitrária, mas seguem as características das distribuições usadas na prática.

A simulação feita aqui segue o algoritmo acima. No método da convolução, como dissemos, a solução analítica é demasiada complicada dependendo da escolha da cópula e das marginais. Sendo assim, não é possível estudar o comportamento de tal método (quando variamos o grau de dependência entre as v.a.'s) teoricamente. Isto é, por sua solução analítica ser impraticável na maior parte dos casos, vamos estudar o comportamento do método apenas para o nosso conjunto de dados simulados.

Note que no algoritmo acima, o passo 2 nos diz que devemos estimar  $E(Z)$  e  $opvarZ$ . Essas estimativas podem vir de um método qualquer, paramétrico ou empírico. Nesse estudo, estimamos empiricamente  $E(Z)$  e  $opvarZ$  através de suas estimativas amostrais.

Supomos que a cópula entre  $X$  e  $Y$  é a Gaussiana e obtivemos o comportamento (estimado) para vários níveis de correlação linear (parâmetro da cópula,  $\rho$ ). Com a finalidade de comparar sempre com o método do somatório, para cada nível de correlação fixado, obtemos  $CR_{SOMA}$  e  $CR_{CONV}$ , ressaltando mais uma vez ambos os capitais são estimados. Note que o CR via método do somatório é sempre o mesmo independentemente dos níveis de dependência entre  $X$  e  $Y$ , porém, como vemos a seguir, há uma variação no  $CR_{SOMA}$  quando variamos  $\rho$  por conta da aleatoriedade na geração dos dados de  $X$  e  $Y$ .

O comportamento do método da convolução, quando variamos  $\rho$  são vistos na Tabela 3.1 e na Figura 3.2.

Tabela 3.1: Comparação entre os métodos do somatório e da convolução.

$\rho$	-0.9	-0.6	-0.3	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
$CR_{SOMA}$	6.948862	7.072080	7.103283	7.107824	7.123962	7.231833	7.247738	7.350174	7.412706	7.482141
$CR_{CONV}$	2.801524	3.133689	3.707629	4.591243	4.826605	5.440471	6.005879	6.588275	7.169704	7.482141

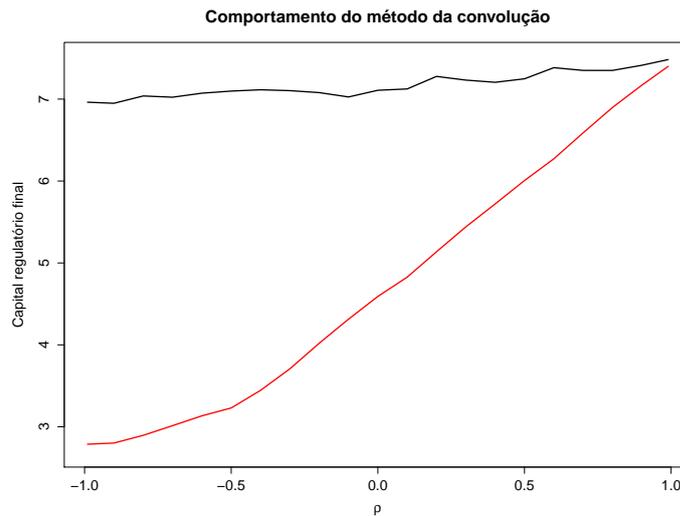


Figura 3.2: Comportamento e comparação entre os métodos da convolução e do somatório.

Observando os resultados tanto da tabela como da figura acima, vemos que o método da convolução, de fato, é sempre menor do que o do somatório e isso se deve a captação da dependência entre  $X$  e  $Y$  através do percentil da soma  $opvar Z$ .

No Capítulo 5, fazemos outro estudo de simulação comparando esse método com o proposto no próximo capítulo e mais uma vez como método do somatório. No Capítulo 5, também mostramos um comportamento multivariado de tal método.

### 3.3 O ponto de vista multivariado

Tratamos o caso bivariado para o método da convolução. Contudo, sua extensão é natural, isto é, basta somarmos (convolução) de tantas variáveis perdidas quanto o necessário. Supondo que uma instituição financeira tenha as perdas  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , se optar por usar o método da convolução para agregar o risco nas  $p$  unidades de risco, deverá supor que há apenas uma classe de risco com perda  $Z = \sum_{i=1}^p X_i$  e então obter, de alguma maneira, uma estimativa para

$$CR(Z) = \text{opvar}(Z) - E(Z) = \text{opvar} \left( \sum_{i=1}^p X_i \right) - E \left( \sum_{i=1}^p X_i \right),$$

e novamente temos que o método se reduz ao método do somatório quando temos todas as perdas,  $X_i, i \in (1, 2, \dots, p)$  perfeitamente dependentes (o que é ainda mais longe da realidade do que supormos duas perdas perfeitamente dependentes).

Tal modelagem da dependência pode ser captada via cópula, supondo agora uma cópula  $p$ -variada  $C$  e então a distribuição de  $Z$  é da forma:

$$g(z) = \int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_{p-1}} h_C \left( x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, z - \sum_{i=1}^{p-1} x_i \right) dx_1 dx_2 \dots dx_{p-1}.$$

As propriedades e características do método da convolução para o caso bivariado se estendem naturalmente para o caso multivariado.

## Capítulo 4

# Método proposto

Nesse capítulo apresentamos e discutimos a contribuição do nosso trabalho, i.e., a agregação de uma proposta de um método para calcular o CR para RO. Vimos até aqui que o problema da modelagem da dependência está sempre presente e não deve ser ignorado em qualquer que seja o método proposto para calcular tal capital. No nosso método não deve ser diferente, i.e., devemos, de alguma forma, captar a dependência entre as v.a.'s POA (vamos considerar o caso bivariado), digamos  $X$  e  $Y$ , e utilizar essa captação em um modelo que tenha como resposta o CR. Propor um modelo desses é propor uma resposta para a questão dada no capítulo introdutório do nosso trabalho (Questão 1.1) que é: “o que podemos considerar como sendo perdas inesperadas para o banco como um todo”, i.e,  $ULTOTAL$ . Vimos também que a ferramenta estatística que iremos utilizar na captação da dependência é a teoria de cópulas, assim como no método da convolução, visto no capítulo anterior. Vale ressaltar que no próximo capítulo tratamos uma alternativa multivariada para o método proposto.

Quando se quer propor um método para esse problema, deve-se considerar alguns pressupostos que são uma base para construção de um método coerente com a realidade do problema. Os pressupostos apresentados abaixo são baseados no Acordo de Basileia II e na literatura geral sobre RO.

### 4.1 Pressupostos

**Pressuposto i)** Em primeiro lugar, na alocação de CR, é plausível que o modelo proposto possa ter um índice que retrate o cenário em que o sistema financeiro está vivenciando. Isso é, um índice (ou índices) que refletem a opinião de especialistas das instituições financeiras e de órgãos reguladores. Vimos no Capítulo 1 que o Comitê permite essa quantificação da opinião de especialistas no modelo final.

**Pressuposto ii)** Vimos que o CR total é o capital que deve cobrir as perdas inesperadas totais. Pensando no caso bivariado, não estamos interessados em  $X \in [E(X), opvarX]$  e  $Y \in [E(Y), opvarY]$  separadamente e sim conjuntamente. O que queremos dizer é que devemos considerar o evento  $(X, Y) \in [E(X), opvarX] \times [E(Y), opvarY]$  no nosso método. Para considerar tal fato, podemos relacionar de alguma forma funcional a probabilidade desse evento conjunto ocorrer com o CR total.

Note que tal probabilidade, denotada por  $p$  é dada por

$$\begin{aligned}
 p &= Pr [\text{perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente}] \\
 &= Pr [(X, Y) \in [E(X), opvarX] \times [E(Y), opvarY]] \\
 &= Pr [E(X) \leq X \leq opvarX \text{ e } E(Y) \leq Y \leq opvarY],
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

considerando  $H_C$  a função de distribuição conjunta de  $X$  e  $Y$  obtida através da cópula  $C$  (através do teorema de Sklar), então  $p$  é:

$$p = H_C(opvarX, opvarY) - H_C(E(X), opvarY) - H_C(opvarY, E(Y)) + H_C(E(X), E(Y)). \tag{4.2}$$

Desse modo, a estrutura de dependência presente entre  $X$  e  $Y$  é captada através da cópula  $C$  e refletida através de  $p$ . Note que  $p$  é o volume abaixo da superfície, no retângulo  $[E(X), opvarX] \times [E(Y), opvarY]$ , da função de densidade conjunta, digamos  $h_C$ , de  $X$  e  $Y$  obtida derivando a função  $H_C$ .

**Pressuposto iii)** Deve-se considerar também as perdas inesperadas marginais pois, de fato, elas são importantes para dar um CR total ( $UL_{TOTAL}$ ) mais realístico. Isto é, não devemos ignorar o comportamento de  $ULX = opvarX - E(X)$  e  $ULY = opvarY - E(Y)$ .

**Pressuposto iv)** Vimos que o método do somatório considera as perdas, digamos  $X$  e  $Y$ , com dependência perfeita positiva superestimando o CR total. Em termos de cópula, a cópula de  $X$  e  $Y$  é o limite superior de Fréchet,  $C^+$ , se, e somente se,  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeita positiva. Então, em um método que utiliza cópulas, quando a cópula escolhida for  $C^+$  o CR total dado pelo método deve ser igual ao dado pelo método do somatório.

Sendo assim, utilizando o pressuposto ii), quando utilizarmos a cópula  $C^+$  na modelagem da dependência entre as perdas  $X$  e  $Y$  obteremos a probabilidade:

$$\begin{aligned}
 p = p^+ &= H_{C^+}(opvarX, opvarY) - H_{C^+}(E(X), opvarY) - H_{C^+}(opvarY, E(Y)) \\
 &+ H_{C^+}(E(X), E(Y)),
 \end{aligned}$$

pelo teorema de Sklar, considerando que  $F$  e  $G$  são as funções de distribuição marginais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, então:

$$\begin{aligned}
p^+ &= \min(F(\text{opvar}X), G(\text{opvar}Y)) - \min(F(\text{opvar}X), G(EY)) - \\
&\quad \min(F(EX), G(\text{opvar}Y)) + \min(F(EX), G(EY)) \\
&= \min(0.999; 0.999) - \min(0.999; G(EY)) - \min(F(EX); 0.999) + \\
&\quad \min(F(EX), G(EY)) \\
&= 0.999 - F(EX) - G(EY) + \min(F(EX), G(EY)) \\
&= 0.999 - \max(F(EX), G(EY)). \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Logo, esse pressuposto nos diz que quando considerarmos que a probabilidade das perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente é construída como acima (quando se utiliza a cópula  $C^+$ ) o CR total proposto deve ser igual ao CR obtido pelo método do somatório. Ou seja, se  $p = p^+$ , então CR total proposto é igual ao  $CR_{SOMA}$ .

Notamos que  $p^+$ , nas famílias de cópula mais comumente utilizadas, é a maior possível (servindo como um limitante para a probabilidade  $p$ ), mas isso nem sempre ocorre e os exemplos em que tal fato não ocorre são mais raros e menos utilizados na prática.

**Pressuposto v)** O pressuposto iv) nos mostra o que deve ser o CR total quando consideramos  $X$  e  $Y$  com dependência perfeita positiva. Devemos também observar o que queremos como CR total quando  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeitamente negativa, i.e., o que devemos considerar como sendo  $UL_{TOTAL}$  quando a cópula escolhida é  $C^-$ .

Primeiramente, vemos que quando a cópula escolhida é a  $C^-$ , então  $p^- = 0$ , onde  $p^-$  denota a probabilidade  $p$  dada acima quando consideramos a cópula  $C^-$ . De fato:

$$p^- = H_{C^-}(\text{opvar}X, \text{opvar}Y) - H_{C^-}(E(X), \text{opvar}Y) - H_{C^-}(\text{opvar}Y, E(Y)) + H_{C^-}(E(X), E(Y)).$$

Pelo teorema de Sklar, considerando que  $F$  e  $G$  são as funções de distribuição marginais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, temos que:

$$\begin{aligned}
p^- &= \max(F(\text{opvar}X) + G(\text{opvar}Y) - 1, 0) - \max(F(\text{opvar}X) + G(EY) - 1, 0) - \\
&\quad - \max(F(EX) + G(\text{opvar}Y) - 1, 0) + \max(F(EX) + G(EY) - 1, 0) \\
&= \max(0.999 + 0.999 - 1, 0) - \max(0.999 + G(EY) - 1, 0) - \\
&\quad - \max(F(EX) + 0.999 - 1, 0) + \max(F(EX) + G(EY) - 1, 0) \\
&= 0.998 - (0.999 + G(EY) - 1) - (0.999 + F(EX) - 1) + \max(F(EX) + G(EY) - 1, 0) \\
&= -(F(EX) + G(EY) - 1) + \max(F(EX) + G(EY) - 1, 0). \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Porém, estamos considerando o caso em que  $X$  e  $Y$  são positivas e contínuas com distribuições assimétricas à direita (POA's). Então cabe aqui a seguinte afirmação: se  $X$  e  $Y$  são positivas e contínuas com distribuições assimétricas à direita, então  $\max(F(EX) + G(EY) - 1, 0) = F(EX) + G(EY) - 1$ .

De fato. Como vimos no Capítulo 1, as POA's são v.a.'s sempre contínuas e positivas. Vimos também que as distribuições comumente encontradas na literatura são Weibull, Pareto, gama e log-normal. Sendo assim, as funções de densidade marginais das POA's são assimétricas à direita e temos então uma relação entre média e mediana das POA's dada por

$$E(X) > \text{mediana}(X) \text{ e } E(Y) > \text{mediana}(Y),$$

Sabemos que  $F(\text{mediana}(X)) = 0.5$  e por  $F$  ser crescente temos que:

$$E(X) > \text{mediana}(X) \Rightarrow F(E(X)) > F(\text{mediana}(X)) \Rightarrow F(E(X)) > 0.5.$$

Analogamente,  $G(E(Y)) > 0.5$  e então  $F(EX) + G(EY) - 1 > 0$ .

Portanto  $\max(F(EX) + G(EY) - 1, 0) = F(EX) + G(EY) - 1$ . ■

Voltando à Equação 4.4 e usando a afirmação acima temos que  $p^- = 0$ . Sendo assim, quando  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeita negativa, a probabilidade do evento  $(X, Y) \in [E(X), \text{opvar}X] \times [E(Y), \text{opvar}Y]$  ocorrer é igual a zero. Desse modo podemos ter que:

- i)  $X \in [E(X), \text{opvar}X]$  ocorre e  $Y \in [E(Y), \text{opvar}Y]$  não ocorre;
- ii)  $X \in [E(X), \text{opvar}X]$  não ocorre e  $Y \in [E(Y), \text{opvar}Y]$  ocorre ou
- iii)  $X \in [E(X), \text{opvar}X]$  e  $Y \in [E(Y), \text{opvar}Y]$  não ocorrem.

Então, é plausível que o CR total dado pelo método, quando  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeita negativa, seja igual ao máximo entre os CR marginais de  $X$  e  $Y$ . Isso é plausível pois suponha sem perda de generalidade que  $CR(X) > CR(Y)$ . Então, se o que ocorrer o que é descrito em *i*), *ii*) ou *iii*), garantimos que a perda inesperada total estará coberta.

Então, se  $X$  e  $Y$  têm dependência perfeita negativa,  $CR_{TOTAL} = \max(CR(X), CR(Y))$ . □

Para sumarizar, os pressupostos que devemos incluir no nosso método (que discutimos acima) são:

- i) Incluir no método a opinião de especialistas;

- ii) Considerar uma forma funcional entre o CR total e a probabilidade de perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente;
- iii) Considerar as perdas inesperadas marginais no modelo final;
- iv) Se  $X$  e  $Y$  têm cópula  $C^+$ , então  $CR_{TOTAL} = CR_{SOMA}$ ;
- v) Se  $X$  e  $Y$  têm cópula  $C^-$ , então  $CR_{TOTAL} = \max(CR(X), CR(Y))$ .

## 4.2 Construção

Vimos na seção anterior alguns pressupostos que consideramos interessantes quando se quer propor um modelo para retornar CR para RO. A construção do método proposto nesse trabalho se baseia em todos os pressupostos vistos; vamos partir do pressuposto *ii*), i.e., considerar uma forma funcional entre a probabilidade de perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente e o CR total.

Sendo assim, existe uma função  $f : [0, p^+] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- i)  $f(p) = CR_{TOTAL}$ ;
- ii)  $f(0) = \max(CR(X), CR(Y))$  (pressuposto *iv*));
- iii)  $f(p^+) = CR_{SOMA}$  (pressuposto *v*));
- iv)  $f$  ser uma função crescente.

Note que é plausível considerar  $f$  crescente pois se a probabilidade das perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente cresce, então também deve crescer o CR a ser alocado. Note também que o que estamos construindo aqui é um método que responde a questão central do trabalho visto no Capítulo 1: o que são perdas inesperadas para o banco como um todo? Para responder tal questão o que vamos construir é a função  $f$  acima.

Assim,

$$\begin{aligned} f : [0, p^+] &\longrightarrow [\max(CR(X), CR(Y)), CR_{SOMA}] \\ p &\longmapsto f(p) = CR_{TOTAL}. \end{aligned}$$

No entanto, existem infinitas funções com as características supracitadas. Por exemplo, o segmento de reta que passa pelos pontos  $(0, \max[CR(X), CR(Y)])$  e  $(p^+, CR_{SOMA})$  é uma possível função. Note também que a função  $f(p) = CR_{SOMA}, p \in (0, p^+]$  e  $f(p) =$

$\max(CR(X), CR(Y)), p = 0$  é outra possível função. Essa é a considerada pelo método do somatório que ignora a probabilidade  $p$  como acima.

Sendo assim, por existir uma infinidade de funções com as características discutidas, vamos no nosso método supor uma família de funções. Para tal, vamos discutir brevemente sobre sequência de funções.

### Uma nota sobre sequências e famílias de funções

Na literatura matemática sobre o assunto há diversas propriedades e definições a cerca de sequência de funções. No nosso trabalho, o que é necessário saber é que sendo  $f_n$  uma função para  $n = 1, 2, \dots$ , então  $(f_1, f_2, f_3, \dots)$  é considerada uma sequência de funções. Em geral, tal função depende de  $n$  e varia de acordo com ele, mas deve-se notar que  $f$  não é aplicada a  $n$  e sim em, digamos,  $x \in Dom(f)$ . A notação utilizada é  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $X$  é o domínio de  $f_n$ .

Então são exemplos de sequências de funções:

- i)  $f_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$  e dessa forma temos a sequência  $(x, x^2, x^3, \dots)$ ;
- ii)  $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}, x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$  e dessa forma temos a sequência  $(x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, \dots)$ ;
- iii)  $f_n(x) = x^n(1 - x^n), x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$  e dessa forma temos a sequência  $(x - x^2, x^2 - x^4, x^3 - x^6, \dots)$ .

Há ainda diversas propriedades de convergência dessas sequências para certas funções. Um estudo mais detalhado sobre o assunto pode ser visto em [Lima \(1995\)](#).

Porém, podemos generalizar esse conceito para o que chamamos de “família de funções”. Ao invés de considerarmos uma função indexada por  $n$  natural, podemos considerá-la indexada por um índice, digamos,  $\xi$  real por exemplo, ou então nos reais positivos e assim por diante. Do Exemplo *ii*) acima, podemos generalizar indexando  $f$  por  $\xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , obtemos a família de funções  $f_\xi(x) = x^{\frac{1}{\xi}}, x \in \mathbb{R}$  e  $\xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

Esta família tem algumas propriedades interessantes no que diz respeito a relacionar a probabilidade de as perdas inesperadas marginais ocorrerem conjuntamente e o CR final. Um delas é o seu comportamento ao variarmos o índice, podemos relacionar o CR final crescendo exponencialmente de acordo com tal probabilidade, podemos relacionar linearmente ou ainda de uma forma mais conservadora. Ao invés de construir uma função  $f$  no nosso problema, na verdade, construiremos uma família de funções indexadas por  $\xi$  e veremos que o Pressuposto *i*) discutido na Seção 4.1 será refletido nesse índice. Então o comportamento desta família

discutido neste parágrafo varia de acordo com seu índice  $\xi$ . Note que a família de funções  $f_\xi(x) = x^{\frac{1}{\xi}}, x \in [0, 1]$  e  $\xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  cobre todo o quadrado unitário quando variamos  $\xi$ . Discutimos mais propriedades desta família quando tivermos construído o método.  $\square$

Voltando à construção do método, o que desejamos então é construir uma família de funções com as características discutidas sendo que tal família terá o papel de retornar um CR total de acordo com a probabilidade  $p$  e para cada função pertencente a essa família, teremos um CR total diferente (que dependerá de  $\xi$ ). Note que existem infinitas famílias de funções com tais características e isso nos mostra que existem infinitas soluções para o problema sob essa perspectiva posta nesse capítulo.

Sendo assim, vamos aqui mostrar uma possível solução que julgamos ser interessante para o problema. Tal solução é considerar a seguinte família de funções:

$$\begin{aligned} f_\xi : [0, p^+] &\longrightarrow [\max(CR(X), CR(Y)), CR_{SOMA}] \\ p &\longmapsto f_\xi(p) = ap^{\frac{1}{\xi}} + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Julgamos interessante a escolha desta família pois ela atende aos nossos pressupostos e tem propriedades interessantes (é uma variação da família  $f_\xi(x) = x^{\frac{1}{\xi}}, x \in [0, 1]$  e  $\xi \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  que discutimos mais acima). Como dissemos, discutimos as propriedades desta família, justificando o porquê a julgamos interessante para responder a questão enfrentada aqui.

Agora, temos que determinar  $a$  e  $b$  para que seja construída a família desejada de acordo com os pressupostos descritos na Seção 4.1. Veremos também a interpretação de  $\xi$ . Como para cada  $p$  e para cada  $\xi$  teremos em geral diferentes  $f_\xi(p)$ , então vamos usar a seguinte notação para o CR total proposto:

$$CR_{PROP}(p; \xi) = f_\xi(p) = ap^{\frac{1}{\xi}} + b. \quad (4.5)$$

Desse modo, vamos determinar os coeficientes  $a$  e  $b$ . Os pressupostos usados para essa determinação são os  $iv)$  e  $v)$ , reescritos abaixo como:

1.  $CR_{PROP}(0; \xi) = \max(CR(X), CR(Y));$
2.  $CR_{PROP}(p^+; \xi) = CR_{SOMA}.$

Das equações acima, para determinar  $a$  e  $b$  devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} a \times 0^{\frac{1}{\xi}} + b &= \max(CR(X), CR(Y)) = \max(opvarX - EX, opvarY - EY) \\ a(p^+)^{\frac{1}{\xi}} + b &= CR_{SOMA} = (opvarX - EX) + (opvarY - EY) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} a &= \frac{CR_{SOMA} - \max(CR(X), CR(Y))}{(p^+)^{\frac{1}{\xi}}}; \\ b &= \max(opvarX - EX, opvarY - EY). \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a seguinte família de funções:

$$\begin{aligned} CR_{PROP}(p; \xi) &= \left( \frac{[(opvarX - EX) + (opvarY - EY)] - \max(opvarX - EX, opvarY - EY)}{(p^+)^{\frac{1}{\xi}}} \right) p^{\frac{1}{\xi}} + \\ &+ \max(opvarX - EX, opvarY - EY). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Podemos ainda escrever a equação acima como:

$$CR_{PROP}(p; \xi) = \min(opvarX - EX, opvarY - EY) \left( \frac{p}{p^+} \right)^{\frac{1}{\xi}} + \max(opvarX - EX, opvarY - EY), \tag{4.7}$$

em que  $p$  é dado na Equação 4.2,  $p^+$  é dado na Equação 4.3 e  $\xi \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ .

Logo, a equação acima é a nossa proposta de CR total, ou seja, é a resposta proposta nesse trabalho sobre o que são as perdas inesperadas totais para o banco como um todo (relembrando que estamos tratando o caso bivariado).

Desde o início desse trabalho, vimos discutindo a dependência presente no problema de alocação de CR em RO. O método apresentado capta a dependência presente entre duas v.a.'s através de uma certa cópula ajustada para os dados; note que toda essa captação de dependência está presente na função de distribuição conjunta e isso é refletido através da probabilidade  $p$ .

De fato, os Pressupostos *ii*), *iii*), *iv*) e *v*) são satisfeitos e veremos adiante que o Pressuposto *i*) é satisfeito através do índice  $\xi$ . A escolha da família de funções da forma  $ap^{\frac{1}{\xi}} + b$  com  $a$  e  $b$  como na Equação 4.6 se dá devido ao fato de, qualquer que seja  $\xi$ , as características desejadas são satisfeitas. O que queremos dizer é que para cada escolha de  $\xi$ , a instituição financeira obtém uma função com as características requeridas que podem variar do menos conservador possível até o mais conservador possível.

Note que, sendo assim, o índice  $\xi$  pode ser a quantificação da opinião de especialistas tanto de instituições financeiras quanto de órgãos reguladores. No entanto, da forma como está feito, deve-se quantificar a opinião de especialistas em um índice no intervalo  $(0, +\infty)$ . O fato de  $\xi$  ser ilimitado à direita pode trazer dificuldades na sua escolha pelo fato de  $\xi$  poder ser tão grande quanto se queira. Sendo assim, é mais palpável para os especialistas expressarem

numericamente a sua opinião em um índice limitado. Com base nisso, podemos fazer uma transformação bijetora de  $\xi \in (0, +\infty)$  em  $\xi^* \in (0, 1)$  e traduzir a opinião de especialistas através de  $\xi^* \in (0, 1)$  mantendo as características anteriores.

Uma possível bijeção é:

$$\xi^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\xi)$$

e  $\xi \in (0, +\infty)$  se, e somente se,  $\xi^* \in (0, 1)$ .

Feito isso, da equação 4.7 temos:

$$CR_{PROP}(p; \xi^*) = \min(CR(X), CR(Y)) \left( \frac{p}{p^+} \right)^{1/\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\xi^*)} + \max(CR(X), CR(Y)), \quad (4.8)$$

em que  $\xi^* \in (0, 1)$ ,  $CR(X) = \operatorname{opvar}X - E(X)$  e  $CR(Y) = \operatorname{opvar}Y - E(Y)$ ,  $p$  é dado na Equação 4.2 e  $p^+$  é dado na Equação 4.3.

Para melhor notar essa quantificação em um índice, vejamos algumas propriedades da família escolhida.

**Propriedade 4.1.** *Seja  $CR_{PROP}(p, \xi^*)$  como na Equação 4.8.*

i)  $\xi^* = 0.5$  se, e somente se,  $CR_{PROP}(p; 0, 5) = ap + b$ , ou seja, a relação a ser considerada entre  $p$  e o  $CR$  total é uma reta.

De fato,

$$\xi^* = 0.5 \Leftrightarrow CR_{PROP}(p; 0, 5) = \frac{\min(CR(X), CR(Y))}{p^+} p + \max(CR(X), CR(Y)).$$

ii)  $\lim_{\xi^* \rightarrow 1} CR_{PROP}(p; \xi^*) = CR_{SOMA}, \forall p \in (0, p^+)$ .

De fato, para qualquer  $p \in (0, p^+)$  tem-se:

$$\begin{aligned} \xi^* \rightarrow 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\xi^*)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \\ CR_{PROP}(p; \xi^*) &\rightarrow (\min(CR(X), CR(Y)) + \max(CR(X), CR(Y))) = CR_{SOMA}. \end{aligned}$$

iii) *Sejam  $\xi_1^*, \xi_2^* \in (0, 1)$ . Se  $\xi_1^* < \xi_2^*$ , então  $CR_{PROP}(p; \xi_1^*) < CR_{PROP}(p; \xi_2^*), \forall p \in (0, p^+)$ .*

*Isto é,  $CR_{PROP}(p; \xi^*)$  é uma função estritamente crescente em  $\xi^*$  para qualquer  $p \in (0, p^+)$ .*

De fato,

$$\begin{aligned} \xi_1^* < \xi_2^* &\Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\xi_1^*)} > \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\xi_2^*)} \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{p}{p^+} \right)^{1/\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\xi_1^*)} < \left( \frac{p}{p^+} \right)^{1/\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\xi_2^*)} \\ &\Leftrightarrow CR_{PROP}(p; \xi_1^*) < CR_{PROP}(p; \xi_2^*). \end{aligned}$$

As propriedades listadas acima são herdadas das propriedades da família de funções escolhida, justificando o porquê a julgamos interessante no nosso problema. Ou seja, temos propriedades de convergência que são interessantes como as de convergência quando tendemos o índice  $\xi^*$  aos seus extremos. Então além da característica da família da funções escolhida (característica comportamental/funcional), temos propriedades que se transformam em propriedades a cerca da opinião de especialistas,  $\xi^*$ .

Como dito anteriormente, tendo o método construído em mãos, os pressupostos podem ser vistos como propriedades. Então além das listadas acima, também são propriedades:

**Propriedade 4.2.** *O método proposto considera*

- i) a opinião de especialistas expressa em um índice  $\xi^*$ ;*
- ii) a dependência entre duas perdas, digamos  $X$  e  $Y$ , através da probabilidade de  $(X, Y) \in [E(X), opvar(X)] \times [E(Y), opvar(Y)]$ ;*
- iii) as perdas inesperadas marginais no modelo final;*
- iv) que se  $X$  e  $Y$  têm cópula  $C^+$ , então  $CR_{TOTAL} = CR_{SOMA}$ ;*
- v) que se  $X$  e  $Y$  têm cópula  $C^-$ , então  $CR_{TOTAL} = \max(CR(X), CR(Y))$ .*

Sendo assim, as propriedades nos dizem que a instituição financeira (junto com seus reguladores) tem a liberdade de incluir no modelo a sua opinião podendo escolher uma infinidade de relações entre  $p$  e o CR total com as características supracitadas. As instituições podem ainda escolher  $\xi^* \rightarrow 1$  e tal escolha implicará na redução do método proposto ao caso particular mais conservador possível, i.e., no método do somatório.

### 4.3 Aplicação – Estudo do comportamento teórico do método

Nessa seção, vamos estudar o comportamento do CR total proposto de acordo com a Equação 4.8. Vamos supor o caso bivariado, ou seja, com duas v.a's, digamos  $X$  e  $Y$ , representando as POA's em duas unidades de risco em uma instituição financeira, assim como no Capítulo 3.

Mais uma vez de maneira análoga ao que foi feito no Capítulo 3, nessa simulação, vamos supor que as distribuições marginais já foram estimadas pois não é o foco do nosso trabalho estudar as estimações de distribuição das respectivas frequências e severidades e também o

ajuste da agregação via LDA, como discutido no Capítulo 1. As distribuições de probabilidade de  $X$  e  $Y$  usadas são, novamente

$$X \sim Weibull(1.5, 1.25) \text{ e } Y \sim Lognormal(0, 0.5).$$

Com tais distribuições marginais para  $X$  e  $Y$  obtemos o CR total pelo método do somatório, visto na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Capital Regulatório total via método do somatório.

$E(X)$	1.128432
$opvarX$	4.533859
$E(Y)$	1.133148
$opvarY$	4.688516
$CR_{SOMA}$	6.960795

Para determinar  $CR_{PROP}$  devemos determinar os coeficientes da Equação 4.8. Tais coeficientes, assim como  $p^+$ , são vistos na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Coeficientes para a determinação do CR total proposto.

$\min(CR(X), CR(Y))$	3.405427
$\max(CR(X), CR(Y))$	3.555368
$p^+$	0.4002937

Na nossa simulação, assim como dito no Capítulo 2, usamos como a cópula de  $X$  e  $Y$  a cópula Gaussiana, descrita na Equação 2.17. Vimos que o parâmetro dessa cópula é o coeficiente de correlação linear entre  $X$  e  $Y$ ,  $\rho$ , e tal parâmetro é muitas vezes denominado parâmetro de dependência. Ele é o único na cópula Gaussiana que descreve a estrutura de dependência. Vimos o porquê estamos utilizando essa cópula também no Capítulo 2.

Para cada  $\rho$  fixado no intervalo  $(-1, 1)$ , constrói-se uma cópula Gaussiana. A partir dessa cópula, constrói-se uma distribuição conjunta para  $X$  e  $Y$  e obtém-se  $H_C(X, Y)$ . Com a função de distribuição conjunta em mãos, deve-se determinar a probabilidade  $p$  discutida anteriormente. Desse modo, para cada  $\rho$  diferente, obtemos uma probabilidade  $p$  diferente; ainda mais, sendo  $p_1$  e  $p_2$  as probabilidades determinadas utilizando  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , respectivamente,  $\rho_1 < \rho_2$  se, e somente se,  $p_1 < p_2$  (Figura 4.1). Vale ressaltar que se fixamos  $\rho = 1$  então obtemos  $p = p^+$ .

Assim, basta variarmos  $p \in [0, p^+]$  (ou seja,  $\rho$ ) e  $\xi \in (0, 1)$  para obtermos o CR total proposto. Com isso, podemos estudar o comportamento do CR proposto em relação à  $p$

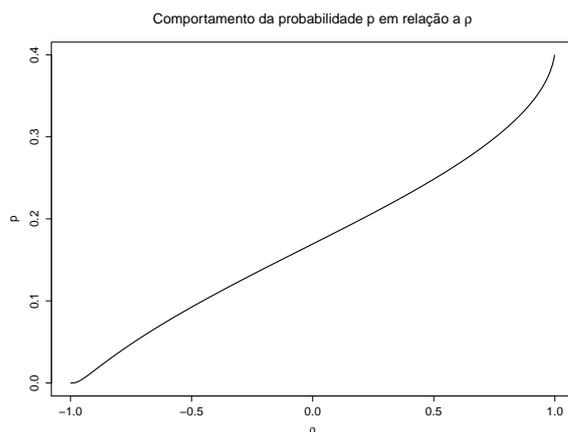


Figura 4.1: Comportamento da probabilidade  $p$  em relação ao  $\rho$  (para as particulares distribuições das marginais e cópula dadas).

fixando alguns  $\xi^*$ 's e vice-versa. Esses dois comportamentos são representados no gráficos nas Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente.

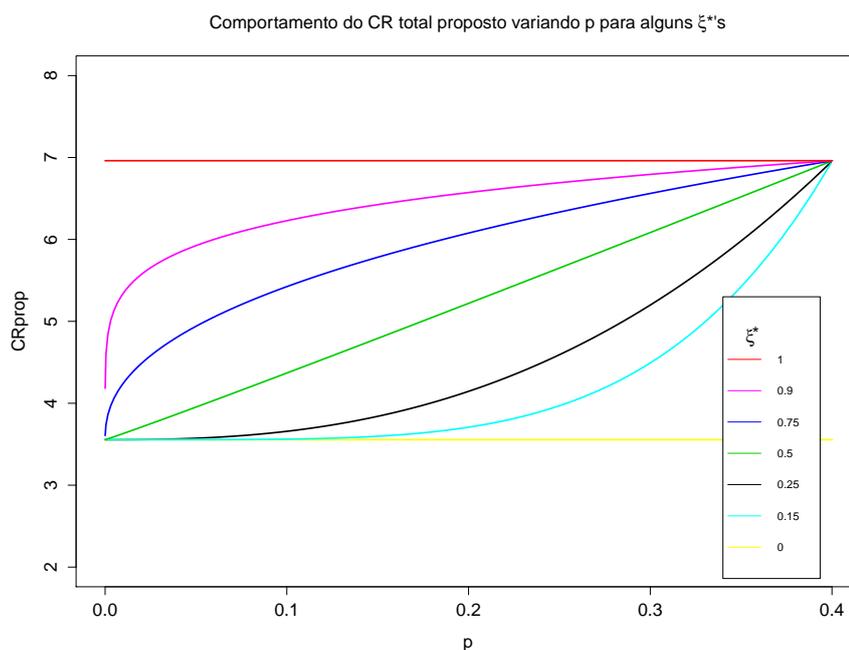


Figura 4.2: Comportamento de  $CR_{PROP}$  em relação a  $p$ , para alguns  $\xi^*$  (para as particulares distribuições das marginais e cópula dadas).

Na Figura 4.2 obtemos a representação da família de funções que discutimos nesse capítulo na Seção 4.2 e como propriedade temos que se variarmos  $\xi^*$  em todo intervalo  $(0, 1)$ , cobriremos o retângulo  $[0, \max(CR(X), CR(Y))] \times [p^+, \min(CR(X), CR(Y))]$ .

Note que nos gráficos representados nas Figuras 4.2 e 4.3 o que vemos são curvas de níveis

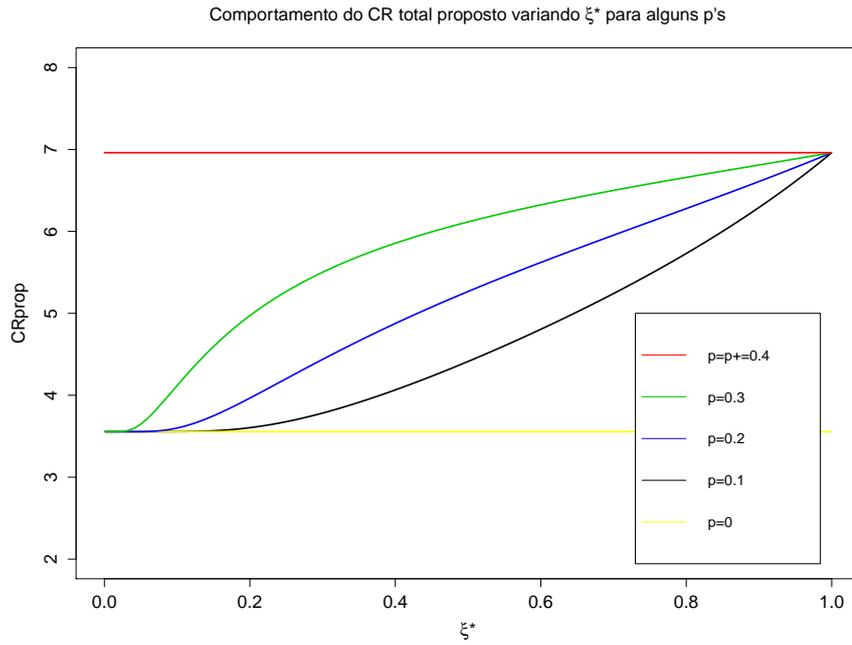


Figura 4.3: Comportamento de  $CR_{PROP}$  em relação a  $p$ , para alguns  $\xi^*$  (para as particulares distribuições das marginais e cópula dadas).

da superfície obtida quando variamos  $p$  e  $\xi^*$  determinando o  $CR_{PROP}(p; \xi^*)$ . Sendo assim, ainda usufruindo da ferramenta gráfica, podemos estudar o comportamento do  $CR_{PROP}$  para ambas variáveis  $p$  e  $\xi^*$ , como visto na Figura 4.4

Para finalizar esse capítulo, apresentamos na Tabela 4.3 o comportamento numérico do CR total proposto para diferentes  $p$ 's e  $\xi^*$ 's.

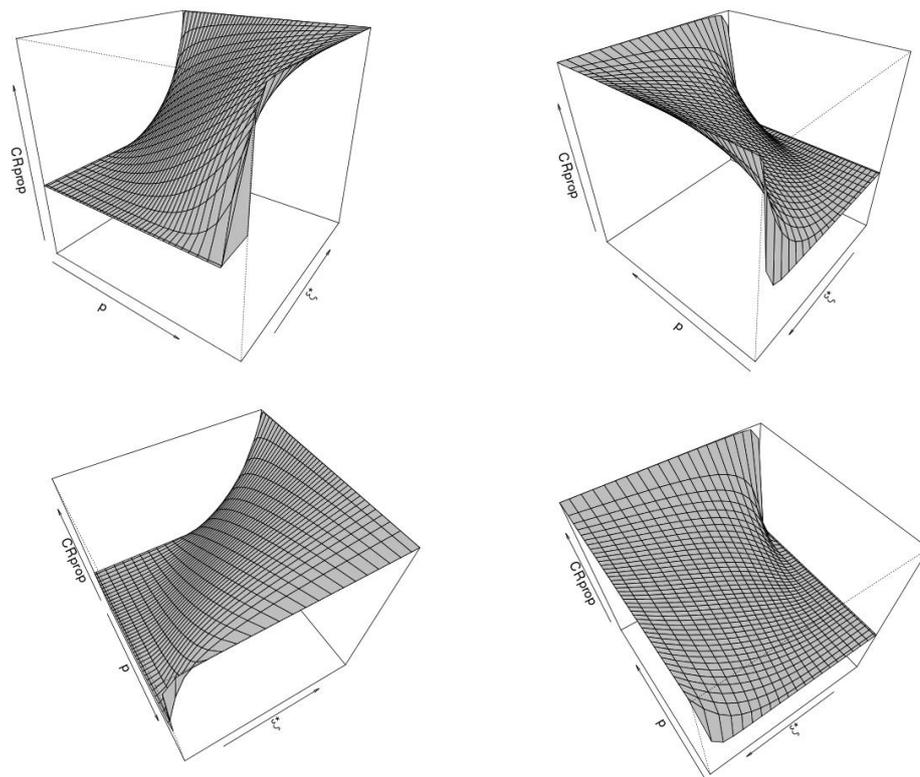


Figura 4.4: Comportamento bivariado do CR total proposto (para as particulares distribuições das marginais e cópula dadas).

Tabela 4.3: Comportamento numérico do CR total proposto.

$p \backslash \xi^*$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	$\rightarrow 1$
0.05	3.555376	3.561551	3.616223	3.757848	3.993479	4.322944	4.753196	5.304417	6.016395	6.960795
0.1	3.555929	3.604138	3.782489	4.065287	4.412433	4.805218	5.241476	5.730539	6.292365	6.960795
0.15	3.562345	3.721958	4.052490	4.438626	4.832856	5.225685	5.621738	6.031740	6.470976	6.960795
0.2	3.597485	3.955538	4.424660	4.862428	5.253690	5.609582	5.944376	6.271786	6.605478	6.960795
0.25	3.731157	4.358389	4.910732	5.340087	5.684990	5.976687	6.236357	6.479052	6.716785	6.960795
0.3	4.118632	4.971955	5.501880	5.855831	6.116314	6.323881	6.500515	6.659612	6.810496	6.960795
0.35	4.972951	5.776806	6.148688	6.368543	6.519427	6.634102	6.728257	6.810614	6.886742	6.960795
$p^+$	6.960795	6.960795	6.960795	6.960795	6.960795	6.960795	6.960795	6.960795	6.960795	6.960795

Como discutimos, é perceptível que o  $CR_{PROP}(p, \xi^*)$  é sempre crescente em cada um dos seus argumentos. Outro fato interessante que podemos ver na Tabela 4.3 é que tanto para  $p = p^+$  quanto para  $\xi^* \rightarrow 1$ , o CR total proposto é igual a 6.960795 que é o CR via método do somatório. Podemos ver também que todos os outros valores (também é perceptível nos gráficos apresentados do comportamento do CR total proposto) são sempre menores do que o  $CR_{SOMA}$ .

Como vantagens, o método é rápido computacionalmente e é simples implementá-lo. Também leva em consideração as opiniões de especialistas que alguns outros métodos presentes na literatura não o fazem e que muitas vezes é recomendado pelo Comitê. Ainda capta à sua maneira a dependência entre duas unidades de risco via cópulas, sendo que é livre a “escolha” da cópula (de acordo com a teoria de cópulas). O método leva em consideração a probabilidade da ocorrência de eventos que estão diretamente relacionados com a perda inesperada total que a instituição terá e tem sua interpretação relativamente simples.

Na próxima sessão, fazemos um estudo de simulação desse método a fim de comparação com os outros abordados.

#### 4.4 Comparação entre os métodos – um estudo de simulação

Nesta seção, com a finalidade de comparar os métodos abordados durante toda essa dissertação (somatório, da convolução e o proposto), fazemos um estudo de simulação supondo, novamente, o caso bivariado em que  $X$  e  $Y$  representam as POA's com distribuições

$$X \sim Weibull(1.5, 1.25) \text{ e } Y \sim Lognormal(0, 0.5).$$

Para fazermos o estudo de simulação, fixamos uma família de cópulas a qual representa a estrutura de dependência das perdas. Nosso objetivo é estudar o comportamento do CR através de todos os métodos abordados no trabalho variando o grau de dependência, i.e., o parâmetro da cópula, entre  $X$  e  $Y$ . A família de cópulas fixada é a Gaussiana, como dito anteriormente, cujo parâmetro é o coeficiente de correlação linear entre  $X$  e  $Y$ ,  $\rho$ .

A simulação para comparar os métodos variando a dependência dos dados, supondo a cópula Gaussiana, é baseada no seguinte algoritmo:

- i) Tome  $K$   $\rho$ 's, em que  $\rho \in (-1, 1)$ , obtendo-se uma grade de valores para  $\rho$ , i.e., um vetor  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_K)$ ;
- ii) Tome  $M$   $\xi^*$ 's, em que  $\xi^* \in (0, 1)$ , obtendo-se uma grade de valores para  $\xi^*$ , i.e., um vetor  $\boldsymbol{\xi}^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_M^*)$ ;

- iii) Para cada  $\rho_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , construa a cópula  $C_{\rho_k}$ ;
- iv) Para cada  $C_{\rho_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , gere  $n$  dados  $(x_i, y_i)_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , da distribuição conjunta  $H(x, y) = C_{\rho_k}(F(x), G(y))$ ;
- v) Para cada matriz,  $n \times 2$ , de dados  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , calcule  $CR_{SOMA}$ ,  $CR_{CONV}$  e, para cada  $\xi_m^*$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ),  $CR_{PROP; \xi_m^*}$ .

Antes de mostrarmos os comportamentos simulados e comparar os métodos, como comparação teórica entre os da convolução e proposto, temos que o proposto é mais flexível pois considera as opiniões de especialistas e os resultados variam de acordo com essa escolha. Já no método da convolução, o resultado obtido é fixo e só depende dos dados, bem como das estimativas necessárias.

Em termos do nosso estudo de simulação, na Tabela 4.4 vemos que para  $\rho$  baixo o método da convolução é menor do que o proposto para os  $\xi^*$  usados. Isso ocorre pois um dos pressupostos no método proposto é que quando a probabilidade dos eventos de perda inesperada ocorrerem conjuntamente for zero ( $\rho = -1$ ), então é retornado um CR que é o máximo entre os capitais marginais. Ou seja, não se sabe qual evento ocorrerá, então é plausível supor que o pior deles ocorre. No método da convolução, tal pressuposto não é obedecido e por conta disso o CR final é menor. Isso também é visto na Figura 4.5. Por outro lado, para níveis de correlação positivos, existe um índice  $\xi^*$  cujo CR proposto é menor do que o CR via método da convolução. Vale notar que não estamos, necessariamente, buscando o menor capital a ser alocado, e sim o mais plausível de acordo com a realidade.

Deve-se dizer que nos dias atuais ainda se utiliza o método do somatório, mesmo o método da convolução tendo aparecido em trabalhos antes mesmo do próprio Acordo de Basileia II, como por exemplo no já citado Alexander (2003). Isso talvez ocorra por conta da insegurança das instituições financeiras e de seus órgãos reguladores no que diz respeito às perdas operacionais. Por esse motivo, a flexibilidade do método proposto é vista como uma vantagem importante, pois pode-se chegar a um consenso entre instituição financeira e seu respectivo regulador.

Tabela 4.4: Comparação entre  $CR_{SOMA}$ ,  $CR_{PROP}$  e  $CR_{CONV}$ .

$\rho$	$CR_{SOMA}$	$CR_{CONV}$	$CR_{PROP;\xi^*=0.1}$	$CR_{PROP;\xi^*=0.5}$	$CR_{PROP;\xi^*=0.7}$	$CR_{PROP;\xi^*=0.9}$
-0.9	6.948862	2.801524	3.611271	3.737912	4.241459	5.599157
-0.6	7.072080	3.133689	3.654410	4.286201	5.100440	6.270265
-0.3	7.103283	3.707629	3.642597	4.697959	5.532541	6.510147
0	7.107824	4.591243	3.580031	5.040993	5.832651	6.648987
0.1	7.123962	4.826605	3.602947	5.185954	5.947837	6.706446
0.3	7.231833	5.440471	3.744461	5.560509	6.248796	6.891505
0.5	7.247738	6.005879	3.820144	5.854234	6.452689	6.978960
0.7	7.350174	6.588275	4.130841	6.289609	6.764135	7.156831
0.9	7.412706	7.169704	4.973341	6.827170	7.101576	7.313005
1	7.482141	7.482141	7.482141	7.482141	7.482141	7.482141

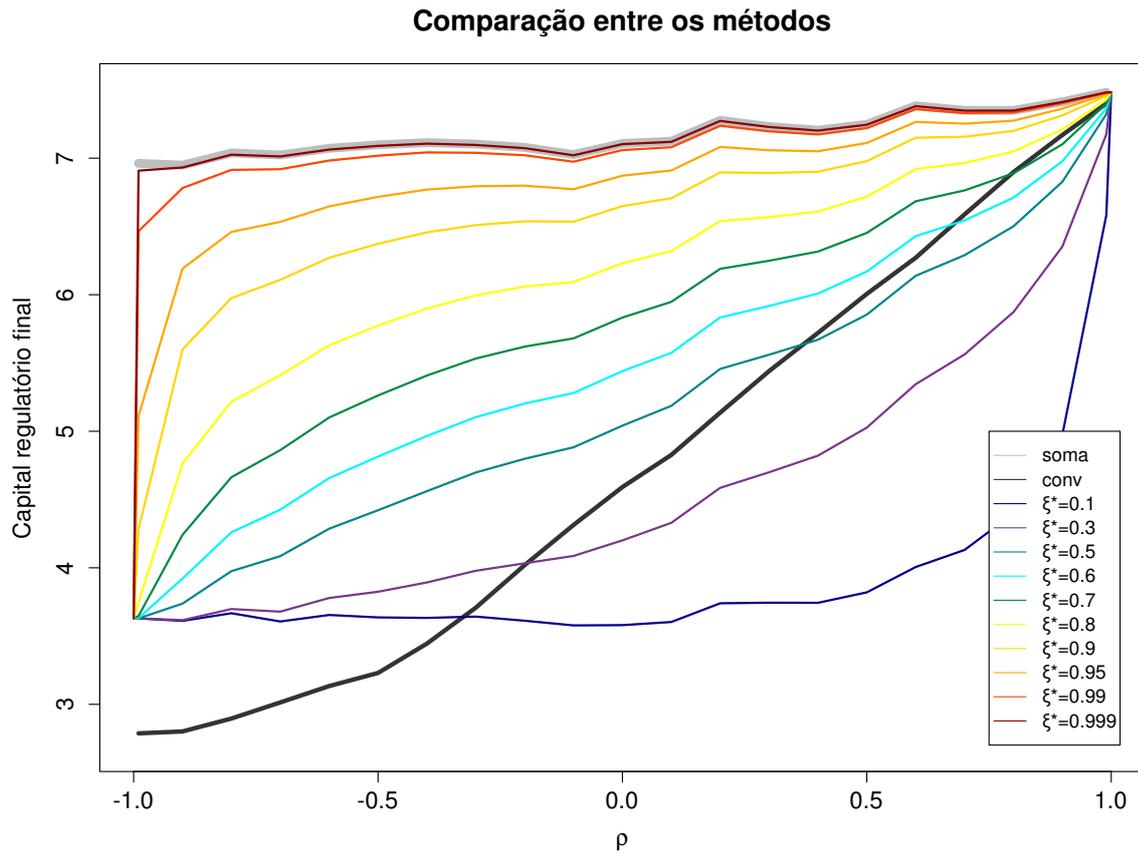


Figura 4.5: Comparação entre todos os métodos.

No próximo capítulo, nós tratamos, também em um estudo de simulação, a estimação dos parâmetros e escolha da cópula, bem como uma alternativa multivariada para o método proposto.

## Capítulo 5

# Questões práticas – um estudo de simulação

Neste capítulo, tratamos duas questões de interesse prático para a instituição.

Uma delas, vista na próxima sessão, é como determinar uma cópula (apresentamos um caminho possível – utilizando o IFM) que melhor se adeque às observações das perdas  $(X, Y)$  (caso bivariado).

A outra questão prática tratada neste capítulo é o fato de a instituição ter mais do que somente duas unidades de risco. O que fazemos é dar uma alternativa multivariada ao método proposto, que como vimos, não há uma extensão natural por não podemos sustentar o pressuposto que tem como hipótese a dependência perfeita negativa entre as perdas. Mas o que podemos fazer é agregar duas a duas as variáveis perdas e somar os capitais resultantes. Disso surge a questão, qual par agregar? É o que tratamos na sessão 5.2.

### 5.1 Estimando uma cópula

No estudo de simulação feito na Seção 4.4, a família de cópulas é fixada (Gaussiana). Isso foi feito, pois o que queríamos era estudar o comportamento do CR final de todos os métodos de acordo com o grau de dependência entre as perdas  $X$  e  $Y$ , para essas distribuições e cópulas utilizadas. No entanto, com o objetivo de mostrar como é feito na prática, devemos, baseado nos dados de perda, estimar uma cópula que se ajuste bem a eles.

A escolha da cópula é feita com base na cópula empírica  $C_n$  e em um conjunto de família de cópulas  $\tilde{C}$  (como descrito na Seção 2.4). As distribuições utilizadas nesse estudo são as

mesmas da Seção 4.4, ou seja,

$$X \sim Weibull(1.5, 1.25) \text{ e } Y \sim Lognormal(0, 0.5).$$

O estudo feito aqui segue o seguinte algoritmo:

- i) Gerar dados de uma cópula qualquer com parâmetro fixado;
- ii) Fixar  $M$  famílias de cópulas no qual serão famílias candidatas para modelar os dados;
- iii) Estimar os parâmetros das cópulas de *ii*) utilizando os dados de *i*) e obter  $\tilde{C} = (C_1, C_2, \dots, C_M)$ ;
- iv) Construir a cópula empírica  $C_n$  com os dados de *i*);
- v) Calcular as distâncias (com alguma norma desejada) entre  $C_n$  e todas as cópulas de  $\tilde{C}$ ;
- vi) Escolher a cópula de  $\tilde{C}$  com menor distância e calcular o  $CR_{PROP;\xi^*}$  utilizando essa cópula.

Na prática tem-se os dados de perda  $X$  e  $Y$ . O que deve ser feito é uniformizar tais dados e seguir o algoritmo a partir do passo *ii*).

Com base nesse algoritmo, fixamos a família de cópulas Gaussiana com  $\rho = 0.5$  para gerar os dados. Definimos, então, as famílias de cópulas “candidatas” como sendo as famílias: Gaussiana,  $t$ , de Frank e de Ali-Mikhail-Haq (AMH). Feito isso, estimamos os parâmetros de todas essas famílias com base em algum método descrito na Seção 2.4 (aqui, utilizamos o IFM). Note que a família de cópulas  $t$  é biparamétrica (coeficiente de correlação linear  $\rho$  e o grau de liberdade  $\nu$ ) e pode-se estimar os dois parâmetros. No entanto, o que fazemos é fixar alguns graus de liberdade ( $\nu = 1, 5, 10$  e  $80$ ) e estimar somente o coeficiente de correlação  $\rho$ . A distância que utilizamos, como no passo *iv*) do algoritmo acima, é a apresentada na seção 2.4, i.e.,

$$\bar{d}_{||}(C_n, C_m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| C_n \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C_m \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) \right|.$$

Sendo assim, o  $\tilde{C}$  já com os parâmetros estimados e as respectivas distâncias baseadas na cópula empírica é apresentado na Tabela 5.1

Os resultados obtidos na Tabela 5.1 foram obtidos gerando-se 200 dados como dito no passo *i*) do algoritmo acima.

Observando a Tabela 5.1, vemos que a cópula que tem a menor distância é a  $C_1$ , ou seja, a Gaussiana com  $\rho = 0.4552$ . Era de se esperar que esse fato ocorresse pois geramos os dados

Tabela 5.1: Cópulas de  $\tilde{C}$  com respectivas estimativas dos parâmetros e distâncias.

$\tilde{C}$	Família	Parâmetro	Distância $\bar{d}_{  }$
$C_1$	Gaussiana	0.45520	0.005965153
$C_2$	$t_{\nu=1}$	0.26442	0.021838732
$C_3$	$t_{\nu=5}$	0.42647	0.007813121
$C_4$	$t_{\nu=10}$	0.44647	0.006492369
$C_5$	$t_{\nu=80}$	0.45523	0.005980726
$C_6$	Frank	3.0454	0.005979630
$C_7$	AMH	0.91746	0.009135232

a partir de uma família Gaussiana e, então, as propriedades de dependência dessa família foram refletidas nos dados e captadas na nossa escolha da cópula. No entanto, as cópulas  $C_5$  ( $t_{\rho=0.45523; \nu=80}$ ) e  $C_6$  (Frank com parâmetro 3.0454) também tiveram distância pequenas. No caso da cópula  $C_5$  isso se dá, pois, como sabemos, quanto maior for o grau de liberdade da cópula  $t$ , mais próximo da cópula Gaussiana será e por isso as distâncias são próximas. Já a cópula  $C_6$  tem algumas características de dependência similares a cópula Gaussiana, como por exemplo a simetria e maior dependência nas caudas, e por isso as distâncias são próximas.

Uma possível ferramenta gráfica para visualizar essa distância é o gráfico da diagonal das cópulas de  $\tilde{C}$  comparando-as com a diagonal da cópula empírica, i.e.,  $C_m(u, u), u \in I$ , para todo  $m = (1, 2, \dots, 7)$  e  $C_n(u, u), u \in I$ , visto na Figura 5.1.

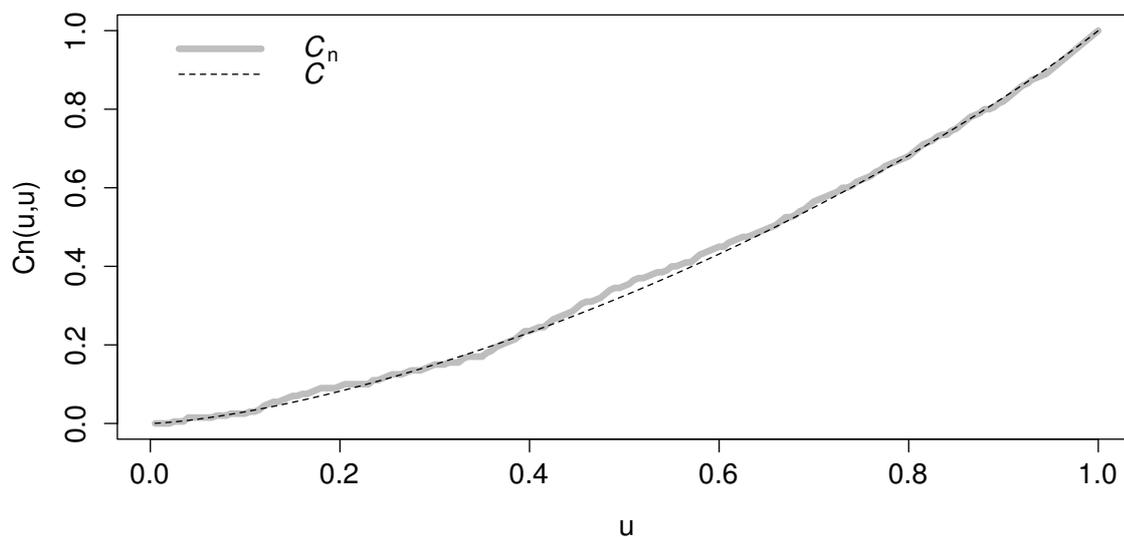
Nota-se na Figura 5.1 que as cópulas  $C_1, C_5$  e  $C_6$  tem diagonal próxima a  $C_n$ , indicando que essas são cópulas que melhor se ajustam aos dados. Contudo, esse gráfico só nos mostra o que ocorre para essas cópulas na diagonal.

Uma outra ferramenta gráfica para observar a proximidade entre as cópulas estipuladas em  $\tilde{C}$  e a cópula empírica  $C_n$  é o gráfico das curvas de nível de  $C_m, m = 1, 2, \dots, 7$  e  $C_n$ , como visto na Figura 5.2.

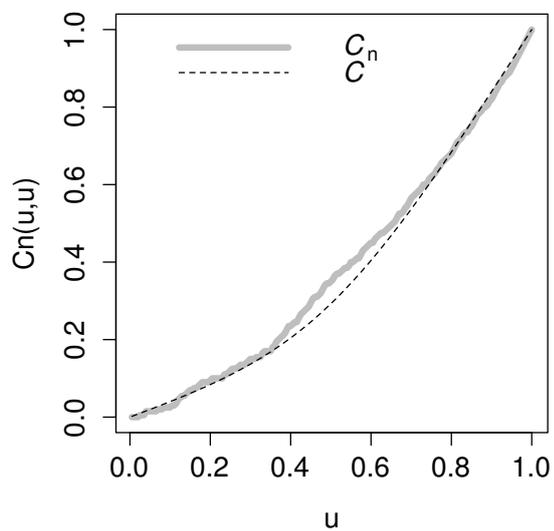
Os gráficos da Figura 5.2 são mais completos do que os da Figura 5.1 pois mostra o quão próximo são as cópulas de  $\tilde{C}$  e a empírica  $C_n$  em vários níveis. A Figura 5.2, assim como a Figura 5.1, também nos mostra que as cópulas mais próximas da empírica são as  $C_1, C_5$  e  $C_6$ .

Feita a escolha da cópula de acordo com os dados, devemos determinar o CR segundo o método proposto. Note que o  $CR_{SOMA}$  não depende da cópula, e se mudarmos a cópula que consideramos ser a modeladora da dependência dos dados, nada muda no  $CR_{SOMA}$ . Já no  $CR_{CONV}$ , na teoria, a escolha da cópula deveria mudar os valores de  $CR_{CONV}$  (pois a

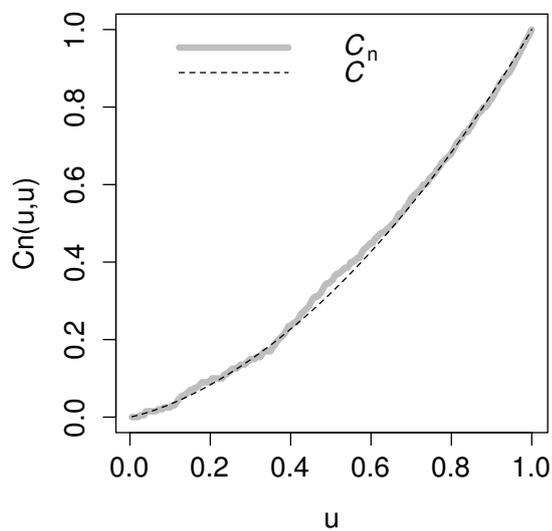
Diagonal da cópula Gaussiana



Diagonal da cópula t com 1 grau de liberdade



Diagonal da cópula t com 5 graus de liberdade



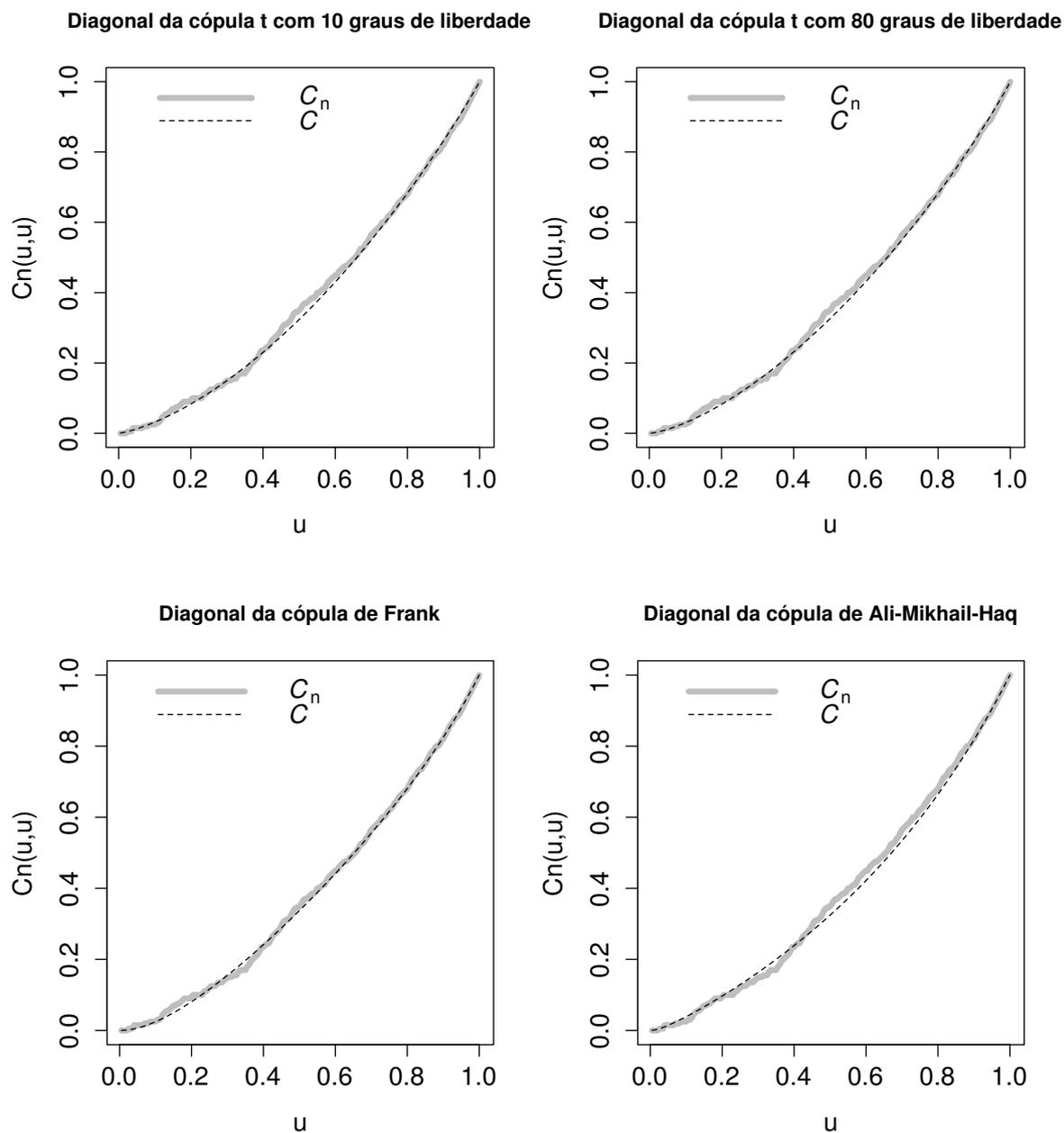
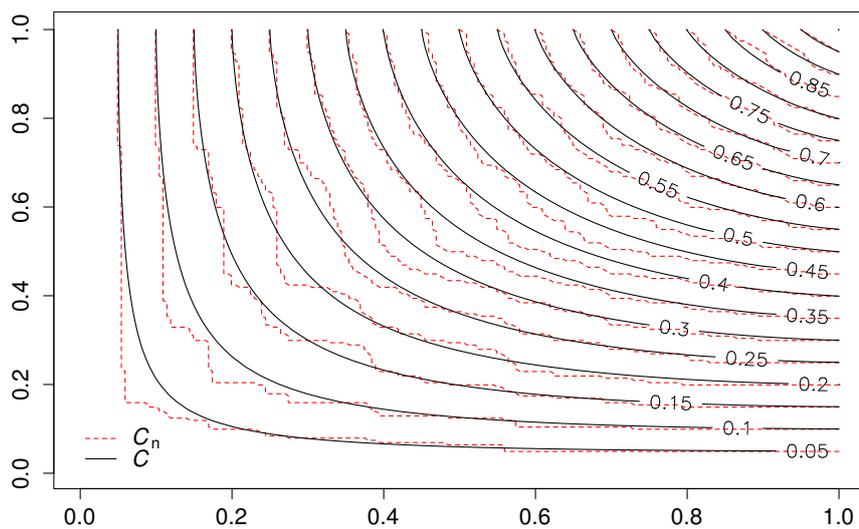
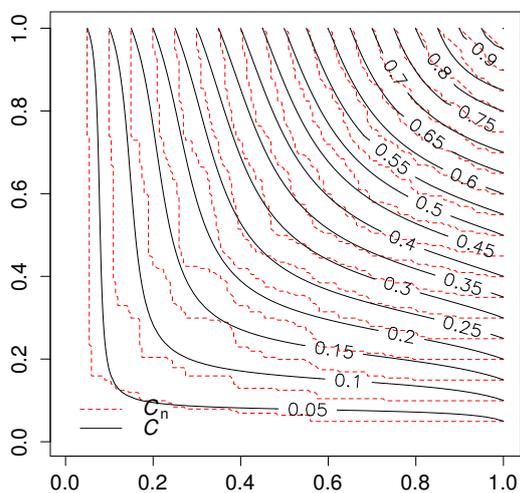


Figura 5.1: Comparação entre as diagonais das cópulas de  $\tilde{C}$  e  $C_n$ .

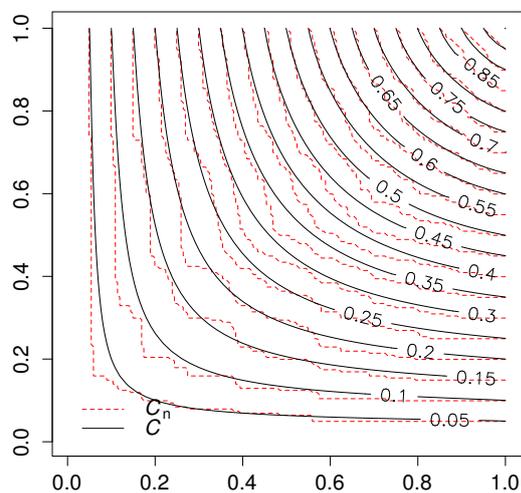
**Curvas de nível -- Cópula Gaussiana**



**Curvas de nível -- Cópula t com 1 grau de liberdade**



**Curvas de nível -- Cópula t com 5 graus de liberdade**



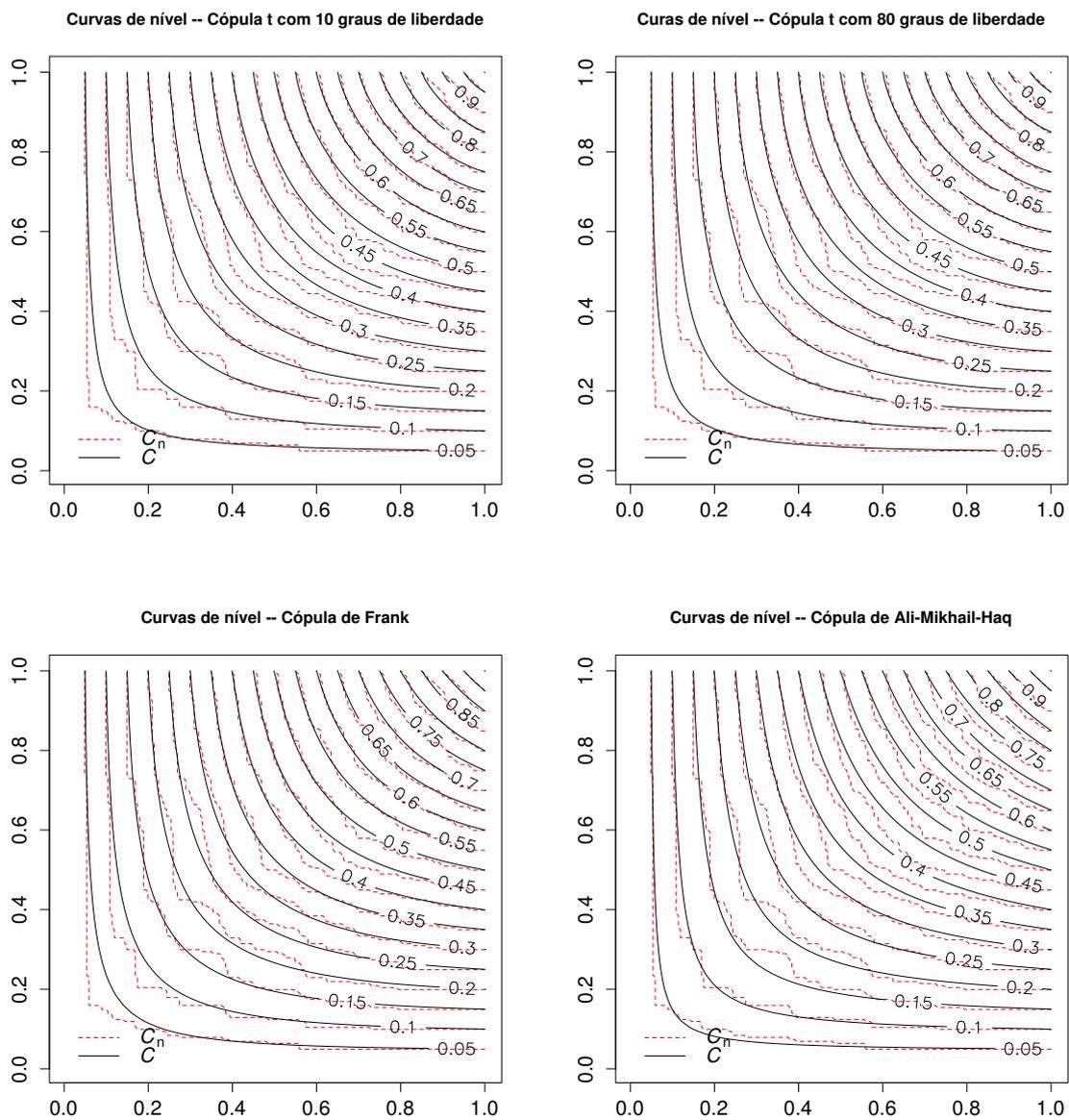


Figura 5.2: Comparação entre as curvas de nível das cópulas de  $\tilde{C}$  e  $C_n$ .

cópula é levada em consideração na resolução da integral de convolução – ver Capítulo 3), no entanto, determinamos tal capital com base no algoritmo apresentado no Capítulo 3, e tal algoritmo não exige a escolha da cópula, pois a distribuição da soma  $Z$  é feita com base nas observações de  $X + Y$ , dispensando o uso da cópula. Agora no  $CR_{PROP;\xi^*}$  (para vários níveis de  $\xi^*$ ) a cópula está presente no cálculo e então para cada cópula diferente, será diferente o  $CR_{PROP;\xi^*}$ . Analisamos então o  $CR_{PROP;\xi^*}$  (para vários níveis de  $\xi^*$ ) com a cópula escolhida, i.e., a Gaussiana com  $\rho = 0.4552$ . Os resultados são vistos na Tabela 5.2.

Por último, nessa seção, calculamos os CR pelo método proposto com todas as cópulas estimadas de  $\tilde{C}$  a fim de comparar os capitais resultantes. Comparamos os comportamentos do  $CR_{PROP;\xi^*}$ , variando  $\xi^*$ , obtidos usando as cópulas  $C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  e  $C_7$  e com o obtido usando a cópula escolhida  $C_1$ . Os resultados são vistos na Figura 5.3.

Tabela 5.2: Valores dos CR's com a cópula escolhida.

$\xi^*$	$CR_{PROP;\xi^*}$		
0.1	2.757391		
0.2	3.160975		
0.3	3.561636		
0.4	3.890347		
0.5	4.162816	$CR_{SOMA}$	5.220274
0.6	4.39823	$CR_{CONV}$	3.64003
0.7	4.611219		
0.8	4.812946		
0.9	5.01286		
1	5.220274		

Podemos observar alguns fatos a partir da Figura 5.3. Os CR propostos utilizando as cópulas  $C_4$  e  $C_5$  tem um comportamento muito próximo com o CR proposto a partir da cópula  $C_1$ . Isso parece ocorrer pela característica muito próxima dessas cópulas e também por serem todas da classe elíptica (Gaussiana e t com graus de liberdade, respectivamente, 10 e 80). O uso da cópula t com 1 grau de liberdade parece retornar o CR proposto mais distante do que aquele utilizando a cópula  $C_1$ . Essa cópula é, de fato, a que tem a maior distância da cópula empírica. Já as outras 5 cópulas, quando comparamos os CR propostos com o obtido da cópula  $C_1$ , têm diferenças relativamente pequenas (e as distâncias de tais cópulas com a empírica também são relativamente pequenas – todas na ordem de  $10^{-3}$ ). Cabe aqui dizer

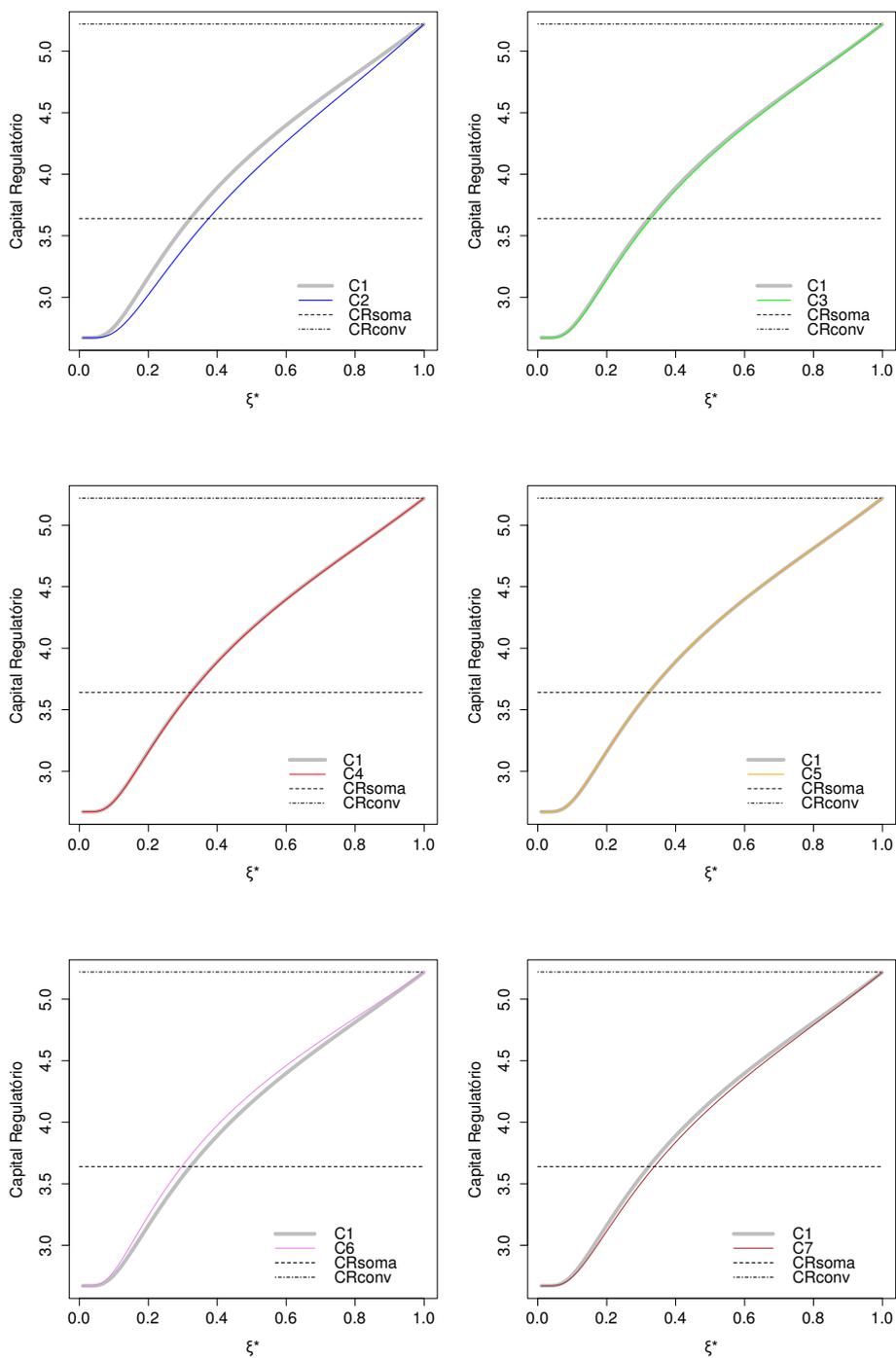


Figura 5.3: Comparação entre os CR proposto por diferentes cópulas com a cópula Gaussiana escolhida.

que isso talvez tenha ocorrido pela quantidade de dados gerados, que foram 200. Na prática, as instituições têm poucas observações, na ordem de 10 a 20, e aí a escolha da cópula se torna mais sensível.

## 5.2 Uma alternativa multivariada

Nas simulações feitas até agora nesse capítulo, estudamos alguns comportamentos simulados somente para o caso bivariado. No método proposto, uma desvantagem é que não parece ser trivial a sua extensão para o caso multivariado. Isso se dá pois um dos pressupostos é que se as perdas em questão tem dependência perfeita negativa, então devemos alocar o máximo dos CR marginais. No entanto, se tivermos três perdas, não é possível que elas tenham todas dependência perfeita negativa entre si. Ainda mais, não é possível que três ou mais perdas tenham, todas entre si, dependência negativa.

Uma alternativa multivariada é estudada nessa seção, supondo que a instituição financeira tenha quatro perdas, digamos,  $X$ ,  $Y$ ,  $W$  e  $Z$ . Com isso, usando o método proposto que é bivariado, podemos aplicar o método para dois pares de variáveis perdas e somar os capitais.

Por exemplo, utilizamos os método para  $X$  e  $Y$  e depois para  $W$  e  $Z$  e somamos os capitais obtidos, digamos,  $CR_{X,Y}$  e  $CR_{W,Z}$ . Feito dessa maneira modelamos a dependência entre  $X$  e  $Y$  e entre  $W$  e  $Z$ , mas não modelamos a dependência entre  $\{X, Y\}$  e  $\{W, Z\}$ . Uma questão que fica em aberto nessa dissertação é, se feito dessa forma, estaremos considerando, assim como no método do somatório, que  $\{X, Y\}$  e  $\{W, Z\}$  são perfeitamente dependentes.

Note que, tendo 4 variáveis perdas  $X$ ,  $Y$ ,  $W$  e  $Z$ , podemos juntar 2 a 2 e obter 6 possíveis combinações diferentes. Um pergunta que surge é:

“Quais variáveis combinar?”

É evidente que juntando pares de diferentes variáveis, teremos um diferente CR final. Nessa seção, fazemos um estudo de simulação para analisar alguns comportamentos e darmos algumas respostas para essa questão. Fixamos as seguintes distribuições para as 4 variáveis perdas:

$$X \sim Weibull(1.5, 1.25)$$

$$Y \sim Lognormal(0, 0.5)$$

$$W \sim Weibull(1, 4)$$

$$Z \sim Lognormal(1, 0.8)$$

Como feito no Capítulo 4, o CR total proposto por nós para as perdas  $X$  e  $Y$  é como na

equação abaixo:

$$CR_{PROP}(p; \xi^*) = \min(CR(X), CR(Y)) \left( \frac{p}{p^+} \right)^{1/tg(\frac{\pi}{2}\xi^*)} + \max(CR(X), CR(Y)). \quad (5.1)$$

Observando a equação acima do  $CR_{PROP}$ , note que estamos ponderando o mínimo dos capitais marginais através de um termo onde está a informação da dependência entre  $X$  e  $Y$  e também a quantificação da opinião  $\xi^*$ .

Para dar possíveis respostas para a pergunta feita acima (“quais variáveis combinar”) devemos levar em conta alguns aspectos como, quais CR marginais,  $CR(X)$ ,  $CR(Y)$ ,  $CR(W)$  e  $CR(Z)$ , são mais próximos (para não haver uma grande diferença entre o  $\min(CR(i), CR(j))$  e  $\max(CR(i), CR(j))$ ,  $i, j = X, Y, W$  e  $Z, i \neq j$ ) e também quais são as variáveis mais dependentes (pois a dependência influencia no CR proposto final).

Se o mínimo e o máximo dos CR marginais de duas perdas selecionadas forem muito distantes, independentemente do grau de dependência das v.a.'s, o CR retornado pelo método proposto será próximo do máximo, justificando ainda mais o porquê levamos em consideração o fato das distâncias entre os CR marginais das 4 perdas.

Sendo assim, analisamos 2 diferentes casos, com 2 diferentes situações cada um. Os 2 casos são descritos a seguir.

### Caso 1

Simulamos valores das variáveis de acordo com as distribuições descritas acima e de acordo com as situações abaixo. Nesse primeiro caso, comparamos as seguintes situações:

- i) Selecionamos as variáveis mais correlacionadas e com CR marginais menos próximos (digamos  $X$  com  $W$  e  $Y$  com  $Z$ ).
- ii) Selecionamos as variáveis menos correlacionadas e com CR marginais mais próximos (digamos  $X$  com  $Y$  e  $W$  com  $Z$ ).

Sendo assim, simulamos valores das variáveis  $X$  e  $W$  através da cópula Gaussiana com parâmetro  $\rho = 0.7$ , e pelo aspecto de suas distribuições, os CR marginais serão distantes, conforme mostra a Tabela 5.3. Independentemente das variáveis  $X$  e  $W$ , simulamos valores das variáveis  $Y$  e  $Z$  também de uma cópula Gaussiana com  $\rho = 0.7$ , e também pelo aspecto

Tabela 5.3: CR marginais e correlações lineares das observações de  $X$ ,  $Y$ ,  $W$  e  $Z$ . Caso 1.

CR(X)	3.457211	$\rho$	X	Y	W	Z
CR(Y)	3.410112	X	1	0.0087	0.6634	0.0147
CR(W)	23.36693	Y	0.0087	1	0.0056	0.6397
CR(Z)	26.69721	W	0.6634	0.0056	1	0.0043
		Z	0.0147	0.6397	0.0043	1

de suas respectivas distribuições, seus CR marginais são distantes, como também mostrado na Tabela 5.3.

Note que simulamos os valores das variáveis supracitadas de tal modo que  $CR(X)$  e  $CR(Y)$  fossem próximos e ambos ditantes de  $CR(W)$  e  $CR(Z)$  (que por sua vez, são próximos entre si). Feito isso, temos um vetor de observações para todas as variáveis e podemos calcular o CR proposto para as duas situações acima *i*) e *ii*).

Na situação *i*), calculamos o CR proposto para as perdas  $X$  com  $W$  e para  $Y$  com  $Z$ , variando o índice  $\xi^*$ , denotados respectivamente por,  $CR_{PROP;\xi^*(X,W)}$  e  $CR_{PROP;\xi^*(Y,Z)}$ . Sendo assim, obtemos a soma dos dois capitais como

$$CR_{\xi^*}^{(+)} = CR_{PROP;\xi^*(X,W)} + CR_{PROP;\xi^*(Y,Z)}.$$

**Observação 5.1.** A notação  $CR_{\xi^*}^{(+-)}$  se deve ao fato de estarmos selecionando as v.a.'s mais correlacionadas (+) e com CR marginais menos próximos (-). A partir daqui, esse tipo de notação será adotado, sendo o primeiro sinal o que se refere à correlação e o segundo à proximidade dos CR marginais.

Analogamente, calculamos o CR para a situação *ii*) com a finalidade de comparar com o CR obtido da situação *i*). Ou seja, calculamos o CR para as perdas  $X$  e  $Y$  e para  $W$  e  $Z$  (respectivamente,  $CR_{PROP;\xi^*(X,Y)}$  e  $CR_{PROP;\xi^*(W,Z)}$ ), obtendo a soma

$$CR_{\xi^*}^{(-+)} = CR_{PROP;\xi^*(X,Y)} + CR_{PROP;\xi^*(W,Z)}.$$

A Figura 5.4 ilustra os resultados obtidos desse estudo de simulação comparando  $CR_{PROP;\xi^*}^{(+-)}$  com  $CR_{PROP;\xi^*}^{(-+)}$ .

Observe na Figura 5.4 que, ao escolhermos a situação *i*), estamos sendo muito mais conservadores do que escolhendo a situação *ii*). Isso se dá pois na situação *ii*), escolhemos agrupar os pares menos correlacionados,  $\{X, Y\}$  e  $\{W, Z\}$ . Isso é refletido na probabilidade dos eventos de perda marginais ocorrerem ao mesmo tempo. Ou seja, a probabilidade  $p$  na

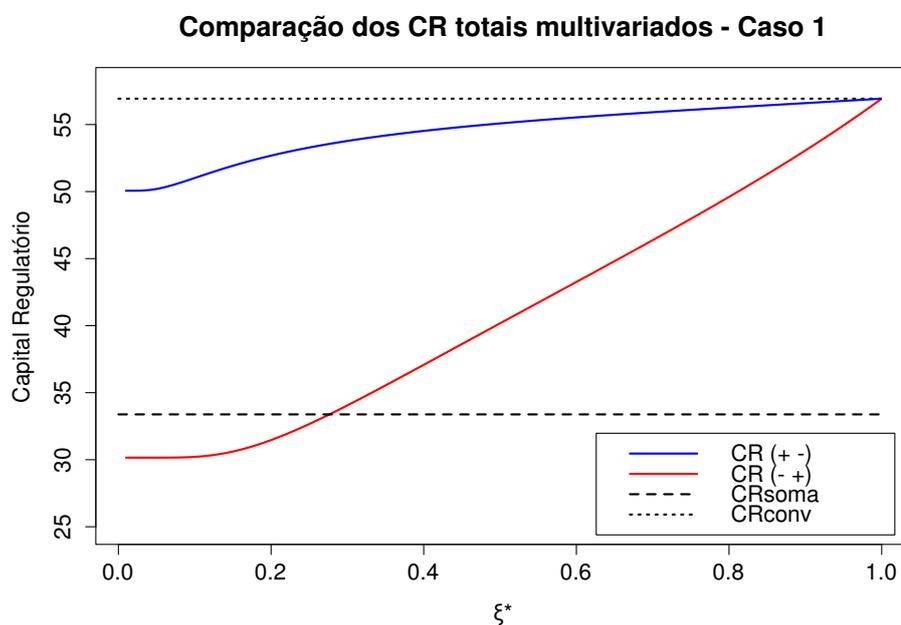


Figura 5.4: Comparação dos CR totais – Alternativa multivariada. Caso 1.

Tabela 5.4: Comparação dos CR totais – Alternativa multivariada. Caso 1.

$\xi^*$	$CR_{PROP;\xi^*}^{(+)}$ (situação i)	$CR_{PROP;\xi^*}^{(-)}$ (situação ii)	$CR_{CONV}$	$CR_{SOMA}$
0.1	51.01462	30.21119	33.38093	56.93146
0.3	53.77639	34.05232	33.38093	56.93146
0.5	55.08348	40.17224	33.38093	56.93146
0.7	55.91763	46.37493	33.38093	56.93146
0.9	56.59879	53.06639	33.38093	56.93146
→1	56.93146	56.93146	33.38093	56.93146

Equação 5.2 é baixa por conta dessa escolha, ponderando o mínimo dos CR marginais. Isto é, a probabilidade de ocorrerem as perdas inesperadas marginais nas unidades de risco com perda  $X$  e  $Y$ , ao mesmo tempo, é baixa (pois tem baixa dependência). Ainda mais, na situação *ii*), o mínimo e o máximo dos CR marginais são próximos, diminuindo ainda mais o CR final. O Exemplo 5.1, mais adiante, ilustra melhor essa ideia.

Alguns resultados numéricos podem ser analisados na Tabela 5.4.

□

## Caso 2

Contraopondo o Caso 1, esse caso aborda as seguintes situações:

- iii) Selecionamos as variáveis menos correlacionadas e com CR marginais menos próximos (digamos  $X$  com  $W$  e  $Y$  com  $Z$ ).
- iv) Selecionamos as variáveis mais correlacionadas e com CR marginais mais próximos (digamos  $X$  com  $Y$  e  $W$  com  $Z$ ).

Geramos novamente os dados das variáveis  $X$ ,  $Y$ ,  $W$  e  $Z$  com as mesmas distribuições supracitadas. É necessário simular novamente tais dados, pois mudamos a estrutura de dependência em relação ao Caso 1. Os dados foram gerados como segue.

Nesse caso, simulamos valores para  $X$  e  $Y$  a partir de uma cópula Gaussiana com  $\rho = 0.7$  e, independentemente, simulamos valores para  $W$  e  $Z$  também de uma cópula Gaussiana com parâmetro  $\rho = 0.7$ .

O que queremos com esse estudo (Caso 1 e Caso 2) é estudar a influência de escolher pares de variáveis com CR marginais mais próximos e a influência de escolher pares de variáveis mais dependentes.

As correlações lineares e os valores do CR marginais para cada perda são vistos na Tabela 5.5.

De forma análoga ao Caso 1, mantendo as notações análogas, para o Caso 2 obtemos os seguintes capitais, afim de compará-los:

$$CR_{\xi^*}^{(--)} = CR_{PROP;\xi^*(X,W)} + CR_{PROP;\xi^*(Y,Z)}.$$

$$CR_{\xi^*}^{(++)} = CR_{PROP;\xi^*(X,Y)} + CR_{PROP;\xi^*(W,Z)}.$$

Tabela 5.5: CR marginais e correlações lineares das observações de  $X, Y, W$  e  $Z$ . Caso 2.

CR(X)	3.457211	$\rho$	X	Y	W	Z
CR(Y)	3.509602	X	1	0.6764	0.0088	0.0147
CR(W)	22.78797	Y	0.6764	1	0.0058	0.0045
CR(Z)	26.69721	W	0.0088	0.0056	1	0.6388
		Z	0.0147	0.6397	0.0043	1

Vale ressaltar que, mesmo algumas notações sendo exatamente igual ao Caso 1, o que é diferenciado é a estrutura de dependência entre as variáveis. A proximidade dos CR marginais continua a mesma pois as distribuições continuam as mesmas, no entanto, geramos dados para  $X$  e  $Y$  dependentes e, independentemente, para  $W$  e  $Z$  dependentes.

A Figura 5.5 ilustra os resultados obtidos desse estudo de simulação comparando  $CR_{PROP;\xi^*}^{(-)}$  com  $CR_{PROP;\xi^*}^{(+)}$ .

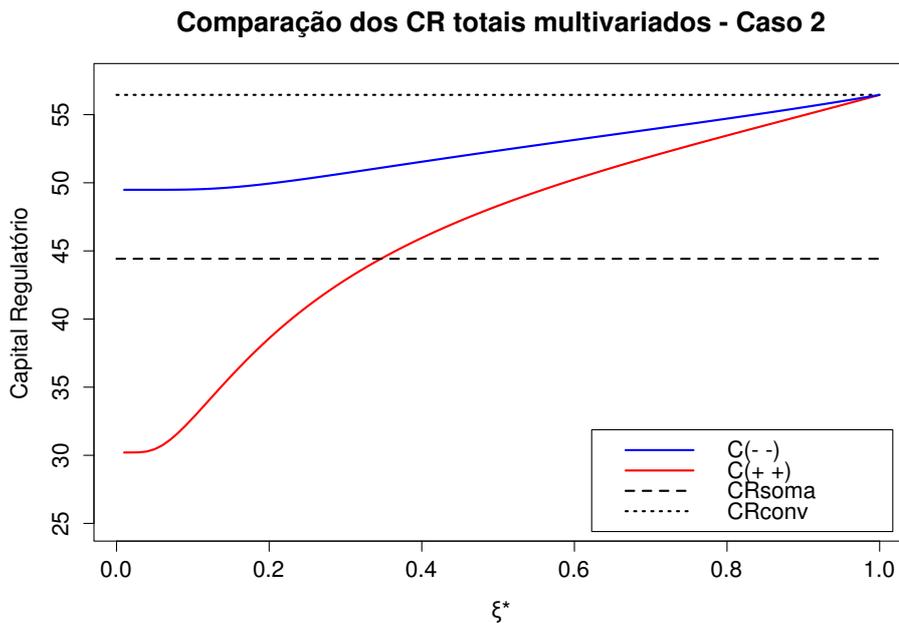


Figura 5.5: Comparação dos CR totais – Alternativa multivariada. Caso 2.

Note na Figura 5.5 que os capitais abordados nas situações  $iii)$  e  $iv)$  estão mais próximos do que os abordados nas situações  $i)$  e  $ii)$  visto na Figura 5.4.

Observe na Figura 5.5 que o CR proposto pela alternativa multivariada, escolhendo a situação  $iii)$ , é mais conservador do que escolhendo a situação  $iv)$ . Isso se dá pelo mesmo fato discutido no Caso 1 e ilustrado pelo Exemplo 5.1 mais adiante. Tal fato é a proximidade dos

Tabela 5.6: Comparação dos CR totais – Alternativa multivariada. Caso 2.

$\xi^*$	$CR_{PROP;\xi^*}^{(--)} \text{ (situação iii)}$	$CR_{PROP;\xi^*}^{(++)} \text{ (situação iv)}$	$CR_{CONV}$	$CR_{SOMA}$
0.1	49.51146	32.73751	44.42494	56.45199
0.3	50.71023	42.87624	44.42494	56.45199
0.5	52.35743	48.31329	44.42494	56.45199
0.7	53.92040	51.92841	44.42494	56.45199
0.9	55.53943	54.95297	44.42494	56.45199
$\rightarrow 1$	56.45199	56.45199	56.45199	56.45199

CR marginais.

Alguns resultados numéricos podem ser analisados na Tabela 5.6.

□

Tanto no Caso 1 quanto no Caso 2, quando optamos por escolher o par de variáveis com CR marginais mais próximos, de fato, estamos aumentando o intervalo de possíveis valores para o CR final, isto pode ser visto tanto na Figura 5.4 quanto na Figura 5.5. No entanto, nada nos garante que  $CR_{PROP;\xi^*}^{(+-)}$  e  $CR_{PROP;\xi^*}^{(-+)}$  (Caso 1), bem como  $CR_{PROP;\xi^*}^{(--)}$  (Caso 2) e  $CR_{PROP;\xi^*}^{(++)}$ , não se cruzarão em outra situação com cópulas ou distribuições marginais diferentes. Então não podemos afirmar que sempre teremos um CR final (pelo método proposto multivariado) escolhendo o par de variáveis com CR marginais mais próximos menor do que o CR final escolhendo o par com CR marginais menos próximos. Isso ocorreu nesse estudo de simulação, mas não é geral.

**Exemplo 5.1.** *Esse exemplo ilustra a comparação entre duas situações quando temos somente 4 variáveis perdas. A primeira situação é a escolha de pares com CR marginais mais próximos e a segunda é a escolha de pares com CR marginais mais distantes.*

*Suponha então que tenhamos 4 perdas  $X, Y, W$  e  $Z$  cujos CR marginais são, respectivamente,  $CR(X) = 300\,000$ ,  $CR(Y) = 500\,000$ ,  $CR(W) = 10\,000\,000$  e  $CR(Z) = 15\,000\,000$ .*

*Na situação 1 vamos agrupar os pares  $(X, Y)$  e  $(W, Z)$  e na situação 2 vamos agrupar os pares  $(X, W)$  e  $(Y, Z)$ .*

*O CR pelo método proposto (bivariado) é:*

$$CR_{PROP}(p; \xi^*) = \min(CR(i), CR(j)) \left( \frac{p}{p^+} \right)^{1/tg(\frac{\pi}{2}\xi^*)} + \max(CR(i), CR(j)), \quad (5.2)$$

em que  $i$  e  $j$  estão representando as perdas acima nas situações 1 ou 2.

Nesse exemplo, queremos estudar o comportamento do CR proposto final multivariado somente analisando a proximidade dos CR marginais, então vamos desconsiderar a estrutura de dependência entre as perdas em questão, ou seja, o termo  $\left(\frac{p}{p^+}\right)^{1/\text{tg}(\frac{\pi}{2}\xi^*)}$ . Vamos denotá-lo por  $l$  e ele será genérico nas situações estudadas.

**Situação 1:** Temos os capitais:

$$CR_1 = \min(CR(X), CR(Y))l + \max(CR(X), CR(Y)) = 300\,000\,l + 500\,000$$

e

$$CR_2 = \min(CR(W), CR(Z))l + \max(CR(W), CR(Z)) = 10\,000\,000\,l + 15\,000\,000.$$

Como, em ambos as equações,  $0 \leq l \leq 1$ , então:

$$500\,000 \leq CR_1 \leq 800\,000$$

e

$$15\,000\,000 \leq CR_2 \leq 25\,000\,000.$$

Então, a soma dos capitais tem a seguinte relação:

$$15\,500\,000 \leq CR_1 + CR_2 \leq 25\,800\,000.$$

**Situação 2:** Analogamente a Situação 1, temos:

$$CR_3 = \min(CR(X), CR(W))l + \max(CR(X), CR(W)) = 300\,000\,l + 10\,000\,000$$

e

$$CR_4 = \min(CR(Y), CR(Z))l + \max(CR(Y), CR(Z)) = 500\,000\,l + 15\,000\,000.$$

Temos que  $0 \leq l \leq 1$ , então:

$$10\,000\,000 \leq CR_3 \leq 10\,300\,000$$

e

$$15\,000\,000 \leq CR_4 \leq 15\,500\,000.$$

Então, a soma dos capitais tem a seguinte relação:

$$25\,000\,000 \leq CR_3 + CR_4 \leq 25\,800\,000.$$

Então, de acordo com o exemplo acima, escolhendo os pares de perdas com CR marginais mais próximos, o CR proposto final multivariado terá um intervalo maior de possíveis valores em relação ao CR proposto final multivariado escolhendo os pares de perdas com CR marginais menos próximos.

No entanto, como dissemos, não temos a garantia de que feito assim, sempre teremos um CR final menor do que o outro. Os capitais dos Caso 1 e Caso 2 podem se cruzar, e o que determinará esse cruzamento será a estrutura de dependência entre as variáveis em questão e também as estimativas das distribuições marginais para cada perda.

## Capítulo 6

# Conclusões

Em vista de tudo o que foi apresentado e discutido até aqui, é interessante frisar que o presente trabalho agrega à literatura sobre alocação de capital para RO uma nova metodologia de modelagem da dependência estocástica presente entre as variáveis que caracterizam as perdas em distintas classes de risco (em que tais variáveis são obtidas através do LDA) para retornar um capital regulatório mais coerente com a realidade da instituição financeira do que o método usual e proposto em 2004 pelo Basileia II (método do somatório).

A maneira como o cálculo do CR para RO é feita, está estruturada em bases e suposições que fogem à realidade do problema bancário que abordamos durante toda a nossa dissertação sobre o assunto. Vimos que essa maneira, formalizada em 2004 pelo Comitê de Basileia, com o intuito de ser conservador pela escassez e por sua preocupação recente no âmbito financeiro.

Então, no nosso trabalho estudamos duas alternativas ao método do somatório (maneira usual do cálculo), o método da convolução já presente na literatura há algum tempo e a nossa proposta de cálculo de tal capital. Então, discutindo as vantagens da metodologia proposta apresentada no Capítulo 4, vemos que tal metodologia tem como base uma série de pressupostos que julgamos interessantes para alocação de capital. Uma vantagem importante no nosso método é que, como foi discutido, incluímos em um único índice, com diversas propriedades, a quantificação da opinião de especialistas tanto das instituições quanto dos seus reguladores, facilitando um acordo entre ambos na alocação do CR. É importante também dizer que no método proposto a família de funções que obedecem as características discutidas no Capítulo 4 está em aberto; foi dada por nós aqui nesse trabalho uma única família que possui algumas propriedades condizentes com o problema, mas é possível determinar (ou escolher) outras famílias com outras propriedades e até mesmo podendo ter mais de um índice (podendo traduzir de uma maneira ainda mais eficiente a opinião, ou opiniões, dos

especialistas). O método proposto se baseia na probabilidade de dois eventos de perdas inesperadas ocorrerem conjuntamente, e isso também é tido como vantagem, pois é aí que a modelagem da dependência reside e também é aí que o conceito da determinação da função cópula está presente.

Deve-se dizer também que a metodologia proposta aborda o caso bivariado. Isso traz algumas complicações no ponto de vista institucional pois, em nível 1 (pelo Basileia II), há um total de 56 unidades de risco. A extensão para o caso multivariado do método proposto não parece ser trivial, mas de um modo geral, as extensões do caso bivariado para um multivariado em diversos problemas não são triviais (ainda mais quando estamos abordando o conceito de cópula multivariada). Vide por exemplo o método da convolução que apresentamos no Capítulo 3; se trabalharmos com três ao invés de duas variáveis, teremos que determinar a distribuição da soma de três variáveis e que aparentemente são perdidas informações da estrutura de dependência duas a duas e que, analiticamente, o método torna-se impraticável. Porém a extensão no método da convolução é direta, basta usar uma cópula com a dimensão desejada e solucionar as múltiplas integrais envolvidas no problema. Já em termos de simulação, o método da convolução multivariado aparenta é de fácil implementação. Voltando ao método proposto, como desvantagem, é apresentado para o caso bivariado, ficando em aberto sua extensão. Porém, como alternativa multivariada, é possível agrupar as variáveis envolvidas (POA's) duas a duas e utilizá-lo como apresentado no nosso trabalho e por fim somar os capitais resultantes para se obter o CR total para as 56 unidades de risco, como simulado no Capítulo 5.

No cenário financeiro, o que não deve ser ignorado é que a dependência entre as perdas, seja ela captada duas a duas ou de alguma outra forma, deve ser levada em consideração, deve ser modelada. Apresentamos no nosso trabalho uma ferramenta muito difundida para tal, a teoria de cópulas. O modo como é feito hoje fixa uma estrutura de dependência entre as variáveis que não é sustentada por mais nenhum argumento, mas vemos que é, de fato, muito delicado quando estamos modelando perdas no sistema financeiro. Parece ser plausível ser, até certo ponto, conservador.

No nosso trabalho, em termos de estimação, não abordamos durante o nosso trabalho métodos para tal além daqueles que estimam os parâmetros da cópula. Na prática, as instituições financeiras devem estimar uma série de parâmetros desde as distribuições das severidades e frequência, como os opvar's das POA's, suas respectivas esperanças e ainda determinar uma cópula (e estimar seus parâmetros) para modelar a dependência entre tais POA's. No entanto, existem diversos trabalhos no que tange estimação de parâmetros e

suas peculiaridades, assim como a estimação de uma determinada cópula. Pode-se utilizar tanto métodos frequentistas como Bayesianos, entre outros (isso fica em aberto na nossa abordagem), mas mesmo que se utilize métodos frequentistas, a opinião de especialistas é expressa em tal abordagem.

Como sugestões de trabalhos futuros, pode-se estudar os casos em que o opvar falha à propriedade da subaditividade (ver, e.g., [Giacometti \(2008\)](#)). Pode-se, ainda, estudar alternativas ao LDA padrão apresentado no Capítulo 1 tornando os pressupostos para o LDA mais realísticos, reformulando-os. Em diversos trabalhos, vimos que as medidas de VaR são muito sensíveis ao método que se usa para estimá-las (pode-se utilizar, por exemplo, estimativas Bayesianas ou semi ou não-paramétricas – ver, e.g., [Alemany et al. \(2013\)](#)) e ainda pode-se trabalhar com VaR's condicionais (ver, e.g., [Chun et al. \(2012\)](#)). Por fim, ainda como sugestão, pode-se utilizar teoria de valores extremos juntamente com cópulas para modelar o RO (ver, e.g., [Chavez-Demoulin et al. \(2013\)](#)).

# Referências Bibliográficas

- ALEMANY, R., BOLANCÉ, C. & GUILLÉN, M. (2013). A nonparametric approach to calculating value-at-risk. *Insurance: Mathematics and Economics* 52 255–262.
- ALEXANDER, C. (2003). Operational risk aggregation. *Operational Risk* .
- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. & HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance* .
- BANCO CENTRAL DO BRASIL, . (2006). *Resolução nº 3.380*. Acesso em 16/04/2013, URL <http://www.bcb.gov.br/pre/normativos/busca/normativo.asp?tipo=res&ano=2006&numero=3380>.
- BANCO CENTRAL DO BRASIL, . (2009). *Comunicado 019028*. Acesso em 03/05/2013, URL <https://www3.bcb.gov.br/normativo/detalharNormativo.do?method=detalharNormativo&N=109093617>.
- BARLOW, R. E. & PROSCHAN, F. (1975). Statistical theory of reliability and life testing: probability models. Tech. rep., DTIC Document.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (1997). *Core Effective Principles in Banking Supervision*. Bank for International Settlements. Acesso em 15/04/2013, URL <http://www.bis.org/publ/bcbs30a.htm>.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (2001a). *Operational risk*. Bank for International Settlements. Acesso em 15/04/2013, URL <http://www.bis.org/publ/bcbsca07.pdf>.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (2003). *Third Consultative Paper: The New Basel Capital Accord*. Bank for International Settlements. Acesso em 06/07/2013, URL <http://www.bis.org/bcbs/bcbscp3.pdf>.

- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, . (2004). *International convergence of capital measurement and capital standards: a revised framework*. Bank for International Settlements. Acesso em 15/04/2013, URL <http://www.bis.org/publ/bcbs107.htm>.
- BLOCK, H. W., SAVITS, T. H. & SHAKED, M. (1982). Some concepts of negative dependence. *The Annals of Probability* .
- BÖCKER, K. & KLÜPPELBERG, C. (2008). Modelling and measuring multivariate operational risk with lévy copulas. *Journal of Operational Risk* .
- CHAVEZ-DEMOULIN, V., EMBRECHTS, P. & HOFERT, M. (2013). An extreme value approach for modeling operational risk losses depending on covariates .
- CHAVEZ-DEMOULIN, V., EMBRECHTS, P. & NEŠLEHOVÁ, J. (2006). Quantitative models for operational risk: extremes, dependence and aggregation. *Journal of Banking & Finance* .
- CHUN, S. Y., SHAPIRO, A. & URYASEV, S. (2012). Conditional value-at-risk and average value-at-risk: Estimation and asymptotics. *Operations Research* .
- COLEMAN, R. (2000). Using modelling in operational risk management. *self* .
- COLEMAN, R. (2003). Statistical techniques and qualitative adjustments for lda. *ORRFXVII at BaFin in Bonn* .
- CRUZ, M. G. (2002). *Modeling, measuring and hedging operational risk*. John Wiley & Sons New York.
- DALL'AGLIO, G. (1956). Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze* .
- DE FONTNOUVELLE, P., DEJESUS-RUEFF, V., JORDAN, J. S. & ROSENGREN, E. S. (2006). Capital and risk: New evidence on implications of large operational losses. *Journal of Money, Credit and Banking* 1819–1846.
- DEHEUVELS, P. (1979). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. un test non paramétrique d'indépendance. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.(5)* .
- DELOACH, J. W. & ANDERSEN, A. (2000). *Enterprise-wide risk management: strategies for linking risk and opportunity*. Financial Times Prentice Hall.

- DOS SANTOS SILVA, R. & LOPES, H. F. (2008). Copula, marginal distributions and model selection: a bayesian note. *Statistics and Computing* 18 313–320.
- DURRELMAN, V., NIKEGHBALI, A. & RONCALLI, T. (2000). Which copula is the right one.
- EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F. & MCNEIL, A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *Handbook of heavy tailed distributions in finance* .
- EMBRECHTS, P., MCNEIL, A. & STRAUMANN, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond* .
- EMBRECHTS, P. & PUCETTI, G. (2006). Aggregating risk capital, with an application to operational risk. *The Geneva Risk and Insurance Review* .
- FÉRON, R. (1956). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, cas de l'espace à trois dimensions. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* .
- FRACHOT, A., GEORGES, P. & RONCALLI, T. (2001). Loss distribution approach for operational risk. *Manuscript. Groupe de Recherche Operationnelle, Credit Lyonnais, France. April. <http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/lda.pdf>* .
- FRACHOT, A., RONCALLI, T. & SALOMON, E. (2004). The correlation problem in operational risk. *OperationalRisk Risk's Newsletter* .
- FRAHM, G., JUNKER, M. & SZIMAYER, A. (2003). Elliptical copulas: applicability and limitations. *Statistics & Probability Letters* .
- FRÉCHET, M. (1951). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann. Univ. Lyon Sect. A* .
- GIACOMETTI, R. (2008). *Aggregation issues in operational risk*. Ph.D. thesis, School of Management, Syracuse University.
- HÖFFDING, W. (1941). Masstabinvariante korrelationsmasse für diskontinuierliche verteilungen. *Arkiv für mathematischen Wirtschaften und Sozialforschung* .
- JOE, H. (1997). *Multivariate models and dependence concepts*, vol. 73. CRC Press.
- JOE, H. & XU, J. J. (1996). The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Tech. rep., Technical report.

- JORION, P. (1997). *Value at risk: the new benchmark for controlling market risk*, vol. 2. McGraw-Hill New York.
- KIMELDORF, G. & SAMPSON, A. R. (1989). A framework for positive dependence. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* .
- KÖRNERT, J. (2003). The barings crises of 1890 and 1995: causes, courses, consequences and the danger of domino effects. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* .
- LEHMANN, E. L. (1966). Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics* .
- LIMA, E. L. (1995). *Curso de análise*, vol. 1. Instituto de matemática pura e aplicada.
- MARSHALL, A. W. & OLKIN, I. (1988). Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association* .
- NELSEN, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. Springer.
- PRESSMAN, S. (1997). Rogue trader: How i brought down barings bank and shook the financial world-leeson, n.
- SILVA, M. F. (2005). *Estimação e teste de hipótese baseados em verossimilhanças perfiladas*. Ph.D. thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.
- SKLAR, M. (1959). *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*. Université Paris 8.
- SMITH, M. S. (2011). Bayesian approaches to copula modelling .
- VIOLA, M. L. L. (2009). Tipos de dependência entre variáveis aleatórias e teoria de cópulas. .
- YAN, J. (2007). Enjoy the joy of copulas: With a package copula. *Journal of Statistical Software* .