

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**O EFEITO CASIMIR DINÂMICO E DECOERÊNCIA**

Lucas Chibebe Céleri

Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação  
em Física da Universidade Federal de São Carlos  
como parte dos requisitos para a obtenção do  
título de Doutor em Física

São Carlos  
Julho, 2008

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

C629ec

Célieri, Lucas Chibebe.

O efeito Casimir dinâmico e decoerência / Lucas Chibebe  
Célieri. -- São Carlos : UFSCar, 2008.  
92 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,  
2008.

1. Sistemas não estacionários. 2. Efeito Casimir dinâmico.  
3. Decoerência (Decoherence). 4. Gravitação. I. Título.

CDD: 530.12 (20<sup>a</sup>)

**LUCAS CHIBEBE CÉLERI**

Tese de Doutorado submetida à  
Coordenação do Programa de Pós-  
Graduação em Física, da Universidade  
Federal de São Carlos, como requisito  
parcial para a obtenção do título de  
Doutor em Ciências.

Aprovada em 3 de julho de 2008.

**BANCA EXAMINADORA**

---

*Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa (Orientador)*  
*Universidade Federal de São Carlos - DF*  
*Universidade de São Paulo - IFSC*

---

*Prof. Dr. Viktor Vasilievich Dodonov*  
*Universidade Federal de Brasília - DF*

---

*Prof. Dr. Salomon Shaban Mizrahi*  
*Universidade Federal de São Carlos - DF*

---

*Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vazela*  
*Universidade de São Paulo - IFSC*

---

*Prof. Dr. José Eduardo Martinho Hornos*  
*Universidade de São Paulo - IFSC*

*Às mulheres de minha vida  
Iclea, Mariana e Fernanda.*

*À memória de Deuquizia Ferreira Chibebe.*

# Agradecimentos

Ao Prof. Miled gostaria de expressar dois tipos de gratidão. No que se refere a seu inquestionável profissionalismo, gostaria de agradecê-lo pela excelente orientação, sem a qual esta tese não teria sido possível, bem como pela sua paciência e disponibilidade durante todos estes anos. A ele devo grande parte de meu conhecimento e de minha formação como cientista. Para além do lado profissional, também quero agradecê-lo por revelar-se um amigo, em todos os momentos em que precisei de um.

Agradeço a meus amigos e colaboradores do grupo de ótica quântica: Alexander e Fábio, que além de amigos, suas discussões sobre o efeito Casimir contribuíram imensamente para esta tese e ao Mickel, que desde o início mostrou-se um grande amigo e um excelente pesquisador, com quem aprendi muito sobre física.

Também quero agradecer aos membros do grupo com os quais mantive inestimáveis discussões sobre os assuntos abordados neste trabalho: Cacheffo, Celso, Eduardo, Fabiano, Roberto e Sérgio.

Gostaria também de agradecer a Matheus, Ciro e Roberto (Bola), cujos nomes são sinônimos de amizade.

Não posso deixar de dizer aqui o quanto sou grato pelo apoio incondicional de minha família, principalmente de minha mãe Iclea, de minha irmã Mariana e de minha companheira Fernanda. Sem tal apoio, estas linhas não existiriam.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Às pessoas que não foram mencionadas aqui deixo minhas desculpas e meus sinceros agradecimentos.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Decoerência de estados . . . . .	1
1.2 O efeito Casimir . . . . .	3
1.3 O efeito Casimir dinâmico . . . . .	5
1.4 Detecção experimental do efeito Casimir . . . . .	7
<b>2 Controle da Interação Sistema-Reservatório Através de Sistemas Quânticos Não-Estacionários</b>	<b>10</b>
2.1 Introdução . . . . .	10
2.2 Modelo para o controle da decoerência . . . . .	12
2.2.1 O mecanismo por trás da atenuação do acoplamento entre sistema e reservatório . . . . .	16
2.3 Engenharia do modo não estacionário . . . . .	20
2.4 Conclusões . . . . .	22
<b>3 Criação de partículas e decoerência no ECD não ideal a temperatura finita</b>	<b>26</b>
3.1 Introdução . . . . .	26
3.1.1 O ECD . . . . .	26
3.1.2 ECD e decoerência . . . . .	28
3.2 O hamiltoniano efetivo para o ECD . . . . .	30
3.2.1 Operadores instantâneos de criação e destruição . . . . .	32

3.3	Número médio de partículas criadas . . . . .	34
3.4	Entropia linear e decoerência . . . . .	37
3.5	Um caso particular - movimento oscilatório da fronteira . . . . .	38
3.5.1	Fenomenologia do hamiltoniano efetivo . . . . .	38
3.5.2	Número médio de partículas criadas . . . . .	40
3.5.3	Entropia e decoerência . . . . .	43
3.6	Conclusões . . . . .	48
<b>4</b>	<b>ECD para o campo escalar não massivo entre duas cascas esféricas concêntricas</b>	<b>50</b>
4.1	Introdução . . . . .	50
4.2	Quantização do campo na cavidade . . . . .	52
4.2.1	Quantização canônica do campo . . . . .	53
4.2.2	O hamiltoniano efetivo . . . . .	54
4.3	Número médio de partículas criadas . . . . .	55
4.3.1	O operador densidade . . . . .	55
4.3.2	Os coeficientes de Bogoliubov . . . . .	56
4.4	A criação de partículas entre cascas esféricas sob oscilações harmônicas . . . . .	58
4.5	Conclusões . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Influência do campo gravitacional sobre o ECD</b>	<b>65</b>
5.1	Introdução . . . . .	65
5.2	Quantização do campo escalar não massivo . . . . .	67
5.3	Número médio de partículas criadas . . . . .	69
5.4	Movimento oscilatório do espelho . . . . .	72
5.4.1	Aproximação de primeira ordem: campo gravitacional constante . . . . .	72
5.4.2	Aproximação de segunda ordem . . . . .	74
5.5	Conclusões . . . . .	78
	<b>Referências</b>	<b>80</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação da distribuição espectral $\sigma(\mu)$ do reservatório, os máximos $\omega_0 \pm \chi$ da frequência do sistema, bem como um valor particular $\omega(t)$ em torno do qual encontra-se a lorentziana de acoplamento sistema-reservatório $\lambda(\mu, t)$ . . . . .	14
2.2	Gráfico da função $C_{12}(t)$ contra o parâmetro $\Gamma_0 t$ para o estado inicial $ \Psi(0)\rangle = \mathcal{N}( \alpha_0\rangle +  -\alpha_0\rangle)$ com $\alpha_0 = 1$ . A linha preta (sólida cheia) corresponde ao caso do modo estacionário onde $\omega(t) = \omega_0$ ; As linhas laranja (sólida) e verde (tracejada) correspondem aos casos $\varkappa = 1/2$ e $1/10$ , para $\kappa = 1/2$ ; finalmente, as linhas vermelha (tracejada-pontilhada) e azul (pontilhada) correspondem aos casos $\varkappa = 1/2$ e $\varkappa = 1/10$ , para $\kappa = 1/10$ . . . . .	18
2.3	Gráfico de $\text{Im}(\alpha(t))$ contra $\text{Re}(\alpha(t))$ ilustrando o processo de amortecimento na evolução da amplitude do estado coerente $\alpha(t) = \alpha_0 \exp[-i\Omega(t) - \Gamma(t)]$ , que compõe a superposição $ \Psi(t)\rangle$ , com $\alpha_0 = 1$ . Os padrões das linhas correspondem aos apresentados na Fig. 2.2, com os mesmos valores associados aos parâmetros $\kappa$ e $\varkappa$ . . . . .	24
2.4	Gráfico da parte real da taxa efetiva de amortecimento $\text{Re}[\Gamma(t)]$ contra $\Gamma_0 t$ , ilustrando que o mecanismo de supressão de decoerência aplica-se a qualquer estado inicial. Como na Fig. 3, os padrões das linhas correspondem as da Fig. 2.2, com os mesmos valores associados aos parâmetros $\kappa$ e $\varkappa$ . . . . .	25
3.1	Desenho esquemático do problema. Os espelhos em $x = q(t)$ e $x = L_0$ são ideais. O espelho dispersivo encontra-se em $x = 0$ . . . . .	28
3.2	Número médio de partículas criadas $\Delta N_{C,k}(t)$ contra $k$ para os valores fixos (a) $p = 14$ e (b) $p = 15$ . O intervalo de tempo é fixo em $\tau = 1/p$ . . . . .	43
3.3	Número médio de partículas criadas $\Delta N_{C,\tau}(\tau)$ contra $p$ para $k = 7$ . O intervalo de tempo é fixo em $\tau = 1/p$ . . . . .	44



3.4	(a) número total de partículas criadas $N_C(\tau)$ e (b) energia total normalizada $E_C(\tau)/\omega_1$ , contra $\mathfrak{p}$ . O intervalo de tempo é fixo em $\tau = 1/\mathfrak{p}$ . . . . .	45
3.5	Número de partículas formadas no modo fundamental DC, $\Delta N_{C,1}(\tau)$ , contra $\tau$ para os casos em que a temperatura do sistema é $T = 0$ K (linha azul sólida) e $T = \omega_1/k_B \ln(1.1)$ K (linha vermelha tracejada). Escolhemos o valor fixo $\mathfrak{p} = 2$ . . . . .	46
3.6	Entropia linear de um estado de superposição do tipo gato de Schrödinger, com $ \alpha_0 ^2 = 2$ , preparado no modo fundamental DC, contra $\mathfrak{p}$ . Os triângulos corre- spondem ao intervalo de tempo $\tau = 0.1$ e os círculos a $\tau = 0.25$ . . . . .	47
3.7	Tempo de decoerência $\tau_D$ de um estado de superposição do tipo gato de Schrödinger, preparado no modo fundamental DC, contra $\mathfrak{p}$ . . . . .	48
4.1	Mapa das soluções da equação transcendental (4.8). As cores correspondem a diferentes valores do parâmetro $l$ : as linhas pretas são para $l = 0$ , as vermel- has para $l = 1$ e, para $l = 2$ , as azuis. As linhas sólida, tracejada e pontilhada correspondem aos casos $s = 1$ , $s = 2$ e $s = 3$ , respectivamente. . . . .	62
4.2	Gráfico de $(r_o - r_i) c_{1s'}^\alpha $ contra a razão $r_o/r_i$ . As linhas sólida e tracejada corre- spondem aos valores $s' = 1$ e $s' = 2$ , respectivamente. A linha preta corresponde ao caso $l = 0$ e $\alpha = i, o$ . As linhas azul e vermelha são para $\alpha = i$ e $\alpha = o$ , respectivamente, ambas com $l = 1$ . . . . .	63
4.3	Gráfico de $N_{lms}(t)/(\epsilon\varpi t)^2$ contra $\varpi/\omega_{01}(0)$ , na condição de ressonância exata, para os casos (a), (b), (c), e (d) para alguns valores de $l$ e $s$ . Nós ajustamos $r_o = 2r_i$ . . . . .	64
5.1	Número médio de partículas criadas no modo fundamental, $\mathcal{N}_1$ , contra $\gamma a_p$ para o valor fixo $\tau_p = 1$ , ajustando $\chi = 0$ . . . . .	77
5.2	Número médio de partículas criadas no $\mathbf{k}$ -ésimo modo, $\mathcal{N}_k$ , contra $\gamma a_p$ para o valor fixo $\tau_p = 1/\mathbf{n}$ , ajustando $\chi = 0$ . . . . .	78

# Resumo

Demonstramos nesta tese, primeiramente, que a ação inevitável do meio ambiente pode ser substancialmente enfraquecida quando consideramos sistemas quânticos não estacionários apropriados. Diferentemente do programa de engenharia de reservatórios e de forma similar aos protocolos para o desacoplamento dinâmico de sistemas quânticos abertos, nossa proposta não requer o conhecimento prévio do estado a ser protegido. Diferentemente mesmo dos esquemas de desacoplamento dinâmico, a proteção de estados de modos não estacionários prescinde da disponibilidade de pulsos externos ultra rápidos que atuem sobre o sistema de interesse em intervalos de tempo mais curtos que a menor escala de tempo acessível aos graus de liberdade do reservatório. No domínio da engenharia de estados em eletrodinâmica quântica de cavidades, mostramos como preparar modos não estacionários através da interação dispersiva do campo com átomos de dois níveis submetidos à amplificação linear.

Tratamos, em seguida, de diferentes aspectos do efeito Casimir dinâmico (ECD) através da derivação de hamiltonianos efetivos capazes de descrever convenientemente os principais aspectos do fenômeno. Começamos pelo ECD não ideal a temperaturas finitas. Obtivemos expressões gerais tanto para número médio de partículas criadas como para a entropia linear de um estado arbitrário preparado em um modo selecionado da cavidade, expressões estas que se aplicam a qualquer lei de movimento da fronteira móvel. Desenvolvemos, através destas expressões, uma análise abrangente das ressonâncias presentes tanto na criação de partículas como na perda de pureza e decoerência de estados.

Consideramos também o ECD no contexto de um campo escalar não massivo confinado, sob as condições de contorno de Dirichlet, entre duas cascas esféricas concêntricas. Utilizamos dois diferentes métodos, o operador densidade e os coeficientes de Bogoliubov, para o cálculo da expressão geral para o número médio de partículas criadas, válida para qualquer lei de movimento das cascas esféricas. Aplicamos esta expressão para o cálculo do número de partículas produzidas quando apenas uma das cascas oscila ou quando ambas oscilam em fase ou fora de fase, e

comparamos os resultados com aqueles associados à geometria plana.

Por fim, analisamos a ação do campo gravitacional sobre o ECD. Para tal, consideramos um campo escalar não massivo confinado numa cavidade cubóide localizada em um campo gravitacional descrito por uma métrica estática e diagonal. Assumindo que uma das paredes planas da cavidade seja móvel, obtivemos o número de partículas criadas no interior da cavidade através do cálculo, via expansões perturbativas, dos coeficientes de Bogoliubov. Aplicamos o resultado para o caso particular de um movimento oscilatório da fronteira móvel, considerando um campo gravitacional fraco descrito pela métrica de Schwarzschild. O regime de amplificação paramétrica é detalhadamente analisado, demonstrando que nosso resultado para o número médio de partículas criadas, está em acordo com resultados particulares previamente apresentados na literatura.

# Abstract

In this thesis we first demonstrate that the inevitable action of the environment can be substantially weakened when considering appropriate nonstationary quantum systems. Beyond protecting quantum states against decoherence, an oscillating frequency can be engineered to make the system-reservoir coupling almost negligible. Differently from the program for engineering reservoir and similarly to the schemes for dynamical decoupling of open quantum systems, our technique does not require a previous knowledge of the state to be protected. However, differently from the previously-reported schemes for dynamical decoupling, our technique does not rely on the availability of tailored external pulses acting faster than the shortest time scale accessible to the reservoir degree of freedom. We show, in the domain of cavity quantum electrodynamics, how to engineer such a nonstationary cavity mode through its dispersive interaction with a driven two-level atom.

Next, we consider different aspects of the dynamical Casimir effect (DCE) through the derivation of effective Hamiltonians which exhibit the essential features of the phenomenon. We start by investigating the dynamical Casimir effect in a nonideal cavity at finite temperature. We first compute a general expression for the average number of particle creation, applicable for any law of motion of the cavity boundary. We also compute a general expression for the linear entropy of an arbitrary state prepared in a selected mode, also applicable for any law of motion of the cavity boundary. As an application of our results we have analyzed both the average number of particle creation and linear entropy within a particular oscillatory motion of the cavity boundary. On the basis of these expressions we develop a comprehensive analysis of the resonances in the number of particle creation in the nonideal dynamical Casimir effect. We also demonstrate the occurrence of resonances in the loss of purity of the initial state and estimate the decoherence times associated with these resonances.

We also consider the dynamical Casimir effect for a massless scalar field, under Dirichlet boundary conditions, between two concentric spherical shells. We obtain a general expression for

the average number of particle creation, for an arbitrary law of radial motion of the spherical shells, using two distinct methods: by computing the density operator of the system and by calculating the Bogoliubov coefficients. We apply our general expression to breathing modes: when only one of the shells oscillates and when both shells oscillate in or out of phase. We also analyze the number of particle production and compare it with the results for the case of plane geometry.

Finally, we analyze the action of the gravitational field on the dynamical Casimir effect. We consider a massless scalar field confined in a cuboid cavity placed in a gravitational field described by a static and diagonal metric. With one of the plane mirrors of the cavity allowed to move, we compute the average number of particles created inside the cavity by means of the Bogoliubov coefficients computed through perturbative expansions. We apply our result to the case of an oscillatory motion of the mirror, considering a weak gravitational field described by the Schwarzschild metric. The regime of parametric amplification is detailed analyzed, demonstrating that our computed result, for the mean number of particles created, is in agreement with associated particular cases in literature.

# Capítulo 1

## Introdução

Apresentamos, nesta tese, trabalhos relacionados a dois diferentes tópicos que têm merecido destacada atenção nas últimas décadas: o controle da decoerência de estados quânticos e o efeito Casimir dinâmico (ECD). Ambos os tópicos são abordados dentro de um contexto comum; não é por coincidência que a técnica para o controle da decoerência aqui apresentada vale-se, de forma similar ao ECD, de modos não estacionários de uma cavidade. Em contrapartida, o ECD oferece, por sua vez, uma plataforma privilegiada para a análise da decoerência de estados de modos em cavidades com fronteiras móveis. Além da decoerência de estados e sua relação com o ECD, tratamos também nesta tese do processo de criação de partículas, via ECD, sob diferentes aspectos geométricos. Aspectos estes impostos tanto pelas fronteiras móveis da cavidade, representada por cascas esféricas concêntricas, como pela presença da gravidade, descrita pela métrica de Schwarzschild. Procuramos, nesta introdução, apresentar um breve histórico de ambos os temas para uma contextualização apropriada da nossa contribuição.

### 1.1 Decoerência de estados

O processo da decoerência de estados tem sido alvo de renovado interesse, especialmente da física teórica, desde o advento da mecânica quântica e das dificuldades inerentes à teoria em explicar o processo de medida e de transição da dinâmica micro para a macroscópica. A princípio, atribuíam-se essencialmente ao aparato de medida quântico o fenômeno do *colapso da função de onda*, que até então, pouco ou nada se distinguia da decoerência. É sintomático que na maioria dos livros-textos o “postulado da projeção” seja tratado (de forma quase que metafísica), como um dos axiomas da teoria [1].

Com a substituição do aparato de medida quântico pela noção mais geral de meio ambiente, e em paralelo ao grande desenvolvimento da teoria quântica, décadas foram dispensadas ao tratamento de sistemas quânticos abertos. Dos desenvolvimentos decorrentes destacamos a superação das abordagens fenomenológicas de sistemas quânticos abertos através da modelagem do meio ambiente por um grande número de osciladores harmônicos independentes.

Apenas no início da década de 1980 é que resultados seminais, relacionados à decoerência de estados quânticos [2, 3, 4], conduziram a uma compreensão mais detalhada do processo de medida quântica e da transição da dinâmica micro para a macroscópica (para além do que fizera o experimento de pensamento conhecido como “O paradoxo do gato de Schrödinger” [5]). Contudo, os avanços apresentados nas Refs. [2, 3, 4] explicam apenas parcialmente os processos de medida e de transição da dinâmica micro para a macroscópica, dado que, afinal, concentram-se especificamente na decoerência de estados quânticos. A dinâmica do colapso da função de onda, aparentemente um processo estocástico, é ainda um problema a ser resolvido apesar de resultados recentes importantes [6].

Com o advento do que se convencionou denominar teoria da informação quântica, o estudo da decoerência de estados, antes confinado à esfera puramente conceitual da fundamentação da mecânica quântica, adentra o campo das potenciais aplicações tecnológicas dos fenômenos quânticos, recentemente divisado. No contexto da informação quântica — que compreende, basicamente, a implementação de operações lógicas através de fenômenos como a superposição de estados, a não localidade e o colapso da função de onda — o desenvolvimento de mecanismos de controle ou supressão da decoerência torna-se essencial. Este tópico, de interesse central nas duas últimas décadas, aprofundou nossa compreensão acerca dos sistemas quânticos abertos e resultou na elaboração de esquemas engenhosos para o controle da decoerência.

Dentre os diversos mecanismos propostos para este fim, mencionamos, primeiramente, os algoritmos quânticos de correção de erros [7], inspirados em seus análogos clássicos. Outra estratégia, denominada engenharia de reservatórios [8], submete o sistema de interesse, cujo estado pretende-se proteger dos mecanismos de decoerência, a interações adicionais além daquela, inevitável, com o meio ambiente. Estas interações adicionais, confeccionadas de forma apropriada, permitem o controle da dinâmica do sistema, através da manipulação do seu acoplamento com o meio ambiente. Esta estratégia foi implementada, tanto teórica quanto experimentalmente em íons aprisionados [9, 10], além de contar com propostas exequíveis em sistemas atômicos de

dois níveis [11, 12, 13]. Mencionamos também que os processos coletivos de decoerência, pelos quais sistemas compostos, de muitas partes, interagem com um reservatório comum, têm instigado diversos estudos interessantes relacionados às proposições de subespaços livres de decoerência [14, 15, 16]. É notório o fato de que os algoritmos quânticos de correção de erros pressupõem, em geral, que sistemas quânticos compostos submetem-se de forma independente aos mecanismos de decoerência, enquanto que a construção dos subespaços livres de decoerência decorrem, em geral, da ação de um reservatório comum sobre sistemas compostos. Um protocolo para a construção de subespaços livres de decoerência sob a condição de que sistemas compostos encontram-se sob a ação de reservatórios distintos é apresentado na Ref. [17].

Por fim, lembramos dos mecanismos de desacoplamento dinâmico, pelos quais o sistema de interesse é submetido à ação de pulsos clássicos que atuam sobre o sistema numa escala de tempo ainda menor que aquelas associadas às correlações temporais típicas apresentadas pelos osciladores harmônicos que modelam o reservatório térmico [18, 19, 20]. A ação destes pulsos, de difícil implementação prática, promove o desacoplamento entre o sistema e o meio ambiente.

## 1.2 O efeito Casimir

Outro tópico que tem atraído atenção recentemente, devido a diversos aspectos de sua aplicação, inclusive nos campos da biologia e tecnologia de dispositivos nanoeletrônicos, é o efeito Casimir, que consiste, basicamente, em uma manifestação macroscópica das flutuações quânticas do vácuo. De fato, o campo eletromagnético segundo a mecânica quântica compõe-se de um conjunto de osciladores harmônicos e, como consequência do princípio da incerteza de Heisenberg, suas quadraturas devem flutuar. Para ilustrarmos o conceito de flutuação, consideramos uma partícula clássica em movimento browniano com a posição caracterizada pela distribuição  $\exp(-U/k_B T)$ , em que  $U$  indica a energia potencial em cada ponto do espaço,  $k_B$  a constante de Boltzmann, e  $T$  a temperatura do meio. Enquanto que a configuração mais provável é aquela de mínima energia  $U_{\min}$ , contribuições significativas decorrem das configurações nas quais  $U - U_{\min} \sim k_B T$ . Estes desvios da posição de mínima energia, cuja escala é dada por  $k_B T$ , são manifestações das flutuações térmicas. Na versão quântica do problema, descrita pelas integrais de trajetória de Feynman, a partícula segue virtualmente todas as trajetórias que conectam os pontos inicial e final do seu movimento, ao invés de seguir exclusivamente sua trajetória clássica. Ainda que a contribuição dominante decorra da trajetória clássica de mínima ação  $S_{cl}$ , a cada trajetória associa-se um peso



$\exp(-iS/\hbar)$  determinado por sua ação característica  $S$ . Portanto, contribuições significativas para o movimento da partícula somam-se a partir dos desvios da trajetória clássica  $S - S_{cl} \sim \hbar$ , caracterizados pela escala  $\hbar$ , que compreendem as flutuações quânticas [21].

H. B. G. Casimir, em 1948, considerou um campo eletromagnético em uma cavidade formada por duas placas metálicas paralelas e neutras, de áreas  $A$  e separação  $L$ , com  $\sqrt{A} \gg L$ . Impondo-se que o campo elétrico deve anular-se nas placas, consideradas ideais, os modos normais da cavidade são caracterizados pelo vetor de onda  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, n\pi/L)$ , com  $n$  inteiro. Quantizados, estes modos passam a ser descritos por osciladores harmônicos com frequência  $\omega = |\mathbf{k}|c$ , e energia do estado fundamental  $E = \hbar\omega/2$ . Embora a soma das energias dos estados fundamentais dos modos da cavidade seja infinita, demonstrou-se que existe uma contribuição finita para a diferença entre as energias de ponto zero na presença e na ausência das placas, respectivamente, o que define a energia de Casimir [22]

$$E = -\frac{\hbar c \pi^2 A}{720 L^3},$$

implicando na existência de uma força atrativa entre as placas.

Portanto, medindo-se a força mecânica entre duas placas, podemos, em princípio, obter informações a respeito das flutuações do vácuo. Embora esta força seja muito pequena ( $F \sim 0.1 \mu\text{N}$  para  $A = 1 \text{ cm}^2$  e  $L = 1 \mu\text{m}$ ), este fenômeno foi confirmado experimentalmente, pela primeira vez em 1958, por M. Sparnaay [23] e, mais recentemente, no final da década de 1990, por Lamoreaux [24] e Mohideen e Roy [25]. É importante ressaltar que a eletrodinâmica clássica não prevê a existência desta força, uma vez que as placas são neutras. Portanto, como dito acima, esta força, de natureza puramente quântica, é uma manifestação macroscópica do vácuo quântico [26].

Note que a definição de energia de ponto zero decorre, necessariamente, do fato de se considerar regiões finitas do espaço, delimitadas por fronteiras, de forma que a força de Casimir surge como resposta do vácuo ao confinamento. Portanto, variando-se as dimensões da região delimitada do espaço, espera-se que a energia de Casimir seja correspondentemente modificada. De fato, verifica-se da expressão acima que a energia de Casimir depende apenas das dimensões da cavidade.

É importante notar a dependência da força de Casimir com a geometria das fronteiras que confinam o vácuo. O próprio Casimir foi o primeiro a considerar os aspectos geométricos das fronteiras, propondo em 1953 um modelo semiclássico para a estabilidade do elétron [27]. Neste

modelo, assume-se que o elétron seja constituído por uma casca esférica perfeitamente condutora com carga total  $e$ , na qual a força de repulsão de Coulomb é balanceada pela força atrativa de Casimir. Em 1968, Boyer [28] mostrou que a força de Casimir associada a geometria esférica é *repulsiva*, invalidando esta proposta para se explicar a estabilidade do elétron. Apesar deste resultado negativo, o modelo do elétron foi importante para evidenciar que o sinal da força de Casimir depende da geometria do problema, impossibilitando que se conheça *a priori* se esta força será repulsiva ou atrativa. No início da década de 1990, tornou-se evidente que esta força depende também das propriedades eletromagnéticas das fronteiras [29]. Mais recentemente, numa abordagem geral [30], calculou-se a energia de Casimir entre objetos compactos de geometrias arbitrárias.

### 1.3 O efeito Casimir dinâmico

Até aqui tratamos o caso em que as fronteiras que confinam o campo são estáticas, o que resulta numa expressão independente do tempo para a energia de Casimir. Quando se considera fronteiras móveis — tanto fronteiras materiais, como originalmente considerado por Casimir, como campos clássicos arbitrários — ocorre o que se denomina efeito Casimir dinâmico (ECD). A manifestação mais notória do ECD, em que a energia de Casimir torna-se dependente do tempo, consiste na criação de partículas a partir do vácuo [31].

Voltando ao caso estático, a força de Casimir entre dois espelhos imersos no vácuo é uma consequência da diferença da pressão de radiação entre ambos os lados dos espelhos que espalham as flutuações do vácuo. No caso de um único espelho em repouso no vácuo, a força média que sobre ele atua é nula dado o balanço entre as taxas de espalhamento em ambos os seus lados. Entretanto, quando o espelho encontra-se em movimento, com uma certa lei  $q(t)$ , esta simetria é quebrada e o vácuo, reagindo ao movimento do espelho, induz sobre este uma força resultante [32].

Os efeitos dissipativos sofridos por um corpo que se movimenta em um ambiente que apresenta flutuações foram primeiramente descritos por Einstein [33]. Em 1966 mostrou-se que as relações de flutuação-dissipação obtidas por Einstein são igualmente válidas no contexto quântico [34]. A energia mecânica dissipada desta maneira é associada à emissão de radiação pelo espelho. A força de reação, sob a forma de radiação emitida pelo espelho, é uma consequência da troca de momento deste com o campo. Entretanto, se um espelho em movimento no vácuo emite radiação, torna-se,

aparentemente, possível distinguir entre o movimento uniforme e o repouso, contrariando assim o princípio da relatividade do movimento. Esta força foi calculada primeiramente por Fulling e Davies [35], para o caso de um campo escalar em um espaço-tempo bidimensional, e sua expressão

$$F_m = \frac{\hbar}{6\pi c^4} \frac{d^3 q(t)}{dt^3}.$$

permite-nos concluir que, para um espelho em movimento retilíneo e uniforme, esta força é nula. É interessante notar que esta força é também nula para o caso de aceleração uniforme, o que faz com que a massa inercial do espelho não seja modificada [36]. Se o mesmo espelho estiver em movimento em um campo térmico, esta força passa a ser proporcional à primeira derivada temporal de seu movimento, e portanto não anula para o caso de um movimento uniforme (de forma análoga à dissipação do movimento de um corpo que se move em um meio viscoso). Devemos observar aqui que, para o caso do campo eletromagnético em três dimensões, esta força é proporcional à quinta derivada temporal do movimento do espelho [32]

$$F_m = -\frac{\hbar A}{60\pi^2 c^4} \frac{d^5 q(t)}{dt^5}.$$

O fenômeno da criação de partículas a partir do vácuo quântico tem sido exaustivamente estudado desde a quantização do campo de radiação numa cavidade com espelhos móveis, empreendida por Moore [37] no início da década de 1970. Neste caso, podemos ter uma amplificação da radiação emitida (em relação ao caso em que um único espelho encontra-se presente), quando um dos espelhos desenvolve um movimento oscilatório cuja frequência é um múltiplo inteiro de um dos modos naturais da cavidade [31].

Para tornar o ECD matematicamente tratável, impomos ao campo algum tipo de condição de contorno, o que representa a ação das fronteiras sobre o campo. Para espelhos perfeitamente refletivos, impomos a condição de que sobre eles o campo seja nulo. Uma importante consequência deste fato, apontada primeiramente por Moore [37], refere-se à ausência de um operador hamiltoniano que governe a evolução temporal do campo no interior da cavidade. Para demonstrar este fato, vamos assumir, por contradição, que um tal hamiltoniano exista, o que implica na existência de um operador de evolução unitário  $U(t)$ , com a seguinte propriedade

$$\Phi(x, t) = U(t)\Phi(x, t_0)U^\dagger(t),$$

onde  $\Phi(x, t_0)$  representa o operador de campo no tempo  $t_0$  e  $\Phi(x, t)$  o operador num tempo posterior  $t > t_0$ . Entretanto, se escolhermos o ponto  $(x, t_0)$  sobre o espelho móvel, então, devido às

condições de contorno, temos  $\Phi(x, t_0) = 0$  e torna-se impossível a obtenção de um valor não nulo para  $\Phi(x, t)$  através de uma transformação unitária.

Apesar da inexistência de um operador hamiltoniano completo para o sistema, é possível, conforme detalhamos nos capítulos 3 e 4, descrever o campo no interior de uma cavidade com espelhos móveis através de uma teoria *efetiva*, construída primeiramente por Law [38] em 1994. Por fim, é importante mencionar o desenvolvimento de um modelo microscópico da interação do espelho com o campo no interior da cavidade que prescinde de condições de contorno [39]. Nesta formulação, que apresenta algumas correções àquela apresentada por Law, os autores descrevem o espelho como um campo de matéria quantizado interagindo com o campo eletromagnético no interior da cavidade, formando assim *polaritons dinâmicos*.

## 1.4 Detecção experimental do efeito Casimir

Dado que a força de Casimir é extremamente fraca, a sensibilidade do aparato utilizado para a sua detecção consiste em forte barreira tecnológica. Apresentamos a seguir uma breve descrição dos principais experimentos realizados até o momento para a detecção deste efeito [26].

Sparnaay [23], em 1958, foi o primeiro a realizar um experimento com o intuito de medir o efeito Casimir. Utilizou-se uma balança de molas, com uma sensibilidade entre  $(0.1 - 1) \times 10^{-8}$ N, para a medição da força entre duas placas metálicas. O aparato experimental foi desenhado de maneira a isolar eletricamente estas placas do restante do equipamento pois, como apontado por Sparnaay, uma diferença de potencial de apenas 17 mV entre as placas tornar-se-ia suficiente para impossibilitar a medida. Dadas as incertezas envolvidas neste experimento, apenas uma concordância qualitativa com a fórmula de Casimir pôde ser obtida. Um dos materiais utilizados por Sparnaay, o alumínio, resultou em uma força repulsiva, atribuída à presença de impurezas nas placas, fato que tornou inconclusiva a medida do sinal da força. Apesar deste resultado, o experimento de Sparnaay foi importante para apontar os principais problemas a serem superados para que uma medida precisa da força de Casimir pudesse ser efetuada. Dentre eles, mencionamos a necessidade de uma medida mais precisa do paralelismo, da separação e do potencial eletrostático (devido a presença de impurezas) entre as placas. Deve-se observar que a dependência da força de Casimir com a quarta potência da distância de separação entre as placas ( $L^{-4}$ ), exige grande precisão na medição dessas distâncias.

O experimento realizado por Lamoreaux [24], em 1997, é considerado o primeiro a confirmar a existência do efeito Casimir. Quase todos os parâmetros relevantes foram medidos de maneira independente da força, tornando consistente o cálculo da precisão experimental. Utilizou-se uma balança baseada em um pêndulo de torção para a medição da força entre uma superfície esférica e uma placa, superando assim o problema de se manter o paralelismo entre duas superfícies planas. A força de Casimir resultaria em um torque, induzindo uma mudança no ângulo da balança de torção. O experimento mostrou uma excelente concordância com as previsões teóricas, com erro de 5%. Apesar do sucesso, os dados obtidos por Lamoreaux não eram precisos o suficiente para incluir as correções devido a temperatura finita.

A utilização, por Mohideen *et al.* [25, 40], de um microscópio de força atômica com precisão de  $10^{-12}$  N permitiu uma medida da força de Casimir entre uma placa e uma esfera com erro de 1%, superando todo os problemas apontados por Sparnaay. A influência da rugosidade e condutividade finita das superfícies, sobre a força de Casimir, foi também considerada, e mostrou-se que tais correções são indispensáveis para a determinação desta força para distâncias da ordem de  $1 \mu\text{m}$ . Os efeitos devido a temperatura finita são muito menores que 1% para as separações consideradas nestes experimentos.

Um dos aspectos mais interessantes do efeito Casimir é sua forte dependência com a geometria. Em 1999, Roy e Mohidden [41] realizaram um experimento demonstrando essa dependência não trivial através da utilização de um microscópio de força atômica para a medição da força de Casimir entre uma placa com pequenas rugosidades senoidais e uma esfera. Observou-se a existência de uma força lateral atuando sobre a esfera, que se anula nos pontos de equilíbrio estável, onde a amplitude das rugosidades é máxima. Esta força lateral foi verificada com maior precisão por Chen e Mohideen em 2002 [42], onde apontou-se a possibilidade de sua utilização para promover translações em dispositivos microeletromecânicos.

Recentemente, reportou-se a medição dos efeitos da temperatura sobre o que se denomina força de Casimir-Polder entre um condensado de Bose-Einstein e um dielétrico [43]. Este foi o primeiro experimento a medir a dependência da temperatura em um sistema do tipo Casimir. Trabalhando com o dielétrico a uma temperatura de 605 K, enquanto o ambiente é mantido a 300 K, verificou-se que a força é multiplicada por um fator 3, em relação a seu valor na situação de equilíbrio térmico, mostrando excelente acordo com a teoria [44].

Em se tratando do ECD, o arranjo mais simples capaz de produzir a radiação de Casimir

consiste num espelho oscilando numa direção perpendicular à sua superfície. Contudo, o pequeno número de fótons assim criados não poderia ser detectado através da tecnologia atualmente disponível. Se este espelho, no entanto, constituir parte das fronteiras de uma cavidade ressonante, esta deve atuar como um multiplicador dos fótons produzidos caso a frequência de oscilação do espelho iguale-se ao dobro de uma das frequências fundamentais da cavidade (amplificação paramétrica). Apesar de todos os esforços dispendidos, a radiação de Casimir não foi ainda observada experimentalmente. Abaixo descrevemos duas propostas para sua verificação experimental.

Dado que um experimento baseado no movimento mecânico da fronteira móvel da cavidade é tecnologicamente inviável [45], o experimento conhecido como MIR (*Motion Induced Radiation*) [46], apóia-se na proposta apresentada por Lozovik [47] e por Yablonovitch [48] de utilização de pulsos curtos e intensos de laser para provocar mudanças abruptas nas propriedades refletoras de um semicondutor. A idéia por trás do MIR é simular o movimento da fronteira móvel pela alternância da superfície refletora de um espelho composto, que consiste de uma placa metálica revestida de uma camada semicondutora. Através da incidência de um pulso laser sobre o semicondutor completamente transparente, este tornar-se-á completamente refletor para a radiação da cavidade. Portanto, através da incidência de uma sequência de pulsos laser sobre o semicondutor, obtêm-se um espelho que efetivamente oscila com uma amplitude igual à largura da camada semicondutora. A sensibilidade da antena proposta para a detecção da radiação gerada é da ordem de 100 fótons em uma única medida.

Kim *et al.* propuseram uma alternativa a este experimento explorando o fenômeno da superradiância para a amplificação da radiação de Casimir gerada por uma cavidade ressonante com espelhos móveis [49]. A indução do processo de superradiância em uma amostra atômica contendo entre  $10^7 - 10^8$  átomos, pelos fótons gerados pelo ECD, possibilitaria a detecção do sinal. A combinação desta possível e engenhosa proposta para a amplificação da radiação de Casimir com a simulação do movimento de espelhos através de pulsos laser e uma placa metálica revestida de uma camada semicondutora, pode inaugurar uma nova etapa para a medição do ECD.

## Capítulo 2

# Controle da Interação Sistema-Reservatório Através de Sistemas Quânticos Não-Estacionários

### 2.1 Introdução

A teoria quântica da informação tem atraído grande atenção recentemente devido a sua posição estratégica, combinando várias áreas da física, tanto teórica quanto experimental. Como, eventualmente, todas as áreas da física de baixas energias podem fornecer potenciais plataformas para a implementação de operações lógicas quânticas, esforços tem sido dispendidos no sentido de superar problemas que constituem forte barreira contra a realização destas operações. Estes problemas estão relacionados tanto a fenômenos da física fundamental — como a decoerência e a não localidade — como também aos de natureza tecnológica como o endereçamento de sistemas quânticos individuais, separados por apenas alguns  $\mu\text{m}$  [50].

Enquanto o debate em torno do fenômeno da não localidade encontra suporte em um conjunto de resultados experimentais — tais como i) a evidência tecnológica contra os chamados loopholes [51], ii) a demonstração da violação da desigualdade de Bell com visibilidade de franja de dois fótons em excesso de 97% [52] e iii) o sucesso na implementação do processo de teleportação quântica [53] — o programa de proteção de estados encontra-se ainda em um estágio anterior, apesar de todos os desenvolvimentos. Uma sugestão promissora nesse domínio refere-se à possibilidade da manipulação do acoplamento do sistema com o reservatório através de interações adicionais entre o sistema de interesse e um outro auxiliar, clássico. Esta forma de controle da decoerência através da chamada engenharia de reservatórios foi proposta para sistemas atômicos de dois níveis, explorando um reservatório estruturado [12] ou imitando a ação de um banho

comprimido [11]. No contexto de íons aprisionados, para além de uma proposta teórica [10], a engenharia de reservatórios foi experimentalmente implementada para superposições de estados vibracionais de um único íon aprisionado [9]. Uma outra estratégia, também experimentalmente investigada [54], envolve o processo de decoerência coletiva, onde um sistema de múltiplas partes que interage com um reservatório comum [16] exhibe subespaços livres de decoerência (SLD). Enquanto que um reservatório comum é crucial para a proteção da coerência quântica em SLDs, os protocolos de correção de erros quânticos [7] pressupõem, ao invés disso, que o processo de decoerência age, de forma independente, sobre cada sistema quântico. Uma discussão sobre as bases físicas por trás das suposições de um reservatório comum ou de reservatórios distintos é apresentada em detalhes nas Refs. [17, 55].

Devemos também mencionar uma proposta recente, para o controle da coerência de um sistema quântico de dois níveis [56], baseada em métodos de desacoplamento dinâmico randômico [19]. Tais métodos são similares às técnicas de supressão da decoerência através do uso de pulsos externos apropriados [18], que atuam sobre o sistema de interesse. Na Ref. [20], em um escopo mais abrangente, os autores propuseram um modelo para o desacoplamento de um sistema quântico aberto geral, do meio ambiente, também baseado na ação de pulsos externos desenhados de forma a induzir mudanças no sistema de interesse que sejam mais rápidas que a menor escala de tempo acessível aos graus de liberdade do reservatório.

Neste estudo atingimos as metas das Refs. [18, 19, 20, 56], que se encontram além da proteção de estados quânticos através da engenharia de reservatórios, a partir de um método distinto: demonstramos, por meio de suposições gerais, que um oscilador harmônico não estacionário pode ser quase que completamente desacoplado do meio ambiente, resultando num fator de amortecimento característico do reservatório desprezível. Diferentemente dos métodos de desacoplamento dinâmico apresentados na literatura [18, 19, 20, 56, 57], que exigem que se interfira no sistema em escalas de tempo menores que o tempo de correlação do reservatório, nossa técnica aproveita-se da frequência natural do sistema não estacionário, adicionando a ela uma pequena amplitude de forma a se atingir as escalas de tempo curtas do reservatório. Note que, diferentemente da nossa proposta, bem como das propostas apresentadas nas Refs. [18, 19, 20, 56], os esquemas de engenharia de reservatório requerem um conhecimento prévio do estado que se deseja proteger. Evidentemente, tal requerimento proíbe o uso da engenharia de reservatório para a implementação de operações lógicas, tornando os esquemas de desacoplamento dinâmico mais atrativos. Obser-



vamos que o controle da decoerência através da modulação do acoplamento do sistema com o reservatório foi proposto anteriormente na Ref. [58] mas, como nas Refs. [19, 56], tal controle é atingido para um sistema de dois níveis e não para um modo do campo, como no presente estudo. Também baseados na suposição de um controle arbitrariamente rápido do hamiltoniano, podemos mencionar aqui os tópicos de controle ótimo [59] e estocástico [60] da decoerência, que contam com pulsos laser externos no primeiro caso e com uma modulação estocástica de um parâmetro do sistema no segundo caso. Finalmente, mencionamos a técnica da codificação multi-níveis de estados lógicos [61], que torna as operações lógicas quânticas imunes aos efeitos da decoerência.

O presente capítulo é organizado da seguinte maneira: na Seção 2.2 apresentamos o modelo proposto para o controle da decoerência; na seção 2.3 é apresentado um esquema para a construção de um modo não estacionário do campo, baseado na interação deste modo com um átomo de dois níveis; finalmente, na seção 2.4, apresentamos nossas observações finais.

## 2.2 Modelo para o controle da decoerência

O hamiltoniano de um modo não estacionário acoplado com o meio ambiente pode ser escrito como

$$H(t) = \omega(t)a^\dagger a + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_k \lambda_k(t) (ab_k^\dagger + a^\dagger b_k), \quad (2.1)$$

com  $a^\dagger$  ( $a$ ) e  $b_k^\dagger$  ( $b_k$ ) representando os operadores de criação (aniquilação) para o campo não estacionário  $\omega(t)$  e para o  $k$ -ésimo oscilador do reservatório  $\omega_k$ , respectivamente. Vamos assumir a seguinte dependência temporal para o modo do campo (sistema)

$$\omega(t) = \omega_0 - \chi \sin(\zeta t).$$

A função  $\lambda_k(t)$ , que descreve o acoplamento do sistema com o reservatório, será discutida mais abaixo. Como estamos interessados aqui na proteção de estados, vamos considerar o caso adiabático, definido pela relação

$$\chi, \zeta \ll \omega_0,$$

evitando desta maneira a injeção de ruído no modo de interesse através da geração e espalhamento de fótons pelo ECD [62].

A dependência temporal simples apresentada pelo hamiltoniano livre  $H_0 = \omega(t)a^\dagger a + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k$

permite-nos, através da transformação unitária

$$U(t) = \exp \left( -i \int_0^t H_0(\tau) d\tau \right),$$

descrever o hamiltoniano de interação na representação de interação

$$V(t) = a\Lambda^\dagger(t) + a^\dagger\Lambda(t), \quad (2.2)$$

onde definimos o operador  $\Lambda(t) = \sum_k \lambda_k(t)b_k \exp [i\Delta_k(t)]$  e os parâmetros  $\Delta_k(t) = \Omega(t) - \omega_k t$ , com  $\Omega(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$ . Para o caso de acoplamento fraco entre o sistema e o reservatório, isto é, para  $\lambda_k(t) \ll \omega(t)$ , a evolução da matriz densidade do campo não estacionário, em segunda ordem de perturbação no acoplamento, é dada por

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = - \int_0^t dt' \text{Tr}_R [V(t), [V(t'), \rho_R(0) \otimes \rho(t)']]. \quad (2.3)$$

Na dedução desta expressão utilizamos a aproximação usual  $\rho_R(0) \otimes \rho(t)$ . Assumindo agora que a distribuição de frequências do reservatório aproxima-se do contínuo, com a densidade espectral  $\sigma(\mu)$ , podemos substituir a soma sobre os modos do reservatório por uma integral, isto é, podemos escrever

$$\sum_k \rightarrow (2\pi)^{-1} \int_0^\infty d\mu \sigma(\mu).$$

Desta maneira, as integrais das funções de correlação que aparecem na Eq. (2.3) assumem a forma

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \langle \Lambda^\dagger(t)\Lambda(t') \rangle &= e^{-i\frac{\chi}{\xi} \cos(\zeta t)} \int_0^t dt' e^{i\frac{\chi}{\xi} \cos(\zeta t')} \\ &\times \int_0^\infty \frac{d\mu}{2\pi} e^{-i(\mu-\omega_0)(t-t')} \sigma(\mu) N(\mu) \lambda(\mu, t) \lambda(\mu, t'), \end{aligned} \quad (2.4)$$

com a excitação térmica média do reservatório  $N(\mu)$  definida pela relação  $\langle b^\dagger(\mu)b(\mu') \rangle = N(\mu)\delta(\mu-\mu')$ .

Para resolver estas integrais, vamos modelar o acoplamento do sistema com o reservatório através da lorentziana

$$\lambda(\mu, t) = \lambda_0 \frac{\xi^2}{(\omega(t) - \mu)^2 + \xi^2}, \quad (2.5)$$

onde o parâmetro  $\xi$  representa a largura espectral do acoplamento em torno da frequência do modo não estacionário. É bem razoável, para o caso de acoplamento fraco aqui considerado, que se assumam uma forma lorentziana para a função  $\lambda(\mu, t)$ , centrada em  $\omega(t)$ . Uma estimativa da média temporal do operador  $\Lambda(t)$  revela que a intensidade do acoplamento do sistema com o reservatório tem a forma  $\lambda_0/|\mu - \omega_0|$ , tal que quanto maior a dessintonia entre o modo do reservatório e a

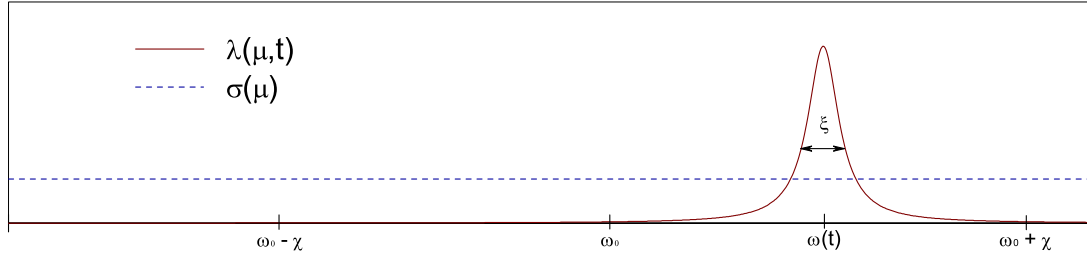


Figura 2.1: Representação da distribuição espectral  $\sigma(\mu)$  do reservatório, os máximos  $\omega_0 \pm \chi$  da frequência do sistema, bem como um valor particular  $\omega(t)$  em torno do qual encontra-se a lorentziana de acoplamento sistema-reservatório  $\lambda(\mu, t)$ .

frequência natural do sistema, menor o acoplamento. Na Fig. 2.1 representa-se a distribuição espectral do reservatório  $\sigma(\mu)$ , descrita pelo ruído branco markoviano. Também apresentamos os extremos  $\omega_0 \pm \chi$  da frequência do sistema, bem como um valor particular  $\omega(t)$  desta frequência, em torno da qual encontra-se a lorentziana de acoplamento sistema-reservatório  $\lambda(\mu, t)$ .

Aplicando na Eq. (2.4) a seguinte transformação de variáveis

$$\begin{aligned}\tau &= \zeta(t - t'), \\ \nu &= (\omega_0 - \mu) / \chi - \sin(\zeta t),\end{aligned}$$

e assumindo que tanto  $\sigma$  quanto  $N$  sejam funções que variam lentamente em torno da frequência  $\omega_0$ , obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t dt' \langle \Lambda^\dagger(t) \Lambda(t') \rangle &= \varkappa \kappa^4 \chi N(\omega_0) \int_0^{\zeta t} d\tau e^{-i\varepsilon F(\tau)} \\ &\times \int_{-\infty}^a \frac{d\nu}{2\pi} \frac{e^{i\nu\varepsilon\tau}}{(\nu^2 + \kappa^2) [(\nu + G(\tau))^2 + \kappa^2]},\end{aligned}\quad (2.6)$$

onde, além das funções  $F(\tau) = \cos(\zeta t - \tau) + \cos(\zeta t) - \tau \sin(\zeta t)$ ,  $G(\tau) = \sin(\zeta t) - \sin(\zeta t - \tau)$  e  $a = \omega_0 / \chi - \sin(\zeta t)$ , definimos os parâmetros adimensionais

$$\begin{aligned}\varkappa &= \Gamma_0 / \zeta, \\ \kappa &= \xi / \chi, \\ \varepsilon &= \chi / \zeta,\end{aligned}$$

sendo  $\Gamma_0 = \sigma(\omega_0) \lambda_0^2$  a taxa usual de amortecimento para o modo estacionário. Como estamos considerando aqui o caso adiabático, em que  $\chi / \omega_0 \ll 1$ , o limite superior  $a$  da integral na frequência

pode ser estendido para o infinito (lembrando também que o integrando é uma função fortemente oscilante). Com isso a integral pode ser calculada analiticamente, levando-nos à seguinte forma para a função de correlação

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \langle \Lambda^\dagger(t) \Lambda(t') \rangle &= 2N(\omega_0) \varkappa \kappa^4 \chi \int_0^{\zeta t} d\tau \frac{e^{i\varepsilon[F(\tau) + \frac{1}{2}\tau G(\tau)]}}{G^3(\tau)(1 + \Theta^2)} e^{-\varepsilon\kappa\tau} \\ &\times \left\{ G(\tau) \cos\left(\frac{\varepsilon\tau G(\tau)}{2}\right) + 2\kappa \sin\left(\frac{\varepsilon\tau G(\tau)}{2}\right) \right\} \\ &= N(\omega_0) \gamma(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde  $\Theta = 2\kappa/G(\tau)$  enquanto que  $\gamma(t)$  relaciona-se à taxa efetiva de amortecimento. Devemos lembrar aqui que a correlação acima é apenas uma dentre dezesseis. Aquelas nas formas  $\langle \Lambda^\dagger(t) \Lambda(t') \rangle$  e  $\langle \Lambda(t) \Lambda^\dagger(t') \rangle$  fornecem resultados proporcionais a  $N(\omega_0)$  e a  $N(\omega_0) + 1$ , respectivamente, enquanto que aquelas nas formas  $\langle \Lambda^\dagger(t) \Lambda^\dagger(t') \rangle$  e  $\langle \Lambda(t) \Lambda(t') \rangle$  são nulas, pois assumimos aqui um reservatório térmico. Por uma questão de completeza, antes de analisarmos a influência dos parâmetros  $\varkappa$ ,  $\kappa$ , e  $\varepsilon$  sobre a taxa de amortecimento de um modo não estacionário, vamos calcular o operador densidade reduzido do modo em questão. A equação mestra que governa a evolução do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= [N(\omega_0) + 1] \{ 2 \operatorname{Re} [\gamma(t)] a\rho(t)a^\dagger - \gamma^*(t)\rho(t)a^\dagger a - \gamma(t)a^\dagger a\rho(t) \} \\ &+ N(\omega_0) \{ 2 \operatorname{Re} [\gamma(t)] a^\dagger \rho(t)a - \gamma(t)\rho(t)aa^\dagger - \gamma^*(t)aa^\dagger \rho(t) \}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Assumindo que o reservatório esteja a temperatura zero, caso em que  $N(\omega_0) = 0$ , a equação acima reduz-se à forma

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = [\gamma(t) + \gamma^*(t)] a\rho(t)a^\dagger - \gamma^*(t)\rho(t)a^\dagger a - \gamma(t)a^\dagger a\rho(t). \quad (2.9)$$

Para resolver esta equação de operadores vamos reescrevê-la através da função característica na forma normal ordenada

$$\chi(\eta, \eta^*, t) = \operatorname{Tr} [\rho(t) \exp(\eta a^\dagger) \exp(-\eta^* a)],$$

que nos leva à equação

$$\frac{\partial \chi(\eta, \eta^*, t)}{\partial t} = -\gamma^*(t) \eta \frac{\partial \chi(\eta, \eta^*, t)}{\partial \eta} - \gamma(t) \eta^* \frac{\partial \chi(\eta, \eta^*, t)}{\partial \eta^*}. \quad (2.10)$$

Assumindo que a solução de (2.10) seja da forma  $\chi(\eta, \eta^*, t) = \chi(\eta(t), \eta^*(t))$ , obtemos  $\eta(t) = \eta_0 e^{-\Gamma(t)/2}$ , onde  $\eta_0 \equiv \eta(t=0)$  e

$$\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$$

a taxa efetiva de amortecimento. Para calcularmos o operador densidade, vamos supor que  $\chi(\eta, \eta^*, t) = \chi(\eta, \eta^*, t=0)|_{\eta \rightarrow \eta(t)}$ . Desta forma, a partir da representação  $P$  de Glauber-Sudarshan e do estado inicial  $|\Psi(t=0)\rangle = \mathcal{N} \sum_{\ell} c_{\ell} |\alpha_{0\ell}\rangle$ , com  $|\alpha_{0\ell}\rangle$  representando o estado coerente, obtemos o operador densidade reduzido do modo não estacionário escrito na forma

$$\rho(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{\ell\ell'} C_{\ell\ell'}(t) |\alpha_{\ell}(t)\rangle \langle \alpha_{\ell'}(t)|, \quad (2.11)$$

onde  $\alpha_{\ell}(t) = \alpha_{0\ell} e^{-\gamma(t)}$  e

$$C_{\ell\ell'}(t) = \exp \left\{ \left[ -\frac{1}{2} (|\alpha_{0\ell}|^2 + |\alpha_{0\ell'}|^2) + \alpha_{0\ell'}^* \alpha_{0\ell} \right] [1 - e^{-2\text{Re}[\Gamma(t)]}] \right\} c_{\ell'}^* c_{\ell}. \quad (2.12)$$

Podemos notar que, como esperado, a taxa de decaimento é uma função real, mesmo quando  $\Gamma(t)$  é complexo. Para o caso particular em que o modo não estacionário é preparado no estado de superposição  $|\Psi(0)\rangle = \mathcal{N} (|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle)$ , a função que multiplica os elementos fora da diagonal da matriz densidade reduzida torna-se.

$$C_{12}(t) = \exp \left[ -2|\alpha_0|^2 (1 - e^{-2\text{Re}[\Gamma(t)]}) \right]. \quad (2.13)$$

### 2.2.1 O mecanismo por trás da atenuação do acoplamento entre sistema e reservatório

Passamos agora à análise da influência dos parâmetros  $\varkappa$ ,  $\kappa$ , e  $\varepsilon$  sobre a taxa efetiva de amortecimento  $\Gamma(t)$  que, por sua vez, determina o tempo de decoerência de uma superposição  $|\Psi(0)\rangle$ , conforme as Eqs. (2.12) e (2.13). Vamos começar pelo parâmetro  $\varkappa = \Gamma_0/\zeta$ , que é uma medida da taxa de variação da frequência do modo de interesse,  $\zeta$ , comparada com a constante de amortecimento  $\Gamma_0$ . É evidente à partir da Eq. (2.7), como esperado, que a função de amortecimento  $\Gamma(t)$  diminua na proporção direta de  $\varkappa$ . Por outro lado, quando o valor de  $\zeta$  se aproxima de  $\Gamma_0$  esperamos também que  $\Gamma(t)$  restitua a constante  $\Gamma_0$ . No que se refere ao parâmetro  $\kappa = \xi/\chi$ , que relaciona o intervalo de oscilação da frequência  $\omega(t)$  com a largura da lorentziana,  $\xi$ , esperamos que a função de amortecimento diminua com o aumento de  $\chi$ , contanto que a taxa de variação  $\zeta$  seja ajustada para que seja significativamente maior que  $\Gamma_0$ . Quando ambos os parâmetros,  $\kappa$  e  $\varkappa$ , são ajustados convenientemente, ambos significativamente menores que a unidade, o acoplamento entre o sistema e o reservatório é enfraquecido, bem como a função de amortecimento  $\Gamma(t)$ , aumentando consequentemente o tempo de decoerência do estado inicial. De forma distinta do que ocorre com  $\varkappa$ , nossa expectativa quanto ao parâmetro  $\kappa$  não é diretamente revelado pela Eq. (2.7):

da mesma forma que é confirmada pelo fator  $\kappa^4$ , ela é refutada pela função  $e^{-\varepsilon\kappa\tau}$  na integral. Finalmente, o parâmetro  $\varepsilon = \chi/\zeta$  pode também ser definido como  $\varepsilon = \varkappa/\kappa$  (dado que a constante de amortecimento  $\Gamma_0$  seja aproximadamente igual a largura da lorentziana  $\xi$ ), comparando as contribuições dos parâmetros  $\varkappa$  e  $\kappa$ . Pela mesma razão que  $\kappa$ , o papel desempenhado por  $\varepsilon$  no comportamento de  $\Gamma(t)$  é também obscuro pela estrutura funcional da Eq. (2.7).

Observamos que a análise matemática apresentada acima pode ser antecipada por razões físicas. De fato, apesar de termos assumido um acoplamento súbito entre o sistema e o reservatório, o intervalo característico para uma ação apreciável do reservatório sobre o sistema estacionário é da ordem de  $\Gamma_0^{-1}$ . Entretanto, quando a frequência do sistema altera-se continuamente no tempo, sua taxa de variação (proporcional a  $\zeta$ ) assume um papel crucial no acoplamento efetivo entre o sistema e o reservatório. Lembrando que este acoplamento se dá em torno da frequência  $\omega(t)$ , em uma região definida pela largura  $\xi$  da lorentziana, uma taxa de variação significativa, com  $\zeta$  maior que  $\Gamma_0$ , dificulta a ação efetiva do reservatório sobre o sistema uma vez que o tempo de interação entre ambos é reduzido proporcionalmente a  $\varkappa$ . Por outro lado, quando  $\zeta$  é menor que  $\Gamma_0$ , há tempo suficiente para que o reservatório atue sobre o sistema, induzindo a relaxação do mesmo antes que uma mudança apreciável na frequência  $\omega(t)$  tenha ocorrido. Em relação a amplitude de oscilação  $\chi$ , seu papel é o de acionar o mecanismo de ação da taxa de variação  $\zeta$ . De fato, quando a amplitude  $\chi$  é menor que a largura  $\xi$  da lorentziana, o sistema não estacionário não deixa a região (no espaço das frequências) na qual ocorre um acoplamento efetivo com o reservatório; portanto, tal sistema decai como se fosse um sistema estacionário, qualquer que seja o valor de  $\zeta$ . Entretanto, quando  $\chi$  é maior que  $\xi$ , o acoplamento efetivo do sistema com o reservatório move-se continuamente para regiões diferentes do espectro, acionando assim a ação da taxa de variação  $\zeta$ , como descrito acima.

Para tornar ainda mais claro o papel dos parâmetros  $\varkappa$  e  $\kappa$  na taxa de amortecimento, na Fig. 2.2 mostramos o gráfico da função  $C_{12}(t)$  (Eq. (2.13)) contra o parâmetro  $\Gamma_0 t$ , considerando o estado inicial de superposição  $|\Psi(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle)$  com  $\alpha_0 = 1$ .

A linha preta (sólida cheia) corresponde ao caso de um modo estacionário, em que  $\omega(t) = \omega_0$ , e o fator de decaimento assume então a forma conhecida  $\Gamma(t) = \Gamma_0 t/2$ . As linhas laranja (sólida) e verde (tracejada) correspondem, respectivamente, aos casos em que  $\varkappa = 1/2$  e  $1/10$ , ambas com  $\kappa = 1/2$ . Como esperado, a função de amortecimento decai tanto mais lentamente conforme a taxa de variação da frequência aumenta, isto é, conforme  $\varkappa$  diminui. De fato, uma taxa de variação

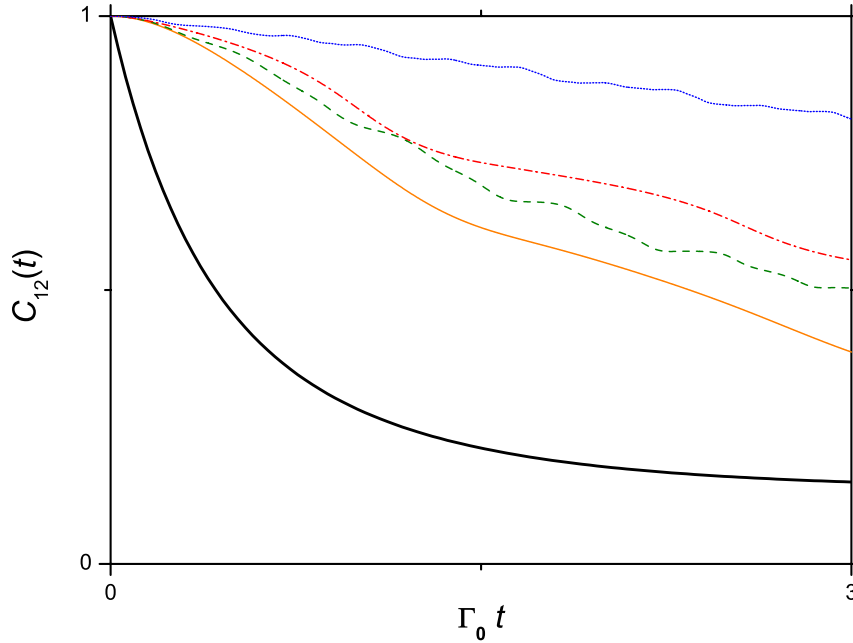


Figura 2.2: Gráfico da função  $C_{12}(t)$  contra o parâmetro  $\Gamma_0 t$  para o estado inicial  $|\Psi(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle)$  com  $\alpha_0 = 1$ . A linha preta (sólida cheia) corresponde ao caso do modo estacionário onde  $\omega(t) = \omega_0$ ; As linhas laranja (sólida) e verde (tracejada) correspondem aos casos  $\varkappa = 1/2$  e  $1/10$ , para  $\kappa = 1/2$ ; finalmente, as linhas vermelha (tracejada-pontilhada) e azul (pontilhada) correspondem aos casos  $\varkappa = 1/2$  e  $\varkappa = 1/10$ , para  $\kappa = 1/10$ .

mais alta dificulta a ação do reservatório sobre o sistema, aumentando assim o tempo de resposta deste. Fixando agora  $\kappa = 1/10$ , as linhas vermelha (tracejada-pontilhada) e azul (pontilhada) correspondem aos casos em que  $\varkappa = 1/2$  e  $\varkappa = 1/10$ , respectivamente. Podemos ver que a amplitude de oscilação  $\chi$  é mais eficiente para a atenuação do amortecimento do que a taxa de variação  $\zeta$ . Este resultado, a princípio inesperado, revela interessantes aspectos da física de modos não estacionários em cavidades: em primeiro lugar, como demonstrado abaixo, *i*) a dependência temporal de  $\omega(t)$  – os valores das frequências  $\chi$  e  $\zeta$  – necessária para, praticamente, desligarmos o acoplamento entre o sistema e o reservatório pode ser construída através da utilização da interação átomo-campo; além disso, *ii*) no regime adiabático aqui estudado, onde  $\zeta/\omega_0, \chi/\omega_0 \ll 1$ , a interação átomo-campo pode ser descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings, apesar de o modo apresentar uma dependência temporal [63]. Consequentemente, todos os protocolos desenvolvidos para implementação de processos em modos estacionários — como por exemplo, a engenharia de estados ou hamiltonianos quânticos para a utilização em dispositivos lógicos — tornam-se

diretamente aplicáveis aos modos não estacionários estudados aqui.

As Figs. 2.3(a-e) mostram o processo de amortecimento na evolução da amplitude do estado coerente  $\alpha(t) = \alpha_0 \exp[-i\Omega(t) - \Gamma(t)]$ , que compõe a superposição  $|\Psi(t)\rangle$ . Todas as figuras referem-se ao mesmo intervalo de tempo utilizado na confecção da Fig. 2.2, e, portanto, resultam no mesmo número de ciclos decorrentes da rotação no espaço de fase devido ao fator  $e^{-i\Omega(t)}$ . Em todas as figuras ajustamos a razão fictícia  $\omega_0/\Gamma_0 = 10$  para tornar claro o processo de espiralamento de  $\alpha(t)$ . Na Fig. 2.3(a), que está relacionada à linha preta (sólida cheia) da Fig. 2.2, podemos observar a perda da excitação, levando o estado coerente inicial para o estado de vácuo. Nesta figura mostra-se também, através da linha pontilhada, a evolução da outra componente do estado de superposição,  $-\alpha(t)$ . As Figs. 2.3(b-e) correspondem, respectivamente, às linhas laranja (sólida), verde (tracejada), vermelha (tracejada-pontilhada) e azul (pontilhada) da Fig. 2.2, mostrando a supressão gradual da perda de excitação inicial que, diferentemente da Fig. 2.3(a), não ocorre em uma taxa uniforme, devido ao caráter oscilatório – vindo da Eq. (2.7) – de suas curvas correspondentes na Fig. 2.2. A Fig. 2.3(d) revela claramente este caráter não uniforme da perda de excitação através dos intervalos distintos entre os ciclos descritos pela amplitude  $\alpha(t)$  em seu caminho (obstruído) para o vácuo.

Para deixar claro que o mecanismo de supressão da decoerência — ilustrado nas Figs. 2.2 e 2.3 para a superposição particular  $|\Psi(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle)$  — aplica-se para qualquer estado inicial, na Fig. 2.4 é mostrado o gráfico da parte real da função de amortecimento efetivo  $\text{Re}[\Gamma(t)]$  contra o parâmetro  $\Gamma_0 t$ . De fato, voltando à equação mestra (2.9), podemos observar que quando  $\gamma(t)$  diminui, o amortecimento efetivo  $\Gamma(t)$  também diminui, enfraquecendo assim ambos os processos de relaxação e de decoerência. No caso extremo em que  $\gamma(t)$  se anula, obtemos a evolução livre do sistema. Como na Fig. 2.2, a linha preta (sólida cheia) corresponde ao caso em que temos um modo estacionário, resultando em  $\Gamma(t) = \Gamma_0 t/2$ . Confirmando que a função de amortecimento diminui conforme a taxa de variação  $\zeta$  aumenta, as linhas laranja (sólida) e verde (tracejada) correspondem aos casos  $\varkappa = 1/2$  e  $1/10$ , com  $\kappa = 1/2$ . Finalmente, mostrando que a função de decaimento também diminui conforme a amplitude de oscilação  $\chi$  aumenta, as linhas vermelha (tracejada-pontilhada) e azul (pontilhada) correspondem aos casos  $\varkappa = 1/2$  e  $\varkappa = 1/10$ , com  $\kappa = 1/10$ . Portanto, existe uma completa correspondência entre o processo de decoerência do estado particular  $|\Psi(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle)$  e o comportamento geral da taxa efetiva de decaimento  $\Gamma(t)$ , mostrando que nosso mecanismo de supressão de decoerência aplica-se a qualquer



estado inicial.

Em seguida, vamos considerar alguns aspectos sensíveis ao presente esquema de controle da decoerência. Em primeiro lugar, tratando-se do acoplamento  $\lambda_k(t)$  do sistema com o reservatório, podemos justificar sua dependência temporal através do tratamento de dois osciladores harmônicos acoplados, um dos quais com uma frequência dependente do tempo. Começamos com o acoplamento usual  $\mathcal{C}X_1X_2$ , onde  $X_1(t) = \mathcal{C}_1(t)(a_1 + a_1^\dagger)$  e  $X_2 = \mathcal{C}_2(a_2 + a_2^\dagger)$ . Na representação de interação e na aproximação de ondas girantes, obtemos uma interação dependente do tempo na forma  $\mathcal{C}(t) (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger)$ , similar ao que foi considerado nas Refs. [56, 64, 65, 66]. Mais que isso, como assumimos um modelo de acoplamento súbito entre o sistema e o reservatório em cada instante do tempo, é razoável supor que este acoplamento “segue” a modulação da frequência do modo da cavidade. Nosso esquema está baseado no fato de que, ao menos em ótica quântica, o acoplamento entre o sistema e o reservatório é suficientemente fraco, de maneira que podemos assumir como modelo deste acoplamento uma função lorentziana. Considerando mais uma vez dois osciladores harmônicos interagentes, mas agora ambos com frequências estacionárias  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , com uma intensidade de acoplamento  $\lambda$  —  $\omega_1$  desempenhando o papel do sistema e  $\omega_2$  o papel de um dos osciladores do reservatório — pode-se demonstrar que o acoplamento efetivo entre estes osciladores é dado por  $\lambda^2/\sqrt{\lambda^2 + \delta^2}$ , com  $\delta = |\omega_1 - \omega_2|$  [55], no caso de acoplamento fraco, em que  $\lambda \ll \delta$ , justificando assim o fato de a lorentziana apresentar uma pequena largura. Entretanto, para o caso de acoplamento forte, onde  $\lambda \gg \delta$  (assumindo uma frequência de corte para o reservatório) obtemos um acoplamento efetivo constante  $\lambda$ .

## 2.3 Engenharia do modo não estacionário

O ponto mais sensível, entretanto, é a engenharia do modo não estacionário cujo estado queremos proteger. Existem muitos trabalhos na literatura explorando modos não estacionários, especialmente no que diz respeito ao chamado efeito Casimir dinâmico [31]. Apresentamos abaixo um esquema para a construção de um modo não estacionário  $\omega(t) = \omega_0 + \chi \sin(\zeta t)$  a partir da interação de um átomo de dois níveis, guiado pela ação de um laser, com um modo estacionário da cavidade. O hamiltoniano deste sistema pode ser escrito como

$$\mathbf{H} = \omega_c a^\dagger a + \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + F(t) (\sigma_+ e^{-i\omega_L t} + \sigma_- e^{i\omega_L t}) + G (a\sigma_+ + a^\dagger \sigma_-), \quad (2.14)$$

sendo  $\omega_a$  a frequência do átomo,  $\omega_c$  a frequência do modo,  $\omega_L$  a frequência do campo clássico e  $G$  a frequência de Rabi. Os operadores atômicos são dados por  $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ ,  $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$  e  $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ , com  $e$  e  $g$  representando os estados excitado e fundamental do átomo, respectivamente. Vamos assumir aqui que a modulação da amplificação atômica seja dada por  $F(t) = F_0 \cos(\zeta t/2 + \phi)$ . Na representação de interação, o hamiltoniano (2.14) assume a forma

$$\mathbf{H}_I = G (a\sigma_+ e^{i\delta_1 t} + a^\dagger \sigma_- e^{-i\delta_1 t}) + F(t) (\sigma_+ e^{i\delta_2 t} + \sigma_- e^{-i\delta_2 t}), \quad (2.15)$$

onde  $\delta_1 = \omega_a - \omega_c$  e  $\delta_2 = \omega_a - \omega_L$  são as dessintonias entre o átomo e o campo e entre o átomo e o laser, respectivamente. Prosseguindo, vamos definir os hamiltonianos  $H_1 = G (a\sigma_+ e^{i\delta_1 t} + a^\dagger \sigma_- e^{-i\delta_1 t})$  e  $H_2 = F(t) (\sigma_+ e^{i\delta_2 t} + \sigma_- e^{-i\delta_2 t})$  e assumir que o laser esteja altamente fora da ressonância com o átomo, de maneira tal que  $|\delta_2| \gg F_0, \zeta, G, |\delta_1|$  e  $G \ll |\delta_1|$ . Através destas suposições, os termos fortemente oscilantes presentes em  $H_2$  levam, em boa aproximação, ao seguinte hamiltoniano efetivo [67]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{eff} &= H_1 - iH_2(t) \int H_2(\tau) d\tau \\ &= \omega_c a^\dagger a + \Omega(t) \sigma_z + g (a\sigma_+ + a^\dagger \sigma_-), \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde  $\Omega(t) = \omega_a/2 + F^2(t)/\delta_1$ . A diagonalização de  $\mathbf{H}_{eff}$  é facilmente calculada através do uso da base vestida do átomo  $\{|g, n\rangle, |e, n-1\rangle\}$  [68]. Com a condição usual de que  $G^2 n \ll \delta_1^2$ , obtemos a interação dispersiva átomo-campo dada por

$$\mathcal{H} = \omega_c a^\dagger a + \Omega(t) \sigma_z + \Upsilon(t) a^\dagger a \sigma_z, \quad (2.17)$$

onde o ajuste da fase  $\phi = \pi/4$  resulta em  $\Upsilon(t) = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 \sin(\zeta t)$  com  $\Upsilon_1 = [1 - 3F_0^2/2\delta_1\delta_2] G^2/\delta_1$  e  $\Upsilon_2 = (G^2/\delta_1) (F_0^2/2\delta_1\delta_2)$ . Evidentemente, desligando o laser obtemos o deslocamento de Stark usual  $\Upsilon a^\dagger a \sigma_z$  com  $\Upsilon = G^2/\delta_1$ . Através da transformação unitária

$$U = \exp \left[ -i\tilde{\Omega}(t) \sigma_z \right],$$

em que  $\tilde{\Omega}(t) = \int \Omega(t') dt'$ , o vetor de estado associado com o hamiltoniano transformado  $\tilde{\mathcal{H}} = \omega_c a^\dagger a + \Upsilon(t) a^\dagger a \sigma_z$  é dado por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\tilde{\Omega}(t)} |g\rangle |\Phi_g(t)\rangle + e^{-i\tilde{\Omega}(t)} |e\rangle |\Phi_e(t)\rangle, \quad (2.18)$$

onde, na base de Fock,  $|\Phi_\ell(t)\rangle = \sum_n \langle \ell, n | \Psi(t) \rangle |n\rangle$ , sendo  $\ell = g, e$ . Usando agora a ortonormalidade dos estados atômicos, juntamente com as Eqs. (2.17) e (2.18), obtemos duas equações

de Schrödinger desacopladas

$$i\frac{d}{dt}|\Phi_\ell(t)\rangle = \tilde{\mathcal{H}}_\ell|\Phi_\ell(t)\rangle, \quad (2.19)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_\ell = \omega_\ell(t)a^\dagger a, \quad (2.20)$$

onde  $\omega_g = \omega_c - \Upsilon(t)$  e  $\omega_e = \omega_c + \Upsilon(t)$ . Portanto, preparando o átomo no estado fundamental, obtemos a frequência dependente do tempo  $\omega(t) = \omega_0 - \chi \sin(\zeta t)$  onde, da interação (2.17),  $\omega_0 = \omega_c + \Upsilon_1$  e  $\chi = \Upsilon_2$ . Note que durante todo o tempo em que o átomo atravessa a cavidade, ele se mantém no estado fundamental (devido ao fato de estar fora da ressonância tanto com o laser como com o modo da cavidade), portanto, não há injeção de ruído, vindo do decaimento do estado atômico, no modo não estacionário.

Considerando valores típicos dos parâmetros envolvidos em experimentos em eletrodinâmica quântica de cavidades [69, 70]:  $G \sim 3 \times 10^5 \text{s}^{-1}$ ,  $|\delta_1| \sim 10^6 \text{s}^{-1}$ ,  $|\delta_2| \sim 10^7 \text{s}^{-1}$ ,  $\Gamma_0 \sim 10^3 \text{s}^{-1}$  e com a intensidade do campo clássico  $F_0 \sim 10 \times G$ , segue que  $\chi \sim 4 \times 10^4 \text{s}^{-1}$  com  $\zeta \lesssim 10^6 \text{s}^{-1}$ . Uma vez que é razoável assumirmos  $\xi \sim \Gamma_0$ , o valor 1/10 para os parâmetros  $\kappa$  e  $\varkappa$  empregados para a obtenção da linha azul (pontilhada) da Fig. 2.2 é facilmente atingido.

Evidentemente, para contornarmos as dificuldades introduzidas pelo fato de um pequeno intervalo de tempo de interação entre o átomo e o modo da cavidade, seria interessante construirmos o modo não estacionário através de interações sequenciais com átomos. O aprisionamento do átomo no interior da cavidade, seguindo as linhas discutidas na Ref. [71], é uma outra possibilidade a ser analisada. Por outro lado, modos não estacionários podem também ser obtidos através de outros métodos, tais como o movimento mecânico dos espelhos da cavidade [72], método este que é adequado para os nossos propósitos, uma vez que é possível atingirmos frequências da ordem de gigahertz, ou por métodos mais sofisticados onde o movimento efetivo da parede da cavidade é gerado através da excitação de um plasma em um semiconductor [45].

## 2.4 Conclusões

Neste trabalho apresentamos um esquema que, praticamente, desliga a interação entre o reservatório e o modo não estacionário  $\omega(t)$ , convenientemente construído. Como comentado na introdução deste capítulo, ao invés de interferirmos no sistema em escalas de tempo menores que o tempo de correlação do reservatório, como nos esquemas de desacoplamento dinâmico apresentados anteriormente na literatura, em nossa técnica exploramos a frequência natural do sistema  $\omega_0$ ,

preexistente, adicionando a ela uma pequena amplitude  $\chi$  para atingirmos tais escalas de tempo, em torno de  $\omega_0 + \chi$ . Alcançamos assim a mesma meta dos esquemas de desacoplamento dinâmico, prescindindo da necessidade de interferirmos no sistema em escalas de tempo tão curtas. Nosso procedimento repousa sobre a manipulação de frequências ( $\chi$  e  $\zeta$ ) cujas escalas de tempo são consideravelmente maiores que o tempo de correlação do reservatório.

Além de analisarmos os parâmetros físicos necessários para implementar este processo, demonstramos também como construir o modo não estacionário através de sua interação dispersiva com um átomo amplificado por um campo clássico. Evidentemente, o esquema apresentado aqui para um modo não estacionário de uma cavidade, pode ser aplicado diretamente a quaisquer sistemas oscilatórios, tais como íons armadilhados, osciladores nanomecânicos e linhas de transmissão supercondutoras; pode também ser estendido para qualquer sistema quântico não estacionário.

Acreditamos que ambas as técnicas apresentadas aqui, a proteção de estados através de sistemas quânticos não estacionários, além da construção destes sistemas, possam desempenhar um papel importante na teoria quântica da informação.

Além de aplicações em teoria de informação, acreditamos que o presente trabalho possa contribuir diretamente para o campo da eletrodinâmica quântica de cavidades, especificamente ao pouco explorado tópico da interação entre um átomo de dois níveis e um modo não estacionário no regime adiabático. De fato, como a construção do modo não estacionário é relativamente fácil de ser atingida neste regime — através de movimento mecânico dos espelhos [72] ou da interação átomo-campo como mostrado neste capítulo — fenômenos típicos da ótica quântica podem ser investigados neste contexto particular.

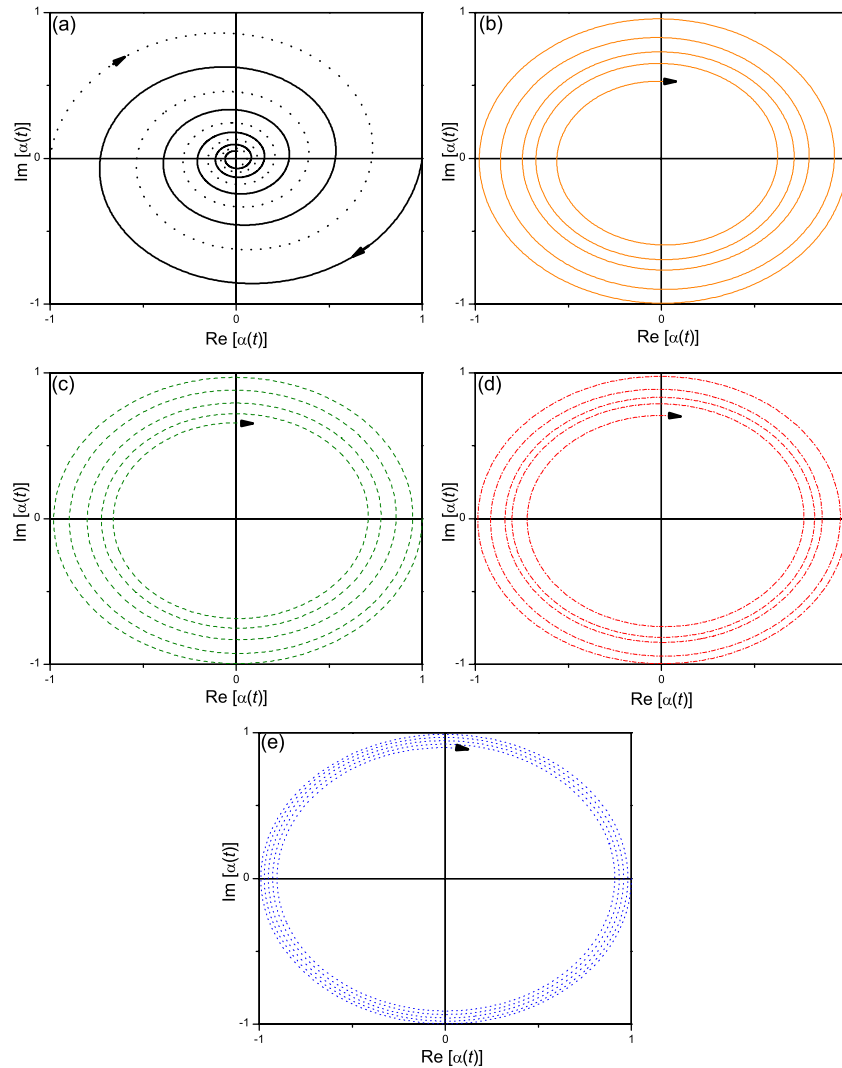


Figura 2.3: Gráfico de  $\text{Im}(\alpha(t))$  contra  $\text{Re}(\alpha(t))$  ilustrando o processo de amortecimento na evolução da amplitude do estado coerente  $\alpha(t) = \alpha_0 \exp[-i\Omega(t) - \Gamma(t)]$ , que compõe a superposição  $|\Psi(t)\rangle$ , com  $\alpha_0 = 1$ . Os padrões das linhas correspondem aos apresentados na Fig. 2.2, com os mesmos valores associados aos parâmetros  $\kappa$  e  $\varkappa$ .

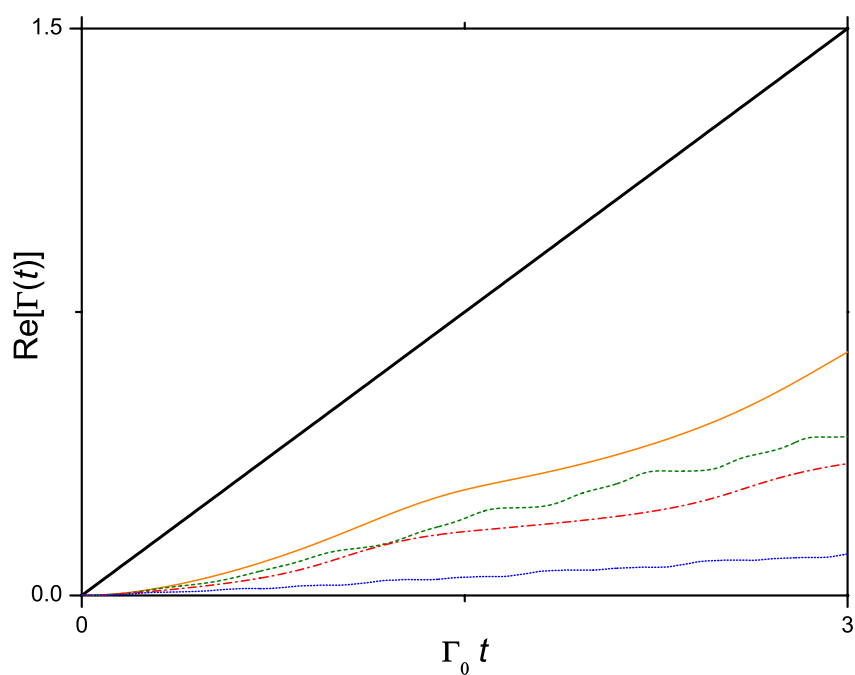


Figura 2.4: Gráfico da parte real da taxa efetiva de amortecimento  $\text{Re}[\Gamma(t)]$  contra  $\Gamma_0 t$ , ilustrando que o mecanismo de supressão de decoerência aplica-se a qualquer estado inicial. Como na Fig. 3, os padrões das linhas correspondem as da Fig. 2.2, com os mesmos valores associados aos parâmetros  $\kappa$  e  $\varkappa$ .

## Capítulo 3

# Criação de partículas e decoerência no ECD não ideal a temperatura finita

### 3.1 Introdução

#### 3.1.1 O ECD

O ECD, pelo qual partículas são criadas devido ao movimento de fronteiras que perturbam o vácuo quântico, tem sido extensivamente estudado desde a quantização, realizada por Moore em 1970 [37], do campo de radiação confinado em uma cavidade ideal, cujos espelhos estão em movimento. O problema da quantização do campo eletromagnético em um meio dielétrico com dependência espacial e temporal foi resolvido duas décadas após por Dodonov *et al.* [73]. É interessante notar que, tanto o movimento não uniforme das fronteiras [74, 35] como mudanças súbitas no índice de refração de um dielétrico [48, 75] produzem efeitos similares, resultando na criação de fótons a partir do vácuo quântico. As propriedades estatísticas dos fótons criados que, como esperado, exibem características não clássicas, foram também analisadas nas Refs. [76, 77], onde uma distribuição não térmica e a compressão paramétrica do estado do campo foram previstas.

Na década de 90, Eberlein [78], seguindo uma sugestão de Schwinger [79], propôs um modelo em que os fótons emitidos no processo de sonoluminescência seriam criados pelo ECD devido ao movimento da fronteira — a parede da bolha de um certo gás imersa em um líquido — entre dois meios com propriedades dielétricas distintas, atraindo assim mais atenção ao ECD. Como apontado por P. Knight [80], para provar que o modelo de Eberlein pode estar (ao menos aproximadamente) correto, será necessário demonstrar que os fótons que emergem da bolha sonoluminescente exibem as estatísticas não clássicas características do ECD. Tais observações revelam

a importância, do ponto de vista da ótica quântica, do ECD, especialmente no que se refere ao cálculo das propriedades estatísticas das partículas criadas.

Os efeitos térmicos sobre a criação de partículas em decorrência de fronteiras móveis também foram investigados, levando-se em conta um modelo formal para o reservatório [81] ou simplesmente assumindo um sistema fechado inicialmente em equilíbrio térmico [82]. No que se refere à relevância destes efeitos para a verificação experimental do ECD, foi demonstrado na Ref. [82] que uma temperatura finita pode aumentar a taxa de partículas criadas em várias ordens de magnitude. Na Ref. [81] o reservatório é modelado assumindo-se que uma das fronteiras da cavidade seja um espelho fixo, com coeficiente de transmissão não nulo. O reservatório compreende um espaço discreto de auto frequências, obtido através da adição de um novo espelho, fixo e perfeitamente refletor, significativamente distante do espelho não ideal, como mostrado na Fig. 3.1. Este modelo para uma cavidade não ideal foi adotado pela primeira vez na Ref. [83] para o tratamento de perdas em uma cavidade laser. Notamos também que em 1969, L. Parker [84], estudando o problema da criação de partículas em um universo em expansão, observou que a presença inicial de bósons tende a aumentar a taxa de criação de bósons — resultado similar ao obtido na Ref. [82] — com o processo oposto ocorrendo para férmions. É interessante observar que o problema da expansão do universo apresenta grande similaridade com o ECD e esforços consideráveis têm sido devotados a este assunto [35, 74, 85, 86, 87].

A formulação, apresentada por Law [38], de um hamiltoniano efetivo para o ECD, possibilitando assim a descrição dinâmica do campo na cavidade na representação de Schrödinger, representou também uma importante contribuição. Através deste hamiltoniano, que exhibe as características essenciais do ECD, tornou-se possível conhecer a forma explícita do estado do campo e descrever, de uma maneira simplificada, as ressonâncias características que são de extrema relevância para a verificação experimental do efeito. A estrutura quadrática deste hamiltoniano efetivo mostra que os modos instantâneos da cavidade acoplam-se mutuamente além da amplificação paramétrica a que estão sujeitos devido ao movimento das fronteiras. Generalizando o procedimento apresentado por Law, na Ref. [81] os autores apresentaram um hamiltoniano efetivo para o ECD em uma cavidade mais realista, tridimensional e não ideal.

Neste capítulo, de forma análoga ao trabalho apresentado em [81], obtemos a contrapartida dissipativa do hamiltoniano apresentado em [38]. Calculamos, a partir deste hamiltoniano, uma expressão geral para o número de partículas criadas no interior da cavidade que aplica-se a qual-



quer lei de movimento da fronteira. Nosso resultado é então aplicado ao caso de um movimento oscilatório da fronteira e, juntamente com o hamiltoniano, permite-nos desenhar um cenário completo das ressonâncias envolvidas no processo. Além disso, apresentamos uma análise abrangente do mecanismo de decoerência envolvido no ECD, conforme discutido abaixo.

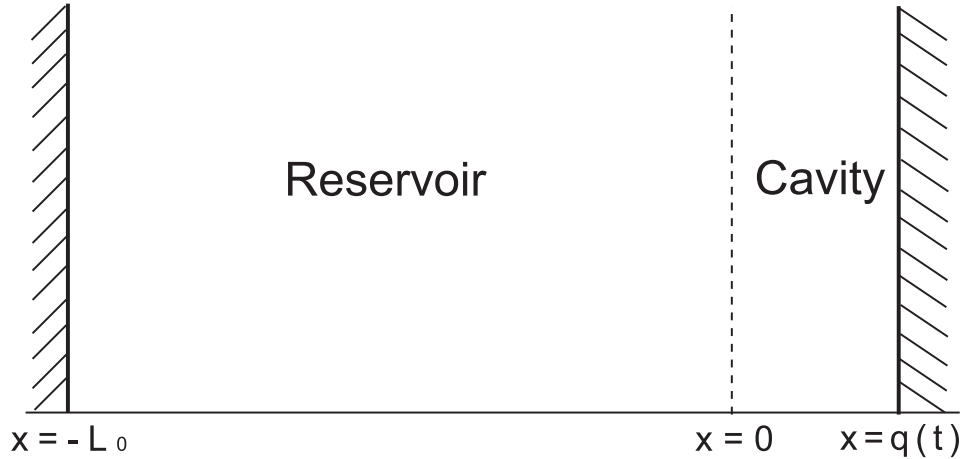


Figura 3.1: Desenho esquemático do problema. Os espelhos em  $x = q(t)$  e  $x = L_0$  são ideais. O espelho dispersivo encontra-se em  $x = 0$ .

### 3.1.2 ECD e decoerência

Mais recentemente, o estudo da decoerência no ECD tem produzido interessantes resultados [88, 89], conectando dois tópicos que têm atraído muita atenção, tanto do ponto de vista teórico [2, 3, 7, 9, 10, 16, 55] como experimental [9, 90]. É um fato bem estabelecido que qualquer processo que induza flutuações quânticas na evolução de um sistema quântico, acarreta a decoerência de estados de superposição [2, 3]. Num caso típico, o mecanismo inevitável de dissipação, acompanhado pela injeção de ruído do reservatório sobre o sistema, conduz o seu estado puro para uma mistura estatística. Nesta situação particular, a injeção de ruído deve-se inteiramente do grande número de graus de liberdade que modelam o reservatório. Quando temos um pequeno número de graus de liberdade interagindo com o sistema de interesse, as chamadas recorrências de Poincaré [2] substituem o processo de decoerência.

Considerando um modo do campo de radiação confinado em uma cavidade não ideal com fronteiras estáticas, é o processo de absorção de fótons pelo espelho (ou o vazamento destes em uma cavidade aberta) o responsável pela dinâmica da decoerência [91, 92]. O desenvolvimento de cavidades com maior fator de qualidade não é menos importante, para o processamento de

informação quântica, que o esforço teórico de implementação de métodos que diminuam os efeitos da decoerência [7, 9, 10, 16, 55]. Embora os protocolos propostos para controlar ou contornar a decoerência ultrapassem em muito os quesitos por condições que enfraqueçam o acoplamento do sistema com o reservatório [93, 94], mais uma vez os esforços práticos, com vista a atingir o processamento de informação quântica — tais como a miniaturização dos componentes físicos como feixes laser e microcavidades — não são menos desafiadores.

De maneira similar ao processo de absorção de fótons em uma cavidade não ideal, a criação e espalhamento de fótons pelo movimento dos espelhos da cavidade também constituem fontes de injeção de ruído no modo de interesse. De fato, como mencionado acima, todos os modos da cavidade acoplam-se entre si, devido ao movimento das fronteiras, por processos de criação e espalhamento de fótons. Consequentemente, todos os modos da cavidade estão sujeitos a injeção de ruído devido aos demais modos, que agem como um reservatório. Portanto, em uma situação onde um estado de superposição é preparado em um modo particular de uma cavidade cujos espelhos estejam em movimento, duas fontes distintas de decoerência atuam neste modo: o reservatório propriamente dito e os mecanismos de amplificação e acoplamento multi-modo induzido pelo movimento dos espelhos. Uma análise detalhada destes processos de decoerência podem revelar aspectos interessantes tanto do ECD como do fenômeno da decoerência.

Um caso particular de decoerência de um estado de superposição preparado em um modo selecionado de uma cavidade ideal com uma das fronteiras móveis, foi analisado na Ref. [88]. Neste caso os autores consideraram a condição de ressonância, pela qual a frequência de oscilação do espelho é um múltiplo inteiro da frequência do modo fundamental da cavidade estática. Sob esta condição — que maximiza o número de partículas criadas [95] — e na ausência de um reservatório, o tempo de decoerência de uma superposição de estados coerentes, preparada no modo fundamental, foi estimado. Na Ref. [89] foi demonstrado que o ECD induz a decoerência de um estado de superposição de um espelho submetido a um potencial harmônico, em uma escala de tempo que depende da energia dos estados que compõem a superposição, obedecendo portanto, ao princípio da correspondência.

No presente capítulo, de maneira análoga ao nosso tratamento do número de partículas criadas, estudamos o problema da decoerência a partir de um cenário geral, onde um estado qualquer é preparado em um modo selecionado de uma cavidade não ideal com um dos espelhos executando um movimento arbitrário (veja Fig. 3.1). Como mostrado abaixo, nossa análise baseia-se nova-

mente no hamiltoniano efetivo derivado em analogia com as Refs.[81] e [38]. Observamos aqui que a entropia linear associada a um estado de superposição preparado em um dado modo, quando aplicada ao caso particular de um movimento oscilatório, exhibe, como esperado, as mesmas ressonâncias apresentadas pela expressão do número de partículas criadas. Tais ressonâncias revelam que a perda de pureza ocorre de uma maneira efetiva apenas para certos valores da frequência de oscilação do espelho da cavidade. Os tempos de decoerência, de um estado particular, associado a estas ressonâncias são estimados. É interessante notar que, fora das condições de ressonância, a perda de pureza e o processo de decoerência podem ser desprezados no contexto do ECD.

O presente capítulo é organizado da seguinte maneira: na seção 3.2 apresentamos o hamiltoniano efetivo para o ECD; nas seções 3.3 e 3.4 apresentamos nossas expressões gerais para o número de partículas criadas e para a entropia linear de um modo selecionado do campo, respectivamente; na seção 3.5 aplicamos nossos resultados para o caso de um movimento oscilatório do espelho; finalmente, na seção 3.6, apresentamos nossas observações finais.

## 3.2 O hamiltoniano efetivo para o ECD

Como discutido na introdução deste capítulo, um hamiltoniano efetivo para o campo quantizado em uma cavidade com espelhos móveis foi apresentado por Law [38], onde se assume que a cavidade seja preenchida por um meio dielétrico cuja permissividade depende do tempo e do espaço. No presente estudo, seguindo o procedimento da Ref. [81], vamos substituir o dielétrico por um potencial na forma  $V(x) = \gamma\delta(x)$  no intuito de modelar o espelho não ideal da cavidade [83]. Os espelhos ideais são modelados por barreiras de potenciais infinitas, induzindo assim condições de contorno de Dirichlet sobre o campo. Portanto, nossa densidade lagrangeana para um campo escalar não massivo  $\phi(x, t)$  é dada por

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \dot{\phi}(x, t) \right]^2 - \left[ \partial_x \phi(x, t) \right]^2 - \gamma \delta(x) \phi^2(x, t) \right\}, \quad (3.1)$$

onde as condições de contorno  $\phi(-L_0, t) = \phi[q(t), t] = 0$ , com  $q(t)$  representando uma lei de movimento arbitrária para o espelho, devem ser satisfeitas. Expandimos o campo  $\phi(x, t)$  — na extensão do sistema composto tanto pela cavidade como pelo reservatório — em um conjunto completo e ortonormal de funções, escrevendo

$$\phi(x, t) = \sum_k Q_k(t) \psi_k(x, t).$$

Uma vez que  $\psi_k(x, t)$  deve satisfazer a equação diferencial

$$[\partial_{x,x} - \gamma\delta(x)] \psi_k(x, t) = -\omega_k^2(t)\psi_k(x, t),$$

sob as condições de contorno  $\psi_k(-L_0, t) = \psi_k[q(t), t] = 0$ , os modos instantâneos são então dados pelas expressões

$$\psi_k(x, t) = \begin{cases} C_k \sin \{[(x - q(t))\omega_k]\} & \text{para } 0 < x \leq q, \\ R_k \sin [(x + L_0)\omega_k] & \text{para } -L_0 \leq x < 0, \\ 0 & \text{para outras regiões,} \end{cases}$$

onde os coeficientes  $C_k$  e  $R_k$  são definidos pelas condições de normalização e contorno. As autofrequências  $\omega_k(q)$  são calculadas a partir da equação transcendental

$$\cot[\omega_k q(t)] + \cot(\omega_k L_0) = -\gamma/\omega_k, \quad (3.2)$$

que decorre das condições de contorno para  $\psi_k(x, t)$  em  $x = 0$ . Seguindo a Ref. [81], é possível obter uma solução analítica aproximada da Eq. (3.2), no limite em que o espelho dissipativo aproxima-se de um espelho ideal, através de uma expansão no parâmetro  $\eta_k = \omega_k/\gamma \ll 1$ . Supondo que a razão  $q(t)/L_0$  não seja um número inteiro, podemos notar que somente uma das funções cotangente na Eq. (3.2) tornar-se-á dominante. Portanto, expandindo uma destas funções em torno de seus pólos  $n\pi$ , com  $n$  inteiro, obtemos um polinômio em  $\eta_k$ , que deve ser resolvido para as frequências  $\omega_k$ . Dependendo de qual seja a função cotangente dominante, obtemos duas classes de autofunções  $\psi_k(x, t)$ , derivadas a partir das frequências que são dominantes na cavidade (DC) ou daquelas que são dominantes no reservatório (DR).

Em primeira ordem no parâmetro  $\eta_k$ , estas frequências reduzem-se, respectivamente, às expressões

$$\omega_k^{\mathcal{C}}(q) = \frac{k\pi}{q} \left(1 + \frac{1}{\gamma q}\right)^{-1}, \quad (3.3a)$$

$$\omega_k^{\mathcal{R}}(L_0) = \frac{k\pi}{L_0} \left(1 + \frac{1}{\gamma L_0}\right)^{-1}. \quad (3.3b)$$

Devemos notar aqui que, até a ordem considerada, as autofrequências do reservatório  $\omega_k^{\mathcal{R}}$  não dependem do tempo. Evidentemente, estas autofrequências definem os modos dominantes da cavidade  $\psi_k^{\mathcal{C}}(x, t)$  e do reservatório  $\psi_k^{\mathcal{R}}(x, t)$

Substituindo a expansão de  $\phi(x, t)$  na Eq. (3.1) e integrando o resultado sobre todo o espaço — entre  $x = -L_0$  e  $x = q(t)$  — obtemos a seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_k \left[ \dot{Q}_k^2 - \omega_k^2(t) Q_k^2 + Q_k \sum_{\ell} G_{k\ell}(t) \left( \dot{Q}_{\ell} + \sum_m Q_m G_{m\ell}(t) \right) \right],$$

onde os coeficientes anti-simétricos  $G_{k\ell}$  são definidos na forma

$$G_{k\ell}(t) = \int_{-L_0}^{q(t)} dx \dot{\psi}_k(x, t) \psi_\ell(x, t).$$

Estes coeficientes descrevem a intensidade do acoplamento entre dois diferentes modos. Note que estes coeficientes anulam-se na situação estática em que todos os espelhos encontram-se em repouso. Introduzindo o momento canonicamente conjugado a coordenada generalizada  $Q_k$ , dado por

$$P_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_k},$$

obtemos, por meio de uma transformação de Legendre, a hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_k \left[ P_k^2 + \omega_k^2(t) Q_k^2 + 2 \sum_\ell P_k G_{k\ell}(t) Q_\ell \right], \quad (3.4)$$

da qual resulta as seguintes equações de movimento para as coordenadas e momentos generalizados:

$$\dot{Q}_k = P_k + \sum_\ell G_{k\ell} Q_\ell, \quad (3.5a)$$

$$\dot{P}_k = -\omega_k^2 Q_k + \sum_\ell G_{k\ell} P_\ell. \quad (3.5b)$$

### 3.2.1 Operadores instantâneos de criação e destruição

Para podermos estudar o fenômeno da criação de partículas — através da versão quântica da hamiltoniana em (3.4) — é conveniente introduzir, como na Ref. [38], os operadores instantâneos de criação e aniquilação

$$a_k^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(t)}} [\omega_k(t) Q_k - iP_k],$$

$$a_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(t)}} [\omega_k(t) Q_k + iP_k],$$

os quais atuam sobre o campo de radiação em todo o espaço, incluindo o reservatório, e satisfazem as relações de comutação<sup>1</sup>  $[a_k(t), a_\ell^\dagger(t)] = \delta_{k\ell}$ . As derivadas temporais destes operadores,

<sup>1</sup>A quantização do campo é feita de maneira canônica: são construídos os operadores  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\pi}$ , associados, respectivamente, ao campo  $\phi$  e a seu momento canonicamente conjugado  $\pi$ . Impondo-se as relações de comutação  $[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = i\delta(x - x')$  e  $[\hat{\phi}(x, t), \hat{\phi}(x', t)] = [\hat{\pi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = 0$  e, lembrando que as funções de modo formam um conjunto completo, seguem-se diretamente as relações de comutação para os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  apresentadas no texto.

combinadas com as Eqs. (3.5), fornecem  $\dot{a}_k$  e  $\dot{a}_k^\dagger$  como funções lineares de  $Q_k$  e  $P_k$  e, conseqüentemente, de  $a_k$  e  $a_k^\dagger$ . Supondo que estas equações de movimento respeitem as equações de Heisenberg  $\dot{a}_k = i [H_{eff}, a_k]$ , podemos inferir a forma do hamiltoniano efetivo, que resulta ser o mesmo obtido por Law [38],

$$H_{eff} = \sum_k \left\{ \omega_k(t) a_k^\dagger a_k + i \xi_k(t) \left[ (a_k^\dagger)^2 - a_k^2 \right] + i \sum_{\ell(\neq k)} \mu_{k\ell}(t) \left( a_k^\dagger a_\ell^\dagger + a_k^\dagger a_\ell - H.c. \right) \right\}, \quad (3.6)$$

mas com o mecanismo de dissipação introduzido através das autofreqüências  $\omega_k(t)$ . A dissipação é também levada em conta nas intensidades de acoplamentos  $\xi_k(t)$  e  $\mu_{k\ell}(t)$  — associadas com a criação degenerada  $\left[ (a_k^\dagger)^2 - a_k^2 \right]$  e não degenerada  $\left( a_k^\dagger a_\ell^\dagger - a_k a_\ell \right)$  de partículas, além do processo de espalhamento  $\left( a_k^\dagger a_\ell - a_k a_\ell^\dagger \right)$  — dadas por

$$\xi_k(t) = \frac{\dot{\omega}_k(t)}{4\omega_k(t)}, \quad (3.7a)$$

$$\mu_{k\ell}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_k(t)}{\omega_\ell(t)}} G_{k\ell}(t). \quad (3.7b)$$

Através da transformação unitária  $U(t) = \exp \left( -i \int_0^t d\tau H_0(\tau) \right)$ , onde  $H_0 = \sum_k \omega_k(t) a_k^\dagger a_k$ , podemos reescrever o hamiltoniano (3.6) na representação de interação como

$$H_I = i \sum_k \left\{ e^{i\Omega_k(t)} \left[ \xi_k(t) \left( a_k^\dagger \right)^2 e^{i\Omega_k(t)} + \sum_{\ell(\neq k)} \mu_{k\ell}(t) a_k^\dagger \left( a_\ell^\dagger e^{i\Omega_\ell(t)} + a_\ell e^{-i\Omega_\ell(t)} \right) \right] - H.c. \right\},$$

onde  $\Omega_k(t) = \int_0^t d\tau \omega_k(\tau)$ . Note que esta transformação é possível, apesar de  $H_0$  depender do tempo, pois  $[U(t), H_0(t)] = 0$ . Definindo agora o operador

$$\mathcal{O}_{S,k}(t) = a_{S,k} e^{-i\Omega_k^S(t)},$$

o termo do hamiltoniano associado à criação degenerada de partículas pode ser decomposto em duas componentes: uma para os modos DC ( $S = \mathcal{C}$ ) e outra para os modos DR ( $S = \mathcal{R}$ ), dados, respectivamente por

$$\begin{aligned} \xi_k^{\mathcal{C}}(t) & \left[ \left( \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(t) \right)^2 - H.c. \right], \\ \xi_k^{\mathcal{R}}(t) & \left[ \left( \mathcal{O}_{\mathcal{R},k}^\dagger(t) \right)^2 - H.c. \right], \end{aligned}$$

onde  $\xi_k^S(t) = \dot{\omega}_k^S(t)/4\omega_k^S(t)$ . Entretanto, em primeira ordem em  $\eta_k$ , as autofreqüências do reservatório  $\omega_k^{\mathcal{R}}(t)$  não dependem do tempo, tal que obtemos a partir da Eq. (3.7a) que  $\xi_k^{\mathcal{R}}(t) = 0$ ,

o que implica que não temos contribuição do termo degenerado para os modos DR. No que diz respeito aos termos não degenerado e de espalhamento, eles podem ser decompostos em quatro componentes, todos da forma

$$\mu_{k\ell}^{SS'}(t) \left[ \mathcal{O}_{S,k}^\dagger(t) \mathcal{O}_{S',\ell}^\dagger(t) + \mathcal{O}_{S,k}^\dagger(t) \mathcal{O}_{S',\ell}(t) - H.c. \right],$$

com  $S, S' = \mathcal{C}$  ou  $\mathcal{R}$ . As componentes com  $S = S' = \mathcal{C}$  ( $\mathcal{R}$ ) referem-se à interação entre dois modos DC (DR), enquanto que as componentes com  $S \neq S'$  implicam na interação entre um modo DC e outro DR. Como estamos mantendo aqui apenas termos de primeira ordem em  $\eta_k$ , segue-se diretamente que  $\mu_{k\ell}^{\mathcal{R}\mathcal{R}}(t) = \mu_{k\ell}^{\mathcal{R}\mathcal{C}}(t) = 0$ , uma vez que tanto as autofrequências  $\omega_k^{\mathcal{R}}(t)$  como também as autofunções  $\psi_k^{\mathcal{R}}(x, t)$  são independentes do tempo nesta ordem de aproximação. Portanto, sob estas considerações, o hamiltoniano efetivo assume a forma

$$H_I = i \sum_k \left\{ \xi_k^{\mathcal{C}}(t) \left( \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(t) \right)^2 + \sum_{\ell(\neq k)} \left\{ \mu_{k\ell}^{\mathcal{C}\mathcal{C}}(t) \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(t) \left[ \mathcal{O}_{\mathcal{C},\ell}^\dagger(t) + \mathcal{O}_{\mathcal{C},\ell}(t) \right] + \mu_{k\ell}^{\mathcal{C}\mathcal{R}}(t) \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(t) \left[ \mathcal{O}_{\mathcal{R},\ell}^\dagger(t) + \mathcal{O}_{\mathcal{R},\ell}(t) \right] \right\} - H.c. \right\}, \quad (3.8)$$

tal que, além de considerar a dissipação, descreve, como esperado, a fraca amplificação quadrática dos modos da cavidade, bem como o acoplamento entre todos os seus modos. De fato, da Eq. (3.7), podemos notar que ambas as intensidades de acoplamento,  $\xi_k(t)$  e  $\mu_{k\ell}(t)$  — que são proporcionais à velocidade da parede da cavidade  $\dot{q}(t)$ , muito pequena para casos não relativísticos — são significativamente menores que a frequência do modo fundamental da cavidade estática. No presente estudo, seguindo o desenvolvimento apresentado abaixo, obtemos uma expressão para o número de partículas criadas em um dado modo DC, válida para qualquer lei de movimento do espelho.

### 3.3 Número médio de partículas criadas

De posse do hamiltoniano efetivo (3.8), podemos determinar a evolução do operador densidade do sistema  $\rho(t)$ , na representação de interação, através da equação  $\dot{\rho}(t) = -i [H_I, \rho(t)]$ . Escolhendo a velocidade do espelho  $\dot{q}(t)$  como nosso parâmetro de perturbação (lembrando que  $c = 1$ ), a solução formal de  $\rho(t)$ , mantendo termos até segunda ordem em  $H_I(t)$  — note que  $H_I \propto \dot{q}$  — satisfaz

$$\rho(t) \simeq \rho(0) - i \int_0^t d\tau [H_I(\tau), \rho(0)] - \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau [H_I(t'), [H_I(\tau), \rho(0)]] .$$

Vamos assumir que todos os modos DR encontram-se na distribuição térmica

$$\rho_{\mathcal{R}}(0) = \frac{e^{-\beta H_{\mathcal{R}}}}{\text{Tr}(e^{-\beta H_{\mathcal{R}}})},$$

onde  $H_{\mathcal{R}} = \sum_k \omega_k^{\mathcal{R}}(t) a_{\mathcal{R},k}^{\dagger} a_{\mathcal{R},k}$ ,  $\beta = 1/k_B T$ ,  $k_B$  é a constante de Boltzman e  $T$  a temperatura do reservatório. Para os modos DC consideramos qualquer estado inicial

$$\rho_{\mathcal{C}}(0) = \prod_k \rho_{\mathcal{C},k}(0),$$

tal que todos os modos, exceto o  $k$ -ésimo, satisfazem as relações

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{C}(\neq k)} \left[ (a_{\mathcal{C},\ell})^m (a_{\mathcal{C},\ell'}^{\dagger})^n \rho_{\mathcal{C}}(0) \right], \quad \text{Tr}_{\mathcal{C}(\neq k)} \left[ (a_{\mathcal{C},\ell}^{\dagger})^m (a_{\mathcal{C},\ell'})^n \rho_{\mathcal{C}}(0) \right] &\propto \delta_{mn} \delta_{\ell\ell'}, \\ \text{Tr}_{\mathcal{C}(\neq k)} \left[ (a_{\mathcal{C},\ell})^m (a_{\mathcal{C},\ell'})^n \rho_{\mathcal{C}}(0) \right], \quad \text{Tr}_{\mathcal{C}(\neq k)} \left[ (a_{\mathcal{C},\ell}^{\dagger})^m (a_{\mathcal{C},\ell'}^{\dagger})^n \rho_{\mathcal{C}}(0) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Em particular, podemos assumir a condição em que todos os modos, exceto o  $k$ -ésimo, encontram-se no estado térmico  $\rho_{\mathcal{C},\ell}(0) = e^{-\beta H_{\mathcal{C},\ell}} / \text{Tr}(e^{-\beta H_{\mathcal{C},\ell}})$ , com  $H_{\mathcal{C},\ell} = \omega_{\ell}^{\mathcal{C}}(t) a_{\mathcal{C},\ell}^{\dagger} a_{\mathcal{C},\ell}$ , da mesma maneira que os modos DR. Para o  $k$ -ésimo modo — aquele para o qual calculamos o número médio de partículas criadas — consideramos um estado  $\rho_{\mathcal{C},k}(0)$  arbitrário, que inclui a distribuição térmica.

O número médio de partículas criadas no  $k$ -ésimo modo DC é dado por

$$\langle N_{\mathcal{C},k}(t) \rangle = \text{Tr} \left[ \rho_{\mathcal{C},k}(t) a_{\mathcal{C},k}^{\dagger} a_{\mathcal{C},k} \right],$$

onde o traço é tomado sobre o  $k$ -ésimo modo DC. Uma vez que o hamiltoniano de interação  $H_I$  é nulo para uma cavidade estática, é razoável considerar que todos os modos — DC e DR — estão inicialmente descorrelacionados, de tal maneira que podemos escrever o operador densidade inicial como  $\rho(0) = \rho_{\mathcal{C}}(0) \otimes \rho_{\mathcal{R}}(0)$ . Calculando o operador densidade reduzido do  $k$ -ésimo modo DC

$$\rho_{\mathcal{C},k}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{R}} \text{Tr}_{\mathcal{C}(\neq k)} \rho(t) = \sum_{\{n_{\mathcal{R},k}\}} \sum_{\{n_{\mathcal{C},\ell(\neq k)}\}} \langle \{n_{\mathcal{R},k}\} | \langle \{n_{\mathcal{C},\ell}\} | \rho(t) | \{n_{\mathcal{C},\ell}\} \rangle | \{n_{\mathcal{R},k}\} \rangle,$$



onde o traço é tomado sobre todos os modos DR e DC, exceto  $k$ -ésimo modo DC, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{C},k}(t) &= \rho_{\mathcal{C},k}(0) - i \int_0^t dt' [V_{\mathcal{C},k}(t'), \rho_{\mathcal{C},k}(0)] \\
&\quad - \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \{ [V_{\mathcal{C},k}(t'), [V_{\mathcal{C},k}(\tau), \rho_{\mathcal{C},k}(0)]] \\
&\quad - \sum_{\ell(\neq k)} \left\{ [f_{\mathcal{C},\ell}(t', \tau) \Xi_{\ell k}^+(t', \tau) + g_{\ell}(t', \tau) \Upsilon_{\ell k}^+(t', \tau)] [\mathcal{O}_{\mathcal{C},k}(t'), \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(\tau) \rho_{\mathcal{C},k}(0)] \right. \\
&\quad + [f_{\mathcal{C},\ell}(t', \tau) \Xi_{\ell k}^+(t', \tau) - g_{\ell}(t', \tau) \Upsilon_{\ell k}^+(t', \tau)] [\mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(t'), \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}(\tau) \rho_{\mathcal{C},k}(0)] \\
&\quad + [f_{\mathcal{C},\ell}(t', \tau) \Xi_{\ell k}^-(t', \tau) + g_{\ell}(t', \tau) \Upsilon_{\ell k}^-(t', \tau)] [\mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(t'), \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(\tau) \rho_{\mathcal{C},k}(0)] \\
&\quad \left. + [f_{\mathcal{C},\ell}(t', \tau) \Xi_{\ell k}^-(t', \tau) - g_{\ell}(t', \tau) \Upsilon_{\ell k}^-(t', \tau)] [\mathcal{O}_{\mathcal{C},k}(t'), \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}(\tau) \rho_{\mathcal{C},k}(0)] + H.c. \right\} \\
&\quad - \sum_{\ell} \mu_{k\ell}^{\mathcal{C}\mathcal{R}}(t') \mu_{k\ell}^{\mathcal{C}\mathcal{R}}(\tau) \left\{ f_{\mathcal{R},\ell}(t', \tau) [\Lambda_{\mathcal{C},k}(t'), \Lambda_{\mathcal{C},k}(\tau) \rho_{\mathcal{C},k}(0)] + H.c. \right\} \Bigg\}, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

onde definimos os operadores

$$\begin{aligned}
V_{\mathcal{C},k}(t) &= i \xi_k^{\mathcal{C}}(t) \left[ \left( \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(t) \right)^2 - \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^2(t) \right], \\
\Lambda_{\mathcal{C},k}(t) &= \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(t) - \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}(t),
\end{aligned}$$

e as funções

$$\begin{aligned}
f_{\mathcal{S},\ell}(t, \tau) &= -2N_{\mathcal{S},\ell}(0) \cos \Delta_{\ell}^{\mathcal{S}}(t, \tau) - \exp[-i\Delta_{\ell}^{\mathcal{S}}(t, \tau)], \\
g_{\ell}(t, \tau) &= 2iN_{\mathcal{C},\ell}(0) \sin \Delta_{\ell}^{\mathcal{C}}(t, \tau) - \exp[-i\Delta_{\ell}^{\mathcal{C}}(t, \tau)], \\
\Xi_{\ell k}^{\pm}(t, \tau) &= \zeta_{\ell k}(t) \zeta_{\ell k}(\tau) \pm \zeta_{k\ell}(t) \zeta_{k\ell}(\tau), \\
\Upsilon_{\ell k}^{\pm}(t, \tau) &= \zeta_{\ell k}(t) \zeta_{k\ell}(\tau) \pm \zeta_{k\ell}(t) \zeta_{\ell k}(\tau), \\
\Delta_{\ell}^{\mathcal{S}}(t, \tau) &= \Omega_{\ell}^{\mathcal{S}}(t) - \Omega_{\ell}^{\mathcal{S}}(\tau), \\
\zeta_{\ell k}(t) &= \xi_k^{\mathcal{C}}(t) \delta_{\ell k} + \mu_{k\ell}^{\mathcal{C}\mathcal{C}}(t),
\end{aligned}$$

nas quais

$$N_{\mathcal{S},\ell}(0) = \text{Tr} \left( \rho_{\mathcal{S},\ell}(0) a_{\mathcal{S},\ell}^\dagger a_{\mathcal{S},\ell} \right)$$

representa o número médio de partículas inicialmente presente no  $\ell$ -ésimo modo DS ( $\mathcal{S} = \mathcal{C}$  ou  $\mathcal{R}$ ).

(Particularmente, quando o  $\ell$ -ésimo modo encontra-se em um estado térmico, temos  $N_{\mathcal{S},\ell}(0) = 1 / [\exp(\beta\omega_{\ell}^{\mathcal{S}}) - 1]$ .)

A partir da expressão para o operador densidade reduzido  $\rho_{\mathcal{C},k}(t)$ , obtemos finalmente o número médio de partículas criadas no  $k$ -ésimo modo DC,  $\Delta N_{\mathcal{C},k}(t) = \langle N_{\mathcal{C},k}(t) \rangle - N_{\mathcal{C},k}(0)$ , dado por

$$\Delta N_{\mathcal{C},k}(t) = 2 \text{Re} \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \{ \mathcal{F}_k(t', \tau) + \mathcal{G}_k(t', \tau) \}, \quad (3.10)$$

onde definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k(t, \tau) &= \sum_{\ell} \{ N_{C,k}(0) [f_{C,\ell}(t, \tau) \Xi_{\ell k}^+(t, \tau) - g_{\ell}(t, \tau) \Upsilon_{\ell k}^+(t, \tau)] \exp[-i\Delta_k^C(t, \tau)] \\ &\quad - [N_{C,k}(0) + 1] [f_{C,\ell}(t, \tau) \Xi_{\ell k}^+(t, \tau) + g_{\ell}(t, \tau) \Upsilon_{\ell k}^+(t, \tau)] \exp[i\Delta_k^C(t, \tau)] \}, \\ \mathcal{G}_k(t, \tau) &= \sum_{\ell} \mu_{k\ell}^{C\mathcal{R}}(t) \mu_{k\ell}^{C\mathcal{R}}(\tau) \{ [2N_{C,k}(0) + 1] \sin[\Delta_{\ell}^C(t, \tau)] \sin[\Delta_{\ell}^{\mathcal{R}}(t, \tau)] \\ &\quad - [2N_{C,\ell}(0) + 1] \cos[\Delta_{\ell}^C(t, \tau)] \cos[\Delta_{\ell}^{\mathcal{R}}(t, \tau)] \}.\end{aligned}$$

Para o caso particular de uma cavidade ideal ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) em zero absoluto ( $N_{S,k}(T=0) \rightarrow 0$ ), a expressão para o número de partículas criadas reduz-se a

$$\Delta N_{C,k}(t) = 2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \sum_{\ell} \chi_{k\ell}(t', \tau) \cos[\Omega_k^C(t') - \Omega_k^C(\tau) + \Omega_{\ell}^C(t') - \Omega_{\ell}^C(\tau)],$$

com

$$\chi_{k\ell}(t, \tau) = \frac{\dot{q}(t) \dot{q}(\tau)}{q(t) q(\tau)} \begin{cases} 1/8 & \text{para } k = \ell, \\ \frac{k\ell}{(k+\ell)^2} & \text{para } k \neq \ell. \end{cases}$$

Finalmente, para o caso de uma cavidade parada ( $\dot{q} = 0$ ), verificamos diretamente que não temos formação de partículas dentro da cavidade, de maneira tal que  $\langle N_{C,k}(t) \rangle = N_{C,k}(0)$ .

### 3.4 Entropia linear e decoerência

Para analisarmos a decoerência de estados quânticos no ECD vamos supor que um estado arbitrário  $\rho_{C,k}(0)$  é preparado no  $k$ -ésimo modo DC de uma cavidade inicialmente estática. Evidentemente, devido ao movimento do espelho da cavidade — o qual induz o acoplamento do modo selecionado com todos os demais modos — a entropia linear do estado evoluído,  $S_{C,k}(t) = 1 - \text{Tr} \rho_{C,k}^2(t)$ , deve aumentar. Ressaltamos que este comportamento, associado com a perda de pureza do estado inicial  $\rho_{C,k}(0)$ , ocorre mesmo quando o processo de espalhamento é o único mecanismo de acoplamento presente. Entretanto, quando o processo de criação não degenerado de pares de partículas também está presente, a perda de pureza é significativamente ampliada, como veremos abaixo.

Para o cálculo da entropia  $S_{C,k}(t)$  devemos nos confinar ao caso em que todo o sistema — tanto a cavidade quanto o reservatório — encontram-se em zero absoluto, exceto o  $k$ -ésimo modo DC, cujo estado é completamente arbitrário. O operador densidade do sistema fica então escrito na forma

$$\rho(0) = |\{0_{C,\ell(\neq k)}\}\rangle \langle \{0_{C,\ell(\neq k)}\}| \otimes |\{0_{\mathcal{R},\ell}\}\rangle \langle \{0_{\mathcal{R},\ell}\}| \otimes \rho_{C,k}(0). \quad (3.11)$$

Portanto, a partir do operador densidade reduzido dado na Eq. (3.9), com  $\rho(0)$  descrito pela Eq. (3.11), obtemos, até segunda ordem em  $\dot{q}$ , o resultado

$$\begin{aligned}
 S_{\mathcal{C},k}(t) = & 1 - \text{Tr} \rho_{\mathcal{C},k}^2(0) \\
 & + 4 \text{Re} \int_0^t dt' \int_0^{t'} d\tau \left\{ \sum_{\ell(\neq k)} [\Xi_{\ell k}^+(t', \tau) \langle \Theta_k^+(t', \tau) \rangle - \Upsilon_{\ell k}^+(t', \tau) \langle \Theta_k^-(t', \tau) \rangle \right. \\
 & + \Xi_{\ell k}^-(t', \tau) \langle \Phi_k^+(t', \tau) \rangle + \Upsilon_{\ell k}^-(t', \tau) \langle \Phi_k^-(t', \tau) \rangle] \exp[-i\Delta_\ell^{\mathcal{C}}(t', \tau)] \\
 & \left. + \sum_{\ell} \mu_{k\ell}^{\mathcal{CR}}(t') \mu_{k\ell}^{\mathcal{CR}}(\tau) [\langle \Theta_k^+(t', \tau) \rangle - \langle \Phi_k^+(t', \tau) \rangle] \exp[-i\Delta_\ell^{\mathcal{R}}(t', \tau)] \right\}, \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

onde definimos as funções

$$\begin{aligned}
 \langle \Theta_k^\pm(t, \tau) \rangle &= \text{Tr} \left\{ \left( \left[ \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(t), \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}(\tau) \rho_{\mathcal{C},k}(0) \right] \pm \left[ \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}(t), \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(\tau) \rho_{\mathcal{C},k}(0) \right] \right) \rho_{\mathcal{C},k}(0) \right\}, \\
 \langle \Phi_k^\pm(t, \tau) \rangle &= \text{Tr} \left\{ \left( \left[ \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(t), \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}^\dagger(\tau) \rho_{\mathcal{C},k}(0) \right] \pm \left[ \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}(t), \mathcal{O}_{\mathcal{C},k}(\tau) \rho_{\mathcal{C},k}(0) \right] \right) \rho_{\mathcal{C},k}(0) \right\}.
 \end{aligned}$$

Evidentemente, para uma cavidade estática,  $\dot{q} = 0$ , a Eq. (3.12) reduz-se, como esperado, à forma

$$S_{\mathcal{C},k}(t) = 1 - \text{Tr} \rho_{\mathcal{C},k}^2(0).$$

Observamos aqui que o tempo de decoerência  $\tau_D$  do estado inicial  $\rho_{\mathcal{C},k}(0)$  pode ser estimado a partir da entropia (3.12), como discutido abaixo.

## 3.5 Um caso particular - movimento oscilatório da fronteira

### 3.5.1 Fenomenologia do hamiltoniano efetivo

Antes de analisarmos os mecanismos de criação de partículas e a entropia linear, é conveniente considerarmos as implicações fenomenológicas do hamiltoniano efetivo (3.8). Esta análise permitir-nos-á identificar os principais aspectos presentes nas expressões gerais (3.10) e (3.12). Para este fim, precisamos especificar uma lei de movimento particular para o espelho. Vamos admitir a lei senoidal que pode maximizar o número de partículas criadas [95], dada por

$$q(t) = q_0 [1 + \varepsilon \sin(\mathfrak{p}\omega_1 t)], \quad (3.13)$$

onde  $\varepsilon \ll 1$  caracteriza a amplitude de oscilação do espelho,  $\mathfrak{p}$  é um número real e positivo tal que  $(\mathfrak{p} - 1)\omega_1$  é a dessintonia entre a frequência do espelho em movimento e do modo fundamental da cavidade estática  $\omega_1^{\mathcal{C}} \equiv \omega_1$ . No que se segue, restringiremos nossa análise do hamiltoniano efetivo

(3.8) a primeira ordem em  $\varepsilon$ , uma vez que ambas as quantidades que nos interessam — o número de partículas (3.10) e a entropia linear (3.12) — apresentam apenas termos da ordem  $H_I^2$ , isto é, de segunda ordem em  $\varepsilon$ .

Lembrando que  $\xi_k^C(t), \mu_{k\ell}^{CS}(t) \propto \dot{q}(t)$  e  $\mathcal{O}_{S,k}(t) = a_{S,k} \exp[-i\Omega_k^S(t)]$ , com  $\Omega_k^S(t) = \int_0^t d\tau \omega_k^S(\tau) \simeq \omega_k^S t = k\omega_1^S t$  em ordem zero em  $\varepsilon$ , o hamiltoniano efetivo (3.8) pode ser representado como

$$H_I = i \sum_k \left\{ \xi_k^C(t) \left( \mathcal{O}_{C,k}^\dagger(t) \right)^2 + \sum_{\ell(\neq k)} \sum_S \mu_{k\ell}^{CS}(t) \mathcal{O}_{C,k}^\dagger(t) \left[ \mathcal{O}_{S,\ell}^\dagger(t) + \mathcal{O}_{S,\ell}(t) \right] - H.c. \right\} \\ \propto \sum_k \dot{q}(t) \left\{ e^{ik\omega_1 t} \left[ e^{ik\omega_1 t} \left( a_{C,k}^\dagger \right)^2 + \sum_{\ell(\neq k)} \sum_S \left( e^{i\ell\omega_1^S t} a_{C,k}^\dagger a_{S,\ell}^\dagger + e^{-i\ell\omega_1^S t} a_{C,k}^\dagger a_{S,\ell} \right) \right] - h.c. \right\}.$$

Uma vez que  $\dot{q}(t) \propto (e^{ip\omega_1 t} + e^{-ip\omega_1 t})$ , a aproximação de ondas girantes permite-nos escrever

$$H_I \propto \sum_k \left\{ e^{-i(p-2k)\omega_1 t} \left( a_{C,k}^\dagger \right)^2 + \sum_{\ell(\neq k)} \left[ e^{-i[p-(k+\ell)]\omega_1 t} a_{C,k}^\dagger a_{C,\ell}^\dagger + e^{-i[p-(k+\ell\kappa)]\omega_1 t} a_{C,k}^\dagger a_{\mathcal{R},\ell}^\dagger \right. \right. \\ \left. \left. + \left( e^{i[p+(k-\ell)]\omega_1 t} + e^{-i[p-(k-\ell)]\omega_1 t} \right) a_{C,k}^\dagger a_{C,\ell} + \left( e^{i[p+(k-\ell\kappa)]\omega_1 t} + e^{-i[p-(k-\ell\kappa)]\omega_1 t} \right) a_{C,k}^\dagger a_{\mathcal{R},\ell} \right] + h.c. \right\}$$

onde  $\kappa = \omega_1^{\mathcal{R}}/\omega_1^C$ . A partir deste hamiltoniano podemos identificar cinco processos distintos de ressonância: O primeiro *i*) decorre dos termos associados com a criação degenerada ( $k = \ell$ ) de pares de partículas, o qual contribui significativamente apenas quando  $p = 2k$ , isto é, quando  $p$  for um número par. Por meio deste processo, temos uma amplificação paramétrica do modo  $k = p/2$ . (Para valores ímpares de  $p$ , a ocorrência deste processo requer um modo não físico semi-inteiro  $k = p_{\text{ímpar}}/2$ ). Para que haja contribuição deste processo, o mínimo valor de  $p$  deve ser 2. Dois processos distintos estão associados com a criação não degenerada ( $k \neq \ell$ ) de pares de partículas: *ii*) a criação de ambas as partículas em modos DC e *iii*) a criação de uma partícula em um modo DC e outra em um modo DR. Os termos associados ao primeiro caso *ii*) contribuem significativamente quando  $p$  for um número inteiro, ímpar ou par, preenchendo os modos  $k + \ell = p$ . Como neste caso devemos ter  $k \neq \ell$ , o mínimo valor de  $p$  para que haja contribuição deste processo é 3. Os termos associados ao último caso *iii*) contribuem apenas para valores não inteiros de  $p$ . Neste caso, teremos partículas formadas no  $k$ -ésimo modo DC e no  $\ell$ -ésimo modo DR que satisfizerem a relação  $k + \ell\kappa = p$ .

Os dois processos restantes estão associados ao espalhamento de partículas dos modos DC para *iv*) outro modo DC e *v*) para um modo DR. Os termos associados ao primeiro caso *iv*)

contribuem significativamente apenas para valores inteiros de  $\mathbf{p}$  que satisfaçam a relação  $\mathbf{p} = |k - \ell|$ , espalhando partículas do modo  $k$  ( $\ell$ ) para o modo  $\ell$  ( $k$ ) se  $k > \ell$  ( $k < \ell$ ). Para que este processo contribua o mínimo valor de  $\mathbf{p}$  deve ser 1. Por outro lado, os termos associados ao último caso  $v$ ) contribuem apenas quando  $\mathbf{p} = |k - \ell\mathcal{X}|$ .

Devemos observar aqui que valores inteiros de  $\mathbf{p}$  tornam possíveis apenas os processos ressonantes  $i$ ),  $ii$ ), e  $iv$ ), enquanto que valores não inteiros de  $\mathbf{p}$ , os processos ressonantes  $iii$ ) e  $v$ ).

### 3.5.2 Número médio de partículas criadas

Nesta seção calculamos o número médio de partículas criadas no  $k$ -ésimo modo DC para a lei de movimento (3.13) e, portanto, sob as condições de ressonância especificadas acima. Supondo que o estado inicial do  $k$ -ésimo modo DC seja um estado térmico, a Eq. (3.10) reduz-se, em segunda ordem em  $\varepsilon$ , à forma

$$\begin{aligned} \Delta N_{\mathcal{C},k}(\tau) = & \left( \frac{\mathbf{p}\Gamma\tau}{4} \right)^2 [2N_{\mathcal{C},k}(0) + 1] \delta_{\mathbf{p},2k} \\ & + \left( \frac{\mathbf{p}\tau}{4} \right)^2 \sum_{\ell(\neq k)} \left\{ [N_{\mathcal{C},k}(0) + N_{\mathcal{C},\ell}(0) + 1] [\mathfrak{M}_{k\ell}^{\mathcal{CC}}(0)]^2 \frac{(k-\ell)^2}{k\ell} \delta_{\mathbf{p},k+\ell} \right. \\ & - [N_{\mathcal{C},k}(0) - N_{\mathcal{C},\ell}(0)] [\mathfrak{M}_{k\ell}^{\mathcal{CC}}(0)]^2 \frac{(k+\ell)^2}{k\ell} \theta(\mathbf{p}) (\delta_{\mathbf{p},k-\ell} + \delta_{\mathbf{p},\ell-k}) \\ & - [N_{\mathcal{R},k}(0) + N_{\mathcal{C},\ell}(0) + 1] [\mathfrak{M}_{k\ell}^{\mathcal{CR}}(0)]^2 \frac{k}{l\mathcal{X}} \delta_{\mathbf{p},k+l\mathcal{X}} \\ & \left. + [N_{\mathcal{C},k}(0) - N_{\mathcal{R},\ell}(0)] [\mathfrak{M}_{k\ell}^{\mathcal{CR}}(0)]^2 \frac{k}{l\mathcal{X}} \theta(\mathbf{p}) (\delta_{\mathbf{p},k-l\mathcal{X}} + \delta_{\mathbf{p},l\mathcal{X}-k}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde definimos a variável adimensional  $\tau = \varepsilon\omega_1 t$ , as intensidades efetivas de acoplamento

$$\begin{aligned} \Gamma &= 1 - \frac{1}{\pi}\eta_1 + O(\eta_1^2), \\ \mathfrak{M}_{k\ell}^{\mathcal{CS}}(t) &= q_0 \int_{-L_0}^{q(t)} dx \frac{\partial \psi_k^{\mathcal{C}}(x,t)}{\partial q} \psi_\ell^{\mathcal{S}}(x,t), \end{aligned}$$

além da função degrau

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$

A respeito da expressão obtida acima para o número médio de partículas criadas, a qual generaliza resultados apresentados anteriormente na literatura, observamos, em primeiro lugar, que para uma cavidade estática, com  $\varepsilon = 0$  ou  $\mathbf{p} = 0$ , esta expressão reduz-se, como esperado, a

$\Delta N_{c,k}(\tau) = 0$ . Além disso, os cinco processos ressonantes identificados na seção anterior tornam-se evidentes: os primeiros três termos do lado direito da Eq. (3.14) correspondem aos casos  $i$ ),  $ii$ ), e  $iv$ ), enquanto que os dois últimos termos correspondem aos casos  $iii$ ) e  $v$ ), respectivamente. É interessante notar que os processos de espalhamento apenas contribuem, em segunda ordem em  $\varepsilon$ , quando consideramos os efeitos da temperatura.

A seguir vamos analisar dois casos particulares.

### O processo de amplificação paramétrica

Para o caso em que  $p = 2$ , a expressão para o número de partículas formadas no modo fundamental ( $k = 1$ ) torna-se

$$\Delta N_{c,1}(\tau) = \left(\frac{\Gamma\tau}{2}\right)^2 [2N_{c,1}(0) + 1] - \frac{4}{3}\tau^2 (N_{c,1}(0) - N_{c,3}(0)) [\mathfrak{M}_{1,3}^{cc}(0)]^2, \quad (3.15)$$

mostrando o processo de criação degenerada de partículas no modo fundamental, além do processo de espalhamento de partículas deste modo para o terceiro [casos  $i$ ) e  $iv$ ), respectivamente]. Observamos que o processo de criação não degenerada de partículas [caso  $ii$ )] não ocorre, uma vez que a condição  $p = k + \ell$  não é satisfeita para qualquer  $\ell$ . Como esperado,  $\Delta N_{c,1}(\tau)$  cresce com a temperatura. Para o caso em que todo o sistema se encontra em zero absoluto, a Eq. (3.15) reduz-se a

$$\Delta N_{c,1}(\tau) = \left(\frac{\Gamma\tau}{2}\right)^2,$$

recuperando o resultado obtido na Ref. [62] para uma cavidade ideal, onde  $\Gamma = 1$ .

### O caso $p = 1$

Finalmente notamos que, apesar de não termos criação de partículas para o caso  $p = 1$ , onde

$$\Delta N_{c,1}(\tau) = -\frac{9}{32}\tau^2 [N_{c,1}(0) - N_{c,2}(0)] [\mathfrak{M}_{1,2}^{cc}(0)]^2, \quad (3.16)$$

o processo de espalhamento de partículas [do primeiro modo para o segundo, por meio do processo  $iv$ )], está presente quando  $N_{c,1}(0) = \text{Tr} \left( \rho_{c,1}(0) a_{c,1}^\dagger a_{c,1} \right) \neq 0$ , isto é, quando o modo fundamental encontra-se inicialmente excitado.

### Análise gráfica

Apresentamos em seguida os resultados gráficos para o número de partículas criadas  $\Delta N_{C,k}(\tau)$ , obtidos a partir da Eq. (3.14). Para este fim, vamos considerar valores inteiros de  $p$ , isto é, vamos considerar que apenas os casos  $i$ ),  $ii$ ), e  $iv$ ) contribuam. Além disso vamos, com exceção de um dos gráficos, considerar que o sistema todo, incluindo o  $k$ -ésimo modo, encontra-se em zero absoluto. Vamos começar construindo, nas Figs. 3.2(a) e (b), gráficos de  $\Delta N_{C,k}(\tau)$  contra  $k$  para os valores fixos  $p = 14$  e  $15$ , respectivamente. Podemos observar que a criação de partículas dar-se-á apenas nos modos  $k$  que satisfazem a relação

$$k \leq p - 1,$$

como esperado da análise fenomenológica do hamiltoniano (3.8). Devemos também notar que o número máximo de partículas criadas ocorre para  $p = 14$ , situação em que o modo  $k = 7$  é parametricamente amplificado. Quando  $p = 15$ , temos apenas a criação não degenerada de partículas, com o máximo ocorrendo para os modos  $(k, \ell) = (6, 7)$ . Da Fig. 3.2 à 4.2 fixamos o valor do intervalo de tempo  $\tau = 1/p$ , durante o qual o espelho realiza  $1/2\pi\varepsilon$  oscilações.

Ao invés de fixarmos  $p$ , na Fig. 3.3 fixamos  $k = 7$  para a construção do gráfico de  $\Delta N_{C,7}(\tau)$  contra  $p$ . Verificamos, como esperado, a ocorrência de ressonâncias no número de partículas criadas para  $p \geq 8$ , com um máximo para  $p = 14$  (amplificação paramétrica). Como evidenciado na Fig. 3.3, com exceção do máximo em  $p = 2k$ , a magnitude de  $\Delta N_{C,7}(\tau)$  exhibe um perfil governado pelos elementos da matriz de acoplamento  $\mathfrak{M}_{kl}^{CC}(0)$ , além das razões  $(k \pm l)^2 / kl$ .

Na Fig. 3.4(a) mostramos o gráfico do número total de partículas criadas nos modos DC,  $N_C = \sum_k \Delta N_{C,k}(\tau)$ , contra  $p$ . É evidente desta figura que este número é significativamente maior para valores pares de  $p$ , onde ocorre o processo de criação degenerada de pares de partículas. Além disso, como esperado, não existem partículas criadas quando  $p = 1$ . Notamos também que o número total de partículas aumenta conforme  $p$  aumenta. Um comportamento similar ao mostrado na Fig. 3.4(a) é encontrado na Fig. 3.4(b), onde apresentamos o gráfico da energia total normalizada  $E_C = \sum_k \omega_k \Delta N_{C,k}(\tau) / \omega_1$  contra  $p$ . Enquanto que na Fig. 3.4(a) o número de partículas criadas aumenta conforme  $p$  aumenta, na Fig. 3.4(b) este comportamento é modulado pela frequência  $\omega_k$ .

Finalmente, na Fig. 3.5, exibimos o gráfico de  $\Delta N_{C,1}(\tau)$  contra  $\tau$  para o caso em que todo o sistema — tanto a cavidade como o reservatório — encontram-se nas temperaturas  $T = 0$  K,

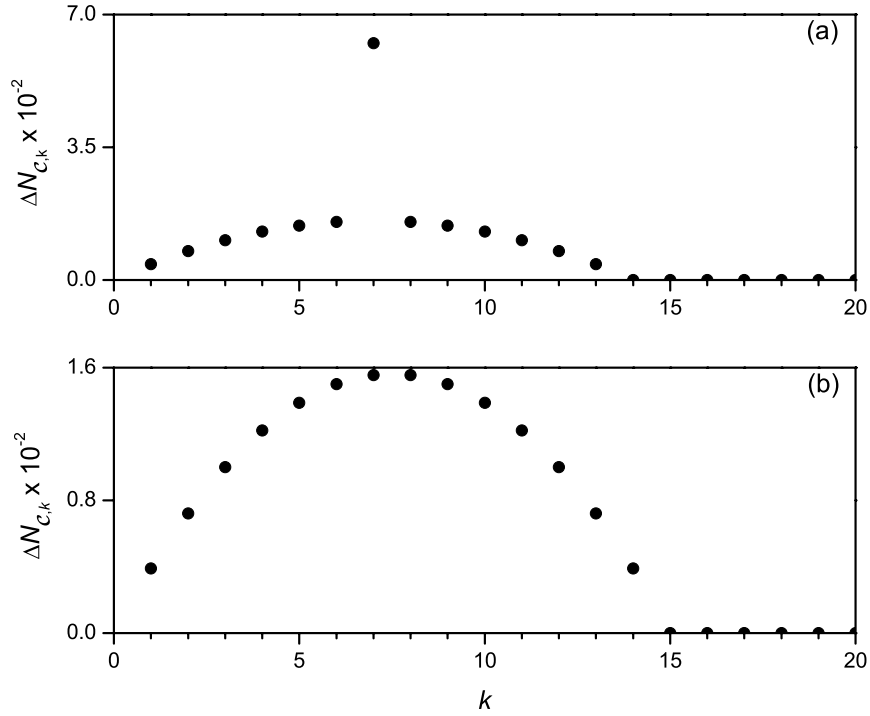


Figura 3.2: Número médio de partículas criadas  $\Delta N_{C,k}(t)$  contra  $k$  para os valores fixos (a)  $p = 14$  e (b)  $p = 15$ . O intervalo de tempo é fixo em  $\tau = 1/p$ .

isto é,  $\langle N_{S,k}(0) \rangle = 0$  (linha azul sólida) e  $T = \omega_1/k_B \ln(1.1)$  K, onde,  $\langle N_{C,1}(0) \rangle = 10$  (linha vermelha tracejada), para o valor fixo  $p = 2$ . Podemos observar que o número de partículas criadas aumenta com a temperatura, resultado que também foi verificado em Ref. [82] para uma cavidade tridimensional, corroborando a demonstração de Parker [84], de que a presença inicial de bósons tende a aumentar a taxa de criação de bósons.

### 3.5.3 Entropia e decoerência

Nesta seção vamos calcular, para a lei de movimento especificada na Eq. (3.13), a entropia linear (3.12) e o tempo de decoerência de um estado do tipo gato de Schrödinger  $|\psi_{C,k}(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle)$ , preparado no  $k$ -ésimo modo DC de uma cavidade inicialmente estática. Em



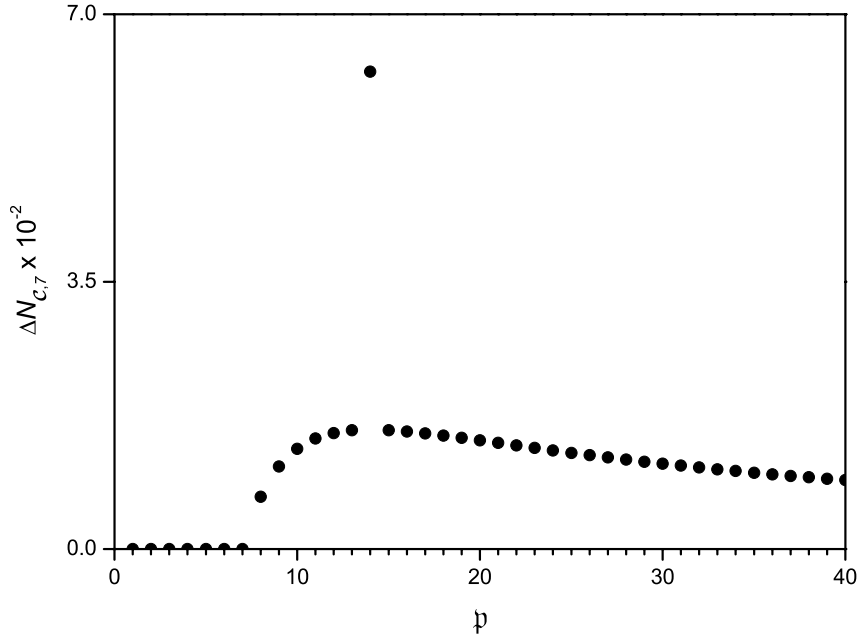


Figura 3.3: Número médio de partículas criadas  $\Delta N_{C,7}(\tau)$  contra  $p$  para  $k = 7$ . O intervalo de tempo é fixo em  $\tau = 1/p$ .

segunda ordem em  $\varepsilon$ , obtemos a seguinte expressão para a entropia linear

$$\begin{aligned}
S_{C,k}(\tau) \simeq (p\tau)^2 \sum_{\ell(\neq k)} \left\{ (|\alpha|^2 + 1) [\mathfrak{M}_{k\ell}^{CC}(0)]^2 \frac{(k-\ell)^2}{2k\ell} \delta_{p,\ell+k} \right. \\
+ |\alpha|^2 [\mathfrak{M}_{k\ell}^{CC}(0)]^2 \frac{(k+\ell)^2}{2k\ell} (\delta_{p,k-\ell} + \delta_{p,\ell-k}) \theta(p) \\
- (|\alpha|^2 + 1) \frac{k}{2l\chi} [\mathfrak{M}_{k\ell}^{CR}(0)]^2 \delta_{p,k+l\chi} \\
\left. - |\alpha|^2 \frac{k}{2l\chi} [\mathfrak{M}_{k\ell}^{CR}(0)]^2 (\delta_{p,k-l\chi} + \delta_{p,l\chi-k}) \theta(p) \right\}, \quad (3.17)
\end{aligned}$$

que será empregada na estimativa do tempo de decoerência através da relação

$$S_{C,k}^p(\tau) \simeq \left( \frac{\tau}{\tau_D} \right)^2, \quad (3.18)$$

conectada com o chamado defeito de idempotência [96].

Em primeiro lugar observamos que, para o caso particular em que o  $k$ -ésimo modo DC encontra-se no vácuo ( $\alpha = 0$ ), bem como todos os demais modos, temos ainda um aumento da entropia

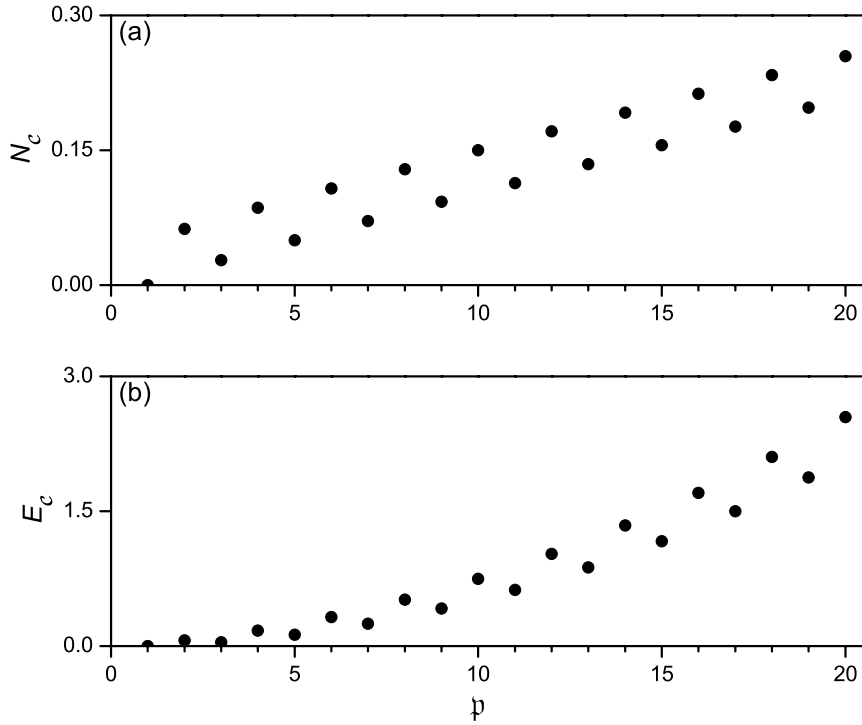


Figura 3.4: (a) número total de partículas criadas  $N_c(\tau)$  e (b) energia total normalizada  $E_c(\tau)/\omega_1$ , contra  $p$ . O intervalo de tempo é fixo em  $\tau = 1/p$ .

dado por

$$S_{C,k}(\tau) \simeq \left(\frac{p\tau}{2}\right)^2 \sum_{\ell(\neq k)} \left\{ [\mathfrak{M}_{k\ell}^{cC}(0)]^2 \frac{(k-l)^2}{2k\ell} \delta_{p,l+k} - \frac{k}{2l\mathcal{L}} [\mathfrak{M}_{k\ell}^{cR}(0)]^2 \delta_{p,k+l\mathcal{L}} \right\}.$$

Evidentemente, neste caso, o aumento da entropia deve-se inteiramente ao processo de criação de partículas.

Agora, considerando que o estado inicial  $|\psi_{C,1}(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle)$  seja preparado no modo fundamental, obtemos, para os casos  $p = 1$  e  $p = 2$ , os resultados

$$S_{C,1}^{p=1}(\tau) \simeq \frac{9}{4}\tau^2 |\alpha|^2 [\mathfrak{M}_{1,2}^{cC}(0)]^2,$$

$$S_{C,1}^{p=2}(\tau) \simeq \frac{32}{3}\tau^2 |\alpha|^2 [\mathfrak{M}_{1,3}^{cC}(0)]^2,$$

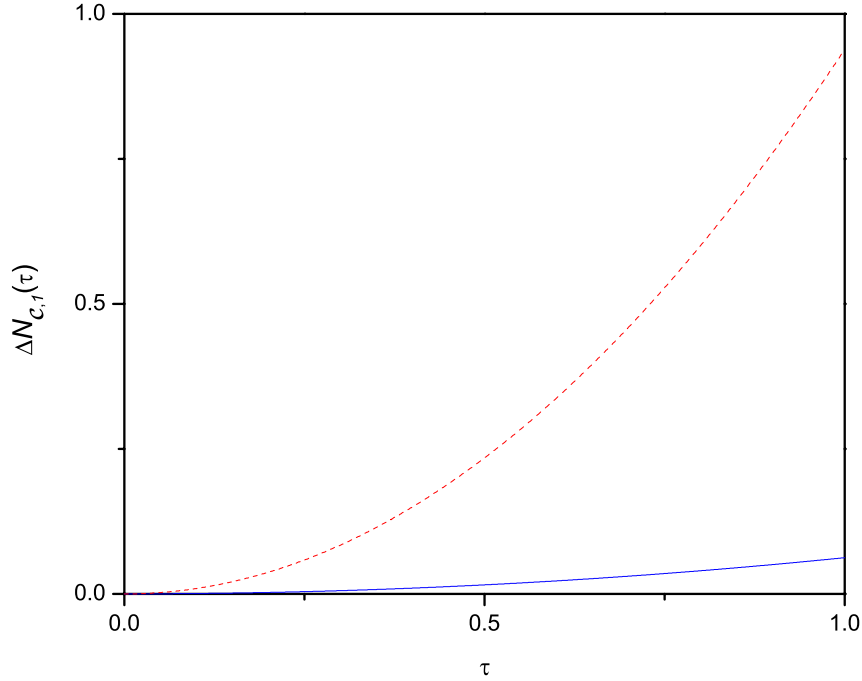


Figura 3.5: Número de partículas formadas no modo fundamental DC,  $\Delta N_{c,1}(\tau)$ , contra  $\tau$  para os casos em que a temperatura do sistema é  $T = 0$  K (linha azul sólida) e  $T = \omega_1/k_B \ln(1.1)$  K (linha vermelha tracejada). Escolhemos o valor fixo  $p = 2$ .

associados com os tempos de decoerência

$$\tau_D^{p=1} \simeq \frac{2}{3} \frac{1}{|\alpha| \mathfrak{M}_{1,2}^{CC}(0)},$$

$$\tau_D^{p=2} \simeq \sqrt{\frac{3}{32}} \frac{1}{|\alpha| \mathfrak{M}_{1,3}^{CC}(0)}.$$

Notamos que ambos os tempos de decoerência  $\tau_D^{p=1}$  e  $\tau_D^{p=2}$  são inteiramente devidos ao processo de espalhamento do modo fundamental para o primeiro e terceiro modos excitados, respectivamente, governados pelo processo  $iv$ ). A razão entre estes dois tempos de decoerência, dada pela relação

$$\frac{\tau_D^{p=1}}{\tau_D^{p=2}} \simeq \sqrt{\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{1}{\pi} \eta_1 \right) + O(\eta_1^2).$$

recupera, para o caso de uma cavidade ideal ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), exatamente o resultado obtido na Ref. [88] através de um método diferente.

Para uma análise gráfica da entropia e, conseqüentemente, da perda de pureza e decoerência no ECD, vamos assumir que o estado inicial  $|\psi_{c,1}(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha_0\rangle + |-\alpha_0\rangle)$  seja preparado no modo

fundamental DC. Como podemos concluir da Fig. 3.6, onde se apresenta o gráfico da entropia  $S_{C,1}(t)$  contra  $p$  para  $|\alpha_0|^2 = 2$  e dois intervalos fixos de tempo  $\tau = 0.1$  (triângulos pretos) e  $\tau = 0.25$  (círculos pretos), a perda da pureza do estado inicial  $|\psi_{C,1}(0)\rangle$  exhibe ressonâncias, assim como o número médio de partículas criadas. O aumento da entropia com  $p$ , segue diretamente dos processos de criação não degenerada de pares de partículas, que ocorre para  $p \geq 3$ , e de espalhamento, que ocorre para  $p \geq 1$ . De fato, estes processos acoplam o modo fundamental DC, onde o estado  $|\psi_{C,1}(0)\rangle$  é preparado, com todos os demais modos DC, aumentando assim sua entropia quando traçamos sobre os modos remanescentes. Além disso, como podemos observar diretamente das Eqs. (3.14) e (3.17), as taxas com as quais estes dois processos ocorrem aumentam com  $p$ . Observamos também que o processo de criação degenerada de partículas, que resulta na amplificação paramétrica do modo fundamental quando  $p = 2$ , não acopla o modo de interesse com qualquer outro modo e, conseqüentemente, não contribui para o aumento de sua entropia. Para uma cavidade ideal, a entropia  $S_{C,1}(\tau)$  se reduz a

$$S_{C,1}(\tau) \simeq \frac{\tau^2}{2} \times \begin{cases} 2|\alpha|^2 p + p - 1 & \text{para } p \geq 3 \\ |\alpha|^2 (p + 1) & \text{para } p = 1, 2 \end{cases},$$

para valores inteiros e positivos de  $p$ .

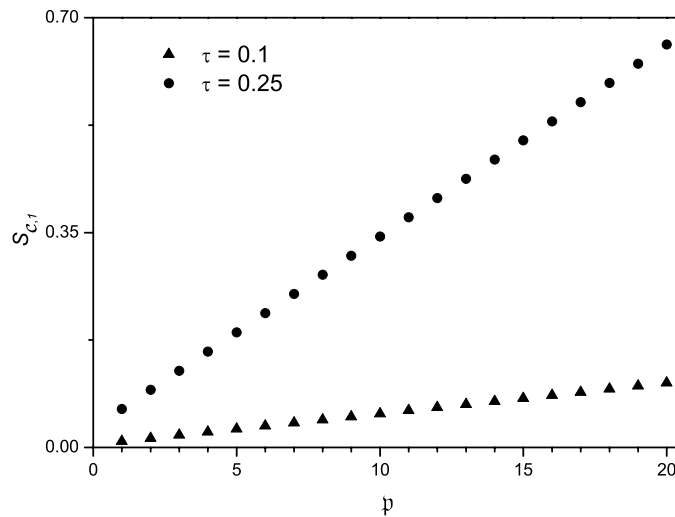


Figura 3.6: Entropia linear de um estado de superposição do tipo gato de Schrödinger, com  $|\alpha_0|^2 = 2$ , preparado no modo fundamental DC, contra  $p$ . Os triângulos correspondem ao intervalo de tempo  $\tau = 0.1$  e os círculos a  $\tau = 0.25$ .

A seguir, na Fig. 3.7, mostramos o gráfico do tempo de decoerência normalizado  $\tau_D^p / \tau_D^{p=1}$  do estado inicial  $|\psi_{C,1}(0)\rangle$  contra  $p$ . Como esperado da Fig. 3.6, o tempo de decoerência do estado

inicial diminui conforme  $p$  aumenta. As ressonâncias no ECD indicam que, apesar dos mecanismos de criação de partículas e de espelhamento presentes no hamiltoniano (3.8), praticamente não há perda de pureza quando a frequência de oscilação do espelho não satisfaz as condições de ressonâncias apresentadas acima. De fato, para uma situação fora da ressonância, o acoplamento efetivo entre os modos da cavidade e o número de partículas criadas é praticamente nulo, protegendo assim o estado preparado, qualquer que seja o modo selecionado. Portanto, para o ECD não ressonante, o estado inicial  $|\psi_{C,1}(0)\rangle$  torna-se um estado não estacionário, seguindo a dinâmica governada pelo espelho em movimento, mas protegido dos mecanismos de decoerência presentes no regime ressonante.

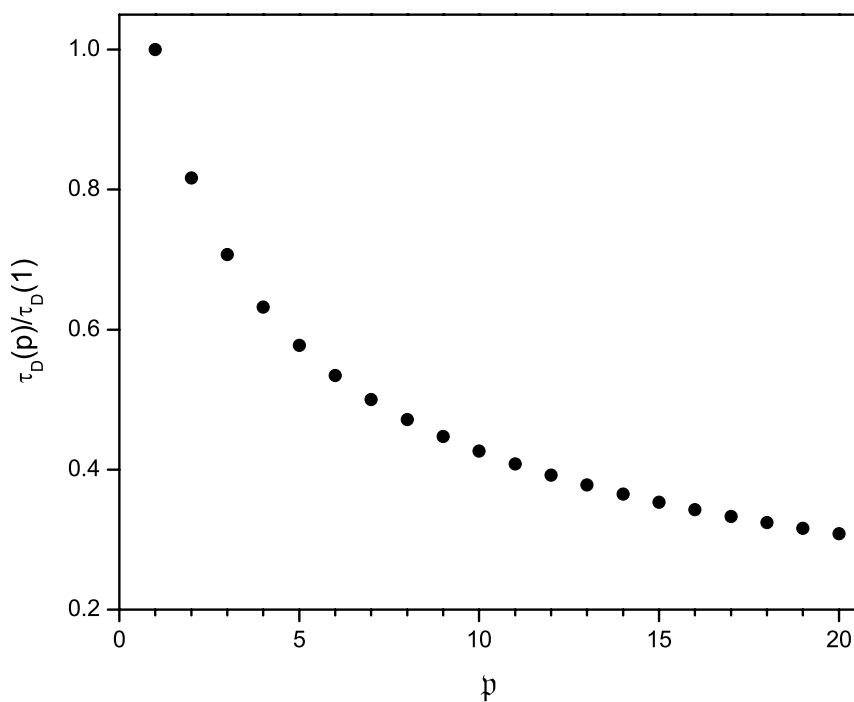


Figura 3.7: Tempo de decoerência  $\tau_D$  de um estado de superposição do tipo gato de Schrödinger, preparado no modo fundamental DC, contra  $p$ .

### 3.6 Conclusões

Considerando o problema do ECD em uma cavidade não ideal, construímos um hamiltoniano dissipativo efetivo, Eq. (3.8), válido para qualquer lei de movimento do espelho da cavidade. A

partir deste hamiltoniano, calculamos uma expressão geral, dada pela Eq. (3.10), para o número médio de partículas criadas no  $k$ -ésimo modo DC,  $\Delta N_{C,k}(\tau)$ , que se aplica a qualquer lei de movimento do espelho. Considerando o caso particular de um movimento oscilatório do espelho, Eq. (3.13), a expressão obtida, apresentada na Eq. (3.14), possibilitou uma análise completa das ressonâncias na taxa de criação de partículas — como mostrado nas Figs. 3.2, 3.3 e 3.4 — uma vez que esta expressão aplica-se a qualquer valor da dessintonia entre a frequência de oscilação do espelho e o modo fundamental. Na literatura, mesmo em se tratando do ECD ideal, aborda-se casos particulares em que a lei de movimento do espelho é especificada de partida. A expressão generalizada obtida neste trabalho, Eq. (3.10), certamente pode ser útil para futuras investigações sobre o ECD.

Apresentamos também um tratamento geral da evolução temporal da entropia linear do estado do  $k$ -ésimo modo da cavidade,  $S_{C,k}(t) = 1 - \text{Tr} \rho_{C,k}^2(t)$ , com o resultado mostrado na Eq. (3.12), que também se aplica a qualquer lei de movimento do espelho. Considerando mais uma vez o caso particular de um movimento oscilatório, Eq. (3.13), calculamos, através da entropia linear, o tempo de decoerência de um estado de superposição do tipo gato de Schrödinger, preparado no  $k$ -ésimo modo da cavidade estática. Com este intuito, utilizamos a relação (3.18) para obter uma estimativa do tempo de decoerência, apresentando assim uma análise completa das ressonâncias no processo de decoerência no ECD não ideal e mostramos que nossa expressão geral, Eq. (3.17), recupera resultados anteriormente apresentados na literatura [88].

Esperamos que o presente método seja útil para futuras investigações acerca do ECD não ideal, considerando, por exemplo, um modelo mais realista de reservatório, que atue mesmo quando a cavidade encontra-se em repouso. De fato, a obtenção de um modelo mais realista de reservatório para o ECD é, por si só, uma tarefa interessante.

## Capítulo 4

# ECD para o campo escalar não massivo entre duas cascas esféricas concêntricas

### 4.1 Introdução

O efeito Casimir estático, previsto teoricamente em 1948 [22], consiste no surgimento de uma força de atração entre duas placas paralelas, perfeitamente condutoras e neutras, devido a distorção, por elas provocadas, no vácuo eletromagnético (para uma revisão ver [26]). Como consequência das flutuações quânticas causadas pela presença das placas, tal distorção do estado de vácuo emerge dos conceitos fundamentais da teoria quântica de campos [81]. O próprio Casimir foi o primeiro a discutir a importância da geometria esférica na distorção do estado de vácuo [27], propondo, em 1953, um modelo semiclássico para explicar a estabilidade do elétron. Neste modelo, assume-se que o elétron seja uma casca esférica perfeitamente condutora, carregada com uma carga total  $e$ , com a repulsão coulombiana sendo balanceada pela força atrativa de Casimir. Entretanto, como elucidado por Boyer [28] em 1968, a força de Casimir para uma configuração esférica é repulsiva, invalidando assim a tentativa de se explicar a estabilidade do elétron através da força de Casimir. Apesar disso, o modelo para o elétron proposto por Casimir evidenciou o fato de que não podemos prever se a força de Casimir será atrativa ou repulsiva para uma dada configuração geométrica antes de completarmos o cálculo. O desenvolvimento, na década de 1970, do *bag model* para os hadrons — modelo este que descreve os hadrons como quarks e antiquarks confinados no interior de uma cavidade esférica — também estimulou a investigação do efeito Casimir para a geometria esférica [97, 98].

Para além das configurações geométricas estáticas, o ECD, que surge a partir de fronteiras móveis, revela aspectos ainda mais profundos da complexidade da estrutura do vácuo. A dinâmica

da geometria dá origem a uma força de Casimir dependente do tempo e atua como uma força dissipativa para o movimento das fronteiras [99]. A energia mecânica dissipada por esta "viscosidade do vácuo" induz a mais interessante manifestação do ECD, o mecanismo pelo qual partículas são criadas a partir do vácuo. G. T. Moore foi o primeiro a estudar a quantização do campo eletromagnético no interior de uma cavidade cujos espelhos encontram-se em movimento [37] e, ainda em 1970, a criação de partículas a partir do movimento não uniforme das fronteiras foi previsto [37]. Mais tarde foi observado que uma mudança súbita no índice de refração do meio também pode levar à geração de fótons a partir do vácuo [48, 73, 75].

No que se refere a geometria esférica — o tema do presente capítulo — J. Schwinger [79] propôs que o ECD poderia fornecer uma possível explicação para o fenômeno da sonoluminescência, descoberto na década de 1930 [100]. Entretanto, apesar dos interessantes resultados obtidos a partir da hipótese de Schwinger [78], a descrição teórica do fenômeno da sonoluminescência permanece ainda controverso. Mencionamos, finalmente, que o ECD com geometria esférica apresenta grande similaridade com o problema da criação de partículas em um universo em expansão, onde a porção espacial da métrica é uma superfície hiperesférica cujo raio depende do tempo [84, 85, 86].

No presente capítulo estudamos o ECD para um campo escalar não massivo, confinado entre duas cascas esféricas concêntricas e móveis. Apresentamos uma expressão geral — válida para qualquer lei de movimento das cascas — para o cálculo do número médio de partículas criadas pelo ECD no campo confinado entre as cascas. Notamos que o caso particular de uma única casca esférica movendo-se com uma lei específica de movimento foi estudada na Ref. [101]. O caso do campo eletromagnético confinado em uma cavidade esférica cujo raio descreve um movimento oscilatório foi considerado na Ref. [102]. Após a dedução de um hamiltoniano efetivo para o problema em questão, calculamos o número médio de partículas criadas através de dois métodos distintos: considerando, em primeiro lugar, o operador densidade do campo na cavidade (região entre as duas cascas) e, em segundo lugar, pelo cálculo dos denominados coeficientes de Bogoliubov. Assumindo, então, um movimento oscilatório para as cascas, nosso resultado é aplicado a quatro diferentes situações: quando somente a casca (a) interna ou (b) externa oscilam e também quando ambas as cascas oscilam (c) em fase ou (d) fora de fase.

O presente capítulo é organizado da seguinte maneira: na Seção 4.2 apresentamos a quantização do campo, bem como o hamiltoniano efetivo; na seção 4.3 calculamos o número médio de partículas



criadas, assumindo uma lei geral de movimento para as cascas; na seção 4.4 nosso resultado geral é aplicado ao caso do movimento oscilatório; finalmente, na seção 4.5 apresentamos nossas conclusões.

## 4.2 Quantização do campo na cavidade

Para quantizarmos o campo escalar não massivo  $\phi$  na cavidade delimitada pelas cascas esféricas, partimos da definição da ação para este campo, dada por

$$S = \int dt d^3 \mathbf{x} \mathcal{L}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int dt d^3 \mathbf{x} \left( \nabla \phi \cdot \nabla \phi - \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 \right), \quad (4.1)$$

onde a densidade lagrangeana  $\mathcal{L}$  permite-nos definir o momento canonicamente conjugado ao campo

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\phi})} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(\mathbf{r}, t). \quad (4.2)$$

Através da minimização da ação (4.1), obtemos a equação de Klein-Gordon para o campo

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \phi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (4.3)$$

Como estamos considerando o caso ideal, vamos impor condições de contorno de Dirichlet para o campo

$$\phi(r=r_i, \theta, \varphi, t) = \phi(r=r_o, \theta, \varphi, t) = 0, \quad (4.4)$$

sobre ambas as cascas, interna e externa, cujos raios são  $r_i$  e  $r_o$ , respectivamente.

A geometria esférica da cavidade nos leva, naturalmente, a procurar por soluções, tanto para o campo como para seu momento canonicamente conjugado, em termos das expansões em harmônicos esféricos

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{s=1}^{\infty} c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{ls}}} F_{ls}(r) [c_{lms}(t) Y_{lm}(\theta, \varphi) + c.c.], \quad (4.5a)$$

$$\pi(\mathbf{r}, t) = -i \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{ls}}{2}} F_{ls}(r) [c_{lms}(t) Y_{lm}(\theta, \varphi) - c.c.]. \quad (4.5b)$$

Substituindo as expansões acima nas Eqs. (4.3) e (4.4), obtemos a seguinte equação diferencial para a função radial  $F_{ls}(r)$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dF_{ls}(r)}{dr} \right) + \left( \frac{\omega_{ls}^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) F_{ls}(r) = 0. \quad (4.6)$$

Das condições de contorno (4.4) segue que  $F_{ls}$  deve satisfazer as seguintes relações

$$F_{ls}(r = r_i) = F_{ls}(r = r_o) = 0.$$

Além disso, como as funções radiais são soluções de um problema de valor de contorno, elas automaticamente satisfazem as seguintes condições de ortonormalização

$$\int_{r_i}^{r_o} F_{ls}(r) F_{ls'}(r) r^2 dr = \delta_{s,s'}. \quad (4.7)$$

Uma vez que as soluções da Eq. (4.6) são dadas em termos de uma combinação linear das funções esféricas de Bessel do primeiro ( $j_l$ ) e do segundo ( $n_l$ ) tipos, a condição de contorno sobre a casca interna resulta na seguinte relação

$$F_{ls}(r) = \mathcal{N}_{ls} \left[ j_l \left( \frac{\omega_{ls} r}{c} \right) n_l \left( \frac{\omega_{ls} r_i}{c} \right) - j_l \left( \frac{\omega_{ls} r_i}{c} \right) n_l \left( \frac{\omega_{ls} r}{c} \right) \right],$$

enquanto que a imposição da condição de contorno sobre a casca externa resulta na equação transcendental para as autofrequências

$$j_l \left( \frac{\omega_{ls} r_o}{c} \right) n_l \left( \frac{\omega_{ls} r_i}{c} \right) - j_l \left( \frac{\omega_{ls} r_i}{c} \right) n_l \left( \frac{\omega_{ls} r_o}{c} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Para uma dada configuração da cavidade devemos resolver esta equação para determinarmos as frequências do campo. O índice  $s$  em  $\omega_{ls}$  — que assume valores discretos, mas não necessariamente igualmente espaçados — rotula a  $s$ -ésima raiz da Eq. (4.8). Notamos também que a solução para o problema com cascas em movimento, com condições dinâmicas de contorno, segue diretamente das relações acima, a partir da substituição dos raios estáticos  $r_{i(o)}$  pelos raios dinâmicos  $r_{i(o)}(t)$ , uma vez que toda a dependência temporal das funções radiais decorre destes raios [81]. Na Fig. (4.1) construímos um mapa das soluções da Eq. (4.8) para alguns valores de  $l$  e  $s$ . Como podemos ver, para o caso  $l = 0$ , as frequências são equidistantes, o que não ocorre para o caso  $l \neq 0$ . Entretanto, quando consideramos  $r_o(t) \gg r_o(t) - r_i(t)$  (isto é, quando os raios das cascas são muito maiores que a separação entre elas), as soluções para todos os valores de  $l$  aproximam-se da solução para  $l = 0$ , isto é,  $\omega_{ls} \rightarrow \omega_{0s}$ .

### 4.2.1 Quantização canônica do campo

A quantização canônica do campo escalar  $\phi$  na Eq. (4.5a) é realizada — pela promoção dos coeficientes  $c_{lms}$  e  $c_{lms}^*$  a operadores  $a_{lms}$  e  $a_{lms}^\dagger$  — através da construção de um operador de

campo  $\hat{\phi}$  que satisfaz as Eqs. (4.3) e (4.4) e da imposição das relações de comutação a tempos iguais

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] &= i\hbar\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)] &= [\hat{\pi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t)] = 0, \end{aligned}$$

sendo  $\hat{\pi}$  o operador momento associado a  $\pi$ . As relações acima entre os operadores de campo implicam, automaticamente, nas relações de comutação bosônicas para os operadores de criação e aniquilação

$$\begin{aligned} [a_{lms}(t), a_{l'm's'}^\dagger(t)] &= \delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{ss'}, \\ [a_{lms}(t), a_{l'm's'}(t)] &= [a_{lms}^\dagger(t), a_{l'm's'}^\dagger(t)] = 0. \end{aligned}$$

Através da derivada temporal da versão quântica das Eqs. (4.5), juntamente com as equações para o campo na cavidade (4.3) e seu momento canonicamente conjugado (4.2), obtemos as seguintes equações de Heisenberg para os operadores de aniquilação

$$\dot{a}_{lms}(t) = -i\omega_{ls}(t)a_{lms}(t) + \sum_{s'} \mu_{l[ss']}(t)a_{lms'}(t) + \sum_{s'} \mu_{l(ss')}(t)a_{l(-m)s'}^\dagger(t), \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \mu_{l(ss')}(t) &= \frac{1}{2} [\mu_{lss'}(t) + \mu_{ls's}(t)], \\ \mu_{l[ss']}(t) &= \frac{1}{2} [\mu_{lss'}(t) - \mu_{ls's}(t)], \end{aligned}$$

são as partes simétrica e anti-simétrica, respectivamente, dos coeficientes

$$\mu_{lss'}(t) = \frac{\dot{\omega}_{ls}(t)}{2\omega_{ls}(t)}\delta_{ss'} + (1 - \delta_{ss'}) \sqrt{\frac{\omega_{ls}(t)}{\omega_{ls'}(t)}} \int_{r_i(t)}^{r_o(t)} r^2 F_{ls'}(r; t) \dot{F}_{ls}(r; t) dr.$$

A partir da Eq. (4.10) obtemos diretamente as equações para os operadores  $\dot{a}_{lms}^\dagger$ .

### 4.2.2 O hamiltoniano efetivo

Seguindo as razões apresentadas na Ref. [38], derivamos, em seguida, um hamiltoniano efetivo que governe a evolução dos operadores de criação e aniquilação, segundo descrita pelas Eqs. (4.10). Para este fim, uma vez que as equações de movimento são lineares, consideramos a forma quadrática mais geral possível para o hamiltoniano

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \hbar \sum_{l,l'} \sum_{m,m'} \sum_{s,s'} \left[ f_{ll'mm'ss'}^{(1)}(t) a_{lms}^\dagger a_{l'm's'}^\dagger + f_{ll'mm'ss'}^{(2)}(t) a_{lms}^\dagger a_{l'm's'} \right. \\ &\quad \left. + f_{ll'mm'ss'}^{(3)}(t) a_{lms} a_{l'm's'}^\dagger + f_{ll'mm'ss'}^{(4)}(t) a_{lms} a_{l'm's'} \right], \end{aligned}$$

que governa a evolução dos operadores de campo segundo as equações de Heisenberg

$$\dot{a}_{lms} = (i/\hbar) [H_{eff}, a_{lms}].$$

Comparando as equações de movimento para  $\dot{a}_{lms}(t)$  e  $\dot{a}_{lms}^\dagger(t)$ , obtidas através das equações acima, com aquelas que seguem da Eq. (4.10), obtemos o hamiltoniano efetivo  $H_{eff}(t) = H_0(t) + V(t)$ , em que

$$H_0(t) = \hbar \sum_{l,m,s} \omega_{ls}(t) \left( a_{lms}^\dagger a_{lms} + \frac{1}{2} \right), \quad (4.11a)$$

$$V(t) = i \frac{\hbar}{2} \sum_{l,m} \sum_{s,s'} \mu_{lss'}(t) \left[ \left( a_{lms'} + a_{l(-m)s'}^\dagger \right) a_{lms}^\dagger - a_{lms} \left( a_{l(-m)s'} + a_{lms'}^\dagger \right) \right]. \quad (4.11b)$$

No que se segue calculamos o número médio de partículas criadas em um modo selecionado através de dois métodos distintos: o operador densidade e os coeficientes de Bogoliubov.

## 4.3 Número médio de partículas criadas

### 4.3.1 O operador densidade

Através da transformação unitária

$$U_0(t) = \exp \left[ -i \int_0^t d\tau H_0(\tau) \right],$$

podemos reescrever, na representação de interação, o hamiltoniano efetivo obtido na seção anterior na forma

$$V_I(t) = i \frac{\hbar}{2} \sum_{l,m} \sum_{s,s'} \mu_{lss'}(t) \left[ \left( \tilde{a}_{lms'}(t) + \tilde{a}_{l(-m)s'}^\dagger(t) \right) \tilde{a}_{lms}^\dagger(t) - \tilde{a}_{lms}(t) \left( \tilde{a}_{l(-m)s'}(t) + \tilde{a}_{lms'}^\dagger(t) \right) \right].$$

O operador densidade dos modos do campo na cavidade, nesta representação, é dado por

$$\rho(t) = \rho(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n [V_I(t_1), [V_I(t_2), \cdots [V_I(t_n), \rho(0)]]],$$

onde  $\tilde{a}_{lms}(t) = a_{lms} \exp(-i\Omega_{ls}(t))$  e  $\Omega_{ls}(t) = \int_0^t dt_1 \omega_{ls}(t_1)$ .

O número médio de partículas criadas em um modo particular, rotulado pelos números quânticos  $(l, m, s)$ , é dado por

$$N_{lms}(t) = \text{Tr} \rho(t) a_{lms}^\dagger a_{lms}.$$

Para calcularmos este número vamos considerar a aproximação em segunda ordem na velocidade das paredes da cavidade  $\dot{r}_{i(o)}/c \ll 1$ . Assumindo que o estado inicial do campo seja o vácuo

$$\rho(0) = |\{0\}\rangle \langle\{0\}|,$$

um cálculo direto nos leva ao resultado

$$\begin{aligned} N_{lms}(t) &\simeq \frac{1}{4} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \sum_{m',m''} \sum_{q,q'} \sum_{p,p'} \mu_{lp'p'}(t_1) \mu_{lqq'}(t_2) \\ &\times \left\{ \langle\{0\}| a_{lm''q} a_{l(-m'')q'} a_{lms}^\dagger a_{lms} a_{l(-m')p'}^\dagger a_{lm'p}^\dagger |\{0\}\rangle \right. \\ &\times \exp[-i(\Omega_{lp}(t_1) + \Omega_{lp'}(t_1) - \Omega_{lq}(t_2) - \Omega_{lq'}(t_2))] \\ &+ \langle\{0\}| a_{lm'p} a_{l(-m')p'} a_{lms}^\dagger a_{lms} a_{l(-m'')q'}^\dagger a_{lm''q}^\dagger |\{0\}\rangle \\ &\left. \times \exp[i(\Omega_{lp}(t_1) + \Omega_{lp'}(t_1) - \Omega_{lq}(t_2) - \Omega_{lq'}(t_2))] \right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Usando o fato de que

$$\begin{aligned} \langle\{0\}| a_{lm''q} a_{l(-m'')q'} a_{lms}^\dagger a_{lms} a_{l(-m')p'}^\dagger a_{lm'p}^\dagger |\{0\}\rangle &= \delta_{m'',m} \delta_{s,q} (\delta_{m',m} \delta_{q',p'} \delta_{s,p} + \delta_{-m',m} \delta_{q',p} \delta_{s,p'}) \\ &+ \delta_{-m'',m} \delta_{s,q'} (\delta_{m',m} \delta_{q,p'} \delta_{s,p} + \delta_{-m',m} \delta_{q,p} \delta_{s,p'}), \end{aligned}$$

a expressão (4.12) assume a forma compacta

$$N_{lms}(t) = \sum_{s'} \left| \int_0^t dt_1 \mu_{l(s's)}(t_1) \exp[i\{\Omega_{ls'}(t_1) + \Omega_{ls}(t_1)\}] \right|^2, \quad (4.13)$$

a qual, como a energia de um dado modo  $\omega_{ls}$ , é a mesma para qualquer valor de  $m$ .

### 4.3.2 Os coeficientes de Bogoliubov

Nesta seção calculamos o número médio de partículas criadas através dos coeficientes de Bogoliubov [103], definidos pelas expressões

$$a_{lms}(t) = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{lsq}(t) a_{lmq}(0) + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{lsq}(t) a_{l(-m)q}^\dagger(0), \quad (4.14a)$$

$$a_{lms}^\dagger(t) = \sum_{q=1}^{\infty} \alpha_{lsq}^*(t) a_{lmq}^\dagger(0) + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{lsq}^*(t) a_{l(-m)q}(0), \quad (4.14b)$$

juntamente com as condições iniciais  $\alpha_{lsq}(0) = \delta_{s,q}$  e  $\beta_{lsq}(0) = 0$ .

Calculando as derivadas temporais dos operadores  $a_{lms}(t)$  e  $a_{lms}^\dagger(t)$  diretamente das Eqs. (4.14), obtemos

$$\dot{a}_{lms}(t) = \sum_q \dot{\alpha}_{lsq}(t) a_{lmq}(0) + \sum_q \dot{\beta}_{lsq}(t) a_{l(-m)q}^\dagger(0), \quad (4.15a)$$

$$\dot{a}_{lms}^\dagger(t) = \sum_q \dot{\alpha}_{lsq}^*(t) a_{lmq}^\dagger(0) + \sum_q \dot{\beta}_{lsq}^*(t) a_{l(-m)q}(0). \quad (4.15b)$$

Substituindo as expressões para  $a_{lms}(t)$  e  $a_{lms}^\dagger(t)$ , dadas pelas Eqs. (4.14), na Eq. (4.10) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{a}_{lms}(t) &= \sum_{s',q} [-i\omega_{ls}\delta_{s,s'}\alpha_{lsq}(t) + \mu_{l[ss']}\alpha_{ls'q}(t) + \mu_{l(ss')}\beta_{ls'q}^*(t)] a_{lmq}(0) \\ &+ \sum_{s',q} [-i\omega_{ls}\delta_{s,s'}\beta_{lsq}(t) + \mu_{l[ss']}\beta_{ls'q}(t) + \mu_{l(ss')}\alpha_{ls'q}^*(t)] a_{l(-m)q}^\dagger(0), \end{aligned} \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_{lms}^\dagger(t) &= \sum_{s',q} [i\omega_{ls}\delta_{s,s'}\alpha_{lsq}^*(t) + \mu_{l[ss']}\alpha_{ls'q}^*(t) + \mu_{l(ss')}\beta_{ls'q}(t)] a_{lmq}^\dagger(0) \\ &+ \sum_{s',q} [i\omega_{ls}\delta_{s,s'}\beta_{lsq}^*(t) + \mu_{l[ss']}\beta_{ls'q}^*(t) + \mu_{l(ss')}\alpha_{ls'q}(t)] a_{l(-m)q}(0). \end{aligned} \quad (4.16b)$$

Igualando os termos nas expressões para  $\dot{a}_{lms}(t)$  e  $\dot{a}_{lms}^\dagger(t)$  obtidas nas Eqs. (4.15) e (4.16), obtemos, após alguma manipulação algébrica, o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas para os coeficientes de Bogoliubov

$$\dot{\alpha}_{lss'}(t) = -i\omega_{ls}(t)\alpha_{lss'}(t) + \sum_q [\mu_{l[sq]}(t)\alpha_{lqs'}(t) + \mu_{l(sq)}(t)\beta_{lqs'}^*(t)], \quad (4.17a)$$

$$\dot{\beta}_{lss'}(t) = -i\omega_{ls}(t)\beta_{lss'}(t) + \sum_q [\mu_{l[sq]}(t)\beta_{lqs'}(t) + \mu_{l(sq)}(t)\alpha_{lqs'}^*(t)]. \quad (4.17b)$$

Agora, expandimos estes coeficientes em potências do acoplamento  $\mu_{lss'}$ , de maneira que

$$\alpha_{lss'}(t) = e^{-i\Omega_{ls}(t)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_{lss'}^{(\lambda)}(t), \quad (4.18a)$$

$$\beta_{lss'}(t) = e^{-i\Omega_{ls}(t)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \beta_{lss'}^{(\lambda)}(t), \quad (4.18b)$$

onde o fator  $e^{-i\Omega_{ls}(t)}$  foi introduzido por conveniência matemática. Substituindo as Eqs. (4.18) nas Eqs. (4.17), obtemos as seguintes relações de recorrência para os coeficientes de Bogoliubov

$$\begin{aligned} \alpha_{lss'}^{(\lambda)}(t) &= \int_0^t dt_1 e^{i\Omega_{ls}(t_1)} \sum_q [\mu_{l[sq]}(t_1) e^{-i\Omega_{lq}(t_1)} \alpha_{lqs'}^{(\lambda-1)}(t_1) \\ &+ \mu_{l(sq)}(t_1) e^{i\Omega_{lq}(t_1)} \beta_{lqs'}^{(\lambda-1)*}(t_1)], \end{aligned} \quad (4.19a)$$

$$\begin{aligned} \beta_{lss'}^{(\lambda)}(t) &= \int_0^t dt_1 e^{i\Omega_{ls}(t_1)} \sum_q [\mu_{l[sq]}(t_1) e^{-i\Omega_{lq}(t_1)} \beta_{lqs'}^{(\lambda-1)}(t_1) \\ &+ \mu_{l(sq)}(t_1) e^{i\Omega_{lq}(t_1)} \alpha_{lqs'}^{(\lambda-1)*}(t_1)]. \end{aligned} \quad (4.19b)$$

Quando as condições iniciais, dadas pelos termos de ordem zero  $\alpha_{lss'}^{(0)}(t) = \delta_{s,s'}$  e  $\beta_{lss'}^{(0)}(t) = 0$ , são substituídas nas Eqs. (4.19b), obtemos, finalmente, a solução em primeira ordem

$$\beta_{lss'}^{(1)}(t) = \int_0^t dt_1 e^{i[\Omega_{ls}(t_1) + \Omega_{ls'}(t_1)]} \mu_{l(ss')}(t_1). \quad (4.20)$$

Em seguida calculamos o número médio de partículas criadas a partir da expressão

$$N_{lms}(t) = \langle \{0\} | a_{lms}^\dagger(t) a_{lms}(t) | \{0\} \rangle = \sum_{s'} |\beta_{l,s,s'}(t)|^2,$$

onde  $|\{0\}\rangle$  indica o estado de vácuo inicial da cavidade e  $t$  o intervalo de tempo durante o qual as cascas estiveram em movimento. Até segunda ordem nos coeficientes de acoplamento  $\mu_{lss'}$ , o resultado obtido é

$$N_{lms}(t) \simeq \sum_{s'} \left| \beta_{lss'}^{(1)}(t) \right|^2. \quad (4.21)$$

Através da substituição da Eq. (4.20) na Eq. (4.21) obtém-se exatamente o mesmo resultado exposto na Eq. (4.13).

## 4.4 A criação de partículas entre cascas esféricas sob oscilações harmônicas

Nesta seção vamos assumir que ambas as cascas esféricas executam pequenas oscilações harmônicas descritas por

$$r_\alpha(t) = r_\alpha [1 + \epsilon_\alpha \sin(\varpi t)], \quad \alpha = i, o, \quad (4.22)$$

sendo  $\epsilon_\alpha \ll 1$  e  $\varpi$  a frequência de oscilação das cascas. Substituindo a Eq. (4.22) na Eq. (4.13) obtemos, em segunda ordem no parâmetro  $\epsilon_\alpha$ , o resultado

$$\begin{aligned} N_{lms} \simeq & \sum_{s'} \left| \left( \frac{\exp[i(\omega_{lss'} + \varpi)t] - 1}{(\omega_{lss'} + \varpi)} + \frac{\exp[i(\omega_{lss'} - \varpi)t] - 1}{(\omega_{lss'} - \varpi)} \right) \right|^2 \\ & \times \left( \sum_{\alpha} c_{l(ss')}^{\alpha} r_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \varpi \right)^2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde definimos os coeficientes

$$\begin{aligned} c_{lss'}^{\alpha} \equiv & \frac{1}{2\omega_{ls}(0)} \frac{\partial \omega_{ls}(0)}{\partial r_{\alpha}} \delta_{ss'} + (1 - \delta_{ss'}) \sqrt{\frac{\omega_{ls}(0)}{\omega_{ls'}(0)}} \int_{r_i}^{r_o} r^2 F_{ls'}(r; 0) \frac{\partial F_{ls}(r; 0)}{\partial r_{\alpha}} dr \\ & + (1 - \delta_{ss'}) \sqrt{\frac{\omega_{ls}(0)}{\omega_{ls'}(0)}} \frac{\partial \omega_{ls}(0)}{\partial r_{\alpha}} \int_{r_i}^{r_o} r^2 F_{ls'}(r; 0) \frac{\partial F_{ls}(r; 0)}{\partial \omega_{ls}(0)} dr, \end{aligned} \quad (4.24)$$

além das frequências  $\omega_{lss'} \equiv \omega_{ls}(0) + \omega_{ls'}(0)$ . A partir da Eq. (4.23) podemos observar a ocorrência de ressonâncias quando  $\varpi = \omega_{lss'}$ . Fora destas condições, o número de partículas criadas é uma função oscilatória do tempo. Portanto, para um dado modo  $(l, s)$ , o número médio de partículas criadas na  $s'$ -ésima ressonância é dado por

$$\lim_{\varpi \rightarrow \omega_{lss'}} N_{lms}(t) \simeq \left( \sum_{\alpha} c_{l(ss')}^{\alpha} r_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \varpi t \right)^2. \quad (4.25)$$

Desta expressão podemos observar que o número de partículas cresce quadraticamente com o tempo.

Para  $l = 0$  a equação transcendental (4.8) apresenta uma solução analítica

$$\omega_{0s}(t) = s\omega_{01}(t) = \frac{s\pi c}{r_0(t) - r_i(t)},$$

relacionando os raios das cascas com as frequências instantâneas do modo  $s$ , implicando na condição de ressonância  $\varpi = (s + s') \omega_{01}(0)$ .

Os coeficientes (4.24) reduzem-se à forma

$$c_{0(ss')}^i = -(-1)^{s+s'} c_{0(ss')}^o = \frac{\sqrt{ss'}}{s + s'} \frac{1}{r_o - r_i},$$

e o número médio de partículas criadas é dado pela expressão

$$\lim_{\varpi \rightarrow \omega_{0ss'}} N_{0ms}(t) \simeq \left( \frac{ss'}{(s + s')^2} \right) \left( \frac{\epsilon_o r_o - (-1)^{s+s'} \epsilon_i r_i}{r_o - r_i} \right)^2 (\varpi t)^2. \quad (4.26)$$

Note que, uma vez que o limite inferior de  $r_o - r_i$  é  $|r_o \epsilon_o| + |r_i \epsilon_i|$ , o máximo valor do segundo fator no lado direito da Eq. (4.26) é 1. Este resultado está em concordância com o fato de que o efeito Casimir é mais pronunciado para pequenas distâncias entre as cascas. Além disso, podemos observar que as velocidades efetivas  $\varpi \epsilon_o r_o - (-1)^{s+s'} \varpi \epsilon_i r_i = v_o - (-1)^{s+s'} v_i$  desempenham um importante papel no processo de criação de partículas, compatível com os resultados obtidos para a geometria plana [31, 104].

Para o caso  $l \neq 0$ , as ressonâncias são deslocadas para valores não inteiros da razão  $\varpi/\omega_{01}(0)$ , uma vez que as autofrequências  $\omega_{ls}$  deixam de ser equidistantes, como podemos constatar a partir da Fig. 4.1. Neste caso, a Eq. (4.8) não apresenta uma solução analítica e, portanto, não podemos escrever uma expressão fechada simples para os coeficientes  $c_{lss'}^{\alpha}$ , como fizemos para o caso  $l = 0$ . Na Fig. 4.2 mostra-se o gráfico de  $(r_o - r_i) |c_{lss'}^{\alpha}|$  como função da razão  $r_o/r_i$ . Como podemos observar, os casos  $l = 0$  e  $l \neq 0$  exibem o mesmo comportamento, isto é, conforme a distância



entre as cascas diminui, os coeficientes  $|c_{l(ss')}^\alpha|$  aumentam. Por outro lado, quando  $l \neq 0$ , caso em que  $c_{l(ss')}^i \neq -(-1)^{s+s'} c_{l(ss')}^o$ , as velocidades efetivas  $v_o - (-1)^{s+s'} v_i$  não exibem um papel evidente na amplitude dos coeficientes  $c_{l(ss')}^\alpha$ . Este fato mostra que a diferença qualitativa entre as geometrias plana e esférica aparecem, essencialmente, para  $l \neq 0$ , como evidenciado pela Fig. 4.1.

Sob a lei de movimento dada pela Eq. (4.22) vamos agora analisar o número médio de partículas criadas para os quatro casos mencionados na introdução: quando (a) somente a casca interna oscila ( $\epsilon_i = \epsilon$  e  $\epsilon_o = 0$ ); (b) somente a casca externa oscila ( $\epsilon_i = 0$  e  $\epsilon_o = \epsilon$ ); (c) ambas as cascas oscilam em fase ( $\epsilon_i = \epsilon_o = \epsilon$ ); e (d) ambas as cascas oscilam fora de fase ( $\epsilon_i = -\epsilon_o = \epsilon$ ).

Na Fig. 4.3 apresentamos um gráfico da razão  $N_{lms}(t)/(\epsilon\varpi t)^2$  contra  $\varpi/\omega_{01}(0)$ , para os quatro casos, na condição de ressonância exata ( $\varpi = \omega_{lss'}$ ), considerando alguns poucos valores de  $l$  e  $s$ . Podemos notar que a ressonância principal, que maximiza  $N_{lms}(t)$ , ocorre quando  $\varpi = 2s\omega_{lss}(0)$  ( $s' = s$ ) nos casos (a), (b) e (c), como esperado. Entretanto, no caso (d), esta ressonância pode ser deslocada para o valor  $s' = s + 1$ , dependendo da razão  $r_o/r_i$  que, para  $l = 0$ , torna-se

$$\left| \frac{v_o + v_i}{v_o - v_i} \right| > \sqrt{1 + \frac{1}{4s(s+1)}}.$$

Este resultado segue diretamente da Eq. (4.26). Note que o caso onde somente a casca externa oscila produz um número maior de partículas que aquele no qual somente a casca interna oscila. Este fato pode ser diretamente observado da Eq. (4.25) sob a suposição de que somente uma das cascas oscila, onde verificamos que  $N_{lms}(t)$  é proporcional à velocidade da casca oscilante. Podemos também observar da Fig. 4.3 que, conforme  $l$  aumenta, o número de partículas criadas neste modo diminui. Este resultado é esperado, uma vez que a energia de um dado modo cresce com  $l$ . Por outro lado, para os casos (c) e (d) podemos ter um número maior ou menor de partículas criadas na cavidade, a depender da escolha da condição de ressonância: se  $s + s'$  é um número par, o caso (c) irá apresentar um número menor de partículas criadas que todos os demais casos, enquanto que o caso (d) irá apresentar o maior número de partículas dentre os quatro casos. Se  $s + s'$  é um número ímpar, a situação inversa irá ocorrer.

Na Eq. (4.25) podemos também observar que não haverá criação de partículas, mesmo na condição de ressonância, quando a seguinte relação for satisfeita

$$\frac{r_o}{r_i} = -\frac{\epsilon_i c_{l(ss')}^i}{\epsilon_o c_{l(ss')}^o} > 1.$$

Para  $l = 0$ , esta relação reduz-se à forma simplificada

$$\frac{r_o}{r_i} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_o} (-1)^{s+s'} > 1,$$

mostrando que, se  $s + s'$  é um número par (ímpar) e  $\epsilon_i/\epsilon_o > 0$  ( $< 0$ ), esta condição não será satisfeita, de forma que sempre teremos partículas criadas dentro da cavidade.

## 4.5 Conclusões

Neste capítulo consideramos um sistema consistindo de duas cascas esferas concêntricas em movimento e analisamos o número de partículas criadas pelo ECD para um campo escalar não massivo confinado na cavidade entre as cascas, consideradas refletoras ideais. Obtivemos uma expressão para o número de partículas criadas, válida para qualquer lei de movimento das cascas esféricas, através de dois métodos distintos: o operador densidade do sistema e os coeficientes de Bogoliubov.

A expressão geral obtida foi aplicada ao caso de um movimento oscilatório das cascas, associados aos chamados *breathing modes*. Neste caso identificamos as condições de ressonância onde o número de partículas criadas é mais significativo e, analisando estas ressonâncias, notamos que as diferenças qualitativas entre as geometrias plana e esférica surgem quando consideramos o caso  $l \neq 0$ . Foram estudados quatro diferentes casos dos *breathing modes*: quando somente a casca (a) interna ou (b) a externa oscilam, bem como quando ambas as cascas oscilam (c) em fase ou (d) fora de fase.

Além de revelar características interessantes do efeito Casimir estático, a geometria esférica pode desempenhar um papel importante na compreensão dos fenômenos da sonoluminescência e da criação de partículas na expansão do universo. Portanto, acreditamos que o presente estudo contribui para aumentar as perspectivas no assunto do ECD, que recebe crescente atenção tanto da física teórica quanto da experimental.

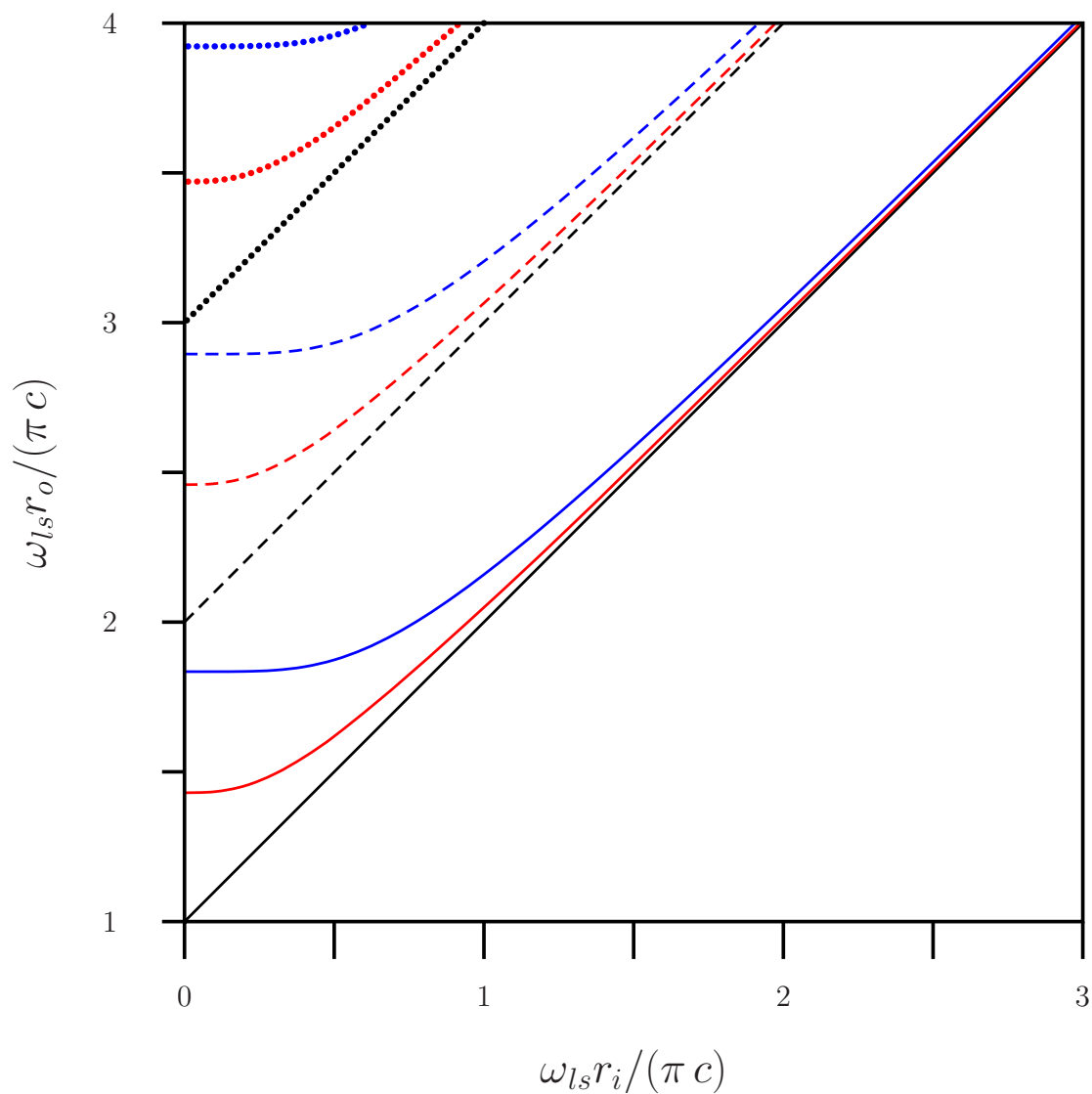


Figura 4.1: Mapa das soluções da equação transcendental (4.8). As cores correspondem a diferentes valores do parâmetro  $l$ : as linhas pretas são para  $l = 0$ , as vermelhas para  $l = 1$  e, para  $l = 2$ , as azuis. As linhas sólida, tracejada e pontilhada correspondem aos casos  $s = 1$ ,  $s = 2$  e  $s = 3$ , respectivamente.

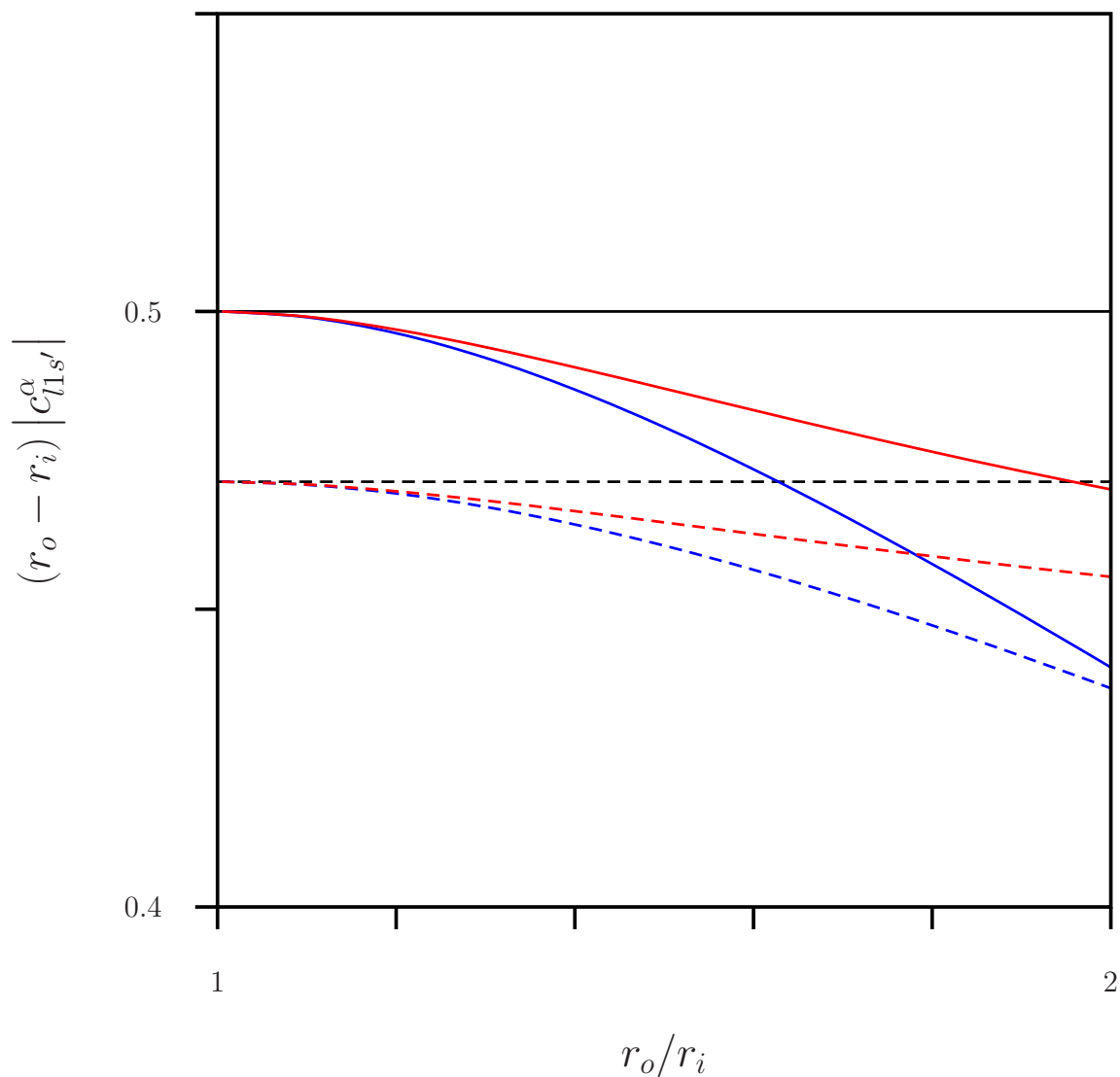


Figura 4.2: Gráfico de  $(r_o - r_i) |c_{l1s'}^\alpha|$  contra a razão  $r_o/r_i$ . As linhas sólida e tracejada correspondem aos valores  $s' = 1$  e  $s' = 2$ , respectivamente. A linha preta corresponde ao caso  $l = 0$  e  $\alpha = i, o$ . As linhas azul e vermelha são para  $\alpha = i$  e  $\alpha = o$ , respectivamente, ambas com  $l = 1$ .

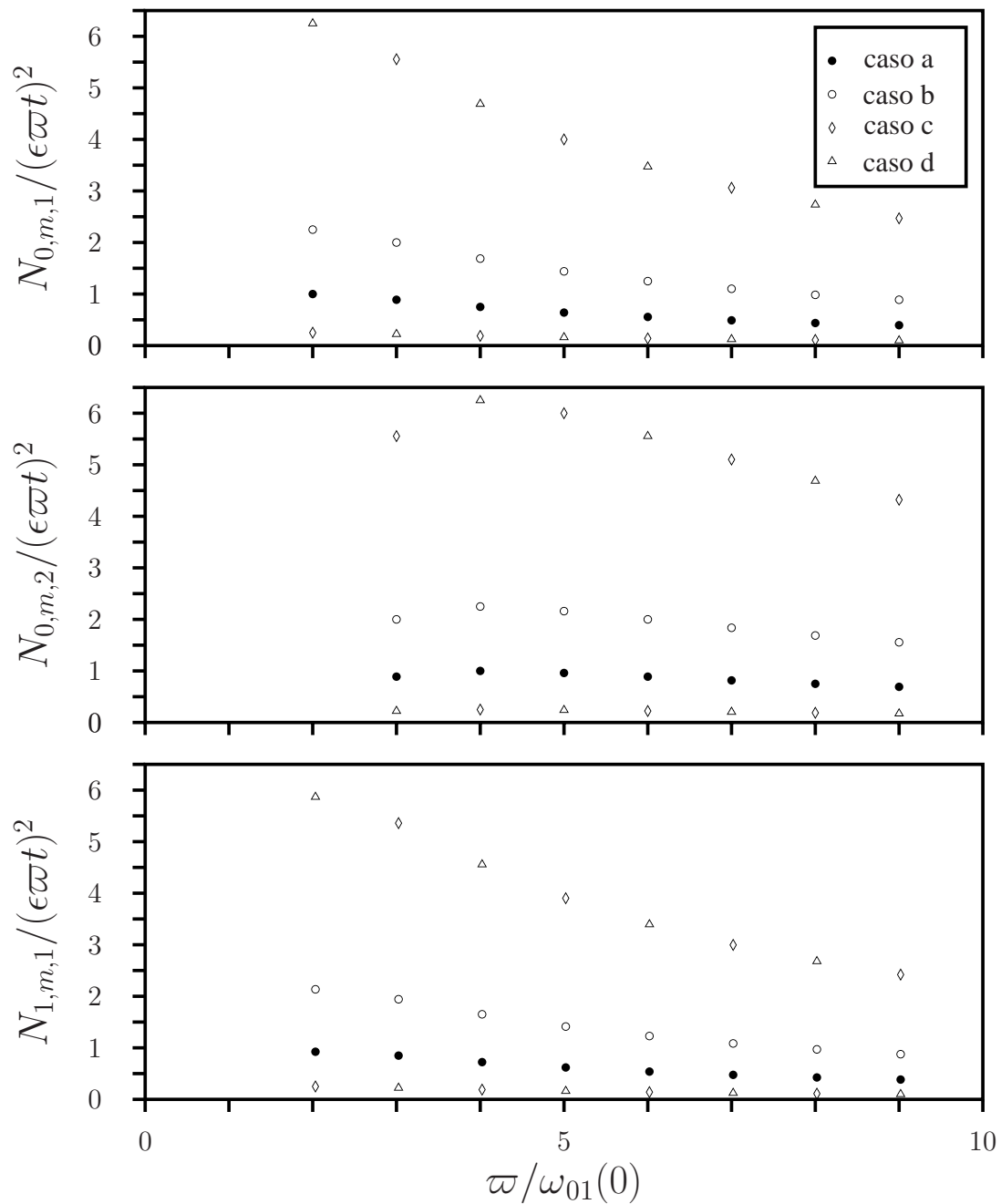


Figura 4.3: Gráfico de  $N_{lms}(t)/(\epsilon\varpi t)^2$  contra  $\varpi/\omega_{01}(0)$ , na condição de ressonância exata, para os casos (a), (b), (c), e (d) para alguns valores de  $l$  e  $s$ . Nós ajustamos  $r_o = 2r_i$ .

## Capítulo 5

# Influência do campo gravitacional sobre o ECD

### 5.1 Introdução

Desde o trabalho de Casimir [22] sabe-se que as flutuações da energia de ponto zero de um campo quântico, confinado em um volume finito do espaço, exercem pressão de radiação sobre as fronteiras que confinam este campo [26]. De fato, não se requer que estas fronteiras sejam materiais, como as placas metálicas utilizadas no trabalho original de Casimir. Qualquer potencial clássico que possa perturbar o vácuo quântico, alterando a estrutura dos modos deste campo, induz o efeito Casimir. No caso do campo eletromagnético em uma cavidade de Fabri-Perrot perfeitamente condutora, este efeito é responsável pelo surgimento de uma força atrativa entre os espelhos. Esta força foi experimentalmente confirmada por Lamoreaux [24] em 1997 e, um ano mais tarde, por Mohideen e Roy [25, 40, 41]. Diferentemente do trabalho original de Casimir, que trata o campo eletromagnético, diversos trabalhos abordaram outros campos, como por exemplo o campo fermiônico [105] ou o campo de Dirac [98], sendo este último aplicado ao estudo do problema do confinamento dos quarks.

Esforços significativos têm sido despendidos no sentido de se estudar o efeito Casimir em espaços-tempo curvos. A ação de um campo gravitacional fraco e estático sobre o campo escalar não massivo, confinado entre duas placas metálicas, foi considerado na Ref. [106]. Verificou-se que a interação gravitacional causa uma pequena redução na energia de Casimir, o que leva a uma correspondente redução na intensidade da força de atração entre as placas. Na Ref. [107] calculou-se a força que atua em uma cavidade rígida<sup>1</sup> de Casimir, posicionada em um campo gravitacional

---

<sup>1</sup>A palavra *rígida* aqui empregada significa que as dimensões da cavidade não são alteradas pela presença do

fraco; verificou-se que a força líquida tem a direção oposta àquela da aceleração da gravidade. Um experimento para se testar os efeitos da curvatura gravitacional na energia do vácuo foi também proposto na Ref. [107]. Recentemente, estudando o caso do campo eletromagnético confinado em uma cavidade sob a ação de um campo gravitacional fraco e estático, Fulling *et al.* [108] descobriram que a energia de Casimir acopla-se com a gravidade exatamente como predito pelo princípio da equivalência, o que implica que os fótons virtuais seguem geodésicas [109].

Quando as fronteiras ou, equivalentemente, os potenciais clássicos que confinam o campo apresentam uma dependência temporal, a contrapartida dinâmica do efeito Casimir ocorre, revelando o interessante fenômeno da criação de partículas a partir do vácuo. Como dito anteriormente, apesar de todos os esforços [46, 49], este efeito ainda não foi observado experimentalmente.

O problema da expansão do universo exhibe similaridades com o ECD e interessantes avanços foram obtidos neste contexto [84, 85, 86]. L. Parker [84] mostrou em 1969 que, em um universo em expansão, partículas são criadas a partir do vácuo. Neste mesmo trabalho (como já mencionado no capítulo anterior), verificou-se que a presença inicial de bósons tende a aumentar o número de bósons criados, com o processo oposto ocorrendo para férmions. Trabalhando em um modelo de branas para o universo, Durrer [110] mostrou que grávitons são formados a partir do vácuo; Davies [111], estudando o sistema de coordenadas de Rindler em um espaço-tempo plano, verificou que um observador dotado de uma aceleração uniforme deveria ver uma superfície fixa irradiar energia. A idéia da criação de partículas devido a ação de um campo gravitacional não estático foi discutida pela primeira vez por Schrödinger [112] e, mais tarde, por DeWitt [74] e Imamura [113]; entretanto, o primeiro a fornecer um tratamento rigoroso deste problema foi Parker [84]. É também interessante mencionar uma analogia do fenômeno de criação de partículas em modelos cosmológicos em armadilhas iônicas, recentemente apresentada na Ref. [114]. Enquanto grávitons, mesons- $\pi$ , prótons e elétrons são formados a partir do vácuo devido a ação do campo gravitacional, uma cadeia de íons confinada por um potencial que depende do tempo leva à formação de fônons.

Neste capítulo estudamos a ação do campo gravitacional sobre o ECD. Consideramos um campo escalar não massivo confinado em uma cavidade cubóide rígida localizada em um campo gravitacional descrito por uma métrica estática. Esta restrição implica no fato de que a fonte do campo gravitacional não apresenta movimento de rotação. Um dos espelhos da cavidade encontra-

---

campo gravitacional.

se em movimento descrito pela lei  $a(t) = a_0 [1 + \epsilon f(t)]$ , enquanto os demais espelhos são mantidos fixos;  $f(t)$  é uma função arbitrária e  $\epsilon$  um pequeno parâmetro de maneira tal que  $\epsilon |f(t)| \ll 1$ . A restrição  $\epsilon |f(t)| \ll 1$  impõe que a variação do comprimento da cavidade na direção do campo gravitacional seja muito menor que o seu comprimento próprio.

O presente capítulo é organizado da seguinte maneira. A Sec. 5.2 é dedicada a quantização do campo escalar no interior da cavidade. Na Sec. 5.3 calcula-se o número médio de partículas criadas na cavidade através dos coeficientes de Bogoliubov [103]. Na Sec. 5.4 aplicamos nosso resultado geral para o caso de um espelho em movimento oscilatório, considerando um campo gravitacional fraco descrito pela métrica de Schwarzschild. Nossas conclusões são apresentadas na Sec. 5.5. Neste capítulo vamos adotar o sistema de unidades naturais, de maneira que  $c = G = \hbar = 1$ . A assinatura da métrica é  $(-, +, +, +)$ .

## 5.2 Quantização do campo escalar não massivo

Consideremos um campo escalar não massivo confinado no interior de uma cavidade cubóide rígida situada em uma região do espaço onde existe um campo gravitacional descrito por uma métrica estática e diagonal  $g^{\mu\nu}$ , com determinante  $g$ . Condições de contorno de Dirichlet são impostas ao campo sobre todos os espelhos planos da cavidade, o que inclui o espelho em movimento. Assumindo que o campo escalar  $\phi$  esteja inicialmente no vácuo (condição em que o escalar de curvatura é nulo) a equação de movimento que rege sua evolução é dada por [115]

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) = 0. \quad (5.1)$$

A densidade lagrangeana que gera esta equação de movimento tem a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi,$$

e o momento canonicamente conjugado ao campo escalar é definido pela relação

$$\pi = -\sqrt{-g} g^{00} \partial_0 \phi. \quad (5.2)$$

Introduzimos agora o sistema de referência  $(x, y, z)$  com origem no espelho estático localizado em  $z = 0$ , e com  $-\hat{z}$  denotando a direção da aceleração da gravidade. O espelho móvel localiza-se em  $z = a(t)$ . Para prosseguir com o processo de quantização é conveniente expandir o



campo escalar em um conjunto completo e ortonormal de modos instantâneos  $\{u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t)\}$  de autofrequências  $\omega_{\mathbf{k}}(t)$ , onde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  denota o vetor de onda associado. Escrevemos então o campo escalar e seu momento canonicamente conjugado na forma

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}(t)}} [c_{\mathbf{k}}(t) + c_{\mathbf{k}}^*(t)] u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t), \quad (5.3)$$

$$\pi(\mathbf{x}, t) = i\sqrt{-g}g^{00} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}(t)}{2}} [c_{\mathbf{k}}(t) - c_{\mathbf{k}}^*(t)] u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t), \quad (5.4)$$

onde  $c_{\mathbf{k}}(t)$  e  $c_{\mathbf{k}}^*(t)$  são coeficientes complexos dependentes do tempo e  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Observamos que a dependência temporal dos modos instantâneos, bem como das correspondentes autofrequências, é inteiramente devida ao fato de que um dos espelhos encontra-se em movimento [38, 81]. Como estamos tratando de uma cavidade cubóide fechada, assumimos que os modos  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t)$  são funções reais que obedecem a seguinte equação diferencial

$$[-\sqrt{-g}g^{00}\omega_{\mathbf{k}}^2 + \partial_i\sqrt{-g}g^{ij}\partial_j] u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t) = 0, \quad (5.5)$$

juntamente com a condição de normalização

$$-\int_{\mathcal{V}(t)} d^3\mathbf{x} \sqrt{-g}g^{00} u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}; t) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (5.6)$$

onde (daqui em diante)  $i, j = x, y, z$ . Note que a integração é efetuada sobre todo o volume instantâneo da cavidade  $\mathcal{V}(t)$ . Conforme dito acima, impomos que os modos satisfaçam condições de Dirichlet sobre todos os espelhos.

A quantização é realizada de maneira canônica, construindo-se um operador de campo  $\Phi$  associado a  $\phi$  por meio da promoção dos coeficientes complexos  $c_{\mathbf{k}}$  e  $c_{\mathbf{k}}^*$  a operadores  $a_{\mathbf{k}}$  e  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ , respectivamente, e da imposição das seguintes relações de comutação a tempos iguais

$$[\Phi(\mathbf{x}; t), \Pi(\mathbf{x}'; t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.7a)$$

$$[\Pi(\mathbf{x}; t), \Pi(\mathbf{x}'; t)] = [\Phi(\mathbf{x}; t), \Phi(\mathbf{x}'; t)] = 0, \quad (5.7b)$$

onde  $\Pi$  é o operador de campo associado a  $\pi$ . Como consequência das Eqs. (5.6) e (5.7), os operadores  $a_{\mathbf{k}}$  e  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[a_{\mathbf{k}}(t), a_{\mathbf{k}'}^\dagger(t)] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (5.8a)$$

$$[a_{\mathbf{k}}(t), a_{\mathbf{k}'}(t)] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger(t), a_{\mathbf{k}'}^\dagger(t)] = 0, \quad (5.8b)$$

que se constituem nas relações usuais para os operadores bosônicos de aniquilação e criação. Com a definição destes operadores podemos calcular o número de partículas criadas no interior da cavidade pelo ECD, o que é feito na próxima seção.

### 5.3 Número médio de partículas criadas

Nesta seção calculamos o número médio de partículas criadas no interior da cavidade pelo ECD, através dos coeficientes de Bogoliubov  $\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t)$  e  $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t)$ , definidos pelas equações

$$a_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{\mathbf{k}'} \left[ \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t) a_{\mathbf{k}'}(t_0) + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t) a_{\mathbf{k}'}^\dagger(t_0) \right], \quad (5.9a)$$

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger(t) = \sum_{\mathbf{k}'} \left[ \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*(t) a_{\mathbf{k}'}^\dagger(t_0) + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*(t) a_{\mathbf{k}'}(t_0) \right], \quad (5.9b)$$

que relacionam os operadores de aniquilação e criação no tempo  $t$ , quando o espelho volta ao repouso, com aqueles no tempo  $t = t_0$ , quando o espelho inicia seu movimento. Nossa estratégia é encontrar, com a ajuda das Eqs. (5.3) e (5.4), um conjunto de equações diferenciais para os operadores  $a_{\mathbf{k}}$  e  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ . A comparação destas equações com o conjunto equivalente obtido diretamente da derivada temporal das Eqs. (5.9), permite-nos escrever um conjunto de equações diferenciais para os coeficientes de Bogoliubov. Expandindo estas equações em uma série de potências em termos do pequeno parâmetro  $\epsilon$ , podemos encontrar relações de recorrência para ambos os coeficientes,  $\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t)$  e  $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t)$ , que nos fornecem a solução para estes coeficientes em qualquer ordem.

Com a ajuda da Eq. (5.6), um cálculo direto, a partir das versões quânticas das Eqs. (5.3) e (5.4), resulta nas relações

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}(t) = & -\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}(t)}{2}} \int_{\mathcal{V}(t)} d^3 \mathbf{x} \sqrt{-g} g^{00} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t) \Phi(\mathbf{x}; t) \\ & + i \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}(t)}} \int_{\mathcal{V}(t)} d^3 \mathbf{x} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t) \Pi(\mathbf{x}; t), \end{aligned} \quad (5.10a)$$

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}^\dagger(t) = & -\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}(t)}{2}} \int_{\mathcal{V}(t)} d^3 \mathbf{x} \sqrt{-g} g^{00} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t) \Phi(\mathbf{x}; t) \\ & - i \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}(t)}} \int_{\mathcal{V}(t)} d^3 \mathbf{x} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t) \Pi(\mathbf{x}; t). \end{aligned} \quad (5.10b)$$

Derivando estas relações com respeito ao tempo, obtemos o conjunto de equações diferenciais para os operadores  $a_{\mathbf{k}}$  e  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  mencionado acima, como funções de  $u_{\mathbf{k}}$ ,  $\Phi$ , e  $\Pi$ , bem como de suas derivadas temporais. Usando então as relações (5.1), (5.2) e (5.5), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{k}}(t) = & -i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(t) + \sum_{\mathbf{k}'} \left\{ G_{[\mathbf{k}\mathbf{k}']}(t) a_{\mathbf{k}'}(t) + G_{(\mathbf{k}\mathbf{k}')}^*(t) a_{\mathbf{k}'}^\dagger(t) \right\}, \\ \dot{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) = & i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger(t) + \sum_{\mathbf{k}'} \left\{ G_{[\mathbf{k}\mathbf{k}']}^*(t) a_{\mathbf{k}'}^\dagger(t) + G_{(\mathbf{k}\mathbf{k}')}^*(t) a_{\mathbf{k}'}(t) \right\}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde definimos as partes anti-simétrica  $G_{[\mathbf{k}\mathbf{k}']} = -G_{[\mathbf{k}'\mathbf{k}]}$  e simétrica  $G_{(\mathbf{k}\mathbf{k}')} = G_{(\mathbf{k}'\mathbf{k})}$  dos coeficientes de acoplamento

$$G_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t) = \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}'}}} \int_{\mathcal{V}(t)} d^3 \mathbf{x} \sqrt{-g} g^{00} \dot{u}_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}; t) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t). \quad (5.12)$$

O conjunto equivalente de equações para os operadores  $a_{\mathbf{k}}$  e  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ , que segue diretamente da derivada temporal das transformações (5.9), é simplesmente dado por

$$\dot{a}_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{\mathbf{k}'} \left[ \dot{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t) a_{\mathbf{k}'}(t_0) + \dot{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t) a_{\mathbf{k}'}^\dagger(t_0) \right], \quad (5.13a)$$

$$\dot{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) = \sum_{\mathbf{k}'} \left[ \dot{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*(t) a_{\mathbf{k}'}^\dagger(t_0) + \dot{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*(t) a_{\mathbf{k}'}(t_0) \right]. \quad (5.13b)$$

Substituindo as relações (5.9) nas Eqs. (5.11), e comparando o resultado com as Eqs. (5.13), obtemos o conjunto de equações diferenciais desejado para os coeficientes de Bogoliubov

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t) &= -i\omega_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t) + \sum_{\mathbf{k}''} \left\{ G_{[\mathbf{k}\mathbf{k}'']}(t) \alpha_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}(t) + G_{(\mathbf{k}\mathbf{k}'')}(t) \beta_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}^*(t) \right\}, \\ \dot{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t) &= -i\omega_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t) + \sum_{\mathbf{k}''} \left\{ G_{[\mathbf{k}\mathbf{k}'']}(t) \beta_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}(t) + G_{(\mathbf{k}\mathbf{k}'')}(t) \alpha_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}^*(t) \right\}. \end{aligned}$$

Por conveniência matemática introduzimos os novos coeficientes

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= e^{i\Theta_{\mathbf{k}}} \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ \tilde{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= e^{i\Theta_{\mathbf{k}}} \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \end{aligned}$$

que nos levam ao seguinte conjunto simplificado de equações

$$\frac{d\tilde{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}''} \left[ G_{[\mathbf{k}\mathbf{k}'']}(t) e^{i[\Theta_{\mathbf{k}} - \Theta_{\mathbf{k}''}]} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'} + G_{(\mathbf{k}\mathbf{k}'')}(t) e^{i[\Theta_{\mathbf{k}} + \Theta_{\mathbf{k}''}]} \tilde{\beta}_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}^* \right], \quad (5.14a)$$

$$\frac{d\tilde{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}''} \left[ G_{[\mathbf{k}\mathbf{k}'']}(t) e^{i[\Theta_{\mathbf{k}} - \Theta_{\mathbf{k}''}]} \tilde{\beta}_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'} + G_{(\mathbf{k}\mathbf{k}'')}(t) e^{i[\Theta_{\mathbf{k}} + \Theta_{\mathbf{k}''}]} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}^* \right], \quad (5.14b)$$

onde definimos  $\Theta_{\mathbf{k}}(t) = \int_{t_0}^t \omega_{\mathbf{k}}(\tau) d\tau$ . Por razões de notação, omitimos a dependência temporal explícita de todos os parâmetros. Para encontrar as soluções das Eqs. (5.14), expandimos os coeficientes de Bogoliubov em uma série de potências de  $\epsilon$ , escrevendo

$$\tilde{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \epsilon^\lambda \frac{1}{\lambda!} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^\lambda \tilde{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}{\partial \epsilon^\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \epsilon^\lambda \tilde{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(\lambda)}, \quad (5.15a)$$

$$\tilde{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \epsilon^\lambda \tilde{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(\lambda)}. \quad (5.15b)$$

Como os coeficientes  $G_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  e  $\Theta_{\mathbf{k}}$  também dependem de  $\epsilon$  [através de  $a(t)$ ], devem ser expandidos para que possamos comparar termos com a mesma ordem em  $\epsilon$  nas Eqs. (5.14), de maneira que

$$G_{(\mathbf{k}\mathbf{k}')} e^{i[\Theta_{\mathbf{k}}+\Theta_{\mathbf{k}'}]} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \epsilon^{\lambda} \Lambda_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(\lambda)}, \quad (5.16a)$$

$$G_{[\mathbf{k}\mathbf{k}']} e^{i[\Theta_{\mathbf{k}}-\Theta_{\mathbf{k}'}]} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \epsilon^{\lambda} \Xi_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(\lambda)}. \quad (5.16b)$$

As somas presentes nas expansões acima iniciam-se com  $\lambda = 1$  devido ao fato de que os coeficientes  $G_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  são proporcionais a  $\dot{a}$  e, conseqüentemente, suas contribuições mais baixas são de primeira ordem, como esperado.

Substituindo as Eqs. (5.15) e (5.16) na Eq. (5.14) e comparando termos de mesma ordem em  $\epsilon$ , podemos encontrar, com a ajuda das condições iniciais  $\tilde{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(0)}(0) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  e  $\tilde{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(0)}(0) = 0$ , as seguintes relações de recorrência

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(\lambda)}(t) = & \sum_{\mathbf{k}''} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda-1} \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \Xi_{\mathbf{k}\mathbf{k}''}^{(\lambda-\lambda')}(\tau) \tilde{\alpha}_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}^{(\lambda')}(\tau) \right. \\ & \left. + \Lambda_{\mathbf{k}\mathbf{k}''}^{(\lambda-\lambda')}(\tau) \tilde{\beta}_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}^{(\lambda')*}(\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (5.17a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(\lambda)}(t) = & \sum_{\mathbf{k}''} \sum_{\lambda'=0}^{\lambda-1} \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \Xi_{\mathbf{k}\mathbf{k}''}^{(\lambda-\lambda')}(\tau) \tilde{\beta}_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}^{(\lambda')}(\tau) \right. \\ & \left. + \Lambda_{\mathbf{k}\mathbf{k}''}^{(\lambda-\lambda')}(\tau) \tilde{\alpha}_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'}^{(\lambda')*}(\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (5.17b)$$

que fornecem os coeficientes de Bogoliubov em qualquer ordem no parâmetro  $\epsilon$  e, conseqüentemente, o número médio de partículas criadas no interior da cavidade. Assumindo que o campo escalar esteja inicialmente no estado de vácuo  $|\{0_{\mathbf{k}}\}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} |0_{\mathbf{k}}\rangle$ , definido pela relação  $a_{\mathbf{k}}(t_0) |\{0_{\mathbf{k}}\}\rangle = 0$ , o número médio de partículas criadas no modo  $\mathbf{k}$ , calculado através das Eqs. (5.9), é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathbf{k}}(t) &= \langle \{0_{\mathbf{k}'}\} | a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t) a_{\mathbf{k}}(t) | \{0_{\mathbf{k}'}\} \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}'} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t)|^2 = \sum_{\mathbf{k}'} \left| \tilde{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t) \right|^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Na próxima seção aplicamos este resultado para o caso particular de um movimento oscilatório do espelho, considerando a métrica de Schwarzschild.

## 5.4 Movimento oscilatório do espelho

Consideremos uma cavidade com dimensões  $a_0 \times a_0 \times a(t)$ , com  $a(t)$  especificado por uma lei de movimento senoidal

$$a(t) = a_0 [1 + \epsilon \sin(\varpi t)],$$

onde  $\varpi$  é a frequência de oscilação do espelho e  $\epsilon \ll 1$ . Assumimos que a cavidade localiza-se a uma distância  $R$  do centro da fonte de um campo gravitacional gerado por uma distribuição esférica com massa  $M$ . Portanto, o campo gravitacional é descrito pela métrica de Schwarzschild que, em coordenadas isotrópicas e no limite de campo fraco  $M/r \ll 1$  (onde  $r$  representa a coordenada radial) [109], é escrita como

$$ds^2 = - \left(1 - 2\frac{M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + 2\frac{M}{r}\right) dr^2. \quad (5.19)$$

Sob as condições realistas de que as dimensões da cavidade são desprezíveis quando comparadas com as dimensões da fonte do campo gravitacional, isto é,  $a_0 \ll R$ , podemos expandir o elemento de linha (5.19) sobre uma pequena distância  $z$  em torno de  $R$ , na direção radial, obtendo [106, 108]

$$\frac{M}{r} \simeq \chi - \gamma z, \quad (5.20)$$

onde  $\chi = M/R$  e  $\gamma = M/R^2$  é a aceleração da gravidade. Com esta expansão, o elemento de linha (5.19) pode ser reescrito como

$$ds^2 = - (1 - 2\chi + 2\gamma z) dt^2 + (1 + 2\chi - 2\gamma z) dr^2. \quad (5.21)$$

Em seguida, vamos considerar apenas a aproximação de primeira ordem, em que  $\gamma = 0$ . A aproximação de segunda ordem será considerada na subseção seguinte.

### 5.4.1 Aproximação de primeira ordem: campo gravitacional constante

Considerando a aproximação de primeira ordem na expansão (5.20), isto é,  $\gamma = 0$ , os modos instantâneos — que satisfazem as Eqs. (5.5) e (5.6), bem como as condições de contorno de Dirichlet sobre os espelho — são dados por

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t) = \frac{2(1 - 2\chi)}{a_0} \sin[k_x(0)x] \sin[k_y(0)y] \sqrt{\frac{2}{a(t)}} \sin[k_z(t)z], \quad (5.22)$$

onde  $n_i$  indica inteiros positivos e  $k_i(t) = (n_i\pi)/a(t)$ . As autofrequências correspondentes são

$$\omega_{\mathbf{k}}(t) = (1 - 2\chi) \sqrt{k_x^2(0) + k_y^2(0) + k_z^2(t)}. \quad (5.23)$$

Como estamos assumindo  $\epsilon \ll 1$ , vamos calcular o número médio de partículas criadas até segunda ordem nesse parâmetro, que corresponde à primeira contribuição não nula. Isto implica, como pode ser visto da Eq. (5.18), que os coeficientes  $\tilde{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  devem ser calculados até primeira ordem em  $\epsilon$ , resultando em

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}}(t) \simeq \epsilon^2 \sum_{\mathbf{k}'} \left| \tilde{\beta}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(1)}(t) \right|^2 = \epsilon^2 \sum_{\mathbf{k}'} \left| \int_{t_0}^t d\tau \Lambda_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(1)}(\tau) \right|^2, \quad (5.24)$$

onde usamos as Eqs. (5.17). Definindo  $\mathbf{n}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ , a aproximação de primeira ordem dos coeficientes de acoplamento  $G_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(t)$ , na Eq. (5.16a), resulta em

$$\Lambda_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(1)}(t) = \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y} \varpi \cos(\varpi t) e^{i\omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} t} \left\{ -\delta_{n_z, n'_z} \frac{n_z^2}{2\mathbf{n}^2} + (1 - \delta_{n_z, n'_z}) (-1)^{n_z + n'_z} \frac{n_z n'_z}{n_z'^2 - n_z^2} \frac{\mathbf{n} - \mathbf{n}'}{\sqrt{\mathbf{n} \mathbf{n}'}} \right\},$$

onde definimos as frequências

$$\omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} = \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y} (1 - 2\chi) \frac{\pi}{a_0} (\mathbf{n} + \mathbf{n}').$$

Substituindo as expressões para  $\Lambda_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(1)}(t)$  e  $\omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}$  na Eq. (5.24), obtemos para o número médio de partículas criadas em um modo selecionado  $\mathbf{k}$  a expressão

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{n}'} \epsilon^2 \varpi^2 t^2 \mathcal{C}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} |f_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}(\varpi, t)|^2,$$

onde os coeficientes constantes de acoplamento  $\mathcal{C}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}$  são dados por

$$\mathcal{C}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} = \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y} \left\{ \frac{1}{4} \delta_{n_z, n'_z} \left( \frac{n_z^2}{\mathbf{n}^2} \right)^2 + (1 - \delta_{n_z, n'_z}) \frac{n_z^2 n_z'^2}{(n_z'^2 - n_z^2)^2} \frac{(\mathbf{n} - \mathbf{n}')^2}{\mathbf{n} \mathbf{n}'} \right\},$$

e as funções  $f_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}$ , dependentes do tempo, têm a forma

$$f_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}(\varpi, t) = \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y} \left\{ \frac{\exp[i(\omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} - \varpi)t] - 1}{(\omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} - \varpi)t} + \frac{\exp[i(\omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} + \varpi)t] - 1}{(\omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} + \varpi)t} \right\}. \quad (5.25)$$

Como podemos ver a partir da Eq. (5.25),  $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$  é uma função que oscila no tempo, exceto quando ao menos uma das condições de ressonância  $\varpi = \omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}$  é satisfeita. (Note que o segundo termo no lado direito da Eq. (5.25), fortemente oscilante, pode ser desprezado na aproximação de ondas

girantes.) Portanto, sob a condição de ressonância, o número médio de partículas criadas é uma função que cresce quadraticamente com o tempo, dada por

$$\lim_{\varpi \rightarrow \omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}} \mathcal{N}_{\mathbf{k}} \simeq \frac{1}{4} \mathcal{C}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} (\epsilon \omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} t)^2.$$

Lembramos que  $r$  e  $t$  são apenas coordenadas, prescindindo de um significado físico direto. [106, 108]. Para obtermos uma quantidade mensurável temos que reescrever este resultado em termos do tempo e do comprimento próprio, definidos no caso estático, como  $t_p = \int dt \sqrt{-g_{00}}$  e  $a_p = \int dz \sqrt{g_{zz}}$ , respectivamente. Sob estas considerações, obtemos a quantidade

$$\omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} t = \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y} \frac{\pi}{a_p} (\mathbf{n} + \mathbf{n}') t_p, \quad (5.26)$$

resultando, sob a condição de ressonância, no número médio de partículas criadas devido ao ECD [45]

$$\lim_{\varpi \rightarrow \omega_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}} \mathcal{N}_{\mathbf{k}} \simeq \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y} \mathcal{C}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} \left( \frac{\epsilon \pi}{2 a_p} (\mathbf{n} + \mathbf{n}') t_p \right)^2.$$

Este resultado, em primeira ordem, mostra que um campo gravitacional constante não modifica o número médio de partículas criadas no interior da cavidade devido ao ECD (note que os coeficientes  $\mathcal{C}_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'}$  são independentes de  $t$  ou  $a_0$ ). O fato de que um campo constante não altera a energia de Casimir no caso estático [106, 108] é uma consequência do fato de que as grandezas físicas independem da origem do sistema de coordenadas. Portanto, qualquer contribuição do campo gravitacional para o número de partículas criadas decorre, de aproximação, no mínimo, de segunda ordem, onde a métrica passa a apresentar uma dependência espacial. Em seguida calculamos a correção de segunda ordem para o número de partículas criadas

### 5.4.2 Aproximação de segunda ordem

Nesta seção, considerando a métrica descrita pela Eq. (5.21), procuramos por soluções para os modos na forma

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}; t) = \frac{2}{a_0} \sin [k_x(0)x] \sin [k_y(0)y] \xi_{\mathbf{k}}(z; t). \quad (5.27)$$

Substituindo este ansatz na Eq. (5.5), obtemos para  $\xi_{\mathbf{k}}$  a equação diferencial para

$$\partial_z^2 \xi_{\mathbf{k}} - 4\gamma \omega_{\mathbf{k}}^2 z \xi_{\mathbf{k}} = -\Omega_{\mathbf{k}}^2 \xi_{\mathbf{k}}, \quad (5.28)$$

onde definimos  $\Omega_{\mathbf{k}}^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2 (1 + 4\chi) - (n_x \pi / a_0)^2 - (n_y \pi / a_0)^2$ .

Seguindo o procedimento exposto na Ref. [106], é conveniente realizar a transformação de variáveis

$$v_{\mathbf{k}}(z) = \left( \frac{\Omega_{\mathbf{k}}^2}{4\gamma\omega_{\mathbf{k}}^2} - z \right) (4\gamma\omega_{\mathbf{k}}^2)^{1/3}, \quad (5.29)$$

que leva à equação diferencial de Airy

$$\partial_v^2 \xi_{\mathbf{k}}(v_{\mathbf{k}}) + v \xi_{\mathbf{k}}(v_{\mathbf{k}}) = 0,$$

cujas soluções podem ser escritas em termos de uma combinação linear das funções de Bessel do primeiro tipo

$$\xi_{\mathbf{k}}(v_{\mathbf{k}}) = \sqrt{v_{\mathbf{k}}} \left[ A_{\mathbf{k}} J_{1/3} \left( \frac{2}{3} v_{\mathbf{k}}^{3/2} \right) + B_{\mathbf{k}} J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} v_{\mathbf{k}}^{3/2} \right) \right].$$

aplicando as condições de contorno e notando, a partir da Eq. (5.29), que  $v_{\mathbf{k}}(z, t) \gg 1$  para todos os valores de  $t$ , obtemos a solução aproximada [106]

$$\xi_{\mathbf{k}}(v_{\mathbf{k}}) \simeq N_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^{-1/4}(z) \sin \left( \frac{2}{3} v_{\mathbf{k}}^{3/2}(z) - \frac{2}{3} v_{\mathbf{k}}^{3/2}(0) \right), \quad (5.30)$$

com o fator de normalização  $N_{\mathbf{k}}$  fixado pela Eq. (5.6), e a expressão

$$\omega_{\mathbf{k}}(t) \simeq [1 - 2\chi + \gamma a(t)] \sqrt{k_x^2(0) + k_y^2(0) + k_z^2(t)}, \quad (5.31)$$

corroborando o resultado da aproximação de primeira ordem para  $\omega_{\mathbf{k}}(t)$ .

Portanto, calculando os coeficientes  $\Lambda_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(1)}$  através dos modos instantâneos dados pelas Eqs. (5.27) e (5.30), obtemos, finalmente, a correção de segunda ordem para o número médio de partículas criadas no modo selecionado  $\mathbf{k}$ :

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{n}'} \epsilon^2 \varpi^2 t^2 \mathcal{C}_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}^{(2)} |f_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}(\varpi, t)|^2,$$

onde a função  $f_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}$  é definida pela Eq. (5.25), mas com as frequências  $\omega_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}$ , obtidas a partir da Eq. (5.31), dadas pela relação

$$\omega_{\mathbf{n},\mathbf{n}'} = \delta_{n_x, n'_x} \delta_{n_y, n'_y} (1 - 2\chi + \gamma a_0) \frac{\pi}{a_0} (\mathbf{n} + \mathbf{n}').$$

A expressão geral para os coeficientes  $\mathcal{C}_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}^{(2)}$  (válida para qualquer valor da frequência  $\varpi$  de oscilação do espelho), pode ser calculada diretamente a partir das Eqs. (5.27) e (5.30). Contudo, para contornar a forma complexa de sua expressão geral, vamos então considerar um caso



particular de especial interesse, aquele que maximiza o número de partículas criadas no modo selecionado  $\mathbf{k}$ . Este caso corresponde ao processo de amplificação paramétrica, no qual a frequência de oscilação do espelho é o dobro da frequência de um dado modo da cavidade estática, isto é,  $\varpi = 2\omega_{\mathbf{k}}(0)$ . A partir das Eqs. (5.25) e (5.26), esta condição implica em que  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ . Sob estas suposições, os coeficientes  $\mathcal{C}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}^{(2)}$  tornam-se simplesmente

$$\mathcal{C}_{\mathbf{n},\mathbf{n}}^{(2)} \simeq \frac{1}{4} \left( \frac{n_z^2}{\mathbf{n}^2} - \gamma a_0 \right)^2, \quad (5.32)$$

o que leva à seguinte expressão para o número de partículas criadas no modo  $\mathbf{k}$

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}} \simeq \left( \frac{\epsilon\omega_{\mathbf{k}}(0)t}{2} \right)^2 \left( \gamma a_0 - \frac{n_z^2}{\mathbf{n}^2} \right)^2.$$

Reescrevendo estas equações em termos do comprimento e do tempo próprios

$$\begin{aligned} a_0 &\simeq a_p \left( 1 + \chi + \gamma \frac{a_p}{2} \right), \\ t &\simeq \left( 1 + \chi - \gamma \frac{a_p}{2} \right) t_p, \end{aligned}$$

obtemos

$$\mathcal{N}_{\mathbf{k}} = \left[ \frac{n_z^2}{\mathbf{n}^2} (1 - 4\chi) - \gamma a_p \left( 1 + \frac{n_z^2}{\mathbf{n}^2} \right) \right]^2 (\mathbf{n}\tau_p)^2, \quad (5.33)$$

onde definimos a variável adimensional  $\tau_p = \epsilon\pi t_p/2a_0$ . Na ausência da gravidade, a Eq. (5.33) reduz-se a  $\mathcal{N}_{\mathbf{k}} = (n_z/\mathbf{n})^4 (\mathbf{n}\tau_p)^2$ , recuperando o resultado da aproximação de primeira ordem sob a condição de amplificação paramétrica. Para o modo fundamental, isto é,  $n_x = n_y = n_z = 1$ , obtemos

$$\mathcal{N}_1 = [1 - 4\chi - 2\gamma a_p]^2 \tau_p^2, \quad (5.34)$$

ao invés do resultado  $\mathcal{N}_1 = \tau_p^2$ , obtido para o ECD em um espaço-tempo plano ou, como demonstrado acima, sob a aproximação de primeira ordem ( $\gamma = 0$ ). Esta expressão mostra que o efeito do campo gravitacional sobre o ECD resulta no decréscimo do número de partículas criadas. Este fato está em pleno acordo com o resultado obtido nas Refs. [106, 108], onde demonstrou-se que o acoplamento com o campo gravitacional causa um enfraquecimento da força de Casimir.

Apesar de termos considerado apenas o regime de ressonância paramétrica — criação degenerada de pares de partículas — outras condições de ressonância podem, evidentemente, ser satisfeitas pelo espelho móvel. Além da criação não degenerada de pares de partículas nos modos distintos  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$ , sob a condição  $\varpi = \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}$ , o espalhamento de partículas entre estes modos pode também ocorrer sob a condição  $\varpi = |\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}|$ . Entretanto, em uma cavidade tridimensional, a

escolha apropriada das dimensões da cavidade proíbe que ambas as condições de ressonância, criação degenerada e não degenerada de pares de partículas, sejam satisfeitas simultaneamente, justificando assim o fato de termos considerado somente o processo de amplificação paramétrica para a análise do ECD sob a ação de um campo gravitacional [82].

Na Fig. 5.1 apresenta-se o gráfico de  $\mathcal{N}_1$  contra o parâmetro adimensional  $\gamma a_p$  para os valores fixos  $\tau_p = 1$  e  $\chi = 0$ . Como esperado a partir da Eq. (5.34), o número de partículas criadas no modo fundamental diminui conforme  $\gamma$  aumenta. Na Fig. 5.2 expõe-se o gráfico de  $\mathcal{N}_k$  contra  $\gamma a_p$  para alguns valores de  $n$ , considerando o valor fixo  $\tau_p = 1/n$  (no qual a cavidade realiza  $1/2\pi\epsilon$  oscilações). Como é também esperado, uma vez que a energia de um dado modo cresce com  $n$ , o número de partículas criadas diminui conforme  $n$  aumenta.

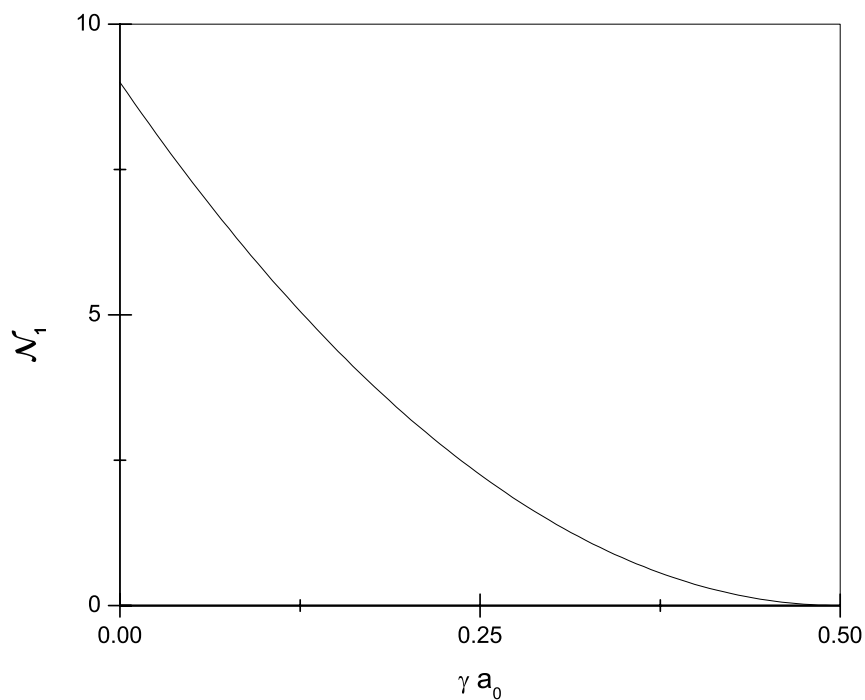


Figura 5.1: Número médio de partículas criadas no modo fundamental,  $\mathcal{N}_1$ , contra  $\gamma a_p$  para o valor fixo  $\tau_p = 1$ , ajustando  $\chi = 0$ .

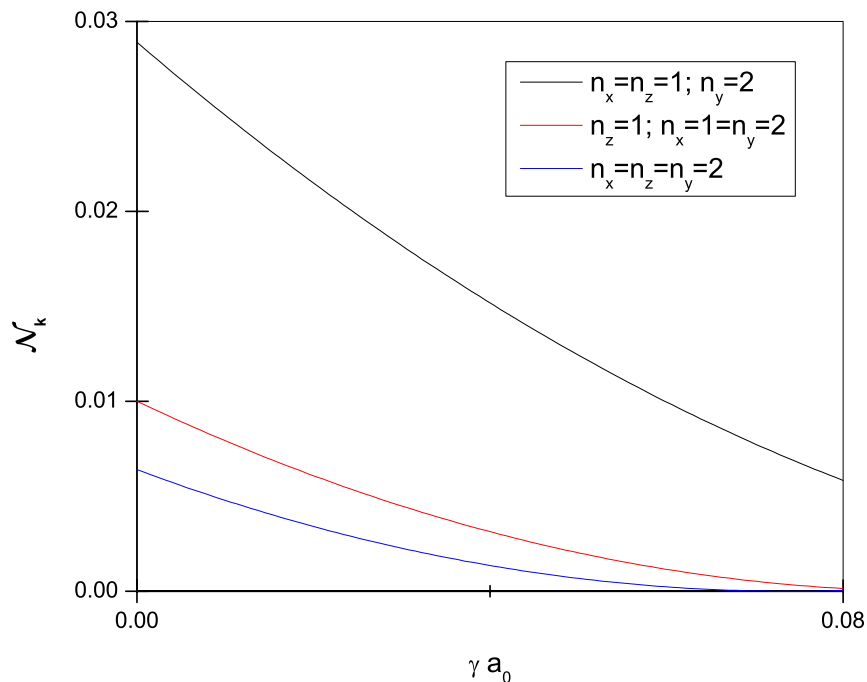


Figura 5.2: Número médio de partículas criadas no  $k$ -ésimo modo,  $\mathcal{N}_k$ , contra  $\gamma a_p$  para o valor fixo  $\tau_p = 1/n$ , ajustando  $\chi = 0$ .

## 5.5 Conclusões

Neste capítulo analisamos a ação do campo gravitacional sobre o número médio de partículas criadas em um campo escalar não massivo devido ao ECD. Consideramos uma cavidade cubóide rígida, com um de seus espelhos planos em movimento, colocada em um campo gravitacional estático descrito por uma métrica estática. A partir dos coeficientes de Bogoliubov, obtidos por meio de uma expansão perturbativa, calculamos uma expressão geral para o número médio de partículas criadas, válida para qualquer lei de movimento. Em seguida, tal expressão foi analisada no caso particular de um espelho oscilante na presença de um campo gravitacional fraco, descrito pela métrica de Schwarzschild.

O resultado de primeira ordem, que um campo gravitacional constante não afeta o número médio de partículas criadas devido ao ECD, está em concordância com aqueles nas Refs. [106, 108] que mostram que um campo gravitacional constante não afeta a energia de Casimir no caso estático. A razão por trás deste comportamento é a independência das grandezas físicas da origem

do sistema de coordenadas [106, 108]. Portanto, o efeito do campo gravitacional dá-se, ao menos, em uma aproximação de segunda ordem, onde surge a dependência espacial da métrica.

Considerando somente o regime de amplificação paramétrica, o resultado de segunda ordem mostra que o número médio de partículas criadas diminui (em relação ao caso de ausência do campo gravitacional) devido ao acoplamento com a gravidade, novamente em concordância com o fato de que tal acoplamento causa um enfraquecimento da força de Casimir [106, 108]. Além do mais, as frequências do campo escalar sofrem um desvio para o vermelho, relativamente a seus valores na ausência da gravidade, o que significa que o número de partículas criadas, que neste caso varia com o quadrado destas frequências, deve diminuir.

Observamos que os efeitos da temperatura, os quais são relevantes para a detecção experimental do ECD, podem ser levados em conta considerando-se um valor não nulo para o escalar de curvatura na equação do campo. Além disso, o princípio a equivalência proíbe que a orientação do aparato de Casimir (com respeito a aceleração da gravidade) contribua para o ECD [108].

Lembramos, finalmente, da introdução deste capítulo, que a possibilidade de verificação experimental da força, produzida pelas flutuações do vácuo, que atua sobre uma cavidade rígida de Casimir sob a ação de um campo gravitacional fraco, foi discutida na Ref. [107]. Apesar de uma verificação experimental dos efeitos discutidos neste capítulo representar um desafio tão grande quanto a verificação do próprio ECD, a ação do campo gravitacional sobre as perturbações sofridas pelo vácuo quântico é uma questão de fundamental importância, que pode ser relevante quando consideramos, por exemplo, o problema da evolução do universo.

## Referências Bibliográficas

- [1] PERES, A., *When is a quantum measurement?*, Am. J. Phys. **54**, 688 (1986).
- [2] ZURECK, W. H., *Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?*, Phys. Rev. D **24**, 1516 (1981); ZURECK, W. H., *Environment-induced superselection rules*, Phys. Rev. D **26**, 1862 (1982).
- [3] CALDEIRA, A. O.; LEGGETT, A. J., *Path integral approach to quantum Brownian motion*, Physica **121A**, 587 (1983), CALDEIRA, A. O.; LEGGETT, A. J., *Quantum tunnelling in a dissipative system*, Ann. Phys. (N.Y.) **149**, 374 (1983), CALDEIRA, A. O.; LEGGETT, A. J., *Influence of damping on quantum interference: An exactly soluble model*, Phys. Rev. A **31**, 1059 (1985).
- [4] JOOS, E.; ZEH, H. D., *The emergence of classical properties through interaction with the environment*, Z. Phys. B: Condens. Matter **59**, 223 (1985).
- [5] SCHRÖDINGER, E., *Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik*, Naturwissenschaften **23**, 807 (1935). Tradução para o inglês em *Quantum theory and measurement*, ed. J. A. Wheeler e W. H. Zurek (Princeton University Press, 1983).
- [6] GHIRARDI, G. C.; RIMINI, A.; WEBER, T., *Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems*, Phys. Rev. D **34**, 470 (1986); PEARLE, P., *Combining stochastic dynamical state-vector reduction with spontaneous localization*, Phys. Rev. A **39**, 2277 (1989); GHIRARDI, G.; PEARLE, P.; RIMINI, A., *Markov processes in Hilbert space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles*, Phys. Rev. A **42**, 78 (1990).
- [7] SHOR, P. W., *Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory*, Phys. Rev. A **52**, R2493 (1995); STEANE, A. M., *Error correcting codes in quantum theory*, Phys. Rev. Lett. **77**, 793 (1996); STEANE, A. M., *Introduction to Quantum Computation and*

- Information*, ed. H. K. Lo, S. Popescu e T. P. Spiller (Word Scientific, Singapore, 1999), p. 184.
- [8] POYATOS, J. F.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P., *Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4728 (1996).
- [9] MYATT, C. J.; KING, B. E.; TURCHETTE, Q. A.; SACKETT, C. A.; KIELPINSKI, D.; ITANO, W. M.; MONROE, C.; WINELAND, D. J., *Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs*, Nature **403**, 269 (2000).
- [10] CARVALHO, A. R. R.; MILMAN, P.; DE MATOS FILHO, R. L.; DAVIDOVICH, L., *Decoherence, pointer engineering, and quantum state protection*, Phys. Rev. Lett. **86**, 4988 (2001).
- [11] LUTKENHAUS, N.; CIRAC, J. I.; ZOLLER, P., *Mimicking a squeezed-bath interaction: Quantum-reservoir engineering with atoms*, Phys. Rev. A **57**, 548 (1998).
- [12] AGARWAL, G. S.; SCULLY, M. O.; WALTHER, H., *Inhibition of decoherence due to decay in a continuum*, Phys. Rev. Lett. **86**, 4271 (2001).
- [13] PRADO, F. O.; DUZZIONI, E. I.; MOUSSA, M. H. Y.; DE ALMEIDA, N. G.; VILLAS-BÔAS, C. J., *Nonadiabatic coherent evolution of two-level systems under spontaneous decay*, quant-ph/0803.3709.
- [14] ZANARDI, P.; RASETTI, M., *Noiseless quantum codes*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3306 (1997).
- [15] LIDAR, D. A.; CHUANG, I. L.; WHALEY, K. B., *Decoherence-free subspaces for quantum computation*, Phys. Rev. Lett. **81**, 2594 (1998); KNILL, E.; LAFLAMME, R.; VIOLA, L., *Theory of quantum error correction for general noise*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2525 (2000); BOSCO, A. R. M.; NEMES, M. C., *Searching for decoherence-free subspaces in cavity quantum electrodynamics*, Phys. Rev. A **70**, 053825 (2004).
- [16] LIDAR, D. A.; WHALEY, K. B., *Decoherence-free subspaces and subsystems*, quant-ph/0301032.
- [17] DE PONTE, M. A.; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y., *Relaxation- and decoherence-free subspaces in networks of weakly and strongly coupled resonators*, Ann. Phys. (N.Y.) **322**, 2077 (2007).

- [18] VITALI, D.; TOMBESI, P., *Using parity kicks for decoherence control*, Phys. Rev. A **59**, 4178 (1999).
- [19] VIOLA, L.; KNILL, E., *Random decoupling schemes for quantum dynamical control and error suppression*, Phys. Rev. Lett. **94**, 060502 (2005).
- [20] VIOLA, L.; KNILL, E.; LLOYD, S., *Dynamical decoupling of open quantum systems*, Phys. Rev. Lett. **82**, 2417 (1999).
- [21] KARDAR, M.; GOLESTANIAN, R., *The “friction” of vacuum, and other fluctuation-induced forces*, Rev. Mod. Phys. **71**, 1233 (1999).
- [22] CASIMIR, H. B. G., *On the attraction between two perfectly conducting plates*, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch **51**, 793 (1948).
- [23] SPARNAAY, M., *Measurements of attractive forces between flat plates*, Physica **24**, 751 (1958).
- [24] LAMOUREAUX, S. K., *Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6  $\mu\text{m}$  range*, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).
- [25] MOHIDEEN, U.; ROY, A., *Precision measurement of the Casimir force from 0.1  $\mu\text{m}$  to 0.9  $\mu\text{m}$* , Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998).
- [26] BORDAG, M.; MOHIDEEN, U.; MOSTEPANENKO, V. M., *New developments in the Casimir effect*, Phys. Rep. **353**, 1 (2001); PLUNIEN, G.; MÜLLER, B.; GREINER, W., *The Casimir effect*, Phys. Rep. **134**, 87 (1986); MILTON, K. A., *The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [27] CASIMIR, H.B., *Introductory remarks on quantum electrodynamics*, Physica **19**, 846 (1953).
- [28] BOYER, T.H., *Quantum electromagnetic zero-point energy of a conducting spherical shell and the Casimir model for a charged particle*, Phys. Rev. **174**, 1764 (1968).
- [29] SCHWINGER, J., *Casimir energy for dielectrics*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **89**, 4091 (1992); SCHWINGER, J., *Casimir energy for dielectrics: spherical geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **89**, 11118 (1992);

- [30] EMIG, T.; GRAHAM, N.; JAFFE, R. L.; KARDAR, M., *Casimir forces between arbitrary compact objects*, Phys. Rev. Lett. **99**, 170403 (2007); RODRIGUEZ, A.; IBANESCU, M.; IANNUZZI, D.; CAPASSO, F.; JOANNOPOULOS, J. D.; JOHNSON, G. S., *Computation and visualization of Casimir forces in arbitrary geometries: nonmonotonic lateral-wall forces and the failure of the proximity-force approximations*, Phys. Rev. Lett. **99**, 080401 (2007).
- [31] DODONOV, V. V., *Nonstationary Casimir effect and analytical solutions for quantum fields in cavities with moving boundaries*, in *Modern Nonlinear Optics*, Part 3, edited by M. W. Evans, Adv. Chem. Phys. Series **119** (Wiley, New York, 2001), p. 309.
- [32] JAEKEL, M.-T.; LAMBRECHT, A.; REYNAUD, S., *Quantum vacuum, inertia and gravitation*, New Astronomy Reviews **46**, 727 (2002).
- [33] EINSTEIN, A., *On the motion — required by the molecular kinetic theory of heat — of small particles suspended in a stationary liquid*, Ann. Physik **17**, 549 (1905); EINSTEIN, A., *Zur quantentheorie der strahlung (On the quantum mechanics of radiation)*, Phys. Z. **18**, 121 (1917).
- [34] KUBO, R., RPPh **29**, 255 (1966).
- [35] FULLING, S. A.; DAVIES, P. C. W., *Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: conformal anomaly*, Proc. R. Soc. Lond. A **348**, 393 (1976); DAVIES, P. C. W.; FULLING, S. A., *Radiation from moving mirrors and from black holes*, Proc. R. Soc. Lond. A **356**, 237 (1977).
- [36] JAEKEL, M. -T.; REYNAUD, S., *Causality, stability and passivity for a mirror in vacuum*, Phys. Lett. A **167**, 227 (1992).
- [37] MOORE, G. T., *Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity*, J. Math. Phys. **11**, 2679 (1970).
- [38] LAW, C. K., *Effective Hamiltonian for the radiation in a cavity with a moving mirror and a time-varying dielectric medium*, Phys. Rev. A **49**, 433 (1994); LAW, C. K., *Interaction between a moving mirror and radiation pressure: a Hamiltonian formulation*, Phys. Rev. A **51**, 2537 (1995).



- [39] SAITO, H.; HYUGA, H., *Dynamical casimir effect without boundary conditions*, Phys. Rev. A **65**, 053804 (2002).
- [40] ROY, A.; LIN, C. -Y.; MOHIDEEN, U., *Improved precision measurement of the Casimir force*, Phys. Rev. D. **60**, 111101 (1999); HARRIS, B. W.; CHEN, F.; MOHIDEEN, U., *Precision measurement of the Casimir force using gold surfaces*, Phys. Rev. A **62**, 052109 (2000).
- [41] ROY, A. e MOHIDEEN, U., *Demonstration of the nontrivial boundary dependence of the Casimir force*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4380 (1999).
- [42] CHEN, F; MOHIDEEN, U.; KLIMCHITSKAYA, G. L.; MOSTEPANENKO, V. M., *Demonstration of the lateral Casimir force*, Phys. Rev. Lett. **88**, 101801 (2002).
- [43] OBRECHT, J. M.; WILD, R. J.; ANTEZZA, M.; PITAEVSKII, L. P.; STRINGARI, S.; CORNELL, E. A., *Measurement of the temperature dependence of the Casimir-Polder force*, Phys. Rev. Lett. **98**, 063201 (2007).
- [44] ANTEZZA, A.; PITAEVSKII, L. P.; STRINGARI, S., *New asymptotic behavior of the surface-atom force out of thermal equilibrium*, Phys. Rev. Lett. **95**, 113202 (2005).
- [45] BRAGGIO, C.; BRESSI, G.; CARUGNO, G.; DEL NOCE, C.; GALEAZZI, G.; LOMBARDI, A.; PALMIERI, A.; RUOSO, G.; ZANELLO, D., *A novel experimental approach for the detection of the dynamical Casimir effect*, Europhysics Letters **70**, 754 (2005).
- [46] AGNESI, A.; BRAGGIO, C.; BRESSI, G.; CARUGNO, G.; GALEAZZI, G.; PIRZO, F.; REALI, G.; RUOSO, G.; ZANELLO, D., *MIR status report: an experiment for the measurement of the dynamical Casimir effect*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 164024 (2008).
- [47] LOZOVIK, Y. E.; TSVETUS, V. G.; VINOGRAD, E. A., *Parametric excitation of vacuum by use of femtosecond laser pulses*, Phys. Scripta **52**, 184 (1995).
- [48] YABLONOVITCH, E., *Accelerating reference frame for electromagnetic waves in a rapidly growing plasma: Unruh-Davies-Fulling-DeWitt radiation and the nonadiabatic Casimir effect*, Phys. Rev. Lett. **62**, 1742 (1989).
- [49] KIM, W. -J.; BROWNELL, J. H.; ONOFRIO, R., *Detectability of dissipative motion in quantum vacuum via superradiance*, Phys. Rev. Lett. **96**, 200402 (2006).

- [50] NÄGERL, H. C.; LEIBFRIED, D.; ROHDE, H.; THALHAMMER, G.; ESCHNER, J.; SCHMIDT-KALER, F.; BLATT, R., *Laser addressing of individual ions in a linear ion trap*, Phys. Rev. A **60**, 145 (1999).
- [51] ROWE, M. A.; KIELPINSKI, D.; MEYER, V.; SACKETT, C. A.; ITANO, W. M.; MONROE, C.; WINELAND, D. J., *Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection*, Nature **409**, 791 (2001).
- [52] KWIAT, P. G.; MATTLE, K.; WEIFURTER, H.; ZEILINGER, A.; SERGIENKO, A.; SHIH, Y., *New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 (1995).
- [53] BOUWMEESTER, D.; PAN, J. -W.; MATTLE, K.; EIBL, M.; WEINFURTER, H.; ZEILINGER, A., *Experimental quantum teleportation*, Nature **390**, 575 (1997); BOSCHI, D.; BRANCA, S.; DE MARTINI, F.; HARDY, L.; POPESCU, S., *Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1121 (1998); KIM, Y. H.; KULIK, S. P.; SHIH, Y., *Quantum teleportation of a polarization state with a complete Bell state measurement*, Phys. Rev. Lett. **86**, 1370 (2001); FURUSAWA, A.; SORENSEN, J. L.; BRAUNSTEIN, S. L.; FUCHS, C. A.; KIMBLE, H. J.; POLZIK, E. S., *Unconditional quantum teleportation*, Science **282**, 706 (1998).
- [54] ALTEPETER, J. B. HADLEY, P. G.; WENDELKEN, S. M.; BERGLUND, A. J.; KWIAT, P. G., *Experimental investigation of a two-qubit decoherence-free subspace*, Phys. Rev. Lett. **92**, 147901 (2004).
- [55] DE PONTE, M. A.; DE OLIVEIRA, M. C.; MOUSSA, M. H. Y., *Decoherence in strongly coupled quantum oscillators*, Ann. Phys. **317**, 72 (2004); DE PONTE, M. A.; DE OLIVEIRA, M. C.; MOUSSA, M. H. Y., *Decoherence in strongly coupled quantum oscillators. I. Symmetric network*, Phys. Rev. A **70**, 022324 (2004); DE PONTE, M. A.; DE OLIVEIRA, M. C.; MOUSSA, M. H. Y., *Decoherence in strongly coupled quantum oscillators. II. Central-oscillator network*, Phys. Rev. A **70**, 022325 (2004); DE PONTE, M. A.; MIZRAHU, S. S.; MOUSSA, M. H. Y., *Networks of dissipative quantum harmonic oscillators: a general treatment*, Phys. Rev. A **76**, 032101 (2007).

- [56] SANTOS, L. F.; VIOLA, L., *Dynamical control of qubit coherence: random versus deterministic schemes*, Phys. Rev. A **72**, 062303 (2005).
- [57] ZANARDI, P., *Symmetrizing evolutions*, Phys. Lett. A **258**, 77 (1999); VITALI, D.; TOMBESI, P., *Heating and decoherence suppression using decoupling techniques*, Phys. Rev. A **65**, 012305 (2001); BYRD, M. S.; LIDAR, D. A., *Empirical determination of dynamical decoupling operations*, Phys. Rev. A **67**, 012324 (2003); FACCHI, P.; TASAKI, S.; PASCAZIO, S.; NAKAZATO, H.; TOKUSE, A.; LIDAR, D. A., *Control of decoherence: analysis and comparison of three different strategies*, Phys. Rev. A **71**, 022302 (2005).
- [58] AGARWAL, G. S., *Control of decoherence and relaxation by frequency modulation of a heat bath*, Phys. Rev. A **61**, 013809 (1999).
- [59] BRIF, C.; RABITZ, H.; WALLENTOWITZ, S.; WALMSLEY, I. A., *Decoherence of molecular vibrational wave packets: observable manifestations and control criteria*, Phys. Rev. A **63**, 063404 (2001); ZHU, W.; RABITZ, H., *Closed loop learning control to suppress the effects of quantum decoherence*, J. Chem. Phys. **118**, 6751 (2003); HOHENESTER, U.; STADLER, G., *Quantum control of electron-phonon scatterings in artificial atoms*, Phys. Rev. Lett. **92**, 196801 (2004); SKLARZ, S. E.; TANNOR, D. J.; KHANEJA, N., *Optimal control of quantum dissipative dynamics: analytic solution for cooling the three-level  $\Lambda$  system*, Phys. Rev. A **69**, 053408 (2004). GRIGORENKO, I. A.; KHVESHCHENKO, D. V., *Robust two-qubit quantum registers*, Phys. Rev. Lett. **94**, 040506 (2005); GRIGORENKO, I. A.; KHVESHCHENKO, D. V., *Single-step implementation of universal quantum gates*, Phys. Rev. Lett. **95**, 110501 (2005); JIRARI, H.; POTZ, W., *Optimal coherent control of dissipative  $N$ -level systems*, Phys. Rev. A **72**, 013409 (2005); JIRARI, H.; POTZ, W., *Quantum optimal control theory and dynamic coupling in the spin-boson model*, Phys. Rev. A **74**, 022306 (2006); WENIN, M.; POTZ, W., *Optimal control of a single qubit by direct inversion*, Phys. Rev. A **74**, 022319 (2006); HOHENESTER, U., *Optimal quantum gates for semiconductor qubits*, Phys. Rev. B **74**, 161307 (2006); GRACE, M.; BRIF, C.; RABITZ, H.; WALMSLEY, I. A.; KOSUT, R.; LIDAR, D. A., *Optimal control of quantum gates and suppression of decoherence in a system of interacting two-level particles*, J. Phys. B **40**, S103 (2007); GRACE, M. D. BRIF, C.; RABITZ, H.; LIDAR, D. A.; WALMSLEY, I. A.; KOSUT, R., *Fidelity of optimal controlled quantum gates with randomly coupled multiparticle environments*, J. Mod. Opt. **54**, 2339 (2007); SCULTE-HERBRÜGGEN, T.; SPÖRL,

- A.; KHANEJA, N.; GLASER, S. J., *Optimal control for generating quantum gates in open dissipative systems*, quant-ph/0609037.
- [60] MANCINI, S.; BONIFACIO, R., *Quantum Zeno-like effect due to competing decoherence mechanisms*, Phys. Rev. A **64**, 042111 (2001).
- [61] GRACE, M.; BRIF, C.; RABITZ, H.; WALMSLEY, I. A.; KOSUT, R.; LIDAR, D. A., *Encoding a qubit into multilevel subspaces*, New J. Phys. **8**, 35 (2006).
- [62] DODONOV, V. V.; KLIMOV, A. B., *Generation and detection of photons in a cavity with a resonantly oscillating boundary*, Phys. Rev. A **53**, 2664 (1996).
- [63] JANOWICZ, M., *Evolution of wave fields and atom-field interactions in a cavity with one oscillating mirror*, Phys. Rev. A **57**, 4784 (1998).
- [64] LININGTON, I. E.; GARRAWAY, B. M., *Control of atomic decay rates via manipulation of reservoir mode frequencies*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, 3383 (2006).
- [65] SHAO, J.; MAKRI, N., *Influence functional from a bath of coupled time-dependent harmonic oscillators*, Phys. Rev. E **59**, 269 (1999).
- [66] NG, K. M.; LO, C. F., *Coherent-state propagator of two coupled generalized time-dependent parametric oscillators*, Phys. Lett. A **230**, 144 (1997).
- [67] JAMES, D. F., *Quantum computation with hot and cold ions: an assessment of proposed schemes*, Fortschr. Phys. **48**, 823 (2000).
- [68] SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, S., *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1997).
- [69] RAIMOND, J. M.; BRUNE, M.; HAROCHE, S., *Colloquium: manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity*, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
- [70] PRADO, F. O.; DE ALMEIDA, N. G.; MOUSSA, M. H. Y.; VILLAS-BÔAS, C. J., *Bi-linear and quadratic Hamiltonians in two-mode cavity quantum electrodynamics*, Phys. Rev. A **73**, 043803 (2006); SERRA, R. M.; VILLAS-BÔAS, C. J.; DE ALMEIDA, N. G.; MOUSSA, M. H. Y., *Frequency up- and down-conversions in two-mode cavity quantum electrodynamics*, Phys. Rev. A **71**, 045802 (2005); VILLAS-BÔAS, C. J.; MOUSSA, M.

- H. Y., *One-step generation of high-quality squeezed and EPR states in cavity QED*, European Physical Journal D **32**, 147 (2005).
- [71] RODRIGUES, R. L.; MOUSSA, M. H. Y.; VILLAS-BÔAS, C. J., *Engineering phonon-photon interactions with a driven trapped ion in a cavity*, Phys. Rev. A **74**, 063811 (2006).
- [72] YU, Z.; BOSECK, S., *Scanning acoustic microscopy and its applications to material characterization*, Rev. Mod. Phys. **67**, 863 (1995).
- [73] DODONOV, V. V.; KLIMOV, A. B.; NIKONOV, D. E., *Quantum phenomena in nonstationary media*, Phys. Rev. A **47**, 4422 (1993); DODONOV, V. V.; KLIMOV, A. B.; MAN'KO, *Quantization and generation of squeezed states of electromagnetic field in a cavity with variable parameters*, J. Sov. Laser Res. **12**, 439 (1991).
- [74] DEWITT, B. S., *Quantum field theory in curved spacetime*, Phys. Rep. **19**, 295 (1975).
- [75] HIZHNYAKOV, V. V., *Quantum emission of a medium with a time-dependent refractive index*, Quantum Opt. **4**, 277 (1992).
- [76] SARKAR, S., *Photon statistics and moving mirrors*, Quantum Opt. **4**, 345 (1992).
- [77] DODONOV, V. V.; KLIMOV, A. B.; NIKONOV, D. E., *Generation of squeezed states in a resonator with a moving wall*, Phys. Lett. A **149**, 225 (1990); JAEKEL, M. -T.; REYNAUD, S., *Motional Casimir force*, J. Phys. I (France) **2**, 149 (1992).
- [78] EBERLEIN, C., *Sonoluminescence as quantum vacuum radiation*, Phys. Rev. Lett. **76**, 3842 (1996).
- [79] SCHWINGER, J., *Casimir light: a glimpse*, Proc. Nat. Acad. Sci. **90**, 958 (1993); SCHWINGER, J., *Casimir light: the source*, Proc. Nat. Acad. Sci. **90**, 2105 (1993); SCHWINGER, J., *Casimir light: photon pairs*, Proc. Nat. Acad. Sci. **90**, 4505 (1993); SCHWINGER, J., *Casimir light: pieces of the action*, Proc. Nat. Acad. Sci. **90**, 7285 (1993); SCHWINGER, J., *Casimir light: filed pressure*, Proc. Nat. Acad. Sci. **91**, 6473 (1994).
- [80] KNIGHT, P., *Sound, light and the vacuum*, Nature **381**, 736 (1996).

- [81] SCHALLER, G.; SCHÜTZHOLD, R.; PLUNIEN, G.; SOFF, G., *Dynamical Casimir effect in a leaky cavity at finite temperature*, Phys. Rev. A **66**, 023812 (2002); SCHALLER, G.; SCHÜTZHOLD, R.; PLUNIEN, G.; SOFF, G., *Dynamical Casimir effect in a designed leaky cavity*, Phys. Lett. A **297**, 81 (2002).
- [82] PLUNIEN, G.; SCHÜTZHOLD, R.; SOFF, G., *Dynamical Casimir Effect at Finite Temperature*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1882 (2000).
- [83] LANG, R.; SCULLY, M. O.; LAMB, W. E., *Why is the laser so narrow? A theory of single-quasimode laser operation*, Phys. Rev. A **7**, 1788 (1973); GEA-BANACHLOCHE, J.; LU, N.; PEDROTTI, L. M.; PRASAD, S.; SCULLY, M. O.; WÓDKIEWICZ, K., *Treatment of the spectrum of squeezing based on the modes of the universe. I. Theory and a physical picture*, Phys. Rev. A **41**, 369 (1990).
- [84] PARKER, L., *Particle creation in expanding universes*, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968); PARKER, L., *Quantized fields and particle creation in expanding universes. I*, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969); PARKER, L., *Quantized fields and particle creation in expanding universes. II*, Phys. Rev. D **3**, 346 (1970).
- [85] CARLITZ, R. D.; WILLEY, R. S., *Reflections on moving mirrors*, Phys. Rev. D **36**, 2327 (1987).
- [86] DAVIES, P. C. W., *Quantum vacuum friction*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S40 (2005).
- [87] PASCOAL, F.; FARINA, C., *Particle creation in a Robertson-Walker universe revisited*, Int. J. Theoretical Phys. **46**, 2950 (2007).
- [88] DODONOV, V. V.; ANDREATA, M. A.; MIZRAHI, S. S., *Decoherence and transfer of quantum states of field modes in a one-dimensional cavity with an oscillating boundary*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7**, S468 (2005).
- [89] DALVIT, D. A. R.; MAIA NETO, P. A., *Decoherence via the dynamical Casimir effect*, Phys. Rev. Lett. **84**, 798 (2000).
- [90] BRUNE, M.; HAGLEY, E.; DREYER, J.; MAÎTRE, X.; MAALI, A.; WUNDERLICH, C.; RAIMOND, J. M.; HAROCHE, S., *Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887 (1996).

- [91] WALLS, D. F.; MILBURN, G. J., *Effect of dissipation on quantum coherence*, Phys. Rev. A **31**, 2403 (1985).
- [92] MOUSSA, M. H. Y.; MIZRAHI, S. S.; CALDEIRA, A. O., *Quantum coherence in a dissipative-driven system and the optical Stern-Gerlach experiment*, Phys. Lett. A **221**, 145 (1996).
- [93] LANDAUER, R., *Is Quantum mechanics useful?*, Proc. R. Soc. London, Ser. A, **353**, 367 (1995).
- [94] UNRUH, W. G., *Maintaining coherence in quantum computers*, Phys. Rev. A **51**, 992 (1995).
- [95] DODONOV, V. V.; KLIMOV, A. B.; NIKONOV, D. E., *Quantum phenomena in resonators with moving walls*, J. Math. Phys. **34**, 2742 (1993); DODONOV, V. V., *Photon creation and excitation of a detector in a cavity with a resonantly vibrating wall*, Phys. Lett. A **207**, 126 (1995).
- [96] KIM, J. I.; NEMES, M. C.; PIZA, A. F. R. T.; BORGES, H. E., *Perturbative expansion for coherence loss*, Phys. Rev. Lett. **77**, 207 (1996).
- [97] CHODOS, A.; THORN, C.B., *Electromagnetic self-energy of confined massless quarks*, Phys. Lett. B **53**, 359 (1974); CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B.; WEISSKOPF, V. F., *New extended model of hadrons*, Phys. Rev. D **9**, 3471 (1974); MILTON, K. A., *Fermionic Casimir stress on a spherical bag*, Ann. Phys. (N.Y.) **150**, 432 (1983).
- [98] CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B., *Baryon structure in the bag theory*, Phys. Rev. D **10**, 2599 (1974).
- [99] MAIA NETO, P. A.; Reynaud, S., *Dissipative force on a sphere moving in vacuum*, Phys. Rev. A **47**, 1639 (1993); MINTZ, B.; FARINA, C.; MAIA NETO, P. A.; RODRIGUES, R. B., *Casimir forces for moving boundaries with Robin conditions*, J. Phys. A: Mathematical and General **39**, 6559 (2006).
- [100] MARINESCO, N.; TRILLAT, J.J.,\_\_\_\_, C.R. Acad. Sci. Paris, **196**, 858 (1933); FRENZEL, H.; SCHULTES, H.,\_\_\_\_, Z. Phys. Chem., Abt. B **27**, 421 (1934).

- [101] SETARE, M.R.; SAHARIAN, A. A., *Particle creation by moving spherical shell in the dynamical Casimir effect*, Mod. Phys. Lett. A **16**, 927(2001).
- [102] DALVIT, D. A. R.; MAZZITELLI, F. D.; MILLÁN, X. O., *The dynamical Casimir effect for different geometries*, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 6261 (2006); MAZZITELLI, F. D.; MILLÁN, X. O., *Photon creation in a spherical oscillating cavity*, Phys. Rev. A **73**, 063829 (2006).
- [103] BOGOLIUBOV, N. N., Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. **34**, 73 (1958). [English Transl.: Soviet Phys. – JETP **7**, 51 (1958)].
- [104] JI, J.-Y.; JUNG, H.-H.; SOH, K. -S., *Interference phenomena in the photon production between two oscillating walls*, Phys. Rev. A **57**, 4952 (1998); LAMBRECHT, A.; JAEKEL, M.-T.; REYNAUD, S., *Motion induced radiation from a vibrating cavity*, Phys. Rev. Lett. **77**, 615 (1996).
- [105] QUEIROZ, H.; DA SILVA, J. C.; KHANNAC, F. C.; MALBOUISSONA, J. M. C.; REVZENC, M.; SANTANA, A. E., *Thermofield dynamics and Casimir effect for fermions*, Ann. Phys. **317**, 220 (2005).
- [106] SORGE, F., *Casimir effect in a weak gravitational field*, Class. Quantum Grav. **22**, 5109 (2005);
- [107] CALLONI, E.; DI FIORE, L.; ESPOSITO, G.; MILANO, L.; ROSA, L., *Vacuum fluctuation force on a rigid Casimir cavity in a gravitational field*, Phys. Lett. A **297**, 328 (2002); CALLONI, E.; DI FIORE, L.; ESPOSITO, G.; MILANO, L.; ROSA, L., *Gravitational effects on a rigid Casimir cavity*, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 804 (2002); R. R. Caldwell, astro-ph/0209312.
- [108] FULLING, S.; MILTON, K. A.; PARASHAR, P.; ROMEO, A.; SHAJESH, K. V.; WAGNER, J., *How does Casimir energy fall?*, Phys. Rev. D **76**, 025004 (2007); MILTON, K. A.; FULLING, S. A.; PARASHAR, P.; ROMEO, A.; SHAJESJ, K. V.; WAGNER, J., *Gravitational and inertial mass of Casimir energy*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 164052 (2008).
- [109] WEINBERG, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the Theory of General Relativity* (Wiley, New York, 1972).



- [110] DURRER, R.; RUSER, M., *Dynamical Casimir effect in braneworlds*, Phys. Rev. Lett. **99**, 071601 (2007).
- [111] DAVIES, P. C. W., *Scalar particle production in Schwarzschild and Rindler metrics*, J. Phys. A: Math. Gen. **8**, 609 (1975).
- [112] SCHRODINGER, E., *Physica (Utrecht)* **6**, 899 (1939).
- [113] IMAMURA, T., *Quantized meson field in a classical gravitational field*, Phys. Rev. **118**, 1430 (1960).
- [114] SCHÜTZHOLD, R.; UHLMANN, M., *Analogue of cosmological particle creation in an ion trap*, Phys. Rev. Lett. **99**, 201301 (2007); ALSING, P. M.; DOWLING, J. P.; MILBURN, G. J., *Ion trap simulations of quantum fields in an expanding universe*, Phys. Rev. Lett. **94**, 220401 (2005).
- [115] BIRREL, N. D.; DAVIES, P. C. W., *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge: Cambridge University Press, 1982); R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford: Clarendon Press, 1992).