

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**REDES DE OSCILADORES DISSIPATIVOS: O MODELO DUPLICADO DE
CALDEIRA-LEGGETT, TRANSFERÊNCIA QUASE-PERFEITA DE ESTADOS E
RECOERÊNCIA**

Alexandre Cacheffo

Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

São Carlos - 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

REDES DE OSCILADORES DISSIPATIVOS: O MODELO DUPLICADO DE
CALDEIRA-LEGGETT, TRANSFERÊNCIA QUASE-PERFEITA DE ESTADOS E
RECOERÊNCIA

Alexandre Cacheffo

Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Física da Universidade Federal de
São Carlos como parte dos requisitos para a obten-
ção do título de Doutor em Ciências

São Carlos - 2010

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

C119ro

Cacheffo, Alexandre.

Redes de osciladores dissipativos : o modelo duplicado de Caldeira-Leggett, transferência quase-perfeita de estados e recoerência / Alexandre Cacheffo. -- São Carlos : UFSCar, 2010.

125 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2010.

1. Mecânica quântica. 2. Decoerência (Decoherence). 3. Redes de osciladores quânticos. 4. Integrais de trajetórias. 5. Transferência e recorrência de estados quânticos. 6. Recoerência. I. Título.

CDD: 530.12 (20^a)

ALEXANDRE CACHEFFO

Tese de Doutorado submetida à
Coordenação do Programa de Pós-
Graduação em Física, da Universidade
Federal de São Carlos, como requisito
parcial para a obtenção do título de
Doutor em Ciências.

Aprovado em 25 DE FEVEREIRO DE 2010.

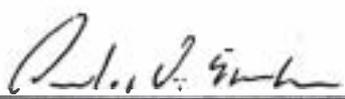
BANCA EXAMINADORA



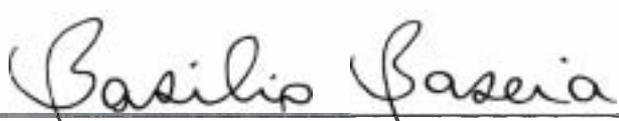
Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa
Universidade Federal de São Carlos - DF



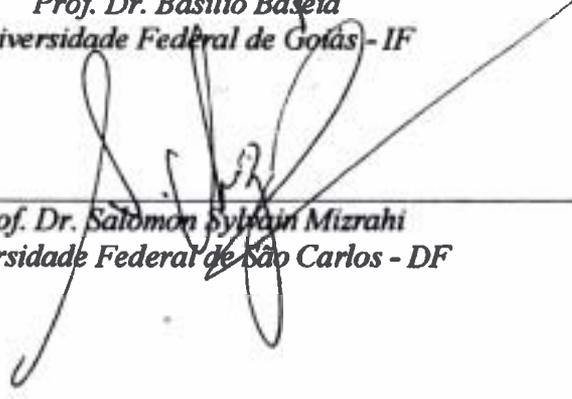
Prof. Dr. Amir Ordacgi Caldeira
Universidade Estadual de Campinas - IFGW



Prof. Dr. Carlos Ourivio Escobar
Universidade Estadual de Campinas - IFGW



Prof. Dr. Basilio Baseia
Universidade Federal de Goiás - IF



Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi
Universidade Federal de São Carlos - DF

Resumo

Neste trabalho tratamos primeiramente o que denominamos modelo duplicado de Caldeira-Leggett, que consiste no tratamento da dinâmica de dois osciladores harmônicos quânticos dissipativos acoplados, via teoria de Feynman-Vernon. Obtivemos e resolvemos as equações mestras associadas em duas diferentes situações, nas quais *i*) cada oscilador encontra-se acoplado a seu próprio reservatório ou *ii*) ambos os osciladores acoplam-se ao mesmo reservatório. Por fim, analisamos o processo de decoerência de estados emaranhados preparados nos osciladores.

Tratamos, em seguida, do problema da *transferência quase-perfeita de estados* (TQPE) em redes de osciladores quânticos dissipativos. Apresentamos, neste contexto, dois diferentes protocolos para a TQPE: o primeiro baseado na dessintonia entre as frequências dos osciladores emissor e receptor com relação àquelas dos osciladores transmissores; o segundo baseado na utilização do que denominamos *subespaços quase-livres de decoerência* (SQLD). Verificamos que em ambos os protocolos apresentados, o processo de transferência de estados se dá por um mecanismo similar ao efeito túnel, de forma que a excitação do estado a ser transferido ocupa apenas virtualmente o canal de transmissão.

Por fim, apresentamos o fenômeno que denominamos *recoerência espontânea de estados*. Através deste fenômeno, verificamos que o reservatório térmico não “apaga” a informação do sistema, isto é, seu estado inicial; ele apenas “embaralha” esta informação. A senha para a recuperação da informação original consiste no conhecimento do estado inicial do sistema e da “base pura” a ele associada.

Abstract

In this work we treat firstly what we call the double Caldeira-Leggett model, which consists on the approach to the dynamics of two dissipative harmonic oscillators via Feynman-Vernon theory. We derived and solved the associated master equations in two different situations where *i*) each oscillator is coupled to its own reservoir and *ii*) both oscillators are coupled to the same reservoir. Finally we analyzed the decoherence process of entangled states prepared in both oscillators.

Next, we treat the problem of *quasi-perfect state transfer* (QPST) in networks of dissipative harmonic oscillators. In this context, we have presented two different protocols for QPST: the first based in the detuning between the frequencies of the emitter and receiver oscillators regarding that of the transmitter oscillators and the second consisting in the use of what we call a *decoherence quasi-free subspace* (DQFS). To this end, we derived the regime of parameters enabling the emergence of DQFS. In both protocols we verified that QPST processes occur by means of a mechanism, similar to the tunneling effect, *i. e.*, the excitations of the state to be transferred populate only virtually the transmission channel.

Finally, regarding quantum open systems, we present the phenomenon that we call *spontaneous recoherence of states*. Through this phenomenon, we verified that the reservoir only “shuffle” the information of the system, instead of erasing it. The password to retrieve the original information consists of the knowledge of the initial state itself and its associated “pure basis”.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, à minha família e aos meus amigos, já que sem o inestimável apoio de todas estas pessoas não sei se teria conseguido terminar este trabalho. Agradeço também aos colegas e professores do Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos.

Sou grato ao meu orientador, Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa, pela paciência demonstrada durante todo este tempo e pelas duras horas de trabalho que empenhou para que esta tese fosse concluída.

Agradeço ainda ao Dr. Mickel Abreu de Ponte e ao Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro. Sem a ajuda destes dois grandes profissionais, esta tese jamais teria sido construída da forma como está agora.

Devo expressar gratidão ainda ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, lugar no qual boa parte das discussões contidas neste trabalho foi desenvolvida, por ter me cedido uma sala de estudos.

Finalmente agradeço às agências financiadoras Fapesp (processo n. 2005/00069-4), CNPq (processo n. 141749/2005-9) e Capes.

Sumário

1	Introdução	p. 9
2	O Modelo Duplicado de Caldeira-Leggett	p. 12
2.1	Introdução	p. 12
2.2	O Modelo Duplicado de Caldeira-Leggett	p. 16
2.2.1	Reservatórios Distintos	p. 17
2.2.2	Reservatório em Comum	p. 18
2.3	Diagonalização dos Sistemas Acoplados	p. 19
2.4	Teoria de Feynman-Vernon	p. 20
2.4.1	Reservatórios Distintos	p. 21
2.4.2	Reservatório em Comum	p. 26
2.4.2.1	Acoplamento entre os osciladores induzido pelo reservatório	p. 28
2.5	Soluções das Equações Mestras (2.36) e (2.47)	p. 28
2.5.1	Reservatórios Distintos	p. 29
2.5.1.1	Uma função geral de decaimento dos picos não-diagonais da matriz densidade	p. 34
2.5.2	Reservatório em Comum	p. 35
2.6	Decoerência no modelo duplicado de Caldeira-Leggett	p. 37
2.7	Conclusões	p. 44
3	Transferência quase-perfeita de estados em uma rede bosônica dissipativa	p. 46
3.1	Introdução	p. 46
3.2	O modelo, a equação mestra correspondente, e sua solução	p. 49
3.2.1	Rede bosônica dissipativa geral	p. 49
3.2.2	Solução da equação mestra	p. 51
3.3	Um critério para TPE em redes ideais de osciladores harmônicos	p. 52
3.3.1	TPE em redes ideais	p. 52
3.3.2	Uma aplicação da relação (3.14)	p. 55

3.3.3	Uma forma alternativa para calcular t_{ex}	p. 55
3.3.4	Transferência de estados em redes não-ideais: efeitos ambientais	p. 57
3.4	TQPE em uma rede linear dissipativa: nossa plataforma de trabalho e protocolo	p. 59
3.5	Tratamento analítico da TQPE em pequenas redes lineares não-ideais	p. 60
3.5.1	Rede linear não-ideal de $N = 3, 5$ e 6 osciladores	p. 62
3.6	Tratamento numérico da TQPE em grandes redes lineares não-ideais	p. 63
3.7	Conclusões	p. 71
4	Transferência quase-perfeita de estados via subespaços quase-livres de decoerência	p. 73
4.1	Introdução	p. 73
4.2	Uma forma alternativa de identificar os SLD	p. 76
4.3	Rede linear de osciladores harmônicos não-ideais e o SQLD	p. 79
4.3.1	TQPE em uma rede linear não ideal de $N = 4$ osciladores - Tratamento analítico	p. 82
4.3.2	TQPE via SQLD enquanto processo de tunelamento	p. 84
4.4	Tratamento numérico da TQPE via SQLD em redes de osciladores não-ideais	p. 85
4.5	Conclusões	p. 90
5	Recoerência espontânea de estados quânticos após a decoerência	p. 92
5.1	Introdução	p. 92
5.2	O operador densidade reduzido diagonalizado e os estados da base pura	p. 94
5.2.1	Estados <i>simétricos</i> (ou não-deformáveis)	p. 95
5.2.2	Estados <i>assimétricos</i> (ou deformáveis)	p. 96
5.3	Traçando as rotas em direção à decoerência, relaxação e recoerência	p. 97
5.3.1	Estados iniciais <i>simétricos</i>	p. 97
5.3.2	Estados iniciais <i>assimétricos</i>	p. 99
5.4	O mecanismo da decoerência revelado pelas funções de Wigner dos estados da base pura	p. 100
5.5	Tempos característicos	p. 101
5.5.1	Uma expressão para o tempo de decoerência de estados M -dimensionais	p. 101
5.5.2	Tempo de recoerência e termalização	p. 101
5.6	Excitação dos estados da <i>base pura</i>	p. 102
5.7	Medida de recuperação	p. 103

5.7.1	Exemplo	p. 104
5.7.2	Mapeamento experimental da rota rumo à decoerência e recoerência espontânea através de medidas de recuperação	p. 105
5.8	Conclusões	p. 111
6	Conclusões	p. 114
	Referências	p. 117
	Apêndice A - Diagonalização do hamiltoniano (2.12)	p. 124

1 Introdução

Abordamos nesta tese os problemas da decoerência e da transferência de estados em redes de osciladores quânticos não-ideais. O foco evidente desta abordagem decorre da considerável atenção que se dedica atualmente à construção de dispositivos para a implementação do processamento de informação quântica (IQ). Algumas potenciais plataformas para a realização destes dispositivos decorrem dos cristais fotônicos e da eletrodinâmica quântica de circuitos, que compreendem redes artificiais de cavidades construídas a partir de estruturas cristalinas ou elementos supercondutores. Dada a importância do processo de transferência de estados entre distintos nós da rede para o processamento de IQ, devemos procurar aqui por protocolos que contornem os mecanismos de decoerência inerentes às redes de cavidades, ou osciladores, em questão. Além do que, apresentamos também um trabalho que trata do fenômeno da recoerência espontânea de estados que, além de apresentar interesse do ponto de vista conceitual, pode vir a tornar-se útil no contexto do processamento de IQ.

Devemos começar a tese pelo que denominamos o modelo duplicado de Caldeira-Leggett (1). Trata-se do estudo da dinâmica dissipativa de dois osciladores acoplados via formalismo de Feynman-Vernon. Considerando uma forma geral para a interação entre os osciladores, tratamos duas situações distintas: *i*) quando cada oscilador acopla-se a seu respectivo reservatório, e *ii*) quando ambos os osciladores acoplam-se a um mesmo reservatório. Após a derivação e resolução da equação mestra associada a cada caso, analisamos o processo da decoerência de estados emaranhados particulares, no espaço das posições de ambos os osciladores. Para a análise do mecanismo de decoerência derivamos uma função de decaimento geral para os termos fora da diagonal principal da matriz densidade que se aplica tanto ao caso de reservatórios distintos quanto àquele de um reservatório em comum. Identificamos também a esperada interação entre os osciladores dissipativos, induzida pelo reservatório em comum. Mostra-se que esta interação induzida pelo reservatório - da qual se originam interessantes efeitos coletivos de amortecimento, como por exemplo a emergência de subespaços livres de decoerência (SLD) e relaxação (SLR) - tem seu efeito obscurecido pelo regime de altas temperaturas considerado em nosso tratamento. Contudo,

verificamos que diferentes interações entre os osciladores dissipativos, descritas pelos termos girante e contra-girante, resultam em diferentes taxas de decaimento dos termos de interferência da matriz densidade.

Em seguida, considerando agora uma rede composta por N osciladores quânticos dissipativos, utilizamos o formalismo perturbativo das equações mestras para a proposição de um protocolo para a transferência quase-perfeita de estados (TQPE) entre diferentes osciladores da rede (2). Consideramos ideais os osciladores emissor e receptor, conectados por uma cadeia linear de osciladores de transmissão não-ideais, cada qual acoplado a seus primeiros vizinhos. Das propriedades algébricas das quantidades dinâmicas que descrevem a evolução do estado da rede, obtivemos um critério - fixando os parâmetros de acoplamento entre os osciladores, além de suas frequências naturais - permitindo a transferência perfeita de estados (TPE) no caso particular de osciladores de transmissão ideais. Este critério nos proporciona uma fórmula, de forma a permitir a TPE no caso especial onde as não-idealidades da rede são desconsideradas. Estendemos este critério às redes não-ideais, onde a fidelidade do estado transferido decresce devido aos mecanismos de dissipação da rede. Para contornar quase que completamente o efeito adverso da decoerência, propomos então um protocolo para a verificação da TQPE em redes não-ideais: Ajustando a frequência comum do emissor e do receptor de forma que esta esteja significativamente fora de ressonância com aquelas dos osciladores de transmissão, demonstramos que o estado do emissor transfere-se ao receptor via mecanismo similar ao efeito túnel, excitando apenas virtualmente o canal transmissor. Este processo virtual torna desprezível a taxa de decaimento associada ao canal de transmissão, às custas de aumentar o intervalo de tempo do processo de transferência de estados. Além dos resultados analíticos, cálculos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência do nosso protocolo.

Ainda no contexto da TQPE em redes com N osciladores quânticos dissipativos, apresentamos outro protocolo com o objetivo de se contornar os mecanismos de decoerência inerentes à rede. Para tal, propomos primeiramente o conceito dos subespaços quase-livres de decoerência (SQLD), através dos quais logramos a TQPE. Por meio dos SQLD contornamos também a necessidade do controle das frequências do emissor, do receptor e do canal de transmissão. Considerando que todos os osciladores da rede tenham a mesma frequência natural, demonstramos que a construção dos SQLD impõe apenas que se viabilize um regime de parâmetros da rede no qual seus estados são parcialmente protegidos dos efeitos de decoerência. A fidelidade alcançada no processo de transferência de estados é ainda mais significativa que aquela obtida através da manipulação das frequências dos osciladores da rede. Demonstramos também que o processo de

transferência de estados se dá igualmente pelo processo similar ao efeito túnel, de forma que a excitação do estado inicial do emissor ocupa apenas virtualmente o canal de transmissão.

Por fim, apresentamos um trabalho no qual identificamos o conjunto de estados puros dependentes do tempo que compõe a mistura estatística para a qual um sistema aberto (inicialmente preparado em um estado puro) é conduzido pelo reservatório. Estes estados puros dependentes do tempo, que formam o que denominamos base pura, são exatamente aqueles que diagonalizam o operador densidade reduzido do sistema. Demonstramos que a evolução dos estados da base pura revela um fenômeno interessante à medida que o sistema, após a decoerência do seu estado inicial, evolui em direção ao equilíbrio: a recoerência espontânea de estados quânticos. No entorno do que definimos como tempo de recoerência, a mistura estatística associada a uma classe especial de estados iniciais designados estados simétricos-pares, passa espontaneamente pelo processo de recorrência pelo qual o estado inicial do sistema emerge da mistura com sua excitação evidentemente reduzida pela ação do reservatório. Este fenômeno revela que o reservatório apenas embaralha a informação original contida no estado inicial do sistema ao invés de apagá-la. Além disso, uma vez que a recoerência espontânea de estados ocorre somente para tempos assintóticos, apresentamos também um protocolo para a extração do estado da mistura estatística através de medidas projetivas específicas. A senha para este resgate da informação original consiste no conhecimento tanto do próprio estado inicial como da base pura associada. Uma definição do tempo de decoerência para uma superposição contendo N estados é também apresentada.

Portanto, conforme exposto acima, nossa contribuição está centrada nas dinâmicas de decoerência e transferência de estados; na transferência de estados entres osciladores distintos de uma rede não ideal, e no processo de decoerência induzido pela injeção de ruídos provenientes do reservatório sobre sistema. Além da apresentação de dois protocolos distintos para se contornar os mecanismos de decoerência no processo de transferência de estados, apresentamos dois outros estudos: o modelo duplicado de Caldeira-Leggett e o fenômeno da recoerência espontânea de estados. No Capítulo 1 apresentamos o modelo duplicado de Caldeira-Leggett, enquanto que nos Capítulos 2 e 3 apresentamos os protocolos acima mencionados para a TQPE. No Capítulo 4 apresentamos o fenômeno da recorrência espontânea, e ainda que tenhamos apresentado as conclusões relativas a cada tópico em seus respectivos capítulos, apresentamos no Capítulo 5 as conclusões gerais da tese.

2 O Modelo Duplicado de Caldeira-Leggett

2.1 Introdução

No início dos anos 80, os trabalhos de Zurek (3–5), Caldeira e Leggett (6) e Zeh e Joos (7) tiveram um papel importante para avanços no entendimento do fenômeno da medida quântica; mais especificamente, o colapso da função de onda e a decoerência associada a superposições de estados (8). Considerando o reservatório explicitamente como um ingrediente quântico e analisando seus efeitos sobre a evolução de um estado inicialmente puro em direção a uma mistura estatística, tais trabalhos lançaram luz à interface entre os domínios microscópico e macroscópico. Ainda que o colapso da função de onda permaneça um processo obscuro, apesar de importantes contribuições também datando dos anos 80 (9–11), muito se sabe hoje a respeito dos mecanismos que levam à decoerência. Nas últimas décadas, este fenômeno tem sido analisado exaustivamente, permitindo a proposta de diferentes protocolos para o contorno de seus efeitos, que vão desde códigos para a correção de erros quânticos (12, 13) e engenharia de reservatórios (14–16) até o desacoplamento dinâmico (17–24) e subespaços livres de decoerência (SLD) e relaxação (SLR) (25, 26).

Mais recentemente, demonstrou-se que o grau de emaranhamento em um sistema aumenta nas vizinhanças do ponto de transição de fase deste (27). Esta conexão entre as teorias de fenômenos críticos e de informação quântica, juntamente com a busca por SLD e SLR - que compreende sistemas dissipativos acoplados - tem desencadeado o estudo de processos quânticos fundamentais no domínio da física de muitos corpos. Além do papel crucial do emaranhamento no entendimento dos processos de transições de fase quânticas (28), o estudo das dinâmicas de coerência e decoerência de estados de superposição em redes de sistemas quânticos dissipativos têm produzido resultados interessantes para a teoria de informação quântica (26, 29–31). Em particular, na Ref. (26), uma função de correlação foi introduzida de modo a fornecer as condições analíticas necessárias para a existência de SLD e SLR em um sistema de osciladores dissipativos interagentes. Esta função de correlação mede a confiabilidade de um SLD. Além disso, as Refs.

(26, 29–31) apresentam, como uma novidade conceitual, a discussão sobre a necessidade de se considerar reservatórios distintos para sistemas quânticos distintos.

Neste estudo, consideramos um sistema de dois osciladores harmônicos interagentes, em duas situações: *i*) quando cada oscilador está acoplado a seu próprio reservatório e *ii*) quando ambos os osciladores estão acoplados a um reservatório em comum. Como foi mostrado na Ref. (26), o primeiro caso, onde cada sistema interage com seu próprio reservatório, constitui uma situação usual. Considerando, por exemplo, uma rede de cavidades acopladas, mesmo quando estas têm o mesmo fator de qualidade, seus mecanismos de amortecimento são independentes, exceto quando interagem fortemente (26). Por interação forte entende-se que a constante de acoplamento λ entre as N cavidades deve satisfazer a relação $N\lambda \sim \omega$, sendo ω a frequência natural de cada modo da cavidade no caso degenerado, onde $\omega_1 = \dots = \omega_N = \omega$. Em tal limite de acoplamento forte, os resultados que emergem no caso de um reservatório em comum são completamente similares àqueles para o caso em que reservatórios distintos são considerados. Por outro lado, no limite de acoplamento fraco, onde $N\lambda \ll \omega$, devem ser designados reservatórios distintos para cada uma das cavidades compondo a rede.

Mesmo em casos particulares onde poderíamos, em princípio, designar um reservatório em comum para diferentes sistemas quânticos como, por exemplo, uma amostra de átomos dentro da mesma cavidade - a cavidade multimodal fazendo o papel de reservatório em comum - tal reservatório passa a comportar-se como um conjunto de reservatórios distintos quando as frequências de transição dos átomos estiverem significativamente separadas umas das outras. Nesta situação, cada átomo interage com os modos do reservatório nas vizinhanças de sua própria frequência de transição, e a ausência de intersecção (ou pequena) entre os modos do reservatório endereçados por átomos distintos faz com que o reservatório em comum se comporte como um conjunto de reservatórios distintos (26). Evidentemente, quando as frequências de transição atômicas não são suficientemente distantes umas das outras, a sobreposição entre os modos do reservatório atribuídos a cada átomo indica que estes passam a interagir através de seu “reservatório parcialmente em comum”. Somente no caso limite, onde todos os átomos na amostra têm a mesma frequência de transição - e uma sobreposição completa entre os modos do reservatório é obtido - é que um reservatório “completamente comum” passa a ser acessado por toda a amostra atômica. Neste limite, a interação entre os átomos através de seu reservatório em comum é maximizada, possibilitando a emergência das interessantes características dos sistemas dissipativos interagentes: os SLD e SLR. Desse modo, o acesso a tais SLD-SLR, que podem se tornar indispensáveis para a implementação da informação quântica, requer um completo entendimento do mecanismo dissipativo de

sistemas quânticos acoplados, seja através de um reservatório em comum ou de reservatórios distintos. Além da emergência dos SLD e SLR, o estudo dos efeitos coletivos de amortecimento tem produzido, recentemente, resultados interessantes, tais como a verificação da não-aditividade das taxas de decoerência observadas em uma rede de osciladores dissipativos (26, 29–31), assim como em *qubits* supercondutores (32). No caso das amostras atômicas, os efeitos coletivos de amortecimento procedentes de sistemas de átomos de dois níveis (33) podem ser identificados diretamente com a não-aditividade das taxas de decoerência.

O problema de dois osciladores harmônicos acoplados tem sido discutido na literatura sob várias perspectivas. Mencionamos primeiro uma proposta experimental, baseada na possibilidade de se construir um acoplamento reversível entre cavidades com alto fator de qualidade (Q), de modo a se observar a decoerência reversível de uma superposição mesoscópica de estados do campo (34). Uma abordagem teórica para tal proposta é dada na Ref. (35), onde se considera um reservatório em comum para ambas as cavidades. Na Ref. (36) um sistema de duas cavidades acopladas é também analisado. Neste caso, apenas uma das cavidades interage com o reservatório. Uma equação mestra é obtida para o caso em que as cavidades estão fortemente acopladas e é mostrado que o termo de relaxação difere do usual, obtido quando a interação entre as cavidades é ignorada. Finalmente, na Ref. (29), assume-se que cada cavidade interage com seu próprio reservatório, e uma investigação detalhada é feita para ambos os regimes de osciladores, fracamente e fortemente acoplados. Neste caso, para assegurar que os osciladores interajam apenas por meio de seus acoplamentos diretos, e não dos indiretos, que ocorrem devido à interação com um reservatório em comum, considera-se dois reservatórios distintos. Vale mencionar que um tratamento geral para uma rede de osciladores dissipativos acoplados foi apresentado recentemente (37), para qualquer topologia, isto é, independentemente de como os osciladores estão acoplados, da intensidade de seus acoplamentos e de suas frequências naturais. Assim como nas Refs. (26, 29–31), os autores partem de um cenário geral, mais realista, em que cada oscilador interage com seu próprio reservatório, para depois analisar o caso particular em que todos os osciladores da rede estão acoplados a um único reservatório em comum.

No presente capítulo, uma forma geral para a interação entre os osciladores dissipativos é considerada e ambas as situações, de reservatórios distintos e em comum, são analisadas (1). É empregada aqui a abordagem via integrais de trajetória para a obtenção da equação mestra, como feito no modelo de resposta linear de Caldeira-Leggett (6), que originou consideráveis progressos no estudo da dissipação quântica, em várias áreas da Física. De fato, com seu modelo, Caldeira e Leggett avaliam a influência da dissipação no tunelamento quântico em sistemas macroscópicos

(38, 39). O movimento Browniano quântico também foi abordado através do método do funcional de influência (6, 40, 41). Além disso, o modelo de Caldeira-Leggett tem sido aplicado em outros problemas da Física do Estado Sólido, como por exemplo à dinâmica de polarons (42), ou ao tratamento de uma partícula acoplada a um líquido de Luttinger (43).

Bem antes do surgimento do modelo de Caldeira-Leggett, o cálculo de integrais funcionais foi utilizado por Feynman no estudo do problema dos polarons em uma rede cristalina (44,45) e, mais recentemente, tem sido aplicado ao estudo dos bipolarons (46–49). Como uma extensão direta do modelo de polarons de Feynman, na abordagem via integrais de trajetória para o bipolaron considera-se que cada elétron esteja harmonicamente acoplado a uma partícula fictícia pesada, que substitui a nuvem de fônons virtuais. Cada elétron também interage com a partícula fictícia do outro elétron, além de sofrerem a repulsão Coulombiana entre si. Portanto, o modelo duplicado de Caldeira-Leggett apresentado aqui tem alguma semelhança com o problema do bipolaron, com os osciladores (reservatórios) substituindo os elétrons (partículas fictícias). Mudando a interação entre os osciladores dissipativos pela repulsão Coulombiana entre os elétrons, terminaríamos com um modelo do tipo bipolaron dissipativo.

Antes de finalizarmos esta Introdução, convém mencionar o resultado recente da Ref. (50), onde os autores apontam o acoplamento efetivo entre duas partículas Brownianas não-interagentes, induzido por um reservatório em comum. Tal acoplamento efetivo depende da escolha feita para a função espectral do reservatório. No presente estudo, considerando um reservatório Ôhmico no regime de altas temperaturas, verificamos que este acoplamento efetivo ocorre para o caso de reservatório em comum, enquanto que, como esperado, este é ausente no caso de reservatórios distintos. Mencionamos ainda que tal acoplamento efetivo, induzido por um reservatório em comum é também apontado nas Refs. (26, 29–31, 37).

Em resumo, neste capítulo empregamos a abordagem via integrais de trajetória para o tratamento de uma rede de dois osciladores harmônicos dissipativos interagentes (1). Considerando uma forma geral para a interação entre os osciladores, tratamos duas diferentes situações: *i*) quando cada oscilador está acoplado a seu próprio reservatório e *ii*) quando ambos os osciladores estão acoplados a um reservatório em comum. Em seguida, obtemos e resolvemos as equações mestras para cada caso identificando, no segundo, o acoplamento entre os osciladores, induzido pelo reservatório, e que permanece ativo mesmo quando a interação original entre eles é desligada. Verificamos que tal acoplamento induzido pelo reservatório leva em conta tanto os termos dissipativos quanto os difusivos da equação mestra, que acoplam juntos as variáveis de ambos os osciladores. Estes termos dão conta da perda de energia dos osciladores, um através do outro,

além de um processo difusivo conjunto. A partir das soluções das equações mestras, obtemos uma expressão geral para a taxa de decaimento dos picos não-diagonais da matriz densidade reduzida do sistema para estados de superposição iniciais, que se aplica a ambos os casos de reservatórios distintos e em comum. Finalmente, considerando diferentes interações entre os osciladores, analisamos o processo de decoerência de emaranhamentos particulares em seus espaços posicionais.

2.2 O Modelo Duplicado de Caldeira-Leggett

O problema de Caldeira-Leggett (6) consiste em aplicar o método do funcional de influência de Feynman e Vernon (51) ao estudo da dinâmica de flutuação-dissipação de um sistema quântico (S) interagindo com um reservatório (R), modelado por uma coleção de osciladores harmônicos unidimensionais. O hamiltoniano deste problema é dado por $H_{CL} = H_S + H_R + H_{S/R}$, onde o hamiltoniano do sistema, H_S , representado por uma partícula da massa m , coordenada q e momentum p sujeita a um potencial $V(q)$ é dado por

$$H_S = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad (2.1)$$

enquanto que o hamiltoniano do reservatório, consistindo de uma coleção de osciladores harmônicos $\{\omega_k\}$ de coordenadas $\{q_k\}$ e $\{p_k\}$, e massas $\{m_k\}$ (o subscrito indicando o k -ésimo oscilador do reservatório) escreve-se

$$H_R = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{p_k^2}{m_k} + m_k \omega_k^2 q_k^2 \right), \quad (2.2)$$

e o hamiltoniano de interação, linear por hipótese e definido pelas constantes de acoplamento C_k , é dado por

$$H_{S/R} = q \sum_k C_k q_k. \quad (2.3)$$

O modelo duplicado de Caldeira-Leggett aqui considerado consiste de dois sistemas quânticos S_1 e S_2 , de massas m_1 e m_2 , acoplados através da forma geral (1)

$$H_{S_1/S_2} = \lambda_{11} q_1 q_2 + \lambda_{12} q_1 p_2 + \lambda_{21} q_2 p_1 + \lambda_{22} p_1 p_2. \quad (2.4)$$

Dois situações são consideradas com relação às interações sistema-reservatório: *i*) aquela que parece mais apropriada para a maior parte dos sistemas físicos, onde cada sistema está acoplado a seu próprio reservatório e, *ii*) a que é, na prática, um tanto não-usual, onde ambos os sistemas estão acoplados a um reservatório em comum. Os hamiltonianos governando as evoluções dos

sistemas dissipativos acoplados em ambos os casos $i)$ e $ii)$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} H_i &= \sum_{\ell} (H_{S_{\ell}} + H_{S_{\ell}/R_{\ell}} + H_{R_{\ell}}) + H_{S_1/S_2}, \\ H_{ii} &= \sum_{\ell} (H_{S_{\ell}} + H_{S_{\ell}/R}) + H_R + H_{S_1/S_2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $\ell, \ell', \ell'' = 1, 2$ daqui em diante.

No contexto de uma rede de cavidades acopladas por guias de onda supercondutoras (34, 52–54), reservatórios distintos devem ser considerados, em geral, para cada cavidade, mesmo se estas tiverem fatores de qualidade iguais, de forma que não existam quaisquer correlações entre os reservatórios. O mesmo se aplica a íons armadilhados distinguíveis ou a ondas viajantes atingindo elementos ópticos distinguíveis. Entretanto, como demonstrado na Ref. (26), um acoplamento suficientemente forte entre as cavidades ou íons armadilhados leva a uma correlação entre os reservatórios, visto que cada sistema particular da rede começa a interagir com todos os reservatórios. Existem algumas situações particulares onde um conjunto de sistemas quânticos pode interagir com um reservatório em comum, tal como uma amostra atômica ou campos distintos dentro de uma cavidade perfeitamente fechada. No primeiro caso, diferentes transições atômicas acoplam-se com diferentes modos do reservatório e, novamente, as correlações entre esses modos do reservatório definem ou um reservatório em comum ou reservatórios distintos. No segundo caso, foi demonstrado que a proximidade dos modos distintos do campo define o comprimento da função de correlação entre os modos do reservatório, que governa a emergência dos SLD e SLR (26).

2.2.1 Reservatórios Distintos

Iniciando com o caso de reservatórios distintos, o hamiltoniano descrevendo os dois sistemas e suas interações com os reservatórios e entre si é dado por

$$H_i = \sum_{\ell} \left[\frac{p_{\ell}^2}{2m_{\ell}} + V_{\ell}(q_{\ell}) + \sum_k \left(\frac{p_{\ell k}^2}{2m_{\ell k}} + \frac{m_{\ell k}}{2} \omega_{\ell k}^2 q_{\ell k}^2 + C_{\ell k} q_{\ell} q_{\ell k} \right) \right] + H_{S_1/S_2}. \quad (2.6)$$

A lagrangeana \mathcal{L}_i associada ao hamiltoniano H_i , que define a ação clássica $\mathcal{S} = \int_0^t \mathcal{L}_i d\tau$, da teoria de Feynman-Vernon, é dada por

$$\mathcal{L}_i = \sum_{\ell} \left\{ \frac{\mu_{\ell} \dot{q}_{\ell}^2}{2} - V_{\ell}(q_{\ell}) + \sum_k \left[\frac{m_{\ell k}}{2} (\dot{q}_{\ell k}^2 - \omega_{\ell k}^2 q_{\ell k}^2) - C_{\ell k} q_{\ell} q_{\ell k} \right] \right\} - \mathcal{L}_{S_1/S_2}, \quad (2.7)$$

onde \mathcal{L}_{S_1/S_2} , a lagrangeana associada com a interação entre os dois sistemas, se escreve

$$\mathcal{L}_{S_1/S_2} = \lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{21}\mu_{11}q_2 \left(\dot{q}_1 - \frac{\lambda_{21}}{2}q_2 \right) + \lambda_{12}\mu_{22}q_1 \left(\dot{q}_2 - \frac{\lambda_{12}}{2}q_1 \right) + \mu_{12}(\dot{q}_1 - \lambda_{21}q_2)(\dot{q}_2 - \lambda_{12}q_1), \quad (2.8)$$

onde

$$\mu_{\ell\ell'} = \frac{m_\ell (\lambda_{22}m_{\ell'})^{1-\delta_{\ell\ell'}}}{1 - \lambda_{22}^2 m_1 m_2} \quad (2.9)$$

representam as massas reduzidas, que são oriundas exclusivamente do acoplamento $p_1 p_2$ entre os sistemas.

2.2.2 Reservatório em Comum

Quando consideramos que ambos os osciladores interagem com um reservatório em comum, o hamiltoniano que descreve os sistemas, a interação mútua entre estes e aquela com o reservatório passa a se escrever como

$$H_{ii} = \sum_{\ell} \left(\frac{p_{\ell}^2}{2m_{\ell}} + V_{\ell}(q_{\ell}) + \sum_k C_{\ell k} q_{\ell} q_k \right) + \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{p_k^2}{m_k} + m_k \omega_k^2 q_k^2 \right) + H_{S_1/S_2}. \quad (2.10)$$

A lagrangeana \mathcal{L}_{ii} , que segue do hamiltoniano H_{ii} , é dada por

$$\mathcal{L}_{ii} = \sum_{\ell} \left(\frac{\mu_{\ell} \dot{q}_{\ell}^2}{2} - V_{\ell}(q_{\ell}) - \sum_k C_{\ell k} q_{\ell} q_k \right) + \sum_k \frac{m_k}{2} (\dot{q}_k^2 - \omega_k^2 q_k^2) - \mathcal{L}_{S_1/S_2}, \quad (2.11)$$

onde \mathcal{L}_{S_1/S_2} é definido na Eq. (2.8).

Antes de efetuar o cálculo do propagador para o modelo Caldeira-Leggett duplicado empregando o método do funcional de influência de Feynman-Vernon, vamos primeiro diagonalizar o hamiltoniano que descreve os sistemas acoplados

$$H_{S_1+S_2} = \sum_{\ell} \left(\frac{p_{\ell}^2}{2m_{\ell}} + V_{\ell}(q_{\ell}) \right) + H_{S_1/S_2}. \quad (2.12)$$

Essa diagonalização é imprescindível para determinarmos as intensidades dos parâmetros de interação $\{\lambda_{\ell\ell'}\}$ que resultem em valores positivos para as frequências dos modos normais. Por outro lado, poderíamos ter iniciado nossos cálculos a partir de um hamiltoniano positivo-definido, com um limite inferior para o espectro de energia (6, 36, 37, 55–57).

2.3 Diagonalização dos Sistemas Acoplados

Considerando, daqui em diante, que os sistemas acoplados S_1 e S_2 sejam osciladores harmônicos de frequências ω_1 e ω_2 , o hamiltoniano diagonalizado é descrito, em termos de massas unitárias e coordenadas dos modos normais Q_ℓ e P_ℓ , definidas no Apêndice A, Eqs. (A.11), como

$$\mathcal{H}_{S_1+S_2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell} (P_{\ell}^2 + \Omega_{\ell}^2 Q_{\ell}^2). \quad (2.13)$$

As massas originais m_{ℓ} são absorvidas pelas frequências dos modos normais Ω_{ℓ} , definidas na Eq. (A.4), que também levam em conta as interações efetivas g_{ℓ} , dadas pela Eq. (A.2), além das frequências naturais ω_1 e ω_2 . Com a imposição de que as frequências dos modos normais Ω_{ℓ} assumam valores positivos, é direto concluir que as relações

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 + |g_2|^2 &\geq |g_1|^2 \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\right)^2, \\ (|g_2|^2 - |g_1|^2)^2 + (\omega_1 \omega_2)^2 &\geq 2\omega_1 \omega_2 (|g_1|^2 + |g_2|^2), \end{aligned} \quad (2.14)$$

devam ser satisfeitas.

As coordenadas normais Q_{ℓ} e P_{ℓ} , associadas às frequências dos modos normais, seguem das coordenadas e momenta q_{ℓ} e p_{ℓ} definidos previamente, como descrito pela transformação dada pelas Eqs. (A.7). Através destas coordenadas e frequências dos modos normais, os hamiltonianos H_i e H_{ii} tornam-se

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left[P_{\ell}^2 + \Omega_{\ell}^2 Q_{\ell}^2 + \sum_k \left(\frac{p_{\ell k}^2}{m_{\ell k}} + m_{\ell k} \omega_{\ell k}^2 q_{\ell k}^2 + \sqrt{\frac{8\hbar}{m_{\ell} \omega_{\ell}}} \sum_{\ell'} [\text{Re}(c_{\ell \ell'} Q_{\ell'}) + \text{Im}(d_{\ell \ell'} P_{\ell'})] C_{\ell k} q_{\ell k} \right) \right], \\ H_{ii} &= \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left(P_{\ell}^2 + \Omega_{\ell}^2 Q_{\ell}^2 + \sqrt{\frac{8\hbar}{m_{\ell} \omega_{\ell}}} \sum_{\ell'} [\text{Re}(c_{\ell \ell'} Q_{\ell'}) + \text{Im}(d_{\ell \ell'} P_{\ell'})] \sum_k C_{\ell k} q_k \right) + \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{p_k^2}{m_k} + m_k \omega_k^2 q_k^2 \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde usamos a transformação inversa das Eqs. (A.7), dada por

$$\begin{aligned} q_{\ell} &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m_{\ell} \omega_{\ell}}} \sum_{\ell'} [\text{Re}(c_{\ell \ell'} Q_{\ell'}) + \text{Im}(d_{\ell \ell'} P_{\ell'})], \\ p_{\ell} &= \sqrt{2\hbar m_{\ell} \omega_{\ell}} \sum_{\ell'} [\text{Re}(d_{\ell \ell'} P_{\ell'}) - \text{Im}(c_{\ell \ell'} Q_{\ell'})], \end{aligned} \quad (2.16)$$

com os coeficientes

$$\begin{aligned} c_{\ell\ell'} &= \mathcal{N}_{\ell'} \sqrt{\frac{\Omega_{\ell'}}{2\hbar}} [-\Delta_{1\ell}(\Omega_{\ell'}) + \Delta_{2\ell}(\Omega_{\ell'})] e^{i\phi_{\ell}}, \\ d_{\ell\ell'} &= \mathcal{N}_{\ell'} \sqrt{\frac{1}{2\hbar\Omega_{\ell'}}} [\Delta_{1\ell}(\Omega_{\ell'}) + \Delta_{2\ell}(\Omega_{\ell'})] e^{i\phi_{\ell}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

e as funções $\Delta_{\ell\ell'}(\Omega_{\ell'})$ definidas pela Eq. (A.6).

Portanto, através da forma diagonalizada do hamiltoniano $H_{S_1+S_2}$, obtemos dois hamiltonianos de Caldeira-Leggett independentes e generalizados, sob coordenadas normais Q_{ℓ} and P_{ℓ} . Os hamiltonianos nas Eqs. (2.15) descrevem dois osciladores harmônicos independentes interagindo cada um com seu próprio reservatório, no primeiro caso, e interagindo com um reservatório em comum, no segundo caso. Por hamiltoniano de Caldeira-Leggett generalizado entende-se que o acoplamento sistema-reservatório exibe, devido à forma geral da interação entre ambos os osciladores, Eq. (2.5), um termo de acoplamento momentum-posição, além do termo posição-posição usual. Aqui, diferentemente do que ocorre no modelo Caldeira-Leggett, onde o termo de acoplamento momentum-posição é facilmente tratado através de uma transformação canônica (6), este termo de acoplamento momentum-posição torna difícil a aplicação do método do funcional de influência, visto que a lagrangeana correspondente envolve complicados termos de interação reservatório-reservatório. Desse modo, apesar da diagonalização descrita pelo hamiltoniano $H_{S_1+S_2}$, é preferível abordar o problema para os casos de reservatórios distintos e em comum através das lagrangeanas Eqs. (2.7) e (2.11), respectivamente. Conforme será demonstrado, no primeiro caso iremos obter um produto de dois funcionais de influência idênticos àqueles do modelo Caldeira-Leggett, enquanto que no segundo caso, o de reservatório em comum, o funcional de influência não é fatorado em funcionais individuais.

2.4 Teoria de Feynman-Vernon

A fim de obter a equação mestra que descreve a evolução temporal dos osciladores acoplados S_1 e S_2 , partimos da forma integral do operador densidade do sistema conjunto. Para um dado tempo t , ele é escrito como $\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t)$, onde o operador de evolução $U(t)$ segue dos hamiltonianos H_i ou H_{ii} . Em seguida, associamos as coordenadas x_{ℓ} e y_{ℓ} aos sistemas S_{ℓ} e os vetores N -dimensionais $\mathbf{X}_{\ell} = (X_{\ell 1}, \dots, X_{\ell N})$ e $\mathbf{Y}_{\ell} = (Y_{\ell 1}, \dots, Y_{\ell N})$ aos reservatórios R_{ℓ} . Para o caso de um reservatório em comum, devemos apenas ignorar um dos reservatórios R_{ℓ} , na expressão obtida para o caso de reservatórios distintos, de forma a obter o funcional de influência

associado. Usando a notação $\{x_\ell\} = x_1, x_2$ e $\{dx_\ell\} = dx_1 dx_2$ para todas as variáveis, obtemos o elemento de matriz na representação de coordenadas

$$\begin{aligned} \langle \{x_\ell\}, \{\mathbf{X}_\ell\} | \rho(t) | \{y_\ell\}, \{\mathbf{Y}_\ell\} \rangle &= \int d\{x'_\ell\} d\{y'_\ell\} d\{\mathbf{X}'_\ell\} d\{\mathbf{Y}'_\ell\} \langle \{x'_\ell\}, \{\mathbf{X}'_\ell\} | \rho(0) | \{y'_\ell\}, \{\mathbf{Y}'_\ell\} \rangle \\ &\times K(\{x_\ell\}, \{\mathbf{X}_\ell\}, t; \{x'_\ell\}, \{\mathbf{X}'_\ell\}, 0) K^*(\{y_\ell\}, \{\mathbf{Y}_\ell\}, t; \{y'_\ell\}, \{\mathbf{Y}'_\ell\}, 0), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde as integrações funcionais são efetuadas sobre as trajetórias $x_\ell(t')$, $y_\ell(t')$, $\mathbf{X}_\ell(t')$ e $\mathbf{Y}_\ell(t')$, com extremos $x_\ell(t) = x_\ell$, $x_\ell(0) = x'_\ell$, $y_\ell(t) = y_\ell$, $y_\ell(0) = y'_\ell$, $\mathbf{X}_\ell(t) = \mathbf{X}_\ell$, $\mathbf{X}_\ell(0) = \mathbf{X}'_\ell$, $\mathbf{Y}_\ell(t) = \mathbf{Y}_\ell$, e $\mathbf{Y}_\ell(0) = \mathbf{Y}'_\ell$. O propagador K é dado por

$$K(\{x_\ell\}, \{\mathbf{X}_\ell\}, t; \{x'_\ell\}, \{\mathbf{X}'_\ell\}, 0) = \int D\{x_\ell\} D\{\mathbf{X}_\ell\} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\{x_\ell\}, \{\mathbf{X}_\ell\}]\right). \quad (2.19)$$

A ação clássica \mathcal{S} segue da lagrangeana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_i$ ou \mathcal{L}_{ii} , com $\mathcal{S} = \int_0^t \mathcal{L} dt'$. Traçando sobre as coordenadas dos reservatórios, obtemos o operador densidade reduzido que descreve os sistemas acoplados S_1 e S_2 sob a influência de seus respectivos reservatórios. Ele é dado por

$$\tilde{\rho}(\{x_\ell\}, \{y_\ell\}, t) = \int d\{x'_\ell\} d\{y'_\ell\} J(\{x_\ell\}, \{y_\ell\}, t; \{x'_\ell\}, \{y'_\ell\}, 0) \tilde{\rho}(\{x'_\ell\}, \{y'_\ell\}, 0), \quad (2.20)$$

onde consideramos que o acoplamento entre o sistema e o reservatório é ligado subitamente, tal que o operador densidade total é dado inicialmente por $\rho(0) = \tilde{\rho}(0)\rho_{R_1+R_2}(0)$. O propagador para o operador densidade torna-se

$$\begin{aligned} J(\{x_\ell\}, \{y_\ell\}, t; \{x'_\ell\}, \{y'_\ell\}, 0) &= \int D\{x_\ell\} D\{y_\ell\} \mathcal{F}[\{x_\ell\}, \{y_\ell\}] \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[\sum_\ell (\mathcal{S}_{S_\ell}[\{x_\ell\}] - \mathcal{S}_{S_\ell}[\{y_\ell\}]) + \mathcal{S}_{S_1/S_2}[\{x_\ell\}] - \mathcal{S}_{S_1/S_2}[\{y_\ell\}] \right]\right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Apesar da Eq. (2.21) se aplicar a ambos os casos, *i*) e *ii*), o cálculo do funcional de influência $\mathcal{F}[\{x_\ell\}, \{y_\ell\}]$ (51, 58), representando os efeitos dos reservatórios nos sistemas é diferente para os dois casos.

2.4.1 Reservatórios Distintos

Quando consideramos reservatórios distintos, o funcional de influência na Eq. (2.21) fatora-se como

$$\mathcal{F}[\{x_\ell\}, \{y_\ell\}] = \prod_\ell \mathcal{F}[x_\ell, y_\ell], \quad (2.22)$$

onde a componente que vem da interação do sistema S_ℓ com o reservatório R_ℓ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_\ell, y_\ell] &= \int d\mathbf{X}_\ell d\mathbf{X}'_\ell d\mathbf{Y}'_\ell \rho_{R_\ell}(\mathbf{X}'_\ell, \mathbf{Y}'_\ell, 0) \int D\mathbf{X}_\ell D\mathbf{Y}_\ell \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\mathcal{S}_{R_\ell}[\mathbf{X}_\ell] - \mathcal{S}_{R_\ell}[\mathbf{Y}_\ell] + \mathcal{S}_{S_\ell/R_\ell}[x_\ell, \mathbf{X}_\ell] - \mathcal{S}_{S_\ell/R_\ell}[y_\ell, \mathbf{Y}_\ell]) \right\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

Evidentemente, desligando a interação entre os sistemas, descrita pelo hamiltoniano H_{S_1/S_2} na Eq. (3.9), o propagador J na Eq. (2.21) reduz-se a um produto de propagadores idênticos àqueles obtidos no modelo de Caldeira-Leggett. Entretanto, o funcional de influência é fatorado independentemente do requerimento de sistemas não-interagentes, visto que ele segue somente dos termos de interação dos sistemas com seus respectivos reservatórios. Portanto, o funcional de influência, Eq. (2.22) é obtido diretamente como um produto de dois funcionais obtidos via modelo Caldeira-Leggett. Tudo o que resta a ser feito é calcular o propagador, Eq. (2.21), considerando as ações devidas à interação entre os dois sistemas. Deste modo, obtemos diretamente a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_\ell, y_\ell] &= \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt' \alpha_{\ell R}(\tau - t') [x_\ell(\tau) - y_\ell(\tau)] [x_\ell(t') - y_\ell(t')] \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt' \alpha_{\ell I}(\tau - t') [x_\ell(\tau) - y_\ell(\tau)] [x_\ell(t') + y_\ell(t')] \right\}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

com as partes real e imaginária da função $\alpha(t)$ dadas por

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell R}(t) &= \sum_k \frac{C_{\ell k}^2}{2m_{\ell k}\omega_{\ell k}} \coth(\omega_{\ell k}\hbar\beta_\ell/2) \cos(\omega_{\ell k}t), \\ \alpha_{\ell I}(t) &= -\sum_k \frac{C_{\ell k}^2}{2m_{\ell k}\omega_{\ell k}} \sin(\omega_{\ell k}t). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Considerando que os modos dos reservatórios sejam espaçados de forma a permitir uma soma contínua, definimos as funções espectrais (6)

$$\chi_\ell(\omega_\ell) = \pi \sum_k \frac{C_{\ell k}^2}{2m_{\ell k}\omega_{\ell k}} \delta(\omega_\ell - \omega_{\ell k}). \quad (2.26)$$

A introdução de uma frequência de corte $\Omega_{\ell c}$ consideravelmente maior que as frequências características do problema, juntamente com a suposição de reservatórios Ôhmicos (6), onde as distribuições $\chi_\ell(\omega_\ell)$ são definidas através das constantes de amortecimento η_ℓ , tais que

$$\chi_\ell(\omega_\ell) = \begin{cases} \eta_\ell \omega_\ell, & \omega_\ell < \Omega_{\ell c}, \\ 0, & \omega_\ell > \Omega_{\ell c}, \end{cases} \quad (2.27)$$

nos permitem reescrever a Eq. (2.25) como

$$\begin{aligned}\alpha_{\ell R}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_{\ell c}} d\omega_{\ell} \eta_{\ell} \omega_{\ell} \coth(\omega_{\ell} \hbar \beta / 2) \cos(\omega_{\ell} t), \\ \alpha_{\ell I}(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_{\ell c}} d\omega_{\ell} \eta_{\ell} \omega_{\ell} \sin(\omega_{\ell} t) = \frac{\eta_{\ell}}{\pi t} \left(\Omega_{\ell c} \cos(\Omega_{\ell c} t) - \frac{\sin(\Omega_{\ell c} t)}{t} \right).\end{aligned}\quad (2.28)$$

Como estamos interessados em escalas de tempo muito maiores que os valores típicos $1/\Omega_{\ell c}$, segue que $\sin(\Omega_{\ell c} t)/\pi t \approx \delta(t)$ e, conseqüentemente

$$\begin{aligned}\int_0^t d\tau \frac{\sin(\Omega_{\ell c} \tau)}{\pi \tau} [x_{\ell}(\tau) - y_{\ell}(\tau)] &\approx 0, \\ \int_0^{\tau} dt [\dot{x}_{\ell}(t) + \dot{y}_{\ell}(t)] \frac{\sin[\Omega_{\ell c}(\tau - t)]}{\pi(\tau - t)} &\approx \frac{\dot{x}_{\ell}(\tau) + \dot{y}_{\ell}(\tau)}{2}.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Com estas aproximações, o propagador torna-se

$$\begin{aligned}J(\{x_{\ell}\}, \{y_{\ell}\}, t; \{x'_{\ell}\}, \{y'_{\ell}\}, 0) &= \exp \left[-i \sum_{\ell} \frac{\gamma_{\ell} \mu_{\ell \ell}}{2\hbar} (x_{\ell}^2 - x_{\ell}^{\prime 2} - y_{\ell}^2 + y_{\ell}^{\prime 2}) \right] \\ &\times \int D\{x_{\ell}\} D\{y_{\ell}\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\sum_{\ell} (\tilde{\mathcal{S}}_{S_{\ell}}[x_{\ell}] - \tilde{\mathcal{S}}_{S_{\ell}}[y_{\ell}]) + \mathcal{S}_{S_1/S_2}[\{x_{\ell}\}] - \mathcal{S}_{S_1/S_2}[\{y_{\ell}\}] \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ - \sum_{\ell} \frac{\gamma_{\ell} \mu_{\ell \ell}}{\hbar} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} dt' [x_{\ell}(\tau) - y_{\ell}(\tau)] [x_{\ell}(t') - y_{\ell}(t')] \right. \right. \\ &\left. \left. \times \int_0^{\Omega_{\ell c}} d\omega_{\ell} \omega_{\ell} \coth(\omega_{\ell} \hbar \beta_{\ell} / 2) \cos[\omega_{\ell}(\tau - t')] - i \int_0^t d\tau [x_{\ell}(\tau) \dot{y}_{\ell}(\tau) - y_{\ell}(\tau) \dot{x}_{\ell}(\tau)] \right] \right\},\end{aligned}\quad (2.30)$$

onde definimos a constante de relaxação $\gamma_{\ell} = \eta_{\ell}/2\mu_{\ell \ell}$ para ambos os acoplamentos sistema-reservatório, além das ações renormalizadas

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}_{S_{\ell}}[x_{\ell}] &= \int_0^t d\tau \left[\frac{\mu_{\ell \ell}}{2} \dot{x}_{\ell}^2 - \tilde{V}_{\ell}(x_{\ell}) \right], \\ \mathcal{S}_{S_1/S_2}[\{x_{\ell}\}] &= - \int_0^t d\tau \left[\lambda_{11} x_1 x_2 + \mu_{12} (\dot{x}_1 - \lambda_{21} x_2) (\dot{x}_2 - \lambda_{12} x_1) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{12} \mu_{22} x_1 \left(\dot{x}_2 - \frac{\lambda_{12}}{2} x_1 \right) + \lambda_{21} \mu_{11} x_2 \left(\dot{x}_1 - \frac{\lambda_{21}}{2} x_2 \right) \right],\end{aligned}\quad (2.31)$$

com expressões similares para as variáveis y_{ℓ} . Os potenciais renormalizados $\tilde{V}_{\ell}(x_{\ell}) = m_{\ell} [\omega_{\ell}^2 - (\Delta\omega_{\ell})^2] x_{\ell}^2/2$, seguem dos acoplamentos sistema-reservatório, que induzem os *shifts* $(\Delta\omega_{\ell})^2 = 2\eta_{\ell}\Omega_{\ell c}/\pi m_{\ell}$. Sendo assim, podemos definir uma frequência renormalizada (6), dada por $\tilde{\omega}_{\ell}^2 = \omega_{\ell}^2 - (\Delta\omega_{\ell})^2$.

Baseados no resultado de que a integral funcional para uma evolução temporal infinitesimal aproxima-se como (6, 58)

$$\int Dq \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}\right) \approx \frac{1}{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}\right), \quad (2.32)$$

temos que a evolução do operador densidade reduzido $\tilde{\rho}$ sob um intervalo de tempo infinitesimal entre t e $t + \varepsilon$, com $\varepsilon \rightarrow 0$, partindo da Eq. (2.20), se dá por

$$\tilde{\rho}(\{x_\ell\}, \{y_\ell\}, t + \varepsilon) = \int d\{x'_\ell\} d\{y'_\ell\} J(\{x_\ell\}, \{y_\ell\}, t + \varepsilon; \{x'_\ell\}, \{y'_\ell\}, t) \tilde{\rho}(\{x'_\ell\}, \{y'_\ell\}, t). \quad (2.33)$$

Também consideramos o limite de altas temperaturas, onde $k_B T_\ell \gg \hbar\omega_\ell$ (para ambas as frequências dos banhos $\omega_\ell \ll \Omega_{\ell c}$), que permite soluções analíticas para a integral na variável ω_ℓ , definindo o propagador J . Além disso, usamos, para qualquer função F , as aproximações $\dot{x}_\ell \approx \beta_{1\ell}/\varepsilon$, $\dot{y}_\ell \approx \beta_{2\ell}/\varepsilon$, e

$$\int_t^{t+\varepsilon} d\tau F[x_\ell(\tau)] \approx \varepsilon F\left[\frac{x_\ell + x'_\ell}{2}\right], \quad (2.34)$$

onde definimos as variáveis $\beta_{1\ell} = x_\ell - x'_\ell$ e $\beta_{2\ell} = y_\ell - y'_\ell$. Sob as condições acima obtemos, a partir da Eq. (2.30), o propagador

$$\begin{aligned} & J(\{x_\ell\}, \{y_\ell\}, t + \varepsilon; \{x_\ell - \beta_{1\ell}\}, \{y_\ell - \beta_{2\ell}\}, t) \\ = & \mathcal{N} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{\mu_{12}}{\varepsilon} \sum_\ell (-1)^\ell \beta_{\ell 1} \beta_{\ell 2} + \varepsilon (\lambda_{11} + \lambda_{12} \lambda_{21} \mu_{12}) \left[\prod_\ell \left(y_\ell - \frac{\beta_{2\ell}}{2} \right) - \prod_\ell \left(x_\ell - \frac{\beta_{1\ell}}{2} \right) \right] \right. \right. \\ & + \sum_{\ell, \neq \ell'} \lambda_{\ell \ell'} \left\{ \sum_{\ell''} (-1)^{\ell' + \ell''} \mu_{\ell' \ell''} \left[\beta_{2\ell''} \left(y_\ell - \frac{\beta_{2\ell}}{2} \right) - \beta_{1\ell''} \left(x_\ell - \frac{\beta_{1\ell}}{2} \right) \right] \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varepsilon}{2} \lambda_{\ell \ell'} \mu_{\ell' \ell''} \left[\left(x_\ell - \frac{\beta_{1\ell}}{2} \right)^2 + \left(y_\ell - \frac{\beta_{2\ell}}{2} \right)^2 \right] \right\} \right\} \\ & \times \prod_\ell \exp \left\{ \frac{i\mu_{\ell\ell}}{\hbar} \left[\frac{1}{2} (\beta_{1\ell}^2 - \beta_{2\ell}^2) \left(\gamma_\ell + \frac{1}{\varepsilon} \right) - \gamma_\ell (x_\ell - y_\ell) (\beta_{1\ell} + \beta_{2\ell}) \right] \right. \\ & \left. - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left[\tilde{V}_\ell \left(x_\ell - \frac{\beta_{1\ell}}{2} \right) - \tilde{V}_\ell \left(y_\ell - \frac{\beta_{2\ell}}{2} \right) \right] - \frac{2\mu_{\ell\ell}\gamma_\ell k_B T_\ell}{\hbar^2} \varepsilon \left[\left(x_\ell - \frac{\beta_{1\ell}}{2} \right) - \left(y_\ell - \frac{\beta_{2\ell}}{2} \right) \right]^2 \right\}, \quad (2.35) \end{aligned}$$

onde \mathcal{N} é um fator de normalização. Notando que termos oscilando rapidamente no integrando contribuem para a integral somente nas regiões em que $\beta_{\ell k} \approx \sqrt{\varepsilon \hbar / \mu_{12}}$, expandimos ambos os lados da Eq. (2.33) até $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (6). Então, definindo novas variáveis $\beta'_{\ell \ell'} = \beta_{\ell \ell'} + (-1)^\ell \gamma_{\ell'} (x_{\ell'} - y_{\ell'}) \varepsilon$, e mantendo novamente apenas os termos até $\mathcal{O}(\varepsilon)$, obtemos, a partir do termo de ordem zero em ε , o fator de normalização $\mathcal{N} = (2\pi \hbar \varepsilon)^2 / (\mu_{12}^2 - \mu_1 \mu_2)$ e, para o termo de primeira ordem, a

equação de movimento desejada (6), na representação de coordenadas,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = & - \sum_{\ell} \left\{ -i \frac{\hbar}{2m_{\ell}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{\ell}^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_{\ell}^2} \right) + \tilde{\gamma}_{\ell} (x_{\ell} - y_{\ell}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{\ell}} - \frac{\partial}{\partial y_{\ell}} \right) \right. \\
& \left. + i \frac{m_{\ell} \tilde{\omega}_{\ell}^2}{2\hbar} (x_{\ell}^2 - y_{\ell}^2) + \frac{2m_{\ell} \tilde{\gamma}_{\ell} k_B T_{\ell}}{\hbar^2} (x_{\ell} - y_{\ell})^2 \right. \\
& + \sum_{\ell' (\neq \ell)} \left[-i \frac{\hbar \lambda_{22}}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{\ell} \partial x_{\ell'}} - \frac{\partial^2}{\partial y_{\ell} \partial y_{\ell'}} \right) + \lambda_{22} m_{\ell'} \tilde{\gamma}_{\ell'} (x_{\ell'} - y_{\ell'}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{\ell}} - \frac{\partial}{\partial y_{\ell}} \right) \right. \\
& \left. + \lambda_{\ell' \ell} \left(x_{\ell'} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} + y_{\ell'} \frac{\partial}{\partial y_{\ell}} \right) + i \frac{\lambda_{\ell' \ell} m_{\ell} \tilde{\gamma}_{\ell}}{\hbar} (x_{\ell} - y_{\ell}) (x_{\ell'} + y_{\ell'}) + i \frac{\lambda_{11}}{2\hbar} (x_{\ell} x_{\ell'} - y_{\ell} y_{\ell'}) \right] \left. \right\} \tilde{\rho},
\end{aligned} \tag{2.36}$$

onde definimos as taxas de amortecimento efetivas

$$\tilde{\gamma}_{\ell} = \frac{\gamma_{\ell}}{1 - \lambda_{22}^2 m_1 m_2}, \tag{2.37}$$

que aumentam conforme o acoplamento λ_{22} aumenta. A equação de operadores associada à Eq. (2.36) escreve-se como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = & - \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}_i, \tilde{\rho}] + \sum_{\ell} \tilde{\gamma}_{\ell} \left[\left(-\frac{i}{\hbar} [x_{\ell}, \{p_{\ell}, \tilde{\rho}\}] - \frac{2m_{\ell} k_B T_{\ell}}{\hbar^2} [x_{\ell}, [x_{\ell}, \tilde{\rho}]] \right) \right. \\
& \left. - i \frac{m_{\ell}}{\hbar} \sum_{\ell' (\neq \ell)} (\lambda_{22} [x_{\ell}, \{p_{\ell'}, \tilde{\rho}\}] + \lambda_{\ell' \ell} [x_{\ell}, \{x_{\ell'}, \tilde{\rho}\}]) \right],
\end{aligned} \tag{2.38}$$

onde o hamiltoniano \mathbf{H}_i é dado por

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left(\frac{p_{\ell}^2}{m_{\ell}} + m_{\ell} \tilde{\omega}_{\ell}^2 x_{\ell}^2 \right) + \lambda_{11} x_1 x_2 + \lambda_{22} p_1 p_2 + \lambda_{21} p_1 x_2 + \lambda_{12} x_1 p_2. \tag{2.39}$$

Note que, quando desligamos o acoplamento entre os dois osciladores, obtemos da Eq. (2.38) dois osciladores dissipativos independentes, descritos por dois “modelos de Caldeira-Leggett” independentes. Portanto, no caso de reservatórios distintos, não há acoplamento efetivo induzido entre os osciladores.

É importante salientar que a equação mestra geral deduzida na Ref. (59) e também aquela obtida na Ref. (60), onde uma densidade espectral geral é considerada para o reservatório, se reduz à nossa equação mestra, Eq. (2.38), ou àquela do modelo de Caldeira-Leggett, na ausência de acoplamento entre os osciladores, no regime de altas temperaturas e sob reservatórios ôhmicos. Este fato será verificado na próxima seção, quando reescreveremos a equação mestra em termos das coordenadas relativas e coletivas.

2.4.2 Reservatório em Comum

Para o caso em que os sistemas interagem com um reservatório em comum, o funcional de influência, que se escreve como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\{x_\ell\}, \{y_\ell\}] &= \int d\mathbf{X}d\mathbf{X}'d\mathbf{Y}'\rho_R(\mathbf{X}', \mathbf{Y}', 0) \int D\mathbf{X}(\tau)D\mathbf{Y}(\tau) \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\mathcal{S}_R[\mathbf{X}] - \mathcal{S}_R[\mathbf{Y}] + \sum_\ell (\mathcal{S}_{S_\ell/R}[x_\ell, \mathbf{X}] - \mathcal{S}_{S_\ell/R}[y_\ell, \mathbf{Y}]) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

difere daquele para o modelo Caldeira-Leggett por um acoplamento sistema-reservatório adicional. Considerando acoplamentos sistema-reservatório idênticos, ou seja, $C_{1k} = C_{2k} = C_k$, a solução para o funcional de influência, Eq. (2.21), segue diretamente daquela na Ref. (6), e é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\{x_\ell\}, \{y_\ell\}] &= \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \sum_\ell \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt' [x_\ell(\tau) - y_\ell(\tau)] \alpha_R(\tau - t') [x_\ell(t') - y_\ell(t')] \right) \\ &\times \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \sum_\ell \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt' [x_\ell(\tau) - y_\ell(\tau)] \alpha_I(\tau - t') [x_\ell(t') + y_\ell(t')] \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde as partes real e imaginária da função $\alpha(t)$ escrevem-se como

$$\begin{aligned} \alpha_R(t) &= \sum_k \frac{C_k^2}{2m_k\omega_k} \coth(\omega_k\hbar\beta/2) \cos(\omega_k t), \\ \alpha_I(t) &= -\sum_k \frac{C_k^2}{2m_k\omega_k} \sin(\omega_k t). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Definindo uma função espectral

$$\chi(\omega) = \sum_k \frac{\pi C_k^2}{2m_k\omega_k} \delta(\omega - \omega_k), \quad (2.43)$$

como no caso de reservatórios distintos temos, para um reservatório Ôhmico com amortecimento η , limitado por uma frequência de corte Ω_c ,

$$\chi(\omega) = \begin{cases} \eta\omega, & \omega < \Omega_c, \\ 0, & \omega > \Omega_c. \end{cases} \quad (2.44)$$

Efetuada as mesmas aproximações que aquelas do caso de reservatórios distintos, obte-

mos o funcional de influência

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\{x_\ell\}, \{y_\ell\}] = & \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[F(\{x_\ell\}, \{x'_\ell\}, \{y_\ell\}, \{y'_\ell\}) - \frac{\eta\Omega_c}{\pi} \sum_{\ell, \ell'} \int_0^t d\tau (x_\ell(\tau)x_{\ell'}(\tau) - y_\ell(\tau)y_{\ell'}(\tau)) \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu\gamma \int_0^t d\tau \sum_\ell \left(\sum_{\ell'} (x_\ell(\tau)\dot{y}_{\ell'}(\tau) - y_\ell(\tau)\dot{x}_{\ell'}(\tau)) + \sum_{\ell'(\neq\ell)} (x_\ell(\tau)\dot{x}_{\ell'}(\tau) - y_\ell(\tau)\dot{y}_{\ell'}(\tau)) \right) \right] \right\} \\ \times \exp & \left[-\frac{2\mu\gamma}{\pi\hbar} \sum_{\ell, \ell'} \int_0^t d\tau \int_0^\tau dt' [x_\ell(\tau) - y_\ell(\tau)][x_{\ell'}(t') - y_{\ell'}(t')] \int_0^{\Omega_c} d\omega \omega \coth(\omega\hbar\beta/2) \cos[\omega(\tau - t')] \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde

$$F(\{x_\ell\}, \{x'_\ell\}, \{y_\ell\}, \{y'_\ell\}) = \frac{\mu\gamma}{2} \sum_\ell [(x_\ell^2 - x_{\ell'}^2) - (y_\ell^2 - y_{\ell'}^2)]. \quad (2.46)$$

Devemos notar que, após considerarmos $\{C_{\ell k}\} = C_k$, a constante de relaxação para ambos os acoplamentos sistema-reservatório torna-se $\gamma = \eta/2\mu$, o que implica imediatamente em $\{\mu_{\ell\ell}\} = \mu$ e, conseqüentemente $\{m_\ell\} = m$. Para a equação mestra, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = & - \sum_\ell \left\{ -i \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_\ell^2} \right) + i \frac{m\tilde{\omega}_\ell^2}{2\hbar} (x_\ell^2 - y_\ell^2) \right. \\ & + \sum_{\ell'} (x_{\ell'} - y_{\ell'}) \left[\frac{2m\tilde{\gamma}k_B T}{\hbar^2} (x_\ell - y_\ell) + \tilde{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell} - \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) \right] \\ & + \sum_{\ell'(\neq\ell)} \left[-i \frac{\hbar\lambda_{22}}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_{\ell'}} - \frac{\partial^2}{\partial y_\ell \partial y_{\ell'}} \right) + \lambda_{\ell'\ell} \left(x_{\ell'} \frac{\partial}{\partial x_\ell} + y_{\ell'} \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{i}{2\hbar} \tilde{\lambda}_{11} (x_\ell x_{\ell'} - y_\ell y_{\ell'}) + i \frac{m\tilde{\gamma}\lambda_{\ell\ell'}}{\hbar} (x_\ell + y_\ell) \sum_{\ell''} (x_{\ell''} - y_{\ell''}) \right] \right\} \tilde{\rho}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde a constante de relaxação renormalizada $\tilde{\gamma} = \gamma / (1 - m^2\lambda_{22}^2)$ e o parâmetro de acoplamento efetivo $\tilde{\lambda}_{11} = \lambda_{11} - 2\Omega_c\eta/\pi$ são considerados. Semelhante à definição das frequências renormalizadas na Eq. (2.31), incluiremos a correção em λ_{11} . A equação de operadores associada à representação de coordenadas acima escreve-se, então,

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}_{ii}, \tilde{\rho}] - i \frac{m\tilde{\gamma}}{\hbar} \sum_{\ell, \ell'(\neq\ell)} \lambda_{\ell\ell'} [x_{\ell'}, \{x_\ell, \tilde{\rho}\}] - \sum_{\ell, \ell'} \left[i \frac{\tilde{\gamma}}{\hbar} [x_\ell, \{p_{\ell'}, \tilde{\rho}\}] + \frac{2m\tilde{\gamma}k_B T}{\hbar^2} [x_\ell, [x_{\ell'}, \tilde{\rho}]] \right], \quad (2.48)$$

onde o hamiltoniano \mathbf{H}_{ii} é dado por

$$\mathbf{H}_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left(\frac{p_{\ell}^2}{m} + m\varpi_{\ell}^2 x_{\ell}^2 \right) + \lambda_{11}x_1x_2 + \lambda_{22}p_1p_2 + \lambda_{12}x_1p_2 + \lambda_{21}p_1x_2, \quad (2.49)$$

contém as frequências renormalizadas

$$\varpi_{\ell}^2 = \tilde{\omega}_{\ell}^2 + 2\tilde{\gamma}(\lambda_{12}\delta_{\ell 1} + \lambda_{21}\delta_{\ell 2}). \quad (2.50)$$

2.4.2.1 Acoplamento entre os osciladores induzido pelo reservatório

É importante ressaltar que, diferentemente do caso de reservatórios distintos, apresentado na Eq. (2.37), aqui, o reservatório em comum induz um acoplamento efetivo entre ambos os osciladores, mesmo se desligarmos suas interações originais $\{\lambda_{\ell\ell'}\}$. De fato, com $\lambda_{\ell\ell'} = 0$, a Eq. (2.48) simplifica-se como

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\ell} [H_{S_{\ell}}, \tilde{\rho}] - \sum_{\ell, \ell'} \left[i\frac{\gamma}{\hbar} [x_{\ell}, \{p_{\ell'}, \tilde{\rho}\}] + \frac{2m\gamma k_B T}{\hbar^2} [x_{\ell}, [x_{\ell'}, \tilde{\rho}]] \right], \quad (2.51)$$

dando dois modelos de Caldeira-Leggett independentes, para $\ell = \ell'$, além do acoplamento entre os osciladores induzido pelo reservatório, para $\ell \neq \ell'$. Este acoplamento efetivo, para o caso aqui analisado de um reservatório Ôhmico no regime de altas temperaturas consiste, portanto, de um termo dissipativo e outro difusivo, dados por $(\gamma/i\hbar) ([x_1, \{p_2, \rho_{12}\}] + [x_2, \{p_1, \rho_{12}\}])$ e $(2m\gamma k_B T/\hbar^2) [x_{\ell}, [x_{\ell'}, \rho_{12}]]$, respectivamente. Tais termos dissipativo e difusivo acoplam juntos, as variáveis de ambos os osciladores, enquanto que, evidentemente, os termos equivalentes ao modelo de Caldeira-Leggett aplicam-se às variáveis de cada oscilador.

2.5 Soluções das Equações Mestras (2.36) e (2.47)

Nesta seção apresentamos as soluções das equações mestras que governam a dinâmica dos osciladores dissipativos acoplados nos casos de reservatórios distintos e em comum. Estas soluções nos permitirão analisar a dinâmica de coerência e decoerência de estados de superposição preparados em um dos osciladores ou de emaranhados quânticos preparados em ambos os osciladores. Além disso, a forma das soluções aqui apresentadas permite um total entendimento da evolução de tais estados, ampliando a perspectiva das análises de coerência e decoerência dadas pelo modelo de Caldeira-Leggett (8).

2.5.1 Reservatórios Distintos

A introdução das coordenadas coletivas (R_ℓ) e relativas (r_ℓ)

$$R_\ell = \frac{x_\ell + y_\ell}{2}, \quad r_\ell = x_\ell - y_\ell, \quad (2.52)$$

nos permite reescrever a equação mestra, Eq. (2.36) na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \sum_\ell \left\{ -i \frac{\hbar}{m_\ell} \frac{\partial^2}{\partial r_\ell \partial R_\ell} - 2\tilde{\gamma}_\ell r_\ell \frac{\partial}{\partial r_\ell} + i \frac{m_\ell \tilde{\omega}_\ell^2}{\hbar} R_\ell r_\ell - \frac{D_\ell}{\hbar^2} r_\ell^2 \right. \\ \left. - \sum_{\ell' (\neq \ell)} \left[\left(\lambda_{\ell\ell'} R_\ell \frac{\partial}{\partial R_{\ell'}} + \Delta_{\ell'r_{\ell'}} \frac{\partial}{\partial r_{\ell'}} \right) + i\hbar \lambda_{22} \frac{\partial^2}{\partial r_\ell \partial R_{\ell'}} - i \frac{\Gamma_\ell}{\hbar} R_{\ell'} r_\ell \right] \right\} \tilde{\rho}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde os coeficientes de difusão D_ℓ e os parâmetros de acoplamento efetivos Γ_ℓ e Δ_ℓ são dados por

$$\begin{aligned} D_\ell &= 2m_\ell \tilde{\gamma}_\ell k_B T_\ell, \\ \Gamma_\ell &= \lambda_{11} + 2m_\ell \tilde{\gamma}_\ell \sum_{\ell' (\neq \ell)} \lambda_{\ell\ell'}, \\ \Delta_\ell &= 2\lambda_{22} m_\ell \tilde{\gamma}_\ell + \sum_{\ell' (\neq \ell)} \lambda_{\ell\ell'}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Neste ponto, lembramos que a equação mestra geral obtida nas Refs. (59, 60) se reduz à Eq. (2.53) quando desligamos os acoplamentos entre os osciladores e consideramos o limite de altas temperaturas sob reservatórios ômicos. Através da transformada de Fourier parcial

$$\tilde{\rho}(\{K_\ell\}, \{r_\ell\}, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\prod_\ell \int_{-\infty}^{+\infty} dR_\ell e^{-iK_\ell R_\ell} \right) \tilde{\rho}(\{R_\ell\}, \{r_\ell\}, t), \quad (2.55)$$

reduzimos a equação diferencial parcial de segunda ordem, Eq. (2.53) a uma de primeira ordem, dada a seguir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = - \sum_\ell \left\{ \left(2\tilde{\gamma}_\ell r_\ell - \frac{\hbar}{m_\ell} K_\ell \right) \frac{\partial}{\partial r_\ell} + \frac{m_\ell \tilde{\omega}_\ell^2}{\hbar} r_\ell \frac{\partial}{\partial K_\ell} + \frac{D_\ell}{\hbar^2} r_\ell^2 \right. \\ \left. + \sum_{\ell' (\neq \ell)} \left[\left(\frac{\Gamma_{\ell'r_{\ell'}}}{\hbar} - \lambda_{\ell\ell'} K_{\ell'} \right) \frac{\partial}{\partial K_{\ell'}} + (\Delta_{\ell'r_{\ell'}} - \hbar \lambda_{22} K_{\ell'}) \frac{\partial}{\partial r_{\ell'}} \right] \right\} \tilde{\rho}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

cuja solução pode ser obtida por meio do método das características (61–64). Definindo as trajetórias

$$K_\ell = K_\ell(s), \quad r_\ell = r_\ell(s), \quad \text{e } t = t(s), \quad (2.57)$$

obtemos, a partir da equação diferencial parcial, Eq. (2.56), um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas

$$\begin{aligned}\frac{dr_\ell}{ds} &= -\hbar \sum_{\ell'} \left[\lambda_{22} (1 - \delta_{\ell\ell'}) + \frac{1}{m_\ell} \delta_{\ell\ell'} \right] K_{\ell'} + 2\tilde{\gamma}_\ell r_\ell + (\Delta_1 r_1 \delta_{\ell 2} + \Delta_2 r_2 \delta_{\ell 1}), \\ \frac{dK_\ell}{ds} &= \frac{m_\ell \tilde{\omega}_\ell^2}{\hbar} r_\ell + \frac{1}{\hbar} [(\Gamma_2 r_2 - \hbar \lambda_{12} K_2) \delta_{\ell 1} + (\Gamma_1 r_1 - \hbar \lambda_{21} K_1) \delta_{\ell 2}], \\ \frac{d\tilde{\rho}}{ds} &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_\ell D_\ell r_\ell^2 \tilde{\rho}, \\ \frac{dt}{ds} &= 1.\end{aligned}\tag{2.58}$$

As quatro primeiras equações do sistema acima podem ser expressas, em forma matricial, como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ K_1(t) \\ r_2(t) \\ K_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\tilde{\gamma}_1 & -\frac{\hbar}{m_1} & \Delta_2 & -\hbar\lambda_{22} \\ \frac{1}{\hbar} m_1 \tilde{\omega}_1^2 & 0 & \frac{1}{\hbar} \Gamma_2 & -\lambda_{12} \\ \Delta_1 & -\hbar\lambda_{22} & 2\tilde{\gamma}_2 & -\frac{\hbar}{m_2} \\ \frac{\Gamma_1}{\hbar} & -\lambda_{21} & \frac{1}{\hbar} m_2 \tilde{\omega}_2^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ K_1(t) \\ r_2(t) \\ K_2(t) \end{bmatrix},\tag{2.59}$$

onde denotaremos os autovalores da matriz quadrada como Λ_m . Em seguida, vemos que a solução deste sistema de equações acopladas pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} r_1(t) \\ K_1(t) \\ r_2(t) \\ K_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{14} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \eta_{24} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & \eta_{34} \\ \eta_{41} & \eta_{42} & \eta_{43} & \eta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \\ c_4(t) \end{bmatrix},\tag{2.60}$$

onde o autovetor $(\eta_{1n} \ \eta_{2n} \ \eta_{3n} \ \eta_{4n})^T$ está associado ao autovalor Λ_n . Fazendo uso das soluções para $r_\ell(t)$ e daquela para a terceira equação diferencial mostrada nas Eqs. (2.58), dada por

$$\tilde{\rho}(\{K_\ell\}, \{r_\ell\}, t) = \mathcal{B} \exp \left[-\frac{1}{\hbar^2} \sum_\ell D_\ell \int dt r_\ell^2(t) \right],\tag{2.61}$$

onde \mathcal{B} é uma constante, obtemos finalmente, a matriz densidade

$$\tilde{\rho}(\{K_\ell\}, \{r_\ell\}, t) = \tilde{\rho}(\{K'_\ell\}, \{r'_\ell\}, 0) e^{-Z(\{K_\ell\}, \{r_\ell\}, t)/\hbar^2},\tag{2.62}$$

com

$$Z(\{K_\ell\}, \{r_\ell\}, t) = \sum_{m,n} c_m(t) c_n(t) \frac{D_1 \eta_{1m} \eta_{1n} + D_2 \eta_{3m} \eta_{3n}}{\Lambda_m + \Lambda_n} (1 - e^{-(\Lambda_m + \Lambda_n)t}), \quad (2.63)$$

e $c_m(t) = c_m(0) e^{\Lambda_m t}$, onde os coeficientes $c_m(0)$ são determinados pelas condições iniciais.

O próximo passo é calcular a transformada de Fourier inversa da Eq. (2.55). Para isto, vamos considerar que os osciladores harmônicos acoplados sejam preparados, em $t = 0$, numa superposição geral de funções Gaussianas, de larguras $\{\sigma_\ell\}$, ou seja

$$\Psi(\{x_\ell\}, 0) = \sum_{\ell} P_{\ell} \prod_{\ell'} e^{-[(x_{\ell'} + q_{\ell'\ell})/\sigma_{\ell'}]^2}, \quad (2.64)$$

que inclui ambos os casos, o de estados separáveis e o de estados emaranhados, a depender da escolha dos centros das Gaussianas, $q_{1\ell}$ e $q_{2\ell}$, para as partículas 1 e 2. Reescrevendo a matriz densidade para esta função de onda, dada por

$$\tilde{\rho}(\{x_\ell\}, \{y_\ell\}, 0) = \sum_{\ell, \ell'} P_{\ell} P_{\ell'} \prod_{\ell''} e^{-[(x_{\ell''} + q_{\ell''\ell})/\sigma_{\ell''}]^2} e^{-[(y_{\ell''} + q_{\ell''\ell'})/\sigma_{\ell''}]^2}, \quad (2.65)$$

com as coordenadas coletivas e relativas definidas na Eq. (2.52), e calculando sua transformada de Fourier, obtemos

$$\tilde{\rho}(\{K'_\ell\}, \{r'_\ell\}, 0) = \frac{1}{4} \sum_{\ell', \ell''} P_{\ell'} P_{\ell''} \prod_{\ell} \sigma_{\ell} \exp \left\{ -2 \left[\left(\frac{\sigma_{\ell}}{4} K'_\ell \right)^2 - i (q_{\ell\ell'} + q_{\ell\ell''}) K'_\ell + \left(\frac{q_{\ell\ell'} - q_{\ell\ell''} + r'_\ell}{2\sigma_{\ell}} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.66)$$

Portanto, dos resultados nas Eqs. (2.62) e (2.66), obtemos a solução geral da equação mestra transformada, Eq. (2.56)

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\{K_\ell\}, \{r_\ell\}, t) &= \mathcal{R}(\{K_\ell\}, \{r_\ell\}, t) \sum_{\ell, \ell'} \Upsilon_{\ell\ell'} \exp \left\{ - \left[\theta_{\ell\ell'}^{(1)}(t) r_1 + \theta_{\ell\ell'}^{(2)}(t) K_1 + \theta_{\ell\ell'}^{(3)}(t) r_2 + \theta_{\ell\ell'}^{(4)}(t) K_2 \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ i \left[\varphi_{\ell\ell'}^{(1)}(t) r_1 + \varphi_{\ell\ell'}^{(2)}(t) K_1 + \varphi_{\ell\ell'}^{(3)}(t) r_2 + \varphi_{\ell\ell'}^{(4)}(t) K_2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

que, para $t = 0$, nos dá a condição inicial, Eq. (2.66). Notando que os elementos de matriz ε_{mn} seguem da inversa da matriz composta pelos elementos η_{mn} , definimos as funções

$$\mathcal{R}(\{K_\ell\}, \{r_\ell\}, t) = \exp \left\{ - \left[\Phi_{11}(t)r_1^2 + \Phi_{33}(t)r_2^2 + \Phi_{13}(t)r_1r_2 + \Phi_{12}(t)r_1K_1 + \Phi_{14}(t)r_1K_2 \right. \right. \\ \left. \left. + \Phi_{22}(t)K_1^2 + \Phi_{44}(t)K_2^2 + \Phi_{24}(t)K_1K_2 + \Phi_{23}(t)r_2K_1 + \Phi_{34}(t)r_2K_2 \right] \right\},$$

$$\Upsilon_{\ell\ell'} = \frac{1}{4} P_\ell P_{\ell'} \prod_{\ell''} \sigma_{\ell''} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{q_{\ell''\ell} - q_{\ell''\ell'}}{\sigma_{\ell''}} \right)^2 \right], \\ \theta_{\ell\ell'}^{(k)}(t) = (-1)^{\ell+1} \sum_{j=1}^4 \left(\frac{q_{1\ell} - q_{1\ell'}}{\sigma_1^2} \eta_{1j} + \frac{q_{2\ell} - q_{2\ell'}}{\sigma_2^2} \eta_{3j} \right) \varepsilon_{jk} e^{-\Lambda_j t}, \\ \varphi_{\ell\ell'}^{(k)}(t) = (-1)^{\ell+1} \sum_{j=1}^4 \left(\frac{q_{1\ell} + q_{1\ell'}}{2} \eta_{2j} + \frac{q_{2\ell} + q_{2\ell'}}{2} \eta_{4j} \right) \varepsilon_{jk} e^{-\Lambda_j t}, \quad (2.68)$$

onde as funções $\Phi_{kk'}(t)$ são dadas por

$$\Phi_{kk'}(t) = \sum_{i,j=1(j \geq i)}^4 (-1)^{i+j} 2^{-\delta_{ij}} \left[\left(\frac{\eta_{1i}\eta_{1j}}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_1^2}{4} \eta_{2i}\eta_{2j} + \frac{\eta_{3i}\eta_{3j}}{\sigma_2^2} + \frac{\sigma_2^2}{4} \eta_{4i}\eta_{4j} \right) e^{-(\Lambda_i + \Lambda_j)t} \right. \\ \left. + 2\zeta_{ij} (1 - e^{-(\Lambda_1 + \Lambda_2)t}) \right] [\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk'} - (1 - \delta_{kk'}) \varepsilon_{ik'}\varepsilon_{jk}], \quad (2.69)$$

com

$$\zeta_{ij} = \frac{D_1 \eta_{1i} \eta_{1j} + D_2 \eta_{3i} \eta_{3j}}{\Lambda_i + \Lambda_j}. \quad (2.70)$$

O próximo e último passo é calcular a transformada de Fourier inversa da Eq. (2.67). Neste ponto, observamos que é recomendável escrever a matriz densidade $\tilde{\rho}(\{R_\ell\}, \{r_\ell\}, 0)$ em sua forma inicial normalizada, obtida pela transformação de coordenadas da Eq. (2.65):

$$\tilde{\rho}(\{R_\ell\}, \{r_\ell\}, 0) = \left\{ \pi \sigma_1 \sigma_2 \left[1 + \prod_{\ell} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{q_{\ell 1} - q_{\ell 2}}{\sigma_{\ell}} \right)^2 \right] \right] \right\}^{-1} \\ \times \sum_{\ell', \ell''} \exp \left[- \sum_{\ell} \frac{(q_{\ell\ell'} - q_{\ell\ell''} + r_{\ell})^2 + (q_{\ell\ell'} + q_{\ell\ell''} + 2R_{\ell})^2}{2\sigma_{\ell}^2} \right]. \quad (2.71)$$

As duas primeiras exponenciais na Eq. (2.71), associadas a $\ell = \ell'$, representam os elementos diagonais de $\tilde{\rho}(\{R_\ell\}, \{r_\ell\}, 0)$, que estão associados às amplitudes de probabilidade do sistema, enquanto que a terceira e a quarta exponenciais, associadas a $\ell \neq \ell'$, representam os elementos não-diagonais, associados à coerência de fase. Depois do acoplamento súbito entre os sistemas e seus reservatórios, é esperado que os elementos da diagonal tendam à origem do sistema de coordenadas, devido aos mecanismos dissipativos, enquanto que os elementos não-diagonais devem desaparecer de maneira contínua, devido à injeção de ruído ao sistema. Portanto, mantendo

exatamente a mesma forma da matriz densidade inicial, Eq. (2.71), após sua evolução temporal, é possível verificar diretamente tal dinâmica esperada, simplificando nossos cálculos sobre os efeitos da decoerência. Sob esta perspectiva, obtemos a solução final

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\{R_\ell\}, \{r_\ell\}, t) = & \left\{ 4\pi\Sigma(t) \left[1 + \prod_\ell \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{q_{\ell 1} - q_{\ell 2}}{\sigma_\ell} \right)^2 \right] \right] \right\}^{-1} \\ & \times \sum_{\ell, \ell'} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_\ell (1 - \delta_{\ell\ell'}) \left(\frac{q_{\ell 1} - q_{\ell 2}}{\sigma_\ell} \right)^2 [1 - \Gamma(t)] \right\} \exp \left[-\frac{1}{2} \Xi_{\ell\ell'}(\{R_\ell\}, \{r_\ell\}, t) + i\Theta_{\ell\ell'}(\{R_\ell\}, \{r_\ell\}, t) \right], \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde as funções $\Xi_{mn}(\{R_\ell\}, \{r_\ell\}, t)$, que levam em conta a dinâmica dos elementos diagonais e não-diagonais são dadas por

$$\begin{aligned} \Xi_{mn}(\{R_\ell\}, \{r_\ell\}, t) = & \sum_{\ell, \ell'} \left\{ 2^{\delta_{\ell\ell'}+1} (-1)^{\ell+\ell'} \frac{R_\ell + \theta_{mn}^{(2\ell)}(t)}{\Sigma_{\ell\ell'}(t)} \frac{R_{\ell'} + \theta_{mn}^{(2\ell')}(t)}{\Sigma_{\ell'\ell}(t)} \right. \\ & \left. + 2^{\delta_{\ell\ell'}-1} \frac{r_\ell - [\sigma_\ell^2(t)\vartheta_\ell(t)]^{\delta_{\ell\ell'}}}{\sigma_{\ell\ell'}(t)} \frac{r_{\ell'} - [\sigma_{\ell'}^2(t)\vartheta_{\ell'}(t)]^{\delta_{\ell\ell'}}}{\sigma_{\ell'\ell}(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

enquanto que as funções

$$\begin{aligned} \Theta_{mn}(\{R_\ell\}, \{r_\ell\}, t) = & \sum_\ell \left\{ 2 [R_\ell + \theta_{mn}^{(2\ell)}(t)] \left[(-2)^{\delta_{\ell 1}} \frac{\Phi_{12}(t)r_1 + \Phi_{23}(t)r_2 + \varphi_{mn}^{(2)}(t)}{\Sigma_{\ell 1}^2(t)} \right. \right. \\ & \left. \left. + (-2)^{\delta_{\ell 2}} \frac{\Phi_{14}(t)r_1 + \Phi_{34}(t)r_2 + \varphi_{mn}^{(4)}(t)}{\Sigma_{\ell 2}^2(t)} \right] + \theta_{mn}^{(2\ell-1)}(t)r_\ell \right\}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

contribuem para uma dinâmica oscilatória. Além disso, temos também, como parte do fator de normalização, a função

$$\Sigma(t) = \sqrt{4\Phi_{44}(t)\Phi_{22}(t) - \Phi_{24}^2(t)}, \quad (2.75)$$

e as funções associadas às larguras dos picos Gaussianos diagonais e não-diagonais

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(t) &= \sqrt{\frac{2\Sigma^2(t)}{\Phi_{44}(t)}}, \\ \Sigma_{22}(t) &= \sqrt{\frac{2\Sigma^2(t)}{\Phi_{22}(t)}}, \\ \Sigma_{12}(t) &= \Sigma_{21}(t) = \sqrt{\frac{2\Sigma^2(t)}{\Phi_{24}(t)}}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

assim como

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(t) &= \sqrt{2} \left[\Phi_{11}(t) - \frac{\Phi_{22}(t)\Phi_{14}^2(t) + \Phi_{44}(t)\Phi_{12}^2(t) - \Phi_{12}(t)\Phi_{14}(t)\Phi_{24}(t)}{\Sigma^2(t)} \right]^{1/2}, \\
\sigma_{22}(t) &= \sqrt{2} \left[\Phi_{33}(t) - \frac{\Phi_{22}(t)\Phi_{34}^2(t) + \Phi_{44}(t)\Phi_{23}^2(t) - \Phi_{23}(t)\Phi_{34}(t)\Phi_{24}(t)}{\Sigma^2(t)} \right]^{1/2}, \\
\sigma_{12}(t) = \sigma_{21}(t) &= \sqrt{2} \left[\Phi_{13}(t) - \frac{[2\Phi_{22}(t)\Phi_{14}(t) - \Phi_{12}(t)\Phi_{24}(t)] \Phi_{34}(t)}{\Sigma^2(t)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{[2\Phi_{44}(t)\Phi_{12}(t) - \Phi_{14}(t)\Phi_{24}(t)] \Phi_{23}(t)}{\Sigma^2(t)} \right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Finalmente, observando a exponencial multiplicando os termos não-diagonais da matriz densidade reduzida, Eq. (2.72), obtemos a função

$$\Gamma(t) = \left[\sum_{\ell} \left(\frac{q_{\ell 1} - q_{\ell 2}}{\sigma_{\ell}} \right)^2 \right]^{-1} \sum_{\ell} \left[\sigma_{\ell}^2(t) \vartheta_{\ell}^2(t) + \sum_{\ell'} 2^{\delta_{\ell\ell'}+1} (-1)^{\ell+\ell'} \frac{\varphi_{12}^{(2\ell)}(t) \varphi_{12}^{(2\ell')}(t)}{\Sigma_{\ell\ell'}^2(t)} \right], \tag{2.78}$$

onde

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(t) &= \varphi_{12}^{(1)}(t) - \frac{[2\Phi_{44}(t)\Phi_{12}(t) - \Phi_{14}(t)\Phi_{24}(t)] \varphi_{12}^{(2)}(t) + [2\Phi_{22}(t)\Phi_{14}(t) - \Phi_{12}(t)\Phi_{24}(t)] \varphi_{12}^{(4)}(t)}{\Sigma^2(t)}, \\
\vartheta_2(t) &= \varphi_{12}^{(3)}(t) - \frac{[2\Phi_{44}(t)\Phi_{23}(t) - \Phi_{34}(t)\Phi_{24}(t)] \varphi_{12}^{(2)}(t) + [2\Phi_{22}(t)\Phi_{34}(t) - \Phi_{23}(t)\Phi_{24}(t)] \varphi_{12}^{(4)}(t)}{\Sigma^2(t)}.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Comparando as matrizes densidade inicial e evoluída, dadas pelas Eqs. (2.71) e (2.72), verificamos, como esperado, o deslocamento de ambos os picos diagonais e não-diagonais em direção à origem das coordenadas. Além desse deslocamento, o acoplamento sistema-reservatório também induz os termos oscilatórios, descritos pela Eq. (2.73).

2.5.1.1 Uma função geral de decaimento dos picos não-diagonais da matriz densidade

Da matriz densidade evoluída na Eq. (2.72), também deduzimos uma expressão geral para o decaimento $\mathcal{D}(t)$ dos picos não-diagonais em função do tempo, representado pela função exponencial

$$\mathcal{D}(t) = \exp \left\{ -2 [1 - \Gamma(t)] \sum_{\ell} [(q_{\ell 1} - q_{\ell 2}) / 2\sigma_{\ell}]^2 \right\}. \tag{2.80}$$

Esta função de decaimento fornece todas as informações relativas à decoerência do estado inicial dos osciladores dissipativos acoplados. Antecipamos que a mesma forma da função de decaimento na Eq. (2.80) aplica-se ao caso de reservatório em comum, a diferença estando na função dependente do tempo $\Gamma(t)$, que é distinta para cada caso, de reservatórios distintos e em comum, conforme será discutido a seguir.

2.5.2 Reservatório em Comum

A solução da equação mestra para o caso em que os osciladores se acoplam a um reservatório em comum é inteiramente análoga àquela para reservatórios distintos. Da definição prévia de acoplamentos sistema-reservatório idênticos $C_{1k} = C_{2k} = C_k$, levando a iguais massas m , taxas de amortecimento γ , e coeficientes de difusão D para ambos os osciladores, a equação mestra, Eq. (2.47), reescrita em termos das coordenadas coletivas e relativas definidas nas Eqs. (2.52), é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = & \left\{ \sum_{\ell} \left[-i \frac{\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial r_{\ell} \partial R_{\ell}} - 2\tilde{\gamma} (1 + m\lambda_{22}) r_{\ell} \frac{\partial}{\partial r_{\ell}} + i \frac{m\varpi_{\ell}^2}{\hbar} R_{\ell} r_{\ell} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{\ell' (\neq \ell)} \left(\lambda_{\ell\ell'} R_{\ell} \frac{\partial}{\partial R_{\ell'}} + \Delta_{\ell\ell'} r_{\ell'} \frac{\partial}{\partial r_{\ell}} + i\hbar\lambda_{22} \frac{\partial^2}{\partial r_{\ell} \partial R_{\ell'}} - i \frac{\Gamma_{\ell}}{\hbar} r_{\ell} R_{\ell'} \right) \right] - \frac{D}{\hbar^2} (r_1 + r_2)^2 \right\} \tilde{\rho}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

onde o coeficiente de difusão D e os parâmetros de acoplamento efetivos Γ_{ℓ} e Δ_{ℓ} escrevem-se

$$\begin{aligned} D &= 2m\tilde{\gamma}k_B T, \\ \Gamma_{\ell} &= \lambda_{11} + 2m\tilde{\gamma} \sum_{\ell' (\neq \ell)} \lambda_{\ell\ell'}, \\ \Delta_{\ell} &= (\lambda_{21}\delta_{\ell 2} + \lambda_{12}\delta_{\ell 1}) + 2m\tilde{\gamma}\lambda_{22}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Seguindo os mesmos passos do caso de reservatórios distintos, que levam ao sistema de

equações diferenciais ordinárias, Eqs. (2.58), obtemos o sistema análogo

$$\begin{aligned}
\frac{dr_\ell}{ds} &= -\hbar \sum_{\ell'} \left[\lambda_{22} (1 - \delta_{\ell\ell'}) + \frac{1}{m} \delta_{\ell\ell'} \right] K_{\ell'} + 2\tilde{\gamma} (1 + m\lambda_{22}) r_\ell + (\Delta_1 r_1 \delta_{\ell 2} + \Delta_2 r_2 \delta_{\ell 1}), \\
\frac{dK_\ell}{ds} &= \frac{m\varpi_\ell^2 r_\ell}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} [(\Gamma_2 r_2 - \hbar\lambda_{12} K_2) \delta_{\ell 1} + (\Gamma_1 r_1 - \hbar\lambda_{21} K_1) \delta_{\ell 2}], \\
\frac{d\tilde{\rho}}{ds} &= -\frac{1}{\hbar^2} D (r_1 + r_2)^2 \tilde{\rho}, \\
\frac{dt}{ds} &= 1.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Como no caso anterior, as primeiras quatro equações dão a forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ K_1(t) \\ r_2(t) \\ K_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\tilde{\gamma}(1 + m\lambda_{22}) & -\frac{\hbar}{m} & \Delta_2 & -\hbar\lambda_{22} \\ \frac{1}{\hbar} m\varpi_1^2 & 0 & \frac{1}{\hbar} \Gamma_2 & -\lambda_{12} \\ \Delta_1 & -\hbar\lambda_{22} & 2\tilde{\gamma}(1 + m\lambda_{22}) & -\frac{\hbar}{m} \\ \frac{1}{\hbar} \Gamma_1 & -\lambda_{21} & \frac{1}{\hbar} m\varpi_2^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(t) \\ K_1(t) \\ r_2(t) \\ K_2(t) \end{bmatrix}. \tag{2.84}$$

Daqui em diante, todos os cálculos seguem da mesma forma que aqueles mostrados anteriormente para o caso de reservatórios distintos, levando à mesma estrutura da solução dada na Eq. (2.72). A diferença é que os elementos da matriz quadrada acima levam a valores de η_{mn} que são diferentes daqueles para o caso de reservatórios distintos. Além disso, a função $Z(\{K_\ell\}, \{r_\ell\}, t)$ torna-se agora

$$Z(\{K_\ell\}, \{r_\ell\}, t) = D \sum_{m,n} c_m(t) c_n(t) \frac{(\eta_{1m} + \eta_{3m})(\eta_{1n} + \eta_{3n})}{\Lambda_m + \Lambda_n} (1 - e^{-(\Lambda_m + \Lambda_n)t}), \tag{2.85}$$

ao invés da expressão dada na Eq. (2.63). Portanto, apesar de termos a mesma forma para a solução da equação mestra, as evoluções da matriz densidade reduzida são diferentes para os casos de reservatórios distintos e em comum. Finalmente, apontamos que a expressão para o decaimento ou decoerência $\mathcal{D}(t)$ dos picos não-diagonais da matriz densidade inicial tem também a mesma estrutura daquela na Eq. (2.80), a única diferença estando na função dependente do tempo $\Gamma(t)$, que difere nos casos de reservatórios distintos e em comum, novamente devido aos valores dos coeficientes η_{mn} .

2.6 Decoerência no modelo duplicado de Caldeira-Leggett

Nesta seção, analisamos o processo de decoerência de três particulares estados emaranhados, preparados em ambos os osciladores em $t = 0$. Estes emaranhamentos, derivados da Eq. (2.64) sob a condição de terem a mesma distância d entre seus picos no espaço de coordenadas x_1x_2 e a mesma energia média inicial $\langle E \rangle = \langle H_{S_1} + H_{S_2} \rangle$, são dados por

$$\begin{aligned}
\Psi^{(1)}(\{x_\ell\}, 0) &= \mathcal{N}^{(1)} \left\{ \exp \left[- \left(x_1 + q_1^{(1)} \right)^2 / \sigma_1^2 \right] \exp \left[- \left(x_2 - q_2^{(1)} \right)^2 / \sigma_1^2 \right] \right. \\
&+ \left. \exp \left[- \left(x_1 + q_2^{(1)} \right)^2 / \sigma_1^2 \right] \exp \left[- \left(x_2 - q_1^{(1)} \right)^2 / \sigma_1^2 \right] \right\}, \\
\Psi^{(2)}(\{x_\ell\}, 0) &= \mathcal{N}^{(2)} \left\{ \exp \left[- \left(x_1 - q_1^{(2)} \right)^2 / \sigma_2^2 \right] \exp \left[- \left(x_2 - q_2^{(2)} \right)^2 / \sigma_2^2 \right] \right. \\
&+ \left. \exp \left[- \left(x_1 - q_2^{(2)} \right)^2 / \sigma_2^2 \right] \exp \left[- \left(x_2 - q_1^{(2)} \right)^2 / \sigma_2^2 \right] \right\}, \\
\Psi^{(3)}(\{x_\ell\}, 0) &= \mathcal{N}^{(3)} \left\{ \exp \left[- \left(x_1 + q_1^{(3)} \right)^2 / \sigma_3^2 \right] \exp \left[- \left(x_2 + q_2^{(3)} \right)^2 / \sigma_3^2 \right] \right. \\
&+ \left. \exp \left[- \left(x_1 - q_1^{(3)} \right)^2 / \sigma_3^2 \right] \exp \left[- \left(x_2 - q_2^{(3)} \right)^2 / \sigma_3^2 \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

A escolha de iguais energias médias $\langle E \rangle$ e iguais distâncias d segue do fato de que o processo de decoerência depende da energia, das distâncias entre os componentes da superposição e do fator de amortecimento, definindo o acoplamento sistema-reservatório (5). É bem conhecido que o tempo de decoerência é inversamente proporcional à energia, à distância d e ao fator de amortecimento. Os estados acima diferem uns dos outros somente pela posição de seus picos no espaço de coordenadas x_1x_2 . Enquanto ambos os picos de $\Psi_{12}^{(1)}(\{x_\ell\}, 0)$ ($\Psi_{12}^{(2)}(\{x_\ell\}, 0)$) estão posicionados no quarto (primeiro) quadrante, aqueles do estado $\Psi_{12}^{(3)}(\{x_\ell\}, 0)$ estão posicionados um no primeiro e outro no terceiro quadrante do espaço x_1x_2 . Além disso, $\Psi_{12}^{(2)}(\{x_\ell\}, 0)$ pode ser obtido de $\Psi_{12}^{(1)}(\{x_\ell\}, 0)$ através de uma rotação no espaço x_1x_2 e $\Psi_{12}^{(3)}(\{x_\ell\}, 0)$ requer, além de uma rotação, uma operação de deslocamento sobre $\Psi_{12}^{(1)}(\{x_\ell\}, 0)$.

Analisamos o tempo de decoerência dos emaranhamentos acima para os casos de reservatórios distintos e em comum. Observamos, por comparação, que a análise da decoerência nas Refs. (26, 29–31, 37), centrada em reservatórios no zero absoluto, mostra que a taxa de decoerência para o caso de um reservatório em comum é atenuada quando comparada àquela do caso de reservatórios distintos. Entretanto, a presente análise é baseada no cenário oposto, do limite

de altas temperaturas, de forma que não esperamos obter resultados similares àqueles nas Refs. (26, 29–31, 37).

Como a taxa de decoerência é dada pela Eq. (2.80), nas Figs. 1, 2 e 3, plotamos $\mathcal{D}(t)$ em função de $\gamma_1 t$ para os estados $\Psi_{12}^{(1)}$, $\Psi_{12}^{(2)}$ e $\Psi_{12}^{(3)}$, respectivamente. Nas partes (a) e (b) das Figs. 1 e 2, plotamos a taxa de decoerência $\mathcal{D}(t)$ para os casos de reservatórios distintos e em comum, respectivamente. Sob constantes unitárias $\hbar, k_B = 1$, massas ($m_1 = m_2 = 1$), frequência $\tilde{\omega}_1 = 1$, e larguras $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, fixamos as magnitudes $T_1 = T_2 = 10^3 \hbar \tilde{\omega}_1 / k_B$ e $q_1^{(1)} = q_2^{(2)} = 2q_2^{(1)} = 2q_1^{(2)} = 10\sigma_1$. Também consideramos o regime de parâmetros onde $\gamma_1 = \gamma_2 \ll \{\lambda_{\ell\ell'}\} < \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2/2$, com $\gamma_1/\tilde{\omega}_1 = 10^{-3}$. Sob tais valores, a energia média $\langle E \rangle$ e a distância d associadas aos estados em (2.86) tornam-se $\langle E \rangle \approx 158 \hbar \tilde{\omega}_1$ e $d = 5\sqrt{2}\sigma_1$. Para termos os mesmos valores de $\langle E \rangle$ e d para os três estados, consideramos ainda que $\sigma_1 = 12\sigma_3$, além da relação $q_1^{(3)} = \sqrt{3/2}q_2^{(3)} = \sqrt{15/2}\sigma_1$.

Para comparação, a linha sólida espessa em todas as três figuras representa o tempo de decoerência do estado de superposição

$$\Psi(x, 0) = \mathcal{N} \left\{ \exp[-(x+q)^2/\sigma^2] + \exp[-(x-q)^2/\sigma^2] \right\}, \quad (2.87)$$

preparado em um dos osciladores, desacoplado do outro. Tal estado apresenta os mesmos valores estabelecidos acima para a energia média $\langle E \rangle$ e distância d entre seus picos no espaço das coordenadas x . Para este fim, fixamos as relações $q = 5\sigma_1/\sqrt{2}$ e $\sigma = 6 \times 10^{-2}\sigma_1$. Portanto, a linha sólida espessa descreve o processo de decoerência de um estado de superposição no problema de Caldeira-Leggett.

Em todas as três figuras, a linha sólida (tracejada) e tracejada-pontilhada (pontilhada) descrevem o processo de decoerência quando consideramos reservatórios distintos (em comum) e o acoplamento entre os osciladores dado por $\lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{22}p_1p_2$ e $\lambda_{12}q_1p_2 + \lambda_{21}q_2p_1$, respectivamente, com $\lambda_{\ell\ell'} = 0.1$. Ambos os acoplamentos $\lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{22}p_1p_2$ e $\lambda_{12}q_1p_2 + \lambda_{21}q_2p_1$, quando descritos em termos dos operadores de aniquilação (criação) usuais a_1, a_2 (a_1^\dagger, a_2^\dagger), correspondem aos termos girante $a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger$ e contra-girante $i(a_1 a_2 - a_1^\dagger a_2^\dagger)$, respectivamente. Observamos que a taxa de decaimento das curvas nas Figs. 1 e 2 (a e b) estão em torno daquela associada ao estado tipo *gato de Schrödinger* para ambos os casos de reservatórios distintos e em comum. Portanto, o caso de um reservatório em comum não apresenta vantagens sobre aquele de reservatórios distintos aqui, como verificado para reservatórios no zero absoluto (26, 29–31, 37).

Considerando agora a Fig. 3, observamos que todas as curvas presentes decaem à taxas maiores que aquelas nas Figs. 1 e 2. Além disso, os decaimentos das curvas associadas

ao acoplamento $\lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{22}p_1p_2$ são ainda maiores que aqueles associados ao acoplamento $\lambda_{12}q_1p_2 + \lambda_{21}q_2p_1$. Este comportamento segue da Eq. (2.37), que nos mostra que quanto maior for o valor do parâmetro de acoplamento λ_{22} , maior será a taxa de amortecimento efetiva $\tilde{\gamma}_\ell$. A mesma explicação se aplica à Fig. 4, onde as mesmas curvas da Fig. 1 são apresentadas acoplamentos maiores $\lambda_{\ell\ell'} = 0.5$. Observamos que os decaimentos das curvas associadas ao acoplamento $\lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{22}p_1p_2$ são significativamente maiores que aqueles associados ao acoplamento $\lambda_{12}q_1p_2 + \lambda_{21}q_2p_1$, assim como na Fig. 3. Nas Figs. 1 e 2, este efeito advindo da relação entre λ_{22} e $\tilde{\gamma}_\ell$ é obscurecido, fazendo com que as curvas de decaimento associadas ao acoplamento $\lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{22}p_1p_2$ sejam similares às aquelas associadas ao acoplamento $\lambda_{12}q_1p_2 + \lambda_{21}q_2p_1$.

Diferentemente dos trabalhos nas Refs. (26, 29–31, 37), onde as taxas de decaimento foram determinadas principalmente pela hipótese de reservatórios distintos ou em comum, aqui, a diferença entre os decaimentos vêm dos diferentes mecanismos de acoplamento entre os osciladores, $\lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{22}p_1p_2$ ou $\lambda_{12}q_1p_2 + \lambda_{21}q_2p_1$. A razão para isto é que as Refs. (26, 29–31, 37) aplicam-se a sistemas com reservatórios no zero absoluto, onde o acoplamento entre os osciladores induzido pelo reservatório em comum tende a decrescer as taxas de decoerência. O mesmo efeito do controle de coerência é também obtido nas Refs. (26, 29–31, 37) considerando que os osciladores da rede estejam fortemente acoplados um ao outro. Especialmente na Ref. (26) é mostrado que a emergência de SLD e SLR vem das situações em que toda a rede interage com um reservatório em comum, ou quando cada um dos osciladores da rede, fortemente acoplados uns aos outros, interage com seu próprio reservatório. O presente trabalho, entretanto, aplica-se ao regime de altas temperaturas, onde, como foi demonstrado nas Figs. (2.1), (2.2) e (2.3), a interação induzida pelo reservatório em comum é completamente obscurecida pelos efeitos de altas temperaturas. Deste fato, podemos esperar que o regime de altas temperaturas proíba a emergência de SLD e SLR, ao menos em uma rede com um número pequeno de osciladores, como neste caso.

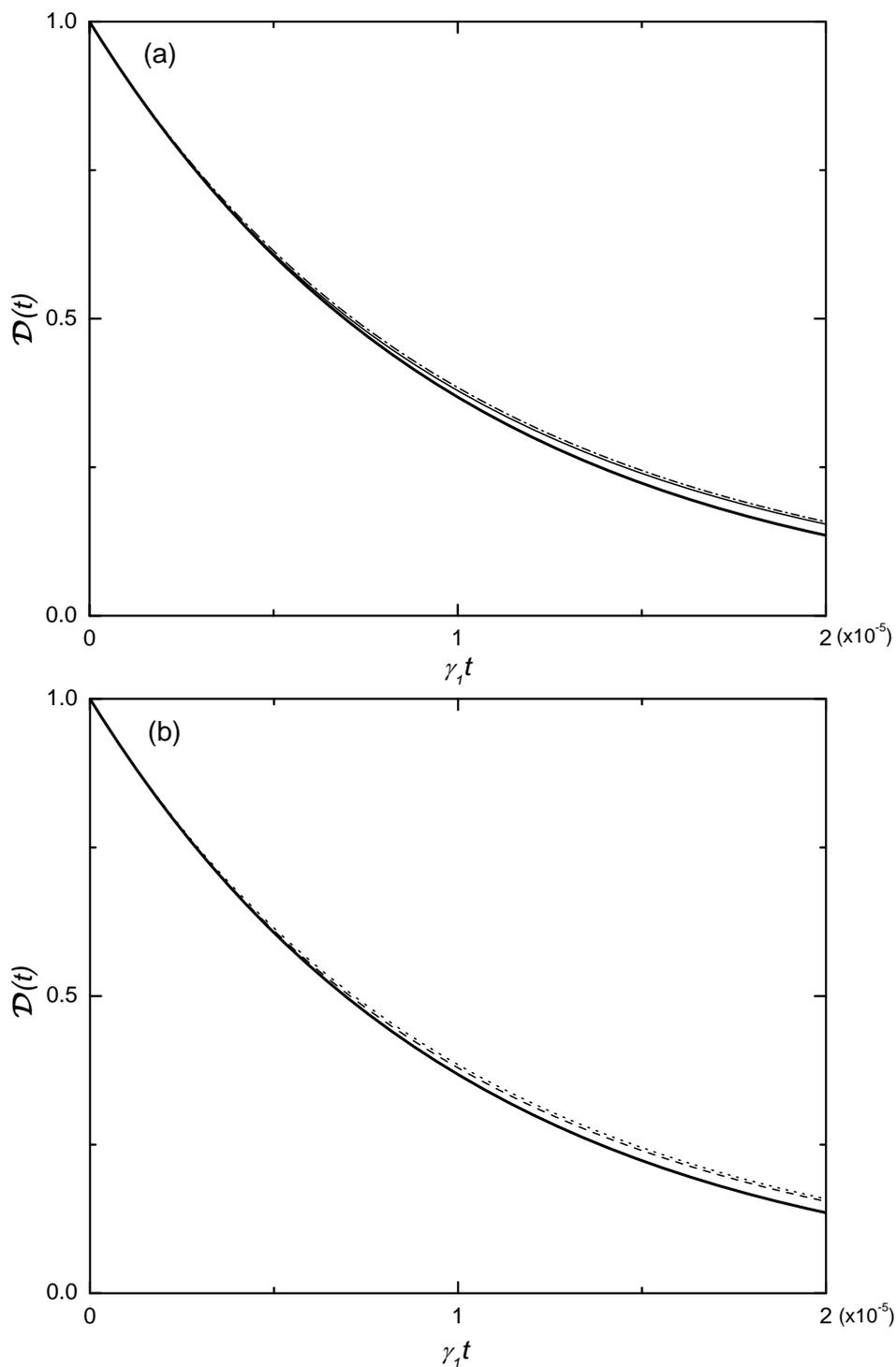


Fig. 1 - Decaimento ou decoerência $\mathcal{D}(t)$ em função de $\gamma_1 t$ para o estado $\Psi_{12}^{(1)}$ na Eq. (2.86), considerando os casos de (a) reservatórios distintos e (b) reservatório em comum. A linha sólida mais espessa descreve o processo de decoerência do estado tipo *gato de Schrödinger* $\Psi(x, 0)$ na Eq. (2.87), preparado em um único oscilador dissipativo. As linhas sólida (tracejada) e tracejada-pontilhada (pontilhada) descrevem o processo de decoerência de $\Psi_{12}^{(1)}$ quando considerados reservatórios distintos (em comum) e o acoplamento entre os osciladores dado por $\lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{22}p_1p_2$ e $\lambda_{12}q_1p_2 + \lambda_{21}q_2p_1$, respectivamente, com $\lambda_{\ell\ell'} = 0.1$.

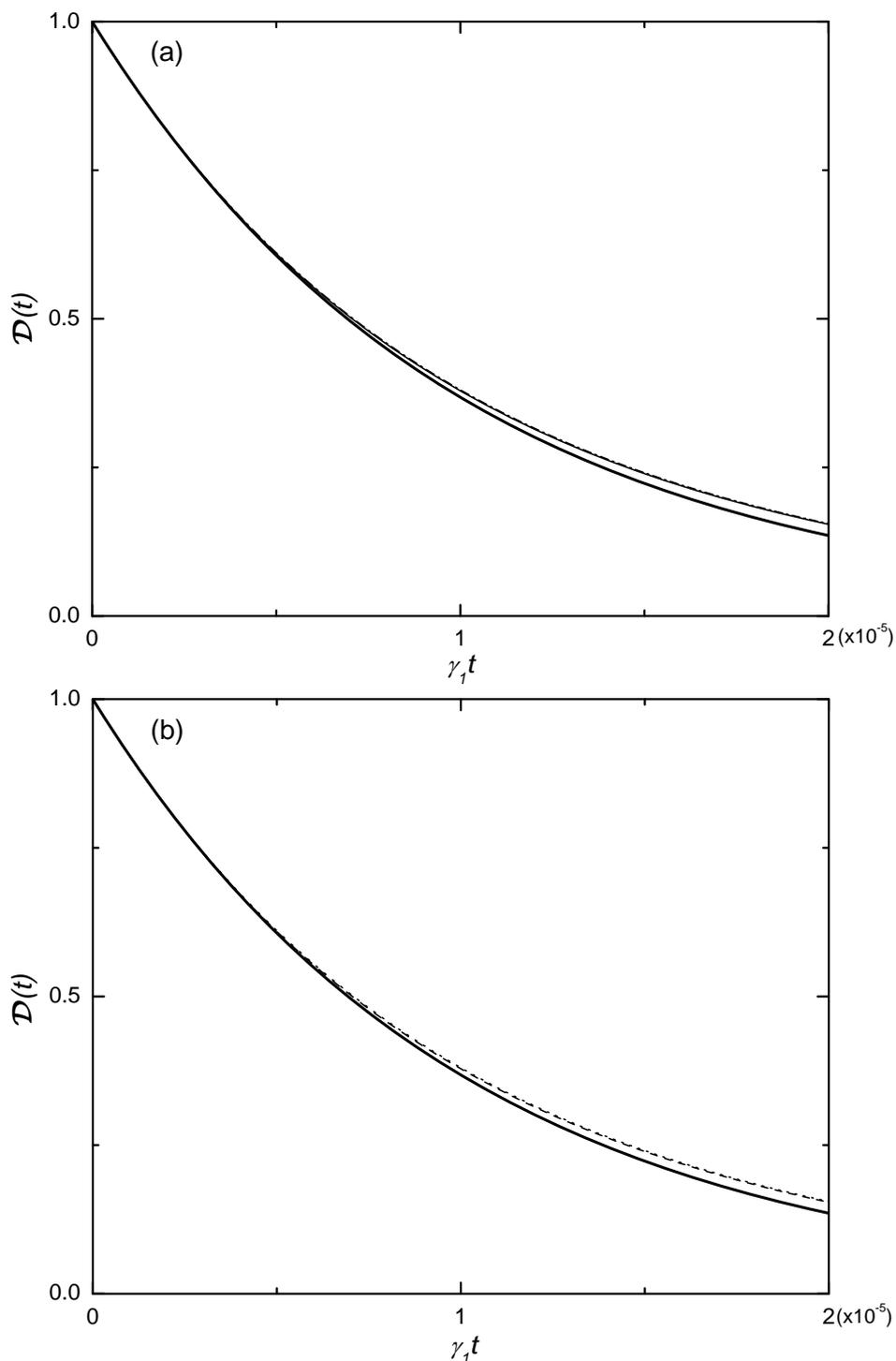


Fig. 2 - Decaimento ou decoerência $\mathcal{D}(t)$ em função de $\gamma_1 t$ para o estado $\Psi_{12}^{(2)}$ na Eq. (2.86), considerando os casos de (a) reservatórios distintos e (b) reservatório em comum. A linha sólida mais espessa descreve o processo de decoerência do estado tipo *gato de Schrödinger* $\Psi(x, 0)$ na Eq. (2.87), preparado em um único oscilador dissipativo. As linhas sólida (tracejada) e tracejada-pontilhada (pontilhada) descrevem o processo de decoerência de $\Psi_{12}^{(2)}$ quando considerados reservatórios distintos (em comum) e o acoplamento entre os osciladores dado por $\lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{22}p_1p_2$ e $\lambda_{12}q_1p_2 + \lambda_{21}q_2p_1$, respectivamente, com $\lambda_{\ell\ell'} = 0.1$.

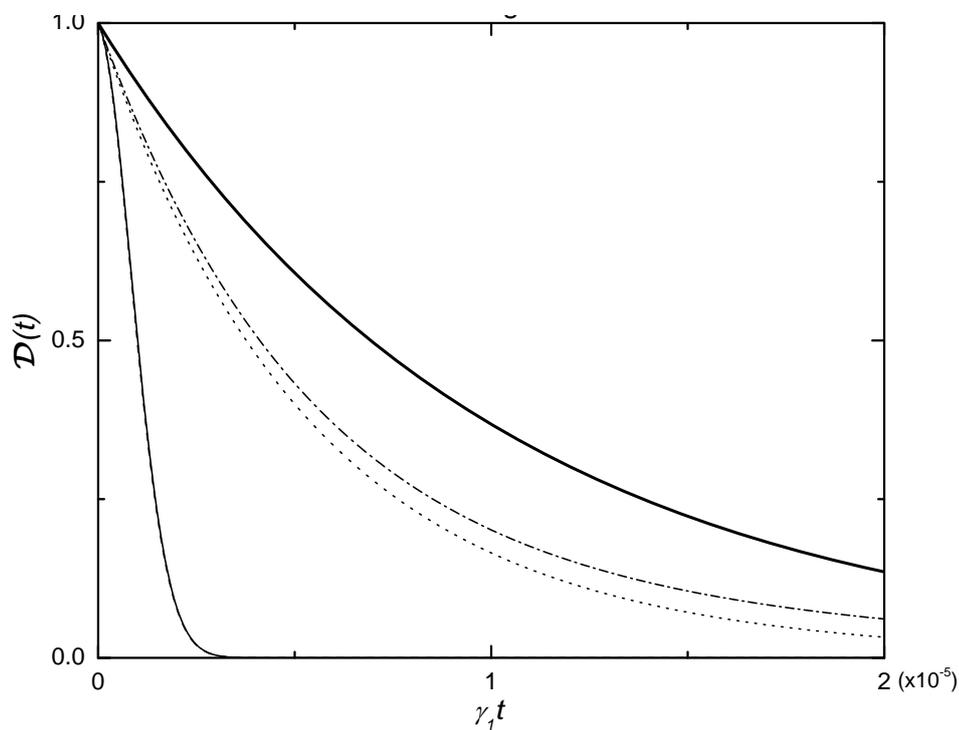


Fig. 3 - Decaimento ou decoerência $\mathcal{D}(t)$ em função $\gamma_1 t$ para o estado $\Psi_{12}^{(3)}$ na Eq. (2.86), considerando os casos de reservatórios distintos e reservatório em comum. A linha sólida espessa descreve o processo de decoerência do estado tipo *gato de Schrödinger* $\Psi(x, 0)$ na Eq. (2.87), preparado em um único oscilador dissipativo. As linhas sólida (tracejada) e tracejada-pontilhada (pontilhada) descrevem o processo de decoerência de $\Psi_{12}^{(3)}$ quando considerados reservatórios distintos (em comum) e o acoplamento entre os osciladores dado por $\lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{22}p_1p_2$ e $\lambda_{12}q_1p_2 + \lambda_{21}q_2p_1$, respectivamente, com $\lambda_{\ell\ell'} = 0.1$.

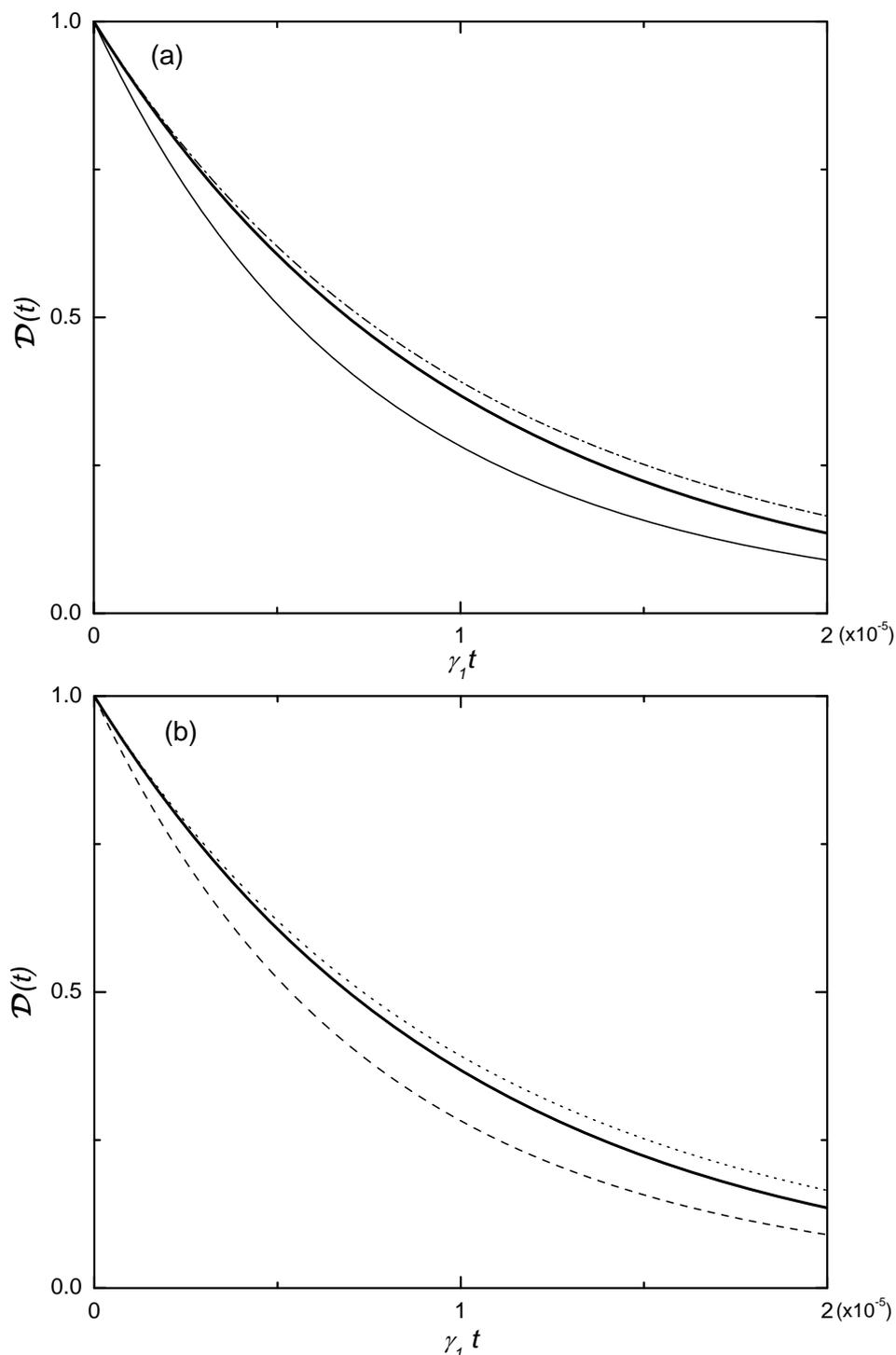


Fig. 4 - Decaimento ou decoerência $\mathcal{D}(t)$ em função de $\gamma_1 t$ para o estado $\Psi_{12}^{(1)}$ na Eq. (2.86), considerando os casos de (a) reservatórios distintos e (b) reservatório em comum. A linha sólida mais espessa descreve o processo de decoerência do estado tipo *gato de Schrödinger* $\Psi(x, 0)$ na Eq. (2.87), preparado em um único oscilador dissipativo. As linhas sólida (tracejada) e tracejada-pontilhada (pontilhada) descrevem o processo de decoerência de $\Psi_{12}^{(1)}$ quando considerado o acoplamento entre os osciladores dado por $\lambda_{11}q_1q_2 + \lambda_{22}p_1p_2$ e $\lambda_{12}q_1p_2 + \lambda_{21}q_2p_1$, respectivamente, com $\lambda_{\ell\ell} = 0.5$.

2.7 Conclusões

Neste trabalho, tratamos o modelo duplicado de Caldeira-Leggett, isto é, a abordagem via integrais de trajetória ao sistema de dois osciladores harmônicos dissipativos interagentes. Obtivemos e resolvemos as equações mestras associadas a duas diferentes situações: quando cada oscilador está acoplado a seu próprio reservatório e quando ambos os osciladores estão acoplados a um reservatório em comum. Em ambos os casos, as equações mestras obtidas consistem de dois modelos de Caldeira-Leggett - descrevendo o mecanismo dissipativo de cada oscilador independentemente - além da dinâmica devida à interação entre ambos os osciladores. Entretanto, no caso de um reservatório em comum, identificamos um acoplamento entre os osciladores induzido pelo reservatório. Tal acoplamento, recentemente apontado em (50), abrange ambos os termos dissipativo e difusivo, que acoplam juntos as variáveis de ambos os osciladores. Estes termos também apontam a perda de energia dos osciladores através de um processo de dissipação conjunta.

A ocorrência de tal acoplamento induzido pelo reservatório entre os osciladores foi também apontada nas Refs. (26, 29–31), onde uma rede de osciladores harmônicos dissipativos foi abordada através de equações mestras perturbativas. Nas Refs. (26, 29–31), é demonstrada a ocorrência de canais indiretos de dissipação - pelos quais os osciladores da rede perdem excitação através de todos os outros osciladores - em duas diferentes situações: quando todos os osciladores estão acoplados a um reservatório em comum, ou quando osciladores fortemente interagentes estão acoplados cada um a seu próprio reservatório.

Observando as soluções obtidas para as equações mestras, enfatizamos que a forma das mesmas fornece uma total compreensão da evolução dos estados iniciais da rede, ampliando a perspectiva da análise de coerência e decoerência oferecida pelo modelo de Caldeira-Leggett (8). Através destas soluções, encontramos uma expressão geral para o decaimento dos picos não-diagonais da matriz densidade reduzida inicial, que aplica-se a ambos os casos de reservatórios distintos e em comum. Tal expressão fornece todas as informações relativas à decoerência do estado inicial dos osciladores dissipativos acoplados. Sob este ponto de vista, analisamos, como uma aplicação, o processo de decoerência de emaranhamentos preparados em ambos os osciladores em $t = 0$. Os resultados obtidos demonstram que o acoplamento induzido pelo reservatório em comum não leva aos efeitos de amortecimento coletivos mencionados acima. O regime de validade para altas temperaturas em nossos cálculos obscurece tal acoplamento induzido pelo reservatório que, em geral, contribui para retardar o processo de decoerência, ou mesmo para produzir os SLD e SLR. Entretanto, verificamos que diferentes interações entre os osciladores dissipativos, descritas pelos termos girante e contra-girante, resultam em diferentes taxas de decaimento dos termos de inter-

ferência da matriz densidade reduzida. A razão para isto é que as constantes de amortecimento efetivas aumentam conforme o acoplamento relacionado aos termos girantes aumenta.

Devemos notar ainda que um trabalho recente tratou a questão da obtenção de uma equação mestra para dois osciladores harmônicos acoplados através do método do funcional de influência de Feynman-Vernon (65). Entretanto, os autores assumem um acoplamento entre os osciladores diferente daquele dado na Eq. (2.4), além de considerarem somente o caso de um reservatório em comum. Finalmente, ressaltamos que o presente modelo duplicado de Caldeira-Leggett pode ser utilizado para a análise de bipolarons dissipativos, além de outros problemas em diferentes áreas da Física, onde o modelo de Caldeira-Leggett tem sido aplicado com sucesso nas últimas décadas. Uma análise mais detalhada do desenvolvimento na Ref. (50) é, entre outras, uma aplicação imediata do presente trabalho. O processo de tunelamento de sistemas dissipativos acoplados é também um fenômeno que pode ser abordado pelo presente trabalho. Juntamente com as realizações nas Refs. (26, 29–31), acreditamos que o presente trabalho poderá fornecer ingredientes para a compreensão da física de sistemas dissipativos acoplados.

3 Transferência quase-perfeita de estados em uma rede bosônica dissipativa

3.1 Introdução

Muita atenção tem sido dada recentemente ao tema da *transferência perfeita de estados* (TPE) em redes quânticas. Visto que a realização de um processador quântico requer, de fato, a habilidade de se transferir informação quântica entre sistemas interagentes espacialmente separados compondo uma rede, protocolos têm sido estabelecidos para a TPE em muitos diferentes contextos. Entre outras interessantes contribuições teóricas, visando ultimamente o entendimento e a implementação de um processador quântico, a construção de portas efetivas de dois qubits para TPE entre nodos distantes em redes bosônicas e fermiônicas foi proposta (66). Um formalismo geral do problema da TPE em redes com qualquer topologia e configuração de acoplamento foi também desenvolvida (67). Considerando-se cadeias de spins, a TPE tem sido perseguida em redes com acoplamentos além daqueles entre primeiros-vizinhos (68), e uma classe de redes de qubits admitindo TPE de um estado qualquer em um período fixo de tempo foi criada (69). O problema do aumento dos erros (vindos das não-idealidades da rede) com o comprimento do canal conectando os nodos também foi analisado (70). Nesta conexão, um protocolo para TPE arbitrária na presença de flutuações aleatórias nos acoplamentos de uma cadeia de spins foi reportada (71). A dinâmica de emaranhamento em cadeia de spins com ruído e desordem também foi analisada na Ref. (72). Com relação à TPE em redes de osciladores harmônicos, uma análise compreensiva deste assunto é apresentada na Ref. (73), e um protocolo para transferência de emaranhados quânticos com alta eficiência em cadeias quânticas invariantes por translação é reportado na Ref. (74). Diferentemente dos avanços com relação às cadeias de spin não existem protocolos, até o presente trabalho, para TPE arbitrária através de osciladores harmônicos não-ideais.

Assim como nas cadeias de spin, significantes desenvolvimentos têm sido obtidos com

relação às redes bosônicas (75–78). Um tratamento geral de uma rede de osciladores harmônicos quânticos dissipativos foi recentemente apresentado, para qualquer topologia da rede, isto é, qualquer que seja a forma como os osciladores estão acoplados, a intensidade de seus acoplamentos e suas frequências naturais (37). Com relação ao mecanismo dissipativo, dois diferentes cenários são considerados neste trabalho: aquele onde cada oscilador está acoplado a seu próprio reservatório e aqueloutro em que todos os osciladores estão acoplados a um reservatório em comum. Com tal perspectiva geral de tratamento da dissipação, a emergência de subespaços livres de relaxação/decoerência (26) em redes de osciladores fraca e fortemente acoplados também foi estudada. Finalmente, mencionamos a proposta de uma memória quântica para o armazenamento de estados de superposição contra a decoerência através de sua evolução em topologias apropriadas de tais redes dissipativas bosônicas (79).

Visto que a TPE é obtida através do ajuste apropriado das frequências e acoplamentos dos sistemas compondo a rede, a busca por regras gerais de como obter tal ajuste é de interesse crucial. Sob este ponto de vista, é importante notar que a receita geral apresentada na Ref. (67) está em contraste com o procedimento mostrado na Ref. (74), onde uma cadeia degenerada de osciladores é considerada: todos os osciladores com a mesma frequência, interagindo um com o outro com o mesmo parâmetro de acoplamento. A falta da TPE na Ref. (74) é compensada por uma possibilidade mais realista de implementação de uma rede invariante por translação.

Neste trabalho, demonstramos que condições gerais (ou critério) para a TPE em redes ideais pode ser estendido a redes não-ideais, onde se considera a dissipação. Neste caso, porém, a fidelidade do estado transferido decresce devido aos efeitos do ambiente. Entretanto, baseados nos trabalhos sobre redes bosônicas acima mencionados, no presente estudo desenvolvemos um protocolo para enfraquecer os efeitos indesejados do ambiente, levando à *transferência quase-perfeita de estados* (TQPE) em uma rede de osciladores harmônicos dissipativos. Mais especificamente, analisamos a transferência de estados entre dois osciladores ideais, o emissor e o receptor, através de uma cadeia linear de osciladores transmissores não-ideais. Em analogia com as Refs. (26, 37), aqui também adotamos o cenário geral em que cada oscilador transmissor está acoplado a um reservatório distinto. Portanto, nossa meta se assemelha àquela para a TPE arbitrária na Ref. (71); entretanto, ao invés de flutuações nos acoplamentos de uma cadeia de spins, iremos lidar com as flutuações injetadas por cada um dos reservatórios acoplados aos osciladores transmissores. Antecipando nossa estratégia para alcançar a TQPE sob tais fontes de não-idealidades, ajustamos a frequência dos osciladores emissor e receptor de modo a estar significativamente fora de ressonância com aquela dos transmissores. Tal arranjo faz com que o estado a ser transferido ocupe apenas

virtualmente os osciladores transmissores, enfraquecendo os indesejados efeitos dos mecanismos de decaimento.

Nosso mecanismo para a TQPE similar ao efeito túnel assemelha-se àquele apresentado na Ref. (74) e outros desenvolvimentos relacionados (80, 81), em que a nossa rede atua como um *quantum bus* conectando o emissor ao receptor. Entretanto, nestas referências, os autores consideram desordem e constantes de acoplamento randômicas na cadeia, ao invés de considerar reservatórios, como fizemos. Também notamos que uma maneira completamente diferente de abordar o problema de reservatórios distintos, desenvolvida no contexto de uma cadeia de spins, é mostrada na Ref. (82). Além disso, deve ser enfatizado que o nosso desenvolvimento apresenta similaridades com o problema inverso de autovalores já discutido nas Refs. (66, 68). Sendo assim, o problema inverso de autovalores mostra-se ser a condição suficiente de nosso critério permitindo a TPE no caso particular de osciladores ideais; nossa condição necessária sendo, então, uma simplificação deste problema inverso de autovalores. Em adição, devemos notar que o problema inverso de autovalores é tratado nas Refs. (66, 68) somente no contexto de redes ideais, enquanto que aqui estendemos nosso critério ao caso de redes não-ideais.

Apontamos ainda que recentes propostas de uma variedade de recursos para a conexão de sistemas quânticos (83) revelam um forte interesse na possibilidade de controle de transferência de informação em redes quânticas. Com os domínios da manipulação da interação entre átomos e os modos vibrantes de cavidades com alto fator de qualidade (34) e íons armadilhados (84), além da eletrodinâmica quântica de circuitos e dos cristais fotônicos, a habilidade de se transferir informação quântica cresceu a um nível a permitir a implementação de um processador lógico (85, 86). Em conexão a isto, a proposta de esquemas para o contorno da injeção de ruído nos processos de TPE e propagação de emaranhamento em redes de sistemas quânticos não-ideais acoplados é mandatória, levando a engenhosos esquemas para a transferência de informação tolerante a falhas e contribuindo para o entendimento de fenômenos quânticos fundamentais, como decoerência e emaranhamento.

O plano deste capítulo é como segue. Na seção (4.2), por analogia com os desenvolvimentos apresentados na Ref. (37), revisitamos o tratamento de redes bosônicas não-ideais, introduzindo o hamiltoniano do sistema. A equação mestra descrevendo a dinâmica da rede é apresentada, juntamente com a sua solução. Na seção (4.3), apresentamos um critério para a TPE em redes ideais de osciladores harmônicos, junto com uma aplicação particular, onde os conjuntos de parâmetros $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$, assegurando a TPE são obtidos. Este critério se baseia na definição da matriz $\Theta(t)$, que descreve a evolução dos estados da rede. Portanto, a matriz $\Theta(t)$ servirá a dois propósitos: dar

um critério assegurando a TPE e permitir o cálculo do *tempo de transferência*, t_{ex} , que é o tempo que o estado leva para sair do oscilador emissor e chegar ao receptor. Ainda na seção (4.3), estendemos nosso critério para a TPE em redes ideais ao caso de redes não-ideais, onde a dissipação é considerada, afetando a fidelidade do estado transferido. Na seção (4.4) apresentamos, então, a maior contribuição deste trabalho: um protocolo para o enfraquecimento dos efeitos do ambiente. Introduzimos um modelo no qual dois osciladores ideais (o emissor e o receptor) estão conectados por uma linha de transmissão composta por osciladores não-ideais (os transmissores). Como antecipamos acima, a frequência dos osciladores emissor e receptor é ajustada de forma a estar significativamente fora de ressonância com aquela dos transmissores. Visto que os estados transferidos ocupam os osciladores transmissores não-ideais apenas virtualmente, os efeitos indesejáveis do ambiente são então enfraquecidos, permitindo uma TQPE entre o emissor e o transmissor. O tratamento analítico da TQPE em redes pequenas de 3, 4, 5 e 6 osciladores é mostrado na seção (4.5). Na seção (4.6) aplicamos procedimentos numéricos para estender nossos resultados a um número maior de transmissores não-ideais, dando uma análise compreensiva de todos os parâmetros da rede envolvidos e demonstrando a robustez do nosso protocolo. Finalmente, apresentamos nossas conclusões na seção (4.7).

3.2 O modelo, a equação mestra correspondente, e sua solução

3.2.1 Rede bosônica dissipativa geral

Antes de introduzirmos nosso modelo para a TPE, vamos revisitar os desenvolvimentos na Ref. (37), considerando uma rede de N osciladores dissipativos interagentes, a partir da perspectiva geral em que todos os osciladores interagem entre si. Qualquer topologia particular da rede segue desta perspectiva, sob uma apropriada escolha dos elementos de \mathbf{H} . Como enfatizado acima, por topologia nos referimos a quaisquer *i*) formas nas quais os osciladores estão acoplados entre si, *ii*) seus parâmetros de acoplamento e *iii*) frequências naturais. Além disso, consideramos que cada oscilador da rede interage com seu próprio reservatório, ao invés do caso particular em que todos os osciladores interagem com um reservatório em comum. Portanto, denotando daqui em diante os índices m e n rotulando os osciladores, indo desde 1 até N , partimos do hamiltoniano geral

$$\mathcal{H} = \hbar \sum_m \left[\sum_n a_m^\dagger H_{mn} a_n + \sum_k \varpi_{mk} b_{mk}^\dagger b_{mk} + \sum_k V_{mk} (b_{mk}^\dagger a_m + b_{mk} a_m^\dagger) \right], \quad (3.1)$$

onde b_{mk}^\dagger (b_{mk}) é o operador de criação (aniquilação) para o k -ésimo modo do reservatório ω_{mk} , acoplado ao m -ésimo oscilador da rede ω_m , cujo operador de criação (aniquilação) é dado por a_m^\dagger (a_m). Os acoplamentos entre os osciladores da rede são dados pelo conjunto $\{\lambda_{mn}\}$, enquanto que aqueles entre os osciladores e seus reservatórios se escrevem como $\{V_{mk}\}$. Os reservatórios são modelados como um conjunto de $k = 1, \dots, \infty$ modos, e os elementos H_{mn} , definindo a topologia da rede, compõem a matriz

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{12} & \omega_2 & \cdots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1N} & \lambda_{2N} & \cdots & \omega_N \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

A fim de obter a equação mestra descrevendo a rede, primeiro diagonalizamos o hamiltoniano \mathbf{H} através de uma transformação canônica $A_m = \sum_n C_{mn} a_n$, onde os coeficientes da m -ésima linha da matriz \mathbf{C} definem os autovetores associados aos autovalores ϕ_m da matriz (3.2). Com \mathbf{C} sendo uma matriz ortogonal, ou seja, $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$, seguem as relações de comutação $[A_m, A_n^\dagger] = \delta_{mn}$ e $[A_m, A_n] = 0$, que nos permitem reescrever o hamiltoniano (3.1) através de osciladores desacoplados, com modos normais ϕ_m , cada um deles interagindo, entretanto, com todos os N reservatórios. O termo livre \mathbf{H} diagonalizado do hamiltoniano total nos habilita a introduzir a representação de interação, com a qual se obtém a equação mestra descrevendo a evolução da rede. Para isto, consideramos que *i*) os acoplamentos entre os osciladores de modos normais ϕ_m e os reservatórios sejam fracos o suficiente para permitir uma aproximação perturbativa até segunda ordem. Além disso, sob ruído branco Markoviano, *ii*) considera-se o operador densidade evoluído da rede $\rho(t)$ fatorado do operador densidade estacionário dos reservatórios. Finalmente, *iii*) assume-se que as frequências dos modos dos reservatórios estejam minimamente espaçadas de modo a permitir uma soma contínua, com as densidades espectrais $\sigma_m(\phi_n)$ e os parâmetros de acoplamento $V_m(\phi_n)$ sendo funções suaves. Portanto, após traçarmos sobre os graus de liberdade dos reservatórios no zero absoluto, obtemos a forma de Lindblad generalizada

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= \sum_{m,n} \left\{ \frac{i}{\hbar} [\rho(t), a_m^\dagger H_{mn} a_n] + \frac{\Gamma_{mn}}{2} ([a_n \rho(t), a_m^\dagger] + [a_m, \rho(t) a_n^\dagger]) \right\} \\ &\equiv \sum_{m,n} \left\{ \frac{i}{\hbar} [\rho(t), a_m^\dagger H_{mn} a_n] + \mathcal{L}_{mn} \rho(t) \right\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde definimos a matriz de amortecimento efetiva Γ , cujos elementos são dados por

$$\Gamma_{mn} = N \sum_{n'} C_{n'm} \gamma_m(\phi_{n'}) C_{n'n}, \quad (3.4)$$

com $\gamma_m(\phi_n) = \frac{1}{N} [V_m(\phi_n) \sigma_m(\phi_n)]^2 \int_{-\phi_n}^{\infty} \delta(\epsilon) d\epsilon$. Na Eq. (3.3), os superoperadores $\mathcal{L}_{mn}\rho(t)$ descrevem os canais dissipativos diretos ($m = n$) e indiretos ($m \neq n$), respectivamente. Através dos canais dissipativos diretos, os osciladores perdem excitação para seus próprios reservatórios, com taxa de amortecimento Γ_{mm} , enquanto que através dos canais indiretos eles perdem excitação para todos os outros reservatórios, exceto para os seus próprios, com taxa Γ_{mn} , ($m \neq n$). Para reservatórios de ruído branco Markoviano, os canais indiretos desaparecem, visto que as densidades espectrais de tais reservatórios são invariantes por translação no espaço das frequências, nos dando $\gamma_m(\phi_{n'}) = \gamma_m$ e, conseqüentemente, $\Gamma_{mn} = N\gamma_m\delta_{mn}$ (29–31).

É importante salientar que todo o desenvolvimento apresentado na próxima subseção, onde a solução da equação mestra. Eq. (3.3), é obtida, aplica-se ao caso de reservatórios não-Markovianos incluindo, portanto, os canais dissipativos indiretos. Reservatórios Markovianos são considerados somente na seção (4.4), quando a topologia de nosso modelo for finalmente definida como sendo uma cadeia linear de osciladores dissipativos.

3.2.2 Solução da equação mestra

A fim de obter a solução da Eq. (3.3), empregamos a mesma para obter uma equação diferencial parcial para a função P de Glauber-Sudarshan

$$\frac{dP(\{\eta_{m'}\}, t)}{dt} = \sum_m \left(\frac{\Gamma_{mm}}{2} + \sum_n \mathcal{H}_{mn}^D \eta_m \frac{\partial}{\partial \eta_m} + c.c. \right) P(\{\eta_{m'}\}, t), \quad (3.5)$$

onde definimos os elementos de matriz $\mathcal{H}_{mn}^D = iH_{mn} + \Gamma_{mn}/2$, generalizando a forma anterior, \mathbf{H} , levando em conta, agora, o processo dissipativo (D). Considerando que a rede geral associada à Eq. (3.2) seja composta inteiramente por osciladores dissipativos, a matriz \mathbf{H}^D assume a forma

$$\mathbf{H}^D = i\mathbf{H} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \cdots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \cdots & \Gamma_{2N} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & \cdots & \Gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \Gamma_{N3} & \cdots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Para o estado inicial da rede, consideramos a superposição geral pura de estados coerentes

$$\rho(0) = \mathcal{N}^2 \sum_{r,s=1}^Q \Lambda_r \Lambda_s^* |\{\beta_m^r\}\rangle \langle\{\beta_m^s\}|, \quad (3.7)$$

onde \mathcal{N} é o fator de normalização, Λ_r são as amplitudes de probabilidade do estado-produto $|\{\beta_m^r\}\rangle = \bigotimes_{m=1}^N |\beta_m^r\rangle$, e os índices r e s vão desde 1 até o inteiro Q . O sobrescrito r indica o r -ésimo estado da superposição, enquanto que o subscrito m indica o estado coerente do m -ésimo oscilador. Das Eqs. (3.5) e (3.7) verifica-se que o operador densidade da rede evolui como

$$\rho(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* \frac{\langle\{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\}\rangle}{\langle\{\zeta_m^s(t)\} | \{\zeta_m^r(t)\}\rangle} |\{\zeta_m^r(t)\}\rangle \langle\{\zeta_m^s(t)\}|. \quad (3.8)$$

A excitação do m -ésimo oscilador, dada por

$$\zeta_m^r(t) = \sum_n \Theta_{mn}(t) \beta_n^r, \quad (3.9)$$

segue dos elementos de matriz dependentes do tempo

$$\Theta_{mn}(t) = \sum_{m'} D_{mm'} \exp(-\mathfrak{W}_{m'} t) D_{m'n}^{-1}, \quad (3.10)$$

onde a m -ésima coluna da matriz \mathbf{D} define o m -ésimo autovetor associado ao autovalor \mathfrak{W}_m da matriz \mathbf{H}^D .

Para o operador densidade reduzido do m -ésimo oscilador, obtemos

$$\rho_m(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* \frac{\langle\{\beta_n^s\} | \{\beta_n^r\}\rangle}{\langle\zeta_m^s(t) | \zeta_m^r(t)\rangle} |\zeta_m^r(t)\rangle \langle\zeta_m^s(t)|, \quad (3.11)$$

onde a influência de todos os outros osciladores da rede está presente explicitamente no produto $\langle\{\beta_n^s\} | \{\beta_n^r\}\rangle$ e implicitamente nos estados $|\zeta_m^r(t)\rangle$.

3.3 Um critério para TPE em redes ideais de osciladores harmônicos e sua extensão à transferência de estados no caso não-ideal

3.3.1 TPE em redes ideais

Baseados no modelo desenvolvido acima, nesta seção obtemos um critério geral para a TPE, qualquer que seja a topologia de uma rede ideal ($\Gamma_{mn} = 0$) de osciladores harmônicos.

Partindo da Eq. (3.9), escrita em forma matricial como $\zeta^r(t) = \Theta(t) \cdot \beta^r$, é direto concluir que a condição para a transferência do estado do primeiro oscilador para o último é fixada pela estrutura matricial

$$\Theta(t_{\text{ex}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & \begin{bmatrix} \forall \\ \end{bmatrix} & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

que também assegura que o estado do N -ésimo oscilador é transferido ao primeiro, não importando o que aconteça aos estados dos outros $N - 2$ osciladores transmissores restantes (do segundo ao penúltimo oscilador). É por isto que a submatriz formada pela seleção dos elementos da segunda até a penúltima linhas e colunas de $\Theta(t_{\text{ex}})$ é deixada indefinida; para toda submatriz $[\forall]$, a TPE deve ser obtida desde que os estados do primeiro e do último oscilador sejam trocados. A especificação da matriz $[\forall]$ define somente a troca de estados entre os transmissores. Visto que não estamos interessados nesta dinâmica interna, deixamos a matriz $[\forall]$ indefinida. É importante notar que o critério para a transferência de estados, fixado pela Eq. (3.12) não depende do estado da rede. Evidentemente, a imposição da forma matricial (3.12) pode ser usada para o cálculo do tempo de transferência t_{ex} , como será verificado na seção (3.5), onde o caso particular de uma rede linear não-ideal com $N = 4$ osciladores é tratada analiticamente.

Visto que a evolução da matriz $\Theta(t)$, dada por

$$\Theta(t) = \mathbf{C} \cdot \exp[-i\Phi t] \cdot \mathbf{C}^{-1} = \exp[-(\mathbf{C} \cdot i\Phi \cdot \mathbf{C}^{-1})t] = \exp[-i\mathbf{H}t], \quad (3.13)$$

segue do hamiltoniano \mathbf{H} (cujos autovalores ϕ_m compõem a matriz diagonal Φ), os conjuntos de parâmetros $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$, fornecendo uma condição necessária para a TPE em uma particular topologia da rede, seguem da relação de comutação

$$[\Theta(t_{\text{ex}}), \mathbf{H}] = 0, \quad (3.14)$$

que é válida em todos os instantes de tempo, inclusive no tempo de transferência t_{ex} . Observamos que nem todos os conjuntos $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ obtidos da condição (3.14) asseguram a TPE. Para uma condição necessária e suficiente, devemos escolher, entre estes conjuntos, aqueles que asseguram a redução da matriz (3.13) à forma (3.12), a primeira sendo definida pela topologia da rede e a última sendo a nossa premissa inicial. Para melhor esclarecer nosso critério para a TPE em redes ideais, enfatizamos que:

Quando a TPE ocorre, a relação de comutação (3.14) é sempre satisfeita [i. e., (3.14) é uma condição necessária para TPE]; entretanto, quando (3.14) é satisfeita, não podemos assegurar que a TPE ocorra [e é por isso que a Eq. (3.14) por si mesma não é uma condição suficiente]. Para uma condição suficiente, devemos garantir a existência de um instante de tempo t , chamado tempo de transferência t_{ex} , onde a evolução da matriz $\Theta(t)$ - construída a partir dos conjuntos de parâmetros $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ satisfazendo (3.14) - leva esta a $\Theta(t_{\text{ex}})$.

Enfatizamos ainda que esta condição necessária e suficiente aplica-se somente após a especificação da submatriz $[\mathbb{V}]$, isto é, somente após a escolha de como se dará a troca de estados entre os transmissores. De fato, qualquer desenvolvimento matemático - como o cálculo da relação de comutação, Eq. (3.14) - deve partir da especificação da submatriz $[\mathbb{V}]$ e, conseqüentemente, a especificação da Eq. (3.12). Como foi dito acima, deixamos a submatriz $[\mathbb{V}]$ indefinida na Eq. (3.13) apenas para ilustrar que não estamos interessados na troca de estados entre os transmissores. Assim, concluímos que a matriz $\Theta(t)$ pode ser utilizada para dois propósitos: nos dar um critério assegurando a TPE e calcular o tempo de transferência t_{ex} . Notamos novamente que, na seção (3.5), demonstramos como obter o tempo de transferência a partir da imposição da redução da matriz (3.13) àquela na Eq. (3.12) considerando, evidentemente, uma submatriz $[\mathbb{V}]$ específica.

Como já mencionado na Introdução, observamos que nossa condição suficiente para a TPE resulta ser o problema inverso de autovalores mostrado nas Refs. (66, 68), enquanto que nossa condição necessária consiste em uma simplificação deste problema, visto que ela seleciona previamente os conjuntos de parâmetros $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ levando, através da condição suficiente, ao processo de transferência de estados.

Deve ser mencionado ainda que, para o caso em que a transferência de estados é realizada via processo similar ao efeito túnel, devemos somente garantir que a frequência em comum (ω) do emissor e do receptor seja distinta daquela dos transmissores (Ω). Sob esta condição, podemos verificar aproximadamente a relação (3.14) independentemente da escolha do conjunto de acoplamentos λ_{mn} , e estes podem todos ter o mesmo valor λ . Evidentemente, conforme discutido acima, a magnitude dos λ_{mn} certamente governará o tempo de transferência.

A seguir, apresentamos uma aplicação da Eq. (3.14) para o cálculo, considerando uma escolha específica da submatriz $[\mathbb{V}]$, do conjunto de parâmetros $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ assegurando TPE. Também apresentamos uma outra maneira de se calcular o tempo de transferência t_{ex} , baseada na análise da probabilidade de uma transferência bem-sucedida do estado desejado, que é uma alternativa ao uso da matriz $\Theta(t_{\text{ex}})$.

3.3.2 Uma aplicação da relação (3.14)

Considerando o hamiltoniano \mathbf{H} em sua forma geral, dada pela Eq. (3.2) e especificando a escolha particular

$$\Theta(t_{\text{ex}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

permitindo a transferência do estado inicial do m -ésimo para o $[N - (m - 1)]$ -ésimo oscilador encontramos, a partir da relação (3.14), as relações

$$\begin{aligned} \omega_m &= \omega_{N-(m-1)}, \\ \lambda_{mn} &= \lambda_{N-(m-1), N-(n-1)}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

que asseguram TPE somente sob a condição de que, no tempo de transferência, a matriz $\Theta(t)$ se reduza à $\Theta(t_{\text{ex}})$. As relações acima generalizam aquelas introduzidas na Ref. (73), dada por

$$\begin{aligned} \omega_m &= \omega, \\ \lambda_{m,m+1} &= \lambda_{m+1,m} = \lambda \sqrt{m(N-m)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Evidentemente, conforme foi discutido acima, cada escolha da submatriz $[\mathbb{V}]$ na forma geral (3.12) leva a diferentes conjuntos de parâmetros $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$. Também notamos que diferentes escolhas de $[\mathbb{V}]$ produzem diferentes valores dos tempos de transferência.

3.3.3 Uma forma alternativa para calcular t_{ex}

Aqui, apresentamos uma outra forma de calcular o tempo de transferência t_{ex} , ao invés de se usar a condição de transferência do estado do primeiro oscilador para o último, dada pela estrutura matricial (3.12). Este cálculo de t_{ex} se aplica tanto ao caso de uma rede ideal quanto ao caso de redes não-ideais. De fato, para calcularmos t_{ex} no caso de redes não-ideais, devemos desconsiderar a dissipação, ou seja, $\Gamma = 0$. Apesar de a dissipação causar a decoerência do estado transferido, ela não afeta o tempo de transferência, como ficará claro na seção (4.5).

Portanto, considerando o caso de uma rede ideal, o cálculo do tempo de transferência t_{ex} segue da análise da probabilidade de uma transferência bem-sucedida do estado desejado - ou

equivalentemente, a fidelidade do processo de transferência - definida por

$$\mathcal{P}(t) = \text{Tr} [\rho_1(0)\rho_N(t)], \quad (3.18)$$

onde $\rho_1(0)$ e $\rho_N(t)$ são os operadores densidade reduzidos do emissor (em $t = 0$) e do receptor (em um tempo t posterior), respectivamente. Evidentemente, para obtermos t_{ex} a partir da Eq. (3.18), devemos levar em conta o conjunto de parâmetros $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ que asseguram a TPE, obtidos a partir da relação de comutação, Eq. (3.14) sob a condição de redução da matriz $\Theta(t)$ a $\Theta(t_{\text{ex}})$. Uma condição adicional é que no caso ideal, onde $\Gamma = 0$ devemos ter $\mathcal{P}(t_{\text{ex}}) = 1$. Apesar de ser muito trabalhosa, a maximização da probabilidade $\mathcal{P}(t_{\text{ex}})$ dá, por si mesma, uma condição necessária e suficiente para a obtenção destes conjuntos de parâmetros assegurando a TPE. A relação de comutação (3.14), juntamente com a condição de redução, no tempo de transferência, da matriz (3.13) a (3.12), proporciona um atalho a esta tarefa.

Vamos considerar, como é feito usualmente, que o operador densidade inicial da rede inteira, $\rho(0)$ fatora-se como $\rho_1(0) \otimes_{m=2}^N \rho_m(0)$, com $\rho_1(0)$ representando, como foi definido acima, o estado do primeiro oscilador, a ser transferido para o N -ésimo, e $\rho_m(0)$ representa o estado inicial dos osciladores transmissores mais o receptor. Por sua vez, o operador densidade no tempo de transferência $\rho(t_{\text{ex}})$ fatora-se como $\rho_N(t_{\text{ex}}) \otimes_{m=1}^{N-1} \rho_m(t_{\text{ex}})$, com $\rho_N(t_{\text{ex}})$ representando o estado transferido do N -ésimo oscilador e $\rho_m(t_{\text{ex}})$ o estado final dos osciladores transmissores, mais o transmissor. Evidentemente, o estado do N -ésimo oscilador em t_{ex} deve ser, no caso ideal onde $\Gamma = 0$, exatamente aquele preparado no primeiro oscilador. Desse modo, substituindo a Eq. (3.11) em $\mathcal{P}(t_{\text{ex}})$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t_{\text{ex}}) = \mathcal{N}^4 \sum_{r,s} \sum_{r',s'} \Lambda_r \Lambda_s^* \Lambda_{r'} \Lambda_{s'}^* \langle \{\beta_n^s\} | \{\beta_n^{r'}\} \rangle \langle \{\beta_n^{s'}\} | \{\beta_n^{r'}\} \rangle \\ \times \exp \left\{ - \left[\zeta_N^{s'}(t_{\text{ex}}) - \beta_1^s \right]^* \left[\zeta_N^{r'}(t_{\text{ex}}) - \beta_1^{r'} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como uma aplicação ilustrativa da Eq. (3.19), vamos considerar o caso específico em que o estado a ser transferido para o N -ésimo oscilador é preparado no primeiro oscilador como sendo uma superposição do tipo *gato de Schrödinger*, ou seja

$$|\Psi(0)\rangle_1 = \mathcal{N} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1, \quad (3.20)$$

com todos os outros osciladores (inclusive o receptor) preparados no estado de vácuo. Assim,

obtemos da Eq. (3.19), para o caso ideal, as relações

$$\begin{aligned}\sum_m C_{Nm} \cos(\phi_m t_{\text{ex}}) C_{m1}^{-1} &= \pm 1, \\ \sum_m C_{Nm} \sin(\phi_m t_{\text{ex}}) C_{m1}^{-1} &= 0,\end{aligned}\tag{3.21}$$

que nos permitem determinar t_{ex} , lembrando que ϕ_m denotam os autovalores do hamiltoniano livre \mathbf{H} . Portanto, o tempo de transferência t_{ex} segue do cálculo dos autovalores e autovetores associados de \mathbf{H} .

Chamamos atenção ao fato de que, apesar de usarmos a matriz $\Theta(t)$ para obter a excitação evoluída do N -ésimo oscilador, aqui não impomos a condição de transferência do estado do primeiro ao último oscilador, dada pela Eq. (3.12). Portanto, nesta subseção, apresentamos uma maneira alternativa de calcular t_{ex} , diferente daquela originada da Eq. (3.12).

Antes de analisarmos a transferência de estados sob os efeitos do ambiente, ressaltamos novamente que a Eq. (3.19) pode ser aplicada ao cálculo de t_{ex} em redes não-ideais. De fato, apesar de induzir decoerência, a dissipação não afeta o tempo de transferência, que pode ser obtido a partir da probabilidade $\mathcal{P}(t_{\text{ex}})$, que atinge máximos locais onde a TPE acontece no caso ideal. Portanto, para redes não-ideais temos o mesmo t_{ex} que no caso ideal, a diferença sendo que, no último caso, $\mathcal{P}(t_{\text{ex}})$ atinge a unidade, enquanto que no primeiro, atinge máximos locais, menores que a unidade. Este fato nos motiva a estender a relação de comutação, Eq. (3.14) do caso ideal para o não-ideal, com o intuito de obtermos uma transferência (imperfeita) de estados em redes dissipativas, apesar da decoerência.

3.3.4 Transferência de estados em redes não-ideais: efeitos ambientais

Iniciamos esta seção notando que os efeitos ambientais evidentemente proíbem a ocorrência de TPE em redes não-ideais. O que pretendemos aqui é apenas estender o tratamento para o caso ideal apresentado acima ao caso não-ideal. A extensão do critério apresentado acima para a transferência de estados em redes não-ideais segue diretamente se considerarmos um valor finito para Γ . As taxas de decaimento, levando o sistema à dissipação, são introduzidas na Eq. (3.13), generalizando a relação (3.14) para

$$[\Theta(t_{\text{ex}}), \mathbf{H}^D] = 0.\tag{3.22}$$

Podemos demonstrar que a Eq. (3.22) nos dá os mesmos conjuntos de parâmetros $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$, obtidos a partir da Eq. (3.14), além dos conjuntos de taxas de decaimento $\{\Gamma_{mn}\}$ que

também deve ser satisfeito. Como um exemplo ilustrativo, vamos considerar o hamiltoniano \mathbf{H}^D em sua forma geral, dada pela Eq. (3.6), e especificar a escolha particular de $\Theta(t_{\text{ex}})$ dada por (3.15). Neste caso, obtemos da Eq. (3.22), as relações

$$\begin{aligned}\omega_m &= \omega_{N-(m-1)}, \\ \lambda_{mn} &= \lambda_{N-(m-1), N-(n-1)}, \\ \Gamma_{mn} &= \Gamma_{N-(m-1), N-(n-1)},\end{aligned}\tag{3.23}$$

onde as duas primeiras relações já haviam sido obtidas anteriormente [subseção (4.3.2)] para uma rede ideal. Portanto, além destes conjuntos $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ satisfazendo simultaneamente as Eqs. (3.22) e (3.14), para redes não-ideais temos uma relação adicional entre as taxas de decaimento, como mostrado acima. Quando esta relação adicional é satisfeita, ficamos com aquelas para $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ iguais ao caso ideal. Entretanto, enquanto no caso ideal os conjuntos $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ assegurando TPE são aqueles que levam à redução da matriz (3.13) a (3.12), aqui eles são aqueles que dão os máximos locais da componente $\Theta_{1N}(t)$ ($= \Theta_{N1}^*(t)$) de (3.10). Evidentemente, um processo de maximização deve levar em conta também o parâmetro t , dando então, além dos conjuntos $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$, o tempo de transferência t_{ex} . Notamos que sob dissipação, a componente $\Theta_{1N}(t)$ oscila enquanto decresce da unidade, com o passar do tempo e, conseqüentemente, nunca atingirá a unidade, como acontece no caso ideal.

Portanto, a extensão de nosso critério para TPE em redes ideais para redes não-ideais é dada pela relação de comutação, Eq. (3.22), mais o requerimento da maximização da componente $\Theta_{1N}(t)$ da qual obtemos, entre os conjuntos $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ satisfazendo simultaneamente (3.22) e (3.14), aqueles assegurando uma transferência de estados (não-perfeita) *ótima* em t_{ex} . Apesar de não entrarmos em detalhes nesta discussão, é interessante notar que quando a relação adicional entre as taxas de decaimento não é satisfeita, a transferência de estados (não-perfeita) obtida não é ótima, sendo a fidelidade do estado transferido menor que aquela do caso em que a relação adicional é satisfeita.

Notamos que nosso critério estendido para transferência de estados ótima (não-perfeita) em redes não-ideais recupera aquele para TPE em redes ideais, quando $\Gamma = 0$. Além disso, existem duas situações especiais, não abordadas neste trabalho, onde a relação de comutação (3.22) se reduz àquela do caso ideal, Eq. (3.14), mesmo que a fidelidade decresça com o tempo e com a magnitude de Γ : *i*) quando $\Gamma_{mn} = \Gamma\delta_{mn}$ e *ii*) quando $\Gamma_{mn} = \Gamma$. Em ambos os casos, os conjuntos de parâmetros $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ assegurando a transferência (imperfeita) de estados no caso não-ideal são exatamente aqueles assegurando a TPE no caso ideal.

É importante notar novamente que, confinando o problema a uma rede dissipativa linear, a estratégia adotada de considerarmos os osciladores emissor e receptor ideais significativamente fora de ressonância com os transmissores assegura a TQPE, apesar das não-idealidades da linha de transmissão. De fato, como antecipamos na introdução deste capítulo e demonstraremos abaixo, a ocupação virtual da linha de transmissão faz com que o estado transferido seja quase perfeitamente protegido dos mecanismos de amortecimento.

3.4 TQPE em uma rede linear dissipativa: nossa plataforma de trabalho e protocolo

A fim de contornar de maneira significativa os efeitos dissipativos do ambiente em redes não-ideais, nesta seção apresentamos um protocolo que assegura a TQPE em uma rede linear (*lin*) dissipativa de osciladores harmônicos interagindo via primeiros vizinhos. Esta rede é construída acoplando o k -ésimo oscilador aos $(k \pm 1)$ -ésimos osciladores, sendo que o primeiro oscilador ($m = 1$) permanece desacoplado do último ($m = N$). A matriz \mathbf{H}_{lin}^D obtida para este caso tem a forma

$$\mathbf{H}_{lin}^D = i \begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \omega_2 & \lambda_{23} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{23} & \omega_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \omega_{N-2} & \lambda_{N-2,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{N-2,N-1} & \omega_{N-1} & \lambda_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{N-1,N} & \omega_N \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \cdots & \Gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \cdots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Como já foi esclarecido acima, vamos abordar o caso de osciladores emissor e receptor ideais, aqui representados pelo primeiro e pelo último oscilador da rede, respectivamente, ambos com a mesma frequência ω . Todos os osciladores transmissores, desde o segundo até o $(N - 1)$ -ésimo, que decaem com a mesma taxa $\Gamma_{mn} = \Gamma$, são postos fora da ressonância com o emissor e o receptor, a uma frequência Ω . Com relação aos acoplamentos entre os osciladores, consideramos que o emissor e o receptor estão conectados a seus vizinhos transmissores com a mesma intensidade λ , enquanto que os transmissores estão conectados entre si com em acoplamento $\varepsilon\lambda$, ε sendo um parâmetro adimensional, que permite o controle dos acoplamentos no canal de transmissão. Finalmente, considerando reservatórios de ruído branco Markovianos, para eliminar os canais

dissipativos indiretos, a matriz acima se simplifica na forma tridiagonal

$$\mathbf{H}_{lin}^D = i \begin{bmatrix} \omega & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \Omega - i\Gamma/2 & \varepsilon\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\lambda & \Omega - i\Gamma/2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \Omega - i\Gamma/2 & \varepsilon\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon\lambda & \Omega - i\Gamma/2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & \omega \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Para ilustrar a efetividade de nosso protocolo para TQPE em redes não-ideais, apresentamos abaixo um tratamento analítico de redes lineares pequenas, com 3 a 6 osciladores, além de um detalhado estudo numérico para redes maiores, com até 100 osciladores.

3.5 Tratamento analítico da TQPE em pequenas redes lineares não-ideais

Concentrando-nos no esquema de transferência de estados por tunelamento, vamos tratar analiticamente pequenas redes não-ideais, usando a escolha particular (3.15) para calcular o tempo de transferência t_{ex} . Vamos iniciar considerando o caso de TQPE em uma rede com $N = 4$ osciladores, cuja matriz dissipativa, que segue da Eq. (3.25) torna-se

$$\mathbf{H}_{lin(N=4)}^D = \begin{bmatrix} i\omega & i\lambda & 0 & 0 \\ i\lambda & i\Omega + \Gamma/2 & i\varepsilon\lambda & 0 \\ 0 & i\varepsilon\lambda & i\Omega + \Gamma/2 & i\lambda \\ 0 & 0 & i\lambda & i\omega \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Os autovalores e autovetores de $\mathbf{H}_{lin(N=4)}^D$ fornecem a matriz $\Theta(t)$ e, conseqüentemente, a excitação evoluída dos osciladores, $\zeta^r(t) = \Theta(t) \cdot \beta^r$. Em seguida, introduzimos a taxa de decaimento $\eta = \Gamma/\lambda$, frequência $\varpi = \omega/\lambda$ e tempo $\tau = \lambda t$ adimensionais, além do *detuning* $\Delta_{\pm} = \Omega \pm \omega$ e do acoplamento efetivo $\mu = \lambda/\Delta_{-}$, tais que é adotado o regime onde $\mu \ll 1$ e $\eta \ll 1$. Estes parâmetros asseguram o acoplamento fraco entre os osciladores transmissores e seus respectivos reservatórios - justificando a equação mestra obtida anteriormente - além de permitir a

expansão da matriz $\Theta(\tau)$ até segunda ordem em μ , nos dando

$$\Theta(\tau) = e^{-i(\varpi-\mu)\tau} e^{-\eta\mu^2\tau} \begin{bmatrix} \cos(\varepsilon\mu^2\tau) & -\mathfrak{g}_c(\tau) & i\mathfrak{g}_s(\tau) & -i\sin(\varepsilon\mu^2\tau) \\ -\mathfrak{g}_c(\tau) & \mathfrak{h}_c(\tau) & -i\mathfrak{h}_s(\tau) & i\mathfrak{g}_s(\tau) \\ i\mathfrak{g}_s(\tau) & -i\mathfrak{h}_s(\tau) & \mathfrak{h}_c(\tau) & -\mathfrak{g}_c(\tau) \\ -i\sin(\varepsilon\mu^2\tau) & i\mathfrak{g}_s(\tau) & -\mathfrak{g}_c(\tau) & \cos(\varepsilon\mu^2\tau) \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\mu^2), \quad (3.27)$$

onde definimos as funções dependentes do tempo

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_c(\tau) &= \mu [\cos(\varepsilon\mu^2\tau) - \mathfrak{h}_c(\tau)], \\ \mathfrak{g}_s(\tau) &= \mu [\sin(\varepsilon\mu^2\tau) - \mathfrak{h}_s(\tau)], \\ \mathfrak{h}_c(\tau) &= \exp[-(\eta + i\mu^{-1})\tau] \cos(\varepsilon\tau), \\ \mathfrak{h}_s(\tau) &= \exp[-(\eta + i\mu^{-1})\tau] \sin(\varepsilon\tau). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ressaltamos que a matriz (3.27) segue da Eq. (3.10) que, para o caso $N = 4$ pode ser reescrita na forma (3.13), como $\Theta(\tau) = \exp[-\mathbf{H}_{lin(N=4)}^D \tau]$. Portanto, a matriz (3.27) é obtida a partir dos autovalores \mathfrak{W}_m a autovetores correspondentes (compondo a m -ésima coluna da matriz \mathbf{D}) do hamiltoniano dissipativo $\mathbf{H}_{lin(N=4)}^D$. A partir da condição para transferência do estado do primeiro oscilador para o último, fixada pela estrutura matricial (3.12) e, considerando a restrição adicional $(\varepsilon\mu)^2 \ll 1$ obtemos então, da Eq. (3.27), o tempo de transferência

$$\tau_{\text{ex}}^{(N=4)} \simeq \frac{\pi}{2\varepsilon\mu^2} [1 + \mathcal{O}(\mu^2)], \quad (3.29)$$

que implica nas relações

$$\begin{aligned} \zeta_1^r(\tau_{\text{ex}}^{(N=4)}) &\simeq e^{-\eta\mu^2\tau_{\text{ex}}^{(4)}} [\beta_4^r - (i\mathfrak{g}_c(\tau_{\text{ex}}^{(4)})\beta_2^r + \mathfrak{g}_s(\tau_{\text{ex}}^{(4)})\beta_3^r)] + \mathcal{O}(\mu^2), \\ \zeta_4^r(\tau_{\text{ex}}^{(N=4)}) &\simeq e^{-\eta\mu^2\tau_{\text{ex}}^{(4)}} [\beta_1^r - (\mathfrak{g}_s(\tau_{\text{ex}}^{(4)})\beta_2^r + i\mathfrak{g}_c(\tau_{\text{ex}}^{(4)})\beta_3^r)] + \mathcal{O}(\mu^2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Como é evidente das expressões acima, o processo de relaxação, representado pela taxa de amortecimento η , proíbe a TPE, atenuando o valor das excitações β_1^r e β_4^r . Além disso, os reservatórios também afetam as excitações desejadas, $\zeta_{1(4)}^r(\tau_{\text{ex}}^{(N=4)}) = \beta_{4(1)}^r$, através da mistura destas com aquelas dos osciladores transmissores não-ideais, como mostram as relações acima. Entretanto, o mecanismo de tunelamento fornece a função de decaimento $e^{-\eta\mu^2\tau_{\text{ex}}^{(4)}} = e^{-\pi\Gamma/2\varepsilon\lambda}$, que se aproxima da unidade - juntamente com o regime de parâmetros mostrado acima, isto é, $\mu, \eta, (\varepsilon\mu)^2 \ll 1$ - à medida que o acoplamento $\varepsilon\lambda$ entre os osciladores transmissores cresce. Notamos que o aumento de $\varepsilon\lambda$ diminui o tempo de transferência $\tau_{\text{ex}}^{(N=4)} \simeq \pi\Delta_-/2\mu\varepsilon\lambda$, e que esta é a razão pela

qual escolhemos um acoplamento $\varepsilon\lambda$ forte entre os transmissores: permitir o controle do tempo de transferência τ_{ex} , diminuindo-o enquanto que a fidelidade do processo de transferência aumenta. Por outro lado, sem o parâmetro adimensional ε , o aumento do *detuning* Δ_- (isto é, o processo permitindo uma alta fidelidade do estado transferido) resultaria em um aumento incontrollável do tempo de transferência $\tau_{\text{ex}}^{(N=4)} \simeq \pi\Delta_-/2\mu\lambda$. A partir da Eq. (3.30), concluímos que a fidelidade do mecanismo de transferência de estados é maximizada quando os osciladores transmissores são preparados no estado de vácuo além, é claro, do enfraquecimento do acoplamento sistema-reservatório. Finalmente, notamos que para o caso de um canal de transmissão ideal, isto é, $\eta = 0$, obtemos - até correções de primeira ordem em μ , levadas pelos termos $\mathfrak{g}_c(\tau_{\text{ex}}^{(4)})$ e $\mathfrak{g}_s(\tau_{\text{ex}}^{(4)})$, no caso geral de um canal de transmissão excitado - as relações desejadas $\zeta_1^r(\tau_{\text{ex}}^{(N=4)}) \simeq \beta_4^r$ e $\zeta_4^r(\tau_{\text{ex}}^{(N=4)}) \simeq \beta_1^r$.

Baseados na expressão do tempo de transferência $\tau_{\text{ex}} = \pi/2$ para a rede mais simples, composta por dois osciladores com acoplamento λ (29), é útil definir um acoplamento efetivo para a rede, que no caso $N = 4$ resulta ser $\lambda_{\text{eff}}^{(N=4)} \approx \varepsilon\mu^2\lambda$.

3.5.1 Rede linear não-ideal de $N = 3, 5$ e 6 osciladores

Seguindo os passos apresentados acima para o caso $N = 4$, e adotando o mesmo regime de parâmetros $\mu, \eta, (\varepsilon\mu)^2 \ll 1$, obtemos para $N = 3$ o resultado

$$\tau_{\text{ex}}^{(N=3)} \simeq \frac{\pi}{2\mu} [1 + \mathcal{O}(\mu^2)], \quad (3.31)$$

mostrando o valor efetivo esperado, $\lambda_{\text{eff}}^{(N=3)} \approx \mu\lambda$, para o acoplamento entre os osciladores emissor e receptor. Evidentemente, é também possível determinar expressões analíticas para o tempo de transferência em redes com $N > 4$ desde que a diagonalização da matriz associada $\mathbf{H}_{\text{lin}(N)}^D$ forneça um polinômio característico que seja fatorado em partes com grau menor ou igual a 4. Neste problema, verificamos que $N = 8$ é o caso limite que permite solução analítica, exibindo um polinômio característico que é fatorado em duas partes com grau 4. Para $N = 9$, o polinômio característico é fatorado em duas partes de graus 4 e 5. Analisando os casos $N = 5$ e $N = 6$, obtemos os resultados

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ex}}^{(N=5)} &\simeq \frac{\pi}{2\varepsilon^2\mu^3} [1 + \mathcal{O}(\mu^2)], \\ \tau_{\text{ex}}^{(N=6)} &\simeq \frac{\pi}{2\varepsilon^3\mu^4} [1 + \mathcal{O}(\mu^2)]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Finalmente notamos que, sem a imposição da restrição $(\varepsilon\mu)^2 \ll 1$, as expressões acima

para τ_{ex} podem ser aproximadamente escritas, para valores pequenos de N , como

$$\tau_{\text{ex}}^{(N)} \simeq \frac{\pi}{2\varepsilon^{(N-3)}\mu^{(N-2)}} \left\{ 1 + [\mathcal{A} + \mathcal{B}\eta^2 - \mathcal{C}\varepsilon^2] \mu^2 \right\}, \quad (3.33)$$

onde $\mathcal{A} = N - 1$, $\mathcal{B} = \sum_{m=1}^{N-2} m$, e $\mathcal{C} = N - 3$. Evidentemente, para N pequeno e $(\varepsilon\mu)^2 \ll 1$, as expressões acima recuperam os resultados obtidos para redes com $N = 3$ a $N = 6$. A obtenção de uma expressão analítica para $\tau_{\text{ex}}^{(N)}$ no caso geral não é tarefa fácil. À medida que o tamanho da rede aumenta, verificamos que uma dependência com N envolvendo a correção de segunda ordem $\mathcal{O}(\mu^2)$ começa a ser relevante, dificultando o cálculo. Apesar do conhecimento de tal dependência ser um importante desafio a ser superado, no presente trabalho abordaremos numericamente a TQPE em redes com grandes valores de N , através do uso da expressão (3.18), que nos dá a fidelidade do processo de transferência.

3.6 Tratamento numérico da TQPE em grandes redes lineares não-ideais

Seguindo o esquema de TQPE via efeito túnel, e usando a expressão para a probabilidade de transferência do estado desejado, dada pela Eq. (3.18), analisamos o caso de redes lineares não-ideais maiores. Considerando a transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ para o N -ésimo oscilador, com $\alpha = 5$ e todos os outros osciladores (inclusive o receptor) no estado de vácuo, nas Figs. 1 (a, b, c, e d) plotamos as curvas numéricas para a probabilidade de transferência, $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$, em função de τ para os casos $N = 5, 10, 50$, e 100 , respectivamente. (Escrevemos agora a probabilidade de transferência com o subscrito ex para diferenciá-lo da probabilidade de recorrência $\mathcal{P}(\tau_{\text{rec}})$, que será definida abaixo.) Considerando o regime de parâmetros adotado acima, $\mu, \eta \ll 1$ - sem a necessidade de impor a restrição adicional $(\varepsilon\mu)^2 \ll 1$ - adotamos, em unidades do acoplamento λ , os valores $\varpi = 10$, $\Delta_- = 10^4$ e $\varepsilon = 5 \times 10^3$, além de $\eta = 10^{-3}$. Primeiramente observamos, como esperado, que o tempo de transferência $\tau_{\text{ex}}^{(N)}$ aumenta proporcionalmente com N , sendo da ordem de $\tau_{\text{ex}}^{(N)} \approx \pi \times 10^4$ para o caso em que $N = 5$, em concordância com o resultado analítico calculado com o auxílio da Eq. (3.33). Além disso, como o estado a ser transferido ocupa apenas virtualmente o canal não-ideal num intervalo de tempo proporcional a N , a fidelidade do processo de transferência decresce com o aumento de N , conforme mostrado na Fig. 1. De fato, com a escolha para a taxa de decaimento feita acima, verificamos que a fidelidade fica próxima da unidade para os casos $N = 5$ e $N = 10$, começando a exibir um decréscimo significativo a partir de $N = 50$. Convém ressaltar que não encontramos qualquer decréscimo expressivo da fidelidade

para os casos $N = 5$ e $N = 10$, mesmo para intervalos de tempo com muitas ordens de magnitude maiores que o tempo de transferência. As regiões escuras nas figuras seguem das fortes oscilações da probabilidade $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$, originadas das frequências naturais dos osciladores.

Para o caso $N = 10$, na Fig. 2 (a) plotamos a probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ , considerando os mesmos parâmetros da Fig. 1, exceto para a excitação $\beta = 5$ dos estados coerentes populando os osciladores que compõem o canal transmissor. Como esperado, verificamos que os tempos de transferência são exatamente aqueles do caso associado, mostrado na Fig. 1 (b). Entretanto, o padrão das curvas é alterado, dando lugar a oscilações de fundo, devidas à excitação inicial do oscilador receptor. Além disso, picos adicionais ocorrem no tempo de recorrência t_{rec} , quando o estado de superposição $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ volta para o oscilador emissor. As magnitudes destes picos secundários seguem da probabilidade de se encontrar o estado de superposição no oscilador receptor no tempo de recorrência, quando $\mathcal{P}_{\text{rec}}(\tau) = \text{Tr}[\rho_1(0)\rho_N(\tau)] = 1$. Visto que nos tempos de recorrência os osciladores emissor e receptor estão aproximadamente nos estados $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ e $|\beta\rangle_N$, respectivamente, segue que $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau_{\text{rec}}) = \text{Tr}[\rho_1(0)\rho_N(\tau_{\text{rec}})] = 1/2$, para os valores considerados acima. Com os mesmos parâmetros da Fig. 2 (a), na Fig. 2 (b) mostramos a probabilidade de recorrência do estado de superposição ao primeiro oscilador. Como esperado, verificamos que no tempo de recorrência o estado volta para o oscilador emissor.

Na Fig. 3 (a) consideramos os mesmos parâmetros da Fig. 1 (b), exceto pelo valor menor $\varepsilon = 8 \times 10^2$, para ilustrar o aumento do tempo de transferência. Um ponto interessante desta figura é que a fidelidade do processo não depende do valor de ε , apesar do aumento no tempo de transferência, que é cerca de 7 ordens de magnitude maior que aquele na Fig. 1 (b). Isso é reforçado na Fig. 3 (b) onde, considerando novamente os mesmos parâmetros da Fig. 1 (b), tomamos o caso limite em que $\varepsilon = 1$, que resulta em um grande crescimento do tempo de transferência, de cerca de 28 ordens de magnitude, porém com a fidelidade preservada.

Com os mesmos parâmetros da Fig. 3 (a), exceto pelo valor menor $\Delta_- = 2 \times 10^3$, na Fig. 4 (a) primeiramente verificamos que a dessintonia menor diminui o tempo de transferência até uma ordem de magnitude por volta daquela encontrada na Fig. 1 (b), apesar da quantidade $\varepsilon = 8 \times 10^2$. Além disso verificamos como esperado, um decréscimo contínuo da fidelidade, já que uma dessintonia menor obriga o estado a popular o canal transmissor de forma virtual mais efetivamente. Na Fig. 4 (b) consideramos os mesmos parâmetros da Fig. 4 (a), exceto pelo estado coerente $\alpha = 10$, para mostrar que uma maior excitação do estado a ser transferido resulta em uma menor fidelidade do processo de transferência. De fato, o tempo de decoerência de um estado quântico é inversamente proporcional à sua excitação, de acordo com o princípio da

correspondência.

Finalmente, para ilustrar a vantagem de nosso esquema de transferência de estados por tunelamento sobre aquele onde a transferência se dá não-virtualmente, através de todos os osciladores transmissores, expomos na Fig. 5 a fidelidade $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o caso onde os conjuntos de parâmetros $\{\omega_m\}$ e $\{\lambda_{mn}\}$ na Eq. (3.17) são considerados. Como na Fig. 1 (a), consideramos $\varpi = 10$ e $\eta = 10^{-3}$, e verificamos que, enquanto a fidelidade de nosso esquema de tunelamento é da ordem da unidade para ao menos 10 vezes o tempo de transferência $\tau_{\text{ex}}^{(N=5)} \approx 7 \times 10^5$, aquele para o caso da Fig. 5 decai a zero para $\tau \approx 2 \times 10^3$.

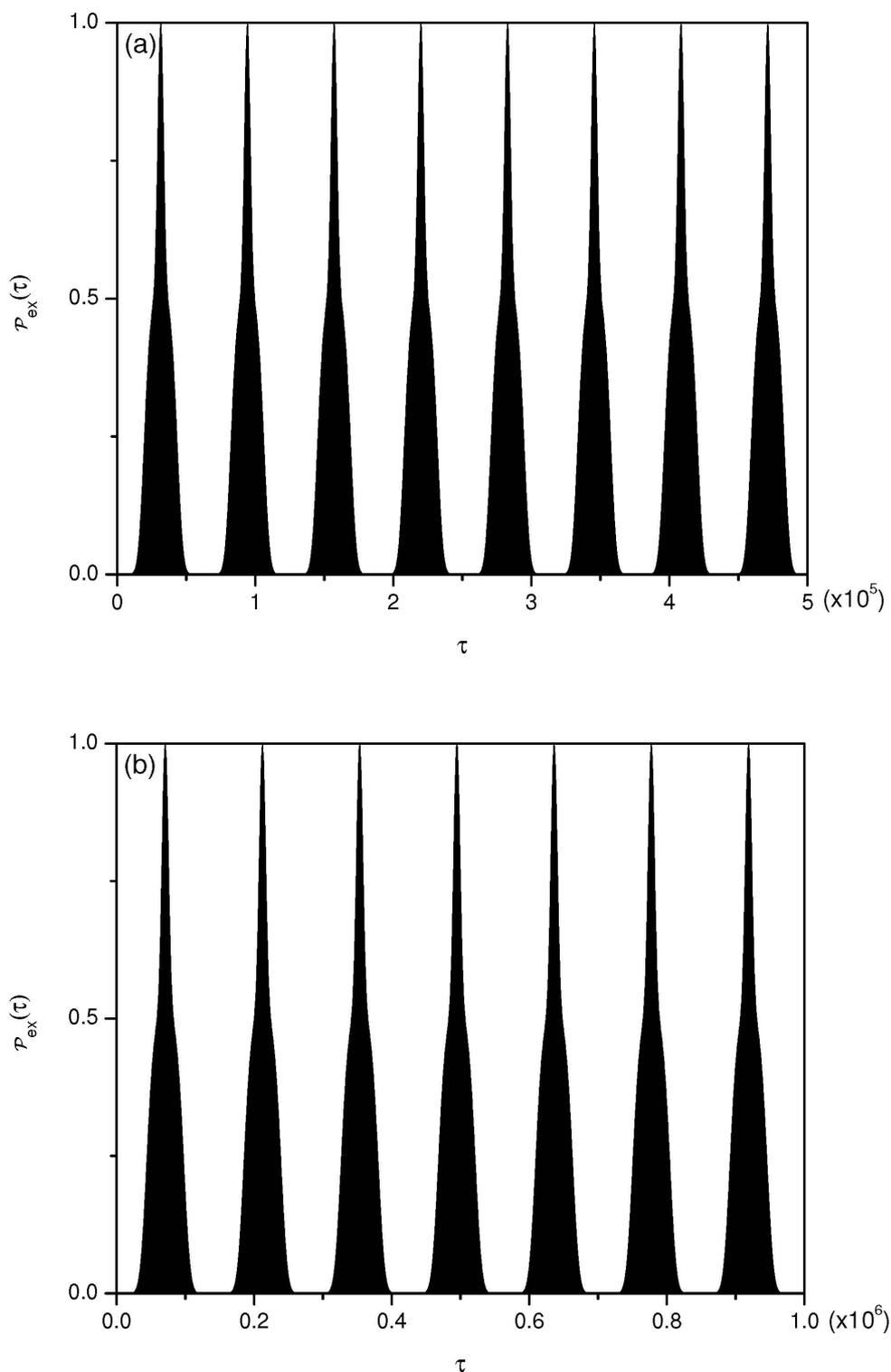


Fig. 1 - Probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o processo de transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ para o N -ésimo oscilador, com $\alpha = 5$ e todos os outros osciladores no estado de vácuo. Em unidades do acoplamento λ , fixamos o valor $\varpi = 10$, nos dando $\Delta_- = 10^4$ e $\varepsilon = 5 \times 10^3$, além de $\eta = 10^{-3}$. As curvas (a) e (b) se referem aos casos $N = 5$ e $N = 10$, respectivamente.

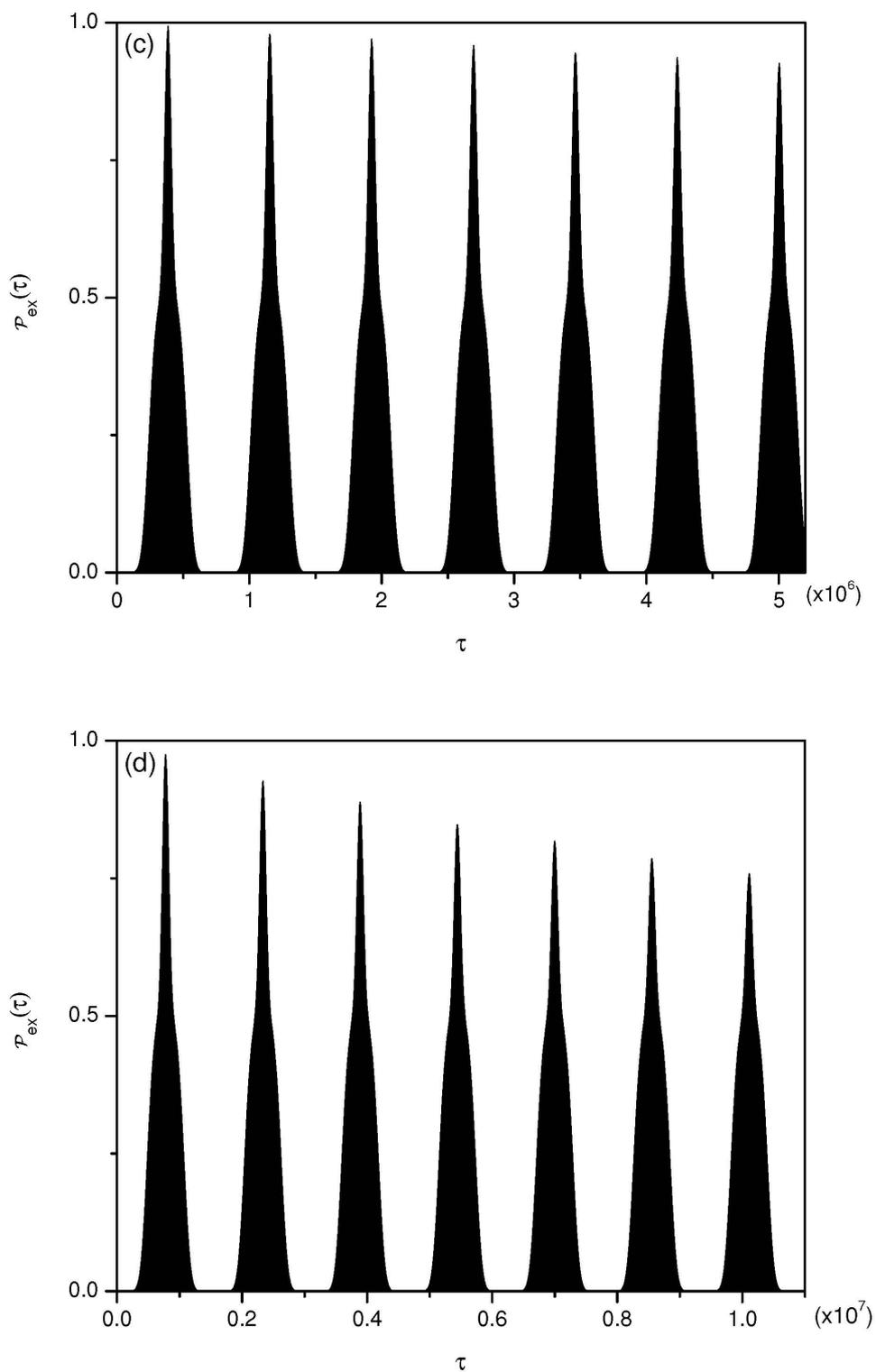


Fig. 1 - Probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o processo de transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ para o N -ésimo oscilador, com $\alpha = 5$ e todos os outros osciladores no estado de vácuo. Em unidades do acoplamento λ , fixamos o valor $\varpi = 10$, nos dando $\Delta_- = 10^4$ e $\varepsilon = 5 \times 10^3$, além de $\eta = 10^{-3}$. As curvas (c) e (d) se referem aos casos $N = 50$ e $N = 100$, respectivamente.

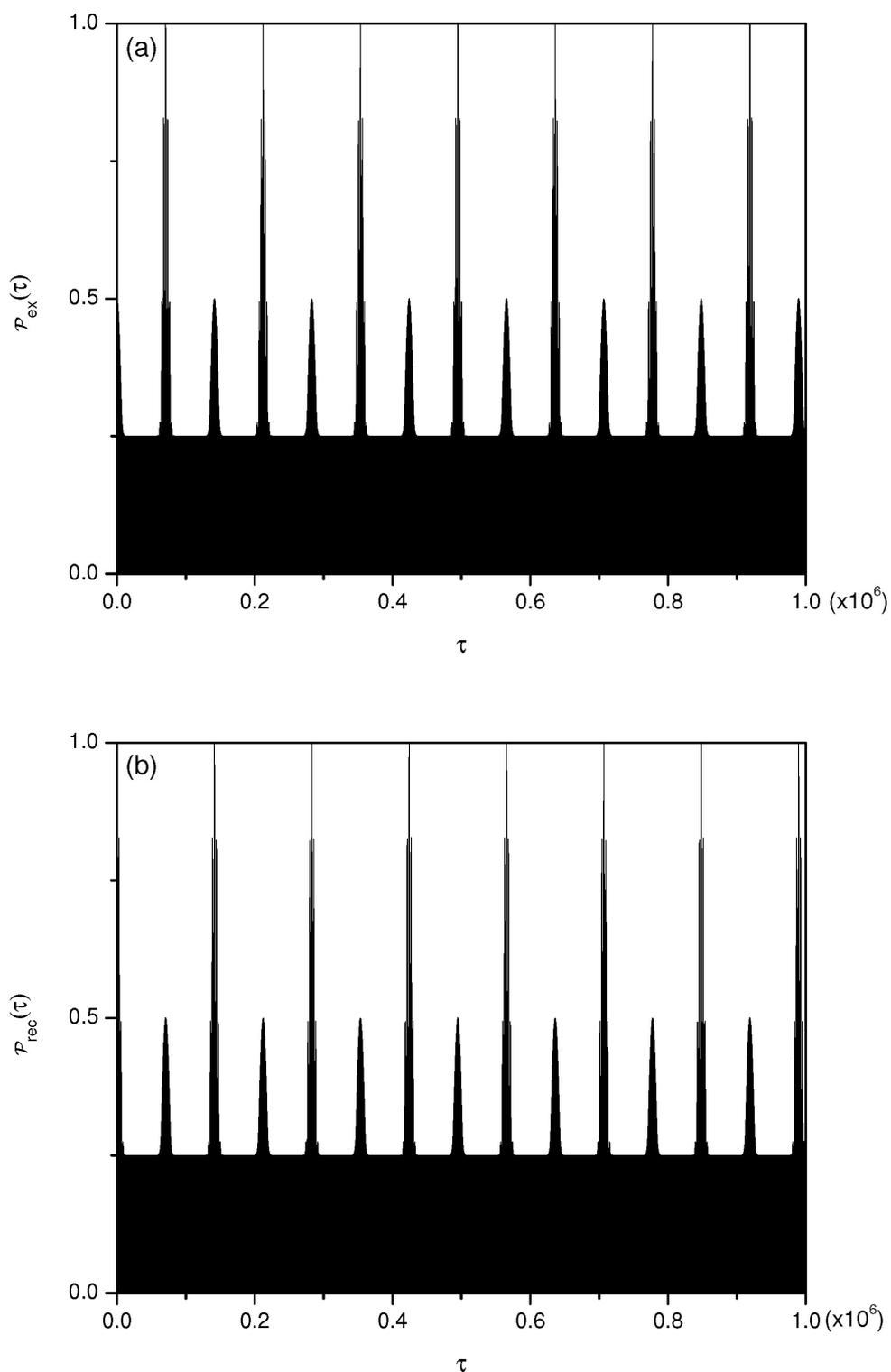


Fig. 2 - (a) Probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o processo de transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ para o N -ésimo oscilador, considerando os mesmos parâmetros da Fig. 1, exceto pela excitação $\beta = 5$ dos estados coerentes populando o canal transmissor. (b) Probabilidade de recorrência $\mathcal{P}_{\text{rec}}(\tau)$ da superposição inicial ao primeiro oscilador, em função de τ .

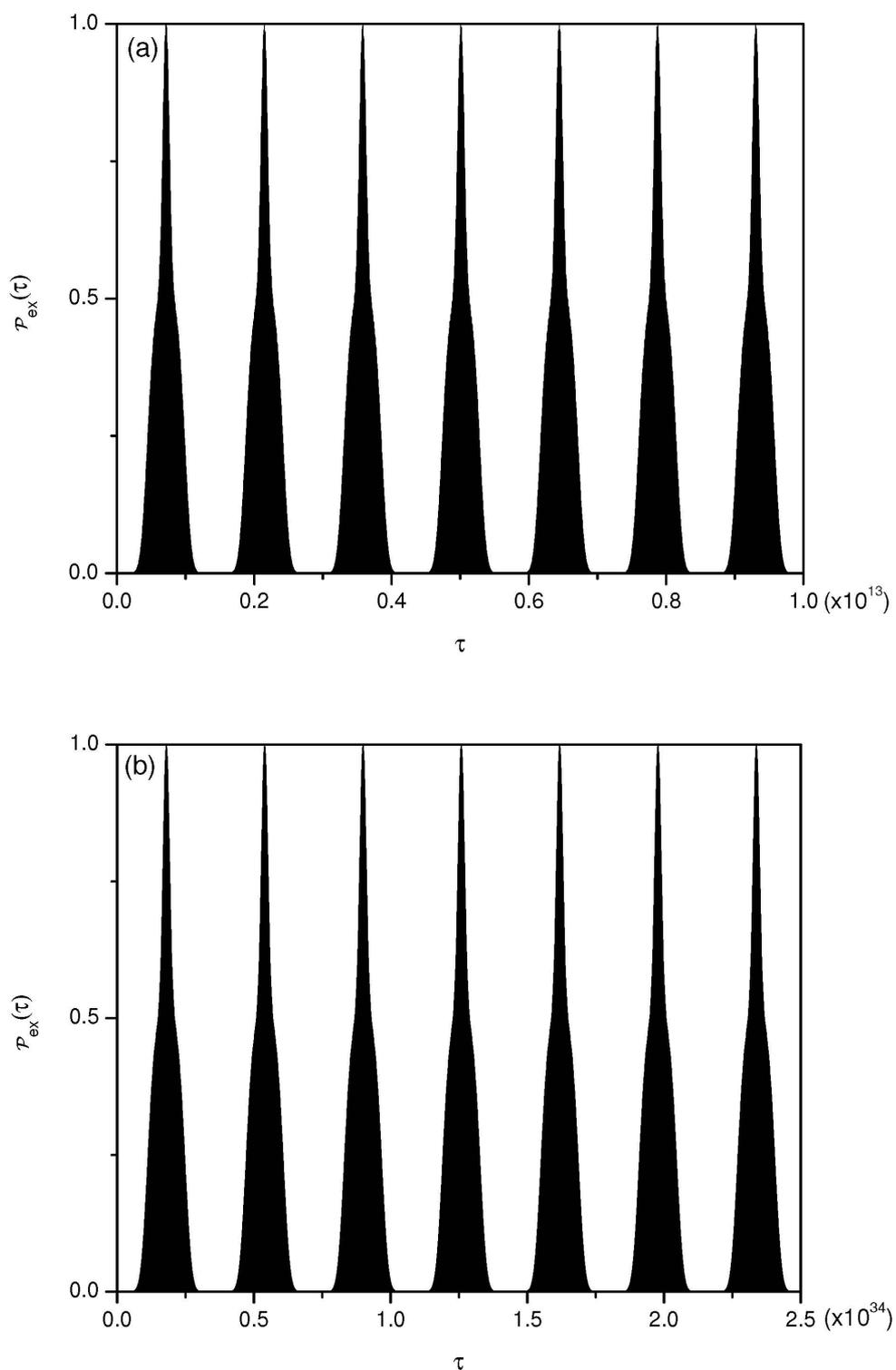


Fig. 3 - Probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o processo de transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ para o N -ésimo oscilador, considerando os mesmos parâmetros da Fig. 1 (b), exceto pelos valores menores do parâmetro (a) $\varepsilon = 8 \times 10^2$ e (b) $\varepsilon = 1$.

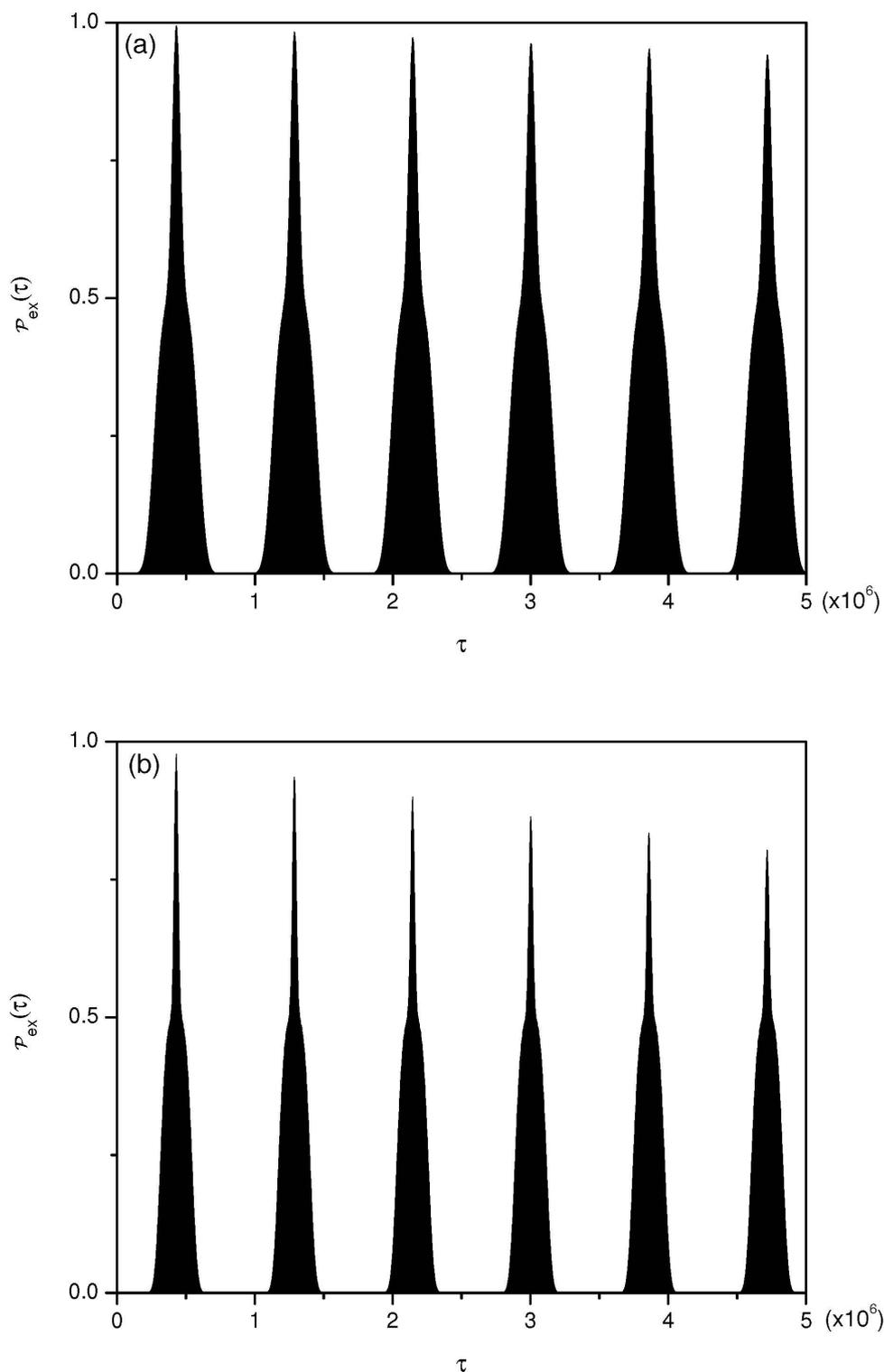


Fig. 4 - (a) Probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o processo de transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ para o N -ésimo oscilador, considerando os mesmos parâmetros da Fig.3 (a), exceto pelo valor menor do parâmetro $\Delta_- = 2 \times 10^3$. (b) O mesmo que em (a), mas com o estado coerente $\alpha = 10$, para ilustrar que a fidelidade do processo decresce com o aumento da excitação do estado a ser transferido.

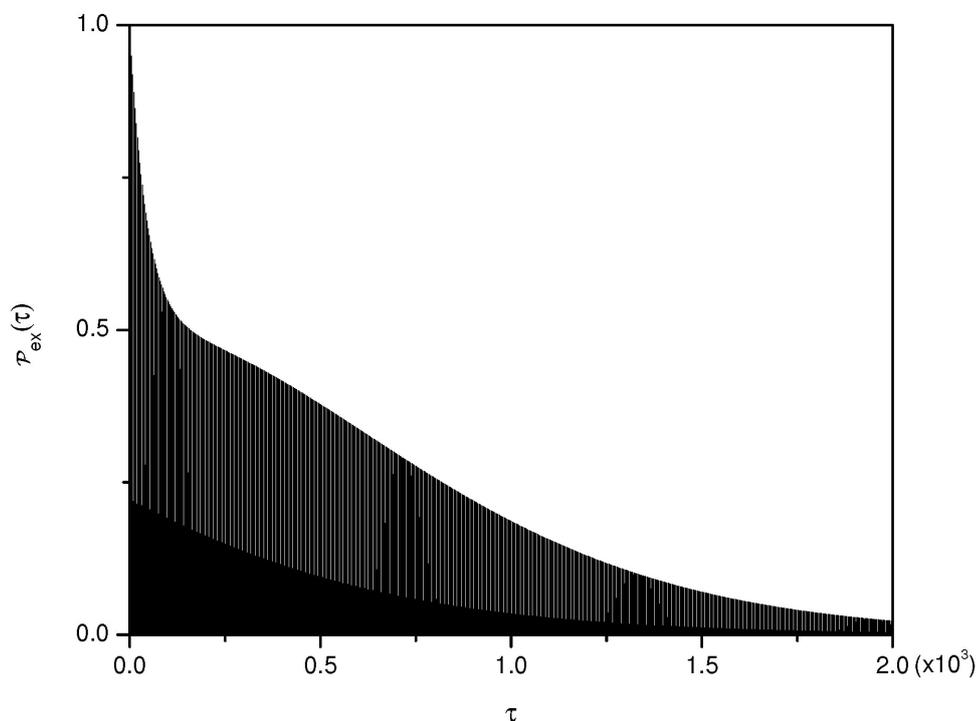


Fig. 5 - Probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o caso em que os parâmetros da rede nas Eq. (3.17) são considerados, juntamente com $\varpi = 10$ e $\eta = 10^{-3}$.

3.7 Conclusões

Neste trabalho, discutimos o problema da transferência de estados em uma cadeia linear de osciladores harmônicos quânticos dissipativos. Considerando que os osciladores emissor e transmissor estejam significativamente fora de ressonância com os osciladores do canal transmissor - estes indo desde o segundo até o penúltimo osciladores - nos utilizamos deste fato para contornar, quase que completamente, a decoerência durante o processo de transmissão. Consideramos os osciladores emissor e o receptor ideais, conectados por transmissores não-ideais. De fato, uma dessintonia grande entre os osciladores que estão em ressonância e aqueles fora da ressonância assegura uma alta fidelidade para o processo de transferência de estados, às expensas de um prolongamento significativo do tempo desta transferência. Em conexão a isto, mostramos que um aumento na intensidade do acoplamento entre os osciladores transmissores atua no sentido de diminuir esse prolongamento. O papel de cada um dos parâmetros da rede é analisado em detalhes em um conjunto de figuras, apresentado após o desenvolvimento formal de nosso esquema.

Além da fidelidade significativamente maior para o processo de TQPE, comparada àquela onde a transferência se dá por meio de um mecanismo não-virtual, contribuições adicionais acerca dos processos de transferência de estados foram mostradas.

Também obtemos um critério geral para a TPE, independente da topologia da rede, que é aplicado ao caso particular de uma cadeia linear ideal. Este critério é dado essencialmente por uma relação de comutação entre o hamiltoniano \mathbf{H} da rede ideal e a matriz $\Theta(\tau_{\text{ex}})$, conectando o estado inicial àquele no tempo de transferência (quando o processo de transferência é concretizado). De fato, a matriz $\Theta(\tau)$, definida na Ref. (37), pode ser usada para dois propósitos: dar um critério assegurando a TPE em uma rede ideal e calcular o tempo de transferência τ_{ex} , que pode ser controlado através da manipulação do acoplamento entre os osciladores transmissores.

Nosso critério para TPE em redes ideais foi estendido ao caso de redes não-ideais, considerando osciladores transmissores dissipativos, onde o estado transferido é adversamente afetado pela decoerência. Por extensão deste critério, entende-se que estamos perseguindo apenas uma forma particular (entre outras) de se obter transferência de estados (e não TPE ou TQPE) em redes não-ideais. Esta forma particular é aquela que recupera exatamente a TPE que ocorre no caso ideal. E aqui está o ponto principal deste trabalho: Com a intenção de enfraquecer os efeitos do reservatório propomos, então, o protocolo mencionado acima, permitindo a TQPE em redes lineares não-ideais.

Esperamos que o esquema de tunelamento de estados apresentado aqui possa ser útil para a implementação da transferência de estados entre nodos distantes de um circuito quântico, sem um decaimento significativo da coerência. Evidentemente, o controle dos parâmetros da rede, tais como as frequências naturais e parâmetros de acoplamento, ainda representa um ponto delicado a ser superado experimentalmente. Ressaltamos que desenvolvimentos recentes em eletrodinâmica quântica de circuitos e cristais fotônicos sinalizam plataformas realistas para a implementação experimental do esquema proposto neste trabalho.

4 Transferência quase-perfeita de estados via subespaços quase-livres de decoerência

4.1 Introdução

Os desenvolvimentos alcançados nas últimas décadas, nos campos da informação e da computação quântica, têm permitido a abordagem dos processos de transferência e manipulação da informação quântica (IQ). Apesar da implementação prática do processamento de IQ em diferentes sistemas físicos, a inevitável ação do meio ambiente deve ser considerada. O emaranhamento dos graus de liberdade do sistema com aqueles do meio ambiente leva ao processo de decoerência de estados, que deve-se à dinâmica não-unitária imposta ao sistema e consiste na transferência da informação deste para o meio ambiente. Este processo consiste num importante fator limitante ao funcionamento de protocolos para o processamento de IQ em sistemas físicos reais, e torna-se, portanto, imprescindível o seu entendimento e controle.

Dentre vários esquemas propostos com o objetivo de contornar os efeitos limitantes impostos pelo meio ambiente, um em especial utiliza-se do conceito dos *subespaços livres de decoerência* (SLD) (87). Estes subespaços constituem-se num conjunto de estados que não são afetados pela ação do reservatório. Adicionalmente, podemos dizer que o operador densidade reduzido do sistema em questão permanece invariante num SLD, evoluindo de forma unitária. Uma análise detalhada acerca dos SLD é apresentada na Ref. (88), onde os autores desenvolvem uma abordagem rigorosa do processo, fornecendo as condições necessárias e suficientes para a existência de SLD dinamicamente estáveis. Para este desenvolvimento, equações mestras Markovianas são aplicadas ao estudo de sistemas quânticos de dimensão finita. Ainda neste contexto, na Ref. (89) um sistema de dois níveis acoplado a um reservatório comprimido é tratado, no intuito de se identificar possíveis SLD. Neste trabalho é também calculada a dimensão do SLD para N sistemas de dois níveis e, além disso, investiga-se a influência do acoplamento entre os sistemas de dois níveis sobre o

SLD.

Uma análise abrangente dos SLD em sistemas dissipativos acoplados é realizada na Ref. (26), onde são estudados os processos de dissipação coletiva e decoerência em uma rede de N osciladores quânticos acoplados. Analisa-se neste trabalho os ingredientes físicos necessários à emergência de SLD e, particularmente, de subespaços livres de relaxação (SLR). Para tal fim, são tratados dois cenários diferentes. No primeiro, considera-se que todos os osciladores da rede estejam acoplados a um mesmo reservatório. No segundo, considera-se que cada oscilador acople-se ao seu próprio reservatório. Após a análise dos ingredientes físicos que levam aos SLD e SLR, os estados protegidos contra os processos de decoerência e relaxação são identificados. Mostra-se, ainda, que ambos os subespaços são gerados quando os osciladores acoplam-se com o mesmo grupo de modos do reservatório.

No presente trabalho pretendemos tratar da aplicação dos SLD para processos de transferência de IQ em redes de osciladores quânticos não-ideais. Dado que a transferência de estados quânticos entre dois sistemas distintos é um requisito fundamental para o processamento de IQ, deve-se designar especial atenção à investigação deste mecanismo dentro da perspectiva de controle do processo de decoerência.

O estudo da transferência de estados (TE) em redes quânticas tem sido amplamente discutido na literatura. A utilização de cadeias de sistemas acoplados surgiu como uma possível plataforma para a implementação de “linhas de comunicação” quânticas. Em geral, o tratamento destas redes de sistemas interagentes é feito apenas no caso ideal, ou seja, na ausência da ação do meio ambiente. Na Ref. (66) apresenta-se um protocolo para a obtenção da *transferência perfeita de estados* (TPE) entre sítios distantes em redes bosônicas e fermiônicas. O hamiltoniano do sistema é determinado através de um espectro de autovalores que satisfaz uma certa condição, que se mostra necessária e suficiente no caso de redes que apresentam simetria por inversão. As configurações de acoplamento da rede podem, então, ser encontradas através da solução de um problema inverso de autovalores. Isto permite a construção de portas efetivas de 2-qubits entre sítios distintos da rede, além da proposição de protocolos de geração de emaranhamento de estados na rede. Em um contexto mais abrangente, na Ref. (67) é apresentado um formalismo geral para o tratamento de processos de TPE. Os autores investigam as formas possíveis que o hamiltoniano do sistema deve possuir para a ocorrência de TPE em redes onde a topologia e a configuração de acoplamentos sejam arbitrárias. Nesta situação, mostra-se que existem, em princípio, infinitos hamiltonianos que permitem a TPE. Entretanto, apesar de não ser necessário estabelecer *a priori* as restrições à topologia da rede, o que por si só constitui uma interessante característica deste trabalho, os efeitos

originados de processos dissipativos na rede não são levados em consideração.

Com o intuito de preencher esta lacuna, uma abordagem mais realista do problema da transferência de estados em sistemas quânticos, mostrada no capítulo anterior desta tese e na Ref. (2), aborda o que chamamos *transferência quase-perfeita de estados* (TQPE). Neste trabalho, é proposto um esquema para a transferência de estados em uma rede de osciladores harmônicos dissipativos. Considera-se que os osciladores emissor e receptor sejam ideais, ou seja, não sofrem a ação do meio ambiente, enquanto que os osciladores de transmissão sejam não-ideais, cada qual acoplado a seu respectivo reservatório. Ajustando-se as frequências do emissor e do receptor (ω) de forma a estarem significativamente fora de ressonância com aquelas dos transmissores ($\Omega \gg \omega$), demonstra-se que o estado preparado no emissor é transferido ao receptor via mecanismo similar ao “efeito túnel”, ocupando o canal de transmissão apenas virtualmente. Este processo virtual faz com que os efeitos dos reservatórios se tornem praticamente desprezíveis, de forma que os efeitos da decoerência durante o processo de transmissão sejam quase que completamente atenuados.

Assim, com a intenção de nos aproveitarmos da proteção oferecida pelos SLD, apresentamos neste capítulo um protocolo para a TQPE em redes de osciladores não-ideais, alternativo àquele descrito na Ref. (2). Recorremos aqui à transferência de estados através do que denominamos *subespaços quase-livres de decoerência* (SQLD). Em analogia aos SLD já introduzidos acima, nos SQLD temos uma proteção parcial mas significativa do estado a ser transferido, a depender do regime de parâmetros empregado. Devemos salientar que a transferência de estados obtida via SQLD assemelha-se muito àquela via efeito túnel, dado que nos SQLD o estado a ser transferido também ocupa apenas virtualmente os osciladores de transmissão. No entanto, a utilização dos SQLD evita a necessidade prática de se construir a rede de forma que os osciladores emissor e receptor estejam em dessintonia com os transmissores.

Este capítulo está estruturado na forma que segue. Na seção (4.2), apresentamos uma forma alternativa de identificar os SLD àquela apresentada na literatura (90), analisando a evolução do operador densidade reduzido do sistema. Na seção (4.3), definimos o que chamamos de SQLD em uma rede linear de osciladores dissipativos para, em seguida, construir um protocolo para a ocorrência da TQPE via SQLD. Considerando o emissor e o receptor ideais, mostramos como obter o regime de parâmetros que acarreta a TQPE no caso em que os osciladores transmissores estão acoplados cada qual a seu próprio reservatório. Com este regime de parâmetros em mãos passamos a um estudo analítico de uma rede linear com 4 osciladores. São assim derivadas as expressões para a fidelidade do processo de transferência e para o tempo de transferência de estados. Por fim, na seção (4.4), analisando numericamente os casos de transferência de superposições de estados

coerentes em redes não-ideais maiores, com $N = 10$ e 100 osciladores, devemos comparar os resultados obtidos com aqueles do capítulo anterior da presente tese, associados à transferência de estados via efeito túnel.

4.2 Uma forma alternativa de identificar os SLD

Conforme as definições apresentadas na literatura (90), um sistema com espaço de Hilbert \mathcal{H}_1 é dito ter um SLD \mathcal{H}_2 se a evolução dos estados pertencentes a \mathcal{H}_2 for puramente unitária. De fato, as condições para que um subespaço seja livre de decoerência podem ser estabelecidas considerando a equação mestra na forma de Lindblad

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = i[\rho(t), H] + \sum_{m,n} \frac{\Gamma_{mn}}{2} ([\Lambda_m \rho(t), \Lambda_n^\dagger] + h.c.), \quad (4.1)$$

onde todos os estados protegidos $\{\Psi\}$ devem ser autoestados de todos os operadores de Lindblad $\{\Lambda_m\}$, isto é, $\Lambda_m |\Psi\rangle = c_m |\Psi\rangle$, $\forall m, \Psi$ (87). Na Eq. (4.1), $\rho(t)$ é o operador densidade reduzido, cuja evolução é governada pelo hamiltoniano H , além do superoperador de Lindblad, que representa a dissipação no sistema. Esta condição para a delimitação de SLD, por si só não permite a identificação de todos os subespaços possíveis, o que se dá apenas para alguns sistemas particulares. Dessa forma, apresentamos também neste trabalho uma técnica alternativa para contornarmos a dificuldade associada à identificação de forma simples dos estados que compõem os SLD.

Vamos partir da equação mestra, na forma de Lindblad (91), para uma rede de N osciladores harmônicos dissipativos, que se escreve na forma

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= \sum_{m,n} \{i[\rho(t), a_m^\dagger H_{mn} a_n] + \mathcal{L}_{mn} \rho(t)\}, \\ \mathcal{L}_{mn} \circ &= \frac{\Gamma_{mn}}{2} ([a_n \circ, a_m^\dagger] + h.c.). \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde m e n rotulam todos os osciladores da rede de 1 a N . A obtenção da expressão acima encontra-se na Ref. (37). Na Eq. (4.2), $\rho(t)$ representa o operador densidade reduzido do sistema, $H_{mn} = \omega_m \delta_{mn} + \lambda_{mn}(1 - \delta_{mn})$ representa os elementos do hamiltoniano H da rede ideal, em que os índices m e n rotulam os osciladores de rede, desde 1 até N . Além disso, a_m^\dagger (a_m) representa o operador de criação (aniquilação) do m -ésimo oscilador da rede (ω_m), acoplado ao n -ésimo oscilador (ω_n) por meio da constante λ_{mn} . O processo dissipativo é representado pelos superoperadores de Lindblad \mathcal{L}_{mn} que representam os canais diretos ($m = n$) e indiretos ($m \neq n$) de dissipação. Os coeficientes Γ_{mn} constituem os elementos do que definiremos como matriz de amortecimento

Γ . Vamos considerar que a rede esteja inicialmente em uma superposição de estados coerentes

$$\rho(0) = \mathcal{N}^2 \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* |\{\beta_m^r\}\rangle \langle\{\beta_m^s\}|, \quad (4.3)$$

onde $|\{\beta_m^r\}\rangle = \bigotimes_m |\beta_m^r\rangle$. Na Eq. (4.3), \mathcal{N} é o fator de normalização e Λ_r é a amplitude de probabilidade do estado $|\{\beta_m^r\}\rangle$. O índice r (s), sobrescrito, identifica a r -ésima superposição do estado, enquanto que o índice m , subscrito, identifica o estado coerente do m -ésimo oscilador. Das Eqs. (4.2) e (4.3), é possível mostrar que o operador densidade reduzido da rede em um intervalo de tempo posterior escreve-se como (37)

$$\rho(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* \frac{\langle\{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\}\rangle}{\langle\{\zeta_m^s(t)\} | \{\zeta_m^r(t)\}\rangle} |\{\zeta_m^r(t)\}\rangle \langle\{\zeta_m^s(t)\}|, \quad (4.4)$$

onde a dependência temporal das excitações, definida como $\zeta^r(t) = \Theta(t) \cdot \beta^r$, vem da matriz de evolução $\Theta(t) = \mathbf{D} \cdot e^{-\Omega t} \cdot \mathbf{D}^\dagger = e^{-\mathbf{H}^D t}$, sendo $\mathbf{H}^D = i\mathbf{H} + \Gamma/2$ o hamiltoniano dissipativo, dado por

$$\mathbf{H}^D = i \begin{bmatrix} \omega_1 & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{12} & \omega_2 & \cdots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1N} & \lambda_{2N} & \cdots & \omega_N \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \cdots & \Gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \cdots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Os elementos da matriz β^r ($\zeta^r(t)$) são justamente as excitações iniciais β_m^r (evoluídas $\zeta_m^r(t)$), enquanto que a matriz unitária \mathbf{D} , que satisfaz a relação $\mathbf{D}^\dagger \cdot \mathbf{H}^D \cdot \mathbf{D} = \Omega$, define a matriz diagonal Ω composta pelos autovalores Ω_m do hamiltoniano dissipativo.

Vimos anteriormente que o SLD contém o conjunto de estados que, mesmo na presença do reservatório, não sofre a ação dissipativa deste. Em outras palavras, o operador densidade reduzido associado ao SLD deve evoluir unitariamente, de forma a permanecer invariante. Portanto, é de se esperar que o operador densidade evoluído $\rho(t)$ tenha a mesma estrutura que o operador densidade inicial $\rho(0)$, de modo que podemos escrever

$$\rho(t) = \mathcal{N}^2 \sum_{r,s} \Lambda_r \Lambda_s^* |\{\zeta_m^r(t)\}\rangle \langle\{\zeta_m^s(t)\}|. \quad (4.6)$$

Devemos verificar, a seguir, que a restrição $\langle\{\zeta_m^s(t)\} | \{\zeta_m^r(t)\}\rangle = \langle\{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\}\rangle$, aplicada à Eq. (3.8), consiste numa condição necessária para que a evolução do sistema acoplado ao reservatório seja unitária. Esta condição impede o decaimento dos elementos não-diagonais do operador densidade com a evolução temporal, inibindo assim a decoerência do estado em questão. Desse

modo, considerando as excitações evoluídas dos estados coerentes $\zeta^r(t) = \Theta(t) \cdot \beta^r$ e efetuando os produtos internos na restrição acima imposta, obtemos a relação

$$\Theta^\dagger(t) \cdot \Theta(t) \cdot \beta^r = e^{-\Gamma t} \cdot \beta^r = \beta^r \Leftrightarrow \Gamma \cdot \beta^r = 0. \quad (4.7)$$

Portanto, vemos que a restrição acima imposta exige que o estado β^r seja um autovetor da matriz de dissipação Γ , com autovalor nulo. Entretanto, esta restrição por si só não é suficiente para garantir a evolução unitária do sistema e, conseqüentemente, a emergência de um SLD. Para que tenhamos uma condição necessária e suficiente para a constatação desta evolução devemos impor a restrição adicional

$$[\mathbf{H}, \Gamma] = 0, \quad (4.8)$$

tal que, além de ser autoestado da matriz de dissipação Γ com autovalor nulo, o estado β^r deve necessariamente ser também autoestado do hamiltoniano livre \mathbf{H} . De fato, a ação do hamiltoniano tende a modificar a evolução do operador densidade do sistema, retirando o estado inicial do seu respectivo SLD (88). No entanto, sob ambas as condições, (4.7) e (4.8), o estado do sistema fica delimitado ao seu respectivo SLD conforme desejado. Por fim, salientamos que estas restrições nos permitem, ao contrário do que se dá com a técnica padrão de delimitação dos SLD, a identificação imediata de todos os estados livres de decoerência.

De forma alternativa ao desenvolvimento anterior para a identificação dos SLD, devemos notar que o operador de evolução temporal de um sistema quântico dissipativo pode ser escrito como $\mathbf{U}(t) = \exp(-\mathbf{H}^D t)$, de forma que para um dado estado inicial $|\Psi(0)\rangle$, o estado evoluído se escreve, em nosso caso, na forma $|\Psi(t)\rangle = |\mathbf{U}(t)\Psi(0)\rangle$. Considerando, então, a *fórmula de Zassenhaus* (92) para a exponencial de dois operadores \mathbf{X} e \mathbf{Y} quaisquer, dada por

$$\exp[(\mathbf{X} + \mathbf{Y})t] = \exp(\mathbf{X}t) \exp(\mathbf{Y}t) \exp\left\{-\frac{t^2}{2} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\right\} \exp\left\{\frac{t^3}{3!} (2[\mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] + [\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]])\right\} \dots \quad (4.9)$$

e notando que o hamiltoniano dissipativo se escreve como $\mathbf{H}^D = i\mathbf{H} + \Gamma/2$, obtemos, a partir da expressão acima e preservando os termos até segunda ordem no tempo, o operador de evolução

$$\mathbf{U}(t) = \exp(-\mathbf{H}^D t) = \exp[-(i\mathbf{H} + \Gamma/2)t] = \exp(-i\mathbf{H}t) \exp(-\Gamma t/2) \exp\left\{-\frac{it^2}{4} [\mathbf{H}, \Gamma]\right\} \dots \quad (4.10)$$

Com a condição de que $[\mathbf{H}, \Gamma] = 0$, obtemos a relação simplificada

$$\mathbf{U}(t) = \exp(-\mathbf{H}^D t) = \exp[-(i\mathbf{H} + \Gamma/2)t] = \exp(-i\mathbf{H}t) \exp(-\Gamma t/2). \quad (4.11)$$

que, sob a imposição de que os estados do SLD devem ser autoestados de Γ com autovalor nulo, leva finalmente ao resultado

$$|\Psi(t)\rangle = |\exp(-i\mathbf{H}t) \exp(-\Gamma t/2) \Psi(0)\rangle = |\exp(-i\mathbf{H}t) \Psi(0)\rangle, \quad (4.12)$$

que demonstra que o estado $|\Psi(t)\rangle$ mantém-se completamente livre dos efeitos do reservatório, submetendo-se à evolução unitária ditada pelo hamiltoniano. Contudo, sendo $|\Psi(t)\rangle$ também autoestado de \mathbf{H} , esta evolução o confina a um SLD. Lembrando que $|\Psi(0)\rangle = \mathcal{N} \sum_r \Lambda_r |\{\beta_m^r\}\rangle$, a Eq. (4.12) implica em que o estado da rede no tempo t seja

$$|\Psi(t)\rangle = \mathcal{N} \sum_r \Lambda_r |\exp(-i\mathbf{H}t) \exp(-\Gamma t/2) \beta^r\rangle. \quad (4.13)$$

Na seção seguinte, aplicaremos os conceitos aqui mostrados ao caso de uma rede de osciladores não ideais acoplados. Neste caso, é possível mostrar que esta rede de osciladores permite a emergência de um SQLD, de forma que seja possível efetuar uma TQPE entre os osciladores emissor e receptor.

4.3 Rede linear de osciladores harmônicos não-ideais e o SQLD

Vamos tratar uma rede linear de osciladores acoplados de forma que todos os osciladores desta rede, exceto o emissor e o receptor, sejam não-ideais. Neste caso em consideração, todos os osciladores têm a mesma frequência natural ω_0 . Vamos também considerar que os osciladores que compõem o canal de transmissão, do segundo ao penúltimo, apresentam a mesma taxa de decaimento $\Gamma_{mm} = \gamma$. Com relação às interações entre os osciladores, consideramos que o emissor e o receptor estejam acoplados aos transmissores com a mesma intensidade λ , enquanto que os transmissores estejam conectados entre si com um acoplamento $\varepsilon\lambda$, sendo $\varepsilon \gg 1$ um parâmetro adimensional que intensifica este acoplamento. Se no problema do capítulo anterior a constante ε foi empregada para a diminuição do tempo de transferência de estados, vamos demonstrar que no presente caso quanto maior o valor de ε maior será o tempo de transferência. Entretanto, ε torna-se imprescindível aqui para a determinação das condições de emergência dos SQLD. Finalmente, considerando reservatórios com ruído branco Markoviano, de forma a eliminarmos os canais indiretos de dissipação (37), o hamiltoniano dissipativo $\mathbf{H}^D = i\mathbf{H} + \Gamma/2$ escreve-se na seguinte

forma

$$\mathbf{H}^D = i \begin{bmatrix} \omega_0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \omega_0 & \varepsilon\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\lambda & \omega_0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \omega_0 & \varepsilon\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon\lambda & \omega_0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & \omega_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Com o hamiltoniano descrevendo a rede linear em mãos, vamos considerar que o estado inicial desta seja $|\Psi(0)\rangle_{1\dots N} = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1 \bigotimes_{k=2}^N |0\rangle_k$. Neste caso, temos uma superposição de estados coerentes preparada no primeiro oscilador em $t = 0$, enquanto os demais osciladores da rede encontram-se no estado de vácuo. Objetivamos que a superposição preparada no emissor seja transferida ao receptor.

Neste caso, o estado $|\Psi(0)\rangle_{1\dots N}$ obedece à relação (4.7), sendo um autoestado de $\mathbf{\Gamma}$ com autovalor nulo. Além disso, vimos que $|\Psi(0)\rangle_{1\dots N}$ deve ser também autoestado do hamiltoniano livre \mathbf{H} para que pertença a um SLD. Para que isto ocorra, basta impor a relação de comutação $[\mathbf{H}, \mathbf{\Gamma}] = 0$. Dessa forma, a emergência do SLD depende, essencialmente, da escolha dos parâmetros que compõem o hamiltoniano livre do sistema \mathbf{H} , visto que a escolha da matriz $\mathbf{\Gamma}$ já foi realizada. Entretanto, devemos notar que a simples imposição da relação de comutação $[\mathbf{H}, \mathbf{\Gamma}] = 0$ é violada para uma rede linear, fato que pode ser verificado por um cálculo simples. Por essa razão, escolhemos os parâmetros de \mathbf{H} de forma que $t^2 [\mathbf{H}, \mathbf{\Gamma}] \approx 0$. Esta relação acarreta, conforme veremos adiante, uma fidelidade não unitária para a transferência ao receptor da superposição preparada no emissor. O estado continua a sofrer a ação do reservatório, porém de forma atenuada, dado que os mecanismos de dissipação passam a atuar de maneira pouco significativa. Dizemos, então que o estado pertence a um SQLD. Portanto, ao considerarmos a transferência da superposição $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ do emissor ao receptor - estando todos os osciladores, à exceção do emissor, inicialmente no estado de vácuo - verificamos que esta transmissão se dá de forma *quase-perfeita*, ou seja, a fidelidade de transmissão do estado de superposição permanece aproximadamente igual à unidade. A este processo chamamos TQPE via SQLD.

O regime de parâmetros que acarreta a TQPE via SQLD pode ser obtido a partir da Eq. (4.10) onde, calculando o comutador $[\mathbf{H}, \mathbf{\Gamma}]$, impõe-se a aproximação

$$\exp(-\mathbf{H}^D t) \approx \exp(-i\mathbf{H}t) \exp(-\mathbf{\Gamma}t/2) \exp[-i\lambda\gamma t^2/2]. \quad (4.15)$$

Para que os efeitos da última exponencial em (4.15) sejam pouco significativos quando levamos em conta a ação dos reservatórios, devemos impor a condição $\lambda\gamma t^2 \ll 1$. Dessa forma, ao considerarmos o tempo característico do sistema como aquele de intercâmbio de excitação entre os osciladores de transmissão, isto é, $1/\varepsilon\lambda$, decorre a relação a ser observada: $\gamma \ll \varepsilon^2\lambda$, que limita a taxa de amortecimento dos osciladores de transmissão ao fator de acoplamento $\varepsilon^2\lambda$ entre os mesmos. Nota-se que mesmo no caso extremo em que $\gamma = \lambda$, a observação da relação $\gamma \ll \varepsilon^2\lambda$ implica na proteção do estado a ser transferido, tanto mais efetiva quanto maior ε . Devemos verificar que valores substanciais de ε aliados às situações típicas nas quais $\gamma \ll \lambda$, acarretam uma proteção do estado que se aproxima da situação ideal em que $\gamma = 0$. Além disso, as intensidades dos parâmetros de interação que resultam em valores positivos para as frequências dos modos normais devem satisfazer a condição $\omega_0 > \varepsilon\lambda$.

Antes de passarmos à próxima seção, consideremos o caso em que os osciladores de transmissão sejam inicialmente preparados no estado coerente β tal que $|\Psi(0)\rangle_{1\dots N} = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1 |0\rangle_N \bigotimes_{k=2}^{N-1} |\beta\rangle_k$. Nesta situação, como em todas as demais em que temos um produto de estados dos osciladores da rede, o que implica na ausência de emaranhamento, verifica-se que a relação (4.15) é ainda satisfeita. Das condições anteriormente expostas, obtemos

$$\exp(-\Gamma t/2) \cdot \beta^s = \exp(-\Gamma t/2) \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{s+1} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \exp(-\Gamma t/2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{s+1} \alpha \\ \beta \exp(-\gamma t/2) \\ \vdots \\ \beta \exp(-\gamma t/2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

onde o sobrescrito $s = 1, 2$ indica o primeiro e o segundo elementos da superposição $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$. De fato, o operador densidade do sistema emissor-receptor fatora-se daqueles canais de transmissão na forma $\rho(t) = \rho_{1N}(t)\rho_{2\dots N-1}(t)$. Logo, a probabilidade de transferência não é afetada pela excitação dos osciladores de transmissão. O traço sobre os graus de liberdade do canal de transmissão não afeta a evolução circunscrita ao sistema emissor-receptor. Esta probabilidade será afetada pelas excitações dos osciladores de transmissão apenas na situação em que os estados do sistema sistema-receptor encontram-se emaranhados àqueles do canal de transmissão.

Com o regime de parâmetros do qual decorre o SQLD em mãos, na próxima seção apresentamos um tratamento analítico para a TQPE em uma rede linear não-ideal com $N = 4$ osciladores. A partir da expressão para a fidelidade, obtemos o tempo de transferência do estado de

superposição entre os osciladores emissor e receptor.

4.3.1 TQPE em uma rede linear não ideal de $N = 4$ osciladores - Tratamento analítico

Com o intuito de calcular o tempo de transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ do emissor ao receptor, além de obtermos a fidelidade de transferência deste estado, apresentamos aqui um tratamento analítico para uma rede com $N = 4$ osciladores. Neste caso, o hamiltoniano dissipativo se escreve matricialmente como

$$\mathbf{H}^D = \begin{bmatrix} i\omega_0 & i\lambda & 0 & 0 \\ i\lambda & i\omega_0 + \gamma/2 & i\varepsilon\lambda & 0 \\ 0 & i\varepsilon\lambda & i\omega_0 + \gamma/2 & i\lambda \\ 0 & 0 & i\lambda & i\omega_0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Conforme antecipado anteriormente, os autovetores e autovalores de \mathbf{H}^D , compondo respectivamente as matrizes de transformação \mathbf{D} e de autovalores $\mathbf{\Omega}$, definem a matriz de evolução $\mathbf{\Theta}(t)$. Esta, por sua vez define a evolução das excitações dos osciladores, $\zeta^r(t) = \mathbf{\Theta}(t) \cdot \beta^r$. Introduzindo a taxa de decaimento $\eta = \gamma/2\lambda$, a frequência $\varpi = \omega_0/\lambda$, e o tempo $\tau = \lambda t$, todos em unidades do acoplamento λ , é possível mostrar que os autovalores de \mathbf{H}^D , também em unidades de λ , escrevem-se como

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= i\varpi + \frac{1}{2} \left[\eta - i\varepsilon - \sqrt{\eta^2 - 2i\varepsilon\eta - (4 + \varepsilon^2)} \right], \\ \varpi_2 &= i\varpi + \frac{1}{2} \left[\eta - i\varepsilon + \sqrt{\eta^2 - 2i\varepsilon\eta - (4 + \varepsilon^2)} \right], \\ \varpi_3 &= i\varpi + \frac{1}{2} \left[\eta + i\varepsilon - \sqrt{\eta^2 + 2i\varepsilon\eta - (4 + \varepsilon^2)} \right], \\ \varpi_4 &= i\varpi + \frac{1}{2} \left[\eta + i\varepsilon + \sqrt{\eta^2 + 2i\varepsilon\eta - (4 + \varepsilon^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Por sua vez, a matriz de transformação \mathbf{D} , com os autovetores de \mathbf{H}^D , escreve-se na seguinte forma

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(i\eta + \varepsilon - \phi) & \frac{1}{2}(i\eta + \varepsilon + \phi) & -\frac{1}{2}(i\eta - \varepsilon + \phi^*) & -\frac{1}{2}(i\eta - \varepsilon - \phi^*) \\ -\frac{1}{2}(i\eta + \varepsilon - \phi) & -\frac{1}{2}(i\eta + \varepsilon + \phi) & -\frac{1}{2}(i\eta - \varepsilon + \phi^*) & -\frac{1}{2}(i\eta - \varepsilon - \phi^*) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

onde definimos os parâmetros

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{2\varepsilon\eta + i[r + \eta^2 - (4 + \varepsilon^2)]}{[2(r + \eta^2 - (4 + \varepsilon^2))]^{1/2}}, \\ r &= \left[(4 + \varepsilon^2)^2 + \eta^2(2\varepsilon^2 + \eta^2 - 8) \right]^{1/2}.\end{aligned}\quad (4.20)$$

A fidelidade do processo de transferência ou, equivalentemente, a probabilidade de transferência do estado desejado é calculada a partir da equação

$$\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau) = \text{Tr}[\rho_1(0)\rho_N(\tau)], \quad (4.21)$$

onde $\rho_1(0)$ e $\rho_N(\tau)$ correspondem aos operadores densidade reduzidos do emissor (em $\tau = 0$) e do receptor (em τ), respectivamente. Portanto, obtemos a expressão para a fidelidade dada por

$$\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau) = \mathcal{N}^4 \sum_{r,s,i,j} \Lambda_r \Lambda_s^* \Lambda_j \Lambda_i^* \langle \{\beta_m^s\} | \{\beta_m^r\} \rangle \langle \{\beta_m^i\} | \{\beta_m^j\} \rangle \exp[-(\zeta_4^{i*}(\tau) - \beta_1^s)(\zeta_4^j(\tau) - \beta_1^r)]. \quad (4.22)$$

Considerando o caso em que o estado inicial é dado por uma superposição de estados coerentes na seguinte forma $|\Psi(0)\rangle_{1\dots 4} = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1 \otimes |0\rangle_{2\dots 4}$, é possível verificar que a expressão para a fidelidade de transferência do estado do emissor ao receptor é dada por

$$\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau) = \frac{\cosh[\alpha^2(1 - \mathcal{F}_\eta^2(\tau))]}{1 + \cosh(2\alpha^2)} \left\{ \cos[2\alpha^2 \mathcal{F}_\eta(\tau) \cos(\varpi\tau)] + \cosh[2\alpha^2 \mathcal{F}_\eta(\tau) \sin(\varpi\tau)] \right\}, \quad (4.23)$$

onde definimos a função dependente do tempo

$$\mathcal{F}_\eta(\tau) = \frac{\exp(-\eta\tau/2)}{r} \text{Im} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2}i\varepsilon\tau\right) \left[r \cos\left(\frac{1}{2}\phi^*\tau\right) + (\eta + i\varepsilon)\phi \sin\left(\frac{1}{2}\phi^*\tau\right) \right] \right\}. \quad (4.24)$$

Devemos notar que a função $\mathcal{F}_\eta(\tau)$ contém todos os termos que estão relacionados aos mecanismos de dissipação no sistema. Desta forma, espera-se que esta função decresça com o tempo, conforme indica o decaimento exponencial que multiplica os demais termos. No caso em que $\eta = 0$, ou seja, quando o sistema está livre de dissipação, esta expressão reduz-se a à equação transcendental

$$\mathcal{F}_0(\tau) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4 + \varepsilon^2}} \cos\left(\frac{1}{2}\varepsilon\tau\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4 + \varepsilon^2}\tau\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon\tau\right) \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4 + \varepsilon^2}\tau\right), \quad (4.25)$$

que pode ser utilizada para o cálculo do tempo de transferência τ_{ex} da superposição $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ do emissor ao receptor. Em particular, observando a Eq. (4.25), verifica-se fa-

cilmente que a transferência do estado ocorre sempre que a condição $\mathcal{F}_0(\tau_{\text{ex}}) = \pm 1$ for satisfeita. Deste modo, dado que o fator ε é muito maior que a unidade, tal que $\varepsilon/\sqrt{4 + \varepsilon^2} \approx 1$, obtemos

$$\tau_{\text{ex}} = \frac{(2n + 1) \pi}{\sqrt{4 + \varepsilon^2} - \varepsilon}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.26)$$

No caso em que o fator ε é da ordem da unidade ou menor, verifica-se que as relações $\varepsilon/\sqrt{4 + \varepsilon^2} \approx 1$ e $\mathcal{F}_0(\tau_{\text{ex}}) = \pm 1$ não são satisfeitas, acarretando perdas na fidelidade do processo de transferência, tanto maiores quanto menores os valores de ε . Logo, conforme verificado acima, a fidelidade do processo de transferência é tanto mais próxima da unidade quanto maior o valor do parâmetro adimensional ε .

Lembrando que o tempo de transferência de estados é dado por $\tau_{\text{ex}} = \pi/2$ para o caso em que a rede tem apenas dois osciladores acoplados, podemos então definir o acoplamento efetivo

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\lambda}{2} \left(\sqrt{4 + \varepsilon^2} - \varepsilon \right), \quad (4.27)$$

que resulta na expressão $\lambda_{\text{eff}} = \lambda/\varepsilon$ para o situação na qual $\varepsilon \gg 1$. Notemos nesta expressão que o aumento de ε induz a um enfraquecimento do acoplamento efetivo, levando ao aumento no tempo de transferência.

Na próxima seção, apresentamos um tratamento numérico da TQPE via SQLD para redes não-ideais maiores, mostrando que os SQLD permitem contornar quase que completamente os efeitos nocivos dos reservatórios. Vamos também demonstrar na seção seguinte que a TQPE via SQLD induz igualmente o mecanismo de transferência de estados via efeito túnel, ou seja, a excitação do estado inicial do emissor ocupa apenas virtualmente o canal de transmissão.

4.3.2 TQPE via SQLD enquanto processo de tunelamento

Vamos aqui demonstrar que o processo de TQPE via SQLD dá-se por um mecanismo similar ao efeito túnel. Para tal, vamos calcular a probabilidade para que o estado de superposição preparado no emissor seja transferido a um dos osciladores de transmissão, por exemplo o segundo oscilador da rede com $N = 4$. Neste caso, essa probabilidade leva ao resultado

$$\mathcal{P}_{12}(\tau) = \frac{\cosh[\alpha^2(1 - \mathcal{G}(\tau)^2)]}{1 + \cosh(2\alpha^2)} \left\{ \cos[2\alpha^2 \mathcal{G}(\tau) \cos(\varpi\tau)] + \cosh[2\alpha^2 \mathcal{G}(\tau) \sin(\varpi\tau)] \right\}, \quad (4.28)$$

onde a função $\mathcal{G}(\tau)$ é dada por

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{4 + \varepsilon^2}} \cos\left(\frac{\varepsilon\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4 + \varepsilon^2}\tau\right). \quad (4.29)$$

Considerando $\varepsilon \gg 1$, obtemos $\mathcal{G}(\tau) \ll 1$ e, conseqüentemente, a probabilidade

$$\mathcal{P}_{12}(\tau) \approx \frac{2 \cosh(\alpha^2)}{1 + \cosh(2\alpha^2)}, \quad (4.30)$$

que evidencia o fato de que os osciladores de transmissão são tanto menos excitados quanto maior a excitação do estado a ser transmitido. Na ausência de excitação a ser transferida, isto é, $\alpha = 0$, é evidente o resultado $\mathcal{P}_{12}(\tau) = 1$. No entanto, excitações modestas do estado a ser transferido, isto é, $\alpha \simeq 1$, implicam em probabilidades modestas para a excitação do oscilador de transmissão. À medida em que aumentamos a excitação do estado a ser transferido, verificamos um rápido declínio desta probabilidade, indicando que nesta situação os osciladores de transmissão não são efetivamente excitados.

4.4 Tratamento numérico da TQPE via SQLD em redes de osciladores não-ideais

Nesta seção apresentamos um tratamento numérico da TQPE via SQLD em redes de osciladores não ideais. Para isto, vamos considerar que a superposição $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ seja inicialmente preparada no emissor, impondo que todos os demais osciladores (o receptor inclusive) estejam no estado de vácuo. Na Fig. 1 (a e b) apresentamos as curvas para a probabilidade de transferência (fidelidade) $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para os casos $N = 10$ e 100 , respectivamente, e $\alpha = 5$. Considerando o regime de parâmetros acima obtido (isto é: $\gamma \ll \varepsilon^2 \lambda$ e $\omega_0 > \varepsilon \lambda$), adotamos os valores, em unidades da constante de acoplamento λ : $\omega_0 = 10^4$ e $\varepsilon = 5 \times 10^3$, além da constante de amortecimento $\eta = 10^{-3}$. Estamos aqui considerando situações típicas nas quais $\omega_0 \gg \lambda, \gamma$. Primeiramente observamos que em ambos os casos, (a) e (b), o valor do tempo de transferência τ_{ex} está em acordo com o resultado obtido na Eq. (4.26). Além disso, verifica-se que, com esta escolha da taxa de decaimento, a fidelidade do processo de transferência permanece próxima à unidade tanto para o caso $N = 10$ quanto para o caso $N = 100$, exibindo apenas um pequeno decréscimo para este último. Este resultado contrasta com aquele apresentado no capítulo anterior, onde para $N = 100$ observamos um decréscimo significativo para a fidelidade, evidenciando que a TQPE via SQLD é ainda mais efetiva que aquela estudada no capítulo anterior via dessintonia entre emissor-receptor e canal de transmissão. As regiões sombreadas nas figuras seguem das fortes oscilações da probabilidade $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$, advindas das frequências naturais dos osciladores.

Na Fig. 2 revisitamos a situação contemplada na Fig. 1 (a), à exceção da constante de amortecimento, que agora igualamos ao acoplamento λ (isto é, $\eta = 1$), e do parâmetro ε . Nas Figs.

2 (a e b) consideramos, respectivamente, $\varepsilon = 10^3$ e $\varepsilon = 8 \times 10^3$. Conforme salientamos acima - quando da definição do regime de parâmetros do qual decorre o SQLD - ainda que tenhamos a situação extrema na qual $\eta = 1$, a consideração de valores elevados de ε resulta em taxas significativas para a fidelidade do processo. Evidentemente, o declínio das curvas nas Figs. 2 (a e b) comparado à Fig. 1 (a) resulta do acréscimo da taxa de amortecimento em três ordens de magnitude.

Revisitando novamente a situação exposta na Fig. 1 (a), exceto pela excitação inicial dos osciladores de transmissão, que agora estão todos preparados no estado coerente $|\beta\rangle$ ao invés do vácuo, consideramos na Fig. 3 o valor $\beta = 5$. Como esperado, verificamos que o tempo de transferência é exatamente aquele obtido nas Fig. 1 (a). Além disso, verifica-se que a fidelidade do processo é mantida apesar das excitações dos osciladores de transmissão. Entretanto, o padrão da curva é modificado - analogamente ao ocorrido no capítulo anterior - levando a oscilações de fundo devidas à excitação inicial dos osciladores de transmissão. Verifica-se também a ocorrência dos mesmos picos adicionais nos tempos de recorrência, quando a superposição $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ retorna ao emissor.

Finalmente, ainda considerando os mesmos parâmetros da Fig. 1(a), exceto pelo maior valor $\alpha = 10$, de forma a termos uma maior excitação do estado coerente a ser transferido, observamos na Fig. 4 que, em contraste com a situação análoga analisada no capítulo anterior, em que a fidelidade apresentava um significativo decaimento, verificamos aqui que a mesma permanece próxima da unidade. Dessa forma, temos novamente a evidência de que a TQPE via SQLD é mais eficiente que aquela analisada no capítulo anterior, viabilizada por meio da dessintonia entre emissor-receptor e canal de transmissão.

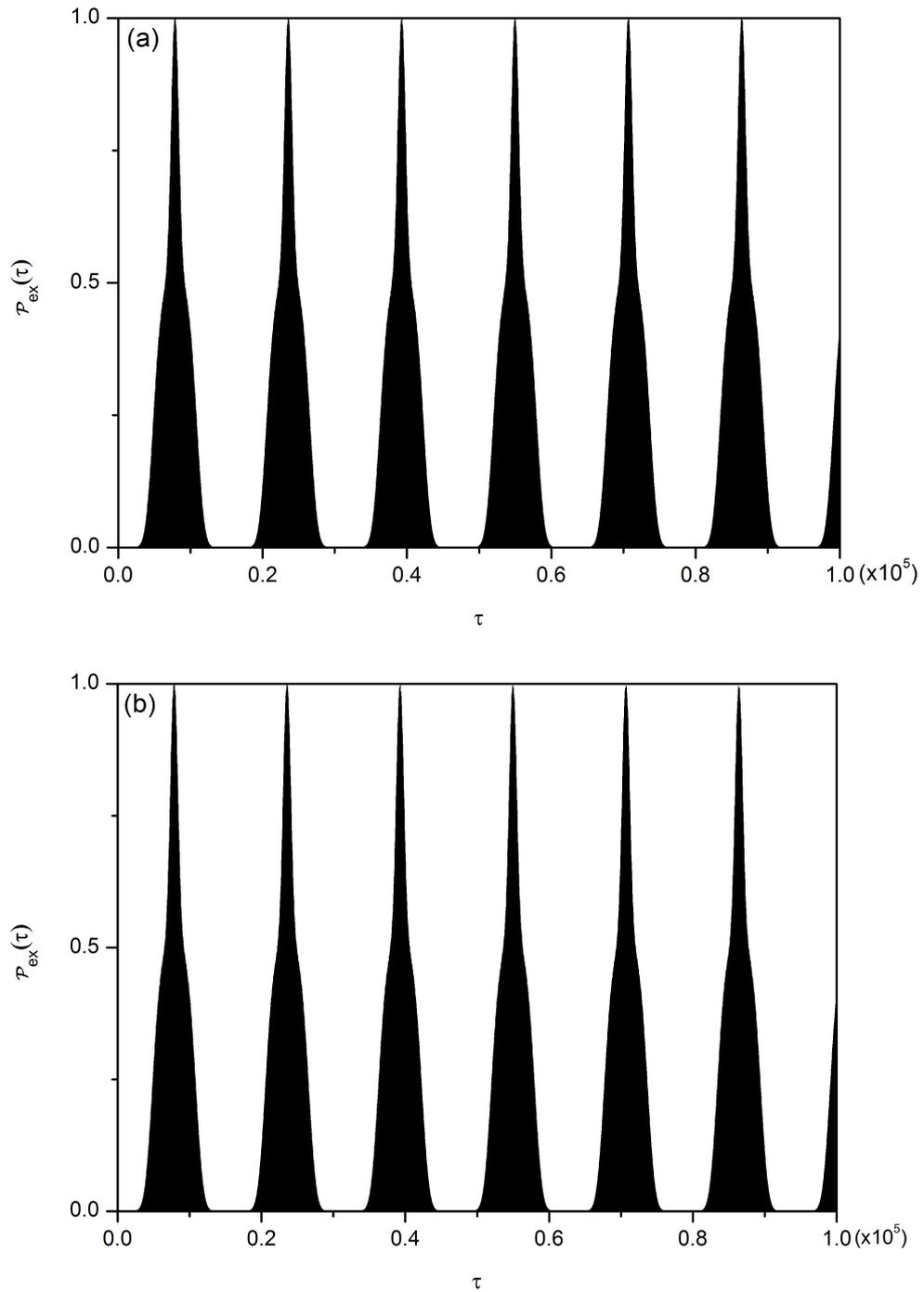


Fig. 1 - Probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o processo de transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ para o N -ésimo oscilador, com $\alpha = 5$ e todos os outros osciladores no estado de vácuo. Em unidades do acoplamento λ , fixamos os valores $\omega_0 = 10^4$ e $\varepsilon = 5 \times 10^3$, além de $\eta = 10^{-3}$. As curvas (a) e (b) se referem aos casos $N = 10$ e $N = 100$, respectivamente.

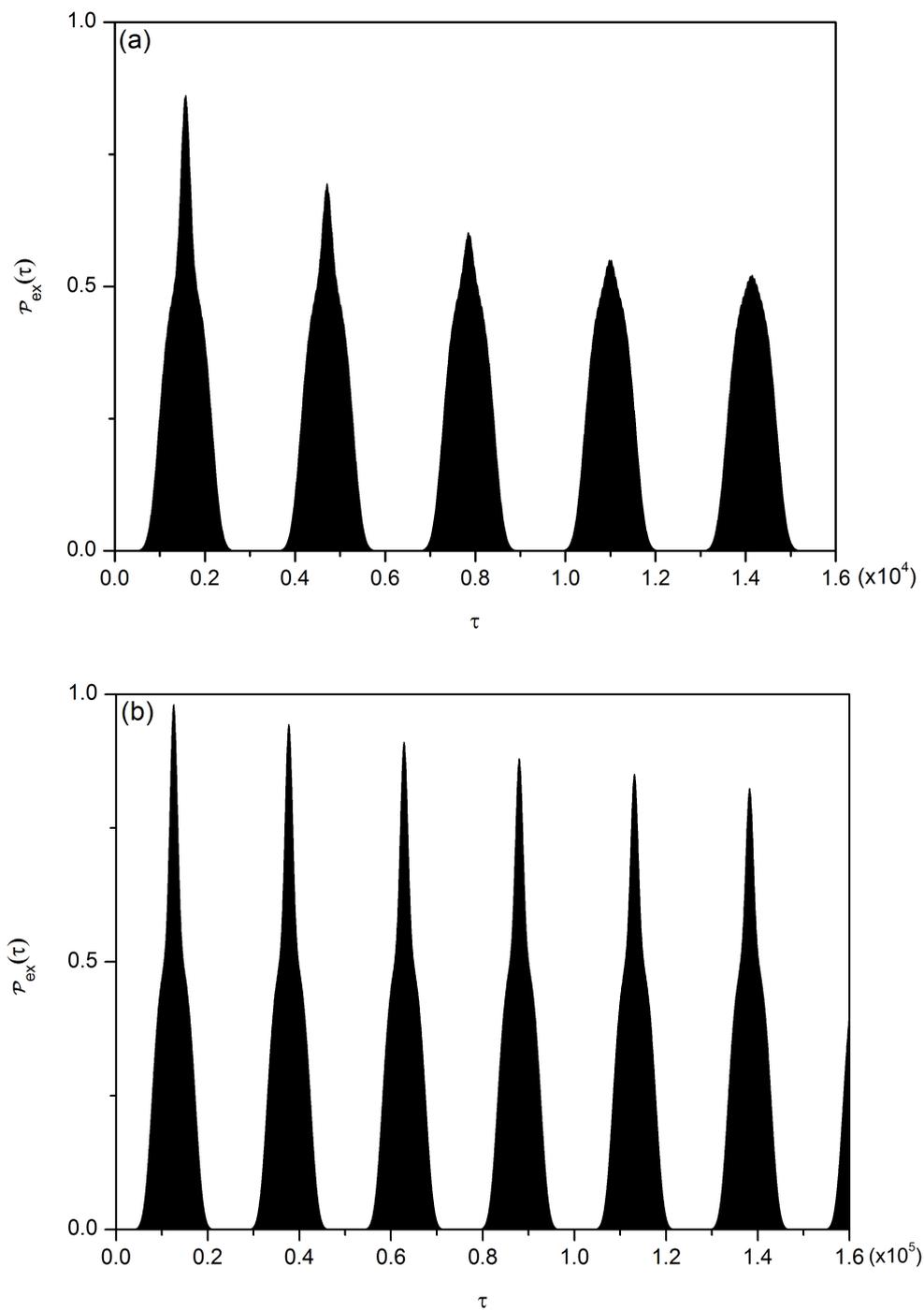


Fig. 2 - Probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o processo de transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ para o N -ésimo oscilador, considerando os mesmos parâmetros da Fig. 1 (a), exceto pela constante de amortecimento, que agora torna-se igual ao acoplamento λ e do parâmetro ε , para o qual consideramos, $\varepsilon = 10^3$ e $\varepsilon = 8 \times 10^3$, em (a) e (b), respectivamente.

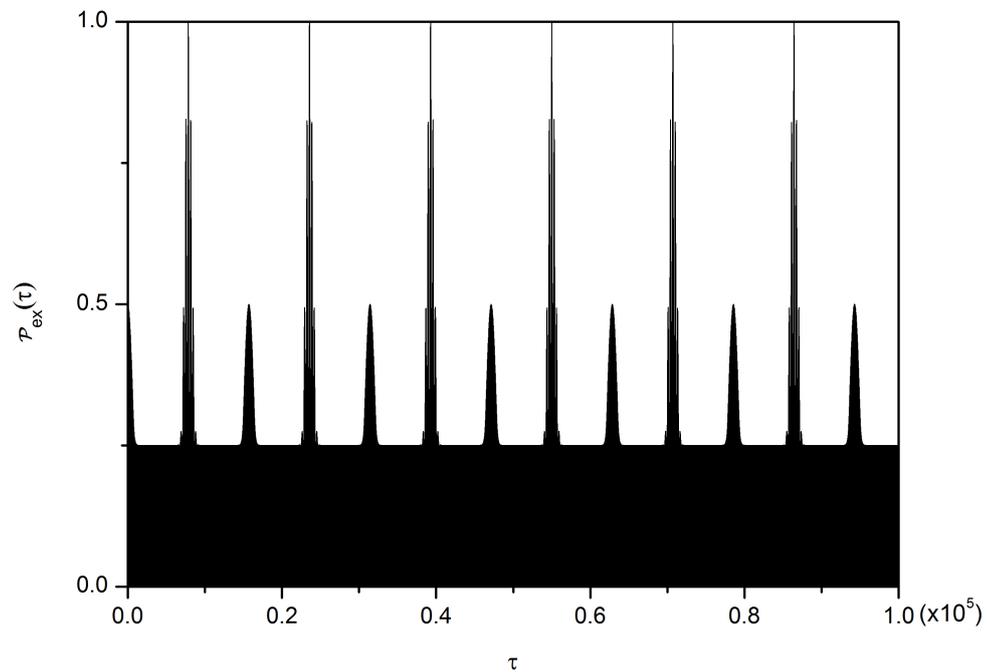


Fig. 3 - Probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o processo de transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ para o N -ésimo oscilador, considerando os mesmos parâmetros da Fig. 1 (a), exceto pela excitação $\beta = 5$ dos estados coerentes populando o canal transmissor.

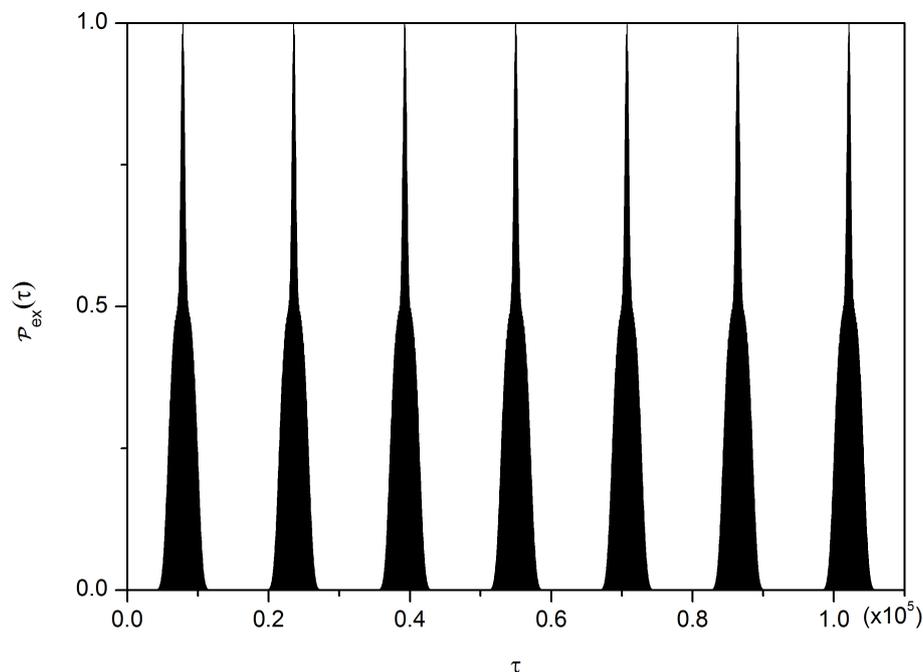


Fig. 4 -Probabilidade de transferência $\mathcal{P}_{\text{ex}}(\tau)$ em função de τ para o processo de transferência do estado $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)_1$ para o N -ésimo oscilador, considerando os mesmos parâmetros da Fig.1 (a), exceto pelo estado coerente $\alpha = 10$.

4.5 Conclusões

Apresentamos neste capítulo um protocolo para a TQPE alternativo àquele abordado no capítulo anterior. Ao invés de empregarmos a dessintonia entre emissor-receptor e o canal de transmissão, utilizamos aqui a construção do que denominamos um SQLD. Procuramos apresentar de forma detalhada as condições necessárias à emergência deste SQLD antes de abordarmos o processo de TQPE. Desta construção resulta um regime especial de parâmetros que viabiliza a TQPE. Em particular, salientamos que a construção dos SQLD aqui desenvolvida permite a identificação imediata de todos os estados quase-livres de decoerência, ao contrário do que se dá com a técnica padrão de emergência dos SLD, que dificulta esta identificação. Salienta-se também que este processo de TQPE assemelha-se em muito àquele do capítulo anterior, dado que se viabiliza também por um mecanismo similar ao efeito túnel. No entanto, a análise gráfica acima desenvolvida revela que a TQPE via SQLD é mais eficaz que aquela do capítulo anterior, dado que a fidelidade do processo decai sempre de forma menos acentuada que naquela situação.

Finalizamos estas conclusões ressaltando a possibilidade de utilização dos SQLD para a

construção de diferentes dispositivos de processamento de informação quântica. Afinal, a emergência dos SQLD envolve condições menos rígidas que aquelas das quais decorrem os SLD, tornando mais prática sua utilização.

5 Recoerência espontânea de estados quânticos após a decoerência

5.1 Introdução

Desde os trabalhos do começo dos anos 80 de Zurek (3, 4), Caldeira e Leggett (6, 8, 39) e Joos e Zeh (7), baseados na abordagem de von Neumann (93) para a redução do vetor de estado, é um consenso que uma superposição de estados pura transforma-se em uma mistura estatística devido à inevitável interação do sistema com o ambiente. Entretanto, um conhecimento mais profundo acerca dos mecanismos da decoerência, além do que se sabe sobre o emaranhamento entre os estados do sistema e do reservatório, permanece uma questão em aberto. Em particular, neste trabalho, partimos da premissa de que um avanço no entendimento dos mecanismos de emaranhamento do sistema com o reservatório requer uma compreensão mais abrangente acerca da dinâmica deste (sistema) em direção à termalização. Perseguimos toda a evolução do conjunto sistema-reservatório até a termalização a partir de uma base de estados privilegiada, que é aquela que diagonaliza o operador densidade reduzido do sistema. Conforme se tornará claro a seguir, tal base de estados prova ser particularmente apropriada para revelar interessantes faces do mecanismo de emaranhamento sistema-reservatório. Visto que os estados dependentes do tempo (DT) desta base permanecem puros até o regime de equilíbrio, apesar de perderem excitação, iremos denominá-la *base pura*.

Primeiramente demonstramos que, ao conduzir o sistema à termalização, o reservatório - considerado a 0K - “cozinha” uma mistura daqueles estados compondo a *base pura*, que pode incluir, por si mesma, a superposição original. Portanto, como dizemos usualmente que o reservatório leva o sistema de um estado puro a uma mistura estatística, *i*) primeiramente identificamos aqueles estados compondo a mistura com a base *natural* do sistema reduzido. Também demonstramos que *ii*) o conhecimento da *base pura* de estados revela automaticamente os mecanismos de decoerência, visto que os termos de interferência de suas funções de Wigner evoluem até se cancelarem mutuamente. Mais claramente, quando o sistema é preparado em um estado inicial

particular, sua interação com o reservatório constrói uma mistura de estados da *base pura* - cujos termos de interferência de suas funções de Wigner evoluem até se cancelarem mutuamente. Além disso, a perspectiva dada pela *base pura* sobre a dinâmica rumo ao equilíbrio nos habilita a *iii*) descobrir o fenômeno da recoerência espontânea *parcial* ou *total*, após a decoerência e mesmo a relaxação, por meio da qual um *estado puro* emerge da mistura estatística criada pelo reservatório. Entretanto, visto que a probabilidade de medir um estado puro recuperado vai à unidade somente em tempos assintóticos, apresentamos um protocolo baseado em interferometria de Ramsey, para extrair da mistura tal estado puro - em qualquer intervalo de tempo - através de medidas projetivas específicas.

Em seguida, observamos que distinguimos duas classes de estados, para analisarmos o fenômeno da recoerência espontânea: os estados *simétricos* e os *assimétricos*, assim denominados devido ao fato de que suas componentes (na base dos estados coerentes) são simetricamente ou assimetricamente distribuídas ao longo de um círculo no espaço de fase ($\text{Re } \alpha \times \text{Im } \alpha$). Dependendo de sua forma, ambos os estados *simétricos* e *assimétricos* iniciais de um sistema aberto exibem recoerência espontânea *total* ou *parcial*. Em particular, a classe de estados *simétricos* é ainda dividida em *simétricos pares* e *simétricos ímpares*. Focando-nos na recoerência espontânea *total*, o estado emergindo de uma mistura estatística produzida a partir de um estado inicial *simétrico par* resulta ser o estado inicial do sistema, exceto pela sua excitação reduzida, devido ao reservatório. Portanto, observamos o interessante fenômeno, onde o estado espontaneamente recuperado, após a decoerência e a relaxação, é uma cópia atenuada do estado inicial. Isto implica que o reservatório somente “embaralha” a informação original do sistema, ao invés de destruí-la.

Ainda com relação à recoerência espontânea *total*, o estado emergindo de uma mistura estatística originada de um estado *simétrico ímpar* pode ser convertido em uma cópia atenuada da superposição inicial, após a aplicação de rotações apropriadas. Da mesma forma, para um estado inicial *assimétrico* sofrendo recoerência espontânea *total*, o estado recuperado pode, em princípio, ser convertido em uma cópia da superposição inicial após a aplicação de transformações unitárias.

Portanto, os estados da *base pura* emergindo da diagonalização do operador densidade reduzido do sistema, podem lançar luz ao entendimento dos mecanismos de decoerência, relaxação e termalização de um sistema quântico. Finalmente observamos que a falta de um maior conhecimento acerca das dinâmicas sistema-reservatório rumo ao equilíbrio, que tentamos amenizar com o presente trabalho, não proibiu o desenvolvimento de uma variedade de protocolos para o contorno da decoerência - que vão desde códigos de correção de erros quânticos (12, 13) até sofisticadas técnicas de engenharia de reservatórios (14–16) e subespaços livres de decoerência (25, 26).

Acreditamos assim que os mecanismos apontados no presente trabalho possam contribuir para a criação de estratégias mais factíveis de abordagem da decoerência em uma plataforma realista de processamento de informação quântica.

5.2 O operador densidade reduzido diagonalizado e os estados da base pura

Iniciamos esta seção definindo os estados da *base pura*. Para este fim, consideramos a evolução dissipativa de um sistema preparado em uma classe geral de estados - uma superposição de estados coerentes - dada por

$$|\psi(0)\rangle = \mathcal{N} \sum_{n=0}^{M-1} c_n |\alpha_n(0)\rangle, \quad (5.1)$$

onde \mathcal{N} é um fator de normalização. Admitimos ainda o Hamiltoniano usual para a interação de um modo harmônico com o ambiente, dado por

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar \sum_k \left[\omega_k b_k^\dagger b_k + \lambda_k b_k^\dagger a + \lambda_k^* b_k a^\dagger \right], \quad (5.2)$$

com a^\dagger (a) sendo o operador de criação (aniquilação) do modo ω preparado no estado representado pela Eq. (5.1), e b_k^\dagger (b_k) o operador de criação (aniquilação) do k -ésimo modo do reservatório. Notamos que, na literatura, a abordagem usual para os cálculos dos tempos de decoerência e relaxação consiste em analisar a taxa de decaimento dos picos não-diagonais da matriz densidade. Entretanto, os estados da *base pura* aqui definidos induzem um novo método para o tratamento dos fenômenos da decoerência, relaxação e agora, recoerência espontânea.

Em seguida, escrevemos o operador densidade reduzido do sistema (26, 29–31, 37) em uma estrutura que se mostra mais adequada em nossa análise, dada por

$$\rho(t) = \left(\begin{array}{ccc} |V_0(t)\rangle & \cdots & |V_{M-1}(t)\rangle \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \sigma_{0,0}(t) & \cdots & \sigma_{0,M-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M-1,0}(t) & \cdots & \sigma_{M-1,M-1}(t) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \langle V_0(t)| \\ \vdots \\ \langle V_{M-1}(t)| \end{array} \right), \quad (5.3)$$

ou, em uma forma mais compacta

$$\rho(t) = \sum_{m,n=0}^{M-1} |V_m(t)\rangle \sigma_{mn}(t) \langle V_n(t)|, \quad (5.4)$$

onde as dinâmicas de relaxação e decoerência estão fatoradas: o estado $|V_m(t)\rangle = \mathcal{N}_{c_m} |\alpha_m(t)\rangle$ leva em conta somente o processo de relaxação, sendo o mecanismo de decoerência descrito pelos elementos da matriz $\sigma(t)$, dados por $\sigma_{mn}(t) = \langle \alpha_n(0) | \alpha_m(0) \rangle / \langle \alpha_n(t) | \alpha_m(t) \rangle$. A diagonalização da matriz Hermitiana $\sigma(t)$ leva diretamente aos autovalores DT $\tilde{\Omega}_m(t)$ e autoestados associados $|\psi_m(t)\rangle$, que compõem a *base pura* - a pedra fundamental deste desenvolvimento. O operador densidade diagonalizado então obtido se escreve como

$$\rho(t) = \sum_m \Omega_m(t) |\psi_m(t)\rangle \langle \psi_m(t)|, \quad (5.5)$$

onde as probabilidades

$$\Omega_m(t) = M^{-1} |\mathcal{N}/\mathcal{N}_m(t)|^2 \tilde{\Omega}_m(t), \quad (5.6)$$

seguem dos autovalores $\tilde{\Omega}_m(t)$ além dos fatores de normalização $\mathcal{N}_m(t)$ dos autoestados $|\psi_m(t)\rangle$. Portanto, a mistura dada pela Eq. (5.5), construída pelo reservatório, torna-se expandida em seus estados naturais, compondo os estados DT da *base pura*, que evolui coerentemente rumo ao vácuo. Para melhor esclarecer tal evolução coerente distinguiamos, em seguida, duas classes de estados iniciais $|\psi(0)\rangle$, os estados *simétricos* (ou não-deformáveis) e os *assimétricos* (ou deformáveis), cujas propriedades, já antecipadas na Introdução, serão discutidas abaixo.

É importante ressaltar que a construção da matriz $\sigma(t)$ na Eq. (5.4), é feita de modo a assegurar que o estado evoluído do sistema seja um dos elementos DT da *base pura*. Qualquer outra escolha para $|V_m(t)\rangle$ levaria a uma outra forma matricial para $\sigma(t)$, onde o estado evoluído não seria mais um dos elementos da base pura.

5.2.1 Estados *simétricos* (ou não-deformáveis)

A classe de estados *simétricos* surge como uma consequência da seguinte condição: a superposição de estados coerentes excitados, Eq. (5.1), é escolhida com $\alpha_n = |\alpha| e^{i\delta_n}$ e com as fases relativas obedecendo a $\delta_n = 2\pi n/M$ (além de um fator de fase global). Esta condição assegura que os M números complexos α_n estejam simetricamente distribuídos em um círculo de raio $|\alpha|$ no espaço de fase ($\text{Re } \alpha \times \text{Im } \alpha$). Então, as linhas consecutivas conectando a origem do espaço de fase às componentes α_n estarão separadas por um ângulo $2\pi/M$. Após esclarecermos o significado do termo *simétrico*, resta-nos entender o conceito de não-deformabilidade de estados. Para este fim, escrevemos os autovalores da matriz $\sigma(t)$ como

$$\tilde{\Omega}_m(t) = \sum_{n=0}^{M-1} \left(e^{im\frac{2\pi}{M}} \right)^n e^{-|\alpha|^2 \left[1 - \left(e^{-i\frac{2\pi}{M}} \right)^n \right] (1-e^{-\gamma t})} \quad (5.7)$$

com os autoestados associados da *base pura* dados por

$$|\psi_m(t)\rangle = \mathcal{N}_m(t) \sum_n e^{i2\pi mn/M} c_n |\alpha_n(t)\rangle. \quad (5.8)$$

Visto que os coeficientes $e^{i2\pi mn/M} c_n$ não são DT, os estados $|\psi_m(t)\rangle$ evoluem coerentemente sob uma dinâmica dissipativa livre de ruído, *i.e.*, sem as flutuações que usualmente estão associadas à dissipação. A bem conhecida evolução de um estado coerente inicial α , ocasionada por um reservatório a 0K, tal que $\alpha(t) = \alpha e^{-(\gamma/2+i\omega)t}$ (γ sendo a constante de amortecimento) é o nosso caso pragmático de tal dinâmica dissipativa livre de ruído (94–96), que foi aqui estendida à superposições de estados coerentes, como na Eq. (5.8). Note que o estado particular da *base pura*, $|\psi_{m=0}(t)\rangle$, segue diretamente da superposição original, $|\psi(0)\rangle$, atenuada por uma dinâmica dissipativa livre de ruído, *i.e.*, $|\psi_0(t)\rangle = \mathcal{N}(t) \sum_n c_n |\alpha_n(t)\rangle$, de modo que $|\psi_0(t)\rangle$ se torne uma cópia atenuada (ou reduzida) de $|\psi(0)\rangle$. Similarmente, os outros estados da *base pura*, $|\psi_{m\neq 0}(t)\rangle$, originados da interação sistema-reservatório, também evoluem de forma a tornarem-se suas próprias cópias atenuadas, com a diferença de que as suas probabilidades $\Omega_{m\neq 0}(t)$ aumentam a partir de zero, enquanto que $\Omega_0(t)$ decresce da unidade. Para sermos mais precisos sobre o que significa uma cópia atenuada de um estado, vamos recorrer à função de Wigner, para mostrar que a sua forma não é modificada durante a evolução, sendo somente atenuada por um fator de escala dependente do tempo.

Portanto, nossa análise baseada nos estados da *base pura* generaliza o que se sabe sobre um sistema preparado em um estado coerente α e acoplado a um reservatório no zero absoluto (94, 95). Enquanto o estado evoluído do sistema permanece coerente, $\alpha(t) = \alpha e^{-(\gamma/2+i\omega)t}$, apesar de perder excitação para o reservatório, na abordagem aqui apresentada *todos* os estados da *base pura*, $|\psi_m(t)\rangle$, evoluem de maneira similar, seguindo uma dinâmica dissipativa livre de ruído de forma a se tornarem cópias atenuadas de si mesmos. Visto que a forma da função de Wigner destes estados permanece a mesma (a menos de um fator de escala), os estados *simétricos* podem também ser denominados *não-deformáveis*. Finalmente notamos que os estados *simétricos* podem ainda ser distinguidos pelas suas paridades, levando aos estados *simétricos pares* e *simétricos ímpares*, como mostraremos abaixo.

5.2.2 Estados *assimétricos* (ou deformáveis)

Quando as fases relativas dos estados coerentes $\alpha_n = |\alpha| e^{i\delta_n}$ não obedecem à condição $\delta_n = 2\pi n/M$, a superposição inicial $|\psi(0)\rangle$ entra na categoria dos estados *assimétricos*. Na au-

sência desta condição, os estados $|\alpha_n\rangle$ ficam assimetricamente distribuídos ao longo do círculo de raio $|\alpha|$. Além disso, a superposição representada pela Eq. (5.1), cujas componentes $|\alpha_n\rangle$ apresentam excitações n -dependentes, *i.e.*, $\alpha_n = |\alpha_n| e^{i\delta_n}$, também se enquadra na classe dos estados *assimétricos*. Por simplicidade, vamos analisar estados deformáveis com $M = 2$, tendo excitações distintas, $\alpha_0 = |\alpha_0| e^{i\delta_0}$ e $\alpha_1 = |\alpha_1| e^{i\delta_1}$, e cujos autovalores são

$$\tilde{\Omega}_m(t) = \sum_n e^{-\frac{n}{2} [|\alpha_1|^2 + |\alpha_0|^2 - 2|\alpha_1\alpha_0| \cos(\delta_1 - \delta_0)] (1 - e^{-\gamma t})} \cos(mn\pi) \quad (5.9)$$

com autovetores

$$|\psi_m(t)\rangle = \mathcal{N}_m(t) \sum_n e^{in[\pi m + |\alpha_1\alpha_0| \sin(\delta_1 - \delta_0)] (1 - e^{-\gamma t})} c_n |\alpha_n(t)\rangle \quad (5.10)$$

Como uma consequência das fases relativas DT presentes na Eq. (5.10), os estados evoluídos não são mais cópias atenuadas de si mesmos: a forma de suas funções de Wigner associadas se modifica durante a evolução, e é por esse motivo que os denominamos estados *deformáveis*. Sob este ponto de vista, diferentemente do caso em que a superposição inicial $|\psi(0)\rangle$ é um estado *simétrico*, o particular estado da *base pura* $|\psi_{m=0}(t)\rangle$ não mais se origina de $|\psi(0)\rangle$ sob uma dinâmica dissipativa livre de ruído. Em outras palavras, o estado evoluído da *base pura*, $|\psi_{m=0}(t)\rangle$, não retém a característica de coerência de sua forma inicial $|\psi(0)\rangle$, *i.e.*, a mesma forma da função de Wigner associada a $|\psi(0)\rangle$. Entretanto, visto que a pureza de todos os estados *assimétricos* $|\psi_m(t)\rangle$ persiste, apesar das fases DT adquiridas, estes também compõem uma *base pura* de estados, evoluindo coerentemente para o vácuo. Similarmente a $|\psi_{m=0}(t)\rangle$, os outros estados $|\psi_{m \neq 0}(t)\rangle$, criados pela interação sistema-reservatório e que compõem a mistura estatística, também evoluem de forma a tornarem-se cópias deformadas de si mesmos.

5.3 Traçando as rotas em direção à decoerência, relaxação e recoerência

5.3.1 Estados iniciais *simétricos*

Vamos considerar que o sistema seja preparado em um estado *simétrico par*, ou seja, numa superposição par de estados coerentes $|\psi(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$, *i.e.*, vamos considerar a Eq. (5.1) com $M = 2$ e $c_0 = c_1$. Neste caso, a matriz densidade evoluída, Eq. (5.5), é expandida pela *base pura* de estados *simétricos* da Eq. (5.8), que evoluem de forma a serem, no tempo $t + dt$, cópias atenuadas daquilo que eram no tempo t . Na Fig. 1 (a), é mostrada a evolução

da probabilidade Ω_0 (Ω_1) associada ao estado da *base pura*, $|\psi_0(t)\rangle$ ($|\psi_1(t)\rangle$), como dado na Eq. (5.6). Assim como Ω_0 decresce da unidade, Ω_1 cresce a partir de zero, ambas tornando-se próximas nas vizinhanças do tempo de decoerência τ_D . Do tempo de decoerência ao tempo de recoerência τ_R , a ser definido abaixo, passando através do tempo de relaxação $\tau \sim \gamma^{-1}$, ambas as probabilidades permanecem praticamente iguais, mantendo a *inversão de estados* $I(t) \equiv \Omega_0(t) - \Omega_1(t)$ próxima a zero, como indicado pela linha pontilhada. Entretanto, próximo ao tempo de recoerência, observamos o ressurgimento, não-usual, de $I(t)$, com Ω_0 retornando assintoticamente à unidade espontaneamente, indicando a recoerência do estado inicial, com a mesma paridade inicial, mas com a excitação atenuada. Sendo o autoestado associado ao autovalor $\Omega_0(t)$, o estado que sofreu a recoerência apresenta, como antecipamos na Introdução, exatamente a mesma forma da superposição inicial *simétrica par*, $|\psi_0(t)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle)$, exceto pela excitação atenuada $\alpha(t) = \alpha e^{-(\gamma/2+i\omega)t}$.

Se considerarmos a entropia linear $S(t) = 1 - \text{Tr}\rho^2(t)$, observamos na Fig. 1 (a) que ela cresce desde zero até aproximadamente $1/2$ e em seguida retorna a zero, devido à recoerência, que faz com que o sistema retorne (aproximadamente) a um estado de superposição pura. (Uma superposição pura é atingida somente assintoticamente, quando $|\psi_0(t)\rangle$ se torna o estado de vácuo.) Deve ser enfatizado, entretanto, que além do bem-conhecido fato de que a entropia retorna a zero devido ao sistema ir para o vácuo, aqui observamos que, antes de atingir o equilíbrio, o sistema recupera espontaneamente a sua coerência inicial, apesar da excitação atenuada. A evidência deste fenômeno de recoerência espontânea será ainda reforçada pela Fig. 2, onde os termos de interferência das funções de Wigner dos estados da *base pura* são plotados.

Antes de procedermos à análise das funções de Wigner, vamos considerar que o sistema esteja preparado em um estado *simétrico ímpar*, ou seja, numa superposição ímpar de estados coerentes, $|\psi(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle)$ (considerando a Eq. (5.1) com $M = 2$ e $c_1 = -c_0$). Neste caso, diferentemente do que foi mostrado na Fig. 1 (a), observamos na Fig. 1(b) que nas proximidades do tempo de relaxação, as curvas de probabilidade se cruzam, com Ω_1 indo à unidade assintoticamente, ao invés de Ω_0 (que decresce da unidade até zero). Portanto, ao invés de observamos a recoerência da superposição inicial ímpar de estados coerentes $|\psi_0(t)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha(t)\rangle - |-\alpha(t)\rangle)$, observamos novamente a recoerência da superposição *par*, $|\psi_1(t)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle)$. A curva de inversão de estados muda seu sinal de 1 a -1 , assintoticamente. A explicação dos comportamentos distintos de $I(t)$ nas Figs. 1 (a e b) vem da termalização do sistema com o estado de vácuo, visto que estamos considerando o reservatório a 0K. De fato, o estado da *base pura* cuja probabilidade vai à unidade assintoticamente deve conter o estado de vácuo $|0\rangle$: assim como

o estado par $|\psi_1(t)\rangle = \mathcal{N}(t)(|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle)$ evolui para o vácuo (com $\Omega_1 \rightarrow 1$), o estado ímpar $|\psi_0(t)\rangle = \mathcal{N}(t)(|\alpha(t)\rangle - |-\alpha(t)\rangle)$ desaparece (com $\Omega_0 \rightarrow 0$). Enfatizamos, entretanto que, o estado de equilíbrio atingido nas Figs. 1(a) e (b) se torna o vácuo apenas assintoticamente, *i.e.*, antes de atingir o vácuo temos, em ambos os casos, um estado de superposição quase puro $\mathcal{N}(t)(|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle)$. Além disso, como já foi notado na Introdução, a superposição ímpar de estados coerentes evoluída, $|\psi_0(t)\rangle$ pode ser recuperada a partir da superposição par, $|\psi_1(t)\rangle$, conforme discutiremos abaixo, através de uma rotação realizada por um processo interferométrico.

Ainda em relação aos estados *simétricos*, mas agora com a paridade indefinida, na Fig. 1(c) consideramos a superposição inicial $\mathcal{N}(c_0|\alpha\rangle + c_1|-\alpha\rangle)$, escolhendo $c_0/c_1 = 3$. A diferença com os casos das Figs. 1(a) e (b) é que a inversão de estados $I(t)$ não retorna à unidade, indicando que a mistura estatística criada pelo mecanismo de decoerência permanece, apesar da termalização, com Ω_0 atingindo assintoticamente o valor $|c_0 + c_1|^2 / 2(|c_0|^2 + |c_1|^2) = 0.8$. Este é outro interessante aspecto revelado pela *base pura*: um estado misto sobrevivendo ao processo de termalização. Notamos que ambos os estados na mistura têm o estado de vácuo como uma de suas componentes, que sobrevive assintoticamente. Portanto, no caso em que o sistema é preparado em um estado de superposição cujas componentes apresentam amplitudes de probabilidade distintas, observamos uma recoerência parcial, com ambas as probabilidades Ω_0 e Ω_1 sobrevivendo ao processo de termalização. Finalmente notamos que a entropia linear na Fig. 1(c) apresenta o mesmo comportamento visto nas Figs. 1(a) e (b) à exceção de ser valor máximo ser da ordem de $2[|c_0c_1| / (|c_0|^2 + |c_1|^2)]^2 = 0.18$ ao invés de 0.5.

5.3.2 Estados iniciais *assimétricos*

Quando o sistema é preparado em um estado *assimétrico*, os mesmos comportamentos mostrados nas Figs. 1(a)-(c) são observados, *i.e.*, a recoerência *total* ou *parcial* também ocorre para estados iniciais *assimétricos*. De fato, após se anular, a inversão de estados $I(t)$ pode retornar à unidade, *i.e.*, a ± 1 [como nas Figs. 1(a) e (b)] para os estados $\mathcal{N}(|\alpha\rangle \pm e^{-i|\alpha|^2} |i\alpha\rangle)$, respectivamente, ou pode não retornar [como na Fig. 1(c)], para o estado inicial $\mathcal{N}(3|\alpha\rangle + e^{-i|\alpha|^2} |i\alpha\rangle)$. Entretanto, como antecipamos na Introdução, os estados recuperados a partir de misturas estatísticas originadas de estados iniciais puros *assimétricos* não são cópias atenuadas das superposições iniciais. Além disso, os estados compondo a mistura estatística evoluem de forma a tornarem-se cópias deformadas de si mesmos. Apesar disto, o conhecimento do estado inicial, mesmo sendo *assimétrico*, nos permite converter o estado recuperado, através de operações unitárias apropriadas, em uma cópia atenuada da superposição inicial.

5.4 O mecanismo da decoerência revelado pelas funções de Wigner dos estados da base pura

Analisando a evolução das funções de Wigner $W_m(\zeta, \zeta^*; t)$, associadas aos estados da base pura $\{|\psi_m(t)\rangle\}$, acessamos o mecanismo do processo de decoerência. Para tornar isto claro, vamos considerar que o sistema seja preparado em uma superposição par de estados coerentes $|\psi(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$, sendo então levado - pela sua interação com o reservatório - à mistura estatística, Eq. (5.5), para a qual a função de Wigner associada é dada por

$$W(\zeta, \zeta^*; t) = \sum_m \Omega_m(t) W_m(\zeta, \zeta^*; t). \quad (5.11)$$

Nas Figs. 2(a) e (b), plotamos uma seção de corte dos termos de interferência de ambas as funções $\Omega_0 W_0$ e $\Omega_1 W_1$, tomadas no referencial girante $\text{Re } \xi \times \text{Im } \xi$ com $\text{Re } \xi = \text{Re } \zeta \cos(\omega t) - \text{Im } \zeta \sin(\omega t) = 0$ e $\text{Im } \xi = \text{Re } \zeta \sin(\omega t) + \text{Im } \zeta \cos(\omega t)$. (O referencial girante $\text{Re } \xi \times \text{Im } \xi$ foi escolhido para eliminarmos o efeito girante da evolução livre do sistema.) Observamos que tais termos de interferência evoluem de forma a cancelarem-se mutuamente nas proximidades do tempo de decoerência, *i.e.*, quando $\Omega_0(t) \approx \Omega_1(t)$. Portanto, quando preparamos o sistema em uma superposição $|\psi_0(0)\rangle$, observamos que sua evolução, sob a ação do reservatório, leva exatamente àqueles estados complementares $|\psi_{m \neq 0}(t)\rangle$, cujos termos de interferência de suas funções de Wigner evoluem de forma a se cancelarem mutuamente, como pode ser visto na Fig. 2 (b).

Se partirmos, por exemplo, de uma superposição par de estados coerentes $|\psi(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ como na Fig. 1 (a), a mistura gerada pela interação sistema-reservatório irá conter ambos os estados: aquele evoluído diretamente de $|\psi(0)\rangle$, dado por $|\psi_0(t)\rangle = \mathcal{N}(t)(|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle)$, e seu estado complementar, $|\psi_1(t)\rangle = \mathcal{N}(t)(|\alpha(t)\rangle - |-\alpha(t)\rangle)$, criado de modo a cancelar os termos de interferência associados ao estado original. De fato, à medida que o tempo passa, desde a preparação do estado inicial, a probabilidade Ω_1 aumenta, fazendo com que os termos de interferência em $\Omega_1 W_1$ se cancelem com aqueles em $\Omega_0 W_0$.

Na Fig. 2(c) plotamos os termos de interferência das funções $\Omega_0 W_0$ e $\Omega_1 W_1$, no tempo de recoerência τ_R . Podemos observar claramente nesta figura a recoerência do estado original, já que $\Omega_0(t)$ retorna à unidade, e $\Omega_1(t)$ a zero, assintoticamente. Portanto, a evolução das funções de Wigner $W_m(\zeta, \zeta^*; t)$ se mostra útil para a análise dos mecanismos de decoerência e recoerência espontânea. De fato, as funções de Wigner revelam que estes estados criados, compondo a mistura,

evoluem de forma a eliminar os termos de interferência da superposição inicial. Além disso, eles revelam, inequivocamente, por meio da probabilidade ascendente $\Omega_0(t)$, a recoerência do estado original.

5.5 Tempos característicos

5.5.1 Uma expressão para o tempo de decoerência de estados M -dimensionais

Nesta seção, apresentamos uma nova estimativa para o tempo de decoerência, válida para quaisquer estados de superposição M -dimensionais. Baseados no fato de que o autovalor $\tilde{\Omega}_0(t)$, associado à superposição inicial evoluída $|\psi_0(t)\rangle$, é uma medida do grau de pureza da mistura estatística, então, sua taxa de variação

$$\tau_D^{-1} \equiv \left. \frac{d}{dt} \tilde{\Omega}_0(t) \right|_{t=0}, \quad (5.12)$$

nos dá uma estimativa do tempo de decoerência τ_D do estado, qualquer que seja a dimensão de seu espaço de Hilbert. Além de ser válida para estados de superposição M -dimensionais, a Eq. (5.12) também nos oferece um método independente da base para o cálculo do tempo de decoerência, feito diretamente do autovalor $\tilde{\Omega}_0(t)$. A literatura preocupada com a decoerência de superposições M -dimensionais leva em conta somente as medidas relativas dependentes do tempo pelas quais quanto maior for a distância dos elementos de matriz com relação à diagonal principal do operador densidade, menores serão os seus tempos de decaimento (96). A Eq. (5.12) fornece, ao invés disto, uma estimativa do tempo de decoerência de toda a superposição.

Como uma aplicação da medida, Eq. (5.12), vamos considerar, por exemplo, o estado *simétrico*, Eq. (5.8) com $m = 0$, que leva ao resultado $\tau_D = 1 / (M |\alpha|^2 \gamma)$. Para o caso particular com $M = 3$, obtemos a superposição $|\psi(0)\rangle = \mathcal{N} (|\alpha\rangle + |e^{2i\pi/3}\alpha\rangle + |e^{-2i\pi/3}\alpha\rangle)$ cujos seis picos não-diagonais decaem todos à mesma taxa $e^{-3|\alpha|^2(1-e^{-\gamma t})/2}$, resultando num valor não-razoável do tempo de decoerência, $2/3 |\alpha|^2 \gamma$ (96), que é maior mesmo que aquele para uma superposição bidimensional par ou ímpar de estados coerentes. Entretanto, a Eq. (5.12) dá o valor razoavelmente menor $1/3 |\alpha|^2 \gamma$.

5.5.2 Tempo de recoerência e termalização

Com relação ao tempo de recoerência τ_R , este é definido como sendo o maior valor para o qual a relação $|d\Omega_0(t)/d(\gamma t)| = e^{-1}$, é satisfeita. Como mostrado na Fig. 1, a igualdade

escolhida, $|d\Omega_0(t)/d(\gamma t)| = e^{-1}$ acontece duas vezes: primeiro, nas proximidades do tempo de decoerência, quando o grau de pureza do estado inicial é significativamente reduzido, devido à ação do reservatório; e depois, no tempo de recoerência, quando a probabilidade $\Omega_0(t)$ [$\Omega_1(t)$], associada ao estado inicial evoluído $|\psi_0(t)\rangle$, como na Fig. 1 (a) [ao estado complementar $|\psi_1(t)\rangle$, como na Fig. 1 (b)], começa a crescer até a unidade. Também notamos que o tempo de recoerência pode ser definido como o tempo de termalização do sistema com o reservatório, *i.e.*, o tempo em que a excitação do sistema se aproxima àquela dos osciladores do reservatório. Portanto, o tempo de recoerência pode também ser tomado como uma escala de tempo do processo de termalização, no qual parte significativa da energia do sistema encontra-se transferida ao reservatório.

5.6 Excitação dos estados da *base pura*

Visto que o tempo de recoerência é cerca de uma ordem de magnitude maior que o tempo de relaxação para os estados analisados nas Figs. 1 e 2, é importante estimar a excitação do estado que sofreu a recoerência em tal escala de tempo, considerando a possibilidade de verificação experimental do fenômeno. Sob este ponto de vista, estando novamente o sistema preparado em uma superposição par de estados coerentes, $|\psi(0)\rangle = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ com $|\alpha|^2 = 50$, na Fig. 3 plotamos a excitação dos estados da base, $|\psi_0(t)\rangle$, $|\psi_1(t)\rangle$, e aquele do operador densidade $\rho(t)$ na Eq. (5.5). Observamos que as excitações de ambos os estados, $|\psi_0(t)\rangle$ e $\rho(t)$ vão assintoticamente a zero, enquanto que aquela de $|\psi_1(t)\rangle$, que não contém o vácuo, vai assintoticamente à unidade. Além disso, verificamos que próximo a τ_R , a excitação do estado que sofreu a recoerência, $|\psi_0(t)\rangle$ [veja a Fig. 1 (a)], se reduz por um fator 10^{-3} , demandando uma alta relação sinal-ruído dos detectores a serem utilizados em uma verificação experimental do processo de recoerência espontânea. Se tiver um sinal acima do ruído da cavidade, a informação original pode sempre ser recuperada através de medidas projetivas, mesmo após o tempo de recoerência. Além das delicadezas experimentais, observamos que a recoerência de um estado de superposição inicial - devida aos mesmos mecanismos de decoerência que a misturaram previamente - é uma característica intrigante da dinâmica sistema-reservatório, que constitui o ponto principal deste trabalho.

A excitação reduzida do estado que sofreu a recoerência sugere, entretanto, que pode ser interessante recuperar o estado puro evoluído $|\psi_0(t)\rangle$ da mistura, através de uma medida de recuperação realizada antes do início do processo de recoerência. De fato, da Fig. 3 concluímos que, mesmo se efetuada próxima ao tempo de relaxação $\tau \sim \gamma^{-1}$, a medida de recuperação leva a um estado projetado com uma excitação significativa, em torno do valor $|\alpha|^2/e$. Abaixo, apresentamos um protocolo para a implementação desta medida de recuperação no contexto de eletrodinâmica

de cavidades.

5.7 Medida de recuperação

Como foi observado na Fig. 1, a coerência (ou o conteúdo de informação embutido nos coeficientes c_n) da superposição original $|\psi(0)\rangle$ permanece intacta para os estados *simétricos*, através da evolução do estado da base $|\psi_0(t)\rangle$. Portanto, tal coerência pode ser recuperada através de medidas projetivas, seguindo um protocolo desenvolvido abaixo, no âmbito da eletrodinâmica quântica de cavidades. (Observamos, entretanto, que apesar de as formas das funções de Wigner dos estados *assimétricos* se modificarem durante a evolução, é possível, em princípio, recuperar a coerência original daqueles estados através da aplicação de transformações unitárias no estado recuperado, desde que a superposição original seja conhecida.) Por simplicidade, vamos aplicar este protocolo de recuperação em estados *simétricos* para os quais $M = 2^Q$, Q sendo um inteiro positivo.

O primeiro estágio da medida de recuperação é realizado pelo envio de Q átomos de dois níveis (estados fundamental $|g\rangle$ e excitado $|e\rangle$) através de um arranjo tipo Ramsey (ATR), composto por uma cavidade com alto fator de qualidade colocada entre duas zonas de Ramsey. Antes de adentrarem o ATR, os átomos são excitados, por um laser, ao estado $|e\rangle$. Na cavidade, o q -ésimo átomo sofre uma interação dispersiva, com o seu tempo de passagem ajustado tal que $\tau_q = \pi/2^{q-1}\chi$, χ sendo o parâmetro de acoplamento. Nas zonas de Ramsey, rotuladas por $\ell = 1, 2$, os estados excitado e fundamental do q -ésimo átomo sofrem as rotações $|e_q\rangle \Rightarrow \mu_q^{(\ell)} |g_q\rangle + \nu_q^{(\ell)} |e_q\rangle$ e $|g_q\rangle \Rightarrow \nu_q^{(\ell)*} |g_q\rangle - \mu_q^{(\ell)*} |e_q\rangle$, respectivamente. Após passarem pelo ATR, os átomos são medidos por detectores de ionização. O ajuste dos parâmetros de rotação do q -ésimo átomo ($\mu_q^{(\ell)}, \nu_q^{(\ell)}$), dependerão de todas as medidas de ionização prévias envolvendo os $(q-j)$ -ésimos átomos, com $1 \leq j \leq q-1$. Devemos escolher $\mu_1^{(\ell)} = (-1)^m \nu_1^{(1)} = \nu_1^{(2)} = 1/\sqrt{2}$, e para $q > 1$: $\mu_q^{(\ell)} = e^{i\pi m/2^{q-1}} \prod_{j=1}^{q-1} e^{i\pi k_j/2^{q-j}} \nu_q^{(1)} = \nu_q^{(2)} = 1/\sqrt{2}$, onde k_j indica o resultado da medida do j -ésimo átomo, tal que $k_j = 0$ (1) para o estado fundamental (excitado). Após a passagem de todos os Q átomos através do ATR e suas subseqüentes medidas, o operador densidade reduzido do campo da cavidade torna-se

$$\rho(t) = \left(\prod_{q=1}^Q \sum_{k_q=0}^1 \langle \mathcal{M}_q | \mathcal{S}_{qk_q} \rangle \right) \Omega_{f(\{k_j\})}(t) |\psi_{f(\{k_j\})}(t)\rangle \langle \psi_{f(\{k_j\})}(t)|, \quad (5.13)$$

onde $|\mathcal{M}_q\rangle$ indica o estado medido do q -ésimo átomo ($\mathcal{M}_q = e_q$ ou g_q), \mathcal{S}_{qk_q} indica seus estados ($\mathcal{S}_{q0} = g_q$, $\mathcal{S}_{q1} = e_q$), e $f(\{k_j\}) = \sum_{j=1}^Q 2^{j-1} k_j$ são inteiros no intervalo $[0, M-1]$. Finalmente

ressaltamos que, quando o estado projetado difere da superposição inicial atenuada $|\psi_0(t)\rangle$ que tentamos recuperar, devemos implementar, assim como no protocolo de teleportação, mostrado nas Ref. (97–101), o segundo estágio da medida de recuperação, *i.e.*, uma operação que converte o estado medido na superposição desejada, como discutiremos abaixo.

5.7.1 Exemplo

Para ilustrar o segundo estágio deste protocolo, vamos considerar novamente que o sistema esteja preparado em uma superposição par de estados coerentes, levando ao operador densidade

$$\rho(t) = \sum_{m=0}^1 \Omega_m(t) |\psi_m(t)\rangle \langle \psi_m(t)|, \quad (5.14)$$

onde

$$\Omega_m(t) = 2^{-1} |\mathcal{N}/\mathcal{N}_m(t)|^2 \left[1 + (-1)^m e^{-2|\alpha|^2(1-e^{-\gamma t})} \right]. \quad (5.15)$$

Da Eq. (5.13), obtemos a matriz densidade reduzida para o campo da cavidade

$$\rho(t) = \langle \mathcal{M}_1 | g_1 \rangle \Omega_0(t) |\psi_0(t)\rangle \langle \psi_0(t)| + \langle \mathcal{M}_1 | e_1 \rangle \Omega_1(t) |\psi_1(t)\rangle \langle \psi_1(t)|. \quad (5.16)$$

Portanto, a detecção do átomo no estado fundamental ou excitado, g_1 ou e_1 , projeta o modo da cavidade ou na superposição par $|\psi_0(t)\rangle = \mathcal{N}_0(t) (|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle)$ ou ímpar $|\psi_1(t)\rangle = \mathcal{N}_1(t) (|\alpha(t)\rangle - |-\alpha(t)\rangle)$ de estados coerentes. No primeiro caso, o estado de saída $|\psi_0(t)\rangle$ é exatamente a superposição original atenuada, $|\psi(0)\rangle$. (Evidentemente, quanto mais rápida for feita a medida de recuperação, maior será a probabilidade de se obter o estado inicial atenuado desejado, tornando claro o mecanismo por trás do protocolo mostrado na Ref. (102) para o controle da decoerência de um estado de superposição.) No segundo caso, $|\psi_1(t)\rangle$ deve ser convertido em $|\psi_0(t)\rangle$. Para este fim, o que temos que fazer é repetir a medida do primeiro estágio, usando um segundo átomo de dois níveis, também preparado no estado excitado. De fato, o estado projetado $|\psi_1(t)\rangle$ - após uma primeira medida possivelmente mal sucedida - evolui para o mesmo operador densidade, Eq. (5.14), com probabilidade

$$\Omega_m(t) = 2^{-1} |\mathcal{N}/\mathcal{N}_m(t)|^2 \left[1 - (-1)^m e^{-2|\alpha|^2(1-e^{-\gamma t})} \right]. \quad (5.17)$$

com $\mathcal{N}_m(t)$ sendo a normalização do estado $|\psi_m(t)\rangle$. Supondo que uma medida mal sucedida seja feita em t_0 , devemos calcular a probabilidade de transição $\mathcal{P}_{\psi_1 \rightarrow \psi_0}$, para converter $|\psi_1(t)\rangle$ em $|\psi_0(t)\rangle$ no intervalo de tempo entre t_0 e t_K , depois de K medidas do segundo estágio sequenciais, tomadas nos tempos t_1, t_2, \dots, t_K , igualmente espaçados por um intervalo de tempo Δt .

Considerando que $t_1 = 2\tau_D$, obtemos

$$\mathcal{P}_{\psi_1 \rightarrow \psi_0} = 1 - \prod_{j=1}^K \Omega_1 [t_j = (j+1)\tau_D], \quad (5.18)$$

com

$$\Omega_1(j\tau_D) = \frac{1}{2} \left| \frac{\mathcal{N}(j\tau_D)}{\mathcal{N}_0[(j+1)\tau_D]} \right|^2 \left[1 + e^{-2|\alpha|^2 e^{-j\gamma\tau_D}(1-e^{-\gamma\tau_D})} \right]. \quad (5.19)$$

Quando $|\alpha|^2 \gg 1$, segue que $\mathcal{P}_{\psi_1 \rightarrow \psi_0} \rightarrow 1 - 2^{-K(K+1)/2}$, dando, por exemplo, a probabilidade de se obter uma única “cara” em K lançamentos de uma moeda. Mesmo que a excitação do estado recuperado possa ficar muito reduzida após essas K medidas, ainda é possível teleportar este estado para outro sistema mais excitado, de forma a resgatarmos a informação (encapsulada nas amplitudes de probabilidade), assim como a excitação do estado original $|\psi(0)\rangle$. Neste esquema de teleportação-amplificação, onde a excitação do estado teleportado é maior que a excitação do estado original, a excitação adicional vem do canal quântico.

5.7.2 Mapeamento experimental da rota rumo à decoerência e recoerência espontânea através de medidas de recuperação

Retornando à Fig. 1, observamos agora que um mapeamento experimental da rota rumo à decoerência e recoerência espontânea de estados *simétricos* pode ser feito pela medida, através de um ATR, das probabilidades $\Omega_0(t)$ e $\Omega_1(t)$ para projetar os estados $|\psi_0(t)\rangle$ e $|\psi_1(t)\rangle$. Com estes estados evoluindo desde $t = 0$ de forma a tornarem-se igualmente prováveis, o sistema atravessa a decoerência e a relaxação, exibindo recoerência espontânea próximo à termalização. Esta trilhagem da rota rumo à decoerência é uma alternativa àquela empregada na Ref. (103), também baseada em interferometria de Ramsey, para observar a decoerência progressiva de uma superposição mesoscópica de estados coerentes.

Terminamos esta seção noticiando que os resultados aqui expostos apresentam similaridades com aqueles sobre o controle de decoerência através do monitoramento contínuo sobre os estados simétricos pares e ímpares (102, 104, 105). Entretanto, além das similaridades, nosso esquema para recuperar o estado inicial da mistura apresenta vantagens consideráveis sobre aquele do monitoramento de decoerência. De fato, na Ref. (104), os autores demonstram que a coerência de um modo da cavidade preparado em estados simétricos pares ou ímpares sobrevive praticamente até o seu tempo de relaxação, enquanto interagindo continuamente com átomos de prova subsequentes, estes detectados após deixarem a cavidade. Como a detecção atômica muda a paridade da superposição de tempos em tempos, este monitoramento contínuo (ou efeito Zeno quântico)

não é útil, por si mesmo, para preservar a coerência de um particular estado com paridade definida quando este relaxa na cavidade. Trabalhando neste mesmo problema, nas Refs. (102, 105) os autores apresentam elaborados esquemas de resposta associados à detecção atômica contínua (102) ou fotodetecção (105) para a recuperação da coerência dos estados simétricos pares e ímpares. Tais esquemas de monitoramento, atêm-se fortemente à habilidade de o experimentador realizar detecções atômicas ou fotodetecções seqüenciais separadas por intervalos de tempo tão pequenos quanto o possível, tais que o número de átomos ou fótons detectados no tempo do experimento seja exatamente conhecido. Com os avanços acerca dos esquemas de monitoramento de resposta, nosso protocolo se aplica para uma grande classe de estados, que compreendem os particulares estados simétricos pares e ímpares, abordados pelos trabalhos acima mencionados. Além disso, para o caso da recuperação dos estados simétricos pares e ímpares, nosso protocolo necessita de poucas medidas projetivas, ao invés da manipulação de um conjunto de medidas repetidas, requeridas nestes trabalhos. O conhecimento da rota à decoerência nos previne da necessidade do monitoramento contínuo da relaxação do estado do campo da cavidade, além de fornecer um método geral para a recuperação de uma grande classe de superposições, incluindo os estados simétricos pares e ímpares.

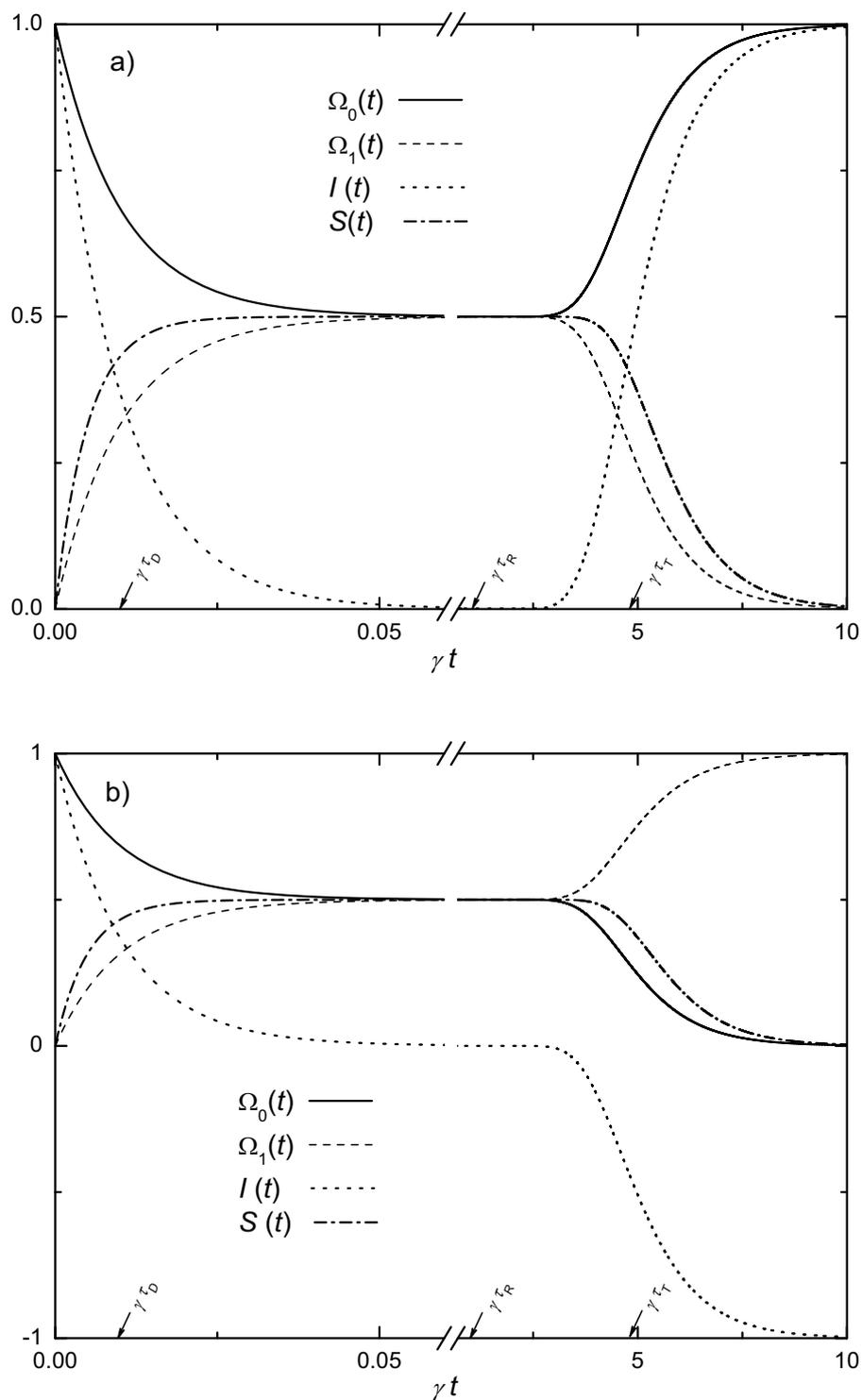


Fig. 1 - Evolução, em função de γt , das funções dependentes do tempo $\Omega_0(t)$, $\Omega_1(t)$, $P(t)$, and $S(t)$, para o estado não-deformável inicial $\mathcal{N}(c_0|\alpha\rangle + c_1|-\alpha\rangle)$ com $|\alpha|^2 = 50$, considerando (a) $c_0/c_1 = 1$ e (b) $c_0/c_1 = -1$.

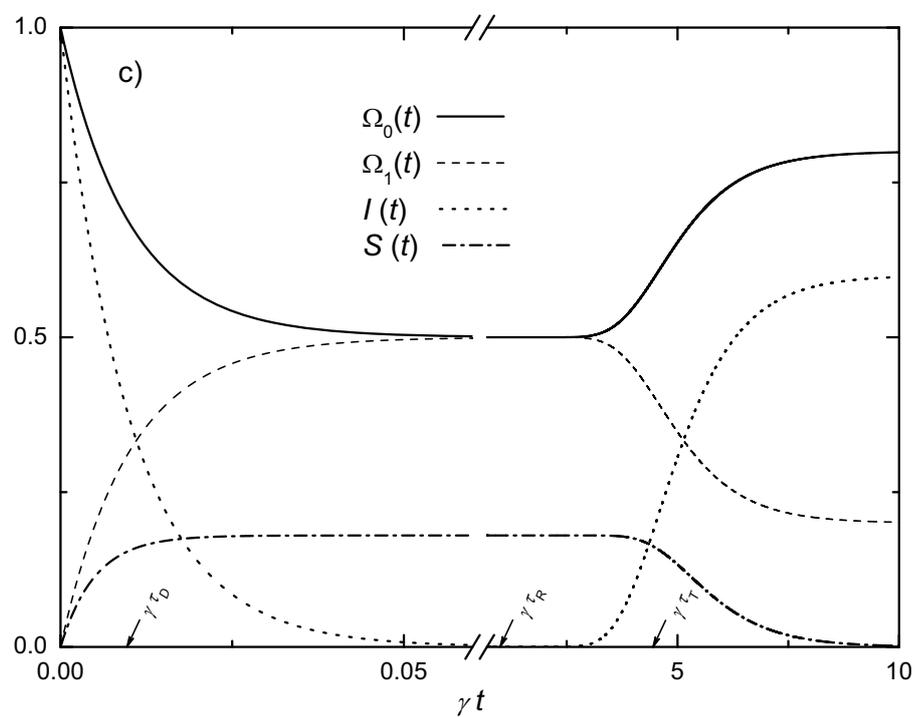


Fig. 1 - Evolução, em função de γt , das funções dependentes do tempo $\Omega_0(t)$, $\Omega_1(t)$, $P(t)$, and $S(t)$, para o estado não-deformável inicial $\mathcal{N}(c_0|\alpha\rangle + c_1|-\alpha\rangle)$ com $|\alpha|^2 = 50$, considerando (c) $c_0/c_1 = 3$.

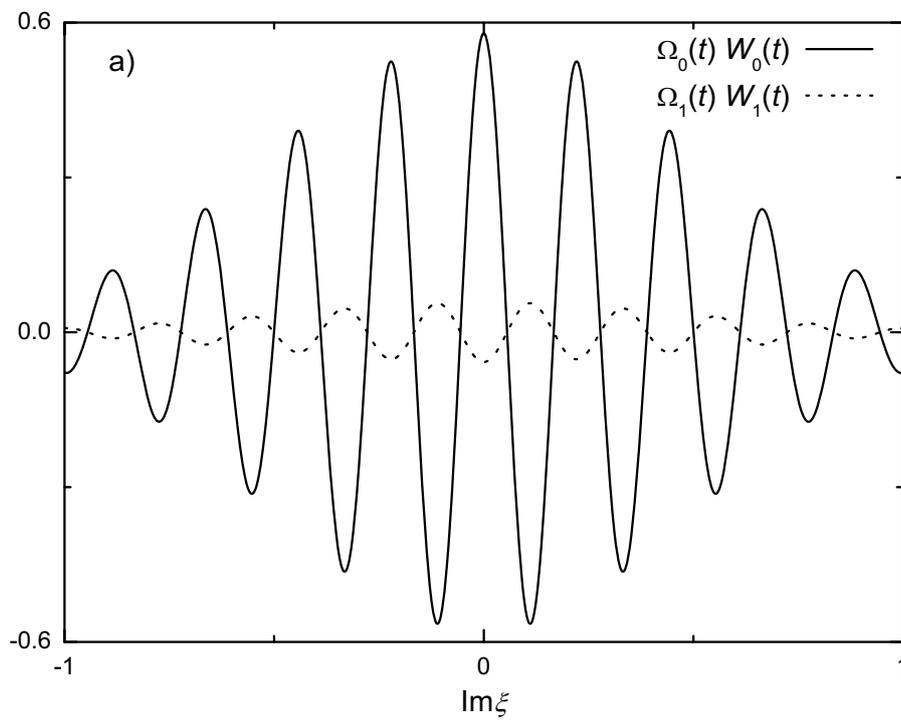


Fig. 2 - Termos de interferência das funções de Wigner W_0 e W_1 , ponderadas pelas probabilidades $\Omega_0(t)$ e $\Omega_1(t)$, no plano $\text{Re}\xi = 0$ e instante de tempo (a) $\tau_D/5$ considerando o estado inicial $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ com $|\alpha|^2 = 50$ e $\gamma/\omega = 10^{-2}$.

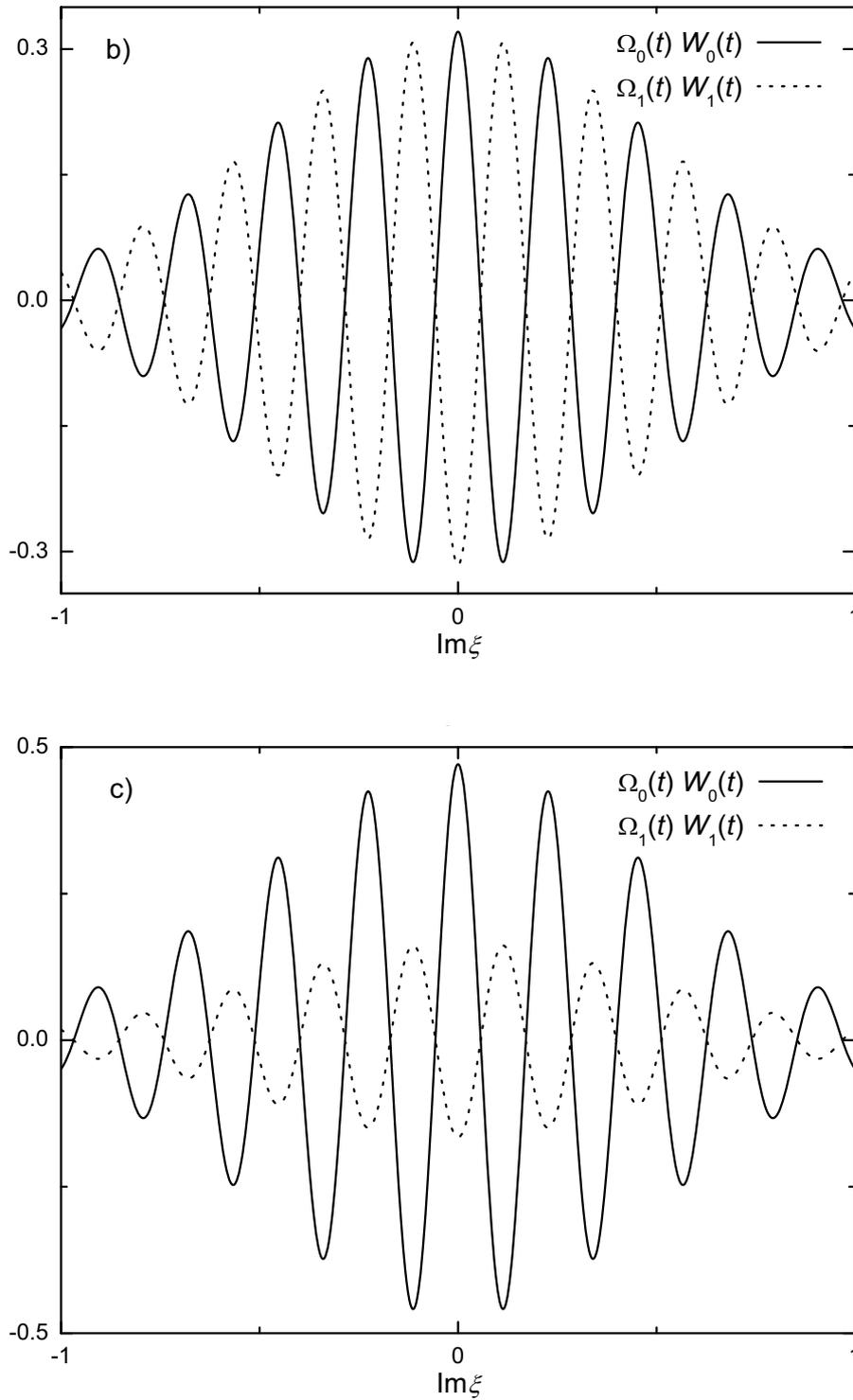


Fig. 2 - Termos de interferência das funções de Wigner W_0 e W_1 , ponderadas pelas probabilidades $\Omega_0(t)$ e $\Omega_1(t)$, no plano $Re\xi = 0$ e instantes de tempo (b) $5\tau_D$ e (c) τ_T considerando o estado inicial $\mathcal{N}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$ com $|\alpha|^2 = 50$ e $\gamma/\omega = 10^{-2}$.

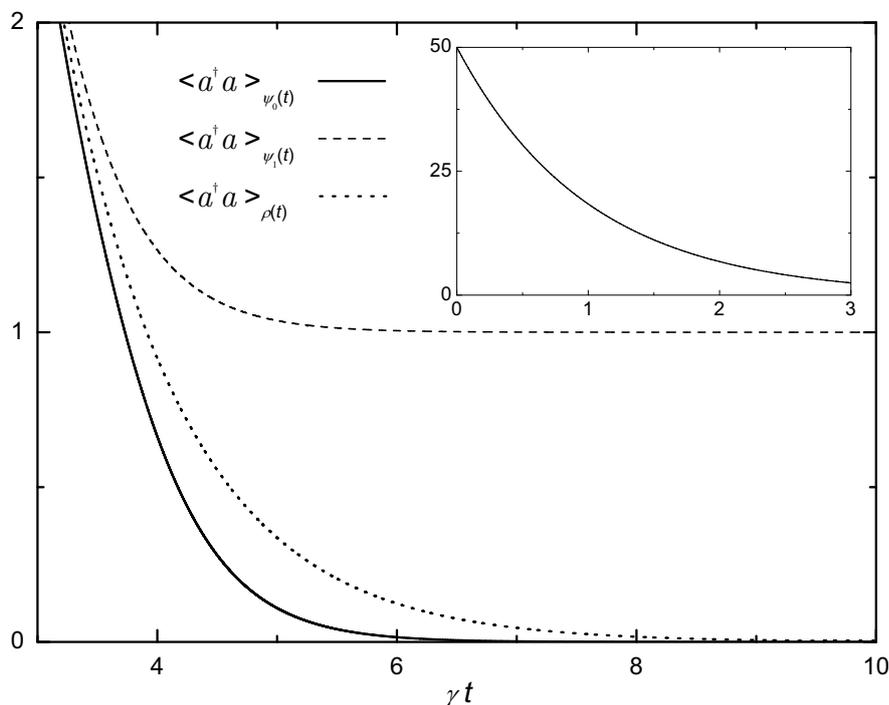


Fig. 3 - Evolução da perda de excitação do estado da base $|\psi_n(t)\rangle$ e o operador densidade $\rho(t)$, com os parâmetros $c_0/c_1 = 1$, $\delta_1 = \pi$, e $|\alpha|^2 = 50$.

5.8 Conclusões

Neste trabalho, revisitamos o problema da dinâmica sistema-reservatório, lançando luz sobre os fenômenos observados na dinâmica de um sistema preparado inicialmente em um estado quântico puro, em direção ao equilíbrio. Primeiro, identificamos a base de estados dependentes do tempo (DT) que diagonaliza o operador densidade reduzido do sistema, que sofre a ação do reservatório. Visto que esta base é composta por estados DT que permanecem puros até o regime de equilíbrio, apesar de perderem excitação, a denominamos *base pura*. Portanto, quando é dito que o reservatório leva uma superposição pura a uma mistura de estados, aqui tais estados são identificados como sendo aqueles que compõem a *base pura* que, adicionalmente, revela o fenômeno da recoerência espontânea. De fato, através da forma diagonal da mistura estatística construída pelo reservatório, observamos que o sistema sofre recoerência espontânea *total* ou *parcial*, em uma escala de tempo muito maior que o tempo de relaxação do sistema. Durante a recoerência espontânea *total*, o estado inicial do sistema (ou a sua forma complementar) é recuperado com uma probabili-

dade que vai à unidade assintoticamente, apesar de ter sua excitação reduzida, devido à interação com o reservatório. No caso da recoerência espontânea *parcial*, o estado inicial é recuperado com uma probabilidade menor que a unidade.

A fim de avançar na compreensão do fenômeno da recoerência espontânea, introduzimos duas classes de estados, os *simétricos* e os *assimétricos*, cujas componentes (na base dos estados coerentes) são simetricamente ou assimetricamente distribuídas ao longo de um círculo no espaço de fase. Verificamos que ambos os estados iniciais *simétricos* ou *assimétricos* de um sistema aberto exibem recoerência espontânea *total* ou *parcial*, por meio da qual um estado puro ou não-maximamente misto emerge espontaneamente da mistura estatística originada pela interação com o reservatório. Entretanto, visto que a probabilidade de medir-se um estado recuperado puro vai à unidade somente assintoticamente, também apresentamos um protocolo, baseado em interferometria de Ramsey, para extrair tal estado puro da mistura - em qualquer intervalo de tempo desejado - através de medidas projetivas específicas. A senha para se recuperar da mistura o estado inicial - através deste protocolo - é o conhecimento do estado inicial do sistema, e da *base pura* associada.

Para sermos mais específicos, ainda distinguimos os estados *simétricos* em *simétricos pares* e *simétricos ímpares*. Quando o sistema é preparado em um estado *simétrico par*, vemos que o estado emergindo da mistura estatística devida aos efeitos do reservatório, é exatamente o estado inicial, com a mesma paridade inicial, exceto pela sua excitação reduzida, absorvida pelo reservatório. Portanto, um estado inicial *simétrico par* provoca o fenômeno da recoerência espontânea *total*, implicando que o reservatório apenas embaralha a informação original contida no sistema, ao invés de apagá-la. Por outro lado, quando o sistema é preparado num estado *simétrico ímpar*, o estado que emerge da mistura estatística é agora a sua forma complementar, isto é, novamente o estado *simétrico par*, que pode sofrer uma rotação, de forma a se tornar a superposição inicial *ímpar-simétrica*, conforme descrito na seção VII-A. Então, o estado *simétrico ímpar* também nos revela o fenômeno da recoerência espontânea *total*. Também observamos que, no caso da recoerência espontânea *total* que segue dos estados iniciais *assimétricos*, aquele estado extraído da mistura estatística por uma medida de recuperação não é exatamente o estado inicial do sistema. Entretanto, tal estado recuperado pode ser, em princípio, convertido em uma cópia atenuada da superposição inicial por meio da aplicação de transformações unitárias apropriadas.

Finalmente, apresentamos um método independente da base para o cálculo do tempo de decoerência de uma superposição de N estados. Evidentemente, é interessante estender a presente formulação a reservatórios a temperaturas finitas e estados iniciais emaranhados de sistemas quânticos interagentes. Tal generalização certamente trará contribuições adicionais acerca desta

dinâmica de “embaralhamento” da informação, revelada neste estudo.

6 Conclusões

Ainda que tenhamos optado por apresentar as conclusões associadas a cada tópico tratado em seus respectivos capítulos, estas conclusões finais têm por objetivo, especialmente, salientar o caráter preliminar do estudo desenvolvido sobre o problema duplicado de Calderia-Leggett e do fenômeno da recoerência espontânea. De fato, apresentamos no problema duplicado de Caldeira-Leggett um conjunto extenso de cálculos que não foram devidamente aproveitados, mas constituem ponto de partida para futuros desenvolvimentos. É sem dúvida desejável, mesmo para demonstrar a relevância dos esforços empregados no desenvolvimento dos cálculos, empregá-los na abordagem de problemas importantes como, por exemplo, o do bi-polaron. Afinal, utilizamos os resultados obtidos apenas para a análise do processo de decoerência de estados emaranhados de ambos os osciladores não ideais, o que é certamente muito pouco mediante os esforços realizados para a derivação e resolução das equações mestras apresentadas. De qualquer forma, a dificuldade na derivação e resolução das equações mestras demonstra que a abordagem de redes maiores, como aquelas utilizadas no tratamento da TQPE, requer o formalismo perturbativo ao invés do método de Feynman-Vernon.

A mesma observação feita acima para o estudo do problema duplicado de Caldeira-Leggett aplica-se também ao estudo do fenômeno da recoerência espontânea de estados. Afinal, temos notado uma grande dificuldade de discernir entre o formalismo por nós apresentado, centrado na base pura, do problema do monitoramento contínuo de estados (ou efeito Zenon quântico) apresentado nas referências (102, 104, 105). O monitoramento contínuo requer a realização de medições sucessivas sobre o sistema separadas por intervalos de tempo significativamente menores que o tempo de decoerência associado. Esta necessidade de difícil realização prática está completamente ausente do tratamento por nós desenvolvido do fenômeno de recoerência espontânea. Vale ressaltar também que este fenômeno não se deve à recorrência de Poincaré que decorre de reservatórios finitos, e esta tem sido outra fonte de confusão acerca da natureza do fenômeno por nós ilustrado.

Devemos mencionar ainda que o estudo do fenômeno da recoerência espontânea

possibilitou-nos uma compreensão mais profunda do processo da decoerência de estados. De fato, conforme revelado pela função de Wigner do sistema, os estados criados pelo reservatório para compor a mistura estatística são aqueles que em sua evolução eliminam os termos de interferência da superposição inicial. Observamos também que, como no problema duplicado de Caldeira-Leggett, pretendemos utilizar o fenômeno da recoerência espontânea para a proposição de protocolos de processamento de informação quântica livre de ruídos. Ou seja, pretendemos utilizar a recoerência espontânea para, de alguma forma, contornar os efeitos da decoerência de estados. Uma aplicação dessa natureza seria certamente desejável para demonstrar o alcance e as possibilidades do fenômeno em questão.

Outro ponto a se observar diz respeito ao conceito de SQLD proposto nesta tese. A emergência destes subespaços dá-se de forma muito menos restritiva que os subespaços inteiramente livres de decoerência propostos na literatura e, sendo assim, apresentam possibilidades mais abrangentes de utilização prática. Não podemos deixar de lembrar que a TQPE pela utilização dos SQLD - estes viabilizados através de um particular regime de parâmetros da rede ao invés da dessintonia entre emissor-receptor e canal quântico - dá-se de forma análoga ao que se observa através da dessintonia: via efeito túnel.

Por fim, sublinhamos que pretendemos utilizar as redes de osciladores não ideais para a investigação de outros problemas que compunham o projeto inicial desta tese. Dentre esses problemas mencionamos a localização de estados (similar à de Anderson) em osciladores ou grupos de osciladores específicos da rede, além da percolação de estados em redes dissipativas. No entanto, a extensão natural para o tratamento das redes de osciladores ou cavidades não-ideais abordadas nesta tese diz respeito à inserção de átomos ou amostras atômicas nos interiores das cavidades, conforme empreendido na Ref. (54). Através da manipulação desses átomos via campos clássicos externos e de suas interações como as respectivas cavidades, e destas entre si, verificam-se fenômenos interessantes como, por exemplo, o bloqueio de fótons: enquanto que na ausência dos átomos as cavidades podem armazenar, em princípio, qualquer número de fótons, a presença dos átomos faz com que as cavidades aceitem um único fóton, repelindo a injeção de fótons adicionais. Este fenômeno possibilita então a construção de cristais de luz, nos quais os fótons são armadilhados nas cavidades através da repulsão mútua que exercem entre si, mediada pelos átomos. Esta repulsão entre os fótons alcançada é forte o suficiente para simular um estado do tipo isolante de Mott, no qual os fótons, localizados nas diferentes cavidades, impedem o movimento dos vizinhos. Dado que na ausência dos átomos, e portanto na ausência da repulsão por eles mediada, os fótons movem-se livremente entre as cavidades, de forma similar a um estado superfluido no

qual encontram-se espalhados através da rede, verifica-se nestes sistemas uma transição de fase quântica, à temperatura zero, análoga àquela entre um isolante de Mott e um superfluido (54).

Logo, a abordagem apresentada nesta tese pode ser empregada para o estudo de diversos outros problemas que merecem significativa atenção no campo da teoria da informação quântica. Problemas estes que apresentam forte conexão com diferentes áreas da Física - como a Óptica Quântica, a Mecânica Estatística e a Física do Estado Sólido - e permitem vislumbrar uma nova tecnologia inteiramente baseada nos princípios fundamentais da Mecânica Quântica.

Referências

- 1 CACHEFFO, A.; MOUSSA, M. H. Y.; PONTE, M. A. de. The double Caldeira-Leggett model: derivation and solutions of the master equations, reservoir-induced interactions and decoherence. *Physica A - Statistical Mechanics and its Applications*, 2010. Aceito para publicação.
- 2 CACHEFFO, A. et al. Quasi-perfect state transfer in a bosonic dissipative network. 2010. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0903.2176>>.
- 3 ZUREK, W. Environment induced super selection rules. *Physical Review D*, v. 26, n. 8, p. 1862–1880, 1982.
- 4 ZUREK, W. Pointer basis of quantum apparatus - into what mixture does the wave packet collapse ? *Physical Review D*, v. 24, n. 6, p. 1516–1525, 1981.
- 5 ZUREK, W. Decoherence and the transition from quantum to classical. *Physics Today*, v. 44, n. 10, p. 36–44, 1991.
- 6 CALDEIRA, A.; LEGGETT, A. Path integral approach to quantum Brownian motion. *Physica A*, v. 121, n. 3, p. 587–616, 1983.
- 7 JOOS, E.; ZEH, H. The emergence of classical properties through interaction with the environment. *Zeitschrift fur Physik B - Condensed Matter*, v. 59, n. 2, p. 223–243, 1985.
- 8 CALDEIRA, A.; LEGGETT, A. Influence of damping on quantum interference - an exactly soluble model. *Physical Review A*, v. 31, n. 2, p. 1059–1066, 1985.
- 9 GHIRARDI, G.; PEARLE, P.; RIMINI, A. Markov processes in Hilbert space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles. *Physical Review A*, v. 42, n. 1, p. 78–89, 1990.
- 10 GHIRARDI, G.; RIMINI, A.; WEBER, T. Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems. *Physical Review D*, v. 34, n. 2, p. 470–491, 1986.
- 11 PEARLE, P. Combining stochastic dynamical state vector reduction with spontaneous localization. *Physical Review A*, v. 39, n. 5, p. 2277–2289, 1989.
- 12 SHOR, P. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Physical Review A*, v. 52, n. 4, p. R2493–R2496, 1995.
- 13 STEANE, A. Error correcting codes in quantum theory. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 5, p. 793–797, 1996.
- 14 POYATOS, J.; CIRAC, J.; ZOLLER, P. Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 23, p. 4728–4731, 1996.

- 15 CARVALHO, A. et al. Decoherence, pointer engineering, and quantum state protection. *Physical Review Letters*, v. 86, n. 22, p. 4988–4991, 2001.
- 16 MYATT, C. et al. Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs. *Nature*, v. 403, n. 6767, p. 269–273, 2000.
- 17 VIOLA, L.; KNILL, E.; LLOYD, S. Dynamical decoupling of open quantum systems. *Physical Review Letters*, v. 82, n. 12, p. 2417–2421, 1999.
- 18 ZANARDI, P. Symmetrizing evolutions. *Physics Letters A*, v. 258, n. 2, p. 77–82, 1999.
- 19 VITALI D, T. P. Using parity kicks for decoherence control. *Physical Review A*, v. 59, p. 4178–4186, 1999.
- 20 VITALI, D.; TOMBESI, P. Heating and decoherence suppression using decoupling techniques. *Physical Review A*, v. 65, n. 1, p. 012305, 2002.
- 21 BYRD, M.; LIDAR, D. Empirical determination of dynamical decoupling operations. *Physical Review A*, v. 67, n. 1, p. 012324, 2003.
- 22 FACCHI, P. et al. Control of decoherence: analysis and comparison of three different strategies. *Physical Review A*, v. 71, n. 2, p. 022302, 2005.
- 23 SANTOS, L.; VIOLA, L. Dynamical control of qubit coherence: random versus deterministic schemes. *Physical Review A*, v. 72, n. 6, p. 062303, 2005.
- 24 VIOLA, L.; KNILL, E. Random decoupling schemes for quantum dynamical control and error suppression. *Physical Review Letters*, v. 94, n. 6, p. 060502, 2005.
- 25 LIDAR, D.; WHALEY, K. *Decoherence-free subspaces and subsystems*. Berlin: Springer Lecture Notes in Physics, 2003. 37 p.
- 26 PONTE, M. A. de; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Relaxation and decoherence free subspaces in networks of weakly and strongly coupled resonators. *Annals of Physics*, v. 322, n. 9, p. 2077–2084, 2007.
- 27 OSTERLOH, A. et al. Scaling of entanglement close to a quantum phase transition. *Nature*, v. 416, n. 6881, p. 608–610, 2002.
- 28 VIDAL, G. et al. Entanglement in quantum critical phenomena. *Physical Review Letters*, v. 90, n. 22, p. 227902, 2003.
- 29 PONTE, M. de; OLIVEIRA, M. de; MOUSSA, M. Decoherence in strongly coupled quantum oscillators. *Annals of Physics*, v. 317, n. 1, p. 72–106, 2005.
- 30 PONTE, M. de; OLIVEIRA, M. de; MOUSSA, M. Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. I. Symmetric network. *Physical Review A*, v. 70, n. 2, p. 022324, 2004.

- 31 PONTE, M. de; OLIVEIRA, M. de; MOUSSA, M. Decoherence in a system of strongly coupled quantum oscillators. II. Central oscillator network. *Physical Review A*, v. 70, n. 2, p. 022325, 2004.
- 32 BURKARD, G.; BRITO, F. Nonadditivity of decoherence rates in superconducting qubits. *Physical Review B*, v. 72, n. 5, p. 054528, 2005.
- 33 FICEK, Z.; TANAS, R. Entangled states and collective nonclassical effects in two-atom systems. *Physics Reports*, v. 372, n. 5, p. 369–443, 2002.
- 34 RAIMOND, J.; BRUNE, M.; HAROCHE, S. Colloquium: manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Reviews of Modern Physics*, v. 73, n. 3, p. 565–582, 2001.
- 35 MOKARZEL, S.; SALGUEIRO, A.; NEMES, M. Modeling the reversible decoherence of mesoscopic superpositions in dissipative environments. *Physical Review A*, v. 65, n. 4, p. 044101, 2002.
- 36 ZOUBI, H.; ORENSTIEN, M.; RON, A. Coupled microcavities with dissipation. *Physical Review A*, v. 62, n. 3, p. 033801, 2000.
- 37 PONTE, M. A. de; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Networks of dissipative quantum harmonic oscillators: a general treatment. *Physical Review A*, v. 76, n. 3, p. 032101, 2007.
- 38 CALDEIRA, A.; LEGGETT, A. Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems. *Physical Review Letters*, v. 46, n. 4, p. 211–214, 1981.
- 39 CALDEIRA, A.; LEGGETT, A. Quantum tunneling in a dissipative system. *Annals of Physics*, v. 149, n. 2, p. 374–456, 1983.
- 40 GRABERT, H.; SCHRAMM, P.; INGOLD, G. Quantum Brownian motion - the functional integral approach. *Physics Reports*, v. 168, n. 3, p. 115–207, 1988.
- 41 HU, B.; PAZ, J.; ZHANG, Y. Quantum Brownian motion in a general environment - exact master equation with nonlocal dissipation and colored noise. *Physical Review D*, v. 45, n. 8, p. 2843–2861, 1992.
- 42 NETO, A.; CALDEIRA, A. Alternative approach to the dynamics of polarons in one dimension. *Physical Review B*, v. 46, n. 14, p. 8858–8876, 1992.
- 43 NETO, A.; CALDEIRA, A. Mobility and diffusion of a particle coupled to a Luttinger liquid. *Physical Review B*, v. 50, n. 7, p. 4863–4866, 1994.
- 44 FEYNMAN, R. Slow electrons in a polar crystal. *Physical Review*, v. 97, n. 3, p. 660–665, 1955.
- 45 FEYNMAN, R. et al. Mobility of slow electrons in a polar crystal. *Physical Review*, v. 127, n. 4, p. 1004–1017, 1962.

- 46 COSTA, W. da; PEETERS, F. Phase diagram for large two-dimensional bipolarons in a magnetic field. *Physical Review B*, v. 57, n. 17, p. 10569–10575, 1998.
- 47 FARIAS, G.; COSTA, W. da; PEETERS, F. Acoustical polarons and bipolarons in two dimensions. *Physical Review B*, v. 54, n. 18, p. 12835–12840, 1996.
- 48 VERBIST, G.; PEETERS, F.; DEVREESE, J. Large bipolarons in 2 and 3 dimensions. *Physical Review B*, v. 43, n. 4, p. 2712–2720, 1991.
- 49 VERBIST, G. et al. Strong coupling analysis of large bipolarons in 2 and 3 dimensions. *Physical Review B*, v. 45, n. 10, p. 5262–5269, 1992.
- 50 DUARTE, O. S.; CALDEIRA, A. O. Effective coupling between two Brownian particles. *Physical Review Letters*, v. 97, n. 25, p. 250601, 2006.
- 51 FEYNMAN, R. P.; VERNON, F. L. The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system. *Annals of Physics*, v. 24, n. 1, p. 118–173, 1963.
- 52 BLAIS, A. et al. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: an architecture for quantum computation. *Physical Review A*, v. 69, n. 6, p. 062320, 2004.
- 53 HARTMANN, M. J.; BRANDAO, F. G. S. L.; PLENIO, M. B. Strongly interacting polaritons in coupled arrays of cavities. *Nature Physics*, v. 2, n. 12, p. 849–855, 2006.
- 54 HARTMANN, M. J.; PLENIO, M. B. Strong photon nonlinearities and photonic Mott insulators. *Physical Review Letters*, v. 99, n. 10, p. 103601, 2007.
- 55 FORD, G.; LEWIS, J.; O’CONNELL, R. Quantum Langevin equation. *Physical Review A*, v. 37, n. 11, p. 4419–4428, 1988.
- 56 FORD, G.; O’CONNELL, R. The rotating wave approximation (RWA) of quantum optics: serious defect. *Physica A*, v. 243, n. 3, p. 377–381, 1997.
- 57 COSTA, M. da et al. Exact diagonalization of two quantum models for the damped harmonic oscillator. *Physical Review A*, v. 61, n. 2, p. 022107, 2000.
- 58 FEYNMAN, R.; HIBBS, A. *Quantum mechanics and path integrals*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- 59 HAAKE, F.; REIBOLD, R. Strong damping and low-temperature anomalies for the harmonic oscillator. *Physical Review A*, v. 32, n. 4, p. 2462–2475, 1985.
- 60 KARRLEIN, R.; GRABERT, H. Exact time evolution and master equations for the damped harmonic oscillator. *Physical Review E*, v. 55, n. 1, p. 153–164, 1985.
- 61 VENUGOPALAN, A. Energy basis via decoherence. *Pramana Journal of Physics*, v. 51, n. 5, p. 625–631, 1998.
- 62 VENUGOPALAN, A. Preferred basis in a measurement process. *Physical Review A*, v. 50, n. 3, p. 2742–2745, 1994.

- 63 VENUGOPALAN, A.; KUMAR, D.; GHOSH, R. Environment induced decoherence I. The Stern-Gerlach measurement. *Physica A*, v. 220, n. 3, p. 563–575, 1995.
- 64 COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of mathematical physics, vol. 2*. New York: Wiley, 1962.
- 65 CHOU, C.-H.; YU, T.; HU, B. L. Exact master equation and quantum decoherence of two coupled harmonic oscillators in a general environment. *Physical Review E*, v. 77, n. 1, p. 011112, 2008.
- 66 YUNG, M. H.; BOSE, S. Perfect state transfer, effective gates, and entanglement generation in engineered bosonic and fermionic networks. *Physical Review A*, v. 71, n. 3, p. 032310, 2005.
- 67 KOSTAK, V.; NIKOLOPOULOS, G. M.; JEX, I. Perfect state transfer in networks of arbitrary topology and coupling configuration. *Physical Review A*, v. 75, n. 4, p. 042319, 2007.
- 68 KAY, A. Perfect state transfer: beyond nearest-neighbor couplings. *Physical Review A*, v. 73, n. 3, p. 032306, 2006.
- 69 CHRISTANDL, M. et al. Perfect state transfer in quantum spin networks. *Physical Review Letters*, v. 92, n. 18, p. 187902, 2004.
- 70 BRIEGEL, H. et al. Quantum repeaters: The role of imperfect local operations in quantum communication. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 26, p. 5932–5935, 1998.
- 71 BURGARTH, D.; BOSE, S. Perfect quantum state transfer with randomly coupled quantum chains. *New Journal of Physics*, v. 7, 2005.
- 72 TSOMOKOS, D. I. et al. Entanglement dynamics in chains of qubits with noise and disorder. *New Journal of Physics*, v. 9, p. 79, 2007.
- 73 PLENIO, M.; HARTLEY, J.; EISERT, J. Dynamics and manipulation of entanglement in coupled harmonic systems with many degrees of freedom. *New Journal of Physics*, v. 6, 2004.
- 74 PLENIO, M.; SEMIAO, F. High efficiency transfer of quantum information and multiparticle entanglement generation in translation-invariant quantum chains. *New Journal of Physics*, v. 7, 2005.
- 75 AUDENAERT, K. et al. Entanglement properties of the harmonic chain. *Physical Review A*, v. 66, n. 4, p. 042327, 2002.
- 76 CASTRO, A. S. M.; PERUZZO, J. F.; DODONOV, V. V. Quantum state exchange between indirectly coupled modes. *Physical Review A*, v. 71, n. 3, p. 032319, 2005.
- 77 CRAMER, M. et al. Entanglement area law for general bosonic harmonic lattice systems. *Physical Review A*, v. 73, n. 1, p. 012309, 2006.
- 78 CHOU, C.-W. et al. Functional quantum nodes for entanglement distribution over scalable quantum networks. *Science*, v. 316, n. 5829, p. 1316–1320, 2007.

- 79 PONTE, M. A. de; MIZRAHI, S. S.; MOUSSA, M. H. Y. Storing quantum states in bosonic dissipative networks. *Journal of Physics B - Atomic Molecular and Optical Physics*, v. 41, n. 21, p. 215506, 2008.
- 80 PAGANELLI, S.; PASQUALE, F. de; GIORGI, G. L. Faithful state transfer through a quantum channel. *Physical Review A*, v. 74, n. 1, p. 012316, 2006.
- 81 WOJCIK, A. et al. Multiuser quantum communication networks. *Physical Review A*, v. 75, n. 2, p. 022330, 2007.
- 82 BURGARTH, D.; BOSE, S. Universal destabilization and slowing of spin-transfer functions by a bath of spins. *Physical Review A*, v. 73, n. 6, p. 062321, 2006.
- 83 ILLUMINATI, F. Quantum optics - light does matter. *Nature Physics*, v. 2, n. 12, p. 803–804, 2006.
- 84 LEIBFRIED, D. et al. Quantum dynamics of single trapped ions. *Reviews of Modern Physics*, v. 75, n. 1, p. 281–324, 2003.
- 85 NIELSEN, M.; CHUANG, I. *Quantum computation and quantum communication*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 86 BOUWMEESTER, D.; EKERT, A.; ZEILINGER, A. *The physics of quantum information*. Berlin: Springer, 2000.
- 87 LIDAR, D. A.; WHALEY, K. B. *Irreversible Quantum Dynamics*. Berlin: Springer, 2003.
- 88 KARASIK, R. I. et al. Criteria for dynamically stable decoherence-free subspaces and incoherently generated coherences. *Physical Review A*, v. 77, n. 5, p. 052301, 2008.
- 89 MUNDARAIN, D.; ORSZAG, M. Decoherence-free subspace and entanglement by interaction with a common squeezed bath. *Physical Review A*, v. 75, n. 4, p. 040303, 2007.
- 90 LIDAR, D. A.; CHUANG, I. L.; WHALEY, K. B. Decoherence-free subspaces for quantum computation. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 12, p. 2594–2597, 1998.
- 91 LINDBLAD, G. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications on Mathematical Physics*, v. 48, p. 119, 1976.
- 92 MAGNUS, W. On the exponential solution of differential equations for a linear operator. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 7, n. 4, p. 649–673, 1954.
- 93 NEUMANN, J. V. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. New Jersey: Princeton University Press, 1955.
- 94 MOLLOW, B.; GLAUBER, R. Quantum theory of parametric amplification I. *Physical Review*, v. 160, n. 5, p. 1076–1096, 1967.
- 95 MOLLOW, B.; GLAUBER, R. Quantum theory of parametric amplification II. *Physical Review*, v. 160, n. 5, p. 1097–1108, 1967.

- 96 MOUSSA, M.; MIZRAHI, S.; CALDEIRA, A. Quantum coherence in a dissipative-driven system and the optical Stern-Gerlach experiment. *Physics Letters A*, v. 221, n. 3, p. 145–152, 1996.
- 97 BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein - Podolsky - Rosen channels. *Physical Review Letters*, v. 70, n. 13, p. 1895–1899, 1993.
- 98 DAVIDOVICH, L. et al. Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields. *Physical Review A*, v. 50, n. 2, p. R895–R898, 1994.
- 99 MOUSSA, M. Teleportation with identity interchange of quantum states. *Physical Review A*, v. 55, n. 5, p. R3287–R3290, 1997.
- 100 MOUSSA, M. Teleportation of a cavity-radiation-field state: an alternative scheme. *Physical Review A*, v. 54, n. 6, p. 4661–4669, 1996.
- 101 VILLAS-BOAS, C.; ALMEIDA, N. de; MOUSSA, M. Teleportation of a zero- and one-photon running-wave state by projection synthesis. *Physical Review A*, v. 60, n. 4, p. 2759–2763, 1999.
- 102 VITALI, D.; TOMBESI, P.; MILBURN, G. Controlling the decoherence of a “meter” via stroboscopic feedback. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 13, p. 2442–2445, 1997.
- 103 BRUNE, M. et al. Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 24, p. 4887–4890, 1996.
- 104 BRUNE, M. et al. Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: quantum-nondemolition measurements and generation of Schrodinger cat states. *Physical Review A*, v. 45, n. 7, p. 5193–5214, 1992.
- 105 HOROSHKO, D. B.; KILIN, S. Y. Direct detection feedback for preserving quantum coherence in an open cavity. *Physical Review Letters*, v. 78, n. 5, p. 840–842, 1997.

APÊNDICE A - Diagonalização do hamiltoniano (2.12)

O hamiltoniano modelando os dois osciladores harmônicos e sua interação mútua, $H_{S_1+S_2}$, como dado pela Eq. (2.12) com $V_\ell(q_\ell) = m_\ell \omega_\ell^2 q_\ell^2 / 2$, pode ser reescrito em termos dos operadores de criação a_ℓ^\dagger e aniquilação a_ℓ , como

$$H_{S_1+S_2} = \hbar \left[\sum_\ell \omega_\ell \left(a_\ell^\dagger a_\ell + \frac{1}{2} \right) + \left(g_1 a_1 a_2 + g_2 a_1 a_2^\dagger + H.c \right) \right], \quad (\text{A.1})$$

com o acoplamento dado por

$$g_\ell = \frac{\lambda_{11} - i\lambda_{21}m_1\omega_1}{\sqrt{m_1\omega_1 m_2\omega_2}} + (-1)^\ell \sqrt{m_1\omega_1 m_2\omega_2} \left(\lambda_{22} + i \frac{\lambda_{12}}{m_1\omega_1} \right). \quad (\text{A.2})$$

A diagonalização da forma (A.1), mais facilmente realizável que aquela na Eq. (2.12), leva a

$$H_{S_1+S_2} = \hbar \sum_\ell \Omega_\ell \left(A_\ell^\dagger A_\ell + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.3})$$

com as frequências dos modos normais,

$$\Omega_\ell^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - |g_1|^2 + |g_2|^2 - (-1)^\ell \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \right)^2 - |g_1|^2 (\omega_1 - \omega_2)^2 + |g_2|^2 (\omega_1 + \omega_2)^2}, \quad (\text{A.4})$$

e os operadores dos modos normais dados por

$$A_\ell = \mathcal{N}_\ell \sum_{\ell'} \left[\Delta_{1\ell'}(\Omega_\ell) a_{\ell'}^\dagger + \Delta_{2\ell'}(\Omega_\ell) a_{\ell'} \right], \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\ell''}^{-2} &= \sum_{\ell, \ell'} (-1)^\ell \Delta_{\ell\ell'}^2(\Omega_{\ell''}), \\ \Delta_{\ell\ell'}(\Omega_{\ell''}) &= 2\delta_{\ell'1} |g_2 g_{\ell-(-1)^\ell}| \omega_2 + [\delta_{\ell'2} |g_{\ell-(-1)^\ell}| - \delta_{\ell'1} \delta_{\ell'1} (\Omega_{\ell''} - \omega_2)] \\ &\times [|g_1|^2 - |g_2|^2 + (\Omega_{\ell''} - \omega_1) (\Omega_{\ell''} + (-1)^{\ell+\ell'} \omega_2)]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

AS coordenadas dos modos normais Q_ℓ e P_ℓ , que seguem dos operadores A_ℓ e A_ℓ^\dagger , são dadas por

$$\begin{aligned} Q_\ell &= \sqrt{\frac{2\hbar}{\Omega_\ell}} \sum_{\ell'} \text{Re}(a_{\ell\ell'} q_{\ell'} + b_{\ell\ell'} p_{\ell'}), \\ P_\ell &= \sqrt{2\hbar\Omega_\ell} \sum_{\ell'} \text{Im}(a_{\ell\ell'} q_{\ell'} + b_{\ell\ell'} p_{\ell'}), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

com os coeficientes

$$\begin{aligned} a_{\ell\ell} &= \mathcal{N}_\ell \sqrt{\frac{m_\ell \omega_\ell}{2\hbar}} \sum_{\ell''} \Delta_{\ell''\ell}(\Omega_{\ell''}) e^{i(-1)^{\ell''} \phi_\ell}, \\ b_{\ell\ell} &= i\mathcal{N}_\ell \sqrt{\frac{1}{2\hbar m_\ell \omega_\ell}} \sum_{\ell''} (-1)^{\ell''} \Delta_{\ell''\ell}(\Omega_{\ell''}) e^{i(-1)^{\ell''} \phi_\ell}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e fatores de fase $\phi_\ell = [\theta_1 - (-1)^\ell \theta_2] / 2$, onde as quantidades

$$\theta_\ell = \cos^{-1} \left\{ \frac{\xi_{11} + (-1)^\ell \xi_{22}}{[\xi_{11} + (-1)^\ell \xi_{22}]^2 [\xi_{12} + \xi_{21}]^2} \right\}, \quad (\text{A.9})$$

são definidas pelos parâmetros adimensionais

$$\begin{aligned} \xi_{\ell\ell} &= \frac{\lambda_{\ell\ell} [\delta_{\ell'1} + (m_1 m_2 \omega_1 \omega_2)^{1/2} \delta_{\ell'2}]}{2 [(m_1 m_2 \omega_1 \omega_2)^{1/2} \delta_{\ell'1} + \delta_{\ell'2}]}, \\ \xi_{\ell\ell'} &= \frac{\lambda_{\ell\ell'}}{2} \sqrt{\frac{m_\ell \omega_\ell}{m_{\ell'} \omega_{\ell'}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Através das coordenadas Q_ℓ e P_ℓ obtemos, finalmente, o hamiltoniano diagonalizado

$$\mathcal{H}_{S_1+S_2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell} (P_\ell^2 + \Omega_\ell^2 Q_\ell^2). \quad (\text{A.11})$$