UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS - UFSCar
CENTRO DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS - CECH
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA E METODOLOGIA DAS CIÊNCIAS - DFMC

A fixação da referência como condição para a aplicabilidade da aritmética em Frege

Anderson Luis Nakano
andersonnakano@gmail.com

Dissertação de Mestrado orientado pelo Prof. Dr. Bento Prado de Almeida Ferraz Neto (DFMC/CECH).

UFSCar - São Carlos
Março de 2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

N163fr	Nakano, Anderson Luis. A fixação da referência como condição para a aplicabilidade da aritmética em Frege / Anderson Luis Nakano. -- São Carlos : UFSCar, 2012. 74 f. Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012. 1. Matemática - filosofia. 2. Aritmética. 3. Formalismo (Matemática). I. Título. CDD: 510.1 (20ª)

ANDERSON LUIS NAKANO

A FIXAÇÃO DA REFERÊNCIA COMO CONDIÇÃO PARA A APLICABILIDADE DA ARITMÉTICA EM FREGE

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Aprovada em 30 de março de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Presidente ______________________________

(Dr. Bento Prado de Almeida Ferraz Neto)

1° Examinador ______________________________

(Dr. Mark Julian Richter Cass– UFSCar)

2° Examinador ______________________________

(Dr. João Vergílio Gallerani Cuter–USP)

Universidade Federal de São Carlos
Rodovia Washington Luís, Km 235 – Cx. Postal 676
Tel./Fax: (16) 3351.8368
www.ppgfil.ufscar.br / ppgfmc@ufscar.br
CEP: 13.565-905 – São Carlos – SP – Brasil

Programa de Pós-Graduação em Filosofia

Centro de Educação e Ciências Humanas

"Uma grande parte do trabalho de um filósofo consiste – ou pelo menos deveria consistir – em uma luta contra a linguagem."

"De fato, não é a menor das tarefas do lógico indicar que ciladas a linguagem prepara ao pensador."

Gottlob Frege

Agradecimentos

Agradeço imensamente ao meu orientador, o professor Bento Prado de Almeida Ferraz Neto (ou simplesmente "Tuxo"), pela paciência com que sempre me explicou diversas questões da história da filosofia, e pelas discussões altamente produtivas, não só no que diz respeito ao tema desta dissertação, mas à totalidade dos assuntos presentes em nossas conversas filosóficas quase que semanais.

Agradeço ao professor Mark Julian Richter Cass, por participar, além de mim e do Tuxo, de um pequeno grupo de estudos sobre os *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege. Foi neste grupo de estudos, em um seminário sobre o §10 do primeiro volume desta obra, que alguns problemas começaram a me perturbar (no bom sentido), o que me motivou a tentar construir uma leitura mais coerente e coesa deste grande filósofo.

Agradeço à minha noiva, Alice Medeiros de Lima, pela companhia e por toda a atenção e pelos momentos de alegria que vivi a seu lado.

Finalmente, agradeço à minha família e amigos queridos pelo carinho e conforto em todos os momentos de minha vida. Em especial aos amigos Bráulio "Kazuma" Albuquerque, Pavel Dodonov, Marcos Cozza, Matheus Macedo e Márcio de Meo.

Sumário

Lista de Abreviações das Obras de Frege

Begriffsschrift	*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle a. S.: Louis Nebert, 1879. Republicado em *Begriffsschrift und andere Aufsätze.* Hildesheim, Zurich and New York: Georg Olms Verlag, 2007.
BooleBegr	'Boole rechnende Logic und die Begriffsschrift'. Em: FREGE, G. *Nachgelassene Schriften*, ed. Hans Hermes *et al.*. amburg: Meiner. 1969, pp. 9-52.
Gl	*Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau: w. Koebner, 1884. Tradução utilizada da Coleção Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1983.
Gg I/II	*Grundgesetze der Arithmetik.* Band I/II, Jena: Verlag Herman Pohle, 1893/1903.
UForm	'Über formale Theorien der Arithmetik'. *Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft.* 19 (1885): 94-104. Tradução inglesa: "On Formal Theories of Arithmetic" em: FREGE, G. *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic.* New Haven and London: Yale Universisty Press, 1971.

UGG — ‘Über die Grundlagen der Geometry’. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15. 1906, pp. 293-309, 377-403, 423-30. Tradução inglesa “On the Foundations of Geometry (Second Series)”, por E.-H. W. Kluge, em: FREGE, G. *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*. New Haven and London: Yale Universisty Press, 1971.

US&B — ‘Über Sinn und Bedeutung’. 1892. Em: FREGE, G. *Funktion, Begriff, Bedeutung – Fünf logische Studien*. Herausgegeben von Günther PATZIG. 7. Auflage, Göttingen: Verlag Vandenhoeck Ruprecht. 2008, pp. 23-46.

UB&G — ‘Über Begriff und Gegenstand’. 1891. Em: FREGE, G. *Funktion, Begriff, Bedeutung – Fünf logische Studien*. Herausgegeben von Günther PATZIG. 7. Auflage, Göttingen: Verlag Vandenhoeck Ruprecht. 2008, pp. 47-60.

Gdk — ‘Der Gedanke. Eine logische Untersuchung’. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus 1*.1918-1919, pp. 58-77. Republicado em: FREGE, G. *Logische Untersuchungen*. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2003, pp. 35-62. Tradução utilizada de Paulo Alcoforado. Em: FREGE, G. *Investigações Lógicas*. Porto Alegre: Edipucrs. 2002, pp. 9-39.

CAPÍTULO 1

Introdução

É bastante reconhecida a importância que Frege concede à aplicabilidade (*Anwendbarkeit*) da aritmética*. Afinal, segundo Frege, é *tão somente* esta característica que faz com que a aritmética seja não apenas um jogo, como o xadrez, mas que a eleva ao estatuto de ciência (*Gg II*, §91). Sendo uma ciência, a aritmética tem, como meta, a verdade. Sendo parte da lógica, como defende Frege, a aritmética tem a verdade não apenas como objetivo, mas também como seu próprio objeto.

A lógica e, portanto, também a aritmética se ocupam da verdade, em primeiro lugar, delimitando aquilo sobre o qual se pode perguntar pela verdade. E são precisamente os pensamentos, segundo Frege, que possuem esta virtude. Um pensamento (*Gedanke*) – o sentido de uma sentença – é aquilo para o qual é legítima a questão sobre sua falsidade ou verdade. Apesar do vocábulo, não se pode tomar o "pensamento" fregueano como algo de psíquico como, por exemplo, uma ideia (*Vorstellung*). Uma ideia

*Cf. *e. g.*, Dummett, M. *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge, MA: Harvard University Press. 1991, p. 61: "Far from insisting on the purity of mathematics, and treating its applications as philosophically irrelevant, he [Frege] is, among all the philosophers of mathematics, that one who assigned to applicability its most central place". Doravante citado como *FPM*.

é algo que é necessariamente privado, e exatamente por ser privado, possui apenas um portador, enquanto que um pensamento pode ser apreendido por diversas pessoas. O pensamento de que, em um triângulo retângulo, a medida do quadrado da hipotenusa é idêntico à soma da medida dos quadrados de seus catetos é um conhecimento apreendido por quase toda a humanidade. Não há o meu teorema de Pitágoras, o seu teorema de Pitágoras. O pensamento que ele expressa é único, e não há nenhum portador exclusivo desse pensamento.

Segundo Frege, é exatamente pelo fato das sentenças da aritmética expressarem pensamentos que elas podem ser aplicadas. Uma configuração de peças de xadrez, na medida em que não expressa nenhum pensamento (não pode, deste modo, ser nem verdadeira nem falsa), também não pode ser aplicada. Se à configuração inicial das peças do xadrez correspondesse um pensamento, e se às regras de movimentação de tais peças correspondesse a transição de um pensamento a outro, aplicações do xadrez seriam concebíveis (*Gg II*, §91).

Mas por que exatamente uma fórmula da aritmética, para ser aplicada, deve expressar um pensamento? De acordo com Dummett[*], Frege toma "tacitamente" a aplicação de um teorema matemático como consistindo em uma instância de uma inferência dedutiva[†]. Ora, só faz sentido falar em inferências dedutivas na medida em que faz sentido perguntar pela verdade ou falsidade das premissas e da conclusão da inferência. Uma configuração de peças em um tabuleiro não é verdadeira nem falsa e, portanto, não pode servir nem de premissa nem de conclusão em uma inferência dedutiva.

Explicar a aplicação de leis lógicas através da noção de instanciação é um procedimento tão antigo quanto a própria lógica. No silogismo aristotélico, por exemplo,

[*]Não é apenas Dummett que explica, em Frege, a aplicação da lógica por meio da noção de *instanciação*, mas isto parece ser, em geral, um consenso entre os comentadores. Cf., p. ex., Goldfarb W., Frege's conception of logic. In: *The Cambridge Companion to Frege.* Editado por Michael Potter and Tom Ricketts. Cambridge: Cambridge University Press. 2010, p. 68: "On Frege's *universalist conception*, then, the concern of logic is the articulation and proof of logical laws, which are universal truths. Since they are universal, they are applicable to any subject matter, as application is carred out by instantiation".

[†]Dummett M. *FPM*, p. 256.

pode-se dizer que a inferência "Todo homem é mamífero, todo mamífero é mortal, portanto, todo homem é mortal" é uma aplicação do silogismo em Barbara. Esta aplicação consiste na *instanciação* das variáveis (A, B e C) do silogismo "Todo A é B, todo B é C, portanto, todo A é C". Na medida em que os modos de inferência da silogística não atribuem nenhum significado determinado às suas variáveis, estas podem ser substituídas por termos quaisquer*, sem que com isso se altere a validade do silogismo, que repousa apenas sobre a forma do raciocínio†. O problema é que, no caso da aritmética, grande parte dos seus teoremas não contém, aparentemente, nenhuma variável quantificada – ou que possa ser quantificada – universalmente. Deste modo, não podemos recorrer (pelo menos não de modo tão imediato como no caso dos silogismos aristotélicos) à noção de instanciação para explicar a aplicabilidade de teoremas do tipo $\vdash 1 + 1 = 2$. O número, na aritmética, aparece como um objeto determinado, e não como uma variável. Segundo Frege:

> Na equação $1 + 1 = 2$ podemos substituir 1 ambas as vezes pelo mesmo objeto, digamos a Lua? Pelo contrário, parece que o 1 deve ser substituído por algo diferente daquilo pelo que se substituir o segundo. (...) Dever-se-ia pois imaginar que também o sinal 1 não bastasse, caso servisse, analogamente, para emprestar generalidade a proposições. Mas não aparece o número um como um objeto determinado, dotado de propriedades que se podem indicar, como por exemplo a de não se alterar quando multiplicado por si próprio? Não é possível, neste sentido, indicar nenhuma propriedade de a; pois o que se enuncia de a é uma propriedade comum dos números, enquanto $1^1 = 1$ não enuncia nada da Lua, nem do Sol, nem do Saara, nem do pico do Tenerife; pois qual poderia ser o sentido de um tal enunciado?‡

Se insistimos em explicar a aplicação de um teorema matemático por meio da *instanciação* de variáveis, devemos então, ao menos *prima facie*, negar que os teoremas sem variáveis, tomados de modo isolado, tenham uma aplicação. De acordo com Dummett, quando é a aplicação da matemática que está em questão, os objetos da teoria

*Pode-se, pois, aplicar a generalização universal e, posteriormente, a instanciação universal para algum caso particular que se deseje aplicar o silogismo.

†O próprio Aristóteles utiliza a noção de variáveis e de substituição de letras por termos. Uma exposição clara sobre o uso de variáveis em Aristóteles pode ser encontrada em Lukasiewicz, J. *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*. Oxford: Oxford. University Press, 1951.

‡*Gl*, §1.

matemática cumprem um papel menor, ou mesmo nenhum papel, já que estaremos interessados, no momento da aplicação, nos objetos da teoria que está sendo aplicada, e não em números*. É impossível saber, a partir do texto de Dummett, qual seria este "papel menor" que os números teriam. De qualquer modo, é extremamente implausível que, para Frege, os números não tenham um papel importante na aplicação da aritmética, como sugere Dummett. Esta explicação não faria jus ao cuidado de Frege ao definir o número (tanto o cardinal quanto o real) sempre levando em consideração o contexto de sua aplicação. O próprio Dummett, no mesmo livro, sugere uma tese diferente da tese da aplicabilidade somente por instanciação de variáveis: "[A aplicação da aritmética] não consistiria em pura instanciação de fórmulas da lógica de ordem superior, mas envolveria operações dedutivas tão próximas a isto de modo a dissipar todo o mistério sobre como a aplicação foi possível"†.

Nesta tese reformulada, a aplicação da aritmética seria realizada não somente por meio do procedimento de instanciação universal, mas também utilizando-se de operações dedutivas da lógica. Teoremas do tipo $\vdash 7+5=12$ funcionariam como premissas de deduções envolvendo variáveis. Como exemplo, considere a seguinte instância de um processo dedutivo‡:

(1) $7+5=12$.
(2) Há sete maçãs sobre a mesa.
(3) Há cinco peras sobre a mesa.
(4) Nenhuma maçã é uma pera.
(5) Não há nenhuma fruta, além de maçãs e peras, sobre a mesa.

Portanto: (6) Há exatamente doze frutas sobre a mesa.

*Dummett, M. *FPM*, pp. 256-257.
†*Ibid*, p. 303. (tradução nossa)
‡Este exemplo foi adaptado do livro de Mark Steiner intitulado *The applicability of mathematics as a philosophical problem*. London: Harvard University Press. 1998, p. 16.

Antes de verificarmos como o raciocínio acima é um exemplo de uma operação dedutiva da lógica a partir de instanciação de variáveis, é importante notar que a análise que Frege faz nos *Gl* mostra que sentenças em que o número aparece de modo atributivo – como nas sentenças (2) e (3) – sempre podem ser convertidas para que o número apareça na sua forma lógica verdadeira, isto é, como um substantivo*. Assim, como o número cardinal, segundo Frege, denota a cardinalidade de um conceito, devemos reescrever as premissas (2) e (3) e a conclusão do seguinte modo:

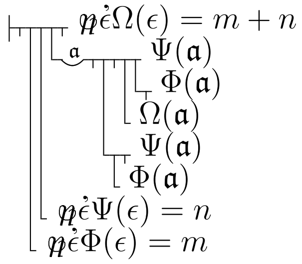
(2') 7 é o número que convém ao conceito $M(\xi)$ =‘ξ é uma maçã sobre a mesa’
(3') 5 é o número que convém ao conceito $P(\xi)$ =‘ξ é uma pera sobre a mesa’
(6') 12 é o número que convém ao conceito $F(\xi)$ =‘ξ é uma fruta sobre a mesa’

Na linguagem do sistema lógico dos *Gg* (ou em uma variante moderna à direita), tal dedução seria conduzida aproximadamente como segue:

(1)	$\vdash 7 + 5 = 12$	$\vdash 7 + 5 = 12$
(2')	$\vdash \mathfrak{n}\dot{\epsilon}M(\epsilon) = 7$	$\vdash (Nx)M(x) = 7$
(3')	$\vdash \mathfrak{n}\dot{\epsilon}P(\epsilon) = 5$	$\vdash (Nx)P(x) = 5$
(4)	$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, P(\mathfrak{a})$ $\quad\llcorner M(\mathfrak{a})$	$\vdash (a)(M(a) \rightarrow \neg P(a))$
(5)	$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, P(\mathfrak{a})$ $\quad\llcorner M(\mathfrak{a})$ $\quad\llcorner F(\mathfrak{a})$	$\vdash (a)(F(a) \rightarrow (M(a) \vee P(a)))$
(6')	$\vdash \mathfrak{n}\dot{\epsilon}F(\epsilon) = 12$	$\vdash (Nx)F(x) = 12$

A dedução acima faria uso do seguinte teorema:

*Cf. *Gl*, §57: “Como o que importa aqui é apreender o conceito de número tal como é utilizável na ciência, não nos deve incomodar que no uso ordinário da linguagem o número apareça também atributivamente. Isto sempre pode ser evitado. Por exemplo, poder-se-ia converter a proposição ‘Júpiter tem quatro luas’ em ‘o número de luas de Júpiter é quatro’”.

(7) 

$$\vdash [(Nx)\Phi(x) = m \ \wedge \ (Nx)\Psi(x) = n \wedge (a)((\Phi(a) \to \neg\Psi(a)) \wedge (\Omega(a) \to (\Phi(a) \vee \Psi(a))))] \to (Nx)\Omega(x) = m + n$$

O teorema (7) é demonstrável* na lógica de Frege se definirmos, como sugere Simons†, a adição entre números naturais por meio da potência da relação de sucessor‡. Uma vez provado, este teorema é um exemplo de como os resultados tradicionais da aritmética são aplicados para determinar a cardinalidade de um conceito que é soma (exclusiva) de outros dois conceitos. Tal aplicação consiste na instanciação dos conceitos envolvidos, que substituem os termos gerais $\Phi(\epsilon)$, $\Psi(\epsilon)$ e $\Omega(\epsilon)$ do teorema puramente lógico.

Embora o xadrez não possa ser aplicado devido ao fato das configurações de peças dentro deste jogo não expressarem nenhum pensamento, é possível que haja pensamento e, portanto, aplicações em uma *teoria* do xadrez. Esta teoria conteria teoremas e demonstrações que esclareceriam as propriedades das regras do jogo de xadrez (*Gg I*, §93). Um exemplo de teorema da teoria do xadrez é a possibilidade de se chegar ao xeque-mate com apenas o rei e uma torre contra o rei do oponente. Um outro exemplo é a impossibilidade de se vencer com apenas duas jogadas. É claro que a validade destes teoremas dependem das regras (arbitrárias e convencionais) do xadrez. Apesar das regras do xadrez serem arbitrárias, uma vez estipuladas, as regras para a dedução de teoremas na teoria do xadrez não contêm nada de arbitrário: elas seguem tão somente das regras do jogo.

---

*É claro que, como o sistema dos *Gg* é inconsistente, toda fórmula bem formada é trivialmente demonstrável. Então deve-se entender por "demonstrável", como dito acima, um teorema cuja prova é similar às executadas por Frege nos *Gg*. Também é claro que um teorema análogo pode ser demonstrado, *mutatis mutandis*, em um sistema consistente construído a partir da lógica de segunda ordem e do princípio de Hume.

†Simons, P. 'Frege's Theory of Real Numbers', *History and Philosophy of Logic*, 8: 1, 25-44. p. 37.

‡Isto é, $m+n =_{DEF} S(m)^n$, em que $S(m)$ denota o sucessor de m. É importante lembrar que Frege não define a adição no seu sistema lógico, e por isso uma definição deve ser fornecida para executar as provas de teoremas que envolvem esta operação.

O matemático formalista[*], no entanto, não pretende que a aritmética seja aplicável na medida em que contém uma teoria que esclarece as regras – arbitrárias, segundo os próprios formalistas – que regem o funcionamento dos signos aritméticos. Os próprios signos da teoria podem, por meio de simples axiomas adicionados ao sistema formal, se referir a objetos de nossa percepção e, com isso, aumentar o nosso conhecimento da natureza[†].

O formalista, portanto, propõe um outro sentido do termo aplicação, no que concerne à sua ciência. A aplicação da matemática consistiria em fornecer uma *interpretação* para um sistema formal não interpretado, isto é, fornecer uma transformação biunívoca entre os signos matemáticos e objetos, propriedades e relações. Frege rejeita a utilização da palavra 'interpretação' no âmbito científico: "A palavra 'interpretação' é passível de objeção, pois um pensamento, quando expresso adequadamente, não deixa espaço para diferentes interpretações. Já vimos que toda ambiguidade deve ser simplesmente rejeitada"[‡].

O formalista poderia dizer que a interpretação é exatamente o que traz conteúdo a um conjunto de signos formais, é exatamente aquilo que é adicionado aos signos para que estes possam "expressar um pensamento", segundo o dialeto fregueano. De certo modo, é como se o formalista defendesse o aspecto "criativo" da matemática, em oposição a uma visão realista da matemática, segundo a qual a matemática consistiria essencialmente em descobertas. Enquanto não houver nenhuma contradição no sistema, diria o formalista, pode-se *criar* regras arbitrárias para a movimentação das "peças" da aritmética, e contradição aqui significa tão somente a possibilidade de atingir, a partir de

---

[*] O formalismo aqui citado é representado por E. Heine e J. Thomae, matemáticos contra os quais Frege dispara sua artilharia de críticas nos *Gg.* Aos olhos de Frege, os formalistas sustentam a opinião segundo a qual "os números não são nem signos que significam algo, nem significados não-sensíveis de tais signos, mas figuras que são manipuladas de acordo com certas regras, como peças de xadrez. Nesse sentido, os números não são nem ferramentas de pesquisa, nem objetos de inspeção, mas objetos de manuseio" (*Gg*, §71.). Deste modo, afirma Frege, "[os signos numéricos] não são mais ferramentas externas como lousa e giz; pelo contrário, são constituintes essenciais da própria teoria" (*Gg*, §87.).

[†] Cf. J. Thomae (*apud Gg* II, §88): "as regras da aritmética são tais que, por meio de simples axiomas, os números podem se referir a variedades (*Mannichfaltigketen*) e com isso fazer importantes contribuições a nosso conhecimento da natureza".

[‡] *UGG*, p. 384.

certas regras análogas às do xadrez, a configuração "$0 = 1$" a partir de uma configuração de peças inicialmente válida (por exemplo, "$1 = 1$").

O formalista, ao criar arbitrariamente regras para a manipulação de seus signos, evidentemente restringe o domínio de aplicação destes signos, já que a possibilidade da aplicação reside no fato de encontrar um isomorfismo entre estas regras criadas e regras existentes. A título de exemplo, é extremamente difícil "aplicar" (no sentido dado pelos formalistas) um jogo de xadrez a uma batalha real, pois um cavalo real (ou outro objeto qualquer) não se move apenas em "L", isto é, a movimentação do cavalo é mais livre do que as regras fixas do xadrez. Se criássemos um campo de batalha (com cercas e arames) de modo que o cavalo real só pudesse andar em "L", como no xadrez, e de modo análogo para todas as demais peças*, uma aplicação do jogo de xadrez seria concebível†. Deste modo, cada regra que o matemático formalista cria para suas "peças" limita a aplicabilidade destas peças, já que não há nenhuma garantia de que o mundo possua relações isomórficas a estas criadas pelo matemático, de modo aos graus de liberdade das peças do formalista e dos objetos da realidade serem equivalentes.

Para dar um exemplo, é extremamente simples a construção, aos moldes do "formalismo", de uma aritmética modular em que só existam 12 números ou, melhor, "figuras" (de 0 a 11), e que, então, valeria a seguinte regra: $11 + 1 = 0$. De modo algum poderíamos derivar a configuração "$0 = 1$" a partir de uma configuração de peças inicialmente válida (o sistema é, portanto, "consistente"). Além disso, essa aritmética poderia muito bem ser aplicada, por exemplo, à contagem das horas de um relógio. Basta fazer corresponder biunivocamente as marcações de horas com os números, e interpretar o sinal de adição como a rotação específica do ponteiro em sentido horário. No entanto, ela não poderia ser aplicada para os mais diversos casos em que utilizamos processos de enumeração, e sua aplicabilidade seria restrita apenas a domínios modulares de 12

*Ainda teríamos que dispor de um mecanismo para fazer com que nenhuma peça se movesse simultaneamente à outra, entre outras dificuldades análogas.

†É claro que outros métodos de projeção das regras do xadrez à realidade podem ser mais bem sucedidos do que o exemplo citado. No entanto, o formalista precisa, para suas pretensões, de uma projeção, por assim dizer, "ortogonal" dos seus símbolos em objetos do domínio de aplicação, de modo que haja um isomorfismo estrutural entre a teoria e este domínio, e é isso que é difícil de encontrar na realidade: um domínio de aplicação que tenha a mesma multiplicidade estrutural do jogo de xadrez.

elementos.

Para utilizar uma metáfora wittgensteiniana, é como se o formalista dissesse: "eu posso fabricar uma faca sem me preocupar com quais tipos de materiais ela cortará: isso mostrar-se-á rapidamente"*. No entanto, dependendo do modo como a faca é fabricada, ela limita sua aplicabilidade e sua funcionalidade. Se construímos uma faca circular, ela não servirá para perfuração vertical. Se construímos uma faca de plástico, ela não cortará tábuas de madeira. Para Frege, isto é fazer o domínio de aplicabilidade da aritmética depender de como a aritmética é "construída", o que, para Frege, é inaceitável. A aritmética, como parte da lógica, deve ter, de direito, um domínio de aplicação irrestrito (posso enumerar anjos, eventos, enfim, qualquer objeto pensável) e é por isso que não se pode "criar" regras arbitrárias para a manipulação dos objetos matemáticos, pois correríamos o risco de restringir o seu domínio de aplicação. É tarefa intrínseca à aritmética, portanto, tornar possível sua aplicação para todo e qualquer domínio possível, sem que a aplicação dependa de uma transformação biunívoca posterior de objetos e relações da aritmética para objetos e relações do domínio de aplicação. A aritmética deveria ser, de direito, uma "faca universal" que, embora não dependa de nenhum estudo de materiais particulares para ser constituída, pode, a despeito disso, cortar todo e qualquer tipo de material.

Um leitor dos *Gl* poderia, *prima facie*, se espantar ao ver a defesa por parte de Frege do caráter intrínseco da aplicação à própria aritmética. Afinal, ele ataca Mill dizendo que este "confunde sempre as aplicações que se podem fazer das proposições aritméticas, frequentemente físicas e pressupondo fatos observados, com a própria proposição puramente aritmética" (*Gl*, §9). Assim, poderia parecer que Frege possui uma visão oscilante com relação à questão, utilizando-se da aplicação da aritmética para atacar os formalistas ao mesmo tempo que se utiliza do caráter puro das proposições aritméticas para atacar os empiristas. Ou ainda poder-se-ia questionar se a visão de Frege com relação à aplicação da aritmética mudou da época dos *Gl* para os *Gg*. Mas isto é insustentável, já que, em uma nota que se encontra no §137 dos *Gg*, Frege acusa

*Wittgenstein, L. *Philosophische Bemerkungen.* Frankfurt: Suhrkamp, 1964, p.131 (parágrafo 109).

Helmholtz de cometer o mesmo erro que Mill, a saber, o de confundir a aplicação dos teoremas da aritmética com os próprios teoremas. Frege argumenta dizendo que "eu posso muito bem reconhecer a verdade de uma proposição sem precisar saber se eu um dia terei a oportunidade de aplicá-la" (*Gg II*, §137).

Em suma, a posição de Frege é que as aplicações específicas da aritmética são extrínsecas a ela, mas a possibilidade da aplicação é algo que a aritmética deve fornecer*. Para fornecer um exemplo: já que sabemos, no caso da análise real, que a mesma razão entre grandezas (o mesmo número) é relacionado com comprimentos, intervalos de tempo, massas, *et cetera*, é razoável pedir à aritmética que tome a tarefa para si de definir o que é uma grandeza e o que é uma razão entre grandezas, ao invés de apenas trabalhar com signos sem nenhum significado (o que é, por si só, uma contradição em termos). Para a realização desta tarefa é necessário, conclui Frege, "que o aritmético dê um sentido a suas fórmulas; e isto será tão geral que, com o auxílio de axiomas geométricos e físicos e observações astronômicas e hipóteses, várias aplicações da aritmética podem ser feitas no interior destas ciências" (*Gg*, §92.).

A vantagem de como Frege conduz a aplicabilidade da aritmética em relação aos formalistas é que Frege consegue explicar o fenômeno de como a aritmética é aplicável sem recorrer às aplicações individuais, que sempre introduzem algo de particular e que não podem ser confundidas com a aritmética pura. Já os formalistas só conseguem explicar a aplicabilidade da aritmética a um domínio específico depois que for demonstrado que há um isomorfismo entre a aritmética e a teoria particular, ou seja, a explicação de como a aritmética é aplicável é uma questão, para os formalistas, *de fato* e não *de direito*.

O nosso percurso até agora passou pela compreensão do que é, para Frege, a

---

* *Cf.* Dummett, M. *FPM*, p. 258: "What are extrinsic to arithmetic are all *particular* applications of it: these relate to restricted domains of knowledge, and, as Frege says in *Grundlagen*, 'often ... presuppose observed facts'. The mistake of Mill and of Helmholtz consists in taking such particular applications as integral to the senses of arithmetical propositions. What is intrinsic to arithmetic, by contrast, is the general principle that explains its applicability and hence determines the common pattern of all particular applications. The mistake of the formalists consists in ignoring this, or, at best, reckoning it not to be business of arithmetic".

aplicabilidade da aritmética e da vantagem desta concepção em relação à concepção formalista de aplicabilidade. A explicação de como a aplicação da aritmética é possível, no entanto, pressupôs a transformação de sentenças em que o número aparece como um adjetivo em sentenças nas quais o número aparece como um substantivo. A passagem da sentença (2) para a sentença (2') foi realizada sem que se tematizasse a validade desta transformação. Esta passagem só é válida se a seguinte proposição pode ser provada:

(P1) A um conceito convém o número n se, e somente se, sob este conceito caírem exatamente n objetos*.

Isto é, pressupusemos o número já definido com todas as propriedades para garantir a correção da sua aplicação. Desconsiderando a alternativa formalista de fundamentação da aritmética, a garantia da correta aplicação do número pode ser fornecida, *prima facie*, de duas maneiras:

i) ao modo de Frege, isto é, na própria definição de número, de modo que esta definição é suficiente para explicar o princípio por trás da aplicabilidade do número.

ii) por um complemento posterior à definição do número, de modo que a tarefa de definir o número e a tarefa de mostrar como ele é aplicável se tornam duas tarefas intrínsecas à aritmética, porém distintas.

A primeira alternativa impõe certas restrições à definição de número. Na própria definição de número deve estar contida, de algum modo, a noção de cardinalidade. A segunda alternativa deixa para explicar a noção de cardinalidade em um momento posterior à definição de número, e portanto a aplicação da aritmética utilizaria não

*Ou seja, deve ser possível provar, para cada número, algo semelhante aos três teoremas que Frege enuncia no §78 dos *Gl* para o número 1: "2. Se 1 é o número que convém a um conceito, então há um objeto que cai so o conceito. / 3. Se 1 é o número que convém a um conceito; se o objeto x cai sob o conceito F e se y cai sob o conceito F, então $x = y$; isto é, x é o mesmo que y. / 4. Se sob o conceito F cai um objeto e se, caso x caia sob o conceito F e y caia sob o conceito F, seja possível concluir em geral que $x = y$, então 1 é o número que convém ao conceito F".

apenas a noção de número mas também a noção de cardinalidade (a primeira definida independentemente da segunda). Por exemplo, poder-se-ia definir o número 3 como sendo o conjunto $[\Lambda, [\Lambda], [\Lambda, [\Lambda]]]$*. Ora, apenas com essa definição não é possível utilizar o número 3 para determinar a cardinalidade de um conceito. Somente com uma posterior definição da noção de cardinalidade é que seria possível utilizar a definição proposta para determinar a cardinalidade de um conceito.

Antes de enveredarmos pelas questões que nos interessam, é interessante questionar a legitimidade do termo "aplicação do número". Como vimos, a aplicação da aritmética pode ocorrer apenas na medida em que suas proposições – seus teoremas – expressam um pensamento e, pelo fato de expressarem um pensamento, estão aptas a responder pela pergunta sobre sua verdade ou falsidade. Deste modo, na medida em que um número não é verdadeiro nem falso (não expressa, pois, um pensamento), parece ilegítimo falar da "aplicação do número", parecendo mais apropriado falar da "aplicação das sentenças em que números ocorrem". Ao invés de adotarmos esta expressão longa e cansativa, vamos estender o uso da palavra "aplicação", com base no uso que o próprio Frege faz, em um sentido amplo, da palavra.

Na *Begriffsschrift*, Frege contrasta o amplo campo de *aplicabilidade* do olho com o campo de *aplicabilidade* restrito do microscópio, em uma analogia clara da oposição da linguagem natural e de sua conceitografia†. Embora o olho possua esta vantagem com relação ao microscópio, o microscópio é mais preciso quando se considera a especificidade de sua aplicação. Do mesmo modo, Frege fala da *aplicação* de sua conceitografia quando deve-se considerar importante a precisão de uma prova matemática‡.

Frege também utiliza inúmeras vezes o termo "aplicação" em referência à utilização das regras de inferência ou das leis básicas do seu sistema formal. Este uso

*O termo "Λ" é utilizado neste contexto para designar o conjunto vazio.

†Cf. *Begriffsschrift*, p. XI: "Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleiche. Das Letztere hat durch den Umfang seiner *Anwendbarkeit*, durch die Beweglichkeit, mit der es sich den verschiedensten Umständen anzuschmiegen weiss, eine grosse Ueberlegenheit vor dem Mikroskop". (grifo nosso)

‡*Begriffsschrift*, p. XII.

do termo em questão se refere tão somente à *utilização* de tais regras no contexto de inferências dedutivas. Por fim, nos *Gl*, Frege utiliza o próprio termo "aplicação do número", se referindo à utilização do número para determinar a cardinalidade de conceitos. O fato de o número ser utilizado neste contexto também explica a sua vasta *aplicabilidade*, já que sob conceitos podem cair homens, ações, anjos, pensamentos, eventos, etc.

Estes usos que Frege faz do termo "aplicação" nos autoriza a considerar que a aplicação de um objeto, regra, lei ou teoria é a sua *utilização no contexto que lhe é próprio*. No caso de regras de inferência e leis lógicas, o contexto apropriado para a utilização destas é a inferência dedutiva dentro de um sistema formal em que elas fazem parte. O número natural (*Anzahl*), por outro lado, é utilizado para a determinação da cardinalidade de um conceito, enquanto que o número real (*Zahl*) é utilizado para determinar razões entre grandezas.

A restrição de Frege*, apresentada na primeira das duas alternativas anteriormente expostas, é que a definição de número deve explicar a sua utilização no contexto que lhe é próprio, isto é, sua aplicação. A segunda alternativa, pelo contrário, deixa esta tarefa para a definição de cardinalidade, que mostraria como a definição precedente de número pode ser utilizada para determinar a cardinalidade de um conceito. É importante ressaltar que a definição de cardinalidade, mesmo quando fornecida posteriormente à definição do número, ainda deve ser puramente aritmética, isto é, não deve recorrer a noções geométricas ou físicas. Uma das críticas de Frege nos *Gg* com relação à definição de Cantor do número real é que ela, embora seja puramente aritmética, não pode ser utilizada em contextos que envolvem medidas de grandezas. Para que ela possa ser aplicada a tais contextos, Cantor recorre à geometria, e então o que é essencial à definição, a saber, a sua possibilidade de aplicação, deixa de ter um caráter puramente aritmético.

Há ainda uma terceira alternativa possível, fundada no seguinte argumento: como

*Termo cunhado por Crispin Wright no artigo 'Neo-Fregean Foundations for Real Analysis: Some Reflections on Frege's Constraint'. Em: *Notre Dame J. Formal Logic*, Volume 41, Number 4 (2000), 317-334.

há diversas possíveis definições do número, e todas estas definições satisfazem critérios formais (possibilidade da derivação dos axiomas de Peano) e critérios para a sua aplicabilidade (proposição P1 acima exposta), então não faz sentido perguntar pela definição de número e esperar como resposta um certo objeto lógico (um conjunto, uma classe, um percurso de valores de uma certa função) com tais e tais propriedades, já que o significado de um número particular – a sua contribuição para a determinação do valor de verdade de sentenças em que ele ocorre – é determinado exclusivamente pelo seu papel na estrutura dos números. O número 7, por exemplo, teria um significado apenas na medida em que ele é o sétimo elemento da seguinte série ordenada: $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ ou de qualquer outra série isomórfica. Esta alternativa, chamada usualmente de estruturalismo, é apresentada e defendida no artigo de Paul Benacerraf intitulado "*What numbers could not be*"*. Neste artigo, Benacerraf ilustra um cenário hipotético em que dois jovens, Ernie e Johnny, filhos de militantes logicistas, atribuiriam a referência dos números naturais a progressões distintas, em que cada elemento desta progressão é um certo conjunto. Tais progressões são:

i) $[\Lambda], [\Lambda, [\Lambda]], [\Lambda, [\Lambda], [\Lambda, [\Lambda]]]$, ... para Ernie, e

ii) $[\Lambda], [[\Lambda]], [[[\Lambda]]]$, ... para Johnny.

Ambos jovens conseguiriam definir a relação de ordem ($<$) nesta progressão, bem como as relações usuais da aritmética (soma, diferença, potenciação, etc.) e conseguiriam provar, cada um ao seu modo, os teoremas da aritmética ($2+2 = 4$, $a+(b+c) = (a+b)+c$, etc.). Além disso, conseguiriam definir a noção de cardinalidade, a fim de mostrar como os números anteriormente definidos seriam utilizados para determinar a cardinalidade de um conceito qualquer. Eles difeririam, no entanto, no modo pelo qual tais noções seriam definidas e tais teoremas seriam provados. Além disso, difeririam no valor de verdade de asserções do tipo $3 = [[[\Lambda]]]$ e $3 = [\Lambda, [\Lambda], [\Lambda, [\Lambda]]]$. Como argumenta Benacerraf, há

*Benacerraf, P. 'What Numbers Could Not Be'. Em: Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge University Press, Second Edition. 1983. pp. 272-294.

então um dilema: como não há argumentos para mostrar que a construção de Ernie ou de Johnny é falsa, e já que não se pode aceitar ambas (já que elas diferem sobre o valor de verdade de certas asserções), números não podem ser identificados com um conjunto particular. Já que ambas definições preenchem os critérios formais e de aplicabilidade, não há motivos para escolher uma ao invés de outra. Segundo Benacerraf:

> Claramente ambas [concepções] diferentes não podem ser corretas, já que elas não são nem extensionamente equivalentes, quanto mais intensionalmente. Portanto exatamente uma é correta ou nenhuma o é. Mas então a correta deve ser aquela que seleciona qual conjunto de conjuntos é *de fato* os números. Estamos agora diante de um problema crucial: se existe tal concepção "correta", existem também argumentos que mostram que ela é a correta? Ou existe um conjunto particular de conjuntos *b*, que é *realmente* os números, mas tal que não existe nenhum argumento que se possa fornecer para estabelecer que ele, e não, por exemplo, o conjunto de Ernie, é realmente os números? Parece completamente óbvio que esta última possibilidade beira ao absurdo. Se os números constituem um conjunto particular de conjuntos, e não outro, então deve haver argumentos para indicar qual é tal conjunto.
> (...)
> Se números são conjuntos, então eles devem ser *conjuntos particulares*, pois cada conjunto é um conjunto particular. Mas se o número 3 é realmente um conjunto ao invés de outro, deve ser possível fornecer um motivo cogente para se pensar assim; pois a posição segundo a qual isto é uma verdade incognoscível dificilmente é sustentável. Mas parece haver pouco para escolher por uma das concepções. Em relação a nossos propósitos de fornecer uma concepção sobre este assunto, ambas concepções obtêm êxito, se deixarmos de lado preferências estilísticas. Não há nenhum modo em conexão com a referência dos numerais que nos permitirá escolher entre elas, *pois as concepções diferem em pontos em que não há nenhuma conexão entre as propriedades das concepções e os nossos usos das palavras em questão*. Se tudo o que foi dito acima é cogente, então há pouco a se concluir, exceto que qualquer propriedade de uma concepção que identifica 3 com um conjunto é supérflua – e que portanto o número 3, e seus companheiros, definitivamente não podem ser conjuntos.*

O argumento de Benacerraf parece depender do seguinte pressuposto, o qual tem aparentemente apenas a pretensão de levar até as últimas consequências uma postura realista com relação à aritmética: se a aritmética – o que inclui seus objetos, axiomas e teoremas – é algo que é descoberto, e não inventado, então não pode haver arbitrariedade para que se possa selecionar quais objetos são os números. Evidentemente, pode haver arbitrariedade na escolha do numeral, já que não importa para a aritmética se o signo

*Benacerraf, P. 'What Numbers Could Not Be'. op. cit., p. 280 e 284 (tradução nossa).

para designar o número oito é o “8”, ou “acht”, ou “huit”, etc., mas não pode haver propriamente escolha do número ele próprio, já que ele é um objeto, e exatamente pelo fato de ser um objeto, ele é algo determinado, isto é, ele é um certo objeto e não outro.

Frege certamente concorda que a aritmética é descoberta, e isto é expresso em diversas passagens, como no famoso trecho dos *Gl*: “o matemático nada pode criar arbitrariamente, não mais do que o geógrafo; também ele apenas pode descobrir o que há e nomeá-lo”[*]. Frege também concorda que um objeto deve ter critérios de identidade precisos, isto é, deve-se poder reidentificar um objeto mesmo que seu modo de apresentação – seu sentido – mude. E este critério deve poder estabelecer a identidade entre dois objetos quaisquer; deve nos permitir decidir, por exemplo, se o número 1 e a lua, ou se o número 1 e o conjunto $[\Lambda]$ são idênticos[†]. E é exatamente por não fornecer este critério geral de aplicação que a definição contextual de número[‡] parece ser afastada nos *Gl*. Utilizando o famoso exemplo de Frege (embora em um contexto diferente do que foi originalmente utilizado), não é possível saber, recorrendo apenas à definição contextual de número, se Júlio César, o famoso conquistador das Gálias, é ou não um número.

A solução dada por Frege para este impasse, a saber, a introdução de extensões de conceitos, também introduz objetos que, por sua vez, necessitam de critérios precisos de identidade. Ironicamente, a lei básica V dos *Gg*[§], responsável pelos critérios de identidade entre extensões de conceitos[¶], não fornece um critério geral, segundo o qual se poderia decidir pela identidade ou não identidade entre extensões de conceitos e outros objetos que não aparecem sob a roupagem de extensões de conceitos. Para resolver este impasse, Frege propõe, no §10 dos *Gg*, *estipular* a identidade entre extensões de conceitos e objetos que não aparecem sob esta roupagem (no caso, o Verdadeiro e o Falso). Além

[*] *Gl*, §96.

[†] Frege diz que não pretende definir a igualdade especialmente para os casos de igualdade entre números, mas obter, através do conceito já conhecido de igualdade, o que deve ser considerado como igual (*Gl*, §63).

[‡] Explicaremos o que é a definição contextual de número posteriormente.

[§] A lei básica V, responsável pela inconsistência do sistema de Frege, expressa a seguinte identidade: $(\acute{\epsilon}f(\epsilon) = \acute{\alpha}g(\alpha)) = (\smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$.

[¶] É importante lembrar que extensões de conceito são casos particulares de percursos de valores (*Werthverlauf*) de uma função. Um percurso de valores de uma função é uma extensão de conceito exatamente quando esta função é um conceito.

disso, Frege mostra que qualquer estipulação tem os mesmos direitos, e que uma escolha não é mais verdadeira que a outra. Por não ser verdadeira nem falsa, esta estipulação não expressa um pensamento mas, longe de ser irrelevante para a lógica e para a aritmética, esta estipulação, ao fixar a referência de um signo, é uma *preparação* para a expressão de pensamentos.

Esta estipulação de Frege, apesar de ser suficiente no âmbito da teoria formal dos *Gg*, é evidentemente insuficiente no momento da *aplicação* da aritmética. Afinal, como números são, para Frege, extensões de conceitos, e estas são, por sua vez, objetos, os números devem se diferenciar não apenas de objetos como o Verdadeiro e o Falso, mas também de objetos como mesas, cadeiras, livros, eventos e planetas. Pode-se facilmente construir um conceito com tais e tais notas características, de modo que sob ele caiam maçãs, sapatos e também números. Para determinar a cardinalidade deste conceito, é preciso, é claro, ter em mãos critérios precisos de identidade entre estes objetos. Como a lei básica V não cumpre este papel, seriam necessárias, para esta aplicação, novas estipulações.

Frege parece estar ciente destas consequências do seu sistema formal. No fim do §10 do primeiro volume dos *Gg*, ele afirma:

> Com isso determinamos os percursos de valores *na medida em que é até aqui possível.* Na medida em que houver uma questão ulterior de introduzir uma função que não é completamente redutível a funções já conhecidas, podemos estipular quais valores elas devem ter para percursos de valores como argumentos; e isto pode ser considerado como uma determinação ulterior tanto dos percursos de valores quanto daquela função.*

Deste modo, ao introduzir o conceito "ξ é idêntico a este sapato", deve-se *estipular* qual é o valor desta função para percursos de valores como argumentos, já que esta função dificilmente é redutível a funções lógicas, já introduzidas no sistema formal de Frege. Parece absurdo que alguém confunda um percurso de valores com um sapato, mas não é mais absurdo do que se esta mesma pessoa confundisse a Inglaterra com a direção do eixo da terra. De qualquer modo, não é mérito da lei básica V dos *Gg* o fato de

* *Gg I*, §10. (grifo nosso)

não fazermos esta confusão, do mesmo modo que não é mérito da definição contextual de direção de uma reta o fato de não confundirmos a direção do eixo da terra com a Inglaterra.

A literatura de comentários sobre o problema Júlio César* é extremamente vasta, incluindo soluções para o problema em que não é preciso nenhuma estipulação da identidade entre signos que são introduzidos por meio de definições contextuais e outros signos. Estas "soluções" parecem não ter levado a sério o argumento do §10 do primeiro volume dos *Gg*, em que Frege conclui que se trata, *em última instância*, de uma estipulação.

Neste contexto, o objetivo desta dissertação é, em primeiro lugar, argumentar contra as soluções do problema Júlio César propostas pela literatura secundária, mostrando como elas são insuficientes para resolver o problema. Em segundo lugar, mostraremos como o problema Júlio César (ou o seu análogo referente a extensões de conceitos), embora resolvido parcialmente nos *Gg*, aparece novamente no momento da aplicação da aritmética. Além disso, defenderemos que a "solução de Frege", por meio da estipulação do valor de verdade de certas identidades, não entra em conflito com a tese fregueana segundo a qual a matemática é uma descoberta, e não uma invenção. Como resultado da investigação, argumentaremos que as críticas feitas por Benacerraf, apresentadas nesta Introdução, são oriundas de uma confusão entre as sentenças da lógica† e a preparação (fixação da referência) para a expressão destas sentenças.

*O problema Júlio César será melhor explicitado no Capítulo 2 desta dissertação.

†E de qualquer outra ciência, já que toda ciência deve assegurar, segundo Frege, que os termos que compõe seus enunciados possuam referência.

CAPÍTULO 2

O Problema Júlio César

O problema Júlio César é geralmente encontrado na literatura sobre Frege como um problema associado a princípios em que se estabelece o significado da identidade de dois termos em um certo contexto. Mais usualmente ele é apresentado como a objeção de Frege à tentativa de definir os números por meio do princípio de Hume*, dado por:

(**HP**) $(Nx)F(x) = (Nx)G(x) =_{Df.} (\exists R)(F(x)1 - 1_R G(x))$

Em outras palavras, este princípio diz que o significado da expressão "o número que convém ao conceito F é igual ao número que convém ao conceito G" denota o mesmo que "é possível coordenar biunivocamente os objetos que caem sob o conceito F com os objetos que caem sob o conceito G". Aqui o contexto é referente à aplicação do número: tanto no lado direito quanto no lado esquerdo da identidade, o operador numérico aparece associado ao conceito do qual ele denota a cardinalidade. Este

*Termo cunhado por Boolos no artigo 'Saving Frege from Contradiction', de 1986. In:Boolos, G. *Logic, Logic and Logic.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. 1998, pp. 171-82.

princípio, evidentemente, só pode ser utilizado para determinar identidades entre operadores numéricos que já aparecem associados a um conceito. Não é possível decidir, a partir de **HP**, se o número que convém ao conceito $F(\xi) =$ 'ξ é um planeta do sistema solar' é igual ao conjunto vazio ou igual ao número π[*].

Embora o problema Júlio César seja associado ao problema descrito acima, ele aparece originalmente nos *Gl* como objeção a um outro tipo de definição dos números, denominada por Dummett de "estratégia adjetivista" (*adjectival strategy*)[†], na qual a definição do número é dada do seguinte modo:

$$(\mathbf{AS})\begin{cases} (\exists_0 x)F(x) =_{Df.} \neg(\exists x)F(x) \\ (\exists_{n+1} x)F(x) =_{Df.} (\exists x)(F(x) \land (\exists_n y)(F(y) \land y \neq x)) \end{cases}$$

É no contexto dessa tentativa de definição dos números que o conquistador das Gálias faz sua aparição no texto dos *Gl*:

> Podemos de fato, por meio desta definição e das anteriores, dizer o que significa
> "ao conceito F convém o número 1+1",
> e em seguida, usando este resultado, indicar o sentido da expressão
> "ao conceito F convém o número 1+1+1",
> etc.; mas por meio de nossas definições nunca poderemos decidir – para dar um exemplo grosseiro – se a um conceito convém o número Júlio César, se este famoso conquistador das Gálias é ou não um número.[‡]

A objeção de Frege aparentemente só é válida se o autor dos *Gl* considera que as expressões '0', '1', '$1+1$', '$1+1+1$', etc. não são sincategoremáticas. Se considerarmos que tais expressões são parte de signos simples, o que é definido não é o número 0, 1, etc. e sim as locuções "O número 0 convém a", "O número 1 convém a", etc. Como afirma

[*] Aqui poderia ser utilizado, ao invés do conjunto vazio ou do número π, os exemplos de Frege, a saber, o imperador Júlio César ou a Inglaterra. Alteramos os exemplos originais para mostrar que o problema Júlio César não está relacionado com identidades entre objetos lógicos e objetos físicos/empíricos. A consideração de que Júlio César é um objeto físico e, portanto, não é um número de nada serve para auxiliar o princípio de Hume a fixar a referência de tais desigualdades.

[†] Dummett M. *FPM*, p. 99.

[‡] *Gl*, §55.

Frege, “isto não nos autoriza a discernir o 0 e o 1 como objetos independentes e possíveis de serem reconhecidos novamente” (*Gl*, §55). Mas isto seria, como afirma Dummett, afirmar o que deveria ser mostrado, a saber, que números são realmente objetos. Não iremos nos aprofundar, nesta dissertação, nos motivos que levaram Frege à sua convicção de que números são objetos* (o que nos obrigaria a fazer um desvio demasiadamente longo). Precisamos, para os nossos propósitos, apenas convencer o leitor de duas teses, a saber:

i) números também podem ser contados;

ii) para se atribuir um número cardinal a um conceito, aquilo que cai sob este conceito deve possuir critérios precisos de identidade e, deste modo, ser um objeto.

A primeira tese é evidente, já que se pode claramente determinar, por exemplo, o número de números primos no intervalo entre 10 e 20. Esta característica dos números, segundo a qual estes podem determinar a cardinalidade de conceitos sob os quais, por sua vez, caem também números, coloca em grandes apuros estratégias que procuram definir o número como conceitos de ordem superior. Tais estratégias precisam enfrentar o seguinte problema: se o número 5 é um conceito de segunda ordem sob o qual caem os conceitos (de primeira ordem) de cardinalidade igual a 5, para contar conceitos de segunda ordem precisaríamos do conceito de terceira ordem – 5’ – sob o qual caem os conceitos de segunda ordem que subsomem, por sua vez, cinco conceitos de primeira ordem, e assim sucessivamente. Haveria, então, não apenas um número 5 na aritmética, mas infinitos números 5, e infinitos teoremas do tipo 5+7=12. Para superar este problema, seria preciso algum mecanismo para “rebaixar” um conceito de ordem superior para o primeiro nível (algo como o *Axiom of Reducibility* de Russell, cujo caráter lógico é bastante

*Convicção que Frege aparentemente levou consigo mesmo após a descoberta do paradoxo de Russell, como indica uma conversa que Wittgenstein teve com Frege em 1913: “The last time I saw Frege, as we were waiting at the station for my train, I said to him: ‘Don’t you ever find *any* difficulty in your theory that numbers are objects?’ He replied ‘Sometimes I *seem* to see a difficulty – but then again I don’t see it.”. Retirada de: Anscombe, G.; Geach, P. *Three philosophers – Aristotle, Aquinas, Frege*. Oxford: Basil Blackwell. 1961. p. 130.

duvidoso*).

Já a validade da segunda tese é menos clara, pois ela afirma que apenas objetos podem ser contados. Que esta tese seja fregueana, isto pode ser mostrado por meio de sua definição de número cardinal nos *Gg*, em que a relação de equinumericidade correlaciona *objetos* que caem sob um conceito F com *objetos* que caem sob um conceito G. Isso significa que, se desejamos contar quantas ocorrências simultâneas de eclipses lunares e julgamentos criminais ocorreram nos últimos 40 anos, devemos tratar tais ocorrências como objetos†. Mas parece haver uma dificuldade com esta tese, a saber, a de que é possível contar, *prima facie*, não apenas objetos, mas também conceitos, relações, etc. Afinal, parece fazer plenamente sentido perguntar, por exemplo, pelo número de virtudes de Sócrates. Entretanto, isto apenas implica que, para contar conceitos, devemos transformá-los em objetos. Isso por dois motivos: i) tudo que pode ser contado deve ter critérios precisos de identidade, para que se possa afirmar, p. ex., que a e b são duas coisas e não somente uma; ii) para Frege, o uso da identidade $F = G$ entre conceitos (e entre funções em geral) para exprimir o fato de que tais funções resultam no mesmo valor para o mesmo argumento é uma monstruosidade, já que a função, dado seu caráter essencialmente insaturado, nunca pode aparecer isolada dos lugares para seus argumentos‡. Se insistirmos em construir esta monstruosa identidade, ela seria fornecida

*Para uma crítica a este respeito, Cf. Marques, José O. A. 'Waismann, Ramsey, Wittgenstein e o axioma da redutibilidade'. *Cadernos de História e Filosofia das Ciências.* Campinas SP, v. 2, n. 1, 1992. pp. 5-48.

†O exemplo aqui é de Wittgenstein (relembrando uma conversa que ele teve com Frege), e é mais um indício de que a noção fregueana de objeto está intimamente conectada às noções de "contável", "enumerável". Cf. Wittgenstein, L. *Wiener Ausgabe.* Michael Nedo (ed.). Band 1. Wien/New York: Springer Verlag, 1999, p. 9: "Frege hätte allerdings gesagt (ich erinnere mich an eine Unterredung) daß das Zusammentreffen einer Mondesfinsternis und einer Gerichtsverhandlung ein Gegenstand sei". No parágrafo anterior, ele escreve: "Daß man das Zusammenreffen von Gerichtsverhandlungen mit Mondesfinsternissen *zählen* kann, sagt allerdings, daß wir einen Begriff der logischen Form haben, aber es zeigt natürlich nicht daß wir im Besitze einer —logischen— Analyse dieser Vorgänge sind". (grifo nosso)

‡Cf. a nota de rodapé do §147 do segundo volume dos *Gg*: "Ebenso werden sich die wenigsten Mathematiker besinnen, den Umstand, dass $f(\xi)$ für dasselbe Argument immer denselben Werth hat wie die Function $g(\xi)$, auszudrücken durch "$f = g$". Der hierin allerdings enthaltene Fehler entspringt aus einer mangelhaften Auffassung des Wesens der Function. Ein isolirter Functionsbuchstabe ohne Argumentstelle ist ja ein Unding, ebenso wie ein isolirtes Functionszeichen wie "*sin*" ein Unding ist. Denn das Kennzeichnende der Function im Vergleich mit dem Gegenstande ist ja eben die Ungesättigtheit, dass sie der Ergänzung durch ein Argument bedarf, und dies muss auch in der Bezeichnung hervortreten.

formalmente do seguinte modo:

$$F = G =_{Df.} (x)(F(x) = G(x))$$

Mas, ora, este é precisamente o critério que encontramos na lei básica V dos *Gg* para a identidade entre extensões de conceitos. Salvo engano, é por isso que Frege, nos *Gl*, diz acreditar que "ao invés de 'extensão de conceito' se poderia dizer simplesmente 'conceito'" (*Gl*, §68), além de dizer que não atribui "ao recurso à extensão de um conceito nenhum peso decisivo" (*Gl*, §107), afinal, extensões de conceitos aparecem, como diz Wright*, meramente como 'conceitos objetificados'†. É importante ressaltar que as considerações acima não contradizem a separação precisa feita por Frege entre conceito e objeto, já que a relação entre um conceito e um objeto que cai sob ele é totalmente distinta da relação entre um conceito e sua extensão. Frege utiliza esta distinção, nos *Gl*, para criticar os formalistas‡ que, ao introduzirem um conceito e, em seguida, utilizarem o artigo definido juntamente com o conceito introduzido ("a raiz quadrada de -1"), parecem querer dizer que todo conceito introduzido subsome necessariamente um objeto, o que não é verdade, já que existem conceitos vazios, isto é, conceitos sob os quais não cai nenhum objeto.

Uma vez expostas as duas teses acima, é preciso verificar se é possível, a partir da definição dos números por **AS**, definir a identidade para os números. A sugestão natural para este definição é a seguinte:

---

*Wright, C. *Frege's conception of numbers as objects*, Aberdeen: Aberdeen University Press. 1983, p. 18.

†Um interessante artigo que aborda a questão da relação entre a identidade entre funções e o "paradoxo" do conceito cavalo (o exemplo fregueano mais paradigmático de conceito objetificado, descrito no artigo *UB&G*) é o artigo de Marco Ruffino, intitulado 'Why Frege would not be a neo-Fregean'. *Mind*, 112. 2003, pp. 51-78.

‡É relevante mencionar que o "formalismo" criticado nos *Gl* é um pouco diferente do "formalismo" que defende a tese segundo a qual os objetos da matemática são os signos eles próprios ("formalismo" criticado nos *Gg*). No entanto, eles possuem certas semelhanças, e algumas críticas servirão para ambos: ambos pensam possuir o poder de criar objetos com certas propriedades desejadas, o que é visto por Frege como mera superstição matemática.

$$m = n =_{Df.} (F)((\exists_m x)F(x) \leftrightarrow (\exists_n x)F(x))$$

Contudo esta solução apresenta diversos problemas. O mais usualmente comentado é que com esta definição não é possível provar o quarto axioma de Peano*, sem que se suponha a existência de uma infinitude de objetos†. No entanto, o problema relevante‡ para esta dissertação é que a definição acima, semelhantemente a **HP**, não consegue determinar a referência de identidades entre números cardinais e outros objetos como eventos, pessoas, conjuntos, números reais, etc. Se substituirmos m por 7 e n por Júlio César, temos uma expressão que não foi definida – $(\exists_{\textit{Júlio César}} x)F(x)$ – e, portanto, essa definição não pode nos auxiliar a estabelecer a referência da identidade entre o número sete e o famoso imperador das Gálias.

Também é importante observar que a definição acima deve ser vista como uma definição *condicional*, isto é, uma definição que depende da condição de que m e n são números. Deste modo, a definição acima deve ser lida do seguinte modo: "se m e n são números, então definimos a identidade entre m e n de tal e tal modo". No entanto, após a definição ter sido feita, ela imediatamente se torna uma verdade, que poderia ser expressa condicionalmente por:

Se m e n são números, então $(m = n) = (F)((\exists_m x)F(x) \leftrightarrow (\exists_n x)F(x))$.

Porém, por uma simples transposição, obtemos:

*Esta axioma diz que, se $n \neq m$, então $S(n) \neq S(m)$, em que $S(x)$ denota o sucessor de x na série dos números naturais.

†Cf., p. ex., Heck, R. G. 'The Julius Caesar Objection'. In: R. Heck, ed. *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett.* New York and Oxford: Oxford University Press. 1997, p. 291.

‡A suposição de uma infinitude de objetos talvez não fosse um problema para Frege, já que tal infinitude é apenas um corolário da lei básica V e do fato de que o Verdadeiro e o Falso são objetos. Com efeito, a partir destes dois objetos poder-se-ia construir quatro funções, sendo que os percursos de valores de duas destas funções seriam identificados com o Verdadeiro e o Falso por Frege. As outras duas originariam outros dois objetos lógicos, somando-se aos outros dois anteriores. A partir destes 4 objetos lógicos seria possível construir 256 funções diferentes, e 4 dos percursos de valores destas funções seriam identificados com os 4 objetos lógicos anteriores, originando-se assim mais 252 objetos lógicos, e assim por diante.

Se $\neg[(m = n) = (F)((\exists_m x)F(x) \leftrightarrow (\exists_n x)F(x))]$ e m é um número, então n não é um número.

E aqui é impossível manter o domínio restrito ao domínio dos números*. Para $n = Júlio\ César$, teríamos uma expressão sem sentido. Ora, uma lei lógica como a transposição não pode transformar um enunciado verdadeiro em um enunciado sem sentido. E esta é uma das razões para que Frege abomine qualquer tipo de definição condicional, procedimento tão frequente na matemática.

Vimos portanto que ambas definições de número (por **HP** e por **AS**) sofrem do mesmo mal, e Frege fornece ainda nos *Gl* um outro exemplo de definição que não fixa a identidade em todos os casos. Tal definição é a definição contextual de direção de uma reta, dada por:

$$Dir(a) = Dir(b) =_{Df.} a \parallel b$$

Em outras palavras, a definição acima estabelece que a direção da reta a é igual à direção da reta b se ambas retas são paralelas. Frege argumenta contra esta definição de um modo similar ao problema Júlio César:

> (...) nossa definição dispõe-nos de um meio de reconhecer este objeto novamente caso deva apresentar-se sob outra roupagem, digamos como direção de b. Mas este meio não atende a todos os casos. Ele não permite decidir, por exemplo, se a Inglaterra é o mesmo que a direção do eixo da Terra. Perdoe-se este exemplo aparentemente absurdo! Naturalmente ninguém confundirá a Inglaterra com a direção do eixo da Terra; mas este não é um mérito de nossa definição. Ela não se pronuncia quanto a dever a proposição
>
> "a direção de a é igual a q"
>
> ser afirmada ou negada, caso q não seja dado também sob a forma "a direção de b. Falta-nos o conceito de direção; pois se o tivéssemos poderíamos estabelecer que, se q

*Frege argumenta de modo semelhante, embora com outros exemplos, no §65 do segundo volume dos *Gg*.

não for uma direção, nossa proposição deve ser negada, se q for uma direção a decisão caberá à definição anterior. Ora, parece natural definir:

q é uma direção se existe uma reta b cuja direção é q.

Mas é evidente que nos movemos em círculo. A fim de poder aplicar esta definição devemos já saber em cada caso se a proposição

"q é igual à direção de b"

deve ser afirmada ou negada.*.

Pelo mesmo motivo, não se pode definir o conceito de número do seguinte modo: "x é um número se existe um conceito F tal que o número que convém a F é x". Nesse sentido, o problema de **HP** é que este princípio não faz o que ele se propõe a fazer: definir o que é um número. Se alguém ainda não sabe o que são números, **HP** não será útil para explicar a esta pessoa o que eles são.

Em linhas gerais, este é o argumento que Frege move nos *Gl* contra as chamadas "definições contextuais", isto é, definições que estabelecem critérios de identidade apenas entre termos que são apresentados sob uma mesma roupagem (dentro de um mesmo contexto). A expressão "definição contextual" deve ser utilizada com certo cuidado, já que toda definição ("contextual" ou não) nos permite utilizar o termo definido em um certo contexto. Se definimos um objeto, essa definição nos permite utilizá-lo, por exemplo, como argumento de um conceito. O que é chamado usualmente na literatura de "definição contextual" é o tipo de definição que fixa a referência de um termo apenas em um certo contexto, o que é combatido por Frege. Isto não quer dizer que Frege, ao rejeitar a "definição conceitual" de número, também estaria abrindo mão do princípio do contexto†, enunciado no início dos *Gl* como um dos princípios metodológicos da obra. Como afirma Frege, "a independência que reclamo para o número não deve significar que um numeral designe algo fora do contexto de uma proposição, mas pretendo com

* *Gl*, §66.

† "Deve-se perguntar pelo significado das palavras no contexto da proposição, e não isoladamente" (*Gl*, Introdução).

isto apenas excluir seu uso como predicado ou atributo, o que alteraria algo em seu significado" (*Gl*, §60).

É possível ver melhor a pertinência do argumento de Frege no momento da aplicação da aritmética. Seja $F(\xi)$ o seguinte conceito: "ξ é um número cardinal primo e par ou ξ é solução da equação $\xi^2 = 2$". Como devemos decidir, neste caso, a cardinalidade do conceito $F(\xi)$? Supostamente, verificando que o único número cardinal primo e par é o número 2 e, em seguida, verificando que as soluções da equação acima são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Assim, a cardinalidade de $F(\xi)$ é 3. Mas se os únicos critérios de identidade que possuímos são **HP** e uma certa definição contextual de número real[*], como podemos deduzir que o número cardinal 2 e o número real $\sqrt{2}$ são realmente *dois* números e não somente um?

Ao contrário do que afirma Wright[†], contextos em que diversos tipos de objetos são subsumidos por um conceito têm grande relevância para a matemática, e o problema Júlio César não é, na nossa opinião, um problema que só assombraria a mente de um filósofo e não de um matemático. Há vários exemplos na matemática em que precisamos considerar a cardinalidade de conceitos sob os quais caem objetos de 'tipos' diferentes, e se fornecermos apenas definições contextuais destes 'tipos' de objetos, não é possível decidir a cardinalidade do conceito em questão[‡] nem decidir se o número natural 1 é idêntico ao número real 1.

---

[*]Se admitimos que um número real é uma razão entre duas magnitudes, podemos definir contextualmente a identidade entre dois números reais ao modo de Eudoxo: "Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes". EUCLIDES, *Os elementos.* Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP. 2009, Livro V, p. 205. Ou, em termos modernos, dizemos que a razão de magnitudes $a : b$ é igual à razão de magnitudes $c : d$ se, dados m e n números naturais quaisquer, uma das três condições seguintes é verdadeira: i) $na > mb$ e $nc > md$; ii) $na = mb$ e $nc = md$; iii) $na < mb$ e $nc < md$.

[†]Cf. Wright, C. *Frege's conception of numbers as objects*, Aberdeen: Aberdeen University Press. 1983, pp. 108-109: "'Mixed' identity contexts of this sort are, after all, of absolutely no practical importance.; they have a role to play neither in pure number theory nor in its applications. Yet it is the status of the fundamental laws of number theory, and the sources of its manifold applicability and utility, that Frege aims to shed light on; so why should he be concerned with eccentricities which it would occur to no-one but a philosopher to formulate, let alone seriously contemplate?"

[‡]Um dos exemplo é o teorema de Euler, que diz que, em um poliedro, o número de vértices mais o número de faces é igual a 2 mais o número de arestas.

Wright, no livro intitulado *Frege's conception of numbers as objects*, procura, em uma defesa de **HP**, solucionar o problema Júlio César justificando que o critério de subsunção de um objeto a um conceito definido contextualmente pode ser extraído do critério de identidade associado a esta definição. Segundo Wright, **HP** nos diz o que são os números: são objetos que são identificados ou distinguidos por meio da relação biunívoca entre conceitos. Como Júlio César é uma pessoa e pessoas e números são individualizados por diferentes critérios de identidade, o imperador das Gálias não pode ser um número, e vice-versa.

É fácil ver como apenas o critério acima não funciona. Basta construirmos um caso em que dois conceitos definidos contextualmente deveriam incluir alguns objetos em comum (como, *e. g.*, os conceitos gato e animal). Como os dois conceitos têm critérios distintos de identidade, objetos instanciados por meio de uma definição não poderiam ser eleitos para uma possível identidade com objetos instanciados por meio da outra. Isto é uma consequência imediata da tese de Wright: a de que a definição contextual nos fornece o conceito, ou seja, nos fornece um critério de decisão sobre quais objetos são subsumidos por tal conceito.

Suponha que tenhamos definido contextualmente a expressão (**H**) = 'homem' (por critérios de identidade pessoais tais como continuidade física e psicológica) e, em seguida, a expressão 'brasileiro' do seguinte modo:

(**B**) O brasileiro de RG X_1 é igual ao brasileiro de RG X_2 se $X_1 = X_2$.

Como os critérios de individualização de homens e brasileiros são diferentes, nenhum brasileiro introduzido pela definição contextual **B** (p. ex., o brasileiro de RG $01234567 - 8$) poderia ser um homem. Mas isto apenas mostra que a definição contextual de 'brasileiro' não é precisa o suficiente para incluir aquilo que na nossa linguagem chamamos de 'brasileiro'. A definição acima serviria perfeitamente para identificar, por exemplo, documentos (papéis) nos quais estão escritos os números de RG:

(**D**) O documento no qual se encontra o RG X_1 é igual ao documento no qual se encontra o RG X_2 se $X_1 = X_2$.

Assim, para construir uma definição correta de 'brasileiro', precisaríamos incluir, p. ex., critérios de identidade entre homens, e então a definição torna-se:

(**B'**) O brasileiro de RG X_1 é igual ao brasileiro de RG X_2 se $X_1 = X_2$ e se ambos obedecem os critérios de identidade definidos por **H**.

No entanto, os termos introduzidos pelas definições contextuais **B'** e **H** ainda possuem um conjunto diferente de critérios de identidade, mesmo que um conjunto de critérios contenha o outro. Ainda não conseguiríamos eleger termos introduzidos por **H** e termos introduzidos por **B'** para uma possível identidade*. Para contornar a situação, Wright propõe um critério que permite tratar este tipo de "inclusão extensional". O critério pode ser expresso do seguinte modo:

(**HS**) Nenhum objeto definido por meio de uma definição contextual D_x pode ser idêntico a objetos definidos por meio de uma outra definição contextual D_y a menos que, para cada asserção de identidade '$a = b$', em que a e b denotam objetos definidos por D_x, corresponda uma asserção '$A = B$', em que A e B denotam objetos definidos por D_y, de modo que ambas asserções possuam as mesmas condições de verdade (isto é, que $a = b \leftrightarrow A = B$).

Denomino este mecanismo de *herança simples*†, já que a classe de objetos C_1

*Evidentemente, nós poderíamos construir o conceito de homem e brasileiro e verificar que alguns objetos que caem sob o primeiro conceito caem sob o segundo, mas o que aqui está em questionamento é se as definições contextuais, elas próprias, podem fornecer os limites do conceito que elas se propõem a definir. Além disso, a exigência de incluir, nos critérios de identidade de 'brasileiro', os critérios de identidade de sua "essência" (ser homem), já indica, como veremos, o problema da falta de fixação da referência para termos introduzidos por **HP**.

†Em uma clara analogia ao mecanismo homônimo retirado das linguagens de programação orientadas a objetos.

definidos contextualmente por D_x "herda" as condições de identidade dos objetos definidos por uma classe C_2 de objetos definidos contextualmente por D_y, e a relação C_2 para com C_1 é a de inclusão. Infelizmente, apenas esse mecanismo não basta para os propósitos de Wright. Seja **AU** a seguinte relação de equivalência:

(**AU**) O aluno de número USP X_1 é igual ao aluno de número USP X_2 se $X_1 = X_2$ e se ambos obedecem os critérios de identidade definidos por **H**.

Como **AU** e **B'** não possuem as mesmas condições de identidade, nem é possível aplicar o mecanismo de herança simples (já que nem todo aluno da USP é brasileiro e nem todo brasileiro é aluno da USP), chegaríamos à infeliz conclusão de que não podemos identificar nenhum aluno da USP introduzido por **AU** com nenhum brasileiro introduzido por **B'**. Além disso, nem mesmo a transitividade da relação de identidade seria mantida, já que um objeto O_1 introduzido por **AU** seria igual a um objeto O_2 introduzido por **H**, e este último poderia ser, em princípio, igual a um objeto O_3 introduzido por **B'**. Teríamos que $O_1 = O_2$, $O_2 = O_3$ e $O_1 \neq O_3$.

Deste modo, o mecanismo proposto por Wright aparentemente soluciona bem os casos de inclusão total de uma classe em outra (gato $\subset$ felino, homem $\subset$ animal, quadrado $\subset$ losango, etc.), mas não soluciona casos de *herança múltipla*, isto é, casos em que classes não includentes uma na outra contêm, apesar disto, elementos em comum, e estes elementos "herdam" as condições de identidade tanto de uma classe como da outra, como é o caso um brasileiro que é aluno da USP: este herdaria as condições de identidade tanto de **AU** como de **B'**.

No artigo *To bury Caesar ...*[*], Hale e Wright procuram corrigir os problemas da solução de Wright fornecida no livro *Frege's conception of number as objects*, invocando a noção de *categoria*[†] e enfraquecendo o critério **HS** para objetos de mesma

[*]Hale, B; Wright, C. 'To bury Caesar'. In:Hale, B; Wright, C. (eds.), *The Reason's Proper Study: Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics.* Oxford: Clarendon Press. 2001. pp. 335-396.

[†]No artigo *Solving the Caesar problem without categorial sortals*, Nikolaj Jang Pedersen procura

categoria introduzidos por definições contextuais. Categorias, segundo os autores, são conceitos que definem tipos de objetos, de modo que pertence à essência de tal objeto a propriedade de ser subsumido por esta, e por apenas esta, categoria. Objetos então seriam *apenas* introduzidos já fazendo referência à sua "essência" (categoria ao qual ele pertence). Dentro de uma categoria, objetos seriam identificados ou distinguidos por referência ao critério de identidade próprio da categoria, enquanto que comparações feitas entre objetos de categorias diferentes seriam falsas justamente pelo fato dos objetos pertencerem a categorias diferentes. Assim, como 'número' é um conceito que faz parte de uma categoria diferente da categoria da qual faz parte o conceito 'pessoa', Júlio César não pode ser um número. Esta estratégia, como o leitor pode observar, pressupõe uma ontologia muito particular. Segundo Hale e Wright:

> [As categorias às quais pertencem números e pessoas] são claramente categorias diferentes já que a primeira será associada com o critério de identidade que necessariamente coincide em aplicação com o critério estipulado no princípio de Hume enquanto a segunda será associada com um critério de identidade que necessariamente coincide em aplicação com qualquer que seja o critério que se toma para identidade pessoal. E estes critérios são evidentemente independentes: não se pode necessariamente e, em geral, tratar problemas de identidade entre pessoas por referência a considerações sobre correspondência biunívoca entre conceitos. Este foi o *Grundgedanke* do artigo *Frege's conception of number as objects.* E agora podemos ver o esboço de uma ontologia filosófica na qual este [*Grundgedanke*] terá sua significação pretendida. É o esboço de um mundo no qual todos objetos pertencem a uma ou outra categoria de um pequeno conjunto de categorias gerais, cada uma delas se subdividindo em seus tipos puros respectivamente mais ou menos gerais; e no qual todos objetos tem uma natureza essencial dada pelo seu tipo puro mais específico ao qual ele pertence.*

Esta restrição ontológica implica a não existência de heranças múltiplas, isto é, nenhum objeto pode pertencer a duas categorias distintas. Há diversas dificuldades com esta solução de Hale e Wright. Primeiramente, qual o motivo de não haver apenas uma

mostrar que é possível resolver o problema Júlio César sem introduzir a noção de "categoria", embora reconheça que sua solução dependa da ontologia pressuposta por Hale e Wright. Não iremos nos deter neste artigo, basta atentar o leitor para o fato de que a **Definição 1** do artigo de Pedersen já pressupõe, como ele mesmo reconhece logo após a **Definição 2**, que um *sortal concept* F forneça as condições para determinar quais objetos caem sob F, justamente o que é problemático nas definições contextuais. Além disso, o autor, ao utilizar em suas definições o conectivo *se, e somente se*, parece confundir uma definição com um teorema ou axioma, de modo que é difícil saber de modo exato os pressupostos conceituais de suas construções.

* *To bury Caesar.* op. cit.,p. 389.

categoria, a saber, "objeto", cujo critério de identidade é fornecido exatamente pelo critério proposto por Frege no §65 dos *Gl*: *eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate*? Em segundo lugar (e de modo mais importante), por que a definição de número dependeria de uma *hipótese* ontológica que, aparentemente, pode não ser verdadeira? Se um filósofo tem razões para criticar o *Axiom of Reducibility* de Russell (cuja validade depende de uma hipótese ontológica que pode não ser verdadeira), as mesmas razões poderiam ser movidas contra a proposta de Wright e Hale. É fácil vislumbrar que o projeto logicista de Frege estaria, neste caso, em maus lençóis.

Essas não são as únicas razões para desconfiar da proposta destes autores. Como veremos no próximo capítulo, por meio de um argumento conhecido na literatura por *argumento da permutação*, é possível fornecer critérios de identidade entre pessoas por referência critérios de identidade entre números, por mais estranho que isto possa parecer. Os mesmos motivos que levaram Frege a dizer que a lei básica *V* dos *Gg* não fixa a referência dos termos introduzidos por ela podem ser usados para mostrar que **HP** definitivamente não fixa a referência dos termos numéricos introduzidos por este princípio de abstração.

Frege certamente estava ciente de que, ao se escolher introduzir números por meio de **HP**, tais números só poderiam ser comparados com outros números introduzidos pelo mesmo princípio, o que faria com que o número não pudesse ser reconhecido como o mesmo se ele não fosse introduzido por tal via. Em outras palavras, o modo como o número nos é dado, por **HP**, seria visto como uma propriedade essencial do mesmo. A crítica de Frege a esta tentativa é apresentada no contexto da tentativa de definição contextual da direção de uma reta:

> Caso pretendêssemos dizer: q é uma direção se é introduzida pela definição [contextual] acima formulada, estaríamos tratando a maneira como é introduzido o objeto q como uma de suas propriedades, o que ela não é. A definição de um objeto não enuncia enquanto tal nada sobre ele, mas estipula o significado de um sinal. Isto feito, ela se converte em um juízo sobre o objeto, mas então não mais o introduz, colocando-se no mesmo plano que outros enunciados sobre ele. Escolhendo-se esta via, estar-se-ia pressupondo que um objeto apenas pudesse ser dado de uma única maneira; pois caso contrário, do fato de q não ser introduzido por nossa definição não se seguiria que não o pudesse ser. Todas as equações resultariam em reconhecer como o mesmo o que nos é dado da mesma

> maneira. Mas isto é tão evidente e tão estéril que não valeria a pena formulá-lo. Não se poderia de fato tirar nenhuma conclusão que fosse diferente de todas as premissas. A utilidade variada e significativa das equações repousa antes sobre a possibilidade de algo ser reconhecido novamente ainda que dado de maneira diferente.*

É importante lembrar que o sinal de identidade é introduzido no §8 da *Begriffsschrift* exatamente para dar conta da identidade de conteúdo de nomes que são introduzidos de modos diferentes. À primeira vista, Frege argumenta que é natural pensar que não é preciso diferentes signos para designar o mesmo conteúdo (basta utilizar signos distintos para designar conteúdos distintos), mas que isto é uma ilusão. Para mostrar que o signo de identidade é imprescindível, Frege utiliza um exemplo da geometria (o qual ilustramos com a Figura 2.1): assumamos que sobre uma circunferência repousa um ponto fixo A, a partir do qual uma reta r é rotacionada. Chamemos de B o outro ponto de intersecção da circunferência, de modo que variações na reta produzem variações na localização do ponto B (em outras palavras, o ponto B é *função* de r). Quando a reta r é uma tangente à circunferência, necessitamos representar a identidade de conteúdo do ponto que foi inicialmente fixado sobre a circunferência e do ponto resultante da variação da reta r até ela se tornar uma reta tangente. Para isto o sinal de identidade é introduzido.

Embora Frege critique, no artigo *US&B*, a sua antiga teoria da identidade (apresentada na *Begriffsschrift*), a nova teoria, em que o sinal de igualdade designa uma relação entre *objetos*, e não mais entre *nomes*, também é introduzida para superar o mesmo problema, a saber, o problema de como é possível que dois objetos que diferem nos seus modos de serem dados (*Art des Gegebenseins*)† possam, a despeito disto, ser idênticos. Embora a diferença no *sentido* seja relevante para o matemático, já que é a diferença de sentido que fornece, para Frege, a chave para explicar a diferença de valor cognitivo entre sentenças como $4 = 4$ e $2 + 2 = 4$, é importante para o matemático, de modo mais fundamental, o *significado* das expressões da matemática, pois é a identidade ou diferença do significado que determina o valor de verdade das equações da sua

* *Gl*, §67.

†Modo que Frege identifica com o sentido (*Sinn*) do objeto, em contraste com o seu significado ou referência (*Bedeutung*).

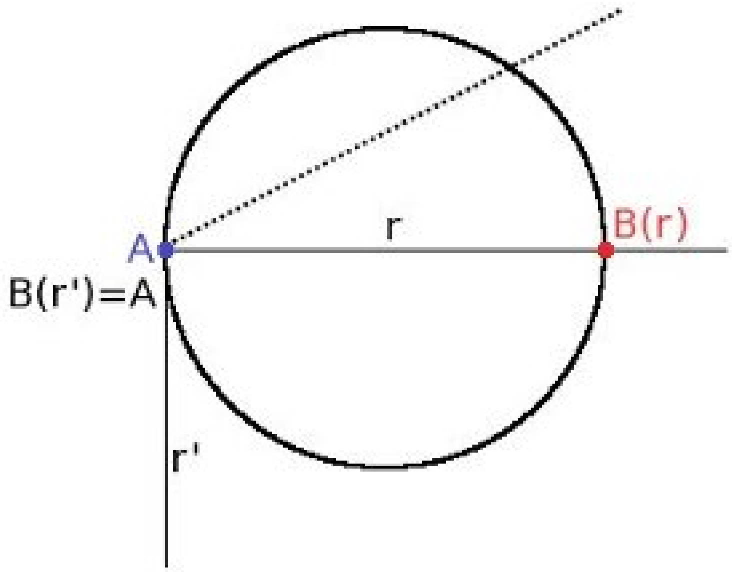


Figura 2.1: Exemplo de Frege no §8 da *Begriffsschrift*.

ciência. É nesse sentido que Frege critica, na resenha à *Philosophie der Arithmetik* de Husserl, os “lógicos psicologistas”, que se preocupam com o sentido das palavras[*], em contraste com os matemáticos, que se preocupam com o significado delas[†].

No artigo *The Caesar Problem in its Historical Context: Mathematical Background*[‡], Jamie Tappenden procura mostrar que a preferência de Frege por definições de objetos matemáticos independentes do modo de apresentação (*presentation-independent*), permitindo a reidentificação de objetos introduzidos por meio de simbolismos distintos (e aumentando, deste modo, o conhecimento matemático acerca deles), tem suas origens em um debate histórico entre duas escolas alemãs sobre o modo segundo o qual a análise

[*] Isto é, com o modo de apresentação do conteúdo das palavras que, no caso dos “lógicos psicologistas”, equivale a ideias (*Vorstellungen*), diferentemente de Frege, que concede objetividade ao *Sinn*.

[†] Cf. *The Frege Reader*. op. cit., p. 225: “Isto revela uma cisão entre lógicos psicológicos e matemáticos. O que importa para o primeiro é o sentido das palavras, bem como as ideias, que eles malogram na tentativa de distingui-las do sentido; ao passo que o que importa para o último é a coisa ela própria: o *Bedeutung* das palavras. A censura que o que é definido não é o conceito mas sua extensão na verdade afeta todas as definições matemáticas. Para o matemático, não é mais certo ou mais errado definir uma cônica como a linha de interseção de um plano com a superfície de um cone circular do que defini-la como uma curva plana com uma equação do segundo grau em coordenadas paralelas” (tradução nossa).

[‡] Tappenden, J. ‘The Caesar Problem in its Historical Context: Mathematical Background’. *Dialectica*, 59. 2005, pp. 237-264.

dos números complexos deveria proceder. A primeira, representada por Weierstrass e Kummer, teria a característica de introduzir certos objetos matemáticos vinculados a um modo específico de representação, enquanto que a segunda, representada por Riemann e posteriormente por Dedekind, procurava introduzir os mesmos objetos de modo a primeiramente provar a existência e unicidade de um conceito (justificando a introdução de um objeto definido por meio daquele conceito), enquanto que o modo como aquele objeto seria representado para que se pudesse realizar cálculos com ele era uma questão até certo ponto arbitrária e, por essa mesma razão, os cálculos* apenas explorariam propriedades acidentais da representação†.

Tappenden cita o tratamento distinto feito por Kummer e Dedekind dos números ideais como exemplo da disputa acerca do modo de apresentação de certas entidades matemáticas. Dedekind argumenta contra o modo de introdução dos números ideais no estilo de Kummer (e da escola weierstrassiana, em geral) do seguinte modo:

> Percebe-se, com efeito, que as provas das proposições mais importantes dependem da representação de um ideal por meio da *expressão* $[ma, m(b+\theta)]$ e da realização efetiva da multiplicação, isto é, de um *cálculo* que coincide com a composição de formas binárias quadráticas dadas por Gauss. Se quisermos tratar campos Ω de grau arbitrário do mesmo modo, então encontraremos grandes dificuldades, talvez insuperáveis. Mesmo se existisse tal teoria, fundada no cálculo, ela não teria o grau maior de perfeição, na minha opinião. É preferível, como na teoria moderna de funções, procurar provas baseadas imediatamente em características fundamentais, ao invés de provas baseadas em cálculos, e na verdade construir a teoria de tal modo que ela seja apta a prever os resultados do cálculo (por exemplo a composição de formas decomponíveis de todos graus)‡.

---

*Tappenden denomina o modo de introdução de objetos matemáticos da escola de Weierstrass de *abordagem computacional*, enquanto que o de Riemann é denominado *abordagem conceitual*. Cf. *The Caesar Problema in its Historical Context: Mathematical Background*. op. cit. p. 243: "German complex analysis at the time exhibited a sharp divide between the 'computational' approach of Weierstrass in Berlin, and the 'conceptual' approach of Riemann late of Göttingen". Cf. também p. 247: "For those in the Riemann school, it was his definition that really cottoned on to the essencial properties; the Weierstrass definition exploited accidental forms of representation".

†Pode-se verificar na matemática moderna um cuidado em distinguir propriedades da imagem de uma função (que poderia ser produzida por funções distintas) de propriedades da própria função. Na geometria de curvas e superfícies, por exemplo, uma noção ou quantidade definida sobre uma curva ou superfície é dita *geométrica* se ela é independente da parametrização escolhida (isto é, se tal noção ou quantidade é invariante a mudanças de parametrização). Exemplos de noções *geométricas* definidas são: tangente de uma curva em um ponto, plano osculador de uma curva em um ponto e comprimento da curva. Exemplo de noção que depende da parametrização: a velocidade com que a função "desenha" a imagem da curva.

‡Dedekind, R. *Theory of Alebraic Integers.* New York: Cambridge University Press. Tradução para

Embora a reconstrução histórica feita por Tappenden seja interessante e iluminadora, não é possível simplesmente afastar a tentativa de definição contextual do número por **HP** argumentando que estaríamos apenas introduzindo um modo de representação possível (dentre outros possíveis) do número e encontrando características acidentais referentes a tal modo de representação. Afinal, como dissemos anteriormente, a "restrição de Frege" é que a definição de número deve explicar a sua aplicação (a determinação da cardinalidade de conceitos), e quanto a isso a definição por **HP** é irreprochável. Não obstante, pode-se argumentar, seguindo a linha de raciocínio de Tappenden, que não bastaria, para a escola riemanniana, calcular com números (o que, como é bem sabido, pode-se fazer com uma lógica de segunda ordem munida de **HP**), mas a definição deve fornecer o *conceito* de número, isto é, ela deve nos elevar a uma posição de decidir, para qualquer objeto, se ele cai ou não sob este conceito, e é exatamente isto que **HP** não é capaz de fazer.

Como dissemos na Introdução, a solução de Frege para a definição explícita do número cardinal sofre do mesmo mal. Se **HP** não nos fornece o conceito de número, a introdução de extensões de conceito parece apenas dar um passo em vão na resolução da questão, já que a lei básica *V* dos *Gg*, responsável pelos critérios de identidade entre extensões de conceitos, também não fornece um critério geral, segundo o qual se poderia decidir pela identidade ou não identidade entre extensões de conceitos e outros objetos que não aparecem sob a roupagem de extensões de conceitos.

O procedimento que Frege executa no §10 do primeiro volume dos *Gg* para resolver o problema da indeterminação dos percursos de valores, longe de manter o nível de claridade típico dos seus escritos, suscita dúvidas e problemas dos mais diversos. Em primeiro lugar, por que é permitido para Frege *estipular* certas identidades de percursos de valores com outros objetos? Como isso pode conviver com a postura realista* de Frege acerca da matemática? Em segundo lugar, por que não poderíamos repetir o

o inglês por John Stillwell. Tradução nossa para o português. 1996, p. 102. Citado parcialmente por Tappenden no artigo *The Caesar Problem in its Historical Context: Mathematical Background.* op. cit. p. 254.

*Muitos interpretes preferem falar em uma defesa do "platonismo" por parte de Frege acerca da matemática. Teremos a ocasião de indicar os motivos de não utilizarmos este rótulo para Frege.

mesmo procedimento com **HP** e, deste modo, resolver o problema Júlio César já um passo atrás sem ser obrigado a introduzir percursos de valores? Em terceiro lugar, será que o procedimento de Frege é suficiente para fixar a referência dos percursos de valores? São essas questões que serão discutidas no próximo Capítulo desta dissertação, por meio da análise do §10 do primeiro volume dos *Gg.*

CAPÍTULO 3

O Argumento da Permutação

No §3 do primeiro volume dos *Gg*, Frege introduz as noções de percurso de valores de uma função monádica (funções com apenas um lugar para argumentos) e de extensão de um conceito*. Frege também introduz um critério de identidade entre percursos de valores: a lei básica V. Tal lei é expressa por Frege do seguinte modo:

$$(\mathbf{LB\ V}) \vdash (\dot{\epsilon}f(\epsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha)) = (\smile^{\mathfrak{a}}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$$

A **LB V** diz, portanto, que dois percursos de valores são iguais se, para todo argumento, os valores das funções correspondentes são iguais. No §10 do primeiro volume dos *Gg*, Frege argumenta que esta lei, sozinha, é insuficiente para determinar completamente a referência dos nomes de percursos de valores. A argumentação de Frege é semelhante aos casos anteriores de definição do número por **HP** e de definição contextual

*Como dissemos anteriormente, um percurso de valores é denominado a extensão de um conceito quando a função em questão é um conceito (isto é, quando ela assume, como valores, o Verdadeiro e o Falso).

da direção de uma reta. Isto não é surpreendente, já que, em todos os casos, trata-se de definir a identidade de dois objetos contextualmente por meio de uma relação de equivalência. Como já observamos no caso de **HP**, a **LB V** também não nos fornece um critério para decidir o valor de verdade de "$\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon) = q$" se q não é da forma $\dot{\epsilon}\phi(\epsilon)$. Em outras palavras, a **LB V** não nos fornece o *conceito* de percurso de valores. Logo em seguida, Frege apresenta um argumento definitivo para mostrar que a **LB V** não é suficiente para determinar a referência de nomes de percursos de valores. Tal argumento foi cunhado por Dummett de "argumento da permutação"*, embora o argumento não dependa essencialmente de uma bijeção de um domínio nele próprio (uma permutação), e sim de uma função injetora†. Mathias Schirn, no artigo *Percursos de valores e indeterminação da referência*‡, procura reconstruir o argumento fregueano do seguinte modo:

1. Suponha que ϕ seja uma atribuição de objetos a nomes do tipo "$\dot{\epsilon}f(\epsilon)$" e suponha que esta atribuição seja feita de tal modo que ela obedeça a **LB V**.

2. Seja $\Pi(\xi)$ uma permutação não trivial§ de todos os objetos.

3. Agora considere ψ a atribuição de objetos a nomes do tipo "$\tilde{\eta}f(\eta)$" do seguinte modo: se ϕ atribui o objeto Δ ao nome "$\dot{\epsilon}\Phi(\epsilon)$", então ψ atribui o objeto $\Pi(\Delta)$ ao nome "$\tilde{\eta}\Phi(\eta)$".

4. Segue-se que tanto os nomes do tipo "$\dot{\epsilon}f(\epsilon)$" e "$\tilde{\eta}f(\eta)$" satisfazem a **LB V**, embora, por $\Pi(\xi)$ ser uma permutação não trivial, exista uma função $\Theta(\epsilon)$ tal que as referências de "$\dot{\epsilon}\Theta(\epsilon)$" e de "$\tilde{\eta}\Theta(\eta)$" não coincidem. Em outras palavras, é sempre possível estipular que ambas expressões "$(\dot{\epsilon}f(\epsilon) = \dot{\epsilon}g(\epsilon))$" e "$(\tilde{\eta}f(\eta) = \tilde{\eta}g(\eta))$" de-

---

*Dummett M. *FPM*, p. 211.

†Embora o argumento seja válido, em todo caso, se considerarmos a função fregueana $X(\epsilon)$ uma permutação, já que toda permutação é uma função injetora. Para mais detalhes, Cf. Heck, R. G. 'Grundgesetze der Arithmetik I Section 10'. *Philosophia Mathematica* 7. 1999, p. 270.

‡Schirn, M. *Percursos de valores e indeterminação da referência.* Princípios (UFRN, Natal). v. 8; n. 9. pp 36-48.

§Uma permutação é uma bijeção de um domínio nele próprio. Uma permutação $\Pi(\xi)$ é chamada de não trivial se ela não é a permutação identidade $\Pi(\xi) = \xi$.

notem o mesmo que "$(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$", sem que a identidade entre $\dot{\epsilon}f(\epsilon)$ e $\tilde{\eta}f(\eta)$ possa ser derivada destas estipulações.

5. Conclusão: a **LB V** não é suficiente para fixar a referência de nomes do tipo "$\dot{\epsilon}f(\epsilon)$".

Uma vez que o argumento é válido, não é difícil mostrar que ele pode ser aplicado *mutatis mutandis* para o caso de **HP**:

1. Suponha que ϕ seja uma atribuição de objetos a nomes do tipo "$(Nx)F(x)$" e suponha que esta atribuição é feita de tal modo que ela obedeça **HP**.

2. Seja $\Pi(\xi)$ a seguinte permutação não trivial:

$$\Pi(\xi) = \begin{cases} \text{Júlio César, se } \xi = 0, \\ \xi\text{, caso contrário.} \end{cases}$$

3. Agora considere ψ a atribuição de objetos a nomes do tipo "$(\tilde{N}x)F(x)$" do seguinte modo: se ϕ atribui o objeto Δ ao nome "$(Nx)\Phi(x)$", então ψ atribui o objeto $\Pi(\Delta)$ ao nome "$(\tilde{N}x)\Phi(x)$".

4. Segue-se que tanto os nomes do tipo "$(Nx)F(x)$" e do tipo "$(\tilde{N}x)F(x)$" satisfazem **HP**, embora a referência de nomes do tipo "$(\tilde{N}x)F(x)$" inclua o imperador das Gálias, e não somente números, como os defensores de **HP** argumentam.

Este argumento pode ser repetido para qualquer tentativa de definição contextual. Ele mostra que qualquer critério utilizado para definir contextualmente um tipo de objeto pode ser obedecido por um conjunto de objetos que não são necessariamente do tipo desejado*.

*Pode-se perguntar se este argumento também não poderia ser aplicado para a lei de Leibniz† para a identidade. Ora, se esta lei diz que "$a = b$" denota o mesmo que "$\overset{\phi}{\smile}\, (\phi(a) \leftrightarrow \phi(b))$", por que não poderíamos aplicar o mesmo argumento com o intuito de demonstrar que ela não é suficiente para fixar a referência de qualquer nome? Dois motivos são suficientes para afastar esta possibilidade. Em primeiro lugar, o primeiro passo do argumento acima não pode ser feito sem que eu já saiba qual a

Evidentemente, a solução de Frege para o impasse no caso de **HP**, fornecida nos *Gl*, não pode ser repetida, já que aqui se trata de fixar a própria referência de nomes de percursos de valores. A proposta de Frege para solucionar o problema é indicada pelo autor na sequência no §10:

> Como esta indeterminação será superada? Por meio da determinação, para cada função que é introduzida, de qual é seu valor para percursos de valores como argumentos, assim como para todos outros argumentos*.

Mas por qual razão este procedimento resolveria a indeterminação dos nomes de percursos de valores? À primeira vista, poder-se-ia pensar que, por meio da determinação do valor de cada função para qualquer argumento, seria possível aplicar a lei de Leibniz e, com isso, verificar se dois objetos quaisquer são idênticos, mesmo que eles não nos sejam dados sob uma mesma roupagem†. Porém, essa argumentação nos parece insustentável, já que a própria "função identidade" será uma das funções cujos valores para percursos de valores e valores de verdade como argumentos deverão ser determinados. Deste modo, fica claro que a identidade não pode ser explicada por uma totalidade de funções que abarca ela própria como um membro desta totalidade. Acreditamos que Dummett‡ possui uma solução satisfatória para esta questão. Segundo Dummett, Frege

---

referência dos nomes a e b. Afinal, dada uma atribuição de objetos a nomes de objetos, em particular a "a" e "b", eu só sei que esta atribuição respeita a lei de Leibniz se eu já conheço a referência de "a" e "b". Em segundo lugar, a lei de Leibniz, segundo Frege, não pode ser vista como uma definição, já que toda definição é uma identidade. Destarte não se pode definir a identidade ela própria sem que haja, neste procedimento, um círculo vicioso. Cf. *The Frege Reader.* op. cit., p. 226: "Como toda definição é uma equação (*Gleichung*), a própria identidade (*Gleichheit*) não pode ser definida. A explicação de Leibniz poderia ser chamada de um princípio que elucida a natureza da relação de identidade, e como tal ela é de fundamental importância" (tradução nossa).

* *Gg I*, §10.

† Cf. Ruffino, M. 'Logical Objects in Frege's Grundgesetze, section 10'. In: Reck, E.H. (ed.). *From Frege to Wittgenstein.* New York: Oxford. 2002, p. 129: "According to Leibniz's principle, two objects are identical if and only if every function has the same value for both as arguments. But this requires that, if the identity of any two objects is determined in respect to each other, the values assumed by any function for these two objects as arguments are determined as well. (If the function has an undetermined value for some object, e.g., for a value-range, then there may be no answer as to whether this object is identical with another one, e.g., a truth-value.) Consequently, the reference of a value-range term is distinguishable from the reference of another name only if some first-order function assumes different values for both objects. This requires, at least in Frege's system, that for every first-order function, its values must be determined for value-ranges and for truth-values as arguments".

‡ Dummett M. *FPM*, p. 212.

assume algo como um *princípio do contexto generalizado*, que pode ser expresso do seguinte modo: “Para um termo da linguagem formal dos *Gg* possuir uma referência, é suficiente que possamos determinar a referência de cada função, ao tomar este termo como um de seus argumentos”[*].

Na sequência, Frege argumenta que as funções já introduzidas nos *Gg* podem ser todas reduzidas à função $\xi = \eta$. Com efeito, a função $—\,\xi$ pode ser reduzida à função $\xi = (\xi = \xi)$, e a função $-\!\!\!\top\!\!\!-\,\xi$, por sua vez, não precisa ser considerada, já que ela sempre recebe um valor de verdade como argumento (já que ela é sempre antecedida pela função $—\,\xi$). Portanto, resta decidir, para a função $\xi = \eta$, os seus valores para todos os argumentos possíveis. Como vimos anteriormente, não é possível decidir, apenas com a **LB V**, o valor de verdade de identidades entre a referência de termos designados por “$\grave{\epsilon}\Phi(\epsilon)$” e termos que não aparecem nesta forma. Na sequência do §10, Frege utiliza o mesmo argumento construído acima para mostrar que a identidade entre, de um lado, o Verdadeiro e o Falso, e, de outro, percursos de valores é uma questão de estipulação *arbitrária*. De fato, já que poderíamos reconstruir o argumento da permutação do seguinte modo:

1. Suponha que ϕ seja uma atribuição de objetos (com exceção do Verdadeiro e do Falso) a nomes do tipo tipo “$\tilde{\eta}f(\eta)$” e suponha que esta atribuição é feita de tal modo que ela obedeça a **LB V**.

2. Seja $\Pi(\xi)$ a seguinte permutação não trivial:

[*]Com efeito, no §29 do primeiro volume dos *Gg*, Frege afirma: “Ein Eigenname hat eine Bedeutung, wenn der Eigenname immer eine Bedeutung hat, der dadurch entsteht, dass jener die Argumentstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Function erster Stufe mit einem Argumente ausfüllt, und wenn der Name einer Function erster Stufe mit einem Argumente immer eine Bedeutung hat, der dadurch entsteht, dass der zu prüfende Eigenname die ξ-Argumentstellen eines bedeutungsvollen Namens einer Function erster Stufe mit zwei Argumenten ausfüllt, und wenn dasselbe auch für die ζ-Argumentstellen gilt”.

$$\Pi(\xi) = \begin{cases} \text{Verdadeiro, se } \xi = \tilde{\eta}\Lambda(\eta), \\ \tilde{\eta}\Lambda(\eta), \text{ se } \xi = \text{Verdadeiro}, \\ \text{Falso, se } \xi = \tilde{\eta}M(\eta), \\ \tilde{\eta}M(\eta), \text{ se } \xi = \text{Falso}. \end{cases}$$

3. Agora considere a ψ atribuição de objetos a nomes do tipo "$X(\tilde{\eta}f(\eta))$" do seguinte modo: se ϕ atribui o objeto Δ ao nome "$\tilde{\eta}\Phi(\eta)$", então ψ atribui o objeto $\Pi(\Delta)$ ao nome "$X(\tilde{\eta}\Phi(\eta))$".

4. Neste caso, ψ também satisfaria a **LB V** e, portanto, a expressão "$X(\tilde{\eta}\Phi(\eta)) = X(\tilde{\alpha}\Psi(\alpha))$" também denotaria o mesmo que "$(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}))$". No entanto, $X(\tilde{\eta}\Lambda(\eta))$ seria o Verdadeiro e $X(\tilde{\eta}M(\eta))$ seria o Falso.

Frege, então, conclui que "é sempre possível estipular que um percurso de valores *arbitrário* seja o Verdadeiro e outro o Falso"[*]. É importante reconhecer o caráter *arbitrário*[†] desta estipulação, ou seja, não há nenhuma razão, dentro do sistema fregueano, que fundamenta a escolha de um percurso de valores para ser o Verdadeiro e outro para ser o Falso. As escolhas de Frege são as respectivas classes unitárias com relação ao Verdadeiro e ao Falso, isto é, o Verdadeiro é identificado com a extensão do conceito sob o qual somente ele cai e o mesmo ocorre com o Falso.

Esta arbitrariedade de identificar (ou não) o Verdadeiro e o Falso com suas respectivas classes unitárias parece, à primeira vista, extremamente perniciosa para um realista como Frege. Afinal, se o Verdadeiro e os percursos de valores são objetos, seria impossível optar arbitrariamente por essa "fusão ontológica" do Verdadeiro com sua

[*] *Gg I*, §10 (ênfase nossa).

[†] Marco Ruffino, no artigo "Logical Objects in Frege's Grundgesetze, section 10", propõe que não consideremos o uso do termo *Festsetzung*, por Frege, como sinônimo de uma estipulação *arbitrária*. Segundo Ruffino: "Frege's stipulations in *Gg*§10 are not just artifacts of technical convenience, nor are they arbitrary posits, nor are they self-evident. Rather, their justification lies in the technical advantages that they guarantee. This is, for Frege, the proper indication that they are true, or at least good approximations to the truth". Porém, Ruffino parece se esquecer de que, no momento da estipulação da identidade entre percursos de valores e valores de verdade, é menos a palavra *Festsetzung* e mais o adjetivo *beliebiger* (dado aos percursos de valores a serem identificados com os valores de verdade) que fundamenta o caráter *arbitrário* da estipulação.

classe unitária. Para tentar fornecer alguma justificativa para este procedimento, gostaríamos de reforçar a ideia de que *a referência dos nomes de percursos de valores não é fixada pela* ***LB V*** *e que, por isso, qualquer atribuição de objetos a estes nomes é, em princípio, permitida* (embora, como argumentaremos em seguida, esta atribuição deve obedecer certos princípios fregueanos). Para isto, utilizaremos um exemplo da aritmética: suponha que introduzamos dois objetos a e b e, em seguida, façamos a seguinte estipulação: "$a + b$" deve denotar o mesmo que "10". Com esta estipulação, é claro que a referência dos nomes "a" e "b" não foi fixada, pois há diversas atribuições de números a estes nomes que satisfazem nossa estipulação. Para fixar a referência de tais nomes, podemos *estipular* que $a = 1$, e então a referência de "b" também é, com isso, determinada. Esta última estipulação, no entanto, não precisa ser vista como uma "fusão ontológica" de a com o número 1, mas tão somente como o reconhecimento de que a referência do nome "a" ainda não havia sido fixada. Além disso, se a nossa estipulação for $a = 5$, temos que $a = b$, e o que parecia ser a introdução de *dois* objetos se torna, após a estipulação, a introdução de apenas *um* objeto, a saber, o número cinco. Assim, o procedimento de Frege pode ser entendido como a introdução de nomes para objetos que, em princípio, poderiam ser diferentes, mas que, por meio de uma estipulação arbitrária (a fim de remover a indeterminação da referência de tais nomes), se revelaram como idênticos.

Embora a estipulação da identidade do Verdadeiro com qualquer outro percurso de valores seja, em princípio permitida, não devemos, sob pena de introduzir elementos estranhos à lógica, identificar o Verdadeiro com um percurso de valores que seja expresso por meio de funções não lógicas, como, por exemplo, $f(\xi) =$'ξ não é um cachimbo'*. Frege argumenta de modo semelhante nos *Gl*, para o caso da unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$. Frege diz que é arbitrário qual objeto escolhemos para denotar o i, o qual poderia ser o intervalo de tempo de um segundo, ou uma certa quantidade de eletricidade, etc.,

*A fixação da referência dos percursos de valores, pelo menos para o sistema formal dos *Gg*, deveria ser feita, para manter a aprioricidade da lógica e da aritmética, sem a consideração de objetos físicos ou geométricos e, portanto, no momento da identificação do Verdadeiro com o percurso de valores de uma função, conceitos físicos e geométricos não estariam e nem poderiam estar 'disponíveis' para esta identificação.

e o leitor não deveria se surpreender com esta liberdade de escolha da referência da unidade imaginária : "Que se possa aparentemente criar de modo tão arbitrário muitas raízes quadradas de -1, torna-se menos surpreendente se lembramos que o significado de raiz quadrada não está ainda estipulado definitivamente antes destas estipulações, mas somente é determinado por meio delas"*. No entanto, Frege objeta, com relação à tentativa de estipular o significado de $i = \sqrt{-1}$ levando-se em consideração objetos físicos ou geométricos, que:

> Com [esta tentativa] introduzimos na aritmética algo que lhe é completamente estranho, o tempo. Os segundos não mantém absolutamente nenhuma relação intrínseca com os números reais. As proposições demonstradas por meio dos números complexos seriam juízos *a posteriori*, ou ao menos sintéticos, se não houvesse nenhuma outra espécie de demonstração, ou se não fosse possível encontrar para i, nenhum outro sentido. De qualquer maneira, devemos começar pela tentativa de mostrar que todas as proposições da aritmética são analíticas.†

O mesmo pode ser repetido para o caso dos percursos de valores. Em primeiro lugar, que se possa determinar de modo arbitrário os percursos de valores, torna-se menos surpreendente se consideramos que o significado deles ainda não está estipulado definitivamente antes destas estipulações, sendo somente determinado por meio delas‡. Em segundo lugar, como os objetos da aritmética somente poderão ser apreendidos por meio de percursos de valores, devemos ter o cuidado de não estipular que estes últimos devam significar objetos físicos ou geométricos, já que isto colocaria por água abaixo o projeto fregueano de fundamentação *a priori* da aritmética.

Uma vez resolvido, pelo menos em parte, o problema da indeterminação dos percursos de valores, a pergunta que surge naturalmente é: qual é o motivo, então, de não estipular certas identidades já no caso de **HP**, fixando, deste modo, a referência dos números e evitando a problemática introdução de percursos de valores? Acreditamos que o caso dos percursos de valores é central: por meio da fixação da referência destes

---

* *Gl*, §100 (nota de rodapé)

† *Gl*, §103.

‡ Cf. Ricketts, T. 'Truth Values ahd Course-of-Values in Frege's *Grundgesetze*'. In: Beaney, M. e Reck, E. H (eds). *Gottlob Frege: Critical Assessment of Leading Philosophers.* New York: Routledge. 2005, p. 233: "It needs to be emphasized that in making these identifications, Frege is not arbitrarily identifying the True with some already identified object".

nomes de objetos sempre seria possível recorrer ao procedimento feito por Frege nos *Gl*, o que não aconteceria caso estipulássemos a referência dos numerais de modo *ad hoc* no caso de **HP**. Embora a introdução de objetos por meio de classes de equivalência seja na matemática moderna um "velho truque", ela era vista por Frege como uma grande novidade técnica, a que "os lógicos ainda não prestaram suficiente atenção" (*Gl*, §63). Além disso, o estabelecimento preciso das condições de identidade entre percursos de valores poderia ser utilizado para determinar a identidade de classes de equivalência de distintas relações de equivalência, aumentando o nosso conhecimento a respeito destas relações.

Como já dissemos na Introdução deste trabalho, as estipulações de Frege, apesar de serem suficientes no âmbito da linguagem formal dos *Gg*, são evidentemente insuficientes no momento da *aplicação* da aritmética. Afinal, os percursos de valores devem se identificar ou se diferenciar não apenas de objetos como o Verdadeiro e o Falso, mas também de objetos como mesas, cadeiras, livros, eventos e planetas. Pode-se facilmente construir um conceito com tais e tais notas características, de modo que sob ele caiam eventos, planetas e também percursos de valores. Para determinar, por exemplo, a cardinalidade deste conceito, é preciso, é claro, ter em mãos critérios precisos de identidade entre estes objetos. Como a lei básica V não cumpre este papel, seriam necessárias, para esta aplicação, novas estipulações.

Marco Ruffino, no artigo *Logical Objects in Frege's Grundgesetze, section 10* procura defender que o domínio dos quantificadores nos *Gg* abarca apenas percursos de valores e valores de verdade e que, por essa razão, as estipulações de Frege são suficientes para determinar, definitivamente, a referência de tais objetos. Ruffino argumenta que Frege considera apenas estes objetos na "prova de referencialidade" dos termos de seu sistema, fornecida no §31 do primeiro volume dos *Gg*. De fato, Frege fixa apenas a referência com relação aos objetos já introduzidos nos *Gg*, mas é razoável pressupor que Frege se preocupa apenas com objetos e funções que serão efetivamente utilizados nas suas provas*. A introdução de novos objetos e funções deveria, portanto, obedecer re-

*Vale lembrar que Frege não mostra que nomes de funções de terceiro nível possuem referência, gras para que todos os nomes de objetos e funções do sistema continuem possuindo uma referência. Se a nossa interpretação de como Frege considera a *aplicação* da aritmética está correta, é impossível argumentar que o domínio dos quantificadores nos *Gg* seja limitado apenas aos objetos considerados neste sistema. Afinal, a aplicação da aritmética por meio da instanciação de variáveis pressupõe evidentemente que o domínio dos quantificadores seja universal, isto é, que os quantificadores percorram o domínio de todos os objetos. Ao limitar o domínio dos quantificadores, se perde a aplicabilidade inerente à lógica e à matemática em geral. Portanto, para não jogar fora o bebê junto com a água do banho, devemos admitir que o domínio de quantificação é irrestrito e que novas estipulações devem ser feitas no momento da aplicação da aritmética (com a introdução de novos objetos e novas funções). Frege parece estar ciente disso, ao mencionar que:

> (...) determinamos os percursos de valores *na medida em que é até aqui possível.* Na medida em que houver uma questão ulterior de introduzir uma função que não é completamente redutível a funções já conhecidas, podemos estipular quais valores elas devem ter para percursos de valores como argumentos; e isto pode ser considerado como uma determinação ulterior tanto dos percursos de valores quanto daquela função.*

Portanto, a questão que nos ocupará a partir deste ponto é saber como o procedimento que Frege executou nos *Gg* pode ser repetido para que possamos introduzir outros tipos de objetos no sistema no momento da aplicação da aritmética. Esse procedimento é fundamental para determinar a cardinalidade de conceitos sob os quais caem não apenas percursos de valores, mas também outros objetos. No entanto, em uma polêmica nota de rodapé do §10, Frege diz *prima facie* que tal procedimento não pode ser generalizado. Devido à importância dada em geral pelos comentadores a esta nota de rodapé, iremos reproduzi-la integralmente:

> Uma sugestão óbvia para generalizar nossa estipulação é tomar (*auffassen*) cada objeto como um percurso de valores, a saber, como a extensão de um conceito sob o qual apenas ele cai. Um conceito sob o qual apenas o objeto Δ cai é $\Delta = \xi$. Suponha que tentemos a estipulação: seja $\grave{\epsilon}(\Delta = \epsilon)$ o mesmo que Δ. Tal estipulação é sempre possível para cada objeto que nos é dado independentemente de percursos de valores, pelos mesmos motivos

argumentando que elas podem ser deixadas de lado, pois não seriam utilizadas nas provas (*Gg I*, §31).

** Gg I*, §10. (grifo nosso)

que observamos no caso dos valores de verdade. Porém, antes que esta estipulação possa se tornar geral, deve-se perguntar se ela não contradiz nossa notação para reconhecer percursos de valores, se nós tomarmos por Δ um objeto que já nos é dado como um percurso de valores. Em particular, é inaceitável permitir que ela valha apenas para tais objetos que não nos são dados como percursos de valores, pois o modo como um objeto é dado não deve ser visto como uma propriedade imutável do mesmo, já que o mesmo objeto pode ser dado de modos diferentes. Assim, se substituirmos "Δ" por "$\dot{\alpha}\Phi(\alpha)$", obteremos:

$$\dot{\epsilon}(\dot{\alpha}\Phi(\alpha) = \epsilon) = \dot{\alpha}\Phi(\alpha)$$

e isto denotaria o mesmo que

$$\text{“}\smile^{\mathfrak{a}}\ (\dot{\alpha}\Phi(\alpha) = \mathfrak{a}) = \Phi(\mathfrak{a})\text{”},$$

o que porém denota o verdadeiro apenas se $\Phi(\xi)$ é um conceito sob o qual cai apenas um objeto, a saber, $\dot{\alpha}\Phi(\alpha)$. Já que isto não é necessário, nossa estipulação não pode permanecer intacta na sua generalidade.

A identidade "$\dot{\epsilon}(\Delta = \epsilon) = \Delta$", com a qual nós testamos esta estipulação, é um caso particular de "$\dot{\epsilon}\Omega(\epsilon, \Delta) = \Delta$", e pode-se perguntar como a função $\Omega(\xi, \zeta)$ deveria ser construída de modo que pudesse ser, de modo geral, determinado se Δ é o mesmo que $\dot{\epsilon}\Omega(\epsilon, \Delta)$. Então

$$\dot{\epsilon}\Omega(\epsilon, \dot{\alpha}\Phi(\alpha)) = \dot{\alpha}\Phi(\alpha)$$

é o Verdadeiro, consequentemente

$$\smile^{\mathfrak{a}}\ \Omega(\mathfrak{a}, \dot{\alpha}\Phi(\alpha)) = \Phi(\mathfrak{a})$$

também é o Verdadeiro, qualquer que seja a função $\Phi(\xi)$. Encontraremos uma função com esta propriedade posteriormente com a função $\xi \frown \zeta$; mas a definiremos com o auxílio de percursos de valores, de modo que não podemos utilizá-la aqui.*

Esta nota de rodapé tem gerado inúmeras críticas por parte dos comentadores, pelo fato de que ela parece tornar duvidosa a validade do próprio procedimento fregueano com relação à identidade de percursos de valores com valores de verdade. Afinal, o que o Verdadeiro e o Falso possuem de particular que permite este procedimento, e outros objetos dados independentemente de percursos de valores não possuem, de modo que o procedimento não possa ser generalizado? A dificuldade aqui é que Frege parece

* *Gg I*, §10.

defender duas visões aparentemente irreconciliáveis: em primeiro lugar, a de que o procedimento feito para o caso dos valores de verdade deve ser repetido sempre que se introduza funções que não são redutíveis às funções já conhecidas; em segundo lugar, a de que tal procedimento não pode ser generalizado para objetos que nos são dados independentemente de percursos de valores.

Pode-se argumentar que novas estipulações podem ser feitas caso introduzamos *funções* que não são redutíveis a funções conhecidas*, mas que não podemos repetir o procedimento ao introduzir *objetos* que nos são dados independentemente de percursos de valores. Mas se não repetimos o procedimento feito por Frege, como podemos superar o problema da indeterminação dos percursos de valores no momento da introdução de novos objetos?

Segundo o texto de Frege, o procedimento feito para o caso dos valores de verdade não pode ser generalizado, já que esta generalização entraria em conflito com a **LB V**. Com efeito, se transformarmos a estipulação feita para o caso do Verdadeiro e do Falso em um axioma geral do sistema (que seria expresso por $\vdash \Delta = \dot{\epsilon}(\Delta = \epsilon)$), alguns usos deste axioma, como os casos em que Δ denota a extensão de um conceito sob o qual caem mais de um objeto, não obedeceriam a estipulação inicial da **LB V**. Além disso, é intolerável que deixemos ela valer apenas para objetos que não nos são dados como percursos de valores, já que o modo como um objeto nos é dado não pode ser visto, segundo Frege, como uma propriedade essencial do mesmo.

A dramaticidade da situação é exposta por Wright do seguinte modo:

> Para assegurar que aplicações da generalização da estipulação de Frege não nos levam à falsidade, *já* temos que saber para quais coisas a estipulação deve ser aplicada, isto é, quais coisas são intuitivamente não extensões. Mas se sabemos isto, não *precisamos* da estipulação. E se não sabemos isto, não podemos restringir apropriadamente o *uso* da estipulação.†

É preciso recordar que a **LB V** não nos fornece o conceito de percurso de valores

*Com efeito, Frege introduz, no §11 do primeiro volume dos *Gg*, a função $\backslash\xi$, que não é redutível a funções já conhecidas. Assim, Frege é obrigado a estipular o valor desta função para percursos de valores como argumentos.

†*Frege's conception of numbers as objects.* op. cit. p. 113.

e que, portanto, não temos em mãos o valor do conceito $F(\xi)$ =‘ξ é um percurso de valores’ para qualquer argumento. Como vimos, a estipulação de Frege funciona para objetos que não são, e nem podem ser, dados como extensões de um conceito sob o qual caem mais de um objeto. Como saber se um objeto pode ou não nos ser dado como um percurso de valores? Wright argumenta que, se sabemos, não precisamos da estipulação. Se não sabemos, pode ser que, ao usar tal estipulação, ela entre em conflito com estipulações anteriores. No entanto, este raciocínio só seria válido se o significado dos percursos de valores já estivesse determinado anteriormente às estipulações, o que, como procuramos mostrar, não é o caso. Afinal, este raciocínio depende da seguinte pergunta: “Será que o objeto x é um percurso de valores?”, ou seja, depende de haver, antes de qualquer estipulação, um critério para decidir se um objeto x é um percurso de valores. Se houvesse este critério de antemão, então o argumento procederia: se sabemos tal critério, não precisamos da estipulação, pois o critério já nos dá a resposta; se não sabemos, então pode ser que o uso da estipulação entre, futuramente, em conflito com tal critério. Mas se não há este critério de antemão, então apenas nossas estipulações podem decidir o que é e o que não é um percurso de valores. Assim, para que possamos restringir de modo suficiente as novas estipulações, é suficiente que: *i*) estas estipulações não entrem em conflito com as anteriores e que *ii*) mantenhamos o caráter *a priori* da aritmética e da lógica. Para isto, devemos apenas responder à seguinte questão: quando um objeto nos é dado como um percurso de valores?

A resposta da questão acima parece trivial: um objeto nos é dado como um percurso de valores quando o nome deste objeto é da forma “$\grave{\epsilon}\phi(\epsilon)$”. Mas isto não é necessário, já que, por exemplo, os numerais não são desta forma e, no entanto, os números são, segundo a definição fregueana, percursos de valores. À primeira vista, parece haver apenas um outro caso a ser considerado (além do caso acima, em que o próprio signo denuncia, por assim dizer, a natureza do objeto significado): um objeto nos é dado como um percurso de valores quando o juízo para o reconhecimento de tal objeto pode ser fornecido por meio de uma relação de equivalência que não mencione estes objetos, como é o caso de **HP**. Se isto fosse o caso, poderíamos fornecer satisfatoriamente uma solução para a generalização do procedimento de Frege: ou existe uma relação de equivalência capaz de fornecer o juízo para o reconhecimento de um objeto A, e então A pode ser introduzido por meio do mesmo recurso que Frege recorreu no caso dos números; ou não existe tal relação, e então A nunca nos será dado como um percurso de valores, e pode-se estipular que A seja idêntico a um percurso de valores qualquer, por exemplo, sua classe unitária. Também seria possível estipular que A não seja idêntico a nenhum percurso de valores. O Verdadeiro e o Falso, é claro, não são classes de equivalência de nenhuma relação de equivalência, já que eles são objetos primitivos do sistema fregueano e não poderiam ser introduzidos por meio de uma definição.

No entanto, o que a nossa análise do problema Júlio César mostrou é que *qualquer objeto pode ser reconhecido por meio de qualquer relação de equivalência*, basta que eu escolha a função injetiva adequada para isto. Portanto, *em princípio*, qualquer objeto, em conjunto com outros percursos de valores, poderia obedecer satisfatoriamente a **LB V**. Deste modo, não temos também de antemão um critério para saber quando um objeto pode nos ser dado como um percurso de valores.

A única solução viável parece ser, então, fornecer alguns princípios fregueanos para que possamos restringir adequadamente as nossas estipulações. Em primeiro lugar, todo objeto lógico – com exceção dos valores de verdade, que são indefiníveis – deve ser introduzido como uma classe a partir de uma relação de equivalência. Em segundo lugar, nenhum objeto físico ou geométrico deve ser introduzido do mesmo modo, já que o "ser" destes objetos* não depende de modo algum destas relações. Estes objetos, portanto, nunca nos seriam dados como percursos de valores e é adequado estipular que eles não sejam idênticos a nenhum percurso de valor, a fim de assegurar que a aritmética repouse em fundamentos tão somente lógicos.

Mas em que sentido o "ser" de um percurso de valores depende da função da qual

*Procuramos evitar o uso da palavra "existência" (*Existenz*), já que Frege reserva esta palavra apenas para o quantificador existencial, embora Frege utilize a palavra "*Bestand*", que, por falta de opções, teremos que traduzir mais adiante por "o existir". Em um escrito publicado postumamente, Frege diz que "a extensão de um conceito simplesmente tem seu *ser* no conceito, não nos objetos que pertencem a ela". Frege, G. *Posthumous Writings.* Tradução de P. Long e R. White, Blackwell, Oxford. 1979, p. 183. (grifo e tradução nossos) ele é um percurso de valores? Primeiramente, é preciso lembrar, como já dissemos no segundo Capítulo desta dissertação, que extensões de conceitos aparecem como conceitos "objetificados", cuja finalidade repousa na utilização destes como objetos, propiciando a enumeração e a contagem de conceitos e relações em geral. Não é por acaso que Frege diz que "o que constitui o existir (*Bestand*) do conceito – ou de sua extensão – não são os objetos que caem sob ele, mas as suas características; estas são as qualidades que um objeto deve ter para cair sob o conceito"*. Assim, é possível permutar, na frase acima, conceito por extensão apenas porque a extensão é um objeto representante do conceito que, assim como este, depende das notas características do conceito para existir. Além disso, se estes objetos não estivessem vinculados essencialmente às funções respectivas, não haveria nenhuma aplicação destes objetos, e a aritmética não passaria de um jogo assim como o xadrez. A utilidade do recurso às extensões de conceitos é exatamente transformar propriedades de um conceito em propriedades de um objeto, e é por isso que o sistema de Frege não precisa de nenhum "axioma da redutibilidade" para trabalhar, no mesmo "nível lógico", por assim dizer, com números, números de números, números de números de números, e assim por diante.

É interessante observar que nem todo objeto lógico é um objeto, por assim dizer, puramente lógico. Direções de retas são objetos lógicos†, porém a relação de equivalência que constitui a identidade de tais objetos leva em consideração o paralelismo de retas, algo originalmente intuível e, portanto, não lógico. A fundamentação da aritmética em solo puramente lógico deve, assim, utilizar apenas relações de equivalência que não fazem uso de objetos físicos ou geométricos. Não é por consistir apenas de objetos lógicos que a aritmética é uma parte da lógica, mas por esses objetos lógicos serem definidos independentemente de quaisquer objetos físicos ou geométricos.

Talvez não seria inconveniente evocar, de acordo com o que Frege diz no §29 do primeiro volume dos *Gg*, que quando dizemos que um nome possui uma referência,

* *Gg II*, §150

† À primeira vista pode-se pensar que direções de retas são objetos geométricos. Todavia, segundo Frege, "tudo o que é geométrico deve ser originalmente intuível" (*Gl*, §64). Como direções de retas não são intuíveis, a única alternativa que temos é considerá-las como objetos lógicos.

isto significa apenas que é possível determinar a referência do nome de cada função ao substituir um lugar de argumento deste nome de função pelo nome em questão. Deste modo, antes da estipulação de Frege, nem mesmo os valores de verdade possuíam uma referência, já que não era possível determinar, por exemplo, o valor do nome de função "$\xi = \dot{\epsilon}(-\!\!\!-\, \epsilon)$" para o Verdadeiro como argumento. Consequentemente, a estipulação fregueana é essencial para os propósitos do autor e, como já mostramos, não depende de nenhum fato objetivo ou razão para ser executada, pois sua função é apenas fixar a referência de um nome, e não estabelecer uma verdade. Como procuramos argumentar neste trabalho, o significado dos percursos de valores só é determinado por meio de nossas estipulações e, portanto, eles não constituem uma ontologia pré-fabricada e nos dada de antemão. Se assim fosse, seria realmente estranho o fato de podermos escolher, mesmo que de modo restrito, um percurso de valores para ser o Verdadeiro e outro para ser o Falso. Com efeito, esta crítica é muito repetida por aqueles que veem na obra de Frege algum tipo de platonismo. Afinal, como afirmam Moore e Rein:

> Frege estipula que cada valor de verdade deve ser identificado com sua classe unitária. Mas com que direito ele faz isso? Para Frege, os valores de verdade e os percursos de valores habitam um reino platônico, cujas existência e estrutura são totalmente independentes de nossa capacidade de apreendê-los. Certamente, então, é uma questão de um fato objetivo se cada valor de verdade é ou não um percurso de valores e portanto não é algo que pode ser decidido por estipulação. Em suma, a estipulação de Frege, que identifica os valores de verdade com suas classes unitárias parece estar em direto conflito com seu platonismo confesso.*

É interessante observar a semelhança deste argumento com o argumento de Benacerraf exposto na Introdução deste trabalho. Segundo Benacerraf, se números são conjuntos de conjuntos, a concepção correta de número cardinal deve ser aquela que seleciona qual conjunto de conjuntos é, *de fato*, os números. Em outras palavras, esta decisão dependeria de um fato objetivo para ser justificada. A existência de diversas opções para a identificação dos números cardinais, sem que se pudesse fornecer uma justificativa para sustentar uma destas opções em detrimento das outras é visto por

*Moore, A. W.; Rein, A. '*Grundgesetze*, Section 10', p. 383 (tradução nossa). In: Haaparanta, L. and Hintikka, J. *Frege Synthesized*. Dordrecht: Reidel Publishing Co. 1986, pp. 375-384.

Benacerraf como um golpe letal em teorias que identificam números com um conjunto de conjuntos particular. No entanto, este argumento é realmente conclusivo?

Antes de responder à pergunta acima, é importante ressaltar que a concepção fregueana não pode ser identificada com a visão extensionalista que Benacerraf apresenta. Um percurso de valores está sempre associado a um conceito, e, portanto, está longe de se assemelhar a um conjunto de um ponto de vista extensional. No entanto, mesmo que a concepção fregueana fosse extensional, Frege não vê problemas em haver várias opções de percursos de valores para serem identificados com os valores de verdade. Na próxima Seção, então, procuraremos fornecer razões para compreender a posição de Frege. Tentaremos, destarte, conciliar duas teses aparentemente irreconciliáveis: a de que a lógica e a matemática é feita de descobertas e a de que possuímos um certo grau de liberdade para fixar a referência dos objetos lógicos e matemáticos.

CAPÍTULO 4

O matemático e o geógrafo

A luta contra a ideia segundo a qual a matemática teria algum poder criador é uma constante na obra de Frege*. Nos *Gl*, Frege critica um formalismo que pretende criar objetos matemáticos apenas indicando certas propriedades que estes objetos devem possuir. A "raiz quadrada de -1" seria, na visão formalista, apenas mais um objeto que tem a propriedade de resultar em -1 quando multiplicada por si própria. Frege move, contra os formalistas, sua terceira prescrição metodológica, a saber, a de que é preciso separar claramente conceito e objeto: "nada nos impede de empregar o conceito 'raiz quadrada de -1'; mas não temos por isso o direito de fazê-lo proceder de artigo definido e encarar a expressão 'a raiz quadrada de -1' como dotada de sentido" (*Gl*, §97).

A ideia de criação é contraposta à ideia de descoberta, no sentido em que, ao descobrir algo, não há nenhuma gênese do que foi descoberto. Toda criação de um objeto envolve gênese e por isso não se poderia dizer nada de positivo antes desta suposta

*Frege identifica ironicamente, em um rascunho para a resenha de um livro de Cantor†, estes poderes que os matemáticos pensam possuir (definir, refletir, abstrair) com deuses indianos (Brahma, Vishnu, Shiva).

gênese*. Poderíamos dizer, por exemplo, que a Torre Eiffel (evidentemente, uma criação humana) não havia sido construída no século XVII, mas jamais poderíamos dizer que a Torre Eiffel tinha mais de 300 metros de altura antes do século XVII. Isto não é o caso das leis numéricas, já que parece difícil dizer que $7 + 5 = 12$ só é verdadeiro depois de uma suposta gênese do número. Frege defende que as leis numéricas são universais, eternas, aplicáveis a todo e qualquer objeto dado à razão, e que possuem validade objetiva independente de qualquer fato contingente.

Se o termo "criação" parece inequívoco, o mesmo não acontece com o termo "descoberta", que é utilizado em diversos contextos com diversos propósitos. Para indicar esta diversidade de propósitos, utilizaremos dois aspectos distintos de duas ciências: a geografia e a astronomia. Com isso não queremos dizer que tais ciências se fundamentam apenas no aspecto que mencionaremos, mas que cada aspecto é melhor ilustrado, ao menos nos exemplos que o próprio Frege nos fornece, em uma das duas ciências. O astrônomo diz ter descoberto que a estrela da manhã e a estrela da tarde são o mesmo astro, enquanto que o geógrafo diz ter descoberto uma certa região, um certo rio, etc., destacando-o do todo, definindo-o, por assim dizer. No entanto, a descoberta do astrônomo envolve apenas um fato objetivo: ao nomear um astro como "a estrela da manhã", o astrônomo já dispõe de um critério para decidir se este astro é idêntico a qualquer outro astro, mesmo que ele, devido à falta de observações astronômicas, não seja sempre capaz de aplicá-lo e mesmo que este astro não apareça de manhã (isto é, mesmo que ele não nos seja dado do mesmo modo que a estrela da manhã). Já no caso do geógrafo, esta descoberta envolve uma delimitação precisa e, em certa medida, arbitrária, de qual região do globo terrestre ele diz ter descoberto. Esta delimitação não é uma descoberta no sentido da descoberta do astrônomo: o geógrafo não preciso apelar para nenhum fato, à exceção da existência objetiva da região†, para legitimar a deli-

*Cf. *Gl*, §26: "Se o tornar-se conhecido fosse gênese não poderíamos dizer nada de positivo no que concerne ao período anterior a esta suposta gênese".

†No caso de objetos puramente lógicos, como é o caso dos números, é suficiente o estabelecimento do sentido de um juízo de reconhecimento, sendo que este juízo deve poder ser formado apenas com o auxílio de relações lógicas. No caso do número, tal juízo é definido por Frege por meio da relação puramente lógica de *equinumericidade*, que é fundalmentalmente a possibilidade de correlacionar biunivocamente objetos que caem sob dois conceitos.

mitação de uma certa região e sua posterior nomeação. Seria plenamente concebível que um geógrafo delimitasse uma certa área de um certo conjunto de águas, denominando-a de “Mar do Norte”, e que outro geógrafo utilizasse o mesmo nome para delimitar uma área um tanto quanto diferente. No entanto, em algum momento, eles deveriam chegar a um acordo sobre qual recorte utilizar, a fim de poderem trabalhar cientificamente com tal objeto (calcular sua área, sua profundidade máxima, etc.).

Deste modo, o fato de depender do arbítrio dos geógrafos qual parte da totalidade das águas eles decidem chamar de “Mar do Norte” não implica que eles não possam falar do mesmo objeto. Evidentemente, caso eles não cheguem a um acordo sobre qual delimitação utilizar, cada um deveria utilizar um índice individual cada vez que mencionarem o “Mar do Norte”, mas isto não significa que eles não poderiam apreender a delimitação que o outro fez, entendê-la, e fazer cálculos com ela. Esta delimitação, embora arbitrária, não impede a comunicabilidade de pensamentos expressos que fazem uso da região delimitada. Pelo contrário: é apenas esta delimitação, isto é, a fixação precisa da referência de um nome, que torna possível um juízo científico e objetivo a respeito do nomeado. O caso é diferente com a nomeação de uma ideia privada: eu não posso colocar, por exemplo, minha dor lado a lado com a sua dor, a fim de compará-las para verificar se estamos falando da mesma sensação. A concordância, digamos, nas expressões faciais, comportamentos corporais e nos juízos a respeito (p. ex., a de que a dor é algo indesejável, etc.) não seriam indícios seguros. Ainda assim, parafraseando o que Frege diz no §26 dos *Gl*, poderíamos distinguir um sentido objetivo dos enunciados sobre dores. Apenas não se pode tomar, pelo significado da palavra “dor”, o que há de particular em cada sensação.

A apreensão comum de um pensamento só é possível quando o significado dos nomes que compõem a sentença que expressa este pensamento são definidos do mesmo modo para cada ser que apreende este pensamento. As delimitações precisas do significado dos nomes não existem já *realiter* nas próprias coisas, e em um certo sentido os objetos parecem ser “criados”por estas delimitações, e isto é verdadeiro, desde que esta criação não se confunda com a criação de uma obra de arte, ou a construção da Torre

Eiffel. Esta criação não produz águas, nem navios, nem correntezas, ela apenas estipula a referência de um nome como o “Mar do Norte”, que carece de uma delimitação precisa “natural”, por assim dizer.

Ora, que estas delimitações sejam artificiais e produtos da razão parece implicar que o cientista, de certo modo, constitui o seu objeto de estudo, quando, na verdade, ela apenas descobre o que há e nomeia-o. Não obstante, este nomear muitas vezes não é apenas fornecer um signo arbitrário a um objeto, mas também delimitar precisamente o que se entende por este nome, já que fronteiras precisas e bem delimitadas não são dadas a nós de antemão. Se assim fosse, poderíamos determinar, dado algo no mundo, um maço de cartas, por exemplo, o número de objetos contidos neste maço. Isto é impossível, já que toda determinação numérica depende não apenas de algo no mundo, mas também de um conceito que, em geral, determina o que contará como objeto, como unidade. Segundo Frege:

> Se dou a alguém uma pedra e digo “determine seu peso”, dei-lhe assim todo o objeto de uma investigação. No entanto, se dou-lhe nas mãos um maço de cartas de jogar e digo “determine seu número”, ele não saberá se desejo conhecer o número de cartas, de jogos completos ou, digamos, de unidades de valor no jogo de *skat*. Dando-lhe o maço nas mãos, nem por isso dei-lhe de modo completo, o objeto de sua investigação; devo acrescentar uma palavra: carta, jogo, unidade de valor. (...) não posso dizer que a um maço de cartas de jogar em si mesmo pertença o número 1 ou 100 ou qualquer outro, mas quando muito posso dizê-lo com respeito à nossa maneira arbitrária de apreendê-lo, e mesmo neste caso não poderíamos atribuir-lhe simplesmente o número como predicado. O que desejamos chamar de jogo completo é claramente uma estipulação arbitrária, e o maço de cartas nada sabe a respeito. Examinando-o, porém, à luz desta estipulação talvez descubramos ser possível chamá-lo de dois jogos completos. Alguém que não soubesse o que chamamos de jogo completo provavelmente descobriria no maço não precisamente o número dois, mas outro qualquer.*

Como diz Frege, a constatação de que a aplicação do número depende de uma “maneira de denominar” (*Gl*, 46), de uma “maneira de apreender” (citação acima), leva-nos facilmente a encarar o número como algo subjetivo. Assim diz, por exemplo, Berkeley:

---

* *Gl*, §22.

> O número é total criação do espírito, e, ainda quando outras qualidades pudessem existir sem ele, basta considerar que a mesma coisa difere quanto ao número conforme o ponto de vista do espírito; assim a mesma extensão pode exprimir-se por um, três, ou trinta e seis, conforme o ponto de vista do espírito; assim a mesma extensão pode exprimir-se por um, três, ou trinta e seis, conforme referida à jarda, ao pé ou à polegada. "Número"é tão sensivelmente relativo, e dependente do entendimento humano, que espanta possa alguém pensar na sua existência absoluta, fora do espírito. Dizemos "um livro", "uma página", "uma linha", e todos são unidades embora contenham várias outras. E em cada exemplo, é evidente, a unidade refere-se a uma combinação particular de ideias arbitrariamente jungidas pelo espírito. *

Para defender a cidadania objetiva das asserções numéricas, Frege nota que também na geografia o que desejamos chamar de "Mar do Norte" é arbitrário, como procuramos argumentar. Para que a asserção numérica seja objetiva, basta que o conceito envolvido seja objetivo, basta que a delimitação que o conceito traça possa ser apreendida por qualquer pessoa, do mesmo modo que é suficiente que dois geógrafos concordem em tratar o mesmo conjunto de águas pelo nome "Mar do Norte" para poderem falar do mesmo objeto, da mesma totalidade de águas. Frege repete a analogia da matemática com a geografia diversas vezes em seus escritos, ora criticando o psicologismo, ora o criacionismo na matemática (que são duas faces da mesma moeda: se a matemática é criada, ela é obra de processos internos da mente de um matemático). Primeiramente, nos *Gl*, Frege afirma:

> (...) o número não é mais um objeto da psicologia, ou um resultado de processos psíquicos que, digamos, o Mar do Norte. A objetividade do Mar do Norte não é prejudicada pelo fato de depender de nosso arbítrio qual parte da totalidade da água que cobre a Terra que pretendemos delimitar e marcar com o nome "Mar do Norte". Esta não é uma razão para pretender investigar este mar por vias psicológicas. Assim, também o número é algo objetivo. Quando dizemos "O Mar do Norte tem 10 000 milhas quadradas" não nos referimos, por "Mar do Norte" ou por "10 000", a um estado ou processo interno, mas assertamos algo totalmente objetivo, independente de nossas representações ou coisa semelhante. Se desejássemos, em outra ocasião, traçar de maneira um tanto diferente os limites do Mar do Norte, ou entender por "10 000" algo diferente, não se tornaria falso o mesmo conteúdo que antes era verdadeiro, sem que de modo algum fosse suprimida a verdade deste.†

---

*Berkeley, G. *Tratado sobre o conhecimento humano*, §12. Coleção Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1984. p. 15.

†*Gl*, §26.

A metáfora é repetida na Introdução dos *Gg*:

> É importante tornar claro neste ponto o que é uma definição e o que podemos obter por meio dela. Parece que se credita a ela frequentemente um poder criativo; mas tudo o que se sucede é que algo é delimitado, colocado em alto relevo e designado por meio de um nome. Assim como o geógrafo não cria um mar quando ele traça limites para ele e diz: a parte da superfície do oceano delimitada por estas linhas eu desejo chamar de Mar Amarelo, também o matemático não pode realmente criar nada com sua definição. Também não se pode por meio de uma mera definição conjurar magicamente em uma coisa uma propriedade que ela de fato não possui, exceto pelo fato de que agora ela é chamada pelo nome com a qual ela foi nomeada. Mas que uma figura oval produzida no papel com tinta possa, por meio de uma definição, adquirir a propriedade de resultar em um quando adicionada a um, eu posso apenas considerar como uma superstição científica. Poder-se-ia igualmente fazer, por meio de uma mera definição, com que um aluno preguiçoso se tornasse estudioso.*

Deste modo, Frege defende que nenhuma definição pode fazer com que o matemático crie magicamente um objeto ou conjure propriedades em um objeto. Estas propriedades podem ser, é claro, notas características de um conceito definido – e de sua extensão –, mas nunca propriedades do conceito (nem de sua extensão). O conceito quadrado, por exemplo, não é um retângulo, embora uma das notas características deste conceito seja a retangularidade. Além disso, o fato de depender de uma estipulação arbitrária o que desejamos chamar, por exemplo, de "quadrado" não significa que este conceito seja subjetivo: basta, para a objetividade do conceito, que a mesma delimitação que ele traça possa ser comunicada e apreendida por diversas pessoas.

A delimitação de um objeto com o intuito de tornar o objeto contável, comparável, e assim por diante nem sempre pode ser feita para todo conceito. Frege diz que, *em geral*, um conceito a que o número é atribuído delimita, de maneira determinada, o que sob ele cai (*Gl*, §54). O conceito "página desta dissertação" delimita esta página em oposição a todas as outras. O conceito "capítulo desta dissertação" delimita este capítulo em oposição aos outros. No entanto, como afirma Frege:

> (...) nem todo conceito é desta natureza. Podemos decompor, por exemplo, o que cai sob o conceito de vermelho de diversas maneiras, sem que as partes deixem de cair sob

* *Gg I*, Introdução pp. xiii-xiv. (tradução nossa)

> ele. A um tal conceito não convém nenhum número finito. A proposição acerca da delimitação e indivisibilidade pode ser assim formulada: Apenas pode ser unidade com referência a um número finito um conceito que delimite de modo determinado o que cai sob ele e não admita divisão arbitrária.*

Ora, como vimos, o conceito de mar não delimita de modo determinado o que cai sob ele, restando uma indeterminação a respeito da totalidade de águas de que desejamos denominar um certo mar. Seria, então, impossível determinar o número de mares do planeta Terra? Seria impossível dizer que os mares do oceano Atlântico são em número de 17?

Podemos interpretar a citação acima do seguinte modo: há conceitos, como o conceito de vermelho, que tem a seguinte particularidade: pode-se "dividir" indefinidamente os objetos que caem sob este conceito sem que as partes cessem de possuir as propriedades correspondentes às notas características do conceito. As partes, por exemplo, de uma superfície vermelha também são, por sua vez, vermelhas, de modo que podemos continuar dividindo a superfície arbitrariamente sem que suas partes deixem de ser vermelhas. Esta particularidade de alguns conceitos impede que se atribua um número finito à sua extensão. O caso é totalmente diferente com o conceito de mar, já que um gota de água, é claro, não é um mar. Deste modo, mesmo que possamos delimitar arbitrariamente qual totalidade de águas desejemos chamar de "Mar do Norte", o conceito de mar, de certo modo, restringe nossas escolhas possíveis, embora não determine completamente e univocamente o que cai sob ele. Nesse sentido, o número de mares do oceano Atlântico certamente depende de uma escolha arbitrária, embora, uma vez feita esta escolha e esta delimitação precisa, o que dela segue é tão objetivo quanto qualquer outro fato objetivo.

Como vimos no Capítulo passado, a **LB V** não nos oferece o conceito de percurso de valores, e o estabelecimento da identidade entre percursos de valores e valores de verdade pode ser visto exatamente como uma tentativa de delimitar precisamente a referência dos percursos de valores. Isso não significa, como no caso do Mar do Norte, que o que resulta desta estipulação não seja objetivo. E é por isso que podemos carac-

* *Gl*, §54.

terizar a filosofia da matemática de Frege como realista: a objetividade dos enunciados da lógica é garantida pelo fato deles não possuírem nenhum portador: ninguém é o dono de um enunciado lógico, como é o dono de uma sensação subjetiva. O pensamento que uma proposição lógica expressa pode ser apreendido por qualquer ser racional. Ora, se Frege é geralmente chamado de platonista, essa caracterização é fundada, como diz Gottfried Gabriel, "'no reconhecimento de um domínio objetivo-não efetivo (*Objectiv-Nichtwirklichen*) em oposição ao domínio do objetivo-efetivo (*Objectiv-Wirklichen*) e do subjetivo-efetivo (*Subjektiv-Wirklichen*)"*. No entanto, é preciso um duplo cuidado ao utilizar o termo "platonista" para caracterizar a filosofia da matemática de Frege, e é por isso que preferimos evitar esta caracterização. Em primeiro lugar, o fato dos objetos da matemática serem eternos, imutáveis, independentes de qualquer fato contingente, e assim por diante *não é* devido a eles serem habitantes do reino do objetivo-não efetivo. Para reforçar o nosso argumento, tentaremos oferecer, sem pretensão de exaurir o conteúdo do terceiro reino fregueano, uma amostra de seus habitantes:

- Fatos: contingentes ou não, todos os fatos pertencem ao reino do objetivo e não efetivo. Assim Frege afirma, em *Gdk*: "Que o sol se tenha levantado não é um fato que emita raios que atingem meus olhos, não é algo visível como o próprio sol. Que o sol se tenha levantado é algo que se reconhece como verdadeiro a partir de impressões sensoriais. Mas, ser verdadeiro não é uma propriedade sensorialmente perceptível." (*Gdk*, p. 15)

- Objetos introduzidos a partir de objetos físicos ou geométricos: o centro de massa da Terra ou do Sistema Solar, a linha do equador, a direção do eixo da Terra são todos objetos que pertencem ao terceiro reino, embora seja ao menos problemático afirmar que eles existiriam se não houvesse o planeta Terra ou o Sistema Solar.

- Números e valores de verdade: todo objeto puramente lógico e independente de qualquer fato contingente também é um habitante do terceiro reino fregueano.

*Gabriel, G. 'Frege als Neukantianer'. *Kant-Studien*, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 77. 1986, p. 98.

- Funções e conceitos: tanto funções e conceitos definidos de modo puramente lógico como o conceito de jogo completo, definido a partir de um maço de cartas, pertencem ao domínio do objetivo e não efetivo.

- Por fim, o próprio sujeito pensante, que não se confunde com o seu corpo (efetivo) nem com suas ideias (subjetivas)*, faz parte do reino objetivo e não efetivo.

Ora, parece evidente que, por exemplo, o fato de que o sol se tenha levantado (habitante do terceiro reino fregueano) depende do existir do sol (objeto efetivo). Portanto, a pertinência dos números ao terceiro reino não é razão para afirmar a independência dos números com relação a objetos contingentes. Tal independência só pode ser fundada no fato de que a definição de número não pressupõe nenhum fato contingente.

Uma segunda precaução ao rotular Frege como platonista é que não podemos, com isso, defender que o estatuto ontológico dos números como entidades abstratas e atemporais é que garante a objetividade dos juízos da aritmética. Pelo contrário: é a objetividade dos juízos que fornece aos números um estatuto ontológico, pois dizer que um número é um objeto puramente lógico significa apenas duas coisas: em primeiro lugar, que podemos determinar objetivamente a verdade ou falsidade das sentenças em

*Sobre este ponto, não é claro se, em *Gdk*, Frege defende que o sujeito pertence ao reino físico ou ao terceiro reino. Como Frege procura, neste ensaio, combater o idealismo, ele considera um idealismo extremo em que tudo seria ideia (inclusive o Eu), o que desembocaria, por incrível que pareça, em um tipo de realismo/materialismo (pois não seria possível eleger, dentre as ideias, um portador para elas; elas seriam, então, ideias sem portador e, portanto, não seriam ideias e sim objetos materiais). No entanto, pergunta Frege, será que isto é possível? Não é essencial à representação que ela possua um portador? Pode haver uma dor sem que alguém a tenha? Diz Frege: "O ser sentido é algo que pertence necessariamente à dor, e o ser sentido pertence por sua vez a alguém que a sinta" (*Gdk*, p. 31). Mas este ser que sente, que pensa, que representa, não é, por sua vez, uma ideia, uma representação, pois, como Frege mostra, não há nenhuma ideia privilegiada a qual eu possa chamar de Eu. A conclusão que Frege chega é que, em expressões do tipo "eu tenho dor", "eu penso, represento", o "Eu" não pode ser nome de uma ideia. Assim, seguindo o raciocínio fregueano, há pelo menos um objeto que pode ser contemplado por mim que não é uma ideia. É importante observar que disso não decorre que haja outras coisas além do "Eu" que podem ser contemplados por mim e que não são ideias. Frege quer apenas mostrar, neste ponto, a possibilidade de conceber o "pensamento" como algo que é contemplado por um sujeito, mas não como ideia, como algo essencialmente subjetivo. Para isso, Frege encontra o exemplo do "Eu". Contudo, o fantasma do solipsismo ainda não é totalmente afastado, uma vez que pode acontecer do "Eu" ser a única exceção à regra. Frege diz que devemos aceitar a tese segundo a qual os pensamentos (o sentido de uma proposição) não são ideias, sob o risco de cair no psicologismo. Se os pensamentos são ideias, a lógica é subordinada à psicologia. Mas o argumento fregueano não é conclusivo, ele apenas abre a possibilidade para que seja possível pensar algo não como uma ideia, e dá um exemplo disso: o "Eu".

que os números ocorrem; em segundo lugar, que esta determinação é fundada apenas em leis lógicas*.

Também é interessante uma outra comparação das definições na matemática com relação às definições na geografia. Nesta ciência, podemos distinguir dois tipos de definição: *i)* podemos definir um nome para uma certa região considerando limites que já nos foram anteriormente dados, *e. g.*, quando dizemos que a região Sudeste é composta dos estados de São Paulo, Rio de Janeiro, Espírito Santo e Minas Gerais. Este tipo de definição é, em certo sentido, ociosa: todos os enunciados científicos sobre a região Sudeste poderiam ser expressos sem utilizar esta definição. Tudo o que desta definição se conclui é possível antever; *ii)* podemos também definir um nome para uma certa região sem considerar limites previamente estabelecidos. Poderíamos, por exemplo, definir que uma cidade pertence ao Estado de São Paulo se ela está mais próxima da capital paulista do que de qualquer outra capital brasileira. Esta definição é evidentemente arbitrária e não requer, pelo menos por parte do geógrafo, nenhuma justificativa, assim como é a definição da região Sudeste. No entanto, esta definição, ao contrário da primeira, não é de modo algum ociosa: o que dela se conclui, não é possível antever.

Na matemática também podemos fazer esta diferenciação: podemos definir um conceito por meio da conjunção de uma lista de conceitos previamente definidos, como, por exemplo, definir o conceito "quadrado" por meio da conjunção dos conceitos "quadrilátero" e "regular". No entanto, conceitos como os de "número" e de "continuidade de uma curva" envolvem estruturas mais complexas, possivelmente com quantificadores e relações com propriedades lógicas. Nos *Gl*, Frege afirma que "as determinações fecundas de conceito traçam limites que absolutamente ainda não haviam sido dados. O que deles se pode concluir, não é possível antever; não se tira simplesmente da caixa

*Cf. Heck, E. 'Frege on Numbers: Beyond the Platonist Picture'. *The Harvard Review of Philosophy*, 13:2. 2005, p. 34:"In itself this is not yet sufficient, however, to be able to speak of numbers as objec- tively existing, logical objects. Two things have to be added: first, it has to be deter- mined that all statements in which the corresponding expressions occur are objectively true or false; second, it has to be clarified what this truth or falsity is based on, namely purely logical foundations. Now, both of these things together are exactly what Frege's logical reconstruction of arithmetic is supposed to accomplish. Its explicit goal is to reduce all arithmetic judgments to basic logical laws and definitions, thus providing a foundation for their objective truth or falsity, among others".

o que nela se havia posto" (*Gl*, §88). Tais determinações fecundas exercem um papel fundamental no âmbito dos *Gl*, e é por isso que Frege pode defender, contra Kant, que a aritmética é analítica e apesar disso pode aumentar o nosso conhecimento. Frege ainda afirma que as definições não fecundas são inessenciais à matemática, podendo ser rejeitadas. Nas palavras de Frege: "Definições confirmam-se por sua fecundidade. Aquelas que podem ser omitidas sem abrir lacunas na cadeia de demonstrações devem ser rejeitadas como desprovidas de valor"[*]. As definições que ocupam um papel central nos *Gl* são análises lógicas de conceitos aritméticos. Frege recusa que um conceito seja, como Kant defende, uma lista de características (que também seriam conceitos) reunidas. O filósofo utiliza uma metáfora para explicar a noção kantiana de conceito: uma caixa cheia de esferas, sendo que um juízo analítico seria tirar uma destas esferas da caixa. Para Frege, a análise de um conceito não evidencia uma parte do todo, assim como uma viga de uma casa, e sim mostra conexões complexas (com quantificadores, principalmente) que existiam em germe antes da análise mas que ainda não haviam sido exploradas[†].

Após esta excursão pela distinção de definições na matemática e na geometria, podemos voltar para os nossos dois geógrafos do início do Capítulo, descobridores do Mar do Norte e que procuravam fornecer uma delimitação precisa para o conjunto de águas que deveriam chamar de "Mar do Norte". Para fins práticos, vamos supor que nossos geógrafos sejam os mesmos personagens de Benacerraf, a saber, Ernie e Johnny. Benacerraf diz que não há nenhuma razão para afirmar que a definição de Ernie dos números é a verdadeira em detrimento da definição de Johnny, e poderíamos facilmente supor que o mesmo ocorre no caso de suas definições do "Mar do Norte". Mas, então, Benacerraf nos diz que isto mostra que os números não são conjuntos de conjuntos, já que não há nenhuma razão para que se possa optar por um deles ao invés do outro. Será que, pelo mesmo argumento, poderíamos concluir que o "Mar do Norte" não é um conjunto de águas, simplesmente pelo fato de haver diversos conjuntos de águas que

---

[*] *Gl*, §70.

[†] Cf. Shieh, S. 'Frege on Definitions'. In: *Philosophy Compass* 3/5. 2008, p. 997: "when the analysis of a concept initially taken to be logically unstructured reveals it as posessing quantificational structure it becomes possible to establich deductive relations to and from propositions involving that concept that could not be established prior to the analysis".

poderiam ser chamados de "Mar do Norte"? Evidentemente, não. O fato de depender do nosso arbítrio qual parte da totalidade das águas chamamos de "Mar do Norte" não significa que ele não seja um conjunto de águas.

É importante lembrar que Frege procura *definir* o número cardinal. Agora, uma definição não precisa de nenhuma justificativa. Nas palavras de Frege: "em uma definição, nada é afirmado; ao invés disso, algo é estipulado. Portanto, o que requer uma prova ou alguma outra razão para estabelecer sua verdade nunca deveria ser apresentada como uma definição"*. Portanto, a crítica de Benacerraf a Frege não atinge o seu objetivo. Em que sentido a definição de número de Frege, Ernie ou Johnny precisariam de algum motivo ou justificativa para serem legítimas? Apenas se elas forem consideradas como descobertas no sentido em que indicamos acima a respeito do astrônomo. Para isso, já deveríamos dispor de um critério para decidir quando um número é idêntico a outro objeto mesmo quando ele não aparece sob a roupagem de um número. Mas o que Frege procura argumentar nos *Gl* é que não há um bom critério autônomo e independente dos percursos de valores.

Vimos, portanto, que há uma camada decerto arbitrária na filosofia da matemática de Frege, mas que nenhum leitor deve-se surpreender pela existência dessa camada arbitrária. Afinal, o que existe de arbitrário é meramente a fixação da referência dos nomes da linguagem, é apenas a preparação para a expressão de certas verdades ou falsidades, e não se deve perguntar se esta fixação é, ela própria, verdadeira ou falsa, já que ela é condição de possibilidade para a expressão de pensamentos verdadeiros ou falsos e, portanto, não precisa ser justificada. Não obstante, para que se vindique o caráter puramente lógico da aritmética, é preciso que a referência dos nomes de objetos e funções aritméticas seja feita de modo puramente lógico. A existência, então, de diversas alternativas puramente lógicas para a definição do conceito de número (preservando os resultados da aritmética e de sua aplicação) não precisa ser encarada como um golpe fatal a tais definições.

O realismo de Frege consiste, também, no fato de que o único grau de arbi-

* *UGG*, p. 49 da tradução inglesa (tradução nossa).

trariedade é este procedimento preparatório para as expressões das sentenças de nossa linguagem; uma vez realizado, o que se segue disto não contém mais nada de arbitrário, mas é tão somente determinado pelo significado das palavras. O matemático, portanto, não pode conjurar em um objeto nenhuma propriedade que ele de fato não tenha, muito menos tirar de um objeto (por abstração intelectual) uma propriedade que ele de fato tenha.

Ora, como vimos no primeiro Capítulo desta introdução, no jogo de xadrez também há uma camada arbitrária, a saber, a estipulação das regras de movimentação das peças, e o que se segue destas regras não contém nada de arbitrário. Então, qual a verdadeira diferença da aritmética de Frege para um jogo como o xadrez? Ou, em outras palavras, qual é a diferença entre fixar a referência de um signo e estabelecer regras para o uso de um signo? Pois, se fixar a referência de um signo a é apenas dizer qual signo eu posso substituir por $\phi(a)$ ou por $\phi(a, \xi)$, eu não poderia entender esta fixação da referência de a como o estabelecimento de regras para o uso deste signo, assim como no xadrez? A resposta de Frege, é claro, é negativa:

> Pode-se dizer que um conteúdo é designado às peças de xadrez por meio do comportamento destas peças com relação às regras do xadrez? Eu reconheço que as peças estão lá, bem como reconheço que as regras para a manipulação estão estabelecidas, mas não sei nada de conteúdo algum. Não se pode dizer, certamente, que o rei negro designa algo como, digamos, o nome "Sirius" designa uma certa estrela fixa. Ao invés disso, o modo de expressão apropriado seria dizer que as regras do xadrez tratam do rei negro.*

No entanto, o formalista pode recusar que haja alguma diferença entre fixar a referência de um signo e estabelecer regras para a manipulação de um signo. Thomae, por exemplo, afirma: "eu sempre tive, é claro, a opinião de que o 'rei negro' no xadrez significa tanto quanto 'Sirius' em astronomia"†. Já vimos na Introdução desta dissertação que, embora uma configuração de peças de xadrez não expressa nenhum pensamento (não é, pois, verdadeira nem falsa), pode haver pensamentos em uma *teoria* do xadrez. A proposição "no jogo de xadrez, não é possível ganhar apenas com o rei e com um

* *Gg II*, §95. (tradução nossa)

† *UForm*, p. 117 da tradução inglesa. (tradução nossa)

bispo" expressa um pensamento tão verdadeiro quanto $1 + 1 = 2$. Mas, então, no que consiste a diferença da posição fregueana em relação à posição formalista?

Uma análise atenta nos mostra que, no caso dos teoremas que iluminam as regras do xadrez, não há apenas uma camada de arbitrariedade e sim uma dupla camada: evidentemente, o que eu desejo denominar com o signo "rei" ou com o signo "roque" é algo totalmente arbitrário. Uma vez resolvida esta arbitrariedade, é possível descrever as propriedades da peça que eu nomeei com tal signo: ela pode ser de madeira, ter mais de 10 centímetros de altura, etc. e todas essas proposições expressariam pensamentos. No entanto, para que *teoremas do jogo de xadrez* expressem um pensamento ainda é preciso uma outra arbitrariedade: o estabelecimento das regras do jogo de xadrez, as quais são, evidentemente, estabelecidas por convenção. É essa dupla camada arbitrária que faz, do xadrez, um jogo e não uma ciência. Em um certo sentido, na lógica e na aritmética, também há, além da fixação da referência do signo, regras que nos permitem passar de uma certa configuração à outra. No entanto, diferentemente do jogo de xadrez, essas regras não são convencionais, e sim fundadas em regras de inferência lógica que são como caminhos que devemos seguir se temos a intenção construir um raciocínio válido. Estas regras asseguram que a razão não entre em contradição consigo mesma, e são vistas por Frege como *prescrições* para asserir e julgar.

Deste modo, ao fixar a referência de um signo e trabalhar cientificamente com essa referência, o cientista estuda as propriedades do referenciado, e não há nada mais de arbitrário nisto: assim como o geógrafo pode afirmar cientificamente que o Mar Norte é um mar do Oceano Atlântico, situado entre as costas da Noruega e da Dinamarca ao leste, o matemático também pode afirmar cientificamente os seus teoremas. A única (e grande) diferença é que suas afirmações são fundamentadas apenas por meio de leis lógicas, diferentemente do geógrafo, cujas afirmações são de caráter evidentemente empírico.

CAPÍTULO 5

Conclusão

Como procuramos mostrar nesta dissertação, a vantagem de como a aplicabilidade da aritmética é conduzida por Frege com relação ao formalista é que, como a aritmética é parte da lógica, a aplicabilidade nos é fornecida de antemão. Já o formalista só pode aplicar a aritmética depois que encontrar uma correspondência biunívoca posterior entre sua teoria e a realidade sobre a qual a teoria será aplicada, correndo o risco, portanto, de cair, como diz Frege, "no *a posteriori*, ou ao menos no sintético, por mais que de fato assuma ares de quem paira nas alturas da abstração" (*Gl*, §109).

Tal aplicabilidade da aritmética repousa tão somente na fixação da referência dos nomes de conceitos e objetos, o que é fundamental para a aplicação da lógica, que repousa na premissa de que os conceitos têm fronteiras nítidas (exigência do princípio do terceiro excluído) e na premissa de que os objetos têm critérios de identidade bem definidos (exigência do princípio de identidade). Procuramos argumentar que definições contextuais (**HP** e **LB V**, por exemplo) não fixam a referência dos termos que elas introduzem. Frege é obrigado a resolver esta indeterminação por meio da estipulação arbitrária do valor de certas funções (como a função $\xi = \zeta$). Procuramos argumentar que estipulações adicionais devem ser fornecidas no momento da aplicação da aritmética, e que estas estipulações devem obedecer certos princípios fregueanos, para assegurar o caráter analítico da aritmética.

Por fim, buscamos analisar a comparação que Frege faz da atividade do matemático com o geógrafo, indicando em que consiste a postura realista de Frege com respeito à aritmética. O argumento de Benacerraf, exposto na Introdução, parece então perder a sua força, na medida em que reconhecemos uma diferença entre as sentenças (verdadeiras) da lógica e da aritmética e a preparação para estas sentenças, que consiste em definições dos seus termos ou, em outras palavras, na fixação da referência de seus signos. Esta camada arbitrária não faz da aritmética um jogo como o xadrez. O estatuto de jogo do xadrez se funda em uma dupla camada arbitrária para estabelecer a verdade dos teoremas da teoria do xadrez: não basta fixar a referência dos seus termos, mas ainda é preciso saber as regras do jogo. Nesse sentido, a aritmética se diferencia do xadrez pelo fato de que as regras para a passagem de uma "configuração" da aritmética à outra configuração não são convencionais, mas são a expressão de regras dedutivas da lógica, que salvaguardam a validade destas passagens.

Bibliografia

ANSCOMBE, G. GEACH, P. *Three philosophers – Aristotle, Aquinas, Frege.* Oxford: Basil Blackwell. 1961.

BEANEY, M (ed.). *The Frege Reader.* London: Blackwell. 1997.

BENACERRAF, P. 'What Numbers Could Not Be'. Em: BENACERRAF, P. and Putnam, H. (eds.). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings.* Cambridge University Press, Second Edition. 1983. pp. 272-294.

BOOLE, G. *The Mathematical Analysis of Logic.* London, George Bell and Cambridge: Macmillan. 1847.

BOOLOS, G. 'Saving Frege from Contradiction', de 1986. In:BOOLOS, G. *Logic, Logic and Logic.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. 1998.

BURGE, T. *Truth, thought, reason: essays on Frege.* Oxford: Clarendon Press. 2005.

SCHIRN, M. 'Percursos de valores e indeterminação da referência'. Princípios (UFRN, Natal). v. 8; n. 9. pp 36-48.

DEDEKIND, R. *Theory of Alebraic Integers.* New York: Cambridge University Press. 1996.

DUMMETT, M. *Frege: Philosophy of Mathematics*, Cambridge, MA: Harvard University Press. 1991.

EUCLIDES, *Os elementos.* Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP. 2009.

FREGE, G. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle a. S.: Louis Nebert, 1879. Republicado em *Begriffsschrift und andere Aufsätze.* Hildesheim, Zurich and New York: Georg Olms Verlag, 2007.

________________. *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau: w. Koebner, 1884. Traduções utilizada da Coleção Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

________________. 'Boole rechnende Logic und die Begriffsschrift'. Em: FREGE, G. *Nachgelassene Schriften*, ed. Hans Hermes *et al.*. amburg: Meiner. 1969, pp. 9-52.

________________. *Grundgesetze der Arithmetik.* Band I/II, Jena: Verlag Herman Pohle, 1893/1903.

_______________. 'Über die Grundlagen der Geometry'. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15. 1906, pp. 293-309, 377-403, 423-30. Tradução inglesa "On the Foundations of Geometry (Second Series)", por E.-H. W. Kluge, em: FREGE, G. *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic.* New Haven and London: Yale Universisty Press, 1971.

_______________. 'Über Sinn und Bedeutung'. 1892. Em: FREGE, G. *Funktion, Begriff, Bedeutung – Fünf logische Studien.* Herausgegeben von Günther PATZIG. 7. Auflage, Göttingen: Verlag Vandenhoeck Ruprecht. 2008, pp. 23-46.

_______________.'Über Begriff und Gegenstand'. 1891. Em: FREGE, G. *Funktion, Begriff, Bedeutung – Fünf logische Studien.* Herausgegeben von Günther PATZIG. 7. Auflage, Göttingen: Verlag Vandenhoeck Ruprecht. 2008, pp. 47-60.

_______________. *Posthumous Writings.* Tradução de P. Long e R. White, Blackwell, Oxford, 1979.

_______________. 'Der Gedanke. Eine logische Untersuchung'. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus 1.*1918-1919, pp. 58-77. Republicado em: FREGE, G. textitLogische Untersuchungen. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2003, pp. 35-62. Tradução utilizada de Paulo Alcoforado. Em: FREGE, G. *Investigações Lógicas.* Porto Alegre: Edipucrs. 2002, pp. 9-39.

GABRIEL, G. 'Frege als Neukantianer'. *Kant-Studien*, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 77, pp. 84-101. 1986.

HALE, B; WRIGHT, C. 'To bury Caesar'. In:Hale, B; Wright, C. (eds.), *The Reason's Proper Study: Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics.* Oxford: Clarendon Press. 2001. pp. 335-396.

HECK, E. 'Frege on Numbers: Beyond the Platonist Picture'. *The Harvard Review of Philosophy*, 13:2. 2005, pp. 25-40.

HECK, R. G. 'The Julius Caesar Objection'. In: R. Heck, ed. *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett.* New York and Oxford: Oxford University Press. 1997.

_______________. 'Grundgesetze der Arithmetik I Section 10'. *Philosophia Mathematica* 7. 1999, pp. 258-92.

LUKASIEWICZ, J. *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic.* Oxford: Oxford. University Press, 1951.

MARQUES, J. O. A. 'Waismann, Ramsey, Wittgenstein e o axioma da redutibilidade'. *Cadernos de História e Filosofia das Ciências.* Campinas SP, v. 2, n. 1, 1992. pp. 5-48.

MOORE, A. W.; REIN, A. '*Grundgesetze*, Section 10', p. 383. In: HAAPARANTA,

L. and HINTIKKA, J. *Frege Synthesized*. Dordrecht: Reidel Publishing Co. 1986, pp. 375-384.

PEDERSEN, N. J. 'Solving the Caesar Problem without categorical sortals', *Erkenntnis*, 71. 2009, pp. 141-155.

PENCO, C.*Frege*. Roma: Carocci editore (collana Pensatori). 2010.

POTTER, M; RICKETTS, T (eds.). *The Cambridge Companion to Frege*. Cambridge: Cambridge University Press. 2010.

RICKETTS, T. 'Truth Values ahd Course-of-Values in Frege's *Grundgesetze*'. In: BEANEY, M. e RECK, E. H (eds). *Gottlob Frege: Critical Assessment of Leading Philosophers*. New York: Routledge. 2005, pp. 218-244.

RUFFINO, M. 'Why Frege would not be a neo-Fregean'. *Mind*, 112. 2003, pp. 51-78.
_______________. 'Logical Objects in Frege's Grundgesetze, section 10'. In: RECK, E.H. (ed.). *From Frege to Wittgenstein*. New York: Oxford. 2002, pp. 125-148.

SHIEH, S. 'Frege on Definitions'. In: *Philosophy Compass* 3/5. 2008, p. 992-1012.

SIMONS, P. 'Frege's Theory of Real Numbers', *History and Philosophy of Logic*, 8: 1, 25-44.

STEINER, M. *The applicability of mathematics as a philosophical problem*. London: Harvard University Press. 1998.

TAPPENDEN, J. 'The Caesar Problem in its Historical Context: Mathematical Background'. *Dialectica*, 59. 2005, pp. 237-264.

WEHMEIER, K. F. e SCHROEDER-HEISTER, P. 'Frege's Permutation Argument Revisited'. In: B. Buldt, V. Halbach, R. Kahle (eds.), *Reflections on Frege and Hilbert*. Synthese 147 (2005), 43-61.

WITTGENSTEIN, L. *Wiener Ausgabe*. Michael Nedo (ed.). Band 1. Wien/New York: Springer Verlag, 1999.
_______________. *Philosophische Bemerkungen*. Frankfurt: Suhrkamp, 1964.

WRIGHT, C. 'Neo-Fregean Foundations for Real Analysis: Some Reflections on Frege's Constraint'. Em: *Notre Dame J. Formal Logic*, Volume 41, Number 4 (2000), 317-334.
_______________. *Frege's conception of numbers as objects*, Aberdeen: Aberdeen Uni-

versity Press. 1983.