



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

*Ruídos e Processos Quânticos Fundamentais em  
Íons Aprisionados e Ondas Propagantes*

Roberto Menezes Serra

2002

Suporte financeiro  




UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

*Ruídos e Processos Quânticos Fundamentais em  
Íons Aprisionados e Ondas Propagantes*

**Roberto Menezes Serra**

Tese apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de **Doutor em Física**.

Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

São Carlos  
2002

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

S487rp

Serra, Roberto Menezes.

Ruídos e processos quânticos fundamentais em íons  
aprisionados e ondas propagantes / Roberto Menezes Serra  
. -- São Carlos : UFSCar, 2002.  
158 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,  
2003.

1. Mecânica quântica. 2. Ótica quântica. 3. Teletransporte  
de estados quânticos. 4. Sistemas quânticos abertos. 5. Íons  
aprisionados. 6. Decoerência (decoherence). I. Título.

CDD: 530.12 (20<sup>a</sup>)

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Miled H. Y. Moussa (Orientador)  
Departamento de Física - *UFSCar*

Prof. Dr. Ruynet L. de Mattos Filho  
Instituto de Física – *UFRJ*

Prof. Dr. Paulo Nussenzveig  
Instituto de Física – *USP*

Prof. Dr. Antônio Vidiella Barranco  
Instituto de Física Gleb Wataghin – *UNICAMP*

Prof. Dr. Vanderlei Salvador Bagnato  
Instituto de Física de São Carlos – *USP*

*Esta tese é dedicada à Érika Dal Bello*

# Agradecimentos

É difícil agradecer de forma justa às pessoas que se fizeram presentes ao longo deste árduo trabalho, no entanto não poderia furtar-me desta difícil tarefa.

Quero expressar a minha maior gratidão ao Miled que construiu em seu grupo um ambiente formidável de estudo e discussão, do qual tive o privilégio de participar. Agradeço também a sua amizade, paciência, enorme disponibilidade e boa vontade, excelente orientação e motivação.

Agradeço aos grandes amigos e colaboradores valiosos: Norton que me introduziu no caminho das discussões em Óptica Quântica e Teoria Quântica da Medida, e Celso que sempre soube dizer uma palavra de apoio nos momentos em que se fizeram necessários. Ambos com seu talentos específicos contribuíram sobremaneira para esta tese.

Agradeço aos professores David Wineland e Christopher Monroe por terem nos fornecido os dados experimentais do NIST utilizados na figura 3.3, ao professor Sokolov por informações e discussões sobre a física de elétrons sobre superfícies de hélio líquido e ao professor Salomon por dicas matemáticas valiosas.

A minha gratidão a Érika, grande companheira, que teve a paciência e compreensão necessária para que este trabalho fosse levado a cabo, além de dispor-se a discutir e ler alguns de meus escritos.

Agradeço aos amigos de todas as horas, principalmente pelas cervejas compartilhadas, Batata, Lucy, Mara, Marcia, Marqueta, Rodrigo e Willian, que sempre tiveram paciência para me escutar falar sobre temas relacionados a esta tese.

A todos os membros do grupo de óptica quântica e alguns companheiros de pós-graduação em física da UFSCar com os quais também pude partilhar discussões, cafezinhos, seminários,

etc. Dessa forma, ficam implícitos meus agradecimento a todos.

Enfim, agradeço ao Departamento de Física da UFSCar, a todos os seus funcionários pelo suporte técnico e à FAPESP pelo suporte financeiro deste trabalho.

A todos que foram omitidos nestas linhas, ou por esquecimento ou por brevidade, ficam minhas desculpas e meus agradecimentos.

# Resumo

Neste trabalho apresentamos um protocolo para a engenharia de estados vibracionais arbitrários de íons aprisionados que combina as técnicas de escultura de estados e síntese da projeção. Este protocolo é desenvolvido tratando-se da situação realista em que flutuações na intensidade dos feixes laser estão presentes.

Em seguida, uma investigação do processo de decoerência em armadilhas iônicas, devido a polarização do gás residual da armadilha é detalhadamente descrito. Novos resultados são comparados com os dados experimentais apresentados na literatura.

Apresentamos também um esquema para a sondagem do processo de tunelamento de um único íon em um potencial do tipo poço duplo. Esta sondagem é realizada por meio da medida fluorescente do estado eletrônico fundamental do íon.

Por fim, no contexto de ondas propagantes apresentamos um protocolo para o teletransporte de estados emaranhados de zero e um fóton do campo de radiação. Consideramos a ocorrência de fotoabsorção nos elementos ópticos lineares e não-lineares requeridos para alcançar 100% de probabilidade de sucesso no caso ideal.



# Abstract

In this work we present a proposal protocol for engineering arbitrary motional states of trapped ions. Our scheme is based on both techniques of quantum state sculpture and projection synthesis.

Next, we investigate the decoherence process in ion traps due to the polarization of the residual background gas. Our results are compared with experimental data found in the literature.

We also introduce a scheme for probing the tunneling mechanism of a single ion trapped in a double-well electromagnetic potential. The tunneling process is characterized through the probability for a fluorescence measurement of electronic ground state of trapped ion.

Finally in the running wave domain, we present a protocol for the teleportation of an entangled of zero- and one- photon states of the running wave field. We consider the process of photoabsorption in the linear and nonlinear optical elements required to achieve 100% of probability of success in the ideal case.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Engenharia de Estados, Decoerência e tunelamento em Íons Aprisionados</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Engenharia de Estados de Movimento de Íons Aprisionados via Pulsos Laser com Flutuação na Intensidade</b>	<b>16</b>
2.1	Motivação . . . . .	16
2.2	O modelo . . . . .	20
2.3	Escultura de Estados Quânticos - Caso Ideal . . . . .	23
2.3.1	Escultura do estado de fase truncado . . . . .	31
2.4	Efeitos de ruídos no processo de escultura . . . . .	35
2.4.1	Estimativa dos erros introduzidos pelos pulsos $C$ e $JC$ . . . . .	40
2.4.2	Esculpindo o estado de fase truncado na presença de ruído . . . . .	42
2.5	Otimizando a fidelidade do estado esculpido . . . . .	44
2.5.1	Sobre a fidelidade e a função de Wigner . . . . .	47
2.6	Conclusão . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Decoerência em Armadilhas Iônicas Devido à Interação do Íon com o Gás</b>	

<b>Residual</b>	<b>61</b>
3.1 Motivação . . . . .	61
3.2 Interação íon-laser e íon-gás residual . . . . .	64
3.3 Efeitos do acoplamento íon-gás residual em um estado vibracional inicialmente preparado . . . . .	69
3.3.1 Hamiltoniano do tipo carrier . . . . .	69
3.3.2 Hamiltoniano do tipo anti-Jaynes-Cummings . . . . .	73
3.4 Comentários e conclusões . . . . .	79
<b>4 Tunelamento Quântico de uma Única Partícula em Íons Aprisionados</b>	<b>86</b>
4.1 Motivação . . . . .	86
4.2 O modelo . . . . .	87
4.3 Resultados . . . . .	93
4.4 Conclusões . . . . .	100
<b>II Teletransporte de Estados Emaranhados e Ruídos em Sistemas Ópticos</b>	<b>107</b>
<b>5 Teletransporte de um Estado Emaranhado do Campo Propagante com Alta Fidelidade</b>	<b>108</b>
5.1 Motivação . . . . .	108
5.2 Teletransporte de um estado emaranhado - caso ideal . . . . .	114
5.3 Erros (dissipação) nos elementos ópticos . . . . .	118
5.3.1 Absorção nos divisores de feixe . . . . .	118
5.3.2 Absorção nos meios Kerr . . . . .	120
5.3.3 Eficiência dos detectores . . . . .	122
5.3.4 Dissipação nas placas de fase ( <i>phase plates</i> ) . . . . .	123

5.3.5	Relação geral para erros devido aos divisores de feixes e fotodetectores	123
5.4	Teletransporte de um estado emaranhado: efeitos do ruído . . . . .	124
5.4.1	Evolução dos estados de Bell através da <i>estação de Alice</i> . . . . .	128
5.5	Comentários e conclusões . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Comentários Finais e Perspectivas Futuras</b>	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>Elementos <math>\rho_{n,m}(t_1, t_2, t_3)</math> da Eq. (2.30)</b>	<b>145</b>
<b>B</b>	<b>Obtenção do Hamiltoniano de interação íon aprisionado - gás residual</b>	<b>147</b>
<b>C</b>	<b>Método de frações continuadas e transformada de Laplace para a solução de equações diferenciais acopladas</b>	<b>151</b>
<b>D</b>	<b>Trabalhos Realizados</b>	<b>157</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama dos níveis de energia eletrônicos de um íon interagindo com feixes de laser de frequências $\omega_1$ e $\omega_2$ , onde $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_0$ ( $\delta \ll \Delta$ ). $ r\rangle$ (eliminado adiabaticamente) corresponde a um nível auxiliar que indiretamente acopla os níveis $ \uparrow\rangle$ e $ \downarrow\rangle$ , e $ d\rangle$ indica um nível eletrônico usado para a medida de fluorescência e assim caracterizar o estado eletrônico $ \downarrow\rangle$ . . . . .	21
2.2	Notação de algoritmo quântico [47] para o processo de escultura de estados de movimento em íons aprisionados. Os parâmetros complexos $\beta_k$ e $\varepsilon_k$ indicam rotações dos estados eletrônicos executadas pelo primeiro e segundo pulso carrier ( $C_1$ e $C_2$ ), respectivamente, no $k$ -ésimo ciclo, e esses parâmetros são ajustados através da escolha adequada da duração e fase dos pulsos laser segundo as Eqs. (2.5a) e (2.5b). $U(\tau_k, \varphi_k)$ indica o operador evolução do $k$ -ésimo pulso $JC$ . Ao fim de cada ciclo a medida de ausência de fluorescência (projeção em $ \uparrow\rangle$ ) é requerida para completar o processo de engenharia de estados com sucesso. O tempo procede da forma usual da esquerda para a direita. . . . .	25
2.3	Função de quase-distribuição de Wigner para (a) o estado coerente inicial de movimento com $\bar{n}_\alpha = 0.25$ e para (b) o estado esculpido após o primeiro ciclo. Usamos os parâmetros $\varepsilon_1 = 25.6159 - i0.0379$ e $\beta_1 = -0.3994 - i0.6408 \times 10^{-4}$ associados aos valores da Tabela 1: $F = 0.99$ , $P = 0.38$ e $R = 0.60$ . . . . .	34

2.4	Função de Wigner (a) para o estado desejado exposto na Eq. (2.18), (b) para a mistura estatística de estados esculpida na presença de ruído usando os mesmos parâmetros $\beta_1$ e $\varepsilon_1$ da Fig. 2.3(b) ( $F = 0.85$ e $P = 0.40$ ), e (c) para a mistura estatística de estados esculpida através do procedimento de otimização numérica usando os parâmetros $\Omega t_1 = 0.56$ , $\varphi_1 = 5.48$ , $gt_2 = 0.75$ , $\varphi_2 = 1.40$ , $\Omega t_3 = 1.88$ , e $\varphi_3 = 1.43$ associados com $F = 0.91$ , $P = 0.86$ , e $R = 0.64$ . . . . .	46
2.5	O cone em torno do eixo $r_x$ mostrado nessa figura, representa um conjunto infinito de vetores de estado unitários $ \Lambda_\lambda\rangle$ que possuem a mesma fidelidade $F = (2 + \sqrt{3})/4$ com relação ao estado $ \Xi\rangle$ . Os círculos em torno da figura representam os contornos da esfera de Bloch unitária . . . . .	48
2.6	Função de Wigner para (a) o estado desejado $ \Xi\rangle$ e dois estados localizados no cone da Fig. 2.5, com $\phi = 0$ : (b) $ \Lambda_{1/2}\rangle$ e (c) $ \Lambda_{\sqrt{3}/2}\rangle$ . . . . .	50
2.7	Função de Wigner para a mistura estatística de estados $\rho_\lambda(\varkappa)$ [Eq. (2.35)] com a escolha particular de $\varkappa = 0.90$ , $F = 0.85$ , e $\lambda = 0.70$ . . . . .	51
3.1	Diagrama dos níveis de energia eletrônicos de um íon interagindo com feixes laser de frequências $\omega_1$ e $\omega_2$ , onde $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_0$ ( $\delta \ll \Delta$ ), $ r\rangle$ (eliminado adiabaticamente) é um nível auxiliar que indiretamente acopla os níveis $ \uparrow\rangle$ e $ \downarrow\rangle$ , $ d\rangle$ é um nível eletrônico usado para a medida de fluorescência utilizada para caracterizar o estado eletrônico. . . . .	65
3.2	Função de quase-distribuição $P(\gamma, t)$ para estado inicial de movimento coerente mostrada em $\Gamma t = 0.2$ e $0.9$ . . . . .	72

3.3	Evolução temporal da probabilidade de medida do estado fundamental $P_{\downarrow}(t)$ , computada através do nosso modelo (linha cheia) e medida no experimento com ${}^9\text{Be}^+$ do NIST [8] (pontos) para o estado inicial iônico $ n = 0, \downarrow\rangle$ . Os parâmetros usados nos experimentos $\eta_L = 0.202$ e $\Omega/2\pi \approx 475$ kHz, são adotados nos cálculos numéricos, junto com os valores $\bar{n}_{th} = 1.0$ e $\Gamma/g = 6.0 \times 10^{-3}$ que estão em bom acordo com as nossas estimativas teóricas. . . . .	76
3.4	Evolução temporal da probabilidade de medida do estado fundamental $P_{\downarrow}(t)$ para os estados iniciais iônicos (a) $ n = 0, \downarrow\rangle$ e (b) $ n = 1, \downarrow\rangle$ , de acordo com nosso modelo (linha cheia) e segundo a relação heurística (3.71) (linha pontilhada).	78
4.1	Representação esquemática (fora de escala) do potencial do tipo poço duplo $V(x)$ , das aproximações harmônicas locais $\tilde{V}_1$ e $\tilde{V}_2$ em torno de $\mp x_0$ e dos dois níveis de menor energia das aproximações harmônicas. . . . .	88
4.2	Comportamento da função $P_{\downarrow}(t)$ , no regime Jaynes-Cummings, para os valores $R^{(2)}/(\hbar\eta g) = 0$ (linha pontilhada) e 1 (linha cheia). . . . .	96
4.3	Comportamento da função $P_{\downarrow}(t)$ , no regime carrier, para os valores $R^{(2)}/(\hbar g) = 0$ (linha pontilhada) e 1 (linha cheia). . . . .	99
5.1	(a) Esboço do arranjo experimental para o teletransporte quântico de emaranhados de zero e um fóton do campo propagante. (b) Estação usada para gerar o canal quântico. (c) Estação de Alice. (d) Estação de Bob. . . . .	113
5.2	Representação dos modos de input e output dos elementos ópticos. . . . .	115
5.3	Fidelidade F do estado teletransportado (associado com a medida de Alice do estado $ 0\rangle_1  1\rangle_2  1\rangle_3  0\rangle_4$ ), expressa na Eq. (5.35), como função dos parâmetros $\gamma$ e $\lambda$ definindo os coeficientes $C_1 = \cos(\gamma)$ e $C_2 = \sin(\gamma)e^{i\lambda}$ do estado original (a ser teletransportado) $ \Omega\rangle_{12} = C_1  0\rangle_1  1\rangle_2 + C_2  1\rangle_1  0\rangle_2$ . . . . .	132

B.1	Figura. B-1. Representação esquemática da interação íon-BG. . . . .	149
-----	---	-----



# Lista de Tabelas

2.1	Probabilidade $\mathcal{P}$ , fidelidade $\mathcal{F}$ e taxa $\mathcal{R} = \mathcal{F}^\xi \cdot \mathcal{P}^\zeta$ (com $\xi = 4$ e $\zeta = 1/2$ ), para cada valor da excitação média do estado coerente inicial $\bar{n}_\alpha$ . O tempo de interação $g\tau_1$ e a fase $\varphi_1$ do pulso $JC$ nessa tabela correspondem aos valores que maximizam a taxa $R$ para cada $\bar{n}_\alpha$ . . . . .	33
5.2	Nessa tabela resumamos os estados de Bell, na primeira coluna, medidos através das quatro possíveis fotodeteccões dispostas na segunda coluna. As rotações de $180^\circ$ em torno dos eixos $z$ , $x$ , e $y$ , requeridas para converter o estado emaranhado resultante nos modos 5 e 6 em uma réplica do estado original $ \Omega\rangle_{12}$ , são dadas na terceira coluna. As matrizes de Pauli $\hat{\sigma}_k$ ( $k = z, x, y$ ) são expressas na base $\{ 0, 1\rangle_{5,6},  1, 0\rangle_{5,6}\}$ . Finalmente na quarta coluna mostramos os deslocamentos de fase $\phi_1, \phi_2$ , e $\phi_3$ introduzidos pelas placas de fase na estação de Bob para executar as rotações requeridas. . . . .	118

# Capítulo 1

## Introdução

Desde a década de 70 diversas técnicas experimentais têm sido desenvolvidas para o controle minucioso de sistemas quânticos individuais. Por exemplo, métodos para o aprisionamento de um único íon atômico em uma armadilha eletromagnética, isolando-o parcialmente do meio ambiente à sua volta, têm permitido colocar à prova diferentes aspectos de seu comportamento com extraordinária precisão [1, 2]. O mesmo controle experimental também foi alcançado no contexto do campo de radiação, tanto aprisionado em cavidades supercondutoras [3] quanto propagante [4]. No primeiro caso, utiliza-se a interação do campo com átomos de Rydberg para manipular e caracterizar seu estado quântico, enquanto que no segundo utiliza-se elementos ópticos lineares (como espelhos divisores de feixe e placas de fase) e não-lineares (meio Kerr), para gerar e medir estados não-clássicos do campo. Além disso, feixes de laser que interferem podem ser usados para induzir arranjos de potenciais microscópicos, as chamadas redes ópticas [5], pelo efeito Stark ac. As redes ópticas possibilitam o mapeamento de Hamiltonianos exhaustivamente estudados em mecânica estatística para o domínio da óptica atômica. Permitem, dessa forma, a simulação de interações spin-spin [6] (similares àquelas que caracterizam o ferromagnetismo e o antiferromagnetismo), através da interação dipolo-dipolo entre dois átomos neutros [7].

A preparação de uma variedade de estados não-clássicos foi alcançada no contexto da eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC) [9, 10, 11] e de íons aprisionados [13, 14]. Estados do tipo “gato de Schrödinger” do campo de radiação em cavidades supercondutoras [10] e do movimento quantizado de íons aprisionados [13] foram gerados experimentalmente. A preparação de estados de Fock “puros” do campo de radiação foi apresentada pelo grupo do *Max Planck Institute for Quantum Optics* na Alemanha [11]. Recentemente, comunicou-se a realização experimental de um emaranhado contendo aproximadamente  $10^{12}$  partículas massivas [15]. Tal emaranhado foi obtido via interação de duas amostras atômicas em células de gás com luz coerente, tendo sido mantido por 0,5 milissegundos [15]. Essa notável realização aperfeiçoa de forma extraordinária o estado da arte experimental em emaranhados quânticos, uma vez que, anteriormente, o recorde pertencia ao grupo do NIST em Boulder, Colorado, que anunciara o emaranhamento de 4 íons aprisionados [16].

A existência de estados emaranhados, tanto da radiação quanto da matéria, que podem exibir correlações não-locais é um dos aspectos mais intrigantes da teoria quântica. Tal comportamento suscitou uma crítica à teoria quântica feita por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [17] em 1935. Entretanto, o advento das desigualdades de Bell [18], em 1964, permitiu testar empiricamente o fenômeno da não-localidade quântica. Temos aproximadamente duas décadas dedicadas à demonstração experimental do fenômeno da não-localidade pela violação das desigualdades de Bell [19]. Apesar da maioria das experiências ter confirmado o caráter não-local da mecânica quântica, *loopholes* experimentais foram apontados, o que tem evitado uma conclusão imparcial que, espera-se, seja alcançada em breve [20, 21, 22].

O advento de uma variedade de aplicações potenciais do fenômeno da não-localidade quântica [23, 24, 25, 26] junto com os avanços tecnológicos citados acima, imprime uma nova expectativa ao que se convencionou chamar de Teoria da Medida Quântica. De fato, indicam a inauguração de uma nova fase em tecnologia de comunicação [24, 25, 26] e computação [20, 27, 28, 29, 30, 31]. Esse novo campo da ciência e tecnologia, que combina e utiliza

recursos da física, matemática, ciência da computação e engenharia tem sido chamado de Informação Quântica (IQ) [20, 28, 29]. Um dos seus principais focos é entender como a teoria quântica pode ser aproveitada para melhorar, substancialmente, a aquisição, transmissão e processamento de informação.

Ao contrário da informação clássica, a IQ codificada em *qubits*<sup>1</sup> (*quantum bits*) não pode ser copiada com fidelidade [28] unitária — devido à linearidade da teoria quântica (teorema da impossibilidade de clonagem de estados quânticos) [32] — ou ser medida sem ser perturbada. Esta aparente fragilidade dos estados quânticos é uma característica positiva para a implementação de protocolos de comunicação criptográfica [28]. Por outro lado, a IQ pode nos fornecer um meio para realizar tarefas muito difíceis ou impossíveis em um computador convencional, como a fatoração de números inteiros de forma eficiente<sup>2</sup>. Deve-se a P. Shor [30] este célebre resultado que alavancou o cenário da IQ. O algoritmo quântico desenvolvido por Shor pode fatorar um número inteiro com  $N$  dígitos em um tempo (ou número de passos, ou operações lógicas) que cresce em uma escala menor que  $O(N^3)$ . Portanto, tem-se um crescimento polinomial do tempo em contraste com o superpolinomial dos algoritmos clássicos conhecidos da ordem de  $\exp[N^{1/3}(\log N)^{2/3}]$ . Tal realização tem grandes implicações em sistemas de segurança criptográficos convencionais, devido ao fato de grande parte desses sistemas estar fundamentado na dificuldade de se fatorar números com muitos dígitos. Cabe enfatizar a recente realização experimental do algoritmo quântico de Shor, em que se fatou o número 15, através de ressonância magnética nuclear (NMR), informada pelo *Solid State and Photonics Laboratory* da IBM na Califórnia [33]

Para implementar fisicamente um computador quântico precisamos, além de um sistema

---

<sup>1</sup>Um *qubit* consiste em um sistema que possa exibir uma superposição coerente de dois estados distinguíveis e possa ser emaranhado a outro sistema quântico.

<sup>2</sup>Considera-se eficiente o algoritmo capaz de resolver um certo problema usando recursos (tais como tempo e memória) que cresçam no máximo polinomialmente com o tamanho dos dados de entrada [28].

quântico de dois níveis distinguíveis (o qual codifica o *qubit*), da habilidade para preparar estados quânticos iniciais, medir estados quânticos finais e também implementar operações lógicas quânticas universais, i.e. portas lógicas CNOT e de um *qubit* [28]. O caminho natural para a realização experimental dessas operações é a utilização da interação radiação-matéria que pode ser bem controlada em diversos contextos físicos. Existem vários sistemas físicos promissores para a implementação de processamento lógico quântico. Dentre esses podemos destacar as cadeias lineares de íons aprisionados [34, 35], os sistemas de spins nucleares (NMR – *Nuclear magnetic resonance*) [36], os campos de luz propagantes [37] e aprisionados em cavidades supercondutoras (EQC) [38], os *quantum dots* em semicondutores [39] e os elétrons sobre superfície de Hélio líquido [40].

Embora uma variedade de sistemas físicos estejam sob investigação, apresentando-se como potenciais candidatos à construção de processadores lógicos quânticos<sup>3</sup>, a realização prática de propostas em computação ou comunicação quântica é limitada pelo processo de *decoerência* [41], devido ao acoplamento inevitável do sistema quântico ao meio ambiente que o envolve [42, 43, 44, 45, 47] e às flutuações intrínsecas nos parâmetros de interação requeridos [46, 48]. O processo de *decoerência* transforma um vetor de estado puro em uma mistura estatística de estados causando perda irreversível de informação quântica em uma escala de tempo que é inversamente proporcional tanto ao parâmetro de acoplamento quanto à excitação quântica do estado original [41, 42, 44, 46]. De fato, a necessidade de enormes superposições de *qubits* para a realização de computação quântica massiva nos impõe restrições de que o sistema quântico seja o mais isolado possível do meio ambiente que o cerca e que os parâmetros de interação envolvidos sejam precisamente controlados. Conseqüentemente, a investigação e o tratamento matemático das fontes de ruído em sistemas quânticos é um passo crucial em direção à implementação experimental de processadores lógicos quânticos.

---

<sup>3</sup>Já que a manipulação individual, a correlação e a medição dos *qubits* nestes contextos apresentam-se viáveis.

Vale acrescentar que um dos mais surpreendentes e importantes avanços recentes da IQ é a descoberta de que estados quânticos podem ser protegidos de erros [28, 29, 49]. A essência da correção de erros quântica está em codificar e decodificar os *qubits* de forma que os erros não afetem a informação estocada no mesmo. Para isso, precisamos conhecer bem os mecanismos de decoerência do sistema em que a IQ está sendo processada, pois existem limites para esses protocolos [49].

Tendo em vista o contexto exposto acima, esta tese é dedicada à investigação do fenômeno de decoerência em íons aprisionados e ao estudo dos efeitos de ruídos em processos de engenharia e teletransporte de estados quânticos, além de propor um esquema para a sondagem do mecanismo de tunelamento de uma única partícula. Vale acrescentar que para facilitar a compreensão, cada capítulo da tese foi escrito de forma que pudesse ser lido independentemente dos demais.

A tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos um esquema factível para a engenharia de estados arbitrários de movimento de um íon aprisionado. A partir do estado de movimento coerente previamente preparado, mostramos como a função de quase-distribuição do estado desejado pode ser esculpida. O processo de engenharia também é desenvolvido na presença de erros oriundos de flutuações na intensidade dos pulsos laser requeridos para manipular os estados eletrônicos e vibracionais do íon. Quando investigamos os efeitos de ruídos em processos que envolvem muitos passos da interação radiação-matéria, os cálculos de suas respectivas fidelidades por métodos padrões *ab-initio* tornam-se muito extensos e até mesmo proibitivos. A fim de contornar essas dificuldades utilizaremos a abordagem de operadores fenomenológicos [45, 47, 48]. Essa abordagem nos fornece uma técnica direta para estimar os efeitos de ruído ou dissipação em um dado processo quântico tornando, assim, o cálculo da fidelidade uma tarefa menos árdua [48].

Abordaremos novamente o processo de decoerência em íons aprisionados no capítulo 3, investigando o mecanismo de dissipação e aquecimento associado à polarização do gás residual

induzida pelo íon. Fundamentando nossa abordagem em uma analogia com a física de elétrons sobre superfície de hélio líquido, mostramos que o amortecimento assimétrico das oscilações de Rabi observado nos experimentos com  ${}^9\text{Be}^+$  do NIST é compatível com o fenômeno de polarização estudado. A dependência medida do amortecimento das oscilações de Rabi com o estado vibracional inicial do íon é também predita nesse modelo.

No capítulo 4 descrevemos um experimento para sondar o processo de tunelamento de um único íon aprisionado em um potencial eletromagnético do tipo poço duplo. A evolução temporal da probabilidade para a medida fluorescente do estado eletrônico fundamental do íon é empregada para caracterizar o processo de tunelamento de uma única partícula. O esquema proposto também pode ser usado para a implementação de processamento de IQ.

Já no capítulo 5 propomos um esquema para o teletransporte de estados emaranhados de zero e um fóton do campo propagante. Empregamos elementos ópticos lineares e não-lineares para obter 100% de probabilidade de sucesso no caso ideal. Utilizaremos também um tratamento fenomenológico para estimar a fidelidade do processo de teletransporte que é limitada devido à fotoabsorção nos elementos ópticos. Adotamos uma estratégia para a realização da medida de Bell que possibilita sondar a fotoabsorção nos elementos ópticos. Tal estratégia combinada com as usualmente pequenas constantes de absorção que caracterizam os elementos ópticos resulta em uma alta fidelidade para o processo de teletransporte. Finalmente, no capítulo 6 apresentamos nossas conclusões e últimos comentários.

# Referências Bibliográficas

- [1] P. K. Ghosh, *Ion Traps* (Oxford-Clarendon, New York, 1995).
- [2] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King e D. M. Meekhof, “Experimental Issues in Coherent Quantum-State Manipulation of Trapped Atomic Ions”, *J. Res. NIST* **103**, 259 (1998), disponível *online* em <http://www.nist.gov/jres>.
- [3] P. R. Berman (ed.), *Cavity Quantum Elettrodynamics* (Academic Press, San Diego, 1994).
- [4] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [5] Para uma revisão ver .P. S. Jessen e I. H. Deutsch, in: *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics* **37**, eds. B. Bederson e H. Walther (Academic Press, Cambridge, 1996);  
G. Grynberg e C. Robilliard, “Cold atoms in dissipative optical lattices”, *Phys. Reports* **355**, 335 (2001).
- [6] A.Sørensen e K. Mølmer, “Spin-Spin Interaction and Spin Squeezing in an Optical Lattice” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2274 (1999).
- [7] D. Jaksch, H.-J. Briegel, J. I. Cirac, C. W. Gardiner e P. Zoller, “Entanglement of Atoms via Cold Controlled Collisions”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1975 (1999).



- [8] R. M. Serra, N. G. de Almeida, C. J. Villas-Bôas e M. H. Y. Moussa, “Engineering cavity-field states by projection synthesis”, *Phys Rev. A* **62**, 43810 (2000).
- [9] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich, e N. Zagury, “Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of ‘Schrödinger cat’ states”, *Phys. Rev. A* **45**, 5193 (1992).
- [10] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond e S. Haroche, “Observing the Progressive Decoherence of the ‘Meter’ in a Quantum Measurement”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996).
- [11] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger e H. Walther, “Preparing pure photon number states of the radiation field”, *Nature* **403**, 743 (2000);  
S. Brattke , B. T. H. Varcoe e H. Walther, “Generation of photon number states on demand via cavity quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3534 ( 2001).
- [12] R. L. de Matos Filho e W. Vogel, “Quantum Nondemolition Measurement of the Motional Energy of a Trapped Atom”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4520 (1996).
- [13] C. Monroe , D. M. Meekhof , B. E. King e D. J. Wineland, “A ‘Schrodinger cat’ superposition state of an atom”, *Science* **272**, 1131 (1996).
- [14] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano e D. J. Wineland, “Experimental Determination of the Motional Quantum State of a Trapped Atom”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4281 (1996);  
D. Leibfried, D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King W. M. Itano, e D. J. Wineland, “Experimental preparation and measurement of quantum states of motion of a trapped atom”, *J. Mod. Opt.* **44**, 2485 (1997).

- [15] B. Julsgaard, A. Kozhekin e E. S. Polzik, “Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects”, Nature **413**, 400 (2001).
- [16] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland e C. Monroe, “Experimental entanglement of four particles”, Nature **404**, 256 (2000).
- [17] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [18] J. S. Bell, “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox”, Physics (Long Island City, NY) **1**, 195 (1964);  
J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, e R. A. Holt, “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories”, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969);  
J. S. Bell, Phys. World **3**, 33 (1990).
- [19] A. Aspect, P. Grangier, e G. Roger, “Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A New Violation of Bell’s Inequalities”, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982);  
A. Aspect, J. Dalibard, e G. Roger, “Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers”, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982);  
P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, e Y. Shih, “New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs”, Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 (1995);  
A. Kuzmich, I. A. Walmsley, e L. Mandel, “Violation of Bell’s Inequality by a Generalized Einstein-Podolsky-Rosen State Using Homodyne Detection”, Phys. Rev. Lett. **85**, 1349 (2000).

- [20] D. Bouwmeester, A. Ekert e A. Zeilinger (eds.), *The Physics of Quantum Information* (Springer, Berlin, 2000).
- [21] P. G. Kwiat, P. H. Eberhard, A. M. Steinberg, e R. Y. Chiao, “Proposal for a loophole-free Bell inequality experiment”, *Phys. Rev. A* **49**, 3209 (1994);  
E. S. Fry, T. Walther, e S. Li, “Proposal for a loophole-free test of the Bell inequalities”, *Phys. Rev. A* **52**, 4381 (1995);  
C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro e S. Padua, “Optimizing the photon pair collection efficiency: A step toward a loophole-free Bell’s inequalities experiment”, *Phys. Rev. A* **57**, R2267 (1998).
- [22] C. J. Villas-Bôas e M. H. Y. Moussa, “Proposal for testing nonlocality in Wigner representation loophole-free of detection efficiency”, *em preparação*.
- [23] C. H. Bennett e S. J. Wiesner, “Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992);  
K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat e A. Zeilinger, “Dense Coding in Experimental Quantum Communication”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4656 (1996).
- [24] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres e William K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993);  
L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J.M. Raimond e S. Haroche, “Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields”, *Phys. Rev. A* **50**, R895 (1994);  
M. H. Y. Moussa, “Teleportation with identity interchange of quantum states”, *Phys. Rev. A* **55**, R3287 (1996);

- Lu-Ming Duan, J. I. Cirac, P. Zoller e E. S. Polzik, “Quantum Communication between Atomic Ensembles Using Coherent Light”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5643 (2000).
- [25] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter e A. Zeilinger, “Experimental quantum teleportation”, *Nature* **390**, 575 (1997);
- D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy e S. Popescu, “Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121 (1998);
- S. L. Braunstein e H. J. Kimble, “Teleportation of Continuous Quantum Variables”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998);
- A. Furusawa, J. L. Sorensen, C. A. Fuchs, H. J. Kimble e E. S. Polzik, “Unconditional quantum teleportation”, *Science* **282**, 706 (1998).
- [26] C. H. Bennett e G. Brassard, “The dawn of a new era for quantum cryptography: the experimental prototype is working!”, *SIGACT News* **20**, 78 (1989);
- A. K. Ekert, “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991);
- Hoi-Kwong Lo e H. F. Chau, “Is Quantum Bit Commitment Really Possible?”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3410 (1997);
- A. Kent, “Unconditionally Secure Bit Commitment”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1447 (1999);
- D. Gottesman, “Theory of quantum secret sharing”, *Phys. Rev. A* **61**, 042311 (2000).
- [27] R. P. Feynman, *Feynman Lectures on Computation*, ed. A. J. G. Hey e R. W. Allen (Addison-Wesley, 1997).
- [28] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

- [29] J. Preskill e A. Kitaev, *Quantum Information and Computation* (não publicado); disponível *online* em <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229>.
- [30] P. Shor, “Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer”, *Proc. of 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, p. 124 (IEEE Computer Society, Los Alamos, 1994), resumo estendido. A versão completa deste artigo é encontrada em P. Shor, S. I. A. M. Journal of Computing, **26**, 1384 (1997), também disponível *online* em [quant-ph/9508027](http://arxiv.org/abs/quant-ph/9508027).
- [31] L. K. Grover, “Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325 (1997);
- L. K. Grover, “Quantum Computers Can Search Arbitrarily Large Databases by a Single Query”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4709 (1997);
- L. K. Grover, “A framework for fast quantum mechanical algorithms”, [quant-ph/9711043](http://arxiv.org/abs/quant-ph/9711043).
- [32] W. K. Wootters e W. H. Zurek, “A Single Quantum Cannot be Cloned”, *Nature* **299**, 802 (1982);
- D. Dieks, “Communication by EPR devices”, *Phys. Lett. A* **92**, 271 (1982).
- [33] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, e I. L. Chuang, *Nature* **414**, 883 (2001).
- [34] J. I. Cirac e P. Zoller, “Quantum Computations with Cold Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).
- [35] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland, “Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4714 (1995).
- [36] N. Gershenfeld e I. L. Chuang, “Bulk spin-resonance quantum computation”, *Science* **275**, 350 (1997);

- ibid.*, “Quantum computing with molecules”, *Sci. Am.* **278**, 66 (1998).
- [37] G. J. Milburn, “Quantum optical Fredkin gate”, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2124 (1989);  
I. L. Chuang e Y. Yamamoto, “Simple quantum computer”, *Phys. Rev. A* **52**, 3489 (1995).
- [38] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi e H. J. Kimble, “Measurement of Conditional Phase Shifts for Quantum Logic”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4710 (1995).
- [39] D. Loss e D. P. DiVincenzo, “Quantum computation with quantum dots”, *Phys. Rev. A* **57**, 120 (1998).
- [40] M. I. Dikman e P. M. Platzman, “A quantum computer based on electrons floating on liquid helium”, *quant-ph/0109030*;  
A. J. Dham, J. M. Gookind, I. Karakurt, e S. Pilla, “Using Electrons on Liquid Helium for Quantum Computing”, *quant-ph/0111029*.
- [41] W. H. Zurek, “Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?”, *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981);  
*ibid.*, “Environment-induced superselection rules”, *Phys. Rev. D* **26**, 1862 (1982);  
*ibid.* “Decoherence and the Transition from Quantum to Classical”, *Phys. Today* **44**, 36 (1991).
- [42] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, “Influence of damping on quantum interference: An exactly soluble model”, *Phys. Rev. A* **31**, 1059 (1985);  
*ibid.*, “Quantum tunnelling in a dissipative system”, *Ann. Phys. (N.Y.)* **149**, 374 (1983);  
**153**, 445(E) (1984);  
*ibid.*, “Path integral approach to quantum brownian-motion”, *Physica A* **121**, 587 (1983);  
**130**, 374(E) (1985).

- [43] D. F. Walls e J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1994);  
M. O. Scully e S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997);  
W. Vogel, D. G. Welsch e S. Wallentowitzs, *Quantum Optics: An introduction*, 2<sup>nd</sup> ed. (Wiley-VHC, Berlin, 2001).
- [44] Ph. Blanchard, D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer e I.-O. Stamatescu (Eds.), *Decoherence: Theoretical Experimental, and Conceptual Problems* (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
- [45] N. G. de Almeida, R. Napolitano, e M. H. Y. Moussa, “Phenomenological-operator approach to dissipation in cavity quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. A* **62**, 033815 (2000).
- [46] C. W. Gardiner e P. Zoller, *Quantum Noise*, 2<sup>nd</sup> ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
- [47] N. G. de Almeida, P.B. Ramos, R. M. Serra, e M. H. Y. Moussa, “Phenomenological-operator approach to introduce damping effects on radiation field states”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2**, 792 (2000).
- [48] R. M. Serra, P. B. Ramos, N. G. de Almeida, W. D. José e M. H. Y. Moussa, “Engineering arbitrary motional ionic state through realistic intensity-fluctuating laser pulses”, *Phys. Rev. A*. **63**, 053813 (2001).
- [49] Para um revisão ver D. Gottesman, *Stabilizer Codes and quantum Error Correction*, PhD Thesis, California Institute of Technology (Pasadena, California, USA 1995), disponível *online* em [quant-ph/9705052](http://quant-ph/9705052).

## Parte I

# Engenharia de Estados, Decoerência e tunelamento em Íons Aprisionados



# Capítulo 2

## Engenharia de Estados de Movimento de Íons Aprisionados via Pulsos Laser com Flutuação na Intensidade

### 2.1 Motivação

Nos últimos anos avanços experimentais no domínio de eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC) e íons aprisionados têm motivado um crescente interesse na chamada engenharia de estados não clássicos, tanto da radiação quanto da matéria. A preparação de estados quânticos constitui um passo crucial para testar os fundamentos da mecânica quântica, tais como não-localidade e *decoerência* [1]; e para o desenvolvimento de dispositivos como portas lógicas para a implementação de computação quântica [2]. Vários esquemas teóricos têm sido propostos para preparar estados quânticos do campo eletromagnético aprisionado em cavidades com alto fator de qualidade [3, 4, 5, 6, 7, 8], estados do campo propagantes [9, 10], além de estados eletrônicos e vibracionais de íons aprisionados [11, 12, 13, 14, 15, 16].

A técnica descrita por de Matos Filhos e Vogel [11] prepara estados coerentes pares e

ímpares de movimento, via excitação laser de duas transições vibracionais. A partir do estado fundamental vibracional, como na Ref. [11], Kneer e Law [12] propuseram um esquema para gerar um emaranhado arbitrário dos estados vibracional e eletrônico de um íon aprisionado. Esses autores também discutiram a engenharia de estados vibracionais com dois graus de liberdade de um único íon. Drobný *et al.* [13] forneceram um método para a preparação determinística de estados com dois modos de vibração. Além disso, técnicas determinísticas para criar estados de Bell de dois íons aprisionados foram apresentadas por Solano *et al.* [14], e Moya-Cessa *et al.* [15] apresentaram um procedimento para a obtenção de uma superposição discreta arbitrária de estados coerentes vibracionais. Todas essas propostas consideram a situação ideal, na qual erros inerentes aos processos experimentais são desprezados.

A preparação experimental de uma variedade de estados não clássicos foi alcançada no contexto de EQC [1] e de íons aprisionados [19, 20, 21, 22]. Estados do tipo “gato de Schrödinger” do campo de radiação em cavidades supercondutoras [1] e do movimento quantizado de íons aprisionados [20] foram gerados experimentalmente. A preparação de estados de Fock “puros” do campo de radiação foi recentemente apresentada pelo grupo do *Max Planck Institute for Quantum Optics* na Alemanha [18].

A viabilidade do processo de engenharia de estados quânticos em íons aprisionados advém do fato que a *decoerência* das superposições quânticas de estados eletrônicos torna-se desprezível através da supressão da emissão espontânea utilizando-se níveis meta-estáveis. Além disso, a coerência quântica de estados de movimento persiste por muitos ciclos de *Rabi* da interação do tipo Anti-Jaynes-Cummings (*frist blue sideband*) [19] (ver Fig. 3.3 do próximo capítulo). É interessante citar aqui uma recente e notável realização experimental, pela qual a *decoerência* de estados vibracionais de um único íon foi controlada através da chamada engenharia de reservatórios quânticos [24]. Para alcançar este controle, técnicas de resfriamento a laser (*laser cooling*) foram consideradas para gerar efetivamente um reservatório a temperatura zero como sugerido na Ref. [25].

Diferentemente dos processos em EQC, onde o mecanismo de dissipação da cavidade é a principal fonte de *decoerência*, no domínio de íons aprisionados assume-se que os erros advêm de ruídos técnicos, a saber: flutuações do campo elétrico da armadilha e na intensidade e fase dos pulsos laser, usados para manipular os estados eletrônicos e vibracionais dos íons [22]. Modelos estocásticos têm sido propostos para lidar com este tipo de erro [26, 27, 28, 29], mostrando somente um acordo qualitativo com os resultados experimentais. Recentemente, foi proposto também uma modificação da equação mestra [30] baseada na estatística não-extensiva de Tsallis [31] para descrever a *decoerência* em íons aprisionados. Di Fidio e Vogel [32], ao invés de mecanismos estocásticos, propuseram um modelo para tentar explicar o decaimento das oscilações de *Rabi*, observadas nos experimentos do NIST<sup>1</sup> [19], através de *quantum jumps* do nível auxiliar para os níveis meta-estáveis. Esse último modelo reproduz a assimetria no decaimento das oscilações de *Rabi*, mas não é sensível ao estado vibracional inicial do íon, aspecto que foi observado experimentalmente. Ainda cabe citar o modelo de Budini, de Matos Filho e Zagury [33] que, assumindo um acoplamento de um dos modos vibracionais do íon com campos estocásticos dos eletrodos e tempo de vida finito dos níveis eletrônicos, obtiveram resultados em bom acordo com as medidas experimentais [19]. Finalmente, enfatizamos que no capítulo 3 será apresentado um modelo diferente dos citados acima para tratar *decoerência* em íons aprisionados considerando a interação do íon com o gás residual das armadilhas. Tal modelo também leva a resultados que estão em bom acordo com os dados das experiências do NIST [19].

Neste capítulo apresentamos um esquema factível para a engenharia de estados de movimento iônicos através de uma adaptação da técnica de síntese da projeção, proposta originalmente no contexto de ondas propagantes [34, 35], para o contexto de íons aprisionados. Utilizando essa técnica podemos sintetizar medidas de estados de superposição arbitrários e também medir propriedades particulares do campo de radiação, tais como sua fase [34] ou sua

---

<sup>1</sup>*National Institute of Standards and Technology*, Boulder, Colorado, EUA.

função de quase-distribuição  $Q$  [36]. A partir do estado coerente de movimento, previamente preparado, mostramos como *esculpir*<sup>2</sup> de uma distribuição Gaussiana a função de Wigner do estado desejado. O método de *escultura* de estados quânticos foi introduzido, utilizando também a técnica de síntese da projeção, no contexto de EQC [7]. Porém, aqui temos a vantagem da facilidade de manipulação de íons aprisionados para tornar o processo de *escultura* de estados mais atrativo para uma possível implementação experimental. No domínio da EQC o método de *escultura* de estados aperfeiçoa consideravelmente algumas propostas para gerar estados quânticos do campo e radiação. Na Ref. [3] requer-se a interação sucessiva de  $N$  átomos com uma cavidade, inicialmente no estado de vácuo, para a geração de um estado de superposição do campo com número máximo de fótons igual a  $N$ . Por outro lado o método de *escultura* de estados requer aproximadamente a metade desse número de átomos, exatamente  $M = \text{int}[(N + 1)/2]$  átomos, para gerar o mesmo estado de superposição. Isso se deve ao fato de começarmos o processo a partir de um estado coerente previamente injetado na cavidade em vez do estado de vácuo, como na Ref. [3]. Assim, ao invés de construirmos o estado desejado fóton a fóton, nós procedemos a uma *escultura* do estado do campo a partir do estado coerente cuja excitação média adequada é previamente calculada. Esta situação é análoga a proposta neste capítulo para criar estados quânticos de movimento de íons aprisionados. Ao invés de utilizar  $N$  passos para gerar um estado de movimento arbitrário com número máximo de fônons igual a  $N$ , nosso método utiliza somente  $M$  passos, como no contexto de EQC.

Também elaboramos o processo de engenharia de estados considerando a situação realista em que ruídos provenientes de flutuações na intensidade dos pulsos laser, usados para manipular os estados eletrônicos e vibracionais, estão presentes. Para tratar esses erros, utilizamos neste capítulo o modelo de Schneider e Milburn [26] que, embora não esteja em perfeito acordo com os dados experimentais para o amortecimento das oscilações de Rabi [19], possui solução

---

<sup>2</sup>Este termo foi utilizado no contexto de EQC em R. M. Serra, N. G. de Almeida, C. J. Villas-Bôas e M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. A **62**, 043810 (2000).

analítica e pode nos dar uma boa estimativa qualitativa [26].

Quando investigamos *decoerência* em processos que envolvem muitos passos da interação radiação-matéria, — como por exemplo na preparação de estados ou na demonstração de operações lógicas em íons aprisionados — os cálculos de suas respectivas fidelidades por métodos padrões *ab initio* tornam-se muito extensos e até mesmo proibitivos. A fim de contornarmos essas dificuldades aplicamos a abordagem de operadores fenomenológicos [37, 38, 39], desenvolvida recentemente, que nos fornece uma forma direta para estimar os efeitos de ruído ou dissipação em um dado processo tornando, assim, o cálculo da fidelidade uma tarefa menos árdua [39]. Finalmente, apresentaremos uma técnica para otimizar a fidelidade do processo de engenharia na presença de ruídos baseada na maximização da taxa fidelidade-probabilidade, uma estimativa de custo benefício do processo que será introduzida na seção 2.3.

## 2.2 O modelo

Consideraremos um único íon de massa  $m$  em uma armadilha harmônica unidimensional cuja frequência é  $\nu$ . O íon possui transições proibidas entre dois níveis internos eletrônicos (estados excitado  $|\uparrow\rangle$  e fundamental  $|\downarrow\rangle$ , tomados como subníveis hiperfinos), separados pela frequência  $\omega_0$  e acoplados indiretamente pela interação com dois feixes de laser contrapropagantes, de frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , em uma configuração tipo Raman estimulada. Como indicado na Fig. 1, os feixes de laser estão dessintonizados de  $\Delta$  de um terceiro nível mais excitado  $|r\rangle$  que, na configuração tipo Raman estimulada, é eliminado adiabaticamente quando  $\Delta$  é muito maior que as seguintes quantidades: a largura de linha do nível  $|r\rangle$ , o acoplamento associado com as transições  $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |r\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle \leftrightarrow |r\rangle$  e a dessintonia  $\delta \equiv \omega_0 - \omega_L$  ( $\omega_L = \omega_1 - \omega_2$ ) [40, 41, 42, 43, 44, 45]. A transição entre  $|\downarrow\rangle$  e um quarto nível  $|d\rangle$ , obtida por outro laser fortemente acoplado, é considerada para medir o estado eletrônico fundamental do íon através da coleta do sinal fluorescente [21, 40, 43].

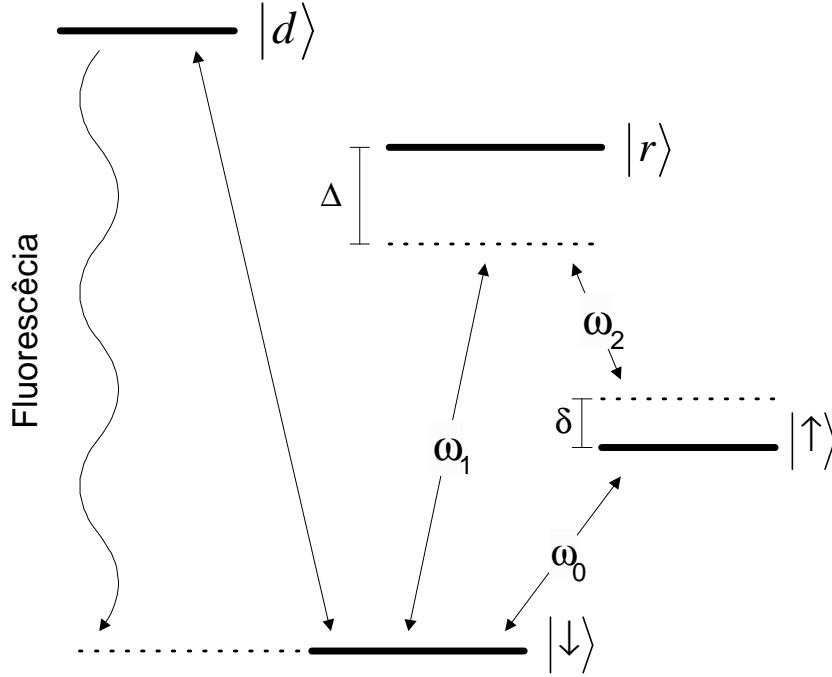


Figura 2.1. Diagrama dos níveis de energia eletrônicos de um íon interagindo com feixes de laser de frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , onde  $\delta = \omega_0 - \omega_1 + \omega_2$  ( $\delta \ll \Delta$ ).  $|r\rangle$  (eliminado adiabaticamente) corresponde a um nível auxiliar que indiretamente acopla os níveis  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ , e  $|d\rangle$  indica um nível eletrônico usado para a medida de fluorescência e assim caracterizar o estado eletrônico  $|\downarrow\rangle$ .

O Hamiltoniano que descreve a interação efetiva do movimento quantizado do centro de massa iônico (CM) com seus graus de liberdade eletrônicos é [21, 44], em um referencial girante com a “frequência efetiva do laser”  $\omega_L$  ( $\hbar = 1$ ):

$$\hat{H} = \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\delta}{2} \hat{\sigma}_z + \Omega \left( \hat{\sigma}_+ e^{i\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - i\varphi} + \hat{\sigma}_- e^{-i\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + i\varphi} \right), \quad (2.1)$$

onde  $\varphi$  é a diferença de fase entre os dois feixes de laser,  $\hat{\sigma}_+ = |\uparrow\rangle \langle \downarrow|$ ,  $\hat{\sigma}_- = |\downarrow\rangle \langle \uparrow|$  e  $\hat{\sigma}_z$  são os operadores de pseudo-spin de Pauli usuais,  $\hat{a}^\dagger$  ( $\hat{a}$ ) é o operador de criação (aniquilação) de

quanta de energia vibracional,  $\Omega$  é a frequência de Rabi efetiva da transição  $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$ , e  $\eta$  é o parâmetro de Lamb-Dicke definido como [21, 40]:

$$\eta \equiv \frac{\Delta k}{\sqrt{2m\nu}}. \quad (2.2)$$

Aqui  $\Delta k = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{i}$ ,  $|\vec{k}_{1(2)}| = \omega_{1(2)}/c$ ,  $\vec{k}_1$  ( $\vec{k}_2$ ) refere-se ao vetor de onda do laser 1(2), e  $\vec{i}$  é o vetor unitário na direção do eixo da armadilha.

Escrevendo  $H$  na representação de interação e expandindo o Hamiltoniano resultante em termos do parâmetro de Lamb-Dicke obtemos

$$\hat{H}_I = \Omega e^{-\eta^2/2} \left[ \sum_{m,l=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^{m+l}}{m!l!} \hat{\sigma}_+ \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^l e^{i[(m-l)\nu+\delta]t-i\varphi} + h.c. \right]. \quad (2.3)$$

Assumindo o limite de Lamb-Dicke, para o qual  $\eta \ll 1$ , onde o movimento do CM iônico é fortemente localizado com respeito ao comprimento de onda dos feixes laser, obtemos o Hamiltoniano simplificado

$$\hat{H}_I = \Omega (\hat{\sigma}_+ e^{-i\delta t - i\varphi} + i\eta \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\nu+\delta)t - i\varphi} + i\eta \hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i(\nu+\delta)t - i\varphi} + h.c.),$$

onde a ressonância é alcançada através da sintonia das frequências dos feixes laser (1 e 2) de forma a obter  $\delta = \ell\nu$  ( $\ell = m - l$ ). Considerando os valores realistas para a frequência da armadilha  $\nu/2\pi \approx 11.2$  MHz e  $\Omega/2\pi \approx 475$  kHz [19], a aproximação de onda girante[46] leva ao Hamiltoniano do tipo Carrier ( $\ell = 0$ ) quando sintonizamos a frequência do laser efetivo de modo a obter  $\delta = 0$ :

$$\hat{H}_c = \Omega(\hat{\sigma}_+ e^{-i\varphi} + \hat{\sigma}_- e^{i\varphi}). \quad (2.4)$$

Esse Hamiltoniano induz a transição  $|n, \downarrow\rangle \longleftrightarrow |n, \uparrow\rangle$  (onde  $|n\rangle$  indica um estado de Fock vibracional), e é responsável por rotações sobre o estado eletrônico do íon de acordo com

$$e^{-i\hat{H}_c\tau} |n, \uparrow\rangle = \cos(\Omega\tau) |n, \uparrow\rangle - ie^{i\varphi} \sin(\Omega\tau) |n, \downarrow\rangle, \quad (2.5a)$$

$$e^{-i\hat{H}_c\tau} |n, \downarrow\rangle = \cos(\Omega\tau) |n, \downarrow\rangle - ie^{-i\varphi} \sin(\Omega\tau) |n, \uparrow\rangle. \quad (2.5b)$$

Quando sintonizamos a frequência efetiva do laser de modo a obter  $\delta = \nu$ , a aproximação de onda girante nos leva a um Hamiltoniano do tipo Jaynes-Cummings ( $\ell = 1$ ) correspondendo ao primeiro deslocamento da banda lateral para o vermelho (*first red sideband*),

$$\hat{H}_{JC} = i\Omega\eta(\hat{a}\hat{\sigma}_+e^{-i\varphi} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-e^{i\varphi}). \quad (2.6)$$

$\hat{H}_{JC}$  induz a transição  $|n, \downarrow\rangle \longleftrightarrow |n-1, \uparrow\rangle$ , de forma que os estados eletrônicos e vibracionais evoluem como

$$e^{-i\hat{H}_{JC}\tau}|n, \uparrow\rangle = C_n|n, \uparrow\rangle - e^{-i\varphi}S_n|n+1, \downarrow\rangle, \quad (2.7a)$$

$$e^{-i\hat{H}_{JC}\tau}|n, \downarrow\rangle = C_{n-1}|n, \downarrow\rangle + e^{i\varphi}S_{n-1}|n-1, \uparrow\rangle, \quad (2.7b)$$

onde  $C_n = \cos(g\tau\sqrt{n+1})$ ,  $S_n = \sin(g\tau\sqrt{n+1})$ ,  $\tau$  é o tempo de duração do pulso laser, e  $g = \Omega\eta$ . Finalmente, notamos que é possível obter um Hamiltoniano do tipo anti-Jaynes-Cummings ( $\ell = -1$ ) correspondendo ao primeiro deslocamento da banda lateral para o azul (*first blue sideband*). Entretanto, para o propósito deste capítulo nós não vamos usar esta interação específica que induz a transição  $|n, \downarrow\rangle \longleftrightarrow |n+1, \uparrow\rangle$ .

## 2.3 Escultura de Estados Quânticos - Caso Ideal

Nesta seção mostraremos como preparar estados arbitrários de movimento iônico através das técnicas de síntese da projeção (originalmente proposta no contexto de campos propagantes [34, 35]) e de escultura de estados (originalmente proposta no contexto de EQC [7]). Assumimos que o íon é inicialmente preparado (através da tecnologia corrente [20, 21]) no estado coerente de movimento do centro de massa  $|\alpha\rangle$  de forma que

$$|\Psi^{(0)}\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\uparrow\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(0)} |n\rangle \otimes |\uparrow\rangle, \quad (2.8)$$

com  $\Lambda_n^{(0)} = \exp(-|\alpha|^2/2)\alpha^n/\sqrt{n!}$ . Como o estado desejado é gerado a partir do estado coerente previamente preparado, denominamos este processo de escultura de estados quânticos.



De fato, como será mostrado abaixo, nossa estratégia consiste em esculpir a função de quase-distribuição do estado desejado, através de pulsos laser adequados, a partir da função de quase-distribuição para o estado coerente previamente preparado segundo a Eq. (2.8). Os pulsos laser carrier ( $C$ ) e Jaynes-Cummings ( $JC$ ) funcionam como “cinzeis quânticos” sobre a distribuição inicial para o estado coerente, como mostrado via notação de algoritmos quânticos [47] na Fig. 2.2. No domínio de EQC, os átomos de Rydberg fazem o papel de “cinzeis quânticos” [7].

A operação inteira é realizada em ciclos de três passos, requerendo sucessivamente *i*) um pulso carrier  $C_1$ , para preparar o estado eletrônico em uma superposição particular, *ii*) um pulso  $JC$ , para emaranhar os estados de movimento e eletrônico do íon, e *iii*) a seqüência de um pulso carrier  $C_2$  e medida fluorescente do estado eletrônico do íon. O terceiro passo constitui a síntese da projeção que nos possibilita sintetizar uma medida de uma superposição particular dos estados eletrônicos e, conseqüentemente, sintetizar uma projeção nos graus de liberdade vibracionais do íon de forma a obter o estado desejado. Um sinal fluorescente projeta o estado interno do íon em  $|\downarrow\rangle$ , enquanto que a ausência de fluorescência projeta o estado em  $|\uparrow\rangle$ . Para a proposta presente, a ausência de fluorescência é crucial para prevenir a ocorrência de aquecimento no movimento do CM iônico. Assim, ao final de cada ciclo a detecção de ausência de fluorescência é requerida para a realização bem sucedida do processo de preparação de estados.

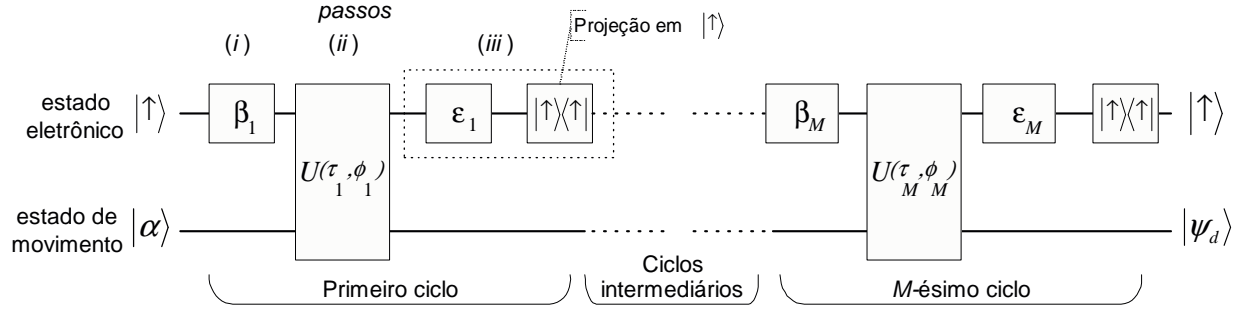


Figura 2.2. Notação de algoritmo quântico [47] para o processo de escultura de estados de movimento em íons aprisionados. Os parâmetros complexos  $\beta_k$  e  $\varepsilon_k$  indicam rotações dos estados eletrônicos executadas pelo primeiro e segundo pulso carrier ( $C_1$  e  $C_2$ ), respectivamente, no  $k$ -ésimo ciclo, e esses parâmetros são ajustados através da escolha adequada da duração e fase dos pulsos laser segundo as Eqs. (2.5a) e (2.5b).  $U(\tau_k, \varphi_k)$  indica o operador evolução do  $k$ -ésimo pulso  $JC$ . Ao fim de cada ciclo a medida de ausência de fluorescência (projeção em  $|\uparrow\rangle$ ) é requerida para completar o processo de engenharia de estados com sucesso. O tempo procede da forma usual da esquerda para a direita.

Repetiremos os ciclos de três passos  $M$  vezes para esculpir o estado arbitrário desejado  $|\Psi_d\rangle = \sum_{n=0}^{N_d} d_n |n\rangle \otimes |\uparrow\rangle$  (ver Fig. 2.2), onde notamos que o estado eletrônico fica fatorado. Os parâmetros  $M$  e  $N_d$  (o número de excitação máxima do estado desejado) são relacionados a seguir.

Considerando o  $k$ -ésimo ciclo do processo de escultura, começaremos por assumir que o estado iônico após o  $(k-1)$ -ésimo ciclo seja dado por

$$|\Psi^{(k-1)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(k-1)} |n, \uparrow\rangle. \quad (2.9)$$

Como primeiro passo do  $k$ -ésimo ciclo prepararemos, com o pulso carrier  $C_1$ , o estado de superposição eletrônico  $\mathcal{N}_{\beta_k} (|\uparrow\rangle + \beta_k |\downarrow\rangle)$ , onde  $\mathcal{N}_{\beta_k} = (1 + |\beta_k|^2)^{-1/2}$  e  $\beta_k$  é um parâmetro complexo ajustado pelo pulso  $C_1$  [com uma duração e fase apropriadas conforme as Eqs. (2.5a) e (2.5b)]. No segundo passo, um pulso  $JC$  emaranha os estados vibracional e eletrônico da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |\psi^{(k)}\rangle = & \mathcal{N}_{\beta_k} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(k-1)} (C_n^{(k)} |n, \uparrow\rangle - e^{-i\varphi_k} S_n^{(k)} |n+1, \downarrow\rangle + \\ & + \beta_k C_{n-1}^{(k)} |n, \downarrow\rangle + e^{i\varphi_k} \beta_k S_{n-1}^{(k)} |n-1, \uparrow\rangle), \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $C_m^{(k)} = \cos(g\tau_k \sqrt{m+1})$ ,  $S_m^{(k)} = \sin(g\tau_k \sqrt{m+1})$ ,  $\tau_k$  e  $\varphi_k$  são o tempo de duração e a fase do  $k$ -ésimo pulso  $JC$ , respectivamente. Em seguida, no terceiro passo, temos que sintetizar a projeção do estado (2.10) em uma superposição particular (do  $k$ -ésimo ciclo)  $|\chi^{(k)}\rangle = \mathcal{N}_{\varepsilon_k} (|\uparrow\rangle + \varepsilon_k^* |\downarrow\rangle)$ , com  $\mathcal{N}_{\varepsilon_k} = (1 + |\varepsilon_k|^2)^{-1/2}$ . O parâmetro complexo  $\varepsilon_k$  resulta da  $k$ -ésima rotação dos estados eletrônicos induzida pelo segundo pulso carrier  $C_2$ . Em consequência da ausência de fluorescência (caso em que a medida de  $|\uparrow\rangle$  foi bem sucedida), o estado iônico após a síntese da projeção é dado por

$$|\Psi^{(k)}\rangle = \mathcal{N}_k |\uparrow\rangle \langle \chi^{(k)} | \psi^{(k)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(k)} |n, \uparrow\rangle. \quad (2.11)$$

Os coeficientes  $\Lambda_n^{(k)}$  resultam daqueles da Eq. (2.10) usando a relação de recorrência  $\Lambda_n^{(k)} = \mathcal{N}_k \Gamma_n^{(k)}$ , onde

$$\Gamma_n^{(k)} = \left( C_n^{(k)} + \varepsilon_k \beta_k C_{n-1}^{(k)} \right) \Lambda_n^{(k-1)} + e^{i\varphi_k} \beta_k S_n^{(k)} \Lambda_{n+1}^{(k-1)} - e^{-i\varphi_k} \varepsilon_k (1 - \delta_{n,0}) S_{n-1}^{(k)} \Lambda_{n-1}^{(k-1)}, \quad (2.12)$$

e a constante de normalização  $\mathcal{N}_k$  é dada por

$$\mathcal{N}_k = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} |\Gamma_n^{(k)}|^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.13)$$

O pulso  $C_2$  e a ausência de fluorescência (medida do estado  $|\uparrow\rangle$ ) são necessários para ajustar a “medida” da superposição particular  $|\chi^{(k)}\rangle$ , na qual, em analogia com a medida da polarização

da luz, esses fazem o papel de “analisador” e “polarizador”, respectivamente, dos estados eletrônicos, permitindo-nos analisar uma superposição arbitrária de  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ . Essa medida [49] funciona da seguinte forma: o pulso carrier  $C_2$  é ajustado de tal forma que o estado de superposição eletrônico do íon  $|\chi^{(k)}\rangle$  sofra uma transformação unitária para o estado  $|\uparrow\rangle$ . Caso contrário, o estado eletrônico evolui para  $|\downarrow\rangle$  se o íon estiver inicialmente (antes do pulso carrier  $C_2$ ) no estado ortogonal a  $|\chi^{(k)}\rangle$ . Após o pulso carrier  $C_2$  uma medida de fluorescência é requerida para projetar o estado em  $|\uparrow\rangle$  ou  $|\downarrow\rangle$ . Em geral, o estado eletrônico após o pulso  $JC$  estará em uma superposição do estado  $|\chi^{(k)}\rangle$  e do ortogonal a  $|\chi^{(k)}\rangle$  (note que esses estados formam uma base completa), assim em um evento fracassado encontraremos sinal fluorescente (detecção de  $|\downarrow\rangle$ ), e em um evento bem sucedido não encontraremos (detecção de  $|\uparrow\rangle$ ). Assim, a técnica de síntese de projeção é capaz de medir observáveis da forma  $|\chi^{(k)}\rangle\langle\chi^{(k)}|$ , que representam projetores com autovalores associados com a ausência (medindo  $|\uparrow\rangle$ ) ou presença (medindo  $|\downarrow\rangle$ ) de fluorescência.

Uma vez que a projeção de um estado eletrônico em particular no  $M$ -ésimo ciclo deve completar o processo de escultura, a seguinte igualdade deve ser satisfeita

$$\mathcal{N}_M |\uparrow\rangle \langle\chi^{(M)}|\psi^{(M)}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(M)} |n, \uparrow\rangle = \sum_{n=0}^{N_d} d_n |n, \uparrow\rangle, \quad (2.14)$$

requerendo que  $\Lambda_n^M \approx 0$  quando  $n \geq N_d + 1$ . Essa aproximação resulta em uma fidelidade não unitária para o processo de escultura. Usualmente a fidelidade de um dado processo quântico é definida para levar em conta os erros introduzidos devido a mecanismos dissipativos do meio ambiente ou flutuações em um dado parâmetro do sistema [37, 38, 39, 47]. Como mencionado anteriormente, na próxima seção consideraremos a situação não ideal onde flutuações estocásticas nas intensidades do laser [26] estão presentes durante o processo de escultura. Nesta seção, tratando-se do caso ideal, a fidelidade é definida apenas para levar em conta os erros introduzidos na aproximação  $\Lambda_n^M \approx 0$  quando  $n \geq N_d + 1$  inerente ao processo de escultura.

Assim, a fidelidade do processo ideal de escultura é escrita como

$$\mathcal{F} \equiv \left| \langle \Psi_d | \psi^{(M)} \rangle \right|^2 = \frac{\left| \sum_{n=0}^{N_d} d_n^* \Gamma_n^{(M)} \right|^2}{\sum_{l=0}^{\infty} \left| \Gamma_l^{(M)} \right|^2}. \quad (2.15)$$

A probabilidade de esculpirmos com sucesso o estado desejado é  $\mathcal{P} = \prod_{k=1}^M P_k$ , onde  $P_k$  é a probabilidade de sintetizarmos a medida da superposição particular ( $|\chi^{(k)}\rangle$ ), dada por  $\left| \langle \chi^{(k)} | \psi^{(k)} \rangle \right|^2$ , no  $k$ -ésimo emaranhado de estados de movimento e eletrônico [Eq. (2.10)]. Em outras palavras,  $P_k$  refere-se a probabilidade de medirmos a ausência de fluorescência após o segundo pulso carrier  $C_2$  no  $k$ -ésimo ciclo. Essa probabilidade é dada por

$$P_k = \left| \langle \chi^{(k)} | \psi^{(k)} \rangle \right|^2 = \mathcal{N}_{\varepsilon_k}^2 \mathcal{N}_{\beta_k}^2 \sum_{n=0}^{\infty} |\Gamma_n^k|^2. \quad (2.16)$$

Para uma escolha apropriada da excitação média do estado coerente inicial de movimento,  $|\alpha|^2 = \bar{n}_\alpha$ , observamos através da relação de recorrência (2.12) e da definição dos coeficientes  $\Lambda_n^{(0)}$ , que os coeficientes  $\Gamma_n^{(M)}$  dependem de potências de  $\alpha$ , segundo  $|\alpha|^j / \sqrt{j!}$ , com  $n - M \leq j \leq n + M$ . De fato, podemos concluir de forma direta que, após uma aplicação da relação de recorrência (2.12), os coeficientes  $\Gamma_n^{(M)}$  serão proporcionais aos coeficientes  $\left\{ \Lambda_{n-1}^{(M-1)}, \Lambda_n^{(M-1)}, \Lambda_{n+1}^{(M-1)} \right\}$ ; após duas aplicações da relação (2.12) segue que

$$\Gamma_n^{(M)} \propto \left\{ \Lambda_{n-2}^{(M-2)}, \Lambda_{n-1}^{(M-2)}, \Lambda_n^{(M-2)}, \Lambda_{n+1}^{(M-2)}, \Lambda_{n+2}^{(M-2)} \right\},$$

e após  $M$  aplicações finalmente obtemos

$$\Gamma_n^{(M)} \propto \left\{ \Lambda_{n-M}^{(0)}, \Lambda_{n-M+1}^{(0)}, \dots, \Lambda_n^{(0)}, \dots, \Lambda_{n+M-1}^{(0)}, \Lambda_{n+M}^{(0)} \right\}.$$

Portanto, a partir da definição de  $\Lambda_n^{(0)}$  (estado coerente de movimento inicial), notamos que  $\Gamma_n^{(M)}$  depende de potências de  $\alpha$ , como mencionado acima, e a escolha da excitação média  $\bar{n}_\alpha$  deve assegurar que  $P_\alpha(N_d - M + 1) = |\langle N_d - M + 1 | \alpha \rangle|^2 \approx 0$  (satisfazendo a imposição  $\Lambda_n^{(M)} \approx 0$  quando  $n \geq N_d + 1$ ), resultando em uma alta fidelidade  $\mathcal{F}$  às custas de uma baixa probabilidade  $\mathcal{P}$ . Isto é evidente através do denominador da Eq. (2.15), onde percebemos que

quanto menor o número  $l$  na soma dos coeficientes significativos, tanto maior será a fidelidade. Por outro lado, na Eq. (2.16) observamos que a probabilidade  $\mathcal{P}$  é diretamente proporcional a  $\alpha$ . Como consequência, as Eqs. (2.15) e (2.16) nos fornecem uma taxa fidelidade-probabilidade,  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{F}^\xi \mathcal{P}^\zeta$ , uma estimativa de custo-benefício para a escultura do estado desejado, onde os parâmetros  $\xi$  e  $\zeta$  são apropriadamente escolhidos para dar pesos às contribuições da fidelidade e da probabilidade de acordo com as necessidades ou intenções do “escultor”. De fato, o “escultor” pode decidir privilegiar a fidelidade ou a probabilidade na estimativa de custo-benefício  $\mathcal{R}$ , e neste trabalho optamos por privilegiar a fidelidade, escolhendo os valores  $\xi = 4$  e  $\zeta = 1/2$ .

Estamos interessados na melhor taxa de custo-benefício para o processo de escultura, e portanto, estamos interessados em maximizar a taxa  $\mathcal{R}$ . Para tal maximização fazemos uso de todos os parâmetros envolvidos no processo, a saber: a duração e a fase do pulso laser  $JC$  ( $\tau_k$  e  $\varphi_k$ ), os parâmetros  $\beta_k$  e  $\varepsilon_k$  dos pulsos carrier ( $C_1$  e  $C_2$ ), além da excitação média do estado coerente inicial de movimento ( $\bar{n}_\alpha$ ). Notamos que uma boa estratégia para maximizar  $\mathcal{R}$  consiste em começar com a escolha de  $\bar{n}_\alpha$  tal que  $P(N_d - M + 1) \approx 0$ , e então proceder à maximização de  $\mathcal{R}$ , aumentando  $\bar{n}_\alpha$  às custas da diminuição da fidelidade. Para cada escolha de  $\bar{n}_\alpha$ , a duração e fase do pulso laser  $JC$  ( $\tau_k$  e  $\varphi_k$ ) são escolhidas de modo a maximizar a taxa  $\mathcal{R}$ . Finalmente a escolha dos parâmetros  $\beta_k$  e  $\varepsilon_k$  dos pulsos carrier ( $C_1$  e  $C_2$ ) segue de uma solução particular da Eq. (2.14) que, junto com a imposição  $\Lambda_n^{(M)} \approx 0$  quando  $n \geq N_d + 1$ ,

resulta no sistema de  $N_d + 1$  equações

$$\begin{aligned}
d_{N_d} &= \mathcal{N}_M \left[ \left( C_{N_d}^{(M)} + \varepsilon_M \beta_M C_{N_d-1}^{(M)} \right) \Lambda_{N_d}^{(M-1)} \right. \\
&\quad \left. + e^{i\varphi_k} \beta_M S_{N_d}^{(M)} \Lambda_{N_d+1}^{(M-1)} - e^{-i\varphi_k} \varepsilon_M S_{N_d-1}^{(M)} \Lambda_{N_d-1}^{(M-1)} \right], \\
&\vdots = \vdots \\
d_n &= \mathcal{N}_M \left[ \left( C_n^{(M)} + \varepsilon_M \beta_M C_{n-1}^{(M)} \right) \Lambda_n^{(M-1)} \right. \\
&\quad \left. + e^{i\varphi_k} \beta_M S_n^{(M)} \Lambda_{n+1}^{(M-1)} - e^{-i\varphi_k} \varepsilon_M S_{n-1}^{(M)} \Lambda_{n-1}^{(M-1)} \right], \\
&\vdots = \vdots \\
d_0 &= \mathcal{N}_M \left[ \left( C_0^{(M)} + \varepsilon_M \beta_M \right) \Lambda_0^{(M-1)} + e^{i\varphi_k} \beta_M S_0^{(M)} \Lambda_1^{(M-1)} \right].
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Para resolver o sistema de equações (2.17), aplicaremos a relação de recorrência (2.12)  $M - 1$  vezes de modo a expressar os coeficientes desconhecidos  $\Lambda_n^{(k)}$  em termos dos coeficientes conhecidos para o estado coerente inicial de movimento  $\Lambda_n^{(0)}$ . Assim, obteremos um sistema de equações não-linear, cujos parâmetros livres são  $\beta_1, \dots, \beta_M$  e  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M$ , que indicam a rotação particular dos estados eletrônicos em cada ciclo, devido aos pulsos carrier  $C_1$  e  $C_2$ . Essas variáveis são obtidas a partir dos coeficientes conhecidos  $d_n$  e  $\Lambda_n^{(0)}$ . A solução do sistema não-linear (2.17), a princípio, pode ser obtida se o número de equações for igual ao número de variáveis, sendo as variáveis os parâmetros dos pulsos carrier. Uma das equações do sistema (2.17) é amarrada pela constante de normalização  $\prod_{k=1}^M \mathcal{N}_k$  e cada ciclo introduz no sistema dois parâmetros livres  $(\beta_k, \varepsilon_k)$  via relação de recorrência (2.12). Portanto, o número mínimo de ciclos necessários para que possamos obter a solução do sistema (2.17) deve ser  $M = \text{int}[(N_d + 1)/2]$ . Esta conclusão segue do fato que nosso esquema de preparação parte do estado coerente. As variáveis reais  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$  e  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M$  são usadas para maximizar a taxa  $R$ .

Com a técnica de escultura é possível esculpir um estado vibracional através do remodelamento de outro estado vibracional. Em particular, aqui partimos do estado coerente já que este é facilmente gerado [21].

### 2.3.1 Escultura do estado de fase truncado

Para ilustrar a técnica de escultura procedemos à engenharia do estado de fase truncado ( $N_d = 2$ )

$$|\Psi_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^2 |n, \uparrow\rangle. \quad (2.18)$$

Como mencionado anteriormente, o processo de escultura do estado  $|\Psi_d\rangle$  requer  $M = \text{int}[(N_d + 1)/2] = 1$  ciclo, e obtemos do sistema de equações (2.17)

$$\frac{\left[ \left( C_2^{(1)} + \varepsilon_1 \beta_1 C_1^{(1)} \right) \Lambda_2^{(0)} + e^{i\varphi_1} \beta_1 S_2^{(1)} \Lambda_3^{(0)} - e^{-i\varphi_1} \varepsilon_1 S_1^{(0)} \Lambda_1^{(0)} \right]}{\left[ \left( C_0^{(1)} + \varepsilon_1 \beta_1 \right) \Lambda_0^{(0)} + e^{i\varphi_1} \beta_1 S_0^{(1)} \Lambda_1^{(0)} \right]} = 1, \quad (2.19a)$$

$$\frac{\left[ \left( C_1^{(M)} + \varepsilon_1 \beta_1 C_0^{(1)} \right) \Lambda_1^{(0)} + e^{i\varphi_1} \beta_1 S_1^{(1)} \Lambda_2^{(0)} - e^{-i\varphi_1} \varepsilon_1 S_0^{(1)} \Lambda_0^{(0)} \right]}{\left[ \left( C_0^{(1)} + \varepsilon_1 \beta_1 \right) \Lambda_0^{(0)} + e^{i\varphi_1} \beta_1 S_0^{(1)} \Lambda_1^{(0)} \right]} = 1. \quad (2.19b)$$

Resolvendo o sistema acima [Eqs. (2.19a) e (2.19b)], obtemos uma equação polinomial de quarta ordem nas variáveis  $\varepsilon_1$  ( $\beta_1$ ) para qualquer conjunto de parâmetros fixos  $\bar{n}_\alpha$ ,  $g\tau_1$  e  $\varphi_1$ . Quando consideramos mais de um ciclo para esculpir um estado onde  $N_d > 2$ , obtemos sistema não-linear de equações acopladas que permite somente soluções numéricas [48].

Seguindo a estratégia mencionada na seção anterior, começamos com a escolha da excitação média  $\bar{n}_\alpha$  que leva ao maior valor da fidelidade, resultando de  $P(3) = |\langle 2|\alpha\rangle|^2 \approx 0$ . Para nossos propósitos começamos com a excitação média  $\bar{n}_\alpha = 0,04$ . Para cada valor de  $\bar{n}_\alpha$  (escolhendo  $\alpha$  como um parâmetro real) procedemos ao cálculo da duração ( $g\tau_1$ ) e da fase ( $\varphi_1$ ) do pulso laser  $JC$  que maximiza a taxa  $\mathcal{R}$ . Como discutido anteriormente, o valor máximo de  $\mathcal{R}$  depende da escolha dos parâmetros  $\xi = 4$  e  $\zeta = 1/2$ , que dão peso a  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{P}$ , respectivamente. Na Tab. 2.1 mostramos a taxa  $\mathcal{R}$  associada com cada valor de  $\bar{n}_\alpha$ , a partir daquele que maximiza a fidelidade ( $\bar{n}_\alpha = 0,04$ ) até valores que exibem um decréscimo contínuo no valor da taxa  $\mathcal{R}$ . Além disso, obtemos quatro raízes  $(\varepsilon_1, \beta_1)$  das Eqs. (2.19a) e (2.19b) quando cada par de parâmetros  $(g\tau_1, \varphi_1)$  é fixado, e devemos escolher aquela que maximiza  $\mathcal{R}$ . O valor  $\bar{n}_\alpha = 0,25$  resulta na maior taxa  $\mathcal{R} = 0,60$ , que segue de um fidelidade próxima a unidade  $\mathcal{F} = 0,99$  e



de uma probabilidade  $\mathcal{P} = 0,38$  de sucesso da escultura do estado desejado.

Apresentamos nas Figs. 2.3(a) e 2.3(b) o processo de escultura do estado desejado, o estado de fase truncado da Eq. (2.18), a partir da função de Wigner associada ao estado coerente inicial de movimento ( $\bar{n}_\alpha = 0,25$ ), dada pela Gaussiana deslocada da origem  $W(p, q) = (2/\pi) \exp [-(q + \alpha)^2 - p^2]$  mostrada na Fig. 2.3(a). O estado, associado com a taxa  $\mathcal{R} = 0,60$  (o melhor valor da taxa custo-benefício), obtido após um ciclo de operações usando os parâmetros ( $g\tau_1, \varphi_1, \varepsilon_1$  e  $\beta_1$ ) associados com esta taxa, é exibido na Fig.2.3(b). É interessante notar que não há diferenças visuais entre a função de Wigner do estado esculpido mostrada na Fig. 2.3(b) e a função de Wigner para o estado desejado da Eq. (2.18). Por este motivo não exibimos aqui a função de Wigner para o estado desejado. Como já havíamos ressaltado anteriormente, é possível através do presente esquema esculpir o estado desejado com alta probabilidade de sucesso mas às custas de uma menor fidelidade. Assim, a técnica de escultura de estados deve ser avaliada através da estimativa de custo-benefício, aqui definida como a taxa fidelidade-probabilidade, que depende dos propósitos do escultor.

A próxima seção trata dos efeitos de ruído no processo de escultura, i.e., a influência dos erros que surgem da flutuação da intensidade dos pulsos laser [26].

Tabela 2.1. Probabilidade  $\mathcal{P}$ , fidelidade  $\mathcal{F}$  e taxa  $\mathcal{R} = \mathcal{F}^\xi \cdot \mathcal{P}^\zeta$  (com  $\xi = 4$  e  $\zeta = 1/2$ ), para cada valor da excitação média do estado coerente inicial  $\bar{n}_\alpha$ . O tempo de interação  $g\tau_1$  e a fase  $\varphi_1$  do pulso  $JC$  nessa tabela correspondem aos valores que maximizam a taxa  $R$  para cada  $\bar{n}_\alpha$ .

$\bar{n}_\alpha$	$g\tau_1$	$\varphi_1$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{R}$
0,04	3,35	3,15	0,11	0,99	0,33
0,09	3,51	3,14	0,22	0,99	0,47
0,16	3,65	3,15	0,33	0,99	0,56
0,25	3,79	3,14	0,38	0,99	0,60
0,36	3,93	3,14	0,42	0,97	0,59
0,49	4,07	0,02	0,44	0,95	0,53
0,64	1,81	3,14	0,61	0,92	0,54

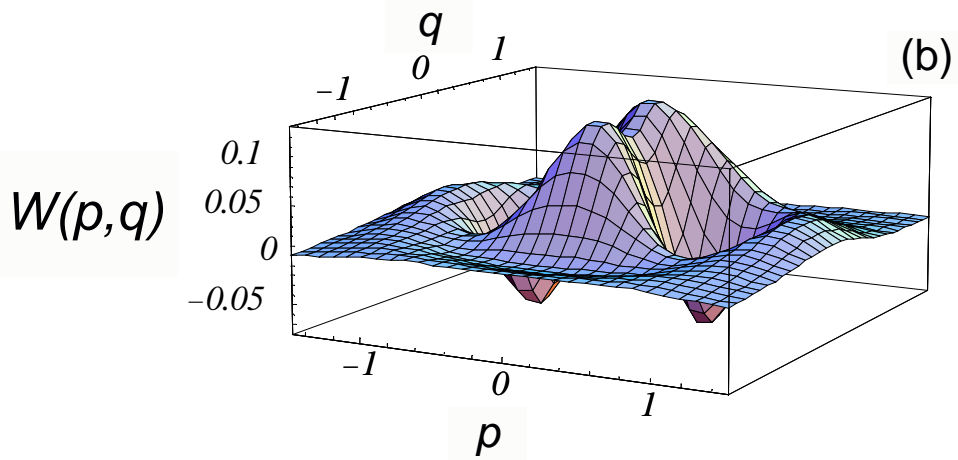
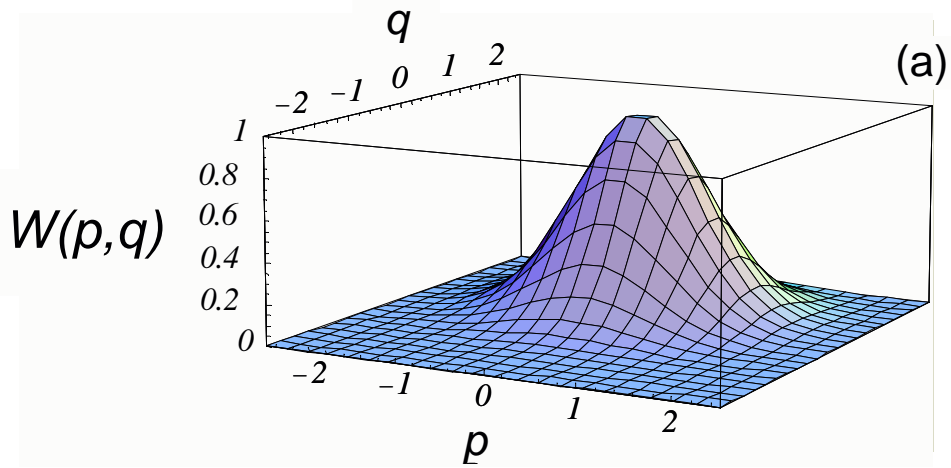


Figura 2.3. Função de quase-distribuição de Wigner para (a) o estado coerente inicial de movimento com  $\bar{n}_\alpha = 0,25$  e para (b) o estado esculpido após o primeiro ciclo. Usamos os parâmetros  $\varepsilon_1 = 25,6159 - i0,0379$  e  $\beta_1 = -0,3994 - i0,6408 \times 10^{-4}$  associados aos valores da Tab. 2.1:  $\mathcal{F} = 0,99$ ,  $\mathcal{P} = 0,38$  e  $\mathcal{R} = 0,60$ .

## 2.4 Efeitos de ruídos no processo de escultura

Consideramos nessa seção os ruídos provenientes das flutuações na intensidade dos pulsos laser de excitação (carrier e Jaynes-Cummings) requeridos para manipular os estados internos e externos dos íons aprisionados [26, 40]. Propomos também uma forma alternativa para a preparação de estados iônicos vibracionais na presença de ruídos, que consiste em maximizar a fidelidade do estado obtido. A abordagem de operadores fenomenológicos, originalmente desenvolvida no contexto de EQC [37, 38, 39], será considerada aqui para lidar com a evolução dos estados iônicos sob a influência de pulsos laser com flutuação na intensidade. Esta estratégia provê uma forma direta de incorporar as principais características obtidas pelos métodos *ab initio* padrões (que em geral tornam-se muito extensos) no tratamento de erros de um dado processo. Em resumo, introduziremos um espaço de estados auxiliar onde operadores de ruído serão definidos de forma a considerar os efeitos do ruído explicitamente na evolução do vetor de estado do sistema completo, compreendido pelos estados iônicos (internos e externos) e pelos estados auxiliares. Após computarmos a evolução do sistema completo, o operador densidade reduzido do íon poderá ser obtido imediatamente através do traço sobre as variáveis auxiliares. A abordagem de operadores fenomenológicos é construída de forma que o operador densidade reduzido obtido seja aquele obtido pelos métodos padrões. É interessante notar que o método de operadores fenomenológicos assemelha-se ao método de função de onda de Monte Carlo (*Monte Carlo wave function*) [50] no sentido que trabalharemos diretamente com a função de onda, o que consiste em uma ferramenta computacional eficiente.

Inicialmente, apresentamos uma curta descrição do tratamento via equações mestras de Schneider e Milburn [26] para flutuações nos pulsos laser como processos estocásticos em que o aumento ou diminuição da intensidade do laser é considerado como um processo de Wiener. Podemos considerar efetivamente uma média do ruído introduzido e dessa forma a dinâmica do

sistema iônico será descrita através da equação estocástica de Liouville-von Neumann [26, 51]

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -i \left[ \hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}(t) \right] - \frac{\Gamma}{2} \left[ \hat{\mathcal{H}}, \left[ \hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}(t) \right] \right], \quad (2.20)$$

onde  $\hat{\mathcal{H}}$  é o Hamiltoniano de interação para o pulso  $C$  (2.4) ou  $JC$  (2.6) e o parâmetro  $\Gamma$ , a ser obtido de forma fenomenológica, está relacionado com a intensidade de flutuação do laser. Considerando o subespaço composto pelos auto-estados de  $\hat{\mathcal{H}}$ , a solução da Eq. (2.20) torna-se direta, de forma que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n^\pm | \rho(t) | \Phi_m^\pm \rangle &= \exp \left[ -it (\Phi_n^\pm - \Phi_m^\pm) - 2\Gamma t (\Phi_n^\pm - \Phi_m^\pm)^2 \right] \times \\ &\times \langle \Phi_n^\pm | \rho(0) | \Phi_m^\pm \rangle, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde  $|\Phi_m^\pm\rangle$  são os auto-estados e  $\Phi_n^\pm$  são os autovalores dos Hamiltonianos de interação descritos pelas Eqs. (2.4) e (2.6). Para o Hamiltoniano  $C$  temos,

$$\begin{aligned} |\Phi_n^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|n \downarrow\rangle \pm e^{i\varphi} |n \uparrow\rangle), \\ \Phi_n^\pm &= \pm\Omega, \end{aligned}$$

enquanto que para o Hamiltoniano  $JC$  temos,

$$\begin{aligned} |\Phi_n^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, \downarrow\rangle \pm ie^{i\phi} |n-1, \uparrow\rangle), \\ \Phi_n^\pm &= \pm g\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Para empregar a abordagem de operadores fenomenológicos, devemos introduzir os operadores de ruído  $\hat{\mathcal{C}}$  e  $\hat{\mathcal{J}}$ , de forma a levar em conta as flutuações na intensidade nos pulsos  $C$  e  $JC$ , respectivamente. Vamos supor que estes operadores atuam nos estados auxiliares  $|\mathbf{C}\rangle$  e  $|\mathbf{J}\rangle$ , de forma que os efeitos do ruído possam ser considerados explicitamente na evolução do sistema completo, agora composto pelos estados iônicos e auxiliares. Após as interações íon-laser requeridas no processo de escultura, o operador densidade reduzido do íon será obtido através do traço sobre o espaço auxiliar que descreve as fontes de ruído.

Com os operadores de ruído definidos no espaço auxiliar, suporemos que o acoplamento entre o íon em um estado geral e o pulso  $C$  com flutuação na intensidade evolui no tempo segundo

$$\sum_n (\alpha_n |n \downarrow\rangle + \beta_n |n \uparrow\rangle) \otimes |\mathbf{C}\rangle \longrightarrow |\Psi_C\rangle = \sum_n \left( \alpha_n \hat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow\downarrow}(t, \varphi) + \beta_n \hat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\downarrow}(t, \varphi) \right) |n \downarrow\rangle \otimes |\mathbf{C}\rangle + \left( \alpha_n \hat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow\uparrow}(t, \varphi) + \beta_n \hat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\uparrow}(t, \varphi) \right) |n \uparrow\rangle \otimes |\mathbf{C}\rangle, \quad (2.22)$$

enquanto que, para o pulso  $JC$ , segue que

$$\sum_n (\alpha_n |n, \downarrow\rangle + \beta_n |n, \uparrow\rangle) \otimes |\mathbf{J}\rangle \longrightarrow |\Psi_{JC}\rangle = \sum_n \left[ \alpha_n \hat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow\downarrow}(t, \varphi) |n, \downarrow\rangle + \beta_n \hat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow\downarrow}(t, \varphi) |n+1, \downarrow\rangle + \alpha_n \hat{\mathcal{J}}_{n\downarrow\uparrow}(t, \varphi) |n-1, \uparrow\rangle + \beta_n \hat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow\uparrow}(t, \varphi) |n, \uparrow\rangle \right] \otimes |\mathbf{J}\rangle. \quad (2.23)$$

Seguindo a abordagem de operadores fenomenológicos, os elementos de matriz

$$\left\langle \mathbf{C} \left| \hat{\mathcal{C}}_{n,jk}(t, \varphi) \hat{\mathcal{C}}_{n',j'k'}^\dagger(t, \varphi) \right| \mathbf{C} \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle \mathbf{J} \left| \hat{\mathcal{J}}_{n,jk}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{n',j'k'}^\dagger(t, \varphi) \right| \mathbf{J} \right\rangle \quad (2.24)$$

onde  $n, n' = 0, 1, 2, \dots$ ,  $j, j' = \uparrow, \downarrow$  e  $k, k' = \uparrow, \downarrow$ , que resultam do traço do operador densidade associado com as Eqs. (2.22) e (2.23) sobre os espaços auxiliares  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{J}$  ( $\text{Tr}_{\mathbf{C}(\mathbf{J}\mathbf{C})} |\Psi_{C(JC)}\rangle \langle \Psi_{C(JC)}| = \rho_{C(JC)}^{red}$ ), serão inferidos através do método estocástico exposto na Ref. [26]. Comparando o operador densidade reduzido  $\rho_{C(JC)}^{red}$  com aquele que emerge da evolução na Eq. (2.21) do operador densidade associado com o estado inicial  $\sum_n (\alpha_n |n \downarrow\rangle + \beta_n |n \uparrow\rangle)$ , obtemos os elementos de matriz requeridos que serão mostrados a seguir. Com esses elementos em mãos podemos, agora, aplicar o método de operadores fenomenológicos a qualquer processo que envolva a interação de um íon aprisionado com pulsos laser que possuam flutuação na intensidade, removendo a necessidade de realizar os cálculos *ab initio* usualmente extensos.

Os elementos de matriz  $\left\langle \mathbf{C} \left| \hat{\mathcal{C}}_{n,jk}(t, \varphi) \hat{\mathcal{C}}_{n',j'k'}^\dagger(t, \varphi) \right| \mathbf{C} \right\rangle$  ( $n, n' = 0, 1, 2, \dots$ ,  $j, j' = \uparrow, \downarrow$  e

$k, k' = \uparrow, \downarrow$ ) para o pulso carrier são explicitamente dados por

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} &= \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos(2\Omega t) e^{-2\Gamma\Omega^2 t} \right], \end{aligned} \quad (2.25a)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} &= \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos(2\Omega t) e^{-2\Gamma\Omega^2 t} \right], \end{aligned} \quad (2.25b)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} &= \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}}^* \\ &= i \frac{e^{-i\varphi}}{2} \sin(2\Omega t) e^{-2\Gamma\Omega^2 t}, \end{aligned} \quad (2.25c)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} &= \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}}^* \\ &= i \frac{e^{i\varphi}}{2} \sin(2\Omega t) e^{-2\Gamma\Omega^2 t}, \end{aligned} \quad (2.25d)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} &= \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}}^* \\ &= i \frac{e^{i\varphi}}{2} \sin(2\Omega t) e^{-2\Gamma\Omega^2 t}, \end{aligned} \quad (2.25e)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} &= \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}}^* \\ &= \frac{e^{-2i\varphi}}{2} \left( 1 - \cos(2\Omega t) e^{-2\Gamma\Omega^2 t} \right), \end{aligned} \quad (2.25f)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} &= \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \cos(2\Omega t) e^{-2\Gamma\Omega^2 t} \right), \end{aligned} \quad (2.25g)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}} &= \left\langle \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{C}}_{m,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{C}}^* \\ &= -i \frac{e^{i\varphi}}{2} \sin(2\Omega t) e^{-2\Gamma\Omega^2 t}. \end{aligned} \quad (2.25h)$$

Para o pulso Jaynes-Cummings os elementos de matriz  $\langle \mathbf{J} | \hat{\mathcal{J}}_{n,jk}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{n',j'k'}^\dagger(t, \varphi) | \mathbf{J} \rangle$  são

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{m,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} &= \langle \hat{\mathcal{J}}_{n-1,\uparrow\uparrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{m-1,\uparrow\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} \\ &= \frac{1}{2} [A_{n,m} + B_{n,m}], \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{m-1,\uparrow\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} &= \langle \hat{\mathcal{J}}_{m,\uparrow\downarrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{n-1,\downarrow\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}}^* \\ &= \frac{e^{i\varphi}}{2} [C_{n,m} - D_{n,m}], \end{aligned} \quad (2.26b)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{J}}_{n-1,\uparrow\downarrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{m-1,\uparrow\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} &= \langle \hat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow\uparrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{m,\downarrow\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} \\ &= \frac{1}{2} [A_{n,m} - B_{n,m}], \end{aligned} \quad (2.26c)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{m+1,\downarrow\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} &= \langle \hat{\mathcal{J}}_{m,\downarrow\uparrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{n+1,\downarrow\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}}^* \\ &= \frac{e^{-i\varphi}}{2} [-C_{n,m+1} + D_{n,m+1}], \end{aligned} \quad (2.26d)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{m,\uparrow\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} &= \langle \hat{\mathcal{J}}_{m,\uparrow\uparrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} \\ &= \frac{1}{2} [A_{n,m+1} + B_{n,m+1}], \end{aligned} \quad (2.26e)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{J}}_{n-1,\uparrow\downarrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{m+1,\downarrow\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} &= \langle \hat{\mathcal{J}}_{m-1,\downarrow\uparrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{n+1,\uparrow\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}}^* \\ &= \frac{e^{-2i\varphi}}{2} [-A_{n,m+1} + B_{n,m+1}], \end{aligned} \quad (2.26f)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{J}}_{n-1,\uparrow\downarrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{m,\uparrow\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} &= \langle \hat{\mathcal{J}}_{m-1,\uparrow\uparrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}}^* \\ &= -\frac{e^{-i\varphi}}{2} [C_{n,m+1} + D_{n,m+1}], \end{aligned} \quad (2.26g)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{J}}_{n+1,\downarrow\uparrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{m,\uparrow\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}} &= \langle \hat{\mathcal{J}}_{m+1,\uparrow\uparrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{J}}^* \\ &= -\frac{e^{i\varphi}}{2} [C_{n+1,m+1} + D_{n+1,m+1}], \end{aligned} \quad (2.26h)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= \cos [gt (\sqrt{n} - \sqrt{m})] e^{-\Gamma g^2 t (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2 / 2}, \\ B_{n,m} &= \cos [gt (\sqrt{n} + \sqrt{m})] e^{-\Gamma g^2 t (\sqrt{n} + \sqrt{m})^2 / 2}, \\ C_{n,m} &= \sin [gt (\sqrt{n} - \sqrt{m})] e^{-\Gamma g^2 t (\sqrt{n} - \sqrt{m})^2 / 2}, \end{aligned}$$



e

$$D_{n,m} = \sin [gt (\sqrt{n} + \sqrt{m})] e^{-\Gamma g^2 t (\sqrt{n} + \sqrt{m})^2 / 2}.$$

### 2.4.1 Estimativa dos erros introduzidos pelos pulsos $C$ e $JC$

Vamos considerar os estados iniciais  $|\psi_C(0)\rangle = |\psi_{JC}(0)\rangle = |n, \downarrow\rangle$ , que evoluem, no caso ideal (sem flutuação do laser), segundo as Eqs. (2.5b) e (2.7b), para o pulso carrier e Jaynes-Cummings, respectivamente

$$\begin{aligned} |\psi_C(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}_c\tau} |\psi_c(0)\rangle = \cos(\Omega t) |n, \downarrow\rangle - ie^{-i\varphi} \sin(\Omega t) |n, \uparrow\rangle, \\ |\psi_{JC}(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}_{JC}\tau} |\psi_{JC}(0)\rangle = \cos(gt\sqrt{n}) |n, \downarrow\rangle + e^{i\varphi} \sin(gt\sqrt{n}) |n-1, \uparrow\rangle, \end{aligned}$$

onde  $t$  e  $\varphi$  são a duração e fase para ambos os pulsos. Agora, considerando um pulso laser realista, com flutuação na intensidade, a evolução dos estados  $|\psi_c(0)\rangle$  e  $|\psi_{JC}(0)\rangle$  é facilmente computada através dos operadores fenomenológicos, levando aos resultados

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_C(t)\rangle \otimes |\mathbf{C}\rangle &= [\hat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) |n, \downarrow\rangle + \hat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) |n, \uparrow\rangle] \otimes |\mathbf{C}\rangle, \\ |\tilde{\psi}_{JC}(t)\rangle \otimes |\mathbf{J}\rangle &= [\hat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) |n, \downarrow\rangle + \hat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) |n-1, \uparrow\rangle] \otimes |\mathbf{J}\rangle. \end{aligned}$$

Os operadores densidade reduzidos do íon (obtidos através do traço sobre os espaços auxiliares  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{J}$ ) são

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_C(t) &= \text{Tr}_{\mathbf{C}} |\tilde{\psi}_C(t)\rangle \langle \mathbf{C}| \langle \tilde{\psi}_C(t)| \\ &= \langle \hat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{C}} |n, \downarrow\rangle \langle n, \downarrow| + \langle \hat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{C}} |n, \downarrow\rangle \langle n, \uparrow| + \\ &\quad \langle \hat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{C}} |n, \uparrow\rangle \langle n, \downarrow| + \langle \hat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \hat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \rangle_{\mathbf{C}} |n, \uparrow\rangle \langle n, \uparrow|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}_{JC}(t) &= \text{Tr}_{\mathbf{J}} \left[ \widetilde{\psi}_{JC}(t) \right] |\mathbf{J}\rangle \langle \mathbf{J}| \left\langle \widetilde{\psi}_c(t) \right| \\
&= \left\langle \widehat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{J}} |n, \downarrow\rangle \langle n, \downarrow| \\
&\quad + \left\langle \widehat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{J}} |n, \downarrow\rangle \langle n-1, \uparrow| + \\
&\quad \left\langle \widehat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{J}} |n-1, \uparrow\rangle \langle n, \downarrow| \\
&\quad + \left\langle \widehat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow}(t, \varphi) \widehat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow}^\dagger(t, \varphi) \right\rangle_{\mathbf{J}} |n-1, \uparrow\rangle \langle n-1, \uparrow|.
\end{aligned}$$

A partir dos elementos de matriz (2.25a-2.26h, 2.26a-2.26h) e após um cálculo direto obtemos as seguintes fidelidades para a evolução com ruído dos estados  $|\psi_C(0)\rangle$  e  $|\psi_{JC}(0)\rangle$  [os quais, após o traço sobre os espaços auxiliares, resultam em misturas estatísticas de estados dadas por  $\widehat{\rho}_C(t)$  e  $\widehat{\rho}_{JC}(t)$ ] com respeito à evolução ideal (sem flutuações no laser) dos estados iniciais  $|\psi_C(0)\rangle$  e  $|\psi_{JC}(0)\rangle$

$$\mathcal{F}_C = \left\langle \psi_C(t) \left| \widehat{\rho}_C(t) \right| \psi_C(t) \right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\Gamma\Omega^2 t}, \quad (2.27)$$

$$\mathcal{F}_{JC} = \left\langle \psi_{JC}(t) \left| \widehat{\rho}_{JC}(t) \right| \psi_{JC}(t) \right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2n\Gamma g^2 t}, \quad (2.28)$$

para o pulso carrier e Jaynes-Cummings, respectivamente. Note que para  $\Gamma = 0$  temos  $\mathcal{F}_C = \mathcal{F}_{JC} = 1$ , como esperado. Além disso, para  $n = 0$  temos  $\mathcal{F}_{JC} = 1$  já que o pulso  $JC$  e sua respectiva flutuação na intensidade não trocam energia com o sistema iônico deixando o estado inicial  $|n = 0, \downarrow\rangle$  inafetado. Das Eqs. (2.27, 2.28) e da escolha do parâmetro de Lamb-Dicke  $\eta = 0, 2$  — sendo este um dos valores utilizados nos experimentos da Ref. [19] — ; observamos que o ruído introduzido pelo pulso  $JC$  é menos efetivo que o proveniente do pulso  $C$  para  $n \lesssim 25$ . Entretanto se diminuirmos a intensidade do laser durante o pulso Carrier, de tal forma que  $\Omega^2 \sim ng^2$ , teremos ruídos idênticos associados a cada um dos pulsos. Além de disso, a diminuição da intensidade do laser durante o pulso Carrier faz com que seja necessário que este fique ligado por mais tempo a fim de se obter as rotações adequadas do níveis eletrônicos. Dessa forma vemos que no modelo de Schneider e Milburn [26], do qual resultam as expressões (2.27) e (2.28), podemos diminuir arbitrariamente a intensidade do

lazer e/ou parâmetro de Lamb-Dicke as custas de aumentar o tempo do experimento, mas logrando uma diminuição na decoerência. Tal resultado não está de acordo com os resultados experimentais. Assim utilizaremos esse modelo aqui somente para ilustrar a técnica de maximização da fidelidade. No próximo capítulo voltaremos a discutir modelos de decoerência em íons aprisionados, apresentando um modelo que possui uma concordância maior com os dados experimentais.

## 2.4.2 Esculpindo o estado de fase truncado na presença de ruído

Agora vamos incorporar a flutuação da intensidade dos pulsos laser no processo de escultura do estado de fase truncado (2.18), que é obtido após um ciclo de operações descritas na seção 2.3. Assumimos por simplicidade que não há erros associados com a preparação do estado coerente de movimento inicial. Seguindo o protocolo introduzido na seção 2.3, após a preparação do estado coerente um pulso carrier é aplicado resultando no estado:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(0)} |n, \uparrow\rangle \otimes |\mathbf{C}_1\rangle &\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(0)} \left( \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\downarrow}(t_1) |n, \downarrow\rangle + \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_1) |n, \uparrow\rangle \right) \otimes |\mathbf{C}_1\rangle \\ &= |\psi^I\rangle, \end{aligned}$$

onde  $t_1$  é a duração do primeiro pulso carrier do ciclo de operações e  $\mathbf{C}_1$  representa o espaço auxiliar para esse pulso. Para simplificar a notação vamos omitir que os operadores  $\widehat{\mathcal{C}}$  dependem da fase  $\varphi_1$  do pulso laser carrier. Notamos que, nesse primeiro passo, a superposição requerida de estados eletrônicos é gerada com fidelidade não unitária devido às flutuações na intensidade dos pulsos laser. No segundo passo, o pulso  $JC$  emaranha os estados eletrônicos e de movimento como segue:

$$\begin{aligned} |\psi^I\rangle \otimes |\mathbf{J}\rangle &\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(0)} \left[ \widehat{\mathcal{J}}_{n\downarrow\downarrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n\uparrow\downarrow}(t_1) |n, \downarrow\rangle + \widehat{\mathcal{J}}_{n\uparrow\downarrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n\uparrow\uparrow}(t_1) |n+1, \downarrow\rangle \right. \\ &\quad \left. + \widehat{\mathcal{J}}_{n\downarrow\uparrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n\uparrow\downarrow}(t_1) |n-1, \uparrow\rangle + \widehat{\mathcal{J}}_{n\uparrow\uparrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n\uparrow\uparrow}(t_1) |n, \uparrow\rangle \right] \otimes |\mathbf{J}, \mathbf{C}_1\rangle \\ &= |\psi^{II}\rangle, \end{aligned}$$

onde  $t_2$  e  $\varphi_2$  (suprimido na notação) são a duração e fase do pulso  $JC$ . Finalmente, após o segundo pulso carrier, temos

$$\begin{aligned}
|\psi^{II}\rangle \otimes |\mathbf{C}_2\rangle &\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(0)} \left[ \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow\downarrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow\downarrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\downarrow}(t_1, \varphi_1) |n, \downarrow\rangle \right. \\
&\quad + \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\downarrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_1) |n, \downarrow\rangle \\
&\quad + \widehat{\mathcal{C}}_{n+1,\downarrow\downarrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n\uparrow\downarrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_1) |n+1, \downarrow\rangle \\
&\quad + \widehat{\mathcal{C}}_{n+1,\downarrow\uparrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n\uparrow\downarrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_1) |n+1, \uparrow\rangle \\
&\quad + \widehat{\mathcal{C}}_{n-1,\uparrow\uparrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n\downarrow\uparrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\downarrow}(t_1) |n-1, \uparrow\rangle \\
&\quad + \widehat{\mathcal{C}}_{n-1,\uparrow\downarrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n\downarrow\uparrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\downarrow}(t_1) |n-1, \downarrow\rangle \\
&\quad + \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow\uparrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow\downarrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\downarrow}(t_1) |n, \uparrow\rangle \\
&\quad \left. + \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_1) |n, \uparrow\rangle \right] \otimes |\mathbf{C}_2, \mathbf{J}, \mathbf{C}_1\rangle \\
&= |\psi^{III}\rangle.
\end{aligned}$$

com  $t_3$  e  $\varphi_3$  (suprimido na notação) representando a duração e fase do segundo pulso carrier.

Na ausência de fluorescência, o estado emaranhado  $|\psi^{III}\rangle$  evolui para

$$\begin{aligned}
|\psi^{IV}\rangle &= \mathbf{N} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \Lambda_{n-1}^{(0)} \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow\uparrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n-1,\uparrow\downarrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n-1,\uparrow\uparrow}(t_1) (1 - \delta_{n,0}) \right. \\
&\quad + \Lambda_{n+1}^{(0)} \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n+1,\downarrow\uparrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n+1,\uparrow\downarrow}(t_1) + \Lambda_n^{(0)} \widehat{\mathcal{C}}_{n,\downarrow\uparrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n,\downarrow\downarrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\downarrow}(t_1) \\
&\quad \left. + \Lambda_n^{(0)} \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_3) \widehat{\mathcal{J}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_2) \widehat{\mathcal{C}}_{n,\uparrow\uparrow}(t_1) \right] |n, \uparrow\rangle \otimes |\mathbf{C}_2, \mathbf{J}, \mathbf{C}_1\rangle. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Traçando sobre os espaços auxiliares  $\mathbf{C}_2, \mathbf{J}$  e  $\mathbf{C}_1$ , obtemos o seguinte operador densidade reduzido do íon:

$$\widehat{\rho}_{ion}(t_1, t_2, t_3) = \text{Tr}_{\zeta_2, \xi, \zeta_1} |\psi^{IV}\rangle \langle \psi^{IV}| = \mathbf{N}^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \rho_{n,m}(t_1, t_2, t_3) |n, \uparrow\rangle \langle m, \uparrow|, \tag{2.30}$$

onde os coeficientes  $\rho_{n,m}$  são dados explicitamente no apêndice A e a constante de normalização é  $\mathbf{N} = (\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n}(t_1, t_2, t_3))^{-1/2}$ . A probabilidade de detectarmos a ausência de fluorescência

é  $\mathcal{P} = 1/N^2$  e a fidelidade da mistura estatística de estados esculpida é dada por

$$\mathcal{F} = \langle \Psi_d | \hat{\rho}_{ion}(t_1, t_2, t_3) | \Psi_d \rangle. \quad (2.31)$$

Enfatizamos que na presente situação não conseguimos obter um sistema de equações como o (2.17). Dessa forma, os melhores parâmetros (média da excitação inicial do estado coerente, tempos de interação e fases dos pulsos laser) para esculpir o estado desejado serão determinados pela maximização da expressão da fidelidade (2.31), procedimento esse que será detalhado na próxima seção.

## 2.5 Otimizando a fidelidade do estado esculpido

Começamos ressaltando a diferença crucial entre o esquema ideal de escultura (introduzido na seção 2.3) e o descrito na seção 2.4, onde consideramos os efeitos do ruído introduzido devido a flutuações da intensidade dos pulsos laser. No protocolo introduzido na seção 2.3 é necessário resolver um sistema de equações não lineares para os parâmetros  $\beta_k$  e  $\varepsilon_k$ , que se origina da relação de recorrência para as amplitudes  $\Lambda_k^{(n)}$ . Por outro lado, quando consideramos a situação em que ruídos estão presentes, não há nenhuma forma imediata de obter relações de recorrência para os operadores fenomenológicos  $\hat{\mathcal{C}}_{n,jk}(t_1)$ ,  $\hat{\mathcal{J}}_{n,jk}(t_2)$  e  $\hat{\mathcal{C}}_{n,jk}(t_3)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $j = \uparrow, \downarrow$  e  $k = \uparrow, \downarrow$ ) associados com cada ciclo requerido. Assim, a primeira questão que surge é como esse problema pode ser contornado? Propusemos a seguinte solução: consideramos um estado específico de movimento iônico a ser esculpido e calculamos a fidelidade do processo [em particular para nosso exemplo a fidelidade do estado esculpido é dada pela Eq. (2.31)]. A expressão resultante para a fidelidade é consideravelmente complicada e cálculos numéricos devem ser realizados para obter os valores de  $t_i$  e  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que maximizam a taxa fidelidade-probabilidade  $\mathcal{R} \equiv \mathcal{F}^\xi \mathcal{P}^\zeta$ . Partimos, então, do valor da excitação média  $\bar{n}_\alpha$  que leva à maior fidelidade no caso ideal deduzido na seção 2.3 e procedemos à otimização numérica

para encontrar a excitação média  $\bar{n}_\alpha$  que maximiza a taxa  $\mathcal{R}$ . Seguindo este procedimento para esculpir o estado (2.18) sob os efeitos do ruído, encontramos que o valor  $\bar{n}_\alpha = 0,25$  (coincidentemente o mesmo valor para o caso ideal da seção 2.3) resulta na maior taxa  $\mathcal{R} = 0,64$ , com a fidelidade  $\mathcal{F} = 0,91$  e a probabilidade  $\mathcal{P} = 0,86$  de medir ausência de fluorescência.

Na Fig. 2.4(a) mostramos a função de Wigner para o estado desejado (2.18), que visualmente é idêntica à função de Wigner do estado esculpido no caso ideal (sem ruído), com fidelidade  $\mathcal{F} = 0,99$ , mostrada na Fig. 2.3(b). Na Fig. 2.4(b) expomos a mistura estatística de estados esculpida na presença de ruído para os mesmos parâmetros  $\beta_1$  e  $\varepsilon_1$  da Fig. 2.3(b) (caso ideal). Pela comparação das Figs. 2.4(a) e 2.4(b), vemos que os termos de interferência que levam à contribuição negativa na Fig. 2.4(a) difundem e praticamente cancelam-se, conforme expomos na Fig. 2.4(b), que corresponde a  $\mathcal{F} = 0,85$  e  $\mathcal{P} = 0,40$ . Finalmente, a Fig. 2.4(c) mostra a mistura estatística de estados esculpida através do nosso procedimento de otimização numérica. A fidelidade  $\mathcal{F} = 0,91$  e a probabilidade  $\mathcal{P} = 0,86$ , resultantes da otimização, são consideravelmente maiores que as obtidas na Fig. 2.4(b). É importante notar que, embora a função de Wigner mostrada na Fig. 2.4(b) pareça apresentar uma fidelidade maior que a da Fig. 2.4(c), esta última refere-se à função de Wigner do estado esculpido resultante do processo de otimização e possui maior fidelidade. Isso se deve ao fato de que o processo de otimização da escultura de estados na presença de ruído baseia-se na maximização da taxa fidelidade-probabilidade (onde damos maior peso à fidelidade), e a fidelidade é uma medida de distância entre vetores de estado ou operadores densidade no espaço de Hilbert (ver discussão na seção 2.5.1).

Para fazer as Figs. 2.4(a)-(c), consideramos a frequência de Rabi,  $\Omega/2\pi \simeq 475$  kHz [19], e assumimos os parâmetros  $\eta \simeq 0,2$  e  $\Gamma \approx 10^{-8}$ s. O parâmetro  $\Gamma$  aqui utilizado é idêntico ao estimado na Ref. [26], para obter um acordo qualitativo com os resultados experimentais na Ref. [19].

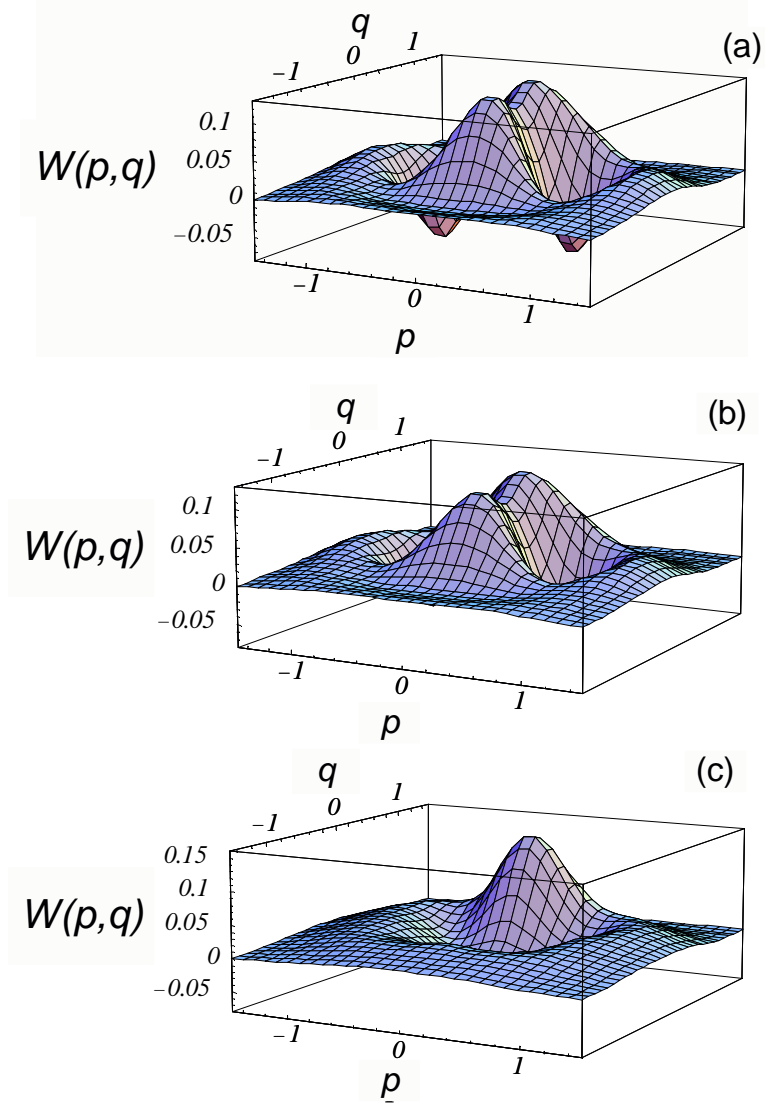


Figura 2.4. Função de Wigner (a) para o estado desejado exposto na Eq. (2.18), (b) para a mistura estatística de estados esculpida na presença de ruído usando os mesmos parâmetros  $\beta_1$  e  $\varepsilon_1$  da Fig. 2.3(b) ( $\mathcal{F} = 0,85$  e  $\mathcal{P} = 0,40$ ), e (c) para a mistura estatística de estados esculpida através do procedimento de otimização numérica usando os parâmetros  $\Omega t_1 = 0,56$ ,  $\varphi_1 = 5,48$ ,  $gt_2 = 0,75$ ,  $\varphi_2 = 1,40$ ,  $\Omega t_3 = 1,88$ , e  $\varphi_3 = 1,43$  associados com  $\mathcal{F} = 0,91$ ,  $\mathcal{P} = 0,86$ , e  $\mathcal{R} = 0,64$ .

## 2.5.1 Sobre a fidelidade e a função de Wigner

Mostraremos aqui que uma alta fidelidade do estado esculpido, com relação ao estado desejado, não implica que a forma da função de Wigner de tal estado seja parecida com a do estado desejado. Começaremos mostrando, que para o estado desejado  $|\Xi\rangle$ , existe um conjunto de infinitos estados  $|\Lambda_\lambda\rangle$  com a mesma fidelidade  $\mathcal{F} = |\langle\Lambda_\lambda|\Xi\rangle|^2 \neq 1$  com relação ao estado desejado; o subscrito  $\lambda$  subentende um conjunto de parâmetros reais que serão definidos a seguir. Para simplificar nossa discussão, consideraremos um estado no subespaço de Fock bi-dimensional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ :  $|\Xi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}$ . Nesse caso,  $\lambda$  reduz-se a um único parâmetro contínuo já que o conjunto de estados  $|\Lambda_\lambda\rangle$  com a mesma fidelidade  $\mathcal{F}$  com relação ao estado desejado  $|\Xi\rangle$ , satisfazem

$$|\Lambda_\lambda\rangle = \lambda |0\rangle + e^{i\phi} \sqrt{1 - \lambda^2} |1\rangle \quad (2.32)$$

com

$$\phi = \arccos \frac{\mathcal{F} - 1/2}{\lambda \sqrt{1 - \lambda^2}}, \quad (2.33a)$$

$$\mathcal{F} < \lambda \sqrt{1 - \lambda^2} + 1/2. \quad (2.33b)$$

Não estamos considerando a situação trivial em que  $\lambda = 0$  ou  $1$ .

Podemos representar esses estados na chamada esfera da Bloch do  $\mathbb{R}^3$ , em analogia com estados de spin-1/2 [46, 53]. As componentes  $r_i = \text{Tr} \{\sigma_i |\Lambda_\lambda\rangle \langle \Lambda_\lambda|\}$  dos estados  $|\Lambda_\lambda\rangle$  na esfera de Bloch, para  $i = x, y, z$  e  $\sigma_i$  referindo-se a operadores de pseudo-spin de Pauli na base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , são

$$\begin{aligned} r_x &= 2\mathcal{F} - 1, \\ r_y &= \pm 2 [\lambda^2 (\lambda^2 - 1) + (\mathcal{F} - 1/2)^2], \\ r_z &= 2\lambda^2 - 1, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde o sinal  $+(-)$  em  $r_y$  corresponde aos valores positivos (negativos) de  $\phi$ . Escolhendo  $\mathcal{F} = (2 + \sqrt{3})/4 \approx 0,933$ , segue que teremos somente dois estados  $|\Lambda_\lambda\rangle$  com  $\phi = 0$  ( $r_y = 0$ ):



$|\Lambda_{1/2}\rangle = (|0\rangle + \sqrt{3}|1\rangle)/2$  e  $|\Lambda_{\sqrt{3}/2}\rangle = (\sqrt{3}|0\rangle + |1\rangle)/2$ , e um conjunto infinito de estados com  $\phi \neq 0$ . Todos estes estados  $|\Lambda_\lambda\rangle$ , que estão dispostos na superfície do cone na esfera de Bloch mostrado na Fig. 2.5, apresentam a mesma fidelidade  $\mathcal{F} \approx 0,933$ , embora possuam funções de Wigner diferentes. As Figs. 2.6(a)-(c) representam graficamente as funções de Wigner para os estados  $|\Xi\rangle$ ,  $|\Lambda_{1/2}\rangle$  e  $|\Lambda_{\sqrt{3}/2}\rangle$ , respectivamente, mostrando que apesar de  $|\Lambda_{1/2}\rangle$  e  $|\Lambda_{\sqrt{3}/2}\rangle$  apresentarem a mesma fidelidade com relação a  $|\Xi\rangle$ , as Figs. 2.6(b) e (c) exibem formas completamente diferentes para a função de Wigner. É importante mencionar que a função de Wigner varia continuamente quando  $|\Lambda_\lambda\rangle$  é levado continuamente de  $|\Lambda_{1/2}\rangle$  a  $|\Lambda_{\sqrt{3}/2}\rangle$  (indo na direção  $z$ , da parte inferior à parte superior do cone na Fig. 2.5, na direção horária ou anti-horária dependendo do sinal de  $r_y$ ).

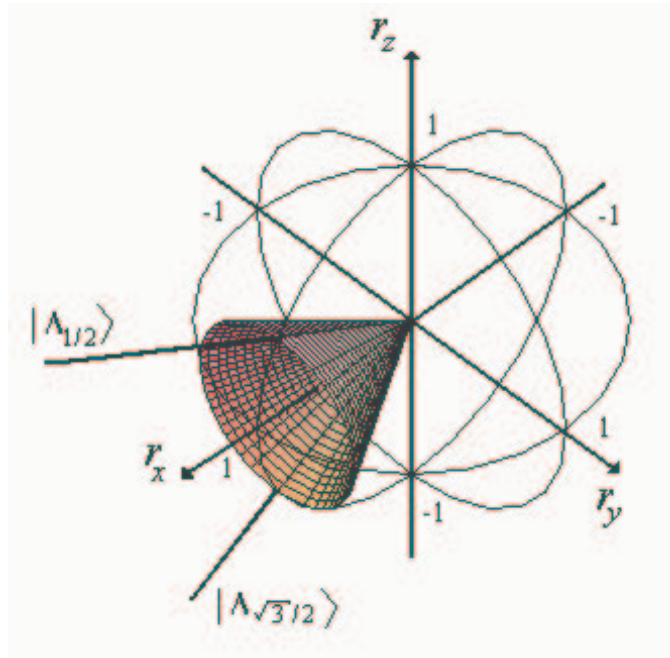


Figura 2.5. O cone em torno do eixo  $r_x$ , mostrado nessa figura, representa um conjunto infinito de vetores de estado unitários  $|\Lambda_\lambda\rangle$  que possuem a mesma fidelidade  $\mathcal{F} = (2 + \sqrt{3})/4$  com relação ao estado  $|\Xi\rangle$ . Os círculos em torno da figura repre-

sentam os contornos da esfera de Bloch unitária.

A mesma análise cabe para misturas estatísticas de estados da forma

$$\rho_\lambda(\varkappa) = \lambda^2 |0\rangle \langle 0| + (1 - \lambda^2) |1\rangle \langle 1| + \varkappa \lambda \sqrt{1 - \lambda^2} (e^{-i\phi} |0\rangle \langle 1| + e^{i\phi} |1\rangle \langle 0|), \quad (2.35)$$

onde o parâmetro  $\varkappa \in [0, 1]$  representa a pureza do operador densidade  $\rho_\lambda(\varkappa)$ , de modo que  $\varkappa \neq 1$  impõe

$$\text{Tr} \{[\rho_\lambda(\varkappa)]^2\} = 1 - 2\lambda^2 (1 - \lambda^2) (1 - \varkappa^2) \leq 1, \quad (2.36)$$

A igualdade na expressão (2.36) é satisfeita somente para  $\lambda = 0$  ou  $1$ , caso em que não temos superposição e a fidelidade é  $1/2$ . Para um dado valor de  $\varkappa$ , temos um conjunto de infinitas misturas estatísticas de estados apresentando a mesma fidelidade  $\mathcal{F} = \langle \Xi | \rho_\lambda(\varkappa) | \Xi \rangle$  quando

$$\phi = \arccos \frac{\mathcal{F} - 1/2}{\varkappa \lambda \sqrt{1 - \lambda^2}}, \quad (2.37a)$$

$$\mathcal{F} < \varkappa \lambda \sqrt{1 - \lambda^2} + 1/2. \quad (2.37b)$$

Para a escolha particular de  $\varkappa = 0,90$ ,  $\mathcal{F} = 0,85$ , e  $\lambda = 0,70$  obtemos uma mistura estatística de estados cuja forma da função de Wigner (exibida na Fig. 2.7) aparenta ser mais próxima daquela da Fig. 2.6(a) (para o estado  $|\Xi\rangle$ ) que as formas encontradas nas Figs. 2.6(b) e (c), embora a fidelidade da mistura estatística de estados com relação a  $|\Xi\rangle$  seja menor que o valor 0.93 da fidelidade dos estados  $|\Lambda_{1/2}\rangle$  e  $|\Lambda_{\sqrt{3}/2}\rangle$  representados nas Figs. 2.6(b) e (c).

Quando consideramos espaços de Fock truncados com mais de duas dimensões, digamos  $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ , temos dois parâmetros reais para descrever o conjunto de estados em uma hipersfera do  $\mathbb{R}^4$  com a mesma fidelidade em relação a um terceiro estado. Finalmente, mencionamos que nosso protocolo de otimização descrito na seção 2.5 é baseado na maximização da fidelidade (por meio da maximização da taxa  $\mathcal{R}$ ) definida anteriormente, o *overlap* entre os estados esculpido e desejado, que representa uma medida particular de distância no espaço de Hilbert, e não pode ser inferida da função de Wigner.

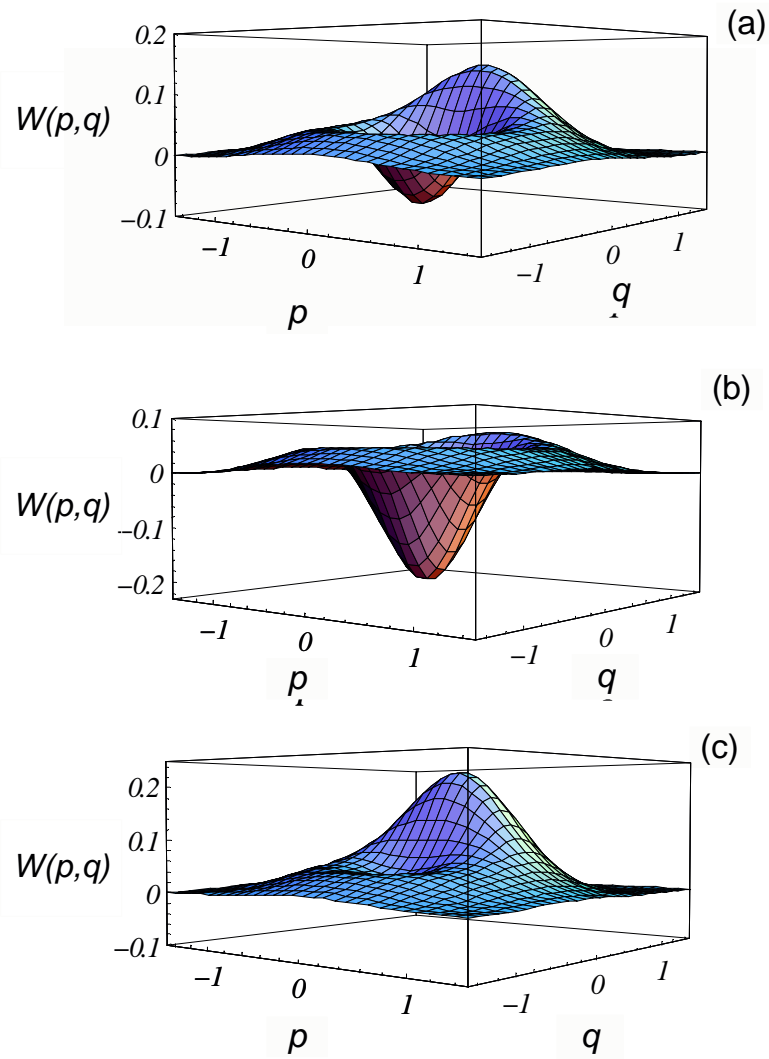


Figura 2.6. Função de Wigner para (a) o estado desejado  $|\Xi\rangle$  e dois estados localizados no cone da Fig. 2.5, com  $\phi = 0$ : (b)  $|\Lambda_{1/2}\rangle$  e (c)  $|\Lambda_{\sqrt{3}/2}\rangle$ .

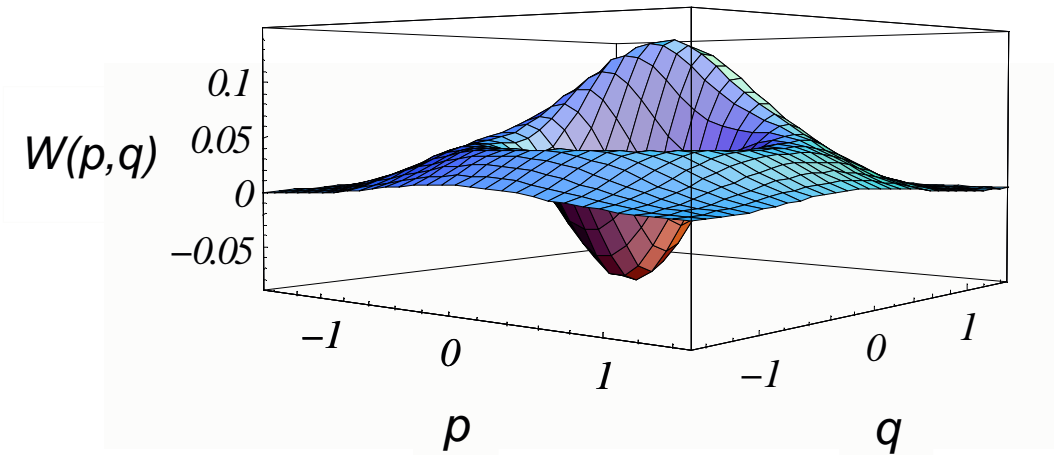


Figura 2.7. Função de Wigner para a mistura estatística de estados  $\rho_\lambda(\varkappa)$  [Eq. (2.35)] com a escolha particular de  $\varkappa = 0, 90$ ,  $\mathcal{F} = 0, 85$ , e  $\lambda = 0, 70$ .

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo apresentamos um esquema para a engenharia de estados vibracionais arbitrários de íons aprisionados empregando a técnica de escultura de estados quânticos. Essa técnica consiste em esculpir o estado de movimento desejado a partir de um estado coerente vibracional inicialmente preparado. A escultura de estados quânticos a partir do estado coerente foi originalmente desenvolvida no contexto de EQC [7]. Contudo, no domínio de íons aprisionados, utilizamos as vantagens proporcionadas pela facilidade de manipulação de estados eletrônicos e de movimento iônicos para tornar o processo de escultura mais atrativo para implementação experimental. Assim como no contexto de EQC, em vez de requerer um número de pulsos laser proporcional a  $N$  para gerar um estado de movimento com número máximo de fônons igual a  $N$  [12] a partir do estado fundamental de vibração, nossa técnica utiliza um número de pulsos laser proporcional a  $M = \text{int}[(N + 1)/2]$ .

O esquema de escultura de estados foi também implementado na situação realista em que flutuações na intensidade dos pulsos laser requeridos estão presentes. Nesse sentido aplicamos a abordagem de operadores fenomenológicos recentemente desenvolvida para o tratamento de erros em processos quânticos complexos [37, 38, 39]. Esse método nos fornece uma técnica direta para estimar a fidelidade de processos como engenharia de estados, sem a necessidade de executar os cálculos *ab-initio*, usualmente extensos, requeridos pelos métodos padrões. A abordagem de operadores fenomenológicos introduzida neste capítulo incorpora de uma forma algébrica concisa os resultados obtidos via equações mestras (para os efeitos dos ruídos oriundos das flutuações na intensidade dos pulsos laser) como feito na Ref. [26]. Através da introdução de um espaço de estados auxiliar, onde os operadores fenomenológicos são definidos, levamos em conta os efeitos do ruído explicitamente na evolução do vetor de estado completo (estados iônicos eletrônicos e vibracionais mais estados do espaço auxiliar) e pudemos obter diretamente o operador densidade reduzido do sistema iônico através do traço sobre o

espaço auxiliar. Enfatizamos que o procedimento realizado neste capítulo para a abordagem de operadores fenomenológicos é totalmente geral, e, em princípio, pode ser aplicado a qualquer processo envolvendo íons aprisionados, tais como operações lógicas quânticas e comunicação quântica. Em outras palavras, a metodologia utilizada neste capítulo pode ser diretamente aplicada para a estimativa da fidelidade de qualquer processo quântico em íons aprisionados quando consideramos os erros devido à flutuação da intensidade dos pulsos laser. Vale lembrar que consideramos o modelo para decoerência em íon aprisionados da Ref. [26] e, embora este modelo não nos forneça resultados em perfeito acordo com os dados experimentais, possui resultado analítico e nos possibilita ter uma estimativa qualitativa do processo de decoerência. No próximo capítulo introduzimos um modelo de decoerência em íons aprisionados baseado na interação desses com o gás residual da armadilha.

Como uma aplicação da técnica de escultura de estados, combinada com a abordagem de operadores fenomenológicos, computamos a fidelidade da preparação do estado de fase truncado em (2.18). Assumimos valores realistas para os parâmetros envolvidos e propusemos um algoritmo para otimizar a fidelidade do estado esculpido na presença de ruído. Esse algoritmo consiste em maximizar a taxa fidelidade-probabilidade  $\mathcal{R}$  através da escolha adequada dos parâmetros envolvidos no processo de escultura.

# Referências Bibliográficas

- [1] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond e S. Haroche, “Observing the Progressive Decoherence of the ‘Meter ’ in a Quantum Measurement”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996).
- [2] I. L. Chuang, L. M. K. Vandersypen, X. Zhou, D. W. Leung e S Lloyd, “Experimental realization of a quantum algorithm”, *Nature (London)* **393**, 143 (1998);
- M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K. 2000);
- J. Preskill e A. Kitaev (não publicado), *Lecture notes Quantum Information and Computation*, disponível *online* em <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229>;
- R. P. Feynman, in: *Feynman Lectures on Computation*, editado por A. J. G. Hey e R. W. Allen (Addison-Wesley, Reading, 1996).
- [3] K. Vogel, V. M. Akulin e W. P. Schleich, “Quantum state engineering of the radiation field”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1816 (1993);
- M. H. Y. Moussa e B. Baseia, “Generation of the reciprocal-binomial state”, *Phys. Lett A.* **238**, 223 (1997).
- [4] A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller e H. J. Kimble, “Synthesis of arbitrary quantum states via adiabatic transfer of Zeeman coherence”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3095 (1993).

- [5] C. K. Law e J. H. Eberly, “Arbitrary Control of a Quantum Electromagnetic Field”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1055 (1996).
- [6] B. M. Garraway, B. Sherman, H. Moya-Cessa, P. L. Knight, e G. Kurizki, “Generation and detection of nonclassical field states by conditional measurements following two-photon resonant interactions”, *Phys. Rev. A* **49**, 535 (1994).
- [7] R. M. Serra, N. G. de Almeida, C. J. Villas-Bôas e M. H. Y. Moussa, “Engineering cavity-field states by projection synthesis”, *Phys. Rev. A* **62**, 043810 (2000).
- [8] A. Luis, “Quantum-state preparation and control via the Zeno effect”, *Phys. Rev. A* **63**, 052112 (2001).
- [9] M. Dakna, J. Clausen, L. Knöll, e D.-G. Welsh, “Generation of arbitrary quantum states of traveling fields”, *Phys. Rev. A* **59**, 1658 (1999).
- [10] C. J. Villas-Bôas, Y. Guimarães, M. H. Y. Moussa e B. Baseia, “Recurrence formula for generalized optical state truncation by projection synthesis”, *Phys. Rev. A* **63**, 055801 (2001).
- [11] R. L. de Matos Filho e W. Vogel, “Even and Odd Coherent States of the Motion of a Trapped Ion”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 608 (1996).
- [12] B. Kneer e C. K. Law, “Preparation of arbitrary entangled quantum states of a trapped ion”, *Phys. Rev. A* **57**, 2096 (1998).
- [13] G. Brobný, B. Hladký e V. Bužek, “Quantum-state synthesis of multimode bosonic fields: Preparation of arbitrary states of two-dimensional vibrational motion of trapped ions”, *Phys. Rev. A* **58**, 2481 (1998).
- [14] E. Solano, R. L. de Matos Filho e N. Zagury, “Deterministic Bell states and measurement of the motional state of two trapped ions”, *Phys. Rev. A* **59**, 2539 (1999).



- [15] H. Moya-Cessa, S. Wallentowitz e W. Vogel, “Quantum-state engineering of a trapped ion by coherent-state superpositions”, *Phys. Rev. A* **59**, 2920 (1999).
- [16] S.-B. Zheng, X.-W. Zhu, e M. Feng, “Motional quantum-state engineering and measurement in the strong-excitation regime”, *Phys. Rev. A* **62**, 033807 (2000).
- [17] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich e N. Zagury, “Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling: Quantum-nondemolition measurements and generation of ‘Schrödinger cat’ states”, *Phys. Rev. A* **45**, 5193 (1992).
- [18] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger e H. Walther, “Preparing pure photon number states of the radiation field”, *Nature* **403**, 743 (2000).
- [19] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland, “Generation of Nonclassical Motional States of a Trapped Atom”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796 (1996); Erratum: *ibid* *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2346 (1996).
- [20] C. Monroe , D. M. Meekhof , B. E. King e D. J. Wineland, “A ‘Schrodinger cat’ superposition state of an atom”, *Science* **272**, 1131 (1996).
- [21] D. M. Meekhof , C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland, “Experimental Determination of the Motional Quantum State of a Trapped Atom”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4281 (1996);
- W. M. Itano ,C. Monroe, D. M. Meekhof, D. Leibfried, B. E. King, e D. J. Wineland, “Quantum harmonic oscillator state synthesis and analysis”, *quant-ph/9702038* (1997);
- D. Leibfried, D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King W. M. Itano, e D. J. Wineland, “Experimental preparation and measurement of quantum states of motion of a trapped atom”, *J. Mod. Opt.* **44**, 2485 (1997);

- D. M. Meekhof, D. Leibfried, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano, e D. J. Wineland, “Experimental creation and measurement of motional quantum states of a trapped ion”, *Brazilian. J. Phys.* **27**, 178 (1997).
- [22] Ch. Roos, Th. Zeiger, H. Rohde, H. C. Nägerl, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler, E R. Blatt, “Quantum State Engineering on an Optical Transition and Decoherence in a Paul Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4713 (1999).
- [23] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, e D. J. Heinzen, “Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy”, *Phys. Rev. A* **50**, 67 (1994);  
D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, F. L. Moore e D. J. Heinzen, “Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy”, *Phys. Rev. A* **46**, R6797 (1992).
- [24] C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe, e D. J. Wineland, “Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs” *Nature* **403**, 269 (2000).
- [25] J.F. Poyatos , J.I. Cirac , e P. Zoller , “Quantum Reservoir Engineering with Laser Cooled Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4728 (1996).
- [26] S. Schneider e G. H. Milburn, “Decoherence in ion traps due to laser intensity and phase fluctuations”, *Phys. Rev. A* **57**, 3748 (1998).
- [27] S. Schneider e G. H. Milburn, “Decoherence and fidelity in ion traps with fluctuating trap parameters” *Phys. Rev. A* **59**, 3766 (1999).
- [28] D. F. V. James, “Theory of Heating of the Quantum Ground State of Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 317 (1998).
- [29] M. Muraio e P. L. Knight, “Decoherence in nonclassical motional states of a trapped ion”, *Phys. Rev. A* **58**, 663 (1998).

- [30] A. Vidiella-Barranco e H. Moya-Cessa, “Nonextensive approach to decoherence in quantum mechanics”, *Phys. Lett. A* **279**, 56 (2001).
- [31] C. Tsallis, “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics”, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [32] C. Di Fidio e W. Vogel, “Damped Rabi oscillations of a cold trapped ion”, *Phys. Rev. A* **62**, 031802(R) (2000).
- [33] A. A. Budini, R. L. de Matos Filho, e N. Zagury, “Localization and dispersivelike decoherence in vibronic states of a trapped ion”, *Phys. Rev. A* **65**, 041402(R) (2002).
- [34] S. M. Barnett e D. T. Pegg, “Phase Measurement by Projection Synthesis”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4148 (1996).
- [35] D. T. Pegg, L. S. Phillips e S. M. Barnet, “Optical State Truncation by Projection Synthesis”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1604 (1998).
- [36] B. Baseia, M. H. Y. Moussa, and V. S. Bagnato, “Hole burning in Fock space”, *Phys. Lett. A* **231**, 331 (1997).
- [37] N. G. de Almeida, R. Napolitano, e M. H. Y. Moussa, “Phenomenological-operator approach to dissipation in cavity quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. A* **62**, 033815 (2000).
- [38] N. G. de Almeida, P.B. Ramos, R. M. Serra, e M. H. Y. Moussa, “Phenomenological-operator approach to introduce damping effects on radiation field states”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2**, 792 (2000).
- [39] R. M. Serra, P. B. Ramos, N. G. de Almeida, W. D. José e M. H. Y. Moussa, “Engineering arbitrary motional ionic state through realistic intensity-fluctuating laser pulses”, *Phys. Rev. A* **63**, 053813 (2001).

- [40] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King e D. M. Meekhof, “Experimental Issues in Coherent Quantum-State Manipulation of Trapped Atomic Ions”, *J. Res. NIST* **103**, 259 (1998), disponível *online* em <http://www.nist.gov/jres>.
- [41] M. Orszag, *Quantum Optics: Including Noise Reduction, Trapped Ions, Quantum Trajectories, and Decoherence* (Springer Berlin, 2000).
- [42] W. Vogel, D. G. Welsch e S. Wallentowitzs, *Quantum Optics: An introduction*, 2<sup>nd</sup> ed. (Wiley-VHC, Berlin, 2001).
- [43] B. E. King, *Quantum State Engineering and Information Processing with Trapped Ions*, PhD Thesis, University of Colorado (1995); disponível *online* em <http://www.bldrdoc.gov/timefreq/ion/index.htm>.
- [44] L. Davidovich, M. Orszag, e N. Zagury, “Quantum nondemolition measurements of vibrational populations in ionic traps”, *Phys. Rev. A* **54**, 5118 (1996).
- [45] J. Steinbach, J. Twanley e P. L. Knight, “Engineering two-mode interactions in ion traps”, *Phys. Rev. A* **56**, 4815 (1997);  
H. Zeng, Y. Wang and Y. Segawa, “Nonlinear Raman vibrational excitation of a trapped ion”, *Phys. Rev. A* **59**, 2174 (1999).
- [46] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (John Wiley & Sons, 1990).
- [47] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K. 2000);  
J. Preskill, A. Kitaev, *Quantum Information and Computation*, Lecture notes (1998), available online at <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229>.
- [48] W. D. José e S. S. Mizrahi, “Generation of circular states and Fock states in a trapped ion”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2**, 306 (2000).

- [49] M. Freyberger, “Simple example of nonlocality: Atoms interacting with correlated quantized fields”, *Phys. Rev. A* **51**, 3347 (1995).
- [50] J. Dalibard, Y. Castin e K. Molmer, “Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics”, *Phys. Rev. Lett* **68**, 580 (1992);  
R. Dum, P. Zoller, e H. Ritsch, “Monte Carlo simulation of the atomic master equation for spontaneous emission”, *Phys. Rev. A* **45**, 4879 (1992);  
M. B. Plenio e P. L. Knight, “The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 101 (1998).
- [51] C. W. Gardiner e P. Zoller, *Quantum Noise*, 2<sup>nd</sup> ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
- [52] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, e D. J. Wineland, “Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate”, *Phys Rev. Lett.* **75**, 4714 (1995).
- [53] R. P. Feynman, F. L. Vernon, e R. W. Hellwarth, “Geometrical Representation Of The Schrodinger Equation For Solving Maser Problems”, *J. Appl. Phys.* **28**, 49 (1957).

# Capítulo 3

## Decoerência em Armadilhas Iônicas

## Devido à Interação do Íon com o Gás

## Residual

### 3.1 Motivação

A realização prática de propostas interessantes em computação e comunicação quânticas são limitadas pelo fenômeno da decoerência, que resulta da ação inevitável do meio ambiente [1, 2, 3, 4] e de flutuações intrínsecas nos parâmetros de interação requeridos para viabilizar operações lógicas [5, 6]. Assim, a investigação das fontes de decoerência em sistemas quânticos que se apresentam como eventuais candidatos à implementação experimental de processadores lógicos quânticos [7] é de fundamental importância.

No contexto de íons aprisionados, os dados experimentais do amortecimento das oscilações de Rabi [8] têm norteado as investigações dessas fontes de ruídos. Basicamente, considera-se a situação em que o íon é preparado em seus estados fundamentais de movimento e eletrônico, aplica-se a ele um pulso de laser com dessintonia  $\delta = \nu$  (*first blue sideband*), onde  $\nu$  é a

freqüência da armadilha, e mede-se a probabilidade de ocupação do nível eletrônico fundamental em função do tempo (a mesma medida também foi feita para outros estados iniciais na Ref. [8]). Os ingredientes essenciais que um modelo teórico deve reproduzir são a taxa temporal e a assimetria do decaimento da população eletrônica, além da dependência do fator de decaimento com o estado inicial de movimento do íon (número quântico vibracional).

Os efeitos da emissão espontânea eletrônica foram estudados nas Refs. [9, 10, 11], assim como a defasagem devido ao movimento de ponto zero do íon [12], e outras fontes de *decoerência* foram introduzidas fenomenologicamente [13]. Modelos estocásticos têm sido propostos para lidar com erros em armadilhas iônicas [6], mostrando somente um acordo qualitativo com os resultados experimentais. Recentemente, propôs-se uma modificação da equação mestra [14] baseada na estatística não-extensiva de Tsallis [15]. Di Fidio e Vogel [16], ao invés de mecanismos estocásticos, propuseram um modelo para tentar explicar o decaimento das oscilações de *Rabi*, observadas nos experimentos do NIST [8], através de *quantum jumps*. Esse último modelo reproduz a assimetria no decaimento das oscilações de *Rabi* mas não é sensível ao estado vibracional inicial do íon, aspecto que foi observado experimentalmente. Ainda cabe citar o modelo de Budini, de Matos Filho e Zagury [17] que — assumindo um acoplamento de um dos modos vibracionais do íon com campos estocásticos dos eletrodos e tempo de vida finito do nível eletrônico auxiliar utilizado na configuração lambda (nível  $|r\rangle$  na Fig. 3.1) — obtêm resultados em ótimo acordo com as medidas experimentais [8]. Outras fontes de erros significativas são a instabilidade da freqüência da armadilha e flutuação de amplitude na voltagem dos eletrodos que a constituem [18]. Conjectura-se que os processos que acarretam erros e perda da coerência quântica em uma armadilha linear do tipo Paul (*Paul-rf trap*) estejam fundamentalmente associados ao estado de movimento do íon [19].

Colisões do íon aprisionado com o gás de fundo da armadilha (tipicamente  $H_2$  nos experimentos com  ${}^9Be^+$  do NIST [19]) também podem ser consideradas uma fonte de erro importante, embora os experimentos sejam tipicamente realizados em ambiente de alto vácuo a uma pressão

por volta de  $10^{-8}$  Pa. Nesse sentido, o capítulo corrente discute os efeitos da polarização do gás de fundo residual (BG - *background gas*) induzida pelo movimento vibracional do íon. Demonstramos que, além dos processos citados anteriormente, o mecanismo de decoerência em íons aprisionados pode ser produzido pela polarização local do gás de fundo. Fundamentamos a presente abordagem em uma analogia com a física de elétrons sobre superfícies de hélio líquido, onde o elétron e as oscilações de polarização na superfície de hélio formam uma quase-partícula chamada *riplon* [20]. Como a densidade do gás de fundo é muito pequena, aproximadamente  $10^6$  cm $^{-3}$  [19], não esperamos o surgimento de uma quase-partícula constituída pelo íon e a nuvem de polarização à sua volta. O íon aprisionado será apenas perturbado pela nuvem de polarização por ele induzida no gás residual. Para propósitos práticos, no presente modelo assumiremos um gás residual contínuo.

Em contraste com o comportamento manifestado pelo amortecimento das oscilações de Rabi [8], é bem conhecido que o gás residual pode aquecer o íon aprisionado através da transferência de energia durante colisões elásticas. Além de colisões elásticas, ocorrem também colisões inelásticas que podem mudar o estado interno ou até mesmo a espécie do íon [19]. Ambos os tipos de colisões inelásticas, as com mudança de carga e as reações químicas, dependem dos constituintes do gás de fundo e ocorrem somente quando a distância entre as partículas em questão aproxima-se das dimensões atômicas, tornando esse tipo de colisão muito rara [19, 21]. Em nosso modelo consideraremos a distância média interpartícula entre o íon e o BG maior que as dimensões atômicas.

O potencial de interação atrativo resultante da polarização do gás residual neutro pelo campo do íon aprisionado é dado por  $U(r) = -\chi q^2 / (8\pi\epsilon_0 r^4)$  [19], onde  $\chi$  é a polarizabilidade do gás e  $q$  é a carga iônica. Colisões inelásticas do tipo espiral resultam quando o parâmetro de impacto é menor que o valor crítico  $\mathbf{p} = (\chi q^2 / \pi\epsilon_0 \mathbf{m} \mathbf{v}^2)^{1/4}$ , onde  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{v}$  são a massa reduzida e a velocidade relativa do par de partículas. Do parâmetro de impacto crítico, segue a taxa de reação  $\mathcal{R} = \rho q (\pi\chi / \epsilon_0 \mathbf{m})^{1/2}$ , onde  $\rho$  é a densidade do gás de fundo. Considerando os parâmetros



utilizados nos experimentos com  ${}^9\text{Be}^+$  do NIST, obtém-se uma pequena probabilidade para colisões inelásticas do íon aprisionados com os constituintes do gás de fundo [19]. Os efeitos de aquecimento em íons aprisionados devido às colisões elásticas com o gás de fundo podem ser testados, como sugerido na Ref. [19], através do aumento ou diminuição da pressão do gás de fundo. Podemos por nosso modelo à prova através do mesmo procedimento.

Concluimos através do modelo exposto neste capítulo que o meio dissipativo provido pelo BG deve ser também levado em conta quando investigamos o processo de decoerência em íons aprisionados. Essa conclusão é suportada pelo excelente acordo entre o presente modelo e os resultados experimentais para a medida da probabilidade de ocupação do estado fundamental eletrônico reportada em [8], reproduzindo o amortecimento assimétrico das oscilações de Rabi e a sensibilidade dessas oscilações com respeito ao estado vibracional inicial do íon.

## 3.2 Interação íon-laser e íon–gás residual

Consideraremos um único íon de massa  $m$  em uma armadilha harmônica unidimensional cuja frequência é  $\nu$ . O íon possui duas transições proibidas entre dois níveis internos eletrônicos (estados excitado  $|\uparrow\rangle$  e fundamental  $|\downarrow\rangle$ , tomados como subníveis hiperfinos), separados pela frequência  $\omega_0$  e acoplados indiretamente pela interação com dois feixes de laser contrapropagantes, de frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , em uma configuração tipo Raman estimulada. Como indicado na Fig. 3.1, os feixes de laser estão dessintonizados de  $\Delta$  com relação a um terceiro nível mais excitado  $|r\rangle$  que, na configuração tipo Raman estimulada, é eliminado adiabaticamente quando  $\Delta$  é muito maior que as seguintes quantidades: a largura de linha do nível  $|r\rangle$ , o acoplamento associado com as transições  $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |r\rangle$  e  $|\downarrow\rangle \leftrightarrow |r\rangle$ , e a dessintonia  $\delta \equiv \omega_0 - \omega_L$  ( $\omega_L = \omega_1 - \omega_2$ ) [19, 23, 24, 25]. O íon interage então com um laser efetivo propagando-se na direção da armadilha, com vetor de onda de módulo  $k_L = \omega_L/c$ . Nessa configuração somente o movimento iônico na direção  $x$  será modificado. A transição entre  $|\downarrow\rangle$  e um quarto nível  $|d\rangle$ ,

obtida por outro laser fortemente acoplado a esta transição, é considerada para medir o estado eletrônico do íon através da coleta do sinal fluorescente, que nos fornece a probabilidade do íon estar no estado fundamental  $|\downarrow\rangle$  [19, 25].

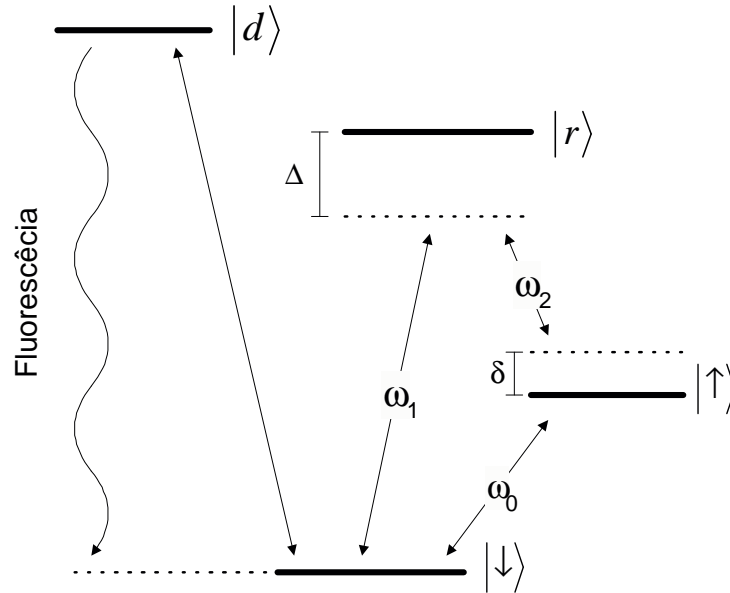


Figura 3.1. Diagrama dos níveis de energia eletrônicos de um íon interagindo com feixes laser de frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , onde  $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_0$  ( $\delta \ll \Delta$ ),  $|r\rangle$  (eliminado adiabaticamente) é um nível auxiliar que indiretamente acopla os níveis  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ ,  $|d\rangle$  é um nível eletrônico usado para a medida de fluorescência utilizada para caracterizar o estado eletrônico.

O Hamiltoniano de interação íon-laser que descreve o acoplamento efetivo do movimento quantizado do centro de massa iônico com os estados eletrônicos é [19, 23, 24, 25]

$$\hat{H}_{ion-laser} = \hbar\Omega \left( \hat{\sigma}_+ e^{ik_L \hat{x} - i\omega_L t + i\phi} + \hat{\sigma}_- e^{-ik_L \hat{x} + i\omega_L t - i\phi} \right), \quad (3.38)$$

onde  $\phi$  é diferença de fase entre os dois feixes de laser,  $\hat{\sigma}_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$ ,  $\hat{\sigma}_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$  e  $\hat{\sigma}_z$  são os operadores de pseudo-spin de Pauli usuais,  $\hat{x}$  é o operador posição para a coordenada do íon

e  $\Omega$  é a frequência de Rabi efetiva da transição  $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$

A interação íon-BG será descrita por um Hamiltoniano do tipo Fröhlich [26], que representa, em física do estado sólido, a interação elétron-polaron. No apêndice B mostramos, por analogia com a física de elétrons sobre superfície de hélio líquido [27, 28, 29, 20], que a interação do tipo polaron resulta quando o campo elétrico do íon polariza o BG. O potencial atrativo íon-BG dado por  $U(r) = -\chi q^2 / (8\pi\epsilon_0 r^4)$  leva ao Hamiltoniano

$$\hat{H}_{ion-BG} = \sum_k \hbar V_k \left( \hat{b}_k e^{ik\hat{x}} + \hat{b}_k^\dagger e^{-ik\hat{x}} \right), \quad (3.39)$$

onde  $\hat{b}_k^\dagger$  ( $\hat{b}_k$ ) é o operador de criação (aniquilação) de quanta de oscilação na polarização do BG,  $V_k$  representa a constante de acoplamento, e  $k$  indica a componente na direção  $x$  do vetor de onda de um dos modos que compõem a nuvem de polarização do BG.

Em um referencial girante com a frequência do “laser efetivo”  $\omega_L$ , os Hamiltonianos de interação íon-laser e íon-BG são dados na representação de Schrödinger por ( $\hbar = 1$  daqui para frente):

$$\hat{H}_{ion-laser} = \Omega \left( \hat{\sigma}_+ e^{i\eta_L(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)-i\phi} + \hat{\sigma}_- e^{-i\eta_L(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)+i\phi} \right), \quad (3.40)$$

$$H_{ion-BG} = \sum_k V_k \left( \hat{b}_k e^{i\eta_k(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} + \hat{b}_k^\dagger e^{-i\eta_k(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} \right), \quad (3.41)$$

onde  $\hat{a}^\dagger$  ( $\hat{a}$ ) é o operador de criação (aniquilação) de quanta vibracional do íon,  $\eta_L = k_L/\sqrt{2m\nu}$  é o parâmetro de Lamb-Dicke e  $\eta_k = k/\sqrt{2m\nu}$  representa parâmetros do tipo Lamb-Dicke para a interação íon-BG. O Hamiltoniano total na representação de Schrödinger é dado por  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{ion-laser} + \hat{H}_{ion-BG}$ , onde  $\hat{H}_0$  indica a parte livre do Hamiltoniano composto pelos graus de liberdade eletrônicos e de movimento do íon aprisionado além do BG:

$$\hat{H}_0 = \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\delta}{2} \hat{\sigma}_z + \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k. \quad (3.42)$$

Escrevendo o Hamiltoniano total na representação de interação (letras caligráficas), através da transformação unitária  $\hat{U}_0(t) = \exp(-i\hat{H}_0 t)$ , e então expandindo as expressões resultantes

em termos dos parâmetros  $\eta_L$  e  $\eta_k$ , temos

$$\mathcal{H}_{ion-laser} = \Omega e^{-\eta_L^2/2} \left( \sum_{m,l=0}^{\infty} \frac{(i\eta_L)^{m+l}}{m!l!} \hat{\sigma}_+ \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^l e^{i[(m-l)\nu+\delta]t-i\varphi} + h.c. \right), \quad (3.43)$$

$$\mathcal{H}_{ion-BG} = \sum_k V_k e^{-\eta_k^2/2} \left( \sum_{m,l=0}^{\infty} \frac{(i\eta_k)^{m+l}}{m!l!} \hat{b}_k \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^l e^{i[(m-l)\nu-\omega_k]t} + h.c. \right). \quad (3.44)$$

A ressonância na interação íon-laser é alcançada sintonizando as frequências dos feixes laser de modo a obter  $\delta = -\ell\nu$  ( $\ell = m - l$ ).

Faremos agora algumas aproximações razoáveis que simplificam sobremaneira os Hamiltonianos (3.43) e (3.44). Primeiro *i*) tomaremos o limite de Lamb-Dicke usual, para que  $\eta_L \ll 1$  (consideramos o movimento do centro de massa iônico fortemente localizado com relação ao comprimento de onda do laser). A seguir, *ii*) assumiremos que as oscilações na polarização do BG possuem pequena energia e dessa forma tomamos um limite do tipo Lamb-Dicke em que  $\eta_k \ll 1$ . Este limite é de certo modo análogo ao caso *large polarons* em física do estado sólido [30]. De fato, o movimento de um *large polaron* é contínuo, como esperamos que seja para um íon aprisionado, em contraste com o movimento do *small polaron* que reconhece a periodicidade de um sólido tornando-se localizado e assumindo dimensões atômicas. Com essas duas aproximações obtemos os Hamiltonianos simplificados:

$$\mathcal{H}_{ion-laser} = \Omega \left( \hat{\sigma}_+ e^{-i\delta t - i\varphi} + i\eta_L \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\nu+\delta)t - i\varphi} + i\eta_L \hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i(\nu-\delta)t - i\varphi} + h.c. \right), \quad (3.45)$$

$$\mathcal{H}_{ion-BG} = \sum_k V_k \left( \hat{b}_k e^{-i\omega_k t} + i\eta_k \hat{b}_k \hat{a}^\dagger e^{i(\nu-\omega_k)t} + i\eta_k \hat{b}_k \hat{a} e^{-i(\nu+\omega_k)t} + h.c. \right). \quad (3.46)$$

Adicionando *iii*) a aproximação de onda girante [31], obtemos três tipos de Hamiltonianos para interação íon-laser, dependendo da escolha da dessintonia  $\delta$ .

(a) O Hamiltoniano do tipo carrier ( $\delta = 0$ ),

$$\mathcal{H}_{ion-laser}^C = \Omega \left( \sigma_+ e^{-i\varphi} + \sigma_- e^{+i\varphi} \right), \quad (3.47)$$

induz a transição  $|n, \downarrow\rangle \longleftrightarrow |n, \uparrow\rangle$  (onde  $|n\rangle$  indica um estado de Fock vibracional), e é responsável somente por rotações dos níveis internos de acordo com

$$e^{-i\mathcal{H}_{ion-laser}^C\tau} |n, \uparrow\rangle = \cos(\Omega\tau) |n, \uparrow\rangle - ie^{i\varphi} \sin(\Omega\tau) |n, \downarrow\rangle, \quad (3.48a)$$

$$e^{-i\mathcal{H}_{ion-laser}^C\tau} |n, \downarrow\rangle = \cos(\Omega\tau) |n, \downarrow\rangle - ie^{-i\varphi} \sin(\Omega\tau) |n, \uparrow\rangle. \quad (3.48b)$$

(b) O Hamiltoniano do tipo Jaynes-Cummings ( $\delta = \nu$ ), correspondendo à primeira banda lateral vermelha (*first red sideband*),

$$\mathcal{H}_{ion-laser}^{JC} = i\eta_L\Omega (\sigma_+ a e^{-i\varphi} - \sigma_- a^\dagger e^{+i\varphi}), \quad (3.49)$$

induz a transição  $|n, \downarrow\rangle \longleftrightarrow |n-1, \uparrow\rangle$ , de forma que os estados eletrônicos e vibracionais evoluem como

$$e^{-i\mathcal{H}_{ion-laser}^{JC}\tau} |n, \uparrow\rangle = C_n |n, \uparrow\rangle - e^{-i\varphi} S_n |n+1, \downarrow\rangle, \quad (3.50a)$$

$$e^{-i\mathcal{H}_{ion-laser}^{JC}\tau} |n, \downarrow\rangle = C_{n-1} |n, \downarrow\rangle + e^{i\varphi} S_{n-1} |n-1, \uparrow\rangle, \quad (3.50b)$$

onde  $C_n = \cos(g\tau\sqrt{n+1})$ ,  $S_n = \sin(g\tau\sqrt{n+1})$ ,  $\tau$  é a duração do pulsos laser, e  $g = \eta_L\Omega$ .

(c) O Hamiltoniano tipo anti-Jaynes-Cummings ( $\delta = -\nu$ ), correspondendo à primeira banda lateral azul (*first blue sideband*),

$$\mathcal{H}_{ion-laser}^{AJC} = i\eta_L\Omega [\sigma_+ a^\dagger e^{-i\varphi} - \sigma_- a e^{+i\varphi}], \quad (3.51)$$

induz a transição  $|n, \downarrow\rangle \longleftrightarrow |n+1, \uparrow\rangle$ , e os níveis eletrônicos e vibracionais evoluem como

$$e^{-i\mathcal{H}_{ion-laser}^{AJC}\tau} |n, \downarrow\rangle = C_n |n, \downarrow\rangle + e^{-i\varphi} S_n |n+1, \uparrow\rangle, \quad (3.52a)$$

$$e^{-i\mathcal{H}_{ion-laser}^{AJC}\tau} |n, \uparrow\rangle = C_{n-1} |n, \uparrow\rangle - e^{i\varphi} S_{n-1} |n-1, \downarrow\rangle. \quad (3.52b)$$

Finalmente, assumindo a aproximação *iii*) e a hipótese *iv*) de que os modos de oscilação da polarização do BG possuem frequências muito próximas, com o máximo de sua distribuição distante do zero, o Hamiltoniano de interação íon-BG torna-se

$$\mathcal{H}_{ion-BG} = i \sum_k \eta_k V_k \left( b_k a^\dagger e^{i(\nu-\omega_k)} - b_k^\dagger a e^{-i(\nu-\omega_k)} \right), \quad (3.53)$$

que faz o papel de reservatório térmico para os graus de liberdade vibracionais do íon aprisionado.

### 3.3 Efeitos do acoplamento íon-gás residual em um estado vibracional inicialmente preparado

Nesta seção, analisaremos os efeitos do acoplamento íon-BG na evolução temporal dos estados iônicos. Vamos considerar a interação íon-laser referente às dessintonias  $\delta = 0$  e  $-\nu$ , representando os Hamiltonianos do tipo carrier e do tipo anti-Jaynes-Cummings

#### 3.3.1 Hamiltoniano do tipo carrier

Primeiramente, usando a representação  $P$  de Glauber [32] analisaremos, brevemente, a dinâmica do estado de movimento iônico quando  $\delta = 0$ . O Hamiltoniano total do sistema, na representação de Schrödinger, torna-se

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{U}^\dagger(t)\hat{\mathcal{H}}_{ion-laser}^C\hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t)\hat{\mathcal{H}}_{ion-BG}\hat{U}(t) \\ &= \nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \Omega (\hat{\sigma}_+ e^{-i\varphi} + \hat{\sigma}_- e^{+i\varphi}) + i \sum_k \eta_k V_k (\hat{b}_k \hat{a}^\dagger - \hat{b}_k^\dagger \hat{a}).\end{aligned}\quad (3.54)$$

Note que os graus de liberdade eletrônicos do íon aprisionado estão totalmente desacoplados dos graus de liberdade do movimento iônico e do BG.

Enfocando-nos na evolução temporal dos estados iônicos de movimento, que não são afetados pelos estados eletrônicos no regime carrier, observamos que o Hamiltoniano (3.54) é análogo àquele para um único modo do campo eletromagnético aprisionado em uma cavidade sujeita a dissipação. Este último Hamiltoniano tem recebido considerável atenção recentemente para o cálculo da fidelidade na preparação e teletransporte de estados do campo eletromagnético [1]. Nesse sentido, consideramos de interesse a análise do processo de decoerência de um estado de movimento de um íon aprisionado sujeito a um pulso carrier.

Na representação de Heisenberg temos as seguintes equações de movimento acopladas para os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{b}_k$

$$\dot{\hat{a}}(t) = -i\nu\hat{a}(t) - i\sum_k \eta_k V_k \hat{b}_k(t), \quad (3.55a)$$

$$\dot{\hat{b}}_k(t) = -i\omega_k \hat{b}_k(t) - i\eta_k V_k \hat{a}(t). \quad (3.55b)$$

Resolvendo as equações diferenciais acopladas (3.55a) e (3.55b), via transformadas de Laplace e assumindo a aproximação de Wigner-Weisskopf [31, 33], obtemos

$$\hat{a}(t) = u(t)\hat{a}(0) + \sum_k v_k(t)\hat{b}_k(0), \quad (3.56)$$

onde, desconsideramos pequenos deslocamentos típicos de frequência e introduzimos a constante de amortecimento  $\Gamma$ . Os coeficientes dependentes do tempo, que obedecem às condições iniciais  $u(0) = 1$  e  $v_k(0) = 0$ , podem ser escritos como

$$u(t) = e^{-(\Gamma/2+i\nu)t}, \quad (3.57a)$$

$$v_k(t) = -\eta_k V_k e^{-i\omega_k t} \frac{1 - e^{i(\omega_k - \nu)t} e^{-\Gamma t/2}}{\Gamma/2 - i(\omega_k - \nu)}. \quad (3.57b)$$

Dos resultados acima, obtemos a função característica normalmente ordenada  $\chi_N(\xi, t)$ , definida na representação de Schrödinger como

$$\chi_N(\xi, t) = \text{Tr} \left[ \rho(t) e^{\xi a^\dagger(t)} e^{\xi^* a(t)} \right], \quad (3.58)$$

e na representação de Heisenberg como

$$\chi_N(\xi, t) = \text{Tr} \left[ \rho(0) e^{\xi a^\dagger(t)} e^{\xi^* a(t)} \right], \quad (3.59)$$

onde o operador densidade  $\rho(t)$  refere-se ao sistema composto íon-BG, que assumimos inicialmente desacoplados,  $\rho(0) = \rho_{ion}(0)\rho_{BG}(0)$  (como é usual, consideramos que a interação íon-BG é ligada instantaneamente em  $t = 0^+$ ). Para o estado de movimento do íon preparado como

uma superposição de estados coerentes  $\sum_l c_l |\alpha_l\rangle$ , segue que o termo representativo do operador densidade inicial do íon é  $\rho_{ion}(0) = |\alpha_1\rangle \langle \alpha_2|$ . Para o estado térmico inicial das oscilações de polarização do BG temos a seguinte distribuição Gaussiana para o operador densidade reduzido inicial do BG:

$$\rho_{BG}(0) = \prod_k \int \frac{e^{-|\beta_k|^2/\langle n_k \rangle}}{\pi \langle n_k \rangle} |\beta_k\rangle \langle \beta_k| d^2\beta_k. \quad (3.60)$$

A partir da função característica (3.59) derivamos a função  $P$  de Glauber

$$\begin{aligned} P(\gamma, t) &= \frac{1}{\pi^2} \int e^{\gamma\xi^* - \gamma^*\xi} \chi_N(\xi, t) d^2\xi \\ &= \frac{\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle}{\pi D(t)} \exp \left[ -\frac{(\gamma^* - u^*(t)\alpha_1^*)(\gamma - u(t)\alpha_2)}{D(t)} \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

cuja dispersão é dada por  $D(t) = \sum_k \langle n_k \rangle |v_k(t)|^2 = \bar{n}_{th} (1 - e^{-\Gamma t})$ , onde a excitação média das oscilações da polarização do BG em equilíbrio térmico é  $\bar{n}_{th} = (e^{-\nu/k_B T} - 1)^{-1}$  ( $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura absoluta). A Fig. 3.2 mostra o processo de dissipação na evolução da função  $P(\gamma, t)$  para um estado de movimento inicial coerente. A rotação no espaço de fase surge devido ao termo  $\exp(-i\nu t)$  na Eq. (3.57a), que está presente também na evolução de um oscilador harmônico em um sistema quântico fechado (sem decoerência). Observamos nessa figura ambos os efeitos do meio ambiente (o BG): a perda de excitação levando o estado coerente inicial em direção ao zero do espaço de fase, e a difusão devido à temperatura diferente de zero das excitações do BG. Esses efeitos podem ser vistos claramente na forma da distribuição  $P(\gamma, t)$  representada na Fig. 3.2, nos tempos  $\Gamma t = 0, 2$  e  $0, 9$ . É interessante salientar que a função  $P$  de Glauber para o estado coerente é uma função delta, como podemos ver tomando o limite  $t \rightarrow 0$  na Eq. (3.61). Entretanto, devido à temperatura não nula do meio ambiente, temos um processo de difusão que torna a representação gráfica da função  $P$  de Glauber possível.

Da função de distribuição  $P(\gamma, t)$ , podemos obter o operador densidade reduzido do íon

$$\rho_{ion}(t) = \frac{1}{\pi^2} \int P(\gamma, t) |\gamma\rangle \langle \gamma| d^2\gamma, \quad (3.62)$$



e valores médios de operadores associados com estados de movimento iônico; por exemplo, a excitação média do movimento de um íon inicialmente preparado no estado de vácuo, i.e.,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , torna-se

$$\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle = \int P(\alpha, t) \alpha^* \alpha d^2\alpha = D(t), \quad (3.63)$$

mostrando o processo de aquecimento do estado fundamental de movimento iônico devido ao BG.

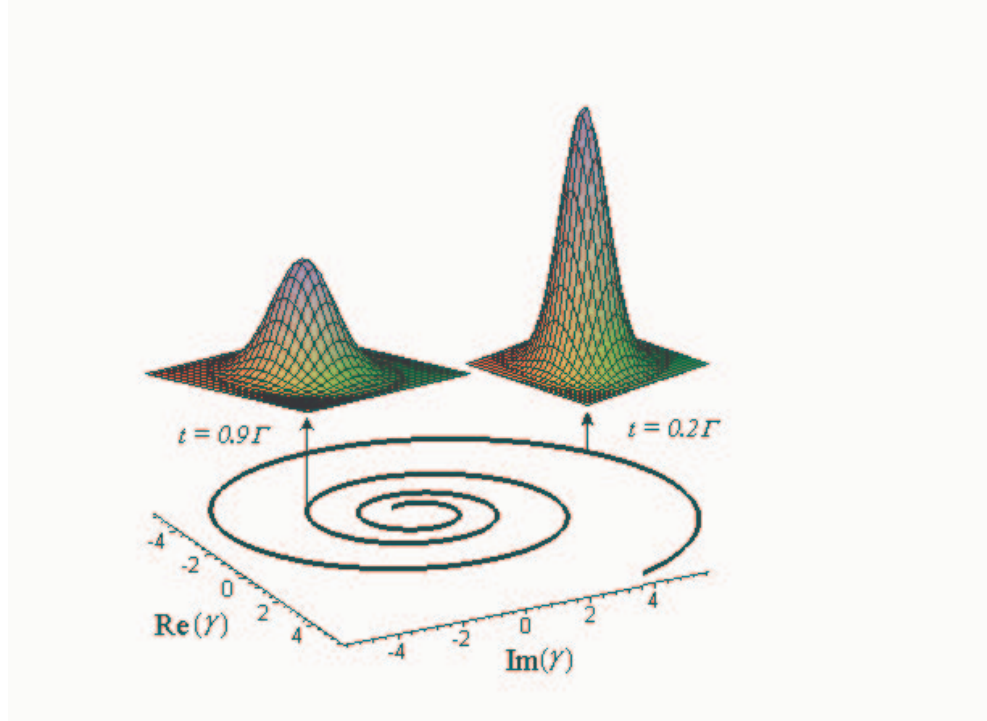


Figura 3.2. Função de quase-distribuição  $P(\gamma, t)$  para estado inicial de movimento co-erente mostrada em  $\Gamma t = 0, 2$  e  $0, 9$ .

### 3.3.2 Hamiltoniano do tipo anti-Jaynes-Cummings

A seguir, examinaremos a ação do acoplamento íon-BG sobre o íon aprisionado quando  $\delta = -\nu$ . Nesse caso o Hamiltoniano total é dado por

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{U}^\dagger(t) \hat{\mathcal{H}}_{ion-laser}^{AJC} \hat{U}(t) + \hat{U}^\dagger(t) \hat{\mathcal{H}}_{ion-BG} \hat{U}(t) \\
&= \nu \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{\nu}{2} \hat{\sigma}_z + \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + i\eta_L \Omega (\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{-i\varphi} - \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{+i\varphi}) \\
&\quad + i \sum_k \eta_k V_k (\hat{b}_k \hat{a}^\dagger - \hat{b}_k^\dagger \hat{a}).
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Consideramos o Hamiltoniano do tipo anti-Jaynes-Cummings para a interação íon-laser para que possamos computar, nesse regime, o amortecimento das oscilações de Rabi do íon (inicialmente resfriado ao seu estado fundamental de movimento) e comparar com os resultados experimentais disponíveis para íons de  ${}^9\text{Be}^+$  [8].

Para computar a inversão atômica do sistema descrito pelo Hamiltoniano (3.64), utilizaremos técnicas desenvolvidas para tratar o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings para a interação de um átomo com um modo do campo em uma cavidade sujeita à dissipação a temperatura finita, que é análogo ao da Eq. (3.64) [33, 34, 35, 36]. Seguiremos o tratamento feito por Sachdev [34] para calcular a inversão atômica. Essa técnica consiste em lidar com quantidades hierárquicas do tipo *c-number* derivadas da equação de movimento para operadores da forma  $(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \hat{\mathcal{O}}_A$  (onde  $\hat{\mathcal{O}}_A$  é um operador que atua nos níveis eletrônicos), dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \hat{\mathcal{O}}_A \right] &= -i \left[ (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \hat{\mathcal{O}}_A, -\frac{\nu}{2} \hat{\sigma}_z + i\eta_L \Omega (\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{-i\varphi} - \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{+i\varphi}) \right] \\
&\quad + \left\langle \frac{d}{dt} [(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n] \right\rangle_{BG} \hat{\mathcal{O}}_A,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

onde o termo  $\left\langle \frac{d}{dt} [(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n] \right\rangle_{BG}$  inclui a relação de comutação entre  $(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \hat{\mathcal{O}}_A$  e as componentes do Hamiltoniano (3.64) que descrevem a energia do BG e sua interação com os modos de vibração iônicos, bem como a energia de movimento do íon aprisionado. Sob a aproximação de Wigner-Weisskopf (WW) e supondo que os modos do BG estão em equilíbrio térmico, obtemos

[33]

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} [(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n] \right\rangle_{BG} &= \left( i\nu(m-n) - \frac{\Gamma}{2}(m+n) \right) \langle (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \rangle_{BG} \\ &+ \Gamma mn \bar{n}_{th} \langle (\hat{a}^\dagger)^{m-1} \hat{a}^{n-1} \rangle_{BG}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

A constante de amortecimento, que surge da aproximação de WW é  $\Gamma = 2\pi [g(\nu)]^2 \Lambda(\nu)$ , onde  $g(\nu) \equiv g_{\nu/c}$  é a constante de acoplamento (com  $g_k = \eta_k V_k$ ) estimada em  $k = \nu/c$  e  $\Lambda(\nu)$  é a densidade de estados. O número de ocupação  $\bar{n}_{th}$  surge da suposição de equilíbrio térmico, onde os operadores de ruído  $\hat{\mathcal{N}}(t) \equiv \sum_k g_k \hat{b}_k(0) e^{-i(\omega_k - \nu)t}$  satisfazem  $\langle \hat{\mathcal{N}}(t) \rangle_{BG} = \langle \hat{\mathcal{N}}^\dagger(t) \rangle_{BG} = 0$ , e  $\langle \hat{\mathcal{N}}^\dagger(t) \hat{\mathcal{N}}(t') \rangle_{BG} = \Gamma \bar{n}_{th} \delta(t - t')$  [33].

Das Eqs. (3.65) e (3.66), derivamos a evolução temporal da inversão atômica  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$  e do número de ocupação de fônons do íon aprisionado  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ :

$$\frac{d\langle \hat{\sigma}_z \rangle}{dt} = 2g \langle \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{-i\varphi} + \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{+i\varphi} \rangle, \quad (3.67)$$

$$\frac{d\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}{dt} = g \langle \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{-i\varphi} + \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{+i\varphi} \rangle - \Gamma \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + \Gamma \bar{n}_{th} \quad (3.68)$$

com os parênteses angulares ( $\langle \cdot \rangle$ ) denotando a média sobre as variáveis do BG e do íon. As Eqs. (3.67) e (3.68) envolvem a média do operador hermitiano  $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{-i\varphi} + \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{+i\varphi}$ , cuja equação de movimento envolve a quantidade  $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z \rangle$ . Por sua vez, a equação de movimento dessa quantidade envolve a média de produtos de operadores de ordens mais elevadas tais como  $\langle (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 \rangle$ ,  $\langle (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 \hat{\sigma}_z \rangle$ , e assim por diante. Para lidar com a média de tais operadores é conveniente definir as seguintes variáveis *c-numbers*:

$$\mathcal{P}_n = \langle (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^n \rangle, \quad n \geq 0, \quad \mathcal{P}_0 = 1; \quad (3.69a)$$

$$\mathcal{Q}_n = \langle (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^n \hat{\sigma}_z \rangle, \quad n \geq 0, \quad \mathcal{Q}_0 = \langle \hat{\sigma}_z \rangle; \quad (3.69b)$$

$$\mathcal{R}_n = \left\langle \hat{\sigma}_+ (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^{n-1} e^{-i\varphi} + \hat{\sigma}_- (\hat{a}^\dagger)^{n-1} \hat{a}^n e^{+i\varphi} \right\rangle, \quad n > 0. \quad (3.69c)$$

Resolvendo as equações dinâmicas para variáveis *c-numbers* acima, obtemos a dinâmica para a inversão atômica. Das definições (3.69a)-(3.69c), e Eqs. (3.65) e (3.66) obtemos o seguinte

conjunto de equações diferenciais acopladas

$$\frac{d\mathcal{P}_n}{dt} = ng\mathcal{R}_n - n\Gamma\mathcal{P}_n + n^2\Gamma\bar{n}_{th}\mathcal{P}_{n-1}, \quad (3.70a)$$

$$\frac{d\mathcal{Q}_n}{dt} = ng\mathcal{R}_n + 2g\mathcal{R}_{n+1} - n\Gamma\mathcal{Q}_n + n^2\Gamma\bar{n}_{th}\mathcal{Q}_{n-1}, \quad (3.70b)$$

$$\frac{d\mathcal{R}_n}{dt} = -2g\mathcal{Q}_n + ng\mathcal{P}_{n-1} - ng\mathcal{Q}_{n-1} - (n-1/2)\Gamma\mathcal{R}_n + n(n-1)\Gamma\bar{n}_{th}\mathcal{R}_{n-1}. \quad (3.70c)$$

Note que, para temperatura zero ( $\bar{n}_{th} = 0$ ) e para o estado iônico inicialmente preparado em  $|n=0, \downarrow\rangle$ , obtemos um conjunto fechado de equações, dado que as médias que envolvem termos quadráticos ou de ordem maior nos operadores iônicos de movimento  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  serão nulas [33]. Porém, vamos lidar com o caso mais geral de temperatura diferente de zero ( $\bar{n}_{th} > 0$ ) para comparar o amortecimento das oscilações de Rabi que resultam do presente modelo com os dados experimentais.

Observamos que, para o íon preparado no estado inicial  $|n=0, \downarrow\rangle$ , o Hamiltoniano anti-Jaynes-Cummings induz a transição  $|0, \downarrow\rangle \longleftrightarrow |1, \uparrow\rangle$ , de forma que é possível estimar uma temperatura por volta de  $\nu/k_B$  para o íon aprisionado e, conseqüentemente, para o BG. De fato, sob tais considerações, a energia térmica do íon aprisionado  $k_B T$  é por volta de  $\nu$ , resultando, via teorema da equipartição da energia, em um número de ocupação de movimento para as oscilações do BG em torno da unidade ( $\bar{n}_{th} \approx 1$ ). Por outro lado, como as oscilações de Rabi nos experimentos do NIST [8] sobrevivem consideravelmente após  $100\mu s$ , é possível estimar o fator de amortecimento  $\Gamma/g$  por volta de  $10^{-3}$ . Tendo esses valores em mão podemos resolver o sistema (3.70a)-(3.70c) via técnica de frações continuadas e transformada de Laplace numérica [37] (ver apêndice C) e obter assim a evolução temporal da probabilidade de fluorescência para a medida do estado eletrônico fundamental do íon  $P_\downarrow(t) = (1 - \langle\sigma_z\rangle)/2$ .

A Fig. 3.3 mostra o comportamento da função  $P_\downarrow(t)$  calculada através do nosso modelo, que está em excelente acordo com os dados experimentais reportados em [8]. Usamos em nossos cálculos os parâmetros experimentais  $\eta_L = 0,202$  e  $\Omega/2\pi \approx 475$  kHz. Em particular, nosso modelo reproduz a assimetria no amortecimento da oscilações de Rabi vista nos dados

experimentais. Para obter tal comportamento, usamos os parâmetros  $\bar{n}_{th} = 1,0$  e  $\Gamma/g = 6,0 \times 10^{-3}$  que estão em bom acordo com as estimativas teóricas feitas acima.

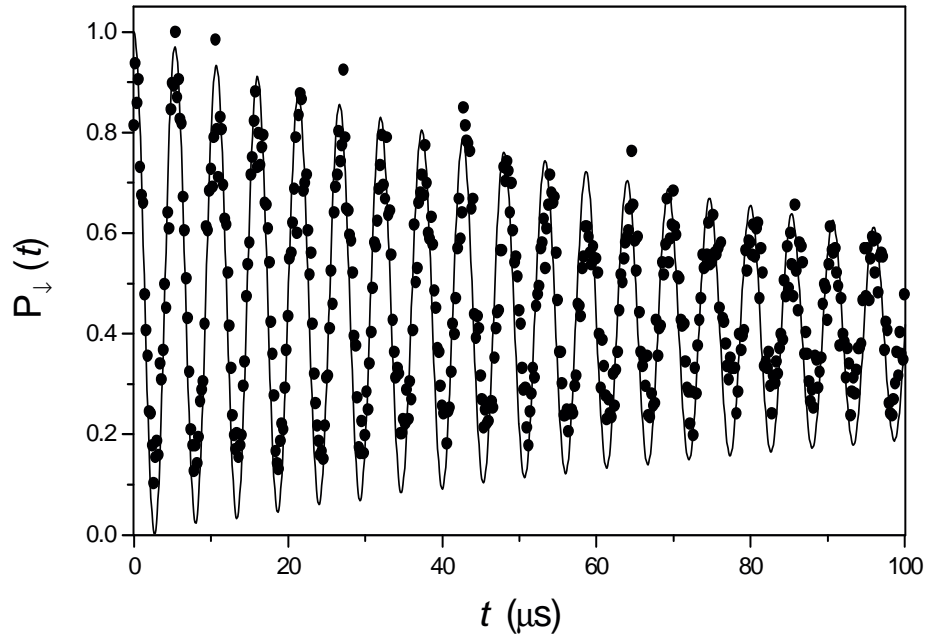


Figura 3.3. Evolução temporal da probabilidade de medida do estado fundamental  $P_{\downarrow}(t)$ , computada através do nosso modelo (linha cheia) e medida no experimento com  ${}^9\text{Be}^+$  do NIST [8] (pontos) para o estado inicial iônico  $|n = 0, \downarrow\rangle$ . Os parâmetros usados nos experimentos  $\eta_L = 0,202$  e  $\Omega/2\pi \approx 475$  kHz, são adotados nos cálculos numéricos, junto com os valores  $\bar{n}_{th} = 1,0$  e  $\Gamma/g = 6,0 \times 10^{-3}$  que estão em bom acordo com as nossas estimativas teóricas.

Para demonstrar a sensibilidade do presente modelo ao estado de movimento inicial do íon, representamos nas Figs. 3.4(a) e (b) o comportamento da função  $P_{\downarrow}(t)$  computada através do presente modelo (linhas cheias) quando o íon é preparado no estado inicial  $|n = 0, \downarrow\rangle$  [Fig.

3.4(a)] e  $|n = 1, \downarrow\rangle$  [Fig. 3.4(b)]. As Figs. 3.4(a) e (b) também mostram a relação heurística usada em [8] como função de ajuste para os dados experimentais,

$$P_{\downarrow}(t) \approx \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_n p_n \cos(2\Omega t \sqrt{n+1}) e^{-\gamma_n t} \right), \quad (3.71)$$

onde  $p_n$  é a distribuição de probabilidade do estado de movimento inicial na base de Fock e  $\gamma_n = \gamma_0(n+1)^{0,7}$  é a taxa de amortecimento fenomenológica. O comportamento da relação heurística (3.71) para  $|n = 0, \downarrow\rangle$  [Fig. 3.4(a)] e  $|n = 1, \downarrow\rangle$  [Fig. 3.4(b)] é mostrado em linhas pontilhadas usando o valor  $\gamma_0 = 11,9(4)$  kHz estimado em [8]. Enfatizamos que a Eq. (3.71) descreve um amortecimento simétrico das oscilações de Rabi em vez do amortecimento assimétrico experimentalmente observado com o qual o presente modelo está de acordo (ver Fig. 3.3). Portanto, o modelo de polarização do BG para decoerência em íons aprisionados, apresentado neste capítulo, possui a dependência com o estado de movimento inicial do íon semelhante a demonstrada pela Eq. (3.71); entretando reproduz também a assimetria no amortecimento das oscilações de Rabi, ingrediente que a expressão (3.71) não possui.

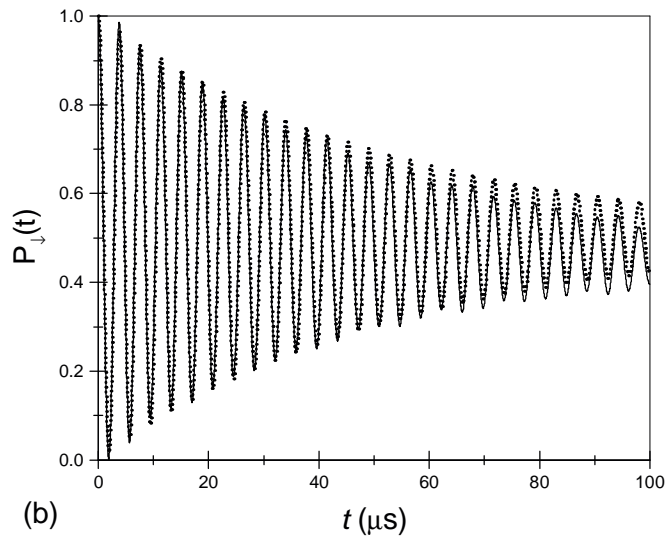
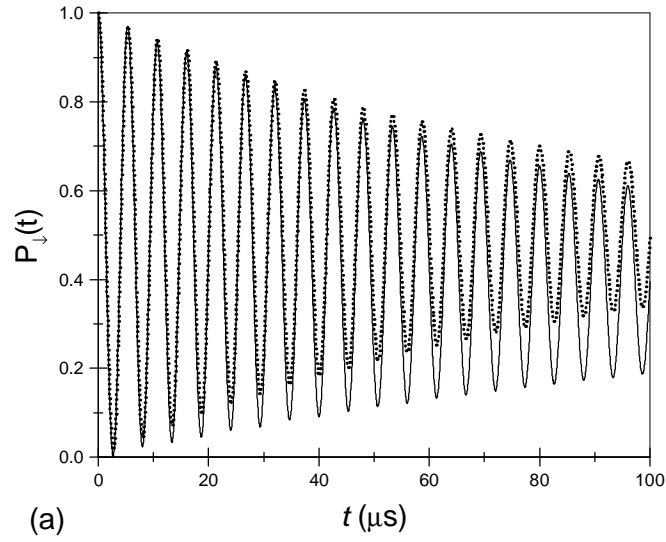


Figura 3.4. Evolução temporal da probabilidade de medida do estado fundamental  $P_{\downarrow}(t)$  para os estados iniciais iônicos (a)  $|n = 0, \downarrow\rangle$  e (b)  $|n = 1, \downarrow\rangle$ , de acordo com nosso modelo (linha cheia) e segundo a relação heurística (3.71) (linha pontilhada).

### 3.4 Comentários e conclusões

Propusemos um mecanismo alternativo para explicar o amortecimento das oscilações de Rabi em íons aprisionados, como medido na Ref. [8]. O modelo exposto neste capítulo leva em conta a polarização do gás residual da armadilha induzida pelo íon. A interação íon-BG é descrita por um Hamiltoniano do tipo Fröhlich, no qual assumimos um limite tipo Lamb-Dicke em que  $\eta_k = k/\sqrt{2m\nu} \ll 1$ ,  $k$  representa os módulos dos vetores de onda dos modos do BG, e  $m$  ( $\nu$ ) representa a massa (frequência) do íon aprisionado.

Como as experiências com íons aprisionados são realizadas em um ambiente de alto-vácuo, a densidade do BG, por volta de  $10^6 \text{ cm}^{-3}$  [19], não permite a energia de ligação suficiente para a formação de uma quase-partícula e o íon é espalhado pelo BG. Colisões elásticas e inelásticas estão presentes, no entanto estima-se raros os processos inelásticos de reações químicas e mudança de carga, que são de difícil tratamento formal. Embora uma estimativa conservadora para a taxa de colisões elásticas também leve a um pequeno valor [19], concluimos que o meio dissipativo provido pela polarização do BG deve ser levado em conta no processo de decoerência em armadilhas iônicas. Como mencionado na Ref.[19], para uma armadilha linear do tipo Paul, a principal fonte de decoerência pode ser associada a erros que surgem dos graus de liberdade externos do íon em vez daqueles devido aos níveis internos e campos não ideais.

Sob o limite do tipo Lamb-Dicke aqui adotado, a interação íon-BG resulta (assumindo a aproximação padrão de “onda girante” e que o espectro dos modos de oscilação do BG tenha seu máximo longe do zero) no modelo habitual de resposta linear do reservatório (o BG) para o sistema (o íon aprisionado)[32, 38]. A representação  $P$  de Glauber foi usada para analisar a dinâmica do estado de movimento iônico quando consideramos o pulso carrier para a interação íon-laser. No regime carrier os estados eletrônicos estão totalmente desacoplados dos estados de movimento. Assim, a dissipação ou aquecimento do movimento vibracional do íon não afetam as oscilações de Rabi, dependendo somente da excitação média do BG,



como investigado na seção 3.3.1. Por outro lado, usamos uma técnica baseada em quantidades hierárquicas do tipo *c-number* para obter um excelente acordo com os resultados experimentais [8] para o amortecimento assimétrico das oscilações de Rabi sob um pulso do tipo anti-Jaynes-Cummings.

O bom acordo entre os resultados medidos para o amortecimento das oscilações de Rabi [8] e o comportamento obtido pelo presente modelo de polarização do BG indicam que esse fenômeno possa ser considerado como fonte de erro em íons aprisionados. Evidentemente, os erros devido à polarização do BG devem ser levados em conta juntamente com os erros oriundos do tempo de vida finito do nível auxiliar e de campos não ideais [19], como investigado nas Refs. [6, 16, 17]. Assim como o modelo estocástico em [16], o modelo de polarização de BG também reproduz a assimetria do amortecimento das oscilações de Rabi observada experimentalmente. Da mesma forma que os autores declaram na Ref. [16] que a assimetria dos dados medidos é compatível com o mecanismo de decaimento do nível auxiliar, mencionamos que também é consistente com a competição dissipação-aquecimento produzida pela interação íon-BG (através da excitação média  $\bar{n}_{th}$  de BG e do fator amortecimento  $\Gamma$ ). Além disso, a consistência do presente modelo é confirmada pelo fato de que o melhor ajuste com os dados experimentais é obtido com os valores dos parâmetros  $\bar{n}_{th} = 1,0$  e  $\Gamma/g = 6,0 \times 10^{-3}$  que estão em acordo com as estimativas teóricas. Por fim, demonstramos que o modelo introduzido neste capítulo para o amortecimento das oscilações de Rabi é sensível ao estado quântico de movimento inicial do íon, sendo este resultado visível no comportamento das curvas nas Figs. 3.4(a) e (b).

# Referências Bibliográficas

- [1] N. G. de Almeida, R. Napolitano, e M. H. Y. Moussa, “Phenomenological-operator approach to dissipation in cavity quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. A* **62**, 033815 (2000);  
N. G. de Almeida, P.B. Ramos, R. M. Serra, e M. H. Y. Moussa, “Phenomenological-operator approach to introduce damping effects on radiation field states”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2**, 792 (2000).
- [2] R. M. Serra, C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida e M. H. Y. Moussa, “High-fidelity teleportation of entanglements of running-wave field states”, *submetido*.
- [3] W. H. Zurek, “Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?”, *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981);  
*ibid.*, “Environment-induced superselection rules”, *Phys. Rev. D* **26**, 1862 (1982);  
*ibid.* “Decoherence and the Transition from Quantum to Classical”, *Phys. Today* **44**, 36 (1991).
- [4] C. W. Gardiner e P. Zoller, *Quantum Noise*, 2<sup>nd</sup> ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2000);  
Ph. Blanchard, D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer e I.-O. Stamatescu (Eds.), *Decoherence: Theoretical Experimental, and Conceptual Problems* (Springer-Verlag, Berlin, 2000).

- [5] R. M. Serra, P. B. Ramos, N. G. de Almeida, W. D. José e M. H. Y. Moussa, “Engineering arbitrary motional ionic state through realistic intensity-fluctuating laser pulses”, *Phys. Rev. A* **63**, 053813 (2001).
- [6] S. Schneider e G. H. Milburn, “Decoherence in ion traps due to laser intensity and phase fluctuations”, *Phys. Rev. A* **57**, 3748 (1998);  
S. Schneider e G. H. Milburn, “Decoherence and fidelity in ion traps with fluctuating trap parameters” *Phys. Rev. A* **59**, 3766 (1999).
- [7] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, (Cambridge University Press, Cambridge, U.K. 2000);  
J. Preskill e A. Kitaev (não publicado), *Lecture notes Quantum Information and Computation*, disponível *online* em <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/ph229>;
- [8] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland, “Generation of Nonclassical Motional States of a Trapped Atom”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1796 (1996);  
Erratum: *ibid* *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2346 (1996).
- [9] R. J. Hughes, D. F. V. James, E. H. Knill, R. Laflamme e A. G. Petschek, “Decoherence Bounds on Quantum Computation with Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3240 (1996).
- [10] M. B. Plenio and P. L. Knight, “Decoherence limits to quantum computation using trapped ions”, *Proc. R. Soc. London A* **453**, 2017 (1997).
- [11] D. F. V. James, “Theory of Heating of the Quantum Ground State of Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 317 (1998).
- [12] A. Garg, “Decoherence in Ion Trap Quantum Computers”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 964 (1996).

- [13] M. Muraio e P. L. Knight, “Decoherence in nonclassical motional states of a trapped ion”, *Phys. Rev. A* **58**, 663 (1998).
- [14] A. Vidiella-Barranco e H. Moya-Cessa, “Nonextensive approach to decoherence in quantum mechanics”, *Phys. Lett. A* **279**, 56 (2001).
- [15] C. Tsallis, “Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics”, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [16] C. Di Fidio e W. Vogel, “Damped Rabi oscillations of a cold trapped ion”, *Phys. Rev. A* **62**, 031802(R) (2000).
- [17] A. A. Budini, R. L. de Matos Filho, e N. Zagury, “Localization and dispersivelike decoherence in vibronic states of a trapped ion”, *Phys. Rev. A* **65**, 041402(R) (2002).
- [18] Ch. Roos, Th. Zeiger, H. Rohde, H. C. Nägerl, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler, E R. Blatt, “Quantum State Engineering on an Optical Transition and Decoherence in a Paul Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4713 (1999).
- [19] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King e D. M. Meekhof, “Experimental Issues in Coherent Quantum-State Manipulation of Trapped Atomic Ions”, *J. Res. NIST* **103**, 259 (1998), disponível *online* em <http://www.nist.gov/jres>.
- [20] N. Studart and S. S. Sokolov, in *Two-Dimensional Electron System*, edited by E. Y. Andrei (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997).
- [21] J. B. Hasted, *Physics of Atomic Collisions*, (Butterworth & Co., New York, 1972).
- [22] R. M. Serra, N. G. de Almeida, W. B da Costa e M. H. Y. Moussa, “Decoherence in trapped ions due to polarization of the residual background gas”, *Phys. Rev. A* **64**, 033419 (2001).

- [23] M. Orszag, *Quantum Optics: Including Noise Reduction, Trapped Ions, Quantum Trajectories, and Decoherence* (Springer Berlin, 2000).
- [24] W. Vogel, D. G. Welsch e S. Wallentowitzs, *Quantum Optics: An introduction*, 2<sup>nd</sup> ed. (Wiley-VHC, Berlin, 2001).
- [25] B. E. King, *Quantum State Engineering an Information Processing with Trapped Ions*, PhD Thesis, University of Colorado (1995); disponível *online* em <http://www.bldrdoc.gov/timefreq/ion/index.htm>.
- [26] H. Fröhlich, in: *Polarons and Excitons*, edited by C. Kuper and G. Whitfield (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1963).
- [27] E. M. Lifshitz, .“the theory of molecular attractive forces between solids”, Sov. Phys. JETP **2**, 73 (1956) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **29**, 94 (1956)].
- [28] E. S. Sabisky e C. H. Anderson, “Verification of the Lifshitz Theory of the van der Waals Potential Using Liquid-Helium Films”, Phys. Rev. A **7**, 790 (1973).
- [29] V. B. Shikin e Yu P. Monarka, “On the interaction of surface electrons in liquid helium with oscillations of the vapor-liquid interface”, J. Low Temp. Phys. **16**, 193 (1974).
- [30] F. M. Peeters e J. T. Devreese, “Nonlinear conductivity in polar semiconductors: Alternative derivation of the Thornber-Feynman theory”, Phys. Rev. B **23**, 1936 (1981).
- [31] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (John Wiley & Sons, 1990).
- [32] B. R. Mollow e R. J. Glauber, “Quantum Theory of Parametric Amplification I”, Phys. Rev. **160**, 1076 (1967);  
B. R. Mollow e R. J. Glauber, “Quantum Theory of Parametric Amplification. II”, Phys. Rev. **160**, 1097 (1967).

- [33] M. O. Scully e S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [34] S. Sachdev, “Atom in a damped cavity”, *Phys. Rev. A* **29**, 2627 (1984).
- [35] S. M. Barnett, Ph.D. thesis, University of London, 1985;  
 S. M. Barnett e P. L. Knight, “Dissipation in a fundamental model of quantum optical resonance”, *Phys. Rev. A* **33**, 2444 (1986).
- [36] N. Nayak, R. K. Bullough, B. V. Thompson e G. S. Agarwal, “Quantum collapse and revival of Rydberg atoms in cavities of arbitrary Q at finite temperature”, *IEEE J. Quantum Electron.* **24**, 1331 (1988).
- [37] H. Risken, *The Fokker Planck Equation: Methods of Solution and Applications*, 2nd ed.(Springer-Verlag, Berlin, 1989).
- [38] A.O. Caldeira e A.J. Leggett, “Quantum tunnelling in a dissipative system”, *Ann. Phys. (N.Y.)* **149**, 374 (1983); **153**, 445(E) (1984);  
*ibid.*, “Path integral approach to quantum brownian-motion”, *Physica A* **121**, 587 (1983); **130**, 374(E) (1985).

# Capítulo 4

## Tunelamento Quântico de uma Única Partícula em Íons Aprisionados

### 4.1 Motivação

Juntamente com a não-localidade e o colapso da função de onda — fenômenos subjacentes aos recentes avanços em comunicação [1, 2, 3, 4] e computação quânticas [5, 6, 7] — o mecanismo de tunelamento é um dos mais intrigantes aspectos exibidos pelo mundo microscópico das partículas e interações, afastando a realidade quântica da sensibilidade clássica. Assim como a não-localidade e o colapso da função de onda têm sido investigados no sentido de estender nossa compreensão dos fenômenos quânticos fundamentais (como o princípio da incerteza e o processo de medida [8, 9]), o tunelamento é um importante mecanismo para sondar a transição da dinâmica quântica para a clássica [10].

O tunelamento quântico em nível macroscópico tem merecido grande atenção na literatura [10, 11, 12], em um primeiro momento devido a aplicações em SQUID's (*superconducting quantum interference detector*) [11, 13] e, recentemente, devido à realização de condensação da Bose-Einstein em gases atômicos dilutos [14]. A observação de franjas de interferência em

ondas de matéria demonstrou que um condensado de Bose-Einstein consiste de átomos que se comportam como a luz de um laser, possuindo coerência espacial e correlações de longo alcance, inaugurando a possibilidade de feixes coerentes de átomos e do efeito Josephson atômico [15].

A sondagem do processo de tunelamento quântico de uma única partícula consiste em um fenômeno tão instigante quanto sua manifestação em escala macroscópica. As técnicas experimentais desenvolvidas na última década para manipular os estados eletrônicos e de movimento de íons aprisionados podem ser empregadas para investigar fenômenos quânticos que até então só eram acessíveis como processos coletivos [16]. Descrevemos neste capítulo um esquema para sondar em nível individual o mecanismo de tunelamento de um único íon aprisionado em um potencial eletromagnético tipo poço duplo. Através da medida de sinais de ressonância fluorescente, a evolução temporal da inversão atômica iônica é utilizada para sondar o mecanismo de tunelamento de um único íon.

## 4.2 O modelo

Primeiramente vamos assumir que um íon é aprisionado em um potencial eletromagnético unidimensional<sup>1</sup> do tipo poço duplo simétrico

$$V(x) = b \left( x^2 - \frac{d}{2b} \right)^2. \quad (4.1)$$

Esse potencial possui dois mínimos de energia localizados em  $x_{\mathbf{i}} = (-1)^{\mathbf{i}}x_0$ , onde  $x_0 = \sqrt{d/2b}$  e  $\mathbf{i} = 1, 2$  refere-se aos poços locais centrados à esquerda e à direita da origem da coordenada  $x$ , respectivamente. Próximo aos mínimos de energia de cada poço local o movimento iônico pode ser descrito pela aproximação harmônica

$$\tilde{V}_{\mathbf{i}}(x - x_{\mathbf{i}}) = \frac{1}{2}m\nu^2 (x - x_{\mathbf{i}})^2, \quad \mathbf{i} = 1, 2 \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>Em armadilhas iônicas lineares, as frequências de oscilação típicas nas direções  $y$  e  $z$  são bem maiores que na direção  $x$ , provendo assim uma boa aproximação para uma armadilha unidimensional [16].



em que  $\nu = \sqrt{4d/m}$  indica a frequência e  $m$  a massa iônica.

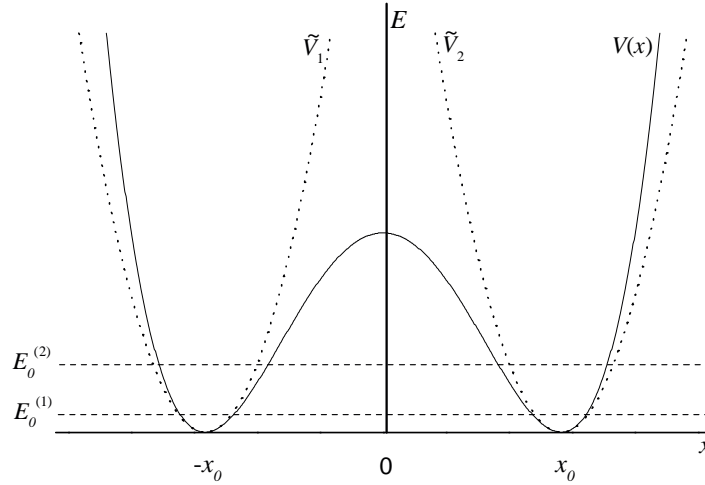


Figura 4.1. Representação esquemática (fora de escala) do potencial do tipo poço duplo  $V(x)$ , das aproximações harmônicas locais  $\tilde{V}_1$  e  $\tilde{V}_2$  em torno de  $\mp x_0$  e dos dois níveis de menor energia das aproximações harmônicas.

O ajuste da aproximação parabólica pode ser feito através de escolhas adequadas do parâmetro  $b$ , o que equivale a fixar  $d$  e variar a altura  $D = d^2/4b$  da barreira que separa os dois potenciais. Também assumiremos que (pelo menos) os dois estados de menor energia de cada mínimo local do poço duplo sejam bem aproximados (como na representação pictórica da Fig. 4.1) pelos correspondentes auto-estados das aproximações parabólicas  $\tilde{V}_i(x - x_i)$ , descritos pelas funções de onda do oscilador harmônico

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{i}}^{(n)} [x - (-1)^{\mathbf{i}}x_0] &= \frac{1}{\sqrt{2^{n-1} (n-1)!}} \left( \frac{1}{2\pi\Delta_x} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Delta_x} \frac{[x - (-1)^{\mathbf{i}}x_0]^2}{2} \right\} \\ &\times \mathbf{H}_{n-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\Delta_x}} [x - (-1)^{\mathbf{i}}x_0] \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

com  $\Delta_x = \frac{\hbar}{2m\nu}$  referindo-se à incerteza na posição do oscilador harmônico,  $H_n$  referindo-se aos polinômios de Hermite de ordem  $n$ , e o sobrescrito  $n = 1, 2$  em  $\Phi_i^{(n)}$  refere-se ao estado fundamental e primeiro estado excitado do oscilador harmônico, respectivamente. Finalmente, consideramos também que o potencial é tal que o estado  $\Phi_1^{(n)}$  (da armadilha “harmônica” 1) está localizado espacialmente próximo do estado  $\Phi_2^{(n)}$  (da armadilha “harmônica” 2). Assim as funções de onda locais  $\Phi_1^{(n)}$  e  $\Phi_2^{(n)}$  não serão ortogonais devido ao *overlap*  $\epsilon$  entre as mesmas, de forma que

$$\int dx \left\{ \Phi_i^{(n)} [x - (-1)^i x_0] \right\}^* \Phi_j^{(m)} [x - (-1)^j x_0] = [\delta_{i,j} + \epsilon(1 - \delta_{i,j})] \delta_{n,m}. \quad (4.4)$$

Com  $\epsilon \ll 1$ , os estados locais  $\Phi_i^{(n)}$  podem ser considerados aproximadamente ortogonais e os auto-estados globais do poço duplo  $V(x)$  podem ser aproximados por superposições simétricas e anti-simétricas [18]

$$\Phi_{\pm}^{(n)}(x) \approx \left[ \Phi_1^{(n)}(x + x_0) \pm \Phi_2^{(n)}(x - x_0) \right] / \sqrt{2}, \quad (4.5)$$

com correspondentes auto-energias  $E_{\pm}^{(n)} = E_0^{(n)} \pm \mathcal{R}^{(n)}$ . As constantes de acoplamento entre os estados locais são dadas pelas integrais

$$\mathcal{R}^{(n)} = \int dx \left[ \Phi_1^{(n)}(x + x_0) \right]^* \left[ V(x) - \tilde{V}_1[x + x_0] \right] \Phi_2^{(n)}(x - x_0), \quad (4.6)$$

resultando para os dois estados de menor energia em

$$\mathcal{R}^{(1)} = \frac{3}{8} m\nu^2 \Delta_x \left[ \frac{\Delta_x}{x_0^2} - \frac{x_0^2}{\Delta_x} - 2 \right] e^{-\frac{x_0^2}{2\Delta_x}}, \quad (4.7a)$$

$$\mathcal{R}^{(2)} = -\frac{x_0^2}{\Delta_x} \mathcal{R}^{(1)} + \frac{3}{4} m\nu^2 \Delta_x \left[ \frac{5}{2} \frac{\Delta_x}{x_0^2} - \frac{1}{2} \frac{x_0^2}{\Delta_x} - 3 \right] e^{-\frac{x_0^2}{2\Delta_x}}. \quad (4.7b)$$

A aproximação feita em (4.5), que é válida quando o *overlap*  $\epsilon \ll 1$ , nos leva a impor que a incerteza da posição  $\Delta_x$  seja muito menor que a separação entre os mínimos  $2x_0$  do potencial global  $V(x)$  (ou seja  $\frac{x_0^2}{\Delta_x} \gg 1$ ). Assim podemos escrever  $\mathcal{R}^{(1)} \approx -\frac{3}{16} \hbar\nu \frac{x_0^2}{\Delta_x} e^{-\frac{x_0^2}{2\Delta_x}}$  e  $\mathcal{R}^{(2)} \approx -\frac{x_0^2}{\Delta_x} \mathcal{R}^{(1)}$ , tornando fácil notar que  $\frac{\mathcal{R}^{(2)}}{E_0^{(1)}}, \left| \frac{\mathcal{R}^{(1)}}{\mathcal{R}^{(2)}} \right| \ll 1$ .

O Hamiltoniano que descreve os graus de liberdade de movimento do íon aprisionado no potencial do tipo poço duplo descrito acima é dado por [19]

$$\hat{H}_{mov} = \int dx \hat{\Psi}^\dagger H \hat{\Psi}, \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x), \quad (4.8)$$

onde  $\hat{\Psi}(x) = \sum_{n,i} \Phi_i^{(n)} [x - (-1)^i x_0] \hat{c}_i^{(n)}$  é o operador de campo e  $\hat{c}_i^{(n)}$  é o operador que aniquila o íon no estado  $\Phi_i^{(n)}$ , i.e., aniquila o íon no nível de energia  $E_0^{(n)}$  do potencial harmônico  $\tilde{V}_i$ . Da equação de auto-estados  $H\phi_\pm^n = E_\pm^n \phi_\pm^n$  e da consideração  $\epsilon \ll 1$ , justificada acima, o Hamiltoniano da eq. (4.8) torna-se

$$\hat{H}_{mov} \tilde{=} \sum_n \left[ E_0^{(n)} \left( \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n)} + \hat{c}_2^{(n)\dagger} \hat{c}_2^{(n)} \right) + \mathcal{R}^{(n)} \left( \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_2^{(n)} + \hat{c}_2^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n)} \right) \right]. \quad (4.9)$$

A seguir, vamos considerar que o íon possui efetivamente dois níveis eletrônicos (estados excitado  $|\uparrow\rangle$  e fundamental  $|\downarrow\rangle$ ), separados pela frequência  $\omega_0$  e acoplados pela interação com um feixe laser efetivo, de frequência  $\omega_L$ , propagando-se na direção  $x$  com vetor de onda  $\vec{k}_L$ . Nessa configuração, somente o movimento iônico na direção  $x$  será modificado. O feixe laser efetivo, que é na verdade composto por dois feixes de diferentes frequências (como considerado nos capítulos 2 e 3), é dessintonizado da transição  $|\uparrow\rangle \longleftrightarrow |\downarrow\rangle$  por  $\delta \equiv \omega_0 - \omega_L$ . Um outro laser fortemente acoplado com a transição entre  $|\downarrow\rangle$  e um terceiro nível  $|d\rangle$  mais excitado é utilizado para medir o estado eletrônico do íon através da coleta de sinal fluorescente, o que nos fornece a probabilidade do íon estar no estado fundamental  $|\downarrow\rangle$  [16, 17]. Dispomos ambos os feixes laser no poço harmônico local 1 com o intuito de obter uma assinatura do processo de tunelamento quântico através da probabilidade de ocupação do estado eletrônico fundamental  $|\downarrow\rangle$  no poço 1. Assim o Hamiltoniano que descreve a interação do íon com o feixe laser de frequência  $\omega_L$  será [16, 17]:

$$\hat{\mathcal{H}}_{ion-laser} = \hbar g \left( \hat{\sigma}_+ e^{ik_L \hat{x} - i\omega_L t + i\varphi} + h.c. \right) \quad (4.10)$$

onde  $\sigma_+ = |\uparrow\rangle \langle \downarrow|$  e  $\sigma_- = |\downarrow\rangle \langle \uparrow|$  são os operadores de pseudo-spin de Pauli,  $g$  é a frequência de Rabi efetiva para a transição  $|\uparrow\rangle \longleftrightarrow |\downarrow\rangle$  e  $\varphi$  é a diferença de fase entre os dois feixes laser que

compõem o laser efetivo. Já que o laser efetivo está disposto somente no poço 1, o operador posição associada ao centro de massa iônico  $\hat{x}$  é dado por [19]

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sum_{n,m} \int dx \left[ \Phi_1^{(n)}(x+x_0) \right]^* x \Phi_1^{(m)}(x+x_0) \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(m)} \\ &= \Delta_x \sum_n \sqrt{n+1} \left( \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n+1)} + \hat{c}_1^{(n+1)\dagger} \hat{c}_1^{(n)} \right).\end{aligned}\quad (4.11)$$

Em um referencial girante com a frequência do laser efetivo  $\omega_L$  (obtido via transformação unitária  $U_1(t) = \exp \left[ i \frac{\omega_L}{2} \sigma_z t \right]$ ), o Hamiltoniano de interação íon-laser é dado por

$$\hat{H}_{ion-laser} = \hbar g \left[ \hat{\sigma}_+ \exp \left( i \eta \sum_n \sqrt{n+1} \left( \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n+1)} + \hat{c}_1^{(n+1)\dagger} \hat{c}_1^{(n)} \right) + i \varphi_L \right) + \text{H.c.} \right], \quad (4.12)$$

onde introduzimos o parâmetro de Lamb-Dicke  $\eta \equiv k_L \Delta_x$ .

Agora escrevemos o Hamiltoniano total (graus de liberdade eletrônicos e de movimento) na representação de interação, através da transformação unitária  $\hat{U}(t) = \exp \left( -i \hat{H}_0 t \right)$ , onde  $\hat{H}_0 = \sum_n E_0^{(n)} \left( \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n)} + \hat{c}_2^{(n)\dagger} \hat{c}_2^{(n)} \right) + \hbar \frac{\delta}{2} \hat{\sigma}_z$  ( $\hat{\sigma}_z$  refere-se ao operador de pseudo-spin de Pauli), obtendo

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \sum_n \mathcal{R}^{(n)} \left( \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_2^{(n)} + \hat{c}_2^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n)} \right) + \hbar g e^{-\eta^2 \sum_n \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n)}} \left\{ \hat{\sigma}_+ \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ i \eta \sum_n \sqrt{n+1} \left( \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n+1)} e^{-i\omega_0 t} + \hat{c}_1^{(n+1)\dagger} \hat{c}_1^{(n)} e^{i\omega_0 t} \right) \right] e^{i\delta t + i\varphi} + \text{H.c.} \right\}\end{aligned}\quad (4.13)$$

Para simplificar o Hamiltoniano (4.13) *i)* ajustamos a dessintonia do laser para o primeiro deslocamento para o vermelho (*first red sideband*),  $\delta = \omega_0$ . Assumimos *ii)* o limite de Lamb-Dick,  $\eta \ll 1$ , em que a amplitude do movimento vibracional do íon é muito menor que o comprimento de onda do laser, possibilitando a expansão do Hamiltoniano (4.13) até primeira ordem em  $\eta$ . Fazendo também *iii)* a aproximação de onda girante [20], obteremos o Hamiltoniano

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \sum_n \mathcal{R}^{(n)} \left( \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_2^{(n)} + \hat{c}_2^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n)} \right) + i \hbar \eta g e^{-\eta^2 \sum_n \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n)}} \\ &\quad \times \left( \hat{\sigma}_+ \sum_n \sqrt{n+1} \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n+1)} e^{+i\varphi_L} - \text{H.c.} \right),\end{aligned}\quad (4.14)$$

que na ausência do processo de tunelamento ( $\mathcal{R}^{(n)} = 0$ ) leva ao acoplamento entre os graus de liberdade eletrônicos e de movimento do íon descrito pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings (HJC).

Neste ponto consideramos que o íon seja inicialmente resfriado até o estado fundamental do poço 1 e excitado via laser para o estado eletrônico  $|\uparrow\rangle$ . Assim o segundo termo do Hamiltoniano (4.14) somente induzirá a transição  $|1, 0\rangle_1 |\uparrow\rangle \leftrightarrow |0, 1\rangle_1 |\downarrow\rangle$ , onde o ket  $|1, 0\rangle_1$  ( $|0, 1\rangle_1$ ) indica que o íon está no estado de movimento fundamental (primeiro estado excitado) do poço 1 (relativo à aproximação harmônica  $\tilde{V}_1$ ). Além disso, quando consideramos o primeiro termo do Hamiltoniano (4.14), vemos que o íon no estado de movimento  $|1, 0\rangle_1$  ( $|0, 1\rangle_1$ ) possui probabilidade finita de tunelar para os estados correspondentes do poço 2:  $|1, 0\rangle_2$  ( $|0, 1\rangle_2$ ). Portanto, a base dos estados de movimento estará restrita aos estados fundamental e primeiro excitado dos poços harmônicos 1, 2. Esse é o motivo de termos assumido que os dois estados de menor energia de cada mínimo local do poço duplo sejam bem aproximados pelos correspondentes auto-estados da aproximação parabólica  $\tilde{V}_i(x - x_i)$ . Do limite de Lamb-Dicke e do fato que só consideramos um único íon aprisionado no poço duplo, a função  $\exp\left(-\eta^2 \sum_n \hat{c}_1^{(n)\dagger} \hat{c}_1^{(n)}\right)$  pode ser aproximada pela unidade. À luz da discussão precedente, o Hamiltoniano (4.14) assume a forma simplificada (para  $n = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \mathcal{R}^{(1)} \left( \hat{c}_1^{(1)\dagger} \hat{c}_2^{(1)} + \hat{c}_1^{(1)} \hat{c}_2^{(1)\dagger} \right) + \mathcal{R}^{(2)} \left( \hat{c}_1^{(2)\dagger} \hat{c}_2^{(2)} + \hat{c}_1^{(2)} \hat{c}_2^{(2)\dagger} \right) \\ & + i\hbar\eta g \left( \hat{\sigma}_+ \hat{c}_1^{(1)\dagger} \hat{c}_1^{(2)} e^{+i\varphi_L} - \hat{\sigma}_- \hat{c}_1^{(1)} \hat{c}_1^{(2)\dagger} e^{-i\varphi_L} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Vamos considerar também o caso ressonante para a interação íon-laser, i.e.  $\delta = 0$ , correspondendo à interação do tipo carrier entre os graus de liberdade vibracionais e eletrônicos do íon. Dessa forma o Hamiltoniano efetivo que segue da Eq. (4.13) (sob as aproximações mencionadas acima) é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \mathcal{R}^{(1)} \left( \hat{c}_1^{(1)\dagger} \hat{c}_2^{(1)} + \hat{c}_1^{(1)} \hat{c}_2^{(1)\dagger} \right) + \mathcal{R}^{(2)} \left( \hat{c}_1^{(2)\dagger} \hat{c}_2^{(2)} + \hat{c}_1^{(2)} \hat{c}_2^{(2)\dagger} \right) \\ & + \hbar g \left( \hat{\sigma}_+ e^{+i\varphi_L} - \hat{\sigma}_- e^{-i\varphi_L} \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Note que os operadores de Pauli atuam somente quando o íon está no poço harmônico 1.

### 4.3 Resultados

As dinâmicas governadas pelos Hamiltonianos (4.15) e (4.16) tornam possível sondar o mecanismo de tunelamento através da probabilidade de medida do estado eletrônico fundamental no poço 1, como será discutido a seguir.

#### Regime Jaynes-Cummings

Considerando, como mencionado anteriormente, o estado inicial  $|1, 0\rangle_1 |0, 0\rangle_2 |\uparrow\rangle$  e o Hamiltoniano (4.15) obtemos a evolução

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \mathcal{C}_1(t) |1, 0\rangle_a |0, 0\rangle_b |\uparrow\rangle + \mathcal{C}_2(t) |0, 0\rangle_a |1, 0\rangle_b |\uparrow\rangle \\ &\quad + \mathcal{C}_3(t) |0, 1\rangle_a |0, 0\rangle_b |\downarrow\rangle + \mathcal{C}_4(t) |0, 0\rangle_a |0, 1\rangle_b |\downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (4.17)$$

cujos coeficientes  $\mathcal{C}_j(t)$  satisfazem as equações diferenciais acopladas

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{C}_1(t) = \mathcal{R}^{(1)} \mathcal{C}_2(t) + i\hbar \eta g e^{i\varphi} \mathcal{C}_3(t), \quad (4.18a)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{C}_2(t) = \mathcal{R}^{(1)} \mathcal{C}_1(t), \quad (4.18b)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{C}_3(t) = \mathcal{R}^{(2)} \mathcal{C}_4(t) - i\hbar \eta g e^{-i\varphi} \mathcal{C}_1(t), \quad (4.18c)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{C}_4(t) = \mathcal{R}^{(2)} \mathcal{C}_3(t), \quad (4.18d)$$

com as condições iniciais  $\mathcal{C}_1(0) = 1$ ,  $\mathcal{C}_2(0) = \mathcal{C}_3(0) = \mathcal{C}_4(0) = 0$ . Procederemos agora a uma simplificação adicional no presente esquema. Quanto maior for a razão  $\frac{x_0^2}{\Delta_x} \gg 1$ , que pode ser ajustada pela forma do potencial  $V(x)$ , menor será a razão  $\left| \frac{\mathcal{R}^{(1)}}{\mathcal{R}^{(2)}} \right|$ , o que nos possibilita desprezar o processo de tunelamento do nível fundamental dos potenciais locais (o acoplamento  $\mathcal{R}^{(1)}$ ). Nesse regime, o primeiro termo do Hamiltoniano (4.15) pode ser desprezado e obtemos

os coeficientes (ajustando a fase do laser tal que  $\varphi_L = -\pi/2$ )

$$\mathcal{C}_1(t) = [\cos(\xi wt) + \xi^2 - 1] / \xi^2, \quad (4.19a)$$

$$\mathcal{C}_2(t) = 0, \quad (4.19b)$$

$$\mathcal{C}_3(t) = i \sin(\xi wt) / \xi, \quad (4.19c)$$

$$\mathcal{C}_4(t) = \sqrt{\xi^2 - 1} [\cos(\xi wt) - 1] / \xi^2, \quad (4.19d)$$

onde o parâmetro que modifica a frequência de Rabi efetiva  $w = \eta g$ , é  $\xi = \left\{ 1 + [\mathcal{R}^{(2)} / (\hbar \eta g)]^2 \right\}^{1/2}$ .

A seguir analisaremos o efeito do parâmetro  $\xi$  na evolução temporal da probabilidade de medida fluorescente do estado fundamental eletrônico  $P_{\downarrow}(t) = |\mathcal{C}_3(t)|^2$ , coletada no poço harmônico 1. Evidentemente quando  $\mathcal{R}^{(2)} = 0$ , recuperamos a bem conhecida dinâmica de  $P_{\downarrow}(t)$  para o HJC [16]. Escolhendo  $\mathcal{R}^{(2)} / (\hbar \eta g) = 1$  ( $\xi = \sqrt{2}$ ) e empregando os valores típicos dos experimentos com  $^{40}\text{Ca}^+$  [21, 22],  $\eta \approx 0, 1$ ,  $g \approx 200\text{kHz}$  e  $\nu \approx 2\text{MHz}$ , podemos estimar que  $\mathcal{R}^{(2)} / (\hbar \eta g) \approx 150 \times \mathcal{R}^{(2)} / E_0^{(2)}$  e assim obter  $\mathcal{R}^{(2)} / E_0^{(2)} \approx 7 \times 10^{-3}$ , como requerido para validar a aproximação de que as superposições  $\Phi_{\pm}^{(n)}(x)$  constituem os auto-estados do poço duplo global  $V(x)$ . De fato, lembrando que  $\mathcal{R}^{(2)} / (\hbar \eta g) \approx 3\nu x_0^4 / 16\eta g \Delta_x \exp(-x_0^2 / 2\Delta_x)$ , dos parâmetros anteriores obtemos  $x_0^2 / \Delta_x \approx 17.3$  e  $|\mathcal{R}^{(1)} / \mathcal{R}^{(2)}| \approx 6 \times 10^{-2}$ , valores que estão em acordo com as aproximações realizadas anteriormente. Na Fig. 4.2 mostramos o comportamento da função  $P_{\downarrow}(t)$  para  $\mathcal{R}^{(2)} = 0$  ( $\xi = 1$ , correspondendo a dinâmica do HJC) e  $\mathcal{R}^{(2)} / (\hbar \eta g) = 1$ . Como antecipado pela observação da expressão para  $P_{\downarrow}(t)$ , o aumento da taxa de tunelamento leva a um aumento da frequência efetiva  $\xi w$  da inversão de população e, em contraste, leva a uma diminuição da amplitude de oscilação de  $P_{\downarrow}(t)$ , indicando claramente o processo de tunelamento. De fato, assim que a probabilidade do íon estar no estado excitado de movimento do poço local 1 torna-se não nula, o acoplamento  $\mathcal{R}^{(2)}$  com o poço local 2 emaranha os estados excitados de movimento dos poços locais, impedindo que a probabilidade  $P_{\downarrow}(t)$  (associada com a medida do estado  $|0, 1\rangle_1 |\downarrow\rangle$ ) alcance a unidade. Quando a curva para  $\mathcal{R}^{(2)} / (\hbar \eta g) = 1$  (linha cheia) na Fig. 4.2 alcança o seu máximo ( $wt = n\pi\sqrt{2}/4$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), temos o

estado emaranhado  $\frac{1}{2} |1, 0\rangle_1 |0, 0\rangle_2 |\uparrow\rangle + \left( \frac{i}{\sqrt{2}} |0, 1\rangle_1 |0, 0\rangle_2 - \frac{1}{2} |0, 0\rangle_1 |0, 1\rangle_2 \right) |\downarrow\rangle$ . Portanto, tanto o comportamento da frequência efetiva  $\xi w$  quanto o da amplitude  $1/\xi$  da oscilação de Rabi, podem ser usados para caracterizar o processo de tunelamento.

É interessante observar que a escolha do estado inicial  $|0, 1\rangle_1 |0, 0\rangle_2 |\downarrow\rangle$  (ao invés de  $|1, 0\rangle_1 |0, 0\rangle_2 |\uparrow\rangle$ ) que leva ao emaranhado  $(|1, 0\rangle_1 |0, 0\rangle_2 |\uparrow\rangle + |0, 0\rangle_1 |0, 1\rangle_2 |\downarrow\rangle) / \sqrt{2}$ . Nessa última situação, como esperado para um sistema fechado, podemos restabelecer a unidade para a probabilidade  $P_{\downarrow}(t)$  mesmo considerando somente um pulso laser no poço local 1.



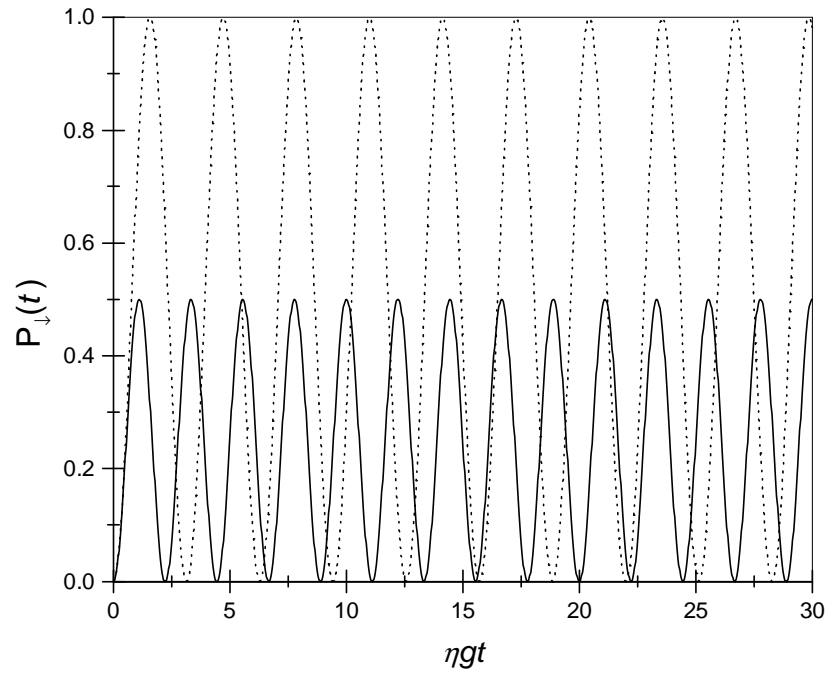


Figura 4.2. Comportamento da função  $P_{\downarrow}(t)$ , no regime Jaynes-Cummings, para os valores  $\mathcal{R}^{(2)}/(\hbar\eta g) = 0$  (linha pontilhada) e 1 (linha cheia).

## Regime carrier

Considerando o Hamiltoniano (4.16) e partindo do estado inicial  $|0, 1\rangle_1 |0, 0\rangle_2 |\uparrow\rangle$ , obtemos a evolução

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \mathcal{C}_1(t) |0, 1\rangle_a |0, 0\rangle_b |\uparrow\rangle + \mathcal{C}_2(t) |0, 0\rangle_a |0, 1\rangle_b |\uparrow\rangle \\ &\quad + \mathcal{C}_3(t) |0, 1\rangle_a |0, 0\rangle_b |\downarrow\rangle + \mathcal{C}_4(t) |0, 0\rangle_a |0, 1\rangle_b |\downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (4.20)$$

cujos coeficientes  $\mathcal{C}_j(t)$  satisfazem as equações diferenciais acopladas

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{C}_1(t) = R^{(2)} \mathcal{C}_2(t) + \hbar g e^{i\varphi} \mathcal{C}_3(t), \quad (4.21a)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{C}_2(t) = R^{(2)} \mathcal{C}_1(t), \quad (4.21b)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{C}_3(t) = (R^{(2)} \mathcal{C}_4(t) + \hbar g e^{-i\varphi} \mathcal{C}_1(t)), \quad (4.21c)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \mathcal{C}_4(t) = R^{(2)} \mathcal{C}_3(t), \quad (4.21d)$$

com as condições iniciais  $\mathcal{C}_1(0) = 1$ ,  $\mathcal{C}_2(0) = \mathcal{C}_3(0) = \mathcal{C}_4(0) = 0$ . Nesse regime obtemos os coeficientes (ajustando a fase do laser  $\varphi_L = 0$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(t) &= \frac{1}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[ \left( \lambda_1^2 - \frac{\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 1}{2} \right) \cos(\lambda_1 g t) \right. \\ &\quad \left. + \left( \lambda_2^2 - \frac{\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 1}{2} \right) \cos(\lambda_2 g t) \right], \end{aligned} \quad (4.22a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(t) &= \frac{i\sqrt{2}}{(\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 1)^{1/2} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left\{ \left( -3 \frac{\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 1}{2} \lambda_1 + 1 + \lambda_1^3 \right) \sin(\lambda_1 g t) \right. \\ &\quad \left. \times + \left( -\frac{\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 1}{2} \lambda_2 + 1 + \lambda_2^3 \right) \sin(\lambda_2 g t) \right\}, \end{aligned} \quad (4.22b)$$

$$\mathcal{C}_3(t) = i \frac{\lambda_1 \sin(\lambda_1 g t) - \lambda_2 \sin(\lambda_2 g t)}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, \quad (4.22c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4(t) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 1}{2}} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)^{-1} \left[ (3\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \cos(\lambda_1 g t) \right. \\ &\quad \left. + (3\lambda_2^2 + \lambda_1^2) \cos(\lambda_2 g t) \right], \end{aligned} \quad (4.22d)$$

onde os parâmetros que modificam a frequência de Rabi  $g$  são

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 4 [\mathcal{R}^{(2)}/(\hbar g)]^2 + (-1)^i 2 \sqrt{1 + 4 [\mathcal{R}^{(2)}/(\hbar g)]^2}}, \quad i = 1, 2.$$

Evidentemente na ausência de tunelamento ( $\mathcal{R}^{(2)} = 0$ ), obtemos a dinâmica usual para o pulso carrier, com  $P_{\downarrow}(t) = |\sin(gt)|^2$ . Na Fig. 4.3 mostramos a evolução de  $P_{\downarrow}(t) = |\mathcal{C}_3(t)|^2$  para  $\mathcal{R}^{(2)} = 0$  e  $\mathcal{R}^{(2)}/(\hbar g) = 1$   $\left(\lambda_i = \left[\left(3 + (-1)^i \sqrt{5}\right)/2\right]^{1/2}\right)$ . Para os valores típicos dados na seção anterior, temos  $\mathcal{R}^{(2)}/E_0^{(2)} \approx 3 \times 10^{-3}$ . De forma similar ao comportamento mostrado na Fig.4.2, observamos na Fig. 4.3 [o que é antecipado pela expressão (4.22c)] que a frequência da inversão de população torna-se maior que a frequência de Rabi  $g$  associada com a dinâmica do pulso carrier livre. Entretanto, diferentemente da situação na Fig. 4.2, a probabilidade  $P_{\downarrow}(t)$  [demonstrando um padrão característico de batimento devido a forma da Eq. (4.22c)] pode ainda atingir a unidade. No regime carrier os estados eletrônicos não se acoplam com os estados de movimento; conseqüentemente os estados eletrônicos excitado e fundamental estão ambos sujeitos ao processo de tunelamento (diferente do caso HJC) resultando no padrão de interferência mostrado na Fig. 2.

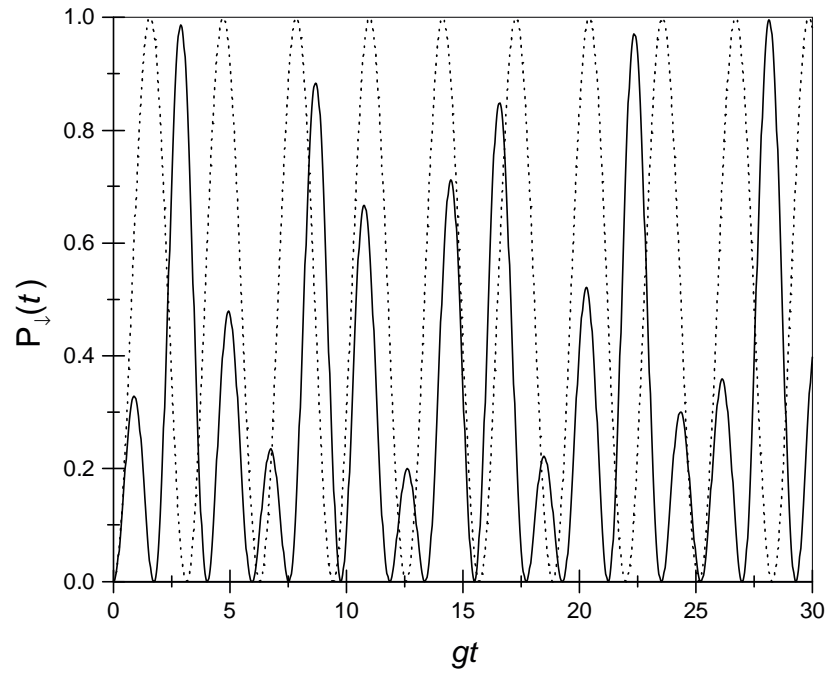


Figura 4.3. Comportamento da função  $P_{\downarrow}(t)$ , no regime carrier, para os valores  $\mathcal{R}^{(2)}/(\hbar g) = 0$  (linha pontilhada) e 1 (linha cheia).

## 4.4 Conclusões

Neste capítulo propusemos um esquema para sondar o processo de tunelamento de um único íon aprisionado em um potencial eletromagnético do tipo poço duplo. A dinâmica do tunelamento é caracterizada pelo comportamento da probabilidade de medida fluorescente do estado eletrônico fundamental em um dos poços locais. A presente proposta pode ser facilmente estendida para a implementação da porta lógica quântica fundamental de 2 *qubits* CNOT (*controlled not*) através da adição de outro feixe laser no potencial harmônico local 2 [23]. Finalmente, mencionamos que, embora o design de uma armadilha do tipo poço duplo possa consistir em um considerável desafio técnico, os princípios fundamentais discutidos aqui podem ser implementados via engenharia de interações de dois modos em armadilhas iônicas [24], através da qual é possível acoplar estados de movimento do íon entre direções ortogonais, de forma a obter uma dinâmica similar à do poço duplo.

# Referências Bibliográficas

[1] C. H. Bennett e S. J. Wiesner, “Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992);

Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres e William K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993);

L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J.M. Raimond e S. Haroche, “Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields”, *Phys. Rev. A* **50**, R895 (1994);

M. H. Y. Moussa, “Teleportation with identity interchange of quantum states”, *Phys. Rev. A* **55**, R3287 (1996);

Lu-Ming Duan, J. I. Cirac, P. Zoller e E. S. Polzik, “Quantum Communication between Atomic Ensembles Using Coherent Light”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5643 (2000).

[2] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat e A. Zeilinger, “Dense Coding in Experimental Quantum Communication”, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4656 (1996);

D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter e A. Zeilinger, “Experimental quantum teleportation”, *Nature* **390**, 575 (1997);

- D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy e S. Popescu, “Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121 (1998);
- S. L. Braunstein e H. J. Kimble, “Teleportation of Continuous Quantum Variables”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998);
- A. Furusawa, J. L. Sorensen, C. A. Fuchs, H. J. Kimble e E. S. Polzik, “Unconditional quantum teleportation”, *Science* **282**, 706 (1998).
- [3] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble e H. Mabuchi, “Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221 (1997);
- T. Pellizzari, “Quantum Networking with Optical Fibres”, *ibid.* **79**, 5242 (1997).
- [4] C. H. Bennett e G. Brassard, “The dawn of a new era for quantum cryptography: the experimental prototype is working!”, *SIGACT News* **20**, 78 (1989);
- A. K. Ekert, “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991);
- Hoi-Kwong Lo e H. F. Chau, “Is Quantum Bit Commitment Really Possible?”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3410 (1997);
- A. Kent, “Unconditionally Secure Bit Commitment”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1447 (1999);
- D. Gottesman, “Theory of quantum secret sharing”, *Phys. Rev. A* **61**, 042311 (2000).
- [5] J. I. Cirac e P. Zoller, “Quantum Computations with Cold Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995);
- C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland, “Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4714 (1995);

- Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi e H. J. Kimble, “Measurement of Conditional Phase Shifts for Quantum Logic”, *ibid.* **75**, 4710 (1995);
- I. L. Chuang, L. M. K. Vandersypen, X. Zhou, D. W. Leung e S. Lloyd, “Experimental realization of a quantum algorithm”, *Nature*, **393**, 143 (1998);
- B. E. Kane, “A silicon-based nuclear spin quantum computer”, *ibid.* **393**, 133 (1998);
- L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood e I. L. Chuang, *ibid.* **414**, 883 (2001)
- [6] P. Shor, “Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer”, *Proc. of 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, p. 124 (IEEE Computer Society, Los Alamos, 1994), resumo estendido. A versão completa deste artigo é encontrada em P. Shor, S. I. A. M. *Journal of Computing*, **26**, 1384 (1997), também disponível *online* em [quant-ph/9508027](http://quant-ph/9508027).
- [7] L. K. Grover, “Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325 (1997);
- L. K. Grover, “Quantum Computers Can Search Arbitrarily Large Databases by a Single Query”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4709 (1997);
- L. K. Grover, “A framework for fast quantum mechanical algorithms”, [quant-ph/9711043](http://quant-ph/9711043).
- [8] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [9] J. S. Bell, “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox”, *Physics (Long Island City, NY)* **1**, 195 (1964);
- J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt, “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories”, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969);



- J. S. Bell, *Phys. World* **3**, 33 (1990).
- [10] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, “Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems”, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981).
- [11] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg e W. Zwerger, “Dynamics of the dissipative two-state system”, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1 (1987).
- [12] G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright e D. F. Walls, “Quantum dynamics of an atomic Bose-Einstein condensate in a double-well potential”, *Phys. Rev. A* **55**, 4318 (1997);  
J. Corney e G. J. Milburn, “Homodyne measurements on a Bose-Einstein condensate”, *ibid.* **58**, 2399 (1998);  
M. J. Steel e M. J. Collett, “Quantum state of two trapped Bose-Einstein condensates with a Josephson coupling”, *Phys. Rev. A* **57**, 2920 (1998);  
J. Ruostekoski e D. F. Walls, “Bose-Einstein condensate in a double-well potential as an open quantum system”, *Phys. Rev. A* **58**, R50 (1998);  
S. Giovanazzi, A. Smerzi e S. Fantoni, “Josephson Effects in Dilute Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4521 (2000);  
L. D. Carr, K. W. Mahmud e W. P. Reinhardt, “Tunable tunneling: An application of stationary states of Bose-Einstein condensates in traps of finite depth”, *Phys. Rev. A* **64**, 033603 (2001).
- [13] D. R. Tilley e J. Tilley, “Superfluidity and Superconductivity”, 3<sup>th</sup> ed. (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1994).
- [14] A. J. Leggett, “Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts”, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 307 (2001);

- Ph. W. Corteille, V. S. Bagnato e V. I. Yukalov, “Bose-Einstein condensation of Trapped Atomic Gases”, *Laser Physics* **11**, 659 (2001).
- [15] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn e W. Ketterle, “Observation of interference between two Bose condensates”, *Science*, **275**, 637 (1997).
- [16] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King e D. M. Meekhof, “Experimental Issues in Coherent Quantum-State Manipulation of Trapped Atomic Ions”, *J. Res. NIST* **103**, 259 (1998), disponível *online* em <http://www.nist.gov/jres>.
- [17] B. E. King, *Quantum State Engineering an Information Processing with Trapped Ions*, PhD Thesis, University of Colorado (1995); disponível *online* em <http://www.bldrdoc.gov/timefreq/ion/index.htm>.
- [18] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 3<sup>a</sup> Ed. (John Wiley & Sons, New York, 1998);  
J-M Lévy-Leblond e F. Balibar, *Quantics: Rudiments of Quantum Mechanics* (North-Holand, Amsterdam, 1990).
- [19] J.D. Walecka e A. L. Fetter, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, ed. B. Baner e Marge Eakens (McGraw-Hill, 1971).
- [20] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (John Wiley & Sons, 1990).
- [21] Ch. Roos, Th. Zeiger, H. Rohde, H. C. Nägerl, J. Eschner, D. Leibfried, F. Schmidt-Kaler, e R. Blatt, “Quantum State Engineering on an Optical Transition and Decoherence in a Paul Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4713 (1999)
- [22] H. C. Nägerl, D. Leibfried, H. Rohde, G. Thalhammer, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler, e R. Blatt, “Laser addressing of individual ions in a linear ion trap”, *Phys. Rev. A* **60**, 145 (1999).

- [23] R. M. Serra, *et al.*, “Quantum computation with ions in a double-well potential”, *em preparação*.
- [24] J. Steinbach, J. Twanley e P. L. Knight, “Engineering two-mode interactions in ion traps”, *Phys. Rev. A* **56**, 4815 (1997);
- H. Zeng, Y. Wang and Y. Segawa, “Nonlinear Raman vibrational excitation of a trapped ion”, *Phys. Rev. A* **59**, 2174 (1999).

## Parte II

# Teletransporte de Estados Emaranhados e Ruídos em Sistemas Ópticos

# Capítulo 5

## Teletransporte de um Estado Emaranhado do Campo Propagante com Alta Fidelidade

### 5.1 Motivação

A propriedade de não-localidade exibida por estados emaranhados, primeiramente apontada por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR), em 1935, como base para um argumento contra o princípio de incerteza [1], foi utilizada desde então nas investigações dos fundamentos da mecânica quântica. O programa inaugurado pela confrontação de EPR com a interpretação padrão de Copenhague da mecânica quântica resultou, através da reinterpretação feita por Bohm [2] do *gedankenexperiment* projetado por EPR, na possibilidade de um teste empírico da não-localidade formulado por Bell [3], em 1964. Temos aproximadamente duas décadas dedicadas à demonstração experimental do fenômeno da não-localidade pela violação das desigualdades de Bell [4]. Apesar da maioria das experiências ter confirmado o caráter não-local da mecânica quântica, *loopholes* experimentais foram apontados, o que tem evitado uma con-

clusão imparcial que, espera-se, seja alcançada em breve [5, 6].

Contudo, na última década, uma variedade de aplicações potenciais da não-localidade moveu definitivamente o enfoque original do fenômeno, puramente teórico, voltado para os fundamentos da mecânica quântica. O fenômeno da não-localidade junto com outros processos quânticos fundamentais indicam a inauguração de uma nova tecnologia para a comunicação [7] e a computação [8] quânticas. Basicamente, essa possibilidade advém da descoberta feita por Shor [9] de que o processamento de informação quântica, envolvendo sistemas de dois-níveis como bits quânticos (*qubits*), fornece um meio para a fatoração de inteiros muito mais eficaz que a computação convencional. Cabe enfatizar a recente realização experimental do algoritmo quântico de Shor através de ressonância magnética nuclear (NMR), informada pelo *Solid State and Photonics Laboratory* da IBM na Califórnia [10]. A informação quântica que é transmitida e processada consiste em estados de superposição arbitrários (*qubits*) em vez de bits clássicos. O fenômeno de interferência característico de superposições quânticas nos permite caminhos de computação paralelos que podem reforçar ou cancelar um ao outro dependendo da fase relativa entre eles [11]. Além de ser indispensável para correlacionar o *qubit* de entrada em uma porta lógica quântica, a existência do emaranhamento e não-localidade em um processador lógico quântico provê uma notável diferença de qualquer operação lógica clássica (convencional).

Introduzido por Bennett *et al.* [12], o teletransporte é um processo no qual um estado de superposição é transferido de um sistema quântico a outro, localizado a uma distância arbitrária do primeiro, através de dois canais clássicos (2 bits clássicos) e um canal não-local. Tal processo fornece um ingrediente crítico para a implementação de um processador lógico quântico [11]. É importante notar que o estado a ser teletransportado é destruído durante a medida de Bell requerida pelo processo; a linearidade da mecânica quântica impede que um estado quântico seja clonado [13] com fidelidade unitária, o que previne a possibilidade do fenômeno da não-localidade ser empregado para a realização de comunicação superluminal.

Desde sua proposição original [12], o processo de teletransporte tem atraído muito inter-

esse e tem sido sugerido um grande número de protocolos para a implantação prática de tal processo nos contextos de eletrodinâmica quântica de cavidades [15], íons aprisionados [16], e campos propagantes [17, 18]. Além da proposta original para o teletransporte de estados de superposição, métodos para o teletransporte de emaranhados [14, 19, 20, 21, 22, 23, 24] e de estados com dimensão  $N(> 2)$  [25], de maior interesse para o processamento de informação quântica, também têm sido investigados. O processo de teletransporte de *qubits* foi demonstrado experimentalmente para estados de polarização de fótons [26, 27, 28] e também estados do tipo “gato de Schrödinger” gerados por conversão paramétrica descendente [29].

No protocolo original de Bennett *et al.* [12], a realização da chamada medida de Bell (ou medida conjunta) desempenha um papel crucial para a realização bem sucedida do teletransporte. Tal medida é realizada na base de Bell que é constituída por quatro estados ortogonais — uma base de dimensão  $2 \otimes 2$  envolvendo a partícula cujo estado é teletransportado e uma das partículas que compõem o canal quântico (ou não-local) [12]. No experimento de Innsbruck [26], projetado para manipular estados de polarização de pulsos de um único fóton, somente um dos quatro estados de Bell é discriminado, o que resulta em uma probabilidade (no caso ideal) de sucesso igual a 25%. Utilizando um emaranhado dos graus de liberdade de polarização e de movimento de um fóton, o experimento de Roma [27] foi capaz de distinguir cada um dos quatro estados de Bell resultando, no caso ideal, em uma probabilidade de 100% de sucesso para o teletransporte. Na realização experimental reportada na Ref. [27], diferentemente do protocolo original em [12], os graus de liberdade de polarização do fóton compõem o canal não-local e um estado emaranhado do vetor  $\vec{k}$  (estado de movimento) foi utilizado para preparar o estado desconhecido a ser teletransportado. Tal estratégia previne dificuldades associadas à existência de dois fótons, tornando a medida de Bell mais fácil. Através da execução da medida de Bell na base de interações não-lineares, o experimento de Baltimore [28] também alcança, em princípio, 100% de sucesso de probabilidade de sucesso para o teletransporte de estados de polarização da luz, além de seguir exatamente o protocolo

de Bennett *et al.* [12]. No experimento do Caltech [29], que demonstra o teletransporte de estados de variáveis contínuas, dois dos quatro estados de Bell são discriminados, alcançando assim uma probabilidade de sucesso de 50% e uma fidelidade determinada experimentalmente de  $0,58 \pm 0.02$ .

Neste capítulo, introduziremos um esquema para o teletransporte de estados emaranhados do campo de radiação propagante com zero e um fóton. O aparato utilizado na presente proposta é baseado em um interferômetro de Mach-Zehnder (MZ) com um elemento sensível à fase, i.e., um meio Kerr, alcançando uma probabilidade de sucesso de 100% no caso ideal. Um esquema para teletransportar emaranhados similares do campo de radiação propagante, empregando somente elementos lineares às custas de 50% de probabilidade de sucesso, foi recentemente sugerido nas Refs. [20, 21]. Nesse sentido, a viabilidade de nossa proposta advém da demonstração recente de propagação ultralenta da luz em meios atômicos frios, o que abre o caminho para a realização de significantes mudanças de fase condicionais entre dois fótons que se propagam nesses meios[30].

O teletransporte e decoerência de emaranhados de estados coerentes do campo de radiação propagante foram investigados na Ref. [22], tendo o teletransporte probabilidade de sucesso igual a 50%. No domínio da EQC, protocolos para o teletransporte de estados emaranhados de dois átomos [14] e emaranhados de estados do campo aprisionado em cavidade com alto fator de qualidade [23], foram propostos. Enfatizamos que o teletransporte experimental de estados emaranhados foi recentemente alcançado [24]. Utilizando-se somente elementos ópticos lineares, o experimento realizado em [24] segue as linhas sugeridas em [20], tendo no caso ideal 50% de probabilidade de sucesso.

O arranjo experimental que propomos para o teletransporte de estados emaranhados consiste basicamente de três estações (ou laboratórios), conforme esquematizado na Fig. 5.1(a), empregando divisores de feixe simétricos 50/50, meios Kerr e fotodetectores. Além do emaranhado a ser teletransportado, que nós vamos assumir já preparado e injetado nos canais 1 e 2



$(|\Omega\rangle_{12})$ , o canal quântico é preparado pelo aparato descrito na Fig. 5.1(b). Esta é a *estação do canal quântico* que consiste em um divisor de feixe ( $BS_1$ ), um interferômetro de MZ composto por um par de divisores de feixes ( $BS_2, BS_3$ ), e um meio Kerr ( $KM_1$ ). Esse último elemento é utilizado para emaranhar os modos de saída 4 e 5 dos divisores de feixes  $BS_1$  e  $BS_2$ , respectivamente, sendo esse um ingrediente crucial para geração do canal não-local (um emaranhado dos modos 3,4,5 e 6) requerido pelo presente protocolo. Exceto pelos detectores, a *estação de Alice*, mostrada na Fig. 5.1(c), consiste dos mesmos ingredientes usados para gerar o canal não-local. Um interferômetro de MZ ( $BS_4, BS_5$ ) é disposto de forma a receber os modos 3 e 4 do canal quântico, que é acoplado ao emaranhado a ser teletransportado através do meio Kerr ( $KM_2$ ). Finalmente, o  $BS_6$  é empregado para preparar o emaranhado conjunto (envolvendo o canal não-local e o estado a ser teletransportado) para a realização da medida do tipo Bell pelos fotodetectores  $D_i$  ( $i = 1,2,3,4$ ). Na *estação de Bob*, ilustrada na Fig. 5.1(d), outro interferômetro de MZ ( $BS_7, BS_8$ ) e três placas de fase (*phase plates*) são dispostas de forma a realizar todas as rotações necessárias para converter o estado teletransportado em uma réplica do estado original, alcançando 100% de probabilidade de sucesso no caso ideal.

Cabe ressaltar que a fidelidade do esquema proposto para o teletransporte de um estado emaranhado é estimada levando em conta o ruído introduzido pela dissipação em todos os elementos ópticos utilizados. Apresentaremos, na seção 5.3, um tratamento fenomenológico que permite estimar os erros introduzidos pela foto-absorção no meio Kerr; esse tratamento é realizado através de uma analogia com o tratamento de absorções em divisores de feixes feito na Ref. [31]. A eficiência dos fotodetectores também foi incluída usando as relações previamente estabelecidas em [18]. Utilizaremos uma estratégia para a realização da medida de Bell que permite sondar a absorção de fótons nos elementos ópticos presentes nos canais de 1 a 4. Tal estratégia, combinada com as usualmente pequenas constantes de dissipação que caracterizam os divisores de feixe e meios Kerr, resulta em um processo de teletransporte com alta fidelidade.

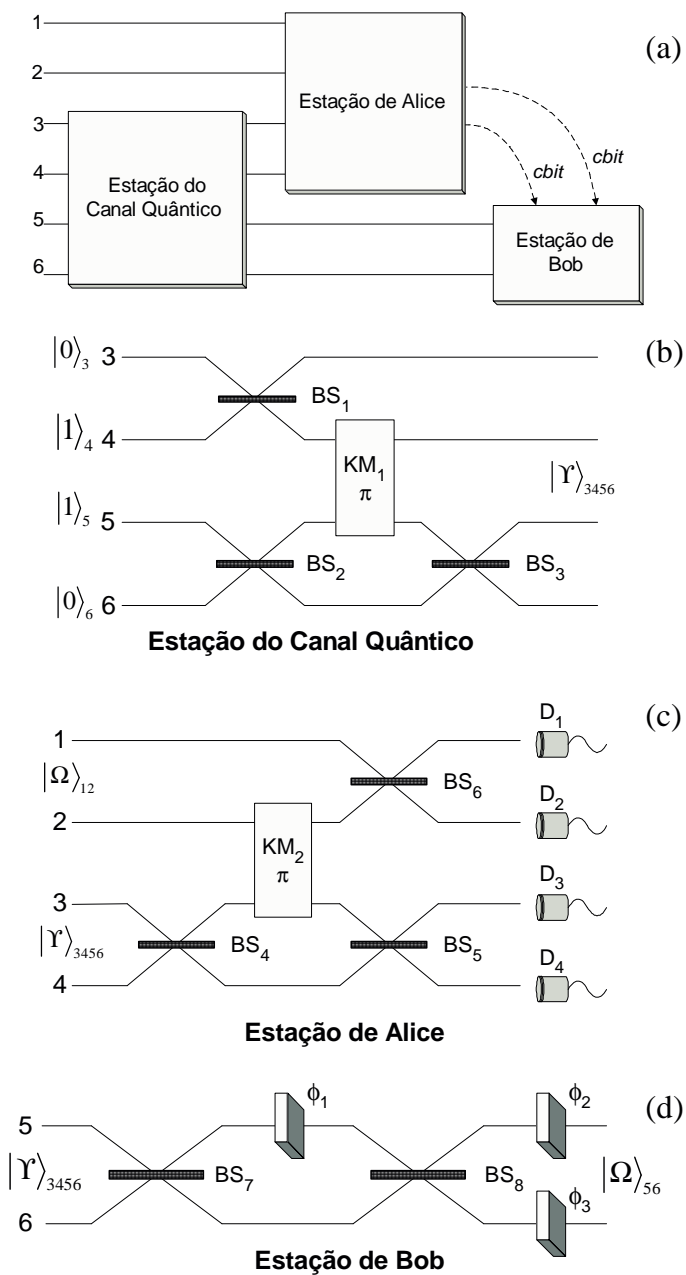


Figura 5.1 (a) Esboço do arranjo experimental para o teletransporte quântico de emaranhados de zero e um fóton do campo propagante. (b) Estação usada para gerar o canal quântico. (c) Estação de Alice. (d) Estação de Bob.

## 5.2 Teletransporte de um estado emaranhado - caso ideal

Primeiramente introduziremos a situação onde os erros são desconsiderados, descrevendo sucintamente as operações físicas nos elementos ópticos. As relações gerais entre os operadores de *input* e *output*  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ , derivadas do operador de evolução unitária  $\hat{U}_{BS} = \exp \left[ i\theta \left( \hat{\alpha}_{in}^\dagger \hat{\beta}_{in} + \hat{\beta}_{in}^\dagger \hat{\alpha}_{in} \right) \right]$ , que descreve a ação de um divisor de feixes simétrico e ideal, são escritas como

$$\hat{\alpha}_{out} = t\hat{\alpha}_{in} + r\hat{\beta}_{in}, \quad (5.1a)$$

$$\hat{\beta}_{out} = t\hat{\beta}_{in} + r\hat{\alpha}_{in}, \quad (5.1b)$$

onde  $t = \cos(\theta)$  e  $r = i \sin(\theta)$  são os coeficientes de transmissão e reflexão do divisor de feixes, que satisfazem  $|t|^2 + |r|^2 = 1$ . Uma formulação mais detalhada da ação dos elementos ópticos pode ser encontrada nas Refs. [32, 33, 34]. Para um divisor de feixes simétrico 50/50 temos  $\theta = \pi/4$  e  $t = |r| = 1/\sqrt{2}$ . Esses coeficientes ( $t$  e  $r$ ), e portanto os operadores ( $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ ), dependem da frequência dos campos incidentes. Neste trabalho serão assumidas fontes monocromáticas de fótons.

O acoplamento entre os operadores de *input* e *output*  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ , representando os campos que cruzam um meio Kerr, segue do operador de evolução unitária  $\hat{U}_{Kerr} = \exp \left( -i\chi\tau \hat{\alpha}_{in}^\dagger \hat{\alpha}_{in} \hat{\beta}_{in}^\dagger \hat{\beta}_{in} \right)$ , e é dado por

$$\hat{\alpha}_{out} = \exp \left( i\chi\tau \hat{\beta}_{in}^\dagger \hat{\beta}_{in} \right) \hat{\alpha}_{in}, \quad (5.2a)$$

$$\hat{\beta}_{out} = \exp \left( i\chi\tau \hat{\alpha}_{in}^\dagger \hat{\alpha}_{in} \right) \hat{\beta}_{in}, \quad (5.2b)$$

A fase condicional  $\phi = \chi\tau$  depende da suscetibilidade não-linear  $\chi$  para o efeito Kerr óptico [35] e do tempo de interação dos campos com o meio Kerr.

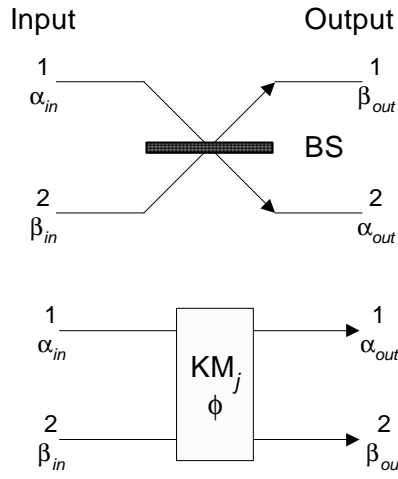


Figura 5.2. Representação dos modos de input e output dos elementos ópticos.

O emaranhado a ser teletransportado pode ser facilmente preparado através de um único fóton incidente em um  $BS$  com coeficientes arbitrários e desconhecidos de transmissão e reflexão  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ , que satisfazem  $|\mathcal{C}_1|^2 + |\mathcal{C}_2|^2 = 1$ . Tal estado, injetado nos modos 1 e 2, pode ser escrito como

$$|\Omega\rangle_{12} = \mathcal{C}_1 |0\rangle_1 |1\rangle_2 + \mathcal{C}_2 |1\rangle_1 |0\rangle_2. \quad (5.3)$$

Simultaneamente à preparação do estado a ser teletransportado, o canal quântico é preparado através de campos de um único fóton  $|1\rangle_4$  e  $|1\rangle_5$  incidentes nos divisores de feixes  $BS_1$  e  $BS_2$ , respectivamente. É fácil verificar das Eqs. (5.1a, 5.1b) e (5.2a, 5.2b) que o estado emaranhado resultante nos modos de saída da *estação do canal quântico*, Fig. 5.1(b), é escrito, a menos de um irrelevante fator de fase global, como

$$|\Upsilon\rangle_{3456} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_3 |0\rangle_4 |0\rangle_5 |1\rangle_6 + |0\rangle_3 |1\rangle_4 |1\rangle_5 |0\rangle_6), \quad (5.4)$$

onde o parâmetro de interação no meio Kerr é ajustado de forma que  $\chi\tau = \pi$  [30]. Devemos ressaltar aqui, que o meio Kerr é indispensável para a preparação dos canais correlacionados

segundo a Eq. (5.4) de forma determinística. O produto do emaranhado a ser teletransportado e do canal quântico,  $|\Omega\rangle_{12} \otimes |\Upsilon\rangle_{3456}$ , pode ser expresso da seguinte forma

$$\begin{aligned}
|\Xi\rangle_{123456} &= \frac{1}{2} \{ |\Psi^+\rangle_{1234} (\mathcal{C}_1 |0\rangle_5 |1\rangle_6 + \mathcal{C}_2 |1\rangle_5 |0\rangle_6) \\
&\quad + |\Psi^-\rangle_{1234} (\mathcal{C}_1 |0\rangle_5 |1\rangle_6 - \mathcal{C}_2 |1\rangle_5 |0\rangle_6) \\
&\quad + |\Phi^+\rangle_{1234} (\mathcal{C}_2 |0\rangle_5 |1\rangle_6 + \mathcal{C}_1 |1\rangle_5 |0\rangle_6) \\
&\quad - |\Phi^-\rangle_{1234} (\mathcal{C}_2 |0\rangle_5 |1\rangle_6 - \mathcal{C}_1 |1\rangle_5 |0\rangle_6) \}. \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Introduzimos aqui um conjunto completo de auto-estados de 4 partículas dos operadores de Bell  $\hat{\mathcal{O}}_k = |\Theta_k^\pm\rangle_{1234} \langle \Theta_k^\pm|$  ( $\sum_k \hat{\mathcal{O}}_k = 1$ ), definido por

$$|\Theta_k^\pm\rangle_{1234} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\text{bin}(k)\rangle_{1234} \pm |\text{bin}(15-k)\rangle_{1234}), \quad k = 0, 1, \dots, 15, \tag{5.6}$$

onde  $\text{bin}(k)$  refere-se à representação de 4 bits para o inteiro  $k$ . Para o presente protocolo estaremos interessados em quatro estados da base de Bell completa  $|\Theta_k^\pm\rangle_{1234}$ , aqueles empregados na expressão (5.5)

$$|\Psi^\pm\rangle_{1234} \equiv |\Theta_6^\pm\rangle_{1234} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 |1\rangle_4), \tag{5.7a}$$

$$|\Phi^\pm\rangle_{1234} \equiv |\Theta_5^\pm\rangle_{1234} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3 |1\rangle_4 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4). \tag{5.7b}$$

Portanto, medidas nos campos de saída 1,2,3, e 4, sobre os igualmente prováveis estados de Bell (5.7a, 5.7b), projetam a saída dos modos 5 e 6 nos estados emaranhados descritos na Eq. (5.5). Essa medida conjunta pode ser executada pelo analisador de estados de Bell incluso na *estação da Alice*. Nessa estação, segue das Eqs. (5.1a), (5.1b), (5.2a), (5.2b), (5.7a) e (5.7b), que uma medida via detectores  $D_i$  ( $i = 1,2,3,4$ ), do estado de saída  $|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4$ , requer que o estado de entrada seja  $|\Psi^+\rangle_{1234}$  e projeta os modos 5 e 6 que entram na *estação do Bob* exatamente no estado emaranhado original que foi injetado nos modos 1 e 2. Após o conhecimento do resultado dessa medida, comunicada por *Alice* via canal clássico ilustrado na Fig. 5.1(a), *Bob* não precisará fazer nada para produzir uma replica perfeita do estado

$|\Omega\rangle_{12}$ . Por outro lado, a medida conjunta do estado de Bell  $|\Psi^-\rangle_{1234}$  é conseguida através da medida do estado de saída  $|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3|0\rangle_4$  na *estação de Alice*, deixando os modos de entrada na *estação de Bob* no estado emaranhado  $\mathcal{C}_1|0\rangle_5|1\rangle_6 - \mathcal{C}_2|1\rangle_5|0\rangle_6$ . Nesse caso, uma transformação unitária é realizada através da aplicação do operador  $\hat{\sigma}_z$ , que se refere à matriz de Pauli na base  $\{|0,1\rangle_{5,6}, |1,0\rangle_{5,6}\}$ .

Com respeito às medidas do tipo Bell restantes, o resultado  $|\Phi^+\rangle_{1234}$  ( $|\Phi^-\rangle_{1234}$ ) é alcançado através da medida do estado de saída  $|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|1\rangle_4$  ( $|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3|1\rangle_4$ ) na *estação de Alice*, deixando os modos de entrada da *estação do Bob* no estado emaranhado  $\mathcal{C}_2|0\rangle_5|1\rangle_6 + \mathcal{C}_1|1\rangle_5|0\rangle_6$  ( $\mathcal{C}_2|0\rangle_5|1\rangle_6 - \mathcal{C}_1|1\rangle_5|0\rangle_6$ ). Aqui a operação unitária requerida corresponde à aplicação da matriz de Pauli  $\hat{\sigma}_x$  ( $\hat{\sigma}_y$ ) na base  $\{|0,1\rangle_{5,6}, |1,0\rangle_{5,6}\}$ . As operações unitárias  $\hat{\sigma}_k$  ( $k = z, x, y$ ) na base  $\{|0,1\rangle_{5,6}, |1,0\rangle_{5,6}\}$ , podem ser implementadas na *estação de Bob*, conforme esquema na Fig. 5.1(d), via escolhas apropriadas dos deslocamentos de fase  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  introduzidos pelas placas de fase. Os resultados da fotodetecção na *estação de Alice* associados com os quatro estados de Bell nas Eqs. (5.7a, 5.7b) são sumarizados na Tab. 5.1, junto com os valores dos deslocamentos de fase requeridos para realizar as rotações  $\hat{\sigma}_k$  ( $k = z, x, y$ ) na *estação de Bob*. Como na preparação do canal não local, o parâmetro de interação no meio Kerr da *estação de Alice*, foi ajustado de forma que  $\chi\tau = \pi$  [30].

Nesta seção mostramos que o esquema proposto para o teletransporte de um estado emaranhado permite-nos alcançar 100% de probabilidade de sucesso, onde dentre os dezesseis estados que compõem a Base de Bell descrita na Eq. (5.6), somente os quatro estados de Bell introduzidos nas Eqs. (5.7a, 5.7b) ocorrem com igual probabilidade de 25%.

Tabela 5.1. Nessa tabela resumamos os estados de Bell, na primeira coluna, medidos através das quatro possíveis fotodetecções dispostas na segunda coluna. As rotações de  $180^\circ$  em torno dos eixos  $z$ ,  $x$ , e  $y$ , requeridas para converter o estado emaranhado resultante nos modos 5 e 6 em uma réplica do estado original  $|\Omega\rangle_{12}$ , são dadas na terceira coluna. As matrizes de Pauli  $\hat{\sigma}_k$  ( $k = z, x, y$ ) são expressas na base  $\{|0, 1\rangle_{5,6}, |1, 0\rangle_{5,6}\}$ . Finalmente na quarta coluna mostramos os deslocamentos de fase  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ , e  $\phi_3$  introduzidos pelas placas de fase na *estação de Bob* para executar as rotações requeridas.

Estado de Bell	Fotodetecção	Rotações	Deslocamentos de Fase
$ \Psi^+\rangle_{1234}$	$ 0\rangle_1  1\rangle_2  1\rangle_3  0\rangle_4$	$\mathbf{1}$	—
$ \Psi^-\rangle_{1234}$	$ 1\rangle_1  0\rangle_2  1\rangle_3  0\rangle_4$	$\hat{\sigma}_z$	$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \pi$
$ \Phi^+\rangle_{1234}$	$ 1\rangle_1  0\rangle_2  0\rangle_3  1\rangle_4$	$\hat{\sigma}_x$	$\phi_1 = 0, \phi_2 = \phi_3 = 3\pi/2$
$ \Phi^-\rangle_{1234}$	$ 0\rangle_1  1\rangle_2  0\rangle_3  1\rangle_4$	$\hat{\sigma}_y$	$\phi_1 = \phi_3 = 0, \phi_2 = \pi$

## 5.3 Erros (dissipação) nos elementos ópticos

### 5.3.1 Absorção nos divisores de feixe

Quando os erros devidos à foto-absorção nos divisores de feixes são levados em conta, as relações entre os operadores de *input* e *output*  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ , descritas nas Eqs. (5.1a, 5.1b) são generalizadas para [31]

$$\hat{\alpha}_{out} = T\hat{\alpha}_{in} + R\hat{\beta}_{in} + \hat{\mathcal{L}}_\alpha, \quad (5.8a)$$

$$\hat{\beta}_{out} = T\hat{\beta}_{in} + R\hat{\alpha}_{in} + \hat{\mathcal{L}}_\beta, \quad (5.8b)$$

de forma a considerar os operadores de ruído de Langevin  $\hat{\mathcal{L}}$ , associados com a absorção de um fóton nos divisores de feixe. Os coeficientes de transmissão e reflexão para um *BS* com absorção generalizam aqueles introduzidos nas Eqs. (5.1a) e (5.1b): aqui  $T = \sqrt{\kappa t}$ ,  $R = \sqrt{\kappa r}$ ,

de tal forma que  $|T|^2 + |R|^2 = \kappa$ , sendo  $\kappa$  uma constante que indica a probabilidade de não absorção de fótons, uma espécie de fator de qualidade para divisores de feixe. Vamos requerer que os campos de entrada e as fontes de ruído sejam independentes, de forma que os operadores de *input* devem comutar com os operadores de Langevin

$$\left[\hat{\alpha}_{in}, \hat{\mathcal{L}}_\alpha\right] = \left[\hat{\alpha}_{in}, \hat{\mathcal{L}}_\beta\right] = \left[\hat{\alpha}_{in}, \hat{\mathcal{L}}_\alpha^\dagger\right] = \left[\hat{\alpha}_{in}, \hat{\mathcal{L}}_\beta^\dagger\right] = 0, \quad (5.9)$$

com relações similares para os operadores do modo  $\beta$ . A imposição das relações de comutação bosônicas usuais sobre os operadores dos modos de saída (*output*) leva às seguintes relações para os operadores de Langevin

$$\left[\hat{\mathcal{L}}_\alpha, \hat{\mathcal{L}}_\alpha^\dagger\right] = \left[\hat{\mathcal{L}}_\beta, \hat{\mathcal{L}}_\beta^\dagger\right] = \Gamma, \quad (5.10a)$$

$$\left[\hat{\mathcal{L}}_\alpha, \hat{\mathcal{L}}_\beta^\dagger\right] = \left[\hat{\mathcal{L}}_\beta, \hat{\mathcal{L}}_\alpha^\dagger\right] = -\Delta, \quad (5.10b)$$

onde  $\Gamma = 1 - \kappa$  é a constante de amortecimento e  $\Delta = TR^* + RT^* = 0$ . Notamos que  $\Delta$  poderá assumir valores diferentes de zero somente para *BS* assimétricos. Para frequências ópticas, o estado do meio ambiente pode ser aproximado pelo estado de vácuo, até mesmo à temperatura ambiente, de forma que

$$\hat{\mathcal{L}}_\alpha |0\rangle = \hat{\mathcal{L}}_\beta |0\rangle = \hat{\alpha}_{in} |0\rangle = \hat{\beta}_{in} |0\rangle = 0, \quad (5.11)$$

e, das relações de *input-output* (5.8a e 5.8b), também segue que

$$\hat{\alpha}_{out} |0\rangle = \hat{\beta}_{out} |0\rangle = 0. \quad (5.12)$$

Nas relações acima,  $|0\rangle$  representa o estado de vácuo para os modos  $\alpha$ ,  $\beta$  e seus respectivos meio ambientes. Finalmente, as médias quânticas dos operadores de Langevin são nulas,

$$\langle \hat{\mathcal{L}}_\alpha \rangle = \langle \hat{\mathcal{L}}_\beta \rangle = \langle \hat{\mathcal{L}}_\alpha^\dagger \rangle = \langle \hat{\mathcal{L}}_\beta^\dagger \rangle = 0, \quad (5.13)$$

e os valores esperados no estado fundamental para os produtos de pares de operadores de ruído



são

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}_\alpha \widehat{\mathcal{L}}_\alpha^\dagger \rangle = \langle \widehat{\mathcal{L}}_\beta \widehat{\mathcal{L}}_\beta^\dagger \rangle = \Gamma, \quad (5.14a)$$

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}_\alpha \widehat{\mathcal{L}}_\beta^\dagger \rangle = \langle \widehat{\mathcal{L}}_\beta \widehat{\mathcal{L}}_\alpha^\dagger \rangle = 0. \quad (5.14b)$$

Logo, é fácil mostrar que, de forma semelhante às relações (5.8a) e (5.8b), as transformações relacionando os operadores de *output* aos de *input*, preservando as propriedades mencionadas acima para os operadores de Langevin, são

$$\widehat{\alpha}_{in} = T^* \widehat{\alpha}_{out} + R^* \widehat{\beta}_{out} + \widehat{\mathcal{L}}_\alpha, \quad (5.15a)$$

$$\widehat{\beta}_{in} = T^* \widehat{\beta}_{out} + R^* \widehat{\alpha}_{out} + \widehat{\mathcal{L}}_\beta, \quad (5.15b)$$

onde as relações de comutação bosônicas são satisfeitas pelos operadores dos modos de entrada ( $\widehat{\alpha}_{in}$  e  $\widehat{\beta}_{in}$ ). Das Eqs. (5.15a) e (5.15b), o estado de saída que surge da injeção de um fóton no modo  $\alpha$  do divisor de feixe com absorção é dado por

$$|1, 0\rangle_{\alpha\beta}^{in} = \widehat{\alpha}_{in}^\dagger |0, 0\rangle_{\alpha\beta}^{in} = \left[ T |1, 0\rangle_{\alpha\beta}^{out} + R |0, 1\rangle_{\alpha\beta}^{out} + \widehat{\mathcal{L}}_\alpha^\dagger |0, 0\rangle_{\alpha\beta}^{out} \right] |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{E}}, \quad (5.16)$$

onde  $|\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{E}} = \prod_k |0\rangle_k = |\{0_k\}\rangle$  representa o estado do meio ambiente, composto de um grande número de estados de vácuo  $|0\rangle_k$ .

### 5.3.2 Absorção nos meios Kerr

Para lidar com a foto-absorção em um meio Kerr introduziremos também um tratamento fenomenológico via operadores de Langevin. De forma similar ao procedimento adotado anteriormente, para introduzir foto-absorção em um *BS*, as relações entre os operadores de *input* e *output*  $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ , descritas em um meio Kerr ideal pelas Eqs. (5.2a) e (5.2b), são generalizadas em um meio Kerr dissipativo para

$$\widehat{\alpha}_{out} = \sqrt{\eta} \exp\left(i\chi\tau \widehat{\beta}_{in}^\dagger \widehat{\beta}_{in}\right) \widehat{\alpha}_{in} + \widehat{\mathcal{L}}_\alpha, \quad (5.17a)$$

$$\widehat{\beta}_{out} = \sqrt{\eta} \exp\left(i\chi\tau \widehat{\alpha}_{in}^\dagger \widehat{\alpha}_{in}\right) \widehat{\beta}_{in} + \widehat{\mathcal{L}}_\beta, \quad (5.17b)$$

onde  $\Lambda = 1 - \eta$  é a probabilidade de foto-absorção, a constante de amortecimento para o meio Kerr. Usamos caracteres diferentes para os operadores de Langevin, para diferenciar o elemento óptico particular responsável pela foto-absorção.

As regras algébricas satisfeitas pelos operadores de *input* e *output*  $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$  e os operadores de Langevin são similares àquelas para os *BS*. Assumindo a comutação entre os operadores de Langevin com os operadores de *input*  $\widehat{\alpha}_{in}, \widehat{\beta}_{in}$ , e impondo relações de comutação bosônicas sobre os operadores de *output*  $\widehat{\alpha}_{out}, \widehat{\beta}_{out}$ , segue que

$$\left[ \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha}, \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha}^{\dagger} \right] = \left[ \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta}, \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta}^{\dagger} \right] = \Lambda, \quad (5.18a)$$

$$\left[ \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha}, \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta}^{\dagger} \right] = \left[ \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta}, \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha}^{\dagger} \right] = 0. \quad (5.18b)$$

Aproximando o estado do meio ambiente pelo estado de vácuo, obtemos relações análogas àquelas das Eqs. (5.11)-(5.13) para os operadores do meio Kerr. O valor esperado no estado fundamental para o produto de pares de operadores de ruído é, portanto,

$$\left\langle \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha} \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha}^{\dagger} \right\rangle = \left\langle \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta} \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta}^{\dagger} \right\rangle = \Lambda, \quad (5.19a)$$

$$\left\langle \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha} \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta}^{\dagger} \right\rangle = \left\langle \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta} \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha}^{\dagger} \right\rangle = 0. \quad (5.19b)$$

As transformações relacionando os operadores de *output* aos de *input*, preservando as propriedades mencionadas acima, são

$$\widehat{\alpha}_{in} = \sqrt{\eta} \exp\left(-i\chi\tau \widehat{\beta}_{out}^{\dagger} \widehat{\beta}_{out}\right) \widehat{\alpha}_{out} + \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha}, \quad (5.20a)$$

$$\widehat{\beta}_{in} = \sqrt{\eta} \exp\left(-i\chi\tau \widehat{\alpha}_{out}^{\dagger} \widehat{\alpha}_{out}\right) \widehat{\beta}_{out} + \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta}. \quad (5.20b)$$

Quando computamos o estado de saída gerado a partir da injeção de um par de fótons nos modos  $\alpha$  e  $\beta$  de um meio Kerr, obtemos das Eqs. (5.20a) e (5.20b):

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle_{\alpha\beta}^{in} &= \widehat{\alpha}_{in}^{\dagger} \widehat{\beta}_{in}^{\dagger} |0, 0\rangle_{\alpha\beta}^{in} = \left[ \eta e^{-i\chi\tau} |1, 1\rangle_{\alpha\beta}^{out} + \sqrt{\eta} |0, 1\rangle_{\alpha\beta}^{out} \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha}^{\dagger} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\eta} |1, 0\rangle_{\alpha\beta}^{out} \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta}^{\dagger} + |0, 0\rangle_{\alpha\beta}^{out} \widehat{\mathfrak{L}}_{\alpha}^{\dagger} \widehat{\mathfrak{L}}_{\beta}^{\dagger} \right] |0\rangle_{\mathbf{E}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde  $|0\rangle_{\mathbf{E}}$  denota o estado inicial do meio ambiente. Nesta equação, note que quando consideramos o caso ideal,  $\eta = 1$ , obtemos corretamente  $|1, 1\rangle_{\alpha\beta}^{in} = e^{-i\chi\tau} |1, 1\rangle_{\alpha\beta}^{out}$ . Em um meio Kerr dissipativo encontramos valores esperados para os estados  $|0, 1\rangle_{\alpha\beta}^{out}$  e  $|1, 0\rangle_{\alpha\beta}^{out}$  dados por  $\eta(1 - \eta)$ , enquanto que a probabilidade de absorção de ambos os fótons é dada por  $(1 - \eta)^2$ . Ressaltamos que um tratamento detalhado da dissipação em um meio Kerr deve considerar os intervalos de tempo, entre zero e  $\tau$  (o tempo de interação dos fótons em um meio Kerr ideal), para a absorção de fótons nos modos  $\alpha$  e  $\beta$ . Como consequência, fatores de fase adicionais devem aparecer na Eq. (5.21). Entretanto, o tratamento acima é suficiente para fornecer uma boa estimativa da fidelidade para o processo de teletransporte proposto.

### 5.3.3 Eficiência dos detectores

Introduzindo operadores de output para considerar a detecção do campo de input  $\alpha$  que chega aos detectores, temos

$$\hat{\alpha}_{out} = \sqrt{\varepsilon}\hat{\alpha}_{in} + \hat{\mathbf{L}}_{\alpha}, \quad (5.22)$$

onde  $\varepsilon$  representa a eficiência dos detectores. Obviamente, diferente do caso dos divisores de feixe e meios Kerr, o detector não acopla diferentes modos. Os operadores de Langevin  $\hat{\mathbf{L}}_{\alpha}$  satisfazem as propriedades introduzidas acima, obedecendo as relações de comutação

$$[\hat{\mathbf{L}}_{\alpha}, \hat{\mathbf{L}}_{\alpha}^{\dagger}] = 1 - \varepsilon, \quad (5.23a)$$

$$[\hat{\mathbf{L}}_{\alpha}, \hat{\mathbf{L}}_{\beta}^{\dagger}] = 0, \quad (5.23b)$$

e os valores esperados no estado fundamental do produto de pares de operadores são

$$\langle \hat{\mathbf{L}}_{\alpha} \hat{\mathbf{L}}_{\alpha}^{\dagger} \rangle = 1 - \varepsilon, \quad (5.24a)$$

$$\langle \hat{\mathbf{L}}_{\alpha} \hat{\mathbf{L}}_{\beta}^{\dagger} \rangle = 0. \quad (5.24b)$$

### 5.3.4 Dissipação nas placas de fase (*phase plates*)

A fotoabsorção nas placas de fase é modelada em analogia com o tratamento dado à eficiência dos fotodetectores. Introduzindo um operador de *output* para o modo  $\alpha$  da placa de fase com constante de dissipação  $1 - \varkappa$ , segue que

$$\hat{\alpha}_{out} = \sqrt{\varkappa}\hat{\alpha}_{in} + \hat{\mathbf{L}}_{\alpha}, \quad (5.25)$$

com o operador de Langevin  $\hat{\mathbf{L}}_{\alpha}$  obedecendo relações similares àsquelas das Eqs. (5.23a, 5.23b) e (5.24a, 5.24b).

### 5.3.5 Relação geral para erros devido aos divisores de feixes e fotodetectores

Por questão de generalidade, introduziremos a seguir relações que contemplam ambas as fontes de erros: fotoabsorção nos *BS* [Eqs. (5.8a) e (5.8b)] e eficiência dos detectores [Eq. (5.22)]. Podemos provar nessa formulação que os operadores de *output*  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ , que descrevem os campos de saída dos divisores de feixe  $BS_5$  e  $BS_6$  que chegam aos detectores, são dados por [18]

$$\hat{\alpha}_{out} = \mathbf{T}\hat{\alpha}_{in} + \mathbf{R}\hat{\beta}_{in} + \hat{\mathbf{L}}_{\alpha}, \quad (5.26a)$$

$$\hat{\beta}_{out} = \mathbf{T}\hat{\beta}_{in} + \mathbf{R}\hat{\alpha}_{in} + \hat{\mathbf{L}}_{\beta}, \quad (5.26b)$$

onde  $\mathbf{T} = \sqrt{\varepsilon}T = \sqrt{\varepsilon\kappa t}$ ,  $\mathbf{R} = \sqrt{\varepsilon}R = \sqrt{\varepsilon\kappa r}$ , e  $\hat{\mathbf{L}}_{\alpha} = \hat{\mathcal{L}}_{\alpha} + \hat{\mathfrak{L}}_{\alpha}$ . De fato, combinando as propriedades mencionadas anteriormente para os operadores nas relações (5.26a) e (5.26b), obtemos

$$\left[ \hat{\mathbf{L}}_{\alpha}, \hat{\mathbf{L}}_{\alpha}^{\dagger} \right] = \left[ \hat{\mathbf{L}}_{\beta}, \hat{\mathbf{L}}_{\beta}^{\dagger} \right] = \varepsilon\Gamma + (1 - \varepsilon), \quad (5.27a)$$

$$\left[ \hat{\mathbf{L}}_{\alpha}, \hat{\mathbf{L}}_{\beta}^{\dagger} \right] = \left[ \hat{\mathbf{L}}_{\beta}, \hat{\mathbf{L}}_{\alpha}^{\dagger} \right] = 0. \quad (5.27b)$$

Quando substituimos  $\eta = 1$  em (5.27a) e (5.27b), recuperamos as relações (5.10a) e (5.10b), enquanto que, para  $\Gamma = 0$ , recuperamos as relações (5.23a) e (5.23b), respectivamente.

## 5.4 Teletransporte de um estado emaranhado: efeitos do ruído

No cálculo da fidelidade do processo de teletransporte, assumiremos que o estado a ser teletransportado,  $|\Omega\rangle_{12}$ , é preparado idealmente com fidelidade igual à unidade. Entretanto, pela consideração das constantes de dissipação nos três divisores de feixes e no meio Kerr envolvidos na preparação do canal quântico, como descrito na Fig. 5.1(b), obtemos o emaranhado não ideal:

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Upsilon}\rangle_{3456} &= \left\{ \xi^{3/2} [(1 - \eta^{1/2}) |1\rangle_3 |0\rangle_4 + i\eta^{1/2} (1 + \eta^{1/2}) |0\rangle_3 |1\rangle_4] |1\rangle_5 |0\rangle_6 \right. \\
&\quad + \xi^{3/2} [i(1 + \eta^{1/2}) |1\rangle_3 |0\rangle_4 - \eta^{1/2} (1 - \eta^{1/2}) |0\rangle_3 |1\rangle_4] |0\rangle_5 |1\rangle_6 \\
&\quad + \xi^{1/2} \left[ \left( \widehat{\mathcal{L}}_5^{(2)\dagger} + i\xi^{1/2}\eta^{1/2}\widehat{\mathcal{L}}_5^{(3)\dagger} + i\xi^{1/2}\widehat{\mathfrak{L}}_5^\dagger + \xi^{1/2}\widehat{\mathcal{L}}_6^{(3)\dagger} \right) |1\rangle_3 |0\rangle_4 \right. \\
&\quad \left. + i\eta^{1/2} \left( \widehat{\mathcal{L}}_5^{(2)\dagger} - i\xi^{1/2}\eta^{1/2}\widehat{\mathcal{L}}_5^{(3)\dagger} + i\xi^{1/2}\widehat{\mathfrak{L}}_5^\dagger + \xi^{1/2}\widehat{\mathcal{L}}_6^{(3)\dagger} \right) |0\rangle_3 |1\rangle_4 \right] |0\rangle_5 |0\rangle_6 \\
&\quad \left. + |\vartheta\rangle_{3456} \right\} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{E}}, \tag{5.28}
\end{aligned}$$

onde  $\xi = \kappa/2$  e o sobrescrito  $\ell$  dos operadores de Langevin  $\widehat{\mathcal{L}}^{(\ell)}$  referem-se ao  $\ell$ -ésimo divisor de feixe e, portanto, ao  $\ell$ -ésimo meio ambiente no qual o fóton é absorvido, de forma que  $[\widehat{\mathcal{L}}_\alpha^{(\ell)}, \widehat{\mathcal{L}}_\alpha^{(\ell)\dagger}] = \delta_{\ell\ell'}\Gamma$ . Note que  $|\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{E}}$  é o produto de todos os meios ambientes, referindo-se a cada  $BS$  e  $KM_1$ , i.e.,  $|\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{E}} = |\{0_k\}\rangle_{BS_1} |\{0_k\}\rangle_{BS_2} |\{0_k\}\rangle_{BS_3} |\{0_k\}\rangle_{KM_1}$ . Não há necessidade de introduzir sobrescritos nos operadores de Langevin que descrevem a absorção no meio Kerr, já que estes podem ser diferenciados somente pelos seus respectivos modos (subscrito). O ket  $|\vartheta\rangle_{3456}$  na Eq. (5.28), que envolve somente estados de zero fóton nos modos 3 e 4, é dado por

$$\begin{aligned}
|\vartheta\rangle_{3456} &= \left\{ \xi^2 \left[ (1 - \eta^{1/2}) + i\xi - i\xi\eta^{1/2}\widehat{\mathfrak{L}}_4^\dagger \right] |1\rangle_5 |0\rangle_6 \right. \\
&\quad + i\xi^2 \left[ (1 + \eta^{1/2}) + \xi + \xi\eta^{1/2}\widehat{\mathfrak{L}}_4^\dagger \right] |0\rangle_5 |1\rangle_6 \\
&\quad + \left[ \left( \widehat{\mathcal{L}}_5^{(2)\dagger} + i\xi\eta^{1/2}\widehat{\mathcal{L}}_5^{(3)\dagger} + i\xi\widehat{\mathfrak{L}}_5^\dagger + \xi\widehat{\mathcal{L}}_6^{(3)\dagger} \right) \right. \\
&\quad \left. + i\xi \left( \widehat{\mathcal{L}}_5^{(2)\dagger} + i\xi\eta^{1/2}\widehat{\mathcal{L}}_5^{(3)\dagger} + i\xi\widehat{\mathfrak{L}}_5^\dagger + \xi\widehat{\mathcal{L}}_6^{(3)\dagger} \right) \widehat{\mathfrak{L}}_4^\dagger \right] |0\rangle_5 |0\rangle_6 \left. \right\} |0\rangle_3 |0\rangle_4 |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{E}}. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

A utilização de quatro fotodetectores para realizar a medida do tipo Bell nos habilita a sondar a ocorrência de fotoabsorção nos elementos ópticos presentes nos canais 1 a 4 [Fig. 5.1(a)]. Dado que um fóton é injetado nos modos 1 e 2, compondo o estado a ser teletransportado, e outro fóton é injetado através dos modos 3 e 4, compondo parte do canal quântico, *Alice* comunica a *Bob* somente eventos de sucesso, onde o fóton presente nos canais 1 e 2 é detectado através de  $D_1$  ou  $D_2$  e o outro fóton presente nos canais 3 e 4 é detectado através de  $D_3$  ou  $D_4$ . Considerando o fóton injetado através dos canais 3 e 4, estes eventos de sucesso incluem somente os estados mostrados explicitamente na superposição (5.28), já que o ket remanescente  $|\vartheta\rangle_{3456}$  contém somente estados de zero fóton nos modos 3 e 4. Evidentemente, quando um dos fótons (dos pares de canais 1-2 ou 3-4) ou ambos são absorvidos ou espalhados pelos elementos ópticos, tal evento é descartado e o processo de teletransporte deve ser reiniciado. Essa estratégia, em associação com a pequena constante de amortecimento característica dos divisores de feixe e meios Kerr, resulta em um processo de teletransporte com alta fidelidade. Tal fidelidade não é afetada pela eficiência dos detectores, que somente influencia na probabilidade das medidas de Bell: na situação real, cada um dos quatro resultados possíveis ocorre com probabilidade menor que 1/4, como será discutido a seguir.

Calculando agora a fidelidade do canal quântico descrito pela Eq. (5.28), i.e., a fidelidade do operador densidade reduzido  $\text{Tr}_{\mathbf{E}} \left( |\tilde{\Upsilon}\rangle\langle\tilde{\Upsilon}| \right)$  com relação ao canal quântico ideal  $|\Upsilon\rangle$ , obtemos a expressão

$$\mathcal{F} = \langle \Upsilon | \text{Tr}_{\mathbf{E}} \left( |\tilde{\Upsilon}\rangle\langle\tilde{\Upsilon}| \right) | \Upsilon \rangle = \frac{\xi^3}{2} [1 + 4\eta^{1/2}(1 + \eta) + \eta(6 + \eta)]. \quad (5.30)$$

Como esperado, quando desconsideramos as absorções nos divisores de feixe  $BS_1$ ,  $BS_2$  e  $BS_3$  ( $\kappa = 2\xi = 1$ ) e no meio Kerr  $KM_1$  ( $\eta = 1$ ) encontramos  $\mathcal{F} = 1$ .

Vamos considerar, por simplicidade, a situação realista (não-ideal), em que o estado fotônico  $|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4$  é detectado por *Alice*, correspondendo, no caso ideal, à medida do estado de Bell  $|\Psi^+\rangle_{1234}$ . Como mencionado anteriormente, a medida do estado de saída

$|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4$  por *Alice* projeta os modos 5 e 6 que entram na *estação de Bob* exatamente no estado original  $|\Omega\rangle_{12}$ , de forma que *Bob* não precisa fazer nada para obter uma réplica idêntica desse estado, no caso ideal. Assumindo de forma realista elementos ópticos não-ideais, os modos de entrada 5 e 6 na *estação de Bob*, após a fotodetecção de  $|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4$  na *estação de Alice*, são descritos pelo emaranhado

$$|\psi\rangle_{56} = \mathcal{N} \left[ \mathbf{a} |0\rangle_5 |1\rangle_6 + \mathbf{b} |1\rangle_5 |0\rangle_6 + \left( \mathbf{c} \widehat{\mathcal{L}}_5^{(2)\dagger} + \mathbf{d} \widehat{\mathcal{L}}_5^{(3)\dagger} + \mathbf{e} \widehat{\mathcal{L}}_5^\dagger + \mathbf{f} \widehat{\mathcal{L}}_6^{(3)\dagger} \right) |0\rangle_5 |0\rangle_6 \right] |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{E}}, \quad (5.31)$$

onde os coeficientes de  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{f}$  são dados por

$$\mathbf{a} = \xi^3 \left[ -\eta^{1/2} (1 + \eta^{1/2} + 3\eta - \eta^{3/2}) \mathcal{C}_1 + i (1 - \eta^{1/2} - \eta + \eta^{3/2}) \mathcal{C}_2 \right], \quad (5.32a)$$

$$\mathbf{b} = \xi^3 \left[ i\eta^{1/2} (1 - \eta^{1/2} - \eta + \eta^{3/2}) \mathcal{C}_1 + (1 - 3\eta^{1/2} - \eta - \eta^{3/2}) \mathcal{C}_2 \right], \quad (5.32b)$$

$$\mathbf{c} = \xi^2 \left[ i\eta^{1/2} (1 + \eta) \mathcal{C}_1 + (1 - 2\eta^{1/2} - \eta) \mathcal{C}_2 \right], \quad (5.32c)$$

$$\mathbf{d} = \xi^{5/2} \left\{ -\eta \left[ 1 + 2\eta^{1/2} - \eta \right] \mathcal{C}_1 + i\eta^{1/2} (1 + \eta) \mathcal{C}_2 \right\}, \quad (5.32d)$$

$$\mathbf{e} = \xi^{5/2} \left\{ -\eta^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2}\eta^{1/2} - \eta^{1/2}(1 - \eta^{1/2}) + \eta \right] \mathcal{C}_1 + i \left[ 1 - \frac{3}{2}\eta^{1/2} - \eta^{1/2}(1 + \eta^{1/2}) - \frac{1}{2}\eta \right] \mathcal{C}_2 \right\}, \quad (5.32e)$$

$$\mathbf{f} = \xi^{5/2} \left[ i\eta^{1/2} (1 - \eta) \mathcal{C}_1 + (1 - 2\eta^{1/2} - \eta) \mathcal{C}_2 \right], \quad (5.32f)$$

e a constante de normalização é

$$\mathcal{N} = \left[ |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + (1 - 2\xi) (|\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{d}|^2 + |\mathbf{f}|^2) + |\mathbf{e}|^2 (1 - \eta) \right]^{-1/2}. \quad (5.33)$$

Portanto, a probabilidade de detecção do estado  $|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4$  na *estação de Alice*, dada por  $P_{0110} = \mathcal{N}^{-2} \varepsilon^2$  (que é obtida via evolução do estado  $|\Omega\rangle_{12} \otimes \left| \widetilde{\Upsilon} \right\rangle_{3456}$  através da *estação de Alice*), depende da eficiência dos detectores  $\varepsilon$  e torna-se 1/4 quando assumimos elementos ópticos e fotodetectores ideais ( $\kappa = 2\xi = \eta = \varepsilon = 1$ ). De fato, para os coeficientes mostrados acima obtemos  $\mathbf{a} = -\mathcal{C}_1/2$  e  $\mathbf{b} = -\mathcal{C}_2/2$ , de forma que  $\mathcal{N} = \left[ |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \right]^{-1/2} = 2$ .

Da Eq. (5.31), o operador densidade reduzido pode ser obtido:

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}_{56} &= \text{Tr}_{\mathbf{E}} |\psi\rangle_{56} \langle\psi| = \mathcal{N} \{ |\mathbf{a}|^2 |0, 1\rangle_{56} \langle 0, 1| + \mathbf{a}\mathbf{b}^* |0, 1\rangle_{56} \langle 1, 0| \\
&\quad + \mathbf{a}^*\mathbf{b} |1, 0\rangle_{56} \langle 0, 1| + |\mathbf{b}|^2 |1, 0\rangle_{56} \langle 1, 0| \\
&\quad + [(1 - 2\xi) (|\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{d}|^2 + |\mathbf{f}|^2) + |\mathbf{e}|^2 (1 - \eta)] |0, 0\rangle_{56} \langle 0, 0| \}. \quad (5.34)
\end{aligned}$$

Finalmente, a fidelidade do processo de teletransporte, o *overlap* entre o estado ideal  $|\Omega\rangle_{56} = \mathcal{C}_1 |0\rangle_5 |1\rangle_6 + \mathcal{C}_2 |1\rangle_5 |0\rangle_6$  e o estado teletransportado na situação realista não-ideal na Eq. (5.31), é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= {}_{56} \langle\Omega| \widehat{\rho}_{56} |\Omega\rangle_{56} \\
&= \mathcal{N}^2 (|\mathbf{a}|^2 |\mathcal{C}_1|^2 + \mathbf{a}\mathbf{b}^* \mathcal{C}_1^* \mathcal{C}_2 + \mathbf{a}^*\mathbf{b} \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2^* + |\mathbf{b}|^2 |\mathcal{C}_2|^2). \quad (5.35)
\end{aligned}$$

Segue imediatamente que, para o caso ideal onde  $\kappa = \eta = \varepsilon = 2\xi = 1$ , de forma que  $\mathbf{a} = -\mathcal{C}_1/2$ ,  $\mathbf{b} = -\mathcal{C}_2/2$ , e  $\mathcal{N} = 2$ , obtemos  $\mathbf{F} = (|\mathcal{C}_1|^2 + |\mathcal{C}_2|^2)^2 = 1$ . Relembramos que a função  $\mathbf{F}$  calculada aqui é a fidelidade do estado teletransportado associado com a medida de *Alice* do estado de Bell  $|\Psi^+\rangle_{1234}$  (no caso ideal). Notamos que a fidelidade  $\mathbf{F}$  pode ser consideravelmente menor quando consideramos eventos onde nenhum fóton é detectado nos pares de canais 1-2 ou 3-4.

É tácito que diferentes expressões para a fidelidade do estado teletransportado são obtidas para resultados diferentes da medida de Bell. De fato, a intervenção de *Bob* no estado que entra em sua estação, após a medida de *Alice*, utiliza mais elementos ópticos para realizar as rotações requeridas (conforme Tab. 5.1) para converter o estado teletransportado em uma réplica idêntica do estado emaranhado original  $|\Omega\rangle_{12}$ ; como consequência, mais erros serão introduzidos no estado teletransportado. Nesse sentido, esperamos um aumento da fidelidade para o emaranhado teletransportado quando detectamos  $|\Psi^-\rangle_{1234}$ ,  $|\Phi^+\rangle_{1234}$ ,  $|\Phi^-\rangle_{1234}$ ,  $|\Psi^+\rangle_{1234}$ , nesta ordem.

Um ponto importante a ser ressaltado é que a estratégia para sondar a absorção de fótons



nos canais 1 a 4 é insuficiente para eliminar os erros introduzidos pelos elementos ópticos não-ideais nesses canais. De fato, sempre quando ambos os fótons injetados através dos canais 1-2 e 3-4 não são absorvidos, os erros introduzidos pelos elementos ópticos irão invalidar a Tab. 5.1, no sentido que a medida do estado  $|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4$ , por exemplo, torna-se associada não somente ao estado de Bell  $|\Psi^+\rangle_{1234}$  (como no caso ideal) mas também aos outros estados de Bell, embora com pequenas probabilidades, como será mostrado na próxima seção.

### 5.4.1 Evolução dos estados de Bell através da *estação de Alice*

A seguir apresentaremos a evolução dos estados de Bell  $|\Psi^\pm\rangle_{1234}$  (que aparecem na expressão do produto  $|\Omega\rangle_{12} \otimes |\tilde{\Upsilon}\rangle_{3456}$ ) através da *estação de Alice*, mostrando a mistura das possibilidades de fotodeteção da Tab. 5.1. A evolução dos estados de Bell  $|\Psi^\pm\rangle_{1234}$  através da *estação de Alice* [Fig. 5.1(c)] é dada por

$$\begin{aligned}
|\Psi^\pm\rangle_{1234} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle_{12} |1, 0\rangle_{34} \pm |1, 0\rangle_{12} |0, 1\rangle_{34}) \\
&\xrightarrow{\text{Estação da Alice}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \xi^{3/2} [(\eta^{1/2} + \eta) \mp (\eta^{1/2} + 1)] |1, 0\rangle_{12} |1, 0\rangle_{34} \right. \\
&\quad + i\xi^{3/2} [(\eta^{1/2} + \eta) \pm (\eta^{1/2} + 1)] |0, 1\rangle_{12} |1, 0\rangle_{34} \\
&\quad + \xi^{3/2} [-(\eta^{1/2} - \eta) \pm (\eta^{1/2} - 1)] |0, 1\rangle_{12} |0, 1\rangle_{34} \\
&\quad + i\xi^{3/2} [(\eta^{1/2} - \eta) \pm (\eta^{1/2} - 1)] |1, 0\rangle_{12} |0, 1\rangle_{34} \\
&\quad \left. + |\vartheta_{\Psi^\pm}\rangle_{1234} \right\},
\end{aligned}$$

onde o ket  $|\vartheta_{\Psi^\pm}\rangle_{1234}$ , apresenta estados de zero fóton em pelo menos um dos pares de canais 1-2 ou 3-4,

$$\begin{aligned}
|\vartheta_{\Psi^\pm}\rangle_{1234} = & \left\{ \xi \left[ (\eta^{1/2} + \eta) \widehat{\mathcal{L}}_2^{(6)\dagger} |1, 0\rangle_{34} + i (\eta^{1/2} - \eta) \widehat{\mathcal{L}}_2^{(6)\dagger} |0, 1\rangle_{34} \right. \right. \\
& + \left. \left( \widehat{\mathfrak{L}}_2^\dagger - \eta^{1/2} \widehat{\mathfrak{L}}_2^\dagger \right) |1, 0\rangle_{34} + i \left( \widehat{\mathfrak{L}}_2^\dagger + \eta^{1/2} \widehat{\mathfrak{L}}_2^\dagger \right) |0, 1\rangle_{34} \right. \\
& \pm (\eta^{1/2} - 1) \widehat{\mathcal{L}}_1^{(6)\dagger} |0, 1\rangle_{34} \pm i (\eta^{1/2} + 1) \widehat{\mathcal{L}}_1^{(6)\dagger} |1, 0\rangle_{34} \left. \right] |0, 0\rangle_{12} \\
& + \left[ (\xi\eta)^{1/2} \left( \widehat{\mathcal{L}}_3^{(4)\dagger} - i (\xi\eta)^{1/2} \widehat{\mathcal{L}}_3^{(5)\dagger} + i \xi^{1/2} \widehat{\mathfrak{L}}_3^\dagger + \xi^{1/2} \widehat{\mathcal{L}}_4^{(5)\dagger} \right) (|1, 0\rangle_{12} + i |0, 1\rangle_{12}) \right. \\
& \pm \xi^{1/2} \left( (\xi\eta)^{1/2} \widehat{\mathcal{L}}_3^{(5)\dagger} + \xi^{1/2} \widehat{\mathfrak{L}}_3^\dagger + \widehat{\mathcal{L}}_4^{(4)\dagger} + i \xi^{1/2} \widehat{\mathcal{L}}_4^{(5)\dagger} \right) (|0, 1\rangle_{12} + i |1, 0\rangle_{12}) \left. \right] |0, 0\rangle_{34} \\
& + \left[ \eta^{1/2} \left( \widehat{\mathcal{L}}_3^{(4)\dagger} - i (\xi\eta)^{1/2} \widehat{\mathcal{L}}_3^{(5)\dagger} + i \xi^{1/2} \widehat{\mathfrak{L}}_3^\dagger + \xi^{1/2} \widehat{\mathcal{L}}_4^{(5)\dagger} \right) \widehat{\mathcal{L}}_2^{(6)\dagger} \right. \\
& + \left. \left( \widehat{\mathcal{L}}_3^{(4)\dagger} + i (\xi\eta)^{1/2} \widehat{\mathcal{L}}_3^{(5)\dagger} + i \xi^{1/2} \widehat{\mathfrak{L}}_3^\dagger + \xi^{1/2} \widehat{\mathcal{L}}_4^{(5)\dagger} \right) \widehat{\mathfrak{L}}_2^\dagger \right. \\
& \left. \pm \left( (\xi\eta)^{1/2} \widehat{\mathcal{L}}_3^{(5)\dagger} + \xi^{1/2} \widehat{\mathfrak{L}}_3^\dagger + \widehat{\mathcal{L}}_4^{(4)\dagger} + i \xi^{1/2} \widehat{\mathcal{L}}_4^{(5)\dagger} \right) \widehat{\mathcal{L}}_1^{(6)\dagger} \right] |0, 0\rangle_{12} |0, 0\rangle_{34} \left. \right\} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{E}}.
\end{aligned}$$

Estimando de forma realista os valores para  $\kappa = \eta = 0,98$ , obteremos

$$\begin{aligned}
|\Psi^+\rangle_{1234} & \xrightarrow{\text{Estação da Alice}} i (0,9604) |0, 1\rangle_{12} |1, 0\rangle_{34} - (0,0049) |0, 1\rangle_{12} |0, 1\rangle_{34} \\
& - (0,0049) |1, 0\rangle_{12} |1, 0\rangle_{34} + |\vartheta_{\Psi^+}\rangle_{1234}, \\
|\Psi^-\rangle_{1234} & \xrightarrow{\text{Estação da Alice}} (0,9604) |1, 0\rangle_{12} |1, 0\rangle_{34} - i (0,0049) |0, 1\rangle_{12} |1, 0\rangle_{34} \\
& + (0,0049) |1, 0\rangle_{12} |0, 1\rangle_{34} + |\vartheta_{\Psi^-}\rangle_{1234},
\end{aligned}$$

mostrando a quebra da relação unívoca entre as fotodeteccções e os estados de Bell presentes na Tab. 5.1, para o caso ideal. Uma análise similar pode ser feita para  $|\Phi^\pm\rangle_{1234}$ .

## 5.5 Comentários e conclusões

Neste capítulo apresentamos um protocolo para o teletransporte de um emaranhado do tipo EPR de estados do campo propagante de zero e um fóton. Além de empregar elementos ópticos lineares, tais como divisores de feixes de placas e fase, nosso aparato também incorpora

meios Kerr para alcançar 100% de probabilidade de sucesso no caso ideal. Um esquema para teletransportar um emaranhado similar, empregando somente elementos lineares, foi recentemente sugerido nas Refs. [20, 21], mas a probabilidade de sucesso teórica é de somente 50%. Seguindo as linhas sugeridas na Ref. [20], o teletransporte experimental de um *qubit* emaranhado foi recentemente realizado [24] (utilizando somente elementos ópticos lineares e com 50% de probabilidade de sucesso). Nesse sentido, ressaltamos que a não-linearidade Kerr requerida em nossa proposta pode ser alcançada com a tecnologia disponível atualmente, dado a propagação ultralenta da luz em meios atômicos. Lukin e Imamoglu [30] demonstraram que uma fase condicional de  $\pi$  pode ser alcançada se ambos os pulsos de luz propagam-se com pequenas mas iguais velocidades de grupo em um gás atômico coerentemente preparado, quando submetido à transparência eletromagneticamente induzida [36]. É importante mencionar o crescente interesse de pesquisa em direção à não-linearidade Kerr gigante através da propagação ultralenta da luz em meios atômicos frios [30, 37]. Tal atividade encoraja propostas teóricas como a presente e também o esquema proposto recentemente para o teletransporte completo de estados de polarização de um fóton, empregando a não-linearidade Kerr, que também requer um deslocamento de fase condicional de  $\pi$  [38].

Introduzimos também um método fenomenológico para computar a influência da dissipação nos meios Kerr, fundamentado na analogia com o tratamento de absorção de fótons em divisores de feixe exposto na Ref. [31]. A eficiência dos fotodetectores foi também introduzida, bem como a influência da dissipação nas placas de fase, fazendo uso das relações previamente estabelecidas em [18]. Portanto, um amplo tratamento de erros no domínio da física dos campos propagantes para elementos ópticos lineares e não-lineares foi apresentado, o que possibilitou que a fidelidade do processo de teletransporte fosse computada (na situação particular onde o resultado da medida do tipo Bell realizada por *Alice* previne *Bob* da necessidade de executar transformações unitárias apropriadas no estado recebido). A estratégia empregada para a realização da medida de Bell é capaz de sondar a ocorrência de absorção de

fótons nos elementos ópticos dos canais 1 a 4 da Fig. 5.1(a). Essa estratégia combinada com as usualmente pequenas constantes de dissipação dos elementos ópticos resulta em uma alta fidelidade para o processo de teletransporte (como analisado abaixo).

Para estimar a fidelidade da preparação do canal quântico [Eq. (5.30)] e do estado teletransportado [Eq. (5.35)], assumimos a eficiência de detectores de um único fóton por volta de 70%, tal que  $\varepsilon \simeq 0,7$ . A constante de dissipação para um divisor de feixes é usualmente menor que 2% em vidros de *BK7*, de forma que  $\kappa \simeq 0,98$ . Considerando pulsos de luz de energia diminuta cruzando um meio Kerr, o método proposto na Ref. [30] para alcançar um deslocamento de fase condicional da ordem de  $\pi$  permite que a interação seja mantida por um período de tempo muito longo sem dissipação. Por isso, para um meio Kerr, composto por um gás frio de átomos, a constante de dissipação deve ser também muito pequena e, como exemplo, assumiremos o mesmo valor dos divisores de feixes, de forma que  $\eta \simeq 0,98$ . Com essas considerações, obtemos para a fidelidade do canal quântico não ideal  $\mathcal{F} = 0,92$ . A fidelidade  $F$  do estado teletransportado, dada pela Eq. (5.35), é representada graficamente na Fig. 5.3 como função dos parâmetros  $\gamma$  e  $\lambda$  que definem os coeficientes  $\mathcal{C}_1 = \cos(\gamma)$  e  $\mathcal{C}_2 = \sin(\gamma)e^{i\lambda}$  (do estado original  $|\Omega\rangle_{12} = \mathcal{C}_1 |0\rangle_1 |1\rangle_2 + \mathcal{C}_2 |1\rangle_1 |0\rangle_2$ ). Como é evidente na Fig. 5.3, a fidelidade do estado teletransportado para  $\gamma = 0(\pi)$ , quando  $|\Omega\rangle_{12} = |0\rangle_1 |1\rangle_2 (-|0\rangle_1 |1\rangle_2)$ , é menor que para  $\gamma = \pi/2$ , quando  $|\Omega\rangle_{12} = |1\rangle_1 |0\rangle_2$ . De fato, quando o fóton passa pelo modo 2 ( $\gamma = 0, \pi$ ), este cruza o meio Kerr  $KM_2$ , introduzindo erros no processo, que não ocorrem quando o fóton passa pelo modo 1 ( $\gamma = \pi/2$ ). Por outro lado, para um estado de superposição, i.e.,  $\gamma \neq 0, \pi$ , notamos que o fator de fase  $e^{i\lambda}$  desempenha um papel importante na fidelidade. Para  $\gamma = \pi/4$ , quando o estado do fóton a ser teletransportado tem igual probabilidade de cruzar os modos 1 e 2, um processo de interferência ocorre no  $BS_6$  e, dependendo do fator de fase  $e^{i\lambda}$ , obtemos diferentes valores para a fidelidade  $F$ . Isto é devido ao fato que a função  $F$  fornece a fidelidade do estado teletransportado associado com a medida de *Alice* do estado de Bell  $|\Psi^+\rangle_{1234}$ , e o fator de fase  $e^{i\lambda}$  leva a diferentes probabilidades de medida do estado  $|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4$  as-

sociado com  $|\Psi^+\rangle_{1234}$ . Como mostrado na seção 5.4.1, os erros introduzidos pelos elementos ópticos misturam os estados de Bell associados com cada possibilidade de fotodetecção e a probabilidade de medir cada estado de Bell irá depender de  $\lambda$ .

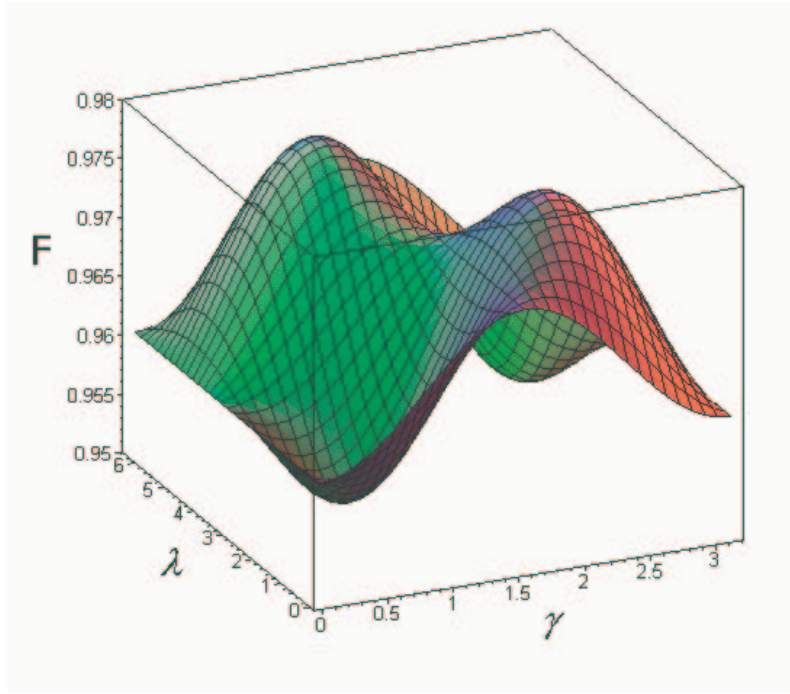


Figura 5.3. Fidelidade  $F$  do estado teletransportado (associado com a medida de *Alice* do estado  $|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4$ ), expressa na Eq. (5.35), como função dos parâmetros  $\gamma$  e  $\lambda$  definindo os coeficientes  $C_1 = \cos(\gamma)$  e  $C_2 = \sin(\gamma)e^{i\lambda}$  do estado original (a ser teletransportado)  $|\Omega\rangle_{12} = C_1 |0\rangle_1 |1\rangle_2 + C_2 |1\rangle_1 |0\rangle_2$ .

Dos valores fixados acima, para a eficiência dos fotodetectores e a probabilidade de não-absorção nos divisores de feixes e meios Kerr, podemos também estimar a probabilidade  $P_{0110} = \mathcal{N}^{-2}\varepsilon^2$  de detecção do estado de saída  $|0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_4$  na *estação de Alice*. Quando consideramos  $C_1 = C_2 = 1/\sqrt{2}$ , a probabilidade  $P_{0110}$ , que no caso ideal é 0,25, torna-se

aproximadamente 0,11. Para a eficiência dos detectores igual à unidade, obtemos  $P_{0110} = \mathcal{N}^{-2} \approx 0,22$ . Note que o fator  $\varepsilon^2$ , que reduz o valor da probabilidade  $P_{0110}$  de 0,22 para 0,11 surge da necessidade de detectarmos ambos os fótons nos canais 2 e 3.

Em adição aos erros acima mencionados — erros originados da absorção nos divisores de feixes, meios Kerr e placas de fase — há outros mecanismos de erros experimentais que podem ser importantes. De fato, a interferência de dois modos em um divisor de feixes nunca tem um casamento de fase perfeito (*phase matching*) e os efeitos decorrentes podem ser discutidos à luz da teoria de multi-modos [39, 40]. Além disso, temos que levar em conta o fato de não existir fontes de um único fóton perfeitas. O método usualmente citado na literatura para a geração de um único fóton, a fluorescência paramétrica, apenas aproxima-se de uma fonte de um único fóton [41]. A interação entre dois pulsos de luz cruzando um meio Kerr pode estar também sujeita a erros devido a flutuações dos parâmetros físicos associados.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, e N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [2] D. Bohm e Y. Aharonov, “Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky”, *Phys. Rev.* **108**, 1070 (1957).
- [3] J. S. Bell, “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox”, *Physics* (Long Island City, NY) **1**, 195 (1964).
- [4] A. Aspect, P. Grangier, e G. Roger, “Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A New Violation of Bell’s Inequalities”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982);
- A. Aspect, J. Dalibard, e G. Roger, “Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982);
- P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, e Y. Shih, “New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4337 (1995);
- A. Kuzmich, I. A. Walmsley, e L. Mandel, “Violation of Bell’s Inequality by a Generalized Einstein-Podolsky-Rosen State Using Homodyne Detection”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1349 (2000);

- D. Bouwmeester, A. Ekert, A. Zeilinger (eds.), *The Physics of Quantum Information* (Springer, Berlin, 2000).
- [5] P. G. Kwiat, P. H. Eberhard, A. M. Steinberg, e R. Y. Chiao, “Proposal for a loophole-free Bell inequality experiment”, *Phys. Rev. A* **49**, 3209 (1994);  
E. S. Fry, T. Walther, e S. Li, “Proposal for a loophole-free test of the Bell inequality”, *Phys. Rev. A* **52**, 4381 (1995);  
C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro, e S. Padua, “Optimizing the photon pair collection efficiency: A step toward a loophole-free Bell’s inequalities experiment”, *Phys. Rev. A* **57**, R2267 (1998).
- [6] M. A. Rowe, D. Klempinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe e D. J. Wineland, “Experimental violation of Bell’s inequality with efficient detection”, *Nature* **409**, 791 (2001);  
C. J. Villas-Bôas e M. H. Y. Moussa, “A proposal for testing nonlocality in Wigner representation loophole-free of detection efficiency”, *em preparação*.
- [7] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble, e H. Mabuchi, “Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221 (1997);  
T. Pellizzari, “Quantum Networking with Optical Fibres”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 5242 (1997);  
H. J. Briegel, W. Dür, J. I. Cirac, e P. Zoller, “Quantum Repeaters: The Role of Imperfect Local Operations in Quantum Communication”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5932 (1998);  
S. J. van Enk, H. J. Kimble, J. I. Cirac, e P. Zoller, “Quantum communication with dark photons”, *Phys. Rev. A* **59**, 2659 (1999).



- [8] J. I. Cirac e P. Zoller, “Quantum Computations with Cold Trapped Ions”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995);
- Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, e H. J. Kimble, “Measurement of Conditional Phase Shifts for Quantum Logic”, *ibid.* **75**, 4710 (1995);
- I. L. Chuang, L. M. K. Vandersypen, X. Zhou, D. W. Leung, e S. Lloyd, “Experimental realization of a quantum algorithm”, *Nature* **393**, 143 (1998);
- B. E. Kane, “A silicon-based nuclear spin quantum computer”, *ibid.* **393**, 133 (1998).
- [9] P. Shor, “Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer”, *Proc. of 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, p. 124 (IEEE Computer Society, Los Alamos, 1994), resumo estendido. A versão completa deste artigo é encontrada em P. Shor, *S. I. A. M. Journal of Computing*, **26**, 1384 (1997), também disponível *online* em [quant-ph/9508027](http://quant-ph/9508027).
- [10] L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood, e I. L. Chuang, “Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance”, *Nature* **414**, 883 (2001).
- [11] C. H. Bennett, “Quantum information and computation”, *Phys. Today* **48**, 24 (1995);
- C. H. Bennett e D. P. Divincenzo, “Quantum computing - Towards an engineering era”, *Nature* **377**, 389 (1995).
- [12] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, e W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [13] W. K. Wootters e W. H. Zurek, “A single quantum cannot be cloned”, *Nature* **299**, 802 (1982);

- D. Dieks, “Communication by EPR devices”, *Phys. Lett. A* **92**, 271 (1982).
- [14] M. H. Y. Moussa, “Teleportation with identity interchange of quantum states”, *Phys. Rev. A* **55**, R3287 (1997).
- [15] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, “Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields”, *Phys. Rev. A* **50**, R895 (1994);
- J. I. Cirac e A. S. Parkins, “Schemes for atomic-state teleportation”, *Phys. Rev. A* **50**, R4441 (1994);
- N. G. de Almeida, L. P. Maia, C. J. Villas-Bôas e M. H. Y. Moussa, “One-cavity scheme for atomic-state teleportation through GHZ states”, *Phys. Lett. A* **241**, 213 (1998);
- N. G. de Almeida, R. Napolitano e M. H. Y. Moussa, “Accuracy of a teleported cavity-field state”, *Phys. Rev. A* **62**, 010101(R) (2000).
- [16] E. Solano, C. L. Cesar, R. L. de Matos Filho e N. Zagury, “Reliable teleportation in trapped ions”, *Eur. Phys. J D* **13**, 121 (2001).
- [17] S. L. Braunstein e H. J. Kimble, “Teleportation of Continuous Quantum Variables”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869 (1998).
- [18] C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida e M. H. Y. Moussa, “Teleportation of a zero- and one-photon running-wave state by projection synthesis”, *Phys. Rev. A* **60**, 2759 (1999).
- [19] P. van Loock e S. L. Braunstein, “Unconditional teleportation of continuous-variable entanglement”, *Phys. Rev. A* **61**, 010302(R) (2000).
- [20] H. W. Lee e J. Kim, “Quantum teleportation and Bell’s inequality using single-particle entanglement”, *Phys. Rev. A* **63**, 012305 (2000).

- [21] H. W. Lee, “Total teleportation of an entangled state”, *Phys. Rev. A* **64**, 014302 (2001).
- [22] S. J. van Enk e O. Hirota, “Entangled coherent states: Teleportation and decoherence”, *Phys. Rev. A* **64**, 022313 (2001).
- [23] M. Ikram, S. Y. Zhu e M. S. Zubairy, “Quantum teleportation of an entangled state”, *Phys. Rev. A* **62**, 022307 (2000).
- [24] E. Lombardi, F. Sciarrino, S. Popescu e F. De Martini, “Teleportation of a Vacuum–One-Photon Qubit”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 070402 (2002).
- [25] M. H. Y. Moussa, “Teleportation of a cavity-radiation-field state: An alternative scheme”, *Phys. Rev. A* **54**, 4661 (1996);  
M. S. Zubairy, “Quantum teleportation of a field state”, *Phys. Rev. A* **58**, 4368 (1998);  
S. Stenholm e P. J. Bardroff, “Teleportation of N-dimensional states”, *Phys. Rev. A* **58**, 4373 (1998).
- [26] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter e A. Zeilinger, “Experimental quantum teleportation”, *Nature* **390**, 575 (1997).
- [27] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy e S. Popescu, “Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121 (1998).
- [28] Y. H. Kim, S. P. Kulik e Y. Shih, “Quantum Teleportation of a Polarization State with a Complete Bell State Measurement”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1370 (2001).
- [29] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble e E. S. Polzik, “Unconditional quantum teleportation”, *Science* **282**, 706 (1998).

- [30] M. D. Lukin e A. Imamoglu, “Nonlinear Optics and Quantum Entanglement of Ultraslow Single Photons”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1419 (2000).
- [31] S. M. Barnett, J. Jeffers, A. Gatti e R. Loudon, “Quantum optics of lossy beam splitters”, *Phys. Rev. A* **57**, 2134 (1998).
- [32] L. Mandel e E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, New York, 1995).
- [33] C. J. Villas-Bôas e N. G. de Almeida, “Introdução ao Estudo de Fotoabsorção em Divisores de Feixes”, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **22**, 489 (2000).
- [34] C. J. Villas-Bôas, *Teletransporte e Engenharia de Estados Quânticos*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Física, UFSCar (São Carlos, 2000).
- [35] A. Yariv, *Quantum Electronics*, 3ª edição (John Wiley & Sons, New York, 1989).
- [36] S. E. Harris, “Electromagnetically induced transparency”, *Phys. Today* **50**, 36 (1997);
- [37] E. Arimondo, in *Progress in Optics XXXV*, (Ed.) E. Wolf (Elsevier, Amsterdam, 1996);
- H. Schmidt e A. Imamoglu, “Giant Kerr nonlinearities obtained by electromagnetically induced transparency”, *Opt. Lett.* **21**, 1936 (1996);
- L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton e C. H. Behroozi, “Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas”, *Nature* **397**, 594 (1999);
- M. M. Kash, V. A. Sautenkov, A. S. Zibrov, L. Hollberg, G. R. Welch, M. D. Lukin, Y. Rostovtsev, E. S. Fry e M. O. Scully, “Ultraslow Group Velocity and Enhanced Nonlinear Optical Effects in a Coherently Driven Hot Atomic Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5229 (1999);
- S. E. Harris e L. V. Hau, “Nonlinear Optics at Low Light Levels”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4611 (1999).

- [38] D. Vitali, M. Fortunato, e P. Tombesi, “Complete Quantum Teleportation with a Kerr Nonlinearity”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 445 (2000).
- [39] K. Banaszek, C. Radzewicz, K. Wodkiewicz, e J. S. Krasinski, “Direct measurement of the Wigner function by photon counting”, *Phys. Rev. A* **60**, 674 (1999).
- [40] K. Banaszek, A. Dragan, K. Wodkiewicz e C. Radzewicz “Direct measurement of optical quasidistribution functions: multimode theory and homodyne tests of Bell’s inequalities”, [quant-ph/0204103](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0204103).
- [41] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, H. Weinfurter e A. Zeilinger, “High-Fidelity Teleportation of Independent Qubits”, *J.Mod.Opt.* **47**, 279 (2000).

# Capítulo 6

## Comentários Finais e Perspectivas

### Futuras

Parte desta tese centra-se em um dos principais pontos sob investigação na literatura científica, referente à Teoria da Medida Quântica e à Teoria da Informação Quântica, que diz respeito à avaliação das condições de possibilidades para a implementação de propostas ligadas a processos quânticos de comunicação e computação; sendo a realização prática de tais propostas limitada pelo fenômeno da decoerência.

Tendo em vista esse contexto, introduzimos abordagens fenomenológicas capazes de tratar, de forma direta e concisa, ruídos introduzidos no domínio de íons aprisionados e campos propagantes. Essas abordagens nos permitiram estimar a fidelidade dos processos de engenharia de estados vibracionais de íons aprisionados e de teletransporte de um estado emaranhado do campo propagante. A dificuldade do tratamento de erros em tais processos reside no fato dos mesmos requererem vários passos da interação radiação-matéria, tornando o cálculo de suas respectivas fidelidades, via técnicas padrões *ab initio*, uma tarefa árdua.

Apresentamos no capítulo 2 um esquema para a engenharia de estados vibracionais arbitrários de íons aprisionados na situação em que consideramos flutuações na intensidade dos

pulsos laser requeridos. Empregamos a técnica de escultura de estados quânticos conjugada à abordagem de operadores fenomenológicos. Mostramos como esculpir um estado de movimento arbitrário a partir do estado de movimento inicial coerente e computamos a fidelidade do processo na presença de ruídos. O fato de partirmos de um estado de movimento previamente preparado faz com que o número de passos necessários para o processo de engenharia do estado desejado seja a metade daqueles necessários se partíssemos do estado fundamental.

Utilizando um tratamento fenomenológico, introduzimos no capítulo 5 um protocolo para o teletransporte de estados emaranhados de zero e um fóton do campo propagante na presença de ruído. Empregamos elementos ópticos lineares e não-lineares para obter 100% de probabilidade de sucesso no caso ideal. No caso real, a fotoabsorção nestes elementos ópticos limita a fidelidade do processo. Nesse sentido, adotamos uma estratégia para a realização da medida de Bell que possibilita sondar o processo de fotoabsorção. Tal estratégia, combinada com as constantes de absorção usualmente pequenas que caracterizam os elementos ópticos, resulta em uma alta fidelidade para o processo de teletransporte. Contudo, mostramos que a medida de Bell não pode ser realizada com fidelidade unitária mesmo quando consideramos a estratégia de sondagem do processo de dissipação.

A investigação das fontes de decoerência em sistemas quânticos promissores para a implementação de processamento lógico quântico é também um tema importante, visto que em alguns contextos experimentais as fontes de decoerência e seus respectivos pesos ainda não estão bem estabelecidos na literatura. Diversos modelos para a decoerência em íons aprisionados têm sido propostos, com o intuito de explicar o amortecimento das oscilações de Rabi medidas nos experimentos com  ${}^9\text{Be}^+$ , no NIST. Dessa forma, no capítulo 3, investigamos o mecanismo de dissipação e aquecimento associado à polarização do gás residual da armadilha, induzida pelo íon. Fundamentados em uma analogia com a física de elétrons sobre superfície de hélio líquido, mostramos que o amortecimento assimétrico das oscilações de Rabi, observado nos experimentos com  ${}^9\text{Be}^+$ , é compatível com o fenômeno de polarização estudado. A

dependência do amortecimento das oscilações de Rabi com o estado vibracional inicial do íon, constatada experimentalmente, é também predita pelo processo de polarização.

O modelo introduzido no capítulo 3 pode ser testado via aumento ou diminuição da pressão do gás residual da armadilha iônica. Para além do teste desse modelo, uma perspectiva futura interessante é a análise da possibilidade de formação de quase-partículas em armadilhas iônicas, o que não ocorre na interação com o gás residual devido a sua baixa densidade (aproximadamente  $10^6 \text{ part./cm}^3$  nos experimentos do NIST). Por outro lado, a introdução de um filme de hélio líquido na armadilha, sobre o qual localizar-se-á o íon em seu movimento vibracional, pode constituir-se em uma forma adequada para a formação e, principalmente, para a manipulação de uma quase-partícula. Resultante da interação entre o íon aprisionado e as oscilações da superfície de hélio, esta quase-partícula será análoga ao *riplon* (obtido quando, ao invés do íon, temos um elétron sobre a superfície de hélio). A interação do íon com a superfície de hélio pode ser descrita por um Hamiltoniano do tipo Fröhlich e a manipulação dessa quase-partícula dar-se-á por meio de pulsos laser que promovem interações entre os estados eletrônicos e vibracionais do íon. A possibilidade de manipulação do movimento vibracional de uma quase-partícula em nível individual, para caracterizá-la como tal no contexto de armadilhas iônicas que se coloca atualmente diante das possibilidades de sua realização prática.

O desenvolvimento de técnicas experimentais para a manipulação de um único íon aprisionado possibilita a investigação de propriedades da matéria ( que até então só eram acessíveis como processos coletivos) em nível de seus constituintes básicos. Nessa direção, no capítulo 4 descrevemos um experimento para sondar o processo de tunelamento de um íon aprisionado em um potencial eletromagnético do tipo poço duplo. A evolução temporal da probabilidade para a medida fluorescente do estado eletrônico fundamental do íon é empregada para caracterizar o processo de tunelamento de uma única partícula. Embora o design de uma armadilha do tipo poço duplo possa consistir em um considerável desafio técnico, os princípios fundamentais discutidos nessa proposta podem ser implementados via engenharia de interações de dois



modos em armadilhas iônicas. O acoplamento de estados iônicos de movimento em direções ortogonais pode proporcionar uma dinâmica similar à do poço duplo. Podemos também estender o esquema apresentado no capítulo 4 para a implementação de processamento lógico quântico através da adição de outro feixe laser.

# Apêndice A

## Elementos $\rho_{n,m}(t_1, t_2, t_3)$ da Eq. (2.30)

Neste apêndice mostraremos explicitamente os elementos  $\rho_{n,m}(t_1, t_2, t_3)$  que aparecem na Eq. (2.30)

$$\begin{aligned}
\rho_{n,m}(t_1, t_2, t_3) = & \Lambda_{n-1}^{(0)} \left( \Lambda_{m-1}^{(0)} \right)^* \frac{1}{8} \left[ 1 - \cos(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \right] \\
& \times [A_{n,m}(t_2) - B_{n,m}(t_2)] \left[ 1 + \cos(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} \right] (1 - \delta_{n,0}) (1 - \delta_{m,0}) \\
& - \Lambda_{n-1}^{(0)} \left( \Lambda_{m+1}^{(0)} \right)^* \frac{e^{i\varphi_3}}{8} \sin(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \\
& \times e^{-2i\varphi_2} [-A_{n,m+1}(t_2) + B_{n,m+1}(t_2)] e^{i\varphi_1} \sin(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} (1 - \delta_{n,0}) \\
& + \Lambda_{n-1}^{(0)} \left( \Lambda_m^{(0)} \right)^* \frac{i}{8} \left[ 1 - \cos(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \right] \\
& \times e^{-i\varphi_2} [-C_{n,m}(t_2) - D_{n,m}(t_2)] e^{i\varphi_1} \sin(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} (1 - \delta_{n,0}) \\
& + \Lambda_{n-1}^{(0)} \left( \Lambda_m^{(0)} \right)^* i \frac{e^{i\varphi_3}}{8} \sin(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \\
& \times e^{-i\varphi_2} [C_{n,m+1}(t_2) + D_{n,m+1}(t_2)] \left[ 1 + \cos(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} \right] (1 - \delta_{n,0}) \\
& + \Lambda_{n+1}^{(0)} \left( \Lambda_{m-1}^{(0)} \right)^* \frac{e^{-i\varphi_3}}{8} \sin(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \\
& \times e^{+2i\varphi_2} [-A_{n+1,m}(t_2) + B_{n+1,m}(t_2)] e^{-i\varphi_1} \sin(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} (1 - \delta_{m,0}) \\
& + \Lambda_{n+1}^{(0)} \left( \Lambda_{m+1}^{(0)} \right)^* \frac{1}{8} \left[ 1 + \cos(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \right] \\
& \times [A_{n+1,m+1}(t_2) - B_{n+1,m+1}(t_2)] \left[ 1 - \cos(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Lambda_{n+1}^{(0)} \left(\Lambda_m^{(0)}\right)^* i \frac{e^{-i\varphi_3}}{8} \sin(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \\
& \times e^{i\varphi_2} [C_{n+1,m}(t_2) + D_{n+1,m}(t_2)] \left[1 - \cos(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1}\right] \\
& -\Lambda_{n+1}^{(0)} \left(\Lambda_m^{(0)}\right)^* \frac{i}{8} \left[1 + \cos(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3}\right] \\
& \times e^{i\varphi_2} [C_{n+1,m+1}(t_2) + D_{n+1,m+1}(t_2)] e^{-i\varphi_1} \sin(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} \\
& -\Lambda_n^{(0)} \left(\Lambda_{m-1}^{(0)}\right)^* \frac{i}{8} \left[1 - \cos(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3}\right] \\
& \times e^{i\varphi_2} [C_{n,m}(t_2) - D_{n,m}(t_2)] e^{-i\varphi_1} \sin(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} (1 - \delta_{m,0}) \\
& -\Lambda_n^{(0)} \left(\Lambda_{m+1}^{(0)}\right)^* i \frac{e^{i\varphi_3}}{8} \sin(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \\
& \times e^{-i\varphi_2} [-C_{n,m+1}(t_2) + D_{n,m+1}(t_2)] \left[1 - \cos(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1}\right] \\
& +\Lambda_n^{(0)} \left(\Lambda_m^{(0)}\right)^* \frac{1}{8} \left[1 - \cos(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3}\right] \\
& \times [A_{n,m}(t_2) + B_{n,m}(t_2)] \left[1 - \cos(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1}\right] \\
& -\Lambda_n^{(0)} \left(\Lambda_m^{(0)}\right)^* \frac{e^{i\varphi_3}}{8} \sin(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \\
& \times [A_{n,m+1}(t_2) + B_{n,m+1}(t_2)] e^{-i\varphi_1} \sin(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} \\
& +\Lambda_n^{(0)} \left(\Lambda_{m-1}^{(0)}\right)^* i \frac{e^{-i\varphi_3}}{8} \sin(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \\
& \times e^{i\varphi_2} [C_{n+1,m}(t_2) - D_{n+1,m}(t_2)] \left[1 + \cos(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1}\right] (1 - \delta_{m,0}) \\
& +\Lambda_n^{(0)} \left(\Lambda_{m+1}^{(0)}\right)^* \frac{i}{8} \left[1 + \cos(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3}\right] \\
& \times e^{-i\varphi_2} [-C_{n+1,m+1}(t_2) + D_{n+1,m+1}(t_2)] e^{i\varphi_1} \sin(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} \\
& -\Lambda_n^{(0)} \left(\Lambda_m^{(0)}\right)^* \frac{e^{-i\varphi_3}}{8} \sin(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3} \\
& \times [A_{n+1,m}(t_2) + B_{n+1,m}(t_2)] e^{i\varphi_1} \sin(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1} \\
& +\Lambda_n^{(0)} \left(\Lambda_m^{(0)}\right)^* \frac{1}{8} \left[1 + \cos(2\Omega t_3) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_3}\right] \\
& \times [A_{n+1,m+1}(t_2) + B_{n+1,m+1}(t_2)] \left[1 + \cos(2\Omega t_1) e^{-2\Gamma\Omega^2 t_1}\right],
\end{aligned}$$

onde  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , e  $\varphi_3$  são as fases do primeiro pulso carrier, do pulso Jaynes-Cummings e do segundo pulso carrier, respectivamente. Note que, para  $\Gamma = 0$  obtemos da expressão acima o resultado esperado sem ruído.

# Apêndice B

## Obtenção do Hamiltoniano de interação íon aprisionado - gás residual

Neste apêndice, fundamentado em uma analogia com a física de elétrons sobre superfície de hélio líquido [1, 2], mostramos como obter o Hamiltoniano do tipo Fröhlich para a interação íon - gás residual. Por razões práticas assumimos que o gás residual (BG) é contínuo e assumimos também uma simetria cilíndrica para o sistema íon-BG, como esquematizados na Fig. B-1. Consideramos que o íon oscila na direção  $x$  e está a distância  $z$  da origem do sistema de coordenadas que é fixado no centro da nuvem de polarização do BG localizada no plano  $xy$ . Esta distância  $z$  (que contribui para o parâmetro de interação  $V_k$ ) é assumida aqui como uma distância média entre o íon e os átomos que constituem o BG. Como mencionado no capítulo 3, o íon é perturbado pelas oscilações da nuvem de polarização do BG, cuja rugosidade dinâmica será descrita por  $\xi(\vec{r}')$  (como mostrado na Fig. B-1)

A energia potencial do íon devido a polarização do BG é

$$\mathcal{U}(\vec{r}, z) = -\frac{\chi q^2}{2} \int d^2 \vec{r}' \int_{-\infty}^{\xi(\vec{r}')} dz' \frac{1}{\left[ \left| \vec{r}' - \vec{r} \right|^2 + (z' - z)^2 \right]^2}. \quad (\text{B.1})$$

Substituindo as variáveis  $z - \xi(\vec{r}') = \zeta$ ,  $z' - \xi(\vec{r}') = \zeta'$ , e definindo  $\Lambda/\pi \equiv \chi\rho e^2/2$ , podemos escrever a energia potencial como

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\vec{r}, z) &= \delta\mathcal{U}(\vec{r}, z) + \mathcal{U}_0(\vec{r}, z), \\ \delta\mathcal{U}(\vec{r}, z) &= -\frac{\Lambda}{\pi} \int d^2\vec{r}' \int_0^{\xi(\vec{r}') - \xi(\vec{r})} d\zeta' \frac{1}{\left[|\vec{r}' - \vec{r}|^2 + (\zeta' - \zeta)^2\right]^2}, \\ \mathcal{U}_0(\vec{r}, z) &= -\frac{\Lambda}{\pi} \int d^2\vec{r}' \int_{-\infty}^0 d\zeta' \frac{1}{\left[|\vec{r}' - \vec{r}|^2 + (\zeta' - \zeta)^2\right]^2}.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Assumindo que a rugosidade dinâmica das oscilações da nuvem de polarização do BG,  $\xi(\vec{r}') - \xi(\vec{r})$  é pequena e expandindo  $\xi(\vec{r}')$  e  $\xi(\vec{r})$  em séries de Fourier obtemos

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{U}(\vec{r}, z) &\approx -\frac{\Lambda}{\pi} \int d^2\vec{r}' \frac{\xi(\vec{r}') - \xi(\vec{r})}{\left[|\vec{r}' - \vec{r}|^2 + (z' - z)^2\right]^2} \Bigg|_{z'=0} \\ &= \frac{\Lambda}{\pi\sqrt{S}} \sum_{\vec{k}} \xi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left[ \int \frac{d^2\vec{\lambda}}{(\lambda^2 + z^2)^2} - \int \frac{d^2\vec{\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{\lambda}}}{(\lambda^2 + z^2)^2} \right],\end{aligned}\tag{B.3}$$

onde  $S$  é a área da superfície do BG no plano  $xy$  e  $\vec{\lambda} = \vec{r}' - \vec{r}$ . Após a integração sobre  $\vec{\lambda}$  obtemos a energia potencial perturbada

$$\delta\mathcal{U}(\vec{r}, z) \approx \sum_{\vec{k}} \xi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\Lambda}{z\sqrt{S}} \left[ \frac{1}{z} - kK_1(kz) \right],\tag{B.4}$$

onde  $K_1(kz)$  é a função de Bessel modificada. Neste ponto podemos quantizar a variável dinâmica  $\xi(\vec{k})$  como segue [1]:

$$\xi(\vec{k}) = C_{\vec{k}} \left( a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger \right),\tag{B.5}$$

onde  $C_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho\omega(\vec{k})}}$  e  $\omega(\vec{k})$  representa a relação de dispersão para os modos do BG. Definindo o parâmetro de acoplamento

$$V_{\vec{k}} = \frac{\Lambda C_{\vec{k}}}{z\sqrt{S}} \left[ \frac{1}{z} - kK_1(kz) \right],$$

obtemos finalmente a energia potencial iônica quantizada devido a interação com o BG, dada por

$$\mathcal{U}(\vec{r}, z) = \sum_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \left( a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^\dagger \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \mathcal{U}_0(\vec{r}, z),$$

considerando somente uma dimensão, este resultado leva ao Hamiltoniano (3.39).  $\mathcal{U}_0(\vec{r}, z)$  faz o papel de uma energia de referência.

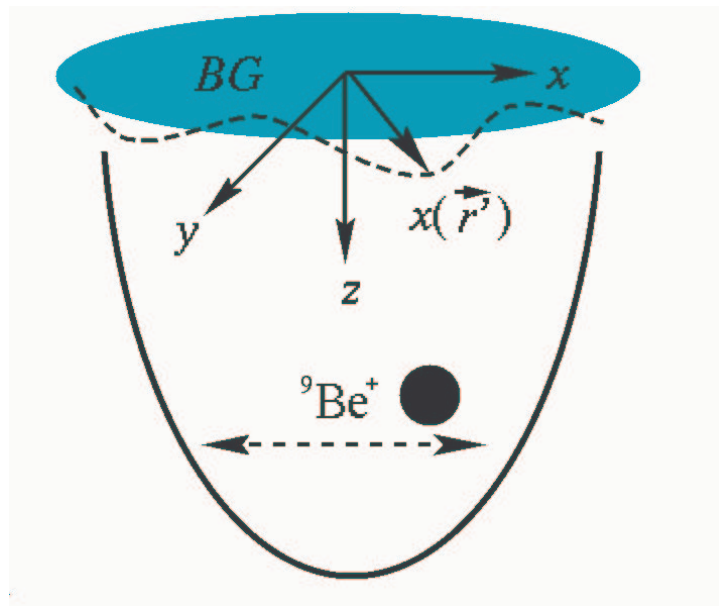


Figura B-1. Representação esquemática da interação íon-BG.

# Referências Bibliográficas

- [1] V. B. Shikin e Yu P. Monarka, “On the interaction of surface electrons in liquid helium with oscillations of the vapor-liquid interface”, *J. Low Temp. Phys.* **16**, 193 (1974).
- [2] N. Studart and S. S. Sokolov, in *Two-Dimensional Electron System*, edited by E. Y. Andrei (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997).

# Apêndice C

## Método de frações continuadas e transformada de Laplace para a solução de equações diferenciais acopladas

Neste apêndice mostraremos a técnica utilizada para obter a solução do sistema infinito de equações diferenciais acopladas (3.70a)-(3.70b) através do método de frações continuadas e transformadas de Laplace [1].

Começamos reescrevendo o sistema (3.70a)-(3.70b) como a equação matricial

$$\dot{\psi}_n(t) = C'_n \psi_n(t) + D_n \psi_{n+1}(t) + E_n \psi_{n-1}(t), \quad n \geq 0 \quad (\text{C.1})$$

onde  $\psi_n(t)$  é o vetor definido por

$$\psi_n(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_n(t) \\ \mathcal{Q}_n(t) \\ \mathcal{R}_n(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

e as matrizes  $C'_n$ ,  $D_n$  e  $E_n$  são dadas por



$$C'_n = \begin{bmatrix} -n\Gamma & 0 & ng \\ 0 & -n\Gamma & ng \\ 0 & -2g & -(n-1/2)\Gamma \end{bmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

$$D_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2g \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

$$E_n = \begin{bmatrix} n^2\Gamma\bar{n}_{th} & 0 & 0 \\ 0 & n^2\Gamma\bar{n}_{th} & 0 \\ ng & -ng & n(n-1)\Gamma\bar{n}_{th} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Assumiremos a seguinte solução da Eq. (C.1)

$$\psi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} G_{n,m}(t) \psi_m(0), \quad (\text{C.6})$$

onde  $G_{n,m}(t)$  são matrizes  $3 \times 3$  com a restrição

$$G_{n,m}(0) = \mathbf{1}\delta_{n,m}.$$

sendo  $\mathbf{1}$  a matriz unitária  $3 \times 3$ . As condições iniciais do problema estão contidas em  $\psi_m(0)$  que depende do estado inicial de movimento do íon. Substituindo (C.6) em (C.1) obtemos

$$\dot{G}_{n,m}(t) = C'_n G_{n,m}(t) + D_n G_{n+1,m}(t) + E_n G_{n-1,m}(t). \quad (\text{C.7})$$

Tomando a transformada de Laplace da Eq. (C.7) temos

$$C_n \tilde{G}_{n,m}(s) + D_n \tilde{G}_{n+1,m}(s) + E_n \tilde{G}_{n-1,m}(s) = -\delta_{n,m}, \quad (\text{C.8})$$

onde  $C_n = C'_n - s$ , e  $s$  representa a variável da transformada de Laplace. Vamos truncar o sistema infinito de equações algébricas dado pela relação de recorrência (C.8) após o  $N$ -ésimo termo, i.e., desprezaremos os termos em que  $n \geq N + 1$ , então este sistema torna-se explicitamente

$$\begin{aligned}
C_0 \tilde{G}_{0,m}(s) + D_0 \tilde{G}_{1,m}(s) &= 0 \\
C_1 \tilde{G}_{1,m}(s) + D_1 \tilde{G}_{2,m}(s) + E_1 \tilde{G}_{0,m}(s) &= 0 \\
&\vdots &= \vdots \\
C_{m-1} \tilde{G}_{m-1,m}(s) + D_{m-1} \tilde{G}_{m,m}(s) + E_{m-1} \tilde{G}_{m-2,m}(s) &= 0 \\
C_m \tilde{G}_{m,m}(s) + D_m \tilde{G}_{m+1,m}(s) + E_m \tilde{G}_{m-1,m}(s) &= -1 \\
C_{m+1} \tilde{G}_{m+1,m}(s) + D_{m+1} \tilde{G}_{m+2,m}(s) + E_{m+1} \tilde{G}_{m,m}(s) &= 0 \\
&\vdots &= \vdots \\
C_{N-1} \tilde{G}_{N-1,m}(s) + D_{N-1} \tilde{G}_{N,m}(s) + E_{N-1} \tilde{G}_{N-2,m}(s) &= 0 \\
C_N \tilde{G}_{N,m}(s) + E_N \tilde{G}_{N-1,m}(s) &= 0.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Para resolver este sistema definimos as relações

$$\tilde{G}_{n\pm 1,m}(s) = S_{n\mp 1}^\pm \tilde{G}_{n\mp 1,m}(s), \tag{C.10}$$

onde

$$S_1^+ = -\frac{E_0}{C_0} \quad \text{e} \quad S_{N-1}^- = -\frac{D_N}{C_N}. \tag{C.11}$$

Expressando  $\tilde{G}_{N-1,m}(s)$  em termos de  $\tilde{G}_{N-2,m}(s)$  com o auxílio das relações (C.10), segue que

$$\tilde{G}_{N-1,m}(s) = -\frac{E_{N-1}}{C_{N-1} + D_{N-1} S_{N-1}^+} \tilde{G}_{N-2,m}(s), \tag{C.12}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
S_{N-2}^+ &= -\frac{E_{N-1}}{C_{N-1} + D_{N-1}S_{N-1}^+}, \\
&= -\frac{E_{N-1}}{C_{N-1} - \frac{D_{N-1}E_N}{C_N}}.
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Procedendo da mesma forma até  $n = m$ , segue que

$$\begin{aligned}
S_m^+ &= -\frac{E_{m+1}}{C_{m+1} - \frac{D_{m+1}E_{m+2}}{C_{m+2} - \frac{D_{m+2}E_{m+3}}{C_{m+3} - \frac{\vdots}{\dots - \frac{D_{N-2}E_{N-1}}{C_{N-1} - \frac{D_{N-1}E_N}{C_N}}}}},
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Dessa forma o limite  $N \rightarrow \infty$  resulta na fração continuada infinita

$$S_m^+ = \frac{E_{m+1}}{|C_{m+1}} - \frac{D_{m+1}E_{m+2}}{|C_{m+2}} - \frac{D_{m+2}E_{m+3}}{|C_{m+3}} - \dots \tag{C.15}$$

Podemos proceder da mesma forma expressando  $\tilde{G}_{0,m}(s)$  em termos de  $\tilde{G}_{1,m}(s)$ , e da mesma forma até  $n = m$  obtendo a seguinte fração continuada finita

$$\begin{aligned}
S_m^- &= -\frac{D_{m-1}}{C_{m-1} - \frac{E_{m-1}D_{m-2}}{C_{m-2} - \frac{E_{m-2}D_{m-3}}{C_{m-3} - \frac{\vdots}{\dots - \frac{E_2D_1}{C_1 - \frac{E_1D_0}{C_0}}}}}.
\end{aligned} \tag{C.16}$$

Finalmente, da equação que contém a não homogeneidade ( $n = m$ ) do sistema (C.9) temos

$$(C_m + D_m S_m^+ + E_m S_m^-) \tilde{G}_{m,m}(s) = -1, \tag{C.17}$$

onde usamos  $\tilde{G}_{m+1,m}(s) = S_m^+ \tilde{G}_{m,m}(s)$  e  $\tilde{G}_{m-1,m}(s) = S_m^- \tilde{G}_{m,m}(s)$ . Assim através desta equação podemos calcular  $\tilde{G}_{m,m}(s)$  como

$$\tilde{G}_{m,m}(s) = -\frac{1}{C_m + D_m S_m^+ + E_m S_m^-}. \tag{C.18}$$

Para calcular os elementos  $\tilde{G}_{n,m}(s)$  com  $n \neq m$  usamos a relação (C.10) como segue

$$\tilde{G}_{n,m}(s) = \tilde{U}_{n,m}(s) \tilde{G}_{m,m}(s),$$

onde

$$\tilde{U}_{n,m}(s) = \begin{cases} S_{n-1}^+ S_{n-2}^+ \cdots S_m^+, & \text{for } n > m \\ 1, & \text{for } n = m \\ S_{n+1}^- S_{n+2}^- \cdots S_m^-, & \text{for } 0 \leq n < m \end{cases}.$$

Assim, podemos obter via transformada de Laplace inversa as matrizes  $G_{n,m}(t)$  ( a transformada inversa das matrizes  $\tilde{G}_{n,m}(s)$  é calculada numericamente).

Para os propósitos do capítulo 3 estamos interessados em obter a dinâmica de  $\mathcal{Q}_0(t) = \langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle$ , dessa forma de (C.2) e (C.6) temos

$$\mathcal{Q}_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (G_{0,m}(t))_{2,1} \mathcal{P}_m(0) + (G_{0,m}(t))_{2,2} \mathcal{Q}_m(0) + (G_{0,m}(t))_{2,3} \mathcal{R}_m(0) \right] \quad (\text{C.19})$$

Para o estado inicial do íon  $|n=0, \downarrow\rangle$  temos as seguintes condições iniciais  $\mathcal{P}_n(0) = \delta_{n,0}$ ,  $\mathcal{Q}_n(0) = -\delta_{n,0}$  e  $\mathcal{R}_n(0) = 0$  que resultam em

$$\mathcal{Q}_0(t) = (G_{0,0}(t))_{2,1} - (G_{0,0}(t))_{2,2}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Risken, *The Fokker Planck Equation: Methods of Solution and Applications*, 2nd ed.(Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin 1989).

# Apêndice D

## Trabalhos Realizados

Neste apêndice apresentamos os trabalhos realizados durante a execução desta tese.

1. R. M. Serra, N. G. de Almeida, C. J. Villas-Bôas e M. H. Y. Moussa, “Engineering cavity-field states by projection synthesis”, *Phys. Rev. A.* **62**, 43810 (2000).
2. N. G. de Almeida, P.B. Ramos, R. M. Serra e M. H. Y. Moussa, “Phenomenological-operator approach to introduce damping effects on radiation field state”, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2**, 792 (2000).
3. E. de P. Abreu, R. M. Serra e P. D. Emmel, “The effect of combination of magnetic field and low temperature on doped quantum wells”, *Physica E* **11**, 190 (2001).
4. R. M. Serra, P.B. Ramos, N. G. de Almeida, W. D. José e M. H. Y. Moussa, “Engineering arbitrary motional ionic state through realistic intensity-fluctuating laser pulses”, *Phys. Rev. A* **63**, 053813 (2001).
5. R. M. Serra, N. G. de Almeida, W. B. da Costa, e M. H. Y. Moussa, “Decoherence in trapped ions due to polarization of the residual background gas”, *Phys. Rev. A* **64**, 033419 (2001).

6. R. M. Serra, C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida e M. H. Y. Moussa, “High-fidelity teleportation of entanglements of running-wave field states”, . Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **4**, 316 (Oct. 2002).
7. R. M. Serra, C. J. Villas-Bôas e M. H. Y. Moussa, “Single-particle quantum tunnelling in ionic traps”, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **5** 237 (2003).
8. R. M. Serra, C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida e M. H. Y. Moussa, “Implementation of high fidelity remote CNOT gate”, *em preparação*.
9. R. M. Serra, *et al.*, “Quantum computation with ions in a double-well potential”, *em preparação*.
10. R. M. Serra, C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida e M. H. Y. Moussa, “Entanglement and quantum information processing with two field modes of a cavity”, *em preparação*.
11. R. M. Serra e P. D. Emmel, “Electronic configuration at low temperatures in doped quantum wells”, *em preparação*.