

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Ansatz de Bethe algébrico com fronteiras triangulares

Rodrigo Alves Pimenta

Orientador: Prof. Dr. Antônio Lima Santos

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências.

São Carlos

Maio - 2014

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

P644ab Pimenta, Rodrigo Alves.
Ansatz de Bethe algébrico com fronteiras triangulares /
Rodrigo Alves Pimenta. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
66 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2014.

1. Física matemática. 2. Ansatz de Bethe. 3. Modelo de
vértices. 4. Fronteiras abertas. I. Título.

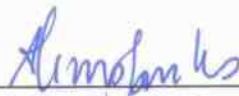
CDD: 530.15 (20^a)

Rodrigo Alves Pimenta

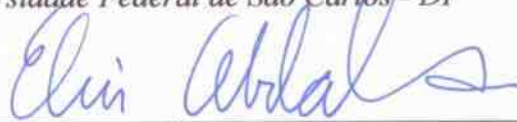
Tese de doutorado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em ciências.

Aprovado em: 26 de maio de 2014

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Antônio Lima Santos (Orientador)
Universidade Federal de São Carlos - DF



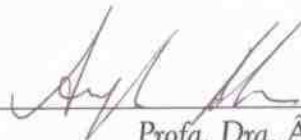
Prof. Dr. Elcio Abdalla
Universidade de São Paulo - IF



Prof. Dr. Francisco Castilho Alcaraz
Universidade de São Paulo - IFSC



Prof. Dr. Roland Köberle
Universidade de São Paulo - IFSC



Profa. Dra. Ângela Foerster
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - IF

À minha família.

Agradecimentos

Aos meus pais, Edimar e Ana Maria, e irmãos, Rafael e Mariana, pelo apoio incondicional durante toda minha vida.

À minha amada Mariana, companheira de todas as horas, pela compreensão e incentivo, fundamentais para a realização deste trabalho.

Ao meu amigo Washington, pelos momentos de descontração e discussões sobre diversos assuntos.

Ao professor Lima, por dividir comigo não apenas seus conhecimentos em Física, mas também sua sabedoria de vida. Agradeço ainda as oportunidades a mim oferecidas.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos modelos de vértices com fronteiras não-diagonais, caracterizadas por matrizes de reflexão com estrutura triangular. Por meio de uma extensão do ansatz de Bethe algébrico usual, construímos estados de Bethe generalizados e os respectivos autovalores para duas classes de modelos: seis e dezenove vértices. Como usual, em ambos os casos a solução exata é dada em termos das equações de Bethe.

Palavras-chave: Ansatz de Bethe Algébrico; Modelos de Vértices; Fronteiras Abertas

Abstract

In this work we study vertex models with non-diagonal boundaries, characterized by reflection matrices with an upper triangular form. By means of an extension of the algebraic Bethe ansatz, we construct generalized Bethe states as well as the respective eigenvalues for two classes of models: six and nineteen vertex models. As usual, in both cases the exact solution is given in terms of the Bethe equations.

Keywords: Algebraic Bethe Ansatz; Vertex Models; Open boundary

Sumário

1	Introdução	6
2	O modelo de seis vértices	12
2.1	A matriz R e as matrizes K^\pm	12
2.2	Ansatz de Bethe	15
3	Os modelos de dezenove vértices	25
3.1	As matrizes R e as matrizes K^\pm	25
3.2	Ansatz de Bethe	29
4	Conclusão	40
A	Coeficientes da expansão <i>off-shell</i> para o modelo de seis vértices	41
B	Relações de comutação para os modelos de dezenove vértices	43
C	Coeficientes da expansão <i>off-shell</i> para o modelo de dezenove vértices	48
	Referências Bibliográficas	59

1 Introdução

A busca por soluções exatas em problemas de física teórica tem despertado muito interesse nas últimas décadas. De fato, encontramos muitas aplicações dos modelos exatamente solúveis em várias áreas da Física, incluindo por exemplo o estudo de conexões com teoria de campos conforme [1], física da matéria condensada [2] e aspectos integráveis da chamada correspondência AdS/CFT [3]. Nesses sistemas, em que métodos perturbativos em geral falham, métodos exatos tem um papel fundamental. Convem ainda destacar que, recentemente, realizações experimentais de sistemas de baixa dimensionalidade tem sido alcançadas, consultar por exemplo a referência [4].

A primeira solução de um sistema de muitos corpos interagindo não-trivialmente foi dada por Hans Bethe no início da década de 30 [5]¹. Bethe, usando o que hoje denominamos ansatz de Bethe em sua forma coordenada (CBA, *coordinate Bethe ansatz*), foi capaz de exibir uma solução exata do chamado magneto de Heisenberg, e marcou o início de uma nova área da física-matemática. De fato, as sutilezas da solução de Bethe levaram posteriormente a uma definição de integrabilidade quântica.

De fato, a intrigante possibilidade de se resolver exatamente a cadeia de spin de Heisenberg foi explicada nos trabalhos seminiais de Baxter no contexto da mecânica estatística [7, 8].

O objeto central considerado por Baxter é a chamada matriz de transferência, que surgiu como uma ferramenta matemática para o cálculo da função de partição de um modelo de vértices em uma rede quadrada. A definição da matriz de transferência se dá por meio do produto das chamadas matrizes R , cujas entradas são, por exemplo, os pesos de Boltzmann de um modelo de vértices em uma rede quadrada de comprimento L . A matriz R pode ser considerada como o bloco fundamental na construção de uma teoria integrável. Temos,

$$t(u) = \text{Tr}_a [T_a(u)] \quad (1.1)$$

em que

$$T_a(u) = R_{a1}(u) \dots R_{aL}(u) \quad (1.2)$$

é denominada matriz monodromia. Nas equações (1.1) e (1.2) a notação R_{an} indica os espaços vetoriais a e n em que a matriz atua não trivialmente. O subíndice a denota

¹Para mais detalhes do desenvolvimento histórico e referências, consultar [6].

o espaço auxiliar e $n = 1, \dots, L$ se refere aos chamados espaços quânticos. O parâmetro u é denominado parâmetro espectral.

Inspirado pelos trabalhos de McCoy, Wu e Sutherland [9, 10], em que se mostrou a comutatividade entre as Hamiltonianas XXZ e XYZ e os modelos de seis e oito vértices, respectivamente, Baxter procurou por famílias de matrizes de transferência comutantes, *i.e.*,

$$[t(u), t(v)] = 0, \quad (1.3)$$

para $u, v \in \mathbb{C}$ arbitrários. A equação (1.3) significa que temos uma “torre” de cargas locais conservadas (cargas em involução), ou seja,

$$[Q_i, Q_j] = 0 \quad (1.4)$$

em que Q_i são os coeficientes da expansão de $\ln t(u)$ em torno de, digamos, $u = 0$,

$$\ln t(u) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i u^i. \quad (1.5)$$

Por exemplo, pode-se mostrar que a Hamiltoniana de Heisenberg corresponde à carga Q_1 , *i.e.*,

$$H \propto \left. \frac{d}{du} \ln t(u) \right|_{u=0}. \quad (1.6)$$

Em outras palavras, a matriz de transferência pode ser interpretada como uma função geradora de cargas conservadas. Dessa maneira, uma vez que o espectro da matriz de transferência seja computado, uma família inteira de operadores (incluindo a Hamiltoniana) estará automaticamente diagonalizada. Além disso, a determinação do espectro de $t(u)$ permite o cálculo da função de partição do modelo de vértices e, conseqüentemente, de suas propriedades termodinâmicas.

A questão fundamental passa a ser então: sob que condições a equação (1.3) é válida? A resposta à essa pergunta é a famosa equação de Yang-Baxter, uma condição (local) e suficiente sobre os pesos de Boltzmann que garante a validade de (1.3), pelo menos em condições periódicas de contorno. Sua forma matricial pode ser escrita como,

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u)R_{12}(u-v). \quad (1.7)$$

Para cada solução de (1.7) podemos portanto associar um modelo de vértices integrável, isto é, um modelo para o qual a comutatividade (1.3) seja garantida.

A estrutura da equação (1.7) foi usada pela escola de Leningrado [11] para desenvolver um método sistemático para tratar o problema espectral associado à matriz de transferência. Faddeev, Sklyanin e Takhtadzhyan criaram o chamado método do espalhamento inverso quântico (QISM, *quantum inverse scattering method*). Esse método deixou claro o aparecimento da integrabilidade como uma consequência da propriedade de fatorização das matrizes de espalhamento, *i.e.*, a equação de Yang-Baxter. O trabalho de Bethe foi então reformulado em termos algébricos e é conhecido agora como *ansatz* de Bethe algébrico (ABA, *algebraic Bethe ansatz*).

Desde então o ABA tem sido usado para resolver muitas classes de modelos de vértices com condições periódicas de fronteira. Podemos mencionar, por exemplo, a solução de modelos de vértices do tipo *nested* [12] e a solução do modelo de dezenove vértices de Izergin-Korepin [13]. Muitos trabalhos se seguiram a [12, 13], ver por exemplo [14–17] e referências. Apesar desse progresso, ainda existem modelos para os quais uma solução via o ABA não é conhecida, *e.g.*: modelos de vértices associados à simetria de Temperley-Lieb [18], o modelo de vértice associado à álgebra de Lie afim $D_n^{(2)}$ [19, 20] e modelos de vértices baseados em álgebra de Lie excepcionais, como a G_2 [21]. Em geral, quando o ABA não pode ser aplicado, recorre-se a outros métodos tais como o *Bethe ansatz* analítico [22] e o método de separação de variáveis [23]. Entretanto, tais métodos são em geral limitados à determinação apenas dos autovalores da matriz de transferência, sem fornecer informações sobre os respectivos autovetores.

Dentro desse contexto, uma questão natural colocada foi de que maneira estender o QISM para sistemas com fronteiras abertas, ou não-periódicas. Tal avanço foi obtido por Sklyanin [24] que, baseado no trabalho precedente de Cherednik [25], introduziu as chamadas matrizes de reflexão e generalizou o ABA para o caso de fronteiras não-periódicas (diagonais). Além da equação de Yang-Baxter, um novo conjunto de equações foi proposto, a saber,

$$R_{12}(u-v)K_1^-(u)R_{12}(u+v)K_2^-(v) = K_2^-(v)R_{12}(u+v)K_1^-(u)R_{12}(u-v), \quad (1.8)$$

$$R_{12}(v-u)K_1^+(u)^{t_1}R_{12}(-u-v-2\eta)K_2^+(v)^{t_2} = K_2^+(v)^{t_2}R_{12}(-u-v-2\eta)K_1^+(u)^{t_1}R_{12}(v-u) \quad (1.9)$$

A equação (1.8) descreve a fronteira à direita K^- enquanto (1.9) representa a fronteira à esquerda K^+ , como ilustramos na Figura 1. As matrizes K permitem que as mono-

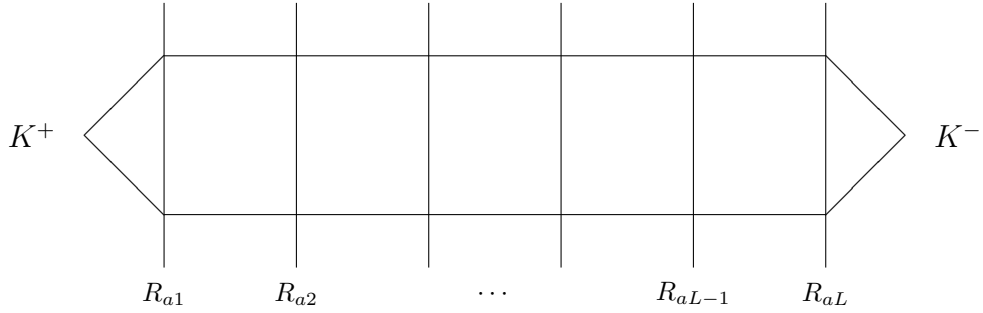


Figura 1: Matriz de monodromia dupla.

dromias de uma linha, isto é, $T_a(u)$ e sua inversa $\hat{T}_a(u) \equiv T_a^{-1}(-u)$, sejam conectadas de maneira a definir uma matriz de transferência dupla, a saber,

$$t(u) = \text{Tr}_a [K^+(u)T_a(u)K^-(u)T_a^{-1}(-u)]. \quad (1.10)$$

Agora, tanto a equação de Yang-Baxter como as equações de reflexão devem ser satisfeitas para que a comutatividade de (1.10) seja garantida para parâmetros espectrais arbitrários. Assim como no caso periódico, a matriz de transferência dupla (1.10) serve como geradora de quantidades conservadas, entre as quais a Hamiltoniana de Heisenberg com termos de fronteira. Portanto, a diagonalização de (1.10) é um problema fundamental no estudo de modelos em condições de contorno não-periódicas.

Em princípio, deveria ser possível tratar a determinação do espectro da matriz de transferência (1.10) por meio do ansatz de Bethe algébrico. Nesse caso, entretanto, a estrutura das matrizes de reflexão K^\pm é essencial para a aplicabilidade ou não dessa técnica. A situação mais simples, em que ambas as matrizes K^+ e K^- são diagonais, foi resolvida para o modelo de seis vértices já no trabalho pioneiro [24] e então estendido para modelos de vértices mais complicados, ver por exemplo os trabalhos [26–31] e referências neles contidas. Convém ressaltar aqui que a Hamiltoniana aberta correspondente ao modelo de seis vértices foi resolvida anteriormente por meio do ansatz de Bethe em sua versão coordenada [32].

Por outro lado, nos casos em que as matrizes de reflexão possuem elementos não-nulos fora da diagonal, a execução do ansatz de Bethe algébrico é ainda um problema desafiador. Uma razão para isso é a quebra da simetria $U(1)$ induzida pelas matrizes de reflexão completas. Mais precisamente, no caso geral a expressão da matriz de transferência (1.10) contem tanto operadores de criação quanto de destruição e, conse-

quentemente, nem mesmo o primeiro passo do ABA pode ser implementado de maneira simples: encontrar um estado de referência a partir do qual os estados excitados possam ser construídos. Apesar dessas dificuldades, progressos já foram reportados na literatura [33–35]: nesses trabalhos, o problema original é de alguma maneira transformado em um problema equivalente no qual a matriz K^+ é diagonal e a matriz K^- tem uma estrutura triangular, às custas de vínculos nos parâmetros das fronteiras.

Devemos ainda mencionar a existência dos chamados métodos analíticos [36–39], do método de separação de variáveis [40, 41], do método funcional baseado na álgebra de Yang-Baxter algebra [42] e a teoria de representação da álgebra q -Onsager [43]. Muito recentemente, uma generalização dos métodos analíticos foi desenvolvida e aplicada a uma série de modelos [44, 45]. Tais métodos apresentam vantagens e desvantagens em relação ao ABA. Por exemplo, os métodos analíticos não fornecem em geral informações sobre os autovetores da matriz de transferência, restringindo-se à determinação das autoenergias; podem, entretanto, ser aplicados em situações para as quais o ABA não pode ser implementado. Não entraremos em detalhes sobre esses métodos uma vez que o foco deste trabalho é a técnica do ABA.

Em relação à técnica do ABA, a situação em que ambas as matrizes de reflexão tem uma estrutura triangular foi recentemente estudada no trabalho [46]. Nesse artigo, os autores implementaram o ABA para a versão racional do modelo de seis vértices (que dá origem à chamada Hamiltoniana XXX). Estudos similares foram realizados anteriormente no contexto do CBA [47] e dos operadores de vértices [48]. Um ponto chave para a possibilidade de se aplicar o ABA nesse caso consiste no fato de que as matrizes de reflexão triangulares ainda permitem o uso do estado ferromagnético como estado de referência. Entretanto, os autoestados não podem ser criados apenas por meio da aplicação sucessiva dos operadores de criação, e uma generalização se faz necessária. Basicamente, o que se deve considerar é uma superposição de “estados diagonais” como autoestados da matriz de transferência dupla. Mencionamos ainda uma modificação do ABA desenvolvida em [49], com base nos resultados de [44], capaz de lidar com a construção dos autovetores do modelo de seis vértices racional com fronteiras genéricas, para pequenos tamanhos da rede.

Nesta tese, generalizamos o trabalho [46] para modelos de vértices que violam a simetria $SU(2)$ através de uma maneira sistemática de lidar com a diagonalização de

matrizes de transferência que possuem operadores de aniquilação, os quais aparecem em decorrência da estrutura triangular superior das matrizes de reflexão. Propomos estados de Bethe generalizados que são fixados exigindo-se a nulidade de termos indesejados extras que aparecem na implementação do ABA. Consideramos inicialmente o modelo de seis vértices (Seção 2) e em seguida modelos de dezenove vértices conhecidos como modelos de Zamolodchikov-Fateev [50] e de Izergin-Korepin [51] (Seção 3). Nossas conclusões são reservadas para a Seção 4 e nos apêndices escrevemos diversas fórmulas necessárias no texto principal.

2 O modelo de seis vértices

2.1 A matriz R e as matrizes K^\pm

A matriz R do modelo de seis vértices, uma das soluções mais simples da equação de Yang-Baxter (1.7), é dada por [8],

$$R(u) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ \hline 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (2.1)$$

com os pesos de Boltzmann dados por,

$$b(u) = \frac{\sinh(u)}{\sinh(u + \eta)}, \quad c(u) = \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(u + \eta)}. \quad (2.2)$$

em que η é uma constante livre denominada anisotropia. As matrizes K (completas), soluções das equações de reflexão (1.8,1.9), foram calculadas em [52, 53]. Destes trabalhos, podemos obter as soluções em que estamos interessados, *i.e.*, as matrizes triangulares,

$$K^-(u) = \begin{pmatrix} k_{11}^-(u) & k_{12}^-(u) \\ 0 & k_{22}^-(u) \end{pmatrix}, \quad K^+(u) = \begin{pmatrix} k_{11}^+(u) & k_{12}^+(u) \\ 0 & k_{22}^+(u) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

cujas entradas são,

$$\begin{aligned} k_{11}^-(u) &= \sinh(u + \xi_-), & k_{12}^-(u) &= \beta_- \sinh(2u), \\ k_{22}^-(u) &= \sinh(\xi_- - u), \\ k_{11}^+(u) &= \sinh(-u - \eta + \xi_+), & k_{12}^+(u) &= \beta_+ \sinh(-2u - 2\eta), \\ k_{22}^+(u) &= \sinh(u + \eta + \xi_+). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Observamos que em adição ao parâmetro espectral u e à variável η temos as constantes livres ξ_\pm , β_\pm que caracterizam as fronteiras. De fato, podemos escrever a Hamiltoniana XXZ com termos de fronteira por meio da derivada logarítmica da matriz de

transferência (1.10) [24, 52],

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{n=1}^{L-1} [\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \cosh(\eta) \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z] \\
&\quad - \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\xi_+)} [\beta_+(\sigma_1^x + i\sigma_1^y) + \cosh(\xi_+) \sigma_1^z] \\
&\quad + \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(\xi_-)} [\beta_-(\sigma_L^x + i\sigma_L^y) + \cosh(\xi_-) \sigma_L^z],
\end{aligned} \tag{2.5}$$

em que $\sigma_n^{x,y,z}$ são as matrizes de Pauli atuando no sítio n .

Um primeiro passo que devemos executar na análise do ABA é a escolha de uma representação para as monodromias de linha simples, ou seja, $T_a(u)$ e $\hat{T}_a(u)$. Para o modelo de seis vértices, podemos escolher

$$T_a(u) = \begin{pmatrix} T_{11}(u) & T_{12}(u) \\ T_{21}(u) & T_{22}(u) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{T}_a(u) = \begin{pmatrix} \hat{T}_{11}(u) & \hat{T}_{12}(u) \\ \hat{T}_{21}(u) & \hat{T}_{22}(u) \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

em que T_{ij} e \hat{T}_{ij} são operadores no espaço de Hilbert $\otimes_{i=1}^L \mathbb{C}^2$ definidos por,

$$T_{ij}(u) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{L-1}=1}^2 \mathcal{L}_{i, \alpha_1}^{(1)}(u) \otimes \mathcal{L}_{\alpha_1, \alpha_2}^{(2)}(u) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{\alpha_{L-1}, j}^{(L)}(u) \tag{2.7}$$

e

$$\hat{T}_{ij}(u) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{L-1}=1}^2 \mathcal{L}_{\alpha_{L-1}, j}^{(1)}(u) \otimes \mathcal{L}_{\alpha_{L-2}, \alpha_{L-1}}^{(2)}(u) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{i, \alpha_1}^{(L)}(u). \tag{2.8}$$

Nas fórmulas acima introduzimos os operadores de Lax, os quais são definidos em termos da matriz R por $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}^{(j)}(u) = [R(u)_{\alpha j}]_{\alpha, \beta}$. Como consequência de (2.6), o produto

$$U_a(u) = T_a(u) K^-(u) T_a^{-1}(-u), \tag{2.9}$$

denominado de matriz monodromia dupla, também pode ser representado por uma matriz 2×2 no espaço auxiliar da seguinte maneira,

$$U_a(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(u) & \mathcal{B}(u) \\ \mathcal{C}(u) & \mathcal{D}(u) \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

em que $\mathcal{A}(u)$, $\mathcal{B}(u)$, $\mathcal{C}(u)$ e $\mathcal{D}(u)$ são operadores no espaço de Hilbert $\otimes_{i=1}^L \mathbb{C}^2$, definidos em termos dos operadores T_{ij} e \hat{T}_{ij} . Tais operadores satisfazem relações de comutação graças à relação

$$R_{12}(u-v) U_1(u) R_{12}(u+v) U_2(v) = U_2(v) R_{12}(u+v) U_1(u) R_{12}(u-v), \tag{2.11}$$

que pode ser considerada como uma versão global da equação de reflexão (1.8). A equação (2.11) fornece diversas relações de comutação mas, neste trabalho, quatro delas são relevantes, a saber,

$$\mathcal{B}(u)\mathcal{B}(v) = \mathcal{B}(v)\mathcal{B}(u), \quad (2.12)$$

$$\mathcal{A}(u)\mathcal{B}(v) = a_1(u, v)\mathcal{B}(v)\mathcal{A}(u) + a_2(u, v)\mathcal{B}(u)\mathcal{A}(v) + a_3(u, v)\mathcal{B}(u)\tilde{\mathcal{D}}(v), \quad (2.13)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}(u)\mathcal{B}(v) = b_1(u, v)\mathcal{B}(v)\tilde{\mathcal{D}}(u) + b_2(u, v)\mathcal{B}(u)\tilde{\mathcal{D}}(v) + b_3(u, v)\mathcal{B}(u)\mathcal{A}(v), \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(u)\mathcal{B}(v) &= c_1(u, v)\mathcal{B}(v)\mathcal{C}(u) + c_2(u, v)\mathcal{A}(v)\mathcal{A}(u) + c_3(u, v)\mathcal{A}(u)\mathcal{A}(v) \\ &+ c_4(u, v)\mathcal{A}(v)\tilde{\mathcal{D}}(u) + c_5(u, v)\mathcal{A}(u)\tilde{\mathcal{D}}(v) + c_6(u, v)\tilde{\mathcal{D}}(u)\mathcal{A}(v) \\ &+ c_7(u, v)\tilde{\mathcal{D}}(u)\tilde{\mathcal{D}}(v), \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que usamos

$$\check{R}(u-v)T(u) \otimes T(v) = T(v) \otimes T(u)\check{R}(u-v) \quad (2.16)$$

para definir $\tilde{\mathcal{D}}(u) = \mathcal{D}(u) - f(u)\mathcal{A}(u)$ com $f(u) = c(2u)$. Explicitamente, os coeficientes das relações de comutação acima são dados por,

$$\begin{aligned} a_1(u, v) &= \frac{\sinh(u+v)\sinh(u-v-\eta)}{\sinh(u-v)\sinh(u+v+\eta)}, & a_2(u, v) &= \frac{\sinh(2v)\sinh(\eta)}{\sinh(u-v)\sinh(2v+\eta)}, \\ a_3(u, v) &= -\frac{\sinh(\eta)}{\sinh(u+v+\eta)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} b_1(u, v) &= \frac{\sinh(u-v+\eta)\sinh(u+v+2\eta)}{\sinh(u-v)\sinh(u+v+\eta)}, & b_2(u, v) &= \frac{\sinh(\eta)\sinh[2(u+\eta)]}{\sinh(v-u)\sinh(2u+\eta)}, \\ b_3(u, v) &= \frac{\sinh(2v)\sinh(\eta)\sinh[2(u+\eta)]}{\sinh(2u+\eta)\sinh(2v+\eta)\sinh(u+v+\eta)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} c_1(u, v) &= 1, & c_2(u, v) &= \frac{\sinh(2u)\sinh(\eta)\sinh(u-v+\eta)}{\sinh(u-v)\sinh(2u+\eta)\sinh(u+v+\eta)}, \\ c_3(u, v) &= \frac{\sinh(2u)\sinh^2(\eta)}{\sinh(v-u)\sinh(2u+\eta)\sinh(2v+\eta)}, \\ c_4(u, v) &= \frac{\sinh(u+v)\sinh(\eta)}{\sinh(u-v)\sinh(u+v+\eta)}, & c_5(u, v) &= \frac{\sinh(2u)\sinh(\eta)}{\sinh(v-u)\sinh(2u+\eta)}, \\ c_6(u, v) &= -\frac{\sinh^2(\eta)}{\sinh(u+v+\eta)\sinh(2v+\eta)}, & c_7(u, v) &= -\frac{\sinh(\eta)}{\sinh(u+v+\eta)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A seguir, usamos as relações acima para diagonalizar a matriz de transferência (1.10).

2.2 Ansatz de Bethe

Levando em conta a representação (2.10) bem como a forma triangular da matriz à direita (2.3), podemos escrever a matriz de transferência como,

$$\begin{aligned} t(u) &= k_{11}^+(u)\mathcal{A}(u) + k_{22}^+(u)\mathcal{D}(u) + k_{12}^+(u)\mathcal{C}(u) \\ &= \omega_1(u)\mathcal{A}(u) + \omega_2(u)\tilde{\mathcal{D}}(u) + k_{12}^+(u)\mathcal{C}(u), \end{aligned} \quad (2.20)$$

em que

$$\begin{aligned} \omega_1(u) &= k_{11}^+(u) + f(u)k_{22}^+(u), \\ \omega_2(u) &= k_{22}^+(u). \end{aligned} \quad (2.21)$$

A presença do operador de destruição $\mathcal{C}(u)$ em (2.20) dificulta consideravelmente a tarefa de obter os respectivos autovetores. De fato, recordamos que os estados excitados dos modelos de vértices com condições periódicas de contorno ou com fronteiras diagonais são usualmente construídos por meio da aplicação sucessiva de operadores \mathcal{B} ao estado de referência em consequência da comutatividade entre a matriz de transferência e o operador $\sum_{i=1}^L \sigma_i^z$. Para matrizes triangulares, essa simetria é quebrada e devemos construir os estados de alguma outra maneira.

O estado de referência

Um segundo passo essencial na técnica do ABA consiste na escolha de um estado de referência a partir do qual os estados excitados são construídos. Felizmente, o estado

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(1)} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(2)} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(L)} \quad (2.22)$$

é um autoestado de (2.20). Isso é uma consequência da estrutura dos elementos de $U_a(u)$ quando a matriz $K^-(u)$ tem a forma (2.3). De fato, com a ajuda de (2.16), podemos calcular,

$$\mathcal{A}(u)\Psi_0 = \Delta_1(u)\Psi_0, \quad \tilde{\mathcal{D}}(u)\Psi_0 = \Delta_2(u)\Psi_0, \quad \mathcal{C}(u)\Psi_0 = 0, \quad \mathcal{B}(u)\Psi_0 = *, \quad (2.23)$$

em que $*$ denota um vetor diferente de 0 e Ψ_0 , e

$$\begin{aligned} \Delta_1(u) &= k_{11}^-(u), \\ \Delta_2(u) &= [k_{22}^-(u) - f(u)k_{11}^-(u)] b(u)^{2L}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Temos, então,

$$t(u)\Psi_0 = \Lambda_0(u)\Psi_0 \quad (2.25)$$

em que

$$\Lambda_0(u) = \omega_1(u)\Delta_1(u) + \omega_2(u)\Delta_2(u) \quad (2.26)$$

é o autovalor do estado (2.22).

Para construir estados excitados, usamos o fato de que os operadores \mathcal{B} podem ser interpretados como operadores de criação. Dessa forma, será necessário que se determine a ação de $t(u)$ em vetores do tipo $\prod_{j=1}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0$. Uma vez que a ação dos operadores \mathcal{A} , $\tilde{\mathcal{D}}$ e \mathcal{C} no estado de referência são conhecidas através das relações (2.23), temos que “mover” tais operadores através do produto $\prod_{j=1}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0$. Essa tarefa é realizada por meio do uso repetitivo das relações de comutação (2.12) a (2.15). Após uma série de computações, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u) \prod_{j=1}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0 &= \left[\Delta_1(u) \prod_{j=1}^n a_1(u, u_j) \right] \prod_{j=1}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0 \\ &+ \sum_{k=1}^n F_k(u, u_1, \dots, u_n) \mathcal{B}(u) \prod_{j=1, j \neq k}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}(u) \prod_{j=1}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0 &= \left[\Delta_2(u) \prod_{j=1}^n b_1(u, u_j) \right] \prod_{j=1}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0 \\ &+ \sum_{k=1}^n G_k(u, u_1, \dots, u_n) \mathcal{B}(u) \prod_{j=1, j \neq k}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(u) \prod_{j=1}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0 &= \sum_{k=1}^n H_k(u, u_1, \dots, u_n) \prod_{j=1, j \neq k}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0 \\ &+ \sum_{\ell > k}^n H_{\ell k}(u, u_1, \dots, u_n) \mathcal{B}(u) \prod_{j=1, j \neq \ell, k}^n \mathcal{B}(u_j)\Psi_0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

em que as funções F_k , G_k , H_k e $H_{\ell k}$ são dadas no apêndice A. Observamos que para o caso em que as matrizes K são diagonais apenas as expressões (2.27) e (2.28) são necessárias [24]. Por outro lado, as matrizes K triangulares tornam necessário também o uso da relação mais intrincada (2.29).

O primeiro estado excitado

Para construir o primeiro estado excitado, introduzimos uma matriz de transferência auxiliar dada por,

$$\bar{t}(u) = \omega_1(u)\mathcal{A}(u) + \omega_2(u)\tilde{\mathcal{D}}(u). \quad (2.30)$$

Uma vez que $\mathcal{C}(u)\Psi_0 = 0$, vemos que $t(u)$ e $\bar{t}(u)$ compartilham o mesmo estado de referência, *i.e.*,

$$t(u)\Psi_0 = \bar{t}(u)\Psi_0 = \Lambda_0(u)\Psi_0. \quad (2.31)$$

O estado de uma partícula da matriz de transferência auxiliar $\bar{t}(u)$ é obtido como usual, ou seja,

$$\Psi_1(u_1) = \mathcal{B}(u_1)\Psi_0, \quad (2.32)$$

tal que a ação de $\bar{t}(u)$ no estado (2.32), levando em conta as expressões (2.27) e (2.28), é dada por,

$$\bar{t}(u)\Psi_1(u_1) = \Lambda_1(u, u_1)\Psi_1(u_1) + [\omega_1(u)F_1(u, u_1) + \omega_2(u)G_1(u, u_1)]\mathcal{B}(u)\Psi_0, \quad (2.33)$$

em que

$$\Lambda_1(u, u_1) = \omega_1(u)\Delta_1(u)a_1(u, u_1) + \omega_2(u)\Delta_2(u)b_1(u, u_1). \quad (2.34)$$

Dessa forma, vemos que o vetor (2.32) será uma autofunção de $\bar{t}(u)$ se impusermos a condição

$$\omega_1(u)F_1(u, u_1) + \omega_2(u)G_1(u, u_1) = 0. \quad (2.35)$$

Consideremos agora a diagonalização da matriz $t(u)$. A forma do elemento superior de $K^+(u)U_a(u)$, ou seja $k_{11}^+(u)\mathcal{B}(u) + k_{12}^+(u)\mathcal{D}(u)$, sugere que o primeiro estado excitado deve ter duas contribuições: uma delas é a usual, $\mathcal{B}(u_1)\Psi_0$, enquanto a outra provem da ação de um operador diagonal atuando em Ψ_0 . Propomos, de acordo, o seguinte estado excitado² para $t(u)$,

$$\Phi_1(u_1) = \Psi_1(u_1) + g(u_1)\Psi_0 \quad (2.36)$$

em que a função $g(u_1)$ será determinada *a posteriori*.

²Note que usamos a nomenclatura “estado excitado” para os autovetores de $t(u)$ para distingui-los dos “estados de partículas” de $\bar{t}(u)$, que contém um número fixo de magnons.

Atuamos então a matriz de transferência em $\Phi_1(u_1)$ e, como resultado, obtemos,

$$t(u)\Phi_1(u_1) = \bar{t}(u)\Psi_1(u_1) + g(u_1)\bar{t}(u)\Psi_0 + k_{12}^+(u)\mathcal{C}(u)\Psi_1(u_1). \quad (2.37)$$

Agora, usamos a expressão (2.33) bem como (2.29) para escrever,

$$\begin{aligned} t(u)\Phi_1(u_1) &= \Lambda_1(u, u_1)\Phi_1(u_1) + [\omega_1(u)F_1(u, u_1) + \omega_2(u)G_1(u, u_1)]\mathcal{B}(u)\Psi_0 \\ &+ \{g(u_1)[\Lambda_0(u) - \Lambda_1(u, u_1)] + k_{12}^+(u)H_1(u, u_1)\}\Psi_0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Notamos na expressão acima (2.38) dois termos indesejados. Um deles é exatamente o mesmo daquele obtido para a matriz de transferência auxiliar (2.33). O outro, proporcional ao estado Ψ_0 , é uma consequência da atuação do operador $\mathcal{C}(u)$ em $\Psi_1(u_1)$ e de $\bar{t}(u)$ em Ψ_0 . Para tornar a equação (2.38) uma relação de autovalor e autovetor, impomos que tais termos indesejados sejam nulos.

A condição de nulidade do coeficiente de $\mathcal{B}(u)\Psi_0$ nos leva a,

$$\frac{\Delta_1(u_1)}{\Delta_2(u_1)} = -\frac{a_3(u, u_1)\omega_1(u) + b_2(u, u_1)\omega_2(u)}{a_2(u, u_1)\omega_1(u) + b_3(u, u_1)\omega_2(u)}. \quad (2.39)$$

Podemos verificar que o lado direito de (2.39) depende apenas de u_1 [24]. Encontramos, então, a chamada equação de Bethe para o primeiro estado excitado na forma,

$$\frac{\Delta_1(u_1)}{\Delta_2(u_1)} = -\Theta(u_1), \quad (2.40)$$

em que

$$\Theta(u_1) = \frac{\sinh(2u_1 + \eta) \sinh(u_1 + \eta + \xi_+)}{\sinh(2u_1) \sinh(u_1 - \xi_+)}. \quad (2.41)$$

Por outro lado, o termo indesejado proporcional ao estado de referência é usado para extrair linearmente a uma expressão para $g(u_1)$,

$$g(u_1) = \frac{k_{12}^+(u)H_1(u, u_1)}{\Lambda_1(u, u_1) - \Lambda_0(u)}. \quad (2.42)$$

Notamos que no lado direito de (2.42) aparece a variável espectral u . Uma vez que os autovetores da matriz de transferência não podem depender de u , a expressão (2.42) parece inconsistente. Entretanto, tal dependência espúria em u é eliminada desde que levemos em conta a razão Δ_1/Δ_2 fixada pela equação de Bethe (2.40). De fato, em conjunto com (2.40), identidades entre os coeficientes (2.17-2.19) e a seguinte relação válida para os elementos da matriz K ,

$$\begin{aligned} &\frac{k_{12}^+(u)\omega_1(u_1)}{k_{12}^+(u_1)[a_2(u, u_1)\omega_1(u) + b_3(u, u_1)\omega_2(u)]} \\ &= \frac{1 - a_1(u, u_1)}{a_3(u, u_1)[c_2(u, u_1) + c_3(u, u_1)] - a_2(u, u_1)c_5(u, u_1)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

a expressão (2.42) adquire a seguinte forma,

$$g(u_1) = \Delta_2(u_1) \left[\frac{k_{12}^+(u_1)}{k_{11}^+(u_1) + f(u_1)k_{22}^+(u_1)} \right], \quad (2.44)$$

dependente apenas da raiz de Bethe u_1 , como esperado. As equações (2.40) a (2.44) garantem portanto que $\Phi_1(u_1)$ é um autoestado de $t(u)$ com autovalor (2.34).

O segundo estado excitado

Procedemos de maneira similar para o segundo estado excitado. Primeiramente, consideramos o estado de duas partículas da matriz de transferência auxiliar, ou seja,

$$\Psi_2(u_1, u_2) = \mathcal{B}(u_1)\mathcal{B}(u_2)\Psi_0, \quad (2.45)$$

tal que,

$$\begin{aligned} \bar{t}(u)\Psi_2(u_1, u_2) &= \Lambda_2(u, u_1, u_2)\Psi_2(u_1, u_2) \\ &+ [\omega_1(u)F_2(u, u_1, u_2) + \omega_2(u)G_2(u, u_1, u_2)] \mathcal{B}(u)\mathcal{B}(u_1)\Psi_0 \\ &+ [\omega_1(u)F_1(u, u_1, u_2) + \omega_2(u)G_1(u, u_1, u_2)] \mathcal{B}(u)\mathcal{B}(u_2)\Psi_0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

em que

$$\Lambda_2(u, u_1, u_2) = \omega_1(u)\Delta_1(u) \prod_{j=1}^2 a_1(u, u_j) + \omega_2(u)\Delta_2(u) \prod_{j=1}^2 b_1(u, u_j). \quad (2.47)$$

O ansatz para o segundo estado excitado é proposto a partir da ação repetida do operador $k_{11}^+(u)\mathcal{B}(u) + k_{12}^+(u)\mathcal{D}(u)$ no estado Ψ_0 . O resultado consiste na seguinte combinação linear,

$$\begin{aligned} \Phi_2(u_1, u_2) &= \Psi_2(u_1, u_2) \\ &+ g_2^{(1)}(u_1, u_2)\Psi_1(u_1) + g_1^{(1)}(u_1, u_2)\Psi_1(u_2) \\ &+ g_{12}^{(0)}(u_1, u_2)\Psi_0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

com coeficientes $g_{1,2}^{(1)}(u_1, u_2)$ e $g_{12}^{(0)}(u_1, u_2)$ ainda indeterminados e que serão fixados no que se segue.

Nesse ponto, levamos em conta o resultado anterior (2.46) para calcular a atuação de $t(u)$ no estado generalizado (2.48). Obtemos,

$$\begin{aligned}
& t(u)\Phi_2(u_1, u_2) = \Lambda_2(u, u_1, u_2)\Phi_2(u_1, u_2) \\
& + [\omega_1(u)F_2(u, u_1, u_2) + \omega_2(u)G_2(u, u_1, u_2)] \mathcal{B}(u)\Psi_1(u_1) \\
& + [\omega_1(u)F_1(u, u_1, u_2) + \omega_2(u)G_1(u, u_1, u_2)] \mathcal{B}(u)\Psi_1(u_2) \\
& + \left\{ g_2^{(1)}(u_1, u_2) [\omega_1(u)F_1(u, u_1) + \omega_2(u)G_1(u, u_1)] \right. \\
& + g_1^{(1)}(u_1, u_2) [\omega_1(u)F_1(u, u_2) + \omega_2(u)G_1(u, u_2)] \\
& + k_{12}^+(u)H_{21}(u, u_1, u_2) \left. \right\} \mathcal{B}(u)\Psi_0 \\
& + \left\{ g_2^{(1)}(u_1, u_2) [\Lambda_1(u, u_1) - \Lambda_2(u, u_1, u_2)] + k_{12}^+(u)H_2(u, u_1, u_2) \right\} \Psi_1(u_1) \\
& + \left\{ g_1^{(1)}(u_1, u_2) [\Lambda_1(u, u_2) - \Lambda_2(u, u_1, u_2)] + k_{12}^+(u)H_1(u, u_1, u_2) \right\} \Psi_1(u_2) \\
& + \left\{ g_{12}^{(0)}(u_1, u_2) [\Lambda_0(u) - \Lambda_2(u, u_1, u_2)] \right. \\
& + k_{12}^+(u) \left[g_2^{(1)}(u_1, u_2)H_1(u, u_1) + g_1^{(1)}(u_1, u_2)H_1(u, u_2) \right] \left. \right\} \Psi_0. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Observamos um grande número de estados indesejados em (2.49). Todos tem de ser nulos para que o problema de autovalor esteja definido. Notamos que os vetores proporcionais a $\mathcal{B}(u)\Psi_1(u_1)$ e $\mathcal{B}(u)\Psi_1(u_2)$ coincidem com os estados indesejados da expansão auxiliar (2.46). Logo, a nulidade de tais termos define as equações de Bethe, *i.e.*, os seguintes vínculos para as variáveis u_1 e u_2 ,

$$\frac{\Delta_1(u_1)}{\Delta_2(u_1)} = -\Theta(u_1) \frac{b_1(u_1, u_2)}{a_1(u_1, u_2)}, \quad \frac{\Delta_1(u_2)}{\Delta_2(u_2)} = -\Theta(u_2) \frac{b_1(u_2, u_1)}{a_1(u_2, u_1)}. \tag{2.50}$$

Os demais termos são usados para obter expressões para os coeficientes de (2.54). Observamos que as expressões dos coeficientes $g_1^{(1)}(u_1, u_2)$ e $g_2^{(1)}(u_1, u_2)$ podem ser obtidas dos coeficientes dos estados $\Psi_1(u_1)$ e $\Psi_1(u_2)$, respectivamente. Por outro lado, do coeficiente de Ψ_0 podemos eliminar $g_{12}^{(0)}(u_1, u_2)$. Temos, como resultado,

$$\begin{aligned}
g_1^{(1)}(u_1, u_2) &= \frac{k_{12}^+(u)H_1(u, u_1, u_2)}{\Lambda_2(u, u_1, u_2) - \Lambda_1(u, u_2)}, \quad g_1^{(2)}(u_1, u_2) = \frac{k_{12}^+(u)H_2(u, u_1, u_2)}{\Lambda_2(u, u_1, u_2) - \Lambda_1(u, u_1)}, \\
g_{12}^{(0)}(u_1, u_2) &= \frac{k_{12}^+(u) \left[g_1^{(2)}(u_1, u_2)H_1(u, u_1) + g_1^{(1)}(u_1, u_2)H_1(u, u_2) \right]}{\Lambda_2(u, u_1, u_2) - \Lambda_0(u)}. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Observamos novamente a presença espúria do parâmetro u . Entretanto, ao levarmos em conta que os parâmetros u_1 e u_2 devem satisfazer as equações de Bethe (2.50)

obtemos a seguinte forma fatorada,

$$\begin{aligned} g_1^{(1)}(u_1, u_2) &= g(u_1)p(u_2, u_1), \\ g_2^{(1)}(u_1, u_2) &= g(u_2)p(u_1, u_2), \\ g_{12}^{(0)}(u_1, u_2) &= g(u_1)g(u_2)q(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (2.52)$$

em que $g(u_i)$ é dado por (2.44) e introduzimos duas novas funções auxiliares, a saber,

$$p(u, v) = b_1(u, v) \frac{a_1(u, v)}{a_1(v, u)}, \quad q(u, v) = \frac{b_1(v, u)}{a_1(u, v)}. \quad (2.53)$$

Ainda resta o termo proporcional ao estado $\mathcal{B}(u)\Psi_0$ na expansão (2.49). Entretanto, podemos verificar por um cálculo direto que esse termo é automaticamente anulado quando levamos em conta as equações de Bethe (2.50) bem como as expressões obtidas para os coeficientes g (2.52). Dessa forma, concluímos que o estado

$$\begin{aligned} \Phi_2(u_1, u_2) &= \Psi_2(u_1, u_2) \\ &+ g(u_2)p(u_1, u_2)\Psi_1(u_1) + g(u_1)p(u_2, u_1)\Psi_1(u_2) \\ &+ g(u_1)g(u_2)q(u_1, u_2)\Psi_0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

é um autoestado da matriz de transferência com energia (2.47).

O terceiro estado excitado

Consideremos agora o terceiro estado excitado. Da integrabilidade do modelo em consideração, espera-se que as características mais importantes da solução do problema espectral apareçam já no segundo estado excitado. Entretanto, tivemos que considerar o terceiro estado excitado para compreender melhor a estrutura dos estados Φ_n .

Seguindo nossa discussão prévia, propomos a seguinte estrutura para o terceiro estado excitado,

$$\begin{aligned} \Phi_3(u_1, u_2, u_3) &= \Psi_3(u_1, u_2, u_3) + g_3^{(2)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_2(u_1, u_2) \\ &+ g_2^{(2)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_2(u_1, u_3) + g_1^{(2)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_2(u_2, u_3) \\ &+ g_{23}^{(1)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_1(u_1) + g_{13}^{(1)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_1(u_2) + g_{12}^{(1)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_1(u_3) \\ &+ g_{123}^{(0)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

em que, novamente, temos funções $g^{(k)}(u_1, u_2, u_3)$ a serem determinadas *a posteriori*.

Como antes, é necessário calcularmos a expressão de $t(u)\Phi_3(u_1, u_2, u_3)$. Começamos aplicando a matriz de transferência auxiliar $\bar{t}(u)$ ao estado de três partículas, ou seja,

$$\Psi_3(u_1, u_2, u_3) = \mathcal{B}(u_1)\mathcal{B}(u_2)\mathcal{B}(u_3)\Psi_0, \quad (2.56)$$

e, como resultado, obtemos,

$$\begin{aligned} \bar{t}(u)\Psi_3(u_1, u_2, u_3) &= \Lambda_3(u, u_1, u_2, u_3)\Psi_3(u_1, u_2, u_3) \\ &+ [\omega_1(u)F_3(u, u_1, u_2, u_3) + \omega_2(u)G_3(u, u_1, u_2, u_3)]\mathcal{B}(u)\Psi_2(u_1, u_2) \\ &+ [\omega_1(u)F_2(u, u_1, u_2, u_3) + \omega_2(u)G_2(u, u_1, u_2, u_3)]\mathcal{B}(u)\Psi_2(u_1, u_3) \\ &+ [\omega_1(u)F_1(u, u_1, u_2, u_3) + \omega_2(u)G_1(u, u_1, u_2, u_3)]\mathcal{B}(u)\Psi_2(u_2, u_3), \end{aligned} \quad (2.57)$$

em que,

$$\Lambda_3(u, u_1, u_2, u_3) = \omega_1(u)\Delta_1(u)\prod_{j=1}^3 a_1(u, u_j) + \omega_2(u)\Delta_2(u)\prod_{j=1}^3 b_1(u, u_j). \quad (2.58)$$

O próximo passo consiste na determinação de $t(u)\Phi_3(u_1, u_2, u_3)$. Nesse caso, temos uma proliferação de termos indesejados e, por essa razão, omitimos suas expressões explícitas aqui. Novamente, devemos impor a nulidade de cada coeficiente de cada estado indesejado na expansão *off-shell*. Os coeficientes dos vetores $\mathcal{B}(u)\Psi_2(u_j, u_k)$ não envolvem os coeficientes g e nos levam às equações de Bethe³ para o terceiro estado excitado, ou seja,

$$\frac{\Delta_1(u_k)}{\Delta_2(u_k)} = -\Theta(u_k)\prod_{j=1, j \neq k}^3 \frac{b_1(u_k, u_j)}{a_1(u_k, u_j)}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.59)$$

Escolhemos agora os coeficientes com expressões mais simples para determinar as funções desconhecidas $g^{(k)}(u_1, u_2, u_3)$. É possível notar que tais coeficientes são aqueles associados aos vetores $\Psi_2(u_j, u_k)$, $\Psi_1(u_j)$ e Ψ_0 . Mais uma vez, temos que levar em conta a razão Δ_1/Δ_2 fixada pelas equações de Bethe (2.59) para eliminar a dependência espúria em u nas expressões resultantes. Após uma série de manipulações algébricas

³Observamos que esses termos indesejados coincidem exatamente com os termos indesejados da expansão auxiliar (2.57).

obtemos o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} g_3^{(2)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_3)p(u_1, u_3)p(u_2, u_3) \\ g_2^{(2)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_2)p(u_1, u_2)p(u_3, u_2) \\ g_1^{(2)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_1)p(u_2, u_1)p(u_3, u_1) \end{aligned} \quad (2.60)$$

como sendo os coeficientes de Ψ_2 ,

$$\begin{aligned} g_{23}^{(1)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_2)g(u_3)p(u_1, u_2)p(u_1, u_3)q(u_2, u_3) \\ g_{13}^{(1)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_1)g(u_3)p(u_2, u_1)p(u_2, u_3)q(u_1, u_3) \\ g_{12}^{(1)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_1)g(u_2)p(u_3, u_2)p(u_3, u_1)q(u_1, u_2), \end{aligned} \quad (2.61)$$

para os coeficientes de Ψ_1 e

$$g_{123}^{(0)}(u_1, u_2, u_3) = g(u_1)g(u_2)g(u_3)q(u_1, u_2)q(u_1, u_3)q(u_2, u_3) \quad (2.62)$$

para a amplitude de Ψ_0 . Aqui, verificamos que as expressões para $g^{(k)}(u_1, u_2, u_3)$ se fatoram em termos das funções obtidas na análise do primeiro e segundo estados excitados, ou seja, $g(u)$, $p(u, v)$ e $q(u, v)$.

Finalmente, checamos por computação direta que todos os estados indesejados em $t(u)\Phi_3(u_1, u_2, u_3)$ se anulam automaticamente desde que as equações de Bethe sejam válidas e levando-se em conta as fórmulas (2.60-2.62). Portanto, o vetor (2.55) é autoestado de $t(u)$ com autovalor (2.58) desde que (2.59) sejam satisfeitas.

O n -ésimo estado excitado

Os resultados das subseções anteriores nos permitem finalmente escrever expressões gerais para o problema espectral associado à matriz de transferência (2.20): o n -ésimo estado excitado é dado por,

$$\begin{aligned} \Phi_n(u_1, \dots, u_n) &= \Psi_n(u_1, \dots, u_n) \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell_1 < \dots < \ell_{n-k}=1}^n g_{\ell_1, \dots, \ell_{n-k}}^{(k)}(u_1, \dots, u_n) &\Psi_k(u_1, \dots, \hat{u}_{\ell_1}, \dots, \hat{u}_{\ell_{n-k}}, \dots, u_n), \end{aligned} \quad (2.63)$$

em que as funções $g_{\ell_1, \dots, \ell_{n-k}}^{(k)}(u_1, \dots, u_n)$ tem a seguinte expressão,

$$g_{\ell_1, \dots, \ell_{n-k}}^{(k)}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{m \in \bar{\ell}} g(u_m) \prod_{m' \in \bar{\ell}, m' < m} q(u_{m'}, u_m) \prod_{m''=1, m'' \notin \bar{\ell}}^n p(u_{m''}, u_m) \quad (2.64)$$

com $\bar{\ell} = \{\ell_1, \dots, \ell_{n-k}\}$. A notação \hat{u}_j indica a ausência da raiz u_j na respectiva função. O autovalor correspondente é dado por,

$$\Lambda_n(u, u_1, \dots, u_n) = \omega_1(u) \Delta_1(u) \prod_{j=1}^n a_1(u, u_j) + \omega_2(u) \Delta_2(u) \prod_{j=1}^n b_1(u, u_j) \quad (2.65)$$

enquanto as raízes de Bethe são vinculadas por,

$$\frac{\Delta_1(u_k)}{\Delta_2(u_k)} = -\Theta(u_k) \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{b_1(u_k, u_j)}{a_1(u_k, u_j)}, \quad (2.66)$$

em que $k = 1, \dots, n$.

3 Os modelos de dezenove vértices

Nesta seção estendemos os resultados da Seção 2 para os chamados modelos de dezenove vértices, que são os modelos de vértices com três estados invariantes pela simetria $U(1)$. Escolhemos como representativos dessa classe de modelos os modelos de Zamolodchikov-Fateev (ZF) [50] and Izergin-Korepin (IK) [51], para os quais matrizes de reflexão não diagonais são conhecidas [54–57]. Lembramos aqui que a solução de modelos de dezenove vértices tem um papel fundamental no estudo de outros modelos associados a álgebras de elevado *rank* [14, 16, 17, 31].

Lembramos ainda que o estudo desses modelos com fronteiras diagonais no contexto do ABA foi iniciado em [27], subsequentemente considerado em [58] e então revisado em [30]. Tais resultados complementaram resultados anteriores obtidos por meio do ansatz de Bethe analítico [59, 60], fornecendo os vetores de Bethe correspondentes.

Destacamos que, recentemente, o espectro do modelo IK com matrizes K não diagonais do tipo II [57] foi determinado através de um ansatz de Bethe analítico [61]; a construção dos autovetores correspondentes, entretanto, permanece um problema em aberto.

Seguiremos nesta seção um desenvolvimento similar à Seção 2, apresentando inicialmente as matrizes R e K dos modelos de dezenove vértices e em seguida desenvolveremos o ABA.

3.1 As matrizes R e as matrizes K^\pm

Para os modelos de dezenove vértices, a construção da matriz de transferência dupla se dá de modo análogo ao que se faz no modelo de seis vértices. Ou seja, é definida por

$$t(u) = \text{Tr}_a[K^+(u)U_a(u)], \quad (3.1)$$

em que

$$U_a(u) = T_a(u)K^-(u)T_a^{-1}(-u). \quad (3.2)$$

Para alguns modelos nessa classe, entretanto, é necessário generalizar as equações de reflexão para que se garanta a comutatividade de (3.1). Temos [62],

$$R_{12}(u-v)K_1^-(u)R_{21}(u+v)K_2^+(v) = K_2^+(v)R_{12}(u+v)K_1^-(u)R_{21}(u-v), \quad (3.3)$$

em que, para o modelo ZF,

$$\begin{aligned}
a(u) &= 1, & b(u) &= \frac{\sinh(u)}{\sinh(u+\eta)}, & c(u) &= \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(u+\eta)}, \\
\tilde{d}(u) &= d(u) = \frac{\sinh(\eta)\sinh(u)}{\sinh(u+\frac{\eta}{2})\sinh(u+\eta)}, & f(u) &= \frac{\sinh(u-\frac{\eta}{2})\sinh(u)}{\sinh(u+\frac{\eta}{2})\sinh(u+\eta)}, \\
e(u) &= \frac{\cosh(\frac{\eta}{2}-u)\cosh(u+\eta) - \cosh(\frac{\eta}{2})}{\sinh(u+\frac{\eta}{2})\sinh(u+\eta)}, & \tilde{h}(u) &= h(u) = \frac{\sinh(\eta)\sinh(\frac{\eta}{2})}{\sinh(u+\frac{\eta}{2})\sinh(u+\eta)},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

e, para a solução IK,

$$\begin{aligned}
a(u) &= 1, & b(u) &= \frac{\sinh(u)}{\sinh(u+\eta)}, & c(u) &= \frac{\sinh(\eta)}{\sinh(u+\eta)}, \\
d(u) &= \frac{e^\eta \sinh(\eta)\sinh(u)}{\cosh(u+\frac{3\eta}{2})\sinh(u+\eta)}, & \tilde{d}(u) &= -e^{-2\eta}d(u), \\
f(u) &= \frac{\cosh(u+\frac{\eta}{2})\sinh(u)}{\cosh(u+\frac{3\eta}{2})\sinh(u+\eta)}, \\
e(u) &= \frac{\cosh(u-\frac{\eta}{2})\sinh(u+2\eta) - \cosh(\frac{\eta}{2})\sinh(\eta)}{\cosh(u+\frac{3\eta}{2})\sinh(u+\eta)}, \\
h(u) &= \frac{\cosh(u+\frac{3\eta}{2})\sinh(u+\eta) - e^{2\eta}\cosh(u+\frac{\eta}{2})\sinh(u)}{\cosh(u+\frac{3\eta}{2})\sinh(u+\eta)}, \\
\tilde{h}(u) &= \frac{\cosh(u+\frac{3\eta}{2})\sinh(u+\eta) - e^{-2\eta}\cosh(u+\frac{\eta}{2})\sinh(u)}{\cosh(u+\frac{3\eta}{2})\sinh(u+\eta)}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Algumas propriedades importantes satisfeitas pelas matrizes R são,

1. simetria PT : $R_{21}(u) = R_{12}^{t_1 t_2}(u)$;
2. unitariedade: $R_{12}(u)R_{21}(-u) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$; and
3. cruzamento-unitariedade: $R_{12}^{t_1}(u)M_1R_{12}^{t_2}(-u-2\rho)M_1^{-1} = \zeta(u)\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$,

em que $\mathbb{1}$ denota a matriz identidade de dimensões 3×3 e $\zeta(u)$ representa uma função escalar. Levando em conta que a matriz M satisfaz $[R_{12}(u), M \otimes M] = 0$, a simetria de cruzamento-unitariedade fixa o parâmetro ρ para cada modelo. Podemos ter,

$$M = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad \rho = \eta, \tag{3.10}$$

para o modelo ZF e

$$M = \begin{pmatrix} e^{-2\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\eta} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \rho = 3\eta \tag{3.11}$$

para o modelo IK.

As equações de reflexão (3.3,3.4) foram analisadas em [54–57]. Aqui estamos interessados nas soluções em que as matrizes K tem uma estrutura superior triangular, as quais podem ser lidas das soluções tipo-I classificadas em [57] e escritas como,

$$K^-(u) = \begin{pmatrix} k_{11}^-(u) & k_{12}^-(u) & k_{13}^-(u) \\ 0 & k_{22}^-(u) & k_{23}^-(u) \\ 0 & 0 & k_{33}^-(u) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

com

$$\begin{aligned} k_{11}^-(u) &= \sinh(u + \xi_-) \sinh\left(u + \xi_- - \frac{\eta}{2}\right), \\ k_{22}^-(u) &= \sinh(\xi_- - u) \sinh\left(u + \xi_- - \frac{\eta}{2}\right), \\ k_{33}^-(u) &= \sinh(u - \xi_-) \sinh\left(u - \xi_- + \frac{\eta}{2}\right), \\ k_{12}^-(u) &= \beta_- \sinh(2u) \sinh\left(u + \xi_- - \frac{\eta}{2}\right), \\ k_{23}^-(u) &= \beta_- \sinh(2u) \sinh(\xi_- - u), \\ k_{13}^-(u) &= \left[\frac{\beta_-^2 \sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sinh(\eta)} \right] \sinh(2u) \sinh\left(2u - \frac{\eta}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

para o modelo ZF e

$$\begin{aligned} k_{11}^-(u) &= k_{33}^-(u) = \sinh\left(u + \frac{3\eta}{4} + \epsilon \frac{i\pi}{4}\right) \cosh\left(u + \frac{3\eta}{4} - \epsilon \frac{i\pi}{4}\right), \\ k_{22}^-(u) &= \sinh\left(-u + \frac{3\eta}{4} + \epsilon \frac{i\pi}{4}\right) \cosh\left(u + \frac{3\eta}{4} - \epsilon \frac{i\pi}{4}\right), \\ k_{12}^-(u) &= \beta_- \sinh(2u) \cosh\left(u + \frac{3\eta}{4} - \epsilon \frac{i\pi}{4}\right), \\ k_{23}^-(u) &= \beta_- \sinh(2u) e^{-\eta} \sinh\left(u + \frac{3\eta}{4} + \epsilon \frac{i\pi}{4}\right), \\ k_{13}^-(u) &= \left[-\frac{\beta_-^2 e^{-\eta}}{\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right] \sinh(2u) \cosh\left(u + \frac{\eta}{4} + \epsilon \frac{i\pi}{4}\right) \sinh\left(u + \frac{3\eta}{4} + \epsilon \frac{i\pi}{4}\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

para o modelo IK. As respectivas matrizes K^+ são obtidas por meio do isomorfismo,

$$K^+(u) = K^-(-u - \rho) M \Big|_{\{\xi_- \rightarrow \xi_+, \beta_- \rightarrow \beta_+\}} \quad (3.15)$$

em que M e ρ são dados por (3.10,3.11).

Nas expressões acima ξ_{\pm} e β_{\pm} são constantes livres enquanto $\epsilon = \pm 1$. Observamos que as matrizes triangulares do modelo ZF possuem dois parâmetros livres adicionais ξ_{\pm} quando comparadas às matrizes do modelo IK.

3.2 Ansatz de Bethe

Nesta subseção aplicamos o ABA para lidar com o problema espectral da matriz de transferência (3.1). O primeiro passo a ser executado consiste na escolha de uma representação para as monodromias de linha simples $T_a(u)$, $\hat{T}_a(u)$ e, conseqüentemente, para $U_a(u)$. Para modelos de dezenove vértices, uma representação conveniente é dada pela seguinte matriz 3×3 no espaço auxiliar a [27, 30, 58],

$$T_a(u) = \begin{pmatrix} T_{11}(u) & T_{12}(u) & T_{13}(u) \\ T_{21}(u) & T_{22}(u) & T_{23}(u) \\ T_{31}(u) & T_{31}(u) & T_{33}(u) \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_a(u) = \begin{pmatrix} \hat{T}_{11}(u) & \hat{T}_{12}(u) & \hat{T}_{13}(u) \\ \hat{T}_{21}(u) & \hat{T}_{22}(u) & \hat{T}_{23}(u) \\ \hat{T}_{31}(u) & \hat{T}_{31}(u) & \hat{T}_{33}(u) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

cujas entradas são operadores definidos no espaço de Hilbert $\otimes_{i=1}^L \mathbb{C}^3$. A monodromia dupla pode portanto ser escrita como,

$$U_a(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1(u) & \mathcal{B}_1(u) & \mathcal{B}_2(u) \\ \mathcal{C}_1(u) & \mathcal{A}_2(u) & \mathcal{B}_3(u) \\ \mathcal{C}_2(u) & \mathcal{C}_3(u) & \mathcal{A}_3(u) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

em que os operadores \mathcal{A}_j , \mathcal{B}_j e \mathcal{C}_j são dados em termos de T_{ij} e \hat{T}_{ij} . Esse passo é importante uma vez que nos permite obter relações de comutação entre as entradas de (3.17) graças à relação (3.6).

Em seguida, temos que considerar um estado de referência bem como determinar a ação dos operadores U_{ij} sobre ele. Devido à estrutura da matriz K^- (3.12), o pseudovácuo definido por,

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(1)} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(2)} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(L)}, \quad (3.18)$$

é uma boa escolha de estado de referência [35]. De fato, levando em conta as relações de comutação entre os elementos de matriz de $T(u)$ e $\hat{T}(u)$, fornecidos pela equação

(3.5), bem como as expressões para $T_{ij}(u)\Psi_0$ e $\hat{T}_{ij}(u)\Psi_0$, podemos calcular⁴,

$$\mathcal{D}_j(u)\Psi_0 = \Delta_j(u)\Psi_0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3 \quad (3.19)$$

e

$$\mathcal{C}_j(u)\Psi_0 = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \quad (3.20)$$

em que

$$\begin{aligned} \Delta_1(u) &= k_{11}^-(u), & \Delta_2(u) &= [k_{22}^-(u) - f_1(u)k_{11}^-(u)] b(u)^{2L}, \\ \Delta_3(u) &= [k_{33}^-(u) - f_4(u)k_{11}^-(u) - f_3(u)k_{22}^-(u)] f(u)^{2L}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Os novos operadores $\mathcal{D}_j(u)$ são definidos convenientemente por,

$$\mathcal{D}_1(u) = \mathcal{A}_1(u), \quad \mathcal{D}_2(u) = \mathcal{A}_2(u) - f_1(u)\mathcal{A}_1(u), \quad \mathcal{D}_3(u) = \mathcal{A}_3(u) - f_2(u)\mathcal{A}_1 - f_3(u)\mathcal{D}_2(u), \quad (3.22)$$

em que as funções auxiliares f são dadas por,

$$\begin{aligned} f_1(u) &= c(2u), & f_2(u) &= \tilde{h}(2u), & f_3(u) &= \frac{c(2u) [\tilde{h}(2u) - 1]}{c(2u)^2 - e(2u)}, \\ f_4(u) &= \frac{c(2u)^2 - \tilde{h}(2u)e(2u)}{c(2u)^2 - e(2u)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Em termos dos operadores (3.22), a expressão da matriz de transferência pode ser decomposta em duas partes da seguinte maneira,

$$t(u) = t_a(u) + t_u(u) \quad (3.24)$$

em que

$$t_a(u) = \omega_1(u)\mathcal{D}_1(u) + \omega_2(u)\mathcal{D}_2(u) + \omega_3(u)\mathcal{D}_3(u) \quad (3.25)$$

e,

$$t_u(u) = k_{12}^+(u)\mathcal{C}_1(u) + k_{13}^+(u)\mathcal{C}_2(u) + k_{23}^+(u)\mathcal{C}_3(u). \quad (3.26)$$

com

$$\begin{aligned} \omega_1(u) &= k_{11}^+(u) + f_1(u)k_{22}^+(u) + f_2(u)k_{33}^+(u), & \omega_2(u) &= k_{22}^+(u) + f_3(u)k_{33}^+(u), \\ \omega_3(u) &= k_{33}^+(u). \end{aligned} \quad (3.27)$$

⁴Para mais detalhes sobre esse cálculo ver por exemplo [30].

Uma vez que os operadores $\mathcal{C}_j(u)$ destroem o estado (3.18) temos $t_u(u)\Psi_0 = 0$. Portanto, o estado (3.18) é um autovetor compartilhado pelas matrizes de transferência (3.24) e (3.25) com autovalor,

$$\Lambda_0(u) = \omega_1(u)\Delta_1(u) + \omega_2(u)\Delta_2(u) + \omega_3(u)\Delta_3(u). \quad (3.28)$$

Dentro do escopo do ABA, os estados excitados do termo $t_d(u)$, podem ser gerados pela aplicação de operadores de criação no estado de referência (3.18) [27, 30, 58]. Mais precisamente, os autoestados de $t_d(u)$ são construídos aplicando-se ambos os operadores $\mathcal{B}_1(u)$ e $\mathcal{B}_2(u)$ em Ψ_0 . Por exemplo, os estados de uma $\Psi_1(u_1)$ e duas partículas $\Psi_2(u_1, u_2)$ são dados por,

$$\Psi_1(u_1) = \mathcal{B}_1(u_1)\Psi_0, \quad (3.29)$$

$$\Psi_2(u_1, u_2) = \mathcal{B}_1(u_1)\mathcal{B}_1(u_2)\Psi_0 - \Gamma_2^{(2)}(u_1, u_2)\mathcal{B}_2(u_1)\Psi_0 \quad (3.30)$$

em que a função $\Gamma_2^{(2)}(u_1, u_2)$ é fixada exigindo-se a simetria

$$\Psi_2(u_2, u_1) = \Omega(u_1, u_2)\Psi_2(u_1, u_2), \quad \Omega(u_1, u_2) = 1/e_{01}(u_1, u_2) \quad (3.31)$$

bem como utilizando-se a relação (B.7). Além disso, os estados de várias partículas satisfazem uma relação de recorrência do tipo Tarasov [13], a saber,

$$\begin{aligned} \Psi_n(u_1, \dots, u_n) &= \mathcal{B}_1(u_1)\Psi_{n-1}(u_2, \dots, u_n) \\ &- \mathcal{B}_2(u_1) \sum_{i=2}^n \Gamma_i^{(n)}(u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-2}(u_2, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_n) \end{aligned} \quad (3.32)$$

com a função Γ_i dada por,

$$\begin{aligned} \Gamma_i^{(n)}(u_1, \dots, u_n) &= \prod_{j=2, j < i}^n \Omega(u_i, u_j) \\ &\times \left\{ \Delta_1(u_i)e_{04}(u_1, u_i) \prod_{k=2, k \neq i}^n a_{11}(u_i, u_k) + \Delta_2(u_i)e_{05}(u_1, u_i) \prod_{k=2, k \neq i}^n a_{21}(u_i, u_k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

em que, como usual, a notação \hat{u}_i indica a ausência do parâmetro u_i na respectiva função.

Em nosso caso, entretanto, a matriz de transferência possui operadores de aniquilação $\mathcal{C}_{1,2,3}(u)$ e, como resultado, temos que procurar por autoestados mais intrincados. Seguindo o procedimento feito para o modelo de seis vértices, propomos que

uma superposição dos estados (3.32) é necessária para diagonalizar a matriz (3.24), a saber,

$$\Phi_n = \sum_{k=0}^n g^{(k)} \Psi_k. \quad (3.34)$$

Logo, a tarefa principal passa a ser a determinação dos coeficientes g em (3.34). Para esse fim, é necessário calcularmos a ação de ambos os operadores $t_d(u)$ e $t_u(u)$ nos vetores Ψ_n . Uma vez que conhecemos a maneira com que os operadores \mathcal{D}_j e \mathcal{C}_j atuam em Ψ_0 (3.19,3.20), temos que movê-los sobre os operadores de criação \mathcal{B}_j . Para tanto, usamos repetidamente relações de comutação listadas no apêndice B, que são derivadas de (3.6). Após um longo embora direto cálculo, até $n = 3$, podemos propor que a ação $t_d(u)\Psi_n$ pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} t_d(u)\Psi_n(u_1, \dots, u_n) &= \Lambda_n(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_n(u_1, \dots, u_n) \\ &+ \mathcal{B}_1(u) \sum_{j=1}^n \mathcal{F}_j^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-1}(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_n) \\ &+ \mathcal{B}_3(u) \sum_{j=1}^n \mathcal{G}_j^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-1}(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_n) \\ &+ \mathcal{B}_2(u) \sum_{j < k}^n \mathcal{H}_{jk}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-2}(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_n), \end{aligned} \quad (3.35)$$

enquanto $t_u(u)\Psi_n$ tem uma estrutura mais elaborada e é dada por,

$$\begin{aligned}
t_u(u)\Psi_n(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{j=1}^n \mathcal{T}_j^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-1}(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_n) \\
&+ \sum_{j < k}^n \mathcal{U}_{jk}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-2}(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_n) \\
&+ \mathcal{B}_1(u) \sum_{j < k}^n \mathcal{V}_{jk}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-2}(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_n) \\
&+ \mathcal{B}_3(u) \sum_{j < k}^n \mathcal{W}_{jk}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-2}(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_n) \\
&+ \mathcal{B}_1(u) \sum_{j < k < \ell}^n \mathcal{X}_{jkl}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-3}(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, \hat{u}_k, \dots, \hat{u}_\ell, \dots, u_n) \\
&+ \mathcal{B}_3(u) \sum_{j < k < \ell}^n \mathcal{Y}_{jkl}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-3}(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, \hat{u}_k, \dots, \hat{u}_\ell, \dots, u_n) \\
&+ \mathcal{B}_2(u) \sum_{j < k < \ell}^n \mathcal{Z}_{jkl}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n)\Psi_{n-3}(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, \hat{u}_k, \dots, \hat{u}_\ell, \dots, u_n).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

em que as funções $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \dots, \mathcal{Z}$ de (3.35) e (3.36) são dadas no apêndice C. Usaremos as equações acima para determinar os coeficientes g , considerando em detalhes o primeiro, o segundo e o terceiro estado excitado, o que nos permitirá escrever uma fórmula geral para os coeficientes g .

O primeiro estado excitado

Considerando nossa discussão prévia, supomos como primeiro estado excitado de (3.24) a combinação linear,

$$\Phi_1(u_1) = \Psi_1(u_1) + g(u_1)\Psi_0. \tag{3.37}$$

com $g(u_1)$ a ser fixado *a posteriori*. Atuando com $t(u)$ em $\Phi_1(u_1)$, obtemos

$$t(u)\Phi_1(u_1) = t_d(u)\Psi_1(u_1) + g(u_1)t_d(u)\Psi_0 + t_u(u)\Psi_1(u_1), \tag{3.38}$$

e, por meio do valor $n = 1$ nas fórmulas (3.35,3.36), temos,

$$\begin{aligned}
t(u)\Phi_1(u_1) &= \Lambda_1(u, u_1)\Phi_1(u_1) + \mathcal{F}_1^{(1)}(u, u_1)\mathcal{B}_1(u)\Psi_0 + \mathcal{G}_1^{(1)}(u, u_1)\mathcal{B}_3(u)\Psi_0 \\
&+ \left\{ g(u_1) [\Lambda_0(u) - \Lambda_1(u, u_1)] + \mathcal{T}_1^{(1)}(u, u_1) \right\} \Psi_0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

em que

$$\Lambda_1(u, u_1) = \omega_1(u)\Delta_1(u)a_{11}(u, u_1) + \omega_2(u)\Delta_2(u)a_{21}(u, u_1) + \omega_3(u)\Delta_3(u)a_{31}(u, u_1). \quad (3.40)$$

Vemos que $\Phi_1(u_1)$ será um autoestado de $t(u)$ com autovalor $\Lambda_1(u, u_1)$ desde que os coeficientes dos estados indesejados $\mathcal{B}_1(u)\Psi_0$, $\mathcal{B}_3(u)\Psi_0$ e Ψ_0 desapareçam. O requerimento de nulidade de $\mathcal{F}_1^{(1)}(u, u_1)$ nos leva ao vínculo,

$$\frac{\Delta_1(u_1)}{\Delta_2(u_1)} = -\frac{Q_2^{\mathcal{F}}(u, u_1)}{Q_1^{\mathcal{F}}(u, u_1)} \quad (3.41)$$

e, graças à identidade,

$$\frac{Q_2^{\mathcal{F}}(u, u_1)}{Q_1^{\mathcal{F}}(u, u_1)} = \frac{Q_2^{\mathcal{G}}(u, u_1)}{Q_1^{\mathcal{G}}(u, u_1)} \quad (3.42)$$

vemos que $\mathcal{G}_1^{(1)}(u, u_1)$ também se anula se (3.41) é válida. Levando em conta as expressões explícitas dos pesos de Boltzmann notamos que a dependência em u no lado direito de (3.41) desaparece e, em consequência, podemos escrever a equação de Bethe que fixa u_1 como,

$$\frac{\Delta_1(u_1)}{\Delta_2(u_1)} = -\Theta(u_1) \quad (3.43)$$

em que, para o modelo ZF,

$$\Theta(u_1) = \frac{\sinh(2u_1 + \eta) \sinh(u_1 + \xi_+ + \frac{\eta}{2})}{\sinh(2u_1) \sinh(u_1 + \xi_+ - \frac{\eta}{2})} \quad (3.44)$$

e, para o modelo IK,

$$\Theta(u_1) = -\frac{\sinh(2u_1 + \eta) \sinh(u_1 + \frac{\eta}{4} - \epsilon \frac{3i\pi}{4})}{\sinh(2u_1) \sinh(u_1 + \frac{3\eta}{4} - \epsilon \frac{i\pi}{4})} \quad (3.45)$$

Resta ainda analisar o coeficiente de Ψ_0 na equação (3.39). Esse coeficiente pode ser usado para se extrair linearmente uma expressão para $g(u_1)$, ou seja,

$$g(u_1) = \frac{\mathcal{T}_1^{(1)}(u, u_1)}{\Lambda_1(u, u_1) - \Lambda_0(u)}. \quad (3.46)$$

Para ser um autoestado de $t(u)$ a expressão (3.37) não pode depender do parâmetro espectral u e portanto (3.46) parece inconsistente. Entretanto, observamos que a dependência em u é eliminada desde que levemos em conta a equação de Bethe (3.43). De fato, a elaborada expressão (3.46), se u_1 é uma raiz de (3.43), é simplificada para

$$g(u_1) = \beta_+ \left[\frac{\sinh(2u_1 + \eta)}{\sinh(u_1 + \frac{\eta}{2} - \xi_+)} \right] \Delta_2(u_1), \quad (3.47)$$

no caso do modelo ZF e

$$g(u_1) = \beta_+ \left[\frac{\sinh(2u_1 + \eta)}{\sinh(u_1 + \frac{3\eta}{4} - \epsilon \frac{i\pi}{4})} \right] \Delta_2(u_1), \quad (3.48)$$

para o modelo IK.

Portanto, fixamos o primeiro estado excitado. Observamos que a matriz de transferência $t(u)$ compartilha com $t_d(u)$ a expressão do autovalor (3.40) bem como a equação de Bethe (3.43).

O segundo estado excitado

Para o segundo estado excitado o ansatz é,

$$\begin{aligned} \Phi_2(u_1, u_2) &= \Psi_2(u_1, u_2) \\ &+ g_2^{(1)}(u_1, u_2) \Psi_1(u_1) + g_1^{(1)}(u_1, u_2) \Psi_1(u_2) \\ &+ g_{12}^{(0)}(u_1, u_2) \Psi_0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

com coeficientes $g_{1,2}^{(1)}(u_1, u_2)$ e $g_{12}^{(0)}(u_1, u_2)$ a serem fixados no que se segue.

Como antes, precisamos conhecer a ação de $t(u)$ no estado (3.49). Isso pode ser feito utilizando-se $n = 2$ em (3.35,3.36). Como resultado, obtemos a seguinte expansão *off-shell*,

$$\begin{aligned} t(u) \Phi_2(u_1, u_2) &= \Lambda_2(u, u_1, u_2) \Phi_2(u_1, u_2) \\ &+ \mathcal{F}_1^{(2)}(u, u_1, u_2) \mathcal{B}_1(u) \Psi_1(u_2) + \mathcal{F}_2^{(2)}(u, u_1, u_2) \mathcal{B}_1(u) \Psi_1(u_1) \\ &+ \mathcal{G}_1^{(2)}(u, u_1, u_2) \mathcal{B}_3(u) \Psi_1(u_2) + \mathcal{G}_2^{(2)}(u, u_1, u_2) \mathcal{B}_3(u) \Psi_1(u_1) \\ &+ \mathcal{H}_{12}^{(2)}(u, u_1, u_2) \mathcal{B}_2(u) \Psi_0 \\ &+ \left\{ g_2^{(1)}(u_1, u_2) \mathcal{F}_1^{(1)}(u, u_1) + g_1^{(1)}(u_1, u_2) \mathcal{F}_1^{(1)}(u, u_2) + \mathcal{V}_{12}^{(2)}(u, u_1, u_2) \right\} \mathcal{B}_1(u) \Psi_0 \\ &+ \left\{ g_2^{(1)}(u_1, u_2) \mathcal{G}_1^{(1)}(u, u_1) + g_1^{(1)}(u_1, u_2) \mathcal{G}_1^{(1)}(u, u_2) + \mathcal{W}_{12}^{(2)}(u, u_1, u_2) \right\} \mathcal{B}_3(u) \Psi_0 \\ &+ \left\{ g_1^{(1)}(u_1, u_2) [\Lambda_1(u, u_2) - \Lambda_2(u, u_1, u_2)] + \mathcal{T}_1^{(2)}(u, u_1, u_2) \right\} \Psi_1(u_2) \\ &+ \left\{ g_2^{(1)}(u_1, u_2) [\Lambda_1(u, u_1) - \Lambda_2(u, u_1, u_2)] + \mathcal{T}_2^{(2)}(u, u_1, u_2) \right\} \Psi_1(u_1) \\ &+ \left\{ g_{12}^{(0)}(u_1, u_2) [\Lambda_0(u) - \Lambda_2(u, u_1, u_2)] \right. \\ &+ \left. g_1^{(1)}(u_1, u_2) \mathcal{T}_1^{(1)}(u, u_2) + g_2^{(1)}(u_1, u_2) \mathcal{T}_1^{(1)}(u, u_1) + \mathcal{U}_{12}^{(2)}(u, u_1, u_2) \right\} \Psi_0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Notamos que os cinco primeiro termos indesejados em (3.50) coincidem com os termos indesejados obtidos na ação de $t_d(u)$ no estado Ψ_2 (3.30). Portanto, sua nulidade

nos leva às equações de Bethe para u_1 e u_2 , a saber

$$\frac{\Delta_1(u_j)}{\Delta_2(u_j)} = -\Theta(u_j) \prod_{k=1, k \neq j}^2 \frac{a_{21}(u_j, u_k)}{a_{11}(u_j, u_k)}. \quad (3.51)$$

Ressaltamos que o vínculo (3.51) é obtido das equações $\mathcal{F}_j^{(2)}(u, u_1, u_2) = 0$ levando-se em conta as expressões explícitas para os pesos de Boltzmann. Devido a identidades provenientes das álgebras de Yang-Baxter e de reflexão, observamos que $\mathcal{G}_j^{(2)}(u, u_1, u_2)$ e $\mathcal{H}_{12}^{(2)}(u, u_1, u_2)$ também se anulam se (3.51) são satisfeitas.

Os demais coeficientes são usados para extrair os coeficientes desconhecidos no estado ansatz (3.49). A nulidade dos coeficientes de $\Psi_1(u_1)$, $\Psi_1(u_2)$ e Ψ_0 nos permitem escrever,

$$g_1^{(1)}(u_1, u_2) = \frac{\mathcal{T}_1^{(2)}(u, u_1, u_2)}{\Lambda_2(u, u_1, u_2) - \Lambda_1(u, u_2)}, \quad g_2^{(1)}(u_1, u_2) = \frac{\mathcal{T}_2^{(2)}(u, u_1, u_2)}{\Lambda_2(u, u_1, u_2) - \Lambda_1(u, u_1)} \quad (3.52)$$

e

$$g_0^{(12)}(u_1, u_2) = \frac{g_1^{(1)}(u_1, u_2)\mathcal{T}_1^{(1)}(u, u_2) + g_2^{(1)}(u_1, u_2)\mathcal{T}_1^{(1)}(u, u_1) + \mathcal{U}_{12}^{(2)}(u, u_1, u_2)}{\Lambda_2(u, u_1, u_2) - \Lambda_0(u)}. \quad (3.53)$$

Similarmente ao que ocorre no primeiro estado excitado, as expressões para os coeficientes (3.52,3.53) contem o parâmetro espectral u . Mais uma vez, tal situação pode ser contornada se considerarmos a razão Δ_1/Δ_2 fixada pelas equações de Bethe (3.51). Após uma longa manipulação algébrica, obtemos que (3.52,3.53) se simplificam na seguinte estrutura fatorizada,

$$\begin{aligned} g_1^{(1)}(u_1, u_2) &= g(u_1)a_{21}(u_1, u_2), \\ g_2^{(1)}(u_1, u_2) &= g(u_2)a_{21}(u_2, u_1)\Omega(u_2, u_1), \\ g_{12}^{(0)}(u_1, u_2) &= g(u_1)g(u_2)s(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (3.54)$$

em que $g(u_i)$ são as funções (3.47) ou (3.48) obtidas na análise do primeiro estado excitado e,

$$s(u_1, u_2) = \frac{\sinh(u_1 + u_2) \sinh(u_1 - u_2 - \eta) \sinh\left(u_1 + u_2 + \frac{3\eta}{2}\right)}{\sinh\left(u_1 - u_2 - \frac{\eta}{2}\right) \sinh\left(u_1 + u_2 + \frac{\eta}{2}\right)^2} \quad (3.55)$$

para o modelo ZF

$$\begin{aligned}
s(u_1, u_2) &= \frac{\cosh\left(u_1 + u_2 + \frac{\eta}{2}\right) \sinh(u_1 + u_2 + 2\eta)}{\sinh(u_1 + u_2) \cosh\left(u_1 - u_2 + \frac{\eta}{2}\right) \cosh\left(u_1 + u_2 + \frac{3\eta}{2}\right)^2} \\
&\times \left[\cosh\left(u_1 + \frac{\eta}{4} - i\epsilon\frac{\pi}{4}\right) \cosh\left(u_1 + \frac{3\eta}{4} + i\epsilon\frac{\pi}{4}\right) \right. \\
&\quad \left. + \cosh\left(u_2 - \frac{\eta}{4} + i\epsilon\frac{\pi}{4}\right) \cosh\left(u_2 + \frac{5\eta}{4} - i\epsilon\frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (3.56)
\end{aligned}$$

para a solução IK. Notamos o aparecimento do fator $\Omega(u_1, u_2)$ em $g_2^{(1)}(u_1, u_2)$. Consequentemente, também temos a simetria (3.31) para o estado generalizado $\Phi_2(u_1, u_2)$.

Nesse ponto, usamos as expressões (3.54) nos termos indesejados remanescentes de (3.50) e, levando em conta os vínculos sobre u_1 e u_2 ditados pelas equações de Bethe (3.58) podemos verificar por computação direta que todos eles são automaticamente cancelados. Dessa forma, concluímos que o estado (3.49) com coeficientes (3.54) é um autoestado de (3.24) com autovalor $\Lambda_2(u, u_1, u_2)$ (C.1).

O terceiro estado excitado

Seguimos procedimento análogo para o terceiro estado excitado. O ansatz agora é dado por,

$$\begin{aligned}
\Phi_3(u_1, u_2, u_3) &= \Psi_3(u_1, u_2, u_3) + g_3^{(2)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_2(u_1, u_2) \\
&+ g_2^{(2)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_2(u_1, u_3) + g_1^{(2)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_2(u_2, u_3) \\
&+ g_{23}^{(1)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_1(u_1) + g_{13}^{(1)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_1(u_2) + g_{12}^{(1)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_1(u_3) \\
&+ g_{123}^{(0)}(u_1, u_2, u_3)\Psi_0 \quad (3.57)
\end{aligned}$$

em que os coeficientes $g^{(k)}(u_1, u_2, u_3)$ serão determinados a seguir.

Nesse caso usamos $n = 3$ nas expansões (3.35,3.36) para determinar a atuação de $t(u)$ em (3.57). Nesse caso, observamos o aparecimento de muitos termos indesejados, e por isso os omitimos aqui e apenas descrevemos o procedimento para resolvê-los. Novamente, todos tem que ser nulos para que (3.57) seja um autoestado de (3.24). As equações de Bethe são obtidas dos coeficientes dos estados indesejados $\mathcal{B}_1(u)\Psi_2(u_j, u_k)$, e são dadas por,

$$\frac{\Delta_1(u_j)}{\Delta_2(u_j)} = -\Theta(u_j) \prod_{k=1, k \neq j}^3 \frac{a_{21}(u_j, u_k)}{a_{11}(u_j, u_k)} \quad \text{for } j = 1, 2, 3. \quad (3.58)$$

Escolhemos então os coeficientes dos termos indesejados mais simples para obter as funções g . Para as amplitudes de ordem dois, ou seja, $g^{(2)}(u_1, u_2, u_3)$, usamos os coeficientes de $\Psi_2(u_j, u_k)$ e, após levar em conta as equações de Bethe (3.58), encontramos,

$$\begin{aligned} g_3^{(2)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_3)a_{21}(u_3, u_1)a_{21}(u_3, u_2)\Omega(u_3, u_1)\Omega(u_3, u_2), \\ g_2^{(2)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_2)a_{21}(u_2, u_1)a_{21}(u_2, u_3)\Omega(u_2, u_1), \\ g_1^{(2)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_1)a_{21}(u_1, u_2)a_{21}(u_1, u_3). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Os coeficientes $g^{(1)}(u_1, u_2, u_3)$ por sua vez são derivados dos de $\Psi_1(u_j)$ enquanto $g^{(0)}(u_1, u_2, u_3)$ é obtido do coeficiente de Ψ_0 . Usando as equações de Bethe (3.58), encontramos a seguinte estrutura,

$$\begin{aligned} g_{23}^{(1)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_2)g(u_3)a_{21}(u_2, u_1)a_{21}(u_3, u_1)s(u_2, u_3)\Omega(u_2, u_1)\Omega(u_3, u_1), \\ g_{13}^{(1)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_1)g(u_3)a_{21}(u_1, u_2)a_{21}(u_3, u_2)s(u_1, u_3)\Omega(u_3, u_2), \\ g_{12}^{(1)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_1)g(u_2)a_{21}(u_2, u_3)a_{21}(u_1, u_3)s(u_1, u_2), \\ g_{123}^{(0)}(u_1, u_2, u_3) &= g(u_1)g(u_2)g(u_3)s(u_1, u_2)s(u_1, u_3)s(u_2, u_3). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Finalmente, podemos ver por bruta força que todos os demais termos indesejados se cancelam se levarmos em conta as expressões (3.59,3.60) juntamente com as equações de Bethe (3.58). Logo, o vetor (3.57) é um autoestado da matriz de transferência (3.24) com energia $\Lambda_3(u, u_1, u_2, u_3)$ (C.1).

O n -ésimo estado excitado

Considerando os resultados das subseções anteriores podemos propor a seguinte solução para o problema de autovalores e autovetores da matriz de transferência (3.24): o n -ésimo autoestado excitado é dado por,

$$\begin{aligned} \Phi_n(u_1, \dots, u_n) &= \Psi_n(u_1, \dots, u_n) \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell_1 < \dots < \ell_{n-k}=1}^n g_{\ell_1, \dots, \ell_{n-k}}^{(k)}(u_1, \dots, u_n) &\Psi_k(u_1, \dots, \hat{u}_{\ell_1}, \dots, \hat{u}_{\ell_{n-k}}, \dots, u_n), \end{aligned} \quad (3.61)$$

em que os vetores Ψ_n são obtidos por meio da relação de recorrência (3.32) e os coeficientes são dados por,

$$g_{\ell_1, \dots, \ell_{n-k}}^{(k)}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{m \in \bar{\ell}} g(u_m) \prod_{m' \in \bar{\ell}, m' < m} s(u_{m'}, u_m) \prod_{m''=1, m'' \notin \bar{\ell}}^n a_{21}(u_m, u_{m''}) \tilde{\Omega}_{m, m''} \quad (3.62)$$

sendo $\bar{\ell} = \{\ell_1, \dots, \ell_{n-k}\}$ e

$$\tilde{\Omega}_{m, m''} = \begin{cases} \Omega(u_m, u_{m''}), & \text{if } m > m'' \\ 1, & \text{de outro modo.} \end{cases} \quad (3.63)$$

Os autovalores correspondentes são escritos como,

$$\Lambda_n(u, u_1, \dots, u_n) = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha(u) \Delta_\alpha(u) \prod_{j=1}^n a_{\alpha 1}(u, u_j), \quad (3.64)$$

enquanto as raízes de Bethe devem satisfazer,

$$\frac{\Delta_1(u_j)}{\Delta_2(u_j)} = -\Theta(u_j) \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{a_{21}(u_j, u_k)}{a_{11}(u_j, u_k)}, \quad (3.65)$$

para $j = 1, \dots, n$.

4 Conclusão

Nesse trabalho estudamos o problema espectral associado a modelos de seis e dezenove vértices com fronteiras triangulares. Vimos que as fronteiras triangulares implicam a presença de operadores de aniquilação na expressão da matriz de transferência, o que dificulta consideravelmente a construção dos respectivos autoestados.

Para contornar esse problema, utilizamos uma superposição de estados auxiliares como proposta de autovetores da matriz de transferência. A determinação dos coeficientes de tal combinação linear foi feita por meio da imposição de nulidade de termos indesejados extras na análise do ansatz de Bethe algébrico. Observamos que os autovalores bem como as equações de Bethe coincidem com aquelas do caso em que as matrizes K são diagonais. Dessa forma, conseguimos construir um genuíno ansatz de Bethe algébrico com matrizes K não diagonais.

Alguns problemas que podem ser estudados com base em nossos resultados incluem,

1. verificação do ansatz $\Phi_n = \sum_{k=0}^n g^{(k)} \Psi_k$ para modelos de vértices associados a álgebras de elevado *rank*, com fronteiras triangulares;
2. obtenção de expressões para o produto escalar e funções de correlação dos estados de Bethe generalizados Φ_n , estendendo assim os resultados de [64];
3. análise do limite semiclássico da solução do ABA, o que pode revelar magnetos de Gaudin generalizados bem como extensões das equações de Knizhnik-Zamolodchikov [65–68];
4. investigação de possíveis aplicações nos chamados processos exclusão assimétricos [69];
5. implementação de um ansatz de Bethe algébrico para modelos de vértices graduados com fronteiras triangulares, em especial aqueles relacionados ao chamado modelo tJ [70–72];
6. implementação de um ansatz de Bethe algébrico para as matrizes K completas.

A Coeficientes da expansão *off-shell* para o modelo de seis vértices

As funções que entram nas equações (2.27,2.28,2.29) são dadas por,

$$F_k(u, u_1, \dots, u_n) = \Delta_1(u_k) a_2(u, u_k) \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^n a_1(u_k, u_\ell) + \Delta_2(u_k) a_3(u, u_k) \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^n b_1(u_k, u_\ell), \quad (\text{A.1})$$

$$G_k(u, u_1, \dots, u_n) = \Delta_1(u_k) b_3(u, u_k) \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^n a_1(u_k, u_\ell) + \Delta_2(u_k) b_2(u, u_k) \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^n b_1(u_k, u_\ell), \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} H_k(u, u_1, \dots, u_n) &= \Delta_1(u) \Delta_1(u_k) [c_2(u, u_k) + c_3(u, u_k)] \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^n a_1(u, u_\ell) a_1(u_k, u_\ell) \\ &+ \Delta_2(u) \Delta_1(u_k) [c_4(u, u_k) + c_6(u, u_k)] \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^n b_1(u, u_\ell) a_1(u_k, u_\ell) \\ &+ \Delta_1(u) \Delta_2(u_k) c_5(u, u_k) \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^n a_1(u, u_\ell) b_1(u_k, u_\ell) \\ &+ \Delta_2(u) \Delta_2(u_k) c_7(u, u_k) \prod_{\ell=1, \ell \neq k}^n b_1(u, u_\ell) b_1(u_k, u_\ell), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} H_{\ell k}(u, u_1, \dots, u_n) &= \Delta_1(u_k) \Delta_1(u_\ell) \alpha_{11}(u, u_k, u_\ell) \prod_{m=1, m \neq \ell, k}^n a_1(u_k, u_m) a_1(u_\ell, u_m) \\ &+ \Delta_1(u_k) \Delta_2(u_\ell) \alpha_{12}(u, u_k, u_\ell) \prod_{m=1, m \neq \ell, k}^n a_1(u_k, u_m) b_1(u_\ell, u_m) \\ &+ \Delta_1(u_\ell) \Delta_2(u_k) \alpha_{21}(u, u_k, u_\ell) \prod_{m=1, m \neq \ell, k}^n a_1(u_\ell, u_m) b_1(u_k, u_m) \\ &+ \Delta_2(u_\ell) \Delta_2(u_k) \alpha_{22}(u, u_k, u_\ell) \prod_{m=1, m \neq \ell, k}^n b_1(u_\ell, u_m) b_1(u_k, u_m), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(u, u_k, u_\ell) &= a_2(u, u_\ell) [a_1(u_k, u) c_2(u, u_k) + c_3(u, u_k) a_1(u_k, u_\ell)] \\ &+ b_3(u, u_\ell) [a_1(u_k, u) c_4(u, u_k) + c_6(u, u_k) a_1(u_k, u_\ell)] \\ &+ a_2(u, u_k) [c_3(u, u_k) a_2(u_k, u_\ell) + c_5(u, u_k) b_3(u_k, u_\ell)] \\ &+ b_3(u, u_k) [c_6(u, u_k) a_2(u_k, u_\ell) + c_7(u, u_k) b_3(u_k, u_\ell)], \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12}(u, u_k, u_\ell) &= a_3(u, u_\ell) [a_1(u_k, u)c_2(u, u_k) + c_3(u, u_k)a_1(u_k, u_\ell)] \\
&+ b_2(u, u_\ell) [a_1(u_k, u)c_4(u, u_k) + c_6(u, u_k)a_1(u_k, u_\ell)] \\
&+ a_2(u, u_k) [c_3(u, u_k)a_3(u_k, u_\ell) + c_5(u, u_k)b_2(u_k, u_\ell)] \\
&+ b_3(u, u_k) [c_6(u, u_k)a_3(u_k, u_\ell) + c_7(u, u_k)b_2(u_k, u_\ell)], \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{21}(u, u_k, u_\ell) &= c_5(u, u_k) [a_2(u, u_\ell)b_1(u_k, u_\ell) + a_3(u, u_k)b_3(u_k, u_\ell)] \\
&+ c_7(u, u_k) [b_3(u, u_\ell)b_1(u_k, u_\ell) + b_2(u, u_k)b_3(u_k, u_\ell)] \\
&+ a_2(u_k, u_\ell) [a_3(u, u_k)c_3(u, u_k) + b_2(u, u_k)c_6(u, u_k)], \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{22}(u, u_k, u_\ell) &= c_5(u, u_k) [a_3(u, u_\ell)b_1(u_k, u_\ell) + a_3(u, u_k)b_2(u_k, u_\ell)] \\
&+ c_7(u, u_k) [b_2(u, u_\ell)b_1(u_k, u_\ell) + b_2(u, u_k)b_2(u_k, u_\ell)] \\
&+ a_3(u_k, u_\ell) [a_3(u, u_k)c_3(u, u_k) + b_2(u, u_k)c_6(u, u_k)]. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

B Relações de comutação para os modelos de dezenove vértices

Nesta seção apresentamos relações de comutação provenientes da equação (3.6). Para maiores detalhes e expressões explícitas para as amplitudes ver por exemplo [30]. Temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(u)\mathcal{B}_1(v) &= a_{11}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_1(u) + a_{12}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_1(v) + a_{13}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_2(v) \\ &+ a_{14}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_1(v) + a_{15}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_3(v) + a_{16}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_1(u), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2(u)\mathcal{B}_1(v) &= a_{21}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_2(u) + a_{22}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_1(v) + a_{23}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_2(v) \\ &+ a_{24}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_1(v) + a_{25}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_2(v) + a_{26}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_1(v) \\ &+ a_{27}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_3(v) + a_{28}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_1(u) + a_{29}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_3(u) \\ &+ a_{210}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_1(u), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3(u)\mathcal{B}_1(v) &= a_{31}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_3(u) + a_{32}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_1(v) + a_{33}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_2(v) \\ &+ a_{34}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_1(v) + a_{35}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_2(v) + a_{36}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_1(v) \\ &+ a_{37}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_3(v) + a_{38}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_1(u) + a_{39}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_3(u) \\ &+ a_{310}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_1(u) + a_{311}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_2(u), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(u)\mathcal{B}_1(v) &= c_{11}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{C}_1(u) + c_{12}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{C}_3(u) + c_{13}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{C}_3(v) \\ &+ c_{14}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{C}_3(v) + c_{15}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_2(u) + c_{16}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_1(u) \\ &+ c_{17}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_2(u) + c_{18}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_1(v) + c_{19}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_2(v) \\ &+ c_{110}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_1(v) + c_{111}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_2(v), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2(u)\mathcal{B}_1(v) &= y_{11}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{C}_2(u) + y_{12}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{C}_2(u) + y_{13}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{C}_2(v) \\ &+ y_{14}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{C}_2(v) + y_{15}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{C}_1(u) + y_{16}(u, v)\mathcal{D}_2(v)\mathcal{C}_1(u) \\ &+ y_{17}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{C}_3(u) + y_{18}(u, v)\mathcal{D}_2(v)\mathcal{C}_3(u) + y_{19}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{C}_1(v) \\ &+ y_{110}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{C}_1(v) + y_{111}(u, v)\mathcal{D}_3(u)\mathcal{C}_1(v) + y_{112}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{C}_3(v) \\ &+ y_{113}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{C}_3(v) + y_{114}(u, v)\mathcal{D}_3(u)\mathcal{C}_3(v), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_3(u)\mathcal{B}_1(v) &= c_{21}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{C}_1(u) + c_{22}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{C}_3(u) + c_{23}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{C}_3(v) \\
&+ c_{24}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{C}_3(v) + c_{25}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_2(u) + c_{26}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_1(u) \\
&+ c_{27}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_2(u) + c_{28}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_3(u) + c_{29}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ c_{210}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_2(v) + c_{211}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_1(v) + c_{212}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_2(v) \\
&+ c_{213}(u, v)\mathcal{D}_3(u)\mathcal{D}_1(v) + c_{214}(u, v)\mathcal{D}_3(u)\mathcal{D}_2(v), \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_1(v) &= e_{01}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{B}_1(u) + e_{02}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_2(u) + e_{03}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_1(u) \\
&+ e_{04}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_1(v) + e_{05}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_2(v), \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_3(v) &= d_{11}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{B}_1(u) + d_{12}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{B}_1(u) + d_{13}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_1(u) \\
&+ d_{14}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_2(u) + d_{15}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_1(v) + d_{16}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_2(v) \\
&+ d_{17}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_3(v), \tag{B.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1(u)\mathcal{B}_2(v) &= b_{11}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_1(u) + b_{12}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_1(v) + b_{13}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_2(v) \\
&+ b_{14}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_3(v) + b_{15}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_1(v) + b_{16}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_3(v), \tag{B.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_2(u)\mathcal{B}_2(v) &= b_{21}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_2(u) + b_{22}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_1(v) + b_{23}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_2(v) \\
&+ b_{24}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_3(v) + b_{25}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_1(v) + b_{26}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_3(v) \\
&+ b_{27}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{B}_1(v) + b_{28}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{B}_3(v) + b_{29}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_1(u), \tag{B.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_3(u)\mathcal{B}_2(v) &= b_{31}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_3(v) + b_{32}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_1(v) + b_{33}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_2(v) \\
&+ b_{34}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_3(u) + b_{35}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_1(v) + b_{36}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_3(v) \\
&+ b_{37}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{B}_1(v) + b_{38}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{B}_3(v) + b_{39}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_1(u) \\
&+ b_{310}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_2(u), \tag{B.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(u)\mathcal{B}_2(v) &= Y_{11}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_1(u) + Y_{12}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_3(u) + Y_{13}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_1(v) \\
&+ Y_{14}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_3(v) + Y_{15}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_1(u) + Y_{16}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_2(u) \\
&+ Y_{17}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{D}_1(u) + Y_{18}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{D}_2(u) + Y_{19}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ Y_{110}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_2(v) + Y_{111}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_3(v) + Y_{112}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ Y_{113}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_2(v) + Y_{114}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_3(v), \tag{B.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_2(u)\mathcal{B}_2(v) &= c_{31}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_3(v) + c_{32}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_2(v) + c_{33}(u, v)\mathcal{D}_3(u)\mathcal{D}_3(v) \\
&+ c_{34}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_2(v) + c_{35}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{C}_1(v) + c_{36}(u, v)\mathcal{D}_2(v)\mathcal{D}_3(u) \\
&+ c_{37}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_2(v) + c_{38}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_3(u) + c_{39}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_2(u) \\
&+ c_{310}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{C}_1(u) + c_{311}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{C}_1(v) + c_{312}(u, v)\mathcal{D}_3(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ c_{313}(u, v)\mathcal{D}_3(v)\mathcal{D}_1(u) + c_{314}(u, v)\mathcal{D}_2(v)\mathcal{D}_2(u) + c_{315}(u, v)\mathcal{D}_3(u)\mathcal{D}_2(v) \\
&+ c_{316}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_3(v) + c_{317}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_2(u) + c_{318}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_1(u) \\
&+ c_{319}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_1(v) + c_{320}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_1(v) + c_{321}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{C}_3(u) \\
&+ c_{322}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{C}_1(u) + c_{323}(u, v)\mathcal{D}_2(v)\mathcal{D}_1(u) + c_{324}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{C}_3(u) \\
&+ c_{325}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{C}_3(v), \tag{B.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_3(u)\mathcal{B}_2(v) &= Y_{21}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_3(u) + Y_{22}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_1(u) + Y_{23}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_1(v) \\
&+ Y_{24}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_3(v) + Y_{25}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_1(u) + Y_{26}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_2(u) \\
&+ Y_{27}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_3(u) + Y_{28}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{D}_1(u) + Y_{29}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{D}_2(u) \\
&+ Y_{210}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{D}_3(u) + Y_{211}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_1(v) + Y_{212}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_2(v) \\
&+ Y_{213}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_3(v) + Y_{214}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_1(v) + Y_{215}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_2(v) \\
&+ Y_{216}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_3(v), \tag{B.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1(u)\mathcal{B}_3(v) &= x_{11}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{D}_1(u) + x_{12}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_1(u) + x_{13}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ x_{14}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_2(v) + x_{15}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_3(v) + x_{16}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_1(v) \\
&+ x_{17}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_3(v) + x_{18}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_1(u), \tag{B.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_2(u)\mathcal{B}_3(v) &= x_{21}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{D}_2(u) + x_{22}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_2(u) + x_{23}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ x_{24}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_2(v) + x_{25}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_3(v) + x_{26}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ x_{27}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_2(v) + x_{28}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_3(v) + x_{29}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_1(v) \\
&+ x_{210}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_3(v) + x_{211}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_1(u) + x_{212}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_3(u), \tag{B.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_3(u)\mathcal{B}_3(v) &= x_{31}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{D}_3(u) + x_{32}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_3(u) + x_{33}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ x_{34}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_2(v) + x_{35}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{D}_3(v) + x_{36}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ x_{37}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_2(v) + x_{38}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{D}_3(v) + x_{39}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_1(v) \\
&+ x_{310}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_3(v) + x_{311}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_1(u) + x_{312}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_3(u) \\
&+ x_{313}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{D}_1(u) + x_{314}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{D}_1(u), \tag{B.17}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_2(u)\mathcal{B}_1(v) = e_{11}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{B}_2(u) + e_{12}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{B}_1(u) + e_{13}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{B}_3(u), \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_2(v) &= e_{21}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{B}_1(u) + e_{22}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{B}_3(u) + e_{23}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{B}_2(u) \\
&+ e_{24}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{B}_2(u), \tag{B.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_2(u)\mathcal{B}_3(v) &= e_{31}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{B}_2(u) + e_{32}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{B}_2(u) + e_{33}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{B}_1(u) \\
&+ e_{34}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{B}_3(u), \tag{B.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(u)\mathcal{B}_3(v) &= C_{21}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{C}_1(u) + C_{22}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{C}_1(u) + C_{23}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{C}_1(v) \\
&+ C_{24}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{C}_3(v) + C_{25}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_2(u) + C_{26}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_1(u) \\
&+ C_{27}(u, v)\mathcal{D}_2(v)\mathcal{D}_1(u) + C_{28}(u, v)\mathcal{D}_3(v)\mathcal{D}_1(u) + C_{29}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ C_{210}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_1(v) + C_{211}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_2(v) + C_{212}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_2(v) \\
&+ C_{213}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_3(v) + C_{214}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_3(v), \tag{B.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_3(u)\mathcal{B}_3(v) &= c_{41}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_2(u) + c_{42}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_2(v) + c_{43}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ c_{44}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{C}_1(v) + c_{45}(u, v)\mathcal{D}_2(v)\mathcal{D}_3(u) + c_{46}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{C}_1(u) \\
&+ c_{47}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{C}_2(u) + c_{48}(u, v)\mathcal{D}_3(u)\mathcal{D}_1(v) + c_{49}(u, v)\mathcal{D}_2(v)\mathcal{D}_1(u) \\
&+ c_{410}(u, v)\mathcal{D}_3(u)\mathcal{D}_2(v) + c_{411}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{C}_3(u) + c_{412}(u, v)\mathcal{D}_2(v)\mathcal{D}_2(u) \\
&+ c_{413}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{C}_1(u) + c_{414}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_3(v) + c_{415}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_3(u) \\
&+ c_{416}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_2(v) + c_{417}(u, v)\mathcal{D}_1(v)\mathcal{D}_1(u) + c_{418}(u, v)\mathcal{D}_1(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ c_{419}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{C}_2(v) + c_{420}(u, v)\mathcal{D}_3(v)\mathcal{D}_1(u) + c_{421}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{C}_3(v) \\
&+ c_{422}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{C}_3(u) + c_{423}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{C}_1(v) + c_{424}(u, v)\mathcal{D}_3(u)\mathcal{D}_3(v) \\
&+ c_{425}(u, v)\mathcal{D}_2(u)\mathcal{D}_3(v), \tag{B.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_3(u)\mathcal{B}_1(v) &= d_{21}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{B}_3(u) + d_{22}(u, v)\mathcal{B}_1(v)\mathcal{B}_1(u) + d_{23}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_1(u) \\
&+ d_{24}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_2(u) + d_{25}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_3(u) + d_{26}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_1(v) \\
&+ d_{27}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_2(v), \tag{B.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_3(u)\mathcal{B}_3(v) &= f_{01}(u, v)\mathcal{B}_3(v)\mathcal{B}_3(u) + f_{02}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_1(v) + f_{03}(u, v)\mathcal{B}_1(u)\mathcal{B}_3(v) \\
&+ f_{04}(u, v)\mathcal{B}_3(u)\mathcal{B}_1(v) + f_{05}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_1(v) + f_{06}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_1(u) \\
&+ f_{07}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_2(v) + f_{08}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_2(u) + f_{09}(u, v)\mathcal{B}_2(u)\mathcal{D}_3(v) \\
&+ f_{010}(u, v)\mathcal{B}_2(v)\mathcal{D}_3(u). \tag{B.24}
\end{aligned}$$

Aqui escrevemos explicitamente apenas as amplitudes que aparecem na solução final. Para o modelo de ZF temos,

$$a_{11}(u, v) = \frac{\sinh(u+v)\sinh(u-v-\eta)}{\sinh(u-v)\sinh(u+v+\eta)}, \tag{B.25}$$

$$a_{21}(u, v) = \frac{\sinh(u+v)\sinh(u-v-\eta)\sinh(u-v+\frac{\eta}{2})\sinh(u+v+\frac{3\eta}{2})}{\sinh(u-v)\sinh(u-v-\frac{\eta}{2})\sinh(u+v+\frac{\eta}{2})\sinh(u+v+\eta)}, \tag{B.26}$$

$$a_{31}(u, v) = \frac{\sinh(u-v+\frac{\eta}{2})\sinh(u+v+\frac{3\eta}{2})}{\sinh(u-v-\frac{\eta}{2})\sinh(u+v+\frac{\eta}{2})}, \tag{B.27}$$

$$e_{01}(u, v) = \frac{\sinh(u-v-\eta)\sinh(u-v+\frac{\eta}{2})}{\sinh(u-v-\frac{\eta}{2})\sinh(u-v+\eta)}, \tag{B.28}$$

$$e_{04}(u, v) = \frac{\sinh(2v)\sinh(\eta)}{\sinh(u-v-\frac{\eta}{2})\sinh(2v+\eta)}, \quad e_{05}(u, v) = -\frac{\sinh(\eta)}{\sinh(u+v+\frac{\eta}{2})}, \tag{B.29}$$

e, para a solução IK solution, temos,

$$a_{11}(u, v) = \frac{\sinh(u+v)\sinh(u-v-\eta)}{\sinh(u-v)\sinh(u+v+\eta)}, \tag{B.30}$$

$$a_{21}(u, v) = \frac{\sinh(u-v+\eta)\sinh(u+v+2\eta)\cosh(u-v-\frac{\eta}{2})\cosh(u+v+\frac{\eta}{2})}{\sinh(u-v)\sinh(u+v+\eta)\cosh(u-v+\frac{\eta}{2})\cosh(u+v+\frac{3\eta}{2})}, \tag{B.31}$$

$$a_{31}(u, v) = \frac{\cosh(u-v+\frac{3\eta}{2})\cosh(u+v+\frac{5\eta}{2})}{\cosh(u-v+\frac{\eta}{2})\cosh(u+v+\frac{3\eta}{2})}, \tag{B.32}$$

$$e_{01}(u, v) = \frac{\cosh(u-v-\frac{\eta}{2})}{\cosh(u-v+\frac{\eta}{2})}, \tag{B.33}$$

$$e_{04}(u, v) = \frac{e^\eta\sinh(2v)\sinh(\eta)}{\cosh(u-v+\frac{\eta}{2})\sinh(2v+\eta)}, \quad e_{05}(u, v) = -\frac{e^\eta\sinh(\eta)}{\cosh(u+v+\frac{3\eta}{2})}. \tag{B.34}$$

C Coeficientes da expansão *off-shell* para o modelo de dezenove vértices

As funções que definem a equação (3.35) são dadas por,

$$\Lambda_n(u, u_1, \dots, u_n) = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha(u) \Delta_\alpha(u) \prod_{j=1}^n a_{\alpha 1}(u, u_j), \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_j^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n) \\ = & \left\{ \prod_{p=1, p < j}^n \Omega(u_j, u_p) \right\} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \Delta_\alpha(u_j) Q_\alpha^{\mathcal{F}}(u, u_j) \prod_{m=1, m \neq j}^n a_{\alpha 1}(u_j, u_m) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_j^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n) \\ = & \left\{ \prod_{p=1, p < j}^n \Omega(u_j, u_p) \right\} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \Delta_\alpha(u_j) Q_\alpha^{\mathcal{G}}(u, u_j) \prod_{m=1, m \neq j}^n a_{\alpha 1}(u_j, u_m) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{jk}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n) &= \left\{ \prod_{p=1, p < j}^n \Omega(u_j, u_p) \right\} \left\{ \prod_{q=1, q < k, q \neq j}^n \Omega(u_k, u_q) \right\} \\ &\times \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Delta_\alpha(u_j) \Delta_\beta(u_k) Q_{\alpha\beta}^{\mathcal{H}}(u, u_j, u_k) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j, k}}^n a_{\alpha 1}(u_j, u_m) a_{\beta 1}(u_k, u_m) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

com as funções auxiliares Q dadas por,

$$Q_1^{\mathcal{F}}(u, u_j) = \sum_{q=1}^3 \omega_q(u) a_{q2}(u, u_j), \quad Q_2^{\mathcal{F}}(u, u_j) = \sum_{q=1}^3 \omega_q(u) a_{q3}(u, u_j), \quad (\text{C.5})$$

$$Q_1^{\mathcal{G}}(u, u_j) = \sum_{q=2}^3 \omega_q(u) a_{q4}(u, u_j), \quad Q_2^{\mathcal{G}}(u, u_j) = \sum_{q=2}^3 \omega_q(u) a_{q5}(u, u_j), \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned}
Q_{11}^{\mathcal{H}}(u, u_j, u_k) &= \omega_1(u) \{a_{11}(u, u_j)a_{12}(u, u_k)e_{03}(u_j, u) + a_{14}(u, u_j) [c_{16}(u_j, u_k) \\
&+ c_{18}(u_j, u_k)] + a_{15}(u, u_j) [c_{26}(u_j, u_k) + c_{29}(u_j, u_k)] \\
&- b_{12}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)\} \\
&+ \omega_2(u) \{a_{21}(u, u_j) [a_{22}(u, u_k)e_{03}(u_j, u) + a_{24}(u, u_k)d_{13}(u_j, u)] \\
&+ a_{26}(u, u_j) [c_{16}(u_j, u_k) + c_{18}(u_j, u_k)] + a_{27}(u, u_j) [c_{26}(u_j, u_k) \\
&+ c_{29}(u_j, u_k)] - b_{22}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)\} \\
&+ \omega_3(u) \{a_{31}(u, u_j) [a_{32}(u, u_k)e_{03}(u_j, u) + a_{34}(u, u_k)d_{13}(u_j, u)] \\
&+ a_{36}(u, u_j) [c_{16}(u_j, u_k) + c_{18}(u_j, u_k)] + a_{37}(u, u_j) [c_{26}(u_j, u_k) \\
&+ c_{29}(u_j, u_k)] - b_{32}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)\}, \tag{C.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{12}^{\mathcal{H}}(u, u_j, u_k) &= \omega_1(u) \{a_{11}(u, u_j)a_{13}(u, u_k)e_{03}(u_j, u) + a_{14}(u, u_j)c_{19}(u_j, u_k) \\
&+ a_{15}(u, u_j)c_{210}(u_j, u_k) - b_{12}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)\} \\
&+ \omega_2(u) \{a_{21}(u, u_j) [a_{23}(u, u_k)e_{03}(u_j, u) + a_{25}(u, u_k)d_{13}(u_j, u)] \\
&+ a_{26}(u, u_j)c_{19}(u_j, u_k) + a_{27}(u, u_j)c_{210}(u_j, u_k) - b_{22}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)\} \\
&+ \omega_3(u) \{a_{31}(u, u_j) [a_{33}(u, u_k)e_{03}(u_j, u) + a_{35}(u, u_k)d_{13}(u_j, u)] \\
&+ a_{36}(u, u_j)c_{19}(u_j, u_k) + a_{37}(u, u_j)c_{210}(u_j, u_k) - b_{32}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)\}, \tag{C.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{21}^{\mathcal{H}}(u, u_j, u_k) &= \omega_1(u) \{a_{11}(u, u_j)a_{12}(u, u_k)e_{02}(u_j, u) + a_{14}(u, u_j) [c_{17}(u_j, u_k) \\
&+ c_{110}(u_j, u_k)] + a_{15}(u, u_j) [c_{27}(u_j, u_k) + c_{211}(u_j, u_k)] \\
&- b_{13}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)\} \\
&+ \omega_2(u) \{a_{21}(u, u_j) [a_{22}(u, u_k)e_{02}(u_j, u) + a_{24}(u, u_k)d_{14}(u_j, u)] \\
&+ a_{26}(u, u_j) [c_{17}(u_j, u_k) + c_{110}(u_j, u_k)] + a_{27}(u, u_j) [c_{27}(u_j, u_k) \\
&+ c_{211}(u_j, u_k)] - b_{23}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)\} \\
&+ \omega_3(u) \{a_{31}(u, u_j) [a_{32}(u, u_k)e_{02}(u_j, u) + a_{34}(u, u_k)d_{14}(u_j, u)] \\
&+ a_{36}(u, u_j) [c_{17}(u_j, u_k) + c_{110}(u_j, u_k)] + a_{37}(u, u_j) [c_{27}(u_j, u_k) \\
&+ c_{211}(u_j, u_k)] - b_{33}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)\}, \tag{C.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{22}^{\mathcal{H}}(u, u_j, u_k) &= \omega_1(u) \{a_{11}(u, u_j)a_{13}(u, u_k)e_{02}(u_j, u) + a_{14}(u, u_j)c_{111}(u_j, u_k) \\
&+ a_{15}(u, u_j)c_{212}(u_j, u_k) - b_{13}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)\} \\
&+ \omega_2(u) \{a_{21}(u, u_j) [a_{23}(u, u_k)e_{02}(u_j, u) + a_{25}(u, u_k)d_{14}(u_j, u)] \\
&+ a_{26}(u, u_j)c_{111}(u_j, u_k) + a_{27}(u, u_j)c_{212}(u_j, u_k) - b_{23}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)\} \\
&+ \omega_3(u) \{a_{31}(u, u_j) [a_{33}(u, u_k)e_{02}(u_j, u) + a_{35}(u, u_k)d_{14}(u_j, u)] \\
&+ a_{36}(u, u_j)c_{111}(u_j, u_k) + a_{37}(u, u_j)c_{212}(u_j, u_k) - b_{33}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)\}.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Para a expansão (3.36) temos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_j^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n) &= \left\{ \prod_{p=1, p < j}^n \Omega(u_j, u_p) \right\} \\
&\times \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^2 \Delta_{\alpha}(u) \Delta_{\beta}(u_j) Q_{\alpha\beta}^{\mathcal{T}}(u, u_j) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n a_{\alpha 1}(u, u_m) a_{\beta 1}(u_j, u_m) \right\},
\end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{jk}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n) &= \left\{ \prod_{p=1, p < j}^n \Omega(u_j, u_p) \right\} \left\{ \prod_{q=1, q < k, q \neq j}^n \Omega(u_k, u_q) \right\} \\
&\times \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\substack{\beta=1 \\ \gamma=1}}^2 \Delta_{\alpha}(u) \Delta_{\beta}(u_j) \Delta_{\gamma}(u_k) Q_{\alpha\beta\gamma}^{\mathcal{U}}(u, u_j, u_k) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j, k}}^n a_{\alpha 1}(u, u_m) a_{\beta 1}(u_j, u_m) a_{\gamma 1}(u_k, u_m) \right\}
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{jk}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n) &= \left\{ \prod_{p=1, p < j}^n \Omega(u_j, u_p) \right\} \left\{ \prod_{q=1, q < k, q \neq j}^n \Omega(u_k, u_q) \right\} \\
&\times \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Delta_{\alpha}(u_j) \Delta_{\beta}(u_k) Q_{\alpha\beta}^{\mathcal{V}}(u, u_j, u_k) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j, k}}^n a_{\alpha 1}(u_j, u_m) a_{\beta 1}(u_k, u_m) \right\}
\end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{jk}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n) &= \left\{ \prod_{p=1, p < j}^n \Omega(u_j, u_p) \right\} \left\{ \prod_{q=1, q < k, q \neq j}^n \Omega(u_k, u_q) \right\} \\
&\times \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Delta_{\alpha}(u_j) \Delta_{\beta}(u_k) Q_{\alpha\beta}^{\mathcal{W}}(u, u_j, u_k) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j, k}}^n a_{\alpha 1}(u_j, u_m) a_{\beta 1}(u_k, u_m) \right\}
\end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{X}_{jkl}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n) = \\
& \left\{ \prod_{p=1, p < j}^n \Omega(u_j, u_p) \right\} \left\{ \prod_{q=1, q < k, q \neq j}^n \Omega(u_k, u_q) \right\} \left\{ \prod_{r=1, r < \ell, r \neq j, k}^n \Omega(u_\ell, u_r) \right\} \\
& \times \left\{ \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^2 \Delta_\alpha(u_j) \Delta_\beta(u_k) \Delta_\gamma(u_\ell) Q_{\alpha\beta\gamma}^{\mathcal{X}}(u, u_j, u_k, u_\ell) \times \right. \\
& \left. \prod_{m=1, m \neq j, k, \ell}^n a_{\alpha 1}(u_j, u_m) a_{\beta 1}(u_k, u_m) a_{\gamma 1}(u_\ell, u_m) \right\}, \tag{C.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Y}_{jkl}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n) = \\
& \left\{ \prod_{p=1, p < j}^n \Omega(u_j, u_p) \right\} \left\{ \prod_{q=1, q < k, q \neq j}^n \Omega(u_k, u_q) \right\} \left\{ \prod_{r=1, r < \ell, r \neq j, k}^n \Omega(u_\ell, u_r) \right\} \\
& \times \left\{ \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^2 \Delta_\alpha(u_j) \Delta_\beta(u_k) \Delta_\gamma(u_\ell) Q_{\alpha\beta\gamma}^{\mathcal{Y}}(u, u_j, u_k, u_\ell) \times \right. \\
& \left. \prod_{m=1, m \neq j, k, \ell}^n a_{\alpha 1}(u_j, u_m) a_{\beta 1}(u_k, u_m) a_{\gamma 1}(u_\ell, u_m) \right\}, \tag{C.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Z}_{jkl}^{(n)}(u, u_1, \dots, u_n) = \\
& \left\{ \prod_{p=1, p < j}^n \Omega(u_j, u_p) \right\} \left\{ \prod_{q=1, q < k, q \neq j}^n \Omega(u_k, u_q) \right\} \left\{ \prod_{r=1, r < \ell, r \neq j, k}^n \Omega(u_\ell, u_r) \right\} \\
& \times \left\{ \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^2 \Delta_\alpha(u_j) \Delta_\beta(u_k) \Delta_\gamma(u_\ell) Q_{\alpha\beta\gamma}^{\mathcal{Z}}(u, u_j, u_k, u_\ell) \times \right. \\
& \left. \prod_{m=1, m \neq j, k, \ell}^n a_{\alpha 1}(u_j, u_m) a_{\beta 1}(u_k, u_m) a_{\gamma 1}(u_\ell, u_m) \right\}. \tag{C.17}
\end{aligned}$$

Temos,

$$Q_{11}^{\mathcal{T}}(u, u_j) = k_{12}^+(u)[c_{16}(u, u_j) + c_{18}(u, u_j)] + k_{23}^+(u)[c_{26}(u, u_j) + c_{29}(u, u_j)], \tag{C.18}$$

$$Q_{12}^{\mathcal{T}}(u, u_j) = k_{12}^+(u)c_{19}(u, u_j) + k_{23}^+(u)c_{210}(u, u_j), \tag{C.19}$$

$$Q_{21}^{\mathcal{T}}(u, u_j) = k_{12}^+(u)[c_{110}(u, u_j) + c_{17}(u, u_j)] + k_{23}^+(u)[c_{211}(u, u_j) + c_{27}(u, u_j)], \tag{C.20}$$

$$Q_{22}^{\mathcal{T}}(u, u_j) = k_{12}^+(u)c_{111}(u, u_j) + k_{23}^+(u)c_{212}(u, u_j), \tag{C.21}$$

$$Q_{31}^T(u, u_j) = k_{23}^+(u)[c_{213}(u, u_j) + c_{28}(u, u_j)], \quad Q_{32}^T(u, u_j) = k_{23}^+(u)c_{214}(u, u_j), \quad (C.22)$$

$$\begin{aligned} Q_{111}^U(u, u_j, u_k) = & \\ & k_{13}^+(u) [y_{15}(u, u_j) (c_{16}(u, u_k) + c_{18}(u, u_k)) + y_{19}(u, u_j) (c_{16}(u_j, u_k) + c_{18}(u_j, u_k)) \\ & + y_{112}(u, u_j) (c_{26}(u_j, u_k) + c_{29}(u_j, u_k)) + y_{17}(u, u_j) (c_{26}(u, u_k) + c_{29}(u, u_k)) \\ & - e_{04}(u_j, u_k) (c_{318}(u, u_j) + c_{319}(u, u_j))], \end{aligned} \quad (C.23)$$

$$\begin{aligned} Q_{112}^U(u, u_j, u_k) = & k_{13}^+(u) [c_{19}(u, u_k) y_{15}(u, u_j) + y_{19}(u, u_j) c_{19}(u_j, u_k) \\ & + y_{112}(u, u_j) c_{210}(u_j, u_k) + c_{210}(u, u_k) y_{17}(u, u_j) \\ & - e_{05}(u_j, u_k) (c_{318}(u, u_j) + c_{319}(u, u_j))], \end{aligned} \quad (C.24)$$

$$\begin{aligned} Q_{121}^U(u, u_j, u_k) = & \\ & k_{13}^+(u) [y_{19}(u, u_j) (c_{110}(u_j, u_k) + c_{17}(u_j, u_k)) + y_{16}(u, u_j) (c_{16}(u, u_k) + c_{18}(u, u_k)) \\ & + y_{112}(u, u_j) (c_{211}(u_j, u_k) + c_{27}(u_j, u_k)) + y_{18}(u, u_j) (c_{26}(u, u_k) + c_{29}(u, u_k)) \\ & - e_{04}(u_j, u_k) (c_{323}(u, u_j) + c_{37}(u, u_j))], \end{aligned} \quad (C.25)$$

$$\begin{aligned} Q_{122}^U(u, u_j, u_k) = & k_{13}^+(u) [y_{19}(u, u_j) c_{111}(u_j, u_k) + c_{19}(u, u_k) y_{16}(u, u_j) \\ & + c_{210}(u, u_k) y_{18}(u, u_j) + y_{112}(u, u_j) c_{212}(u_j, u_k) \\ & - e_{05}(u_j, u_k) (c_{323}(u, u_j) + c_{37}(u, u_j))], \end{aligned} \quad (C.26)$$

$$\begin{aligned} Q_{211}^U(u, u_j, u_k) = & \\ & k_{13}^+(u) [y_{15}(u, u_j) (c_{110}(u, u_k) + c_{17}(u, u_k)) + y_{110}(u, u_j) (c_{16}(u_j, u_k) + c_{18}(u_j, u_k)) \\ & + y_{17}(u, u_j) (c_{211}(u, u_k) + c_{27}(u, u_k)) + y_{113}(u, u_j) (c_{26}(u_j, u_k) + c_{29}(u_j, u_k)) \\ & - e_{04}(u_j, u_k) (c_{320}(u, u_j) + c_{39}(u, u_j))], \end{aligned} \quad (C.27)$$

$$\begin{aligned} Q_{212}^U(u, u_j, u_k) = & k_{13}^+(u) [c_{111}(u, u_k) y_{15}(u, u_j) + y_{110}(u, u_j) c_{19}(u_j, u_k) \\ & + y_{113}(u, u_j) c_{210}(u_j, u_k) + c_{212}(u, u_k) y_{17}(u, u_j) \\ & - e_{05}(u_j, u_k) (c_{320}(u, u_j) + c_{39}(u, u_j))], \end{aligned} \quad (C.28)$$

$$\begin{aligned} Q_{221}^U(u, u_j, u_k) = & \\ & k_{13}^+(u) [y_{110}(u, u_j) (c_{110}(u_j, u_k) + c_{17}(u_j, u_k)) + y_{16}(u, u_j) (c_{110}(u, u_k) + c_{17}(u, u_k)) \\ & + y_{113}(u, u_j) (c_{211}(u_j, u_k) + c_{27}(u_j, u_k)) + y_{18}(u, u_j) (c_{211}(u, u_k) + c_{27}(u, u_k)) \\ & - e_{04}(u_j, u_k) (c_{314}(u, u_j) + c_{34}(u, u_j))], \end{aligned} \quad (C.29)$$

$$\begin{aligned}
Q_{222}^{\mathcal{U}}(u, u_j, u_k) &= k_{13}^+(u) [y_{110}(u, u_j) c_{111}(u_j, u_k) + c_{111}(u, u_k) y_{16}(u, u_j) \\
&+ y_{113}(u, u_j) c_{212}(u_j, u_k) + c_{212}(u, u_k) y_{18}(u, u_j) \\
&- e_{05}(u_j, u_k) (c_{314}(u, u_j) + c_{34}(u, u_j))], \tag{C.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{311}^{\mathcal{U}}(u, u_j, u_k) &= \\
&k_{13}^+(u) [y_{111}(u, u_j) (c_{16}(u_j, u_k) + c_{18}(u_j, u_k)) + y_{17}(u, u_j) (c_{213}(u, u_k) + c_{28}(u, u_k)) \\
&+ y_{114}(u, u_j) (c_{26}(u_j, u_k) + c_{29}(u_j, u_k)) - e_{04}(u_j, u_k) (c_{312}(u, u_j) + c_{38}(u, u_j))], \tag{C.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{312}^{\mathcal{U}}(u, u_j, u_k) &= k_{13}^+(u) [y_{111}(u, u_j) c_{19}(u_j, u_k) + y_{114}(u, u_j) c_{210}(u_j, u_k) \\
&+ c_{214}(u, u_k) y_{17}(u, u_j) - e_{05}(u_j, u_k) (c_{312}(u, u_j) + c_{38}(u, u_j))], \tag{C.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{321}^{\mathcal{U}}(u, u_j, u_k) &= k_{13}^+(u) [y_{111}(u, u_j) (c_{110}(u_j, u_k) + c_{17}(u_j, u_k)) \\
&+ y_{114}(u, u_j) (c_{211}(u_j, u_k) + c_{27}(u_j, u_k)) + y_{18}(u, u_j) (c_{213}(u, u_k) + c_{28}(u, u_k)) \\
&- e_{04}(u_j, u_k) (c_{315}(u, u_j) + c_{36}(u, u_j))], \tag{C.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{322}^{\mathcal{U}}(u, u_j, u_k) &= k_{13}^+(u) [y_{111}(u, u_j) c_{111}(u_j, u_k) + y_{114}(u, u_j) c_{212}(u_j, u_k) \\
&+ c_{214}(u, u_k) y_{18}(u, u_j) - e_{05}(u_j, u_k) (c_{315}(u, u_j) + c_{36}(u, u_j))], \tag{C.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{11}^{\mathcal{V}}(u, u_j, u_k) = k_{23}^+(u) \\
& \times [a_{11}(u_j, u_k)(a_{12}(u, u_k)c_{29}(u, u_j) + a_{22}(u, u_k)c_{211}(u, u_j) + a_{32}(u, u_k)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{11}(u_j, u)(a_{12}(u, u_k)c_{26}(u, u_j) + a_{22}(u, u_k)c_{27}(u, u_j) + a_{32}(u, u_k)c_{28}(u, u_j)) \\
& + a_{12}(u_j, u_k)(a_{22}(u, u_j)c_{211}(u, u_j) + a_{32}(u, u_j)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{12}(u, u_j)(c_{29}(u, u_j)a_{12}(u_j, u_k) + c_{210}(u, u_j)a_{22}(u_j, u_k)) \\
& + c_{214}(u, u_j)(a_{32}(u, u_j)a_{22}(u_j, u_k) + x_{33}(u, u_j)a_{24}(u_j, u_k)) \\
& + a_{22}(u, u_j)c_{212}(u, u_j)a_{22}(u_j, u_k) \\
& + x_{12}(u_j, u)(a_{24}(u, u_k)c_{27}(u, u_j) + a_{34}(u, u_k)c_{28}(u, u_j)) \\
& + a_{24}(u_j, u_k)(c_{210}(u, u_j)x_{13}(u, u_j) + c_{212}(u, u_j)x_{23}(u, u_j)) \\
& + c_{23}(u, u_j)(c_{26}(u_j, u_k) + c_{29}(u_j, u_k)) - Y_{211}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)] \\
& + k_{12}^+(u)[a_{11}(u_j, u_k)(a_{12}(u, u_k)c_{18}(u, u_j) + a_{22}(u, u_k)c_{110}(u, u_j)) \\
& + a_{11}(u_j, u)a_{12}(u, u_k)c_{16}(u, u_j) \\
& + c_{17}(u, u_j)(a_{11}(u_j, u)a_{22}(u, u_k) + a_{24}(u, u_k)x_{12}(u_j, u)) \\
& + c_{19}(u, u_j)(a_{12}(u, u_j)a_{22}(u_j, u_k) + x_{13}(u, u_j)a_{24}(u_j, u_k)) \\
& + a_{12}(u_j, u_k)(a_{12}(u, u_j)c_{18}(u, u_j) + a_{22}(u, u_j)c_{110}(u, u_j)) \\
& + a_{22}(u, u_j)c_{111}(u, u_j)a_{22}(u_j, u_k) + c_{111}(u, u_j)x_{23}(u, u_j)a_{24}(u_j, u_k) \\
& + c_{13}(u, u_j)(c_{26}(u_j, u_k) + c_{29}(u_j, u_k)) - Y_{19}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)], \tag{C.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{12}^{\mathcal{Y}}(u, u_j, u_k) = k_{23}^+(u) \\
& \times [a_{11}(u_j, u_k)(a_{13}(u, u_k)c_{29}(u, u_j) + a_{23}(u, u_k)c_{211}(u, u_j) + a_{33}(u, u_k)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{11}(u_j, u)(a_{13}(u, u_k)c_{26}(u, u_j) + a_{23}(u, u_k)c_{27}(u, u_j) + a_{33}(u, u_k)c_{28}(u, u_j)) \\
& + a_{12}(u, u_j)(c_{29}(u, u_j)a_{13}(u_j, u_k) + c_{210}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k)) \\
& + a_{13}(u_j, u_k)(a_{22}(u, u_j)c_{211}(u, u_j) + a_{32}(u, u_j)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{22}(u, u_j)c_{212}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k) \\
& + c_{214}(u, u_j)(a_{32}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k) + x_{33}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k)) \\
& + x_{12}(u_j, u)(a_{25}(u, u_k)c_{27}(u, u_j) + a_{35}(u, u_k)c_{28}(u, u_j)) \\
& + a_{25}(u_j, u_k)(c_{210}(u, u_j)x_{13}(u, u_j) + c_{212}(u, u_j)x_{23}(u, u_j)) + c_{23}(u, u_j)c_{210}(u_j, u_k) \\
& - Y_{211}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)] \\
& + k_{12}^+(u)[a_{11}(u_j, u_k)(a_{13}(u, u_k)c_{18}(u, u_j) + a_{23}(u, u_k)c_{110}(u, u_j)) \\
& + a_{11}(u_j, u)a_{13}(u, u_k)c_{16}(u, u_j) \\
& + c_{17}(u, u_j)(a_{11}(u_j, u)a_{23}(u, u_k) + a_{25}(u, u_k)x_{12}(u_j, u)) \\
& + a_{13}(u_j, u_k)(a_{12}(u, u_j)c_{18}(u, u_j) + a_{22}(u, u_j)c_{110}(u, u_j)) \\
& + c_{19}(u, u_j)(a_{12}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k) + x_{13}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k)) \\
& + a_{22}(u, u_j)c_{111}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k) + c_{111}(u, u_j)x_{23}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k) \\
& + c_{13}(u, u_j)c_{210}(u_j, u_k) - Y_{19}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)], \tag{C.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{21}^{\mathcal{V}}(u, u_j, u_k) = k_{23}^+(u) \\
& \times [a_{13}(u, u_j)(c_{29}(u, u_j)a_{12}(u_j, u_k) + c_{210}(u, u_j)a_{22}(u_j, u_k)) \\
& + a_{12}(u, u_k)c_{210}(u, u_j)a_{21}(u_j, u_k) \\
& + a_{12}(u_j, u_k)(a_{23}(u, u_j)c_{211}(u, u_j) + a_{33}(u, u_j)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{21}(u_j, u_k)(a_{22}(u, u_k)c_{212}(u, u_j) + a_{32}(u, u_k)c_{214}(u, u_j)) \\
& + a_{23}(u, u_j)c_{212}(u, u_j)a_{22}(u_j, u_k) + a_{33}(u, u_j)c_{214}(u, u_j)a_{22}(u_j, u_k) \\
& + c_{210}(u, u_j)x_{14}(u, u_j)a_{24}(u_j, u_k) + c_{212}(u, u_j)x_{24}(u, u_j)a_{24}(u_j, u_k) \\
& + c_{214}(u, u_j)x_{34}(u, u_j)a_{24}(u_j, u_k) + c_{23}(u, u_j)(c_{211}(u_j, u_k) + c_{27}(u_j, u_k)) \\
& - Y_{212}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)] \\
& + k_{12}^+(u)[a_{12}(u_j, u_k)(a_{13}(u, u_j)c_{18}(u, u_j) + a_{23}(u, u_j)c_{110}(u, u_j)) \\
& + a_{21}(u_j, u_k)(a_{12}(u, u_k)c_{19}(u, u_j) + a_{22}(u, u_k)c_{111}(u, u_j)) \\
& + a_{22}(u_j, u_k)(a_{13}(u, u_j)c_{19}(u, u_j) + a_{23}(u, u_j)c_{111}(u, u_j)) \\
& + a_{24}(u_j, u_k)(c_{111}(u, u_j)x_{24}(u, u_j) + c_{19}(u, u_j)x_{14}(u, u_j)) \\
& + c_{13}(u, u_j)(c_{211}(u_j, u_k) + c_{27}(u_j, u_k)) - Y_{110}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)], \tag{C.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{22}^{\mathcal{V}}(u, u_j, u_k) = k_{23}^+(u) \\
& \times (+a_{13}(u_j, u_k)(a_{23}(u, u_j)c_{211}(u, u_j) + a_{33}(u, u_j)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{13}(u, u_k)c_{210}(u, u_j)a_{21}(u_j, u_k) \\
& + a_{13}(u, u_j)(c_{29}(u, u_j)a_{13}(u_j, u_k) + c_{210}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k)) \\
& + a_{23}(u, u_k)c_{212}(u, u_j)a_{21}(u_j, u_k) + a_{33}(u, u_k)c_{214}(u, u_j)a_{21}(u_j, u_k) \\
& + a_{33}(u, u_j)c_{214}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k) + a_{23}(u, u_j)c_{212}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k) \\
& + c_{210}(u, u_j)x_{14}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k) + c_{212}(u, u_j)x_{24}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k) \\
& + c_{214}(u, u_j)x_{34}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k) + c_{23}(u, u_j)c_{212}(u_j, u_k) - Y_{212}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)) \\
& + k_{12}^+(u)[a_{21}(u_j, u_k)(a_{13}(u, u_k)c_{19}(u, u_j) + a_{23}(u, u_k)c_{111}(u, u_j)) \\
& + c_{19}(u, u_j)(a_{13}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k) + x_{14}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k)) \\
& + a_{13}(u_j, u_k)(a_{13}(u, u_j)c_{18}(u, u_j) + a_{23}(u, u_j)c_{110}(u, u_j)) \\
& + a_{23}(u, u_j)c_{111}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k) + c_{111}(u, u_j)x_{24}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k) \\
& + c_{13}(u, u_j)c_{212}(u_j, u_k) - Y_{110}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)], \tag{C.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{11}^{\mathcal{W}}(u, u_j, u_k) = k_{23}^+(u) \\
& \times [a_{11}(u_j, u_k)(a_{24}(u, u_k)c_{211}(u, u_j) + a_{34}(u, u_k)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{12}(u_j, u_k)(a_{24}(u, u_j)c_{211}(u, u_j) + a_{34}(u, u_j)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{22}(u_j, u_k)(a_{24}(u, u_j)c_{212}(u, u_j) + a_{34}(u, u_j)c_{214}(u, u_j)) \\
& + x_{11}(u_j, u)(a_{24}(u, u_k)c_{27}(u, u_j) + a_{34}(u, u_k)c_{28}(u, u_j)) \\
& + a_{24}(u_j, u_k)(c_{212}(u, u_j)x_{26}(u, u_j) + c_{214}(u, u_j)x_{36}(u, u_j)) \\
& + c_{24}(u, u_j)(c_{26}(u_j, u_k) + c_{29}(u_j, u_k)) - Y_{214}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)] \\
& + k_{12}^+(u)[a_{24}(u, u_k)(c_{110}(u, u_j)a_{11}(u_j, u_k) + c_{17}(u, u_j)x_{11}(u_j, u)) \\
& + a_{24}(u, u_j)c_{110}(u, u_j)a_{12}(u_j, u_k) \\
& + c_{111}(u, u_j)(a_{24}(u, u_j)a_{22}(u_j, u_k) + x_{26}(u, u_j)a_{24}(u_j, u_k)) \\
& + c_{14}(u, u_j)(c_{26}(u_j, u_k) + c_{29}(u_j, u_k)) - Y_{112}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)], \quad (\text{C.39})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{12}^{\mathcal{W}}(u, u_j, u_k) = k_{23}^+(u) \\
& \times (a_{11}(u_j, u_k)(a_{25}(u, u_k)c_{211}(u, u_j) + a_{35}(u, u_k)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{13}(u_j, u_k)(a_{24}(u, u_j)c_{211}(u, u_j) + a_{34}(u, u_j)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{23}(u_j, u_k)(a_{24}(u, u_j)c_{212}(u, u_j) + a_{34}(u, u_j)c_{214}(u, u_j)) \\
& + x_{11}(u_j, u)(a_{25}(u, u_k)c_{27}(u, u_j) + a_{35}(u, u_k)c_{28}(u, u_j)) \\
& + a_{25}(u_j, u_k)(c_{212}(u, u_j)x_{26}(u, u_j) + c_{214}(u, u_j)x_{36}(u, u_j)) \\
& + c_{24}(u, u_j)c_{210}(u_j, u_k) - Y_{214}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)) \\
& + k_{12}^+(u)[a_{25}(u, u_k)(c_{110}(u, u_j)a_{11}(u_j, u_k) + c_{17}(u, u_j)x_{11}(u_j, u)) \\
& + a_{24}(u, u_j)c_{110}(u, u_j)a_{13}(u_j, u_k) \\
& + c_{111}(u, u_j)(a_{24}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k) + x_{26}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k)) \\
& + c_{14}(u, u_j)c_{210}(u_j, u_k) - Y_{112}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)], \quad (\text{C.40})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{21}^{\mathcal{W}}(u, u_j, u_k) = k_{23}^+(u) \\
& \times [a_{12}(u_j, u_k)(a_{25}(u, u_j)c_{211}(u, u_j) + a_{35}(u, u_j)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{21}(u_j, u_k)(a_{24}(u, u_k)c_{212}(u, u_j) + a_{34}(u, u_k)c_{214}(u, u_j)) \\
& + a_{22}(u_j, u_k)(a_{25}(u, u_j)c_{212}(u, u_j) + a_{35}(u, u_j)c_{214}(u, u_j)) \\
& + a_{24}(u_j, u_k)(c_{212}(u, u_j)x_{27}(u, u_j) + c_{214}(u, u_j)x_{37}(u, u_j)) \\
& + c_{24}(u, u_j)(c_{211}(u_j, u_k) + c_{27}(u_j, u_k)) - Y_{215}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)] \\
& + k_{12}^+(u)[a_{25}(u, u_j)c_{110}(u, u_j)a_{12}(u_j, u_k) \\
& + c_{111}(u, u_j)(a_{24}(u, u_k)a_{21}(u_j, u_k) + a_{25}(u, u_j)a_{22}(u_j, u_k) + x_{27}(u, u_j)a_{24}(u_j, u_k)) \\
& + c_{14}(u, u_j)(c_{211}(u_j, u_k) + c_{27}(u_j, u_k)) - Y_{113}(u, u_j)e_{04}(u_j, u_k)], \tag{C.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q_{22}^{\mathcal{W}}(u, u_j, u_k) = k_{23}^+(u) \\
& \times [a_{13}(u_j, u_k)(a_{25}(u, u_j)c_{211}(u, u_j) + a_{35}(u, u_j)c_{213}(u, u_j)) \\
& + a_{25}(u, u_k)c_{212}(u, u_j)a_{21}(u_j, u_k) + a_{35}(u, u_k)c_{214}(u, u_j)a_{21}(u_j, u_k) \\
& + a_{23}(u_j, u_k)(a_{25}(u, u_j)c_{212}(u, u_j) + a_{35}(u, u_j)c_{214}(u, u_j)) \\
& + c_{212}(u, u_j)x_{27}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k) + c_{214}(u, u_j)x_{37}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k) \\
& + c_{24}(u, u_j)c_{212}(u_j, u_k) - Y_{215}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)] \\
& + k_{12}^+(u)[a_{25}(u, u_j)c_{110}(u, u_j)a_{13}(u_j, u_k) \\
& + c_{111}(u, u_j)(a_{25}(u, u_k)a_{21}(u_j, u_k) + a_{25}(u, u_j)a_{23}(u_j, u_k) + x_{27}(u, u_j)a_{25}(u_j, u_k)) \\
& + c_{14}(u, u_j)c_{212}(u_j, u_k) - Y_{113}(u, u_j)e_{05}(u_j, u_k)]. \tag{C.42}
\end{aligned}$$

Não apresentaremos as expressões explícitas dos polinômios $Q_{jkl}^{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}}$ uma vez que eles não são necessários na determinação dos coeficientes g e tem expressões muito grandes. Uma análise adicional e mais sistemática das relações de comutação pode permitir a escrita de tais funções em uma forma mais tratável.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Itzykson, H. Saleur e J.B. Zuber (eds.) *Conformal Invariance and Applicationsto Statistical Mechanics*, World Scientific, 1988
- [2] F.H. Essler e V. E. Korepin (eds.), *Exactly solvable models of strongly correlated electrons*, World Scientific, 1994.
- [3] N. Beisert *et al.*, “Review of AdS/CFT Integrability: An Overview,” *Lett. Math. Phys.* **99** (2012) 3
- [4] X.-W. Guan, M.T. Batchelor e C. Lee, “Fermi gases in one dimension: From Bethe Ansatz to experiments,” *Rev. Mod. Phys.* **85** (2013) 1633;
- [5] H. Bethe, “Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette. (On the theory of metals. I. Eigenvalues and eigenfunctions of the linear atom chain),” *Zeitschrift fur Physik A* **71** (1931) 205
- [6] B.M. McCoy, *Advanced Statistical Mechanics*, Oxford University Press, 2010
- [7] R.J. Baxter, “Eight-vertex model in lattice statistics,” *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 832;
R.J. Baxter, “One-dimensional anisotropic Heisenberg chain,” *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 834;
R.J. Baxter, “Partition function of the eight-vertex model,” *Ann. Phys.* **70** (1972) 193;
R.J. Baxter, “One-dimensional anisotropic Heisenberg chain,” *Ann. Phys.* **70** (1972) 323
- [8] R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, 1982
- [9] B.M. McCoy e T.T. Wu, “Hydrogen bonded crystals and the anisotropic Heisenberg chain,” *II Nuovo Cimento* **56** (1968) 311
- [10] B. Sutherland, “Two-dimensional hydrogen bonded crystals without the ice rule,” *J. Math. Phys.* **11** (1970) 3183

- [11] E.K. Sklyanin, L.A. Takhtadzhyan e L. D. Faddeev, “Quantum method of the inverse problem I,” *Teor. Mat. Fiz.* **40** (1979) 194;
L.A. Takhtadzhyan e L.D. Faddeev, “The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model,” *Russ. Math. Surv.* **34** (1979) 11
- [12] P.P. Kulish e N. Yu Reshetikhin, “Diagonalisation of $GL(N)$ invariant transfer matrices and quantum N-wave system (Lee model),” *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** (1983) L591
- [13] V.O. Tarasov, “Algebraic Bethe ansatz for the Izergin-Korepin R matrix,” *Theo. Math. Phys.* **76** (1988) 793
- [14] M.J. Martins e P.B. Ramos, “The algebraic Bethe ansatz for rational braid-monoid lattice models,” *Nucl. Phys. B* **500** (1997) 579
- [15] M.J. Martins e P.B. Ramos, “The quantum inverse scattering method for Hubbard-like models,” *Nucl. Phys. B* **522** (1998) 522
- [16] M.J. Martins, “Unified algebraic Bethe ansatz for two-dimensional lattice models,” *Phys. Rev. E* **59** (1999) 7220
- [17] A. Lima-Santos, “On the algebraic Bethe ansatz: periodic boundary conditions,” *J. Stat. Mech.* (2006) P07003
- [18] H.N.V. Temperley e E.H. Lieb, “Relations between the ‘Percolation’ and ‘Colouring’ Problem and other Graph-Theoretical Problems Associated with Regular Planar Lattices: Some Exact Results for the ‘Percolation’ Problem,” *Proc. R. Soc. Lond. A* **322** (1971) 251
- [19] V.V. Bazhanov, “Trigonometric solutions of triangle equations and classical Lie algebras,” *Phys. Lett. B* **159** (1985) 321
- [20] M. Jimbo, “Quantum R matrix for the generalized Toda system,” *Comm. Math. Phys.* **102** (1986) 537
- [21] A. Kuniba, “Quantum R matrix for G_2 and a solvable 175-vertex model,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (1990) 1349

- [22] N. Yu. Reshetikhin, “The functional equation method in the theory of exactly soluble quantum systems,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **84** (1983) 1190
- [23] E.K. Sklyanin, “Goryachev-Chaplygin top and the inverse scattering method,” *J. Sov. Math.* **31** (1985) 3417;
E.K. Sklyanin, “The quantum Toda chain,” *Lecture Notes in Physics* **226** (1985) 196
- [24] E.K. Sklyanin, “Boundary conditions for integrable quantum systems,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** (1988) 2375
- [25] I.V. Cherednik, “Factorizing particles on a half-line and root systems,” *Theo. Math. Phys.* **61** (1984) 977
- [26] L. Mezincescu e R.I. Nepomechie, “Integrable open spin chains with nonsymmetric R-matrices,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991) L17;
L. Mezincescu e R.I. Nepomechie, “Integrability of Open Spin Chains with Quantum Algebra Symmetry,” *Int. J. Mod. Phys. A* **06** (1991) 5231;
L. Mezincescu e R.I. Nepomechie, Addendum to “Integrability of Open Spin Chains with Quantum Algebra Symmetry,” *Int. J. Mod. Phys. A* **07** (1992) 5657
- [27] H. Fan, “Bethe ansatz for the Izergin-Korepin model,” *Nucl. Phys. B* **488** (1997) 409
- [28] X.-W. Guan, “Algebraic Bethe ansatz for the one-dimensional Hubbard model with open boundaries”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000) 5391
- [29] G.-L. Li, R.-H. Yue e B.-Y. Hou, “Nested Bethe ansatz for Perk-Schultz model with open boundary conditions,” *Nucl. Phys. B* **23** (2000) 711
- [30] V. Kurak e A. Lima-Santos, “Algebraic Bethe ansatz for the Zamolodchikov-Fateev and Izergin-Korepin models with open boundary conditions,” *Nucl. Phys. B* **699** (2004) 595
- [31] G.-L. Li e K.-J. Shi, “The algebraic Bethe ansatz for open vertex models,” *J. Stat. Mech.* (2007) P01018

- [32] F.C. Alcaraz, M.N. Barber, M.T. Bachtelor, R.J. Baxter e G.R.W. Quispel, “Surface exponents of the quantum XXZ, Ashkin-Teller and Potts models,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** (1987) 6397;
- [33] J. Cao, H.-Q. Lin, K.-J. Shi e Y. Wang, “Exact solutions and elementary excitations in the XXZ spin chain with unparallel boundary fields,” [arXiv:0212163](https://arxiv.org/abs/0212163);
J. Cao, H.-Q. Lin, K.-J. Shi e Y. Wang, “Exact solution of XXZ spin chain with unparallel boundary fields,” *Nucl. Phys. B* **663** (2003) 487
- [34] A. Doikou, “A note on the boundary spin s XXZ chain,” *Phys. Lett. A* **366** (2007) 556
- [35] C.S. Melo, G.A.P. Ribeiro e M.J. Martins, “Bethe ansatz for the XXX-S chain with non-diagonal open boundaries,” *Nucl. Phys. B* **711** (2005) 565
- [36] R.I. Nepomechie, “Solving the open XXZ spin chain with nondiagonal boundary terms at roots of unity,” *Nucl. Phys. B* **622** (2002) 615
- [37] R.I. Nepomechie, “Functional relations and Bethe Ansatz for the XXZ chain,” *J. Stat. Phys.* **111** (2003) 1363;
R.I. Nepomechie, “Bethe ansatz solution of the open XXZ chain with nondiagonal boundary terms,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 433
- [38] R. Murgan e R.I. Nepomechie, “Bethe Ansatz derived from the functional relations of the open XXZ chain for new special cases” *J. Stat. Mech.* (2005) P05007;
R. Murgan e R.I. Nepomechie, “Generalized T-Q relations and the open XXZ chain,” *J. Stat. Mech.* (2005) P08002
- [39] W.-L. Yang, R.I. Nepomechie e Y.-Z. Zhang, “Q-operator and T-Q relation from the fusion hierarchy,” *Phys. Lett. B* **633** (2006) 664;
R. Murgan, R.I. Nepomechie e C. Shi, “Exact solution of the open XXZ chain with general integrable boundary terms at roots of unity,” *J. Stat. Mech.* (2006) P08006;
L. Frappat, R.I. Nepomechie e E. Ragoucy, “A complete Bethe ansatz solution for the open spin-s XXZ chain with general integrable boundary terms,” *J. Stat. Mech.* (2007) P09009

- [40] H. Frahm, A. Seel e T. Wirth, “Separation of variables in the open XXX chain,” *Nucl. Phys. B* **802** (2008) 351;
 H. Frahm, J.H. Grelik, A. Seel e T. Wirth, “Functional Bethe ansatz methods for the open XXX chain,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 015001
- [41] G. Niccoli, “Non-diagonal open spin-1/2 XXZ quantum chains by separation of variables: Complete spectrum and matrix elements of some quasi-local operators,” *J. Stat. Mech.* (2012) P10025;
 S. Faldella, N. Kitanine e G. Niccoli, “Complete spectrum and scalar products for the open spin-1/2 XXZ quantum chains with non-diagonal boundary terms,” [arXiv:1307.3960](https://arxiv.org/abs/1307.3960)
- [42] W. Galleas, “Functional relations from the Yang-Baxter algebra: Eigenvalues of the XXZ model with non-diagonal twisted and open boundary conditions,” *Nucl. Phys. B* **790** (2008) 524
- [43] P. Baseilhac e K. Koizumi, “Exact spectrum of the XXZ open spin chain from the q-Onsager algebra representation theory,” *J. Stat. Mech.* (2007) P09006;
- [44] J. Cao, W.-L. Yang, K. Shi, e Y. Wang, “Off-diagonal Bethe ansatz solution of the XXX spin-chain with arbitrary boundary conditions,” *Nucl. Phys. B* **875** (2013) 152;
 J. Cao, W. Yang, K. Shi, e Y. Wang, “Off-diagonal Bethe ansatz and exact solution a topological spin ring,” *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 137201;
 J. Cao, W.-L. Yang, K. Shi, e Y. Wang, “Off-diagonal Bethe ansatz solutions of the anisotropic spin-1/2 chains with arbitrary boundary fields,” *Nucl. Phys. B* **877** (2013) 152;
 X. Zhang, J. Cao, W.-L. Yang, K. Shi, Y. Wang, “Exact solution of the one-dimensional super-symmetric t-J model with unparallel boundary fields,” [arXiv:1312.0376](https://arxiv.org/abs/1312.0376)
 Y.-Y. Li, J. Cao, W.-L. Yang, K. Shi, Y. Wang, “Exact solution of the one-dimensional Hubbard model with arbitrary boundary magnetic fields,” *Nucl. Phys. B* **879** (2014) 98;

- J. Cao, W.-L. Yang, K. Shi, Y. Wang, “Nested off-diagonal Bethe ansatz and exact solutions of the $su(n)$ spin chain with generic integrable boundaries,” *J. High Energ. Phys.* JHEP04 (2014) 143
- [45] R.I. Nepomechie, “Inhomogeneous T-Q equation for the open XXX chain with general boundary terms: completeness and arbitrary spin,” [arXiv:1307.5049](https://arxiv.org/abs/1307.5049)
- [46] S. Belliard, N. Crampé e E. Ragoucy, “Algebraic Bethe Ansatz for Open XXX Model with Triangular Boundary Matrices,” *Lett. Math. Phys.* **103** (2013) 493
- [47] N. Crampé e E. Ragoucy, “Generalized coordinate Bethe ansatz for non diagonal boundaries,” *Nucl. Phys. B* **858** (2012) 502
- [48] P. Baseilhac e S. Belliard, “The half-infinite XXZ chain in Onsager’s approach,” *Nucl. Phys. B* **873** (2013) 550
- [49] S. Belliard e N. Crampé, “Heisenberg XXX Model with General Boundaries: Eigenvectors from Algebraic Bethe Ansatz,” *SIGMA* **9** (2013) 072
- [50] A.B. Zamolodchikov e V.A. Fateev, *Sov. J. Nucl. Phys.* *32* (1980) 298
- [51] A.G. Izergin e V.E. Korepin, *Commun. Math. Phys.* *79* (1981) 303
- [52] H.J. de Vega e A.G. Ruiz, “Boundary K-matrices for the six vertex and the $n(2n-1)A_{n-1}$ vertex models,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993) L519
- [53] S. Ghoshal e A. Zamolodchikov, “Boundary S-Matrix and Boundary State in Two-Dimensional Integrable Quantum Field Theory,” *Int. J. Mod. Phys. A* **9** (1994) 3841
- [54] J.D. Kim, “Boundary K-matrix for the quantum Mikhailov-Shabat model,” [arXiv:hep-th/9412192](https://arxiv.org/abs/hep-th/9412192)
- [55] T. Inami, S. Odake e Y.-Z. Zhang, “Reflection K-matrices of the 19-vertex model and XXZ spin-1 chain with general boundary terms,” *Nucl. Phys. B* **470** (1996) 419
- [56] H. Fan, B. Hou, G. Li, K. Shi e R. Yue, “The general solutions to the reflection equation of the Izergin-Korepin model,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 6021

- [57] A. Lima-Santos, “Reflection K -matrices for 19-vertex models,” *Nucl. Phys. B* **558** (1999) 637
- [58] G.-L. Li, K.-J. Shi, R.-H. Yue, “The algebraic Bethe ansatz for the Izergin-Korepin model with open boundary conditions,” *Nucl. Phys. B* **670** (2003) 401
- [59] L. Mezincescu e R.I. Nepomechie, “Analytical Bethe Ansatz for quantum-algebra-invariant spin chains,” *Nucl. Phys. B* **372** (1992) 597
- [60] C.M. Yung e M.T. Batchelor, “Integrable vertex and loop models on the square lattice with open boundaries via reflection matrices,” *Nucl. Phys. B* **435** (1995) 430
- [61] K. Hao, J. Cao, G.-L. Li, W.-L. Yang, K. Shi e Y. Wang, “Exact solution of the Izergin-Korepin model with general non-diagonal boundary terms,” [arXiv:1403.7915](https://arxiv.org/abs/1403.7915)
- [62] L. Mezincescu e R.I. Nepomechie, “Integrable open spin chains with non-symmetric R-matrices,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991) L17
- [63] R.A. Pimenta e M.J. Martins, “The Yang-Baxter equation for \mathcal{PT} invariant 19-vertex models,” *J. Phys. A: Math. and Theo.* **44** (2011) 085205
- [64] N. Kitanine, K.K. Kozłowski, J.M. Maillet, G. Niccoli, N.A. Slavnov e V. Terras, “Correlation functions of the open XXZ chain I,” *J. Stat. Mech.* (2007) P10009;
N. Kitanine, K.K. Kozłowski, J.M. Maillet, G. Niccoli, N.A. Slavnov e V. Terras, “Correlation functions of the open XXZ chain II,” *J. Stat. Mech.* (2008) P07010;
- [65] H.M. Babujian e R. Flume, “Off-Shell Bethe Ansatz Equation for Gaudin Magnets and Solutions of Knizhnik-Zamolodchikov Equations,” *Mod. Phys. Lett. A* **9** (1994) 2029
- [66] K. Hikami, “Gaudin magnet with boundary and generalized Knizhnik-Zamolodchikov equation,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (1995) 4997
- [67] A. Lima-Santos e W. Utiel, “Gaudin magnet with impurity and its generalized Knizhnik-Zamolodchikov Equation,” *Int. J. Mod. Phys. B* **20** (2006) 2175

- [68] A. Lima-Santos, “ $osp(1|2)$ off-shell Bethe ansatz equation with boundary terms,” *J. Stat. Mech.* (2006) P12018
- [69] J. de Gier e F.H.L. Essler, “Bethe Ansatz Solution of the Asymmetric Exclusion Process with Open Boundaries,” *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 240601
- [70] A. Foerster e M. Karowski, “The supersymmetric t-J model with quantum group invariance,” *Nucl. Phys. B* **408** (1993) 512
- [71] A. González-Ruiz, “Integrable open-boundary conditions for the supersymmetric t-J model the quantum-group-invariant case,” *Nucl. Phys. B* **424** (1994) 468
- [72] W. Galleas, “Spectrum of the supersymmetric t-J model with non-diagonal open boundaries,” *Nucl. Phys. B* **777** (2007) 352