
Uma aproximação do tipo Euler-Maruyama para o
processo de Cox-Ingersoll-Ross

Ricardo Felipe Ferreira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Uma aproximação do tipo Euler-Maruyama para o processo de Cox-Ingersoll-Ross

Ricardo Felipe Ferreira

***Orientador:* Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Júnior**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística – Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

USP/UFSCar – São Carlos
Março de 2015

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

F383ae Ferreira, Ricardo Felipe.
Uma aproximação do tipo Euler-Maruyama para o
processo de Cox-Ingersoll-Ross / Ricardo Felipe Ferreira. --
São Carlos : UFSCar, 2015.
47 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2015.

1. Processo estocástico. 2. Cox-Ingersoll-Ross, Processo
de. 3. Aproximação do tipo Euler-Maruyama. 4. Simulação
Monte Carlo. I. Título.

CDD: 519.2 (20ª)

RICARDO FELIPE FERREIRA

UMA APROXIMAÇÃO DO TIPO EULLER - MARUYAMA PARA O PROCESSO DE COX-INGERSOLL-ROSS

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

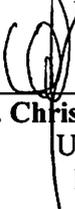
Aprovado em 26 de fevereiro de 2015.

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Junior
ICMC-USP
Presidente

Prof. Dr. Jack Baczynski
LNCC, por videoconferência
Membro



Prof. Dr. Christian Horácio Olivera
UNICAMP
Membro

À minha irmã,
para que lhe sirva de inspiração.

Agradecimentos

Inicialmente agradeço ao meu orientador Dorival Leão Pinto Júnior por aceitar dividir comigo um pouco de sua sabedoria e o verdadeiro responsável por este trabalho.

Ao professor Alberto Masayoshi Faria Ohashi, meus sinceros agradecimentos, pelos preciosos comentários durante o exame de qualificação e pelas referências indicadas, estas foram valiosíssimas e impulsionaram a realização desta pesquisa. Agradeço também ao professor Pablo Martín Rodríguez, por sua leitura meticulosa da primeira versão deste trabalho, pelos sinceros conselhos e salúteis diálogos.

Meus agradecimentos aos colegas e amigos com os quais estudei a teoria da análise estocástica: Vinícius Siqueira, Victor Sung, Rafael Ceregatti e Francys Souza. Suas contribuições à pesquisa aqui realizada foram decisivas e presentes desde o início. Um agradecimento especial a Vinícius (o Cabeça) por sua disposição indelével em debater e ensinar análise estocástica, sua amizade e suas palavras auspiciosas.

Agradeço à minha amada mãe Helena Maria Bettiol Ferreira pelo amor incondicional e, sobretudo, pelo infinito estímulo aos estudos. À minha irmã Patrícia Ferreira Girao, a qual este trabalho é dedicado, sou grato por toda disponibilidade e pela paciência incomensurável durante este período. Aos meu avós, Ovídio Bettiol e Maria Carlos de Oliveira Bettiol, agradeço pelos exímios e inspiradores seres humanos que são. Ao meu amigo, já membro da família, e irmão de coração Fellipe

Bruno de Oliveira sou grato pelos debates filosóficos, políticos e culturais, pelos momentos insanos e pelo humor espirituoso. Agradeço também ao meu primo Luiz Felipe Lampa Risse, que a cada conversa sobre ciência, convence-me de que estou no caminho correto. A ele sou grato pela amizade e pela sinceridade de sempre, espero que este trabalho o motive em aventurar-se pelos caminhos da ciência.

Aos bons amigos que fizeram minha vida mais feliz nesse período, pela presença e por me lembrarem que nem só de matemática vive uma alma: Driely Oliveira, Jamielli Pereira, Jonathan Mathias, Evelyny Barroso, Vanessa Masitéli, Daiane Zuanetti, João Alves, Alex Fermino, Aldo Gonçalves, Bruno Machado, Felipe Aleshinsky, Amélia Fernandes, Cristel Tapia, Leonardo Celeghini, Guilherme Poppi, Victor Zoré, Marcia Silva, João Poloniato, Arthur Necchi, Lia Hanna, Ana Chiaranda e Lúcia Helena. Sou extremamente grato.

Um agradecimento especial ao amigo, matemático e boiadeiro Roberto Carlos Alvarenga Jr. por incentivar-me a seguir a vida acadêmica e com o qual sempre nutri um profícuo diálogo que estimulou constantes revisões na minha pesquisa e na minha maneira de “fazer”ciência.

Finalmente, mas não menos importante, sou grato ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela inestimável ajuda na viabilização desse projeto.

“Não sei como o mundo me vê, mas eu me sinto como um garoto brincando na praia, divertindo-me com o fato de encontrar de vez em quando um seixo mais liso ou uma concha mais bonita, mas tendo sempre diante de mim, ainda por descobrir, um grande oceano de verdades.”

(Isaac Newton)

Resumo

Nesta dissertação de mestrado nós trabalhamos com o processo de Cox-Ingersoll-Ross, que foi originalmente proposto por John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll Jr. e Stephen A. Ross em 1985. Este processo é amplamente utilizado em modelagem financeira, por exemplo, para descrever a evolução de taxas de juros ou como o processo de volatilidade no modelo de Heston. A equação diferencial estocástica que define este processo não possui solução fechada, logo faz-se necessária a aproximação do processo via algum método numérico. Na literatura diversos trabalhos propõem aproximações baseadas em esquemas de discretização intervalar. Nós aproximamos o processo de Cox-Ingersoll-Ross através de um método numérico do tipo Euler-Maruyama baseado na discretização aleatória proposta por [Leão e Ohashi \(2013\)](#) sob a condição de Feller. Neste contexto, mostramos que esta aproximação possui uma ordem de convergência exponencial e utilizamos técnicas de simulação Monte Carlo para comparar resultados numéricos com valores teóricos.

Palavras-chave: Processo de Cox-Ingersoll-Ross, aproximação do tipo Euler-Maruyama e simulação Monte Carlo.

Abstract

In this master's thesis we work with Cox-Ingersoll-Ross (CIR) process. This process was originally proposed by John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll Jr. and Stephen A. Ross in 1985. Nowadays, this process is widely used in financial modeling, e.g. as a model for short-time interest rates or as volatility process in the Heston model. The stochastic differential equation (SDE) which defines this model does not have closed form solution, so we need to approximate the process by some numerical method. In the literature, several numerical approximations has been proposed based in interval discretization. We approximate the CIR process by Euler-Maruyama-type method based in random discretization proposed by [Leão e Ohashi \(2013\)](#) under Feller condition. In this context, we obtain an exponential convergence order for this approximation and we use Monte Carlo techniques to compare the numerical results with theoretical values.

Keywords: Cox-Ingersoll-Ross process, Euler-Maruyama-type method and Monte Carlo simulation.

Sumário

Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xix
1 Introdução	1
2 Preliminares	7
2.1 Definições	7
2.2 Espaço de Hilbert	8
2.3 Movimento Browniano	10
2.4 Integral Estocástica	13
3 Processo de Cox-Ingersoll-Ross	21
3.1 O processo e suas propriedades	21
4 Aproximação do tipo Euler-Maruyama	25
4.1 Transformação do processo de Cox-Ingersoll-Ross	25
4.2 Discretização Aleatória	28
4.3 Aproximação do tipo Euler-Maruyama	30
5 Simulação	39
5.1 O Algoritmo	39
5.2 Resultados	40
6 Conclusão	43
Referências Bibliográficas	45

Lista de Figuras

4.1	Processo de saltos relativo a uma trajetória do movimento Browniano.	29
-----	--	----

Lista de Tabelas

1.1	Modelos de taxa de juros.	1
1.2	Modelos de volatilidade estocástica.	2
5.1	Simulação associada a um método do tipo Euler-Maruyama considerando uma discretização aleatória.	41

Introdução

Os modelos de equações diferenciais estocásticas (EDEs) são extremamente importantes e assumem um papel fundamental em diversas áreas de aplicação incluindo química, biologia, mecânica, economia e finanças. Na área financeira a incerteza do mercado e o grande número de variáveis envolvidas tornam as atividades financeiras arriscadas e a predição do mercado incerta. Neste contexto, a maioria dos modelos financeiros existentes buscam ajudar os investidores no gerenciamento do risco e utilizam as EDEs para descrever a evolução de certas variáveis financeiras como o preço do ativo, a taxa de juros ou a volatilidade das ações.

Os modelos de taxa de juros e de volatilidade estocástica são amplamente populares no mercado financeiro e muitos foram os modelos desenvolvidos ao longo do tempo. É neste sentido que listamos na tabela 1.1 alguns dos principais modelos de taxa de juros e as equações diferenciais estocásticas que os definem.

Modelos de taxa de juros	Equação Diferencial Estocástica
Vasicek (1977)	$dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \epsilon dW_t$
Dothan (1978)	$dX_t = \kappa X_t dt + \epsilon dW_t$
Rendleman (1980)	$dX_t = \kappa X_t dt + \sigma X_t dW_t$
Courtadon (1982)	$dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \sigma X_t dW_t$
Cox <i>et al.</i> (1985)	$dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t$
Vasicek exponencial	$dX_t = X_t(\theta - \kappa \log(X_t)) dt + \sigma X_t dW_t$

Tabela 1.1: Modelos de taxa de juros.

Na tabela anterior o processo $X := \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ representa o valor da taxa de juros ao longo do tempo e sem perda de generalidade definimos este processo em um intervalo finito $[0, T]$, podendo este ser infinito. Observamos que os parâmetros κ, θ são estritamente positivos, $\epsilon \geq 0$ e $W := \{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ é um movimento Browniano unidimensional.

Hull e White (1987) desenvolveram um dos primeiros modelos de volatilidade estocástica o qual assumia que as dinâmicas de preço e de volatilidade eram dadas por processos estocásticos independentes. As principais desvantagens deste modelo são a suposição de independência e a falta de um componente de reversão à média na dinâmica de volatilidade. Esta última deficiência foi superada mais tarde quando Stein e Stein (1991) propuseram um modelo com estrutura de reversão à média. Porém, o problema de independência ainda permaneceu, só mais tarde quando os modelos de Heston (veja, Heston (1993)) e 3/2 (veja, por exemplo, Ahn e Gao (1999)) foram propostos, esta dificuldade foi superada. Neste contexto, listamos na tabela 1.2 os modelos de volatilidade estocástica supracitados junto com os sistemas estocásticos que os definem.

Modelos de volatilidade estocástica	Sistema estocástico
Hull e White (1987)	$dS_t = \mu S_t dt + V_t S_t dW_t^{(1)}$ $dV_t = \gamma V_t dt + \epsilon^2 V_t dW_t^{(2)}$
Stein e Stein (1991)	$dS_t = \mu S_t dt + V_t S_t dW_t^{(1)}$ $dV_t = \kappa (\theta - V_t) dt + \epsilon^2 dW_t^{(2)}$
Heston (1993)	$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^{(1)}$ $dV_t = \kappa (\theta - V_t) dt + \epsilon^2 \sqrt{V_t} dW_t^{(2)}$
Modelo 3/2	$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^{(1)}$ $dV_t = \kappa (\theta - V_t) dt + \epsilon^2 (V_t)^{\frac{3}{2}} dW_t^{(2)}$

Tabela 1.2: Modelos de volatilidade estocástica.

Na tabela anterior o processo $S := \{S_t : 0 \leq t \leq T\}$ representa o preço do ativo no instante $t \in [0, T]$, $V := \{V_t : 0 \leq t \leq T\}$ representa a volatilidade do preço do ativo neste instante, $\{W_t^{(1)} : 0 \leq t \leq T\}$ e $\{W_t^{(2)} : 0 \leq t \leq T\}$ são dois movimentos Brownianos possivelmente correlacionados com coeficiente de correlação $\rho \in [-1, 1]$. Os parâmetros μ, κ, θ são constantes pertencentes ao intervalo $[0, \infty)$ e ϵ é uma constante estritamente positiva.

Neste trabalho nós estudamos o processo de Cox-Ingersoll-Ross que foi originalmente proposto por Cox *et al.* (1985) e é utilizado tanto como um modelo de taxa de juros quanto como o processo de volatilidade no modelo de Heston. Diferente do modelo de Black-Scholes (veja, Black e Scholes (1973)) cuja a EDE possui solução fechada e desta forma a simulação via Monte de Carlo é facilmente obtida através da geração de números pseudo-aleatórios da distribuição do processo estocástico resultante, a EDE que define o modelo de Cox-Ingersoll-Ross não segue esta representação simples. Para este modelo podemos aproximar sua solução via algum método numérico segunda uma certa discretização. Em Andersen *et al.* (2002),

Andersen e Lund (1997), Bacinello (2000), Barone-Adesi e Sorwar (2002), Broadie e Kaya (2006) e Gkamas (2001), por exemplo, os autores discretizam o processo de Cox-Ingersoll-Ross via um método do tipo Euler-Maruyama (veja, por exemplo, Kloeden e Platen (1992) e Glasserman (2004)) sobre uma discretização determinística.

Uma das motivações para se estudar modelos como o de Cox-Ingersoll-Ross é que eles possuem uma estrutura não linear, cujos coeficientes não satisfazem a condição global de Lipschitz, impossibilitando o uso da análise de convergência de métodos numéricos para EDEs convencional (veja, por exemplo, Kloeden e Platen (1992) e Milstein (1995)). O estudo de convergência deste tipo de EDE, com ou sem a ordem de convergência, tem sido estabelecido em diversos artigos, como por exemplo em Alfonsi (2005), Bossy e Diop (2004), Deelstra e Delbaen (1998), Gyöngy e Rásonyi (2011), Higham e Mao (2005) e Bossy e Diop (2004). Neste sentido, Higham e Mao (2005) apresentam um estudo onde mostram que um método do tipo Euler-Maruyama sobre uma discretização determinística fornece aproximações para o primeiro e o segundo momento do processo resultante da equação que define o modelo de Cox-Ingersoll-Ross e ainda mostram a convergência forte de tal aproximação. Em Alfonsi (2005) um ambiente de trabalho para analisar aproximações do processo de Cox-Ingersoll-Ross é apresentado juntamente com um extenso estudo de simulação. No entanto, somente em Bossy e Diop (2004) uma ordem de convergência não logarítmica é obtida.

Assumindo a condição de Feller sobre os parâmetros do processo de Cox-Ingersoll-Ross, Dereich *et al.* (2011) utilizam uma aproximação do tipo Euler-Maruyama baseada em uma discretização determinística e mostram que a convergência da aproximação é de ordem 1/2, no caso

$$\left(\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - \bar{X}_t|^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \sqrt{\log(\Delta)} \sqrt{\Delta}$$

em que, $X := \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ é um processo de Cox-Ingersoll-Ross, $\bar{X} := \{\bar{X}_t : 0 \leq t \leq T\}$ é a aproximação do tipo Euler-Maruyama do processo X , $C_p > 0$ é uma constante e $\Delta > 0$ representa o comprimento dos incrementos da partição. Em Alfonsi (2013) o autor baseia-se no trabalho de Dereich *et al.* (2011) e prova que a convergência ocorre com ordem 1, no caso

$$\left(\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - \bar{X}_t|^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \Delta.$$

Inspirados pelo trabalho de Dereich *et al.* (2011) é que apresentamos nesta dissertação um estudo de convergência de uma aproximação do tipo Euler-Maruyama do processo de Cox-Ingersoll-Ross considerando a discretização aleatória proposta por Leão e Ohashi (2013) e mostramos que a ordem de convergência é exponencial.

Mais precisamente, dada uma base estocástica $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ e o movimento browniano unidimensional $W = \{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ definimos para todo $k \in \mathbb{N}$ os tempos de parada $T_0^k = 0$

e

$$T_n^k := \inf \left\{ T_{n-1}^k < t < \infty : \left| W_t - W_{T_{n-1}^k} \right| = 2^{-k} \right\}, \quad n \geq 1. \quad (1.1)$$

A partir do qual derivamos o processo de saltos $A^k := \{A_t^k : 0 \leq t \leq T\}$ tal que

$$A_t^k := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k} \eta_n^k \mathbb{I}_{\{T_n^k \leq t\}}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

em que,

$$\eta_n^k := \begin{cases} 1; & \text{se } W_{T_n^k} - W_{T_{n-1}^k} = 2^{-k} \text{ e } T_n^k < \infty; \\ -1; & \text{se } W_{T_n^k} - W_{T_{n-1}^k} = -2^{-k} \text{ e } T_n^k < \infty; \\ 0; & \text{se } T_n^k = \infty. \end{cases} \quad (1.3)$$

Na sequência, nós utilizamos a transformação de Lamparti do processo de Cox-Ingersoll-Ross, isto é, nós consideramos o processo $Y := \{Y_t : 0 \leq t \leq T\}$ tal que $Y_t = \sqrt{X_t}$ para todo $t \in [0, T]$, que pela fórmula de Itô satisfaz

$$dY_t = \left(\frac{\alpha}{Y_t} + \beta Y_t \right) dt + \gamma dW_t, \quad Y_0 = \sqrt{x_0},$$

com

$$\alpha := \left(\frac{\kappa\theta}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} \right), \quad \beta := -\frac{\kappa}{2} \quad \text{e} \quad \gamma := \frac{\epsilon}{2}.$$

Consideramos então, a partição \mathcal{T} gerada por todos os tempos de parada definidos em (1.1) e definimos a aproximação do tipo Euler-Maruyama para o processo Y da seguinte forma:

$$Y_{T_{n+1}^k}^k := Y_{T_n^k}^k + \left(\frac{\alpha}{Y_{T_{n+1}^k}^k} + \beta Y_{T_{n+1}^k}^k \right) \Delta T_{n+1}^k + \gamma \Delta A_{T_{n+1}^k}^k, \quad \forall T_n^k \in \mathcal{T} \quad \text{e} \quad n \geq 0, \quad (1.4)$$

em que, $\Delta T_{n+1}^k := T_{n+1}^k - T_n^k$, $\Delta A_{T_{n+1}^k}^k := A_{T_{n+1}^k}^k - A_{T_n^k}^k$ e $Y_0^k = \sqrt{x_0}$.

Assim, a aproximação do tipo Euler-Maruyama X^k para o processo X de Cox-Ingersoll-Ross é dada por

$$X_{T_n^k}^k = \left(Y_{T_n^k}^k \right)^2, \quad \forall T_n^k \in \mathcal{T}.$$

A partir da qual consideramos a função

$$X_t^k := \sum_{n=0}^{\infty} X_{T_n^k}^k \mathbb{I}_{[T_n^k, T_{n+1}^k[}(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

que torna X^k um processo de saltos. E então estabelecemos o seguinte teorema:

Teorema: *Seja $2\kappa\theta > \epsilon^2$ e $T < \infty$. Então, para todo $1 \leq p \leq \frac{2\kappa\theta}{\epsilon^2}$ existe uma constante $C_p > 0$ tal que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} |X_{T_n^k} - X_{T_n^k}^k|^p \right] \leq C_p 2^{-pk}.$$

E assim,

$$\mathbb{P} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} |X_{T_n^k}^k - X_{T_n^k}|^p = 0 \right) \right] = 1.$$

Nós apresentamos também um algoritmo totalmente baseado nos incrementos de tempos de parada $\{T_{n+1}^k - T_n^k\}$ para simular a aproximação X^k do processo X e utilizamos técnicas de simulação Monte Carlo para calcular um estimador $\hat{\mu}_t$ para $\mu_t := \mathbb{E}(X_t)$ e avaliamos que o vício $|\hat{\mu}_t - \mu_t|$ é menor que 2^{-k} o que concorda com o teorema supracitado.

Esta dissertação esta organizada da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos uma revisão de cálculo estocástico e algumas definições necessárias para a compreensão do texto. No capítulo 3 definimos o processo de Cox-Ingersoll-Ross e exibimos algumas de suas propriedades. No capítulo 4 usamos uma abordagem do tipo Euler-Maruyama para aproximar o processo de Cox-Ingersoll-Ross baseado em um método de discretização aleatório e por fim mostramos que este método numérico converge a uma taxa de ordem exponencial. No capítulo 5 apresentamos um estudo de simulação em que, utilizamos técnicas de simulação Monte Carlo para estudar os momentos teóricos via resultados numéricos. Por fim, no capítulo 6 apresentamos uma conclusão a respeito do trabalho desenvolvido nesta dissertação e as intenções de pesquisa futura.

Preliminares

A primeira EDE que surgiu na literatura buscava explicar o movimento irregular de pequenas partículas imersas numa solução, observado pioneiramente em 1823 pelo botânico inglês Robert Brown, ele notou que as partículas em suspensão numa solução adquiriam uma espécie de movimento aleatório que posteriormente ficou conhecido como movimento Browniano. Einstein em sua tese de doutorado propõem uma explicação matemática para esta dinâmica e em 1930 surge uma modelagem via EDE que trata-se do modelo de Ornstein-Uhlenbeck para o movimento browniano (veja, [Uhlenbeck e Ornstein \(1930\)](#)). Neste capítulo, apresentamos um definição teórica para o movimento browniano em seguida introduzimos a teoria de equações diferenciais estocástica, onde formalizamos o conceito de integral estocástica.

2.1 Definições

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade qualquer e $[0, T]$ um intervalo real finito. Um processo estocástico é uma função mensurável $X(t, \omega)$ definida no espaço produto $[0, T] \times \Omega$ em que, para cada $t \in [0, T]$ a função $X(t, \cdot)$ é uma variável aleatória e para cada $\omega \in \Omega$, $X(\cdot, \omega)$ é uma função mensurável denominada caminho aleatório. Buscando simplificar a notação iremos denotar a variável aleatória $X(t, \cdot)$ simplesmente por X_t reduzindo também a forma com a qual indicaremos o processo estocástico $\{X(t, \omega) : t \in [0, T] \text{ e } \omega \in \Omega\}$ que será escrito como $\{X_t : t \in [0, T]\}$.

Apresentamos a seguir as definições de **filtragem** e de **processo adaptado à filtragem** que são fundamentais para o compreensão desta dissertação.

Definição 2.1.1 *Uma **filtragem** definida em $[0, T]$ é uma família crescente $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ de σ -álgebras, isto é, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $0 \leq s < t \leq T$.*

Definição 2.1.2 Uma base estocástica $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ é dita satisfazer as condições usuais se

- (i) \mathcal{F}_0 contém todos os conjuntos \mathbb{P} -nulos de \mathcal{F} ;
- (ii) $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$, $\forall t \in [0, T]$, isto é \mathbb{F} é contínua a direita.

Neste trabalho assumimos que as condições usuais são sempre satisfeitas e que todo processo estocástico é adaptado à filtragem.

Definição 2.1.3 Um processo estocástico $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ é dito ser **adaptado** a filtragem $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ se para cada $t \in [0, T]$, a variável aleatória X_t é \mathcal{F}_t -mensurável.

No decorrer deste trabalho nos deparamos também com o conceito de tempo de parada cuja definição é dada a seguir:

Definição 2.1.4 A variável aleatória $\tau : \Omega \rightarrow [0, T]$ é denominada **tempo de parada** com respeito a filtragem $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ se $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in [0, T]$.

Observamos que podemos substituir na definição T por ∞ . Intuitivamente falando, nós podemos pensar em τ como o tempo que se para de jogar um jogo. A condição para τ ser um tempo de parada significa que a decisão de parar de jogar o jogo antes ou no tempo t deve ser determinada pela informação fornecida por \mathcal{F}_t .

O espaço vetorial sobre o qual definimos a integral estocástica é um espaço de Hilbert, é neste sentido que expomos na próxima seção uma revisão deste conceito. Apresentamos, também, algumas desigualdades que serão úteis para as demonstrações dos resultados que serão estabelecidos no capítulo 4.

2.2 Espaço de Hilbert

Definição 2.2.1 Dado um espaço vetorial H sobre um corpo \mathbb{K} , uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

diz-se um **produto interno** se para cada $x, y, z \in H$ e cada $\lambda \in \mathbb{K}$ se tem

- (i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- (ii) $\langle \lambda x, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle$;
- (iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- (iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$;
- (v) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Aqui, $\overline{\langle y, x \rangle}$ designa o conjugado de $\langle y, x \rangle$.

Um espaço vetorial com produto interno diz-se um **espaço com produto interno**. E a partir deste podemos definir um **espaço normado**, que trata-se de um par $(H, \|\cdot\|)$ em que H é um espaço vetorial e $\|\cdot\|$ é uma norma em H .

Definição 2.2.2 *Seja H um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Uma **norma** H é uma aplicação que a cada vetor $x \in H$ faz corresponder um número real $\|x\|$ com as seguintes propriedades:*

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para cada $x \in H$ e para cada $\lambda \in \mathbb{K}$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cada $x, y \in H$.

Exemplo 2.2.1 *Em \mathbb{R} ou em \mathbb{C} o valor absoluto $|\cdot|$ é um norma, ou seja, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ são espaços normados.*

Exemplo 2.2.2 *Em \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n podemos definir as seguintes normas:*

$$\|x\|_p = \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Estes espaços generalizam os do exemplo 2.2.1. Usa-se ℓ_p^n para denotar o espaço normado $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$. Observamos que quando tomamos $n = \infty$, o espaço ℓ_p^∞ continua sendo um espaço normado.

Exemplo 2.2.3 *Em $C[a, b]$, espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$, podemos definir a seguinte norma:*

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Dado um espaço normado $(H, \|\cdot\|)$ podemos definir um **espaço métrico**, isto é, um espaço H que está munido com uma **métrica**

Definição 2.2.3 *Dado o espaço normado $(H, \|\cdot\|)$, definimos a **métrica** d como sendo a função*

$$\begin{aligned} d : H \times H &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) := \|x - y\| \end{aligned}$$

tal que

- (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para quaisquer $x, y, z \in H$.

O conceito de isometria entre espaços métricos é fundamental para a discussão sobre integral estocástica que é realizada na seção 2.4. Neste contexto apresentamos a seguinte definição:

Definição 2.2.4 *Sejam (H_1, d_1) e (H_2, d_2) dois espaços métricos e $f : H_1 \rightarrow H_2$ uma aplicação entre espaços métricos. Dizemos que f é uma isometria se*

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$$

quaisquer que sejam $x, y \in H_1$.

Os espaço com produto interno cujas sequências de Cauchy (veja, por exemplo, Lima (1970)) são convergente em relação à métrica induzida pelo produto interno designam-se **espaços de Hilbert**. Neste contexto, estabelecemos na proposição seguinte as desigualdade de Young, Hölder e Minkowski, cuja demonstração pode ser encontrada em Kreyszig (1989).

Proposição 2.2.1 *Dado $p \in (1, \infty)$ escolha-se $q \in (1, \infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. E estabelecemos:*

- (i) **Desigualdade de Young:** $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0$;
- (ii) **Desigualdade de Hölder** $\|xy\| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$;
- (iii) **Desigualdade de Minkowski:** $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$,

em que $\|\cdot\|_p$ é como foi definido em 2.2.2 e 2.2.3.

2.3 Movimento Browniano

Os resultados obtidos com este trabalho tem principalmente influência na área financeira e durante o decorrer desta obra o leitor se deparará com muitas entidades definidas via processos estocásticos que são dados em função do movimento browniano, neste sentido, decidimos por definir este processo que assume um papel importante na estruturação de nossa teoria. Assumiremos no decorrer deste capítulo que toda atividade econômica ocorre em um intervalo finito $I = [0, T]$.

Definição 2.3.1 *Um processo estocástico $\{W(t, \omega) : 0 \leq t \leq T\}$ é chamado **movimento browniano** se satisfaz as seguintes condições:*

1. $\mathbb{P}\{\omega : W(0, \omega) = 0\} = 1$.
2. Para qualquer $0 \leq s \leq t$, a variável aleatória $W_t - W_s$ tem distribuição normal com média 0 e variância $t - s$.
3. $W(t, \omega)$ tem incrementos independentes, isto é, para qualquer $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, as variáveis aleatórias $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$, são independentes.
4. Os caminhos aleatórios do processo $W(t, \omega)$ são contínuos quase certamente.

Em Lévy (1948), o autor usa o método de interpolação para construir o movimento Browniano. Neste sentido, nós apresentamos a seguir um esboço desta construção. Para mais detalhes, sugerimos a leitura de Hida (1980).

Seja $\phi := \{\phi_n : n \geq 1\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média 0 e variância 1. Defina a sequência $X := \{X_n(t) : n \geq 1\}$ de processos estocásticos para $t \in [0, 1]$ de forma que:

$$X_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = 0; \\ \phi_1, & \text{se } t = 1, \end{cases}$$

e utilize interpolação linear para obter $X_1(t)$ para os outros valor de $t \in [0, T]$. De $X_1(t)$, defina

$$X_2(t) = \begin{cases} X_1(t), & \text{se } t = 0 \text{ ou } t = 1; \\ X_1(t) + \frac{1}{2}\phi_2, & \text{se } t = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

e novamente utilize interpolação linear para obter $X_2(t)$ para os outros valores de $t \in [0, T]$. Note que $X_2(t)$ mantém o valor de $X_1(t)$ para $t = 0$. Já quando $t = \frac{1}{2}$ nós utilizamos ϕ_2 e $X_1(t)$ para definir $X_2(t)$ e então obtemos que a variância de $X_2(t)$ é $\frac{1}{2}$ o que concorda com a variância de um movimento browniano no ponto $t = \frac{1}{2}$. Usando indução podemos definir $X_{n+1}(t)$ em função de $X_n(t)$ da seguinte forma:

$$X_{n+1}(t) = \begin{cases} X_n(t), & \text{se } t = \frac{k}{2^n}, k = 0, 2, \dots, 2^n; \\ X_n(t) + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \phi_{2^{n-1} + \frac{k+1}{2}}, & \text{se } t = \frac{k}{2^n}, k = 1, 3, \dots, 2^n - 1, \end{cases}$$

e utilizamos a interpolação linear para obter os valores de $X_{n+1}(t)$ para outros valores de t .

Seja D o conjunto dos números racionais diádicos, assim para cada $t \in D$ segue da definição de $X_n(t)$ que existe um número $N = N(t, \omega)$ tal que $X_n(t) = X_N(t)$ para todo $n \geq N$. Então para cada $t \in D$, o seguinte limite existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) = X(t).$$

Hida (1980) demonstra que as propriedades de 1 à 4 da definição 2.3.1 são satisfeitas para o processo $X(t)$. Portanto este processo é um movimento Browniano.

Mostrada a existência de um movimento browniano podemos estabelecer algumas propriedades simples que seguem direto da definição. Por exemplo, para um movimento browniano $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ fixo seguem as seguintes proposições:

Proposição 2.3.1 *Para qualquer $0 \leq t \leq T$, W_t é uma variável aleatória com distribuição normal com médio 0 e variância t . Para qualquer $0 \leq s, t \leq T$ nós temos $\mathbb{E}[W_t W_s] = \min\{s, t\}$.*

Demonstração:

Pela condição (1) nós temos que $W_t = W_t - W_0$ e então pela condição (2) concluímos que W_t tem distribuição normal com média 0 e variância t . Agora, assuma sem perda de generalidade que $s < t$ assim,

$$\mathbb{E}[W_t W_s] = \mathbb{E}[W_s (W_t - W_s) + W_s^2] = \mathbb{E}[W_s] \mathbb{E}(W_t - W_s) + \mathbb{E}(W_s^2) = s.$$

■

Proposição 2.3.2 *Para $0 \leq t_0 \leq T$ e $\lambda > 0$ fixos, os processos estocásticos $\widetilde{W}_t^1 := W_{t+t_0} - W_{t_0}$ e $\widetilde{W}_t^2 = W(\lambda t)/\sqrt{\lambda}$ são também movimentos brownianos.*

A demonstração desta proposição é uma simples verificação das condições enunciadas na Definição 2.3.1 (veja, por exemplo, Kuo (2006) para detalhes).

O Movimento Browniano não é diferenciável em nenhum ponto de sua trajetória (veja, Mörters e Peres (2010)) isso porque as trajetórias não são suficientemente suaves para que as derivadas à esquerda e à direita em determinado ponto sejam iguais e além disso este processo é de variação ilimitada, isto é, para $P = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ uma partição do intervalo $[0, T]$ verifica-se que

$$\lim_{\|\Delta t\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = T,$$

em que, $\|\Delta t\| := \sup_i (t_i - t_{i-1})$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (veja, Kuo (2006)). Estas duas razões fazem com que os métodos clássicos de integração não sejam aplicáveis às trajetórias do movimento browniano. Precisamos, então, dar sentido à integrais da forma

$$\int_0^T f(t) dW_t, \tag{2.1}$$

em que f é uma função determinística ou uma trajetória de um processo estocástico. A formalização desta integral foi realizada pelo matemático Kyoshi Itô. A seguir, apresentamos uma construção para este tipo de integral baseada no trabalho de Øksendal (2003).

2.4 Integral Estocástica

Primeiramente, suponha que estamos interessados em modelar o preço de um ativo financeiro representado pelo processo estocástico $\{S_t : 0 \leq t \leq T\}$. Suponha ainda que a dinâmica deste processo possa ser modelada através de uma equação que soma um termo determinístico a um fator aleatório

$$\frac{dS_t}{dt} = b(t, S_t) + \sigma(t, S_t)\alpha_t \quad (2.2)$$

em que b e σ são funções dadas e α_t representa o termo aleatório. Podemos reescrever (2.2) da seguinte forma

$$dS_t = b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)\alpha_t dt \quad (2.3)$$

$$= b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad (2.4)$$

em que, $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ é um processo estocástico tal que $dW_t = \alpha_t dt$. Denominamos a equação (2.4) de equação diferencial estocástica. Nós consideraremos um modelo de mercado browniano então utilizaremos o processo $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ como sendo um movimento browniano.

Considere a seguinte partição $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [0, T]$ de modo que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. O intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de comprimento $t_i - t_{i-1}$ será chamado de i -ésimo intervalo da partição P . Evidentemente, $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = T$. Considere a versão discretizada de (2.4):

$$\begin{aligned} \Delta S_{t_k} &= b(t_k, S_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, S_{t_k})\Delta W_{t_k} \\ \Rightarrow S_{t_k} - S_{t_{k-1}} &= b(t_k, S_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, S_{t_k})\Delta W_{t_k}, \end{aligned}$$

em que, $\Delta t_k := t_k - t_{k-1}$ e $\Delta W_{t_k} := W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$. Logo, pela recursividade obtemos

$$S_{t_n} = S_0 + \sum_{k=1}^n b(t_k, S_{t_k})\Delta t_k + \sum_{k=1}^n \sigma(t_k, S_{t_k})\Delta W_{t_k}. \quad (2.5)$$

Observe que se aplicarmos o limite na equação acima com $\Delta t_j \rightarrow 0$, seria natural utilizar a definição usual de integral para reescrever (2.5) como uma equação dada por integrais, porém não sabemos se o limite do lado direito aplicado à (2.5) realmente existe. Caso esse limite exista, obteríamos:

$$S_T = S_0 + \int_0^T b(u, S_u)du + \int_0^T \sigma(u, S_u)dW_u. \quad (2.6)$$

Note que precisamos tomar cuidado com a passagem de (2.5) para (2.6), primeiro porque

ainda não conseguimos garantir a existência do limite e segundo porque a integral

$$\text{“} \int_0^T \sigma(u, S_u) dW_u \text{”}, \quad (2.7)$$

em que, W_t é o movimento browniano unidimensional, ainda não faz sentido. Para dar sentido à (2.7), vamos considerar a seguinte definição.

Definição 2.4.1 *Um processo estocástico $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dito **simples** se for constante por partes na variável t , isto é, se existir uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ do intervalo $[0, T]$ tal que*

$$f(t, \omega) := \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}, \omega) \mathbb{I}_{[t_{i-1}, t_i)}(t), \quad (2.8)$$

em que $\mathbb{I}(\cdot)$ denota a função característica do intervalo $[t_{i-1}, t_i) \subset [0, T]$ e $n \in \mathbb{N}$.

Para definir a integral

$$\text{“} \int_0^T f(u, \omega) dW_u \text{”}, \quad (2.9)$$

vamos considerar primeiramente f como sendo um processo estocástico simples definido em $[0, T]$ como na equação (2.8).

É natural definirmos,

$$\int_0^T f(t, \omega) dW_t := \sum_{j=1}^n f(t_{j-1}, \omega) (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}). \quad (2.10)$$

O próximo exemplo que pode ser encontrado em Øksendal (2003) indica a dificuldade que surge quando tentamos estender esta definição para processos mais gerais. Esta dificuldade está relacionada com o fato das trajetórias do movimento browniano terem variação ilimitada.

Dado um movimento Browniano $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ e um intervalo $[0, T]$ consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, os seguintes processos simples:

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=0}^{m-1} W_{\frac{i}{2^n}} \mathbb{I}_{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n})}(t) + W_{\frac{m}{2^n}} \mathbb{I}_{[\frac{m}{2^n}, T]}(t) \quad \text{se } \frac{m}{2^n} \leq T \leq \frac{m+1}{2^n};$$

$$\psi_n(t) = \sum_{i=0}^{m-1} W_{\frac{i+1}{2^n}} \mathbb{I}_{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n})}(t) + W_T \mathbb{I}_{[\frac{m}{2^n}, T]}(t) \quad \text{se } \frac{m}{2^n} \leq T \leq \frac{m+1}{2^n}.$$

Então, de acordo com (2.10), temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\int_0^T \varphi_n(t) dW_t \right) &= \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} \left[W_{\frac{i}{2^n}} \left(W_{\frac{i+1}{2^n}} - W_{\frac{i}{2^n}} \right) \right] + \mathbb{E} \left[W_{\frac{m}{2^n}} \left(W_T - W_{\frac{m}{2^n}} \right) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} \left(W_{\frac{i}{2^n}} \right) \mathbb{E} \left(W_{\frac{i+1}{2^n}} - W_{\frac{i}{2^n}} \right) + \mathbb{E} \left(W_{\frac{m}{2^n}} \right) \mathbb{E} \left(W_T - W_{\frac{m}{2^n}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pela independência dos incrementos do movimento browniano, os quais tem média zero. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\int_0^T \psi_n(t) dW_t \right) &= \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E} \left[W_{\frac{i+1}{2^n}} \left(W_{\frac{i+1}{2^n}} - W_{\frac{i}{2^n}} \right) \right] + \mathbb{E} \left[W_T \left(W_T - W_{\frac{m}{2^n}} \right) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \left[\mathbb{E} \left(W_{\frac{i+1}{2^n}}^2 \right) - \mathbb{E} \left(W_{\frac{i+1}{2^n}} W_{\frac{i}{2^n}} \right) \right] - \mathbb{E} \left(W_T W_{\frac{m}{2^n}} \right) + \mathbb{E} \left(W_T^2 \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \left[\frac{i+1}{2^n} - \frac{i}{2^n} \right] + T - \frac{m}{2^n} \\
&= T
\end{aligned}$$

onde usamos a Proposição 2.1 e notamos que o somatório é telescópico (veja a definição, por exemplo, em Lima (1970)).

Podemos perceber com esse exemplo que, embora os processos simples φ_n e ψ_n aparentem ambos serem boas aproximações para o processo $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$, suas integrais de acordo com (2.10) não são próximas entre si, não importando quão grande n seja escolhido. Com isso, podemos perceber que é razoável aproximar uma dada $f(t, \omega)$ considerando-se processos simples $\sum_{j=1}^n f(t_{j-1}^*, \omega) \mathbb{I}_{[t_{j-1}, t_j)}(t)$ onde $P_n = \{0 = t_0 < \dots < t_n = T\}$ é uma partição de $[0, T]$ e $t_{j-1}^* \in [t_{j-1}, t_j)$ e então podemos definir $\int_0^T f(t, \omega) dW_t$ como um limite (num certo sentido) das integrais destes processos simples quando a norma da partição $\|\Delta t\| := \sup (t_j^n - t_{j-1}^n)$ tende à zero. Porém, com o exemplo supracitado, podemos observar que este limite vai depender dos pontos t_j^* 's escolhidos.

Logo, diferentemente do que ocorre com a Integral de Riemann, os pontos t_j^* influenciam no valor da integral. Se tomarmos

1. $t_j^* = t_j$ (o primeiro ponto do intervalo) teremos a integral de Itô, denotada por

$$\int_0^T f(t, \omega) dW_t,$$

2. $t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$ (o ponto médio do intervalo) teremos a integral de Stratonovich, denotada por

$$\int_0^T f(t, \omega) \circ dW_t.$$

Nesta dissertação nos depararemos apenas com a integral de Itô e nos preocuparemos, então, em discutir para qual classe de processos estocásticos iremos definir esta integral estocástica. Aqui, assumimos que $f(t_j, \omega)$ depende apenas do comportamento do movimento browniano até o tempo t_j , na verdade $f(t_j, \omega)$ poderá depender também de outras informações, mas não do comportamento futuro do movimento browniano. Esta idéia intuitiva é formalizada em termos de σ -álgebras.

Dado o movimento browniano $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ consideremos uma filtração $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ do espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que

- (i) $\sigma(W_s, 0 \leq s < t) \subset \mathcal{F}_t, \quad \forall t > 0,$
- (ii) $\sigma(W_{t+\lambda} - W_t, \lambda \geq 0)$ é independente de $\mathcal{F}_t \quad \forall t > 0.$

Com isso, podemos definir a classe $L^p([0, T] \times \Omega)$ e em seguida apresentaremos a definição formal da Integral de Itô.

Definição 2.4.2 *Sejam o intervalo $[0, T]$ com $T > 0$ e um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, em que é definido o movimento browniano $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ e uma filtração $\{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ satisfazendo (i) e (ii), definimos $L^p([0, T] \times \Omega)$ como a classe dos processos estocásticos $f(t, \omega)$ que satisfazem*

- (i) $\{f(t, \omega) : t \in [0, T]\}$ é um processo mensurável, isto é, a função $(t, \omega) \mapsto f(t, \omega)$ é $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}$ -mensurável, em que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota a σ -álgebra de Borel do intervalo $[0, T]$;
- (ii) $\{f(t, \omega) : t \in [0, T]\}$ é adaptado à filtração $\{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$, ou seja, para cada $t \in [0, T]$, a variável aleatória $f(t, \cdot)$ é \mathcal{F}_t -mensurável;
- (iii) $\mathbb{E} \left(\int_0^T |f(t, \omega)|^p dt \right) < \infty.$

Concluimos assim que a classe $L^2([0, T] \times \Omega)$ é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno definido no item (iii).

Definição 2.4.3 *Chamaremos de **elementares** todos os processos simples de $L^2([0, T] \times \Omega)$.*

Definição 2.4.4 *Seja f um processo elementar então a **integral de Itô** de f é definida pela equação (2.10).*

O Lema abaixo apresenta as principais propriedades relacionadas com a Integral de Itô para processos elementares:

Lema 2.4.1 *Sejam φ e ψ processos elementares, a e b números reais, então:*

$$\int_0^T a\varphi(t) + b\psi(t)dW_t = a \int_0^T \varphi(t)dW_t + b \int_0^T \psi(t)dW_t; \quad (2.11)$$

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \psi(t)dW_t \right) = 0; \quad (2.12)$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \varphi(t)dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left(\int_0^T \varphi^2(t)dt \right). \quad (2.13)$$

Observe que a propriedade (2.11) é análoga a propriedade operacional da Integral de Riemann, além disso, ela garante que as Integrais de Itô geram um espaço vetorial. A igualdade (2.13) é chamada de **Isometria de Itô**, e é uma propriedade fundamental para a extensão do conceito de Integral de Itô para toda a classe $L^2([0, T] \times \Omega)$. A descrição teórica dessa extensão pode ser vista em Øksendal (2003) ou em Kuo (2006), mas é importante destacarmos três pontos principais: o lema que permite realizar a extensão; a definição da Integral de Itô em processo estocásticos mais gerais e o comportamento das propriedades da Integral de Itô nesses tipos de processos.

Lema 2.4.2 *Seja $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ um processo estocástico em $L^2([0, T] \times \Omega)$. Então existe uma sequência $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ de processos elementares tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\int_0^T |X_t - \varphi_n(t)|^2 dt \right) = 0.$$

Definição 2.4.5 *Seja $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ um processo estocástico em $L^2([0, T] \times \Omega)$. Fixemos uma sequência $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ de processos elementares tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\int_0^T |X_t - \varphi_n(t)|^2 dt \right) = 0.$$

e definimos

$$\int_0^T X_t dW_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t) dW_t$$

como um limite em $L^2(\Omega)$.

Teorema 2.4.1 *Sejam $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ e $\{Y_t : 0 \leq t \leq T\}$ processos estocásticos em $L^2([0, T] \times \Omega)$, a e b números reais, então:*

$$\int_0^T (aX_t + bY_t) dW_t = a \int_0^T X_t dW_t + b \int_0^T Y_t dW_t; \quad (2.14)$$

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T X_t dW_t \right) = 0; \quad (2.15)$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left(\int_0^T X_t^2 dt \right). \quad (2.16)$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_t Y_t dW_t \right) \right] = \mathbb{E} \left(\int_0^T X_t Y_t dt \right). \quad (2.17)$$

A demonstração dos lemas e dos teoremas apresentados nesta seção são facilmente encontrados na literatura (veja, por exemplo, [Kuo \(2006\)](#), [Protter \(2004\)](#) ou [Øksendal \(2003\)](#)) e desta forma decidimos por não expô-las neste texto.

Portanto, fornecemos um sentido para a integral estocástica (2.9) e conseqüentemente para a EDE (2.4). As soluções de equações como (2.4) são em geral desconhecidas, então necessitamos de métodos numéricos para encontrar aproximações razoáveis para elas. Estes métodos simulam as trajetórias de $S_t(\omega)$ e são baseados em discretizações intervalares.

A análise de convergência tradicional para métodos numéricos para EDEs assume que os coeficientes que compõem a equação (2.4) satisfazem a condição global de Lipschitz, isto é

$$\|b(x) - b(y)\| + \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

No entanto, os coeficientes de algumas EDEs não satisfazem esta condição, o que dificulta a análise de convergência de EDEs desta natureza. O processo de Cox-Ingersoll-Ross, por exemplo, é definido por uma EDE de caráter não linear que não satisfaz a condição global de Lipschitz. Neste sentido é que nos motivamos em estudá-la nesta dissertação.

Um importante resultado que nos permite estudar a solução de EDEs, é a Fórmula de Itô (veja por exemplo [Protter \(2004\)](#)), que é o análogo estocástico da regra da cadeia convencional do cálculo de Leibniz-Newton.

Teorema 2.4.2 *Seja X um processo de Itô, isto é*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s) dW_s + \int_0^t g(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.18)$$

em que, X_0 é \mathcal{F}_0 -mensurável, $f \in L^2([0, T] \times \Omega)$ e $g \in L^1([0, T] \times \Omega)$. Suponha que F seja uma função contínua com derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ contínuas. Então $F(t, X_t)$ é também um processo de Itô e

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t \frac{\partial F(X_u)}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial F(X_u)}{\partial X_u} dX_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F(X_u)}{\partial X_u^2} d[X, X]_u, \quad (2.19)$$

em que $[\cdot, \cdot]$ denota a variação quadrática do processo (veja definição em [Protter \(2004\)](#)).

O modelo de Black-Scholes é um modelo para a precificação de opções e foi proposto independentemente por Black Scholes e Merton. Este modelo é dado via uma equação diferencial estocástica e possui solução analítica que é facilmente determinada pela Fórmula de Itô, cuja demonstração é realizada no exemplo a seguir.

Exemplo 2.4.1 Para uma base estocástica $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ e $[0, T]$ um intervalo finito fixo nós definimos o modelo de Black-Scholes através da seguinte equação diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.20)$$

em que $S := \{S_t : 0 \leq t \leq T\}$ é um processo estocástico que representa o preço descontado de um ativo, $W := \{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ é um movimento Browniano, μ representa o retorno esperado do preço descontado, σ representa a volatilidade do ativo e assumimos que s_0 é uma constante positiva que expressa a condição inicial de S . Vamos mostrar que

$$S_t = s_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}, \quad (2.21)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Podemos reescrever a equação (2.20) como sendo um processo de Itô

$$S_t = s_0 + \mu \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dW_u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.22)$$

em que, $\{S_t : t \geq 0\}$ é um processo estocástico adaptado à filtragem \mathbb{F} tal que

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T |S_t|^2 dt \right) < \infty$$

.

Então, consideramos o movimento Browniano geométrico

$$S_t = F(Y_t) = s_0 \exp \{Y_t\}, \quad (2.23)$$

e utilizando a equação (2.19) para o processo $\{Y_t : 0 \leq t \leq T\}$ tal que $Y_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t$ temos que

$$F(Y_t) = F(Y_0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \int_0^t s_0 \exp \{Y_u\} du + \sigma \int_0^t s_0 \exp \{Y_u\} dW_u,$$

o que implica em

$$S_t = s_0 + \mu \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dW_u.$$

Portanto, a solução da equação (2.20) é dado pelo movimento browniano geométrico (2.23).

Agora, utilizamos a teoria exposta neste capítulo para realizarmos o estudo numérico a respeito do processo de Cox-Ingersoll-Ross.

Processo de Cox-Ingersoll-Ross

No decorrer desta dissertação assumimos estar em um modelo de mercado Browniano a tempo finito $0 < T < \infty$ equipado com a base estocástica $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gerada pelo movimento Browniano unidimensional $W := \{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ com instante inicial $t = 0$, em que $\Omega := \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínuas} : f(0) = 0\}$, \mathcal{F} é a σ -álgebra completa de Borel, \mathbb{P} é a medida de Wiener em Ω e $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ é o \mathbb{P} -completamento da filtragem natural gerada por W .

O processo de Cox-Ingersoll-Ross foi originalmente proposto por John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll e Stephen A. Ross em 1985 e é amplamente utilizado em modelagem financeira, por exemplo, para descrever a evolução de taxas de juros ou como o processo de volatilidade do modelo de Heston. Neste capítulo, apresentamos o processo de Cox-Ingersoll-Ross e exibimos algumas de suas propriedades.

3.1 O processo e suas propriedades

Dadas as constantes $\kappa > 0$, $\theta \geq 0$ e $\epsilon > 0$, o processo de Cox-Ingersoll-Ross $X := \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ é definido através da seguinte dinâmica estocástica

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \epsilon\sqrt{X_t}dW_t, \quad X_0 = x_0 \quad (3.1)$$

em que $W := \{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ é um movimento Browniano unidimensional e x_0 é uma constante estritamente positiva.

Nesta dissertação, nós focamos em um ambiente de trabalho no qual

$$\mathbb{P}(X_t > 0 \text{ para } 0 \leq t \leq T) = 1,$$

uma suposição frequentemente utilizada quando estamos interessados em modelar a evolução de taxas de juros. Pelo teste de Feller esta afirmação é verdadeira se, e somente se, $2\kappa\theta > \epsilon^2$ (veja o Capítulo 5 de [Shreve e Karatzas \(1991\)](#)).

A equação (3.1) não possui solução fechada, porém é conhecido que esta equação admite uma única solução forte não negativa (veja, por exemplo o Capítulo 5 de [Shreve e Karatzas \(1991\)](#)). O primeiro e o segundo momento do processo X também pode ser calculado explicitamente. Neste sentido, a equação (3.1) pode ser vista como um processo de Itô

$$X_t = x_0 + \kappa \int_0^t (\theta - X_u) du + \epsilon \int_0^t \sqrt{X_u} dW_u,$$

e consideramos a função $F(X_t, t) := e^{\kappa t} X_t$ para todo $0 \leq t \leq T$. Note que

$$\frac{\partial F(X_t, t)}{\partial t} = \kappa e^{\kappa t} X_t, \quad \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial X_t} = e^{\kappa t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F(X_t, t)}{\partial X_t^2} = 0,$$

são funções contínuas então podemos aplicar a fórmula de Itô. Assim,

$$\begin{aligned} F(X_t, t) - F(X_0, 0) &= \int_0^t \frac{\partial F(X_u, u)}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial F(X_u, u)}{\partial X_u} dX_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F(X_u, u)}{\partial X_u^2} d[X, X]_u \\ &= \kappa \int_0^t e^{\kappa u} X_u du + \kappa \theta \int_0^t e^{\kappa u} du - \kappa \int_0^t e^{\kappa u} X_u du + \epsilon \int_0^t e^{\kappa u} \sqrt{X_u} dW_u \\ &= \kappa \theta \int_0^t e^{\kappa u} du + \epsilon \int_0^t e^{\kappa u} \sqrt{X_u} dW_u \\ &= \theta e^{\kappa t} - \theta + \epsilon \int_0^t e^{\kappa u} \sqrt{X_u} dW_u. \end{aligned}$$

Portanto,

$$X_t = \theta + (x_0 - \theta) e^{-\kappa t} + \epsilon e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa u} \sqrt{X_u} dW_u.$$

Tomando o valor esperado e utilizando a propriedade 2.15 nós concluímos que

$$\mathbb{E}(X_t) = \theta + (x_0 - \theta) e^{-\kappa t}.$$

Para o cálculo do segundo momento, vamos considerar $S_t := F(X_t)$ para todo $0 \leq t \leq T$. Assim,

$$dS_t = \kappa \theta e^{\kappa t} dt + \epsilon e^{\frac{\kappa t}{2}} \sqrt{S_t} dW_t.$$

Como a função $G(S_t) = S_t^2$ é tal que

$$\frac{dG(S_t)}{dS_t} = 2S_t \quad \text{e} \quad \frac{d^2G(S_t)}{dS_t^2} = 2,$$

são funções contínuas, podemos novamente aplicar a fórmula de Itô. Logo,

$$\begin{aligned} G(S_t) - G(S_0) &= \int_0^t \frac{dG(S_u)}{dS_u} dS_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2G(S_u)}{dS_u^2} d[S, S]_u \\ &= \int_0^t 2S_u dS_u + \int_0^t d[S, S]_u \\ &= 2\kappa\theta \int_0^t e^{\kappa u} S_u du + 2\epsilon \int_0^t e^{\frac{\kappa u}{2}} (S_u)^{\frac{3}{2}} dW_u + \epsilon^2 \int_0^t e^{\kappa u} S_u du \\ &= (2\kappa\theta + \epsilon^2) \int_0^t e^{\kappa u} S_u du + 2\epsilon \int_0^t e^{\frac{\kappa u}{2}} (S_u)^{\frac{3}{2}} dW_u. \end{aligned}$$

Portanto,

$$X_t^2 = e^{-2\kappa t} x_0^2 + (2\kappa\theta + \epsilon^2) e^{-2\kappa t} \int_0^t e^{2\kappa u} X_u du + 2\epsilon e^{-2\kappa t} \int_0^t e^{2\kappa u} (X_u)^{\frac{3}{2}} dW_u.$$

Tomando o valor esperado e utilizando a propriedade 2.15 nós temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_t)^2] &= e^{-2\kappa t} \left[x_0^2 - \theta^2 - \frac{\epsilon^2\theta}{2\kappa} - 2\theta(x_0 - \theta) - \frac{\epsilon^2(x_0 - \theta)}{\kappa} \right] \\ &\quad + \frac{(2\kappa\theta + \epsilon^2)\theta}{2\kappa} + (2\kappa\theta + \epsilon^2) \frac{(x_0 - \theta)}{\kappa} e^{-\kappa t}. \end{aligned}$$

Como $Var(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}^2(X_t)$ nós concluímos que a variância do processo de Cox-Ingersoll-Ross é dada por

$$Var(X_t) = \frac{\epsilon^2}{\kappa} x_0 (e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) + \frac{\epsilon^2\theta}{2\kappa} (1 - 2e^{-\kappa t} + e^{-2\kappa t}).$$

Em Broadie e Kaya (2004) e Broadie e Kaya (2006) os autores mostram que o processo X tem distribuição qui-quadrado não central:

$$X_t \sim \frac{\epsilon^2(1 - e^{-\kappa t})}{4\kappa} \chi_\nu^2 \left[\frac{4\kappa e^{-\kappa t} x_0}{\epsilon^2(1 - e^{-\kappa t})} \right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

em que $\chi_\nu^2(\alpha)$ é uma variável aleatória qui-quadrado não central com ν graus de liberdade e parâmetro de não centralidade α . Os graus de liberdades são iguais a $\nu = 4\kappa\theta\epsilon^{-2}$.

Desta forma, podemos extrair resultados acerca do p -ésimo momento do processo X , como pode ser observado nos lemas 3.1.1 a seguir.

Lema 3.1.1 *Seja $2\kappa\theta > \epsilon^2$, $T < \infty$ e $p > -\frac{2\kappa\theta}{\epsilon^2}$. Então,*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[(X_t)^p] < \infty.$$

Lema 3.1.2 *Seja $2\kappa\theta > \epsilon^2$, $T < \infty$ e $q \geq 0$. Então,*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_s^{-1} ds \right)^q \right] < \infty.$$

A demonstração do lema 3.1.1 pode ser encontrada em [Abramowitz e Stegun \(1972\)](#) e a prova do lema 3.1.2 é uma consequência do teorema 3.1 de [Hurd e Kuznetsov \(2008\)](#) e do lema A.2 de [Bossy e Diop \(2004\)](#). Estes resultados são fundamentais na demonstração da convergência do método numérico que será proposto no próximo capítulo.

Aproximação do tipo Euler-Maruyama

Neste capítulo, nós apresentamos o esquema de discretização proposto por [Leão e Ohashi \(2013\)](#) e o utilizamos para definir um método do tipo Euler-Maruyama para simular o processo de Cox-Ingersoll-Ross definido no capítulo anterior.

A partir de agora vamos utilizar $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ para indicar o conjunto dos números naturais e para todo $a, b \in \mathbb{N}$, nós escrevemos $a \vee b$ e $a \wedge b$ para indicar o máximo e o mínimo entre a e b , respectivamente. Além disso, se S e J são tempos de parada então $[[S, J]] := \{(\omega, t) : S(\omega) \leq t \leq J(\omega)\}$, $[[S, J[:= \{(\omega, t) : S(\omega) \leq t < J(\omega)\}$, $]]S, J]] := \{(\omega, t) : S(\omega) < t \leq J(\omega)\}$ e $[[S]] := \{(\omega, t) : S(\omega) = t\}$ denotam os intervalos estocásticos.

4.1 Transformação do processo de Cox-Ingersoll-Ross

Consideramos $X := \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ um processo de Cox-Ingersoll-Ross dado conforme a seguinte dinâmica estocástica:

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \epsilon \sqrt{X_t} dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.1)$$

em que $W := \{W_t : 0 \leq t \leq T\}$ é um movimento Browniano unidimensional, $\kappa, \theta \geq 0$, $\epsilon > 0$ e $x_0 > 0$.

Nós não trabalhamos diretamente com o processo de Cox-Ingersoll-Ross, mas com a transformação $Y := \{Y_t : 0 \leq t \leq T\}$ tal que $Y_t = \sqrt{X_t}$, para todo $0 \leq t \leq T$. Uma vez que

$$\frac{dY_t}{dX_t} = \frac{1}{2}(X_t)^{-1/2} \quad \text{e} \quad \frac{d^2 Y_t}{dX_t^2} = -\frac{1}{4}(X_t)^{-3/2}$$

são funções contínuas para todo $t \in [0, T]$, a fórmula de Itô nos garante que

$$\begin{aligned} Y_t - Y_0 &= \int_0^t \frac{dY_s}{dX_s} dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2 Y_s}{dX_s^2} d[X, X]_s \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} (X_s)^{-1/2} \left[\kappa X_s (\theta - X_s) ds + \epsilon (X_s)^{1/2} dW_s \right] \\ &\quad - \int_0^t \frac{1}{8} (X_s)^{-3/2} \epsilon^2 X_s ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{\kappa\theta}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} \right) (X_s)^{-\frac{1}{2}} ds - \int_0^t \frac{\kappa}{2} (X_s)^{\frac{1}{2}} ds + \int_0^t \frac{\epsilon}{2} dW_s. \end{aligned}$$

Tomando,

$$\alpha := \left(\frac{\kappa\theta}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} \right), \quad \beta := -\frac{\kappa}{2} \quad \text{e} \quad \gamma := \frac{\epsilon}{2},$$

segue que

$$dY_t := \left(\frac{\alpha}{Y_t} + \beta Y_t \right) dt + \gamma dW_t.$$

A condição de Feller assegura que para $2\kappa\theta > \epsilon^2$ a variável aleatória Y_t é estritamente positiva para todo $0 \leq t \leq T$. Então podemos afirmar que a função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) := \frac{\alpha}{x} + \beta x,$$

satisfaz para $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ a condição unilateral de Lipschitz

$$(x - y) [f(x) - f(y)] \leq \beta (x - y)^2, \quad 0 \leq s < t \leq T. \quad (4.2)$$

É fácil mostrar que a afirmação (4.2) é verdadeira, basta observar que pela condição de Feller

$$2\kappa\theta \geq \epsilon^2 \Rightarrow \frac{\kappa\theta}{2} \geq -\frac{\epsilon^2}{8} \Rightarrow \alpha = \left(\frac{\kappa\theta}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} \right) > 0$$

assim,

$$\begin{aligned} (x - y) [f(x) - f(y)] &= (x - y) \left[\frac{\alpha}{x} + \beta x - \frac{\alpha}{y} - \beta y \right] \\ &= (x - y)^2 \left(\beta - \frac{\alpha}{xy} \right) \\ &\leq \beta (x - y)^2. \end{aligned}$$

Esta propriedade é fundamental para demonstrar os resultados a respeito da convergência do método numérico que será proposto neste capítulo. Estes resultados dependem também de propriedades a cerca do q -ésimo momento da transformação Y que estão sumarizadas no lema seguinte que extraímos de Dereich *et al.* (2011).

Lema 4.1.1 *Seja $2\kappa\theta > \epsilon^2$ e $T < \infty$. Então, para todo $q \geq 1$ nós temos que*

$$\mathbb{E} [|Y_t - Y_s|^q] \leq c |t - s|^{\frac{q}{2}}, \quad \text{para } s, t \in [0, T],$$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\substack{0 \leq s < t \leq T \\ |t-s| \leq \Delta}} |Y_t - Y_s|^q \right] \leq c (|\log(\Delta)| \Delta)^{\frac{q}{2}}, \quad \text{para } \Delta \in (0, 1/2],$$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^q \right] < \infty.$$

Demonstração: Para $0 \leq s \leq t$, nós temos que

$$Y_t - Y_s = \int_s^t \frac{\alpha}{Y_u} du + \int_s^t \beta Y_u du + \gamma (W_t - W_s).$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|Y_t - Y_s| \leq \gamma |W_t - W_s| + |t - s|^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \frac{\alpha^2}{Y_u^2} du \right)^{\frac{1}{2}} + |t - s|^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \beta^2 Y_u^2 du \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

Tomando o valor esperado e aplicando a desigualdade de Minkowski vem que

$$\begin{aligned} \{\mathbb{E} [|Y_t - Y_s|^q]\}^{\frac{1}{q}} &\leq \gamma \{\mathbb{E} [|W_t - W_s|^q]\}^{\frac{1}{q}} + |t - s|^{\frac{1}{2}} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \frac{\alpha^2}{Y_u^2} du \right)^{\frac{q}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + |t - s|^{\frac{1}{2}} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \beta^2 Y_u^2 du \right)^{\frac{q}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Uma vez que $Y_u = \sqrt{X_u}$ para todo $0 \leq u \leq T$ podemos aplicar os lemas 3.1.1 e 3.1.2 na desigualdade anterior, o que nos fornece

$$\{\mathbb{E} [|Y_t - Y_s|^q]\}^{\frac{1}{q}} \leq \gamma \{\mathbb{E} [|W_t - W_s|^q]\}^{\frac{1}{q}} + c_1 |t - s|^{\frac{1}{2}}, \quad (4.4)$$

em que c_1 é uma constante real positiva.

Como $|W_t - W_s|^q \approx |t - s|^{\frac{q}{2}}$ (veja, por exemplo, o Capítulo 1 de Kuo (2006)) nós concluímos que

$$\mathbb{E} [|Y_t - Y_s|^q] \leq c |t - s|^{\frac{q}{2}},$$

o que prova a primeira afirmação.

Para mostrar a veracidade da segunda afirmação, basta observamos que a desigualdade (4.3) somada ao fato de que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s < t \leq T} |W_t - W_s|^q \right] \leq c_2 (|\log(\Delta)| \Delta)^{q/2}$$

para $\Delta \in (0, 1/2]$ e c_2 uma constante real positiva (veja, por exemplo [Fischer e Nappo \(2009\)](#)) e com a propriedade $|W_t - W_s|^q \approx |t - s|^{\frac{q}{2}}$, nos temos que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\substack{0 \leq s < t \leq T \\ |t-s| \leq \Delta}} |Y_t - Y_s|^q \right] \leq c |\log(\Delta)| \Delta^{\frac{q}{2}}.$$

A terceira afirmação segue do fato de

$$|Y_t| \leq y_0 + \gamma |W_t| + t^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \frac{\alpha^2}{Y_u^2} du \right) + t^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \beta^2 Y_u^2 du \right)^{\frac{1}{2}}$$

somada aos lemas [3.1.1](#) e [3.1.2](#) e ao fato de que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|^q \right] < \infty.$$

■

Agora vamos fixar uma discretização aleatória para o intervalo finito $[0, T]$ e em seguida definir um método do tipo Euler-Maruyama para aproximar o processo Y .

4.2 Discretização Aleatória

Dado um movimento Browniano $W := \{W_t : 0 \leq t \leq T\}$. Para cada número inteiro positivo k , nós definimos $T_0^k := 0$ e

$$T_n^k := \inf \left\{ T_{n-1}^k < t < \infty : |W_t - W_{T_{n-1}^k}| = 2^{-k} \right\}, \quad n \geq 1. \quad (4.5)$$

Nós observamos que $\{T_n^k : n \geq 0\}$ é uma sequência de \mathbb{F} -tempos de parada para todo k fixo em que $\{T_{n+1}^k - T_n^k : n \geq 0\}$ é uma sequência i.i.d com a mesma distribuição que T_1^k (veja, [Burq e Jones \(2008\)](#)). Em [Burq e Jones \(2008\)](#) os autores mostram uma fórmula explícita para a função geradora de momentos de T_1^k , a partir da qual concluímos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\mathbb{E} [(\Delta T_{n+1}^k)^q] = c \cdot 2^{-2qk}, \quad \forall q \in \mathbb{N} \text{ e } \forall T_n^k \in \mathcal{T}, \quad (4.6)$$

em que $\Delta T_{n+1}^k := T_{n+1}^k - T_n^k$, $\mathcal{T} := \{T_n^k : n \geq 0\}$ é a partição gerada pelos tempos de parada definidos por [\(4.5\)](#).

Com base na sequência de tempos de paradas $\{T_n^k : n \geq 0\}$, podemos definir para cada $k \in \mathbb{N}$ o processo de saltos unidimensional $A^k := \{A_t^k : 0 \leq t \leq T\}$ tal que

$$A_t^k := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k} \eta_n^k \mathbb{I}_{[T_n^k, \infty)}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.7)$$

em que,

$$\eta_n^k := \begin{cases} 1; & \text{se } W_{T_n^k} - W_{T_{n-1}^k} = 2^{-k} \text{ e } T_n^{k,j} < \infty, \\ -1; & \text{se } W_{T_n^k} - W_{T_{n-1}^k} = -2^{-k} \text{ e } T_n^{k,j} < \infty, \\ 0; & \text{se } T_n^k = \infty, \end{cases} \quad (4.8)$$

e $\mathbb{I}(\cdot)$ representa a função indicadora.

Na Figura 4.1 nós consideramos uma trajetória de um movimento Browniano W e fixamos um nível de discretização $k \in \mathbb{N}$. Ilustramos, desta forma, o comportamento do processo de saltos A^k relativo a W .

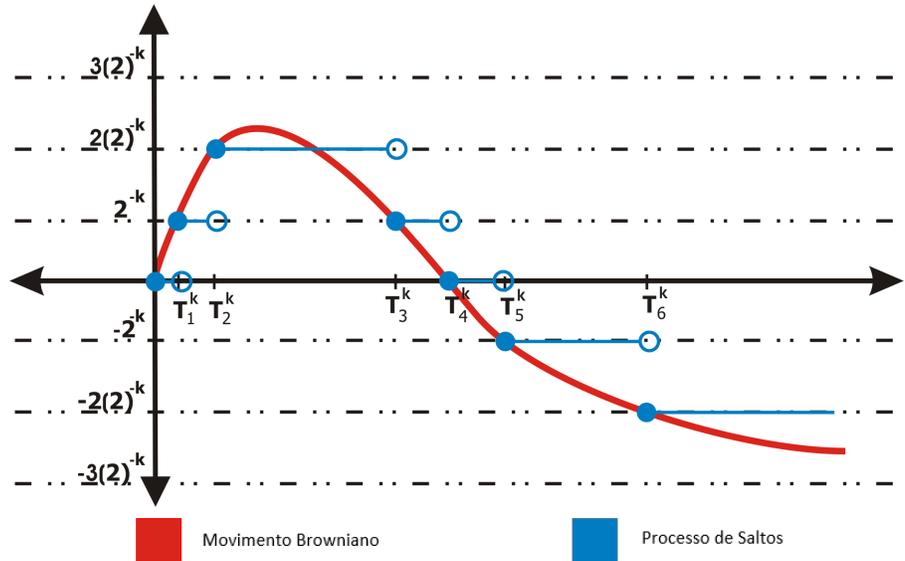


Figura 4.1: Processo de saltos relativo a uma trajetória do movimento Browniano.

Observando a Figura 4.1 percebemos que o processo de saltos A^k é uma aproximação do movimento Browniano W , no sentido que para um nível de discretização suficientemente grande esperamos que o processo A^k e o processo W tornem-se suficientemente próximos. Neste contexto, [Leão e Ohashi \(2013\)](#) estabelecem o seguinte resultado:

Lema 4.2.1 *Para cada $k \in \mathbb{N}$ o processo $A^k := \{A_t^k : 0 \leq t \leq T\}$ é tal que para todo $0 < T < \infty$*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|W_t - A_t^k\|_\infty \leq 2^{-k},$$

em que $\|\cdot\|$ denota a norma usual do espaço $L^\infty(\mathbb{P})$.

Definimos, ainda, para cada número inteiro positivo k a filtragem $\mathbb{F}^k := \{\mathcal{F}_t^k : 0 \leq t \leq T\}$ gerada pelos processos de saltos A^k . Notamos que \mathbb{F}^k é uma filtragem do tipo discreta (veja por exemplo a página 321 de [He et al. \(1992\)](#)) no sentido que

$$\mathcal{F}_t^k = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\mathcal{G}_i^k \cap \{T_i^k \leq t < T_{i+1}^k\}), \quad t \geq 0, \quad (4.9)$$

em que, $\mathcal{G}_0^k := \{\Omega, \emptyset\}$ e $\mathcal{G}_n^k := \mathcal{F}_{T_n^k}^k = \sigma(T_1^k, \dots, T_n^k, \sigma_1^k, \dots, \sigma_n^k)$. Além disso, uma vez que $\mathcal{F}_{T_n^k}^k = \sigma(A_{s \wedge T_n^k}^k : s \in \mathbb{Z}_+)$, nós concluímos que $\mathcal{F}_{T_n^k}^k = \mathcal{F}_t^k$ quase certamente em $\{T_n^k \leq t \leq T_{n+1}^k\}$. Portanto, é possível definir, para cada $k \in \mathbb{N}$ a base estocástica $(\Omega, \mathbb{F}^k, \mathcal{F}^k, \mathbb{P})$ gerada pelo processo de saltos A^k , em que Ω e \mathbb{P} são tais como foram especificados no capítulo anterior.

4.3 Aproximação do tipo Euler-Maruyama

Para a análise numérica do processo X de Cox-Ingersoll-Ross nós consideramos, primeiramente, a aproximação Y^k do tipo Euler-Maruyama relativa ao processo Y . E definimos para cada $k \in \mathbb{N}$

$$Y_{T_{n+1}^k}^k := Y_{T_n^k}^k + \left(\frac{\alpha}{Y_{T_{n+1}^k}^k} + \beta Y_{T_{n+1}^k}^k \right) \Delta T_{n+1}^k + \gamma \Delta A_{T_{n+1}^k}^k, \quad \forall T_n^k \in \mathcal{T} \quad \text{e} \quad n \geq 0, \quad (4.10)$$

em que, $\Delta T_{n+1}^k := T_{n+1}^k - T_n^k$, $\Delta A_{T_{n+1}^k}^k := A_{T_{n+1}^k}^k - A_{T_n^k}^k$ e $Y_0^k = \sqrt{x_0}$.

Portanto para $k \in \mathbb{N}$ fixo a aproximação do tipo Euler-Maruyama X^k para o processo X de Cox-Ingersoll-Ross é dada por

$$X_{T_n^k}^k = \left(Y_{T_n^k}^k \right)^2, \quad \forall T_n^k \in \mathcal{T},$$

concluímos então que X^k é uma aproximação estritamente positiva do processo X . Buscando manter esta característica, podemos definir o processo $X^k := \{X_t^k : 0 \leq t \leq T\}$ da seguinte forma:

$$X_t^k := \sum_{n=0}^{\infty} X_{T_n^k}^k \mathbb{I}_{[T_n^k, T_{n+1}^k)}(t), \quad \forall t \in [0, T],$$

isto é X^k é um processo de saltos.

Com isso estabelecemos o principal resultado deste trabalho:

Teorema 4.3.1 *Seja $2\kappa\theta > \epsilon^2$, $T < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$ fixo. Então, para $1 \leq p < \frac{2\kappa\theta}{\epsilon^2}$, temos que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} \left| X_{T_n^k}^k - X_{T_n^k}^k \right|^p \right] \leq C_p 2^{-pk},$$

em que $C_p > 0$ é uma constante positiva e

$$\mathbb{P} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} \left| X_{T_n^k}^k - X_{T_n^k}^k \right|^p \right) = 0 \right] = 1.$$

A fim de mostrar este teorema, estipulamos alguns lemas essenciais. O primeiro resultado designa um limitante para o q -ésimo momento dos incrementos $Y_{T_n^k}^k - Y_{T_{n-1}^k}^k$, $\forall T_n^k \in \mathcal{T}$.

Lema 4.3.1 *Seja $2\kappa\theta > \epsilon^2$, $T < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$ fixo. Então, para todo $q \geq 1$ nós temos*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{T_{n-1}^k \leq u \leq T_n^k} |Y_{T_n^k} - Y_u|^q \right] \leq c2^{-qk}, \quad \forall T_n^k \in \mathcal{T}.$$

Demonstração: Para todo $T_n^k \in \mathcal{T}$, nós temos

$$\begin{aligned} Y_{T_n^k} - Y_u &= \int_u^{T_n^k} \left(\frac{\alpha}{Y_s} + \beta Y_s \right) ds + \gamma (W_{T_n^k} - W_u) \\ &= \int_u^{T_n^k} \frac{\alpha}{Y_s} ds + \int_u^{T_n^k} \beta Y_s ds + \gamma (W_{T_n^k} - W_u). \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$|Y_{T_n^k} - Y_u| \leq \gamma |W_{T_n^k} - W_u| + (T_n^k - u)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \frac{\alpha^2}{Y_s^2} ds \right)^{\frac{1}{2}} + (T_n^k - u)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \beta^2 Y_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pelas desigualdades de Minkowski e de Holder, segue que

$$\begin{aligned} \left[\mathbb{E} \left(\sup_{T_{n-1}^k \leq u \leq T_n^k} |Y_{T_n^k} - Y_u|^q \right) \right]^{\frac{1}{q}} &\leq \gamma 2^{-k} + \left\{ \mathbb{E} \left[(\Delta T_n^k)^{\frac{q}{2}} \left(\int_0^T \frac{\alpha^2}{Y_s^2} ds \right)^{\frac{q}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left\{ \mathbb{E} \left[(\Delta T_n^k)^{\frac{q}{2}} \left(\int_0^T \beta^2 Y_s^2 ds \right)^{\frac{q}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \gamma 2^{-k} + \left\{ \mathbb{E} [(\Delta T_n^k)^q] \right\}^{\frac{1}{2q}} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \frac{\alpha^2}{Y_s^2} ds \right)^q \right] \right\}^{\frac{1}{2q}} \\ &\quad + \left\{ \mathbb{E} [(\Delta T_n^k)^q] \right\}^{\frac{1}{2q}} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \beta^2 Y_s^2 ds \right)^q \right] \right\}^{\frac{1}{2q}} \\ &\leq c2^{-k}, \end{aligned}$$

em que c é uma constante positiva. ■

Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $n \geq 0$ definimos $E_n := Y_{T_n^k} - Y_{T_n^k}^k$ como sendo o erro da aproximação do tipo Euler-Maruyama avaliada no ponto $T_n^k \in \mathcal{T}$. É neste sentido que o lema seguinte estabelece um limitante para o p -ésimo momento de $|E_n|$.

Lema 4.3.2 *Seja $2\kappa\theta > \epsilon^2$, $T < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$ fixo. Para $1 \leq p < \frac{2\kappa\theta}{\epsilon^2}$, existe $C_p > 0$ tal que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} |Y_{T_n^k} - Y_{T_n^k}^k|^p \right] \leq C_p 2^{-pk}.$$

Demonstração:

Para cada $\omega \in \Omega$ e k um número inteiro positivo fixo, nós definimos

$$E_n := Y_{T_n^k} - Y_{T_n^k}^k, \quad n \geq 0,$$

como o erro avaliado nos tempos de parada $T_n^k \in \mathcal{T}$. Então,

$$E_0 = Y_{T_0^k} - Y_{T_0^k}^k = Y_0 - Y_0^k = (x_0)^{1/2} - (x_0)^{1/2} = 0$$

e,

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= - \left(Y_{T_{n+1}^k}^k - Y_{T_n^k}^k \right) + \left(Y_{T_{n+1}^k} - Y_{T_n^k} \right) \\ &= - \left[\left(\frac{\alpha}{Y_{T_{n+1}^k}^k} + \beta Y_{T_{n+1}^k}^k \right) \Delta T_{n+1}^k + \gamma \Delta A_{T_{n+1}^k}^k \right] \\ &\quad + \int_{T_n^k}^{T_{n+1}^k} \left(\frac{\alpha}{Y_u} + \beta Y_u \right) du + \gamma \left(W_{T_{n+1}^k} - W_{T_n^k} \right). \end{aligned}$$

Observamos que definimos para todo $T_n^k \in \mathcal{T}$, $\Delta A_{T_{n+1}^k}^k := A_{T_{n+1}^k}^k - A_{T_n^k}^k$ uma vez que $\Delta A_{T_{n+1}^k}^k = \Delta W_{T_{n+1}^k}^k := W_{T_{n+1}^k} - W_{T_n^k}$ e assim segue que,

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= - \left(\frac{\alpha}{Y_{T_{n+1}^k}^k} + \beta Y_{T_{n+1}^k}^k \right) \Delta T_{n+1}^k + \int_{T_n^k}^{T_{n+1}^k} \left(\frac{\alpha}{Y_u} + \beta Y_u \right) du \\ &= -f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) \Delta T_{n+1}^k + \int_{T_n^k}^{T_{n+1}^k} f \left(Y_u \right) du \\ &= -f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) \Delta T_{n+1}^k + \int_{T_n^k}^{T_{n+1}^k} \left(f \left(Y_u \right) + f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) - f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) \right) du. \\ &= -f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) \Delta T_{n+1}^k + \int_{T_n^k}^{T_{n+1}^k} f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) du \\ &\quad - \int_{T_n^k}^{T_{n+1}^k} \left[f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) - f \left(Y_u \right) \right] du \\ &= \left[f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) - f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) \right] \Delta T_{n+1}^k - \int_{T_n^k}^{T_{n+1}^k} \left[f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) - f \left(Y_u \right) \right] du. \end{aligned}$$

Nós definimos,

$$r_n := - \int_{T_n^k}^{T_{n+1}^k} \left[f \left(Y_{T_{n+1}^k}^k \right) - f \left(Y_u \right) \right] du,$$

e desta forma podemos escrever

$$E_{n+1} = E_n + \left[f\left(Y_{T_{n+1}^k}\right) - f\left(Y_{T_{n+1}^k}^k\right) \right] \Delta T_{n+1}^k + r_n.$$

Multiplicando ambos os lados por E_{n+1} nós obtemos

$$\begin{aligned} E_{n+1}^2 &= E_{n+1}E_n + E_{n+1} \left[f\left(Y_{T_{n+1}^k}\right) - f\left(Y_{T_{n+1}^k}^k\right) \right] \Delta T_{n+1}^k + E_{n+1}r_n \\ &\leq \frac{1}{2}E_{n+1}^2 + \frac{1}{2}E_n^2 + E_{n+1} \left[f\left(Y_{T_{n+1}^k}\right) - f\left(Y_{T_{n+1}^k}^k\right) \right] \Delta T_{n+1}^k + E_{n+1}r_n. \end{aligned}$$

Pela condição unilateral de Lipschitz nós temos que

$$E_{n+1} \left[f\left(Y_{T_{n+1}^k}\right) - f\left(Y_{T_{n+1}^k}^k\right) \right] \Delta T_{n+1}^k \leq \beta E_{n+1}^2 \Delta T_{n+1}^k \leq 0. \quad (4.11)$$

Logo,

$$E_{n+1}^2 \leq E_n^2 + 2E_{n+1}r_n.$$

Aplicando recursividade e o fato de $E_0 = 0$ segue que

$$0 \leq E_n^2 \leq 2 \sum_{i=0}^{n-1} E_{i+1}r_i, \quad \forall n \geq 1.$$

Então,

$$\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} E_n^2 \leq 2 \sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} |E_n| \sum_{i=0}^{|\mathcal{T}|-1} |r_i|, \quad (4.12)$$

em que $|\mathcal{T}|$ é uma variável aleatória que representa o número de elementos do conjunto \mathcal{T} . Desde que $\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} |E_n| \neq 0$ nós concluímos que

$$\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} |E_n| \leq 2 \sum_{i=0}^{|\mathcal{T}|-1} |r_i| \quad (4.13)$$

Para todo $0 \leq i \leq |\mathcal{T}| - 1$ nós temos que

$$\begin{aligned} |r_i| &= \left| \int_{T_i^k}^{T_{i+1}^k} \left[f\left(Y_{T_{i+1}^k}\right) - f\left(Y_u\right) \right] du \right| \\ &\leq \int_{T_i^k}^{T_{i+1}^k} \left| f\left(Y_{T_{i+1}^k}\right) - f\left(Y_u\right) \right| du \end{aligned}$$

Note que se

$$f(a) - f(b) = \beta(a - b) + \frac{\alpha}{ab}(b - a), \quad a, b > 0.$$

Então,

$$|f(a) - f(b)| \leq k_1 \left(1 + \frac{1}{ab}\right) |a - b|$$

em que $k_1 > 0$ é uma constante real. Assim, para todo $0 \leq i \leq |\mathcal{T}| - 1$.

$$\begin{aligned} |r_i| &\leq k_1 \int_{T_i^k}^{T_{i+1}^k} \left(1 + \frac{1}{|Y_u Y_{T_{i+1}^k}|}\right) |Y_{T_{i+1}^k} - Y_u| du. \\ &\leq k_1 \sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} |Y_{T_{i+1}^k} - Y_u| \int_{T_i^k}^{T_{i+1}^k} \left(1 + \frac{1}{|Y_u Y_{T_{i+1}^k}|}\right) du \\ &= k_1 \sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} |Y_{T_{i+1}^k} - Y_u| \left[\Delta T_{i+1}^k + \int_{T_i^k}^{T_{i+1}^k} \frac{1}{|Y_{T_{i+1}^k} Y_u|} du \right] \\ &\leq k_1 \sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} |Y_{T_{i+1}^k} - Y_u| \left[\Delta T_{i+1}^k + \frac{1}{|Y_{T_{i+1}^k}|} \Delta T_{i+1}^k \sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} \frac{1}{|Y_u|} \right] \end{aligned}$$

Logo, para $1 \leq p \leq \frac{2\kappa\theta}{\epsilon^2}$, o Lema 4.3.2 e as desigualdades de Minkowski e de Hölder garantem que

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}[|r_i|^p])^{\frac{1}{p}} &\leq k_1 \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} |Y_{T_{i+1}^k} - Y_u| \right)^p \left(\Delta T_{i+1}^k + \Delta T_{i+1}^k \frac{1}{|Y_{T_{i+1}^k}|} \sup_{T_{i+1}^k \leq u \leq T_i^k} \frac{1}{|Y_u|} \right)^p \right] \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq k_1 \left[\mathbb{E} \left[\left(\sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} |Y_{T_{i+1}^k} - Y_u| \right)^{pq} \right] \right]^{\frac{1}{pq}} \\ &\quad \times \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\Delta T_{i+1}^k + \Delta T_{i+1}^k \frac{1}{|Y_{T_{i+1}^k}|} \sup_{T_{i+1}^k \leq u \leq T_i^k} \frac{1}{|Y_u|} \right)^{pq'} \right] \right\}^{\frac{1}{pq'}} \\ &\leq k_1 \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} |Y_{T_{i+1}^k} - Y_u| \right)^{pq} \right] \right\}^{\frac{1}{pq}} \\ &\quad \times \left(\left\{ \mathbb{E} \left[(\Delta T_{i+1}^k)^{pq'} \right] \right\}^{\frac{1}{pq'}} + \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\Delta T_{i+1}^k \frac{1}{|Y_{T_{i+1}^k}|} \sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} \frac{1}{|Y_u|} \right)^{pq'} \right] \right\}^{\frac{1}{pq'}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq k_1 \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} |Y_{T_{i+1}^k} - Y_u| \right)^{pq} \right] \right\}^{\frac{1}{pq}} \\
&\quad \times \left(\left\{ \mathbb{E} \left[(\Delta T_{i+1}^k)^{pq'} \right] \right\}^{\frac{1}{pq'}} + \left\{ \mathbb{E} \left[(\Delta T_{i+1}^k)^{2pq'} \right] \right\}^{\frac{1}{2pq'}} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{|Y_{T_{i+1}^k}|^{2pq'}} \left(\sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} \frac{1}{|Y_u|} \right)^{2pq'} \right] \right\}^{\frac{1}{2pq'}} \right) \\
&\leq k_1 c_1 2^{-k} \left(c_2 2^{-2k} + c_3 2^{-2k} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{|Y_{T_{i+1}^k}|^{2pq'}} \left(\sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} \frac{1}{|Y_u|} \right)^{2pq'} \right] \right\}^{\frac{1}{2pq'}} \right)
\end{aligned}$$

em que, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ com $q, q' > 1$ e c_i é uma constante real positiva para $i = 1, 2, 3$. Uma vez que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\frac{1}{|Y_{T_{i+1}^k}|^{2pq'}} \left(\sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} \frac{1}{|Y_u|} \right)^{2pq'} \right] &\leq \frac{1}{2} \left(\mathbb{E} \left[\frac{1}{|Y_{T_{i+1}^k}|^{4pq'}} \right] + \mathbb{E} \left[\left(\sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} \frac{1}{|Y_u|} \right)^{4pq'} \right] \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\mathbb{E} \left[(X_{T_{i+1}^k})^{-2pq'} \right] + \mathbb{E} \left[\left(\sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} \frac{1}{|Y_u|} \right)^{4pq'} \right] \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[(X_t)^{-2pq'} \right] + \mathbb{E} \left[\left(\sup_{T_i^k \leq u \leq T_{i+1}^k} \frac{1}{|Y_u|} \right)^{4pq'} \right] \right) \\
&< L,
\end{aligned}$$

em que $L > 0$ é uma constante positiva.

Tomando $M := k_1 c_1 c_2 + k_1 c_1 c_3 L$ constante positiva, nós concluímos que

$$(\mathbb{E} [|r_i|^p])^{\frac{1}{p}} \leq M 2^{-3k}.$$

Uma consequência da igualdade (4.6) é o fato de que $\mathbb{E} [|\mathcal{T}|^p] = T^p 2^{2pk}$ então, a partir da desigualdade (4.13) segue para todo $1 \leq p \leq \frac{2\kappa\theta}{\epsilon^2}$ e $k \in \mathbb{N}$ fixo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} \left| Y_{T_n^k} - Y_{T_n^k}^k \right|^p \right] &\leq 2^p \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{|\mathcal{T}|-1} |r_i| \right)^p \right] \\
&= 2^p \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{|\mathcal{T}|-1} |r_i| \right)^p \mid |\mathcal{T}| - 1 = n \right] \right\} \\
&= 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{|\mathcal{T}|-1} |r_i| \right)^p \mid |\mathcal{T}| = n + 1 \right] \mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n + 1) \right\} \\
&= 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n + 1) \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^n |r_i| \right)^p \right] \right\} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n + 1) \left[\sum_{i=0}^n \mathbb{E}^{\frac{1}{p}}(|r_i|^p) \right]^p \right\} \\
&\leq M^p 2^{-3pk} \mathbb{E}[|\mathcal{T}|^p] \\
&= (MT)^p 2^{-kp}.
\end{aligned}$$

Portanto, para $C_p := (TM)^p$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} \left| Y_{T_n^k} - Y_{T_n^k}^k \right|^p \right] \leq C_p 2^{-pk}.$$

■

Lembrando que $Y_t = \sqrt{X_t}$ para todo $0 \leq t \leq T$ e utilizando o lema anterior nós derivamos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.1 - Parte 1: *Seja $2\kappa\theta \geq \epsilon^2$, $T < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$ fixo. Então para todo $1 \leq p \leq \frac{2\kappa\theta}{\epsilon^2}$, existe uma contante $C_p > 0$ tal que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} \left| X_{T_n^k} - X_{T_n^k}^k \right|^p \right] \leq C_p 2^{-pk}.$$

Demonstração: Para $k \in \mathbb{N}$ fixo e para todo $T_n^k \in \mathcal{T}$ nós observamos que

$$\left(Y_{T_n^k} - Y_{T_n^k}^k \right)^2 = \left(\sqrt{X_{T_n^k}} - \sqrt{X_{T_n^k}^k} \right)^2 = X_{T_n^k} + X_{T_n^k}^k - 2\sqrt{X_{T_n^k} X_{T_n^k}^k}.$$

Se $\min(X_{T_n^k}, X_{T_n^k}^k) = X_{T_n^k}$ então

$$X_{T_n^k} \leq X_{T_n^k}^k \Rightarrow -2\sqrt{X_{T_n^k} X_{T_n^k}^k} \geq -2X_{T_n^k}^k.$$

Logo,

$$\left(Y_{T_n^k} - Y_{T_n^k}^k\right)^2 \geq X_{T_n^k} - X_{T_n^k}^k$$

Por outro lado se $\min\left(X_{T_n^k}, X_{T_n^k}^k\right) = X_{T_n^k}^k$ segue que

$$X_{T_n^k}^k \leq X_{T_n^k} \Rightarrow -2\sqrt{X_{T_n^k} X_{T_n^k}^k} \geq -2X_{T_n^k}.$$

e assim,

$$\left(Y_{T_n^k} - Y_{T_n^k}^k\right)^2 \geq X_{T_n^k}^k - X_{T_n^k}.$$

Portanto,

$$\left|X_{T_n^k}^k - X_{T_n^k}\right|^p \leq \left(Y_{T_n^k} - Y_{T_n^k}^k\right)^{2p},$$

para qualquer $1 \leq p \leq \frac{2\kappa\theta}{\epsilon^2}$.

Então a partir do lema 4.3.2 concluímos que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} \left|X_{T_n^k} - X_{T_n^k}^k\right|^p \right] \leq C_p 2^{-pk},$$

com $k \in \mathbb{N}$ fixo. ■

Explorando os resultados anteriores nós estabelecemos o seguinte teorema:

Teorema 4.3.1 - Parte 2: *Seja $2\kappa\theta \geq \epsilon^2$, $T < \infty$ e $k \in \mathbb{N}$ fixo. Então para $1 \leq p < \frac{2\kappa\theta}{\epsilon^2}$*

$$\mathbb{P} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} \left|X_{T_n^k} - X_{T_n^k}^k\right|^p \right) = 0 \right] = 1.$$

Demonstração: Para qualquer $\epsilon > 0$, a desigualdade de Markov garante que

$$\mathbb{P} \left[\left(\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} \left|X_{T_n^k} - X_{T_n^k}^k\right|^p \right) > \epsilon \right] \leq \frac{1}{\epsilon^p} \mathbb{E} \left[\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} \left|X_{T_n^k} - X_{T_n^k}^k\right|^p \right]$$

em que $1 \leq p \leq \frac{2\kappa\theta}{\epsilon^2}$.

Logo, a partir do Teorema 4.3.1 - parte 1, segue que

$$\mathbb{P} \left[\left(\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} \left|X_{T_n^k} - X_{T_n^k}^k\right|^p \right) > \epsilon \right] \leq \frac{C_p 2^{-pk}}{\epsilon^p},$$

em que C_p é uma constante positiva.

Como,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_p}{2^{pk} \epsilon^p} < \infty,$$

nós obtemos, pelo segundo teste da comparação, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P} \left[\left(\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} |X_{T_n^k} - X_{T_n^k}^k|^p \right) > \epsilon \right] < \infty,$$

Portanto, pelo critério da convergência quase certa, nós concluímos que

$$\mathbb{P} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{T_n^k \in \mathcal{T}} |X_{T_n^k} - X_{T_n^k}^k|^p \right) = 0 \right] = 1.$$

■

Demonstrada a convergência do método numérico proposto, apresentamos no próximo capítulo um algoritmo totalmente baseado nos incrementos de tempos de parada definidos em (4.5) com o objetivo de comparar valores teóricos a resultados numéricos.

Simulação

Neste capítulo, nós apresentamos um algoritmo totalmente baseado nos incrementos de tempos de parada $\{T_{n+1}^k - T_n^k : n \geq 0\}$ para simular a aproximação X^k do tipo Euler-Maruyama para o processo de Cox-Ingersoll-Ross X e utilizamos técnicas de simulação Monte Carlo para comparar o estimador $\hat{\mu}_t$ com o parâmetro $\mu_t := \mathbb{E}(X_t)$ com $t \in [0, T]$.

5.1 O Algoritmo

Seja $k \in \mathbb{N}$ um nível de discretização fixo. O algoritmo para a simulação do processo de Cox-Ingersoll-Ross é dado através dos seguintes passos:

Passo 1: Simulação dos tempos de parada $\{T_\ell^k : \ell \geq 1\}$ e do processo de saltos A^k .

- (1) Geramos os incrementos $\{T_{\ell+1}^k - T_\ell^k : \ell \geq 0\}$ de acordo com o algoritmo descrito por [Burq e Jones \(2008\)](#) e, conseqüentemente, os \mathbb{F}^k -tempos de parada $\{T_\ell^k : \ell \geq 1\}$, de forma que todos os \mathbb{F}^k -tempos de parada são tais que $T_\ell^k \leq T$.
- (2) Geramos a família i.i.d $\eta^k = \{\eta_\ell^k : \ell \geq 1\}$ independente de $\{T_\ell^k : \ell \geq 1\}$, de acordo com a variável aleatória η_1^k que possui distribuição Bernoulli com parâmetro $1/2$ tal que $\eta_1^k \in \{-1, 1\}$. Isto simula o processo de saltos A^k .

Algorithm 1: Pseudocódigo dos tempos de parada T^k e dos processos de saltos A^k .

Data: Tempo de Maturidade T , Nível de discretização k

Result: Vetores de tempos de parada T^k , família η^k , processo de saltos A^k .

- 1 $\mathcal{T} \leftarrow \text{Burq and Jones}(k, T)$ Vetor de \mathbb{F}^k -tempos de parada gerado pelo algoritmo descrito por [Burq e Jones \(2008\)](#)
 - 2 $n \leftarrow \text{Length}(\mathcal{T})$ n é o tamanho de \mathcal{T}
 - 3 $n_0 \leftarrow 0.0$
 - 4 $A_0 \leftarrow 0.0$
 - 5 **for** $i \leftarrow 1$ **to** d **do**
 - 6 $\eta_i \leftarrow$ Amostra de um elemento gerado a partir de uma distribuição Bernoulli (0.5)
 - 7 $A_i \leftarrow A_{i-1} + 2^{-k}\eta_i$
-

Passo 2: Simulação da aproximação do tipo Euler-Maruyama X^k para o processo de Cox-Ingersoll-Ross

Com o Passo 1, obtemos a partição $\mathcal{T}^k := \{T_\ell^k : \ell \geq 1\}$, a família η^k e os processos de saltos A^k para $k \in \mathbb{N}$. O próximo passo mostra como calcular aproximações para o processo X .

- (1) Nós consideramos a estatística de ordem \mathcal{T} gerada por todos os tempos de parada definidos por (4.5).
- (2) Para a partição \mathcal{T} , nós aplicamos um método do tipo Euler-Maruyama para avaliar a aproximação X^k de X .

Algorithm 2: Pseudocódigo a aproximação X^k do processo de Cox-Ingersoll-Ross X .

Data: Partições \mathcal{T}^k , Famílias η^k e processos de saltos A^k . Nível de discretização k

Result: Aproximação do processo de Cox-Ingersoll-Ross X_ℓ^k

- 1 $n \leftarrow \text{Length}(\mathcal{T})$ n é o tamanho de \mathcal{T}^k
 - 2 **for** $\ell \leftarrow 1$ **to** n **do**
 - 3 Simulação de X^k na partição \mathcal{T} utilizando uma aproximação do tipo Euler-Maruyama.
 - 4 $X_\ell^k \leftarrow \text{Euler-Maruyama}(\mathcal{T}, \eta^k, A^k)$
-

5.2 Resultados

Para o estudo de simulação nós tomamos $\kappa = 7.26$, $\theta = 0.04$, $\epsilon = 0.6$ e $x_0 = 0.09$. Utilizamos os níveis de discretização $k = 3$, $k = 4$, $k = 5$ e $k = 6$ em um intervalo fixo $[0, T]$ com $T = 1$. E, realizamos 5.000 simulações, cujos resultados estão sumarizados na tabela 5.1.

Na Tabela 5.1 nós apresentamos os resultados associados ao método do tipo Euler-Maruyama considerando uma discretização aleatória como a proposta por [Leão e Ohashi \(2013\)](#). Para

cada nível de discretização nós fixamos os tempos $t = 0$, $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$ e $t = 1$ a partir dos quais nós calculamos μ_t e comparamos com o estimador $\hat{\mu}_t^1$. Apresentamos, então, o vício, o erro quadrático médio (EQM) e um intervalo de confiança para o vício $|\mu_t - \hat{\mu}_t|$ com 95% de confiança, que denotamos por $IC(|\mu_t - \hat{\mu}_t|, 95\%)$.

Tabela 5.1: Simulação associada a um método do tipo Euler-Maruyama considerando uma discretização aleatória.

k	Tempos	μ_t	$\hat{\mu}_t$	$ \mu_t - \hat{\mu}_t $	EQM	$IC(\mu_t - \hat{\mu}_t , 95\%)$.
$k = 3$	0.25	0.04814	0.04905	0.00091	8.28×10^{-7}	(-0.00102, 0.00102)
	0.5	0.04133	0.04218	0.00086	7.34×10^{-7}	(-0.00093, 0.00093)
	0.75	0.04022	0.03954	0.00067	4.54×10^{-7}	(-0.00087, 0.00088)
	1	0.04004	0.03984	0.00020	3.81×10^{-8}	(-0.00088, 0.00088)
$k = 4$	0.25	0.04814	0.04906	0.00092	9.42×10^{-7}	(-0.00102, 0.00102)
	0.5	0.04133	0.04189	0.00056	3.18×10^{-7}	(-0.00093, 0.00091)
	0.75	0.04022	0.04009	0.00012	1.48×10^{-8}	(-0.00090, 0.00091)
	1	0.04004	0.03997	0.00007	4.90×10^{-9}	(-0.00088, 0.00087)
$k = 5$	0.25	0.04814	0.04741	0.00074	5.43×10^{-7}	(-0.00100, 0.00148)
	0.5	0.04133	0.04107	0.00026	6.74×10^{-8}	(-0.00090, 0.00089)
	0.75	0.04022	0.04016	0.00005	2.60×10^{-9}	(-0.00087, 0.00088)
	1	0.04004	0.03956	0.00048	2.26×10^{-7}	(-0.00086, 0.00086)
$k = 6$	0.25	0.04814	0.04790	0.00024	5.82×10^{-8}	(-0.00099, 0.00099)
	0.5	0.04133	0.04085	0.00048	2.30×10^{-7}	(-0.00086, 0.00086)
	0.75	0.04022	0.03938	0.00083	6.95×10^{-7}	(-0.00087, 0.00087)
	1	0.04004	0.03979	0.00024	5.99×10^{-8}	(-0.00087, 0.00088)

Analisando a Tabela 5.1 observamos que o vício $|\mu_t - \hat{\mu}_t|$ é sempre menor que 2^{-k} para qualquer valor de t e de k . Isto concorda com o fato da aproximação do tipo Euler-Maruyama proposta neste trabalho possuir uma taxa de convergência exponencial. Além disso, o intervalo de confiança para o vício sempre contém o zero, o que é um indicativo de que o estimador seja não viesado.

Por fim, apresentamos no próximo capítulo uma conclusão em relação ao trabalho desenvolvido nesta dissertação e as intenções de pesquisa futura.

Conclusão

Nesta dissertação, propomos uma aproximação do tipo Euler-Maruyama para o processo de Cox-Ingersoll-Ross baseada no esquema de discretização aleatória proposto por [Leão e Ohashi \(2013\)](#) e mostramos que esta aproximação converge a uma taxa de ordem exponencial. Apresentamos um algoritmo completamente baseado na informação gerada pelos tempos de parada definidos em (4.5) e utilizamos técnicas de simulação Monte Carlo para comparar resultados numéricos com valores teóricos.

O modelo de Heston é composto por duas equações diferenciais estocásticas, uma que especifica a dinâmica de preço e outra relativa à dinâmica de volatilidade, esta última é dada através de um processo de Cox-Ingersoll-Ross, cuja aproximação possui ordem de convergência exponencial quando consideramos um ambiente de trabalho como o estabelecido nesta dissertação. O próximo passo deste trabalho é buscar argumentos matemáticos que formalizem este tipo de convergência para a dinâmica de preço que compõem o modelo de Heston.

Referências Bibliográficas

- Abramowitz e Stegun (1972)** Milton Abramowitz e Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Number 55. Courier Dover Publications. Citado na pág. [24](#)
- Ahn e Gao (1999)** Dong-Hyun Ahn e Bin Gao. A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *Review of financial studies*, 12(4):721–762. Citado na pág. [2](#)
- Alfonsi (2005)** Aurélien Alfonsi. On the discretization schemes for the cir (and bessel squared) processes. *Monte Carlo Methods and Applications mcma*, 11(4):355–384. Citado na pág. [3](#)
- Alfonsi (2013)** Aurélien Alfonsi. Strong order one convergence of a drift implicit euler scheme: Application to the cir process. *Statistics & Probability Letters*, 83(2):602–607. Citado na pág. [3](#)
- Andersen e Lund (1997)** Torben G Andersen e Jesper Lund. Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate. *Journal of econometrics*, 77(2): 343–377. Citado na pág. [3](#)
- Andersen et al. (2002)** Torben G Andersen, Luca Benzoni e Jesper Lund. An empirical investigation of continuous-time equity return models. *The Journal of Finance*, 57(3):1239–1284. Citado na pág. [2](#)
- Bacinello (2000)** Anna Rita Bacinello. Valuation of contingent-claims characterising particular pension schemes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27(2):177–188. Citado na pág. [3](#)
- Barone-Adesi e Sorwar (2002)** Giovanni Barone-Adesi e Ghulam Sorwar. Interest rate barrier options. Em *Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance*, páginas 313–324. Springer. Citado na pág. [3](#)
- Black e Scholes (1973)** Fischer Black e Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, páginas 637–654. Citado na pág. [2](#)
- Bossy e Diop (2004)** M Bossy e A Diop. An efficient discretisation scheme for one dimensional sdes with a diffusion coefficient function of the form $|x|^a$, $a \in [1/2, 1)$. Citado na pág. [3](#), [24](#)
- Broadie e Kaya (2004)** Mark Broadie e Ozgur Kaya. Exact simulation of option greeks under stochastic volatility and jump diffusion models. Em *Simulation Conference, 2004. Proceedings of the 2004 Winter*, volume 2, páginas 1607–1615. IEEE. Citado na pág. [23](#)

- Broadie e Kaya (2006)** Mark Broadie e Özgür Kaya. Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Operations Research*, 54(2):217–231. Citado na pág. 3, 23
- Burq e Jones (2008)** Zaeem A Burq e Owen D Jones. Simulation of brownian motion at first-passage times. *Mathematics and Computers in Simulation*, 77(1):64–71. Citado na pág. 28, 39, 40
- Courtadon (1982)** Georges Courtadon. The pricing of options on default-free bonds. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17(01):75–100. Citado na pág. 1
- Cox et al. (1985)** John C Cox, Jonathan E Ingersoll Jr e Stephen A Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, páginas 385–407. Citado na pág. 1, 2
- Deelstra e Delbaen (1998)** Griselda Deelstra e Freddy Delbaen. Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term. *Applied stochastic models and data analysis*, 14(1):77–84. Citado na pág. 3
- Dereich et al. (2011)** Steffen Dereich, Andreas Neuenkirch e Lukasz Szpruch. An euler-type method for the strong approximation of the cox–ingersoll–ross process. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, página rspa20110505. Citado na pág. 3, 26
- Dothan (1978)** L Uri Dothan. On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 6(1):59–69. Citado na pág. 1
- Fischer e Nappo (2009)** Markus Fischer e Giovanna Nappo. On the moments of the modulus of continuity of itô processes. *Stochastic Analysis and Applications*, 28(1):103–122. Citado na pág. 28
- Gkamas (2001)** Dimitrios Gkamas. Stochastic volatility and option pricing. Citado na pág. 3
- Glasserman (2004)** Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53. Springer. Citado na pág. 3
- Gyöngy e Rásonyi (2011)** István Gyöngy e Miklós Rásonyi. A note on euler approximations for sdes with hölder continuous diffusion coefficients. *Stochastic processes and their applications*, 121(10):2189–2200. Citado na pág. 3
- He et al. (1992)** Sheng-wu He, Jia-gang Wang e Jia-an Yan. *Semimartingale theory and stochastic calculus*. Taylor & Francis. Citado na pág. 29
- Heston (1993)** Steven L Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies*, 6(2):327–343. Citado na pág. 2
- Hida (1980)** Takeyuki Hida. *Brownian motion*. Springer. Citado na pág. 11
- Higham e Mao (2005)** Desmond J Higham e Xuerong Mao. Convergence of monte carlo simulations involving the mean-reverting square root process. *Journal of Computational Finance*, 8(3):35–61. Citado na pág. 3

-
- Hull e White (1987)** John Hull e Alan White. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The journal of finance*, 42(2):281–300. Citado na pág. 2
- Hurd e Kuznetsov (2008)** TR Hurd e A Kuznetsov. Explicit formulas for laplace transforms of stochastic integrals. *Markov Processes and Related Fields*, 14(2):277–290. Citado na pág. 24
- Kloeden e Platen (1992)** Peter E Kloeden e Eckhard Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, volume 23. Springer. Citado na pág. 3
- Kreyszig (1989)** Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 81. wiley New York. Citado na pág. 10
- Kuo (2006)** Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Springer. Citado na pág. 12, 17, 18, 27
- Leão e Ohashi (2013)** Dorival Leão e Alberto Ohashi. Weak approximations for wiener functionals. *The Annals of Applied Probability*, 23(4):1660–1691. Citado na pág. xi, xiii, 3, 25, 29, 40, 43
- Lévy (1948)** Paul Lévy. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars, Paris. Citado na pág. 11
- Lima (1970)** Elon Lages Lima. *Elementos de topologia geral*. Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo. Citado na pág. 10, 15
- Milstein (1995)** Grigorii Noikhovich Milstein. *Numerical integration of stochastic differential equations*, volume 313. Springer. Citado na pág. 3
- Mörters e Peres (2010)** Peter Mörters e Yuval Peres. *Brownian motion*, volume 30. Cambridge University Press. Citado na pág. 12
- Øksendal (2003)** Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations*. Springer. Citado na pág. 12, 14, 17, 18
- Protter (2004)** Philip E Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations: Version 2.1*, volume 21. Springer. Citado na pág. 18
- Rendleman (1980)** Richard J Rendleman. The pricing of options on debt securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15(01):11–24. Citado na pág. 1
- Shreve e Karatzas (1991)** SE Shreve e I Karatzas. Brownian motion and stochastic calculus. *Newyork Berlin. Heidelberg. London Paris Tokyo*. Citado na pág. 22
- Stein e Stein (1991)** Elias M Stein e Jeremy C Stein. Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. *Review of financial Studies*, 4(4):727–752. Citado na pág. 2
- Uhlenbeck e Ornstein (1930)** George E Uhlenbeck e Leonard Salomon Ornstein. On the theory of the brownian motion. *Physical review*, 36(5):823. Citado na pág. 7
- Vasicek (1977)** Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2):177–188. Citado na pág. 1