

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Processos Paramétricos em Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

Celso Jorge Villas-Bôas

Orientador: Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa

Tese submetida ao Departamento de
Física da Universidade Federal de São Carlos
como parte dos requisitos necessários para a
obtenção do Título de Doutor em Física.

São Carlos - SP

- Março - 2004 -

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

V726pp

Villas-Bôas, Celso Jorge.

Processos Paramétricos em eletrodinâmica quântica de cavidades / Celso Jorge Villas-Bôas. -- São Carlos : UFSCar, 2005.

95 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1. Física quântica. 2. Eletrodinâmica quântica de cavidades. 3. Interação átomo-campo. 4. Engenharia de estados quânticos. I. Título.

CDD: 539 (20^a)

À Mariana

Agradecimentos

Tenho inúmeras pessoas a agradecer por este trabalho. São muitas as pessoas às quais devo os meus mais profundos agradecimentos. Entretanto, de um modo especial, gostaria de agradecer a algumas pessoas que tiveram uma participação direta neste trabalho.

A Deus, que permitiu que eu vivesse a sua misericórdia e fidelidade ao longo desses quatro anos.

À Virgem Maria, a quem devo muito, talvez tudo.

Aos meus pais Laércio e Terezinha e aos meus irmãos, a todos sem exceção. Sempre me incentivaram, apoiaram e deram todo auxílio que necessitava.

À Mariana, minha namorada, e grande incentivadora. E também a toda a sua família que se tornou minha.

Aos amigos do Grupo de Oração da Catedral, aos amigos do Departamento de Física da UFSCar.

Ao Miled, por toda a orientação desse trabalho e por todo incentivo.

E por fim, à FAPESP por todo o suporte financeiro desta pesquisa.

Resumo

Estudamos nesta tese o processo de interação de um átomo com um modo de uma cavidade submetido aos processos de amplificação linear e paramétrica. Para a obtenção do operador de evolução do sistema utilizamos a técnica dos invariantes dependentes do tempo de Lewis e Riesenfeld. Mostramos como preparar diferentes estados comprimidos do campo de radiação, em particular o estado do tipo gato de Schrödinger genuinamente mesoscópico. Verificamos que, quando submetido à ação de um reservatório ideal e apropriadamente comprimido, este estado de superposição apresenta um tempo de decoerência da ordem do tempo de relaxação da cavidade.

No intuito de eliminar o processo de amplificação paramétrica externo, procuramos implementá-lo através da própria interação do átomo com o campo de radiação. Para isso utilizamos um átomo de três níveis submetido à ação de um campo clássico que, interagindo com dois modos da cavidade, promove, a depender da configuração dos níveis eletrônicos, os processos de conversão paramétrica descendente e ascendente de frequências. Com a implementação destes processos mostramos como preparar estados de superposição comprimidos (como estados do tipo “gato de Schrödinger”), estados de vácuo de dois modos comprimidos (como o estado original de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)), e emaranhamentos de dois modos (como os estados par e ímpar de EPR). Ressaltamos que a geração destes estados é empreendida sem a necessidade da utilização de zonas de Ramsey e amplificação paramétrica externa. Considerando parâmetros experimentais típicos em eletrodinâmica quântica de cavidades obtemos estados com grau de compressão superior a 95% com a passagem de apenas um átomo pela cavidade. O forte parâmetro de acoplamento paramétrico obtido permite que o tempo de interação átomo-campo seja suficientemente pequeno para que os mecanismos de dissipação possam ser praticamente ignorados.

Abstract

In this thesis we study the interaction between an atom and a cavity mode submitted to linear and parametric amplifications. The evolution operator of the system was derived through the technique of time-dependent invariants of Lewis and Riesenfeld. We show how to prepare several squeezed states of the cavity field and, particularly, the truly mesoscopic "Schrödinger cat"-like state. When submitting such a mesoscopic superposition to the action of a likewise squeezed reservoir, we demonstrate that under specific conditions the decoherence time of the state is about the relaxation time of the cavity field.

Next, the amplification process was engineered through the interaction of a single driven three-level atom with two cavity modes. Depending on the configuration of the atomic levels we obtain the parametric up- or down-conversion process between the cavity modes. With these processes we show how to generate one-mode mesoscopic squeezed superpositions (such as squeezed "Schrödinger cat"-like states), two-mode squeezed vacuum states (such as the original Einstein-Podolsky-Rosen state (EPR)), and two-mode entanglements (such as the even and odd EPR states). The degree of squeezing achieved is up to 95% with currently feasible experimental parameters in cavity quantum electrodynamics. For the atom-field interaction time required in our technique, related to the high coupling parameter, the dissipative mechanism becomes practically negligible.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preparação e controle de estados da luz	6
2.1	Interação átomo-campo e ampliações	7
2.2	Revolvendo a equação de Schrödinger via invariantes dependentes implicitamente do tempo	10
2.2.1	O Hamiltoniano transformado	11
2.2.2	Os operadores de evolução temporal	13
2.3	Evolução do estado átomo-campo	14
2.3.1	Passando N átomos através da cavidade	16
2.4	Soluções analíticas para as equações características (2.15a, 2.15b)	17
2.4.1	Amplificação ressonante	18
2.4.2	Amplificação dispersiva	19
2.5	Funções de Wigner e flutuações das quadraturas do campo	21
2.6	Protocolos para a preparação de estados do tipo “gato de Schrödinger” e de Fock	24
2.6.1	Estados do tipo “gato de Schrödinger”	24
2.6.2	Estados de Fock via estados circulares comprimidos	27
2.7	Estados de superposição mesoscópicos com longo tempo de decoerência	30
2.8	Discussões	35
3	Hamiltonianos efetivos - aproximação adiabática	37

3.1	Conversão Paramétrica Ascendente de Freqüências	39
3.2	Conversão Paramétrica Descendente de Freqüências	43
3.2.1	Geração de estados comprimidos	46
3.2.2	Estimativa do efeito dos processos dissipativos na geração de estados comprimidos	47
4	Hamiltonianos efetivos - expansão perturbativa	51
4.1	Conversão ascendente de freqüências	52
4.1.1	CPA - regime de acoplamento fraco	57
4.1.2	CPA - regime de acoplamento forte	58
4.1.3	Validade da aproximação	59
4.2	Conversão de freqüências descendente	63
4.2.1	CPD - regime de acoplamento fraco	66
4.2.2	CPD - regime de acoplamento forte	66
5	Geração e detecção de estados não clássicos	71
5.1	Geração de estados usando CPA	71
5.2	Geração de estados usando CPD	74
5.2.1	Processo degenerado ($\omega_a = \omega_b$)	74
5.2.2	Processo não degenerado ($\omega_a \neq \omega_b$)	79
5.3	Medindo o estado dos modos da cavidade	83
6	Conclusão	86

Lista de Figuras

2.1	Esquema proposto para a preparação e controle do estado de um campo de radiação aprisionado em uma cavidade (C) de alto fator de qualidade.	8
2.2	Funções de Wigner dos estados gerados para o acoplamento fraco, com $\kappa = \chi/20$, para (a) $\Theta = \pi$, $\alpha = 0$ e $\chi\tau = 2.06$. As variâncias para os operadores das quadraturas são $\langle \Delta X_1 \rangle^2 = \langle \Delta X_2 \rangle^2 = 1.7$ e o fator de compressão é $r(t_2) = 1.45$. O número médio de fótons é $\langle n \rangle = 2.9$. (b) $\Theta = \pi$, $\alpha = \sqrt{2}$ e $\chi\tau = 4.0$, com $\langle \Delta X_1 \rangle = 7.8$, $\langle \Delta X_2 \rangle = 8.8$, $r(t_2) = 1.55$ e $\langle n \rangle = 26.4$. (c) $\Theta = 0$, $\alpha = 5$ e $\chi\tau = 1.68$, com $\langle \Delta X_1 \rangle = 0.02$, $\langle \Delta X_2 \rangle = 256.0$, $r(t_2) = 1.5$ e $\langle n \rangle = 256.2$	26
2.3	Função de Wigner do estado gerado após a passagem de (a) dois átomos, $ \Psi\rangle \approx 8\rangle$, e (b) três átomos, $ \Psi\rangle \approx 16\rangle$, onde ajustamos os parâmetros do sistema para maximizar a fidelidade dos estados de número desejados.	29
3.1	Configuração de níveis atômicos necessária para a engenharia de interações similares àquelas presentes em CPA.	39
3.2	Configuração de níveis atômicos envolvida na engenharia de interações similares àquelas presentes em CPD.	43
4.1	Probabilidades $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ e P_i obtidas a partir do Hamiltoniano efetivo (4.20) (curvas contínuas) e do Hamiltoniano sem aproximação (4.2) (curvas pontilhadas) para o regime de acoplamento fraco e o átomo preparado no estado $ i\rangle$. (a) $\Delta = 15 \lambda $ e (b) $\Delta = 30 \lambda $	59

4.2 Probabilidades $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ e P_i obtidas a partir do Hamiltoniano efetivo (4.22) (curvas contínuas) e do Hamiltoniano sem aproximação (curvas pontilhadas) para o regime de acoplamento forte e o átomo preparado no estado $|i\rangle$. (a) $|\Omega| = 15|\lambda|$ e (b) $|\Omega| = 30|\lambda|$. Em ambos os casos temos $\Delta = 0$ 60

4.3 Probabilidades $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ e P_+ obtidas a partir do Hamiltoniano efetivo (4.21) (curvas contínuas) e do Hamiltoniano sem aproximação (4.2) (curvas pontilhadas) para o regime de acoplamento fraco e o átomo preparado no estado $|+\rangle$. (a) $\Delta = 15|\lambda|$ e $|\Omega| = |\lambda|$, (b) $\Delta = 15|\lambda|$ e $|\Omega| = |\lambda|/3$, (c) $\Delta = 15|\lambda|$ e $|\Omega| = 3|\lambda|$; (d) $\Delta = 25|\lambda|$ e $|\Omega| = 5|\lambda|$ 62

4.4 Probabilidades $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ e P_+ obtidas a partir do Hamiltoniano efetivo (4.23) (curvas contínuas) e do Hamiltoniano sem aproximação (4.2) (curvas pontilhadas) para o regime de acoplamento forte e átomo preparado no estado $|+\rangle$. (a) $|\Omega| = 8|\lambda|$ e (b) $|\Omega| = 15|\lambda|$. Em ambos os casos assumimos $\Delta = 0$ 63

5.1 (a) Função de Wigner $W(\gamma, \gamma^*)$ e (b) sua projeção no plano $\text{Re}(\gamma) \times \text{Im}(\gamma)$ da superposição de dois estados de vácuo comprimidos em direções perpendiculares com $r = 2.25$ 76

5.2 (a) Função de Wigner $W(\gamma, \gamma^*)$ e (b) sua projeção no plano $\text{Re}(\gamma) \times \text{Im}(\gamma)$ da superposição gerada a partir do estado coerente $|\alpha = 3\rangle$, comprimindo-se as componentes em direções perpendiculares com $r = 1.25$ 76

5.3 (a) Função de Wigner $W(\eta, \eta^*)$ e (b) sua projeção no plano $\text{Re}(\eta) \times \text{Im}(\eta)$ de uma mistura estatística de estados de número ímpares de dimensão $N = 2$: $\rho = 1/2 (|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|)$ 82

5.4 (a) Função de Wigner $W(\eta, \eta^*)$ e (b) sua projeção no plano $\text{Re}(\eta) \times \text{Im}(\eta)$ de uma mistura estatística de estados de número ímpares (5.21), para $r = |\eta| \tau = 1.25$ 83

5.5 (a) Função de Wigner $W(\eta, \eta^*)$ e (b) sua projeção no plano $\text{Re}(\eta) \times \text{Im}(\eta)$, de uma mistura estatística de estados de número ímpares (5.21), para $r = |\eta| \tau = 1.75$ 84

Capítulo 1

Introdução

Muitos estudos teóricos e implementações experimentais envolvendo processos de interação radiação-matéria em eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC) e íons aprisionados têm sido realizados recentemente. Por exemplo, a preparação de superposições de estados coerentes da forma $|\Psi\rangle \propto (|\alpha e^{i\phi}\rangle + |\alpha e^{-i\phi}\rangle)$, com $|\alpha|^2 \approx 10$, em cavidades de alto fator de qualidade (alto- Q) [1] e em íons aprisionados [2], tem permitido a investigação da coerência quântica mesoscópica. No domínio da EQC, a decoerência progressiva de superposições mesoscópicas envolvendo campos de radiação com fases classicamente distintas foi observada através da interação átomo-campo [1]. Além disso, a geração e detecção de estados de Fock do campo de radiação foram demonstrados experimentalmente [3] e as oscilações de Rabi de átomos em estados circulares de Rydberg foram medidas [4], revelando a natureza quântica do campo de radiação [5].

Paralelamente aos avanços em EQC, o controle preciso das técnicas de manipulação de estados eletrônicos e vibracionais de íons aprisionados via campos clássicos tem possibilitado a investigação de fenômenos quânticos fundamentais bem como, por exemplo, a realização de várias propostas para computação e comunicação quânticas. A operação de uma porta lógica quântica de dois bits de informação, “Controlled-Not” (C-Not), foi demonstrada via mapeamento dos dois bits quânticos de informação nos graus de liberdade interno e externo de um íon aprisionado [6]. Por outro lado, a superposição de estados vibracionais coerentes do tipo “gato de Schrödinger” [2], bem como outros estados não clássicos do movimento de

um único íon [7], foram realizados experimentalmente. A reconstrução da matriz densidade e da função de Wigner de vários estados quânticos do movimento de um íon aprisionado em um potencial harmônico também foi reportada [8].

Além da interação átomo-campo em EQC e em íons aprisionados, são várias as propostas para a preparação de estados de referência de campos de radiação propagantes, necessários para a medida de propriedades de um campo sinal [9, 10], baseadas em dispositivos ópticos lineares [11] e não lineares [12]. As técnicas desenvolvidas nas últimas décadas para o processo de conversão paramétrica ascendente de frequências e descendente têm possibilitado um grande avanço no domínio da manipulação de campos propagantes. Os estados emaranhados gerados via conversão paramétrica descendente [13] foram utilizados para demonstrar a violação das desigualdades de Bell [14]. Estados emaranhados de três fótons do tipo Greenberger-Horne-Zeilinger também foram gerados [15] e é válido notar que as implementações experimentais do processo de teletransporte de estados quânticos têm sido alcançadas no domínio de ondas propagantes [16], devido às facilidades de se preparar o estado a ser teletransportado, o canal quântico requerido assim como a realização da medida conjunta. Nessa direção, propostas para o teletransporte com alta fidelidade de superposição de estados de um único modo do campo [17] bem como o de estados emaranhados de dois modos do campo de radiação propagantes [18] também foram sugeridas.

Com o aperfeiçoamento das técnicas de geração de estados de superposição, muita atenção tem sido dirigida ao problema da decoerência de estados que surge devido ao inevitável acoplamento entre os sistemas quânticos e o meio ambiente [19, 20, 21] e também devido às flutuações nos parâmetros de interação requeridos para a preparação de uma superposição coerente [22, 23]. Devido à decoerência, muitas das propostas para comunicação [24] e computação [25] quânticas tornam-se difíceis ou até impossíveis de serem implementadas. Dessa forma, muitos trabalhos são direcionados para a investigação de esquemas de proteção de estados quânticos via engenharia de reservatórios em íons aprisionados [26, 27] e em sistemas atômicos de dois níveis [28, 29]. A possibilidade de se controlar os mecanismos de decoerência é crucial para a preparação de estados de superposição e de emaranhamentos de objetos mesoscópicos com um longo tempo de vida requeridos para a implementação de aplicações

potenciais da mecânica quântica em processos de comunicação e computação [30]. Além dos esforços realizados para se construir superposições e emaranhamentos mesoscópicos com fótons e fônons, como referido acima, a possibilidade de se construir tais estados mesoscópicos com partículas massivas é alvo de investigação. Recentemente, correlações de estados coletivos de spin de duas amostras macroscópicas de gás de césio com aproximadamente 10^{12} átomos, foram demonstradas experimentalmente [31]. Na ref. [32] um cenário experimental é elaborado para reduzir dramaticamente a taxa de decoerência de uma superposição quântica de condensados de Bose-Einstein.

Por outro lado, a conversão paramétrica de frequências tem sido largamente utilizada em óptica quântica, necessária para a geração de estados comprimidos da luz e para a geração de estados de dois fótons, permitindo assim a verificação de estatísticas sub-poissonianas [33] e das desigualdades de Bell [13]. A luz comprimida tem também proporcionado um maior entendimento sobre as propriedades dos campos de radiação [33] e de sua interação com a matéria [34], além de ser uma assinatura inconfundível da natureza quântica da luz. Há também aplicações tecnológicas para os processos paramétricos, desde sua utilização em processos de comunicação óptica através do melhoramento da razão sinal/ruído [35] até à possibilidade de medir ondas gravitacionais via campos comprimidos [36]. A importância da conversão paramétrica de frequências também tem sido observada no emergente cenário da teoria da informação quântica. Estados de dois fótons produzidos via conversão paramétrica descendente, no domínio de ondas propagantes, manipulados via dispositivos ópticos lineares, permitem a realização experimental de uma operação lógica não-determinística C-NOT [37]. De fato, a facilidade de se construir “quantum bits” (qubits) via conversão paramétrica descendente, codificados nos estados de polarização dos fótons, e a utilização de elementos ópticos lineares para o processamento de informação quântica têm motivado propostas para computação quântica eficiente [37, 38], comunicação [39] e preparação de estados quânticos [11] com campos de radiação propagantes.

Objetivando a engenharia de estados mesoscópicos do campo de radiação estacionário, apresentamos no capítulo 2 o estudo de um sistema que consiste de um átomo de dois níveis interagindo com um campo de radiação em uma cavidade de alto- Q [40]. Simultaneamente

a essa interação, processos de ampliações paramétrica e linear dependentes do tempo atuam sobre o modo quântico da cavidade. Para obtermos a evolução temporal do sistema utilizamos a técnica de operadores invariantes dependentes do tempo de Lewis e Riesenfeld [41]. Dentre outros casos, demonstramos como é possível gerar estados mesoscópicos do tipo “gato de Schrödinger” comprimidos. Esses estados são de particular interesse pois, sob a ação de um reservatório de modos comprimidos adequadamente, podem apresentar um tempo de decoerência da ordem do tempo de relaxação do sistema mesmo para um número médio de fótons muito maior que a unidade [42]. Há dois pontos que dificultam a realização experimental dessa proposta: *i*) a necessidade de um reservatório de modos comprimidos e *ii*) de um processo de amplificação paramétrica eficiente. Com respeito ao item *i*), observamos que há uma proposta para a implementação de um reservatório de modos comprimidos em cavidades [43], embora não seja um reservatório idealmente comprimido como requerido. Por outro lado, com respeito ao ponto *ii*), nos capítulos 3 e 4 apresentamos um esquema para a implementação de processos de conversão paramétrica de frequências baseado na interação entre um átomo de três níveis, submetido à ação de um campo clássico, e um (dois) modo(s) do campo de radiação em uma cavidade. No capítulo 3 analisamos a obtenção dos Hamiltonianos efetivos via aproximação adiabática como realizado nos trabalhos [44] (onde demonstramos primeiramente como obter um processo de amplificação paramétrica degenerada) e [45] (onde mostramos como processos de conversão paramétrica ascendente de frequências e descendente podem ser implementados em EQC). No capítulo 4, fazemos uma extensão dos estudos realizados no capítulo 3, abrangendo vários regimes de intensidade do campo clássico que atua sobre o átomo durante a interação com os modos da cavidade [46]. Com isso, vários Hamiltonianos de interação efetivos são obtidos, que podem ser úteis para aplicações em computação quântica e/ou estudos sobre fundamentos da teoria quântica. No capítulo 5 demonstramos como esses Hamiltonianos podem ser utilizados, por exemplo, para a geração de estados não clássicos da luz como estados comprimidos, superposição de estados comprimidos em diferentes direções (por exemplo, comprimidos em direções perpendiculares). Também demonstramos como gerar estados emaranhados de dimensão infinita entre os dois modos da mesma cavidade como os estados coerentes emaranhados e estados de

vácuo de dois modos comprimidos, sendo esse último (quando projetado na base de posição) o estado originalmente utilizado por Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) [47] para contestar o princípio da incerteza. Demostramos também como é possível gerar o que definimos como estados emaranhados de EPR “par” e “ímpar”, em analogia aos estados de superposição de estados coerentes “par” e “ímpar”. Por fim, no capítulo 6 discutimos brevemente os resultados apresentados e as perspectivas futuras.

Capítulo 2

Preparação e controle de estados do campo de radiação via processos de amplificação e interação átomo-campo

Métodos para a manipulação de campos de radiação estacionários em cavidades supercondutoras de alto fator de qualidade (alto- Q) através de átomos sujeitos à ação de campos clássicos [48] constituem um meio importante para o controle arbitrário do estado de um modo da cavidade. Embora a evolução temporal de um estado do campo sob amplificações linear e paramétrica seja considerada em óptica quântica para a geração de estados comprimidos e para a investigação de suas propriedades [49, 50], campos de amplificação clássicos são utilizados em propostas de engenharia de estados quânticos arbitrários do campo de radiação. Nesse capítulo desenvolvemos o estudo de um campo estacionário em uma cavidade de alto- Q submetido a processos de amplificação linear e paramétrica que, juntamente com a interação dispersiva (não ressonante) com um átomo de dois níveis, permite gerar estados de superposição do campo de radiação. Em particular, mostramos como gerar um estado de superposição mesoscópico do campo de radiação com um longo tempo decoerência, cuja implementação experimental depende de dois requerimentos básicos: a amplificação paramétrica do campo e um reservatório de modos comprimidos. Além disso, com a técnica

aqui proposta também é possível preparar estados de número via superposição de estados coerentes comprimidos, cujas fidelidades são maiores que os estados gerados como estados circulares [51].

Com a amplificação paramétrica é possível obter estados de superposição com alto grau de compressão e com grande excitação. Demonstramos que tais estados, sob a ação de um reservatório com modos comprimidos adequadamente, exibem um tempo de decoerência da ordem do tempo de relaxação do sistema. De fato, o tempo de decoerência para esse estado de superposição comprimido, gerado através do presente esquema, não depende do fator de compressão proveniente da amplificação paramétrica. No entanto, o número médio de fótons e a distância, no espaço de fase, entre os centros das distribuições de quase-probabilidade dos estados individuais que compõem o estado de superposição preparado crescem exponencialmente com esse fator de compressão. O tempo de decoerência depende somente da excitação do estado coerente previamente injetado na cavidade antes da preparação do estado de superposição comprimido. Este resultado segue quando a direção de compressão do estado de superposição é perpendicular àquela dos modos do reservatório comprimido. Sob esta condição, o emaranhamento entre o estado preparado e os modos do reservatório é minimizado e então a injeção de ruídos no modo da cavidade pelo reservatório é mínima, fazendo com que o estado de superposição tenha um longo tempo de decoerência.

Nos próximos capítulos (3 e 4) apresentamos esquemas para a implementação de um processo de amplificação paramétrica em cavidades de alto- Q . Como os processos de amplificação linear são facilmente realizados em eletrodinâmica quântica de cavidades [52, 53], os esquemas que serão apresentados nos capítulos seguintes são cruciais para a implementação experimental da presente proposta para a preparação e controle de um estado do campo de radiação.

2.1 Interação átomo-campo e amplificações

A configuração proposta para a engenharia de estados do campo de radiação em cavidades de alto- Q , esquematizada na Fig. (2.1), consiste de um átomo A de dois níveis em estados

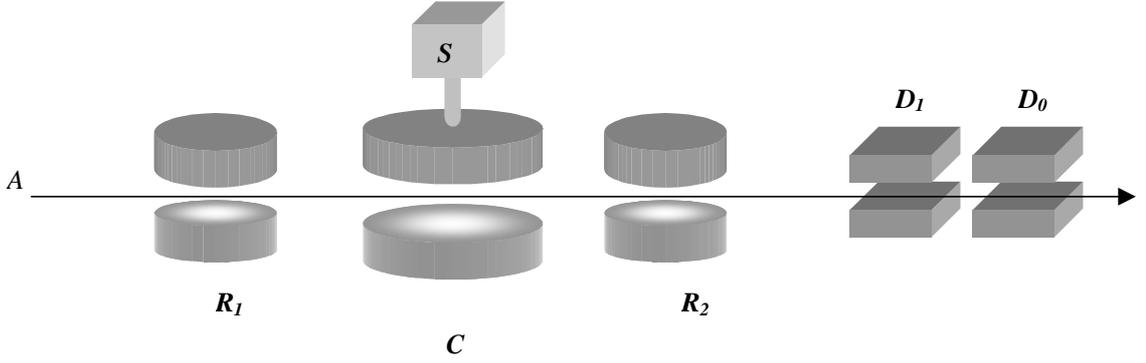


Figura 2.1: Esquema proposto para a preparação e controle do estado de um campo de radiação aprisionado em uma cavidade (C) de alto fator de qualidade.

de Rydberg, que cruza um arranjo de Ramsey, isto é, uma cavidade de microondas de alto- Q localizada entre duas zonas de Ramsey R_1 e R_2 . Após interagir com este arranjo, o átomo tem seu estado eletrônico detectado via câmaras de ionização D_1 e D_0 (para a ionização dos estados excitado $|1\rangle$ ou fundamental $|0\rangle$, respectivamente), projetando o campo de radiação da cavidade no estado desejado. A frequência de transição do átomo de dois níveis A está suficientemente fora da ressonância com a frequência do modo da cavidade, ocorrendo assim uma interação dispersiva entre o átomo e o modo da cavidade. Juntamente a essa interação dispersiva com o átomo de dois níveis, o modo da cavidade está submetido a processos de amplificação linear e paramétrica (ambos representados pela fonte S na Fig. (2.1)). Assim, o Hamiltoniano que descreve o nosso modelo pode ser escrito da forma (com $\hbar = 1$)

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{\omega_0}{2} \sigma_z + \chi a^\dagger a \sigma_z + \mathcal{H}_{amplif}, \quad (2.1)$$

onde $\sigma_z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|$, a^\dagger e a são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação de fótons para o modo da cavidade de frequência ω . Os níveis de energia atômicos são separados por ω_0 , de modo que a dessintonia $\delta = |\omega - \omega_0|$ é grande o suficiente para que ocorra somente transições virtuais entre estes níveis $|0\rangle$ e $|1\rangle$. O parâmetro de acoplamento átomo-campo dentro da cavidade é $\chi = \Omega^2/\delta$, onde Ω é a frequência de Rabi [49]. A expressão para a interação dispersiva átomo-campo, $\chi a^\dagger a \sigma_z$, é válida sob a suposição de que $\Omega^2 n \ll \delta^2 + \gamma^2$,

sendo n o número médio de fótons e γ a taxa de emissão espontânea [54]. Supomos, por simplicidade, que o acoplamento átomo-campo é ligado (desligado) instantaneamente quando o átomo adentra (deixa) a região da cavidade, de tal modo que $\chi = 0$ quando o átomo está fora da cavidade.

Consideramos que o átomo seja preparado no tempo $t = t_0$ pela zona de Ramsey R_1 em uma superposição dos níveis $|0\rangle$ e $|1\rangle$, alcança a cavidade C no tempo t_1 e a deixa no tempo t_2 . Assumimos que as amplificações linear e paramétrica sejam ligadas em t_0 e desligadas em um tempo conveniente $t \geq t_2$. Finalmente, a ação dos mecanismos de amplificação sobre o modo da cavidade é descrita pelo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{amplif} = \zeta(t)a^{\dagger 2} + \zeta^*(t)a^2 + \xi(t)a^\dagger + \xi^*(t)a, \quad (2.2)$$

onde as funções dependentes do tempo $\zeta(t)$ e $\xi(t)$ estão associadas às amplificações paramétrica e linear, respectivamente. É bem conhecido que, para valores específicos destas funções dependentes do tempo, os auto-estados da equação de Schrödinger podem apresentar compressão em uma das duas quadraturas do modo da cavidade [49, 50, 55, 56, 57].

O vetor de estado mais geral (na Representação de Schrödinger), escrito na base definida pelo Hamiltoniano (2.1), é dado por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{i\omega_0 t/2} |0\rangle |\Phi_0(t)\rangle + e^{-i\omega_0 t/2} |1\rangle |\Phi_1(t)\rangle, \quad (2.3)$$

onde $|\Phi_\ell(t)\rangle = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \mathcal{A}_\ell(\beta, t) |\beta\rangle$, $\ell = 0, 1$, β são os auto-valores do operador a e $\mathcal{A}_\ell(\beta, t) = \langle \beta, \ell | \Psi(t) \rangle$ são os coeficientes da expansão de $|\Phi_\ell(t)\rangle$ na base de estados coerentes $\{|\alpha\rangle\}$. Usando a ortogonalidade dos estados atômicos e as Eqs. (2.1) e (2.3) obtemos as equações de Schrödinger dependentes do tempo desacopladas:

$$i \frac{d}{dt} |\Phi_\ell(t)\rangle = \mathbf{H}_\ell |\Phi_\ell(t)\rangle, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{H}_\ell = \omega_\ell(t) a^\dagger a + \zeta(t) a^{\dagger 2} + \zeta^*(t) a^2 + \xi(t) a^\dagger + \xi^*(t) a, \quad (2.5)$$

com $\omega_\ell(t) = \left[\omega - (-1)^\ell \chi \Theta(t - t_1) \Theta(t_2 - t) \right]$. Notemos que o problema agora reduziu-se àquele de um campo na cavidade sob a ação de processos de amplificação linear e paramétrica,

cuja frequência ω é deslocada de $-\chi$ ($+\chi$) quando interage com o estado atômico 0 (1), durante o intervalo de tempo $\tau = t_2 - t_1$.

Resolvendo a Eq. (2.4) obtemos, a partir de um estado inicial do modo da cavidade $|\Phi_\ell(t_i)\rangle$, o estado evoluído

$$|\Phi_\ell(t)\rangle = \mathbb{U}_\ell(t, t_i) |\Phi_\ell(t_i)\rangle, \quad (2.6)$$

que define o operador de evolução que estamos procurando. Os operadores $\mathbb{U}_\ell(t_1, t_0)$ e $\mathbb{U}_\ell(t, t_2)$, que descrevem a evolução do vetor de estado do campo de radiação enquanto o átomo está fora da cavidade, não depende do estado do átomo de dois níveis, fazendo com que o índice ℓ seja desnecessário. Entretanto, o operador $\mathbb{U}_\ell(t_2, t_1)$, associado à evolução do estado do campo de radiação durante a sua interação com o átomo, depende do estado atômico e difere dos operadores $\mathbb{U}(t_1, t_0)$ e $\mathbb{U}(t, t_2)$ pela frequência deslocada $\omega_\ell(t)$.

2.2 Revolvendo a equação de Schrödinger via invariantes dependentes implicitamente do tempo

O Hamiltoniano (2.5) tem sido investigado com o objetivo de se obter estados comprimidos do campo de radiação. Métodos de teoria de Grupo [55, 58] e invariantes dependentes do tempo [56] são utilizados para resolução de Hamiltonianos quadráticos que podem representar, por exemplo, uma partícula carregada sujeita a um movimento harmônico imersa em um campo magnético uniforme dependentes do tempo, um campo viajando através de um meio não linear ou, como na presente situação, um modo em uma cavidade com frequência deslocada sob a ação de amplificações linear e paramétrica. Neste trabalho, fazemos uso dos invariantes dependentes do tempo de Lewis e Riesenfeld [41] para resolver a equação de Schrödinger (2.4), seguindo o procedimento adotado na Ref. [56]: ao invés de propormos um operador invariante associado ao Hamiltoniano (2.5), realizamos primeiramente uma transformação unitária sobre o Hamiltoniano de modo a reduzi-lo a uma forma que já tenha um operador invariante associado conhecido. Desse modo, sob uma transformação unitária representada pelo operador $S(\varepsilon_\ell)$ (ε_ℓ representando um conjunto de parâmetros dependentes do tempo

que pode também depender do estado atômico ℓ), obtemos a partir da Eq. (2.4)

$$i \frac{d}{dt} |\Phi_\ell^S(t)\rangle = \mathcal{H}_\ell^S |\Phi_\ell^S(t)\rangle, \quad (2.7)$$

onde o Hamiltoniano transformado e o vetor de estado são dados por

$$\mathcal{H}_\ell^S = S^\dagger(\varepsilon_\ell) \mathbf{H}_\ell S(\varepsilon_\ell) + i \frac{dS^\dagger(\varepsilon_\ell)}{dt} S(\varepsilon_\ell), \quad (2.8a)$$

$$|\Phi_\ell^S(t)\rangle = S^\dagger(\varepsilon_\ell) |\Phi_\ell(t)\rangle. \quad (2.8b)$$

A seguir, fazemos uso de dois teoremas para obtermos as soluções da equação de Schrödinger dependentes do tempo (2.4): a) um teorema exposto em [56] assegura que, se $I_\ell(t)$ é um operador invariante associado a \mathbf{H}_ℓ , isto é,

$$\frac{dI_\ell(t)}{dt} = \frac{\partial I_\ell}{\partial t} + i [\mathbf{H}_\ell, I_\ell(t)] = 0, \quad (2.9)$$

então o operador invariante transformado $I_\ell^S(t) = S^\dagger(\varepsilon_\ell) I_\ell(t) S(\varepsilon_\ell)$ será um invariante associado a \mathcal{H}_ℓ^S ; b) por outro lado, do teorema de Lewis e Riesenfeld [41], segue que uma solução da equação de Schrödinger é um auto-estado do operador invariante Hermitiano $I_\ell(t)$ multiplicado para um fator de fase dependente do tempo. Segue então, de a) e b), que as soluções da Eq. (2.4) são dadas por

$$|\Phi_{\ell,m}(t)\rangle = S(\varepsilon_\ell) |\Phi_{\ell,m}^S(t)\rangle = S(\varepsilon_\ell) e^{i\phi_{\ell,m}^S(t)} |m, t\rangle_S, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

onde $|m, t\rangle_S$ é o auto-estado do invariante [59] e a fase de Lewis e Riesenfeld [41] obedece a equação

$$\phi_{\ell,m}^S(t) = \int_{t_i}^t dt' {}_S \langle m, t' | \left(i \frac{\partial}{\partial t'} - \mathcal{H}_\ell^S \right) |m, t'\rangle_S. \quad (2.11)$$

Podemos verificar que, sob a transformação unitária definida pelo operador $S(\varepsilon_\ell)$, a fase dependente do tempo é invariante, ou seja, $\phi_{\ell,m}^S(t) = \phi_{\ell,m}(t)$.

2.2.1 O Hamiltoniano transformado

A seguir, associamos a transformação unitária ao operador de compressão,

$$S(\varepsilon_\ell) = \exp \left[\frac{1}{2} \left(\varepsilon_\ell a^\dagger{}^2 - \varepsilon_\ell^* a^2 \right) \right], \quad (2.12)$$

onde a função complexa dependente do tempo $\varepsilon_\ell = r_\ell(t) e^{i\varphi_\ell(t)}$ inclui os parâmetros de compressão $r_\ell(t)$ e $\varphi_\ell(t)$. $r_\ell(t)$ é o fator de compressão enquanto que $\varphi_\ell(t)$ define a direção de compressão no espaço de fase. Além disso, podemos escrever os parâmetros dependentes do tempo das ampliações paramétrica e linear como $\zeta(t) = \kappa(t) e^{i\eta(t)}$ e $\xi(t) = \varkappa(t) e^{i\varpi(t)}$, respectivamente. Os parâmetros de compressão $(r_\ell(t), \varphi_\ell(t))$, as amplitudes de amplificação $(\kappa(t), \varkappa(t))$ e as frequências $(\eta(t), \varpi(t))$ são todas funções reais e dependentes do tempo. Com as suposições acima e após uma álgebra extensa, o Hamiltoniano transformado torna-se

$$\mathcal{H}_\ell^S = \Omega_\ell(t) a^\dagger a + \Lambda_\ell(t) a^\dagger + \Lambda_\ell^*(t) a + F_\ell(t), \quad (2.13)$$

desde que os coeficientes dependentes do tempo satisfaçam

$$\Omega_\ell(t) = \omega_\ell(t) + 2\kappa(t) \tanh r_\ell(t) \cos(\eta(t) - \varphi_\ell(t)), \quad (2.14a)$$

$$\Lambda_\ell(t) = \xi(t) \cosh r_\ell(t) + \xi^*(t) e^{i\varphi_\ell(t)} \sinh r_\ell(t), \quad (2.14b)$$

$$F_\ell(t) = \kappa(t) \tanh r_\ell(t) \cos(\eta(t) - \varphi_\ell(t)), \quad (2.14c)$$

enquanto que os parâmetros de compressão $r_\ell(t)$ e $\varphi_\ell(t)$ decorrem das equações diferenciais acopladas

$$\dot{r}_\ell(t) = 2\kappa(t) \sin(\eta(t) - \varphi_\ell(t)), \quad (2.15a)$$

$$\dot{\varphi}_\ell(t) = -2\omega_\ell(t) - 4\kappa(t) \coth(2r_\ell(t)) \cos(\eta(t) - \varphi_\ell(t)). \quad (2.15b)$$

É evidente destas equações que o parâmetro dependente do tempo $\varepsilon_\ell(t)$, que define o operador unitário $S(\varepsilon_\ell)$, depende do estado atômico ℓ , como assumido anteriormente. Finalmente, mencionamos que temos associado a transformação unitária ao operador de compressão visto que, como é conhecido, a amplificação paramétrica descrita pelo Hamiltoniano (2.2) comprime o estado do campo de radiação da cavidade. Como vemos, o parâmetro dependente do tempo $\zeta(t)$, que define a amplificação paramétrica na Eq. (2.2), está conectado aos parâmetros de compressão $(r_\ell(t), \varphi_\ell(t))$ como indicam as Eqs. (2.15a) e (2.15b).

2.2.2 Os operadores de evolução temporal

Com o Hamiltoniano (2.13) em mãos, retornamos à solução da equação de Schrödinger (2.7). A aplicação do método de invariantes conduz ao vetor de estado [59]

$$|\Phi_{\ell,m}^S(t)\rangle = e^{i\phi_{\ell,m}(t)} D[\theta_{\ell}(t)] |m\rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.16)$$

onde $|m\rangle$ é o estado de número e

$$D[\theta_{\ell}(t)] = \exp[\theta_{\ell}(t)a^{\dagger} - \theta_{\ell}^*(t)a] \quad (2.17)$$

é o operador de deslocamento coerente, $\theta_{\ell}(t)$ sendo a solução da equação $i\dot{\theta}_{\ell}(t) = \Omega_{\ell}(t)\theta_{\ell}(t) + \Lambda_{\ell}(t)$, dada por

$$\theta_{\ell}(t) = e^{-i\beta_{\ell}(t)} \left(\theta_{\ell}(t_i) - i \int_{t_i}^t \Lambda_{\ell}(t') e^{i\beta_{\ell}(t')} dt' \right), \quad (2.18)$$

com $\beta_{\ell}(t) = \int_{t_i}^t \Omega_{\ell}(t') dt'$. (É importante notar que a influência do átomo na evolução do estado do campo de radiação é caracterizada pelo subscrito ℓ nas expressões acima.) Da substituição do Hamiltoniano (2.13) na fase de Lewis e Riesenfeld, definida na Eq. (2.11), obtemos

$$\phi_{\ell,m}(t) = - \int_{t_i}^t \left\{ m\Omega_{\ell}(t') + \frac{1}{2} [\Lambda_{\ell}^*(t')\theta_{\ell}(t') + \Lambda_{\ell}(t')\theta_{\ell}^*(t')] + F_{\ell}(t') \right\} dt'. \quad (2.19)$$

Portanto, as soluções da equação de Schrödinger (2.4), que formam um conjunto completo, podem ser escritas como

$$|\Phi_{\ell,m}(t)\rangle = S[\varepsilon_{\ell}(t)] |\Phi_{\ell,m}^S(t)\rangle = U_{\ell}(t) |m\rangle, \quad (2.20)$$

onde

$$U_{\ell}(t) = \Upsilon_{\ell}(t) S[\varepsilon_{\ell}(t)] D[\theta_{\ell}(t)] R[\Omega_{\ell}(t)] \quad (2.21)$$

é um operador unitário contendo, em adição aos operadores de compressão e de deslocamento, um fator de fase global

$$\Upsilon_{\ell}(t) = \exp \left\{ -i \int_{t_i}^t [\text{Re} [\Lambda_{\ell}^*(t')\theta_{\ell}(t')] + F_{\ell}(t')] dt' \right\} \quad (2.22)$$

e um operador de rotação, no espaço de fase, derivado do fator de fase dependente do tempo de Lewis e Riesenfeld, dado por

$$R[\Omega_\ell(t)] = \exp[-ia^\dagger a \beta_\ell(t)]. \quad (2.23)$$

Desse modo, as soluções da equação de Schrödinger (2.4) podem ser escritas como

$$|\Phi_\ell(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m |\Phi_{\ell,m}(t)\rangle = U_\ell(t) \sum_{m=0}^{\infty} C_m |m\rangle = U_\ell(t) U_\ell^\dagger(t_i) |\Phi_\ell(t_i)\rangle, \quad (2.24)$$

que finalmente define os operadores de evolução

$$\mathbb{U}_\ell(t, t_i) = U_\ell(t) U_\ell^\dagger(t_i). \quad (2.25)$$

Notemos que para o instante inicial, $t_0 = 0$, $R[\Omega_\ell(0)] = R[0] = 1$, $D[\theta_\ell(0)] = D(\theta_0)$ onde θ_0 refere-se ao estado coerente inicial da cavidade, $S[\varepsilon_\ell(0)] = S[0] = 1$ e $\Upsilon_\ell(0) = 1$.

2.3 Evolução do estado átomo-campo

Vamos assumir que o modo da cavidade de microondas é preparado no tempo t_0 em um estado coerente $|\alpha\rangle$ por uma fonte monocromática, tal que $m = 0$ na Eq. (2.20) e $\theta_0 = \alpha$. (Campos de microonda clássicos são injetados dentro da cavidade e as amplitudes destes campos podem ser ajustadas variando o tempo de injeção.) Como mencionado acima, as amplificações linear e paramétrica são supostamente ligadas em $t = t_0$, no mesmo instante em que o estado atômico é preparado pela zona de Ramsey R_1 na superposição $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$. O estado do sistema átomo-campo no tempo inicial t_0 é então escrito como

$$|\Psi(t_0)\rangle = [e^{i\omega_0 t_0/2} c_0 |0\rangle + e^{-i\omega_0 t_0/2} c_1 |1\rangle] |\alpha\rangle. \quad (2.26)$$

(Da Eq. (2.3) vemos que $\mathcal{A}_\ell(\beta, t_0) = \langle \beta, \ell | (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle) |\alpha\rangle$ e segue imediatamente que $|\Phi_\ell(t_0)\rangle = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \mathcal{A}_\ell(\beta, t_0) |\beta\rangle = c_\ell |\alpha\rangle$.)

A evolução do estado inicial $|\Psi(t_0)\rangle$ até o instante em que o átomo adentra a cavidade ($t = t_1$) é

$$|\Psi(t_1)\rangle = \mathbb{U}(t_1, t_0) |\Psi(t_0)\rangle. \quad (2.27)$$

Evidentemente o operador de evolução $\mathbb{U}(t_1, t_0)$, que governa a dinâmica do campo de radiação da cavidade enquanto o átomo está fora da cavidade, não depende do estado do átomo de dois níveis. Por outro lado, durante o intervalo de tempo $\tau = t_2 - t_1$, o átomo viaja dentro da cavidade e então a evolução do sistema todo é governada pelo operador $\mathbb{U}_\ell(t_2, t_1) = U_\ell(t_2)U_\ell^\dagger(t_1)$. Este operador depende do estado atômico ℓ e difere dos operadores $\mathbb{U}(t_1, t_0)$ e $\mathbb{U}_\ell(t, t_2)$ pela frequência deslocada $\omega_\ell(t)$. Portanto, no tempo em que o átomo deixa a cavidade, o estado do sistema átomo-campo é dado por

$$|\Psi(t_2)\rangle = [e^{i\omega_0 t_2/2} c_0 |0\rangle \mathbb{U}_0(t_2, t_1) + e^{-i\omega_0 t_2/2} c_1 |1\rangle \mathbb{U}_1(t_2, t_1)] \mathbb{U}(t_1, t_0) |\alpha\rangle. \quad (2.28)$$

Após cruzar a cavidade o átomo viaja livremente de $t = t_2$ até o instante em que chega até a segunda zona de Ramsey R_2 . Durante este intervalo de tempo, o modo da cavidade continua sofrendo a atuação das amplificações e assim o estado completo do sistema, evoluindo sob o operador $\mathbb{U}_\ell(t, t_2)$, escreve-se na forma

$$|\Psi(t)\rangle = [e^{i\omega_0 t/2} c_0 |0\rangle \mathbb{U}_0(t, t_2)\mathbb{U}_0(t_2, t_1) + e^{-i\omega_0 t/2} c_1 |1\rangle \mathbb{U}_1(t, t_2)\mathbb{U}_1(t_2, t_1)] \mathbb{U}(t_1, t_0) |\alpha\rangle. \quad (2.29)$$

Após cruzar a zona de Ramsey R_2 , onde um pulso $\pi/2$ é aplicado e a fase do campo ajustada de modo que

$$|0\rangle \rightarrow (-|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}, \quad (2.30a)$$

$$|1\rangle \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}, \quad (2.30b)$$

o sistema é conduzido para o estado

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ & [-e^{i\omega_0 t/2} c_0 \mathbb{U}_0(t, t_0) + e^{-i\omega_0 t/2} c_1 \mathbb{U}_1(t, t_0)] |0\rangle \\ & + [e^{i\omega_0 t/2} c_0 \mathbb{U}_0(t, t_0) + e^{-i\omega_0 t/2} c_1 \mathbb{U}_1(t, t_0)] |1\rangle \} |\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde definimos os operadores

$$\mathbb{U}_\ell(t, t_0) = \mathbb{U}_\ell(t, t_2)\mathbb{U}_\ell(t_2, t_1)\mathbb{U}(t_1, t_0). \quad (2.32)$$

Finalmente, medindo o estado atômico, o campo na cavidade é projetado no estado do tipo “gato de Schrödinger”

$$|\Psi(t)\rangle = \mathcal{N}_\pm [\pm e^{i\omega_0 t/2} c_0 \mathbb{U}_0(t, t_0) + e^{-i\omega_0 t/2} c_1 \mathbb{U}_1(t, t_0)] |\alpha\rangle, \quad (2.33)$$

onde o sinal $+$ ou $-$ ocorre se o átomo é detectado no estado $|1\rangle$ ou $|0\rangle$, respectivamente, e \mathcal{N}_\pm refere-se ao fator de normalização. Da Eq. (2.33) segue que, após a medida do estado atômico a superposição gerada pode ser ainda controlada ajustando-se os parâmetros de amplificação dependentes do tempo $\kappa(t)$, $\varkappa(t)$, $\eta(t)$ e $\varpi(t)$.

É válido notar que a expressão (2.33) pode ser manipulada, utilizando-se as Eqs. (2.21), (2.25) e (2.32), para obtermos a forma simplificada:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \mathcal{N}_\pm \left[\pm e^{i\omega_0 t/2} c_0 \Upsilon_0(t) S[\varepsilon_0(t)] |\theta_0(t)\rangle + e^{-i\omega_0 t/2} c_1 \Upsilon_1(t) S[\varepsilon_1(t)] |\theta_1(t)\rangle \right] \\ &= \mathcal{N}_\pm \sum_{\ell=0}^1 c_\ell(t) S[\varepsilon_\ell(t)] D[\theta_\ell(t)] |0\rangle \\ &= \mathcal{N}_\pm \sum_{\ell=0}^1 c_\ell(t) S[\varepsilon_\ell(t)] |\theta_\ell(t)\rangle, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde $c_\ell(t) = \pm (\pm)^\ell e^{(-)^\ell i\omega_0 t/2} c_\ell \Upsilon_\ell(t)$ e a amplitude do estado coerente $|\theta_\ell(t)\rangle$ segue da Eq. (2.18).

2.3.1 Passando N átomos através da cavidade

Procedemos agora à construção de um estado do campo de radiação através da passagem de dois ou mais átomos através da cavidade C . Podemos ver, a partir da Eq. (2.33), que após a passagem de N átomos através da cavidade C , cada átomo preparado pela zona de Ramsey R_1 em uma superposição dos estados fundamental e excitado: $c_{0,k} |0\rangle + c_{1,k} |1\rangle$, $k = 1, \dots, N$, o estado do campo será

$$|\Psi_N(t)\rangle = \mathcal{N}_\pm \prod_{k=1}^N \left[\pm e^{i\omega_0 t/2} c_{0,k} \mathbf{U}_{0,k}(t_{f,k}, t_{i,k}) + e^{-i\omega_0 t/2} c_{1,k} \mathbf{U}_{1,k}(t_{f,k}, t_{i,k}) \right] |\alpha\rangle, \quad (2.35)$$

onde $t_{i,k}$ refere-se ao tempo em que o k -ésimo átomo é preparado por R_1 e $t_{f,k}$ refere-se ao tempo em que o k -ésimo átomo é detectado, que assumimos ser o mesmo que $t_{i,k+1}$. Portanto, obtemos $\mathbf{U}_{\ell,k}(t_{f,k}, t_{i,k}) = \mathbb{U}_\ell(t_{f,k} = t_{i,k+1}, t_{2,k}) \mathbb{U}_\ell(t_{2,k}, t_{1,k}) \mathbb{U}_\ell(t_{1,k}, t_{i,k} = t_{f,k-1})$. Após algumas

manipulações e usando a Eq. (2.34), o estado (2.35) pode ser simplificado à forma

$$\begin{aligned} |\Psi_N(t)\rangle &= \mathcal{N}_\pm \sum_{\ell_1, \dots, \ell_N=0}^1 \prod_{k=1}^N c_{\ell_k}(t) S[\varepsilon_{\ell_1, \dots, \ell_N}(t)] |\theta_{\ell_1, \dots, \ell_N}(t)\rangle \\ &= \mathcal{N}_\pm \sum_{k=1}^{2^N} C_k(t) S[\Xi_k(t)] |\vartheta_k(t)\rangle, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde substituímos $\sum_{\ell_1, \dots, \ell_N=0}^1$ por $\sum_{k=1}^{2^N}$, e definimos $\Xi_k(t) \equiv r_{\ell_1, \dots, \ell_N}(t) \exp(i\varphi_{\ell_1, \dots, \ell_N}(t))$ e $\vartheta_k(t) \equiv \theta_{\ell_1, \dots, \ell_N}(t)$.

2.4 Soluções analíticas para as equações características (2.15a, 2.15b)

Nesta seção apresentamos algumas soluções específicas para as equações características (2.15a, 2.15b), seguindo um tratamento mais detalhado descrito em [56]. Investigamos primeiramente a situação em que a frequência do modo da cavidade é ressonante com as frequências dos campos clássicos de amplificação durante o tempo em que o átomo está fora da cavidade, ou seja, de t_0 a t_1 e de t_2 a t . Assumimos então que o amplificador paramétrico opere no regime degenerado no qual as frequências dos modos de saída (sinal e idler) coincidem, produzindo um único modo de amplificação. No regime ressonante este único modo do campo de amplificação paramétrica tem a mesma frequência ω que o modo da cavidade e assim $\eta(t) = -2\omega t$ [49]. Para a amplificação linear, segue que $\varpi(t) = -\omega t$. Entretanto, durante o tempo em que o átomo encontra-se dentro da cavidade, de t_1 a t_2 , a frequência do modo da cavidade é deslocada, eliminando a ressonância entre o modo e os campos clássicos de amplificação, estabelecendo-se um regime de amplificação dispersiva. Desse modo, analisamos a seguir as soluções para as equações diferenciais acopladas (2.15a, 2.15b) para ambos os regimes ressonante e dispersivo.

2.4.1 Amplificação ressonante

Considerando, primeiramente, a solução das equações caracterísctas (2.15a,2.15b) para o regime de amplificação ressonante, que opera enquanto o átomo está fora da cavidade, de t_0 a t_1 e t_2 a t , quando então temos $\omega_\ell(t) = \omega$, $\varpi(t) = -\omega t$ e $\eta(t) = -2\omega t$. Definindo $\omega = \dot{f}(t)$, $\varphi(t) = -2f(t) + g(t)$ e $\eta(t) = -2f(t) + h(t)$, as Eqs. (2.15a,2.15b) tornam-se

$$\dot{r}(t) = -2\kappa(t) \sin(g(t) - h(t)), \quad (2.37a)$$

$$\dot{g}(t) = -4\kappa(t) \coth(2r(t)) \cos(g(t) - h(t)). \quad (2.37b)$$

Assumindo que $h(t) = h$ seja uma constante, a dependência temporal pode ser eliminada das Eqs. (2.37a), (2.37b) dividindo-se uma pela outra de modo a obtermos uma única equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dr}{dg} = \frac{1}{2} \tanh(2r) \tan(g - h). \quad (2.38)$$

Após integrarmos a Eq. (2.38), obtemos a constante de movimento

$$\cos(\varphi(t) - \eta(t)) \sinh(2r(t)) = \mathcal{C}_i, \quad (2.39)$$

com \mathcal{C}_i dependendo dos valores iniciais $r(t_i)$, $\varphi(t_i)$ e $\eta(t_i)$, onde $i = 0, 2$. Desse modo, as soluções das Eqs. (2.37a) e (2.37b), que aplicam-se sob a condição $\cosh^2(2r(t)) > 1 + \mathcal{C}_i^2$, são dadas por

$$\cosh(2r(t)) = \sqrt{1 + \mathcal{C}_i^2} \cosh \left[\cosh^{-1} \left(\frac{\cosh 2r(t_i)}{\sqrt{1 + \mathcal{C}_i^2}} \right) \pm u(t, t_i) \right], \quad (2.40a)$$

$$\cos(\varphi(t) - \eta(t)) = \frac{\mathcal{C}_i}{\sqrt{\cosh^2 2r(t) - 1}}, \quad (2.40b)$$

onde

$$u(t, t_i) = 4 \int_{t_i}^t \kappa(t) dt. \quad (2.41)$$

Notemos que, para $t_i = 0$ o termo \cosh^{-1} na Eq. (2.40a) é nulo e os sinais \pm tornam-se irrelevantes. Entretanto, para $t_i = t_2$ escolhemos o sinal de modo que tenhamos sempre $r(t) \geq 0$.

2.4.2 Amplificação dispersiva

A amplificação dispersiva ocorre durante o tempo em que o átomo está dentro da cavidade, deslocando a frequência ω por $\chi = \Omega^2/\delta$, de modo que $\omega_\ell = \omega - (-1)^\ell \chi$. Evidentemente, as frequências de amplificação não são afetadas pela passagem do átomo, de modo que $\eta(t) = -2\omega t$ e $\varpi(t) = -\omega t$. Assumindo que o parâmetro κ seja independente do tempo e definindo $\varphi_\ell(t) - \eta(t) = f_\ell(t)$ e $\dot{\eta}(t) + 2\omega_\ell(t) = \dot{g}_\ell$, as Eqs. (2.15a,2.15b) tornam-se

$$\dot{r}_\ell(t) = 2\kappa \sin(f_\ell(t)), \quad (2.42a)$$

$$\dot{f}_\ell(t) = -\dot{g}_\ell - 4\kappa \coth(2r_\ell(t)) \cos(f_\ell(t)). \quad (2.42b)$$

Visto que $\dot{g}_\ell = -(-1)^\ell 2\chi$ é uma constante durante todo o tempo em que o átomo está dentro da cavidade, as Eqs. (2.42a,2.42b) podem ser resolvidas novamente dividindo uma pela outra, conduzindo à constante de movimento

$$\cosh(2r_\ell(t)) + \mathbf{P}_\ell \cos(\varphi_\ell(t) - \eta(t)) \sinh(2r_\ell(t)) = \mathcal{C}_1, \quad (2.43)$$

que depende das condições iniciais $r(t_1)$, $\varphi(t_1)$ e $\eta(t_1)$. Mesmo com a suposição de que o acoplamento átomo-campo seja ligado instantaneamente em $t = t_1$, estes valores iniciais devem ser calculados a partir das soluções para o regime de amplificação ressonante em $t = t_1$. Com este procedimento obtemos as soluções para a amplificação ressonante ($r(t_1)$, $\varphi(t_1)$) e determinamos a constante \mathcal{C}_1 . O parâmetro $\mathbf{P}_\ell = -(-1)^\ell 2\kappa/\chi$, definido como uma função da amplitude de amplificação κ , é então um acoplamento efetivo que determina o processo de amplificação paramétrica. Portanto, para o regime de amplificação dispersiva, encontramos três diferentes soluções, dependendo do regime de acoplamento, ou seja, da intensidade do parâmetro $|\mathbf{P}_\ell|$: acoplamento forte ($|\mathbf{P}_\ell| > 1$), fraco ($|\mathbf{P}_\ell| < 1$) ou crítico ($|\mathbf{P}_\ell| = 1$).

a) Com o acoplamento forte ($|\mathbf{P}_\ell| > 1$), temos as relações

$$\cosh(2r_\ell(t)) = \frac{1}{\mathbf{P}_\ell^2 - 1} \left[\frac{e^{h(t)}}{4} + \mathbf{P}_\ell^2 (\mathcal{C}_1^2 + \mathbf{P}_\ell^2 - 1) e^{-h(t)} - \mathcal{C}_1 \right], \quad (2.44a)$$

$$\cos(\varphi_\ell(t) - \eta(t)) = \frac{\mathcal{C}_1 - \cosh(2r_\ell(t))}{\mathbf{P}_\ell \sinh(2r_\ell(t))}, \quad (2.44b)$$

onde

$$h(t) = \mp \frac{\sqrt{\mathbf{P}_\ell^2 - 1}}{|\mathbf{P}_\ell|} u(t, t_1) + \ln \left[2 |\mathbf{P}_\ell| \left(\sqrt{(\mathbf{P}_\ell^2 - 1)(\mathcal{C}_1^2 - 1)} + \mathcal{C}_1 |\mathbf{P}_\ell| \right) \right]. \quad (2.45)$$

O sinal é escolhido de modo que $r(t) \geq 0$. A função $u(t, t_1)$ é definida pela Eq. (2.41).

b) Para o acoplamento fraco ($|\mathbf{P}_\ell| < 1$), os parâmetros de compressão dependentes do tempo, quando $\mathcal{C}_1 > \sqrt{1 - \mathbf{P}_\ell^2}$, são dados pela Eq. (2.44b) e

$$\cosh(2r_\ell(t)) = \frac{\mathcal{C}_1}{1 - \mathbf{P}_\ell^2} \left\{ 1 - \frac{|\mathbf{P}_\ell| \sqrt{\mathcal{C}_1^2 + \mathbf{P}_\ell^2 - 1}}{\mathcal{C}_1} \times \right. \\ \left. \sin \left[\pm \frac{\sqrt{1 - \mathbf{P}_\ell^2}}{|\mathbf{P}_\ell|} u(t, t_1) + \arcsin \left(\frac{\mathcal{C}_1 |\mathbf{P}_\ell|}{\sqrt{\mathcal{C}_1^2 + \mathbf{P}_\ell^2 - 1}} \right) \right] \right\} \quad (2.46)$$

c) Finalmente, para o acoplamento crítico ($|\mathbf{P}_\ell| = 1$), os parâmetros de compressão dependentes do tempo são dados pela Eq. (2.44b) e a solução para $r_\ell(t)$ segue da equação

$$\cosh(2r_\ell(t)) = \frac{1}{2\mathcal{C}_1} \left[1 + \mathcal{C}_1^2 + \left(\sqrt{\mathcal{C}_1(2 \cosh(2r(t_1)) - \mathcal{C}_1) - 1} \mp \mathcal{C}_1 u(t, t_1) \right)^2 \right], \quad (2.47)$$

nesse caso sendo o parâmetro ℓ redundante. Notemos que nas Eqs. (2.44a) e (2.46) o parâmetro ℓ também é desnecessário visto que o lado direito da Eq.(2.44a) é uma função par de \mathbf{P}_ℓ . Portanto, o fator de compressão $r(t)$ não depende do estado atômico, diferentemente da direção de compressão, no espaço de fase, definida por $\varphi_\ell(t)$, como vemos da Eq. (2.44b).

Das soluções acima para as amplificações ressonante e dispersiva, podemos obter a variação dos parâmetros de compressão dependentes do tempo desde o tempo t_0 , quando os campos de amplificação clássicos são ligados simultaneamente à preparação do estado atômico por R_1 , até qualquer instante t após a interação entre o átomo e o modo da cavidade. Esse tempo t pode ser escolhido antes, após ou durante a detecção do estado atômico.

i) De t_0 a t_1 , os parâmetros de compressão seguem das Eqs. (2.40a) e (2.40b). Como mencionado acima, tais equações aplicam-se sob a condição $\cosh^2(2r(t)) > 1 + \mathcal{C}_i^2$, que é sempre satisfeita para $t > 0$ e $\mathcal{C}_i = 0$, que é o valor para essa constante que segue das condições iniciais $r(t_0)$, $\varphi(t_0)$ e $\eta(t_0)$. De fato, para um estado coerente inicial injetado na

cavidade: $r(t_0) = 0$. Assumindo o parâmetro κ independente do tempo, junto com $\mathcal{C}_0 = 0$, as Eqs. (2.40a) e (2.40b) assumem as formas simplificadas

$$r(t) = 2\kappa t, \quad (2.48a)$$

$$\varphi(t) = -2\omega t + \pi/2. \quad (2.48b)$$

ii) De t_1 a t_2 temos três soluções possíveis para os parâmetros de compressão, dependendo da intensidade do acoplamento $|\mathbf{P}_\ell|$. Estas soluções seguem das expressões descritas acima, nas Eqs. (2.44a), (2.44b), (2.46) e (2.47), e da constante de movimento $\mathcal{C}_1 = \cosh(4\kappa t_1)$, calculada a partir das Eqs. (2.43), (2.48a) e (2.48b) com $t = t_1$. É fácil observar nestas equações o típico limiar na dinâmica governada pelo Hamiltoniano quadrático dependente do tempo (2.5) [56], que se traduz no comportamento do fator de compressão dependente do tempo $r(t)$ que cresce monotonicamente para $|\mathbf{P}_\ell| \geq 1$, enquanto que para $|\mathbf{P}_\ell| < 1$, oscila periodicamente. Aqui, por simplicidade, analisaremos o regime de acoplamento fraco ($|\mathbf{P}_\ell| < 1$), onde os parâmetros de compressão seguem das Eqs. (2.44b) e (2.46).

iii) De t_2 a t os parâmetros de compressão são novamente derivados das Eqs. (2.40a) e (2.40b). A constante de movimento é calculada a partir dos valores iniciais $r(t_2)$, $\varphi(t_2)$ e $\eta(t_2)$, que dependem do regime de acoplamento, forte, fraco ou crítico. Para o acoplamento fraco, $|\mathbf{P}_\ell| < 1$, no qual estamos interessados, a constante de movimento na Eq. (2.39), derivada das Eqs. (2.44b) e (2.46) e dependendo do estado atômico lê-se

$$\mathcal{C}_{2,\ell} = \frac{\mathcal{C}_1 - \cosh(2r(t_2))}{\mathbf{P}_\ell}. \quad (2.49)$$

2.5 Funções de Wigner e flutuações das quadraturas do campo

Analisaremos agora os estados (2.34) e (2.36), projetados na cavidade após a detecção do estado eletrônico de um ou de vários átomos, respectivamente, e manipulados através dos parâmetros de amplificação. Daqui em diante analisaremos, por simplicidade, somente os estados do campo na cavidade gerados quando detectamos o átomo em seu estado excitado

$|1\rangle$, de modo que $|\Psi(t)\rangle = \mathcal{N}_+ \sum_{\ell=0}^1 c_\ell(t) S[\varepsilon_\ell(t)] |\theta_\ell(t)\rangle$ para o estado (2.34) e $|\Psi(t)\rangle = \mathcal{N}_+ \sum_{k=1}^{2^N} C_k(t) S[\Xi_k(t)] |\vartheta_k(t)\rangle$ para o estado (2.36). A partir do operador densidade para estes estados do campo de radiação, $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$, podemos obter a função característica simetricamente ordenada, definida como [49]:

$$\mathbf{C}_S(\gamma, \gamma^*, t) = \text{Tr} \left(\rho(t) e^{\gamma a^\dagger - \gamma^* a} \right) = \langle \Psi(t) | e^{\gamma a^\dagger - \gamma^* a} | \Psi(t) \rangle, \quad (2.50)$$

a qual relaciona-se com as funções características normal e anti-normal ordenadas, $\mathbf{C}_N(\gamma, \gamma^*, t)$ e $\mathbf{C}_A(\gamma, \gamma^*, t)$, respectivamente, via

$$\mathbf{C}_S(\gamma, \gamma^*, t) = e^{-|\gamma|^2/2} \mathbf{C}_N(\gamma, \gamma^*, t) = e^{|\gamma|^2/2} \mathbf{C}_A(\gamma, \gamma^*, t). \quad (2.51)$$

A função de distribuição de Wigner pode ser então obtida via integração [49]:

$$W(\eta, \eta^*, t) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\gamma \mathbf{C}_S(\gamma, \gamma^*, t) e^{\gamma^* \eta - \gamma \eta^*}, \quad (2.52)$$

e será utilizada aqui para representar o estado do campo de radiação convenientemente em um espaço tri-dimensional $\text{Re}(\eta)$, $\text{Im}(\eta)$ e $W(\eta, \eta^*)$. Para obtermos a função característica simetricamente ordenada, primeiramente obtemos, por simplicidade, a função anti-normal ordenada, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_S(\gamma, \gamma^*, t) &= e^{|\gamma|^2/2} \mathbf{C}_A(\gamma, \gamma^*, t) = e^{|\gamma|^2/2} \langle \Psi(t) | e^{-\gamma^* a} e^{\gamma a^\dagger} | \Psi(t) \rangle \\ &= e^{|\gamma|^2/2} \int \frac{d^2\beta}{\pi} |\langle \beta | \Psi(t) \rangle|^2 e^{-\gamma^* \beta + \gamma \beta^\dagger}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Aqui calculamos a função de Wigner para o estado de superposição $|\Psi(t)\rangle$, Eq. (2.34), que, após alguns cálculos, pode ser escrito como

$$|\Psi(t)\rangle = \mathcal{N}_+ [c_0 \Gamma_0(t) S(\varepsilon_0(t)) |\theta_0(t)\rangle + c_1 \Gamma_1(t) S(\varepsilon_1(t)) |\theta_1(t)\rangle] \quad (2.54)$$

onde a função dependente do tempo $\Gamma_\ell(t)$ é definida, em termos daquela dada pela Eq. (2.22), como

$$\Gamma_\ell(t) = \Upsilon_\ell(t) \Upsilon_\ell(t_2) \Upsilon_\ell(t_1), \quad (2.55)$$

e a função $\theta_\ell(t)$ é definida pela Eq. (2.18). Das Eqs. (2.53) e (2.54) obtemos, com $i, j = 0, 1$, o resultado

$$C_S(\gamma, \gamma^*, t) = e^{|\gamma|^2/2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{K_{ij}}{\sqrt{1-4b_i b_j^*}} \times \exp\left(\frac{(a_i + \gamma)(a_j^* + \gamma^*) + b_i(a_j^* - \gamma^*)^2 + b_j^*(a_i + \gamma)^2}{1-4b_i b_j^*}\right), \quad (2.56)$$

onde a função dependente do tempo K_{ij} escreve-se como

$$K_{ij} = |\mathcal{N}_+|^2 c_i c_j^* \Gamma_i(t) \Gamma_j^*(t) \operatorname{sech}(r(t)) \times \exp\left[-\frac{1}{2} (|\theta_i(t)|^2 + |\theta_j(t)|^2) + \frac{1}{2} \tanh r(t) (e^{i\varphi_i(t)} (\theta_i^*(t))^2 + e^{-i\varphi_j(t)} (\theta_j(t))^2)\right], \quad (2.57)$$

e

$$a_i = \theta_i(t) \operatorname{sech} r(t), \quad (2.58)$$

$$b_i = -\frac{1}{2} \tanh r(t) e^{i\varphi_i(t)}. \quad (2.59)$$

Notemos que para o regime de acoplamento fraco, $r_1(t) = r_2(t) = r(t)$. Finalmente, da Eq. (2.52) e da função característica simetricamente ordenada (2.56), obtemos a função de Wigner

$$W(\eta, \eta^*, t) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{A_{ij}}{\sqrt{B_{ij}^2 - 4C_{ij}D_{ij}}} \exp\left(\frac{C_{ij}E_{ij}^2 + D_{ij}F_{ij}^2 + B_{ij}E_{ij}F_{ij}}{B_{ij}^2 - 4C_{ij}D_{ij}}\right), \quad (2.60)$$

onde as funções dependentes do tempo A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} , E_{ij} e F_{ij} escrevem-se como

$$A_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{1-4b_i b_j^*}} \exp\left[\frac{a_i(t)a_j^*(t) + a_i^2(t)b_j^*(t) + (a_j^*(t))^2 b_i(t)}{1-4b_i(t)b_j^*(t)}\right] \quad (2.61)$$

$$B_{ij} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-4b_i(t)b_j^*(t)}, \quad (2.62)$$

$$C_{ij} = \frac{b_i(t)}{1-4b_i(t)b_j^*(t)}, \quad (2.63)$$

$$D_{ij} = \frac{b_j^*(t)}{1-4b_i(t)b_j^*(t)}, \quad (2.64)$$

$$E_{ij} = -\eta^* + \frac{2a_i(t)b_j^*(t) + a_j^*(t)}{1-4b_i(t)b_j^*(t)}, \quad (2.65)$$

$$F_{ij} = \eta - \frac{2a_j^*(t)b_i(t) + a_i(t)}{1-4b_i(t)b_j^*(t)}. \quad (2.66)$$

Em seguida, analisaremos as flutuações das quadraturas do campo de radiação, definidas como: $X_1 = (a + a^\dagger)/2$ e $X_2 = -i(a - a^\dagger)/2$. As flutuações dessas quadraturas podem então ser observadas através do cálculo de suas variâncias, que são dadas por

$$\langle \Delta X_j^2 \rangle = \langle X_j^2 \rangle - \langle X_j \rangle^2, \quad j = 1, 2, \quad (2.67)$$

as quais são obtidas a partir do cálculo das variâncias:

$$\langle \Delta a^2 \rangle = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2, \quad (2.68a)$$

$$\langle \Delta (a^\dagger)^2 \rangle = \langle (a^\dagger)^2 \rangle - \langle (a^\dagger) \rangle^2, \quad (2.68b)$$

$$\langle \Delta a^\dagger a \rangle = \langle a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle. \quad (2.68c)$$

Notamos que, com as definições acima para X_1 e X_2 , o valor da variância para ambas as quadraturas de um estado coerente é dado por $\langle \Delta X_j \rangle^2 = 1/4$. Os valores esperados para os operadores normal ordenados, definidos nas Eqs. (2.68a), (2.68b) e (2.68c) podem ser convenientemente calculados com a ajuda da função característica normal ordenada:

$$\mathcal{C}_N(\gamma, \gamma^*, t) = \text{Tr} \left(\rho(t) e^{\gamma a^\dagger} e^{-\gamma^* a} \right) = e^{|\gamma|^2/2} \mathcal{C}_S(\gamma, \gamma^*, t). \quad (2.69)$$

Dessa equação, qualquer momento normal ordenado pode ser obtido via diferenciação:

$$\langle (a^\dagger)^n a^m \rangle = \frac{\partial^n}{\partial \gamma^n} \frac{\partial^m}{\partial (-\gamma^*)^m} \mathcal{C}_N(\gamma, \gamma^*, t) \Big|_{\gamma=\gamma^*=0}, \quad (2.70)$$

que é conveniente para o cálculo das variâncias (2.68).

2.6 Protocolos para a preparação de estados do tipo “gato de Schrödinger” e de Fock

2.6.1 Estados do tipo “gato de Schrödinger”

Para preparar um estado de superposição particular a partir da Eq. (2.34) seguimos um protocolo que consiste em três passos. 1) Primeiramente, ajustamos a amplitude complexa κ da amplificação paramétrica e o tempo de interação átomo-campo $\tau = t_2 - t_1$ de modo a

obtermos um ângulo particular $\Theta = |\varphi_1(t_2) - \varphi_2(t_2)|$ definido pelas direções de compressão dos estados que compõem a superposição do tipo “gato de Schrödinger”. 2) Em seguida, a excitação do estado preparado pode ser ajustada manipulando-se a excitação do estado coerente inicial injetado na cavidade, a amplitude da amplificação linear (lembrando que a amplitude de amplificação paramétrica também foi fixada no primeiro passo) e o tempo em que o processo de amplificação fica ligado. 3) Finalmente, a amplitude de probabilidade associada a cada estado que compõe a superposição pode ser ajustada através das amplitudes de probabilidade do estado de superposição atômico, preparado pela primeira zona de Ramsey.

Nas Figs.2.2 (*a,b e c*) apresentamos alguns estados de superposição do campo de radiação gerados com o protocolo acima. Em todas essas figuras consideramos um átomo preparado em R_1 na superposição $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Desconsideramos o processo de amplificação linear enquanto que o processo de amplificação paramétrica é desligado assim que o átomo deixa a cavidade, isto é, em $t = t_2$. Na legenda das Figs. 2.2 (*a,b e c*) apresentamos as flutuações para os operadores de quadraturas e os parâmetros $r(t_2)$ e Θ usados para a preparação dos estados desejados. As Figs. 2.2 (*a e b*) indicam a possibilidade de se controlar as direções de compressão, no espaço de fase, da distribuição de quase-probabilidade dos estados individuais que compõem a superposição do tipo “gato de Schrödinger” preparada. Este controle será muito útil para a geração de estados de número através da superposição de estados coerente comprimidos, similares aos estados de número gerados via estados circulares como demonstrado mais abaixo.

É válido notar que um grande número de estados de referência exóticos tem sido requerido para se medir propriedades de certos estados do campo de radiação. Por exemplo, na Ref. [11] o estado binomial recíproco é requerido como um estado de referência para se medir a distribuição de fase de um dado campo de radiação, sem a necessidade de se obter toda a informação necessária para reconstruir seu estado completo. Uma extensão da proposta da Ref. [11] foi apresentada para a medida da função- Q onde uma escolha conveniente de um estado de referência permite a medida da dispersão dos operadores de quadratura [10]. Assim, esperamos também que o controle das direções de compressão das componentes dos

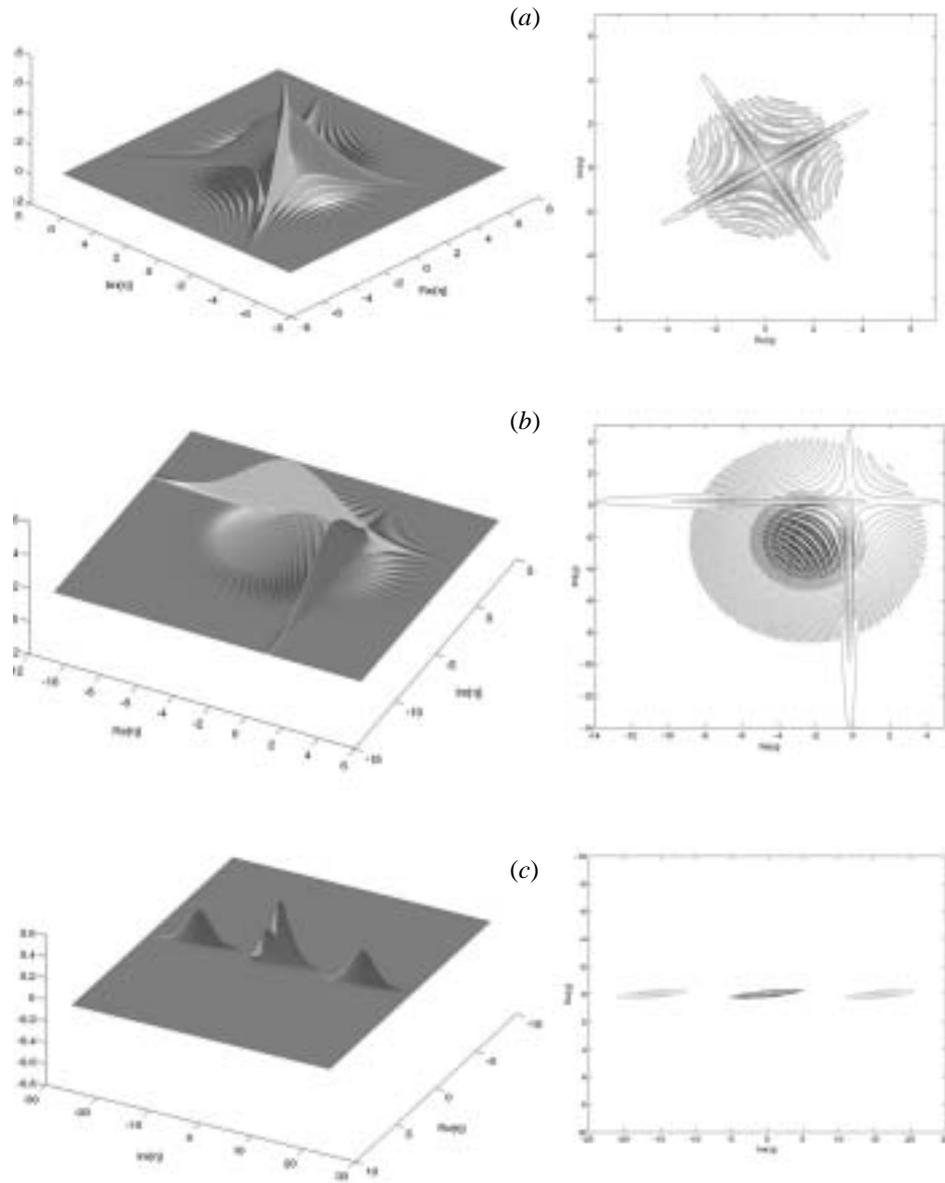


Figura 2.2: Funções de Wigner dos estados gerados para o acoplamento fraco, com $\kappa = \chi/20$, para (a) $\Theta = \pi$, $\alpha = 0$ e $\chi\tau = 2.06$. As variâncias para os operadores das quadraturas são $\langle \Delta X_1 \rangle^2 = \langle \Delta X_2 \rangle^2 = 1.7$ e o fator de compressão é $r(t_2) = 1.45$. O número médio de fótons é $\langle n \rangle = 2.9$. (b) $\Theta = \pi$, $\alpha = \sqrt{2}$ e $\chi\tau = 4.0$, com $\langle \Delta X_1 \rangle = 7.8$, $\langle \Delta X_2 \rangle = 8.8$, $r(t_2) = 1.55$ e $\langle n \rangle = 26.4$. (c) $\Theta = 0$, $\alpha = 5$ e $\chi\tau = 1.68$, com $\langle \Delta X_1 \rangle = 0.02$, $\langle \Delta X_2 \rangle = 256.0$, $r(t_2) = 1.5$ e $\langle n \rangle = 256.2$.

estados de superposição, alcançado através do presente esquema, possa ser utilizado para a geração destes estados de referência. Mencionamos também que o estado demonstrado na Fig.2.2(c), considerado em uma análise mais detalhada na seção 2.7, é crucial para a obtenção de estados de superposição mesoscópicos do campo de radiação em eletrodinâmica quântica de cavidades com um longo tempo de decoerência.

Por fim, observamos que os processos de amplificação poderiam ser utilizados, após a interação átomo-campo, para controlar o estado do campo na cavidade. Ambos os processos poderiam ser mantidos para modificar a excitação do modo da cavidade, enquanto que a amplificação paramétrica seria útil para aumentar o grau de compressão.

2.6.2 Estados de Fock via estados circulares comprimidos

Com o presente esquema de preparação de estados do campo de radiação também é possível preparar estados de número com fidelidades maiores que aqueles gerados via superposição de M estados coerentes com mesmo número médio de fótons e diferentes fases, distribuídos uniformemente em um círculo no espaço de fase, os chamados estados coerentes circulares [51]. Para isso, temos que passar N átomos através da cavidade, obtendo o estado definido na Eq. (2.36), onde $M = 2^N$. Lembrando que $\Xi_k(t) = r_{\ell_1, \dots, \ell_N}(t) \exp(i\varphi_{\ell_1, \dots, \ell_N}(t))$ e que o fator de compressão $r(t)$ não depende do estado atômico, diferentemente da direção de compressão no espaço de fase $\varphi_\ell(t)$, podemos escrever $\Xi_k(t) = r(t) \exp(i\varphi_k(t))$, onde definimos $\varphi_k(t) \equiv \varphi_{\ell_1, \dots, \ell_N}(t)$, com k variando de 1 a 2^N . Com essas considerações, obtemos a partir da Eq. (2.36) a função de distribuição de fótons

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_n(t) &= |\langle n | \Psi_N(t) \rangle|^2 = \left| \mathcal{N}_+ \sum_{k=1}^{2^N} C_k(t) \langle n | S[\Xi_k(t)] | \vartheta_k(t) \rangle \right|^2 \\
&= |\mathcal{N}_+|^2 \sum_{k,m=1}^{2^N} \frac{[\tanh r(t)]^n}{2^n n! \cosh r(t)} e^{i[\varphi_m(t) - \varphi_k(t)]n/2} \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (|\vartheta_k(t)|^2 + |\vartheta_m(t)|^2) + \frac{1}{2} \tanh r(t) [(\vartheta_k^*(t))^2 e^{i\varphi_k(t)} + (\vartheta_m(t))^2 e^{-i\varphi_m(t)}] \right\} \\
&\times H_n^* \left(\frac{\vartheta_k(t) e^{-i\varphi_k(t)/2}}{\sqrt{2 \cosh r(t) \sinh r(t)}} \right) H_n \left(\frac{\vartheta_m(t) e^{-i\varphi_m(t)/2}}{\sqrt{2 \cosh r(t) \sinh r(t)}} \right) \quad (2.71)
\end{aligned}$$

onde $H_n(x)$ é o n -ésimo polinômio de Hermite evoluído em x . Aqui assumimos que todos os N átomos foram preparados no mesmo estado $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ e detectados no estado excitado.

Para obtermos a superposição de estados coerentes centrados em torno da origem do espaço de fase (como requerido para gerar os estados de número) desligamos o processo de amplificação linear para obter, da Eq. (2.14b), $\Lambda_\ell(t) = 0$. Com isso o estado gerado após a passagem do N -ésimo átomo será uma superposição de estados coerentes (de mesmo número médio de fótons) com amplitudes $\vartheta_k(t) \equiv e^{-i\beta_{\ell_1, \dots, \ell_N}(t)} \theta_{\ell_1, \dots, \ell_N}(t_i) = e^{-i\beta_k(t)} \alpha$, comprimidos em diferentes direções. Em adição, assumimos α real e ajustamos $\beta_k(t) = (1 - k)\pi/N$ e $\varphi_k(t) = (k - 1)2\pi/N$, para obtermos uma distribuição simétrica destes estados em torno do centro do espaço de fase. Com esses ajustes, que são alcançados através dos tempos de interação entre os N átomos e o modo da cavidade e também através dos parâmetros de amplificação paramétrica $\kappa(t), \eta(t)$, a função de distribuição de fótons pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(t) = |\mathcal{N}_+|^2 \sum_{k,m=1}^{2^N} \frac{[\tanh r(t)]^n}{n! \cosh r(t)} e^{-|\alpha|^2(1-\tanh r(t))} \\ \times \left[H_n \left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{2 \cosh r(t) \sinh r(t)}} \right) \right]^2 \sum_{k,m=1}^{2^N} e^{i[\varphi_m(t) - \varphi_k(t)]n/2}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Na Fig. 2.3(a) apresentamos a função de distribuição de Wigner do estado gerado com a passagem de $N = 2$ átomos através de uma cavidade preparada inicialmente em um estado coerente com $|\alpha| = 7.4$. O fator de compressão foi então ajustado de modo que $r = 0.99$. Estas escolhas para os parâmetros $|\alpha|$ e r são consideradas de modo a maximizar a função de distribuição de fótons para $n = 8$, obtendo $\mathcal{P}_{n=8}(t) = 0.95$ que é exatamente a fidelidade $|\langle 8 | \Psi_{N=2}(t) \rangle|^2$ do estado preparado com respeito ao estado de número $|8\rangle$. O valor 0.95 é consideravelmente maior que aquele obtido sem o uso do processo de amplificação paramétrica, quando um estado circular é gerado com fidelidade máxima 0.56 com respeito ao estado de número $|8\rangle$. O valor máximo 0.56 decorre de um estado coerente inicial $|\alpha| = 2.83$. Na Fig. 2.3(b) apresentamos a função de Wigner do estado gerado através da passagem de $N = 3$ átomos pela cavidade preparada inicialmente em um estado coerente com $|\alpha| = 8$. Aqui o fator de compressão foi ajustado para $r = 0.67$. Nesse caso obtemos o valor $\mathcal{P}_{n=16}(t) = 0.99$

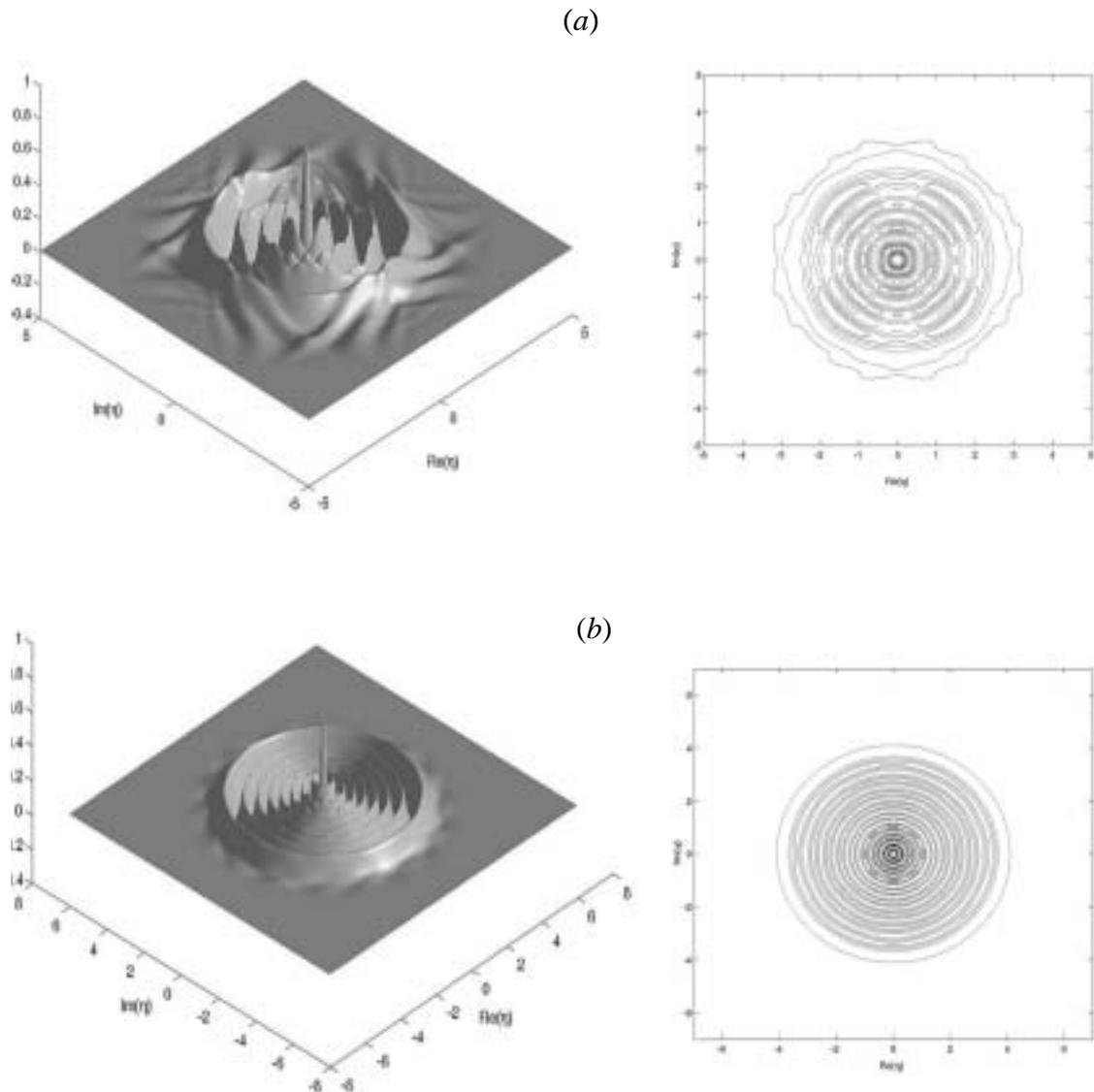


Figura 2.3: Função de Wigner do estado gerado após a passagem de (a) dois átomos, $|\Psi\rangle \approx |8\rangle$, e (b) três átomos, $|\Psi\rangle \approx |16\rangle$, onde ajustamos os parâmetros do sistema para maximizar a fidelidade dos estados de número desejados.

(que representa a fidelidade de se gerar o estado de número $|16\rangle$), a ser comparado com a fidelidade 0.79 calculada quando o processo de amplificação paramétrica é desligado e um estado circular é preparado a partir de um estado coerente inicial $|\alpha| = 3.95$.

Notamos que com a passagem de N átomos através da cavidade, uma família de estados de número é obtida: $|n = q2^N\rangle$ com $q = 1, 2, \dots$. Entretanto, a fidelidade dos estados de número preparados diminui à medida que o número inteiro q aumenta. Na tabela abaixo apresentamos os estados $|n = q2^3\rangle$ para alguns valores de q , comparando as fidelidades maximizadas calculadas a partir do nosso modelo ($\mathcal{F}_q = |\langle n = q2^3 | \Psi_{N=3}(t) \rangle|^2$) com aquelas derivadas a partir da técnica de estados circulares (F).

Tabela: Fidelidade dos estados $|\Psi_{N=3}(t)\rangle$ gerados a partir do nosso modelo (\mathcal{F}) e aqueles gerados via técnica de estados coerentes circulares (F), para diferentes estados de número desejados $|q2^3\rangle$.

q	\mathcal{F}	F
1	0.99	0.98
3	0.98	0.65
5	0.96	0.50
10	0.90	0.35

Desse modo, concluímos que o processo de geração de estados através da interação do átomo com o campo submetido a amplificação paramétrica pode ser conveniente para a preparação de estados de número com fidelidades maiores que aquelas quando tais estados são gerados a partir de estados circulares. A seguir, analisamos uma outra característica dos estados gerados pelo presente esquema.

2.7 Estados de superposição mesoscópicos com longo tempo de decoerência

Evidentemente, o estado de superposição comprimido (2.34) foi idealmente preparado. Em um processo de engenharia de estados real, os mecanismos dissipativos da cavidade e do

átomo de dois níveis e as flutuações intrínsecas às suas interações, devem ser levados em conta. Os cálculos complexos envolvidos na engenharia de estados quânticos sob condições realistas de dissipações e flutuações quânticas podem ser analisados via técnica de operadores fenomenológicos apresentada nas Refs. [21, 23]. Entretanto, neste trabalho não levaremos em conta a ação do reservatório durante a preparação do estado de superposição comprimido (2.34). Como usual, para estimarmos o tempo de decoerência, assumimos que o estado é preparado idealmente e então analisamos a ação do reservatório quântico sobre este estado de superposição. (Tal suposição fundamenta-se no fato de que o tempo necessário para a preparação do estado do modo da cavidade ($\sim 10^{-5}$ s) é muito menor que o tempo de relaxação de um fóton ($\sim 10^{-3}$ s).) Consideramos um reservatório quântico que seja descrito por uma coleção de osciladores harmônicos cujo Hamiltoniano é

$$H_R = \sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k. \quad (2.73)$$

(E a energia livre do modo da cavidade descrita pelo Hamiltoniano $H_S = \hbar\omega a^\dagger a$.) Estaremos interessados na ação de um reservatório cujos modos estejam em um estado de vácuo comprimido, de modo que o seu operador densidade possa ser escrito como

$$\rho_R = \prod_k S_k(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) |0_k\rangle \langle 0_k| S_k^\dagger(\tilde{r}, \tilde{\varphi}), \quad (2.74)$$

$S_k(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ sendo o operador de compressão do k -ésimo oscilador do reservatório, \tilde{r} e $\tilde{\varphi}$ sendo os seus parâmetros de compressão [49]. (Assumiremos que, de algum modo, é possível descrever todos os mecanismos de dissipação da cavidade em termos da ação de um reservatório com modos no estado de vácuo comprimido, como descrito na Eq.(2.74).) Descrevendo a interação entre o reservatório e o sistema como

$$V = \sum_k \hbar(\lambda_k a^\dagger b_k + \lambda_k^* a b_k^\dagger), \quad (2.75)$$

caracterizada pelo acoplamento λ_k , o tempo de decoerência (τ) deduzido a partir do “defeito de idempotência” do operador densidade reduzido do campo da cavidade, como sugerido em [60], é dado por

$$\frac{\hbar^2}{2\tau^2} = -\langle H \rangle_{S,R}^2 + \langle \langle H \rangle_S^2 \rangle_R + \langle \langle H \rangle_R^2 \rangle_S - \langle H^2 \rangle_{S,R} \quad (2.76)$$

onde o Hamiltoniano H compreende a soma de três termos $H = H_S + H_R + V$. A média $\langle H \rangle_S$ ($\langle H \rangle_R$) é tomada com respeito ao operador densidade do sistema (reservatório), dado por $\rho_S = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$ (ρ_R), onde $|\Psi(t)\rangle$ é dado pela Eq. (2.34). Da Eq. (2.76), o tempo de decoerência do estado de superposição do campo quântico de radiação da cavidade é dado por

$$\tau = \frac{\tau_R}{2 \left| (2N + 1) (\langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle - \langle a^\dagger a \rangle) + 2 \operatorname{Re} \left[M \left(\langle a^\dagger \rangle^2 - \langle (a^\dagger)^2 \rangle \right) \right] - N \right|}, \quad (2.77)$$

onde τ_R é o tempo de relaxação definido pelo fator de qualidade da cavidade, $N = \sinh^2(\tilde{r})$, e $M = -e^{i\tilde{\varphi}} \sinh(2\tilde{r})/2$ [49]. Aqui os valores médios são calculados usando-se o estado de superposição comprimido preparado na cavidade (2.34). Visto que a excitação do estado coerente inicial α e os parâmetros de compressão $(r(t_2), \varphi_\ell(t_2))$ são fixos para cada estado de superposição preparado na cavidade, notamos que a Eq. (2.77) depende somente dos parâmetros dos modos comprimidos do reservatório $(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$. Considerando a situação em que α é real (por simplicidade) e a relação $\langle \alpha | -\alpha \rangle = \exp(-2\alpha^2) \approx 0$ (que é satisfeita para $\alpha \gtrsim \sqrt{2}$), além de assumirmos que $\varphi_1(t_2) = \varphi$ e $\varphi_2(t_2) = \varphi + 2n\pi$ (n inteiro) (implicando $\Theta = |\varphi_1(t_2) - \varphi_2(t_2)| = 2n\pi$, isto é, os estados que compõem a superposição (2.34) são comprimidos na mesma direção), obtemos

$$\begin{aligned} \tau = \tau_R & \left| 1 + \cosh(2\tilde{r}) \left[2\alpha^2 \cos \varphi \sinh(2r) - (1 + 2\alpha^2) \cosh(2r) \right] \right. \\ & - \sinh(2\tilde{r}) \left[(1 + 2\alpha^2) \cos(\tilde{\varphi} - \varphi) \sinh(2r) - \alpha^2 (\cos(\tilde{\varphi} - 2\varphi) + \cos \tilde{\varphi}) \cosh(2r) \right. \\ & \left. \left. + \alpha^2 (\cos(\tilde{\varphi} - 2\varphi) - \cos \tilde{\varphi}) \right] \right|^{-1} \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde $r = r(t_2)$. A maximização do tempo de decoerência τ na Eq. (2.78) com respeito aos parâmetros $(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$, dá-se através dos resultados

$$\tilde{r}_A = r + \ln(1 + 4\alpha^2)/4, \quad \tilde{\varphi}_A = 0, \quad (2.79a)$$

$$\tilde{r}_B = r - \ln(1 + 4\alpha^2)/4, \quad \tilde{\varphi}_B = \pi, \quad (2.79b)$$

que segue quando tomamos $\varphi = (2m+1)\pi$ e $\varphi = 2m\pi$ (m inteiro), respectivamente. Quando $\Theta \neq 2n\pi$, o máximo valor de τ é menor que para o caso $\Theta = 2n\pi$, quando fixamos os pares

$(\tilde{r}_A, \tilde{\varphi}_A)$ ou $(\tilde{r}_B, \tilde{\varphi}_B)$ acima. É importante notar que as direções de compressão de ambos os estados que compõem a superposição (2.34), definidas pelos ângulos $\varphi_1(t_2)$ e $\varphi_2(t_2)$, devem ser perpendiculares à direção de compressão dos modos do reservatório.

Para podermos analisar com mais cuidado o tempo de decoerência a ser deduzido, primeiro necessitamos calcular a “distância” no espaço de fase entre os centros das distribuições de quase-probabilidade dos estados individuais que compõem a superposição (2.34). Esta distância é definida pelas quadraturas do campo da cavidade $X = (a^\dagger + a)/2$ e $Y = (a - a^\dagger)/2i$, como

$$D = [(\langle X \rangle_2 - \langle X \rangle_1)^2 + (\langle Y \rangle_2 - \langle Y \rangle_1)^2]^{1/2}, \quad (2.80)$$

onde os sub-escritos 1 e 2 referem-se aos dois estados que compõem a superposição. Tomando os dois casos que maximizam o tempo de decoerência, $\varphi_1(t_2) = \varphi_2(t_2) = (2m+1)\pi$ ou $2m\pi$, a distância torna-se $D = |\langle X \rangle_2 - \langle X \rangle_1| = |2\alpha \exp(r) \text{ ou } 2\alpha \exp(-r)|$, respectivamente. Como estamos interessados em superposições mesoscópicas, focalizaremos o caso $\varphi_1(t_2) = \varphi_2(t_2) = (2m_1+1)\pi$, visto que ele resulta em uma grande distância D entre os dois estados que compõem a superposição. O tempo de decoerência e o número médio de fótons do estado preparado, obtidos a partir dos valores $(\tilde{r}_A, \tilde{\varphi}_A)$ tornam-se

$$\tau \approx \tau_R/\alpha, \quad (2.81)$$

$$\langle n \rangle = \langle a^\dagger a \rangle \approx \alpha^2 \exp(2r) + \sinh^2 r. \quad (2.82)$$

Vemos então que com a aproximação $\exp(-2\alpha^2) \approx 0$, o tempo de decoerência para o estado do campo de radiação preparado na cavidade quando ajustamos $\varphi_1(t_2) = \varphi_2(t_2) = (2m_2+1)\pi$ — sob a ação de um reservatório de modos comprimidos na direção $\tilde{\varphi}_A = 0$ — torna-se praticamente independente do parâmetro r e desse modo de sua intensidade $\langle n \rangle$ e distância D . Portanto, o tempo de decoerência (2.81) torna-se praticamente independente das quantidades que definem o caráter mesoscópico do estado do campo de radiação. Dos resultados nas Eqs. (2.81) e (2.82) concluímos que é conveniente partir de um estado coerente $|\alpha\rangle$ com uma pequena excitação (dentro do limite $\exp(-2\alpha^2) \approx 0$) e então ajustar o parâmetro de acoplamento $|\mathbf{P}_\ell|$ e/ou os tempos de interação de modo a obtermos um grande fator de

compressão e, conseqüentemente, uma grande intensidade e uma grande distância D do estado, de modo a obtermos um estado de superposição mesoscópico e com um longo tempo de decoerência. Observamos que mesmo considerando o regime de acoplamento fraco, ($|\mathbf{P}_\ell| < 1$), obtemos, das Eqs.(2.40a) e (2.46), grandes parâmetros de compressão: considerando $|\mathbf{P}_\ell| = 0.1$, $\alpha = \sqrt{2}$, e um tempo total de experimento da ordem de $2 \times 10^{-4}s$ (esse tempo leva em conta todo o tempo de experimento, desde a preparação do átomo pela primeira zona de Ramsey até a detecção de seu estado eletrônico), conseguimos um estado de superposição com $r \approx 2$, $\langle n \rangle \approx 10^2$ fótons, $D \approx 20$ e um tempo de decoerência $\tau \approx \tau_R/\sqrt{2}$.

O mecanismo que descreve esse resultado é o grau de emaranhamento entre o modo quântico da cavidade, preparado no estado de superposição, e os modos do reservatório, que depende da direção relativa entre suas direções de compressão, definida pelos ângulos $\varphi_1(t_2) = \varphi_2(t_2)$ e $\tilde{\varphi}_A$. Um resultado que suporta este argumento é apresentado na Ref. [61], onde é demonstrado que a incidência de dois modos quânticos, preparados em estados comprimidos em direções perpendiculares, em um divisor de feixes 50/50 simétrico não gera um estado emaranhado entre esses modos.

Para analisar os valores apresentados acima para τ , $\langle n \rangle$ e D , comparamo-los com aqueles decorrentes de um estado de superposição do campo de radiação não comprimido (NC), em que a excitação é $\langle n \rangle_{NS} = \alpha^2$ e a distância no espaço de fase é $D_{NS} = 2\alpha$, sob a influência de i) um reservatório com modos comprimidos, que resulta em um tempo de decoerência $\tau_i \approx \tau_R/\alpha$, e ii) um reservatório não comprimido, onde $\tau_{ii} \approx \tau_R/2\alpha^2$. Notemos que em ambos os casos i) e ii) obtemos as razões

$$\langle n \rangle / \langle n \rangle_{NC} \approx \exp(2r), \quad (2.83a)$$

$$D/D_{NC} \approx \exp(r). \quad (2.83b)$$

Portanto, o estado de superposição (2.34) apresenta um número médio de fótons e uma distância D que cresce exponencialmente com o fator de compressão r , em relação a um estado de superposição NC . No entanto, obtemos $\tau \approx \tau_i$ quando comparamos o nosso resultado com os resultados presentes na literatura, onde um reservatório de modos comprimidos é utilizado para aumentar o tempo de decoerência [62]; quando comparamos o tempo de de-

coerência (2.81) com o de um estado de superposição não comprimido, sob a ação de um reservatório também não comprimido, obtemos uma relação ainda melhor, $\tau \approx \alpha \tau_{ii}$.

2.8 Discussões

Apresentamos nesse capítulo um esquema para a preparação e controle de um estado do campo de radiação estacionário em uma cavidade supercondutora de alto fator de qualidade. Para isso usamos a interação dispersiva átomo-campo e processos de amplificação linear e paramétrica, do campo. A técnica de invariantes dependentes do tempo de Lewis e Riesenfeld [41] foi utilizada para obter os auto-estados do campo na cavidade.

O presente protocolo para a preparação de estados de superposição depende, além dos estados iniciais do modo da cavidade e do átomo de dois níveis, como considerado em esquemas anteriores [63], de parâmetros dependentes do tempo envolvidos nas fontes de amplificação, que são necessários para a obtenção de estados de superposição particulares e também de estados de número. Em particular, esses estados de número, gerados como estados circulares comprimidos, exibem fidelidades maiores que aqueles gerados através de estados circulares.

Demonstramos também como preparar estados de superposição mesoscópicos do tipo “gato de Schrödinger” do campo de radiação, quando consideramos o acoplamento do modo da cavidade com um reservatório de modos comprimidos. Quando assumimos que a direção de compressão do campo na cavidade é perpendicular àquela dos modos do reservatório, encontramos um tempo de decoerência do estado de superposição preparado que depende somente da amplitude do estado coerente inicial, previamente injetado na cavidade, sendo independente do grau de compressão. Portanto, o tempo de decoerência é independente do número médio de fótons e da distância, no espaço de fase, entre os centros das distribuições de quase-probabilidade dos estados individuais que compõem a superposição comprimida. Este resultado segue do grau de emaranhamento entre o modo quântico da cavidade e os modos do reservatório, que depende da direção relativa de suas compressões. Quando a direção de compressão do estado de superposição preparado e aquela dos modos do reservatório são perpendiculares, o ruído injetado pelo reservatório no modo da cavidade é mínimo.

A implementação experimental do presente esquema de geração de estados mesoscópicos robustos depende da engenharia de um reservatório comprimido bem como de um processo de amplificação paramétrica do campo de radiação. Com respeito ao reservatório de modos comprimidos, encontra-se na Ref. [43] um esquema para a construção de um reservatório de modos comprimidos em cavidades. Entretanto, o esquema em [43] não elimina o reservatório usual (devido às paredes da cavidade), de modo que o reservatório efetivo não é um reservatório idealmente comprimido, como requerido pelo nosso esquema. A engenharia de reservatórios tem atraído muita atenção, em especial no domínio de íons aprisionados [26, 27], no intuito de proteger o estado quântico vibracional do íon. Mais especificamente, apresentou-se, recentemente, um esquema para a engenharia de reservatório de modos comprimidos para a proteção de estados de um sistema de dois níveis em [28].

Quanto ao processo de amplificação paramétrica do campo na cavidade, apresentamos nos capítulos 3 e 4 algumas propostas para a sua implementação a partir de interações dispersivas entre o modo da cavidade e um único átomo de três níveis submetido à ação de um campo clássico externo. Por fim, é válido mencionar que o estudo desenvolvido acima, no contexto da eletrodinâmica quântica de cavidades, aplica-se também a íons aprisionados, onde pode ser mais fácil a implementação de processos de amplificação paramétrica e a engenharia de reservatórios com modos comprimidos.

Capítulo 3

Hamiltonianos efetivos em EQC - aproximação adiabática

Tendo-se em vista a grande aplicabilidade de processos de conversão paramétrica de frequências, como discutido brevemente na Introdução, apresentamos nesse capítulo e no seguinte (capítulo 4) propostas para a engenharia de interações entre dois modos do campo de radiação estacionários em uma única cavidade supercondutora de alto fator de qualidade, sendo essas interações análogas aos processos de conversão paramétrica descendente e ascendente de frequências [49]. Com essas propostas é possível implementar no contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC) de dois modos, sugestões recentes para o processamento quântico de informação, originalmente designadas para campos propagantes. A engenharia de interações entre dois modos quânticos pode ser útil para a implementação de computação quântica e para propostas de comunicação em cavidades e em íons aprisionados [64]. Além de aumentar as perspectivas para a manipulação de informação quântica, a implementação de acoplamentos bilineares entre dois modos em cavidades pode também ser utilizada para testes de fundamentos da teoria quântica [65].

Interações bilineares entre dois modos em íons aprisionados foram primeiramente propostas na Ref. [66], onde os graus de liberdade vibracionais de um único íon aprisionado são acoplados via ação de campos laser com frequências e intensidades escolhidas adequadamente.

Em EQC, a geração experimental de estados de dois modos maximamente emaranhados utilizando um único átomo de dois níveis foi reportada na Ref. [65]. Esta realização estabelece um importante passo em direção à preparação de emaranhamentos mais complexos envolvendo dois modos quânticos independentes em uma cavidade. Como exposto no capítulo 5, alguns estados emaranhados, de dimensão infinita, como estados coerentes emaranhados e o estado original de Einstein-Podolsky-Rosen [47], podem ser gerados a partir das interações deduzidas no presente capítulo e no seguinte.

As interações bilineares entre dois modos quânticos estacionários em cavidades de alto fator de qualidade (alto- Q) são obtidas através da interação de um único átomo de três níveis com esses dois modos quânticos. Simultaneamente a essa interação o átomo encontra-se sob a ação de um campo clássico externo. Primeiramente analisaremos a construção de Hamiltonianos de interação efetivos via aproximação adiabática [67], que consiste em considerarmos interações dispersivas entre o átomo e os modos quânticos, como desenvolvemos nos trabalhos [44, 45]. Vale ressaltar que nesse caso, como a dedução dos Hamiltonianos efetivos é obtida via aproximação adiabática, o acoplamento entre o átomo e o campo clássico externo deve ser fraco, comparado com a dessintonia entre as frequências de transições atômicas e os modos quânticos da cavidade. No capítulo 4, usando o mesmo sistema, deduzimos as interações efetivas via expansão perturbativa da Equação de Schrödinger [68]. Nesse caso, não é necessário especificar a intensidade do acoplamento entre o átomo e o campo clássico. Notamos então dois regimes: **acoplamento fraco**, onde recuperamos os resultados obtidos via aproximação adiabática, e **acoplamento forte**, onde novos Hamiltonianos de interação aparecem [46].

Dois tipos diferentes de interações bilineares entre dois modos estacionários em uma cavidade de alto- Q serão obtidos, de acordo com a configuração de níveis atômicos escolhida. Em ambos os casos assumimos campos de microondas e átomos em estados altamente excitados (átomos de Rydberg).

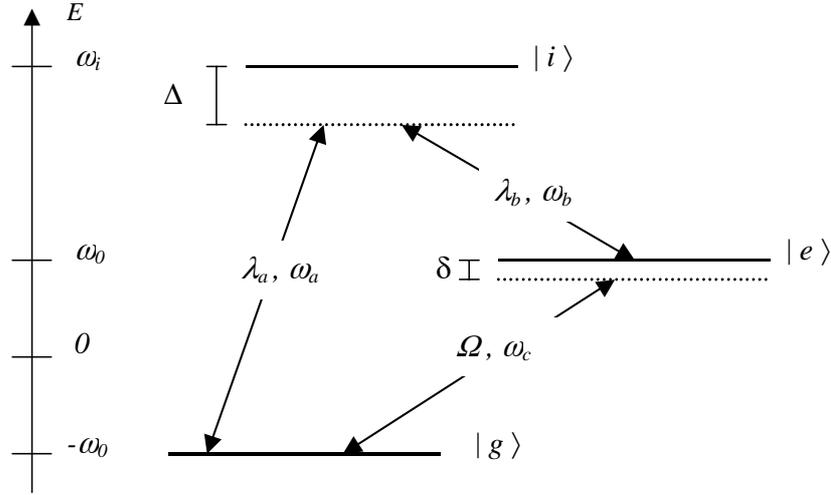


Figura 3.1: Configuração de níveis atômicos necessária para a engenharia de interações similares àsquelas presentes em CPA.

3.1 Conversão Paramétrica Ascendente de Frequências

A configuração dos níveis atômicos, necessária para construir interações bilineares análogas àsquelas presentes em processos de conversão paramétrica ascendente de frequências (CPA), é a “Lambda” (Λ), como demonstrada esquematicamente na Fig. (3.1). O estado fundamental ($|g\rangle$) e o excitado ($|e\rangle$) são acoplados a um terceiro nível mais excitado ($|i\rangle$). Os modos de microondas da cavidade, de frequências ω_a e ω_b , possibilitam transições de dipolo $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ e $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$, com constantes de acoplamento λ_a e λ_b , respectivamente. Aqui consideramos o regime em que os modos quânticos não são ressonantes com essas transições de dipolo, ou seja, há uma dessintonia Δ entre as frequências dos modos e as das transições atômicas: $\Delta = (\omega_i - \omega_g) - \omega_a = (\omega_i - \omega_e) - \omega_b$ ($\omega_g = -\omega_0$ e $\omega_e = \omega_0$). Finalmente, um campo clássico de frequência $\omega_c = \omega_e - \omega_g - \delta$, acopla a transição atômica $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, com constante de acoplamento Ω . (Esta transição, proibida por dipolo, pode ser induzida por um campo elétrico suficientemente forte através de transições de quadrupolo. Podemos também induzir essa transição fazendo uso de um nível auxiliar $|A\rangle$, onde transições dispersivas $|g\rangle \leftrightarrow |A\rangle$ e $|A\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ são induzidas via campos clássicos (de frequências ω_1 e ω_2) e transições de dipolo

(acoplamentos Ω_1 e Ω_2 , respectivamente)¹. Assumindo a dessintonia entre as frequências dos campos clássicos e as de transição atômicas $\Delta_A = (\omega_A - \omega_g) - \omega_1 = (\omega_A - \omega_e) - \omega_2$ muito maior que os acoplamentos clássicos $|\Omega_1|$ e $|\Omega_2|$, podemos eliminar adiabaticamente as transições $|g\rangle \leftrightarrow |A\rangle$ e $|A\rangle \leftrightarrow |e\rangle$. Com isso teremos um Hamiltoniano efetivo que acopla a transição $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, com constante de acoplamento dada por $\Omega = \Omega_1\Omega_2/\Delta_A$.)

O Hamiltoniano total desse sistema pode então ser escrito, na aproximação de onda girante, como $H = H_0 + V$, onde

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \omega_g \sigma_{gg} + \omega_e \sigma_{ee} + \omega_i \sigma_{ii}, \quad (3.1a)$$

$$V = (\lambda_a a \sigma_{ig} + \lambda_b b \sigma_{ie} + \Omega e^{i\omega_c t} \sigma_{ge} + \text{h.c.}), \quad (3.1b)$$

em que a^\dagger (a) e b^\dagger (b) são os operadores de criação (aniquilação) de fótons dos modos da cavidade e $\sigma_{kl} \equiv |k\rangle \langle l|$ ($k, l = g, e, i$) os operadores atômicos. Assumimos em todo esse capítulo $\hbar = 1$, por conveniência. Escrevendo H na Representação de Interação (através da transformação unitária $U_0 = \exp(-iH_0 t/\hbar)$) e aplicando, subseqüentemente, a transformação $U_1 = \exp[-i\Delta t (\sigma_{ee} + \sigma_{gg})]$, obtemos o Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = (\lambda_a a \sigma_{ig} + \lambda_b b \sigma_{ie} + \Omega(t) \sigma_{ge} + \text{h.c.}) - \Delta (\sigma_{ee} + \sigma_{gg}), \quad (3.2)$$

com $\Omega(t) = \Omega e^{-i\delta t}$.

Nos trabalhos [44, 45], após encontrarmos as soluções adiabáticas para os operadores de transição σ_{ie} e σ_{ig} (e seus Hermitianos conjugados), substituímo-los de volta na Eq. (3.2), obtendo assim o Hamiltoniano efetivo. Esse procedimento, largamente utilizado na literatura, segue o desenvolvido na Ref. [66], para a obtenção de Hamiltonianos de interação efetivos em íons aprisionados. No entanto, tal procedimento apresenta algumas falhas e não recupera exatamente os resultados obtidos numericamente. Por isso, aqui nessa presente tese, apresentamos um procedimento ligeiramente diferente daquele apresentado em nossos trabalhos [44, 45]. Para obter o Hamiltoniano efetivo fazemos uso da equação de movimento

¹Esse nível auxiliar pode ser o próprio nível intermediário $|i\rangle$, desde que as frequências dos campos clássicos sejam diferentes das frequências dos campos quânticos, de modo que estes não se acoplem.

para o operador densidade do sistema todo (átomo-campo):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} &= i[\rho, \mathbf{H}] \\
 &= i \left\{ \lambda_a \rho a \sigma_{ig} + \lambda_b \rho b \sigma_{ie} + \Omega(t) \rho \sigma_{ge} + \lambda_a^* \rho a^\dagger \sigma_{gi} + \lambda_b^* \rho b^\dagger \sigma_{ei} + \Omega^*(t) \rho \sigma_{eg} - \Delta \rho (\sigma_{ee} + \sigma_{gg}) \right. \\
 &\quad \left. - \lambda_a a \sigma_{ig} \rho - \lambda_b b \sigma_{ie} \rho - \Omega(t) \sigma_{ge} \rho - \lambda_a^* a^\dagger \sigma_{gi} \rho - \lambda_b^* b^\dagger \sigma_{ei} \rho - \Omega^*(t) \sigma_{eg} \rho - \Delta (\sigma_{ee} + \sigma_{gg}) \rho \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

A partir dessa equação de movimento para o operador densidade podemos obter todos os elementos de matriz na base de estados atômicos $\{|i\rangle, |e\rangle, |g\rangle\}$. As equações de movimento para os elementos de matriz que representam as transições dos níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ para o nível $|i\rangle$ e a que descreve a probabilidade do átomo permanecer no nível $|i\rangle$ podem então ser escritas como

$$\frac{d\rho_{ig}}{dt} = \langle i | \frac{d\rho}{dt} | g \rangle = i \left\{ \lambda_a \rho_{ii} a + \Omega^*(t) \rho_{ie} - \Delta \rho_{ig} - \lambda_a a \rho_{gg} - \lambda_b b \rho_{eg} \right\}, \tag{3.4}$$

$$\frac{d\rho_{ie}}{dt} = \langle i | \frac{d\rho}{dt} | e \rangle = i \left\{ \lambda_b \rho_{ii} b + \Omega(t) \rho_{ig} - \Delta \rho_{ie} - \lambda_b b \rho_{ee} - \lambda_a a \rho_{ge} \right\}, \tag{3.5}$$

$$\frac{d\rho_{ii}}{dt} = \langle i | \frac{d\rho}{dt} | i \rangle = i \left\{ \lambda_a^* \rho_{ig} a^\dagger + \lambda_b^* \rho_{ie} b^\dagger - \lambda_a a \rho_{gi} - \lambda_b b \rho_{ei} \right\}. \tag{3.6}$$

Podemos agora comparar as escalas de tempo das transições induzidas pelos modos da cavidade. Se as transições dispersivas induzidas por esses modos estiverem suficientemente fora da ressonância, isto é, $\Delta \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|, |\Omega|$, poderemos então obter as soluções adiabáticas para os elementos de transição ρ_{ig} e ρ_{ie} assumindo $d\rho_{ig}/dt = d\rho_{ie}/dt \simeq 0$ (aproximação adiabática). Esses elementos são então dados por

$$\rho_{ig} \simeq \frac{\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \left\{ \rho_{ii} \left[\lambda_a a + \frac{\lambda_b \Omega^*(t)}{\Delta} b \right] - \lambda_a a \rho_{gg} - \frac{\lambda_b \Omega^*(t)}{\Delta} b \rho_{ee} - \lambda_b b \rho_{eg} - \frac{\lambda_a \Omega^*(t)}{\Delta} a \rho_{ge} \right\}, \tag{3.7}$$

$$\rho_{ie} \simeq \frac{\Delta}{\Delta^2 - |\Omega|^2} \left\{ \rho_{ii} \left[\lambda_b b + \frac{\lambda_a \Omega(t)}{\Delta} a \right] - \lambda_b b \rho_{ee} - \frac{\lambda_a \Omega(t)}{\Delta} a \rho_{gg} - \lambda_a a \rho_{ge} - \frac{\lambda_b \Omega(t)}{\Delta} b \rho_{eg} \right\}. \tag{3.8}$$

Substituindo essas expressões (e seus Hermitianos conjugados) na equação de movimento

para o elemento ρ_{ii} , temos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{ii}}{dt} \simeq & \frac{i}{\Delta} \left\{ \left[\rho_{ii}, \left(|\lambda_a|^2 aa^\dagger + |\lambda_b|^2 bb^\dagger + \frac{\lambda_a \lambda_b^* \Omega(t)}{\Delta} ab^\dagger + \frac{\lambda_a^* \lambda_b \Omega^*(t)}{\Delta} a^\dagger b \right) \right] \right. \\ & + \frac{\lambda_a \lambda_b^* \Omega(t)}{\Delta} a (\rho_{ee} - \rho_{gg}) b^\dagger - \frac{\lambda_a^* \lambda_b \Omega^*(t)}{\Delta} b (\rho_{ee} - \rho_{gg}) a^\dagger \\ & \left. + \frac{|\lambda_a|^2}{\Delta} a [\Omega(t)\rho_{eg} - \Omega^*(t)\rho_{ge}] a^\dagger - \frac{|\lambda_b|^2}{\Delta} b [\Omega(t)\rho_{eg} - \Omega^*(t)\rho_{ge}] b^\dagger \right\} \quad (3.9) \end{aligned}$$

onde assumimos $\Delta - \Omega^2 \simeq \Delta^2$. Como assumimos o regime de forte dessintonia ($\Delta \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|, |\Omega|$), não haverá transições dos níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ para o nível $|i\rangle$. Desse modo, se o átomo for preparado inicialmente no nível $|i\rangle$, podemos garantir que os níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ não serão ocupados. Desse modo, todos os elementos de matriz presentes na Eq. (3.9) que estão relacionados aos níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ serão nulos para todo tempo, isto é, $\rho_{kl} \simeq 0$ para $k, l = e, g$. Com isso, a Eq. (3.9) pode ser escrita na forma simplificada

$$\frac{d\rho_{ii}}{dt} \simeq \frac{i}{\Delta} \left[\rho_{ii}, \left(|\lambda_a|^2 aa^\dagger + |\lambda_b|^2 bb^\dagger + \frac{\lambda_a \lambda_b^* \Omega(t)}{\Delta} ab^\dagger + \frac{\lambda_a^* \lambda_b \Omega^*(t)}{\Delta} a^\dagger b \right) \right], \quad (3.10)$$

de onde podemos inferir o Hamiltoniano efetivo que descreve tal equação de movimento:

$$H_{ef} \simeq \left\{ \frac{|\lambda_a|^2}{\Delta} aa^\dagger + \frac{|\lambda_b|^2}{\Delta} bb^\dagger + \frac{\lambda_a \lambda_b^* \Omega(t)}{\Delta^2} ab^\dagger + \frac{\lambda_a^* \lambda_b \Omega^*(t)}{\Delta^2} a^\dagger b \right\} \sigma_{ii} \quad (3.11)$$

Realizando uma transformação unitária sobre o Hamiltoniano efetivo acima, via operador $U_2 = \exp[-it(|\lambda_a|^2 aa^\dagger + |\lambda_b|^2 bb^\dagger)\sigma_{ii}/\Delta]$ e ajustando a frequência do campo clássico de modo que $\delta = -(|\lambda_a|^2 - |\lambda_b|^2)/\Delta$, obtemos o Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_i = (\zeta ab^\dagger + \zeta^* a^\dagger b) \sigma_{ii}. \quad (3.12)$$

Portanto, quando preparamos inicialmente o átomo no nível $|i\rangle$, o Hamiltoniano efetivo (3.12), que governa a dinâmica dos modos da cavidade, descreve um acoplamento entre os mesmos análogo ao de campos propagantes cruzando um cristal não linear, como em um processo de conversão paramétrica ascendente de frequências (CPA). Aqui um fóton de frequência ω_c converte-se em outros dois, de frequências $(\omega_a + |\lambda_a|^2/\Delta)$ e $(\omega_b + |\lambda_b|^2/\Delta)$, de modo que $\omega_c = (\omega_a + |\lambda_a|^2/\Delta) - (\omega_b + |\lambda_b|^2/\Delta)$. Por outro lado, o Hamiltoniano (3.12)

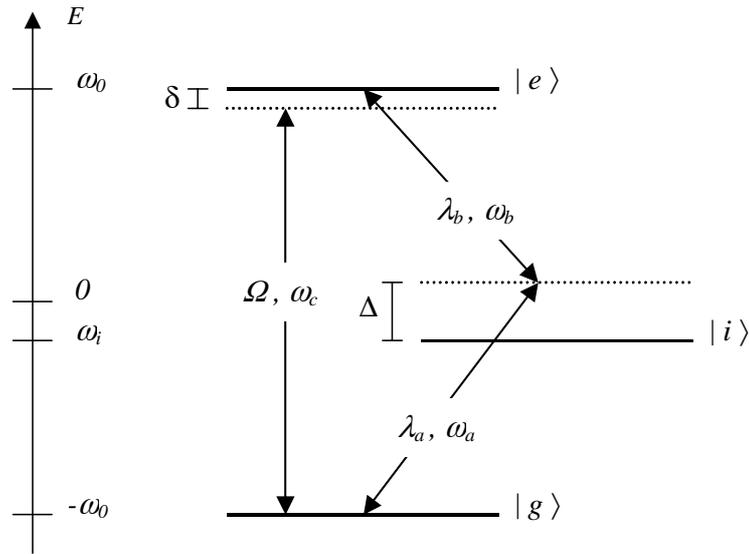


Figura 3.2: Configuração de níveis atômicos envolvida na engenharia de interações similares àsquelas presentes em CPD.

descreve a evolução de dois modos do campo de radiação propagantes incidindo simultaneamente sobre um divisor de feixes. Desse modo, muitos processos realizados no domínio de ondas propagantes, onde divisores de feixes são empregados, poderão ser realizados também no domínio de campos estacionários em cavidades de alto- Q .

3.2 Conversão Paramétrica Descendente de Frequências

Consideramos agora a engenharia de um processo de conversão paramétrica descendente de frequências (CPD). Para isso usamos um único átomo de três níveis, em uma configuração “escada” (Ξ), como demonstrado na Fig. (3.2), onde o estado fundamental ($|g\rangle$) e o excitado ($|e\rangle$) estão acoplados a um nível intermediário ($|i\rangle$). Os modos de microondas da cavidade de frequências ω_a e ω_b interagem dispersivamente com as transições $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ e $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ (transições permitidas de dipolo) com constantes de acoplamento λ_a e λ_b , respectivamente. A dessintonia entre as frequências dos modos quânticos e as das transições atômicas é dada por

$\Delta = -(\omega_i - \omega_g - \omega_a) = \omega_e - \omega_i - \omega_b$ (com $\omega_g = -\omega_0$ e $\omega_e = \omega_0$). A interação desejada entre os modos ω_a e ω_b é então obtida com o auxílio de um campo clássico externo de frequência $\omega_c = \omega_e - \omega_g - \delta$ que acopla a transição atômica $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ com constante de acoplamento Ω . O Hamiltoniano total desse sistema, escrito na aproximação de onda girante, é dado por $H = H_0 + V$, onde

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \omega_g \sigma_{gg} + \omega_e \sigma_{ee} + \omega_i \sigma_{ii}, \quad (3.13a)$$

$$V = (\lambda_a a \sigma_{ig} + \lambda_b b \sigma_{ei} + \Omega e^{i\omega_c t} \sigma_{ge} + \text{h.c.}). \quad (3.13b)$$

Novamente, escrevendo H na Representação de Interação (através da transformação unitária $U_0 = \exp(-iH_0 t/\hbar)$) e aplicando, subseqüentemente, a transformação $U_1 = \exp[i\Delta t(\sigma_{ee} + \sigma_{gg})]$, obtemos o Hamiltoniano

$$\mathbf{H} = (\lambda_a a \sigma_{ig} + \lambda_b b \sigma_{ei} + \Omega e^{-i\delta t} \sigma_{ge} + \text{h.c.}) + \Delta(\sigma_{ee} + \sigma_{gg}). \quad (3.14)$$

Assim como na seção anterior, não seguiremos o procedimento adotado nos trabalhos [44, 45] para obtermos o Hamiltoniano efetivo. A equação de movimento para o operador densidade do sistema é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= i[\rho, \mathbf{H}] \\ &= i \left\{ \lambda_a \rho a \sigma_{ig} + \lambda_b^* \rho b^\dagger \sigma_{ie} + \Omega(t) \rho \sigma_{ge} + \lambda_a^* \rho a^\dagger \sigma_{gi} + \lambda_b \rho b \sigma_{ei} + \Omega^*(t) \rho \sigma_{eg} + \Delta \rho (\sigma_{ee} + \sigma_{gg}) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_a a \sigma_{ig} \rho - \lambda_b^* b^\dagger \sigma_{ie} \rho - \Omega(t) \sigma_{ge} \rho - \lambda_a^* a^\dagger \sigma_{gi} \rho - \lambda_b b \sigma_{ei} \rho - \Omega^*(t) \sigma_{eg} \rho + \Delta (\sigma_{ee} + \sigma_{gg}) \rho \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$(\Omega(t) = \Omega e^{-i\delta t})$ a partir da qual podemos obter as equações de movimento para os elementos de matriz que representam as transições dos níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ para o nível $|i\rangle$ e a que descreve a probabilidade do átomo permanecer no nível $|i\rangle$:

$$\frac{d\rho_{ig}}{dt} = \langle i | \frac{d\rho}{dt} | g \rangle = i \left\{ \lambda_a \rho_{ii} a + \Omega^*(t) \rho_{ie} + \Delta \rho_{ig} - \lambda_a a \rho_{gg} - \lambda_b^* b^\dagger \rho_{eg} \right\}, \quad (3.16)$$

$$\frac{d\rho_{ie}}{dt} = \langle i | \frac{d\rho}{dt} | e \rangle = i \left\{ \lambda_b^* \rho_{ii} b^\dagger + \Omega(t) \rho_{ig} + \Delta \rho_{ie} - \lambda_b^* b^\dagger \rho_{ee} - \lambda_a a \rho_{ge} \right\}, \quad (3.17)$$

$$\frac{d\rho_{ii}}{dt} = \langle i | \frac{d\rho}{dt} | i \rangle = i \left\{ \lambda_a^* \rho_{ig} a^\dagger + \lambda_b \rho_{ie} b - \lambda_a a \rho_{gi} - \lambda_b^* b^\dagger \rho_{ei} \right\}. \quad (3.18)$$

Podemos novamente comparar as escalas de tempo das transições induzidas pelos modos da cavidade. Considerando a dessintonia Δ suficientemente grande, isto é, $\Delta \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|, |\Omega|$, podemos então obter as soluções adiabáticas para os elementos de transição ρ_{ig} e ρ_{ie} :

$$\rho_{ig} \simeq \frac{\Delta}{\Delta^2 + |\Omega|^2} \left\{ \rho_{ii} \left[\lambda_a a + \frac{\lambda_b^* \Omega^*(t)}{\Delta} b^\dagger \right] - \lambda_a a \rho_{gg} - \frac{\lambda_b^* \Omega^*(t)}{\Delta} b^\dagger \rho_{ee} - \lambda_b^* b^\dagger \rho_{eg} - \frac{\lambda_a \Omega^*(t)}{\Delta} a \rho_{ge} \right\}, \quad (3.19)$$

$$\rho_{ie} \simeq \frac{\Delta}{\Delta^2 + |\Omega|^2} \left\{ \rho_{ii} \left[\lambda_b^* b^\dagger + \frac{\lambda_a \Omega(t)}{\Delta} a \right] - \lambda_b^* b^\dagger \rho_{ee} - \frac{\lambda_a \Omega(t)}{\Delta} a \rho_{gg} - \lambda_a a \rho_{ge} - \frac{\lambda_b^* \Omega(t)}{\Delta} b^\dagger \rho_{eg} \right\}. \quad (3.20)$$

Substituindo os elementos de matriz ρ_{ig} , ρ_{ie} e seus Hermitianos conjugados na Eq. (3.18), obtemos a seguinte equação de movimento para o elemento de matriz ρ_{ii}

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{ii}}{dt} \simeq & \frac{i}{\Delta} \left\{ \left[\rho_{ii}, \left(|\lambda_a|^2 a a^\dagger + |\lambda_b|^2 b^\dagger b + \frac{\lambda_a \lambda_b \Omega(t)}{\Delta} a b + \frac{\lambda_a^* \lambda_b^* \Omega^*(t)}{\Delta} a^\dagger b^\dagger \right) \right] \right. \\ & + \frac{\lambda_a \lambda_b \Omega(t)}{\Delta} a (\rho_{ee} - \rho_{gg}) b - \frac{\lambda_a^* \lambda_b^* \Omega^*(t)}{\Delta} b^\dagger (\rho_{ee} - \rho_{gg}) a^\dagger \\ & \left. + \frac{|\lambda_a|^2}{\Delta} a [\Omega(t) \rho_{eg} - \Omega^*(t) \rho_{ge}] a^\dagger - \frac{|\lambda_b|^2}{\Delta} b^\dagger [\Omega(t) \rho_{eg} - \Omega^*(t) \rho_{ge}] b \right\}. \quad (3.21) \end{aligned}$$

onde consideramos $\Delta^2 + \Omega^2 \simeq \Delta^2$. Assim como na seção anterior, também estamos analisando a situação de forte dessintonia ($\Delta \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|, |\Omega|$), de modo que não haverá transições dos níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ para o nível $|i\rangle$. Desse modo, preparando o átomo inicialmente no nível $|i\rangle$, podemos garantir que os níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ não serão ocupados. Assim, todos os elementos de matriz presentes na Eq. (3.21) que estão relacionados aos níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ serão nulos para todo tempo, isto é, $\rho_{kl} \simeq 0$ para $k, l = e$, ou g . Com isso, a Eq. (3.21) pode ser escrita na forma simplificada

$$\frac{d\rho_{ii}}{dt} \simeq \frac{i}{\Delta} \left\{ \left[\rho_{ii}, \left(|\lambda_a|^2 a a^\dagger + |\lambda_b|^2 b^\dagger b + \frac{\lambda_a \lambda_b \Omega(t)}{\Delta} a b + \frac{\lambda_a^* \lambda_b^* \Omega^*(t)}{\Delta} a^\dagger b^\dagger \right) \right] \right\}, \quad (3.22)$$

de onde podemos inferir novamente o Hamiltoniano efetivo como

$$\mathbf{H}_{ef} = \left\{ \frac{|\lambda_a|^2}{\Delta} a a^\dagger + \frac{|\lambda_b|^2}{\Delta} b^\dagger b + \frac{\lambda_a \lambda_b \Omega e^{-i\delta t}}{\Delta^2} a b + \frac{\lambda_a^* \lambda_b^* \Omega^* e^{i\delta t}}{\Delta^2} a^\dagger b^\dagger \right\} \sigma_{ii} \quad (3.23)$$

Portanto, quando preparamos o átomo inicialmente no nível $|i\rangle$, a dinâmica desse sistema pode ser descrita por deslocamentos nas frequências dos modos da cavidade e por um acoplamento entre esses modos similar àquele encontrado em processos de conversão paramétrica

descendente de frequências que surge quando incidimos um campo clássico em um cristal não-linear. Realizando uma transformação unitária, $U_2 = \exp [it (|\lambda_a|^2 a^\dagger a + |\lambda_b|^2 b^\dagger b) \sigma_{ii} / \Delta]$, sobre a Eq. (3.23) e ajustando a frequência do campo clássico externo de modo que $\delta = - (|\lambda_a|^2 + |\lambda_b|^2) / \Delta$, obtemos finalmente

$$\mathcal{H}_i = (\xi ab + \xi^* a^\dagger b^\dagger) \sigma_{ii}, \quad (3.24)$$

com $\xi = \lambda_a \lambda_b \Omega / \Delta^2$. Notamos nesse caso que o processo de conversão paramétrica descendente para as frequências efetivas satisfaz: $\omega_c = (\omega_a + |\lambda_a|^2 / \Delta) + (\omega_b + |\lambda_b|^2 / \Delta)$.

3.2.1 Geração de estados comprimidos

É importante notar que, no caso em que temos um único modo na cavidade (que corresponde a um processo degenerado de conversão paramétrica descendente de frequências, $\omega_a = \omega_b$), o Hamiltoniano (3.24), escreve-se como

$$\tilde{\mathcal{H}}_i = \left[\xi (a)^2 + \xi^* (a^\dagger)^2 \right] \sigma_{ii}, \quad (3.25)$$

a partir do qual é possível gerar estados comprimidos em cavidades [44]. Notamos que este processo paramétrico degenerado pode ser utilizado para comprimir um estado quântico previamente preparado na cavidade, isto é, realizar a operação $S |\Psi\rangle$ em eletrodinâmica quântica de cavidades (S sendo o operador de compressão) [44]. Nesse caso, o fator de compressão é dado por $r = 2 |\xi| \tau$, sendo τ o tempo de interação átomo-campo na cavidade, e o ângulo de compressão é definido por $\arg(\xi)$. Para um campo preparado inicialmente em um estado de vácuo ou em um estado coerente $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n / \sqrt{n!} |n\rangle$, α sendo a amplitude do estado coerente, vemos que a variância (ΔX^2) na quadratura comprimida ($X = (a e^{-i\theta} + a^\dagger e^{i\theta}) / 2$, onde θ é escolhido de modo que X seja a quadratura comprimida) escreve-se como

$$\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = e^{-2r} / 4. \quad (3.26)$$

Podemos fazer uma estimativa do grau de compressão obtido a partir do presente esquema. Considerando os parâmetros utilizados em experimentos em cavidades de microondas, com

campos de radiação com frequências da ordem de 10^{10} s^{-1} , onde $|\lambda_a| \sim |\lambda_b| \sim 3 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ (tanto para átomos com número quântico principal em torno de 60 [69] como para átomos com número quântico em torno de 50 [70]) e assumindo $|\Omega| \sim |\lambda_a|$ e $\Delta \sim 15 \times |\lambda_a|$, temos então $|\xi| = 1.33 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$. Com esse parâmetro de acoplamento e ajustando o tempo de interação átomo-campo tal que $\tau = 4 \times 10^{-4} \text{ s}$, temos $r = 1.07$, o que resulta em uma variância na quadratura comprimida $\Delta X^2 = 2.9 \times 10^{-2}$, representando uma compressão em torno de 88%.

3.2.2 Estimativa do efeito dos processos dissipativos na geração de estados comprimidos

Vimos acima que para obtermos uma grande compressão do estado do campo, necessitamos de um tempo de interação da ordem da metade do tempo de relaxação do campo em cavidades abertas, que é da ordem de 10^{-3} s [70]. Desse modo, é importante analisarmos o grau de compressão obtido nesse processo levando-se em conta a dissipação do campo na cavidade. Com respeito ao decaimento atômico notamos que, para níveis circulares de Rydberg, a emissão espontânea dificilmente afetará o processo de compressão, uma vez que os tempos de vida de tais níveis atômicos são da ordem de $3 \times 10^{-2} \text{ s}$ [70], ou seja, muito maiores que os tempos típicos necessários para obter altos graus de compressão. Por outro lado, o decaimento atômico pode levar o átomo para o estado $|g\rangle$ e, conseqüentemente, para o estado $|e\rangle$ (que é acoplado ao nível $|g\rangle$ via campo clássico), o que destruiria todo o processo. Desse modo, é importante detectarmos o átomo no estado $|i\rangle$ para termos certeza que o processo paramétrico ocorreu. Caso o átomo seja detectado em outro estado, o processo deve ser repetido.

A seguir, seguindo o desenvolvimento apresentado em [44], analisamos a geração de estados comprimidos (caso de CPD degenerado) levando-se em conta o decaimento atômico e do campo na cavidade, introduzindo-os fenomenologicamente nas equações de movimento segundo [49]:

$$i \frac{d}{dt} \mathcal{O} = [\mathcal{O}, H] - i \frac{\Gamma}{2} \mathcal{O}, \quad (3.27)$$

onde Γ refere-se à taxa de decaimento do sistema correspondente ao operador \mathcal{O} e o Hamiltoniano H é dado, nesse caso degenerado, por

$$H = (\lambda_a a \sigma_{ig} + \lambda_b a \sigma_{ei} + \Omega e^{-i\delta t} \sigma_{ge} + \text{h.c.}) + \Delta (\sigma_{ee} + \sigma_{gg}). \quad (3.28)$$

Para estimar o fator de compressão, precisamos calcular a variância na quadratura do campo $X = (a e^{-i\varphi} + a^\dagger e^{i\varphi})/2$, a partir da solução da equação

$$i \frac{d}{dt} a = (\lambda_g^* \sigma_{gi} + \lambda_e^* \sigma_{ie}) - i \frac{\Gamma_c}{2} a, \quad (3.29)$$

onde Γ_c indica a taxa de decaimento do campo na cavidade. As soluções adiabáticas para os operadores σ_{ig} e σ_{ie} são obtidas a partir das seguintes equações de movimento:

$$i \frac{d\sigma_{ig}}{dt} = \left(\Delta - i \frac{\Gamma_i}{2} \right) \sigma_{ig} + \lambda_a^* a^\dagger (\sigma_{ii} - \sigma_{gg}) - \lambda_b a \sigma_{eg} + \Omega e^{-i\delta t} \sigma_{ie}, \quad (3.30a)$$

$$i \frac{d\sigma_{ie}}{dt} = \left(\Delta - i \frac{\Gamma_e}{2} \right) \sigma_{ie} + \lambda_b a (\sigma_{ii} - \sigma_{ee}) - \lambda_a^* a^\dagger \sigma_{ge} - \Omega^* e^{i\delta t} \sigma_{ig}, \quad (3.30b)$$

e assumindo novamente que a dessintonia Δ seja muito grande de modo que $\Delta \gg |\lambda_g|, |\lambda_e|, |\Omega|, |\delta|, \Gamma_{ig}, \Gamma_{ie}$. Nesse caso, as soluções adiabáticas são similares às soluções encontradas nas Eqs. (3.19, 3.20), referentes aos elementos de matriz do operador densidade, e necessitando substituir Δ por $(\Delta - i\Gamma_e/2)$ ou por $(\Delta - i\Gamma_i/2)$ e assumir um único modo na cavidade (ou seja, fazendo $b \rightarrow a$ nas Eqs.(3.19, 3.20)).

A seguir, consideramos três aproximações para simplificar os cálculos. Primeiramente, *i*) assumimos o mesmo tempo de vida para ambos os níveis atômicos $|e\rangle$ e $|i\rangle$: $\Gamma_e = \Gamma_i = \Gamma_a$. Em seguida, *ii*) assumimos que o decaimento atômico dificilmente leva o átomo para o nível $|g\rangle$ e, conseqüentemente, ao nível $|e\rangle$. (De fato, mesmo na situação ideal, o experimento deve ser reiniciado quando o átomo não é detectado no estado $|i\rangle$ após interagir com o campo na cavidade.) Com essa suposição, que simplifica consideravelmente o problema, obtemos a comutação $[\sigma_{ii}, H] \propto \sigma_{gg}, \sigma_{ee}, \sigma_{ge} \approx 0$ de modo que

$$i \frac{d\sigma_{ii}}{dt} \simeq -i \frac{\Gamma_i}{2} \sigma_{ii} \rightarrow \sigma_{ii}(t) = e^{-\Gamma_a t} \sigma_{ii}(0). \quad (3.31)$$

Substituindo as soluções para σ_{ie} e σ_{ig} (resultante dessas duas aproximações além da

aproximação adiabática) na Eq. (3.29) obtemos finalmente as equações acopladas

$$\frac{d}{dt}\tilde{a} = -i\chi(1 - e^{-\Gamma_a t/2})\tilde{a} + i\xi e^{-\Gamma_a t/2}\tilde{a}^\dagger, \quad (3.32a)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{a}^\dagger = i\chi(1 - e^{-\Gamma_a t/2})\tilde{a}^\dagger - i\xi e^{-\Gamma_a t/2}\tilde{a}, \quad (3.32b)$$

onde $\tilde{a} = e^{-(\Gamma_c/2+i\chi)t} a$ e definimos $\chi = (|\lambda_a|^2 + |\lambda_b|^2) / \Delta$. A terceira aproximação *iii*) consiste em notar que, para os tempos de interação átomo-campo, da ordem de 4×10^{-4} s, e para os tempos de decaimento via emissão espontânea de estados circulares de Rydberg, $\Gamma_a \sim 10^2 \text{ s}^{-1}$ [70], o primeiro termo do lado direito das Eqs. (3.32a) e (3.32b) pode ser desprezado. Portanto, com essas considerações, decorre a solução

$$a = e^{-(\Gamma_c/2+i\chi)t} \left(a_0 \cosh \tilde{r} + e^{-i\varphi} a_0^\dagger \sinh \tilde{r} \right), \quad (3.33)$$

de onde obtemos a variância na quadratura comprimida ($\varphi = \pi/2$)

$$\langle \Delta X \rangle^2 = \frac{1}{4} [1 - (1 - e^{-2\tilde{r}}) e^{-\Gamma_c t}] \quad (3.34)$$

sendo o fator de compressão $\tilde{r} = 4|\xi|(1 - e^{-\Gamma_a t/2})/\Gamma_a$. Podemos verificar que, para pequenos intervalos de interação átomo-campo podemos aproximar $e^{-\Gamma_a t/2} \approx 1 - \Gamma_a t/2$, de modo que o fator de compressão com decaimento atômico \tilde{r} é aproximadamente aquele obtido para o caso ideal (r). Entretanto, o decaimento do campo na cavidade, expresso pela exponencial decrescente na Eq. (3.34), contribui substancialmente para o crescimento da variância da quadratura comprimida e, conseqüentemente, para a diminuição da taxa de compressão. Assumindo a taxa de decaimento de estados circulares de Rydberg (com número quântico principal $n \sim 50$) $\Gamma_a \sim 3 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$ com $|\lambda_a| \sim |\lambda_b| \sim 3 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ [70] e considerando os valores acima para os parâmetros $|\Omega|$, Δ , e $\tau = 4 \times 10^{-4} \text{ s}$, obtemos $\tilde{r} \sim 1.03$. Considerando o fator de decaimento típico para cavidades abertas de alto- Q , $\Gamma_c \sim 10^3 \text{ s}^{-1}$ [70], obtemos a variância na quadratura comprimida $\langle \Delta X \rangle^2 \sim 1 \times 10^{-1}$, representando uma compressão em torno de 59%. Para cavidades fechadas, onde $\Gamma_c \sim 10 \text{ s}^{-1}$ e níveis não-circulares de Rydberg (com $n \sim 60$) são utilizados, tal que $\Gamma_a \sim 5 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ [69], obtemos $\tilde{r} \sim 0.65$ e $\langle \Delta X \rangle^2 \sim 6.5 \times 10^{-2}$, que corresponde a uma compressão em torno de 73%. Vale notar que, para cavidades fechadas,

como a taxa de decaimento atômica é maior que aquela envolvida nos experimentos em cavidades abertas, a aproximação *iii*) acima não se aplica adequadamente.

Em síntese, apresentamos aqui um esquema para a implementação de processos paramétricos em cavidades. Esse esquema baseia-se na interação dispersiva de um átomo de três níveis com dois modos quânticos estacionários em uma cavidade de alto- Q juntamente com um campo clássico atuando sobre os níveis atômicos. Notamos que o processo de conversão paramétrica descendente de frequências, no caso degenerado ($\omega_a = \omega_b$), pode ser utilizado para a geração de estados comprimidos com alto fator de compressão. Já o caso não degenerado pode ser utilizado para a geração de estados de vácuo de dois modos comprimidos quando partimos de estados de vácuo nos dois modos da cavidade e a evolução temporal é governada pela Eq. (3.24). Esses estados são exatamente os estados emaranhados de Einstein-Podolsky-Rosen [47] quando tomamos o limite de $|\xi| \tau \rightarrow \infty$. No Capítulo 5 discutiremos com mais detalhes a geração desse estado assim como um possível esquema para medi-lo em eletrodinâmica quântica de cavidades.

Capítulo 4

Hamiltonianos efetivos em EQC - expansão perturbativa

Neste capítulo estudamos a engenharia de interações em eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC), assim como no capítulo anterior, a partir de um único átomo de três níveis submetido à ação de um campo clássico externo interagindo simultaneamente com dois modos do campo de radiação em uma cavidade de alto fator de qualidade (alto- Q). A obtenção dos Hamiltonianos de interação efetivos dar-se-á via uma expansão perturbativa da equação de Schrödinger [68]. Nesse caso, não será necessário fazermos a suposição de que o acoplamento entre o átomo e o campo clássico seja fraco, ou seja, da ordem do acoplamento entre as transições atômicas e os modos quânticos da cavidade, como foi requerido no capítulo anterior devido à aproximação adiabática. Assim, poderemos neste capítulo, analisar também os regimes em que o acoplamento entre o átomo de três níveis e o campo clássico seja forte, ou seja, muito maior que os acoplamentos quânticos. Entre as vantagens deste tratamento, observamos que é possível, em certos casos, obter acoplamentos paramétricos muito mais fortes que os apresentados no capítulo anterior. Nesta perspectiva, os tempos de interação requeridos para as propostas de engenharia de estados tornam-se consideravelmente menores, fazendo com que os erros devido aos mecanismos dissipativos tornem-se desprezíveis. Outra vantagem relevante, que estudaremos em mais detalhes no próximo capítulo, refere-se à

geração de estados de superposição, tais como, estados comprimidos em direções perpendiculares e estados do tipo “gato de Schrödinger” comprimidos, como estudado no capítulo 2. A geração de emaranhamentos entre os modos, como estados de dois modos de vácuo comprimido e estados coerentes emaranhados também podem ser obtidos. Uma característica apresentada pelo nosso esquema é que, para a geração de todos esses estados de superposição acima citados, não necessitamos de zonas de Ramsey e de processos externos de amplificação paramétrica: o campo clássico externo que atua sobre o átomo durante a interação deste com os modos da cavidade é que dá origem às rotações nos estados atômicos e aos processos paramétricos desejados. Uma vez preparado o átomo em seu estado excitado via feixes laser, o átomo deve interagir com os modos da cavidade e ser submetido simultaneamente à ação um campo clássico externo. Logo após deixar a cavidade, a detecção de seu estado eletrônico projeta os modos da cavidade em um estado de superposição.

4.1 Conversão ascendente de frequências

Utilizaremos aqui os mesmos diagramas de níveis utilizados no capítulo anterior. Começando com o processo de conversão paramétrica ascendente de frequências (CPA), consideramos os níveis atômicos em uma configuração “Lambda” (Λ), Fig. (3.1). Aqui os estados excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$ estão acoplados a um terceiro nível mais excitado $|i\rangle$. Os modos da cavidade de frequências ω_a e ω_b induzem as transições de dipolo $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ e $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$, com constantes de acoplamento λ_a e λ_b , respectivamente. A dessintonia entre as frequências desses modos e as das transições atômicas é $\Delta = |\omega_i - \omega_g - \omega_a| = |\omega_i - \omega_e - \omega_b|$. Finalmente, um campo clássico de frequência $\omega_c = (2\omega_0 - \delta)$ acopla a transição $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, com constante de acoplamento $\Omega = |\Omega| e^{i\varphi}$. Da Fig. (3.1) vemos que

$$\omega_e - \omega_g = 2\omega_0, \quad (4.1a)$$

$$\omega_a - \omega_b = 2\omega_0, \quad (4.1b)$$

$$\omega_i - \omega_b = \omega_0 + \Delta, \quad (4.1c)$$

$$\omega_i - \omega_a = -\omega_0 + \Delta. \quad (4.1d)$$

O Hamiltoniano total do sistema, escrito na aproximação de onda girante, é dado por $H = H_0 + V$, onde

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \omega_0 (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \omega_i \sigma_{ii}, \quad (4.2a)$$

$$V = (\lambda_a a \sigma_{ig} + \lambda_b b \sigma_{ie} + \Omega e^{i\omega_c t} \sigma_{ge} + \text{h.c.}), \quad (4.2b)$$

com a^\dagger (a) e b^\dagger (b) sendo os operadores de criação (aniquilação) de fótons dos modos quânticos da cavidade e $\sigma_{kl} \equiv |k\rangle \langle l|$, ($k, l = g, e, i$). (Também assumimos em todo esse capítulo $\hbar = 1$.) Escrevendo o Hamiltoniano total em um referencial que gira com a frequência do campo clássico, fazendo-se uma transformação unitária com $U = \exp[-i\omega_c t (a^\dagger a + b^\dagger b + \sigma_{ee} - \sigma_{gg})/2]$, o Hamiltoniano transformado $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$ torna-se

$$\tilde{H}_0 = \delta_a a^\dagger a + \delta_b b^\dagger b + \delta/2 (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \omega_i \sigma_{ii} + (|\Omega| e^{i\varphi} \sigma_{ge} + \text{h.c.}), \quad (4.3a)$$

$$\tilde{V} = (\lambda_a a \sigma_{ig} + \lambda_b b \sigma_{ei} + \text{h.c.}), \quad (4.3b)$$

sendo $\delta/2 = \omega_0 - \omega_c/2$, $\delta_a = \omega_a - \omega_c/2$ e $\delta_b = \omega_b - \omega_c/2$. Escrevendo a parte do Hamiltoniano que contém somente operadores do átomo [71],

$$H_{at} = \delta/2 (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \omega_i \sigma_{ii} + (|\Omega| e^{i\varphi} \sigma_{ge} + \text{h.c.}), \quad (4.4)$$

vemos que os seus auto estados são dados por

$$\left\{ |i\rangle, |\pm\rangle = N_\pm \left[\pm \left(\sqrt{|\Omega|^2 + \delta^2/4} \mp \delta/2 \right) e^{i\varphi/2} |g\rangle + |\Omega| e^{-i\varphi/2} |e\rangle \right] \right\}, \quad (4.5)$$

com auto valores $\left\{ \omega_i, \pm \sqrt{|\Omega|^2 + \delta^2/4} \right\}$, respectivamente, e constante de normalização

$$N_\pm = \left[|\Omega|^2 + \left(\sqrt{|\Omega|^2 + \delta^2/4} \mp \delta/2 \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (4.6)$$

Observamos que, para $\delta/2$ muito pequeno ($\delta \ll |\Omega|$), os auto-estados acima podem ser aproximados para $|\pm\rangle \simeq 1/\sqrt{2} [\pm e^{i\varphi/2} |g\rangle + e^{-i\varphi/2} |e\rangle]$ tal que $H_{at} |\pm\rangle \simeq \pm |\Omega| |\pm\rangle$. Essa dessintonia do campo clássico $\delta/2$ será útil para obtermos processos de amplificação paramétrica ressonantes, uma vez que as interações entre o átomo e os modos quânticos podem deslocar as frequências desses modos. Porém, como veremos mais adiante, esses deslocamentos δ são

muito menores que $|\Omega|$, de modo que podemos fazer a aproximação acima. Dentro dessa aproximação, podemos então escrever

$$|g\rangle \simeq e^{-i\varphi/2} (|+\rangle - |-\rangle) / \sqrt{2}, \quad (4.7a)$$

$$|e\rangle \simeq e^{i\varphi/2} (|+\rangle + |-\rangle) / \sqrt{2}. \quad (4.7b)$$

O próximo passo consiste em escrevermos o Hamiltoniano na Representação de Interação, tomando como Hamiltoniano livre aquele descrito pela Eq. (4.3a), onde notamos que o termo do campo clássico faz parte desse Hamiltoniano. Para simplificarmos os cálculos, reescrevemos o Hamiltoniano de interação \tilde{V} (4.3b) em termos dos auto estados do Hamiltoniano livre do átomo, usando as Eqs. (4.7a) e (4.7b). Assim, usando as relações entre as frequências do sistema definidas nas Eqs. (4.1), é fácil ver que o Hamiltoniano \tilde{V} na Representação de Interação escreve-se como

$$\begin{aligned} V_I(t) = & g_a a [|i\rangle \langle +| e^{i(\Delta - |\Omega| - \delta/2)t} - |i\rangle \langle -| e^{i(\Delta + |\Omega| - \delta/2)t}] \\ & + g_b b [|i\rangle \langle +| e^{i(\Delta - |\Omega| + \delta/2)t} + |i\rangle \langle -| e^{i(\Delta + |\Omega| + \delta/2)t}] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde definimos $g_a = \lambda_a e^{i\varphi/2} / \sqrt{2}$ e $g_b = \lambda_b e^{-i\varphi/2} / \sqrt{2}$.

Estaremos interessados em dois regimes, dependendo da intensidade do acoplamento clássico $|\Omega|$ e da dessintonia Δ . O regime que chamamos de **acoplamento fraco**, no qual assumimos $\Delta \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|, |\Omega|$; e o regime que chamamos de **acoplamento forte**, onde $|\Omega| \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|, \Delta$. Em ambos os regimes, notamos que todos os termos de $V_I(t)$ são altamente oscilantes e então podemos obter o Hamiltoniano efetivo, que descreve a evolução do sistema na representação de Interação, seguindo o método descrito na Ref. [68], que consiste em fazermos uma expansão perturbativa na equação de Schrödinger, que na Representação de Interação escreve-se como:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = V_I(t) |\psi(t)\rangle. \quad (4.9)$$

A solução formal desta equação diferencial pode ser escrita como

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle - i \int_0^t V_I(t') |\psi(t')\rangle dt'. \quad (4.10)$$

Substituindo de volta na Eq. (4.9), obtemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = V_I(t) |\psi(0)\rangle - i V_I(t) \int_0^t V_I(t') |\psi(t')\rangle dt'. \quad (4.11)$$

Como todos os termos que compõem o Hamiltoniano $V_I(t)$ (4.8) são altamente oscilantes, em uma boa aproximação podemos desprezar o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.11) e podemos adotar a aproximação Markoviana para o segundo termo. Desse modo, a evolução do estado $|\psi(t)\rangle$ é aproximadamente governada pela equação

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \simeq H_{ef} |\psi(t)\rangle \quad (4.12)$$

com

$$H_{ef} = -i V_I(t) \int_0^t V_I(t') dt'. \quad (4.13)$$

Integrando a Eq. (4.8) e usando a Eq. (4.13) obtemos finalmente o Hamiltoniano efetivo para o sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ef}(t) = & \frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} [|\lambda_a|^2 \Delta a a^\dagger + |\lambda_b|^2 \Delta b b^\dagger + |\Omega| (\lambda_a \lambda_b^* e^{i\varphi - i\delta t} a b^\dagger + \text{h.c.})] |i\rangle \langle i| \\ & - \frac{1}{2(\Delta - |\Omega|)} [|\lambda_a|^2 a^\dagger a + |\lambda_b|^2 b^\dagger b + (\lambda_a \lambda_b^* e^{i\varphi - i\delta t} a b^\dagger + \text{h.c.})] |+\rangle \langle +| \\ & - \frac{1}{2(\Delta + |\Omega|)} [|\lambda_a|^2 a^\dagger a + |\lambda_b|^2 b^\dagger b - (\lambda_a \lambda_b^* e^{i\varphi - i\delta t} a b^\dagger + \text{h.c.})] |-\rangle \langle -|, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde desprezamos os termos altamente oscilantes (aproximação de onda girante). Até o presente momento, ainda não nos referimos ao regime de acoplamento que estamos tratando, sendo o Hamiltoniano efetivo acima válido para ambos os regimes, **fraco** e **forte**. No entanto, para obtermos a Eq. (4.14) foi necessário desprezarmos termos que oscilam no tempo com $e^{\pm 2i|\Omega|t}$ (termos que acoplam os estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$). No regime de acoplamento forte, esses termos realmente são altamente oscilantes e então podemos fazer a aproximação de onda girante. Porém, no regime de acoplamento fraco, isso pode não ser verdade e então deveríamos levar em conta esses outros termos. Incluindo uma nova condição: $|\Omega| \gtrsim |\lambda_a|$ e $|\lambda_b|$, além da condição $\Delta \gg |\Omega|$, podemos assegurar que esses termos que oscilam com $e^{\pm 2i|\Omega|t}$ também podem ser desprezados mesmo no regime de acoplamento fraco. Mais adiante discutiremos com mais cuidado esse ponto, incluindo alguns cálculos numéricos. Antes de discutirmos os

regimes de acoplamento fraco e forte, é conveniente primeiramente realizarmos uma transformação unitária sobre o Hamiltoniano efetivo, com a ajuda do operador

$$U(t) = \exp \left\{ -it (|\lambda_a|^2 a^\dagger a + |\lambda_b|^2 b^\dagger b) \left[\frac{\Delta |i\rangle \langle i|}{\Delta^2 - |\Omega|^2} - \frac{|+\rangle \langle +|}{2(\Delta - |\Omega|)} - \frac{|-\rangle \langle -|}{2(\Delta + |\Omega|)} \right] \right\}. \quad (4.15)$$

Com essa transformação, o Hamiltoniano efetivo pode ser reescrito como

$$U^\dagger \mathcal{H}_{ef}(t) U = (|\lambda_a|^2 a^\dagger a + |\lambda_b|^2 b^\dagger b) \left[\frac{\Delta |i\rangle \langle i|}{\Delta^2 - |\Omega|^2} - \frac{|+\rangle \langle +|}{\Delta - |\Omega|} - \frac{|-\rangle \langle -|}{\Delta + |\Omega|} \right], \quad (4.16)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ef} = & \left[\chi_{ai} + \chi_{bi} + (\xi_i e^{+i(-\delta - \chi_{ai} + \chi_{bi})t} ab^\dagger + \text{h.c.}) \right] |i\rangle \langle i| \\ & - \left[\xi_+ e^{+i(-\delta + \chi_{a+} - \chi_{b+})t} ab^\dagger + \text{h.c.} \right] |+\rangle \langle +| \\ & + \left[\xi_- e^{+i(-\delta + \chi_{a-} - \chi_{b-})t} ab^\dagger + \text{h.c.} \right] |-\rangle \langle -|, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde definimos as constantes

$$\chi_{ai} = \frac{\Delta |\lambda_\alpha|^2}{(\Delta^2 - |\Omega|^2)}, \quad (4.18a)$$

$$\chi_{\alpha\pm} = \frac{|\lambda_\alpha|^2}{2(\Delta \mp |\Omega|)}, \quad (4.18b)$$

com $\alpha = a, b$, e

$$\xi_i = \frac{|\Omega| \lambda_a \lambda_b^* e^{i\varphi}}{(\Delta^2 - |\Omega|^2)}, \quad (4.19a)$$

$$\xi_{\pm} = \frac{\lambda_a \lambda_b^* e^{i\varphi}}{2(\Delta \mp |\Omega|)}. \quad (4.19b)$$

Da Eq. (4.17) vemos que o Hamiltoniano efetivo não acopla os níveis atômicos entre si, de modo que a evolução do sistema não alterará o estado atômico. No entanto, para cada estado atômico inicial ($|i\rangle$, $|+\rangle$ ou $|-\rangle$), os modos do campo de radiação dentro da cavidade evoluirão de formas ligeiramente diferentes. Em seguida, proceguimos com a análise dos dois regimes de acoplamento, fraco e forte, entre o átomo e o campo clássico externo.

4.1.1 CPA - regime de acoplamento fraco

Nesse regime, é necessário assumir uma dessintonia Δ suficientemente grande entre as frequências dos modos quânticos da cavidade e as das transições atômicas, de modo que $\Delta \gg |\Omega| \gtrsim |\lambda_a|, |\lambda_b|$. Com essa condição, os deslocamentos das frequências (4.18) podem ser escritos como, $\chi_{\alpha i} = |\lambda_\alpha|^2 / \Delta$ e $\chi_{\alpha \pm} = |\lambda_\alpha|^2 / 2(\Delta \mp |\Omega|) \approx |\lambda_\alpha|^2 / 2\Delta = \chi_\alpha$. Se o átomo for preparado inicialmente no estado $|i\rangle$, e ajustando a frequência do campo clássico tal que $\delta = (-\chi_{ai} + \chi_{bi})$, a dinâmica dos modos a e b será governada pelo Hamiltoniano bilinear

$$\mathcal{H}_i = (\xi_i ab^\dagger + \text{h.c.}) |i\rangle \langle i|, \quad (4.20)$$

onde $\xi_i = |\Omega| \lambda_a \lambda_b^* e^{i\varphi} / \Delta^2$. É importante notar que esse Hamiltoniano é o mesmo obtido no capítulo anterior, para o processo de conversão paramétrica ascendente de frequências.

Por outro lado, se o átomo for preparado inicialmente em um dos estados $|\pm\rangle$, e ajustando a dessintonia tal que $\delta = (\chi_a - \chi_b)$ (note que esse ajuste elimina a temporalidade do Hamiltoniano (4.17), tanto do termo referente ao estado $|+\rangle$ quanto ao referente ao estado $|-\rangle$, simultaneamente), o Hamiltoniano que descreve a evolução dos modos da cavidade será

$$\mathcal{H}_\pm = -(\xi ab^\dagger + \text{h.c.}) (|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|), \quad (4.21)$$

onde definimos $\xi = \xi_\pm \approx \lambda_a \lambda_b^* e^{i\varphi} / 2\Delta$. É importante notarmos que os acoplamentos λ_a e λ_b , típicos em eletrodinâmica quântica de cavidades, são aproximadamente iguais de modo que $\chi_{ai} \sim \chi_{bi}$ e $\chi_a \sim \chi_b$, de onde observamos que a dessintonia clássica δ tem que ser aproximadamente zero para que tenhamos Hamiltonianos bilineares independentes do tempo. Por outro lado, vemos que $|\xi|$ é muito maior que $|\xi_i|$, o que representa um ganho significativo em relação ao Hamiltoniano (4.20), pois os tempos de interação requeridos são menores que os necessários quando o estado atômico inicial é $|i\rangle$.

Os Hamiltonianos descritos nas Eqs. (4.20) e (4.21) descrevem interações entre os modos quânticos da cavidade similares àquelas encontradas em divisores de feixes, muito comuns em experimentos no domínio de ondas propagantes. Em particular, mostraremos no próximo capítulo como o Hamiltoniano (4.21) pode ser utilizado para a geração de estados emaranhados entre dois modos de uma cavidade de alto- Q .

4.1.2 CPA - regime de acoplamento forte

Nesse regime o acoplamento $|\Omega|$ entre o átomo e o campo clássico é forte em comparação com os demais acoplamentos e a dessintonia Δ : $|\Omega| \gg |\lambda_a|, |\lambda_b| \gtrsim \Delta$. Nesse caso podemos assumir a dessintonia Δ muito pequena ou mesmo aproximadamente nula, o que pode simplificar as expressões, sem prejudicar a obtenção dos Hamiltonianos efetivos. Com essas condições, das Eqs. (4.18) temos $\chi_{\alpha i} \simeq 0$ e $\chi_{\alpha \pm} = \mp |\lambda_\alpha|^2 / 2 |\Omega|$. Novamente, para cada estado atômico inicial, teremos uma determinada dinâmica para os modos da cavidade. Se o átomo for preparado inicialmente no estado $|i\rangle$, vemos primeiramente que $\delta = 0$ nos dá um Hamiltoniano efetivo independente do tempo

$$\tilde{\mathcal{H}}_i = - \left(\tilde{\xi}_i ab^\dagger + \text{h.c.} \right) |i\rangle \langle i|, \quad (4.22)$$

com $\tilde{\xi}_i = \lambda_a \lambda_b^* e^{i\varphi} / |\Omega|$. O acoplamento desse Hamiltoniano é pelo menos uma ordem de grandeza maior que aquele em (4.20). Isso faz com que, quando consideramos o átomo preparado inicialmente no estado $|i\rangle$, os tempos de interação requeridos para a manipulação dos campos da cavidade sejam muito menores nesse regime de acoplamento forte do que aqueles necessários para o regime de acoplamento fraco.

Quando consideramos os estados $|\pm\rangle$, vemos que os deslocamentos das frequências são diferentes para cada um desses estados. No entanto, como os acoplamentos $|\lambda_a|$ e $|\lambda_b|$ são da mesma ordem, a dessintonia δ do campo clássico terá que ser nula para ambos os estados $|\pm\rangle$ para que tenhamos Hamiltonianos efetivos independentes do tempo. Por outro lado, no regime forte (e com $\Delta \simeq 0$) $\xi_\pm = \mp \lambda_a \lambda_b^* e^{i\varphi} / 2 |\Omega| \equiv \mp \tilde{\xi}$ de modo que

$$\tilde{\mathcal{H}}_\pm = \left(\tilde{\xi} ab^\dagger + \text{h.c.} \right) (|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|). \quad (4.23)$$

Nesse caso o acoplamento entre os modos da cavidade é metade daquele encontrado na Eq. (4.22) e da mesma ordem daquele considerado no regime fraco, para os estados $|\pm\rangle$, Eq. (4.21).

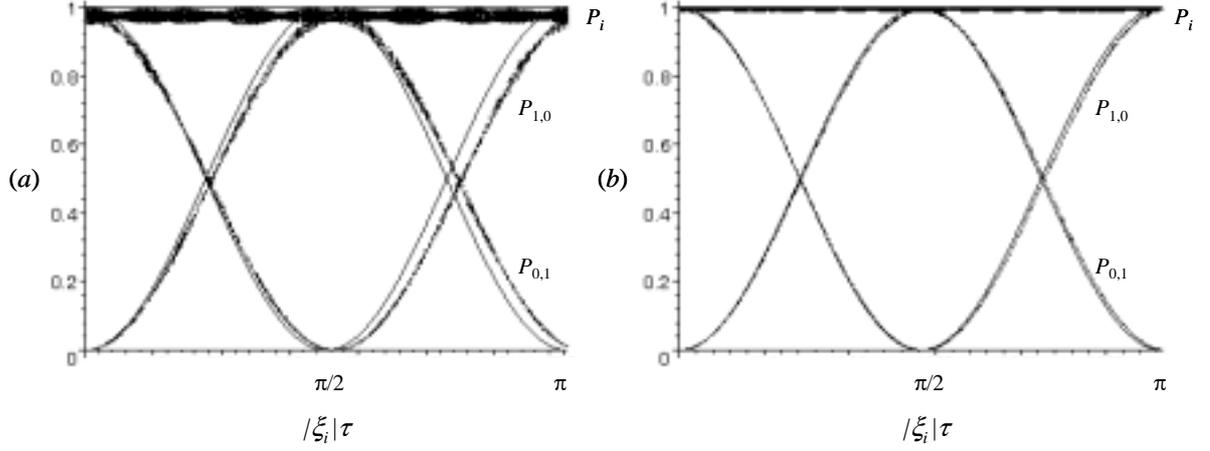


Figura 4.1: Probabilidades $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ e P_i obtidas a partir do Hamiltoniano efetivo (4.20) (curvas contínuas) e do Hamiltoniano sem aproximação (4.2) (curvas pontilhadas) para o regime de acoplamento fraco e o átomo preparado no estado $|i\rangle$. (a) $\Delta = 15|\lambda|$ e (b) $\Delta = 30|\lambda|$.

4.1.3 Validade da aproximação

Para analisarmos a validade da aproximação (4.13), comparamos a evolução de um dado estado inicial do nosso sistema considerando os Hamiltonianos efetivos obtidos acima e considerando o Hamiltoniano total (4.2) na Representação de Interação, via cálculo numérico. Por simplicidade assumimos $|\lambda_a| = |\lambda_b| = |\lambda|$, $\delta = 0$ e acoplamentos reais em todos os casos. Inicialmente consideramos o átomo preparado no estado $|\ell\rangle$ ($\ell = i, +, -$) e os modos da cavidade no estado $|1, 0\rangle_{ab}$ (um fóton no modo a e vácuo no modo b). Em ambos os regimes, fraco e forte, a evolução do sistema escreve-se como

$$\begin{aligned} |\Psi(\theta)\rangle &= \exp\{-i\theta(ab^\dagger + a^\dagger b)|\ell\rangle\langle\ell|\}|i\rangle|1, 0\rangle_{ab} \\ &= \cos(\theta)|i\rangle|1, 0\rangle_{ab} - i\sin(\theta)|i\rangle|0, 1\rangle_{ab}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

com $\theta = |\xi_\ell|\tau$ (regime fraco) ou $\theta = |\tilde{\xi}_\ell|\tau$ (regime forte).

Considerando o átomo preparado no estado inicial $|\ell\rangle = |i\rangle$, vemos na Fig. (4.1) a probabilidade do fóton permanecer no modo a ($P_{1,0}$), de ir para o modo b ($P_{0,1}$), e a probabilidade do átomo manter-se no nível $|i\rangle$, independentemente da excitação dos modos, (P_i),

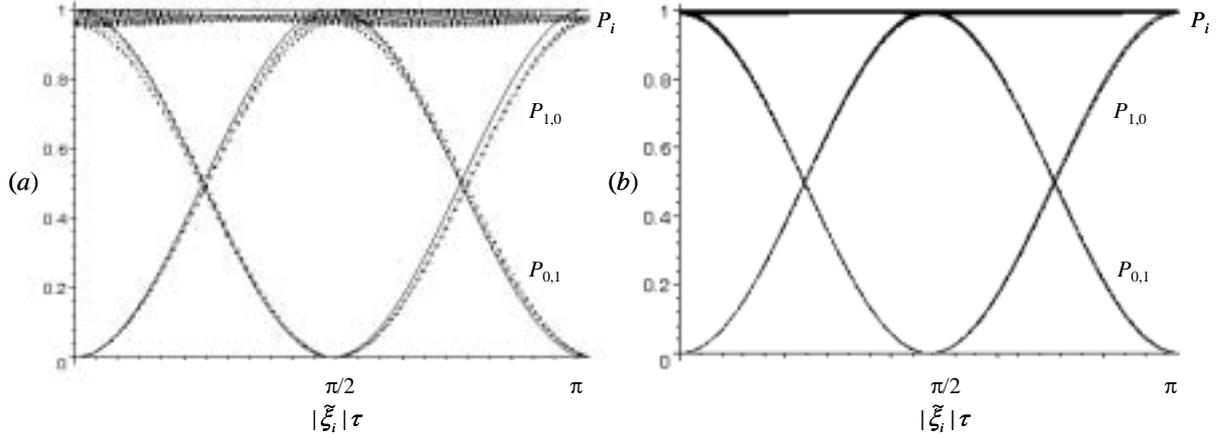


Figura 4.2: Probabilidades $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ e P_i obtidas a partir do Hamiltoniano efetivo (4.22) (curvas contínuas) e do Hamiltoniano sem aproximação (curvas pontilhadas) para o regime de acoplamento forte e o átomo preparado no estado $|i\rangle$. (a) $|\Omega| = 15|\lambda|$ e (b) $\Omega = 30|\lambda|$. Em ambos os casos temos $\Delta = 0$.

variando-se o parâmetro de interação $|\xi_i|\tau$, para o regime de acoplamento fraco. Considerando $|\Omega| \sim 1|\lambda|$ e (a) $\Delta \sim 15|\lambda|$ vemos que o erro devido à aproximação (4.13) é pequeno; para (b) $\Delta \sim 30|\lambda|$, o erro torna-se praticamente desprezível. Na Fig. (4.2) fazemos a mesma análise, porém para o regime forte considerando $\Delta = 0$ e (a) $|\Omega| \sim 15|\lambda|$ e (b) $|\Omega| \sim 30|\lambda|$. Nesse último regime a superposição entre as curvas obtidas a partir do Hamiltoniano efetivo (4.22) e o sem aproximação (4.2) é um pouco melhor, além de requerer um tempo muito menor para se obter o mesmo processo (regime fraco: $\tau \sim \Delta^2/|\lambda_a\lambda_b\Omega|$ onde $\Delta \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|, |\Omega|$; regime forte: $\tau \sim |\Omega/\lambda_a\lambda_b|, |\Omega| \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|$), o que é importante para minimizar os erros na geração de estados devidos à relaxação do sistema.

Considerando o estado atômico inicial $|+\rangle$, também analisamos algumas situações (a análise para o estado $|-\rangle$ é análoga). Considerando o regime de acoplamento fraco, na Fig. (4.3) analisamos as probabilidades $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ e P_+ (probabilidade do átomo permanecer no estado $|+\rangle$, independentemente do estado dos modos) para $\Delta \sim 15|\lambda|$ e (a) $|\Omega| \sim |\lambda|$, (b) $|\Omega| \sim |\lambda|/3$ e (c) $|\Omega| \sim 3|\lambda|$, de onde notamos que o melhor casamento entre as curvas obtidas via Hamiltoniano efetivo (4.21) e o cálculo numérico acontece para $|\Omega| \gtrsim |\lambda|$. Quanto

maior for a razão $|\Omega/\lambda|$, melhor a aproximação. Porém, para que a aproximação ainda seja válida, devemos sempre manter $\Delta \gg |\Omega|$. Na Fig. (4.3-d) verificamos um casamento muito bom entre as curvas, onde assumimos $\Delta \sim 5|\Omega| \sim 25|\lambda|$.

Como observamos das Fig. (4.3), o acoplamento clássico $|\Omega|$ deve ser maior que os acoplamentos $|\lambda_a|$ e $|\lambda_b|$, porém mantendo-se sempre menor que a dessintonia Δ . Para $\Delta = 5|\Omega|$ e $|\Omega| = 3|\lambda|$, Fig. (4.3-c), a diferença entre as curvas obtidas via Hamiltoniano efetivo ou via cálculo numérico já é muito pequeno, enquanto que para $\Delta = 5|\Omega|$ e $|\Omega| = 5|\lambda|$, Fig. (4.3-d), o erro torna-se praticamente desprezível.

Com respeito ao regime de acoplamento forte e o átomo preparado inicialmente no estado $|+\rangle$ (Hamiltoniano efetivo dado pela Eq. (4.23)) vemos, da Fig. (4.4-a), que para $|\Omega| = 8|\lambda|$ a diferença entre as curvas é pequena, tornando-se ainda menor para acoplamentos clássicos mais fortes sendo praticamente insignificante para $|\Omega| = 15|\lambda|$, como vemos na Fig. (4.4-b).

Considerando o regime de acoplamento forte, é importante observar que, quando preparamos o átomo inicialmente no estado $|i\rangle$, devemos assumir $|\Omega/\lambda| \gtrsim 15$ para que o erro associado à aproximação seja pequeno, enquanto que, para o átomo preparado no estado $|+\rangle$ podemos assumir a metade do valor anterior.

Para que o erro associado à aproximação seja pequeno, precisamos ter $|\Omega| \gtrsim 15|\lambda|$, enquanto que, para o átomo preparado inicialmente no estado $|+\rangle$, precisamos apenas de $|\Omega| \gtrsim 8|\lambda|$, praticamente a metade do valor necessário para o caso em que o estado atômico é $|i\rangle$. No entanto, o acoplamento entre os modos é dado por $|\tilde{\xi}_i| = |\lambda_a\lambda_b/\Omega|$, para o estado $|i\rangle$, e por $|\tilde{\xi}| = |\lambda_a\lambda_b/2\Omega|$ para o estado $|+\rangle$, ou seja, $|\tilde{\xi}_i| = 2|\tilde{\xi}|$. Desse modo, como o tempo de interação é inversamente proporcional ao parâmetro de acoplamento entre os modos, para obtermos um mesmo ângulo θ ($= |\tilde{\xi}_i|\tau$ ou $|\tilde{\xi}|\tau$), na Eq. (4.24), e um processo com a mesma “qualidade”, precisaremos do mesmo tempo de interação para ambos os casos em que o estado atômico é $|i\rangle$ ou $|+\rangle$. Por fim, ressaltamos que uma análise similar aplica-se também ao regime fraco.

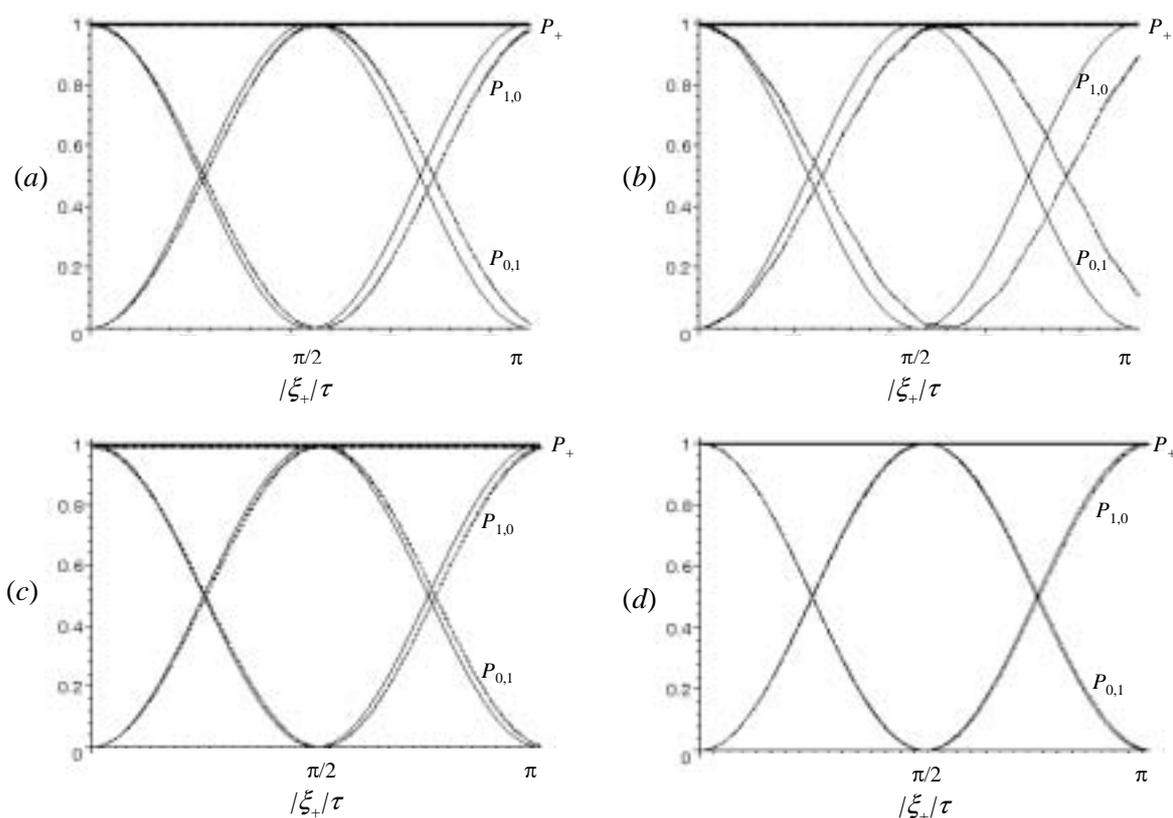


Figura 4.3: Probabilidades $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ e P_+ obtidas a partir do Hamiltoniano efetivo (4.21) (curvas contínuas) e do Hamiltoniano sem aproximação (4.2) (curvas pontilhadas) para o regime de acoplamento fraco e o átomo preparado no estado $|+\rangle$. (a) $\Delta = 15|\lambda|$ e $|\Omega| = |\lambda|$, (b) $\Delta = 15|\lambda|$ e $|\Omega| = |\lambda|/3$, (c) $\Delta = 15|\lambda|$ e $|\Omega| = 3|\lambda|$; (d) $\Delta = 25|\lambda|$ e $|\Omega| = 5|\lambda|$.

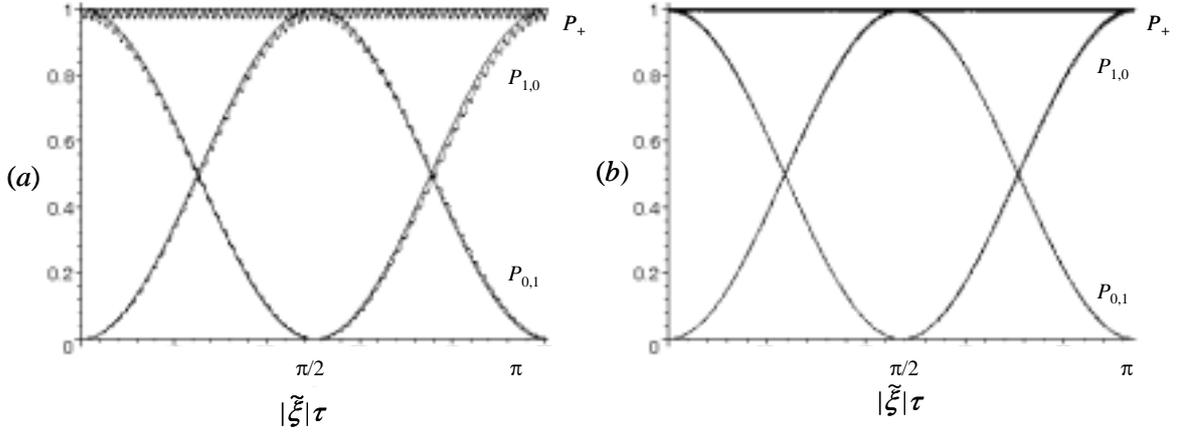


Figura 4.4: Probabilidades $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ e P_+ obtidas a partir do Hamiltoniano efetivo (4.23) (curvas contínuas) e do Hamiltoniano sem aproximação (4.2) (curvas pontilhadas) para o regime de acoplamento forte e átomo preparado no estado $|+\rangle$. (a) $|\Omega| = 8|\lambda|$ e (b) $|\Omega| = 15|\lambda|$. Em ambos os casos assumimos $\Delta = 0$.

4.2 Conversão de freqüências descendente

O processo de conversão paramétrica descendente de freqüências (CPD) é implementado com o auxílio de um átomo de três níveis em configuração “escada” (Ξ), Fig. (3.2). Aqui os estados excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$ estão acoplados a um nível intermediário $|i\rangle$. Os modos da cavidade de freqüências ω_a e ω_b induzem as transições de dipolo $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ e $|i\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, com constantes de acoplamento λ_a e λ_b , respectivamente. A dessintonia entre as freqüências desses modos e aquelas das transições atômicas é $\Delta = |\omega_i - \omega_g - \omega_a| = |\omega_i - \omega_e - \omega_b|$. Um campo clássico de freqüência $\omega_c = (2\omega_0 - \delta)$ acopla a transição $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$, com constante de acoplamento Ω . Da Fig. (3.2) vemos que

$$\omega_e - \omega_g = 2\omega_0, \quad (4.25a)$$

$$\omega_a + \omega_b = 2\omega_0, \quad (4.25b)$$

$$\omega_0 - \omega_i = \omega_b + \Delta, \quad (4.25c)$$

$$\omega_i + \omega_g = \omega_a - \Delta, \quad (4.25d)$$

e o Hamiltoniano total do nosso sistema, escrito na aproximação de onda girante, é $H = H_0 + V$, onde

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \omega_0 (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + \omega_i \sigma_{ii}, \quad (4.26a)$$

$$V = (\lambda_a a \sigma_{ig} + \lambda_b b \sigma_{ei} + \Omega e^{-i\omega_c t} \sigma_{eg} + \text{h.c.}). \quad (4.26b)$$

(Os operadores que se encontram nessas expressões estão definidos na seção anterior.)

Novamente, o primeiro passo consiste em escrever o Hamiltoniano em um referencial girante com a frequência do laser, utilizando para isso o operador

$$U = \exp [-i\omega_c t (a^\dagger a + b^\dagger b + \sigma_{ee} - \sigma_{gg}) / 2]. \quad (4.27)$$

O Hamiltoniano transformado $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$ é então dado por

$$\tilde{H}_0 = \delta_a a^\dagger a + \delta_b b^\dagger b + \omega_i \sigma_{ii} + \delta/2 (\sigma_{ee} - \sigma_{gg}) + (|\Omega| e^{-i\varphi} \sigma_{eg} + \text{h.c.}), \quad (4.28a)$$

$$\tilde{V} = (\lambda_a a \sigma_{ig} + \lambda_b b \sigma_{ei} + \text{h.c.}). \quad (4.28b)$$

onde $\Omega = |\Omega| e^{-i\varphi}$ e $\delta_\ell = \omega_\ell - \omega_c/2$ ($\ell = a, b$). Usando novamente a base de estados atômicos $\{|i\rangle, |\pm\rangle\}$ e a condição $\delta/2 \ll |\Omega|$ podemos reescrever o Hamiltoniano de interação (4.28b) com o auxílio das Eqs. (4.7) na Representação de interação. Com o auxílio das Eqs. (4.25) podemos escrever

$$\begin{aligned} V_I(t) = & e^{i\varphi/2} \lambda_a a (e^{i(\Delta-|\Omega|-\delta/2)t} |i\rangle \langle +| - e^{i(\Delta+|\Omega|-\delta/2)t} |i\rangle \langle -|) / \sqrt{2} \\ & + e^{i\varphi/2} \lambda_b b (e^{-i(\Delta-|\Omega|+\delta/2)t} |+\rangle \langle i| + e^{-i(\Delta+|\Omega|+\delta/2)t} |-\rangle \langle i|) / \sqrt{2} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Consideraremos os dois regimes de acoplamento clássico (fraco e forte) analisados acima para o caso do processo de conversão paramétrica ascendente de frequências. Em ambos os regimes, o Hamiltoniano de Interação (4.29) possui termos altamente oscilantes e podemos então obter o Hamiltoniano efetivo para esse sistema usando a expressão (4.13). Integrando $V_I(t)$, usando a Eq. (4.13) e desprezando os termos oscilantes, seguindo a mesma discussão realizada na seção 4.1 (para o processo de conversão ascendente de frequências) chegamos

ao Hamiltoniano efetivo

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{ef} &= \frac{1}{\Delta^2 - |\Omega|^2} [|\lambda_a|^2 \Delta a a^\dagger + |\lambda_b|^2 \Delta b^\dagger b + |\Omega| (\lambda_a \lambda_b e^{i\varphi - i\delta t} ab + \text{h.c.})] |i\rangle \langle i| \\ &\quad - \frac{1}{2(\Delta - |\Omega|)} [|\lambda_a|^2 a^\dagger a + |\lambda_b|^2 b b^\dagger + (\lambda_a \lambda_b e^{i\varphi - i\delta t} ab + \text{h.c.})] |+\rangle \langle +| \\ &\quad - \frac{1}{2(\Delta + |\Omega|)} [|\lambda_a|^2 a^\dagger a + |\lambda_b|^2 b b^\dagger - (\lambda_a \lambda_b e^{i\varphi - i\delta t} ab + \text{h.c.})] |-\rangle \langle -|. \quad (4.30)\end{aligned}$$

É conveniente realizarmos uma transformação unitária sobre o Hamiltoniano efetivo, com a ajuda do operador

$$U(t) = \exp \left\{ -it (|\lambda_a|^2 a^\dagger a + |\lambda_b|^2 b^\dagger b) \left[\frac{\Delta |i\rangle \langle i|}{\Delta^2 - |\Omega|^2} - \frac{|+\rangle \langle +|}{2(\Delta - |\Omega|)} - \frac{|-\rangle \langle -|}{2(\Delta + |\Omega|)} \right] \right\}. \quad (4.31)$$

Com essa transformação, o Hamiltoniano efetivo pode ser reescrito como

$$\mathcal{H}_{ef} = U^\dagger \mathcal{H}_{ef}(t) U - (|\lambda_a|^2 a^\dagger a + |\lambda_b|^2 b^\dagger b) \left[\frac{\Delta |i\rangle \langle i|}{(\Delta^2 - |\Omega|^2)} - \frac{|+\rangle \langle +|}{(\Delta - |\Omega|)} - \frac{|-\rangle \langle -|}{2(\Delta + |\Omega|)} \right], \quad (4.32)$$

de onde vemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{ef} &= [\mu_{ai} + (\eta_i e^{+i(-\delta - \mu_{ai} - \mu_{bi})t} ab + \text{h.c.})] |i\rangle \langle i| \\ &\quad - [\mu_{b+} + \eta_+ e^{+i(-\delta + \mu_{a+} + \mu_{b+})t} ab + \text{h.c.}] |+\rangle \langle +| \\ &\quad + [\mu_{b-} + \eta_- e^{+i(-\delta + \mu_{a-} + \mu_{b-})t} ab + \text{h.c.}] |-\rangle \langle -|, \quad (4.33)\end{aligned}$$

cujas constantes definimos como

$$\mu_{\alpha i} = \frac{\Delta |\lambda_\alpha|^2}{(\Delta^2 - |\Omega|^2)}, \quad (4.34a)$$

$$\mu_{\alpha \pm} = \frac{|\lambda_\alpha|^2}{2(\Delta \mp |\Omega|)}, \quad (4.34b)$$

com $\alpha = a, b$, e

$$\eta_i = \frac{|\Omega| \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi}}{(\Delta^2 - |\Omega|^2)}, \quad (4.35a)$$

$$\eta_\pm = \frac{\lambda_a \lambda_b e^{i\varphi}}{2(\Delta \mp |\Omega|)}. \quad (4.35b)$$

Vemos também que o Hamiltoniano efetivo (4.33) não acopla os níveis atômicos entre si, de modo que a evolução do sistema não altera o estado atômico. No entanto, para cada estado atômico inicial ($|i\rangle$, $|+\rangle$ ou $|-\rangle$), os modos do campo de radiação dentro da cavidade evoluirão com acoplamentos ligeiramente diferentes, dados pelas Eqs. (4.35).

4.2.1 CPD - regime de acoplamento fraco

De forma similar ao processo CPA, assumimos $\Delta \gg |\Omega| \gtrsim |\lambda_a|, |\lambda_b|$. Das Eqs. (4.34) os deslocamentos das frequências podem ser escritos como, $\mu_{\alpha i} = |\lambda_\alpha|^2 / \Delta$ e $\mu_{\alpha \pm} = |\lambda_\alpha|^2 / 2 (\Delta \mp |\Omega|) \approx |\lambda_\alpha|^2 / 2\Delta = \mu_\alpha$. Se o átomo for preparado inicialmente no estado intermediário $|i\rangle$, ajustando-se a frequência do campo clássico tal que $\delta = -(\mu_{ai} + \mu_{bi})$, o Hamiltoniano efetivo será

$$\mathbb{H}_i = (\eta_i ab + \text{h.c.}) |i\rangle \langle i|, \quad (4.36)$$

onde $\eta_i = |\Omega| \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / \Delta^2$. Notamos que o Hamiltoniano efetivo acima é igual ao obtido no capítulo anterior, para o processo de conversão paramétrica descendente de frequências.

Para o átomo preparado inicialmente no estado $|+\rangle$ ou no estado $|-\rangle$, juntamente com o ajuste da frequência do campo clássico tal que $\delta = (\mu_a + \mu_b)$, teremos o Hamiltoniano efetivo

$$\mathbb{H}_\pm = -[\mu_b + (\eta ab + \text{h.c.})] [|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|], \quad (4.37)$$

com $\eta = \eta_\pm \approx \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / 2\Delta$. Observamos que o acoplamento $|\eta|$, referente ao Hamiltoniano efetivo \mathbb{H}_\pm , é muito maior que o $|\eta_i|$, associado ao Hamiltoniano \mathbb{H}_i . Com isso, no regime de acoplamento fraco, os tempos de interação entre o átomo e os modos da cavidade requeridos para se obter um mesmo parâmetro de interação são muito menores quando o átomo é preparado em um dos estados $|\pm\rangle$ do que aqueles necessários quando o átomo é preparado no estado $|i\rangle$.

Por fim notamos que nos casos acima, a dessintonia do campo clássico $|\delta|$ é diferente de zero, mas continua muito menor que $|\Omega|$ uma vez que é proporcional a $|\lambda_\alpha|^2 / 2\Delta$, $\alpha = a, b$, e aqui $\Delta \gg |\Omega| \gtrsim |\lambda_a|, |\lambda_b|$, sendo válido o uso das Eqs. (4.7).

4.2.2 CPD - regime de acoplamento forte

Aqui assumimos $|\Omega| \gg |\lambda_a|, |\lambda_b| \gtrsim \Delta$. Como no processo de CPA, no regime de acoplamento forte, a dessintonia Δ pode ser muito pequena, de modo que assumiremos, sem perda de generalidade, $\Delta = 0$ para simplificarmos as expressões. Com essas considerações e com as Eqs. (4.34) temos $\mu_{\alpha i} \simeq 0$ e $\mu_{\alpha \pm} = \mp |\lambda_\alpha|^2 / 2 |\Omega|$. Novamente, para cada estado atômico inicial decorre uma dinâmica específica para os modos da cavidade.

Para o átomo preparado inicialmente no estado $|i\rangle$, e ajustando $\delta = 0$, temos

$$\tilde{\mathbb{H}}_i = -(\tilde{\eta}_i ab + \text{h.c.}) |i\rangle \langle i|, \quad (4.38)$$

com $\tilde{\eta}_i = \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / |\Omega|$. Assim como no processo de CPA, quando o átomo for preparado inicialmente no estado intermediário $|i\rangle$, o acoplamento $|\tilde{\eta}_i|$ é pelo menos uma ordem de grandeza maior que o acoplamento $|\eta_i|$, obtido no regime de acoplamento fraco, de modo que os tempos de interação átomo-modos da cavidade podem ser consideravelmente menores no regime de acoplamento forte.

Para o átomo preparado no estado $|+\rangle$ ou no estado $|-\rangle$ temos que ajustar $\delta_+ = (|\lambda_a|^2 + |\lambda_b|^2)/2 |\Omega|$ e $\delta_- = -(|\lambda_a|^2 + |\lambda_b|^2)/2 |\Omega|$, respectivamente, para obtermos os Hamiltonianos efetivos independentes do tempo

$$\tilde{\mathbb{H}}_+ = [|\lambda_b|^2/2 |\Omega| + (\tilde{\eta} ab + \text{h.c.})] [|+\rangle \langle +|], \quad (4.39a)$$

$$\tilde{\mathbb{H}}_- = [|\lambda_b|^2/2 |\Omega| + (\tilde{\eta} ab + \text{h.c.})] [|-\rangle \langle -|], \quad (4.39b)$$

com $\tilde{\eta} = \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / 2 |\Omega|$. (Escrevemos os Hamiltonianos acima em equações separadas pois não é possível ajustar a frequência do campo clássico de modo que ambos os Hamiltonianos $\tilde{\mathbb{H}}_+$ e $\tilde{\mathbb{H}}_-$ sejam independentes do tempo simultaneamente, de modo que, ao ajustarmos $\delta = \delta_+$ (δ_-) teremos um processo ressonante de conversão paramétrica descendente de frequências quando o átomo for preparado no estado $|+\rangle$ ($|-\rangle$). Um caso interessante surge quando consideramos $\delta = 0$ e o caso degenerado de CPD ($\omega_a = \omega_b$), ou seja, em que temos um único modo na cavidade interagindo simultaneamente com as transições $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ e $|i\rangle \leftrightarrow |g\rangle$. Nesse caso, teremos um modo quântico na cavidade submetido a um processo de amplificação paramétrica degenerado tendo a sua frequência deslocada condicionalmente. Da Eq. (4.30) podemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{H}}_{sc} = & \frac{1}{2|\Omega|} [(|\lambda_a|^2 + |\lambda_b|^2) a^\dagger a + (\lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} a^2 + \text{h.c.}) + |\lambda_b|^2] |+\rangle \langle +| \\ & \frac{1}{2|\Omega|} [- (|\lambda_a|^2 + |\lambda_b|^2) a^\dagger a + (\lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} a^2 + \text{h.c.}) + |\lambda_b|^2] |-\rangle \langle -|. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Esse Hamiltoniano é de particular interesse pois ele é análogo ao estudado no capítulo 2 (desconsiderando-se o termo de amplificação linear naquele capítulo), onde implementamos

a geração de estados do tipo “gato de Schrödinger” comprimidos com um grande número médio de fótons e uma grande distância, no espaço de fase, entre os centros das distribuições de quase-probabilidade de cada um dos estados que compõem a superposição.

É importante notar que em todos os Hamiltonianos obtidos no processo de conversão paramétrica descendente, as interações entre os modos, condicionadas pelo estado atômico, são proporcionais a $(ab + \text{h.c.})$. Com esse tipo de interação é possível gerar estados emaranhados entre os dois modos estacionários da cavidade. Em particular, é possível gerar o estado de vácuo de dois modos comprimidos, que projetado no espaço de posição descreve o estado original usado por Einstein-Podolsky-Rosen para contestar o princípio da incerteza de Heisenberg. Por outro lado, quando consideramos um único modo na cavidade, isto é, o regime degenerado de conversão paramétrica descendente, obtemos Hamiltonianos proporcionais a $(a^2 + \text{h.c.})$, que são importantes para a geração de estados comprimidos do campo de radiação. No capítulo a seguir discutiremos a geração de alguns estados a partir dos Hamiltonianos obtidos nesse capítulo.

Como discutido brevemente no capítulo anterior, quando um modo do campo de radiação, preparado em um estado coerente, tem sua evolução governada por um Hamiltoniano do tipo $(a^2 + \text{h.c.})$, durante um tempo τ , a variância na quadratura comprimida do campo é dada por $(\Delta X)^2 = e^{-2r}/4$, sendo r o fator de compressão. Para o regime fraco e considerando o átomo preparado em um dos estados $|\pm\rangle$, vemos que $r = 2|\eta|\tau$, com $|\eta| = |\lambda_a\lambda_b/2\Delta|$, τ sendo o tempo de interação átomo-campo. Considerando os parâmetros utilizados no capítulo anterior, onde $|\lambda_a| \sim |\lambda_b| \sim 3 \times 10^5 \text{s}^{-1}$ (tanto para átomos com número quântico principal em torno de 60 [69] como para átomos com número quântico em torno de 50 [70]) e assumindo $|\Omega| \sim |\lambda_a|$ e $\Delta \sim 10 \times |\lambda_a|$, temos então $|\eta| = 1.5 \times 10^4 \text{s}^{-1}$. Com esse parâmetro de acoplamento e ajustando o tempo de interação átomo-campo tal que $\tau = 5 \times 10^{-5} \text{s}$, temos $r = 1.5$, resultando em uma variância na quadratura comprimida $(\Delta X)^2 = 1.2 \times 10^{-2}$, que representa uma compressão em torno de 95%.

Para o regime forte e o átomo preparado em um dos estados $|\pm\rangle$ temos $r = 2|\tilde{\eta}|\tau$, com $|\tilde{\eta}| = |\lambda_a\lambda_b/2\Omega|$. Assumindo $|\Omega| \sim 10 \times |\lambda_a|$ e $\Delta = 0$, temos para $|\tilde{\eta}| = 1.5 \times 10^4 \text{s}^{-1}$, resultando em $r = 1.5$, como no caso fraco. Podemos também preparar o átomo no

estado intermediário $|i\rangle$, sendo o fator de compressão do campo dado por $r = 2|\tilde{\eta}_i|\tau$, com $|\tilde{\eta}_i| = |\lambda_a\lambda_b/\Omega|$. Assumindo agora $|\Omega| \sim 15 \times |\lambda_a|$, $\Delta = 0$ e o mesmo tempo de interação temos, para os valores acima $r = 2$, que resulta em uma variância na quadratura comprimida $(\Delta X)^2 = 4.6 \times 10^{-3}$, que corresponde a uma compressão de 98.2%. Consideramos um acoplamento clássico $|\Omega|$ maior para o átomo preparado no estado $|i\rangle$ ($|\Omega| \sim 15 \times |\lambda_a|$) do que para os estados $|\pm\rangle$ ($|\Omega| \sim 10 \times |\lambda_a|$). Como discutido na seção 4.1.3, para obtermos um processo com a mesma “qualidade” em ambos os casos, o acoplamento forte $|\Omega|$ referente aos estados $|\pm\rangle$ pode ser igual à metade do considerado para o estado $|i\rangle$.

Por fim, observamos que os erros envolvidos na geração de estados devido aos mecanismos de dissipação são muito pequenos, tornando-se praticamente desprezíveis para os tempos de interação requeridos aqui ($\sim 5 \times 10^{-5}$ s), exceção apenas para o caso em que o átomo é preparado inicialmente no estado intermediário $|i\rangle$ quando consideramos o regime de acoplamento fraco (analisado no capítulo anterior). Por exemplo, para a conversão paramétrica descendente degenerada de frequências ($\omega_a = \omega_b$), considerando o regime de acoplamento forte e o átomo preparado inicialmente no estado $|i\rangle$, podemos obter uma expressão para a variância na quadratura comprimida quando processos de dissipação são levados em conta usando um tratamento fenomenológico, análogo ao desenvolvido no capítulo 3. Para isso precisamos assumir que o Hamiltoniano efetivo (4.38), com $a = b$ tal que $\tilde{\mathbb{H}}_i = -(\tilde{\eta}_i a^2 + \text{h.c.})|i\rangle\langle i|$, praticamente não se altera quando os processos dissipativos são levados em conta. (Essa suposição é razoável uma vez que, mesmo no regime fraco e o átomo preparado no nível intermediário, onde os tempos de interação requeridos são grandes comparados com os do regime forte, o Hamiltoniano efetivo obtido no capítulo 3, na presença de decaimento atômico e do campo, é praticamente igual ao obtido no caso ideal.) Com essa suposição, podemos introduzir as taxas de decaimento de forma fenomenológica nas equações de movimento para os operadores do sistema segundo [49]: $i\frac{d}{dt}\mathcal{O} = [\mathcal{O}, \tilde{\mathbb{H}}_i] - i\frac{\Gamma}{2}\mathcal{O}$, Γ sendo a taxa de decaimento do operador \mathcal{O} . Seguindo os mesmos passos desenvolvidos no capítulo 3, obtemos a variância na quadratura comprimida $\langle \Delta X \rangle^2 = \frac{1}{4} [1 - (1 - e^{-2\tilde{r}}) e^{-\Gamma_c t}]$, sendo o fator de compressão $\tilde{r} = 4|\tilde{\eta}_i|(1 - e^{-\Gamma_a t/2})/\Gamma_a$ (Γ_a é a taxa de decaimento do átomo e Γ_c é a taxa de decaimento do campo). Assumindo a taxa de decaimento de es-

tados circulares de Rydberg (com número quântico principal $n \sim 50$) $\Gamma_a \sim 10^2 \text{ s}^{-1}$ com $|\lambda_a| \sim |\lambda_b| \sim 3 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ [70] e considerando os valores utilizados acima para o regime de acoplamento forte: $|\Omega| \sim 15 \times |\lambda_a|$, $\Delta = 0$ e $\tau = 5 \times 10^{-5} \text{ s}$, obtemos $\tilde{r} \sim 2$. Considerando o fator de decaimento típico para cavidades abertas de alto- Q , $\Gamma_c \sim 10^3 \text{ s}^{-1}$ [70], obtemos a variância na quadratura comprimida $\langle \Delta X \rangle^2 \sim 1.6 \times 10^{-2}$, representando uma compressão em torno de 93%. Para cavidades fechadas, onde $\Gamma_c \sim 10 \text{ s}^{-1}$ e níveis não-circulares de Rydberg (com $n \sim 60$) são utilizados, tal que $\Gamma_a \sim 5 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ [69], obtemos $\tilde{r} \sim 1.88$ e $\langle \Delta X \rangle^2 \sim 5.9 \times 10^{-3}$, que corresponde a uma compressão em torno de 97%. Vale lembrar que para esses mesmos parâmetros, a compressão obtida no caso ideal é em torno de 98% ao invés de 97%, o que mostra que os efeitos dos decaimentos do átomo e do campo na geração de estados comprimidos podem ser praticamente desconsiderados no presente protocolo.

Capítulo 5

Geração e detecção de estados não clássicos da luz

A partir dos Hamiltonianos obtidos nos Capítulos 3 e 4 é possível gerar vários estados do campo de radiação em eletrodinâmica quântica de cavidades, tanto para dois como para um único modo da cavidade. Nesse capítulo expomos alguns desses estados.

A partir do processo degenerado de CPD, mostramos como gerar estados comprimidos, superposição de estados comprimidos em direções perpendiculares e estados do tipo “gato de Schrödinger” comprimido. Com o processo de CPD não degenerado, é possível gerar estados de vácuo de dois modos comprimidos (como o estado original de Einstein-Podolsky-Rosen) e superposições desses estados. Ao final desse capítulo, discutimos um esquema para a medida da função de Wigner desses estados, seguindo o método descrito na Ref. [72].

5.1 Geração de estados usando CPA

Neste primeiro momento, analisamos como é possível gerar estados emaranhados entre dois modos do campo de radiação usando o processo de CPA. Para o átomo preparado em um dado estado: $|\ell\rangle$, $\ell = i, +$ ou $-$, seja no regime de acoplamento fraco ou forte, os Hamiltonianos

de interação serão todos da forma (com $\hbar = 1$)

$$H_{cpa} = (\xi_\ell ab^\dagger + \xi_\ell^* a^\dagger b) |\ell\rangle \langle \ell|. \quad (5.1)$$

A evolução temporal de qualquer estado nos modos a e b é dada pelo operador $U = \exp[-\theta_\ell (ab^\dagger - a^\dagger b)]$, com $\theta_\ell = |\xi_\ell| \tau$, sendo τ o tempo de interação átomo-campo. Esse operador de evolução é análogo ao que descreve a ação de um divisor de feixes sobre modos a e b incidentes. Para o estado inicial em que um dos modos encontra-se no vácuo e o outro em um estado de número $|N\rangle$, obtemos um estado emaranhado após a interação dos modos com o átomo. Por exemplo, considerando o regime de acoplamento forte e o átomo preparado no estado $|i\rangle$, vemos da Eq.(4.22) que $\xi_\ell = \tilde{\xi}_i = \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / |\Omega|$. Partindo-se do estado $|N, 0\rangle_{ab}$, obtem-se, após a interação átomo-modos durante o intervalo de tempo $\tau = \pi/4 \left| \tilde{\xi}_i \right|$ (o que equivale a um divisor de feixes 50/50), o estado binomial de dois modos

$$|\Phi(\tau)\rangle_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{n=0}^N \sqrt{\frac{N!}{n!(N-n)!}} |N-n, n\rangle_{ab}. \quad (5.2)$$

Um outro caso surge quando preparamos o átomo em uma superposição dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ e trabalhamos no regime de acoplamento fraco. Na Representação de Interação, a dinâmica do sistema será governada pelo Hamiltoniano dado pela Eq. (4.21):

$$\mathcal{H}_\pm = -(\xi ab^\dagger + \text{h.c.}) (|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|), \quad (5.3)$$

com $\xi = \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / 2\Delta$. Preparando-se o átomo no estado $|e\rangle = 1/\sqrt{2} (|-\rangle + |+\rangle)$, os modos no estado $|\Phi(0)\rangle_{ab}$, e ajustando $\xi = -i |\xi|$, o estado do sistema após a interação átomo-modos durante um tempo τ será

$$\begin{aligned} e^{-i\mathcal{H}_\pm \tau} |\Phi(0)\rangle_{ab} |e\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp [|\xi| \tau (ab^\dagger - a^\dagger b) (|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|)] |\Phi(0)\rangle_{ab} (|-\rangle + |+\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{[|\xi| \tau (ab^\dagger - a^\dagger b)]} |\Phi(0)\rangle_{ab} |+\rangle + e^{-[|\xi| \tau (ab^\dagger - a^\dagger b)]} |\Phi(0)\rangle_{ab} |-\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[e^{[|\xi| \tau (ab^\dagger - a^\dagger b)]} - e^{-[|\xi| \tau (ab^\dagger - a^\dagger b)]} \right] |\Phi(0)\rangle_{ab} |g\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left[e^{[|\xi| \tau (ab^\dagger - a^\dagger b)]} + e^{-[|\xi| \tau (ab^\dagger - a^\dagger b)]} \right] |\Phi(0)\rangle_{ab} |e\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Após a interação átomo-campo, a detecção do estado atômico projetará os modos do campo de radiação no estado de superposição

$$|\Phi(\tau)\rangle_{ab} = \mathcal{N}_{\pm} \left\{ \left[e^{|\xi|\tau(ab^\dagger - a^\dagger b)} \pm e^{-|\xi|\tau(ab^\dagger - a^\dagger b)} \right] |\Phi(0)\rangle_{ab} \right\}, \quad (5.5)$$

onde o sinal $+$ ($-$) refere-se à detecção do estado $|e\rangle$ ($|g\rangle$) e \mathcal{N}_{\pm} é uma constante de normalização. Notamos que em nenhum momento foi necessário o uso de zonas de Ramsey propriamente dita para a geração de tais superposições. O próprio campo externo realiza as rotações necessárias nos estados atômicos.

Preparando inicialmente os modos a e b em estados coerentes tal que $|\Phi(0)\rangle_{ab} = |\alpha\rangle_a |\beta\rangle_b$ e ajustando o tempo de interação $\tau = \pi/(4|\xi|)$, obtemos o estado emaranhado de dois modos

$$|\Phi_1\rangle_{ab} = \mathcal{N}_{\pm} \left(\left| (\alpha + \beta)/\sqrt{2} \right\rangle_a \left| (\beta - \alpha)/\sqrt{2} \right\rangle_b \pm \left| (\alpha - \beta)/\sqrt{2} \right\rangle_a \left| (\alpha + \beta)/\sqrt{2} \right\rangle_b \right), \quad (5.6)$$

Em particular podemos, por exemplo, assumir $\alpha = \beta$, de modo que o estado (5.6) seja da forma $(|\sqrt{2}\alpha\rangle_a |0\rangle_b \pm |0\rangle_a |\sqrt{2}\alpha\rangle_b)$. Considerando os parâmetros típicos em experimentos com cavidades de microondas, onde $|\lambda_a| \sim |\lambda_b| \sim 3 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ [69, 70] e assumindo $\Delta \sim 10 \times |\lambda_a|$, vemos que o tempo de interação necessário para gerar o estado emaranhado (5.6) será $\tau = \pi\Delta/(2|\lambda_a\lambda_b|) \simeq 5 \times 10^{-5} \text{ s}$. Um outro estado emaranhado pode ser gerado ajustando $\tau = \pi/(2|\xi|)$, que para os valores assumidos anteriormente nos dá $\tau \simeq 10^{-4} \text{ s}$. Com esse novo ajuste, o estado gerado será:

$$|\Phi_2\rangle_{ab} = \mathcal{N}_{\pm} (|\beta\rangle_a |-\alpha\rangle_b \pm |-\beta\rangle_a |\alpha\rangle_b), \quad (5.7)$$

que pode ser útil para a verificação experimental das desigualdades de Bell no espaço de fase [73], uma vez que, para certos valores de α e β , esse estado apresenta uma máxima violação dessas desigualdades [74].

5.2 Geração de estados usando CPD

Analisaremos nesta seção a geração de estados em cavidades de alto- Q , considerando os Hamiltonianos para o processo de CPD de frequências, que são da forma (com $\hbar = 1$)

$$H_{cpd} = (\eta_\ell ab + \eta_\ell^* a^\dagger b^\dagger) |\ell\rangle \langle \ell|, \quad (5.8)$$

sendo $\ell = i, +$ ou $-$, e η_ℓ o parâmetro de acoplamento entre os modos.

5.2.1 Processo degenerado ($\omega_a = \omega_b$)

Em um primeiro momento, analisamos o caso em que temos um processo de conversão de frequências degenerado ($\omega_a = \omega_b$), isto é, o caso em que temos um único modo dentro da cavidade interagindo simultaneamente com as transições atômicas $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ e $|i\rangle \leftrightarrow |g\rangle$. Nesse caso, o Hamiltoniano efetivo escreve-se como $H_{cpd} = [\eta_\ell a^2 + \eta_\ell^* (a^\dagger)^2] |\ell\rangle \langle \ell|$. Para um átomo preparado em um único estado $|\ell\rangle$, vemos que esse Hamiltoniano pode ser utilizado para comprimir qualquer estado previamente preparado na cavidade. Em particular, vimos nos capítulos anteriores que, com os parâmetros experimentais atuais, é possível gerar estados coerentes comprimidos com grau de compressão acima de 95%. Na Ref. [75] demonstramos, por exemplo, como gerar estados de número comprimidos e estados de número deslocado comprimido.

Vale ressaltar que, embora a literatura tenha reservado um considerável espaço para os processos e compressão do campo através da sua interação com átomos, a questão de se comprimir um estado $|\Psi\rangle$ do campo previamente preparado na cavidade não havia sido endereçada até o presente momento. Com o presente protocolo, pretendemos aqui implementar a operação de compressão $S(\zeta)|\Psi\rangle$ em EQC, em que ζ corresponde aos parâmetros de compressão.

Um caso interessante surge quando preparamos o átomo em uma superposição dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ e trabalhamos no regime de acoplamento fraco, onde o Hamiltoniano efetivo, na Representação de Interação, é dado pela Eq. (4.37) tomando-se $a = b$:

$$\mathbb{H}_\pm = - [\mu_b + (\eta a^2 + \text{h.c.})] (|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|), \quad (5.9)$$

com $\eta = \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / 2\Delta$ e $\mu_b = |\lambda_b|^2 / 2\Delta$. Quando preparamos o modo da cavidade em um estado coerente $|\alpha\rangle_a$ e o átomo no estado excitado $|e\rangle = (|+\rangle + |-\rangle) / \sqrt{2}$, o estado gerado após um tempo de interação átomo-campo τ será

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbb{H}_{\pm}\tau} |\alpha\rangle |e\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{-i\mu_b\tau} e^{[|\eta|\tau(a^2 - (a^\dagger)^2)]} |\alpha\rangle_a |+\rangle + e^{i\mu_b\tau} e^{-[|\eta|\tau(a^2 - (a^\dagger)^2)]} |\alpha\rangle_a |-\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\mu_b\tau} e^{[|\eta|\tau(a^2 - (a^\dagger)^2)]} - e^{i\mu_b\tau} e^{-[|\eta|\tau(a^2 - (a^\dagger)^2)]} \right\} |\alpha\rangle_a |g\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\mu_b\tau} e^{[|\eta|\tau(a^2 - (a^\dagger)^2)]} + e^{i\mu_b\tau} e^{-[|\eta|\tau(a^2 - (a^\dagger)^2)]} \right\} |\alpha\rangle_a |e\rangle, \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde ajustamos $\eta = -i|\eta|$. Após a interação átomo-campo, a detecção do estado atômico projeta o modo da cavidade no estado

$$|\Psi(\tau)\rangle_a = \mathcal{N}_{\pm} \left\{ \exp \left[|\eta| \tau \left(a^2 - (a^\dagger)^2 \right) \right] \pm e^{2i\mu_b\tau} \exp \left[-|\eta| \tau \left(a^2 - (a^\dagger)^2 \right) \right] \right\} |\alpha\rangle_a, \quad (5.11)$$

em que \mathcal{N}_{\pm} é uma constante de normalização e o sinal $+$ ($-$) ocorrendo quando o átomo é detectado no estado excitado (fundamental). O estado (5.11) é uma superposição de dois estados coerentes comprimidos em direções perpendiculares. Na Fig. (5.1) vemos a função de Wigner $W(\gamma, \gamma^*)$ do estado gerado no modo da cavidade quando o átomo é detectado no estado excitado e a cavidade preparada inicialmente no estado de vácuo. Na Fig. (5.2) uma superposição ortogonal de estados é gerada a partir de um estado coerente com $\alpha = 3$ preparado na cavidade. O fator de compressão é dado por $r = 2|\eta|\tau$.

Em ambos os estados de superposição gerados acima não necessitamos de zonas de Ramsey para preparar o estado atômico inicial e para a manipulação do estado atômico após a interação com o campo na cavidade de alto- Q .

Outro caso a ser analisado corresponde ao regime de acoplamento forte, com dessintonia do campo clássico $\delta = 0$ e o átomo preparado em uma superposição dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$. O Hamiltoniano efetivo, na Representação de interação, é dado pela Eq. (4.40). Escrevendo-se $\omega_a = \omega_b = \omega$ (com $\hbar = 1$) esse Hamiltoniano será

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{H}}_{sc} &= + \left[\chi a^\dagger a + \xi a^2 + \xi^* (a^\dagger)^2 + |\lambda_b|/2 |\Omega| \right] |+\rangle \langle +| \\ &\quad + \left[-\chi a^\dagger a + \xi a^2 + \xi^* (a^\dagger)^2 - |\lambda_b|/2 |\Omega| \right] |-\rangle \langle -|, \end{aligned} \quad (5.12)$$

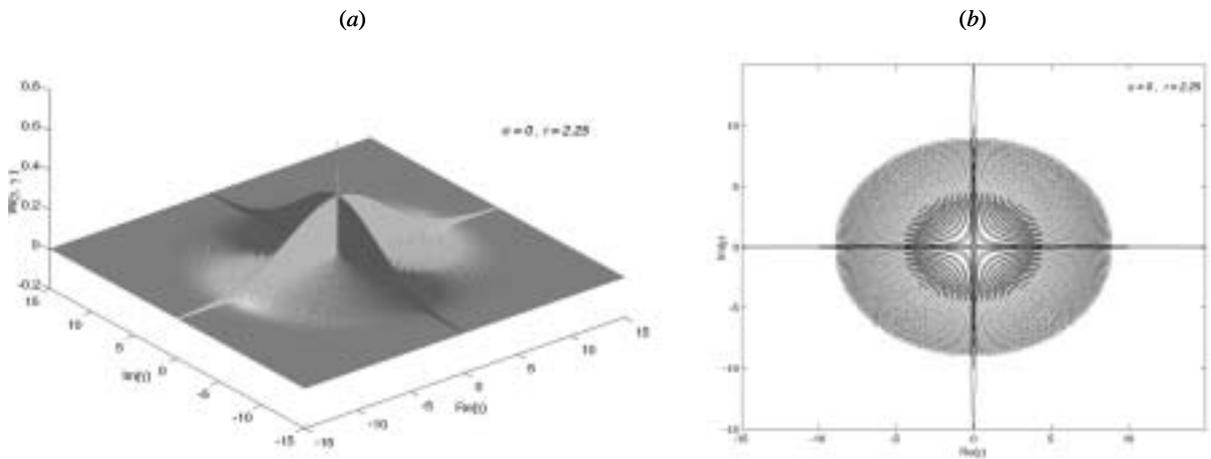


Figura 5.1: (a) Função de Wigner $W(\gamma, \gamma^*)$ e (b) sua projeção no plano $\text{Re}(\gamma) \times \text{Im}(\gamma)$ da superposição de dois estados de vácuo comprimidos em direções perpendiculares com $r = 2.25$.

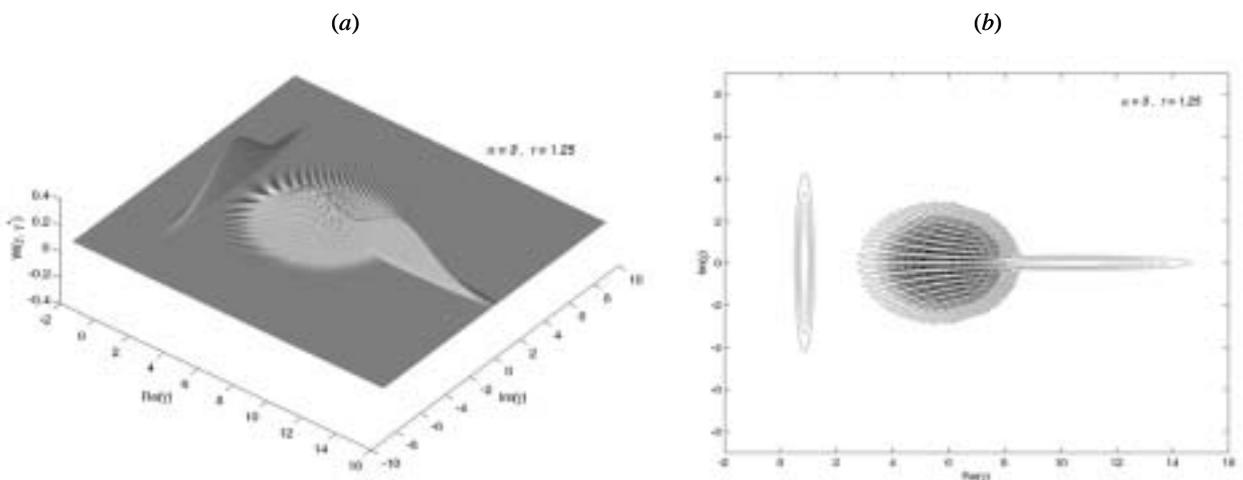


Figura 5.2: (a) Função de Wigner $W(\gamma, \gamma^*)$ e (b) sua projeção no plano $\text{Re}(\gamma) \times \text{Im}(\gamma)$ da superposição gerada a partir do estado coerente $|\alpha = 3\rangle$, comprimindo-se as componentes em direções perpendiculares com $r = 1.25$.

onde definimos $\chi = (|\lambda_a|^2 + |\lambda_b|^2) / 2 |\Omega|$ e $\xi = \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / 2 |\Omega|$. Notamos que o Hamiltoniano acima (5.12) é análogo ao estudado no capítulo 2 (quando escrito na Representação de interação), para o caso em que o processo de amplificação linear é desligado. Esse Hamiltoniano descreve um modo do campo de radiação submetido a um processo de amplificação paramétrica descendente degenerado e não ressonante. A dessintonia entre a frequência do campo na cavidade e a do processo de amplificação depende dos estados atômicos ($|+\rangle$, $|-\rangle$), e corresponde aqui ao regime crítico de amplificação dispersiva (ver seção 2.4.2) onde $|\mathbf{P}_\ell| = |2\xi/\chi| = 1$, para $|\lambda_a| \sim |\lambda_b|$. Com esse sistema, demonstramos no capítulo 2 como gerar estados do tipo “gato de Schrödinger” comprimidos, onde o fator de compressão é dado pela Eq. (2.47):

$$\cosh(2r(t)) = \frac{1}{2\mathcal{C}_1} \left[1 + \mathcal{C}_1^2 + \left(\sqrt{\mathcal{C}_1 (2 \cosh(2r(0)) - \mathcal{C}_1) - 1} \mp \mathcal{C}_1 u(t, 0) \right)^2 \right], \quad (5.13)$$

em que a constante \mathcal{C}_1 é dada por $\mathcal{C}_1 = \cosh(2r_\ell(t)) + \mathbf{P}_\ell \cos(\varphi_\ell(t) - \eta(t)) \sinh(2r_\ell(t))$ e $u(t, 0) = 4|\xi|t$. Para $t = 0$, $r(0) = 0$ e $\mathcal{C}_1 = 1$, de modo que podemos escrever $r(t) = \cosh^{-1}(1 + 8(|\xi|t)^2)/2$. Para a geração de estados de superposição, primeiramente necessitamos preparar o átomo no estado excitado $|e\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$ e o modo da cavidade em um estado coerente $|\alpha\rangle$. Em seguida, o átomo interage com o modo da cavidade submetido simultaneamente à ação do campo clássico externo, no regime de acoplamento forte. Durante a interação átomo-campo na cavidade, a dinâmica do sistema será governada pelo Hamiltoniano efetivo (5.12), cuja evolução durante um tempo de interação τ é descrita pelo operador $\mathbb{U}_\ell(\tau, 0) = U_\ell(\tau)U_\ell^\dagger(0)$, $\ell = +, -$, e $U_\ell(t)$ sendo dado pela Eq. (2.21) do Capítulo 2 (considerando a amplificação linear desligada!). Assim, podemos escrever o estado do sistema após a interação como

$$\begin{aligned} e^{-i\tilde{\mathbb{H}}_{sc}\tau} |\alpha\rangle |e\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i|\lambda_b|\tau/2|\Omega|} \mathbb{U}_+(\tau, 0) |\alpha\rangle |+\rangle + e^{i|\lambda_b|\tau/2|\Omega|} \mathbb{U}_-(\tau, 0) |\alpha\rangle |-\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-i|\lambda_b|\tau/2|\Omega|} \mathbb{U}_+(\tau, 0) |\alpha\rangle (|g\rangle + |e\rangle) + e^{i|\lambda_b|\tau/2|\Omega|} \mathbb{U}_-(\tau, 0) |\alpha\rangle (-|g\rangle + |e\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-i|\lambda_b|\tau/2|\Omega|} \mathbb{U}_+(\tau, 0) - e^{i|\lambda_b|\tau/2|\Omega|} \mathbb{U}_-(\tau, 0) \right] |\alpha\rangle |g\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[e^{-i|\lambda_b|\tau/2|\Omega|} \mathbb{U}_+(\tau, 0) + e^{i|\lambda_b|\tau/2|\Omega|} \mathbb{U}_-(\tau, 0) \right] |\alpha\rangle |e\rangle, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde notamos que, após a interação átomo-campo, a detecção do átomo projeta o campo de radiação em um estado de superposição

$$|\Psi(\tau)\rangle_a = \mathcal{N} [\exp(-i|\Omega|\tau) \mathbb{U}_+(\tau, 0) \pm \exp(i|\Omega|\tau) \mathbb{U}_-(\tau, 0)] |\alpha\rangle, \quad (5.15)$$

(+ ou – referindo-se à detecção do átomo no estado excitado ou no fundamental, respectivamente). Como demonstrado no capítulo 2, o estado descrito pela Eq. (5.15) corresponde a um estado do tipo “gato de Schrödinger” comprimido, cujas direções de compressão dos estados coerentes que compõem a superposição podendo ser controladas independentemente, de acordo com o estado atômico. Podemos ajustar os parâmetros do nosso sistema de modo que o estado (5.15) seja do tipo $S(r, \varphi = \pi) (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$, $S(r, \varphi = \pi)$ sendo um operador de compressão, cujo fator e direção de compressão são r e $\varphi = \pi$. Ressaltamos a relevância desse estado de superposição no que diz respeito ao tempo de decoerência, quando submetido à ação de um reservatório de modos adequadamente comprimidos, como discutido no capítulo 2. Desse modo, o esquema apresentado no capítulo anterior para a implementação experimental do Hamiltoniano (5.12), constitui um passo em direção à preparação de estados mesoscópicos do campo de radiação com um tempo de decoerência da ordem do tempo de relaxação, sendo a implementação de um reservatório de modos comprimidos uma questão em aberto.

Em síntese, demonstramos nesse item como implementar experimentalmente o Hamiltoniano estudado no capítulo 2 da presente tese. Naquele capítulo estudamos a geração de estados do campo de radiação submetido a processos de amplificação linear e paramétrica juntamente com um deslocamento condicional da frequência do modo da cavidade. Uma vez que o processo de amplificação linear de um modo do campo de radiação em cavidade é facilmente alcançado com a tecnologia atual [52, 63], a implementação experimental do Hamiltoniano (5.12), como descrito no capítulo 4, nos dá o deslocamento condicional e o processo de amplificação paramétrica requeridos.

5.2.2 Processo não degenerado ($\omega_a \neq \omega_b$)

Uma outra aplicação dos esquemas propostos nos capítulos 3 e 4 para a implementação de um processo paramétrico descendente em cavidades refere-se à geração de estados de vácuo de dois modos comprimidos. Para um átomo preparado em um estado inicial $|\ell\rangle$ ($\ell = i, +, -$) e os modos da cavidade preparados no estado de vácuo $|0, 0\rangle_{ab}$, usando a Eq. (5.8) vemos que o estado gerado após um tempo de interação átomo-campo τ será

$$e^{-i\tau(\eta_\ell ab + \eta_\ell^* a^\dagger b^\dagger)} |0, 0\rangle_{ab} |\ell\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\tanh(|\eta_\ell| \tau)]^n}{\cosh(|\eta_\ell| \tau)} |n, n\rangle_{ab} |\ell\rangle = |\Psi(\tau)\rangle_{ab} |\ell\rangle, \quad (5.16)$$

onde ajustamos as constantes λ_a e λ_b e a fase do campo clássico φ tal que $\eta_\ell = -i|\eta_\ell|$. O estado gerado nos dois modos do campo de radiação, $|\Psi(\tau)\rangle_{ab}$, é um estado de vácuo de dois modos comprimidos que, no limite $|\eta_\ell| \tau \rightarrow \infty$ (e projetado na base de posição dos modos a e b), é exatamente o estado emaranhado original usado por Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) para a construção de seu argumento contra o princípio da incerteza [47]. Podemos fazer uma estimativa da “qualidade” do estado de EPR preparado calculando, neste estado, os valores médios [76]

$$(\Delta x)^2 = \langle (x_a - x_b)^2 \rangle = \frac{e^{-2|\eta_\ell| \tau}}{2}, \quad (5.17a)$$

$$(\Delta p)^2 = \langle (p_a + p_b)^2 \rangle = \frac{e^{-2|\eta_\ell| \tau}}{2}, \quad (5.17b)$$

onde $x_\beta = (\beta + \beta^\dagger)/2$ e $p_\beta = -i(\beta - \beta^\dagger)/2$ ($\beta = a, b$) são as quadraturas do campo.

Das Eqs. (5.17a) e (5.17b), vemos que $(\Delta x)^2 + (\Delta p)^2 = e^{-2|\eta_\ell| \tau}$, que vai a zero para o estado de EPR ideal ($|\xi| \tau \rightarrow \infty$) e à unidade para um estado totalmente separado [76]. Portanto, a expressão $1 - e^{-2|\eta_\ell| \tau}$ pode ser usada para estimar a qualidade do estado preparado através dos parâmetros atuais em EQC. Considerando primeiramente o regime de acoplamento fraco ($\Delta \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|, |\Omega|$) vemos que para o átomo preparado no estado $|+\rangle$ (ou $|-\rangle$), $\eta_\ell = \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / 2\Delta$. Considerando $|\lambda_a| \sim |\lambda_b| \sim 3 \times 10^5 \text{s}^{-1}$ [69, 70], assumindo $\Delta = 10 \times |\lambda_a|$, $|\Omega| \sim |\lambda_a|$, e um tempo de interação $\tau = 5 \times 10^{-5} \text{s}$, temos $|\eta_\ell| \tau = 0.75$, correspondendo a uma qualidade $1 - e^{-2|\eta_\ell| \tau} \sim 0.78$.

Para o regime de acoplamento forte ($|\Omega| \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|, \Delta$) vemos que para o átomo preparado no estado $|+\rangle$ (ou $|-\rangle$), $\eta_\ell = \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / 2|\Omega|$ e assumindo $|\Omega| = 10 \times |\lambda_a|$ e $\Delta = 0$,

para um tempo de interação $\tau = 5 \times 10^{-5}$ s, obtemos $|\eta_\ell| \tau = 0.75$, como no regime fraco. Já para o átomo preparado inicialmente no estado intermediário $|i\rangle$, $\eta_\ell = \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / |\Omega|$ e assumindo $|\Omega| = 15 \times |\lambda_a|$ e $\Delta = 0$, para o mesmo tempo de interação átomo-campo temos $|\eta_\ell| \tau = 1.0$, correspondendo a uma qualidade $1 - e^{-2|\eta_\ell| \tau} \sim 0.86$.

Esses valores de $|\eta_\ell| \tau$ obtidos (sem levar em conta os erros experimentais envolvidos) e suas respectivas qualidades devem ser comparados com o valor alcançado experimentalmente no domínio de ondas viajantes para a realização do teletransporte incondicional de estados de variáveis contínuas [77], onde se obtém um parâmetro de interação $r = 0.69$ (r equivale ao parâmetro de interação $|\eta_\ell| \tau$), que corresponde a um estado emaranhado de EPR com qualidade $1 - e^{-2r} \sim 0.75$.

O estado de vácuo de dois modos comprimidos pode ser usado, por exemplo, para a verificação das desigualdades de Bell [14]. Através de um formalismo desenvolvido por Banaszek e Wódkiewicz [73] é possível analisar as desigualdades de Bell via medida da função de Wigner dos dois modos emaranhados. Esse método depende somente da habilidade de se medir a função de Wigner dos dois modos do campo, que pode ser implementado experimentalmente em EQC usando o método descrito em [72].

Por outro lado, é também possível gerar superposição de estados de dois modos de vácuo comprimido. Para o átomo preparado inicialmente no estado $|+\rangle$ ou no estado $|-\rangle$, juntamente com o ajuste da frequência do campo clássico tal que $\delta = (\mu_a + \mu_b)$, teremos o Hamiltoniano efetivo para o regime de acoplamento fraco dado pela Eq. (4.37):

$$\mathbb{H}_\pm = -[\mu_b + (\eta ab + \text{h.c.})] [|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|], \quad (5.18)$$

com $\eta = \lambda_a \lambda_b e^{i\varphi} / 2\Delta$ e $\mu_b = |\lambda_b|^2 / 2\Delta$. Novamente, preparando inicialmente o átomo no estado excitado $|e\rangle$ e os dois modos no estado de vácuo, o estado gerado após um tempo de interação τ será

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbb{H}_\pm \tau} |0, 0\rangle_{ab} |e\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ [i\mu_b \tau - |\eta| \tau (ab - a^\dagger b^\dagger)] (|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|) \right\} |0, 0\rangle_{ab} (|-\rangle + |+\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[e^{[i\mu_b \tau - |\eta| \tau (ab - a^\dagger b^\dagger)]} - e^{-[i\mu_b \tau - |\eta| \tau (ab - a^\dagger b^\dagger)]} \right] |0, 0\rangle_{ab} |g\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left[e^{[i\mu_b \tau - |\eta| \tau (ab - a^\dagger b^\dagger)]} + e^{-[i\mu_b \tau - |\eta| \tau (ab - a^\dagger b^\dagger)]} \right] |0, 0\rangle_{ab} |e\rangle \right\}, \quad (5.19) \end{aligned}$$

de onde vemos que a detecção do estado atômico conduz ao estado de superposição (ajustando $\mu_b \tau = \pi$)

$$\begin{aligned}
|\Psi_{\pm}\rangle_{ab} &= \mathcal{N}_{\pm} \left\{ e^{-|\eta|\tau(ab-a^{\dagger}b^{\dagger})} \pm e^{|\eta|\tau(ab-a^{\dagger}b^{\dagger})} \right\} |0,0\rangle_{ab} \\
&= \mathcal{N}_{\pm} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{[\tanh(|\eta|\tau)]^n \pm [\tanh(-|\eta|\tau)]^n}{\cosh(|\eta|\tau)} \right\} |n,n\rangle_{ab} \\
&= \mathcal{N}_{\pm} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\tanh(|\eta|\tau)]^n}{\cosh(|\eta|\tau)} [1 \pm (-1)^n] |n,n\rangle_{ab}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

com o sinal $+$ ($-$) ocorrendo quando o átomo é detectado no estado excitado (fundamental) e $\mathcal{N}_{\pm} = \{2 + 2/\cosh(2|\eta|\tau)\}^{-1/2}$. Definimos esses estados como de EPR par ($+$) e ímpar ($-$), em analogia aos estados do tipo “gato de Schrödinger” par e ímpar, uma vez que apresentam propriedades similares: ${}_{ab}\langle\Psi_{\pm}|\Psi_{\pm}\rangle_{ab} = 1$ e ${}_{ab}\langle\Psi_{\pm}|\Psi_{\mp}\rangle_{ab} = 0$ e, para $|\eta_{\ell}|\tau \gg 1$, $\mathcal{N}_{\pm} \simeq 1/\sqrt{2}$.

Considerado o operador densidade $\rho_{\pm} = |\Psi_{\pm}\rangle_{ab}\langle\Psi_{\pm}|$, se tomarmos o traço de um dos modos do campo (digamos o modo b), ficamos com o outro modo em uma mistura estatística

$$\rho_{\pm} = |\mathcal{N}_{\pm}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} [\tanh(|\eta|\tau)]^{2n} [1 \pm (-1)^n] |n\rangle\langle n|, \tag{5.21}$$

composta por infinitos estados de número pares ($+$) ou ímpares ($-$). $N_{+} = [1 - \tanh^4(|\eta|\tau)]/2$ e $N_{-} = [1 + \tanh^4(|\eta|\tau)]/[2 \tanh^2(|\eta|\tau)]$. Uma propriedade dessas misturas é que

$$Tr(\rho_{\pm}^2) = \frac{1 - \tanh^4(|\eta|\tau)}{1 + \tanh^4(|\eta|\tau)}, \tag{5.22}$$

que, para $|\eta_{\ell}|\tau \rightarrow \infty$, tende a zero (lembrando que o valor mínimo de $Tr(\rho^2)$ para uma mistura estatística é $1/N$, onde N é a dimensão do sistema). Ou seja, temos uma mistura completa de estados. Porém, uma característica da mistura de estados de números ímpares é que a função de Wigner pode apresentar um valor negativo. De fato, a função de Wigner dessa mistura tomada na origem do espaço de fase apresenta o valor mínimo possível: $-2/\pi$. Isto acontece pois a função de Wigner de qualquer estado de número ímpar apresenta o menor valor possível ($-2/\pi$) na origem do espaço de fase, de modo que uma mistura estatística desses estados não é capaz de modificar o valor da função de Wigner nesse ponto do espaço

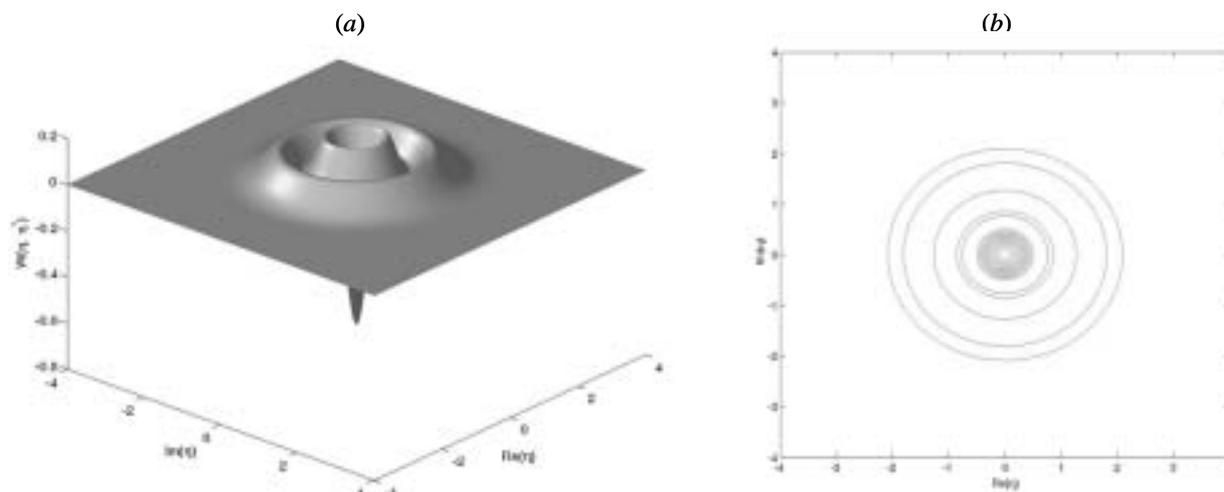


Figura 5.3: (a) Função de Wigner $W(\eta, \eta^*)$ e (b) sua projeção no plano $\text{Re}(\eta) \times \text{Im}(\eta)$ de uma mistura estatística de estados de número ímpares de dimensão $N = 2$: $\rho = 1/2 (|1\rangle \langle 1| + |3\rangle \langle 3|)$.

de fase. Por outro lado, a função de Wigner de estados de número pares apresenta o maior valor possível ($2/\pi$) na origem. Desse modo, se tivermos uma mistura de todos os estados de número (pares e ímpares), a função de Wigner dessa mistura será nula na origem (a função de Wigner dos estados pares cancela a função de Wigner dos estados ímpares na origem).

Na Fig. (5.3) vemos a Função de Wigner para um mistura estatística dos estados de número $|1\rangle$ e $|3\rangle$ que corresponde a um sistema de dimensão $N = 2$, com o operador densidade $\rho = 1/2 (|1\rangle \langle 1| + |3\rangle \langle 3|)$, de onde vemos que $\text{Tr}(\rho^2) = 1/2$. Na Fig. (5.4) temos a função de Wigner para a mistura de estados ímpares (5.21) para $r = |\eta| \tau = 1.25$ e na Fig. (5.5) para $r = |\eta| \tau = 1.75$, de onde notamos que à medida que aumentamos o número de estados de número que compõem a mistura estatística, mais a função de Wigner espalha-se pelo espaço de fase, restando somente uma acentuada depressão na origem.

As características associadas a estas máximas misturas de estados que, no entanto, apresentam o mínimo valor possível para a função de Wigner na origem estão sendo investigadas no momento. Essas misturas estatísticas (ímpares) podem ser úteis, por exemplo, para a

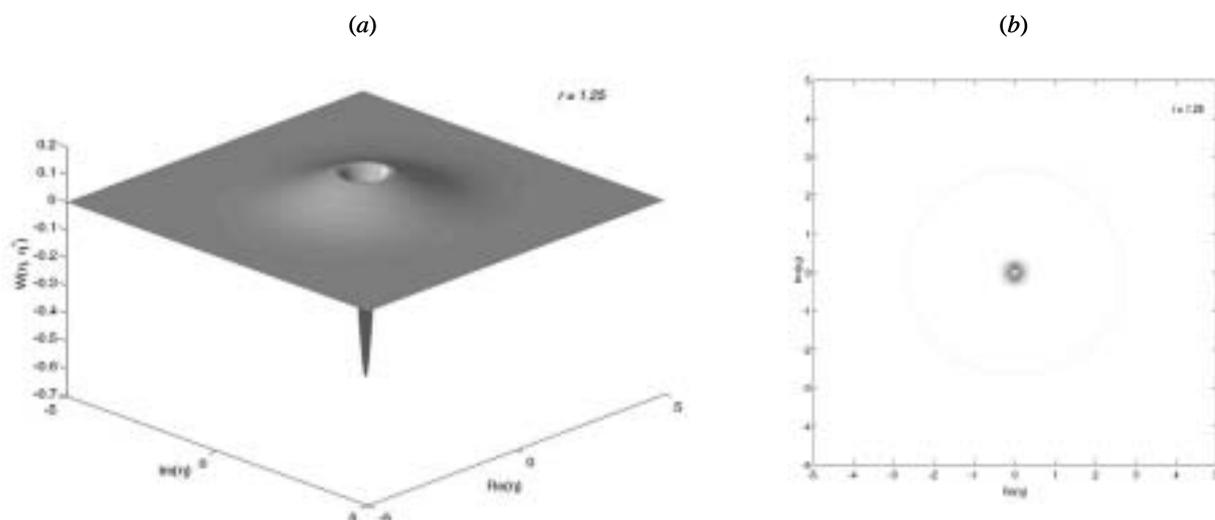


Figura 5.4: (a) Função de Wigner $W(\eta, \eta^*)$ e (b) sua projeção no plano $\text{Re}(\eta) \times \text{Im}(\eta)$ de uma mistura estatística de estados de número ímpares (5.21), para $r = |\eta| \tau = 1.25$.

medida de valores negativos da função de Wigner para estados de dimensão infinita.

5.3 Medindo o estado dos modos da cavidade

Finalmente, discutimos brevemente como medir um dado estado, descrito em termos do operador densidade $\rho_{ab} = |\Psi\rangle_{ab}\langle\Psi|$, gerado nos modos da cavidade. Para isso, seguimos a técnica apresentada na Ref. [72], que usa o fato de que a função de Wigner de um estado dos modos pode ser escrita usando o operador de paridade deslocado, ou seja,

$$W_{ab}(\gamma_a, \gamma_a^*; \gamma_b, \gamma_b^*) = \frac{4}{\pi^2} \text{Tr} \left(\rho_{ab} D_a(\gamma_a) D_b(\gamma_b) (-1)^{a^\dagger a + b^\dagger b} D_a^\dagger(\gamma_a) D_b^\dagger(\gamma_b) \right), \quad (5.23)$$

em que $D(\gamma_\ell) = \exp(\gamma_\ell \ell^\dagger - \gamma_\ell^* \ell)$ é o operador de deslocamento do modo $\ell = a, b$. Seguindo a Ref. [72], primeiramente temos que aplicar o operador deslocamento $D^{-1}(\gamma_\ell) = \exp(-\gamma_\ell \ell^\dagger + \gamma_\ell^* \ell)$ nos modos da cavidade, de forma que o estado na cavidade torne-se $|\Psi(\gamma_a, \gamma_b)\rangle_{ab} = D^{-1}(\gamma_a) D^{-1}(\gamma_b) |\Psi\rangle_{ab}$. Em seguida, um átomo adicional de três níveis é enviado através da cavidade, preparado em um estado de superposição $(|i\rangle + |f\rangle) / \sqrt{2}$, onde $|f\rangle$ é um nível auxiliar cujas transições para os estados $|g\rangle$, $|i\rangle$ e $|e\rangle$ não acoplam os modos da cavidade.

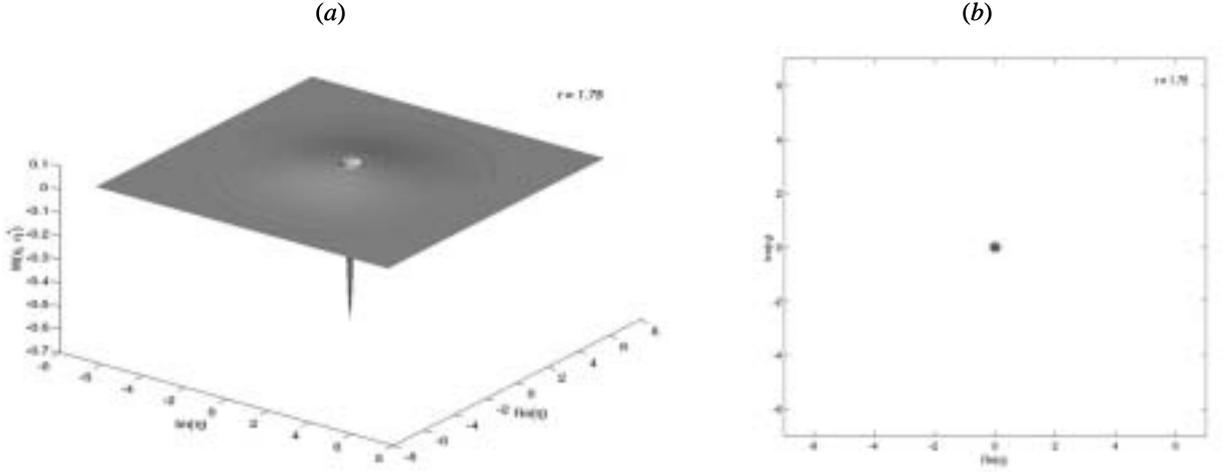


Figura 5.5: (a) Função de Wigner $W(\eta, \eta^*)$ e (b) sua projeção no plano $\text{Re}(\eta) \times \text{Im}(\eta)$, de uma mistura estatística de estados de número ímpares (5.21), para $r = |\eta| \tau = 1.75$.

(A configuração de níveis desse átomo auxiliar tem que ser a mesma do átomo utilizado para a geração do estado na cavidade. Por exemplo, se usamos primeiramente um átomo em uma configuração “escada” (Ξ), que dá origem a processos paramétricos descendentes, usaremos um outro átomo nessa mesma configuração para medir o estado gerado nos modos da cavidade.) Considerando o regime em que o campo clássico externo está desligado e a dessintonia entre os modos da cavidade e as transições $|i\rangle \rightarrow |e\rangle$ e $|i\rangle \rightarrow |g\rangle$ seja muito maior que os acoplamento dessas transições, isto é, $\Delta \gg |\lambda_a|, |\lambda_b|$, é fácil ver que não haverá transição do nível $|i\rangle$ para os demais níveis durante a interação com os modos do campo de radiação. O Hamiltoniano de interação efetivo, para um átomo preparado inicialmente em uma superposição dos estados $|i\rangle$ e $|f\rangle$ será

$$H_i = \left(\frac{|\lambda_a|^2}{\Delta} a^\dagger a + \frac{|\lambda_b|^2}{\Delta} b^\dagger b \right) |i\rangle \langle i|, \quad (5.24)$$

tanto para os níveis atômicos em configuração “lambda” como em configuração “escada”, como vemos das Eqs. (4.14) e (4.30), respectivamente. Após a interação deste átomo adicional com os modos da cavidade durante um tempo t , o estado evoluído será

$$\left\{ e^{[i\phi(a^\dagger a + b^\dagger b)]} |\Psi(\gamma_a, \gamma_b)\rangle_{ab} |i\rangle + |\Psi(\gamma_a, \gamma_b)\rangle_{ab} |f\rangle \right\} / \sqrt{2} \quad (5.25)$$

onde $\phi = 2|\lambda|^2 t/\Delta$ ($|\lambda| = |\lambda_a| \sim |\lambda_b|$). Após sofrer um pulso $\pi/2$ em uma zona de Ramsey com fase escolhida tal que $|i\rangle \rightarrow (|i\rangle + |f\rangle)/\sqrt{2}$ e $|f\rangle \rightarrow (|i\rangle - |f\rangle)/\sqrt{2}$, os estados atômicos $|i\rangle$ e $|f\rangle$ são medidos com probabilidades

$$\mathcal{P}_i = \text{Tr} \left(\rho_{ab} D_a(\gamma_a) D_b(\gamma_b) \{1 + \cos[\phi(a^\dagger a + b^\dagger b)]\} D_a^\dagger(\gamma_a) D_b^\dagger(\gamma_b) \right), \quad (5.26a)$$

$$\mathcal{P}_f = \text{Tr} \left(\rho_{ab} D_a(\gamma_a) D_b(\gamma_b) \{1 - \cos[\phi(a^\dagger a + b^\dagger b)]\} D_a^\dagger(\gamma_a) D_b^\dagger(\gamma_b) \right). \quad (5.26b)$$

Quando ajustamos $\phi = \pi$, a medida do estado atômico nos dá a função de Wigner do estado dos modos, uma vez que, das Eqs. (5.23) e (5.26), temos $\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_f \propto W_{ab}(\gamma_a, \gamma_a^*; \gamma_b, \gamma_b^*)$ [72]. Embora tenhamos desenvolvido a análise acima para estados puros, esse esquema aplica-se igualmente para misturas estatísticas dos campos. Observamos que para o processo degenerado de conversão paramétrica de frequências, onde o Hamiltoniano resultante é responsável pela compressão do modo estacionário na cavidade, o mesmo esquema pode ser usado para medir diretamente a função de Wigner de qualquer estado comprimido.

Notamos que a medida direta da função de Wigner de estados de campos propagantes pode ser realizada através do protocolo proposto na Ref. [78]. Este protocolo, assim como aquele para a medida da função de Wigner do estado de um campo estacionário [72], é insensível à eficiência dos detectores (de fótons em [78] e de estados atômicos em [72]). Em vista desta insensibilidade à eficiência dos detectores, desenvolvemos um esquema [79] para a verificação da violação das desigualdades de Bell livre dos "loopholes" de detecção. Por fim, salientamos que um esquema similar ao da Ref. [79] pode ser implementado no contexto da EQC.

Capítulo 6

Conclusão

Desenvolvemos aqui um estudo sobre processos paramétricos em eletrodinâmica quântica de cavidades (EQC). Primeiramente realizamos um estudo sobre um modo do campo de radiação submetido a processos de amplificação linear e paramétrica dependentes do tempo. Juntamente aos processos de amplificação, usamos um átomo de dois níveis para a geração de estados estacionários do campo na cavidade. Concluimos que é possível gerar estados de superposição mesoscópicos comprimidos que apresentam um tempo de decoerência da ordem do tempo de relaxação do sistema quando submetidos à ação de um reservatório efetivo que possa ser descrito por um conjunto de modos ideal e apropriadamente comprimidos. Na Ref. [43] apresenta-se um esquema para a geração de um reservatório de modos comprimidos que, no entanto, não suprime a ação do reservatório usual devido às paredes da cavidade. Dessa forma, pela proposta apresentada em [43] não se alcança um reservatório efetivo de modos idealmente comprimidos como aquele requerido para que se retarde o processo de decoerência de um estado de superposição comprimido. A construção deste reservatório permanece em aberto para que o presente esquema para a geração de estados de superposição mesoscópicos robustos seja implementado.

Para obtermos a evolução temporal do sistema em questão, o átomo interagindo com um campo na cavidade submetido aos processos de amplificação linear e paramétrica, fizemos uso da teoria de invariantes dependentes do tempo de Lewis e Riesenfeld [41], que tem sido utilizada também para o cálculo das fases geométricas ou fases de Berry [80]. Como vimos no

capítulo 2, os auto-estados do Hamiltoniano do sistema relacionam-se àqueles do operador invariante através de um fator de fase temporal. Essa fase temporal é dada exatamente pela soma da fase dinâmica com a fase geométrica, como demonstrado na Ref. [81]. Desse modo, a teoria de invariantes constitui um caminho alternativo para o cálculo das fases geométricas.

Desenvolvemos também um estudo onde mostramos como é possível implementar processos paramétricos em EQC através da interação de um átomo de três níveis, submetido a um processo de amplificação linear, com dois modos de uma cavidade com alto- Q . De acordo com a configuração dos níveis atômicos mostramos como é possível gerar processos de conversão paramétrica ascendente e descendente de frequências. Vários Hamiltonianos efetivos são deduzidos com os quais mostramos como gerar estados não clássicos da luz e estados emaranhados entre os modos de uma cavidade. Em particular, ressaltamos a obtenção de estados altamente comprimidos (com compressão acima de 98% no caso ideal) utilizando os parâmetros atuais em EQC. Como os tempos de interação requeridos são pequenos, ordens de magnitude menores que os tempos de relaxação envolvidos, observamos também que os efeitos dos mecanismos dissipativos durante a geração de estados são praticamente desprezíveis.

Considerando os estados emaranhados, vimos como gerar, com alta “qualidade”, estados de vácuo de dois modos comprimidos, os estados originais de EPR. Esses estados podem ser úteis para a verificação das desigualdades de Bell no espaço de fase [73]. Mostramos também como gerar o que denominamos estados par e ímpar de EPR, assim como máximas misturas estatísticas com valores mínimos tanto para o $Tr(\rho^2)$ (dada a dimensão do sistema) como para a função de Wigner na origem ($-2/\pi$).

O sistema utilizado nos capítulos 3 e 4 para a obtenção dos Hamiltonianos efetivos pode ser generalizado, considerando-se N átomos, em diferentes configurações de níveis e submetidos à ação de um campo clássico externo, interagindo com um ou mais modos da cavidade. Isso pode dar origem a estados emaranhados entre os átomos (emaranhamentos de muitas partículas), que são importantes para a realização de operações lógicas em EQC. Esse estudo de engenharia de interações não lineares em EQC, pode também induzir novas investigações como por exemplo a engenharia de reservatórios. Primeiramente podemos estudar a geração

de um reservatório de modos comprimidos, essencial para a proteção de estados mesoscópicos robustos [42, 40]. Em seguida, podemos estudar engenharia de reservatórios em EQC, de acordo com as idéias delineadas em [26, 27] para íons aprisionados. Sabe-se que o processo de decoerência é sensível à forma de acoplamento entre o sistema quântico e o reservatório [82]. Para acoplamentos quadráticos, por exemplo, o tempo de decoerência torna-se idêntico ao tempo de dissipação de energia para estados do tipo “gato de Schrödinger” [82]. Além disso, existem interações entre o sistema e o reservatório onde o estado estacionário do sistema é do tipo “gato de Schrödinger” [82]. A dificuldade, no entanto, é gerar esses diferentes tipos de interações entre o sistema quântico e o reservatório. Por meio do ajuste das frequências e intensidades dos campos clássicos, juntamente com o decaimento atômico espontâneo, nos trabalhos [26, 27] são construídos diferentes acoplamentos entre um único íon aprisionado em um potencial harmônico e o reservatório. Com isso a equação mestra que descreve o movimento vibracional iônico pode ser selecionada de modo que o seu estado estacionário seja praticamente aquele que se quer proteger. Finalizando, esperamos que o presente trabalho possa motivar futuras investigações em EQC.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond e S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887 (1996).
- [2] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King e D. J. Wineland, Science **272**, 1131 (1996).
- [3] S. Brattke, B. T. H. Varcoe e H. Walther, Phys. Rev. Lett. **86**, 3534 (2001).
- [4] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond e S. Haroche, Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996).
- [5] P. Knight, Nature **380**, 392 (1996).
- [6] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **75**, 4714 (1995).
- [7] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **76**, 1796 (1996).
- [8] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano e D. J. Wineland, Phys. Rev. Lett. **77**, 4281 (1996).
- [9] S. M. Barnett e D. T. Pegg, Phys. Rev. Lett. **76**, 4148 (1996).
- [10] B. Baseia, M. H. Y. Moussa e V. S. Bagnato, Phys. Lett. A **231**, 331 (1997).
- [11] D. T. Pegg, L. S. Phillips e S. M. Barnett, Phys. Rev. Lett. **81**, 1604 (1998); C. J. Villas-Bôas, Y. Guimarães, M. H. Y. Moussa e B. Baseia, Phys. Rev. **A** **63**, 055801 (2001).

- [12] G. M. D'Ariano, L. Maccone, M. G. A. Paris e M. F. Sacchi, *Fortschr. Phys.* **48**, (2000).
- [13] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko e Y. Shih, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4337 (1995).
- [14] J. S. Bell, *Physics (Long Island City, NY)* **1**, 195 (1964).
- [15] D. Bouwmeester, J. W. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter e A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1345 (1999).
- [16] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter e A. Zeilinger, *Nature* **390**, 575 (1997); D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy e S. Popescu, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121 (1998); Y. H. Kim, S. P. Kulik e Y. Shih, *ibid.* **86**, 1370 (2001); A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble e E. S. Polzik, *Science* **282**, 706 (1998).
- [17] C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida e M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **60**, 2759 (1999).
- [18] R. M. Serra, C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida e M. H. Y. Moussa, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4**, 316 (2002).
- [19] W. H. Zurek, *Phys. Today* **44**, 36 (1991); W. H. Zurek e J. P. Paz, *Phys. Rev. Lett* **72**, 2508 (1994).
- [20] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, *Annals of Physics* **149**, 374 (1983); A. O. Caldeira e A. J. Laggett, *Physica A* **121**, 587 (1983).
- [21] N. G. de Almeida, R. Napolitano e M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **62**, 033815 (2000), N. G. de Almeida, P. B. Ramos, R. M. Serra e M. H. Y. Moussa, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2**, 792 (2000).
- [22] R. Bonifacio, S. Olivares, P. Tombesi e D. Vitali, *Phys. Rev. A* **61**, 053802 (2000).
- [23] R. M. Serra, P. B. Ramos, N. G. de Almeida, W. D. José e M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **63**, 053813 (2001).

- [24] J. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble e H. Mabuchi, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221 (1997); T. Pellizzari, *ibid.* **79**, 5242 (1997). H. J. Briegel, W. Dür, J. I. Cirac e P. Zoller, *ibid.* **81**, 5932 (1998); S. J. van Enk, H. J. Kimble, J. I. Cirac e P. Zoller, *Phys. Rev. A* **59**, 2659 (1999).
- [25] J. I. Cirac e P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995); Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi e H. J. Kimble, *ibid.* **75**, 4710 (1995); I. L. Chuang, L. M. K. Vandersypen, X. Zhou, D. W. Leung e S. Lloyd, *Nature*, **393**, 143 (1998); B. E. Kane, *ibid.* **393**, 143 (1998); L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. S. Yannoni, M. H. Sherwood e I. L. Chuang, *ibid.* **414**, 883 (2001).
- [26] J. F. Poyatos, J. I. Cirac e P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4728 (1996).
- [27] A. R. R. Carvalho, P. Milman, R. L. de Matos Filho e L. Davidovich, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4988 (2001).
- [28] N. Lutkenhaus, J. I. Cirac e P. Zoller, *Phys. Rev. A* **57**, 548 (1998).
- [29] G. S. Agarwal, M. O. Scully e H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4271 (2001).
- [30] J. I. Cirac, *Nature* **413**, 375 (2001).
- [31] B. Julsgaard, A. Kozhekin e E. S. Polzik, *Nature* **413**, 400 (2001).
- [32] D. A. R. Dalvit, J. Dziarmaga e W. H. Zurek, *Phys. Rev. A* **62**, 013607 (2000).
- [33] D. Stoler, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1397 (1974).
- [34] G. J. Milburn, *Opt. Acta* **31**, 671 (1984); H. J. Kimble, M. Dagenais e L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691 (1977); H. P. Yuen e J. H. Shapiro, *Opt. Lett.* **4**, 334 (1979); G. J. Milburn, D. F. Walls e M. D. Levenson, *J. Opt. Soc. Am. B* **1** 390 (1984).
- [35] H. P. Yuen e J. H. Shapiro, *IEEE Trans. Inf. Theory* **24**, 657 (1978); D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano e D. J. Heinzen, *Phys. Rev. A* **50**, 67 (1994).

- [36] J. N. Hollenhorst, Phys. Rev. D **19**, 1669 (1979); C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. P. Drever, V. D. Sandberg e M. Zimmermann, Rev. Mod. Phys. **52**, 341 (1980).
- [37] E. Knill , R. Laflamme e G. J. Milburn, Nature **409**, 46 (2001); T. B. Pittman, B. C. Jacobs e J. D. Franson, Phys. Rev. Lett. **88**, 257902 (2002).
- [38] T. B. Pittman, B. C. Jacobs e J. D. Franson , Phys. Rev. A **64**, 062311 (2001); T. C. Ralph, N. K. Langford, T. B. Bell e A. G. White , ibid. **65**, 062324 (2002).
- [39] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel e H. Zbinden, Rev. Mod. Phys. **74**, 145 (2002).
- [40] C. J. Villas-Bôas, F. R. de Paula, R. M. Serra e M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. A **68**, 053808 (2003).
- [41] H. R. Lewis e W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
- [42] C. J. Villas-Bôas, F. R. de Paula, R. M. Serra e M. H. Y. Moussa, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **5**, 391 (2003).
- [43] P. Tombesi e D. Vitali, Phys. Rev. A **50**, 4253 (1994).
- [44] C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida, R. M. Serra e M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. A **68**, 061801(R) (2003).
- [45] R. M. Serra, C. J. Villas-Bôas, N. G. de Almeida e M. H. Y. Moussa, quant-ph/ 0306126, submetido para publicação.
- [46] C. J. Villas-Bôas e M. H. Y. Moussa, “One-step generation of high-quality squeezed and EPR states in cavity QED”, submetido para publicação.
- [47] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [48] C. K. Law e J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett., **76**, 1055 (1996); F. L. Li e S.Y. Gao, Phys. Rev. A **62**, 043809 (2000).

- [49] M. O. Scully e S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1997); D. F. Walls e J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [50] V. V. Dodonov, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4**, R1 (2002).
- [51] J. Janszky, P. Domokos e P. Adam, *Phys. Rev. A* **48**, 2213 (1993).
- [52] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2360 (1993).
- [53] J. M. Raimond, M. Brune e S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
- [54] M. J. Holland, D. F. Walls e P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1716 (1994).
- [55] H. J. Carmichael, G. J. Milburn e D. F. Walls, *J. Phys. A: Math Gen.* **17**, 469 (1984).
- [56] S. S. Mizrahi, M. H. Y. Moussa e B. Baseia, *Int. J. Mod. Phys. B* **8**, 1563 (1994).
- [57] A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev. A* **51**, 1612 (1995).
- [58] M. Zahler e Y. Ben Aryeh, *Phys. Rev. A* **43**, 6368 (1991).
- [59] R. R. Puri e S. V. Lawande, *Phys. Lett A* **70**, 69 (1979).
- [60] Ji Il Kim, M. C. Nemes, A. F. R. de Toledo Piza e H. E. Borges, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 207 (1996).
- [61] M. S. Kim, W. Son, V. Buzek e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **65**, 032323 (2002).
- [62] M. S. Kim e V. Buzek, *Phys. Rev. A* **47**, 610 (1993).
- [63] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich e N. Zagury, *Phys. Rev. A* **45**, 5193 (1992).
- [64] J. I. Cirac e P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995); T. Pellizzari, *ibid.* **79**, 5242 (1997); S. Lloyd, M. S. Shahriar, J. H. Shapiro e P. R. Hemmer, *ibid.* **87**, 167903 (2001).

- [65] A. Rauschenbeutel, P. Bertet, S. Osnaghi, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. A* **64**, 050301(R) (2001).
- [66] J. Steinbach, J. Twamley, e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **56**, 4815 (1997).
- [67] L. Allen e C. R. Stroud Jr., *Phys. Rep.* **91**, 1 (1982).
- [68] D. F. V. James, *Fortschr. Phys.* **48**,823 (2002).
- [69] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger e H. Walther, *Nature* **403**, 743 (2000); M. Weidinger, B. T. H. Varcoe, R. Heerlein e H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3795 (1999).
- [70] S. Osnaghi, P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 037902 (2001).
- [71] E. Solano, G. S. Agarwal e H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 027903 (2003)
- [72] M. França Santos, L.G. Lutterbach e L. Davidovich *Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **3**, S55 (2001); L. Lutterbach e L. Davidovich, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2547 (1997).
- [73] K. Banaszek e K. Wódkiewicz, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2009 (1999).
- [74] H. Jeong, W. Son, M. S. Kim, D. Ahn e C. Brukner, *Phys. Rev. A.* **67**, 012106 (2003).
- [75] N. G. de Almeida, R. M. Serra, C. J. Villas-Bôas e M. H. Y. Moussa, [quant-ph/0308025](#), aceito para publicação (*Phys. Rev. A.- Brief Report*).
- [76] Samuel L. Braunstein, Christopher A. Fuchs, H. J. Kimble e P. van Loock, *Phys. Rev. A* **64**, 022321 (2001).
- [77] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble e E. S. Polzik, *Science* **282**, 706 (1998); E. S. Polzik, J. Carri e H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3020 (1992).
- [78] C. J. Villas-Bôas, G. A. Prata e M. H. Y. Moussa, *Phys. Rev. A* **64**, 065801 (2001)

- [79] C. J. Villas-Boas e M. H. Y. Moussa, “A Proposal for testing nonlocality in the Wigner representation loophole-free of detection efficiency”, em redação.
- [80] M. V. Berry, Proc. R. Soc. A **392**, 45 (1984).
- [81] S. S. Mizrahi, Phys. Lett. A **138**, 465 (1989).
- [82] B. R. Garraway e P. L. Knight, Phys. Rev. A **50**, 2548 (1994); **49**, 1266 (1994); C. C. Gerry e E. E. Hach III, Phys. Lett. A **174**, 185 (1993).